ANÉIS E MÓDULOS COM COMPARABILIDADE

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Alveri Alves Sant'Ana e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 19 de dezembro de 1995

Prof. Dr. Miguel A. A. Ferrero
Orientador

Prof. Dr. Antonio Paques
Co-Orientador

Ao Prof. Miguel, pela amizade que se criou durante esta jornada.
Alveri

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em CIÊNCIAS

Dedico este trabalho à D. Alvida,
que perdeu um fevereiro tentando
me ensinar matemática.

Aparentemente, valeu a pena!

Gostaria de agradecer às seguintes pessoas:

- Prof. Dr. Miguel Ferrero, meu orientador, por sua dedicação e estímulo com que sempre me atendeu.
- Prof. Dr. Antônio Paques, pelo incentivo e apoio que sempre me deu.
- Marília e Filipe, por compreenderem minha ausência em vários momentos, durante esta jornada.
- Aos colegas do DMPA-UFRGS, por terem assumido minha carga-horária durante minha ausência.
- "Neni", pela revisão do português.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dado um anel R, dizemos que um R-módulo à direita é distributivo, ou é um D-módulo à direita, se o seu reticulado de R-submódulos é distributivo. O próprio anel R é dito distributivo à direita, ou um D-anel por brevidade, se o for como R-módulo à direita. Em [St], Stephenson apresenta o primeiro trabalho importante sobre D-módulos. Após, Brungs mostrou que D-domínios à direita são localmente anéis de cadeia à direita, (ver [Br]). Vários outros trabalhos importantes se seguiram no estudo de D-módulos (ver [C]), anéis de cadeia (ver [BBT] e sua relação bibliográfica.) e D-anéis (ver [M], [MP], [FT_1], [FT_2] e [FT_3]).

Em [M], Mazurek estuda D-anéis contendo algum ideal completamente primo em $J(R)$ (condição (MP)), onde $J(R)$ denota o radical de Jacobson de R. Esta condição é sempre verdadeira em um anel de cadeia. Mazurek consegue estender vários resultados importantes conhecidos para anéis de cadeia ao contexto de D-anéis com (MP).

Aproveitando resultados de [St] e [M], Ferrero e Törner estudaram a estrutura dos ideais à direita de um D-anel à direita com (MP). Em particular, eles obtiveram uma caracterização para as cinturas de um D-anel primo com (MP) ([FT_2; Th. 3.11]). Em [FT_3], vários outros resultados importantes para D-anéis com (MP) são obtidos, bem como se estuda condições ascendente de cadeia sobre cinturas para um D-anel à direita com (MP). Em particular, se obtém uma versão de [Br; Th. 2] para este contexto.

Dado um R-módulo M sobre um anel com (MP), dizemos que M tem a comparabilidade (à direita) em relação a um certo ideal completamente primo P contido em $J(R)$ se, para todos $x, y \in M$, temos $xR \subseteq yR$ ou $yR \subseteq xR$ ou $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$ e $(xR)S^{-1} = \{m \in M : \exists s \in S \text{ com } ms \in xR\}$. Se M possui a comparabilidade em relação a todo ideal completamente primo contido em $J(R)$, então dizemos que M é um R-módulo à direita com comparabilidade. Estes conceitos têm sua versão natural para um anel R, bastando para tal considerar R como um R-módulo à direita.

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar o reticulado de ideais à direita (resp. submódulos à direita) de um anel com comparabilidade (resp. módulo à direita com comparabilidade sobre um anel com (MP)).

Como conseqüência, conseguimos estender vários resultados de [M], [FT_2] e [FT_3], para o contexto de anéis e módulos com comparabilidade, usando argumentos mais simples que os destes trabalhos.

No primeiro capítulo estudamos cinturas em D-módulos, apresentando resultados gerais, alguns deles bem conhecidos. No §1, lembramos alguns resultados sobre anéis e módulos, os quais são fundamentais para a compreensão deste trabalho. No §2, apresentamos resultados genéricos sobre cinturas em módulos e anéis. No §3 estendemos os principais resultados de [FT_2] para D-módulos, com novos argumentos.

O segundo capítulo trata da parte mais importante do trabalho. No §1, são estudados propriedades básicas dos anéis com comparabilidade e são apresentados exemplos de tais anéis. Já no §2, estudamos ideais primos, semiprimos e completamente primos destes anéis. Em particular, mostramos que um ideal multiplicativo à direita semiprimo contido em $J(R)$ é um ideal à direita primo e é uma cintura, estendendo assim, [FT 3; Th. 2.1]. Além disso, um teorema de caracterização de cinturas para anéis primos com comparabilidade é obtido, o qual generaliza [FT 2; Th. 3.11]. No §3, generalizamos os principais resultados de [M] para este contexto. O §4 trata da noetherianidade de anéis com comparabilidade. Em particular, mostramos que um anel R com comparabilidade em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$ é noetheriano à direita se, e somente se, R/P é noetheriano à direita e toda cintura de R contida em P é finitamente gerada à direita (Teorema 4.3). Este resultado não era conhecido nem para D-anéis.

No terceiro capítulo abordamos módulos com comparabilidade. Nas duas primeiras secções, estendemos os resultados obtidos no capítulo anterior, para módulos com comparabilidade sobre anéis com comparabilidade. Apresentamos no §3 o principal resultado deste capítulo, o qual estabelece uma correspondência biunívoca entre as cinturas de um módulo primo com comparabilidade sobre um anel com comparabilidade e as cinturas do anel considerado. Em particular, se mostra que esta correspondência preserva primos, semiprimos e completamente primos.

No quarto capítulo apresentamos alguns resultados adicionais. O §1 trata dos anéis de cinturas principais à direita. No §2 discutimos sobre condições de cadeia para cinturas em anéis com comparabilidade, e no §3 fazemos uma breve discussão sobre localizações nestes anéis.

Uma citação do tipo II.3.4, significa o quarto resultado da secção três do capítulo II, enquanto que uma citação do tipo 3.4 significa o quarto resultado da secção 3 do capítulo que está sendo lido.

Observemos ainda que todos os anéis aqui apresentados têm unidade e todos os módulos são unitários. Os símbolos $\subset$ e $\supset$ denotarão inclusões estritas.

CAPÍTULO I - CINTURAS EM ANÉIS E D-MÓDULOS

Neste capítulo discutiremos sobre cinturas em um anel qualquer e em D-módulos. O presente estudo tem como finalidade motivar o assunto que será tratado no próximo capítulo, o qual é a parte principal deste trabalho. Além disso, vamos também estender resultados conhecidos para D-anéis ao contexto de D-módulos.

Reuniremos em uma primeira secção resultados bem conhecidos sobre anéis e módulos, mas que serão usados com grande freqüência durante todo o trabalho. Aproveitaremos também para fixar a notação básica.

§1 - PRÉ-REQUISITOS

Seja R um anel e consideremos M um R-módulo à direita. Se $L \subseteq M$ é tal que $LR \subseteq L$, então dizemos que L é um R-submódulo multiplicativo de M. Se, além disso, L é fechado para a soma, então L é um R-submódulo de M.

Um R-submódulo multiplicativo L de M é primo se para todo $m \in M$ e todo $t \in R$, tais que $mRt \subseteq L$, então $m \in L$ ou $Mt \subseteq L$. Um R-submódulo multiplicativo L é dito semiprimo se para todos $m \in M$ e $s \in R$ tais que $msRs \subseteq L$, temos $ms \in L$. Um ideal multiplicativo à direita P de R é primo (semiprimo) se P é um R-submódulo multiplicativo primo (semiprimo) de R, quando este é visto como um R-módulo à direita de modo natural. Equivalentemente, um ideal à direita P de R é primo se cada vez que $AB \subseteq P$, então $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$, para quaisquer ideais à direita A e B de R, (ver [D_1, Prop 1.8]).

Um R-submódulo multiplicativo K de M é dito completamente primo se, para cada $m \in M \setminus K$ e $a \in R$ com $ma \in K$, temos $Ma \subseteq K$. Vamos dizer que um ideal multiplicativo à direita P de R é completamente primo se P for um R-submódulo multiplicativo completamente primo do R-módulo à direita R. Se P é um ideal à direita de R tal que $ab \in P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$, para cada $a, b \in R$, dizemos que P é quase completamente primo. Fica evidente que se P é bilateral, então P é quase completamente primo se, e somente se, P é completamente primo.

Vamos convencionar que escreveremos I é um ideal de R, para dizer que

I é um ideal bilateral de R.

Denotaremos por $J(R)$, $rad(R)$ e $N_g(R)$, o radical de Jacobson de R, o radical primo de R e o nilradical generalizado de R, respectivamente, que são definidos por:

$J(R) = \bigcap\{P : P$ é ideal maximal à direita de $R\}$

$rad(R) = \bigcap\{P : P$ é ideal primo de $R\}$

$N_g(R) = \bigcap\{P : P$ é ideal completamente primo de $R\}$

Lembramos aqui, que o radical de Jacobson também pode ser caracterizado como o maior ideal P de R com a propriedade que $1 - x \in U(R)$, para todo $x \in P$, onde $U(R)$ denota o conjunto de todos os elementos inversíveis de R.

Dado um R-módulo à direita M, chamamos radical de Jacobson de M, o R-submódulo

$$J(M) = \bigcap\{N : N \text{ é um } R\text{-submódulo maximal de } M\}$$

Se M não possui R-submódulos maximais, então dizemos que $J(M) = M$.

Dizemos que um anel R possui a propriedade (MP), ou é um anel com (MP) por brevidade, se R contém um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Esta condição é fundamental nos trabalhos de [M], [FT$_1$],[FT$_2$] e [FT$_3$]. Em [FT$_2$; Lem. 2.5], mostra-se que se P é um ideal unilateral completamente primo contido no radical de Jacobson de um anel qualquer, então P é bilateral. Neste trabalho, estamos interessados basicamente em anéis com (MP) e os ideais completamente primos com os quais trabalhamos são aqueles que estão contidos no radical de Jacobson, logo, são bilaterais.

Estenderemos agora ao contexto de módulos os seguintes conceitos, (ver [BBT] e [FT$_2$]). Sejam M um R-módulo à direita e L um R-submódulo multiplicativo de M. Definimos o ideal multiplicativo completamente primo associado à direita de L, como sendo:

$$P_r(L) = \{a \in R : \exists y \notin L \text{ com } ya \in L\}$$

Ainda, se P é um ideal completamente primo de R, denotaremos por

$$LS^{-1} = \{m \in M : \exists s \in S \text{ com } ms \in L\}$$

onde $S = R \setminus P$

Observemos que $P_r(L)$ é um ideal multiplicativo à direita de R, e é quase completamente primo. De fato, é claro que $P_r(L)R \subseteq P_r(L)$ e dados $a, b \in R$ com $ab \in P_r(L)$, existe $y \notin L$ tal que $yab \in L$. Se $a \notin P_r(L)$, então $ya \notin L$ e conseqüentemente $b \in P_r(L)$.

Agora, para M, R, L e P quaisquer, não podemos afirmar que LS^{-1} seja nem mesmo um R-submódulo multiplicativo de M. Apresentaremos a seguir um resultado que dá uma condição suficiente para que ele seja um R-submódulo de M.

Lembremos que $S \subseteq R$ é dito um conjunto multiplicativamente fechado, se $xy \in S$ cada vez que $x, y \in S$. Um conjunto multiplicativamente fechado S de R é dito um sistema de Ore, se dados $s \in S$ e $a \in R$, existirem $t \in S$ e $b \in R$ tais que $at = sb$. Se além disso, S tem a propriedade que $sa = 0$, com $s \in S$ e $a \in R$, implica que existe $t \in S$ tal que $at = 0$, então dizemos que S é um conjunto de denominadores à direita, e neste caso a localização em S está definida, ou seja, existe o anel de quocientes à direita R_S. Também esta definida a localização em M, como sendo $M_S = M \otimes_R R_S$. Para maiores detalhes, ver [S] e [R]. Observamos que se P é um ideal completamente primo de R então $S = R \setminus P$ é multiplicativamente fechado.

PROPOSIÇÃO 1.1: *Sejam R um anel, P um ideal completamente primo de R e M um R-módulo à direita. Se $S = R \setminus P$ é um sistema de Ore, então para cada $m \in M$ temos que $(mR)S^{-1}$ é um R-submódulo de M.*

Prova: Sejam $x, y \in (mR)S^{-1}$, onde $m \in M$. Então existem $s, t \in S$ com $xs, yt \in mR$. Como S é um sistema de Ore, segue que existem $u, v \in S$ tais que $su = tv$. Assim, $(x - y)su = xsu - ysu = xsu - ytv \in mR$. Logo, $(x - y) \in (mR)S^{-1}$. Além disso, dado $r \in R$, existe $b \in R$ e $z \in S$ com $rz = sb$. Portanto, $xrz = xsb \in mR$, ou seja, $xr \in (mR)S^{-1}$ e a prova está completa. $\square$

Em particular, estaremos interessados em anéis R onde consideraremos ideais completamente primos P tais que $S = R \setminus P$ será sempre um sistema de Ore, como veremos adiante.

Dado um R-módulo à direita M e um R-submódulo L de M, definimos, para cada $m \in M$, o condutor (à direita) de m em L como sendo

$$(L : m)_r = (L : m) = \{a \in R : ma \in L\}$$

O anulador (à direita) de m em R é definido por $r_R(m) = r(m) = (0 : m)_r$. Analogamente, se M é um R-módulo à esquerda, podemos definir o condutor (à esquerda) de $m \in M$ em L como sendo

$$(L : m)_l = (L : m) = \{a \in R : am \in L\}$$

Neste caso, também podemos definir o anulador (à esquerda) de um elemento $m \in M$, como sendo $r_l(m) = r(m) = (O : m)_l$. Quando não houver perigo de ambigüidade de notação, despresaremos os índices "r" e "l" acima.

Dado um R-módulo à direita M, dizemos que $a \in R$ é um divisor de zero à direita de $m \in M$, se $ma = 0$. Notaremos por $N_r(M)$ o conjunto de todos os divisores de zero à direita de elementos de M. Assim temos $N_r(M) = \{a \in R : \exists m \in M \setminus \{0\} \text{ com } ma = 0\} = P_r(0)$, de onde segue que $N_r(M)$ é um ideal multiplicativo à direita quase completamente primo de R.

Por simetria, se M é um R-módulo à esquerda, podemos definir um divisor de zero à esquerda de $m \in M$, como sendo um elemento $a \in R$ tal que $am = 0$. Analogamente, notaremos por $N_l(M)$ o comjunto de todos os divisores de zero à esquerda de elementos de M.

Consideremos agora o R-módulo R. Assim temos que $a \in R$ é um divisor de zero à direita se existir $b \in R \setminus \{0\}$ tal que $ba = 0$, isto é, se $l(a) \neq 0$. O conjunto de todos os divisores de zero à direita de R será denotado por $N_r(R)$. Também temos que um divisor de zero à esquerda de R, é um elemento $a \in R$ para o qual existe $b \in R \setminus \{0\}$, tal que $ab = 0$, ou seja, tal que $r(a) \neq 0$. Denotaremos por $N_l(R)$ o conjunto de todos estes elementos.

Sejam M um R-módulo e L um R-submódulo de M. Dizemos que L é essencial se $L \cap N \neq 0$, para todo R-submódulo não nulo N de M. Definimos também o submódulo singular de M é por

$$Z_r(M) = \{m \in M : r(m) \text{ é essencial em } R\}$$

para maiores detalhes, ver [G; Pg 30-36].

Se notamos por $\mid I \mid$ a cardinalidade do conjunto I, então podemos definir a dimensão de Goldie de um R-módulo à direita M como sendo o supremo de todos os cardinais $\mid I \mid$, tal que M contém a soma direta de $\mid I \mid$ submódulos não nulos. Notaremos esta dimensão por $dimM_R = dimM$.

§2. CINTURAS EM ANÉIS E MÓDULOS

Consideremos um anel R e seja M um R-módulo à direita. Dizemos que um R-submódulo multiplicativo L de M é uma cintura multiplicativa se $L \subseteq N$ ou $N \subseteq L$, para todo R-submódulo multiplicativo N de M. Se L é um R-submódulo com a propriedade acima, em relação a todos os outros R-submódulos de M, então dizemos que L é uma cintura de M. Observamos então que uma cintura multiplicativa (resp. uma cintura) L de M pode ser caracterizada pela propriedade de que L é um R-submódulo multiplicativo (resp. R-submódulo) de M e $L \subset xR$, para todo $x \in M \setminus L$. Além disso, é evidente que toda cintura é um R-submódulo essencial. Ainda, é claro que toda cintura de M está contida em $J(M)$.

Naturalmente, estes conceitos se aplicam a ideais à direita de R, bastando para tal, olhar R como um R-módulo à direita sobre si mesmo.

Apresentaremos nesta secção alguns resultados sobre cinturas em módulos e anéis quaisquer. Vamos estender alguns resultados conhecidos para D-anéis ao nosso contexto geral e também daremos alguns resultados originais.

Dada uma família $\{L_i\}_{i\in I}$ de cinturas multiplicativas de M, temos que $N = \bigcup_{i\in I} L_i$ e $K = \bigcap_{i\in I} L_i$ são também cinturas de M. De fato, pois se $x \in M \setminus N$, então $x \notin L_i$, para todo $i \in I$. Assim, $L_i \subset xR$ para todo $i \in I$, ou seja, $N \subset xR$. Agora, se $y \in M \setminus K$, então existe algum $j \in I$ com $y \notin L_j$, isto é, $L_j \subset yR$, ou ainda, $K \subseteq L_j \subset xR$.

Consideremos agora um R-submódulo multiplicativo N de M e seja $L = \bigcap\{K \supseteq N : K$ é cintura multiplicativa de $M\}$ a menor cintura multiplicativa de M que contém N. Se não existe cintura não trivial que contém N, então $L = M$. Temos assim a seguinte.

PROPOSIÇÃO 2.1: *Sejam M um R-módulo à direita, N um R-submódulo multiplicativo de M e $L \neq M$ a menor cintura multiplicativa de M que contém N. Então $N = x(N : x)$, para qualquer $x \notin L$.*

Prova: Seja $x \notin L$. É claro que $x(N : x) \subseteq N$. Reciprocamente, seja $y \in N \subseteq L \subset xR$. Assim, temos que $y = xr$, para um certo $r \in (N : x)$. Portanto, $N = x(N : x)$, como queríamos mostrar. □

COROLÁRIO 2.2: *Sejam M um R-módulo à direita e $L \neq M$ uma* *cintura multiplicativa de M. Então, para qualquer $x \notin L$, $L = x(L : x)$.*

Da proposição anterior segue que podemos associar a cada R-submódulo multiplicativo N de M, que está contido em alguma cintura multiplicativa de M, a família $\{(N : x)\}_{x \notin L}$ de ideais multiplicativos à direita de R, onde L é a menor cintura multiplicativa de M que contém N. O próximo resultado diz o que acontece quando um destes elementos da família é uma cintura de R.

PROPOSIÇÃO 2.3: *Sejam M um R-módulo à direita, N um R-submódulo multiplicativo de M e $L \neq M$ a menor cintura multiplicativa de M que contém N. Se existir $x \notin L$, para o qual $(N : x)$ é uma cintura de R, então N é uma cintura multiplicativa de M, isto é, $N = L$.*

Prova: Seja $x \notin L$ tal que $(N : x)$ seja uma cintura multiplicativa de R. Consideremos agora $y \notin N$. Se $y \notin L$, então temos $N \subseteq L \subset yR$. Suponhamos que $y \in L \setminus N$. Pela proposição anterior, $L = x(L : x)$ e $N = x(N : x)$, de onde segue que $y = xt$, para algum $t \in (L : x) \setminus (N : x)$. Como $(N : x)$ é uma cintura multiplicativa, $(N : x) \subset tR$. Agora, dado $z \in N$, temos $z = xr$, onde $r \in (N : x)$. Assim, $r = tb$, para um certo $b \in R$. Daí temos $z = xr = xtb = yb \in yR$, o que implica que $N \subset yR$. O resultado agora segue. □

Uma questão natural que surge aqui é a seguinte: Sendo L uma cintura multiplicativa de M, será que $\{(L : x)\}_{x \notin L}$ é uma família de cinturas multiplicativas de R?

Se M é um R-módulo completamente primo e fiel, então esta questão tem resposta afirmativa. De fato, pois se L é uma cintura multiplicativa de M e se $x \notin L$, então, tomando-se $a \in (L : x)$ e $b \notin (L : x)$, tem-se $L \subset xbR$ e conseqüentemente, $xa = xbr$, para um certo $r \in R$. Assim, $x(a - br) = 0$, ou seja, $a - br \in r(x) = 0$, de onde segue que $a = br$. Portanto, $(L : x) \subseteq bR$, isto é, $(L : x)$ é uma cintura multiplicativa de R.

O mesmo raciocínio pode ser usado se podemos escolher, para um R-módulo M qualquer, um elemento $x \notin L$, para o qual $r(x) = 0$. Mais adiante voltaremos a examinar esta questão.

Apresentamos agora dois resultados que estendem o lema 2.3 de [FT$_2$] e seu corolário, para nosso contexto geral.

$\bigcup_{x\in L}(xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P_r(L)$. De fato, é claro que para todo $x \in L$, temos $x \in (xR)S^{-1}$. Agora, dado $y \in \bigcup_{x\in L}(xR)S^{-1}$, então existe $x \in L$ para o qual $y \in (xR)S^{-1}$, de onde segue que existe $s \notin P_r(L)$ com $ys \subseteq xR \subseteq L$, e conseqëntemente, $y \in L$.

Observemos ainda que se existirem $V \subseteq M$ e um ideal completamente primo P de R, tais que $L = \bigcup_{x\in V}(xR)S^{-1}$, onde $S = R\setminus P$, então $P_r(L) \subseteq P$. De fato, se $a \in P_r(L)$ então segue que existe $y \notin L$ com $ya \in L$. Assim, existe $x \in V$ para o qual $y \notin (xR)S^{-1}$ e $ya \in (xR)S^{-1}$. Segue daí que existe $s \in S = R \setminus P$ com $yas \in xR$. Se $a \notin P$ então $as \in S$ e conseqëntemente, $y \in (xR)S^{-1}$, o que dá uma contradição. Logo, só podemos ter $a \in P$, de onde vem que $P_r(L) \subseteq P$.

O próximo resultado fica evidente após esta discussão.

PROPOSIÇÃO 2.6: *Sejam M um R-módulo à direita e L um R-submódulo de M. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existem um ideal multiplicativo completamente primo P contido em $J(R)$ e um subconjunto V de M, tais que $L = \bigcup_{x\in V}(xR)S^{-1}$, onde $S = R\setminus P$.

(ii) $P_r(L) \subseteq J(R)$.

Vejamos agora mais um resultado sobre ideais completamente primos de um anel qualquer. Este resultado dá uma generalização de [St; Prop 2.1(ii)] e [M; Prop. 3.1 (i)].

PROPOSIÇÃO 2.7: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo de R. Então P é uma cintura de R se e somente se $P = xP$, para cada $x \notin P$.*

Prova: Suponhamos que $P = xP$, para todo $x \notin P$. Então dado $y \notin P$, temos $P = yP \subset yR$, de onde segue que P é cintura de R. Reciprocamente, suponhamos que P seja uma cintura de R. Então, pelo corolário 2.2, segue que $P = x(P : x)$, para todo $x \notin P$. Como P é um ideal completamente primo, segue que $(P : x) \subseteq P$. Agora, como P é ideal bilátero, segue que $xP \subseteq P$, para cada $x \in R$. Assim, temos $(P : x) = P$ e conseqüentemente, $P = xP$, para cada $x \notin P$, como queríamos mostrar. □

Segue daí que a escrita $P = xP$, para todo $x \notin P$, onde P é um ideal completamente primo de R, só pode valer quando $P \subseteq J(R)$, pois jamais poderemos ter alguma cintura não trivial fora de $J(R)$.

§3 - D-MÓDULOS E D-ANÉIS

Seja R um anel e M um R-módulo à direita. Dizemos que M é um módulo distributivo à direita sobre R ou, brevemente, um D-módulo à direita, se o reticulado de R-submódulos de M é distributivo. Isto é o mesmo que dizer que dados R-submódulos L, K e N de M, temos $L \cap (K + N) = (L \cap K) + (L \cap N)$ (ou equivalentemente, $L + (K \cap N) = (L + K) \cap (L + N)$). Dizemos que R é um D-anel à direita, se ele for um D-módulo à direita quando visto como um R-módulo à direita sobre si mesmo.

O primeiro trabalho importante no estudo dos D-módulos foi escrito por Stephenson [St]. Ele deu a seguinte caracterização de D-módulos a nível de elementos. Ver [St; Th. 1.6].

LEMA 3.1: *Seja M um R-módulo à direita. Então, M é um D-módulo à direita sobre R se e somente se $(xR : y) + (yR : x) = R$, para todos $x, y \in M$.*

Stephenson ainda mostrou que ideais completamente primos contidos em $J(R)$ são cinturas (ver [St; Prop 2.2(ii)]). Após isto, Mazurek estuda D-anéis com (MP). Agrupamos agora alguns resultados básicos de Mazurek [M].

LEMA 3.2: *Seja R um D-anel à direita e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Então:*

(i) Se $r \in R \setminus P$ então $P = rP$.

(ii) Para todos $a, b \in R$, temos $aR \subseteq bR$ ou $bP \subseteq aP$.

(iii) Se I é um ideal não nilpotente de R tal que $I \subseteq P$, então a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n$ é um ideal completamente primo de R.

(iv) $rad(R)$ é primo.

(v) Se $rad(R) = 0$ então $N_g(r) = N_r(R)$. Além disso, ou $N_g(R) = 0$ e R é um domínio ou $N_g(R) \neq 0$ é o único ideal minimal de R.

LEMA 3.3: *Seja R um D-anel à direita. Então:*

(i) Se R é primo, então $dim R_R = 1$.

(ii) São equivalentes: (a) $dim R_R = 1$.

(b) A família $\{r(x)\}_{x\in R}$ é linearmente ordenada.

(c) $N_r(R)$ é um ideal à direita de R.

Segue do lema 3.2(ii) que existe uma espécie de comparabilidade entre os elementos de um D-anel à direita com (MP), no sentido que dados $a, b \in R$, então $aR \subseteq bR$ ou $bR \subseteq aR$ ou $aP = bP$, para cada ideal completamente primo P contido em $J(R)$. Utilizando-se desta comparabilidade, Ferrero e Törner conseguiram caracterizar as cinturas em D-anéis primos com (MP), bem como estudar uma série de aspectos relacionados ao reticulado de ideais à direita destes anéis (ver [FT_2] e [FT_3]).

Vamos apresentar aqui uma extensão dos resultados de [FT_2] para o contexto de D-módulos sobre D-anéis com (MP), também trabalhando com uma comparabilidade análoga a esta, como mostra a seguinte

PROPOSIÇÃO 3.4: *Sejam M um D-módulo à direita e P um ideal completamente primo o qual é uma cintura de R. Se $x, y \in M$, então uma das alternativas ocorre: $xR \subseteq yR$ ou $yR \subseteq xR$ ou $xP = yP$.*

Prova: É suficiente mostrarmos que $xR \not\subseteq yR$ implica $yP \subseteq xP$. Agora, se $xR \not\subseteq yR$, temos $x \notin yR$ e como M é um D-módulo, segue de 3.1 que $(xR : y) + (yR : x) = R$. Logo, existem $r, s \in R$ tais que $r + s = 1$ com $yr \in xR$ e $xs \in yR$. Se $r \in J(R)$ então $s = 1 - r \in U(R)$, de onde vem que $x \in yR$, uma contradição. Logo, só podemos ter $r \notin J(R)$. Neste caso também temos $r \notin P$, ou seja, $rP = P$, por 2.7. Assim, $yP = yrP \subseteq xRP = xP$. Isto finaliza nossa prova. □

Como em um D-anel, todo ideal completamente primo contido em $J(R)$ é uma cintura de R, a proposição anterior permite obter todos os resultados apresentados nas três primeiras secções de [FT_2], repetindo-se praticamente todos os argumentos lá expostos. Nós vamos apresentar aqui estes resultados com algumas provas originais. Estes novos argumentos são mais simples que os de [FT_2]. Nos próximos capítulos estenderemos ainda mais estes resultados.

PROPOSIÇÃO 3.5: *Sejam M um D-módulo sobre um anel qualquer R e L um R-submódulo multiplicativo de M tal que $P_r(L) \subseteq J(R)$. Então:*

(i) L é uma cintura multiplicativa de M.

(ii) Se $R \setminus P_r(L)$ é um sistema de Ore, então para todo $m \in M$, $(mR)S^{-1}$ é uma cintura de M, onde $S = R \setminus P_r(L)$.

Prova : (i): Consideremos $x \in L$ e $y \notin L$. Como M é um D-módulo, temos $(xR : y) + (yR : x) = R$. Agora, como $y \notin L$, temos $(xR : y) \subseteq$

$P_r(L) \subseteq J(R)$, de onde segue que $(yR : x) = R$, ou seja, $x \in yR$. Portanto, L é uma cintura multiplicativa de M, como queríamos mostrar.

(ii): Suponhamos que $S = R \setminus P_r(L)$ seja um sistema de Ore. Consideremos $m \in M$. Assim, $(mR)S^{-1}$ é um ideal à direita de R. Sejam $x \in (mR)S^{-1}$ e $y \notin (mR)S^{-1}$. Como M é um D-módulo segue que $(xR : y) + (yR : x) = R$. Agora, se existir $s \in S \cap (xR : y)$, então $ys \in xR \subseteq (mR)S^{-1}$, de onde resulta que existe $t \in S$ com $yst \in mR$. Mas então $y \in (mR)S^{-1}$, pois $st \in S$. Isto produz uma contradição.

Conseqüentemente, $(xR : y) \subseteq P_r(L) \subseteq J(R)$. Assim sendo, temos $(yR : x) = R$, de onde segue que $x \in yR$. Portanto, $(mR)S^{-1}$ é uma cintura de M. □

Apresentamos agora um lema técnico, o qual estende [FT$_2$; Prop 2.10]. A prova é análoga, mas a apresentaremos aqui também.

LEMA 3.6: *Sejam M um D-módulo sobre um anel qualquer R e P um ideal completamente primo o qual é uma cintura de R. Dado $x \in M$, temos $P_r(xP) = P$, sempre que $xP \neq 0$.*

Prova: Como $x \notin xP$ segue que $P \subseteq P_r(xP)$. Suponhamos então que existe $a \in P_r(xP) \setminus P$. Então, existe $y \notin xP$ com $ya \in xP$. Assim, $yP = yaP \subseteq xP$.

Se $yR \subseteq xR$ então $y = xr$, para um certo $r \notin P$. Daí, $yP = xrP = xP$. Se $yR \nsubseteq xR$ então $xP \subseteq yP$, por 3.4. Mas então sempre temos $xP = yP$. Logo, $ya \in xP = yP$ e então existe $p \in P$, tal que $ya = yp$. Desta forma, $y(a - p) = 0$. Como $a \notin P$ segue que $P \subset aR$, ou seja, existe $q \in P$ com $p = aq$. Segue daí que $ya(1 - q) = 0$, isto é, $ya = 0$. Isto produz uma contradição, pois neste caso temos $0 \neq xP = yP = yaP = 0$. Portanto, um tal elemento a não existe e conseqüentemente, $P_r(xP) = P$, como queríamos mostrar. □

Estamos agora em condições de enunciar o principal resultado desta secção. Este é uma extensão de [FT$_2$; Th. 3.9].

TEOREMA 3.7: *Sejam M um D-módulo sobre um D-anel R com (MP) e L um R-submódulo não nulo de M. As seguintes condições são eqüivalentes:*

(i) $P_r(L) \subseteq J(R)$.

(ii) Existem um ideal completamente primo P *contido em* $J(R)$ *e um conjunto* $V \subseteq M$ *tais que* $L = \bigcap_{x \in V} xP$.

(iii) Existem um ideal completamente primo P *contido em* $J(R)$ *e um conjunto* $V' \subseteq M$ *tais que* $L = \bigcup_{x \in V'} (xR)S^{-1}$, *onde* $S = R \setminus P$.

Nestas condições eqüivalentes, L *é uma cintura de* M *e os conjuntos* $V = M \setminus L$ *e* $V' = L$ *satisfazem (ii) e (iii), respectivamente.*

Prova : (i)$\Rightarrow$ (ii): Suponhamos que $P_r(L) \subseteq J(R)$. Então segue de 3.5(i) que L é uma cintura de M e conseqüentemente, temos $L = \bigcap_{x \notin L} xP_r(L)$, por 2.5. Basta então tomar $P = P_r(L)$ e $V = M \setminus L$, para obtermos (ii).

(ii)$\Rightarrow$ (i): Suponhamos a existência de P e V como no enunciado de (ii). Seja $a \in P_r(L)$. Então existe $y \notin L$ tal que $ya \in L$. Desta forma, existe $x \in V$ tal que $y \notin xP$ e $ya \in xP$, ou seja, $a \in P_r(xP) = P$, por 3.6. Logo, $P_r(L) \subseteq P \subseteq J(R)$, como queríamos mostrar.

(i)$\Leftrightarrow$ (iii): Esta equivalência foi mostrada no lema 2.6 da secção anterior. A prova então está completa. $\square$

CAPÍTULO II - ANÉIS COM COMPARABILIDADE

Neste capítulo pretendemos estender resultados obtidos para anéis distributivos. Se observarmos os resultados já obtidos (ver[FT_2] e [FT_3]), verifica-se que estes anéis satisfazem uma propriedade que permite "comparar" seus elementos, e da qual se derivam muitos destes resultados. Usaremos aqui também uma comparação.

§1 - PRIMEIROS RESULTADOS

Começaremos apresentando nossa definição fundamental.

DEFINIÇÃO 1.1 : *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Dizemos que R possui a comparabilidade à direita em relação a P, se para todos $a, b \in R$, temos $aR \subseteq bR$ ou $bR \subseteq aR$ ou $(aR)S^{-1} = (bR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$.*

Como estamos sempre trabalhando com ideais à direita de R, vamos escrever simplesmente R possui a comparabilidade, em lugar de R possui a comparabilidade à direita, por simplicidade de notação.

O próximo lema e I.1.1, mostram que $(aR)S^{-1}$ é um ideal à direita.

LEMA 1.2: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se R tem a comparabilidade em relação a P, então $S = R \setminus P$ é um sistema de Ore. Em particular, para todo $a \in R$, $(aR)S^{-1}$ é um ideal à direita de R.*

Prova: Sejam $a \in R$ e $s \in S$. Temos que mostrar que existem $b \in R$ e $t \in S$, com $at = sb$. Se $aR \subseteq sR$, então $a = sr$, para algum $r \in R$. Basta então tomar $t = 1$ e $b = r$. Se $sR \subseteq aR$, então $s = ac$, algum $c \in R$. Assim, temos $a, c \notin P$, pois $s \in S = R \setminus P$. Logo, tomando-se $t = c$ e $b = 1$, obtem-se o resultado desejado. Finalmente, se $(aR)S^{-1} = (sR)S^{-1}$, então $a \in (sR)S^{-1}$ e segue que existe $t \in S$ e $b \in R$ tais que $at = sb$. O restante segue agora de I.1.1. □

Daremos agora algumas condições equivalentes à comparabilidade.

PROPOSIÇÃO 1.3: *Sejam R um anel, P um ideal completamente primo contido em $J(R)$ e $S = R \setminus P$. As seguintes condições são equivalentes* *para todos $a, b \in R$:*

(i) $aR \subseteq bR$ ou $bR \subseteq aR$ ou $(aR)S^{-1} = (bR)S^{-1}$.

(ii) $aR \subseteq bR$ ou $(bR)S^{-1} \subseteq (aR)S^{-1}$.

(iii) $aR \subseteq bR$ ou $bR \subseteq (aR)S^{-1}$.

(iv) $S = R \setminus P$ é um sistema de Ore e $aR \subseteq bR$ ou $b \in (aR)S^{-1}$

Prova: (i)$\Rightarrow$(iii): Sejam $a, b \in R$ tais que $aR \not\subseteq bR$. Então devemos ter $bR \subseteq aR \subseteq (aR)S^{-1}$ ou $bR \subseteq (bR)S^{-1} = (aR)S^{-1}$. Ou seja, sempre temos $bR \subseteq (aR)S^{-1}$, o que mostra (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i): Sejam $a, b \in R$ tais que $aR \not\subseteq bR$ e $bR \not\subseteq aR$. Então, temos $aR \subseteq (bR)S^{-1}$ e $bR \subseteq (aR)S^{-1}$. Assim, dado $c \in (aR)S^{-1}$, segue que existe $s \in S$ com $cs = ar$, para um certo $r \in R$. Logo, existe $t \in S$ com $cst \in bR$, ou seja, $(aR)S^{-1} \subseteq (bR)S^{-1}$. Analogamente se mostra que $(bR)S^{-1} \subseteq (aR)S^{-1}$. Logo, temos a igualdade desejada.

(i) e (iii)$\Rightarrow$(iv): É imediato.

(iv)$\Rightarrow$(ii): Sejam $a, b \in R$ com $aR \not\subseteq bR$. Então devemos ter $b \in (aR)S^{-1}$. Sendo assim, existe $s \in S$ com $bs = aR$. Agora, dado $x \in (bR)S^{-1}$, segue que existe $t \in S$ e $r \in R$ com $xt = br$. Como S é um sistema de Ore, também existem $u \in S$ e $c \in R$ com $ru = sc$. Logo, temos $xtu = bru = bsc \in aR$, isto é, $x \in (aR)S^{-1}$ e conseqüentemente, $(bR)S^{-1} \subseteq (aR)S^{-1}$.

(ii)$\Rightarrow$(i): É imediato. □

Vejamos agora algumas propriedades destes anéis.

PROPOSIÇÃO 1.4: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se R tem a comparabilidade em relação a P, então P é uma cintura de R.*

Prova: Sejam $x \in P$ e $y \notin P$. Suponhamos que $y \in (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$. Então existe $s \in S$ tal que $ys \in xR \subseteq P$, um absurdo. Logo, pela proposição 1.3(iv), segue que $xR \subseteq yR$. O resultado agora segue. □

Observamos agora que se R possui a comparabilidade em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$, então segue de I.2.7 que $xP = P$, sempre que $x \notin P$. Feito esta observação, podemos dar nosso próximo resultado.

LEMA 1.5: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se R tem a comparabilidade em relação a P, então $xP = yP$ se e somente se $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$, para quaisquer $x, y \in R \setminus \{0\}$, onde $S = R \setminus P$*

Prova: Suponhamos que $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$. Como $y \in (xR)S^{-1}$ segue que existem $s \in S$ e $r \in R$ com $ys = xr$. Assim, temos $yP = ysP = xrP \subseteq xP$. De modo análogo, temos $xP \subseteq yP$. Portanto, $xP = yP$.

Sejam agora $x, y \in R \setminus \{0\}$ tais que $xP = yP$. Se $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$ então não há o que provar. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $xR \subseteq yR$. Neste caso, temos $(xR)S^{-1} \subseteq (yR)S^{-1}$, como é fácil ver. Se ocorrer $(xR)S^{-1} \subset (yR)S^{-1}$, então teremos $x = yr$, para um certo $r \in P$, pois do contrário, $r \in S$, e teríamos $y \in (xR)S^{-1}$. Mas então, $xP = yrP \subset yP$ (se $yrP = yP$ então $yr = 0$, o que dá $x = 0$, uma contradição). Mas $xP \subset yP$ produz outra contradição. Logo, temos $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$. □

Observamos que na primeira implicação não necessitamos supor $x, y \in R \setminus \{0\}$.

Chamamos a atenção para o fato de que se R é um anel para o qual vale que $aR \subseteq bR$ ou $bR \subseteq aR$ ou $aP = bP$, para $a, b \in R$ e um ideal completamente primo P contido em $J(R)$, não podemos afirmar que R seja um anel com comparabilidade em relação a P. De fato, pois poderia ocorrer $(aR : b) = P$ e $(bR : a) = P$, com $aR \not\subseteq bR$ e $bR \not\subseteq aR$. Este é o caso, por exemplo, se tomamos um anel R com $dim R_R > 1$ contendo elementos a e b com $aR \cap bR = 0$, e tais que $aP = 0 = bP$. Não sabemos até o momento se um tal anel existe.

Observamos que em [FT$_2$; Lem. 3.4] é afirmado que a equivalência do Lema 1.5 acima é verdadeira para todos os elementos $x, y \in R$, quando R é um D-anel, mas a prova possui um pequeno erro, e o resultado só vale mesmo para elementos não nulos. Por exemplo, se tomamos $R = \mathbf{Z}$, o anel dos inteiros, o qual é distributivo, temos $J(\mathbf{Z}) = 0$ o qual é primo. Agora, dado $x \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, temos $x(0) = (0) = 0(0)$, $(x\mathbf{Z})S^{-1} = \mathbf{Z}$ e $(0)S^{-1} = 0$, onde neste caso, $S = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Este exemplo é bastante simples, mas mostra a necessidade de exigirmos que x, y sejam elementos não nulos de R.

Cabe aqui observar que, embora exista um problema na prova do Lema 3.4 de [FT$_2$], o conteúdo do trabalho fica preservado, pois este lema é apenas auxiliar e foi utilizado para mostrar que $(aR)S^{-1}$ é uma cintura de R, para cada $a \in R$, onde $S = R \setminus P$. Isto pode ser mostrado diretamente, como faremos no próximo resultado o qual dá outra caracterização desta nova classe de anéis.

PROPOSIÇÃO 1.6: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Então R possui à comparabilidade em relação a P se, e somente se, $(aR)S^{-1}$ é uma cintura de R, para todo $a \in R$, onde $S = R \setminus P$.*

Prova: Suponhamos que R possui a comparabilidade em relação à P. Queremos mostrar que $(aR)S^{-1}$ é uma cintura de R, para todo $a \in R$. Sejam então $a, x, y \in R$ tais que $x \in (aR)S^{-1}$ e $y \notin (aR)S^{-1}$. Assim, temos $yR \not\subseteq xR$ e se $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$, existe $s \in S$ tal que $ys \in xR \subseteq (aR)S^{-1}$, de onde vem que existe $t \in S$ com $yst \in aR$. Mas então $y \in (aR)S^{-1}$, o que dá uma contradição. Logo, $xR \subseteq yR$ e segue que $(aR)S^{-1}$ é uma cintura de R.

Reciprocamente, suponhamos que para todo $a \in R$, temos que $(aR)S^{-1}$ é uma cintura de R, onde $S = R \setminus P$. Consideremos $x, y \in R$ tais que $xR \not\subseteq yR$ e $yR \not\subseteq xR$. Como $(xR)S^{-1}$ e $(yR)S^{-1}$ são cinturas por hipótese, podemos, sem perda de generalidade, supor que $(xR)S^{-1} \subseteq (yR)S^{-1}$. Se ocorrer $(xR)S^{-1} \subset (yR)S^{-1}$ então deveremos ter $x, y \in (xR)S^{-1}$ (Se $y \notin (xR)S^{-1}$, então $xR \subseteq (xR)S^{-1} \subset yR$, uma contradição). Agora, se $b \in (yR)S^{-1} \setminus (xR)S^{-1}$, então deve existir $s \in S$ com $bs \in yR \subseteq (xR)S^{-1}$, ou seja, existe também $t \in S$ com $bst \in xR$, de onde segue que $b \in (xR)S^{-1}$, pois $st \in S$. Logo, tal b não pode existir e segue que $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$, como queríamos mostrar. □

Apresentaremos agora alguns exemplos destes anéis:

EXEMPLO 1.7: Seja R um D-anel à direita com (MP). Então R é um anel com comparabilidade em relação a todo ideal completamente primo contido no radical de Jacobson. De fato, pois o Lema 3.3 de [FT_2] mostra que, para todos $a, b \in R$ e todo ideal completamente primo P contido em $J(R)$, temos $aR \subseteq bR$ ou $(bR)S^{-1} \subseteq (aR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$. A Proposição 1.3(ii) agora dá o resultado desejado. Para ver alguns exemplos, olhar [M], [FT_2] e [FT_3].

O seguinte exemplo é inspirado em [FT$_3$; Ex. 4.1].

EXEMPLO 1.8: Sejam A um domínio qualquer tal que $J(A) = 0$, σ um automorfismo de A e F o seu "skew" corpo de frações. Por simplicidade de notação, denotemos também por σ a extenção de $\sigma : A \to A$ a um automorfismo de F. Seja também $F[[X;\sigma]]$ o "skew" anel de séries formais definido por $Xa = \sigma(a)X$, para todo $a \in F$.

Consideremos agora o anel $R = A \bigoplus F[[X;\sigma]]X$. Em [FT$_3$; Ex. 4.1], se mostra que todo ideal à direita I de R é da forma $I = I_0X^n + F[[X;\sigma]]X^{n+1}$, onde $n \in I\!N$ é o grau minimal dos elementos de I, $I_0 = \{a \in F / aX^n \in I\}$ é um A-submódulo à direita de F e que $J(R) = J(A) \bigoplus F[[X;\sigma]]X$. Embora em [FT$_3$] os autores trabalham com um D-domínio A, estes cálculos são gerais, isto é, não se utiliza nenhuma propriedade específica de D-anéis.

Em nosso exemplo, então temos $J(R) = F[[X;\sigma]]X$ e é fácil ver que este ideal é completamente primo de R e que é o único tal ideal em $J(R)$. Chamaremos $P = F[[X;\sigma]]X = J(R)$.

Consideremos agora $f = f_0 + \sum_{i=0}^{\infty} f_iX^i \in R \setminus P$, onde $f_0 \in A$, $f_i \in F$, $i \geq 1$. Então $f_0 \neq 0$ e conseqüentemente $P = F[[X;\sigma]]X \subseteq f_0A + F[[X;\sigma]]X = fR$, pelo dito acima. Segue daí que P é uma cintura de R. Além disso, dado $h \in R$, digamos $h = \sum_{i=0}^{\infty} h_iX^i$, se $h_0 = 0$, entao $h \in fR$ de maneira clara. Se $h_0 \neq 0$ então h^{-1} existe em $F[[X;\sigma]]$ e tomando-se $s = h^{-1}fa$, onde a é o denominador do produto $h_0^{-1}f_0$, então $s \in R \setminus P$ e temos $hs = hh^{-1}fa = fa \in fR$. Logo, $h \in (fR)S^{-1}$ e conseqüentemente, $(fR)S^{-1} = R$, para todo $f \notin P$.

Tomemos agora $f \in P$. Então temos $f = (\sum_{i=0}^{\infty} f_iX^i)X^n$, com $f_0 \neq 0$. Se $g \in (fR)S^{-1}$, $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_iX^i$, então existe $s = \sum_{i=0}^{\infty} s_iX^i \in S$ tal que $gs \in fR$. Assim, $s_0 \neq 0$ e devemos ter então $g_0 = \ldots = g_{n-1} = 0$, isto é, $g = (\sum_{i=0}^{\infty} g_i'X^i)X^n \in F[[X;\sigma]]X^n$. Logo, $(fR)S^{-1} \subseteq F[[X;\sigma]]X^n$.

Seja agora $h = (\sum_{i=0}^{\infty} h_iX^i)X^t$, com $h_0 \neq 0$ e $t \geq n$. Vamos denotar por $h' = \sum_{i=0}^{\infty} h_iX^i$ e $f' = \sum_{i=o}^{\infty} f_iX^i$. Então, $h'^{-1} \in F[[X;\sigma]]$ e, definindo-se $s = \sigma^{-t}(h'^{-1}f'b)$, onde b é o denominador do produto $h_0^{-1}f_0$, temos $s \notin P$ e $hs = h'X^t\sigma^{-t}(h'^{-1}f'b) = h'h'^{-1}f'X^t\sigma^{-t}(b) = fX^{t-n}\sigma^{-t}(b) \in fR$. Logo, $F[[X;\sigma]]X^n \subseteq (fR)S^{-1}$ e portanto temos $(fR)S^{-1} = F[[X;\sigma]]X^n$, o qual é uma cintura de R, como é fácil ver.

Então temos que $(fR)S^{-1}$ é uma cintura de R, para todo $f \in R$. Segue então da Proposição 1.6 que R é um anel com a comparabilidade em relação a $P = F[[X;\sigma]]X$.

Agora, se começarmos nosso exemplo com A um domínio não distributivo, então certamente R não será distributivo, uma vez que todo ideal à direita que não está contido em P é da forma $I = (I \cap A) + F[[X;\sigma]]X$.

O próximo exemplo generaliza o anterior e estende o exemplo dado em [FT$_3$; Prop. 4.2].

EXEMPLO 1.9: Sejam A um domínio qualquer, F o seu "skew" corpo de frações. Se $R_0 = F \bigoplus J(R_0)$ é um anel de cadeia à direita, então $R = A \bigoplus J(R_0)$ é um anel com comparabilidade em relação a $P = J(R_0)$.

Observamos inicialmente que $P = J(R_0)$ é um ideal completamente primo de R, pois $R/P \simeq A$, o qual é um domínio. Afirmamos agora que todo elemento $x = 1 + j \in R$, com $j \in J(R_0)$, é inversível em R. De fato, pois existe $y = f + k \in R_0$, onde $f \in F$ e $k \in J(R_0)$, com $xy = 1$. Mas então $f = 1$ e $y \in R$. Assim, temos $J(R_0) \subseteq J(R)$. conseqüentemente, P é um ideal completamente primo contido em $J(R)$.

Consideremos agora um ideal à direita maximal M de R. Se denotamos por $M_0 = M \cap A$, então não é difícil de ver que $M = M_0 + J(R_0)$, onde M_0 é um ideal à direita maximal de A. Reciprocamente, se tomamos um ideal à direita maximal N_0 de A, e definimos $N = N_0 + J(R_0)$, temos que N é um ideal à direita maximal de R. Assim, $J(R) = J(A) + J(R_0)$.

Observemos agora que P é uma cintura de R. De fato, dado $x \in R \setminus P$, temos $J(R_0) \subseteq xR_0$. Assim, dado $j \in J(R_0)$, existe $r_0 \in R_0$ com $j = xr_0$. Se $r_0 \in R_0 \setminus J(R_0)$, então r_0 é inversível em R_0 e assim, $x = jr_0^{-1} \in J(R_0)$, uma contradição. Logo temos $r_0 \in R$ e conseqüentemente $P \subset xR$.

Seja $x \in R \setminus P$. Temos que $x = a + j_x$, para certos $a \in A$ e $j_x \in J(R_0)$, com $a \neq 0$. Assim, dado $r \in R$, digamos $r = c + j_r$, onde $c \in A$ e $j_r \in J(R_0)$, se $c = 0$, então $r \in P \subseteq xR$. Se $c \neq 0$ então existe $r^{-1} \in R_0$, pois $c^{-1} \in F$ e assim $rc^{-1} = 1 + k$, onde $k \in J(R_0)$, ou seja, $rc^{-1} \in U(R)$. Agora, tomando $x = c^{-1}(1+k)^{-1}$, temos $x \in R_0$ e claramente $rx = 1$. Desta forma, definindo $s = r^{-1}xd$, onde d é o denominador do produto $c^{-1}a$, segue que $s \in S = R \setminus P$ e temos $rs = r(r^{-1}xd) = xd \in xR$, ou seja, sempre temos $r \in (xR)S^{-1}$, o que implica que neste caso temos $(xR)S^{-1} = R$.

Pelo feito acima podemos concluir que $S = R \setminus P$ é um sistema de Ore. De fato, pois dados $r \in R$ e $s \in S$, devemos ter $r \in (sR)S^{-1}$, isto é, existem $t \in S$ e $b \in R$ tais que $rt = sb$.

Consideremos agora $x, y \in P$. Como R_0 é um anel de cadeia à direita, temos $xR_0 \subseteq yR_0$ ou $yR_0 \subseteq xR_0$. Então podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $r_0 \in R_0$ tal que $y = xr_0$. Seja $r_0 = f + j$, com $f \in F$ e $j \in J(R_0)$, onde $f = ab^{-1}$, para certos $a, b \in A$, $b \neq 0$. Se $a = 0$ então $r_0 \in J(R_0) \subseteq R$ e segue que $yR \subseteq xR$. Se $a \neq 0$, então tomando $t = r_0 b = (ab^{-1} + j)b = a + jb \in S = R \setminus P$, temos $xt = xr_0 b = yb \in yR$, ou seja, $x \in (yR)S^{-1}$.

Segue agora da Proposição 1.3(iv) que R é um anel com comparabilidade em relação a P, como queríamos mostrar.

Se consideramos no início, um domínio A não distributivo, então não é difícil ver que $R = A \bigoplus J(R_0)$ também não é distributivo.

Estudaremos agora mais algumas propriedades destes anéis. Começaremos com a seguinte.

PROPOSIÇÃO 1.10: *Seja R um anel com comparabilidade em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$. Se I é um ideal contido em P, então R/I é um anel com comparabilidade em relação a P/I.*

Prova: Seja $\bar{R} = R/I$ e $\bar{P} = P/I$. É claro que $\bar{P}$ é um ideal completamente primo de $\bar{R}$ contido em $J(\bar{R})$. Agora, dados $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{R}$, se $\bar{a}R \not\subseteq \bar{b}R$, então $aR \not\subseteq bR$ de onde segue que $(bR)S^{-1} \subseteq (aR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$.

Seja $\bar{x} \in (\bar{b}\bar{R})\bar{S}^{-1}$, onde $\bar{S} = \bar{R} \setminus \bar{P}$. Então existe $\bar{s} \in \bar{S}$ com $\bar{x}\bar{s} \in \bar{b}\bar{R}$, de onde vem que existe $a \in I$ com $xs + a \in bR$. Do fato que $bR \subseteq (aR)S^{-1}$, segue que existe $t \in S = R \setminus P$ com $(xs + a)t = xst + at \in aR$. Logo, $\bar{x}\bar{s}\bar{t} \in \bar{a}\bar{R}$, onde $\bar{s}\bar{t} \in \bar{S}$. Portanto, temos $(\bar{b}\bar{R})\bar{S}^{-1} \subseteq (\bar{a}\bar{R})\bar{S}^{-1}$. Isto completa a prova. □

O próximo resultado mostra que se R tem a comparabilidade em relação a um certo ideal completamente primo P contido em $J(R)$, então R possui a comparabilidade em relação a todo ideal completamente primo contido em P.

PROPOSIÇÃO 1.11: *Sejam R um anel e P um ideal completamente* *primo contido em $J(R)$. Então, R possui a comparabilidade em relação a P se, e somente se, R possui a comparabilidade em relação a todo ideal completamente primo $P' \subseteq P$.*

Prova: Dado um ideal completamente primo P' contido em P, temos que mostrar que vale a comparabilidade em relação a P'. Sejam então $x, y \in R$, com $xR \not\subseteq yR$. Então temos $yR \subseteq (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$. Assim, para cada $r \in R$, existe $s \in S$ com $yrs \in xR$. Mas então $s \in S' = R \setminus P'$ e daí temos $yR \subseteq (xR)S'^{-1}$. Segue então da proposição 1.3(iii) que R possui a comparabilidade em relação a P'. A recíproca é evidente. □

Como conseqüência das proposições 1.4, 1.11 anteriores e de I.2.7, temos os seguintes corolários evidentes.

COROLÁRIO 1.12: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se R tem a comparabilidade em relação a P, então $xP' = P'$, para todo ideal P' completamente primo contido em P e $x \notin P'$.*

COROLÁRIO 1.13: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se R tem a comparabilidade em relação a P, então $N_g(R)$ é um ideal completamente primo de R. Em particular, $N_g(R)$ é uma cintura de R.*

Os resultados apresentados até agora sugerem uma nova definição.

DEFINIÇÃO 1.14: *Seja R um anel com (MP). Dizemos que R é um anel com comparabilidade (à direita) se, para todo ideal completamente primo $P \subseteq J(R)$, R tem a comparabilidade (à direita) em relação a P.*

Pelo que foi discutido anteriormente, fica claro que todo anel com comparabilidade possui um ideal completamente primo Q contido em $J(R)$, o qual é o maior tal ideal. Podemos então caracterizar os anéis com comparabilidade da seguinte maneira:

PROPOSIÇÃO 1.15: *Seja R um anel com (MP). Então, R é um anel com comparabilidade se, e somente se, R possui um único ideal completamente primo Q máximo na família*

$$\{P \subseteq J(R) : P \text{ é um ideal completamente primo de } R\}$$

e vale a comparabilidade em relação a Q.

Prova: Se R é um anel com comparabilidade, entao todos os ideais completamente primos contidos em $J(R)$ são cinturas de R. Então basta tomar Q como sendo a união de todos estes ideais. É claro que assim, Q será também completamente primo. A recíproca segue diretamente da proposição 1.11. □

§2 - IDEAIS PRIMOS E CINTURAS EM ANÉIS COM COMPARABILIDADE

Durante toda esta secção vamos considerar um anel com comparabilidade R. Vimos na secção anterior que neste caso existe um único maior ideal completamente primo contido em $J(R)$. Denotaremos este ideal por Q. Nosso objetivo é estudar os ideais primos e semiprimos contidos em Q. Como conseqüência disso, caracterizamos as cinturas contendo $rad(R)$ em um tal anel. Começaremos apresentando a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.1: *Seja R um anel com comparabilidade. Seja L um ideal multiplicativo à direita semiprimo de R, tal que $L \subseteq Q$. Então L é um ideal à direita de R o qual é uma cintura.*

Prova: Inicialmente vamos mostrar que L é um ideal à direita. Para tal, consideremos $a, b \in L$. Se $aR \subseteq bR$ é fácil ver que $a + b \in L$. Suponhamos então que $b \in (aR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus Q$. Assim, existem $s \notin Q$ e $r \in R$ com $bs = ar$. Desta forma temos $(a + b)Q = (a + b)sQ = a(s + r)Q \subseteq L$ e conseqüentemente, $(a + b)R(a + b) \subseteq (a + b)Q \subseteq L$, de onde segue que $a + b \in L$, pois L é semiprimo. Portanto, L é um ideal à direita de R.

Consideremos agora $x \in L$ e $y \notin L$. Se $y \in (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus Q$, então existem $s \notin Q$ e $r \in R$ com $ys = xr \in Q$, pois $x \in L \subseteq Q$. Mas então $y \in Q$, já que $s \notin Q$. Logo, $yRy \subseteq yQ = ysQ = xrQ \subseteq L$ e portanto temos $y \in L$, o que produz uma contradição. Então só podemos ter $xR \subseteq yR$. Como $x \in L$ foi tomado arbitrário, segue que L é uma cintura de R. □

Esta proposição tem a seguinte conseqüência interessante:

COROLÁRIO 2.2: *Seja R um anel com comparabilidade. Então:*

(i) Se $L \subseteq Q$ é um ideal multiplicativo à direita primo de R, então L é uma cintura de R;

(ii) $rad(R)$ é um ideal primo. Em particular, $rad(R)$ é uma cintura de

R.

Prova: **(i):** Segue do fato que todo primo é semiprimo e da proposição anterior.

(ii): Basta observar que $rad(R) = \bigcap\{P : P \text{ é ideal primo de } R\}$. Como os ideais primos contidos em Q estão linearmente ordenados por inclusão, o resultado segue. □

Observamos agora que se R é um anel com comparabilidade em relação a um certo ideal completamente primo P contido em $J(R)$, então é claro que os resultados acima permanecem válidos para um ideal multiplicativo à direita L de R, com $L \subseteq P$. Assim, neste caso também temos que $rad(R)$ é um ideal primo e uma cintura.

Vamos provar agora que Q é a maior cintura de R. O resultado é conseqüência do seguinte:

LEMA 2.3: *Sejam R um anel com comparabilidade e I uma cintura de R com $rad(R) \subseteq I$. Então $P_r(I) \subseteq J(R)$.*

Prova: Suponhamos por absurdo que $P_r(I) \not\subseteq J(R)$. Então existem $a \in P_r(I) \setminus J(R)$ e $b \notin I$ com $ba \in I$. Assim, $(I : b) \not\subseteq J(R)$ e conseqüentemente existe um ideal maximal à direita M de R com $(I : b) \not\subseteq M$. Como I é cintura de R, devemos ter $I \subseteq bM$, pois do contrário teremos $M \subset (I : b)$, de onde vem que $(I : b) = R$, ou seja, $b \in I$. Logo, $b(I : b) = I \subseteq bM$, de onde segue que para todo $a \in (I : b)$, existe $c_a \in M$ com $ba = bc_a$, ou ainda, $b(a - c_a) = 0$. Assim, se R é um domínio, segue que $a = c_a$ e conseqüentemente, $(I : b) \subseteq M$, o que dá uma contradição. Logo, R não pode ser um domínio neste caso.

Observamos agora que deve existir $a \in (I : b)$ para o qual $a - c_a \notin Q$, pois do contrário teremos $(I : b) \subseteq Q + M = M$. Para um tal elemento a, temos $Q \subset (a - c_a)R$, de modo que $bQ = 0 \subseteq rad(R)$. Agora, como $rad(R)$ é primo, segue que $b \in rad(R)$ ou $Q = rad(R)$. Mas $b \notin I \supseteq rad(R)$ e se $Q = rad(R)$ então $Q = bQ = 0$, ou seja, R é um domínio. Estas duas contradições mostram que $P_r(I) \subseteq J(R)$. □

COROLÁRIO 2.4: *Seja R um anel com comparabilidade. Então Q é a maior cintura de R.*

Prova: Seja I uma cintura de R. Se $I \subseteq rad(R)$ então é claro que $I \subseteq Q$. Se $rad(R) \subseteq I$ então temos, pelo lema acima, que $I \subseteq P_r(I) \subseteq Q$, uma vez que Q é o maior ideal completamente primo contido em $J(R)$. □

Daremos agora um lema técnico:

LEMA 2.5: *Sejam R um anel com comparabilidade e $L \subseteq Q$ um ideal à direita semiprimo de R. Então $P_r(L) \subseteq Q$.*

Prova: Suponhamos por absurdo que $P_r(L) \not\subseteq Q$. Então existe $a \in P_r(L) \setminus Q$. Assim, existe $b \notin L$ com $ba \in L \subseteq Q$. Mas então $b \in Q$ e assim, $bRb \subseteq bQ = baQ \subseteq L$, de onde segue que $b \in L$, o que dá uma contradição. Isto finaliza a prova do lema. □

Este lema tem a seguinte conseqüência importante:

COROLÁRIO 2.6: *Sejam R um anel com comparabilidade e L um ideal à direita semiprimo de R com $L \subseteq Q$. Então L é primo.*

Prova: Sejam $a, b \in R$ tais que $aRb \subseteq L$. Suponhamos que $a \notin L$ e vamos mostrar que $b \in L$. De fato, pois se $a \in (bR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus Q$, existe $s \in S$ e $r \in R$ tais que $as = br$. Assim, temos $asRb \subseteq aRb \subseteq L$, de onde segue que $asRas = asRbr \subseteq L$ e conseqüentemente, $as \in L$. Logo, temos que $s \in P_r(L) \setminus Q$, o que contraria o lema anterior. Portanto, só podemos ter $b \in aR$ e, neste caso, existe $t \in R$ com $b = at$. Assim, temos $atRat = atRb \subseteq aRb \subseteq L$, ou seja, $b = at \in L$. Isto finaliza a prova. □

Este corolário e a Proposição 2.1 dão uma extensão do Teorema 2.1 de [FT_3] ao nosso contexto, sendo que as provas aqui são mais simples. Assim, temos o seguinte:

TEOREMA 2.7: *Sejam R um anel com comparabilidade e L um ideal multiplicativo à direita semiprimo de R, contido em Q. Então L é um ideal à direita de R o qual é primo e uma cintura de R.*

Estenderemos agora a Proposição 3.5(i) dada no capítulo anterior, com uma prova mais simples.

PROPOSIÇÃO 2.8: *Sejam R uma anel com comparabilidade e I um ideal à direita de R tal que $P_r(I) \subseteq J(R)$. Então I é uma cintura de R. Neste caso, $I = \bigcap_{a \notin I} aP_r(I) = \bigcap_{a \notin I} aJ(R)$.*

Prova: Seja $x \in I$ e $y \notin I$. Se ocorrer $y \in (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P_r(I)$, então existem $s \in S$ e $r \in R$ com $ys = xr \in I$. Segue daí que $s \in P_r(I)$, o que dá um absurdo. Logo, só podemos ter $xR \subseteq yR$ e conseqüentemente, I é uma cintura de R. O restante segue de I.2.5. $\square$

Como em todo anel com comparabilidade temos que $aR \subseteq bR$ ou $bP \subseteq aP$ (pelo Lema 1.5), podemos estender para este contexto a Proposição 3.6 do capítulo anterior, exatamente com a mesma prova. Ou seja, temos:

PROPOSIÇÃO 2.9: *Sejam R um anel com comparabilidade e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Então, para todo $x \in R$ tal que $xP \neq 0$, temos $P_r(xP) = P$.*

Com este resultado, podemos apresentar a versão de I.3.7 para anéis com comparabilidade. Daremos apenas um esboço da prova, pois esta é análoga a prova do teorema 3.7 do capítulo anterior.

TEOREMA 2.10: *Sejam R um anel com comparabilidade e I um ideal à direita não nulo de R. As seguintes condições são equivalintes:*

(i) $P_r(I) \subseteq J(R)$.

(ii) Existem um ideal completamente primo P contido em $J(R)$ e um conjunto $V \subseteq R$ tais que $I = \bigcap_{x \in V} xP$.

(iii) Existem um ideal completamente primo P contido em $J(R)$ e um conjunto V' tais que $I = \bigcup_{x \in V'} (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$.

Sob estas condições equivalentes, I é uma cintura de R e os conjuntos $V = R \setminus I$ e $V' = I$ satisfazem as condições (ii) e (iii), respectivamente.

Prova: A equivalência (i)$\Leftrightarrow$(iii) segue diretamente de I.2.6. A implicação (i)$\Rightarrow$(ii), segue do fato que I é cintura e, neste caso, (ii) se verifica com $P = P_r(I)$ e $V = R \setminus I$, pela Proposição 2.8. A implicação (ii)$\Rightarrow$(i) é provada com o mesmo argumento usado na prova de I.3.7. $\square$

Considerando agora um ideal à direita I de R tal que $rad(R) \subseteq I$, então as condições equivalentes do teorema acima são também equivalentes as seguintes condições:

TEOREMA 2.11: *Sejam R um anel com comparabilidade e I um ideal à direita de R tal que $rad(R) \subseteq I$. As condições equivalentes do teorema 2.10 são também equivalentes as seguintes:*

(iv) I é cintura de R.
(v) $I = \bigcap_{x \notin I} xJ(R)$.

Prova: O lema 2.3 e a proposição 2.8 dão a equivalência (i)$\Leftrightarrow$(iv). A implicação (i)$\Rightarrow$(v) segue também de 2.8. Supondo (v), temos que dado $b \notin I$, $I \subseteq bJ(R) \subset bR$. Isto mostra que (v)$\Rightarrow$(iv) e finaliza nossa prova. □

Estes dois últimos teoremas estendem os teoremas 3.9 e 3.11, respectivamente, de [FT_2] para o contexto dos anéis com comparabilidade. As provas aqui apresentadas foram inspiradas em [FT_2], porém foram bastante simplificadas utilizando-se novos argumentos.

§3 - ANÉIS PRIMOS COM COMPARABILIDADE

Nesta secção estaremos sempre considerando um anel primo com comparabilidade R, e continuaremos notando por Q seu maior ideal completamente primo contido em $J(R)$. Vamos apresentar aqui algumas extensões de resultados obtidos por Mazurek em [M], para nosso contexto.

Começaremos dando a versão do Teorema 3.2 de [M], o qual se prova aqui com o mesmo argumento. Vamos apresentar a prova para que nosso trabalho fique mais completo:

TEOREMA 3.1: *Sejam R um anel que possui a comparabilidade em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$. Se I é um ideal não nilpotente contido em P, então a intersecção $\bigcap_{n \in I\!N} I^n$ é um ideal completamente primo de R.*

Prova: Suponhamos por absurdo que existam $a, b \notin \bigcap_{n \in I\!N} I^n$ tais que $ab \in \bigcap_{n \in I\!N} I^n$. Então existe $n \in I\!N$ com $a, b \notin I^n$. Tomando-se agora um elemento $x \in I^n$, a comparabilidade e a Proposição 1.3 nos dão que $xI^n \subseteq aP \cap bP$. Assim, $I^{2n} \subseteq aP \cap bP$ e então $I^{4n} = I^{2n}I^{2n} \subseteq aPI^{2n} \subseteq abP$. Agora, como $ab \in I^{4n}$, segue que existe $p \in P$ com $ab = abp$, ou seja, $ab(1-p) = 0$, ou ainda, $ab = 0$. Logo, $I^{4n} = 0$ e I é nilpotente. Esta contradição dá o resultado desejado. □

O teorema acima mostra como produzir ideais completamente primos contidos em $J(R)$.

Já vimos que $N_r(R) = P_r(0)$, de onde segue que $N_r(R)$ é um ideal multiplicativo à direita o qual é quase completamente primo. Vamos ver agora que no caso de R ser um anel primo com comparabilidade, então $N_r(R)$ é um ideal à direita de R, logo completamente primo.

PROPOSIÇÃO 3.2: *Seja R um anel primo com comparabilidade. Então:*

(i) $r(x)$ é cintura de R, para todo $x \in R$.

(ii) $N_r(R)$ é um ideal à direita de R.

(iii) R possui dimensão de Goldie 1, como R-módulo à direita.

Prova: **(i)** Se R é um domínio, não há o que provar. Suponhamos então que R é um anel primo, mas não um domínio. Seja $0 \neq x \in R$ e consideremos $a \in r(x)$ e $b \notin r(x)$. Se $b \in (aR)S^{-1}$, então existe $s \notin Q$ com $bs = ar$, para um certo $r \in R$. Assim, temos $xbQ = xbsQ = xarQ = 0$, de onde segue que $xb = 0$ ou $Q = 0$. Mas ambas as conclusões dão um absurdo. Logo, por 1.3, só podemos ter $aR \subset bR$ e segue que $r(x) \subset bR$, de onde se conclui que $r(x)$ é uma cintura de R, como queríamos mostrar.

(ii) Temos $N_r(R) = \bigcup\{r(x) : x \in R \setminus \{0\}\}$. Agora, segue de (i) que esta família de ideais à direita é linearmente ordenada por inclusão, de onde vem que $N_r(R)$ é um ideal à direita de R.

(iii) Sejam $x, y \in R \setminus \{0\}$. Se $xR \subseteq yR$ ou $yR \subseteq xR$, então claramente temos $xR \cap yR \neq 0$. Suponhamos então que nenhuma destas condições ocorram. Assim, temos $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus Q$. Mas então existe $s \notin Q$ com $xs \in yR$. Se $xR \cap yR = 0$ então $xs = 0$ e R não é um domínio, de onde resulta que $Q \neq 0$. Além disso, temos $xQ = xsQ = 0$, ou seja, $x = 0$ ou $Q = 0$, pois R é primo. Logo, qualquer das duas conclusões produz um absurdo. Portanto, R possui dimensão de Goldie 1, como queríamos mostrar. □

É conveniente observar que Mazurek obteve, para D-anéis, resultados semelhantes a estes dados acima, mas suas provas dependem fortemente de resultados específicos para D-anéis, (ver [M]). Nossas provas além de serem mais gerais, são bem mais simples que as apresentadas em [M].

Nosso próximo resultado mostra que [M; Th. 3.4] também pode ser estendido ao nosso contexto. Além disso, a prova dada aqui é também mais simples que a de [M].

TEOREMA 3.3: *Seja R um anel primo com comparabilidade. Então $N_r(R) = N_g(R)$. Além disso, temos $N_g(R) = 0$ e R é um domínio, ou $N_g(R)$ é o único ideal não nulo minimal de R.*

Prova: Como $N_g(R)$ é um ideal completamente primo de R, segue que se $N_g(R) = 0$, então R é um domínio e não há nada para provar. Suponhamos então que $N_g(R) \neq 0$. Como R é primo, segue de 3.2(ii) que $N_r(R)$ é um ideal à direita de R. Se $Q \subset N_r(R)$, então claramente temos $N_g(R) \subset N_r(R)$. Por outro lado, se $N_r(R) \subseteq Q$, então $N_r(R)$ é um ideal bilátero completamente primo, por [FT 2, prop 2.5]. Segue que $N_g(R) \subseteq N_r(R)$. Portanto, em qualquer situação temos $N_g(R) \subseteq N_r(R)$.

Seja agora $a \in N_r(R)$. Então existe $x \in R \setminus \{0\}$ com $xa = 0$. Assim, $x \in N_g(R)$ ou $a \in N_g(R)$. Se $a \notin N_g(R)$ então $0 = xaN_g(R) = xN_g(R)$, de onde segue que $x = 0$ ou $N_g(R) = 0$. Qualquer das duas conclusões leva a um absurdo, mostrando que devemos ter também $N_r(R) \subseteq N_g(R)$. Portanto, $N_g(R) = N_r(R)$, como queríamos mostrar.

Vejamos agora que $N_g(R)$ é minimal. Suponhamos que exista algum ideal I de R com $0 \neq I \subset N_g(R)$. Então segue de 3.1 que I é nilpotente, o que dá um absurdo, pois R é primo. Isto finaliza a prova. □

De acordo com a Proposição 1.10, considerando-se o anel quociente $\bar{R} = R/rad(R)$, segue imediatamente do teorema acima o próximo resultado.

COROLÁRIO 3.4: *Seja R um anel com comparabilidade. Então $N_g(R) = rad(R)$ ou não existe um ideal I de R tal que $rad(R) \subset I \subset N_g(R)$.*

Finalizaremos esta secção apresentando uma generalização da Proposição 2.7 de [M]. Antes porém, lembremos que um anel R é dito fortemente primo (à direita), se todo ideal não nulo I de R contém um subconjunto finito F, tal que $r(F) = 0$. Um tal subconjunto F é chamado um isolador. Dizemos também que um ideal P de R é fortemente primo se o anel R/P é fortemente primo. É fácil ver que todo ideal fortemente primo é primo (ver [F]). Podemos agora enunciar nosso resultado.

PROPOSIÇÃO 3.5: *Seja R um anel com comparabilidade. Se R é fortemente primo então R é um domínio.*

Prova: Observemos inicialmente que se R é primo, então temos $Z_r(R) =$

$N_l(R)$. De fato, se $a \in Z_r(R)$, temos $r(a)$ essencial em R, ou seja, $a \in N_l(R)$. Reciprocamente, dado $a \in N_l(R)$, temos $r(a) \neq 0$, e como R é primo, segue de 3.2(i), que $r(a)$ é cintura de R, de onde vem que $r(a)$ é essencial em R, ou seja, $a \in Z_r(R)$. Portanto, temos $Z_r(R) = N_l(R)$.

Suponhamos agora que R seja fortemente primo. Então $Z_r(R) = 0$. De fato, pois do contrário, existiria um subconjunto finito F de $Z_r(R)$ tal que $r(F) = 0$, o que produz um absurdo, pois $r(F) = \bigcap_{a \in F} r(a)$ é um ideal essencial. Logo, temos $N_l(R) = Z_r(R) = 0$ e R é um domínio. □

§4 - SOBRE A NOETHERIANIDADE DE UM ANEL COM COMPARABILIDADE

Dado um anel A, lembramos que ele é noetheriano à direita, se todos os seus ideais à direita são finitamente gerados, ou equivalentemente, se toda cadeia ascendente de ideais à direita é estacionária. Vamos apresentar aqui uma caracterização dos anéis com comparabilidade noetherianos à direita. Salientamos que este resultado não era conhecido nem mesmo para D-anéis. Antes porém, daremos dois lemas prévios:

LEMA 4.1: *Seja A um anel qualquer. Se toda cintura de A é finitamente gerada, então A satisfaz a condição ascendente de cadeia para cinturas.*

Prova: Sejam $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$ uma seqüência de cinturas de A e $I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$. Então I é também uma cintura de A e, conseqüentemente, existem $a_1, \ldots, a_t \in A$, com $I = a_1A + \ldots + a_tA$. Para cada i existe I_{n_i} tal que $a_i \in I_{n_i}$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_1, \ldots, a_t \in I_k$. Portanto, $I = I_k$ e a seqüência se estaciona, como queríamos mostrar. □

LEMA 4.2: *Seja R um anel com comparabilidade em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$. Se I é uma cintura de R contida em P e $x \in R$, então xI é também uma cintura de R.*

Prova: Se $y \notin xI$ e $y \in xR$, então temos $y = xr$, algum $r \in R \setminus I$, de onde vem que $I \subset rR$. Então $xI \subseteq xrR = yR$. Por outro lado, se $x \in (yR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$, então existe $s \in S$ tal que $xs \in yR$. Assim, temos $xI \subseteq xP = xsP \subseteq yR$. Portanto, sempre temos $xI \subset yR$, isto é, xI é uma cintura de R. □

Gostaríamos de observar neste momento que o lema acima estende parcialmente o teorema 2.3 de [FT$_3$]. Além disso, em [FT$_3$], este fato foi mostrado somente para cinturas I de R que contém $rad(R)$.

TEOREMA 4.3: *Sejam R um anel e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se R tem a comparabilidade em relação a P, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) R é noetheriano à direita.

(ii) R/P é noetheriano à direita e toda cintura de R, a qual está contida em P, é finitamente gerada à direita.

Prova: (i)$\Rightarrow$(ii): Esta implicação é evidente.

(ii)$\Rightarrow$(i): Suponhamos (ii) verdadeira. Vamos mostrar que toda seqüência crescente de ideais à direita é estacionária. Seja então a seqüência $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots \subseteq J_m \subseteq \ldots$ de ideais à direita de R. Se existir $j \in I\!N$ tal que $P \subseteq J_j$, entao esta seqüência estaciona, pois R/P é noetheriano à direita. Suponhamos então que esta seqüência esteja inteiramente contida em P.

Consideremos agora a família $\{L_i\}_{i \in I\!N}$, onde L_i é a menor cintura de R que contém J_i, para cada $i \in I\!N$. Assim, temos uma seqüência $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_m \subseteq \ldots$, de cinturas de R contida em P. Como R satisfaz a condição ascendente de cadeia para cinturas contidas em P, segue que esta seqüência é estacionária. Logo, existe um número finito de membros nesta seqüência.

Assim, dado uma seqüência crescente de ideais à direita de R, é suficiente mostrarmos que toda subseqüência "abaixo" de uma certa cintura contida em P é estacionária. Logo, podemos supor que todos os membros da seqüência $(J_i)_{i \in I\!N}$ possuem a mesma menor cintura que os contém. Seja $I = a_1R + \cdots + a_nR$ tal cintura.

Como R é um anel com comparabilidade, segue do lema 4.2 que a_iP é cintura de R, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $a_i \in I$ e $a_i \notin a_iP, i = 1, \ldots, n$, segue que $a_iP \subset J_j \subset I$, para todos $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in I\!N$.

Consideremos agora a família de ideais à direita definida por:

$$H_{li} = \{r \in R : \exists r_1, \ldots, r_{l-1} \in R \text{ com } a_1r_1 + \ldots + a_{l-1}r_{l-1} + a_lr \in J_i\}$$

para $1 \leq l \leq n$ e $i \in I\!N$.

Tomando-se, para cada $1 \leq l \leq n$, $r_1 = \ldots = r_{l-1} = 0$ e $r \in P$, segue do argumento acima que todos os H_{li} contém P. Logo, cada uma das seqüências $\{H_{li}\}_{i\in N}$, $1 \leq l \leq n$, é estacionária, pois R/P é noetheriano à direita. Digamos que elas se estacionem em H_{lk_l}.

Mostraremos que a seqüência $\{J_i\}_{i\in N}$ se estaciona em $t = max\{k_l : 1 \leq l \leq n\}$. Para tal, vamos mostrar que $J_k = J_t$, para todo $k \geq t$. Faremos isto argumentando por indução no número de coordenadas dos elementos de J_k. Se $x = a_1r_1 \in J_k$, então $r_1 \in H_{1k} = H_{1k_1}$ e daí $x = a_1r_1 \in J_{k_1} \subseteq J_t$. Seja $s \in \{1, \ldots, n-1\}$ e suponhamos por indução que sempre que $x = a_1r_1 + \ldots + a_sr_s \in J_k$ então $x \in J_t$. Agora, se tomamos $x = a_1r_1 + \ldots + a_sr_s + a_{s+1}r_{s+1} \in J_k$, temos $r_{s+1} \in H_{s+1k} = H_{s+1k_{s+1}}$, e conseqüentemente, existem $r'_1, \ldots, r'_s \in R$ tais que

$$y = a_1r'_1 + \ldots + a_sr'_s + a_{s+1}r_{s+1} \in J_{k_{s+1}} \subseteq J_t$$

Assim, $z = a(r_1 - r'_1) + \ldots + a_s(r_s - r'_s) \in J_k$, e pela hipótese de indução , temos $z \in J_t$. Mas então $x = y + z \in J_t$. Isto finaliza o processo de indução e completa a prova do teorema. □

Temos agora o seguinte corolário imediato.

COROLÁRIO 4.4: *Sejam R um anel com comparabilidade e Q o maior ideal completamente primo contido em $J(R)$. Então R é noetheriano à direita, se e somente se, R/Q é noetheriano à direita e toda cintura de R é finitamente gerada à direita.*

Queremos agora dar um exemplo mostrando a necessidade de exigirmos que todas as cinturas contidas em P sejam finitamente geradas, no teorema acima. Tal exemplo segue como uma conseqüência da nossa próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 4.5: *Seja $R = A \bigoplus F[[X;\sigma]]X$ como construído no exemplo 1.8 anterior. Então R é um anel noetheriano à direita se, e somente se, F é um A-módulo noetheriano à direita.*

Prova: Suponhamos que R é noetheriano à direita. Como $F[[X;\sigma]]X$ é um ideal bilátero, podemos considerar o anel quociente $R/(F[[X;\sigma]]X) \simeq A$, o qual também é noetheriano à direita, por ser um quociente de R. Para mostrar então que F é um A-módulo noetheriano à direita, basta mostrar que F é finitamente gerado como A-módulo à direita. Para tal, consideremos o ideal $P = F[[X;\sigma]]X$ de R. Então existem $p_1, \ldots, p_n \in P$ tais que $P = p_1 R + \ldots + p_n R$. Notaremos cada p_k por $p_k = (\sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} X^i)X$, $k = 1, ..., n$.

Observemos agora que dado $b \in F$, podemos considerar $bX \in P$, de onde segue que existem elementos $r_j = r_{0j} + \sum_{i=1}^{\infty} r_{ij} X^i \in R$, $j = 1, ..., n$, tais que

$$bX = (\sum_{i=0}^{\infty} a_{i1} X^{i+1})(r_{01} + \sum_{i=1}^{\infty} r_{i1} X^i) + \ldots + (\sum_{i=0}^{\infty} a_{in} X^{i+1})(r_{on} + \sum_{i=1}^{\infty} r_{in} X^i)$$

Então $b = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} r_{0j}$, e como b foi tomado arbitrário, segue que $F = a_{01}A + \ldots + a_{0n}A$, ou seja, F é finitamente gerado à direita, como queríamos mostrar.

Reciprocamente, suponhamos agora F um A-módulo noetheriano à direita. Então todo A-submódulo à direita de F é finitamente gerado. Consideremos um ideal à direita H de R. Então segue do Exemplo 1.8 que $H = H_0 X^n + F[[X;\sigma]]X^{n+1}$, onde n é o grau minimal dos elementos de H e $H_0 = \{a \in F : aX^n \in H\}$ é um A-submódulo à direita de F. Para mostrar que H é também finitamente gerado, precisamos analisar dois casos, a saber, $H_0 = 0$ e $H_0 \neq 0$.

Caso 1: Suponhamos que $H_0 = 0$. Então $H = F[[X;\sigma]]X^t$, algum $t \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $H = f_1 X^t R + \cdots + f_m X^t R$, onde $F = f_1 A + \cdots + f_m A$. De fato, dado $h = (\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i)X^t \in H$, temos $h = b_0 X^t + (\sum_{i=0}^{\infty} b_{i+1} X^i)X^{t+1} = (f_1 a_1 + \cdots + f_m a_m)X^t + (\sum_{i=0}^{\infty} b_{i+1} X^i)X^{t+1} \in f_1 X^t R + \cdots + f_m X^t R + X^{t+1} R = f_1 X^t R + \cdots + f_m X^t R$, pois $X^{t+1} = f_1 X^t (\sigma^{-t}(f_1))^{-1} X$, onde $a_1, \ldots, a_m \in A$ são tais que $b_0 = f_1 a_1 + \cdots + f_m a_m$. Reciprocamente, temos:

$$\begin{aligned} f_1 X^t R + \cdots + f_m X^t R &\subseteq f_1 A X^t + \cdots + f_m A X^t + F[[X;\sigma]]X^{t+1} \\ &= (f_1 A + \cdots + f_m A)X^t + F[[X;\sigma]]X^{t+1} \\ &= F X^t + F[[X;\sigma]]X^{t+1} \\ &= F[[X;\sigma]]X^t \\ &= H \end{aligned}$$

Caso 2: Suponhamos agora $H_0 \neq 0$. Assim, $H = H_0 X^n + F[[X;\sigma]]X^{n+1}$, onde n é o grau minimal dos elementos de H. Neste caso, temos $H_0 = h_1 A + \cdots + h_t A$. Procedendo então de forma análoga ao caso anterior, se mostra que $H = h_1 X^n R + \cdots + h_t X^n R$. Isto finaliza a prova. □

Da proposição acima podemos obter um exemplo de um anel R com comparabilidade em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$, tal que R não é noetheriano à direita, mesmo que R/P o seja, e tal que o reticulado de cinturas de R contidas em P satisfaça a condição ascendente de cadeia.

EXEMPLO 4.6: Consideremos um domínio A tal que seu corpo de frações não seja finitamente gerado à direita como A-módulo. Então segue da proposição acima que o anel $R = A \bigoplus F[[X;\sigma]]X$, construído como no exemplo 1.8, não é noetheriano à direita, mesmo que A o seja. Além disso, se o reticulado de A-submódulos de F não possui cinturas não triviais, então R é um anel com comparabilidade em relação a $P = F[[X;\sigma]]X$, tal que R possui a condição ascendente de cadeia para cinturas contidas em P, pois de acordo com 1.8, neste caso as únicas cinturas de R serão os ideais da forma $H = [[X;\sigma]]X^n$, para $n \in I\!N$.

De fato, a única condição do teorema 4.3 que falha é o fato de as cinturas de R não serem finitamente geradas, pois em caso contrário, teríamos $P = F[[X;\sigma]]X$ finitamente gerado, ou seja, existiriam $h_1, \ldots, h_n \in P$ tais que $P = \sum_{j=1}^{n} h_j R$. Agora, um cálculo semelhante ao feito na prova da proposição anterior mostra que se este for o caso, $F = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} A$, onde $h_j = (\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} X^i)X$, para $j = 1, ..., n$.

Uma situação concreta do exemplo costruído acima, é quando tomamos $A = \mathbf{Z}$ e $F = \mathbf{Q}$. Então $R = \mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Q}[[X]]X$ não é noetheriano à direita, R satisfaz a condição ascendente de cadeia para cinturas e $R/P \simeq \mathbf{Z}$ é noetheriano, onde $P = \mathbf{Q}[[X]]X$. Este exemplo também mostra que a recíproca do lema 4.1 não vale.

CAPÍTULO III - MÓDULOS COM COMPARABILIDADE

Neste capítulo trataremos de estender os resultados obtidos no capítulo anterior, para o contexto de módulos. Muitos dos resultados apresentados aqui tem sua prova análoga à correspondente feita anteriormente. Em alguns casos omitiremos estas provas.

§1 - A COMPARABILIDADE PARA MÓDULOS

Para facilitar nossa escrita, faremos uma definição:

DEFINIÇÃO 1.1: *Sejam R um anel com (MP) e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Dizemos que P é um ideal admissível se $S = R \setminus P$ for um sistema de Ore.*

Pelo que já vimos antes, segue que se R é um anel com comparabilidade em relação a P, então P é um ideal admissível. Também sabemos que se P é um ideal admissível, então $(mR)S^{-1}$ é um R-submódulo de M, para todo $m \in M$. Com estas notações, temos a seguinte:

DEFINIÇÃO 1.2: *Sejam R e P como acima. Dado um R-módulo à direita M, dizemos que M é um R-módulo com comparabilidade (à direita) em relação a P se, para todos $x, y \in M$, vale uma das três condições seguintes: $xR \subseteq yR$ ou $yR \subseteq xR$ ou $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$.*

A comparabilidade para módulos também admite outras formas equivalentes, como no caso de anéis. O próximo resultado estende II.1.3.

PROPOSIÇÃO 1.3: *Seja M um R-módulo com comparabilidade em relação a um ideal admissível P. As seguintes condições são equivalentes:*
(i) $xR \subseteq yR$ ou $yR \subseteq xR$ ou $(xR)S^{-1} = (yR)S^{-1}$.
(ii) $xR \subseteq yR$ ou $(yR)S^{-1} \subseteq (xR)S^{-1}$.
(iii) $xR \subseteq yR$ ou $yR \subseteq (xR)S^{-1}$.
(iv) $xR \subseteq yR$ ou $y \in (xR)S^{-1}$.

Prova: (i)$\Rightarrow$(iv): Observemos inicialmente que se $yR \subseteq xR$, então é claro que $(yR)S^{-1} \subseteq (xR)S^{-1}$. Assim, se $xR \not\subseteq yR$, segue que $(yR)S^{-1} \subseteq (xR)S^{-1}$, por (i).

(iv)$\Rightarrow$(iii): É imediato, pois estamos supondo que $S = R \setminus P$ é um sistema de Ore e assim, $(xR)S^{-1}$ é um R-submódulo de M.

(iii)$\Rightarrow$(ii): Sejam $x, y \in M$ com $xR \not\subseteq yR$. Então, se $z \in M$ é tal que existe $s \in S$ com $zs \in yR$, segue que $zs \in (xR)S^{-1}$. Logo existe $t \in S$ com $zst \in xR$, ou seja, $z \in (xR)S^{-1}$, pois $st \in S$.

(ii)$\Rightarrow$(i): É imediato. □

Também podemos caracterizar um R-módulo com comparabilidade, com uma propriedade já vista para anéis em II.1.6. Isto é o que afirma o nosso próximo resultado. Para prová-lo, basta repetir o argumento feito em II.1.6.

PROPOSIÇÃO 1.4: *Sejam R um anel e P um ideal admissível de R. Então M é um R-módulo com comparabilidade em relação a P, se e somente se, $(mR)S^{-1}$ é uma cintura de M, para todo $m \in M$.*

Vamos agora dar uma extensão de II.4.2 para nosso contexto. A prova é exatamente a mesma, por isso vamos omiti-la.

PROPOSIÇÃO 1.5: *Seja M um R-módulo com comparabilidade em relação a um ideal admissível P de R. Se I é uma cintura de R contida em P, então xI é uma cintura de M, para todo $x \in M$.*

Esta proposição tem as seguintes conseqüências importantes:

COROLÁRIO 1.6: *Sejam M, R e P como no enunciado da proposição anterior. Se I é uma cintura de R contida em P, então todo elemento $y \in MI$ é da forma $y = ma$, onde $m \in M$ e $a \in I$.*

Prova: Seja $y \in MI$. Então y é uma soma finita do tipo $y = \sum_{i=1}^{t} m_i a_i$, com $m_i \in M$ e $a_i \in I$, $i = 1, ..., t$. Como cada $m_i I$ é uma cintura de M, existe $j \in \{1, ..., t\}$ para o qual temos $m_i I \subseteq m_j I$, $i = 1, ..., t$. Assim, $m_i a_i = m_j a'_i$ e $y = m_j(a'_1 + \cdots + a'_t)$, onde $a'_i \in I$, $i = 1, ..., t$. Logo, $y = ma$ para $m = m_j \in M$ e $a = \sum_{i=1}^{t} a'_i \in I$. □

COROLÁRIO 1.7: *Sejam M, R e P como antes. Se M é finitamente gerado à direita sobre R e $I \subseteq P$ é uma cintura de R, então $MI = xI$, para um certo $x \in M$. Em particular, MI é uma cintura de M.*

Prova: Suponhamos $M = \sum_{i=1}^{n} x_i R$. Como cada $x_i I$ é cintura de M, podemos supor $x_i I \subseteq x_1 I$, $i = 1, ..., n$. Logo, temos $MI = \sum_{i=1}^{n} x_i RI =$

$\sum_{i=1}^{n} x_i I = x_1 I$. O restante segue diretamente da proposição anterior. □

COROLÁRIO 1.8: *Seja M um R-módulo com comparabilidade em relação a um ideal admissível P. Se I é uma cintura de R contida em P, então MI é uma cintura de M.*

Prova: Basta observar que, a partir de 1.6 acima, podemos escrever $MI = \bigcup_{x \in M} xI$. Como cada xI é uma cintura de M, o resultado segue. □

Os próximos resultados a serem apresentados necessitam da hipótese adicional de que P seja também uma cintura de R. Para que nossas hipóteses não pareçam artificiais, vamos supor que R é um anel com comparabilidade, até o final desta secção. Neste caso, sabemos que existe um maior ideal completamente primo contido em $J(R)$. Vamos denotá-lo por Q. O próximo resultado dá uma generalização de II.1.11, e pode ser provado com o mesmo argumento feito lá.

PROPOSIÇÃO 1.9: *Seja M um R-módulo à direita, onde R é um anel com comparabilidade. Então M possui a comparabilidade em relação a Q se e somente se M possui a comparabilidade em relação a todo ideal completamente primo P contido em Q.*

Podemos agora dar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.10: *Seja R um anel com comparabilidade(à direita). Dizemos que um R-módulo à direita M é um R-módulo com comparabilidade (à direita), se M tem a comparabilidade (à direita) em relação a todo ideal completamente primo de R, contido em $J(R)$.*

§2 - CINTURAS EM MÓDULOS COM COMPARABILIDADE

Pretendemos nesta secção estender os resultados de caracterização de cinturas, apresentados no capítulo anterior. Para tal, vamos denotar por $P(M) = \bigcap\{K :$ K é um R-submódulo primo de $M\}$. Em [D_1; Cor. 1.21] se mostra que $M/P(M)$ é um R-módulo semiprimo.

Para facilitar nossa escrita, vamos supor que R é um anel com comparabilidade, e vamos continuar denotando por Q o seu maior ideal completamente primo contido em $J(R)$. Os resultados a seguir permanecem válidos se R e M tem a comparabilidade em relação a um certo ideal completamente primo

P contido em $J(R)$, com as devidas adaptações.

Vamos dar agora a versão de I.3.6. A prova será omitida, pois é a mesma de antes.

PROPOSIÇÃO 2.1: *Sejam M um R-módulo com comparabilidade e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se $m \in M$ é tal que $mP \neq 0$ então $P_r(mP) = P$.*

COROLÁRIO 2.2: *Sejam M, R e P como na proposição anterior. Se $0 \neq MP \subset M$, então $P_r(MP) = P$.*

Prova: Claramente temos $P \subseteq P_r(MP)$. Seja agora $a \in P_r(MP)$. Então existe $x \in M \setminus MP$ com $xa \in MP$. Agora, como podemos escrever $MP = \bigcap\{mP : m \in M \text{ com } mP \neq 0\}$, segue que $xa = mp$, para algum $m \in M$ com $mP \neq 0$. Logo, temos $a \in P_r(mP) = P$, pela proposição anterior. Portanto, $P_r(MP) = P$. □

COROLÁRIO 2.3: *Sejam M um R-módulo com comparabilidade e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se $MP \neq 0$, então MP é um R-submódulo completamente primo de M.*

Prova: Seja $m \in M \setminus MP$ e suponhamos que existe $c \in R$ com $mc \in MP$. Desta forma, $c \in P_r(MP) = P$, pela proposição anterior. Logo, $Mc \subseteq MP$, mostrando que MP é um submódulo completamente primo de M. □

O próximo resultado estende [M; Prop. 3.1(i)] ao nosso contexto.

COROLÁRIO 2.4: *Seja M um R-módulo com comparabilidade. Se P é um ideal completamente primo contido em $J(R)$ e $x \notin MP$ então temos $MP = xP$.*

Prova: Se $MP = 0$, o resultado é claro. Suponhamos então que $MP \neq 0$. Claramente temos $xP \subseteq MP \subset xR$. Seja agora $y \in MP$. De 1.6 vem que $y = mp$, para certos $m \in M$ e $p \in P$. Mas então $mp = xr$, para $r \in R$. Agora, como $x \notin MP$ segue que $r \in P_r(MP) = P$, por 2.2. Assim, $y \in xP$. Portanto, $MP = xP$, como queríamos mostrar. □

Vamos agora analisar os R-submódulos primos contidos em MQ.

PROPOSIÇÃO 2.5: *Seja M um R-módulo à direita com compara-*

bilidade. Se K é um R-submódulo primo de M com $K \subseteq MQ$, então K é uma cintura de M. Em particular, um R-submódulo completamente primo contido em MQ é uma cintura de M.

Prova: Se $K = MQ$, então basta aplicar o corolário 1.8. Suponhamos então que $K \subset MQ$. Sejam $x \in K$ e $y \notin K$. Se $y \in (xR)S^{-1}$ então existem $s \in S = R \setminus Q$ e $r \in R$ com $ys = xr$. Assim, $yQ = ysQ = xrQ \subseteq K$. Logo, para todo $q \in Q$ temos $yRq \subseteq yQ \subseteq K$, de onde segue que $y \in K$ ou $MQ \subseteq K$. Mas ambas as conclusões levam a uma contradição. Logo, de acordo com a Proposição 1.3 da secção anterior, devemos ter $xR \subseteq yR$. Segue então que K é uma cintura de M. □

COROLÁRIO 2.6: *Sejam M e R como na proposição anterior, tal que $MQ \neq 0$. Então $P(M)$ é um R-submódulo primo de M. Em particular, $P(M)$ é uma cintura de M.*

Prova: Como MQ é completamente primo, segue que $P(M) \subseteq MQ$ e como a família de R-submódulos primos contidas em MQ é linearmente ordenada, pela proposição anterior. O resultado então segue. □

Com o mesmo argumento usado na prova de II.2.3, podemos mostrar o seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.7: *Sejam M um R-módulo com comparabilidade tal que $P(M) \subset MQ$ e L uma cintura de M. Se $P(M) \subseteq L$, então $P_r(L) \subseteq J(R)$.*

Esta proposição também tem um corolário análogo:

COROLÁRIO 2.8: *Seja M um R-módulo com comparabilidade, tal que $P(M) \subset MQ$.Então MQ é a maior cintura não trivial de M.*

Prova: Suponhamos que exista uma cintura L não trivial de M, com $MQ \subset L$. Assim, pela proposição anterior temos $P_r(L) \subseteq J(R)$. Mas então $L = \bigcap_{x \notin L} xP_r(L)$, por I.2.5. Observamos agora que neste caso, $xP_r(L) \subseteq xQ$ e daí temos $L = \bigcap_{x \notin L} xP_r(L) \subseteq \bigcap_{x \notin L} xQ = MQ$, por 2.4. Esta contradição implica o resultado desejado. □

Apresentaremos agora a versão do teorema II.2.10, ao nosso contexto.

TEOREMA 2.9: *Sejam M um R-módulo com comparabilidade e L um*

R-submódulo não nulo de M. As seguintes condições são equivalentes:

(i) $P_r(L) \subseteq J(R)$.

(ii) Existem um ideal completamente primo P contido em $J(R)$ e um conjunto $V \subseteq M$ com $L = \bigcap_{x \in V} xP$.

(iii) Existem um ideal completamente primo P contido em $J(R)$ e um conjunto $V' \subseteq M$ tais que $L = \bigcup_{x \in V'} (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P$.

Nestas condições equivalentes, L é uma cintura de M e os conjuntos $V = M \setminus L$ e $V' = L$ satisfazem (ii) e (iii), respectivamente.

Prova: (i)$\Leftrightarrow$(iii): Já foi mostrado em I.2.6, para o caso geral.

(i)$\Rightarrow$(ii): Se $P_r(L) \subseteq J(R)$, $x \in L$ e $y \notin L$ com $y \in (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P_r(L)$, então existe $s \notin P_r(L)$ com $ys \in xR \subseteq L$, o que dá um absurdo. Logo, só podemos ter $xR \subseteq yR$ e, conseqüentemente, L é cintura de M. Mas então temos $L = \bigcap_{x \notin L} xP_r(L)$, por I.2.5. Basta então tomar $P = P_r(L)$ e $V = M \setminus L$ para obter (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i): Seja $a \in P_r(L)$. Então existe $m \in M \setminus L$ com $ma \in L$. Logo, existe $x \in V$ tal que $m \notin xP$ e $ma \in xP$, de onde decorre que $a \in P_r(xP) = P$, por 2.3. Assim, temos $P_r(L) \subseteq P \subseteq J(R)$.

O restante é claro. Finalizamos assim a nossa prova. □

Podemos também dar uma versão do teorema II.2.11, ao contexto de módulos com comparabilidade. Assim, temos o seguinte:

TEOREMA 2.10: *Se no teorema acima, L é um R-submódulo de M tal que $L \supseteq P(M)$, então as condições equivalentes do teorema anterior são também equivalentes as seguintes:*

(iv) L é uma cintura de M.

(v) $L = \bigcap_{x \notin L} xJ(R)$.

Prova: (iv)$\Rightarrow$(i): Segue diretamente da Proposição 2.7.

(i)$\Rightarrow$(iv): Esta implicação é mostrada com o mesmo argumento usado em II.2.8, mas repetiremos aqui. Se $x \in L$, $y \notin L$ e $y \in (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P_r(L)$, então existe $s \in S$ com $ys \in xR \subseteq L$, o que dá um absurdo. Logo, só podemos ter $yR \subseteq xR$, e o resultado segue.

(iv)$\Rightarrow$(v): Esta implicação foi feita para o caso geral em I.2.5.

(v)$\Rightarrow$(iv): Se $x \in M \setminus L$, então temos $L \subseteq xJ(R) \subseteq xR$, e L é cintura de M. Isto finaliza a prova. $\square$

§3 - MÓDULOS PRIMOS COM COMPARABILIDADE

Nesta seção consideraremos módulos primos com comparabilidade. Neste caso, temos $P(M) = 0$ e o Teorema 2.11 dá a estrutura das cinturas de tais módulos. Continuaremos supondo que R é um anel com comparabilidade e Q denotará sempre o maior ideal completamente primo contido em $J(R)$.

É conhecido que se M é um R-módulo primo então $r(M)$ é um ideal primo de R. Para ver isto, basta observar que se $aRb \subseteq r(M)$ com $a \notin r(M)$, então existe $m \in M$ com $ma \neq 0$ e assim, $maRb = 0$, o qual é um R-submódulo primo de M. Logo, $Mb = 0$, ou seja, $b \in r(M)$.

Afirmamos agora que se M é completamente primo, então $r(M)$ é completamente primo. De fato, pois se $a, b \in R$ são tais que $ab \in r(M)$ e $a \notin r(M)$, então existe $m \in M$ com $ma \neq 0$. Daí, como (0) é um R-submódulo completamente primo de M e $mab = 0$, segue que $Mb = 0$, ou seja, $b \in r(M)$.

Vamos supor até o final desta seção que M é um R-módulo à direita primo, tal que $MQ \neq 0$. Além disso, como o reticulado de R-submódulos de M é idêntico ao reticulado de $\bar{R}$-submódulos de M, onde $\bar{R} = R/r(M)$, vamos supor também que $r(M) = 0$ e R é um anel primo. Gostaríamos de observar que se $MQ = 0$, então é o mesmo que supor $Q = 0$, e neste caso a comparabilidade em R e em M se tornam triviais, de modo que neste caso não podemos obter nenhuma propriedade particular da comparabilidade.

Como estamos supondo que $P(M) = 0$, devemos ter $P_r(0) \subseteq J(R)$, por 2.7. Então, se M é um R-módulo à direita completamente primo, podemos garantir que $r(M)$ é um ideal completamente primo contido em $J(R)$, pois neste caso temos $P_r(0) = r(M)$, uma vez que se $mr = 0$, para $m \in M$ e $r \in R$, segue que $Mr = 0$.

Voltamos agora a analisar aquela questão da correspondência entre as cinturas de M e as de R. Já vimos antes que se L é uma cintura não nula de M e $x \in M \setminus L$, então podemos escrever $L = x(L : x)$. A questão é saber se $(L : x)$ é também uma cintura de R. Afirmamos que neste contexto, $(L : x)$ é uma cintura de R. De fato, basta observar que temos $P_r(L) \subseteq J(R)$

e que $P_r((L:x)) = \{a \in R : \exists b \notin (L:x) \text{ com } ba \in (L:x)\}$. Então, se tomamos $a \in P_r((L:x))$, existe $b \in R$ tal que $xb \notin L$ e $xba \in L$, de modo que $a \in P_r(L)$, ou seja, temos $P_r((L:x)) \subseteq P_r(L) \subseteq J(R)$. Segue então de II.2.8 que $(L:x)$ é uma cintura de R. A recíproca segue de 1.5. Podemos assim enunciar o seguinte:

TEOREMA 3.2; *Sejam M um R-módulo primo com comparabilidade, L um R-submódulo de M e $x \in M \setminus L$. Então L é uma cintura de M se, e somente se, $L = xI$, para alguma cintura I de R.*

Consideremos agora um R-módulo primo com comparabilidade M tal que $0 \neq MQ \subset M$. Então existe algum $x \in M \setminus MQ$. Fixando-se este elemento $x \in M \setminus MQ$, podemos definir a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{cinturas de} M\} & \longleftrightarrow & \{\text{ cinturas de R que contém } r(x)\} \\ L & \longrightarrow & (L:x) \\ xI & \longleftarrow & I \end{array}$$

Com as notações acima, temos o seguinte:

TEOREMA 3.3: *Sejam M como acima e $x \in M \setminus MQ$. Então existe uma correspondência biunívoca entre as cinturas de M e as cinturas de R as quais contém $r(x)$.*

Prova: Já vimos a existência desta correspondência, faltando apenas mostrar que ela é biunívoca. Para tal, temos que garantir que ao tomarmos uma cintura I de R que contém $r(x)$ e definirmos $L = xI$, então temos $(L:x) = I$. É claro que $I \subseteq (L:x)$. Agora, dado $b \in (L:x)$, temos $xb \in L = xI$. Se $b \notin I$, então $I \subseteq bP_r(I)$, pois I é cintura de R com $0 = rad(R) \subseteq I$. Assim, $xb \in xbP_r(I)$, o que produz uma contradição. Logo, temos $b \in I$, e a prova está completa. □

COROLÁRIO 3.4: *Sejam M e R como no teorema acima. Se $x \in M \setminus MQ$ é fixo, então $Q/r(x) \simeq MQ$, como R-módulos.*

Prova: O R-homomorfismo $\varphi : Q \longrightarrow MQ$, dada por $\varphi(q) = xq$, $\forall q \in Q$, é sobrejetor, pelo Corolário 2.4. Agora, é claro que $r(x) \subset Q$, pois $0 \neq MQ = xQ$ e assim, $ker(\varphi) = r(x)$. Portanto, $Q/r(x) \simeq MQ$. □

O isomorfismo e a correspondência acima são dados para qualquer ele-

mento $x \notin MQ$. Como estamos trabalhando com um anel primo R, segue que a família $\{r(x)\}_{x \notin MQ}$ é uma família de cinturas, logo linearmente ordenada. Assim, se M é um R-módulo à direita com um número finito de cinturas, segue da correspondência acima que $r(x) = r(y)$, para todos $x, y \notin MQ$. Uma questão natural que surge aqui é saber o que acontece com a situação geral, isto é, será que sempre teremos $r(x) = r(y)$, para $x, y \notin MQ$?

Analisemos um pouco esta questão. Antes porém, lembremos que M é um R-módulo primo se, e somente se, para todo R-submódulo L de M temos $r(L) = r(M)$, (ver [D_1; Cor. 1.5]).

Suponhamos agora que $r(x) = r(y)$, para todos $x, y \notin MQ$, onde M e R são como no teorema anterior. Afirmamos que nesta situação temos $r(x) = r(M) = 0$, para todo $x \in M$,uma vez que em nosso contexto, temos $r(M) = 0$. De fato, seja $I = r(x)$, onde $x \notin MQ$. Dado $y \notin MQ$, temos $MQ = yQ$. Assim, para todos $a \in I$ e $q \in Q$, temos $y(1-q) \notin MQ$ e assim, $0 = y(1-q)a = ya - yqa = yqa$, de onde segue que $MQI = yQI = 0$, ou seja, $I \subseteq r(MQ) = r(M) = 0$. Neste caso, segue do Corolário 3.4 que $Q \simeq MQ$, como R-módulos.

Temos algumas suspeitas de que, neste contexto que estamos trabalhando, temos $r(x) = r(y)$, para todos $x, y \notin MQ$, mas não sabemos ao certo.

Vejamos agora como se comportam os primos, semiprimos e completamente primos nesta correspondência. Já sabemos que R-submódulos completamente primos e primos contidos em MQ são cinturas de M. O mesmo pode ser dito sobre os R-submódulos semiprimos, e é o que mostra nosso próximo resultado.

PROPOSIÇÃO 3.5: *Sejam M um R-módulo à direita primo com comparabilidade e L um R-submódulo semiprimo de M tal que $L \subseteq MQ$. Então L é uma cintura de M.*

Prova: Sejam $x \in L$ e $y \notin L$. Se $xR \subseteq yR$, para todo $y \notin L$, então não há nada para provar. Por outro lado, se existir $y \notin L$ com $y \in (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus Q$, então temos $ys \in xR$, para um certo $s \in S$. Assim, $yQ = ysQ \subseteq xQ \subseteq L$. Se $y \notin MQ$, então temos $yQ = MQ$ e assim, $L = MQ$ é uma cintura de M. Agora, se $y \in MQ$, então $y = mq$, para certos $m \in M$ e $q \in Q$, por 1.5. Mas então, $mqRq = yRq \subseteq yQ \subseteq L$, de onde segue $y = mq \in L$, um absurdo. Conseqüentemente, tal y não pode existir e L é uma cintura. $\square$

O próximo resultado mostra que a correspondência definida anteriormente preserva os primos, semiprimos e completamente primos.

TEOREMA 3.6: *Sejam M um R-módulo com comparabilidade, tal que $0 \neq MQ \subset M$, e L uma cintura não nula de M. Então:*

(i) L é completamente primo em M se e somente se $(L : x)$ é completamente primo em R, $\forall x \in M \setminus L$.

(ii) L é primo em M se, e somente se, $(L : x)$ é primo em R, $\forall x \in M \setminus L$.

(iii) L é semiprimo em M se e somente se $(L : x)$ é semiprimo em R, $\forall x \in M \setminus L$.

Prova: (i) Suponhamos que L seja um R-submódulo completamente primo de M. Sejam $x \in M \setminus L$ e $a, b \in R$ tais que $ab \in (L : x)$. Suponhamos também que $a \notin (L : x)$. Então $xa \notin L$ e $xab \in L$. Conseqüentemente, $Mb \subseteq L$, e segue que $b \in (L : x)$. Logo, $(L : x)$ é completamente primo em R.

Reciprocamente, suponhamos que $(L : x)$ é um ideal completamente primo de R, sempre que $x \in M \setminus L$. Fixado $x \notin L$, se existe $t \in R$ com $xt \in L$ e $Mt \nsubseteq L$, então existe também $m \in M \setminus L$ com $mt \notin L$, de onde segue que $t \notin (L : m)$. Por outro lado, temos $t \in P_r(L) = P_r(m(L : m)) = (L : m)$, uma vez que $(L : m)$ é completamente primo por hipótese. A contradição obtida dá o resultado desejado.

(ii) Suponhamos que L seja um R-submódulo primo de M. Sejam $x \in M \setminus L$ e $a, b \in R$ tais que $aRb \subseteq (L : x)$. Se $a \notin (L : x)$, então $xa \notin L$, e como $aRb \subseteq (L : x)$, temos $xaRb \subseteq L$. Segue daí que $Mb \subseteq L$. Logo, $xb \in L$ e assim, $b \in (L : x)$, ou seja, $(L : x)$ é um ideal à direita primo.

Reciprocamente, suponhamos que $(L : x)$ é um ideal à direita primo, sempre que $x \notin L$. Consideremos $m \in M$ e $t \in R$ tais que $mRt \subseteq L$, com $m \notin L$. Então $L = m(L : m)$, com $(L : m)$ um ideal à direita primo. Se $Mt \nsubseteq L$, então existe $x \in M \setminus L$ com $xt \notin L$. Daí, $t \notin (L : x)$. Comparemos x e m. Se $x = mr$, algum $r \in R$, então $mrt = xt \notin L$. Mas $mrt \in mRt \subseteq L$. Logo, só podemos ter $m \in (xR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus Q$. Neste caso, existe $s \notin Q$ com $ms \in xR$. Assim, existe $b \in R$ com $ms = xb$. Logo, $xbRt = msRt \subseteq mRt \subseteq L$, de onde vem que $bRt \subseteq (L : x)$. Isto implica que $b \in (L : x) \subseteq Q$, pois $(L : x)$ é primo e $t \notin (L : x)$. Desta forma, temos $ms = xb \in L$, isto é $s \in P_r(L)$. Agora, como L é cintura segue que $P_r(L) \subseteq Q$, pois M é primo. A contradição obtida mostra que L é primo.

(iii) Suponhamos que L seja um R-submódulo semiprimo de M. Sejam $x \in M \setminus L$ e $a \in R$ tais que $aRa \subseteq (L : x)$. Mas então $xaRa \subseteq L$, de onde vem que $xa \in L$, ou seja, $a \in (L : x)$. Logo, $(L : x)$ é um ideal à direita semiprimo de R.

Reciprocamente, suponhamos que $(L : x)$ é um ideal à direita semiprimo de R, sempre que $x \notin L$. Consideremos $m \in M$ e $s \in R$ tais que $msRs \subseteq L$ com $ms \notin L$. Assim, $m \notin L$ e temos $(L : m)$ semiprimo em R. Como $sRs \subseteq (L : m)$ segue que $s \in (L : m)$, ou seja, $ms \in L$. A contradição obtida mostra o resultado desejado. Finalizamos assim a prova do teorema. □

Vejamos algumas conseqüências interessantes deste teorema. O próximo resultado estende II.2.6 para este contexto.

COROLÁRIO 3.7: *Sejam M e R como no teorema anterior. Então todo R-submódulo semiprimo de M contido em MQ é também um R-submódulo primo de M.*

Prova: Como todo ideal à direita semiprimo de R contido em Q é primo, por II.2.6, o resultado segue diretamente do teorema anterior. □

O argumento usado na prova de (i) do teorema acima também pode ser usado para mostrar o seguinte:

COROLÁRIO 3.8: *Sejam M e R como no teorema anterior, e L uma cintura não nula de M. Então:*

(i) Se $x \notin L$ e $(L : x)$ é um ideal completamente primo de R, então $(L : x)$ é maximal na família $\{(L : m)\}_{m \notin L}$.

(ii) Se L é um R-submódulo completamente primo de M contido em MQ, então a família $\{(L : m)\}_{m \notin L}$ é unitária.

Prova: (i) Seja $m \notin L$ e $a \in (L : m)$. Então $ma \in L$ e assim, $a \in P_r(L) = P_r(x(L : x)) = (L : x)$, uma vez que estamos supondo $(L : x)$ completamente primo. Portanto, $(L : m) \subseteq P_r(L) = (L : x)$.

(ii) É imediato a partir de (i) e do Teorema 3.6(i). □

Já vimos anteriormente que se I é uma cintura de R e $x \in M$, então xI é uma cintura de M. Mostraremos agora que $P_r(xI) = P_r(I)$, quando R é um anel primo, ou equivalentemente, quando I contém $rad(R)$. Isto completaria a extensão do Teorema 2.3 de [FT$_2$] ao nosso contexto. Permanece em aberto a questão de saber se este resultado pode ser estendido para as cinturas I de R contidas em $rad(R)$.

PROPOSIÇÃO 3.9: *Seja M um R-módulo com comparabilidade. Se I é uma cintura de R tal que $P_r(I) \subseteq J(R)$ e $x \in M$ é tal que $xI \neq 0$, então $P_r(xI) = P_r(I)$.*

Prova: Já sabemos que xI é uma cintura de M, Logo, temos $xI \subseteq \bigcap_{m \notin xI} mP_r(xI)$. Como $x \notin xI$, segue que $P_r(I) \subseteq P_r(xI)$, pois dado $a \in P_r(I)$, existe $b \notin I$, com $ba \in I$. Mas então $xba \in xI$ e $xb \notin xI$, pelo mesmo argumento usado no final da prova do Teorema 3.3.

Consideremos agora, $y \notin xI$. Se $y = xr$, então $r \notin I$ e $I \subseteq rP_r(I)$. Assim, temos $xI \subseteq xrP_r(I) = yP_r(I)$. Se $x \in (yR)S^{-1}$, onde $S = R \setminus P_r(I)$, então existe $s \in S$ com $xs \in yR$. Logo, $xI \subseteq xP_r(I) = xsP_r(I) \subseteq yP_r(I)$. Portanto, sempre temos $xI \subseteq yP_r(I)$, para todo $y \notin xI$, ou seja, $xI \subseteq \bigcap_{y \notin xI} yP_r(I)$. Mas então o argumento feito na prova de (ii)$\Rightarrow$(i) do Teorema 2.9, mostra que $P_r(xI) \subseteq P_r(I)$, resultando na igualdade $P_r(xI) = P_r(I)$, como queríamos provar. □

Observamos que a prova apresentada aqui é bem mais simples que a de [FT$_2$], além do resultado ser um pouco mais geral, pois vale também para cinturas contidas em $rad(R)$, desde que $P_r(I) \subseteq J(R)$.

CAPÍTULO IV - RESULTADOS ADICIONAIS

Reservamos este último capítulo para apresentar alguns resultados adicionais que foram obtidos durante o estudo dos anéis com comparabilidade.

§1 - ANÉIS DE CINTURAS PRINCIPAIS

Vamos considerar agora um anel de cinturas principais à direita R, isto é, todas as cinturas de R são do tipo aR, para algum $a \in R$. Suponhamos que R possui alguma cintura não trivial. Neste caso, temos que $C = \bigcup\{I : I \text{ é cintura de } R\}$, é a maior cintura de R. Observemos que $C \subseteq J(R)$. Vamos mostrar nesta secção o seguinte resultado principal:

TEOREMA 1.1: *Seja R um anel de cinturas principais. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(i) R é um D-anel à direita.
(ii) R/C é um R-módulo à direita distributivo.

A prova deste teorema seguirá de alguns lemas prévios.

LEMA 1.2: *Seja $I = bR$ uma cintura de R. Se J é outra cintura de R, então bJ também é uma cintura de R.*

Prova: Seja $x \notin bJ \subseteq bR$. Se $x \notin I = bR$, temos claramente $bJ \subseteq bR \subseteq xR$. Se $x \in I \setminus bJ$ então $x = br$, para um certo $r \notin J$. Neste caso, $J \subset rR$ e portanto, $bJ \subset brR = xR$, pois $x \notin bJ$. □

LEMA 1.3: *Seja R um anel de cinturas principais. Então, para todo ideal à direita J de R, o qual está contido em C, existem um ideal à direita H de R contendo C e um elemento $b \in R$, tais que $J = bH$.*

Prova: Seja J um ideal como no enunciado do lema. Se J é uma cintura de R, então o resultado é claro. Suponhamos então que J não é uma cintura de R. Neste caso, consideremos $I = \bigcap\{ \text{ cinturas de } R \text{ contendo } J\}$. Então I é a menor cintura de R que contém J. Assim, temos $I = bR$, para um certo $b \in R$. Segue então de I.2.1, que $J = b(J : b)$. Agora como bC é cintura de R, pelo lema anterior, e também $bC \neq bR$, pois $b \notin bC$, temos $bC \subset J \subseteq I = bR$. Segue daí que $C \subset (J : b)$. Isto finaliza a prova. □

Salientamos neste momento que dado um ideal J de R, então o elemento gerador da menor cintura que contém J, satisfaz a condição do lema acima.

Estamos agora em condições de provar o teorema 1.1.

Prova do Teorema 1.1: A implicação (i)$\Rightarrow$(ii) é imediata. Consideremos então $A, B, D \in \mathcal{L}_r(R)$,onde $\mathcal{L}_r(R)$ denota o reticulado de ideais à direita de R. Se algum destes ideais estiver contido em outro, então a distributividade $A \cap (B + D) = A \cap B + A \cap D$ é trivial. Suponhamos então que nenhum deles está contido em qualquer dos demais. Sendo assim, a menor cintura que os contém é a mesma, digamos $I = bR$, para algum $b \in R$. Neste caso, temos $A = bH_A$, $B = bH_B$ e $D = bH_D$, onde $H_A = (A : b)$, $H_B = (B : b)$ e $H_D = (D : b)$. Assim,

$$\begin{aligned} A \cap (B + D) &= bH_A \cap (bH_B + bH_D) \\ &= bH_A \cap b(H_B + H_D) \end{aligned}$$

Agora, observamos que se $x \in bH_A \cap b(H_B + H_D)$, então temos $x = bh = bh'$, onde $h \in H_A$ e $h' \in H_B + H_D$. Como $x \in A$, segue que $h' \in H_A$, de onde vem que $x = bh' \in b(H_A \cap (H_B + H_D))$. Assim,

$$bH_A \cap b(H_B + H_D) \subseteq b(H_A \cap (H_B + H_D))$$

A outra inclusão é clara, ou seja, temos

$$bH_A \cap b(H_B + H_D) = b(H_A \cap (H_B + H_D)).$$

Logo, como $H_A \cap (H_B + H_D) = H_A \cap H_B + H_A \cap H_D$, pois R/C é um R-módulo à direita o qual é distributivo, temos

$$\begin{aligned} A \cap (B + D) &= b(H_A \cap (H_B + H_D)) \\ &= b((H_A \cap H_B) + (H_A \cap H_D)) \\ &= b(H_A \cap H_B) + b(H_A \cap H_D) \\ &\subseteq (bH_A \cap bH_B) + (bH_A \cap bH_D) \\ &= (A \cap B) + (A \cap D) \end{aligned}$$

Isto mostra $A \cap (B + D) \subseteq (A \cap B) + (A \cap D)$. A inclusão na outra direção é sempre verdadeira, portanto temos $A \cap (B + D) = (A \cap B) + (A \cap D)$. A implicação (ii)$\Rightarrow$(i) agora segue. □

Daremos agora algumas propriedades destes anéis. Precisamos de uma nova definição para facilitar nossa escrita:

DEFINIÇÃO 1.4: *Seja A um anel qualquer e M um A-módulo noetheriano à direita. Dizemos que M é um A-módulo noetheriano à direita de tipo n, se todo A-submódulo de M é gerado por no máximo n elementos. Dizemos que A é um anel noetheriano à direita de tipo n, se A é um A-módulo noetheriano à direita de tipo n.*

Apresentamos no próximo resultado uma versão do Teorema 4.3 do capítulo II.

TEOREMA 1.5: *Sejam R um anel de cinturas principais e C sua maior cintura. Então R é noetheriano à direita se, e somente se, R/C é um R-módulo noetheriano à direita.*

Prova: Dado um ideal à direita J de R, vamos mostrar que J é finitamente gerado. Se $J \supseteq C$, então $\bar{J} = J/C \in \mathcal{L}_r(R/C)$ e segue que existem $\bar{a}_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, tais que $\bar{J} = \bar{a}_1\bar{R}+\cdots+\bar{a}_n\bar{R}$. Daí, $J = a_1R+\cdots+a_nR+cR$, onde $C = cR$. Agora, como C é cintura e $a_i \notin C$, $i = 1,...,n$, temos $C = cR \subset a_iR$, para todo $i \in \{1,...,n\}$. Assim, temos $J = a_1R + \cdots + a_nR$, como queríamos mostrar.

Suponhamos agora $J \subseteq C$. Segue então do Lema 1.3 que existem $b \in R$ e um ideal à direita H de R com $H \supseteq C$, tal que $J = bH$. Pela parte anterior, temos $H = h_1R + \cdots + h_kR$. Logo, temos $J = bH = b(h_1R + \cdots + h_kR) = bh_1R + \cdots + bh_kR$. Isto completa a prova. □

O teorema acima tem as seguintes conseqüências imediatas:

COROLÁRIO 1.6: *Seja R um anel de cinturas principais e C sua maior cintura. Se R/C é um R-módulo noetheriano à direita de tipo n, então R é um anel noetheriano à direita de tipo n.*

COROLÁRIO 1.7: *Seja R um anel de cinturas principais e seja C a maior cintura de R. Então R é um anel de ideais principais se, e somente se, R/C é um R-módulo à direita de submódulos principais.*

Vamos supor agora que R é um anel de cinturas principais com (MP), isto é, existe um ideal completamente primo P contido em $J(R)$. Nestas condições temos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1.8: *Sejam R um anel de cinturas principais e P um ideal completamente primo de R. Se $P \subseteq C$, então P é uma cintura de R.*

Prova: Seja P um ideal completamente primo de R tal que $P \subseteq C$. Seja $I = bR$ a menor cintura de R que contém P. Sabemos que $P = b(P : b)$, onde $(P : b) \supset C$, pelo lema 1.2. Então existe $h \in (P : b) \setminus P$ com $bh \in P$. Logo, $b \in P$, e conseqüentemente, $P = bR$. Portanto, $P = I$ é uma cintura de R. □

Decorre então de I.2.7, que na situação da proposição acima sempre temos $P = xP$, para todo $x \notin P$.

Neste momento faremos uma nova definição:

DEFINIÇÃO 1.9: *Dizemos que R é um anel com comparabilidade fraca à direita em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$ se, para todos $a, b \in R$, temos $aR \subseteq bR$ ou $bR \subseteq aR$ ou $aP = bP$. Se R possui esta comparabilidade em relação a todo ideal completamente primo contido em $J(R)$, então dizemos que R é um anel com comparabilidade fraca à direita.*

Pelo que vimos durante este trabalho, segue que a comparabilidade implica a comparabilidade fraca. Ainda é um problema em aberto saber se vale a recíproca.

O próximo resultado mostra que todo anel de cinturas principais com (MP) é um anel que possui a comparabilidade fraca em relação a todo ideal completamente primo contido na sua maior cintura.

PROPOSIÇÃO 1.10: *Sejam R um anel de cinturas principais e P um ideal completamente primo contido em C. Então, para cada $x, y \in R$, temos $xR \subseteq yR$ ou $yR \subseteq xR$ ou $xP = yP$.*

Prova: Sejam $x, y \in R$ tais que $xR \not\subseteq yR$ e $yR \not\subseteq xR$. Neste caso, a menor cintura que contém x e y é a mesma, digamos $I = bR$, para certo $b \in R$. Assim sendo, temos $x = br$ e $y = bs$, onde $r, s \in R$. Agora, como bP é cintura, pelo lema 1.2, e $bP \subset bR = I$, segue que $r, s \notin P$. Então $rP = P = sP$, e segue que $xP = brP = bsP = yP$, como queríamos mostrar. □

Não conseguimos provar que estes anéis possuem a comparabilidade em relação a algum ideal completamente primo contido em $J(R)$.

Vamos agora analisar os ideais primos de um anel de cinturas principais. Com relação a eles, podemos mostrar o seguinte:

PROPOSIÇÃO 1.11: *Seja R um anel de cinturas principais. Se L é um ideal à direita primo de R com $P_r(L) \subseteq C$ então L é uma cintura de R.*

Prova: Seja L um ideal à direita de R tal que L é primo e $P_r(L) \subseteq C$. Consideremos $x \in L$ e $y \notin L$. Se $xP_r(L) = yP_r(L)$, então, para todo $p \in P_r(L)$, temos $yRp \subseteq yP_r(L) = xP_r(L) \subseteq L$, pois $P_r(L)$ é bilateral. Como $y \notin L$ e L é primo, devemos ter $P_r(L) = L$, de onde segue que L é cintura de R. Se $xP_r(L) \neq yP_r(L)$, para todo $y \notin L$, então segue da proposição anterior que $xR \subseteq yR$, ou seja $L \subseteq yR$. Isto completa nossa prova. □

§2 - CONDIÇÕES DE CADEIA EM ANÉIS COM COMPARABILIDADE

Nesta secção vamos discutir sobre condições ascendente (descendente) de cadeia para cinturas, ou a.c.c. sobre cinturas, por brevidade, (respectivamente, d.c.c. sobre cinturas), em um anel R com comparabilidade. Continuaremos denotando por Q o maior ideal completamente primo contido em $J(R)$.

2.1 - A.C.C. SOBRE CINTURAS

Ferrero e Törner estudaram a.c.c. sobre cinturas em um D-anel, ver [FT_3]. Neste estudo eles não usaram as propriedades específicas de D-anéis, e sim propriedades que também valem para anéis com comparabilidade. Assim sendo, podemos repetir toda a costrução feita em [FT_3; Secção 3], e obter o seguinte resultado:

TEOREMA 2.1.1: *Seja R um anel primo com comparabilidade. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) R satisfaz a.c.c. sobre cinturas.

(ii) Para toda cintura I de R, a família $\{bQ : b \in I\}$ possui membro máximo.

(iii) Para toda cintura I de R e todo ideal primo L contido em Q, a família $\{bL : b \in I\}$ possui membro máximo.

(iv) Toda cintura não nula I de R pode ser escrita de maneira única como um produto $I = L_1 L_2 \ldots L_t$, onde $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_t$ são ideais primos de R, contidos em Q.

(v) Dados as cinturas não nulas I_1, I_2 de R, com $I_1 \subseteq I_2$, existe uma única cintura I de R tal que $I_2 I = I_1$.

(vi) Para toda cintura não nula I de R, temos $IQ \neq I$.

(vii) Dado uma cintura I de R, existem um elemento $a \in R$ e um ideal completamente primo P contido em Q, tais que $I = aP$. Além disso, para todo ideal primo L de R contido em Q, temos $LQ \neq L$.

Sob estas condições equivalentes, todo ideal primo contido em Q é também completamente primo e toda cintura é um ideal bilateral.

2.2 - D.C.C. SOBRE CINTURAS

Vamos considerar agora R um anel com comparabilidade o qual satisfaz d.c.c. sobre cinturas. Continuaremos a denotar por Q a maior cintura de R. Obsevamos que este caso não foi estudado mesmo para D-anéis. Temos o seguinte:

TEOREMA 2.2.1: *Seja R um anel com comparabilidade satisfazendo d.c.c. sobre cinturas. Então Q é nilpotente. Em particular, $rad(R) = Q$.*

Prova: Consideremos a cadeia descendente de cinturas

$$Q \supseteq Q^2 \supseteq \ldots \supseteq Q^n \supseteq \ldots$$

Como R possui d.c.c. sobre cinturas, existe $n \in I\!N$ tal que Q^n é minimal. Se $Q^n = 0$, então não há nada para se provar. Se $Q^n \neq 0$, então temos $Q^{n+1} = Q^n \neq 0$, de onde segue que existe $q \in Q$ com $qQ^n \neq 0$. Observamos agora que a família

$$\mathcal{F} = \{I : I \text{ é cintura e } IQ^n \neq 0\}$$

é não vazia, pois qQ é cintura de R e $qQQ^n = qQ^{n+1} = qQ^n \neq 0$. Sendo assim, possui um menor elemento K. Assim, existe $k \in K$ tal que $kQ^n \neq 0$. Mas, $kQ^n \subseteq K \subseteq Q^n$, visto que $Q^n Q^n = Q^{2n} = Q^n \neq 0$. Além disso,

$(kQ^n)Q^n = kQ^n \neq 0$, de onde segue que $kQ^n = K$, pois kQ^n é cintura de R. Logo, existe $x \in Q^n \subset Q$ com $kx = k$. Como $x \in Q$, segue que $1 - x \in U(R)$, e então $k = 0$. Isto produz uma contradição com o fato de $kQ \neq 0$. Logo, só podemos ter $Q^n = 0$, e Q é nilpotente, como queríamos mostrar. □

A partir deste resultado, podemos concluir que se R também é um anel primo, então R não possui cinturas não triviais, de onde vem que R satisfaz a.c.c. sobre cinturas. Se R não é um anel primo, então as cinturas de R estão todas contidas em $rad(R)$. Vale lembrar que a estrutura de tais cinturas não foi determinada ainda.

§3 - SOBRE LOCALIZAÇÕES

Nesta secção queremos discutir um pouco sobre localizações. Vamos Começar lembrando alguns fatos gerais.

Dado um anel A, dizemos que $S \subseteq A$, com S multiplicativamente fechado, é um conjunto de denominadores à direita se S satisfaz as seguintes condições:
(i) Se $s \in S$ e $a \in A$, existe $t \in S$ e $b \in A$ com $at = sb$. (S é um sistema de Ore).
(ii) Se $sa = 0$ com $s \in S$ e $a \in A$, então existe $t \in S$ tal que $at = 0$.

Se S é um conjunto de denominadores à direita, então o anel $A[S^{-1}] = A_S$, o localizado de A em relação a S, existe. Neste caso, A_S é da forma $A_S = A \times S/\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência definida por:

$$(a, s) \sim (b, t) \leftrightarrow \exists c, d \in A \text{ tal que } ac = bd \text{ e } sc = td \in S$$

Num tal anel, as operações são definidas por:

$$\begin{aligned} (a, s) + (b, t) &= (ac + bd, u) && \text{onde } u = sc = td \in S \\ (a, s).(b, t) &= (ac, tu) && \text{onde } sc = bu \text{ e } u \in S \end{aligned}$$

Quando S é um conjunto de denominadores em A, dizemos que um ideal à direita I de A é S-saturado se, para cada $a \in A$ e $s \in S$ com $as \in I$, então $a \in I$. Sabemos que existe uma correspondência biunívoca entre os ideais à direita S-saturados de A e os ideais à direita de A_S, dada por $I \mapsto I_S$ e $L \mapsto \varphi^{-1}(L)$, onde $\varphi : A \to A_S$ é o homomorfismo canônico. Para maiores detalhes, ver [S; Chap. II] ou [R; Chap. 3].

O próximo resultado dá uma condição necessária e suficiente para que um ideal de um anel R seja S-saturado, onde $S = R \setminus P$, sendo P um ideal completamente primo contido em $J(R)$.

PROPOSIÇÃO 3.1: *Sejam R um anel qualquer, L um ideal à direita de R e P um ideal completamente primo contido em $J(R)$. Se $S = R \setminus P$ é um conjunto de denominadores, então L é S-saturado se, e somente se, $P_r(L) \subseteq P$.*

Prova: Suponhamos que L seja um ideal à direita S-saturado de R. Consideremos $a \in P_r(L)$. Então existe $x \notin L$ com $xa \in L$. Como L é S-saturado, segue que $a \in P$. Logo, temos $P_r(L) \subseteq P$.

Reciprocamente, suponhamos que $P_r(L) \subseteq P$. Sejam $x \in R$ e $s \in S$ tais que $xs \in L$. Se $x \notin L$, então $s \in P_r(L) \setminus P$, o que dá uma contradição. Logo, só podemos ter $x \in L$ e assim, L é S-saturado. □

Esta proposição tem conseqüências importantes:

COROLÁRIO 3.2: *Seja R um anel primo com comparabilidade. Se $S = R \setminus Q$ é um conjunto de denominadores à direita, então R_Q é um anel de cadeia à direita.*

Prova: Basta ver que os ideais à direita de R_Q estão em correspondência biunívoca com os ideais S-saturados de R, e estes são exatamente as cinturas de R, pela proposição anterior e por II.2.11. □

Se denotarmos por $\mathcal{L}_r(R)$ e $\mathcal{L}_c(R)$ o reticulado de ideais à direita e o reticulado de cinturas de R, respectivamente, então podemos enunciar o seguinte:

COROLÁRIO 3.3: *Seja R um anel primo com comparabilidade tal que $S = R \setminus Q$ seja um conjunto de denominadores à direita. Então existe um anel de cadeia à direita R' tal que $\mathcal{L}_c(R) \simeq \mathcal{L}_r(R')$.*

Prova: Pela correspondência biunívoca acima, basta tomar $R' = R_Q$, para obtermos o resultado desejado. □

O Corolário 3.2 acima mostra que se R é um anel com comparabilidade, então a localização em Q, quando possível, resulta em um anel de cadeia. Na verdade, este resultado pode ser estendido para os demais ideais completamente primos contido em $J(R)$, com outros argumentos mais diretos.

PROPOSIÇÃO 3.4: *Seja R um anel com comparabilidade em relação a um ideal completamente primo P contido em $J(R)$, tal que $S = R \setminus P$ é um conjunto de denominadores à direita. Então R_P existe e é um anel de cadeia à direita.*

Prova: Sejam $\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in R_P$. Então temos $a, b \in R$. Se $aR \subseteq bR$, então existe $r \in R$ tal que $a = br$. Assim, $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}\frac{r}{1}$, isto é, $\frac{a}{1}R_P \subseteq \frac{b}{1}R_P$. Agora, se $(bR)S^{-1} \subseteq (aR)S^{-1}$, então existe $s \in S$ tal que $bs = ar$, para algum $r \in R$. Sendo assim, temos $\frac{b}{1} = \frac{a}{1}\frac{r}{s}$, ou seja, $\frac{b}{1}R_P \subseteq \frac{a}{1}R_P$.

Dado agora $\frac{a}{s} \in R_P$, podemos escrever $\frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s}$, onde $\frac{1}{s} \in U(R_P)$. Logo, dados $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in R_P$, sempre temos $\frac{a}{s}R_P \subseteq \frac{b}{t}R_P$ ou $\frac{b}{t}R_P \subseteq \frac{a}{s}R_P$, pelo raciocínio feito acima. Portanto, R_P é um anel de cadeia à direita, como queríamos mostrar. □

Gostaríamos agora de investigar a questão de saber quando podemos de fato localizar em algum ideal completamente primo P contido em $J(R)$, quando R é um anel com comparabilidade, isto é, quando $S = R \setminus P$ é um conjunto de denominadores à direita. Como S é um sistema de Ore, a única condição que falta garantir é que, se temos $sa = 0$, para $s \in S$ e $a \in R$, então deve existir um elemento $t \in S$ tal que $at = 0$. O próximo resultado dá uma condição para podermos localizar em P:

TEOREMA 3.5: *Seja R um anel primo com comparabilidade. Então $S = R \setminus P$ é um conjunto de denominadores à direita se, e somente se, $N_l(R) \subseteq P$.*

Prova: Suponhamos que $N_l(R) \subseteq P$ e que $sa = 0$, com $s \in S$ e $a \neq 0$. Então, $s \in N_l(R)$, o que dá uma contradição. Logo, $sa = 0$ implica $a = 0$ e segue que $S = R \setminus P$ é um conjunto de denominadores.

Reciprocamente, suponhamos que $S = R \setminus P$ é um conjunto de denominadores à direita. Seja $x \in N_l(R)$. Então existe $a \in R \setminus \{0\}$ com $xa = 0$. Se $x \notin P$, então deve existir $t \in S$ tal que $at = 0$, ou seja, $l(t) \neq 0$, de onde segue que $t \in N_r(R) = N_g(R) \subseteq P$, por II.3.3. Esta contradição mostra que só podemos ter $x \in P$ e conseqüentemente, $N_l(R) \subseteq P$. □

Também podemos dar a seguinte condição para a localização em P. Lembremos antes, que se toda seqüência crescente de anuladores à direita de elementos de R é estacionária, então dizemos que R satisfaz a condição ascendente de cadeia (a.c.c.) para anuladores principais à direita.

PROPOSIÇÃO 3.6: *Sejam R um anel qualquer e P um ideal completamente primo de R. Se R satisfaz a condição ascendente de cadeia para anuladores principais à direita e $S = R \setminus P$ é um sistema de Ore, então S é um conjunto de denominadores á direita.*

Prova: Sejam $s \in S$ e $a \in R$ tais que $sa = 0$. Como $r(s) \subseteq r(s^2) \subseteq r(s^3) \subseteq \ldots$, deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $r(s^n) = r(s^k)$, para todo $k \geq n$. Por outro lado, existem $t \in S$ e $b \in R$ com $at = s^n b$, pois S é um sistema de Ore. Assim temos $s^{n+1}b = sat = 0$, ou seja, $b \in r(s^{n+1}) = r(s^n)$, de onde vem que $at = s^n b = 0$. Isto completa a prova. □

Como em todo anel com comparabilidade temos que $S = R \setminus P$ é um sistema de Ore, segue da proposição acima que se R satisfaz a.c.c. para anuladores principais à direita, então o anel R_P existe, para todo ideal completamente primo P contido em $J(R)$.

Pelo que foi exposto até o momento, o seguinte corolário fica evidente:

COROLÁRIO 3.7: *Seja R um anel com comparabilidade satisfazendo a.c.c. sobre anuladores principais à direita. Então existe um anel de cadeia à direita R' tal que $\mathcal{L}_c(R) \simeq \mathcal{L}_r(R')$.*

BIBLIOGRAFIA

[B] Beachy, J. A., Some aspects of noncommutative localization, Noncommutative Ring Theory, Kent State 1975, Springer LNM 545.

[BBT] Bessenrodt, C., Brungs, H. H., Törner, G., Right chain rings, Part 1, Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik 181, 1990.

[Br] Brungs, H. H., Rings with a distributive lattice of right ideals, J. Algebra 40(1976), 392 - 400.

[C] Camillo, V., Distributive modules, J. Algebra 36(1975), 16 - 25.

[D_1] Dauns, J., Prime modules, J. Reine Angew. Math. 298(1978), 156 - 181.

[D_2] Dauns, J., Semiprime modules and rings, Springer LNM 1448.

[F] Ferrero,M., Ideais primos em extensões de anéis, XIII Escola de Álgebra, Unicamp, 1994.

[FT_1] Ferrero, M., Törner, G., Rings with annihilator chain condition and right distributive rings, Proc. Amer. Math. Soc. 119(1993), 401 - 405.

[FT_2] Ferrero, M., Törner, G., On the ideal structure of right distributive rings, Comm. Algebra 21(8)(1993), 2697 - 2713.

[FT_3] Ferrero, M. Törner, G., On waists of right distributive rings, Forum Math. 7(1995), 419 - 433.

[G] Goodearl, K. R., Ring Theory, Nonsingular Rings and Modules, Marcel Dekker, New York, 1976.

[L] Lam, Y., A First Course in Noncommutative Rings, GTM 131,Springer-Verlang, New York, 1991.

[La] Lambek, J., Lectures on Rings and Modules, Chelsea Publishing Company, New York, 1976.

[M] Mazurek, R., Distributive rings with Goldie dimension one, Comm. Algebra 19(3)(1991), 931 - 944.

[MP] Mazurek, R., Puczylowski, E. R., On nilpotent elements of distributive rings, Comm. Algebra 18(2)(1990), 463 - 471.

[R] Rowen, L., Ring Theory, v. 1, Academic Press, inc, San Diego, 1988.

[S] Stenström, B., Rings of Quotients, Springer-Verlang,Berlim-Heidelberg, 1995.

[St] Stephenson, W., Modules whose lattice of submodules is distributive, Proc. London Math. Soc. 28(1974), 291 - 310.