

CELENE BURIOL

ALGUNS TEOREMAS DE EXISTÊNCIA DE GRÁFICOS MÍNIMOS EM  
DOMÍNIOS NÃO CONVEXOS DO PLANO

Dissertação apresentada como requisito  
parcial à obtenção do grau de Mestre.  
Curso de Pós-Graduação em Matemática,  
Instituto de Matemática,  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul.  
Orientador: Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll.

Porto Alegre  
1995

1999 : 182459 - 5

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Buriol, Celene

Alguns Teoremas de Existência de Gráficos Mínimos em Domínios não Convexos do Plano / Celene Buriol. — Porto Alegre: CPGM da UFRGS, 1995.

40 p.: il.

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Curso de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, 1995.

Orientador: Jaíne Bruck Ripoll

A meus Pais Lídia e Otávio  
e minhas tias Maria (in memorian) e Irma.

## Agradecimentos

Ao professor Jaime Ripoll, pela orientação e contribuição na minha formação Matemática.

A todos os que de alguma forma acreditaram em meu trabalho e me animaram nas etapas difíceis com discussões proveitosas e interessantes.

A UFRGS/CNPQ pelo apoio financeiro e pelo ambiente de estímulo ao trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, pelo incentivo dado ao seu corpo docente na aprimoração de sua formação acadêmica.

A Jane pelo eficiente trabalho na secretaria e ao Flávio pela paciência nos trabalhos de digitação.

À Deus, pela saúde e perseverança.

## Índice

Introdução .....	1
Notação Básica .....	3
Capítulo 0 - Preliminares .....	4
Capítulo 1 - Resultados Básicos.....	6
1.1 - Método de Perron .....	9
1.2 - O Contra-exemplo do Tetraedro .....	13
1.3 - As Barreiras e o Método de Perron .....	16
Capítulo 2 - Três Teoremas de Existência de Gráficos Mínimos em Domínios Não	
Convexos do Plano.....	21
Teorema 1.....	21
Teorema 3.....	30
Teorema 5.....	37

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo provar a existência de gráficos mínimos em domínios do plano.

Será garantido através do Método de Perron a existência de um gráfico mínimo num domínio limitado do plano. Será também estudado o comportamento dessa solução na fronteira do seu domínio através do conceito de função barreira.

Serão provados três teoremas que garantem a existência de soluções do problema de Dirichlet para as mínimas em domínios não convexos e não compactos do plano com condições especiais de fronteira, sendo estes discutidos no trabalho de J. Ripoll and F. Tomi [RT]

## Abstract

This work has as objective to prove some existence theorems for minimal graphs over planar domains.

It will be guaranteed employ the Perron method one existence of one minimal's graph in arbitrary bounded domain. It will be too studied this solution at the boundary through the concept of barrier function.

We obtain three existence theorems to Dirichlet's problem for non convex and non compacts domains having special boundary data being that results are contained in the J. Ripoll's and F. Tomi's works [RT].

### Introdução:

Seja um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  ( $u \in C^2(\Omega)$ ). Sabemos que o subconjunto  $S = \{(x_1, x_2, u(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in \Omega\}$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície mínima se  $u$  satisfizer a equação

$$\left(1 + u_{x_1}^2\right)u_{x_2x_2} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + \left(1 + u_{x_2}^2\right)u_{x_1x_1} = 0 \quad (1.1)$$

Dada uma função  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas consiste em determinar a existência e a unicidade das soluções do seguinte problema de valor de contorno

$$\left(1 + u_{x_1}^2\right)u_{x_2x_2} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + \left(1 + u_{x_2}^2\right)u_{x_1x_1} = 0 \quad \text{em } \Omega$$

e

$$u|_{\partial\Omega} \equiv f \quad (1.2)$$

Quando  $\Omega$  coincide com o plano  $x_1 \circ x_2$  S. Bernstein, em 1916, provou que a solução  $u = u(x_1, x_2)$  do problema (1.2) deve ser linear afim, ou seja, o gráfico da função  $u$  é um plano. No caso em que  $\Omega$  é limitado e convexo e  $f$  é contínua Tibor Radó assegurou, em uma publicação que se tornou clássica, a existência e unicidade para o problema (1.2) [R1]. Johannes Nitsche generalizou este resultado quando  $f$  é descontínua em um conjunto de medida nula, necessitando supor, entretanto, que a função  $f$  fosse limitada [N<sub>1</sub>]. H. Jenkins e J. Serrin trataram o problema (1.2) quando  $f$  assume valores infinitos em alguma parte de  $\partial\Omega$ , como acontece, por exemplo, na solução encontrada por H. F. Sherk em 1834, dada pela função

$$\log \cos x_1 - \log \cos x_2 \quad |x_1| < \pi/2, \quad |x_2| < \pi/2.$$

Para domínios mais gerais, o problema de Dirichlet para a equação das mínimas ainda permanece em aberto. Em alguns domínios específicos, como o setor, a faixa, o semi-plano e

certos conjuntos convexos não-limitados do plano com dados limitados na fronteira o problema (1.2) foi resolvido por R. Earp e H. Rosenberg [ER], (veja também [L]).

É conveniente ressaltar que para domínios arbitrários não é possível obter-se resultados gerais no sentido de que, podemos provar que em todo domínio não convexo limitado existem dados contínuos na fronteira para os quais (1.2) não tem solução. Como ilustração deste fato apresentamos na seção 1.3 do capítulo 1 o contra-exemplo do tetraedro de Radó.

No capítulo 1, vamos apresentar o método de Perron para superfícies mínimas o qual, com exceção da parte relativa à construção de barreiras, é o mesmo utilizado na obtenção de funções harmônicas em domínios planos (veja [GT]). Provamos também o teorema da Compacidade.

No capítulo 2, capítulo principal da dissertação, será estudado o problema (1.2) para alguns domínios especiais do plano, discutidos no trabalho [RT]. Serão provados três teoremas que garantem a existência de soluções para o problema (1.2) em domínios não convexos e não compactos do plano com condições especiais de fronteira.

### Notação Básica

$\mathbb{R}^2$  : Espaço euclidiano de dimensão 2, com pontos  $x = (x_1, x_2)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  (números reais);

$$\|x\| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}; |x_i| = (x_i^2)^{1/2}.$$

$\partial S$  : Fronteira do conjunto  $S$ ,  $\bar{S}$  = fecho de  $S = S \cup \partial S$

$S' \subset \subset S$  :  $S' \subset S$  e  $\text{dist}(S', \partial S) > 0$ ,  $S'$  está estritamente contido em  $S$ .

$$S - S' := \{x \in S / x \notin S'\}$$

$\Omega$  : Subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ ;  $\Omega$  é domínio se  $\Omega$  também for conexo.

$B_r(y)$  : Bola aberta em  $\mathbb{R}^2$  com centro  $y$  e raio  $r > 0$ .

$C^0(\Omega)$  ( $C^0(\bar{\Omega})$ ) : Conjunto das funções contínuas sobre  $\Omega$  ( $\bar{\Omega}$ ).

$$M_\Omega(v) := \left(1 + v_{x_1}^2\right) v_{x_2 x_2} - 2v_{x_1} v_{x_2} \cdot v_{x_1 x_2} + \left(1 + v_{x_2}^2\right) v_{x_1 x_1}$$

onde  $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $v \in C^2(\Omega)$ .

## Capítulo 0

### Preliminares

O propósito desse capítulo é apresentar alguns resultados que serão utilizados no presente trabalho.

**Definição 1:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $u: \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . Dizemos que  $u$  é solução de uma equação diferencial parcial linear elíptica (E.D.P.L.E) se  $u$  satisfaz a seguinte equação:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + d u = 0$$

onde  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, d$  são funções definidas em  $\Omega$ , e tais que a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e' positiva definida .}$$

**Teorema 2:** (Princípio do máximo forte para E.D.P.L.E). Seja (2)  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , solução de uma equação diferencial parcial linear elíptica. Se existe  $y \in \Omega$  t. q  $u(y) = \sup_{\Omega} u (\inf_{\Omega} u)$  então  $u$  é constante em  $\Omega$ .

**Proposição 3:** Sejam  $u$  e  $v$  soluções da equação (1.1) em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Então  $u - v$  satisfaz uma certa equação diferencial parcial linear elíptica em  $\Omega$ .

Do Teorema 1 e da Proposição 2 podemos concluir que vale o seguinte.

**Teorema 4:** Sejam  $u$  e  $v$  soluções da equação (1.1) em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , se existe  $y \in \Omega$  t. q  $(u - v)(y) = \sup_{\Omega} (u - v) (\inf_{\Omega} (u - v))$  então  $u - v$  é constante em  $\Omega$ .

**Teorema 5:** (Princípio do máximo fraco para uma E.D.P.L.E). Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  solução de uma equação diferencial parcial linear elíptica em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado. Então

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \text{ e } \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$$

**Teorema 6:** Sejam  $u$  e  $v$  soluções da equação (1.1) em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado. Se  $u / \partial\Omega \geq v / \partial\Omega$  então  $u \geq v$  em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Imediata do teorema 4 e do teorema 3, observando que:

$$(u - v) / \partial\Omega \geq 0, \text{ logo } \inf_{\Omega} (u - v) = \inf_{\partial\Omega} (u - v) \geq 0$$

donde segue o resultado.

**Teorema 7:** A seguir enunciaremos o teorema de existência e unicidade para o problema (1.2), provando por Tibor Radó.

**Teorema 8:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio convexo e limitado. Seja  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então existe uma única solução  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  do problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em  $\Omega$  tal que  $u / \partial\Omega = f$ , onde  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é gráfico de uma função diferenciável.

**Teorema 9:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que  $M_{\Omega}(u) \geq (\leq) 0$  em  $\Omega$ . Então

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \text{ (} \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \text{)}$$

## Capítulo 1

### Resultados Básicos

Neste capítulo estudaremos uma possível solução ao problema (1.2) em domínios limitados arbitrários de  $\mathbb{R}^2$ ; com esse objetivo, será desenvolvido o Método de Perron de Subsoluções de Superfícies Mínimas, cuja prova apresentada é similar à prova feita em [GT] pgs. 23-25 para funções sub-harmônicas.

Iniciaremos o capítulo demonstrando o teorema da compacidade, necessário na obtenção do método de Perron e fundamental para provar a existência de superfícies mínimas em alguns domínios do plano apresentadas no capítulo 2.

**Definição 1:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Uma *exaustão* de  $\Omega$  por compactos é uma seqüência de compactos  $K_i \subset \Omega$  tais que  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$  e  $K_i \subset \text{Int } K_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

**Lema 2:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Então existe uma *exaustão* de  $\Omega$ .

**Demonstração:** Definimos o seguinte conjunto.

$$K_n = \left\{ x \in \Omega \cap B_o(n) \mid \text{dist}(x, \partial(\Omega \cap B_o(n))) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $o$  é origem de  $\mathbb{R}^2$ .

Observamos da definição que  $K_i$  é compacto e  $K_i \subset \text{int}K_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$ . Evidentemente

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subset \Omega.$$

Por outro lado, dado  $x \in \Omega$  podemos tomar  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{dist}(x, \partial(\Omega \cap B_o(n_1))) \geq \frac{1}{n_1}$ . Concluimos assim que  $x \in K_{n_1}$  e portanto  $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ .

Logo  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ , isto é,  $\{K_i\}$  é uma *exaustão* de  $\Omega$  por compactos.

**Definição 3:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Um conjunto  $E$  de aplicações  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é equicontínuo em  $x_0 \in \Omega$  quando, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(x_0) \subset \Omega$  e para todo  $x \in B_\delta(x_0)$ ,  $\text{dist}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \forall f \in E$ . Um conjunto  $E$  de aplicações  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é equicontínuo quando  $E$  é equicontínuo em todos os pontos de  $\Omega$ .

Lembramos que o teorema de Arzelá-Ascoli garante que toda seqüência de funções  $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\{f_n\}$  é equicontínuo e uniformemente limitado em  $K$  compacto de  $\mathbb{R}^2$ , possui uma subseqüência uniformemente convergente.

**Teorema 4: (Teorema da Compacidade):** Seja  $\{u_n\}$  uma seqüência uniformemente limitada de soluções da equação (1.1) em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Então existe uma subseqüência de  $\{u_n\}$  que converge para uma solução da equação (1.1), a convergência sendo uniforme em cada subconjunto compacto de  $\Omega$ .

**Demonstração:** Vamos considerar  $\{K_i\}$  uma exaustão de  $\Omega$ . A seguir tomamos o conjunto  $E = \{u_1, \dots, u_n, \dots\}$  e vamos provar que  $E$  é equicontínuo em cada  $K_i$ .

Como  $\{u_n\}$  é uniformemente limitada existe  $M > 0$  tal que  $|u_n| < M \quad \forall n$ . Pela estimativa de derivadas para soluções da equação (1.1) vale em  $K_i$  a desigualdade

$$\|\nabla u_n(P)\| < e^{\frac{\pi}{2} \frac{M}{d}} + \frac{M}{d} e^{\frac{\pi}{2} \frac{M}{d}} = L,$$

onde  $P \in \text{Int}(K_i)$  e  $d = \text{dist}(P, \partial K_i)$ .

(A prova dessa desigualdade pode ser encontrada em [S]).

Consequentemente temos que  $|u_{n,x_i}| < L, \quad i = 1, 2$ ; logo dado  $x_0 \in K_i$  e  $\delta > 0$  com  $\|x - x_0\| < \delta$ , onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  obtemos:

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_n(x_0)| &= |u_n(x_1, x_2) - u_n(x_1^0, x_2^0)| = \\ &= \left| u_n(x_1, x_2) - u_n(x_1^0, x_2) + u_n(x_1^0, x_2) - u_n(x_1^0, x_2^0) \right| \leq \\ &\leq \left| u_n(x_1, x_2) - u_n(x_1^0, x_2) \right| + \left| u_n(x_1^0, x_2) - u_n(x_1^0, x_2^0) \right| \end{aligned}$$

## 1.1 Método de Perron

Nesta seção será obtido o Método de Perron para superfícies mínimas, este método determina uma solução  $u$  da equação (1.1) sobre um domínio limitado arbitrário de  $\mathbb{R}^2$ .

A seguir serão apresentadas definições e demonstrados alguns resultados necessários na obtenção do método de Perron.

**Definição 5:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $u \in C^0(\Omega)$ .  $u$  é supersolução (subsolução) de (1.1) em  $\Omega$  se para toda bola  $B \subset\subset \Omega$  e toda função  $h$  satisfazendo a equação (1.1) em  $B$  com  $u \geq (\leq) h$  em  $\partial B$ , temos também  $u \geq (\leq) h$  em  $B$ .

A seguir enunciaremos o princípio do máximo fraco para supersoluções e subsoluções, cuja prova é análoga a feita para as funções harmônicas.

**Teorema 6:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  subsolução (supersolução) em  $\Omega$  então  $\sup_{\Omega} u (\inf_{\Omega} u) = \sup_{\partial\Omega} u (\inf_{\partial\Omega} u)$ .

**Lema 7:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $u \in C^2(\Omega)$  uma função que satisfaz  $M_{\Omega}(u) \leq (\geq) 0$  então  $u$  é supersolução (subsolução) em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Seja  $B \subset\subset \Omega$  e  $h$  função que satisfaz (1.1) em  $B$  com  $u \geq (\leq) h$  em  $\partial B$ . Então pelo teorema 5 (capítulo 0) temos  $u \geq (\leq) h$  em  $B$ , logo  $u$  é supersolução (subsolução) em  $\Omega$ .

**Lema 8.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e sejam  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  e  $v \in C^0(\bar{\Omega})$  subsolução e supersolução, respectivamente, em  $\Omega$  tal que  $v \geq u$  sobre  $\partial\Omega$ . Então  $v > u$  em  $\Omega$  ou  $v \equiv u$  em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Vamos supor que existe  $x_0 \in \Omega$  tal que

$$(u - v)(x_0) = \sup_{\Omega} (u - v) = M > 0$$

Podemos assumir que existe uma bola  $B = B(x_0) \subset\subset \Omega$  tal que  $u - v \equiv M$  sobre  $\partial B$ .

De fato vamos supor o contrário, isto é,  $\forall B(x_0) \subset\subset \Omega$ ,  $u - v \equiv M$  em  $\partial B(x_0)$ .

Seja  $R = \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ . Temos  $u - v \equiv M$  em  $\partial B_{\rho}(x_0) \forall \rho$  t.q.  $0 \leq \rho < R$ , e por continuidade  $u - v \equiv M$  em  $\overline{B_R(x_0)}$ .

Como  $\overline{B_R(x_0)} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , existe  $y_0 \in \partial\Omega$  tal que  $(u - v)(y_0) = M > 0$  que é contradição.

Pelo teorema 6 (capítulo 0) existem  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  soluções da equação (1.1) com  $\bar{u}|_{\partial B} = u$  e  $\bar{v}|_{\partial B} = v$

Temos que:

$$M = \sup_{\bar{\Omega}} (u - v) \geq \sup_{\partial B} (u - v) = \sup_{\partial B} (\bar{u} - \bar{v})$$

Como  $u$  é subsolução e  $u = \bar{u}$  em  $\partial B$  concluímos que

$$u \leq \bar{u} \text{ em } B \quad (1)$$

De forma análoga concluímos que

$$v \geq \bar{v} \text{ em } B \quad (2)$$

De (1) e (2) obtemos que  $u - v \leq \bar{u} - \bar{v}$  em  $B$ . Logo

$$M \geq \sup_{\partial B} (\bar{u} - \bar{v}) \geq (\bar{u} - \bar{v})(x_0) \geq (u - v)(x_0) = M, \text{ e portanto } (\bar{u} - \bar{v})(x_0) = M.$$

Assim pelo teorema 2 (capítulo 0)  $\bar{u} - \bar{v} = M$  em  $B \cup \partial B$ .

Como  $u = \bar{u}$  e  $v = \bar{v}$  em  $\partial B$ , temos  $u - v = M$  sobre  $\partial B$  que contraria a escolha de  $B$  provando o lema.

**Corolário 9:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e  $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Sejam  $u$  e  $v \in C^0(\bar{\Omega})$  subsolução e supersolução, respectivamente, tais que,  $u|_{\partial\Omega} \leq \varphi$  e  $v|_{\partial\Omega} \geq \varphi$ . Então, ou  $u < v$  em  $\Omega$  ou  $u \equiv v$  em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Imediata do Lema anterior, observando que  $u|_{\partial\Omega} \leq \varphi \leq v|_{\partial\Omega}$ .

**Lema 10:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $u_1, \dots, u_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , então:

i) Se  $u_1, \dots, u_n$  são supersoluções em  $\Omega$  a função  $u(x) = \min\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$  é supersolução em  $\Omega$ .

ii) Se  $u_1, \dots, u_n$  são subsoluções em  $\Omega$  a função  $v(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$  é subsolução em  $\Omega$ .

**Demonstração:** i) Seja  $B \subset \subset \Omega$  e  $h$  satisfazendo a equação (1.1) em  $B$  com  $u \geq h$  sobre  $\partial B$ . Temos que  $u_1, \dots, u_n \geq u \geq h$  em  $\partial B$ , logo  $u_1, \dots, u_n \geq h$  em  $B$ , pois  $u_1, \dots, u_n$  são

supersoluções em  $\Omega$ . Portanto  $u = \min\{u_1(x), \dots, u_n(x)\} \geq h$  em  $B$ , provando que  $u$  é supersolução em  $\Omega$ .

A prova do item ii) é feita de maneira análoga.

**Lema 11:** Sejam  $u$  subsolução em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $B \subset\subset \Omega$ . Seja  $\bar{u}$  solução da equação (1.1) em  $B$  com  $\bar{u} / \partial B = u$ . Então a função:

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & \text{se } x \in B \\ u(x), & \text{se } x \in \Omega - B \end{cases}$$

é subsolução em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Sejam  $B' \subset\subset \Omega$  e  $h$  satisfazendo a equação (1.1) em  $B'$  com  $U \leq h$  em  $\partial B'$ . Como  $u = \bar{u}$  em  $\partial B$  temos  $u \leq \bar{u}$  em  $B$ , pois  $u$  é subsolução em  $\Omega$ , logo  $u \leq U$  em  $B'$ .

Temos também que  $U = u$  em  $\partial(B' - B)$ ;  $U = \bar{u}$  em  $\partial B' \cap \bar{B}$  e como  $u \leq \bar{u}$  em  $B$  concluímos que  $u \leq U$  em  $\partial B' \cap \bar{B}$  e portanto  $u \leq U$  em  $\partial B'$ .

Mas  $U \leq h$  em  $\partial B'$ , daí  $u \leq h$  em  $\partial B'$ , e como  $u$  é subsolução,  $u \leq h$  em  $B'$ . Logo

$$U \leq h \text{ em } B' - B. \quad (1)$$

Por outro lado,  $U$  é solução da equação (1.1) em  $B$  e  $U / \partial B = u$ .

Como  $U \leq h$  em  $\partial B'$ ,  $u = \bar{u}$  em  $B' \cap \partial B$  e  $\bar{u} = U$  em  $\partial B' \cap B$ , temos

$$\bar{u} / \partial(B' \cap B) \leq h / \partial(B' \cap B). \text{ Pelo teorema 4 (capítulo 0)}$$

$$\bar{u} \leq h \text{ em } B' \cap B. \quad (2)$$

De (1) e (2) segue  $U \leq h$  em  $B'$ , provando que  $U$  é subsolução em  $\Omega$ .

**Teorema 12: (Método de Perron):** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Seja  $S_\varphi = \{u \in C^0(\bar{\Omega}) / u \text{ é subsolução em } \Omega \text{ e } u / \partial\Omega \leq \varphi\}$ . Então a função  $u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$  é solução da equação (1.1) em  $\Omega$ .

**Demonstração:** Temos que  $\varphi$  é limitada, logo existe  $K > 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $|\varphi(x)| \leq K \forall x \in \partial\Omega$ . Seja  $v \in S_\varphi$ , então  $v / \partial\Omega \leq \varphi / \partial\Omega \leq K$ . Pelo teorema 6 (capítulo 1)  $v \leq K$  em  $\Omega$  e portanto  $u$  está bem definida.

Seja  $y$  um ponto fixado arbitrariamente sobre  $\Omega$ . Pela definição de  $u$  existe uma seqüência  $\{\beta_n\} \subset S_\varphi$  tal que  $\beta_n(y) \rightarrow u(y)$ .

Consideremos agora a seqüência  $v_n = \max\{\beta_n, \inf\varphi\}$ , temos que  $v_n$  é limitada; pelo lema 10  $v_n \in S_\varphi$  e evidentemente  $v_n(y) \rightarrow u(y)$ .

Seja  $R > 0$  tal que  $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$  e definimos:

$$V_n(x) = \begin{cases} \bar{v}_n(x), & \text{se } x \in B \\ v_n(x), & \text{se } x \in \Omega - B \end{cases} \quad \text{com } \bar{v}_n = v_n \text{ em } \partial B$$

onde  $\bar{v}_n(x)$  é solução de (1.1).

Temos pelo lema 11 que  $V_n(x)$  é subsolução em  $\Omega$  e como  $V_n / \partial\Omega = v_n / \partial\Omega$  concluímos que  $V_n \in S_\varphi$ .

Além disso  $v_n / \partial B = \bar{v}_n$ , logo  $v_n \leq \bar{v}_n$  em  $B$ , pois  $v_n$  é subsolução em  $\Omega$  portanto  $v_n(y) \leq \bar{v}_n(y) = V_n(y) \leq u(y)$  e, como  $v_n(y) \rightarrow u(y)$ , temos que  $V_n(y) \rightarrow u(y)$ .

Pelo teorema da compacidade a sequência  $V_n$  contém uma subsequência  $V_{n_k}$  convergindo uniformemente em qualquer  $B_\rho(y)$  com  $0 < \rho < R$  para uma função  $v$  que satisfaz a equação (1.1) em  $B$ . Pelo teorema 6 (capítulo 1) vale

$$V_{n_k} \leq \sup_B V_{n_k} = \sup_{\partial B} V_{n_k} \leq \sup_{\partial B} V_n = \sup_{\partial B} v_n = \sup_B v_n \leq \sup_\Omega v_n \leq u \quad \text{logo } v \leq u \text{ em } B$$

além disso pela unicidade do limite  $v(y) = u(y)$ .

Vamos provar que  $v \equiv u$  em  $B$ .

Para isso, suponhamos que  $v \not\equiv u$  em  $B$ , isto é, que exista algum  $z \in B$  tal que  $v(z) < u(z)$ .

Evidentemente  $z \neq y$ .

Neste caso existe uma função  $\bar{u} \in S_\varphi$  tal que  $v(z) < \bar{u}(z)$ .

Definindo:

$$w_k = \max \{ \bar{u}, V_{n_k} \} \quad \text{e}$$

$$W_k = \begin{cases} \bar{w}_k(x), & \text{se } x \in B \\ w_k(x), & \text{se } x \in \Omega - B \end{cases}$$

Obtemos como anteriormente uma subsequência de  $W_k$  convergindo para uma função  $w$  que satisfaz (1.1) com  $v \leq w \leq u$  em  $B$  (1) e  $v(y) = w(y) = u(y)$

logo  $v - w \leq 0$  em  $B$  e  $(v - w)(y) = 0$ , portanto  $\sup_B (v - w) = 0$ . Assim pelo teorema 2

(capítulo 0)  $v - w \equiv 0$  em  $B$ , isto é,  $v \equiv w$  em  $B$ .

Mas  $w_k = \max \{ \bar{u}, V_{n_k} \}$  de modo que  $\bar{u} \leq w = v$  em  $B$  que contraria o fato de  $v(z) < \bar{u}(z)$ , logo  $v \geq u$  em  $B$  (2).

De (1) e (2) concluímos que  $v \equiv u$  em  $B$  e portanto  $u$  satisfaz a equação (1.1) em  $\Omega$  provando o teorema.

## 1.2 O Contra-Exemplo do Tetraedro

No Método de Perron, apresentamos uma solução  $u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$  de (1.1), onde  $S_\varphi$

está definido no Teorema 11. Não podemos garantir, no entanto, que  $u / \partial\Omega = \varphi$ . De fato isto é falso se não impusermos condições a  $\partial\Omega$ , como mostra o seguinte exemplo, apresentado por Tibor Radó ([R2], pag. 37) como uma aplicação de seu teorema de unicidade, enunciado a seguir.

**Teorema 13:** Seja  $\Omega$  um domínio simplesmente conexo contido no plano  $x_1 \circ x_2$  tal que  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua. Se  $z_1$  e  $z_2$  são soluções de (1.2), as quais coincidem com  $\varphi$  em  $\partial\Omega$ , então  $z_1(x_1, x_2) \equiv z_2(x_1, x_2)$  em  $\Omega$ .

Observemos que se  $\Gamma$  é a curva de Jordan em  $\mathbb{R}^3$  determinada pela equação  $z = \varphi(P)$  onde  $P \in \partial\Omega$  o teorema 13 assegura que  $\Gamma$  não pode limitar mais de uma superfície mínima que tenha a propriedade de possuir uma projeção ortogonal injetiva sobre o plano  $x_1 \circ x_2$ .

A seguir vamos apresentar um exemplo onde o problema (1.2) não tem solução. Com esse objetivo consideremos um tetraedro regular de vértices A, B, C, D cujo triângulo A, B, D está contido no plano  $x_1 \circ x_2$ . Consideremos a curva contínua  $\Gamma$  formada pelas arestas  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ , e  $\overline{DA}$  deste tetraedro e seja  $C'$  a projeção ortogonal do ponto C sobre o plano  $x_1 \circ x_2$ . A seguir consideremos  $\Omega$  o polígono contido no plano  $x_1 \circ x_2$  cujos vértices são A B C' D. (Conforme a figura 1.1)

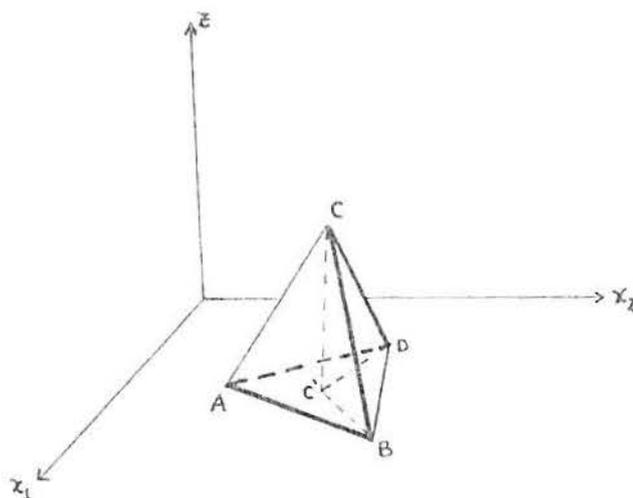


Figura 1.1

Agora definimos a função  $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{em } \overline{AB} \cup \overline{AD} \\ \text{funç \~ao linear com } \varphi(B) = 0 \text{ e } \varphi(C') = C & \text{em } \overline{BC'} \\ \text{funç \~ao linear com } \varphi(C') = C \text{ e } \varphi(D) = 0 & \text{em } \overline{C'D} \end{cases}$$

Temos que  $\varphi$  é contínua e evidentemente a curva  $\Gamma$  é determinada pela função  $\varphi$ .

Assim, pelo Teorema 13, se existir uma função  $z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz a equação (1.1) em  $\Omega$  e tal que  $z|_{\partial\Omega} = \varphi$ , ela é única.

Suponhamos que exista tal função  $z$  e seja  $S = \{(x_1, x_2, z(x_1, x_2)); (x_1, x_2) \in \Omega\}$  o gráfico da função  $z$ .

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  os pontos médios das arestas  $\overline{BD}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente e  $P$  o ponto de intersecção da reta determinada pelos pontos  $M_1$  e  $M_2$  com a superfície  $S$ , isto é:

$$P = S \cap \overline{M_1M_2}$$

Chamaremos de  $O$  o centro do tetraedro, que é também o ponto médio de  $\overline{M_1M_2}$  (conforme a figura 1.2).

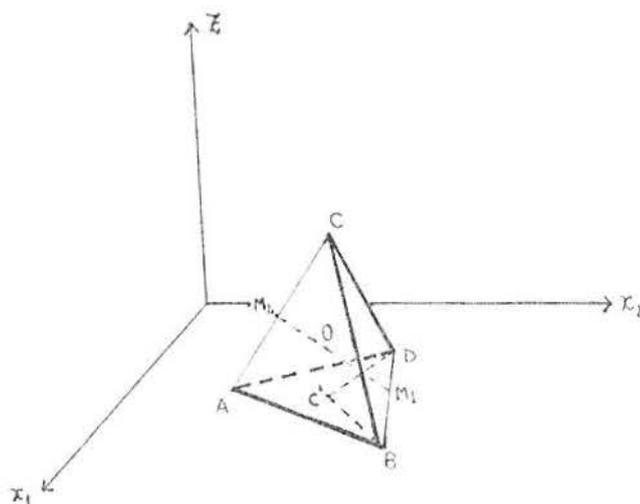


Figura 1.2

**Afirmação:** O ponto  $P = (x_{1p}, x_{2p}, z_p)$  coincide com o ponto  $O = (x_{1o}, x_{2o}, z_o)$ .

**Demonstração:** Suponhamos, por absurdo, que a distância de  $P$  ao ponto  $M_2$  é menor que distância de  $P$  ao ponto  $M_1$ , isto é, o ponto  $P$  está acima de  $O$ , ou seja,  $z_o < z_p$  (conforme figura 1.3(a)). A seguir consideremos  $R_1$  e  $R_2$  os pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente e vamos fazer na superfície  $S$  uma rotação espacial de  $180^\circ$  em torno do eixo  $r$  determinado por  $R_1$  e  $R_2$ . Com esta rotação o vértice  $A$  vai parar no vértice  $B$  e o vértice  $B$  vai parar no vértice  $A$ , o vértice  $C$  vai parar no vértice  $D$  e vértice  $D$  vai parar no vértice  $C$ . Mas o ponto  $P$  fica agora abaixo do ponto  $O$ , isto é,  $z_o > z_p$  (Conforme figura 1.3(b)).

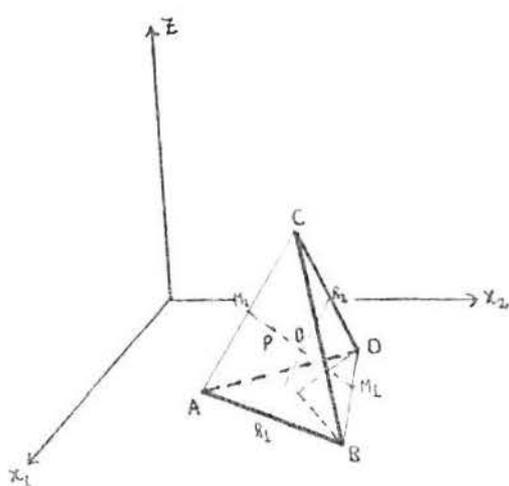


Figura 1.3(a)

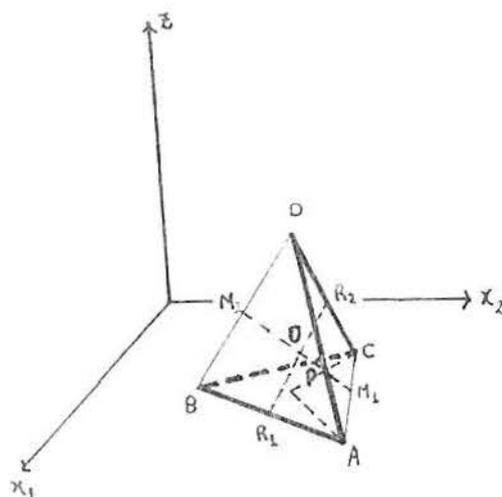


Figura 1.3(b)

Observamos, porém, que a curva  $\Gamma$  fica invariante por esta rotação, ou seja, a função  $\varphi$  e o domínio  $\Omega$  permanecem inalterados. Logo, pela unicidade da superfície que  $\Gamma$  determina, teríamos também a invariância de  $S$ , que contradiz a suposição feita sobre o ponto  $P$ . Se supormos que a distância de  $P$  ao ponto  $M_2$  é maior que a distância de  $P$  ao ponto  $M_1$ , por um raciocínio análogo, chegaríamos a uma contradição.

Logo o ponto  $P$  coincide com o ponto  $O$ , provando a afirmação.

Temos pela afirmação anterior que o ponto  $O \in S$ . Logo, existem dois pontos de  $S$ , a saber,  $C$  e  $O$ , que possuem a mesma projeção ortogonal  $C'$  sobre o plano  $x_1 \times x_2$ . Com isso concluímos que não pode existir uma função  $z(x_1, x_2)$  que resolva o problema de Dirichlet (1.2) com domínio no quadrilátero contido no plano  $x_1 \times x_2$  de vértices  $A, B, C'$  e  $D$ .

### 1.3 As barreiras e o Método de Perron

O exemplo do tetraedro mostra que a solução apresentada no Método de Perron, pode não coincidir com  $\varphi$  em  $\partial\Omega$  (onde  $\varphi$  e  $\Omega$  são como no teorema 11).

No caso do problema clássico de Dirichlet (para funções harmônicas) a solução obtida pelo método de Perron irá satisfazer a condição de fronteira em um dado ponto do bordo se esse ponto for regular, ou seja, admitir uma barreira local. O mesmo acontece no caso do problema de Dirichlet para as mínimas. Entretanto o significado de regularidade difere substancialmente de um para outro.

No caso clássico um ponto na fronteira de  $\Omega$  admite uma barreira, ou seja, é regular se é o ponto extremo (final) de um segmento de reta contido no exterior de  $\Omega$ . Assim o problema clássico de Dirichlet tem sempre solução para dados contínuos no bordo de domínios limitados cujos pontos da fronteira são acessíveis pelo exterior através de segmentos de reta.

No caso das superfícies mínimas a situação é bem diferente. Vamos mostrar que um ponto  $P$  da fronteira de  $\Omega$  é regular, ou seja, admite uma barreira local se  $P$  é convexo, isto é,  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(P) \cap \Omega$  é um conjunto convexo. Como consequência no problema (1.2) com dados de fronteira contínuos a solução  $u(x)$  dada pelo método de Perron irá satisfazer a condição de fronteira se  $\Omega$  for convexo. Até o final do capítulo,  $\Omega$  será um domínio limitado de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 14:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $P \in \partial\Omega$ . Uma função  $W \in C^0(\bar{\Omega})$  é chamada uma barreira em  $P$  relativa a  $\Omega$  se:

- (i)  $W$  é supersolução em  $\Omega$ .
- (ii)  $W > 0$  em  $\bar{\Omega} - P$
- (iii)  $W(P) = 0$

$W$  é uma barreira local em  $P \in \partial\Omega$  se existe uma vizinhança  $N$  de  $P$  tal que  $W$  satisfaz a definição 14 em  $\Omega \cap N$ .

**Definição 15:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Um ponto  $P \in \partial\Omega$  é dito regular se existe uma barreira local em  $P$ .

**Lema 16:** Seja  $P \in \partial\Omega$  regular. Então existe uma barreira em  $P$  relativa a  $\Omega$ .

**Demonstração:** Como  $P$  é regular existe uma barreira local em  $P$ , isto é, existe uma vizinhança  $N$  de  $P$  e  $W$  uma barreira em  $\Omega \cap N$ . Uma barreira em  $P$  relativa a  $\Omega$  pode ser definida por

$$\bar{W}(x) = \begin{cases} \min(m, W(x)), & \text{se } x \in \bar{\Omega} \cap B \\ m, & \text{se } x \in \bar{\Omega} - B \end{cases}$$

onde  $B$  é uma bola,  $B \subset \subset N$  com  $P \in B$  e  $m = \inf_{N \setminus B} W > 0$ .

De fato  $\bar{W}$  é contínua em  $\bar{\Omega}$  e pelo lema 10 (capítulo 1)  $\bar{W}$  é supersolução em  $\Omega$ . Além disso  $\bar{W} > 0$  em  $\bar{\Omega} - P$  e  $\bar{W}(P) = 0$ , pois  $\bar{W}(P) = \min(m, W(P)) = W(P) = 0$ .

O próximo teorema estabelece a conexão entre função barreira e o comportamento da solução de (1.1) dada pelo Método de Perron, na fronteira de seu domínio.

**Teorema 17:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $P \in \partial\Omega$  regular e  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e contínua em  $P$ . Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  solução de (1.1) definida pelo Método de Perron. Então  $u(x) \rightarrow \varphi(P)$  se  $x \rightarrow P$ .

**Demonstração:** Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $M = \text{Sup } |\varphi|$ . Como  $P$  é regular existe uma barreira  $W$  em  $P$ . Do fato de  $\varphi$  ser contínua em  $P$  existem constantes  $\delta$  e  $k$  positivas tal que  $|\varphi(x) - \varphi(P)| < \varepsilon$  se  $x \in B_\delta(P) \cap \partial\Omega$  e  $kW(x) \geq 2M$  se  $x \notin B_\delta(P)$ , com  $x \in \partial\Omega$ .

As funções  $H(x) = \varphi(P) + \varepsilon + kW$  e  $L(x) = \varphi(P) - \varepsilon - kW$  são, respectivamente, supersolução e subsolução em  $\Omega$  com  $\varphi(P) + \varepsilon + kW \geq \varphi$  em  $\partial\Omega$  e  $\varphi(P) - \varepsilon - kW \leq \varphi$  em  $\partial\Omega$ .

De fato dada  $B \subset \subset \Omega$  e  $h$  solução de (1.1) em  $B$  com  $H \geq h$  em  $\partial B$ , temos que  $\varphi(P) + \varepsilon + kW(x) \geq h$  em  $\partial B$  e consequentemente  $kW(x) \geq h - \varphi(P) - \varepsilon$  em  $\partial B$ .

Como  $kW(x)$  é supersolução em  $\Omega$  e  $h - \varphi(P) - \varepsilon$  é solução de (1.1),  $kW(x) \geq h - \varphi(P) - \varepsilon$  em  $B$  e portanto  $\varphi(P) + \varepsilon + kW(x) \geq h$  em  $B$  provando que  $H(x)$  é supersolução em  $\Omega$ .

Para provar que  $H / \partial\Omega \geq \varphi$  observamos inicialmente que  $-M \leq \varphi(x) \leq M \quad \forall x \in \partial\Omega$ , pois

$$|\varphi| \leq \text{Sup } |\varphi| = M.$$

Se  $x \notin B_\delta(P)$ ,  $kW(x) \geq 2M$  logo

$$H(x) = \varphi(P) + \varepsilon + kW(x) \geq \varphi(P) + \varepsilon + 2M \geq \varphi(P) + 2M \geq M \geq \varphi.$$

Se  $x \in B_\varepsilon(P)$  então  $\varphi(x) < \varphi(P) + \varepsilon$ , logo  $H(x) = \varphi(P) + \varepsilon + kW(x) > \varphi(P) + \varepsilon > \varphi(x)$ , com isso concluímos que  $H / \partial\Omega \geq \varphi$ .

A prova de que  $L(x)$  é subsolução com  $L / \partial\Omega \leq \varphi$  é feita de maneira análoga.

Assim do fato de  $u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$ , onde  $S_\varphi$  é o conjunto definido no Teorema 12 e do

Corolário 9, temos que  $\varphi(P) - \varepsilon - kW \leq u(x) \leq \varphi(P) + \varepsilon + kW$  em  $\Omega$ , ou equivalentemente  $|u(x) - \varphi(P)| < \varepsilon + kW(x)$ . Visto que  $W(x) \rightarrow 0$  se  $x \rightarrow P$  obtemos que  $u(x) \rightarrow \varphi(P)$  se  $x \rightarrow P$  provando o teorema.

A seguir definiremos ponto de fronteira convexo e estabeleceremos sua relação com ponto de fronteira regular.

**Definição 18:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $P \in \partial\Omega$  é convexo se existe  $r > 0$  tal que  $B_r(P) \cap \Omega$  é convexo.

**Teorema 19:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  convexo. Se  $P \in \partial\Omega$  então  $P$  é regular.

**Demonstração:** Dado  $P \in \partial\Omega$  temos que determinar uma barreira local em  $P$ . Como  $\Omega$  é convexo existe uma reta  $(t)$  passando por  $P$  tal que  $\partial\Omega \subset \pi_1 \cup \{P\}$  onde  $\pi_1$  é um dos semiplanos determinados por  $(t)$  conforme a figura 1.5.

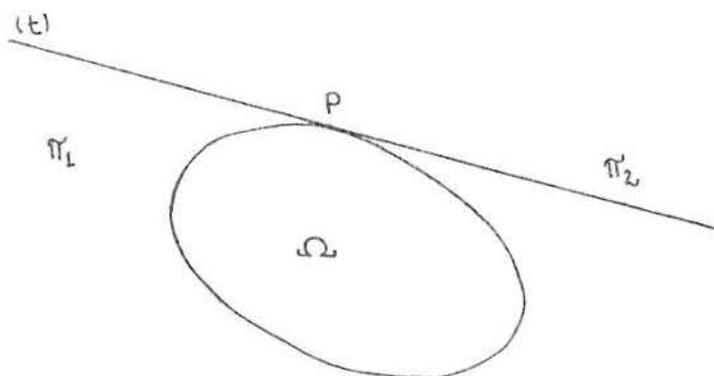


Figura 1.5

Agora traçamos uma perpendicular (s) a (t) passando por P e consideremos o ponto O sobre (s) de modo que  $O \in \pi_1$  e  $\text{dist}(O, P) < \pi/2$ , a seguir traçamos uma reta (r) passando por O e paralela a (t). Considerando as retas (r) e (s), respectivamente, os eixos cartesianos  $x_2$  e  $x_1$  temos graficamente:

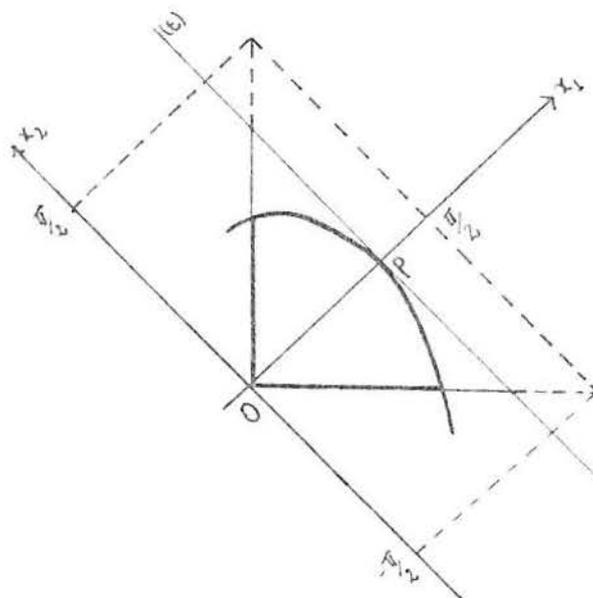


Figura 1.6

Seja  $N$  o triângulo de vértices nos pontos  $O, A, B$  conforme figura 1.6, vamos provar que existe uma barreira em  $P$  relativa a  $N \cap \Omega$ .

Dado  $M > 0$  a superfície de Scherk  $W(x_1, x_2) = M + \log \cos x_1 - \log \cos x_2$  intercepta o eixo dos  $x_1$  pois  $W(0, 0) = M > 0$  e  $W(\pi/2, 0) \rightarrow -\infty$ . Logo escolhemos  $M$  de forma que  $W(P) = 0$ . Para essa escolha de  $M$  o ponto  $P$  possui coordenadas  $(\arccos e^{-M}, 0)$ .

Como  $W$  é supersolução em  $N \cap \Omega$ , nos resta verificar que  $W > 0$  em  $(\overline{N \cap \Omega}) - P$ . Para isso, vamos provar que  $W > 0$  em  $\partial \Delta OAB - P$ .

De fato nos lados  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  do triângulo  $OAB$  temos, respectivamente  $x_2 = \pm x_1$ . Logo  $W(x_1, x_2) = M > 0$ .

Para o restante da prova observemos que o lado  $\overline{AB} - P$  do triângulo  $OAB$  está contido no conjunto  $S = \{(x_1, x_2) / x_1 = \arccos e^{-M} \text{ e } 0 < |x_2| < \pi/2\}$  e em  $S$   $W(x_1, x_2) = M + \log e^{-M} - \log \cos x_2 = -\log \cos x_2 > 0$  de modo que  $W > 0$  em  $\overline{AB} - P$ .

Como  $W$  é solução da equação (1.1), pelo teorema 2 (capítulo 0)  $W > 0$  no triângulo  $OAB - P$  e conseqüentemente  $W > 0$  em  $\overline{(N \cap \Omega)} - P$ . Logo  $W$  é barreira local em  $P$  e o teorema está demonstrado.

**Corolário 20:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $P \in \partial\Omega$  convexo. Então  $P$  é regular.

**Demonstração:**  $P \in \partial\Omega$  é convexo, logo existe  $r > 0$  tal que  $B_r(P) \cap \Omega$  é convexo. Portanto pelo teorema anterior  $P$  é regular.

O teorema seguinte é semelhante ao teorema 17, será destacado aqui pois é de grande utilidade no próximo capítulo desse trabalho.

**Teorema 21:** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e contínua em  $P$ , onde  $P \in \partial\Omega$  é convexo. Seja  $u(x)$  solução de (1.1) em  $\Omega$  definida pelo Método de Perron. Então  $u(x) \rightarrow \varphi(P)$  se  $x \rightarrow P$ .

**Demonstração:** Pelo Corolário 20,  $P$  é regular e como  $\varphi$  é contínua em  $P$  o resultado segue do Teorema 17.

## Capítulo 2

### Três Teoremas de Existência de Gráficos Mínimos em Domínios Não Convexos do Plano

Neste capítulo vamos provar a existência de solução do problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em três domínios particulares não convexos do plano, satisfazendo certas condições de fronteira. Para os três exemplos utilizaremos a mesma técnica de demonstração, a saber, a construção de uma supersolução adequada no domínio específico, o uso do método de Perron e do Teorema da Compacidade provados, respectivamente, nos teoremas (4) e (11) do capítulo 1.

**Teorema 1:** Sejam  $C_1, \dots, C_n$  curvas  $C^2$  convexas e fechadas em  $\mathbb{R}^2$  tal que as regiões interiores  $B_i$  de  $C_i$  são duas a duas disjuntas, e seja  $k$  o máximo do módulo da curvatura de  $C_i$ . Então, para cada  $\lambda \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ , existe uma solução de (1.1) definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2 / \cup \bar{B}_i$ , que é contínua em  $\bar{\Omega}$ , satisfazendo a condição de fronteira  $u|_{\partial\Omega} = 0$  e a condição assintótica

$$u(x) = \lambda \ln |x| + O(1) \text{ onde } |x| \rightarrow +\infty \quad (1)$$

**Demonstração:** Se  $\lambda = 0$  uma solução satisfazendo as condições do teorema é  $u \equiv 0$ . Supondo que  $\lambda > 0$  vamos inicialmente construir uma supersolução adequada para o problema.

Consideremos uma das curvas  $C_i$  e sejam  $d_i(x) = \text{dist}(x, C_i)$  e  $v_i(x) = \varphi(d_i(x))$ , onde  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_i$  e  $\varphi$  uma função a ser determinada.

Seja  $y$  o ponto mais próximo de  $x$  sobre  $C_i$  conforme a figura 2.1

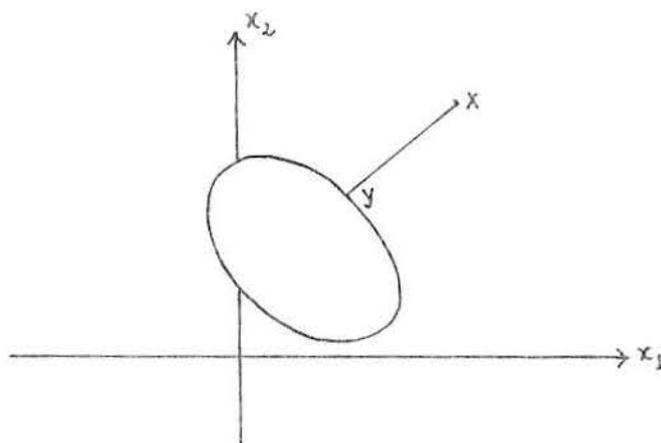


Figura 2.1

Fazendo uma rotação de coordenadas podemos considerar os eixos  $x_1$  e  $x_2$  na direção de  $t(y)$  e  $n(y)$ , respectivamente, onde  $t(y)$  e  $n(y)$  são os vetores tangente e normal em  $y$ . Desse modo obtemos um sistema de coordenadas principal associado a  $x$ , logo:

$$d_{i,x_1}(x) = 0; \quad d_{i,x_2}(x) = 1; \quad d_{i,x_1 x_1}(x) = \frac{-k_i(y)}{1 - k_i(y)d_i(x)}$$

$$d_{i,x_1 x_2}(x) = d_{i,x_2 x_1}(x) = d_{i,x_2 x_2}(x) = 0$$

onde  $k_i$  é a curvatura de  $C_i$ .

A demonstração desses resultados pode ser encontrada em [GT].

Temos que:

$$v_{i,x_1}(x) = \varphi'(d_i(x)) \cdot d_{i,x_1}(x) = 0$$

$$v_{i,x_2}(x) = \varphi'(d_i(x)) \cdot d_{i,x_2}(x) = \varphi'(d_i)$$

$$v_{i,x_1 x_1}(x) = \varphi'(d_i(x)) \cdot d_{i,x_1 x_1}(x) + d_{i,x_1}(x) \cdot \varphi''(d_i(x)) \cdot d_{i,x_1}(x) = \varphi'(d_i(x)) \cdot \frac{-k_i(y)}{1 - k_i(y)d_i(x)}$$

$$v_{i,x_2 x_2}(x) = \varphi'(d_i(x)) \cdot d_{i,x_2 x_2}(x) + d_{i,x_2}(x) \cdot \varphi''(d_i(x)) \cdot d_{i,x_2}(x) = \varphi''(d_i(x))$$

$$v_{i,x_1 x_2}(x) = \varphi'(d_i(x)) \cdot d_{i,x_1 x_2}(x) + d_{i,x_1}(x) \cdot \varphi''(d_i(x)) \cdot d_{i,x_2}(x) = \varphi''(d_i(x))$$

Pelo lema 7 (capítulo 1) a condição para  $v_i$  ser supersolução em  $\Omega$  se reduz a

$$(1 + \varphi'^2(d_i)) \varphi'(d_i) \left[ \frac{-k_i(y)}{1 - k_i(y)d_i} \right] + \varphi''(d_i) \leq 0 \quad (2)$$

Como  $C_i$  é convexa, temos que  $k_i(y) < 0$ , logo (2) é satisfeita por

$$\varphi(d) = \lambda \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{d}{\lambda} \right)$$

De fato temos que:

$$\varphi'(d) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda d + d^2}} \quad \text{e} \quad \varphi''(d) = \frac{-\lambda(\lambda + d)}{\sqrt{2\lambda d + d^2} (2\lambda d + d^2)}$$

logo

$$(1 + \varphi'^2(d)) \varphi'(d) \left[ \frac{-k_i(y)}{1 - k_i(y)d} \right] + \varphi''(d) = \frac{\lambda(\lambda + d)}{\sqrt{2\lambda d + d^2} (2\lambda d + d^2)} \left[ \frac{-k_i(y)\lambda - 1}{1 - k_i(y)d} \right]$$

Mas  $0 < \lambda \leq \frac{1}{k}$  e  $0 < -k_i(y) \leq k$  portanto  $-k_i(y)\lambda \leq \frac{-k_i(y)}{k} \leq 1$  e  $1 - k_i(y)d > 0$

consequentemente  $\frac{-k_i(y)\lambda - 1}{1 - k_i(y)d} \leq 0$  verificando (2).

Pelo lema 10 (capítulo 1) segue-se que para essa escolha de  $\varphi$  uma supersolução em  $\Omega$  é

$$v(x) = \min_{1 \leq i \leq n} v_i(x)$$

Consideremos agora um disco  $B_R$  contendo todos os  $C_i$  em seu interior (conforme a figura 2.2) e vamos determinar uma solução  $u_R$  da equação (1.1) em  $B_R \setminus \overline{UB_i}$  satisfazendo a condição de fronteira

$$u_R / C_i = 0 \quad ; \quad u_R / \partial B_R = v / \partial B_R$$

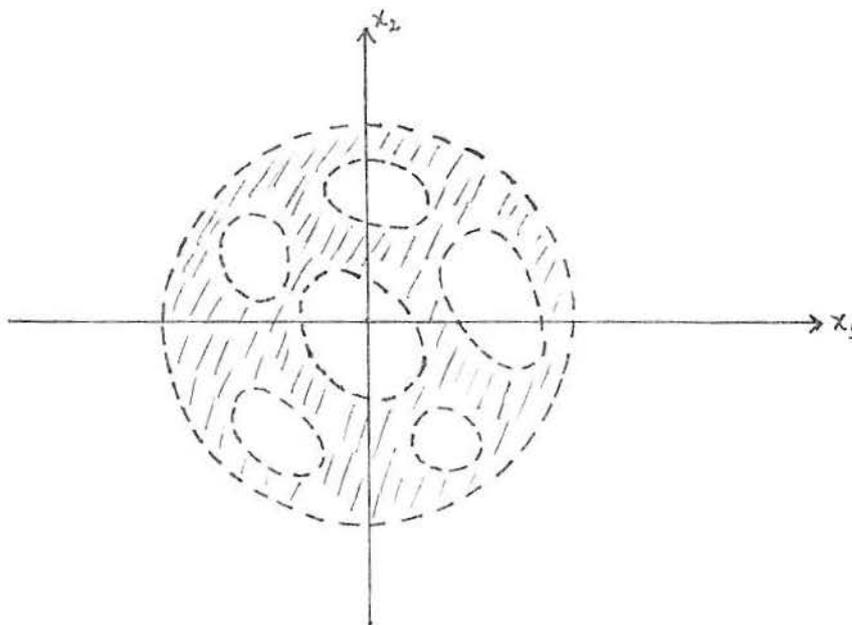


Figura 2.2.

Para isso consideremos a função  $\psi : \partial(B_R \setminus \cup \overline{B_i}) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in C_i \\ v(x), & \text{se } x \in \partial B_R \end{cases}$$

Como  $v$  é supersolução em  $\Omega$ ,  $v$  é contínua em  $\partial B_R$  logo  $\psi$  é limitada.

Seja o conjunto

$$S_\psi = \{w \in C^0(\overline{B_R \setminus \cup \overline{B_i}}) / 0 \leq w \leq v, w \text{ subsolução em } B_R \setminus \cup \overline{B_i} \text{ com } w \leq \psi \text{ em } \partial(B_R \setminus \cup \overline{B_i})\}$$

Pelo método de Perron existe uma solução da equação (1.1) em  $B_R \setminus \cup \overline{B_i}$  dada por

$$u_R(x) = \sup_{\beta \in S_\psi} \beta(x)$$

Temos evidentemente

$$0 \leq u_R \leq v \tag{3}$$

Mas  $v|_{C_i} = 0$ , pois se  $x \in C_i$ ,  $v_i(x) = \varphi(d_i) = \varphi(0) = 0$ , logo por (3),  $u_R|_{C_i} = 0$ .

Por outro lado, como  $\partial B_R$  é convexo e  $v$  é contínua em  $\partial B_R$  concluímos pelo teorema 21 (capítulo 1) que  $u_R|_{\partial B_R} = v$  que prova o que havíamos afirmado.

Pelo teorema 4 (capítulo 0)  $u_{R_1}(x) \geq u_{R_2}(x)$  se  $R_1 < R_2$ , portanto pelo teorema da Compacidade concluímos que para  $R \rightarrow +\infty$  as funções  $u_R$  possuem uma subsequência que converge para uma solução  $u$  de (1.1) em  $\Omega$ , a convergência sendo uniforme sobre cada subconjunto compacto de  $\Omega$ .

De (3) temos que  $0 \leq u \leq v$  em  $\Omega$  portanto  $u|_{C_1} = 0$  e  $u$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ .

Para provar a condição assintótica, vamos comparar  $u_R$ , para  $R \geq R_0$  com um catenóide apropriado

Visto que para uma certa constante  $C_0$   $d_i(x) \geq |x| - C_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; temos

$$v(x) \geq \min \lambda \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{|x| - C_0}{\lambda} \right) \geq \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{|x|}{\lambda} \right) - C_1 \quad \text{para } |x| \geq R_0 \text{ e uma}$$

constante apropriada  $C_1$ .

Como  $z(x) = \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{|x|}{\lambda} \right) - C_1$  é a equação de um catenóide, segue do princípio do máximo que

$$u_R(x) \geq \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{|x|}{\lambda} \right) - C_1 \quad \text{para } \max\{R_0, \lambda\} \leq |x| \leq R \quad \text{pois } u_R|_{\partial B_R} = v|_{\partial B_R}, \text{ logo:}$$

$$u(x) \geq \lambda \cosh^{-1} \left( \frac{|x|}{\lambda} \right) - C_1 \quad \text{para } \max\{R_0, \lambda\} \leq |x| \leq R.$$

Por outro lado  $u(x) \leq v(x) \leq v_i(x) = \lambda \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{d_i}{\lambda} \right)$  para qualquer  $d_i$ , como  $\varphi(d)$  é crescente temos para  $d_i < |x|$  que:  $u(x) \leq \lambda \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{|x|}{\lambda} \right)$  logo:

$$\lambda \cosh^{-1} \left( \frac{|x|}{\lambda} \right) - C_1 \leq u(x) \leq \lambda \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{|x|}{\lambda} \right)$$

que prova a condição assintótica (1).

Antes de provar o próximo teorema, vamos introduzir algumas definições.

Começamos descrevendo o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  onde será determinada a existência de solução do problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas com condições de fronteiras adequadas.

Vamos requerer que

$$\Omega := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 > a, |x_2| < f(x_1) \} \quad (4)$$

onde  $-\infty \leq a \leq 0$  e  $f \in C^2([a, +\infty[)$  é uma função positiva que satisfaz a inequação diferencial

$$\frac{f''}{1 + (f')^2} \leq \frac{1}{f} \quad (5)$$

$$\text{e a condição de crescimento} \quad f(x_1) \geq C e^{\lambda x_1} \text{ se } |x_1| \geq a_0 \quad (6)$$

para algumas constantes positivas  $C, \lambda, a_0$ .

$$\text{No caso em que } a > -\infty \text{ vamos supor, além disso, que } f(x_1) \rightarrow 0 \text{ se } x_1 \rightarrow a \quad (7)$$

A seguir ilustraremos graficamente o domínio  $\Omega$  com as condições impostas acima.

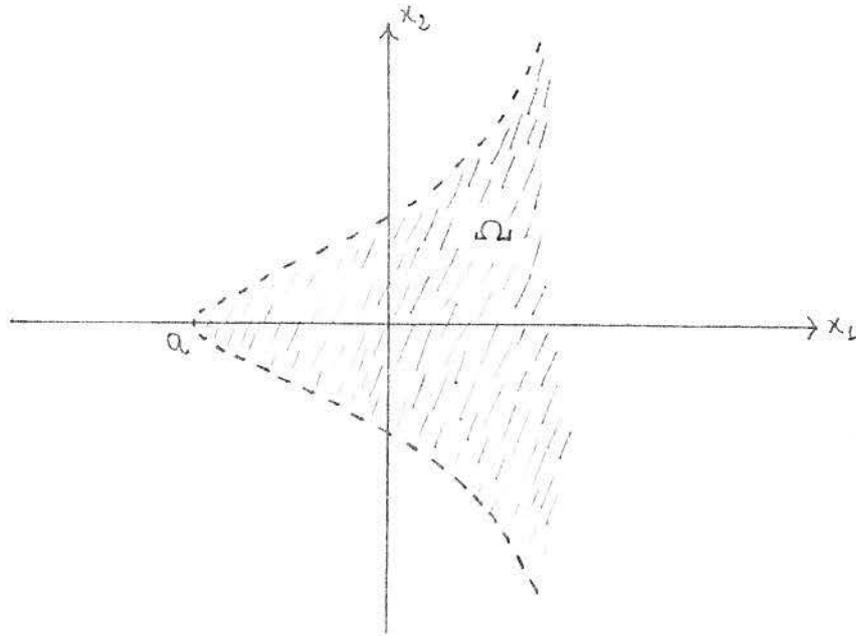


Figura 2.3  $a > -\infty$

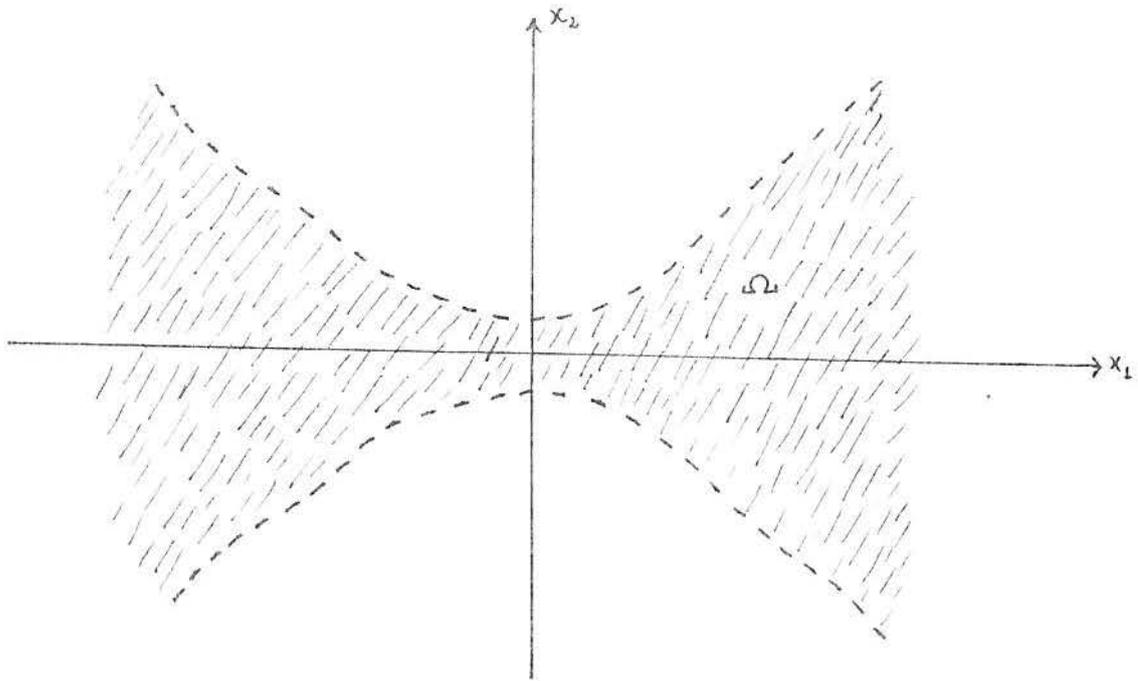


Figura 2.4  $a = -\infty$

O próximo lema tem por objetivo, verificar que as condições (5) e (6) são admissíveis.

**Lema 2:** Dada  $g: [b_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_{b_0}^{+\infty} g(x_2) dx_2 < +\infty$  (8)

Se  $f: (a_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $0 \leq \frac{1}{f} - g(f) \leq \frac{f''}{1+(f')^2} \leq \frac{1}{f}$  (9)

com  $f(x_1) \rightarrow +\infty$  se  $x_1 \rightarrow +\infty$  então  $f$  satisfaz  $f(x_1) \geq C e^{\lambda x_1}$  para  $x_1 \geq a_0$ , onde  $C, \lambda, a_0$  são constantes positivas.

**Demonstração:** De fato, como  $f(x_1) \rightarrow +\infty$  se  $x_1 \rightarrow +\infty$  e  $f''(x_1) \geq 0$  se  $x_1 \geq a_0$ , então  $f' \geq 0$  para  $x_1 \geq a_1 \geq a_0$ .

Multiplicando (9) por  $f'$  temos

$$0 \leq \frac{f'}{f} - g(f) \cdot f' \leq \frac{f'' f'}{1+(f')^2} \leq \frac{f'}{f} \quad (10)$$

Integrando (9) de  $a_1$  até  $x_1$  concluímos que

$$0 \leq \ln\left(\frac{f(x_1)}{f(a_1)}\right) - \int_{a_1}^{x_1} g(f(x_1)) f'(x_1) dx_1 \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+f'(x_1)^2}{1+f'(a_1)^2}\right) \leq \ln\left(\frac{f(x_1)}{f(a_1)}\right)$$

Mas  $f(x_1) = x_2$ . Diferenciando temos  $f'(x_1) dx_1 = dx_2$  e portanto

$$0 \leq \ln\left(\frac{f(x_1)}{f(a_1)}\right) - \int_{f(a_1)}^{f(x_1)} g(x_2) dx_2 \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+f'(x_1)^2}{1+f'(a_1)^2}\right) \leq \ln\left(\frac{f(x_1)}{f(a_1)}\right) \quad (11)$$

De (8) e (11) obtemos que:

$1 + f'(x_1)^2 \geq \gamma f(x_1)^2$ , com  $x_1 \geq a_1$  e  $\gamma > 0$  ou equivalentemente fazendo  $a = \sqrt{\gamma}$

$$f' \geq \sqrt{(af)^2 - 1} \quad (12)$$

Consideremos agora a função  $G'(f) = \frac{1}{\sqrt{(af)^2 - 1}}$ . Integrando obtemos

$$G(f) = \frac{1}{a} \ln \left[ \sqrt{(af)^2 - 1} + af \right].$$

Derivando  $G(f)$  em função de  $x_1$  temos:

$$\left[ G(f(x_1)) \right]' = G'(f(x_1)) \cdot f'(x_1) = \frac{1}{\sqrt{(af(x_1))^2 - 1}} \cdot f'(x_1)$$

Logo de (12)

$\left[ G(f(x_1)) \right]' \geq 1$  e integrando em função de  $x_1$  obtemos

$$G(f(x_1)) \geq x_1, \text{ isto é, } \frac{1}{a} \ln \left[ \sqrt{(af(x_1))^2 - 1} + af(x_1) \right] \geq x_1 \text{ de onde se conclui evidentemente}$$

que

$$\sqrt{(af(x_1))^2 - 1} + af(x_1) \geq e^{ax_1}$$

É claro que  $\sqrt{(af(x_1))^2 - 1} \leq \sqrt{(af(x_1))^2} = af(x_1)$ . Logo  $2af(x_1) \geq e^{ax_1}$ , isto é,  $f(x_1) \geq \frac{e^{ax_1}}{2a}$  de onde segue (6) provando o lema.

Para o caso extremo na inequação (5), isto é,  $\frac{f''}{1 + (f')^2} = \frac{1}{f}$  temos necessariamente que

$$f(x_1) = \frac{1}{\lambda} \cos h(\lambda x_1 - \mu) \quad (13)$$

para algum  $\lambda > 0$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ . Obviamente esta  $f$  também satisfaz (6).

Naturalmente  $\Omega$  correspondendo a (13) é um caso trivial do próximo teorema, visto que uma solução para o problema de Dirichlet, neste caso, é o semi-catenóide

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{\left( \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda x_1 \right)^2 - x_2^2}$$

**Teorema 3:** Seja  $\Omega$  um domínio definido como em (4), onde (5), (6) e (7) são satisfeitas. Então existe uma solução para a equação (1.1) em  $\Omega$  satisfazendo a condição de fronteira  $u / \partial\Omega \equiv 0$  e a condição assintótica.

$$\lim_{|x_1| \rightarrow +\infty} \left[ \inf \exp(-\lambda|x_1|), \sup_{x_2} u(x_1, x_2) \right] > 0 \quad (14)$$

**Demonstração:** Para a prova desse teorema usaremos a mesma técnica do teorema 1.

Nesse caso uma supersolução é  $v(x_1, x_2) = \sqrt{f(x_1)^2 - x_2^2}$ , pois:

$$v_{x_1} = \frac{f(x_1) \cdot f'(x_1)}{\sqrt{f(x_1)^2 - x_2^2}} ; \quad v_{x_1 x_2} = \frac{f(x_1) \cdot f''(x_1) - x_2^2 f(x_1) \cdot f''(x_1) x_2^2 f'^2(x_1)}{(f(x_1)^2 - x_2^2)^{3/2}}$$

$$v_{x_2} = \frac{-x_2}{\sqrt{f(x_1)^2 - x_2^2}} ; \quad v_{x_2 x_2} = \frac{-f(x_1)^2}{(f(x_1)^2 - x_2^2)^{3/2}}$$

daí:

$$\begin{aligned} M_{\Omega}(v) &= \\ &= \frac{-f(x_1)^4 + f^2(x_1)x_2^2 - f(x_1)^4 f'(x_1)^2 + [f(x_1) f'(x_1)]^2 + f(x_1)^5 f''(x_1) - f(x_1)^3 f''(x_1) x_2^2}{(f(x_1)^2 - x_2^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-f(x_1)^4 + x_2^2 f(x_1)^2 \left[ 1 + f'(x_1)^2 - f(x_1) \cdot f''(x_1) \right] - f(x_1)^4 f'(x_1)^2 + f(x_1)^5 \cdot f''(x_1)}{(f(x_1)^2 - x_2^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\text{Mas em } \Omega \quad x_2^2 < f(x_1)^2 \quad \text{e} \quad \frac{f''(x_1)}{1 + f'(x_1)^2} \leq \frac{1}{f(x_1)}$$

$$\text{logo } M_{\Omega}(v) \leq -f(x_1)^4 + f(x_1)^4 + f(x_1)^4 f'(x_1)^2 - f(x_1)^5 f''(x_1) - f(x_1)^4 f'(x_1)^2 + f(x_1)^5 f''(x_1) = 0$$

e pelo lema 7 (capítulo 1) temos que  $v(x_1, x_2) = \sqrt{f(x_1)^2 - x_2^2}$  é supersolução em  $\Omega$ .

Consideremos o domínio

$$\Omega_n := \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid |x_1| < n\}$$

As figuras seguintes ilustram o domínio  $\Omega_n$  quando  $a > -\infty$  e quando  $a = -\infty$ .

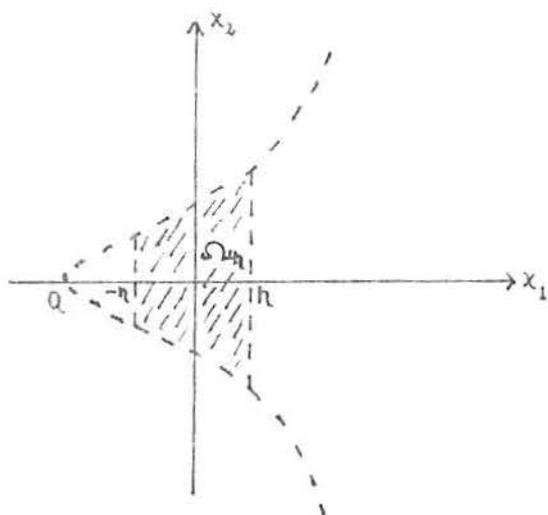


Figura 2.5  $a > -\infty$

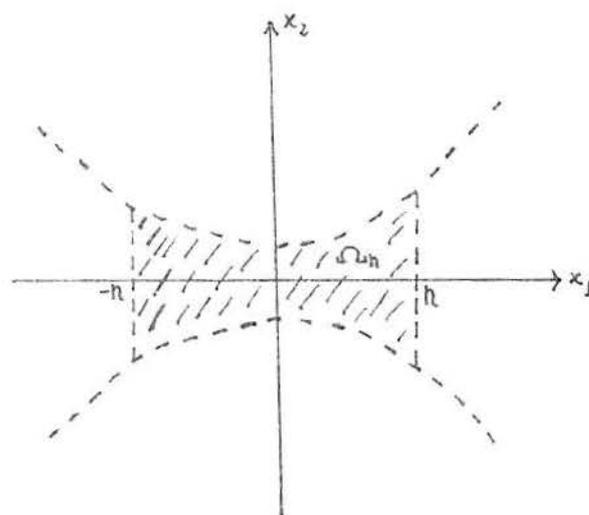


Figura 2.6  $a = -\infty$

Vamos determinar uma solução  $u_n$  da equação (1.1) em  $\Omega_n$  satisfazendo a condição de fronteira:

$$u_n(x_1, x_2) = 0 \text{ para } x_2 = \pm f(x_1), |x_1| < n$$

$$u_n(x_1, x_2) = \sqrt{f(x_1)^2 - x_2^2} \text{ para } x_1 = \pm n, |x_2| < f(x_1)$$

Para isso, consideremos a função  $\psi : \bar{\Omega}_n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\psi(x) = \psi(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_2 = \pm f(x_1) \text{ e } |x_1| < n \\ v, & \text{se } x_1 = \pm n \text{ e } |x_2| < f(x_1) \end{cases}$$

Do fato de  $v$  ser supersolução em  $\Omega$ ,  $v$  é contínua em  $x = (x_1, x_2)$  tais que  $x_1 = \pm n$  e  $|x_2| < f(x_1)$ , conseqüentemente  $\psi$  é limitada.

Seja o conjunto:

$$S_\psi = \left\{ w \in C^0(\overline{\Omega_n}) / 0 \leq w \leq v, w \text{ subsolução em } \Omega_n, \text{ com } w \leq \psi \text{ em } \partial(\Omega_n) \right\}.$$

Pelo Método de Perron

$$u_n = \sup_{\beta \in S_\psi} \beta(x) \text{ é solução da equação (1.1) em } \Omega_n.$$

Temos que

$$0 \leq u_n \leq v \tag{15}$$

Se  $x_2 = \pm f(x_1)$  e  $|x_1| < n$  temos evidentemente que  $v(x_1, x_2) = 0$  logo de (15)

$$u_n(x_1, x_2) = 0 \text{ para } x_2 = \pm f(x_1) \text{ e } |x_1| < n.$$

Seja  $\Omega_n^1$  o subconjunto do pontos de  $\partial(\Omega_n)$  que satisfazem a condição  $x_1 = \pm n$  e  $|x_2| < f(x_1)$ .

Temos que  $\Omega_n^1$  é convexo e como  $v$  é contínua em  $\Omega_n^1$  concluímos pelo teorema 21 (capítulo 1) que  $u_n / \Omega_n^1 = v$ .

Pelo teorema 4 (capítulo 0)  $u_n$  satisfaz  $u_{n_1}(x_1, x_2) \leq u_{n_2}(x_1, x_2)$  se  $n_1 > n_2$ , logo pelo teorema da compacidade  $u_n$  possui uma subsequência que converge para uma solução  $u$  de (1.1) em  $\Omega$ , a convergência sendo uniforme sobre cada subconjunto compacto de  $\Omega$ .

De (15) temos que  $u$  se estende continuamente sobre  $\bar{\Omega}$  e  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

Para concluir a prova nos resta verificar que  $u \not\equiv 0$  em  $\Omega$  e tem crescimento exponencial, com esse propósito vamos comparar  $u$  com uma parte de um catenóide.

Dado um domínio  $\Omega$  com  $f$  satisfazendo (6) podemos escolher  $b_0 \geq a_0$  tal que para  $x_1 \geq b_0$

$$f(x_1) \geq C e^{\lambda x_1} \geq \frac{e^{\lambda(x_1 - b_0)}}{\lambda}$$

Como  $x_1 \geq b_0$  temos que  $(e^{\lambda x_1})^2 \geq (e^{\lambda b_0})^2$ . Portanto  $e^{\lambda x_1} \geq e^{-\lambda x_1} e^{2\lambda b_0}$  conseqüentemente  $2e^{\lambda x_1} \geq e^{\lambda x_1} + e^{-\lambda x_1} e^{2\lambda b_0}$ .

Dividindo a última desigualdade por  $e^{\lambda b_0}$  temos  $2e^{\lambda(x_1 - b_0)} \geq e^{\lambda(x_1 - b_0)} + e^{-\lambda(x_1 - b_0)}$  donde

$$\frac{e^{\lambda(x_1 - b_0)}}{\lambda} \geq \frac{e^{\lambda(x_1 - b_0)} + e^{-\lambda(x_1 - b_0)}}{2\lambda} = \frac{\cosh(\lambda(x_1 - b_0))}{\lambda}$$

$$\text{Assim temos que } f(x_1) \geq \frac{\cosh(\lambda(x_1 - b_0))}{\lambda} \quad (16)$$

Segue que o domínio

$$G = \left\{ (x_1, x_2) / x_1 > b_0, |x_2| < \frac{\cosh(\lambda(x_1 - b_0))}{\lambda} \right\} \text{ está contido em } \Omega.$$

Consideremos em  $G$  a seguinte função

$$W(x_1, x_2) = \sqrt{\left(\frac{\cosh(\lambda(x_1 - b_0))}{\lambda}\right)^2 - x_2^2} - \frac{1}{\lambda}$$

que é solução da equação (1.1) pois seu gráfico é parte de um catenóide.

Temos que

$$W \leq 0 \text{ sobre } \partial G \text{ e } W \leq v \text{ sobre } G. \quad (17)$$

Agora, para todo  $n$  suficientemente grande, podemos aplicar o teorema 4 (capítulo 0) para as funções  $u_n$  e  $W$  sobre o domínio  $G \cap \Omega_n$ .

Segue então de (17) que  $W \leq u_n$  sobre  $\partial(G \cap \Omega_n)$ , logo  $W \leq u_n$  sobre  $G \cap \Omega_n$ .

Assim  $W \leq u$  sobre  $G$  e conseqüentemente  $W \leq u$  sobre  $\Omega$ .

$$\text{Como } \sup_{x_2} W = \frac{e^{\lambda(x_1 - b_0)} + e^{-\lambda(x_1 - b_0)}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$$

temos que  $\sup_{x_2} W > \frac{e^{\lambda(x_1 - b_0)}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$ , logo  $e^{-\lambda(x_1 - b_0)} \cdot \sup_{x_2} u > \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda e^{\lambda(x_1 - b_0)}}$  e portanto

$$\liminf_{x_1 \rightarrow \infty} e^{-\lambda(x_1 - b_0)} \cdot \sup_{x_2} u \geq \frac{1}{\lambda} > 0 \text{ provando a condição assintótica (14) e concluindo a}$$

prova do teorema.

**Lema 4:** Seja  $f$  solução da inequação diferencial  $f'' \leq 1 + (f')^2$  (18), com  $f(x_1) \rightarrow +\infty$  se  $x_1 \rightarrow \pm a$ , onde  $a \geq \pi/2$ .

Suponhamos que existem pontos  $a_0^\pm$  com  $-a + \pi/2 \leq a_0^- \leq a_0^+ \leq a - \pi/2$  tal que

$$f' \leq 0 \quad \text{sobre } [-a, a_0^-], \quad f'(a_0^-) = 0$$

$$f' \geq 0 \quad \text{sobre } [a_0^+, a], \quad f'(a_0^+) = 0 \quad (19)$$

Então

i) A função  $f$  satisfaz:

$$0 \leq f'(x_1) \leq \sqrt{\exp(2(f(x_1) - f(a_0^+)))} - 1 \quad \text{sobre } [a_0^+, a] \quad (20)$$

e

$$0 \geq f'(x_1) \geq -\sqrt{\exp(2(f(x_1) - f(a_0^-)))} - 1 \quad \text{sobre } (-a, a_0^-] \quad (21)$$

ii) A função  $h(x_1) = \arccos [ C \exp(-f(x_1)) ]$  com  $\ln C < \min f$  satisfaz:

$$h(x_1) \geq \frac{\pi}{2} + x_1 - a \quad \text{sobre } \left[ a - \frac{\pi}{2}, a \right]$$

e

$$h(x_1) \geq \frac{\pi}{2} - x_1 - a \quad \text{sobre } \left[ -a, -a + \frac{\pi}{2} \right] \quad (22)$$

**Demonstração:**

i) Consideremos o caso em que  $f' \geq 0$ . Escrevendo (18) na forma  $\frac{f''}{(1+f'^2)} \leq 1$  e,

multiplicando por  $f'$ , temos  $\frac{f' f''}{(1+f'^2)} \leq 1$ . Integrando obtemos

$$\ln(1+f'(x_1)^2) \leq 2(f(x_1) - f(a_0^+)) \quad \text{se } x_1 \in [a_0^+, a) \text{ de onde resulta (20).}$$

O caso  $f'' \leq 0$  é provado de maneira análoga e nos conduz a (21).

ii) Como  $\ln C \leq \min f$ , temos que  $\ln C \leq f(a_0^+)$  e portanto

$$C^2 e^{-2f(a_0^+)} \leq 1 \quad (22)$$

Por (i) temos que em  $[a_0^+, a)$  vale

$$h'(x_1) = \frac{C f'(x_1) e^{-f(x_1)}}{\sqrt{1 - C^2 e^{-2f(x_1)}}} \leq \sqrt{\frac{C^2 e^{-2f(a_0^+)} - C^2 e^{-2f(x_1)}}{1 - C^2 e^{-2f(x_1)}}}$$

Por (22) concluímos que  $h'(x_1) \leq 1$  em  $[a_0^+, a)$ . De forma análoga pode-se provar que  $h'(x_1) \geq -1$  sobre  $(-a, a_0^-]$ .

Consideremos agora a função  $g(x_1) = h(x_1) - x_1 - \frac{\pi}{2} + a$  em  $[a - \frac{\pi}{2}, a]$ . Obtemos por derivação que  $g'(x_1) = h'(x_1) - 1$  logo de (i) concluímos que  $g'(x_1) \leq 0$  portanto  $g$  é não crescente em  $[a_0^+, a)$ . Usando a condição  $h(x_1) \rightarrow \frac{\pi}{2}$  se  $x_1 \rightarrow +a$  temos que  $g(x_1) \rightarrow 0$  se  $x_1 \rightarrow +a$ . Logo

$g(x_1) \geq 0$  se  $x_1 \in [a_0^+, a]$ . Isto claramente prova que  $h(x_1) \geq \frac{\pi}{2} + x_1 - a$  sobre  $[a - \frac{\pi}{2}, a]$ . A prova de que  $h(x_1) \geq \frac{\pi}{2} - x_1 - a$  sobre  $[-a, -a + \frac{\pi}{2}]$  é feita de forma análoga.

**Teorema 5:** Seja o domínio  $\Omega := \{(x_1, x_2) / -a < x_1 < a, |x_2| < \cos^{-1}(C \exp(-f(x_1)))\}$ , onde  $a \geq \frac{\pi}{2}$ ,  $\ln C < \min f$  com  $f$  satisfazendo as condições do lema anterior. Então existe uma solução da equação (1.1) definida e continua sobre  $\bar{\Omega}$  que satisfaz a seguinte condição de fronteira.

$$u(x_1, x_2) = +\infty \quad \text{para } |x_1| = a, |x_2| < \frac{\pi}{2}$$

e

$$u(x_1, x_2) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus ( \{\pm a\} \times [ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} ] )$$

**Demonstração:** Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido nos teoremas (1) e (3) deste capítulo, temos nesse caso, que uma supersolução sobre  $\Omega$  pode ser

$$v(x_1, x_2) = f(x_1) + \ln \cos x_2 - \ln C, \text{ pois}$$

$$v_{x_1} = f'(x_1); \quad v_{x_1 x_1} = f''(x_1); \quad v_{x_2} = \frac{-\operatorname{sen} x_2}{\cos x_2}$$

$$v_{x_2 x_2} = -\frac{1}{\cos^2 x_2} \quad v_{x_1 x_2} = 0$$

logo  $M_{\Omega}(v) = (1 + f'(x_1)^2) \left( \frac{-1}{\cos x_2} \right) + \left( 1 + \frac{\sin^2 x_2}{\cos^2 x_2} \right) f''(x_1)$ . Mas  $f''(x_1) \leq 1 + f'(x_1)^2$

portanto:  $M_{\Omega}(v) \leq \frac{-f''(x_1)}{\cos^2 x_2} + \frac{f''(x_1)}{\cos^2 x_2} = 0$  e pelo Lema 7 (capítulo 1),  $v(x_1, x_2)$  é supersolução

em  $\Omega$ .

Convém observar que se considerarmos  $a = \frac{\pi}{2}$  temos:  $\Omega = \{(x_1, x_2) / |x_1| < \frac{\pi}{2} \text{ e } |x_2| < \frac{\pi}{2}\}$ ;

$f(x_1) = -\ln \cos x_1$  e  $C = 1$  nesse caso  $v(x_1, x_2)$  torna-se a clássica superfície de Scherk.

$$v(x_1, x_2) = \ln \cos x_2 - \ln \cos x_1$$

Consideremos o domínio:

$$\Omega_n = \left\{ (x_1, x_2) / -a + \frac{1}{n} < x_1 < a - \frac{1}{n}; |x_2| < \cos^{-1}(C \exp(-f(x_1))) \right\}.$$

Pelo método de Perron existe uma solução  $u_n$  da equação (1.1) sobre  $\Omega_n$  satisfazendo a condição  $0 \leq u_n \leq v$  sobre  $\overline{\Omega_n}$ .

Pelo teorema da compacidade a seqüência  $u_n$  possui uma subsequência que converge para uma solução  $u$  de (1.1) em  $\Omega$  satisfazendo  $0 \leq u \leq v$  sobre  $\overline{\Omega}$ . (23)

Consideremos o conjunto de pontos.

$$\Omega_2^1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \partial\Omega / -a < x_1 < a \text{ e } |x_2| = \cos^{-1}(C \exp(-f(x_1))) \right\}$$

Em  $\Omega_2^1$  temos que  $x_2 = \cos^{-1}(C \exp(-f(x_1)))$ , logo

$v(x_1, x_2) = f(x_1) + \ln C e^{-f(x_1)} - \ln C = f(x_1) + \ln C - f(x_1) - \ln C = 0$  portanto de (23)  $u = 0$  sobre  $\Omega_2^1$ .

Para provar a restante condição de fronteira, isto é, o valor da função  $u$  sobre o conjunto de pontos  $\Omega_2^2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \partial\Omega / |x_1| = a \text{ e } |x_2| < \frac{\pi}{2} \right\}$  vamos comparar  $u$  com uma parte adequada da superfície de Scherk.

Pelo item (ii) do Lema 4 (capítulo 2) temos que o domínio  $\Omega$  contém os triângulos  $\Delta^+$  e  $\Delta^-$  com vértices  $(a - \frac{\pi}{2}, 0)$ ;  $(a, \frac{\pi}{2})$ ;  $(a, -\frac{\pi}{2})$  e  $(-a + \frac{\pi}{2}, 0)$ ;  $(-a, \frac{\pi}{2})$ ;  $(-a, -\frac{\pi}{2})$  respectivamente. A figura 3.7 ilustra  $\Delta^+$  e  $\Delta^-$ .

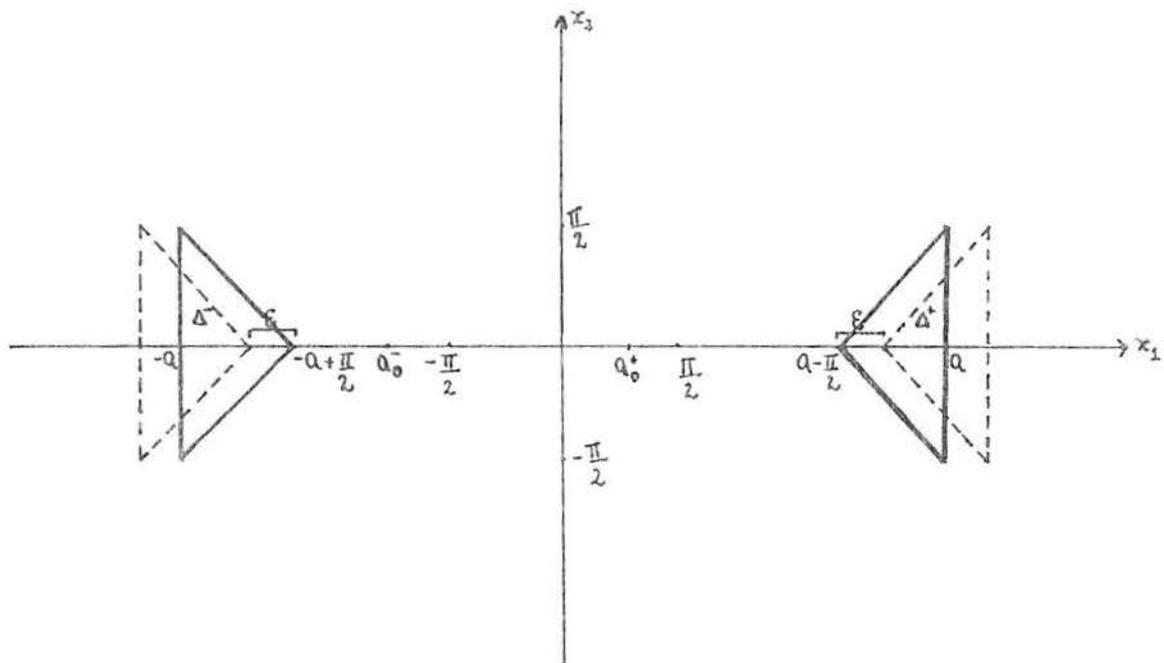


Figura 3.7

Agora vamos comparar a seqüência  $u_n$  sobre  $\Omega_n \cap ((\varepsilon, 0) + \Delta^+)$  e  $\Omega_n \cap ((-\varepsilon, 0) + \Delta^-)$ ; onde  $((\varepsilon, 0) + \Delta^+)$  e  $((-\varepsilon, 0) + \Delta^-)$  estão representados na figura 3.7; respectivamente com partes  $W_\varepsilon^\pm$  da superfície de Scherk definida sobre  $((\pm \varepsilon, 0) + \Delta^\pm)$ ; onde  $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$  para  $n$  suficientemente grande.

Naturalmente tomamos as partes da superfície de Scherk que são positivas sobre  $((\pm \varepsilon, 0) + \Delta^\pm)$ , assumem valor de fronteira  $+\infty$  sobre a parte vertical de  $\partial((\pm \varepsilon, 0) + \Delta^\pm)$  e são identicamente nulas sobre a restante parte da fronteira.

Visto que  $v(x_1, x_2) \rightarrow +\infty$  uniformemente sobre  $\Omega \cap ((\pm \varepsilon, 0) + \Delta^\pm)$  se  $x_1 \rightarrow \pm a$  segue que para  $n > n_0(\varepsilon)$  temos  $u_n \geq W_\varepsilon^\pm$  sobre  $\partial(\Omega_n \cap ((\pm \varepsilon, 0) + \Delta^\pm))$ . Logo pelo teorema 4 (capítulo 0)

$$u_n \geq W_\varepsilon^\pm \text{ sobre } \Omega_n \cap ((\pm \varepsilon, 0) + \Delta^\pm).$$

Fazendo  $n \rightarrow +\infty$  e conseqüentemente  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos  $u \geq W^\pm$  sobre  $\Omega \cap \Delta^\pm$  onde  $W^\pm$  são as correspondentes partes da superfície de Scherk definida sobre  $\Delta^\pm$ . Assim  $u = +\infty$  em  $\Omega_2^2$  concluindo a prova do teorema.

## Bibliografia

- [R1] Radó (T.): The problem of least area and the problem of Plateau. *Math. Z.* t. 32, 1930 p. 763-796.
- [R2] Radó (T.): The problem of Plateau. Berlin: Springer 1932.
- [Ni] Nitsche (J. C. C.): On News Results in the Theory of Minimal Surfaces (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 71, 1963, pp. 195-270).
- [GT] Gilbarg (D.) and Trudinger (N.S.): *Elliptic Partial Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.
- [RT] Ripoll (J.) and Tomi (F.): Some Existence Theorems for Minimal Graphs Over Non Convex Planar Domains. Preprint.
- [JS] Jenkins (H.) and Serrin (J.): Variational problems of minimal surface type II. Boundary value problems for the Minimal Surface Equation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, t. 21, 1963, p. 321-342.
- [S] Serrin (J.): A priori estimates for solutions of the minimal surface equation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, t. 14, 1963, p. 376-383.
- [L] L. S. Bellincanta, O problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios não limitados do plano, Tese de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 1994.