

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE MODAL E OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS ACOPLADOS
VIBROACÚSTICOS TRIDIMENSIONAIS

por

Leandro Pavan

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Março de 2008

ANÁLISE MODAL E OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS ACOPLADOS
VIBROACÚSTICOS TRIDIMENSIONAIS

por

Leandro Pavan
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Alberto Tamagna
UFRGS/PROMEC

Prof^a. Dr^a. Leticia Fleck Fadel Miguel
UFRGS/PROMEC

Prof. Dr. Tiago Becker
ULBRA/TC

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 31 de Março de 2008.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha mãe (in memoriam) e a minha esposa.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser finalizado sem a ajuda de diversas pessoas e instituições às quais presto minha homenagem:

A minha família pela compreensão e incentivo para vencer mais este desafio.

Ao meu orientador, professor Walter Jesus Paucar Casas, pela motivação, apoio, dedicação e tranquilidade nos momentos mais difíceis.

Aos professores Alberto Tamagna, Flávio José Lorini e Jun Sérgio Ono Fonseca, pela confiança e direcionamento inicial.

Aos bolsistas de iniciação científica do GMAP, Venâncio Neto e Luis Drehmer, demais professores e colegas do PROMEC, que colaboraram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

À UFRGS e ao PROMEC, pela oportunidade.

A empresa Marcopolo S.A. e colegas da Divisão de Engenharia, pela credibilidade e apoio na realização do trabalho.

Aos professores membros da Comissão de Avaliação.

Resumo

A excitação dos modos acoplados vibroacústicos de um sistema, essencialmente em baixas frequências, amplifica-se devido à ressonância, modificando o campo acústico interno e gerando regiões vizinhas de alta e baixa pressão acústica. O desconforto decorrente deste fato pode ser diminuído ou eliminado, dependendo das possibilidades de se evitar o casamento das frequências naturais acoplada, com as frequências naturais dos sistemas de transmissão e das fontes excitadoras. O tratamento de problemas acoplados considerando a interação fluido - estrutura existente, a exemplo dos sistemas vibroacústicos, vem sendo com o passar dos anos, diante da maior disponibilidade de ferramentas analíticas, numéricas e experimentais, um desafio possível de solução e de alvo constante de pesquisa em diversos segmentos tecnológicos da indústria aeronáutica, automotiva, nuclear, civil, biomecânica, etc. O desenvolvimento da análise e otimização numérica em modelos vibroacústicos, tema desta pesquisa, sob condições de contorno definidas, é importante não só para compreensão do fenômeno físico, mas também para se adquirir sensibilidade quanto aos fatores que influenciam a resposta vibroacústica em diferentes sistemas, onde a interação fluido-estrutura deve ser considerada. Dentre os objetivos da pesquisa consideram-se, o desenvolvimento analítico de uma formulação simples para a análise modal de sistemas vibroacústicos tridimensionais, a implementação computacional dessa formulação para comparação com os resultados advindos de um programa comercial disponível, e a solução modal com aplicação da otimização em sistemas vibroacústicos. A metodologia da pesquisa utiliza um tratamento analítico para modelagem do domínio estrutural, do domínio fluido e do acoplamento fluido-estrutura, através de uma discretização por elementos finitos, contextualizando a análise modal por meio de uma formulação matricial assimétrica $u-p$, em deslocamento u da estrutura e da pressão p do fluido. Na seqüência, avalia-se a otimização numérica em sistemas vibroacústicos, explorando-se alguns tipos de funções objetivo, dentre elas, a otimização da massa estrutural ou de uma frequência acoplada pré-definida, onde as variáveis de otimização estão relacionadas aos parâmetros dimensionais da estrutura, caracterizando um problema de otimização dimensional. Considerando os valores das frequências naturais do sistema estrutural e do sistema fluido desacoplado em quatro sistemas vibroacústicos, assim como os valores das frequências naturais e as formas modais dos modos acoplados, observa-se se as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura ou vice-versa, e com isso é possível verificar se é a estrutura ou o fluido que predomina no modo acoplado. Esses resultados possibilitam o controle modal do sistema vibroacústico.

Abstract

The structure-acoustic coupled modes excitement of a system, essentially in low frequencies, are amplified due to the resonance, modifying the internal acoustic field and generating areas of high and low acoustic pressure near this field. The discomfort resulting of this fact can be decreased or eliminated, depending on the possibilities to avoid the union of the coupled natural frequencies with the natural frequencies of the transmission systems and the excitation sources. The coupled problems treatment considering the existing fluid-structure interaction, as an example of the structure-acoustic systems, has become throughout the years, before a larger readiness of analytical, numerical and experimental tools, a challenge of possible solution and constant target of research in several technological segments, such as the aeronautical, automotive, nuclear, civil, biomechanics industry, etc. The analysis development and numerical optimization in structure-acoustic models, subject of this research, under defined contour conditions, is important not only to understand the physical phenomenon, but also to acquire sensibility as for the factors that influence the structure-acoustic answer in different systems, where the fluid-structure interaction must be considered. The research has as objectives the analytic development of a simple formulation for the modal analysis of three-dimensional structure-acoustic systems, the computational implement of that formulation for the comparison with the results originated from an available commercial program, and the modal solution with the optimization application in structure-acoustic systems. The research methodology uses an analytical treatment for modeling the structural domain, the fluid domain and the fluid-structure coupled, through the discretization for finite elements, presenting the modal analysis through a u - p asymmetric matrix formulation, in displacement u of the structure and the pressure p of the fluid. In the sequence, the numerical optimization is evaluated in structure-acoustic systems, being some types of objective functions explored, such as the structural mass optimization or a pre-defined frequency coupled, where the optimization variables are related to the dimensional parameters of the structure, characterizing a problem of dimensional optimization. Considering the values of the structural system natural frequencies and the fluid system uncoupled in four structure-acoustic systems, as well as the values of the natural frequencies and the modal forms of the coupled modes, it is observed if the pressure patterns in the fluid follow the deformation form of the structure or vice-versa, and then it is possible to verify if it is the structure or the fluid that prevails in the coupled mode. These results make the modal control of the structure-acoustic system possible.

Índice

1. Introdução	1
1.1 Definição do problema	1
1.2 Objetivos da pesquisa	4
1.3 Organização do trabalho	5
2. Pesquisa Bibliográfica	7
3. Fundamentação Teórica	12
3.1 Generalidades	12
3.2 Sistemas acoplados fluido-estrutura	12
3.3 Formulações para análise acústico-estrutural	13
3.4 Modelagem do domínio estrutural	15
3.4.1 Equações de movimento	15
3.4.2 Funções de energia elementares	17
3.4.2.1 Elemento de flexão de placa fina	18
3.4.2.2 Elemento de sólido tridimensional	21
3.4.3 Método dos elementos finitos	23
3.4.4 Vibração por flexão de placas retangulares finas	25
3.4.5 Vibração de sólidos - Hexaedro retangular	33
3.5 Modelagem do domínio fluido	37
3.5.1 Equação linearizada de onda	40
3.5.2 Dinâmica do fluido	46
3.6 Acoplamento fluido-estrutura	55
3.6.1 Formulação matricial	57
3.6.2 Determinação das matrizes elementares	57
4. Otimização Não Linear em Sistemas Vibroacústicos	61
4.1 Generalidades	61
4.2 Otimização no projeto	61
4.3 Problema básico de otimização	62
4.4 Otimização numérica	64
4.4.1 Minimização de funções de uma ou múltiplas variáveis	64
4.4.2 Métodos de minimização irrestrita	65
4.4.3 Condições de otimalidade de Kuhn-Tucker	66
4.4.4 Método SQP	67
4.5 Otimização estrutural em sistemas vibroacústicos	69
4.5.1 Otimização da massa	69
4.5.2 Otimização de uma frequência predominante estrutural	70
5. Resultados e Discussões	72
5.1 Generalidades	72
5.2 Sistema acústico-estrutural I – Cavidade cúbica sobre chapa	72
5.2.1 Chapa quadrada	72
5.2.2 Cavidade cúbica acústica	75
5.2.3 Cavidade cúbica acústica sobre chapa quadrada	78
5.2.4 Chapa quadrada de menor espessura	81
5.2.5 Cavidade cúbica acústica sobre chapa quadrada de menor espessura	82
5.3 Sistema acústico-estrutural II – Cavidade hexaédrica sobre chapa	85
5.3.1 Chapa quadrada	85
5.3.2 Cavidade hexaédrica acústica	87

5.3.3	Cavidade hexaédrica acústica sobre chapa quadrada	90
5.3.4	Minimização da segunda frequência natural	94
5.3.5	Maximização da segunda frequência natural	98
5.3.6	Minimização da massa	101
5.4	Sistema acústico-estrutural III – Caixa	106
5.4.1	Caixa hexaédrica	106
5.4.2	Cavidade acústica	108
5.4.3	Caixa hexaédrica acoplada com ar interno	112
5.4.4	Minimização da primeira frequência natural acoplada estrutural	114
5.4.5	Minimização do massa estrutural	118
5.5	Sistema acústico-estrutural IV - Cabine	123
5.5.1	Estrutura do chassi formada por vigas	123
5.5.2	Estrutura da carroceria formada por chapas	126
5.5.3	Estrutura formada por vigas e chapas	130
5.5.4	Cabine acústica	132
5.5.5	Cabine acústico-estrutural	133
6.	Conclusões	139
7.	Referências Bibliográficas	144
8.	Anexos	147
8.1	Exemplo de uma programação de elementos finitos implementada no Matlab	147

Nomenclaturas

Letras Latinas

a	: comprimento da seção retangular da estrutura	[m]
b	: largura da seção transversal retangular da estrutura	[m]
c	: altura da seção retangular da estrutura	[m]
c_s	: velocidade do som ou velocidade de fase para ondas acústicas em fluidos	[m/s]
$df_{f\Gamma x}$: componente da força de superfície na direção x	[N]
$df_{f\hat{x}}$: componente da força total na direção x	[N]
dm	: massa de uma partícula infinitesimal do fluido	[kg]
$\{\hat{\mathbf{e}}_n\}$: vetor unitário na n -ésima direção	
f	: função objetivo	
f	: frequência natural	[Hz]
$\{\mathbf{f}\}$: vetor de excitação no sistema acoplado	
$\{\mathbf{f}_j\}$: vetor da força de excitação atuando no fluido	
f_m	: frequência máxima de análise	[Hz]
$\{\mathbf{f}_s\}$: vetor da força de excitação atuando na estrutura	
$\{\mathbf{f}_{s\Gamma}\}$: vetor de forças de superfície atuando na estrutura	
$\{\mathbf{f}_{sB}\}$: vetor de forças de volume atuando na estrutura	
\mathbf{g}	: força de volume por unidade de massa	
h	: espessura	[m]
k	: constante	
$[\mathbf{k}]$: matriz simétrica quadrada dos coeficientes de rigidez	
$[\mathbf{k}]_e$: matriz de rigidez elementar	
$[\mathbf{k}_{ss}]$: matriz de rigidez da estrutura	
$[\mathbf{k}_{ff}]$: matriz volumétrica da energia cinética do domínio fluido	
$[\mathbf{k}_{fs}]$: matriz de rigidez com os termos do acoplamento	
$[\mathbf{m}]$: matriz simétrica quadrada dos coeficientes de inércia	
$[\mathbf{m}]_e$: matriz de massa elementar	
$[\mathbf{m}_{ss}]$: matriz de massa do domínio estrutural	
$[\mathbf{m}_{ff}]$: a matriz de inércia ou compressibilidade do domínio fluido	
$[\mathbf{m}_{fs}]$: matriz de massa com os termos de acoplamento	
$\hat{\mathbf{n}}$: direção normal exterior à estrutura	
$\{\mathbf{p}\}$: vetor de pressões nodais do elemento	
\tilde{p}	: solução aproximada do campo de pressões locais do fluido	[Pa]
p	: variação de pressão ou pressão acústica em qualquer ponto	[Pa]
p_l	: pressão instantânea num ponto	[Pa]
p_0	: pressão de equilíbrio constante no fluido	[Pa]
p_z	: carregamento transversal	[N/m]
$\{\mathbf{q}\}$: vetor coluna dos deslocamentos do sistema	
$\{\dot{\mathbf{q}}\}$: vetor coluna das velocidades do sistema	
$q_j^n(t)$: funções do tempo t	
r_x	: rotação em x	
r_y	: rotação em y	
r_z	: rotação em z	
u	: deslocamento longitudinal ao plano da placa	[m]
u_x	: deslocamento em x	[m]

u_y	: deslocamento em y	[m]
u_z	: deslocamento em z	[m]
v	: deslocamento transversal ao plano da placa	[m]
$\{\mathbf{v}\}$: vetor velocidade de uma partícula	
$v_{\hat{n}}$: velocidade do fluido na direção normal \hat{n}	[m/s]
$\dot{v}_{\hat{n}}$: um valor de velocidade pré-determinado	[m/s]
w	: deslocamento normal ao plano da placa	[m]
$\{\mathbf{x}\}$: vetor de parâmetros do projeto	
$\{\mathbf{x}\}^{min}$: vetor de espessuras mínimas	
$\{\mathbf{x}\}^{max}$: vetor de espessuras máximas	
$\{\mathbf{A}^n\}$: vetor de amplitudes	
$[\mathbf{C}]$: matriz simétrica quadrada dos coeficientes de amortecimento	
$[\mathbf{B}]$: matriz de deformação	
D	: energia de dissipação	[J]
$[\mathbf{D}]$: matriz das constantes do material	
E	: módulo de Young ou de elasticidade	[N/m ²]
L_e	: comprimento máximo permitido para a aresta do elemento	[m]
L_x	: comprimento de uma cavidade	[m]
L_y	: largura de uma cavidade	[m]
L_z	: altura de uma cavidade	[m]
$[\mathbf{N}_s]$: vetor das funções de forma na estrutura	
$[\mathbf{N}_f]$: vetor das funções de forma no fluido	
P_B	: variável que envolve as forças de volume no fluido	[Pa/m ²]
Q_j	: forças não conservativas generalizadas	[N]
$R(\tilde{p})$: resíduo do campo escalar de pressões	
S	: superfície de contorno	[m ²]
T	: energia cinética	[J]
U	: energia de deformação	[J]
V	: volume	[m ³]
$V(\{\mathbf{x}\})$: volume do sistema função do vetor de espessuras $\{\mathbf{x}\}$	[m ³]
V^L	: limite inferior do volume	[m ³]
V^U	: limite superior do volume	[m ³]

Letras Gregas

∇	: operador gradiente	
∇^2	: operador laplaciano	
ρ_f	: densidade do fluido, ou densidade instantânea num ponto	[kg/m ³]
ρ_0	: densidade de equilíbrio constante do fluido	[kg/m ³]
ρ	: densidade	[kg/m ³]
σ_{ij}	: tensão normal na face i de um cubo atuando na direção j	[N/m ²]
σ_{nn}	: tensão normal num ponto	[N/m ²]
ζ	: condensação	
τ_{ij}	: tensão cisalhante na face i de um cubo atuando na direção j	[N/m ²]
Γ_I	: superfície de interface	
Γ_{SL}	: superfície livre do fluido	

Γ_{SR}	: superfície rígida	
\bar{E}	: módulo de compressibilidade adiabático	[N/m ²]
Ω_f	: domínio fluido	
Ω_s	: domínio estrutural	
ν	: coeficiente de Poisson	
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$: vetor de deformações	
$\phi_j(x)$: funções de forma prescritas de x	
θ_x	: rotação em x	
θ_y	: rotação em y	
θ_z	: rotação em z	
α	: relação de a sobre b	
β	: relação de b sobre a	
ξ_i	: coordenada isoparamétrica do nó i na direção x	
ξ_j	: coordenada isoparamétrica do nó j na direção x	
η_i	: coordenada isoparamétrica do nó i na direção y	
η_j	: coordenada isoparamétrica do nó j na direção y	
ζ_i	: coordenada isoparamétrica do nó i na direção z	
ζ_j	: coordenada isoparamétrica do nó j na direção z	
ω	: freqüência de vibração	[Hz]
ω^2	: autovalor	
$\omega_N(\{\mathbf{x}\})$: N -ésima freqüência natural em função do vetor de espessuras $\{\mathbf{x}\}$	[Hz]
ω_N^L	: limite inferior da freqüência natural	[Hz]
ω_N^U	: limite superior da freqüência natural	[Hz]
λ_j	: multiplicador de Lagrange	
r	: número de elementos estruturais	
δW_{nc}	: trabalho virtual	[J]

Superescritos

- $()'$: derivada de $()$ em relação a uma variável
 $(\bar{\quad})$: valor prescrito de $()$
 (\sim) : valor aproximado de $()$

Subscritos

- f : fluido
 ff : fluido
 fs : acoplamento fluido-estrutura
 s : estrutura
 ss : estrutura
 x,y,z : componentes nas direções das coordenadas cartesianas x,y,z
 Γ : contorno do domínio Ω
 Ω : domínio

Abreviações

BFGS : Fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

MEF : Método dos elementos finitos

QP : Programação quadrática (**Q**uadratic **P**rogramming)

R : Quociente de Rayleigh

SQP : Programação quadrática sequencial (**S**equential **Q**uadratic **P**rogramming)

Índice de Figuras

Figura 3.1 Esquema do sistema acoplado fluido-estrutura	13
Figura 3.2 Elemento de flexão de placa	18
Figura 3.3 Sólido tridimensional	21
Figura 3.4 Geometria de um elemento retangular	27
Figura 3.5 Geometria de um elemento hexaedro retangular	34
Figura 3.6 Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares	42
Figura 3.7 Elemento fluido sob a ação de tensões na direção x	44
Figura 4.1 Ciclo iterativo do otimizador no MSC.Nastran	62
Figura 4.2 a) Mínimo irrestrito b) Mínimo restrito de função de uma variável	64
Figura 4.3 Função de duas variáveis e seu gradiente.	65
Figura 4.4 Comparação do: a) Método de descida rápida b) Método da direção conjugada.	65
Figura 4.5 Interpretação geométrica das condições de Kuhn-Tucker para otimalidade	66
Figura 4.6 Relação dos modelos de análise e de projeto	69
Figura 5.1 Malha da chapa quadrada com indicação das condições de contorno	73
Figura 5.2 Padrões dos modos da chapa quadrada suportada nos vértices	74
Figura 5.3 Malha da cavidade acústica com condições de contorno de parede rígida nas faces	75
Figura 5.4 Padrões dos modos de uma cavidade cúbica com frequências naturais diferentes	77
Figura 5.5 Malha da chapa quadrada com indicação das condições de contorno	86
Figura 5.6 Malha da cavidade retangular, condições de contorno de parede rígida nas faces	87
Figura 5.7 Padrões dos modos de uma cavidade acústica com frequências naturais diferentes	89
Figura 5.8 Modos do modelo da cavidade hexaédrica sobre chapa	93
Figura 5.9 Iterações na minimização da segunda frequência	95
Figura 5.10 Modos do modelo antes da otimização	96
Figura 5.11 Modos do modelo após a otimização	97
Figura 5.12 Iterações na maximização da segunda frequência	99
Figura 5.13 Modos do modelo antes da otimização	100
Figura 5.14 Modos do modelo após a otimização	101
Figura 5.15 Iterações na minimização da massa	103
Figura 5.16 Modos do modelo antes da otimização	104
Figura 5.17 Modos do modelo após a otimização	105
Figura 5.18 Caixa hexaédrica com detalhe das condições de contorno	107
Figura 5.19. Modos de deformação da estrutura da caixa	108
Figura 5.20. Malha acústica em elementos finitos da caixa	111

Figura 5.21 Modos do modelo da caixa acoplada	114
Figura 5.22 Iterações na minimização da primeira frequência acoplada do tipo estrutural	116
Figura 5.23 Modos do modelo da caixa acoplada antes da otimização	117
Figura 5.24 Modos do modelo da caixa acoplada após a otimização	118
Figura 5.25 Iterações na minimização da massa	120
Figura 5.26 Modos do modelo da caixa acoplada antes da otimização	121
Figura 5.27 Modos do modelo da caixa acoplada após a otimização	122
Figura 5.28 Modelo de origem da cabine veicular	123
Figura 5.29 Modelo do chassi composto por vigas	124
Figura 5.30 Modos do modelo de vigas do chassi	125
Figura 5.31 Modelo da carroceria composta por chapas	129
Figura 5.32 Modos do modelo da carroceria composta por chapas	130
Figura 5.33 Modelo estrutural formado por vigas e chapas	131
Figura 5.34 Modos do modelo estrutural composto por vigas e chapas	132
Figura 5.35 Modelo fluido da cabine acústica	132
Figura 5.36 Modos do modelo acústico	133
Figura 5.37 Modelo acústico-estrutural da cabine veicular	134
Figura 5.38 Modos do modelo acústico-estrutural	138

Índice de Tabelas

Tabela 5.1	Freqüências preditas em Hz de uma chapa quadrada suportada nos vértices	73
Tabela 5.2	Freqüências preditas da cavidade acústica em Hz.....	76
Tabela 5.3	Freqüências preditas I da cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada em Hz	79
Tabela 5.4	Freqüências preditas II da cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada em Hz.....	80
Tabela 5.5	Freqüências preditas em Hz de uma chapa quadrada de espessura menor	81
Tabela 5.6	Freqüências preditas I da cavidade cúbica sobre chapa de espessura menor em Hz ..	83
Tabela 5.7	Freqüências preditas II da cavidade cúbica sobre chapa de espessura menor em Hz .	84
Tabela 5.8	Freqüências preditas em Hz de uma chapa quadrada suportada nos vértices	86
Tabela 5.9	Freqüências preditas da cavidade retangular acústica em Hz	88
Tabela 5.10	Freqüências preditas da cavidade retangular sobre uma chapa quadrada em Hz.....	91
Tabela 5.11	Otimização das freqüências em Hz	94
Tabela 5.12	Otimização de variáveis	94
Tabela 5.13	Volumes do sistema.....	95
Tabela 5.14	Otimização das freqüências em Hz	98
Tabela 5.15	Otimização de variáveis	98
Tabela 5.16	Volumes do sistema.....	99
Tabela 5.17	Freqüências naturais decorrentes da otimização da massa em Hz	101
Tabela 5.18	Variáveis decorrentes da otimização da massa em m	102
Tabela 5.19	Massa do sistema antes e após a otimização	102
Tabela 5.20	Freqüências naturais da caixa em Hz	107
Tabela 5.21	Freqüências preditas da cavidade acústica em Hz.....	110
Tabela 5.22	Freqüências preditas da caixa hexaédrica acoplada com ar em Hz.....	112
Tabela 5.23	Otimização das freqüências em Hz	115
Tabela 5.24	Otimização de variáveis em m	115
Tabela 5.25	Volumes do sistema em m ³	115
Tabela 5.26	Freqüências decorrentes da otimização da massa em Hz.....	119
Tabela 5.27	Variáveis decorrentes da otimização da massa em m	119
Tabela 5.28	Massa do sistema em kg.....	120
Tabela 5.29	Dimensões das seções das vigas do chassi.....	123
Tabela 5.30	Freqüências preditas do chassi veicular em Hz.....	125
Tabela 5.31	Propriedades dos materiais das diversas partes da carroceria da cabine.....	128
Tabela 5.32	Freqüências preditas da cabine veicular em Hz	135

1. Introdução

1.1 Definição do problema

Geralmente define-se som como pequenas flutuações na pressão atmosférica, se propagando na forma de ondas, entre $2 \times 10^{-5} \text{Pa}$ e $2 \times 10^1 \text{Pa}$, tomando como referência que a pressão atmosférica (1atm) é $1,013 \times 10^5 \text{Pa}$. As flutuações de pressão chegam ao pavilhão auditivo e passam pelo canal auditivo, estimulando o tímpano, que tem o papel de transmitir as vibrações para uma série de ossos no ouvido médio, martelo, bigorna e estribo, estando este último ligado à cóclea por uma membrana (janela oval). É na cóclea que ocorre a transdução dos níveis de energia mecânica do som, em impulso elétrico, o qual é captado pelo nervo auditivo e enviado para o cérebro.

O ato de ouvir é um dos sentidos primários mais vitalmente valorizados para nosso desenvolvimento, sendo objeto de grande interesse, estudo e preservação.

A exposição a sons é um fenômeno que todos os seres humanos vivenciam desde antes do nascimento, e com base nele se inicia o aprendizado do modo mais tradicional de comunicação, que é a fala.

Os limites de frequência para a audição humana ficam entre 20 E 20000 Hz, mas a percepção do som é diferente para cada indivíduo, pois é muito complexa a forma com que o aparelho auditivo filtra as flutuações e o cérebro interpreta os sinais recebidos.

Por esse motivo, dependendo do tipo e nível de exposição, ruídos vibroacústicos como os causados pela maioria dos automóveis, caracterizam diferentes sensações de irritação e mal estar, variando imensamente as percepções de acordo com as características físicas de cada indivíduo.

Quando o nível de som é percebido como desagradável, costuma-se chamá-lo de ruído. Se o ruído gerado por um produto é menor em comparação aos seus concorrentes, logo a sociedade o assimila como o padrão mínimo de conforto acústico no segmento. Isso se reflete consideravelmente na preferência do consumidor, e conseqüentemente, em melhores resultados comerciais frente aos produtos que se mantêm fora do novo padrão.

A vibração e/ou ruído percebidos pelos usuários de determinado equipamento repercutem, muitas vezes até de forma inconsciente, sobre as suas percepções e conclusões finais referentes à eficiência e qualidade do mesmo.

Todavia, cabe ressaltar que para alguns casos, ruídos não são necessariamente indesejáveis, pois podem transmitir de forma eficiente e confiável ao usuário, características por ele definidas como um padrão de qualidade superior, como por exemplo, o ruído externo emitido por um veículo esportivo, que pode transmitir sensação de potência, status, etc., como o ruído da batida de porta de veículo, que pode transmitir sensação de segurança, robustez, conforto, etc. Estes fatos são comprovados e de longa data levados em consideração pelos fabricantes de veículos. Apenas pequena parte dos consumidores participa de um teste de direção antes de concretizar a compra de um veículo 0 km, enquanto 98% deles apenas abrem e fecham as portas no pátio das concessionárias, (Auweraer e Wyckaert, 2005)

Motivados na busca de diferenciais cada vez mais atrativos ou pelo menos equivalentes aos de seus concorrentes diretos, e atendendo a um mercado consumidor cada vez mais exigente, os fabricantes de veículos têm pesquisado continuamente no intuito de atingir níveis de conforto vibroacústicos cada vez superiores, se tornado uma questão prioritária dentro do desenvolvimento global de veículos.

Uma correta compreensão dos caminhos de transmissão possibilita diminuir a propagação do ruído, através da utilização de elementos com amortecimento, isoladores ou até mesmo procurando evitar a colocação de fontes excitadoras em locais críticos. Os caminhos de transmissão são do tipo estrutural, onde a vibração se transmite através dos componentes mecânicos, do tipo fluido, onde o ruído é transmitido através do ar existente entre os componentes, ou através de uma combinação dos dois tipos.

As análises geralmente englobam o veículo como um todo, avaliam os coeficientes aerodinâmicos, a melhor regulagem e balanceamento do motor, o tipo de transmissão, direção, suspensão, pneus e freios mais adequados para cada configuração de veículo e pista, até avançados sistemas de controle ativo de vibração e ruído.

Em relação aos sistemas de transmissão de ruído e vibração para o interior do veículo, define-se como a combinação de dois fatores, da vibração e ruído irradiado pelo próprio sistema

e pela eficiência da estrutura sendo excitada. O caminho nesse caso são os componentes e o ar existente para a passagem de energia vibroacústica do componente em estudo até os ocupantes. Para problemas em frequências baixas, abaixo de 700Hz, estima-se que 20% da energia seja transmitida via ar, e o resto via estrutura, (De Mello, 2003).

Os sistemas de transmissão de ruído e vibração podem tanto amplificar como amortecer os estímulos que recebem das fontes emissoras. O amortecimento ocorre na maioria dos casos, pela utilização de materiais destinados especificamente a esse fim e/ou por peças de acabamento interno que possuem características favoráveis ao amortecimento, ambas capazes de dispersar parte da energia vibratória e/ou acústica, em forma de calor, reduzindo os níveis que chegam até os passageiros. Já a amplificação, acontece pelo fato das frequências naturais da maioria das estruturas, principalmente as metálicas, elevarem o nível de energia que recebem, passando adiante níveis ainda maiores.

A excitação do modo acoplado vibroacústico do compartimento dos passageiros, essencialmente em baixas frequências, eleva consideravelmente a excitação recebida, devido à ressonância. Essas ressonâncias modificam o campo acústico interno, gerando regiões de pressão acústica não uniforme. O desconforto decorrente deste fato pode ser diminuído ou até mesmo eliminado, dependendo das possibilidades de se evitar o casamento das frequências naturais do compartimento dos passageiros (considerado para efeitos de análise como um componente vibroacústico), com as frequências naturais dos sistemas de transmissão, e com as frequências naturais das fontes emissoras.

Muitos fabricantes de veículos vêm definindo ainda no anteprojeto, seus limites quanto aos níveis de ruído e resposta acústica do compartimento dos passageiros, evidenciando a necessidade do pleno domínio das ferramentas numéricas e técnicas experimentais, como qualificações essenciais para a obtenção de importantes diferenciais tecnológicos, dentro de um cenário mundial onde é exigida constante evolução no controle de ruídos e vibrações.

Um projeto complexo, como é o caso dos veículos, exige conhecimento prévio do comportamento de todos os subsistemas que farão interação, sendo indispensável que pelo menos se estime o tipo, a magnitude e faixa de frequências das fontes excitadoras, sob diferentes situações de operação, e que se considere também a influência da interação entre os subsistemas.

A consideração da interação fluido-estrutura para obter resultados cada vez mais precisos, em situações com diferentes domínios, é fundamental na inovação tecnológica.

Esse trabalho é geralmente iniciado na fase inicial de projeto do produto, onde são realizadas simulações numéricas com métodos como Elementos Finitos, Elementos de Contorno ou Análise Estatística Energética, entre outros. A próxima fase é a confirmação dos resultados numéricos com aqueles obtidos em protótipos, buscando a maior correlação com o modelo final.

A fase inicial fornece subsídios fundamentais, inclusive para as mudanças normalmente exigidas no decorrer do processo produtivo, onde de forma experimental e real, se busca melhorar as características antes não plenamente identificadas e/ou enfatizadas no modelo numérico, no intuito de se agilizar os tempos de fabricação e montagem, de se reduzir custo eliminando peças pouco eficientes, e até mesmo para melhorar o desempenho e vida útil de componentes e sistemas.

O tratamento de problemas acoplados considerando a interação fluido-estrutura existente, a exemplo dos sistemas vibroacústicos, vem com o passar dos anos, diante da maior disponibilidade de ferramentas analíticas, numéricas e experimentais, sendo um desafio plausível de solução e alvo constante de pesquisa em diversos segmentos tecnológicos da indústria aeroespacial, aeronáutica, automotiva, nuclear, civil, naval, biomecânica, etc.

O desenvolvimento da análise e otimização numérica em modelos vibroacústicos, tema desta pesquisa, sob condições de contorno definidas, é importante não só para compreensão do fenômeno físico, mas também para se adquirir sensibilidade quanto aos fatores que influenciam a resposta vibroacústica em diferentes sistemas, onde a interação fluido-estrutura deve ser considerada.

1.2 Objetivos da pesquisa

Os principais objetivos do trabalho são:

O desenvolvimento analítico de uma formulação simples, mas eficiente, para a análise modal da interação fluido-estrutura em sistemas tridimensionais.

A implementação computacional da formulação previamente citada, servindo como parâmetro de comparação e comprovação, em relação aos resultados obtidos em programa comercial disponível.

A solução modal de diversos sistemas vibroacústicos, entre simples e complexos, no intuito de entender o nível de acoplamento existente, verificando a predominância da estrutura ou do fluido no modo acoplado.

A aplicação da otimização numérica em sistemas vibroacústicos. Algumas funções objetivo devem ser exploradas, dentre elas, a minimização da massa estrutural, a maximização ou minimização da primeira frequência natural com predominância estrutural. As variáveis de otimização devem estar relacionadas aos parâmetros dimensionais da estrutura, caracterizando um problema de otimização dimensional.

1.3 Organização do trabalho

O trabalho é dividido em seis capítulos.

O *Capítulo 1* define e justifica o problema a ser abordado neste trabalho, os principais objetivos que se pretendem alcançar, e a organização da metodologia adotada.

O *Capítulo 2* disponibiliza a pesquisa bibliográfica, envolvendo diferentes desdobramentos de estudos, técnicas e aplicações correlatas às empregadas neste trabalho.

O *Capítulo 3* apresenta o desenvolvimento teórico necessário para o tratamento analítico e compreensão do problema, passando pela modelagem do domínio estrutural, do domínio fluido e do acoplamento fluido-estrutura; no intuito de contextualizar a análise modal.

O *Capítulo 4* descreve a otimização não linear com vistas a sua aplicação em problemas acoplados vibroacústicos, através da otimização da massa ou de uma frequência acoplada pré-definida.

O *Capítulo 5* apresenta e discute os resultados obtidos para cada problema vibroacústico analisado.

O *Capítulo 6* apresenta as conclusões gerais obtidas, bem como as perspectivas para o desenvolvimento de futuros trabalhos na área.

2. Pesquisa Bibliográfica

Neste capítulo se apresenta uma revisão da literatura relacionada ao tema da pesquisa. A pesquisa bibliográfica é desenvolvida em ordem cronológica, destacando diversos aspectos relativos à análise e otimização de sistemas vibroacústicos acoplados, com o objetivo de caracterizar a evolução da pesquisa nesses assuntos.

Segundo Gerges (2000), com a rápida evolução tecnológica digital proporcionada por computadores cada vez mais eficientes e de grande memória para armazenar dados, tornou-se possível a solução de problemas acústicos complexos. As características vibroacústicas de sistemas (teatros, cinemas, igrejas, cabines veiculares, motores, alto falantes, etc.), podem ser previstas e otimizadas ainda na fase do anteprojeto, resultando em uma maior precisão e rapidez no cumprimento dos objetivos vibroacústicos pré-estabelecidos. Dessa forma é possível diminuir o número de testes e/ou até eliminar a fabricação de uma grande quantidade de protótipos, geralmente caros e demorados, aplicando-se a otimização nos modelos numéricos e testando experimentalmente os modelos otimizados.

Diversos pesquisadores no entorno brasileiro, por exemplo Pavanello (1991), Galli (1995) e Gerges (2000), descrevem diferentes técnicas numéricas para análise vibroacústica de sistemas complexos, tais como: o *Método dos Elementos Finitos* que é empregado principalmente em problemas interiores totalmente confinados ou com uma superfície livre, os métodos *Equação Integral* ou *Elementos Infinitos* e *Elementos de Contorno* são utilizados quando a consideração dos efeitos da radiação acústica tornam-se importantes. Nessas técnicas numéricas, o sistema acústico e estrutural são divididos em pequenos elementos, e a solução numérica da equação de onda acústica é resolvida satisfazendo as condições de contorno entre as fronteiras dos elementos e as fronteiras externas. O método de *Análise Estatística de Energia (SEA)* descreve o comportamento de cada sub-sistema através do cálculo das somas da energia de entrada, da energia de saída e da energia perdida em cada sub-sistema, e assim fornece a resposta acústica e/ou vibratória de cada sub-sistema. Outra técnica é o método de *Raios Acústicos*, que considera a energia acústica emitida pela fonte, a qual é distribuída entre um número discreto de raios acústicos; os raios que passam pelo ponto receptor são acompanhados e as atenuações acústicas são calculadas por causa de diversos fatores, como distância, absorção, reflexão, etc, e finalmente é mensurado o nível de pressão sonora no receptor.

Morand e Ohayon (1995) analisaram diversos métodos necessários ao modelamento numérico de vibrações lineares de estruturas elásticas acopladas com fluidos líquidos ou gasosos internos, para qualquer comprimento de onda, exceto nos casos de densidade modal elevada. Nesse trabalho, diversas equações matriciais simétricas são derivadas a partir de formulações variacionais, a fim de se resolver o sistema acoplado através do método dos elementos finitos, e através de procedimentos de redução modal em sub-sistemas elementares pré-definidos possibilita-se a obtenção de modos estruturais, modos de sloshing e modos acústicos.

David e Menelle (2007) descreveram a validação de um método de projeção modal da resposta vibroacústica em baixa frequência, de uma estrutura elástica acoplada a uma cavidade preenchida com um fluido denso e compressível, a água. Ao usar uma aproximação modal para problemas vibroacústicos interiores com fluidos densos, é mostrado que uma formulação com pressão interna não está correta, porque não leva em conta a solução estática de frequência zero do fluido. É melhor neste caso, usar o *potencial de deslocamento interno* que envolve o potencial de deslocamento estático e os termos de pressão estática, embora o potencial de deslocamento estático deva ser avaliado com cuidado. Para esse propósito, o método modal proposto é validado através de experimentação, via uma solução analítica e com uma aproximação numérica nas médias frequências; para o caso de uma placa retangular elástica acoplada a uma cavidade em forma de paralelepípedo, cheia de água. A validação do método é focalizada na avaliação das primeiras frequências ressonantes do sistema acoplado, na resposta vibratória da placa e na pressão acústica dentro da cavidade para uma faixa ampla de frequências.

Deu, Larbi e Ohayon (2007) constataram que durante a última década, uma quantia considerável de pesquisa foi dedicada ao desenvolvimento, testes e modelamento de técnicas de redução de ruído, usando conceitos passivos e/ou ativos. Classicamente, a redução de ruído através de técnicas passivas é alcançada usando materiais absorventes do som, modelados pela teoria poroelástica de Biot. Alternativamente, para aplicações acústico-estruturais, a impedância acústica de uma parede dissipativa pode ser usada, levando em consideração as propriedades de absorção dos materiais na interface fluido-estrutura. Os métodos de redução passiva são mais efetivos para as frequências altas, enquanto para as frequências baixas, as técnicas ativas que utilizam materiais piezoelétricos caracterizam-se alternativas atraentes ou ferramentas complementares. Estes pesquisadores apresentam uma formulação simétrica original, em elementos finitos para problemas acoplados acústicos estruturais piezolétricos. Primeiro, uma formulação variacional não simétrica em termos do deslocamento da estrutura, potencial elétrico

e pressão do fluido é proposta, e logo, através da introdução da variável potencial de deslocamento do fluido, consegue-se obter uma formulação simétrica em elementos finitos.

Na atualidade, grandes estruturas infláveis têm sido assunto de interesse renovado por alguns pesquisadores, devido ao seu potencial de aplicação na indústria aeroespacial em antenas de comunicação e para propulsão térmica solar [Srivastava, Mishra, e Jain (2007)]. As principais vantagens de se utilizar estruturas infláveis no espaço ocorrem por terem massa extremamente baixa, manobrabilidade em órbita e baixo volume de lançamento. O toróide inflado é um componente fundamental de muitas estruturas armadas no espaço, atuando como um refletor de membrana fina. Para se desenvolver um modelo mais realístico, deve-se considerar a interação dinâmica entre o toróide e o fluido em seu interior. Uma diminuição significativa das frequências modais é percebida quando a interação fluido-estrutura é considerada, possibilitando também a obtenção de alguns modos adicionais, em relação ao sistema estrutural com massa adicional do fluido, podendo-se concluir que a interação fluido-estrutura afeta significativamente o comportamento dinâmico de estruturas espaciais infladas.

A interação fluido-estrutura é importante no estudo de reservatórios. Parrinello e Borino (2007), por exemplo, avaliam essa interação através de uma abordagem Lagrangeana, baseada no método de elementos finitos, considerando-se as hipóteses de deslocamentos pequenos, fluido não viscoso e irrotacional. O domínio fluido é discretizado através de elementos finitos com graus de liberdade de deslocamento em bacias simplificadas, onde são comparadas as condições de contorno assintóticas de ordem elevada propostas por Higdon, com as condições de contorno de amortecimento de Sommerfeld, as quais são mais apropriadas na modelagem do domínio fluido com a pressão como variável.

Existem problemas acoplados de grande complexidade. Pani e Bhattacharyya (2007) estudam um caso acoplado de interação fluido-estrutura da comporta de uma represa, sendo resolvida de maneira desacoplada, ao avaliar a comporta e o domínio fluido de forma independente, onde a pressão do domínio fluido e do deslocamento da comporta são variáveis nodais independentes. A interação é alcançada pela transferência da aceleração da comporta para o fluido, e da pressão do fluido para a comporta. Nesse trabalho, técnicas de elementos finitos são utilizadas para a solução do problema de interação e um procedimento de convergência iterativo é seguido para manter o equilíbrio e a compatibilidade da interface fluido-estrutura. A pressão dinâmica na comporta é avaliada para condições de fluido compressível e

incompressível, e ainda são investigadas a influência da frequência de excitação, da razão de aspecto e a espessura da comporta que irá resistir a dita pressão.

Andrianarison e Ohayon (2006) investigam e discutem sob um ponto de vista teórico, diversas formulações variacionais de ordem reduzida, para análises modais de vibrações lineares de sistemas fluido-estrutura limitados com superfície livre, levando em consideração a possibilidade de interações da gravidade e compressibilidade, no caso de um fluido não homogêneo. Estas formulações são baseadas em técnicas de síntese subestrutural, onde são obtidas diversas reduções modais.

Uma revisão da análise, sensibilidade e otimização em acústica estrutural é apresentado por Christensen, Sorokin e Olhoff (1998). O trabalho detalha os últimos desenvolvimentos na análise de sensibilidade, emissão do som e projeto de NVH (*Noise, Vibration and Harshness*) em estruturas excitadas acusticamente, revisando diversas funções objetivo e formulações de otimização utilizadas em acústica estrutural, assim como técnicas numéricas consistentes empregadas para o tratamento de estruturas acopladas.

Existem diversas pesquisas relacionadas à propagação do ruído causado pelo tráfego dos veículos e seus efeitos nas propriedades de conforto dos passageiros. Shi, et al. (1997), avaliaram estes problemas de ruído como um fenômeno de acoplamento entre a estrutura e a acústica, que são frequentemente causados pela interação entre a vibração dos painéis que constituem o espaço interior do veículo e o ar existente dentro desse espaço. Uma estimativa para reduzir o ruído pode ser implementada através da otimização do projeto da estrutura. Nesse trabalho uma metodologia de superfície de resposta que usa redes neurais holográficas é aplicada para construir aproximações globais das funções de otimização estrutural. Os resultados indicam que esta é uma ferramenta eficiente para problemas de sensibilidade complexa, como por exemplo, nos casos de parâmetros distribuídos.

O controle passivo do ruído modificando a geometria da estrutura, como resultado de um processo de otimização acústico-estrutural; mostra grande potencial na minimização da radiação de ruído, principalmente em geometrias de casca fina. Todavia, a análise de sensibilidade representa a maior dificuldade no esforço computacional da otimização baseada no gradiente. Além disso, o tratamento conjunto da simulação acústico-estrutural utilizando as técnicas de elementos finitos e elementos de contorno, torna-se dispendioso devido às malhas diferentes.

Essas dificuldades são abordadas por Fritze, Marburg e Hardtke (2005), os quais propõem um método de cálculo de sensibilidade das propriedades acústicas parametrizando a geometria da casca.

Muitas estruturas *offshore* podem ser modeladas como sistemas multicorpos. Nesse segmento, por exemplo, Kral e Kreuzer (1998), utilizaram o conceito de interação fluido-estrutura na modelagem de sistemas flutuantes ou submersos. O fluxo do fluido influencia o movimento da estrutura, e por sua vez o fluido é influenciado pelo movimento da estrutura. Nesse trabalho, demonstra-se que a formulação linearizada da condição de contorno da superfície livre tem limitações significativas referente à altura da onda e amplitude do movimento, todavia, resultados importantes podem ser obtidos com esse método. Também, métodos não lineares completos são desenvolvidos para simular o comportamento tridimensional de estruturas flutuantes.

Desdobrando as aplicações do assunto em outras áreas, por exemplo, Kambouchev, Noels, e Radovitzky (2007) desenvolveram um método numérico para determinar o fluxo correspondente às ondas de explosão no ar, atuando em diferentes tipos de perfis de chapa. Nesse trabalho discutem-se os benefícios resultantes da interação fluido-estrutura na redução do impulso transmitido na presença de compressibilidade do ar. Em particular, se mostra que para tomar vantagem da redução do impulso proporcionado pelo efeito da interação fluido-estrutura, são necessários grandes deslocamentos de chapa, os quais podem limitar a aplicabilidade prática dos efeitos da interação fluido-estrutura, no projeto de sistemas abafadores de explosões.

Sigrist e Garreau (2007) realizaram desenvolvimentos numéricos de análise dinâmica fluido-estrutura acoplada numa formulação baseada na pressão, com o auxílio do MATLAB, a partir de resultados obtidos no programa de elementos finitos ANSYS®, utilizando métodos modais e espectrais. A expansão das possibilidades de modelamento dentro do ANSYS® é efetuada através da implementação de formulações simétricas fluido-estrutura para problemas elasto-acústicos e hidro-elásticos, utilizando as formulações simétricas (u, p, φ) e (u, η, φ) . O emprego da formulação simétrica possibilita a análise dinâmica linear com técnicas de projeção modal para os sistemas acoplados. No trabalho se recupera os princípios básicos desses métodos no contexto da interação fluido-estrutura.

3. Fundamentação Teórica

3.1 Generalidades

A finalidade deste capítulo é apresentar a modelagem numérica que governa as vibrações lineares de estruturas elásticas acopladas a um meio fluido interno, que pode ser um líquido ou gás. Apresenta-se também a formulação matricial do sistema acoplado, obtida através da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF).

3.2 Sistemas acoplados fluido-estrutura

A particularidade do problema de interação fluido-estrutura reside nos seus aspectos multidisciplinares, envolvendo representações da estrutura, do fluido e da interface.

Num sistema acoplado genérico de interação fluido-estrutura, os efeitos do *sloshing* da superfície livre do fluido, que surgem devido ao efeito da gravidade, são predominantes para frequências muito baixas. Já os efeitos incompressíveis hidroelásticos e efeitos acústicos podem ser predominantes para as frequências mais altas.

De uma forma geral, os diversos subsistemas físicos do problema de acoplamento dinâmico fluido-estrutura podem envolver os seguintes fenômenos: modos de *sloshing* (considerando os efeitos de tensão superficial), vibrações incompressíveis hidroelásticas (efeito de massa adicional) e vibrações acústico-estruturais (para gases e líquidos compressíveis). Nestes casos são considerados apenas os fenômenos lineares de pequenas oscilações de estruturas flexíveis, em contato com um fluido inicialmente em repouso.

As equações matriciais simétricas ou assimétricas resultantes do sistema acoplado podem ser derivadas, por exemplo, utilizando o MEF. Estes sistemas podem ser resolvidos diretamente ou utilizando procedimentos de redução modal dos subsistemas elementares apropriadamente definidos (via modos estruturais, modos de *sloshing* e modos acústicos).

A presente pesquisa está restrita exclusivamente ao estudo das vibrações acústico-estruturais para líquidos e gases compressíveis.

Considera-se que o sistema pode estar submetido a pequenas vibrações harmônicas, onde a presença do fluido pode modificar substancialmente as frequências naturais da estrutura, e a propagação das ondas no fluido é perturbada pela existência da estrutura.

O estudo é realizado sobre o comportamento vibratório do sistema fluido-estrutura, modelado por exemplo, conforme o esquema da Figura 3.1, onde o fluido perfeito e compressível está contido dentro de uma estrutura elástica aberta ou fechada. A estrutura ocupa o domínio Ω_s sendo impostos deslocamentos nulos em uma parte de sua fronteira Γ_{SR} conhecida como de superfície rígida. O fluido ocupa o domínio Ω_f tendo uma superfície livre Γ_{SL} onde a pressão é zero. A excitação do sistema pode ser devido à aplicação de esforços externos harmônicos, atuando na estrutura ou no fluido. É suposto que no instante zero o sistema ocupa uma posição de equilíbrio estático. A interação entre os domínios ocorre através da superfície de interface Γ_I , comum aos dois domínios. Por outro lado, denota-se $\hat{\mathbf{n}}$ como a direção normal exterior à estrutura.

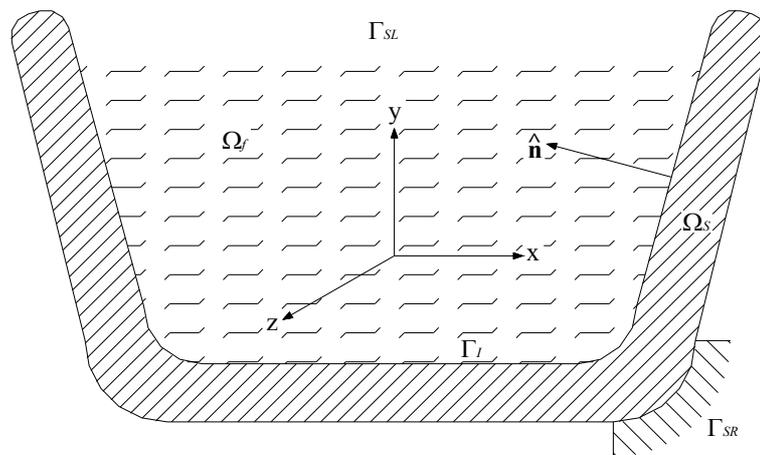


Figura 3.1 Esquema do sistema acoplado fluido-estrutura

Para a resolução do problema de interação fluido-estrutura é utilizada uma discretização por elementos finitos, obtendo-se uma formulação matricial assimétrica $u-p$ em deslocamento u da estrutura e pressão p do fluido.

3.3 Formulações para análise acústico-estrutural

O *problema interior* de vibrações harmônicas de uma estrutura elástica contendo um fluido compressível, com ou sem superfície livre, encontra-se em diversas aplicações.

O estabelecimento de diversas formulações variacionais simétricas, decorrentes de um tratamento direto por elementos finitos, envolve operadores de primeira ordem, para o caso geral de meios elásticos e fluidos em três dimensões.

Uma abordagem natural do problema consiste em declarar o fluido pelo campo de pressões p , e a estrutura pelo campo de deslocamentos u , para o qual o tratamento numérico do autoproblema por elementos finitos envolve matrizes *não simétricas*.

A simetrização das matrizes do problema pode ser obtida através da introdução de uma nova variável. A introdução do potencial de deslocamento φ do fluido possibilita a obtenção de outras duas formulações variacionais, com *acoplamento de massa* e com *acoplamento de rigidez*, as quais por meio de um procedimento de eliminação podem ser reduzidas ao autoproblema em (u,p) e (u,φ) , introduzindo os conceitos dos operadores de *massa adicional* e *rigidez adicional*.

Na seqüência descrevem-se algumas formulações alternativas:

- Formulação simétrica (u,p,φ)
- Formulação simétrica em (u,p,φ) com acoplamento de massa, de potencial $\varphi = p/(\rho_F \omega^2)$
- Formulação com acoplamento de massa, usando a relação $p = (\rho_F \omega^2 \varphi + \pi)$
- Formulação reduzida em (u,p) e operador de massa adicional baseada no contínuo
- Formulação simétrica (u,p,φ) com acoplamento de rigidez
- Formulação simétrica em (u,γ,p) , com as forças de reação dinâmica da estrutura $\gamma = -\omega^2 u$

Na formulação $u-p$ não simétrica a pressão e a densidade do fluido em equilíbrio são constantes, e as flutuações de Lagrange e Euler coincidem na pressão e na densidade.

Nos sistemas acoplados fluido-estrutura, para o caso de uma formulação $u-p$, as matrizes do sistema acoplado são assimétricas, e isso impede a utilização de técnicas convencionais de superposição modal. Outras técnicas adotam uma simetrização do sistema, procurando aproveitar as vantagens dos algoritmos mais eficientes desenvolvidos para matrizes simétricas. Todavia, acrescenta-se nestes casos uma desvantagem referente ao incremento de custo computacional, devido às operações adicionais de simetrização.

Num processo de otimização, o custo computacional de uma análise é decisivo, e por isso a escolha de uma formulação simples para o sistema acoplado é fundamental. Além disso, torna-se essencial à capacidade de se obter a sensibilidade do sistema acoplado via métodos analíticos, o que permite geralmente uma melhor convergência e estabilidade dos processos de otimização.

Neste trabalho é adotada a formulação $u-p$ não simétrica, em deslocamento u da estrutura e pressão p do fluido, que sendo uma formulação simples, ainda caracteriza adequadamente o sistema e possibilita determinar as sensibilidades eficientemente.

Na seqüência, descreve-se a formulação $u-p$ para caracterizar o comportamento vibroacústico de um sistema acoplado fluido-estrutura em três dimensões, onde em relação a uma posição intermediária de referência ou equilíbrio, as oscilações são consideradas de baixa amplitude.

3.4 Modelagem do domínio estrutural

A modelagem das vibrações do domínio estrutural é feita em termos do *deslocamento* u , assumindo-se pequenos deslocamentos estruturais em relação às dimensões do sistema acoplado. A estrutura é, por hipótese, constituída de material elástico linear, isotrópico e homogêneo. Além disso, não se leva em conta a mudança de densidade no domínio estrutural devido à compressão na superfície de interface.

Considerando o objetivo final da otimização paramétrica da estrutura, é de fundamental importância escolher um modelo da estrutura que garanta convergência e precisão no processo de otimização. Escolhe-se modelar a estrutura como sendo uma chapa, o que permite uma parametrização simples, mas bastante representativa da estrutura. Na seqüência, apresentam-se as equações dinâmicas que governam a vibração de chapas elásticas, para em seguida determinar a equação matricial do problema discretizado por elementos finitos.

3.4.1 Equações de movimento

Para o caso de um sistema dinâmico de n graus de liberdade, a energia cinética T e a energia de dissipação D são funções das velocidades, enquanto a energia de deformação U é função dos deslocamentos independentes na forma

$$\begin{aligned}
T &= T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\
D &= D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\
U &= U(q_1, q_2, \dots, q_n)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Também, o trabalho virtual δW_{nc} feito no sistema pelas forças não conservativas generalizadas Q_j é escrito como

$$\delta W_{ne} = \sum_{j=1}^n \left(Q_j - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \tag{3.2}$$

Logo, as equações de Lagrange apresentam-se na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{3.3}$$

Em forma matricial, a energia cinética, a função de dissipação e a energia de deformação são escritas como

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{m}] \{\dot{\mathbf{q}}\}, \quad D = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{q}}\}, \quad U = \frac{1}{2} \{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{q}\} \tag{3.4}$$

onde

$\{\mathbf{q}\}$ = vetor coluna dos deslocamentos do sistema

$\{\dot{\mathbf{q}}\}$ = vetor coluna das velocidades do sistema

$[\mathbf{m}]$ = matriz simétrica quadrada dos coeficientes de inércia

$[\mathbf{C}]$ = matriz simétrica quadrada dos coeficientes de amortecimento

$[\mathbf{k}]$ = matriz simétrica quadrada dos coeficientes de rigidez

Considerando a Equação (3.4), os termos das equações de Lagrange resultam

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \right\} = [\mathbf{m}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} \quad \left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \right\} = [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{q}}\} \quad \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\} = [\mathbf{k}] \{\mathbf{q}\} \tag{3.5}$$

Assim, as Equações de Lagrange dadas pela expressão (3.3), conhecidas as expressões matriciais de energia da Equação (3.5), fornecem as equações matriciais de movimento

$$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{Q}\} \quad (3.6)$$

3.4.2 Funções de energia elementares

As funções de energia dos elementos estruturais podem ser obtidas da teoria linear da elasticidade, ou seja, considerando relações tensão-deformação e deformação-deslocamento lineares.

Os estados de tensão e deformação de um corpo elástico tri-dimensional são definidos pelas componentes de tensão e deformação

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (3.7)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Caso os componentes de deslocamentos nas direções dos eixos cartesianos (x,y,z) sejam definidas por (u,v,w) , as relações deslocamento-deformação são

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observa-se ainda que as componentes de deslocamento são dependentes do tempo.

3.4.2.1 Elemento de flexão de placa fina

A Figura 3.2 mostra um elemento de placa fina de espessura constante, h , sujeita a cargas distribuídas na superfície. Essas cargas são normais à superfície média, no plano $z=0$.

Na derivação das funções de energia para uma placa fina, assume-se que a tensão na direção transversal, σ_z , é zero. Também, as normais à superfície média da placa indeformada permanecem retas e normais à superfície média durante a deformação, fazendo com que os deslocamentos paralelos à superfície da placa indeformada resultem

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

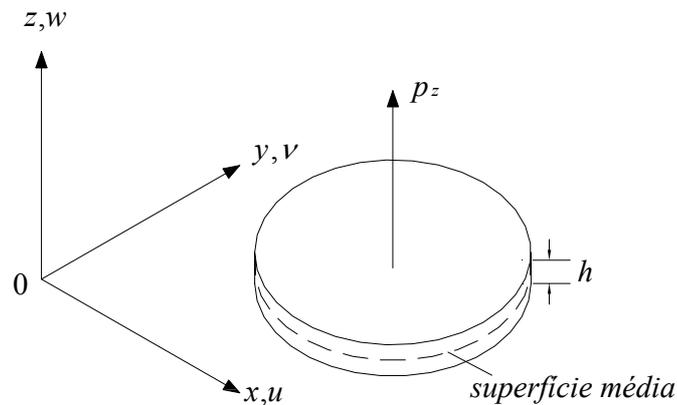


Figura 3.2 Elemento de flexão de placa

onde $w(x, y)$ indica o deslocamento da superfície média na direção z e as componentes de deformação são dadas por

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (3.12)$$

Desde que σ_z , γ_{xz} e γ_{yz} sejam zero, a energia de deformação armazenada no elemento é

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (3.13)$$

Essa equação pode ser escrita na forma matricial

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}] \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad (3.14)$$

Logo, a relação tensão-deformação resulta na forma

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (3.15)$$

Para materiais isotrópicos as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções e a matriz das constantes do material, \mathbf{D} , é expressa como

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} E' & E'\nu & 0 \\ & E' & 0 \\ Sym & & G \end{bmatrix} \quad \text{com } E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.16)$$

onde

E = Módulo de Elasticidade

ν = Coeficiente de Poisson

Substituindo o tensor de tensões da Equação (3.15) na Equação (3.14) resulta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV \quad (3.17)$$

Usando as Equações (3.11), o vetor de deformações pode ser escrito na forma

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = -z \{\boldsymbol{\chi}\} \quad (3.18)$$

onde

$$\{\boldsymbol{\chi}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Substituindo a Equação (3.18) na Equação (3.17) e integrando em relação a z, resulta

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} (\boldsymbol{\chi})^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\chi}\} dA \quad (3.20)$$

A energia cinética da placa é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{w}^2 dA \quad (3.21)$$

O trabalho virtual do carregamento transversal p_z é

$$\delta W = \int_A p_z \delta w dA \quad (3.22)$$

3.4.2.2 Elemento de sólido tridimensional

Considera-se um sólido em três dimensões de volume V e superfície de contorno S , como mostrado na Figura 3.3. O estado de tensão e deformação de um ponto é definido pelas componentes independentes dos tensores de tensão e deformação, Equações (3.7) e (3.8), onde a energia de deformação é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (3.23)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \\ \{\boldsymbol{\sigma}\}^T &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}] \end{aligned} \quad (3.25)$$

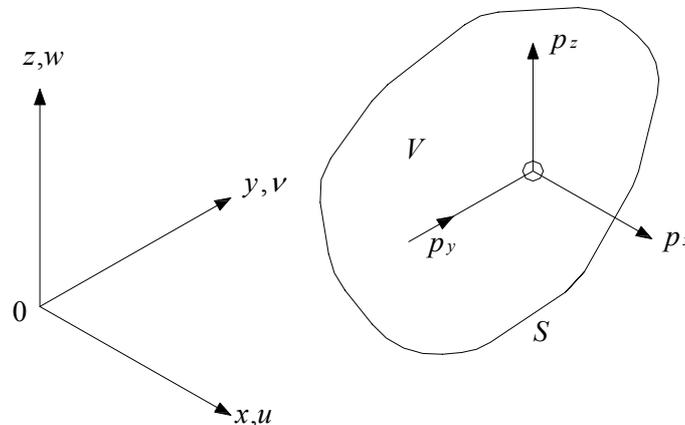


Figura 3.3 Sólido tridimensional

A relação tensão deformação acontece na forma da Equação (3.15), e \mathbf{D} é uma matriz simétrica, sendo definida para o caso de um material isotrópico

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ \text{Sim} & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Substituindo a Equação (3.15) na Equação (3.24) resulta

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV \quad (3.27)$$

As relações deformação deslocamento a serem utilizadas na Equação (3.27) são fornecidas pela Equação (3.9), apresentadas na forma matricial, por

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

A energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (3.29)$$

Considerado que p_x , p_y e p_z são as componentes das forças de superfície aplicadas por unidade de área, o trabalho virtual resulta

$$\delta W = \int_S (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS \quad (3.30)$$

3.4.3 Método dos elementos finitos

As respostas em estruturas simples podem ser obtidas resolvendo as equações diferenciais de movimento, em conjunto com certas condições de contorno. Em diversas situações as propriedades geométricas ou as propriedades do material variam, ou ainda os contornos não são descritos em termos de funções conhecidas, sendo impossível a obtenção de soluções analíticas das equações de movimento. Essa dificuldade pode ser resolvida através de soluções aproximadas que satisfaçam o princípio de Hamilton. Uma das técnicas mais utilizadas para determinar essas soluções é o método de Rayleigh-Ritz, cuja generalização é o método dos elementos finitos.

O princípio de Hamilton requer que,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - U) + \delta W) dt = 0 \quad (3.31)$$

O método de Rayleigh-Ritz aproxima a solução com uma expansão finita da forma,

$$u^n(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j^n(t) \quad (3.32)$$

Onde $q_j^n(t)$ são funções do tempo, t , e $\phi_j(x)$ são funções de forma prescritas de x , as quais são linearmente independentes.

Um corpo deformável contínuo consiste de infinitos pontos materiais, e portanto, teria infinitos graus de liberdade. Assumindo que o movimento é dado pela Equação (3.32), o sistema contínuo é aproximado por um sistema com um número finito de graus de liberdade, logo a aplicação do princípio de Hamilton se traduz nas equações de Lagrange que geram as equações de movimento na forma

$$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{q}}^n\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}^n\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{q}^n\} = \{\mathbf{Q}^n\} \quad (3.33)$$

onde

$$\{\mathbf{q}^n\}^T = [q_1^n \quad q_2^n \quad \cdots \quad q_n^n] \quad (3.34)$$

A Equação. (3.33) é resolvida para os $\{\mathbf{q}^n\}$, que substituídos na Equação (3.32) fornecem uma solução aproximada para $u(x,t)$.

Se as integrais na Equação (3.31) envolverem derivadas até a ordem p , então as funções $\phi_j(x)$ da Equação (3.32) devem satisfazer diversos critérios para convergência da solução:

- Serem linearmente independentes;
- Serem contínuas e terem derivadas contínuas até a ordem $(p-1)$, dentro e no contorno do elemento. Um elemento que satisfaz essa condição é chamado de elemento *conforme*;
- Satisfazer as condições de contorno geométricas ou essenciais;
- Formar uma série completa.

Observa-se que ao utilizar o método de Rayleigh-Ritz, as equações de movimento e as condições de contorno naturais, somente serão satisfeitas de forma aproximada. Um problema de interesse na análise de vibrações é a determinação das frequências naturais e os modos de vibração livre de uma estrutura. Nesse caso a Equação (3.33) se reduz a

$$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{q}}^n\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{q}^n\} = 0 \quad (3.35)$$

Como o movimento é harmônico, logo

$$\{\mathbf{q}^n(t)\} = \{\mathbf{A}^n\} \text{sen } \omega t \quad (3.36)$$

onde as amplitudes $\{\mathbf{A}^n\}$ são independentes do tempo e ω é a frequência de vibração. Substituindo (3.36) em (3.35) resulta

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}]\{\mathbf{A}^n\} = 0 \quad (3.37)$$

que representa um conjunto de n equações homogêneas lineares nas incógnitas $A_1^n, A_2^n, \dots, A_n^n$, as quais proporcionam uma solução diferente de zero, desde que o determinante dos coeficientes seja zero.

$$\det [\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] = 0 \quad (3.38)$$

O polinômio resultante da Equação (3.38) tem n raízes ou autovalores $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Caso $[\mathbf{m}]$ seja definida positiva, e $[\mathbf{k}]$ definida positiva ou semi-definida positiva, os autovalores são reais positivos ou zero. As quantidades $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, são valores aproximados das primeiras n frequências naturais do sistema.

Para cada autovalor ω^2 existe uma solução única à Equação (3.37), se obtendo o autovetor $\{\mathbf{A}^n\}$, que combinadas com as funções prescritas $\phi_j(x)$ definem os perfis dos modos de vibração aproximadamente como

$$u^n(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \{A_j^n\} \quad (3.39)$$

A convergência às frequências e forma dos modos reais é obtida na medida em que o número de termos na Equação (3.39) se incrementa.

Na análise de estruturas de forma complexa, dificuldades surgem na determinação de um conjunto das funções prescritas que satisfaçam as condições de contorno geométricas. Essas dificuldades podem ser resolvidas utilizando o método de deslocamentos de elementos finitos, o qual proporciona um procedimento automático para construir as funções de forma no método de Rayleigh-Ritz, construídas da seguinte maneira:

- a) Selecionar um conjunto de nós de referência na estrutura.
- b) Associar em cada nó um dado número de graus de liberdade (deslocamento, rotação, etc.)
- c) Construir um conjunto de funções, tal que cada uma forneça um valor unitário para um grau de liberdade e zero para os outros.

3.4.4 Vibração por flexão de placas retangulares finas

As estruturas de placa fina encontradas em aeronaves, edifícios, navios, pontes, enclausuramentos de máquinas, etc, estão sujeitas a cargas dinâmicas normais aos seus planos, ocasionando vibrações por flexão (Petyt, 1998). Tais estruturas podem ser consideradas como

uma montagem de elementos finitos bi-dimensionais chamados elemento de flexão de placa. Esses elementos podem adotar formas triangulares, retangulares ou quadrilaterais.

A expressões de energia para um elemento em flexão de placa fina estão descritas nas Equações (3.20) e (3.21):

Como a derivada de maior ordem que aparece nestas expressões é a segunda; para convergência, será necessário que w e suas primeiras derivadas $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$, sejam contínuas entre elementos vizinhos. Estas três quantidades são, portanto, tomadas como graus de liberdade para cada nó. Também, polinômios completos de ordem dois devem ser usados. A forma assumida da função deslocamento, qualquer que seja a forma do elemento, é

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \text{termos de maior ordem} \quad (3.40)$$

A Figura 3.4 mostra um elemento retangular com quatro nós, um em cada vértice. Existem três graus de liberdade em cada nó, isto é, a componente de deslocamento normal ao plano da placa w , e as duas rotações $\theta_x = \partial w/\partial y$ e $\theta_y = -\partial w/\partial x$. Em termos das coordenadas (ξ, η) , torna-se

$$\theta_x = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \theta_y = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (3.41)$$

Como o elemento tem 12 graus de liberdade, a função deslocamento pode ser representada por um polinômio de 12 termos

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi\eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi\eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi\eta^3 \quad (3.42)$$

Observa-se que essa função é um cúbico completo para o qual têm sido adicionados dois termos do polinômio de quarta ordem, $\xi^3 \eta$ e $\xi\eta^3$, que estão simetricamente localizados no triângulo de Pascal. Isso assegurará que o elemento é geometricamente invariante.

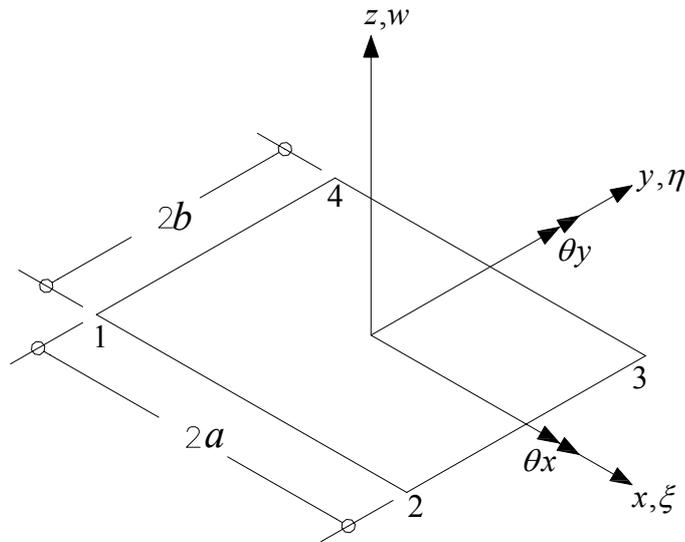


Figura 3.4 Geometria de um elemento retangular

A expressão (3.42) pode ser escrita na seguinte forma matricial

$$w = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \xi^3\eta \quad \xi\eta^3] \{\mathbf{a}\} \quad (3.43)$$

$$w = [\mathbf{P}(\xi, \eta)] \{\mathbf{a}\} \quad (3.44)$$

$$\{\mathbf{a}\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12}] \quad (3.45)$$

Derivando (3.44) resulta

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2\xi \quad \eta \quad 0 \quad 3\xi^2 \quad 2\xi\eta \quad \eta^2 \quad 0 \quad 3\xi^2\eta \quad \eta^3] \{\mathbf{a}\} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \xi \quad 2\eta \quad 0 \quad \xi^2 \quad 2\xi\eta \quad 3\eta^2 \quad \xi^3 \quad 3\xi\eta^2] \{\mathbf{a}\} \quad (3.47)$$

Avaliando (3.44), (3.46) e (3.47) para $\xi = \mp 1, \eta = \mp 1$ resulta

$$\{\bar{\mathbf{w}}\}_e = [\mathbf{A}]_e \{\mathbf{a}\}, \quad \{\bar{\mathbf{w}}\}_e^T = [w_1 \quad b\theta_{x1} \quad a\theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad b\theta_{x4} \quad a\theta_{y4}] \quad (3.48)$$

$$\{\bar{\mathbf{w}}\}_e^T = [w_1 \quad b\theta_{x1} \quad a\theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad b\theta_{x4} \quad a\theta_{y4}] \quad (3.49)$$

onde

$$[\mathbf{A}]_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Resolvendo (3.48) para $\{\mathbf{a}\}$ resulta

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{A}]_e^{-1} \{\bar{\mathbf{w}}\}_e \quad (3.51)$$

onde

$$[\mathbf{A}]_e^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Substituindo (3.51) em (3.44) resulta

$$w = [\mathbf{N}_1(\xi, \eta) \quad \mathbf{N}_2(\xi, \eta) \quad \mathbf{N}_3(\xi, \eta) \quad \mathbf{N}_4(\xi, \eta)] \{\mathbf{w}\}_e \quad (3.53)$$

$$w = [\mathbf{N}(\xi, \eta)] \{\mathbf{w}\}_e$$

onde

$$\{\mathbf{w}\}_e^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \cdots w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}] \quad (3.54)$$

$$[\mathbf{N}_j(\xi, \eta)]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(2 + \xi_j \xi + \eta_j \eta - \xi^2 - \eta^2) \\ \frac{b}{8}(1 + \xi_j \xi)(\eta_j + \eta)(\eta^2 - 1) \\ -\frac{a}{8}(\xi_j + \xi)(\xi^2 - 1)(1 + \eta_j \eta) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

e (ξ_j, η_j) são as coordenadas do nó j . Substituindo (3.53) em (3.21), resulta

$$\mathbf{T}_e = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{w}}\}_e^T [\mathbf{m}]_e \{\dot{\mathbf{w}}\}_e \quad (3.56)$$

onde

$$[\mathbf{m}]_e = \int_{A_e} \rho h [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dA \quad (3.57)$$

$$[\mathbf{m}]_e = \rho h a b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}(\xi, \eta)]^T [\mathbf{N}(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (3.58)$$

é a matriz de inércia elementar.

Para o domínio estrutural, adotam-se como as componentes \mathbf{N}_{si} do vetor \mathbf{N}_j , as funções de formas cúbicas clássicas, garantindo continuidade entre elementos através dos deslocamentos e de suas derivadas primeiras.

O cálculo das matrizes é desenvolvido no espaço isoparamétrico local em coordenadas $\xi = x/a$ e $\eta = y/b$.

O vetor das funções de forma no domínio estrutural é definido através da Equação (3.55), que avaliada nas coordenadas do nó j segundo (ξ_j, η_j) nos pontos de 1 a 4 para o caso de uma placa retangular fina, conforme representado na Figura 3.4, resulta

$$\begin{aligned}
 \text{Nó } 1_s \quad \xi_j &= -1 \quad \eta_j = -1 \\
 \text{Nó } 2_s \quad \xi_j &= 1 \quad \eta_j = -1 \\
 \text{Nó } 3_s \quad \xi_j &= 1 \quad \eta_j = 1 \\
 \text{Nó } 4_s \quad \xi_j &= -1 \quad \eta_j = 1
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{N}_{s1}]^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(2-\xi-\eta-\xi^2-\eta^2) \\ \frac{1}{8}b(1-\xi)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ -\frac{1}{8}a(-1+\xi)(\xi^2-1)(1-\eta) \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{N}_{s2}]^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(2+\xi-\eta-\xi^2-\eta^2) \\ \frac{1}{8}b(1+\xi)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ -\frac{1}{8}a(1+\xi)(\xi^2-1)(1-\eta) \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{N}_{s3}]^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(2+\xi+\eta-\xi^2-\eta^2) \\ \frac{1}{8}b(1+\xi)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ -\frac{1}{8}a(1+\xi)(\xi^2-1)(1+\eta) \end{bmatrix} \\
 [\mathbf{N}_{s4}]^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(2-\xi+\eta-\xi^2-\eta^2) \\ \frac{1}{8}b(1-\xi)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ -\frac{1}{8}a(-1+\xi)(\xi^2-1)(1+\eta) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

originando

$$[\mathbf{N}(\xi, \eta)] = [[\mathbf{N}_{s1}] \quad [\mathbf{N}_{s2}] \quad [\mathbf{N}_{s3}] \quad [\mathbf{N}_{s4}]] \tag{3.61}$$

Substituindo as funções de $[\mathbf{N}(\xi, \eta)]$ da Equação (3.58) pela Equação (3.61) e integrando resulta

$$[\mathbf{m}]_e = \frac{\rho h a b}{6300} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{11}^T \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

onde

$$[\mathbf{m}_{11}] = \begin{bmatrix} 3454 & & & & & & \\ 922b & 320b^2 & & & & & \\ -922a & -252ab & 320a^2 & & & & \\ 1226 & 398b & -548a & 3454 & & & \\ 398b & 160b^2 & -168ab & 922b & 320b^2 & & \\ 548a & 168ab & -240a^2 & 922a & 252ab & 320a^2 & \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$[\mathbf{m}_{21}] = \begin{bmatrix} 394 & 232b & -232a & 1226 & 548b & 398a \\ -232b & -120b^2 & 112ab & -548b & -240b^2 & -168ab \\ 232a & -112ab & -120a^2 & 398a & 168ab & 160a^2 \\ 1226 & 548b & -398a & 394 & 232b & 232a \\ -548b & -240b^2 & 168ab & -232b & -120b^2 & -112ab \\ -398a & -168ab & 160a^2 & -232a & -112ab & -120a^2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$[\mathbf{m}_{22}] = \begin{bmatrix} 3454 & & & & & & \\ -922b & 320b^2 & & & & & \\ 922a & -252ab & 320a^2 & & & & \\ 1226 & -398b & 548a & 3454 & & & \\ -398b & 160b^2 & -168ab & -922b & 320b^2 & & \\ -548a & 168ab & -240a^2 & -922a & 252ab & 320a^2 & \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Na seqüência, substituindo (3.53) em (3.19) e (3.20) resulta

$$U_e = \frac{1}{2} \{\mathbf{w}\}_e^T [\mathbf{k}]_e \{\mathbf{w}\}_e \quad (3.66)$$

onde a matriz de rigidez elementar é dada por

$$[\mathbf{k}]_e = \int_{A_e} \frac{h^3}{12} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dA \quad (3.67)$$

e

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a} \quad (3.74)$$

Definindo as seguintes matrizes

$$[\mathbf{I}_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

as outras sub-matrizes da Equação (3.69) são dadas por

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}_{22}] &= [\mathbf{I}_3]^T [\mathbf{k}_{11}] [\mathbf{I}_3] \\ [\mathbf{k}_{32}] &= [\mathbf{I}_3]^T [\mathbf{k}_{41}] [\mathbf{I}_3] \quad [\mathbf{k}_{33}] = [\mathbf{I}_1]^T [\mathbf{k}_{11}] [\mathbf{I}_1] \\ [\mathbf{k}_{42}] &= [\mathbf{I}_3]^T [\mathbf{k}_{31}] [\mathbf{I}_3] \quad [\mathbf{k}_{43}] = [\mathbf{I}_1]^T [\mathbf{k}_{21}] [\mathbf{I}_1] \quad [\mathbf{k}_{44}] = [\mathbf{I}_2]^T [\mathbf{k}_{11}] [\mathbf{I}_2] \end{aligned} \quad (3.76)$$

3.4.5 Vibração de sólidos - Hexaedro retangular

A Figura 3.5 mostra um elemento hexaédrico retangular com 8 nós, um em cada vértice. Há três graus de liberdade por nó, isto é, as componentes dos deslocamentos u , v e w , respectivamente nas direções dos eixos x , y e z . Cada componente pode, entretanto, ser representada por polinômios tendo oito termos cada um assegurando uma invariância geométrica.

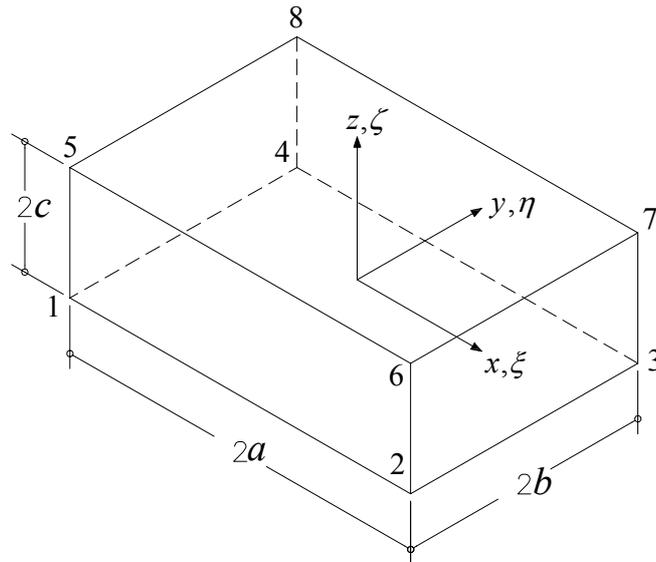


Figura 3.5 Geometria de um elemento hexaédrico retangular

Os deslocamentos podem, assim, ser representados por expressões da forma

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 xz + \alpha_8 xyz \quad (3.77)$$

Os coeficientes α_1 até α_8 podem ser expressos em termos dos valores da componente u de deslocamento, nos oito pontos nodais, pela avaliação da expressão anterior nos nós, e resolvendo as equações correspondentes. Entretanto, é mais simples escrever as funções de deslocamento por inspeção. As funções de deslocamento são escritas na forma

$$u = \sum_{j=1}^8 N_j u_j, \quad v = \sum_{j=1}^8 N_j v_j, \quad w = \sum_{j=1}^8 N_j w_j \quad (3.78)$$

onde as funções N_j são requeridas para ter um valor unitário no nó j e o valor zero nos outros sete nós. Assim, as funções de forma podem ser representadas como

$$N_j = \frac{1}{8} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) (1 + \zeta_j \zeta) \quad (3.79)$$

onde (ξ_j, η_j, ζ_j) são as coordenadas do nó j .

Em cada face a variação do deslocamento é bi-linear e exclusivamente determinada pelos valores nos quatro nós. Existe então, continuidade de deslocamento entre elementos adjacentes. A expressão (3.78) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}\}_e \quad (3.80)$$

onde

$$\{\mathbf{u}\}_e^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8] \quad (3.81)$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

A energia cinética do elemento é obtida substituindo a Equação (3.80) na Equação (3.29)

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{u}}\}_e^T [\mathbf{m}]_e \{\dot{\mathbf{u}}\}_e \quad (3.83)$$

onde a matriz de inércia do elemento é dada por.

$$[\mathbf{m}]_e = \int_{V_e} \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad (3.84)$$

Um elemento típico desta matriz é

$$\begin{aligned} m &= \rho abc \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i N_j d\xi d\eta d\zeta \\ m &= \frac{\rho abc}{64} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi_i \xi_j) (1 + \xi_j \xi_j) d\xi \int_{-1}^{+1} (1 + \eta_i \eta_j) (1 + \eta_j \eta_j) d\eta \int_{-1}^{+1} (1 + \zeta_i \zeta_j) (1 + \zeta_j \zeta_j) d\zeta \\ m &= \frac{\rho abc}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Usando esse resultado obtêm-se a seguinte matriz de inércia

$$[\mathbf{m}]_e = \begin{bmatrix} [\mathbf{m}_1] & [\mathbf{m}_2] \\ [\mathbf{m}_2] & [\mathbf{m}_1] \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

com

$$[\mathbf{m}_1] = 2 [\mathbf{m}_2] \quad (3.87)$$

$$[\mathbf{m}_2] = \rho \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Substituindo (3.80) em (3.28) e (3.27) resulta a expressão

$$U_e = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}_e^T [\mathbf{k}]_e \{\mathbf{u}\}_e \quad (3.89)$$

onde a matriz de rigidez do elemento é

$$[\mathbf{k}]_e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (3.90)$$

A matriz de deformação $[\mathbf{B}]$ é da forma

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_8] \quad (3.91)$$

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Usando (3.79) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\xi_i}{8a} (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\eta_i}{8b} (1 + \xi_i \xi) (1 + \zeta_i \zeta) \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\zeta_i}{8c} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \end{aligned} \quad (3.93)$$

e $[\mathbf{D}]$, considerando um material isotrópico, é definido conforme Equação (3.26).

Substituindo (3.91) até (3.93) em (3.90) e integrando, resultará a matriz de rigidez elementar. Em termos das coordenadas (ξ, η, ζ) , a Equação (3.90) torna-se

$$[\mathbf{k}]_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} abc [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d\xi d\eta d\zeta \quad (3.94)$$

3.5 Modelagem do domínio fluido

Som é um movimento de onda similar aos movimentos ondulatórios que aparecem na superfície de líquidos quando é causada uma perturbação pontual. A vibração sonora é caracterizada por distúrbios de pressão sobrepostos na pressão atmosférica, associadas às oscilações de partículas aéreas. A velocidade da partícula é um vetor quantitativo que usualmente posiciona-se ao longo do trajeto da origem para determinada posição. Os distúrbios

de pressão no local agem em todas as direções, e a pressão sonora por esta razão é às vezes descrita, como uma quantidade escalar mas ligada intimamente com a análise vetorial, ou como uma pressão hidrostática.

Os movimentos desordenados saem do local de origem, mas o meio que os transmite (ar) não movimenta e simplesmente oscila sobre um ponto fixo. Outra maneira de examinar seria imaginar cada oscilação de partícula modificando seu vizinho e deste modo repassando a comunicação. O padrão proporcional pelo qual a comunicação viaja é a velocidade do som (c), que para o ar a 20 ° C é aproximadamente 343,3 m/s (Blevins, 1995). A velocidade do som depende da rigidez e da elasticidade do meio no qual ele se propaga.

O distúrbio de pressão envolve a transmissão aparente de energia da fonte sonora, onde as quantidades de energia envolvidas são muito pequenas. O fenômeno físico chamado de *som*, é entendido basicamente como variações temporais da densidade de um meio fluido.

A compreensão de como o som é gerado e propagado envolve o conhecimento do processo termodinâmico a que está sujeito. Assim, é necessário conhecer as propriedades do meio fluido e a correlação entre as variáveis acústicas e termodinâmicas. Este é um aspecto importante nos ensaios acústicos experimentais, uma vez que é imprescindível confrontar as condições de teste com àquelas definidas no modelo.

O som é produzido quando ocorre uma variação temporal da densidade do meio fluido (gás ou líquido) em relação ao seu valor de equilíbrio. Esta mudança local de densidade é atribuída às variações do volume que ocupa determinada massa de fluido. Mudanças de forma do elemento de volume não tem significado na propagação da onda sonora; a deformação volumétrica ou dilatação que está exposta determinada massa elementar do fluido é o que importa.

O ar como a maioria dos fluidos são homogêneos e isotrópicos, apresentando as mesmas propriedades em todas as direções. Desta forma, um distúrbio localizado e isolado na densidade do fluido será propagado uniformemente em todas as direções na forma de onda. O fenômeno da diretividade destas ondas está relacionado com o tipo da fonte sonora. Fontes não pontuais, como

por exemplo um alto-falante, geram um padrão de propagação que depende da interferência das ondas emitidas pelos vários pontos da fonte.

O estudo da propagação da onda será desenvolvido supondo-se uma onda plana, o que representa considerar as variáveis acústicas (deslocamento da partícula, densidade, pressão, etc) com amplitudes constantes ao longo de um plano perpendicular a direção de propagação. Esta suposição é correta quando se está suficientemente distante da fonte.

A frequência da perturbação vibratória conhecida como som fica no intervalo de 20-20000 Hz, sendo que o interesse deste trabalho está centrado nas frequências baixas, na faixa daquelas normalmente atuantes nos automóveis

Nesta seção utiliza-se a equação tridimensional da onda, considerando-se a hipótese de ondas planas, onde cada variável acústica (neste caso pressão) tem amplitude constante em qualquer plano perpendicular à direção de propagação da onda.

Nos sistemas vibroacústicos, as ondas planas podem produzir-se facilmente em um fluido confinado através da vibração estrutural em baixas frequências.

Neste trabalho, as hipóteses acústicas consideram um fluido ideal, homogêneo, isotrópico, perfeitamente elástico, não viscoso, compressível, pressão variável em torno de um valor de equilíbrio constante, e as ondas são de baixa amplitude de forma que as mudanças na densidade do meio são pequenas. Também, são omitidos os termos convectivos, despreza-se a existência do efeito de cisalhamento e o escoamento é irrotacional.

A formulação da equação da onda é obtida através dos princípios da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento (Fox e McDonald, 1992).

A modelagem do domínio fluido é feita em termos de um modelo acústico numa formulação em pressão. Esta seção tem por objetivo, apresentar o desenvolvimento da equação de onda e a solução da dinâmica do fluido através do método de elementos finitos.

3.5.1 Equação linearizada de onda

A equação de estado (linearizada) para um fluido deve relacionar as forças restauradoras internas e as deformações correspondentes para um elemento de volume do fluido. Um elemento de volume do fluido é grande o suficiente para conter milhões de moléculas de tal forma que possa ser considerado contínuo.

Esse elemento, chamado de *partícula do fluido*, deve ser suficientemente pequeno para que todas as variáveis acústicas possam ser consideradas constantes em sua extensão. A velocidade de referida partícula é definida como

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (3.95)$$

A condensação ζ num ponto do fluido, relaciona a densidade instantânea ρ_f no ponto, em relação à densidade de equilíbrio constante do fluido, definida como ρ_{f0} , conforme

$$\zeta = \frac{\rho_f - \rho_{f0}}{\rho_{f0}} \quad (3.96)$$

A *oscilação de pressão ou pressão acústica* p em qualquer ponto, depende da pressão instantânea p_I no ponto, e a pressão de equilíbrio constante p_0 no fluido, pela relação

$$p = p_I - p_0 \quad (3.97)$$

Esta análise restringe-se a ondas de pequena amplitude, então, as mudanças na densidade instantânea ρ_f são mínimas, portanto, da Equação (3.96), resulta que $|\zeta| \ll 1$. Os fenômenos acústicos são quase adiabáticos, mas a equação de estado adiabática é complexa para fluidos que não se comportem como gases perfeitos. Considera-se a relação isentrópica das variações de densidade e pressão desenvolvidas em série de Taylor (Kinsler et al., 1982).

$$p_I = p_0 + \left(\frac{\partial p_I}{\partial \rho_f} \right)_{\rho_{f0}} (\rho_f - \rho_{f0}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p_I}{\partial \rho_f^2} \right)_{\rho_{f0}} (\rho_f - \rho_{f0})^2 + \dots \quad (3.98)$$

Na equação (3.98), as derivadas parciais são constantes e determinadas pela expansão e compressão adiabática do fluido em torno de ρ_{f0} . Em pequenas flutuações, desconsidera-se os termos de maior ordem, resultando uma relação linear entre as variações de pressão e densidade

$$p_1 - p_0 = \Xi \left(\frac{\rho_f - \rho_{f0}}{\rho_{f0}} \right) \quad (3.99)$$

$$\Xi = \rho_{f0} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \rho_f} \right)_{\rho_{f0}} \quad (3.100)$$

sendo Ξ o módulo de compressibilidade adiabático.

Em função da pressão acústica p , e da condensação ζ , a equação de estado representada pela Equação (3.99), é reescrita como

$$p = \Xi \zeta, \quad |\zeta| \ll 1 \quad (3.101)$$

Quando o fluido é considerado como um meio contínuo, suas propriedades podem ter representação de campo e são definidas por funções contínuas dependentes das coordenadas no espaço e do tempo.

Os campos da velocidade e densidade estão interligados pelo *princípio da conservação da massa*. Um cubo infinitesimal de arestas dx , dy , dz é considerado como o volume de controle, como mostra a Figura 3.6. A densidade no centro O do volume é representada por ρ_f , e a velocidade por \mathbf{v} , através da Equação (3.95). A avaliação das propriedades nas seis faces do volume de controle, demanda a utilização da série de Taylor em relação ao ponto O , e dessa forma tem-se para a face da direita

$$\rho_f \Big|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho_f + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho_f}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 + \dots \quad (3.102)$$

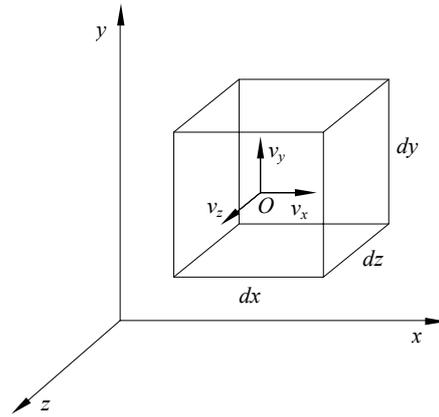


Figura 3.6 Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares

Ignorando-se os termos de ordem superior, define-se para a face da direita,

$$\rho_f \Big|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho_f + \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (3.103)$$

$$v_x \Big|_{x+\frac{dx}{2}} = v_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \quad (3.104)$$

É definido pelo *princípio da conservação de massa* que o *fluxo de massa através da superfície de controle mais a variação da massa no interior do volume de controle é igual a zero*. Avaliando o fluxo de massa resultante nas seis faces da superfície de controle, resulta

$$\int_A \rho_f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = (\nabla \cdot \rho_f \mathbf{v}) dx dy dz \quad (3.105)$$

onde o símbolo \cdot atua como um produto escalar, e ∇ como um operador vetorial gradiente. A variação da massa no interior do volume de controle é definida como

$$\frac{dm}{dt} = \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \right) dx dy dz \quad (3.106)$$

Das Equações (3.105) e (3.106), o princípio de conservação da massa resulta

$$\nabla \cdot \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (3.107)$$

Para o caso de escoamento de fluidos incompressíveis, a densidade por ser constante não é função das coordenadas espaciais e nem do tempo, e $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Para o caso de movimento permanente, as propriedades do fluido independem do tempo, assim $\nabla \cdot \rho_f \mathbf{v} = 0$.

A efeitos de linearizar a Equação (3.107), ρ_f aproxima-se por $\rho_{f0}(1+\zeta)$ segundo a Equação (3.96), onde para ρ_{f0} constante e $|\zeta| \ll 1$, a *equação linearizada de conservação da massa* resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (3.108)$$

Deve ser considerada também a *equação da quantidade de movimento*, que para o caso do movimento do fluido, é obtida pela aplicação da Segunda Lei de Newton às partículas infinitesimais de massa, dm . Essas partículas se movimentam num campo de velocidades, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, e levando em conta a expressão da aceleração de uma partícula em qualquer ponto do campo de escoamento, tem-se vetorialmente

$$d\mathbf{f}_f = dm \left(v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) \quad (3.109)$$

Existem forças de volume e forças de superfície atuando num elemento fluido. As forças de superfície compreendem as forças tangenciais que desenvolvem as tensões e as forças normais. A componente da força de superfície na direção x , $df_{f,x}$, resulta do somatório de forças atuando nessa direção como se observa na Figura 3.7, onde através da série de Taylor foram obtidas as tensões em relação ao centro do elemento fluido.

$$df_{f,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.110)$$

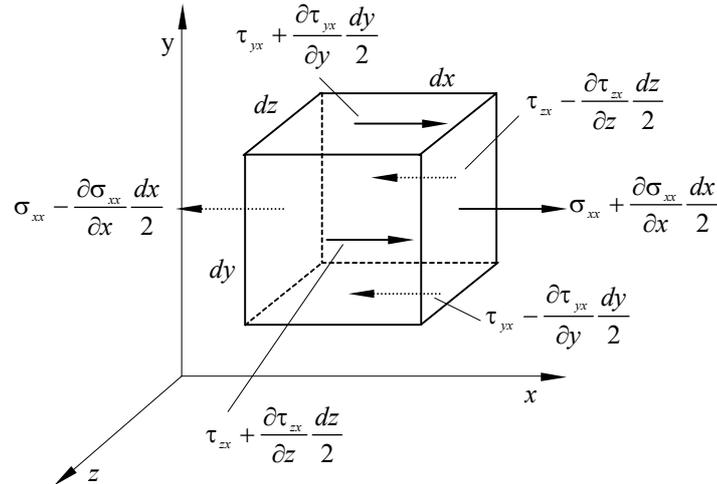


Figura 3.7 Elemento fluido sob a ação de tensões na direção x

Quando a força da gravidade é a única que atua, a força de volume por unidade de massa é \mathbf{g} , sendo a componente da força total df_{fx} , na direção x

$$df_{fx} = df_{fTx} + df_{fBx} = \left(\rho_f g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (3.111)$$

sendo g_x a componente de \mathbf{g} na coordenada x .

Inserindo a componente df_{fx} da força $d\mathbf{f}_f$, da Equação (3.111) na Equação (3.109), resulta a *equação diferencial da quantidade de movimento do fluido* na coordenada x , e aponta que existem expressões semelhantes nas direções y e z

$$\rho_f g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho_f \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (3.112)$$

Quando no escoamento de um fluido atuam apenas as tensões normais e não as tangenciais, o fluido pode ser considerado como ideal e com viscosidade nula. A tensão normal num ponto é igual em todas as direções e instantânea no elemento, sendo equivalente à pressão negativa da Termodinâmica

$$\sigma_{nn} = -p_t \quad (3.113)$$

Considerando a Equação (3.112), onde atuam unicamente as tensões normais equivalentes a $(-p_I)$, a equação da quantidade de movimento para o escoamento do fluido sem atrito é denominada *Equação de Euler*, escrita vetorialmente

$$\rho_f \mathbf{g} - \nabla p_I = \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \quad (3.114)$$

Mesmo a Equação (3.114) sendo não linear, faz-se simplificação nos casos de $|\zeta| \ll 1$ e $|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}| \ll |\partial \mathbf{v} / \partial t|$. Logo, substituindo ρ_f por ρ_{f0} e ∇p_I por ∇p , uma vez que p_0 é constante, decorre uma equação válida para processos acústicos de pequena amplitude de onda

$$\rho_{f0} \mathbf{g} - \nabla p = \rho_{f0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3.115)$$

A equação diferencial linearizada de onda com uma variável dependente, resulta da combinação das Equações (3.101), (3.108) e (3.115). A divergência da Equação (3.115) é

$$\rho_{f0} \nabla \cdot \mathbf{g} - \nabla^2 p = \rho_{f0} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3.116)$$

observando que ∇^2 é o operador Laplaciano tridimensional

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.117)$$

Derivando no tempo a Equação (3.108), e considerando que a operação $\partial(\nabla \cdot \mathbf{v}) / \partial t$ é idêntica a $\nabla \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial t)$, resulta que

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.118)$$

Pelo arranjo das Equações (3.116) e (3.118) tem-se

$$\nabla^2 p - \rho_{f0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \rho_{f0} \nabla \cdot \mathbf{g} \quad (3.119)$$

Finalmente, considerando a Equação (3.101), obtemos a *equação da onda sem perda para propagação do som em fluidos*

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_{f0} \nabla \cdot \mathbf{g} \quad (3.120)$$

sendo c a velocidade de fase para ondas acústicas em meios fluidos, e expressa como

$$c = \sqrt{\frac{\Xi}{\rho_{f0}}} \quad (3.121)$$

3.5.2 Dinâmica do fluido

A dinâmica do fluido é resolvida utilizando a aproximação dos *resíduos ponderados via Galerkin*, através do *método dos elementos finitos*. O domínio fluido é regido pela equação de Helmholtz conforme a Equação (3.120), acrescida de certas condições de contorno lineares de superfície livre Γ_{SL} , superfície rígida Γ_{SR} e interface fluido-estrutura Γ_I , de acordo com a Figura 3.1.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + P_B = 0 \quad em \Omega_f \quad (3.122)$$

$$p = 0, \quad em \Gamma_{SL} \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = 0, \quad em \Gamma_{SR} \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = -\rho_f \dot{\hat{\mathbf{v}}}_n, \quad em \Gamma_I \quad (3.125)$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ a direção normal exterior ao fluido, P_B as forças de volume, $v_{\hat{\mathbf{n}}}$ a velocidade do fluido na direção normal a interface e $\dot{\hat{\mathbf{v}}}_n$ um valor pré-determinado. A condição de interação deve atender a compatibilidade cinemática na direção normal entre a estrutura e o fluido, e não devem ser consideradas situações de separação dos domínios.

Buscando uma solução aproximada \tilde{p} da pressão p , caracteriza-se o resíduo $R(\tilde{p})$ como

$$R(\tilde{p}) = \nabla^2 \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} + P_B \quad (3.126)$$

Resulta evidente que o objetivo é encontrar soluções aproximadas \tilde{p} do campo de pressões do fluido, que atendam a Equação (3.126) e as condições de contorno exigidas.

A resolução do problema da dinâmica do fluido torna imprescindível a discretização do meio contínuo. O método dos Resíduos Ponderados fornece uma solução elementar aproximada do sistema de equações diferenciais que descrevem o problema, onde de acordo com a técnica de Galerkin, as funções de ponderação do domínio fluido $w_{fi}(x,y,z)$ ou w_{fi} , são selecionadas como sendo as mesmas funções de forma $N_{fi}(x,y,z)$ ou N_{fi} , utilizadas na aproximação de \tilde{p} , descrita por

$$\{\mathbf{w}_f\} = [\mathbf{N}_f]^T \quad (3.127)$$

Deste modo, a forma integral pela técnica de Galerkin, resulta num elemento do domínio fluido Ω_f

$$\int_{\Omega_f} [\mathbf{N}_f]^T \left(\nabla^2 \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} + P_B \right) d\Omega_f = 0 \quad (3.128)$$

onde $[\mathbf{N}_f]$ são as funções de forma ponderadoras no espaço tridimensional, e não estão submetidas a nenhuma condição de contorno, mas \tilde{p} deve por outro lado, ser duas vezes derivável e satisfazer todas as condições de contorno exigidas.

Aplicando uma vez a integração por partes em duas dimensões na Equação (3.128), (Dhatt e Touzot, 1984) e (Galli, 1995), e inserindo a condição de contorno de interface, dada através da Equação (3.125), resulta a forma fraca

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial x} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial y} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial z} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \right) d\Omega_f - \rho_f \int_{\Gamma_i} [\mathbf{N}_f] \dot{\tilde{v}}_n d\Gamma_i - \\
& \frac{1}{c_s^2} \int_{\Omega_f} [\mathbf{N}_f] \ddot{\tilde{p}} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} [\mathbf{N}_f] P_B d\Omega_f = 0
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Adotando o método dos elementos finitos, para cada elemento fluido tem-se a seguinte aproximação polinomial nodal

$$\tilde{p} = [\mathbf{N}_f] \{\mathbf{p}\} \tag{3.130}$$

onde

\tilde{p} = aproximação do campo escalar das pressões locais;

$[\mathbf{N}_f]$ = vetor das funções de forma do fluido;

$\{\mathbf{p}\}$ = vetor de pressões nodais do elemento.

Pelo fato de $[\mathbf{N}_f]$ ser independente do tempo e de $\{\mathbf{p}\}$, e de $\{\mathbf{p}\}$ ser independente das coordenadas (x,y,z) , é plausível concluir que

$$\ddot{\tilde{p}} = [\mathbf{N}_f] \{\ddot{\mathbf{p}}\} \tag{3.131}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial x} \{\mathbf{p}\} \tag{3.132}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial y} \{\mathbf{p}\} \tag{3.133}$$

Através da substituição das Equações (3.131), (3.132) e (3.133) na Equação (3.129), e posterior divisão por ρ_f , determina-se o resíduo total no domínio fluido como o somatório dos resíduos do número de elementos fluidos, num_el_fl .

$$\sum_{j=1}^{num_el_fl} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial [\mathbf{N}_f]^T}{\partial x} \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial x} + \frac{\partial [\mathbf{N}_f]^T}{\partial y} \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial y} + \frac{\partial [\mathbf{N}_f]^T}{\partial z} \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial z} \right) d\Omega_f \{\mathbf{p}\} + \\ & + \int_{\Gamma_I} [\mathbf{N}_f]^T \dot{\bar{v}}_n d\Gamma_I + \frac{1}{\rho_f c_s^2} \int_{\Omega_f} [\mathbf{N}_f]^T [\mathbf{N}_f] d\Omega_f \{\ddot{\mathbf{p}}\} - \\ & - \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} [\mathbf{N}_f]^T P_B d\Omega_f = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.134)$$

Arranjando em função de matrizes globais, posteriormente à montagem dos elementos, resulta

$$[\mathbf{m}_{ff}] \{\ddot{\mathbf{p}}\} + [\mathbf{k}_{ff}] \{\mathbf{p}\} + \int_{\Gamma_I} [\mathbf{N}_f]^T \dot{\bar{v}}_n d\Gamma_I = \{\mathbf{f}_f\} \quad (3.135)$$

Percebe-se que a parte integral da equação junta os termos da matriz de interface $[\mathbf{m}_{fs}]$. A matriz de inércia ou compressibilidade do fluido $[\mathbf{m}_{ff}]$, a matriz volumétrica da energia cinética do fluido $[\mathbf{k}_{ff}]$ e o vetor das excitações externas $\{\mathbf{f}_f\}$, são determinados como

$$[\mathbf{m}_{ff}] = \frac{1}{\rho_f c_s^2} \int_{\Omega_f} [\mathbf{N}_f]^T [\mathbf{N}_f] d\Omega_f \quad (3.136)$$

$$[\mathbf{k}_{ff}] = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] d\Omega_f \quad (3.137)$$

$$\{\mathbf{f}_f\} = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} [\mathbf{N}_f]^T P_B d\Omega_f \quad (3.138)$$

onde

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial x} \\ \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial y} \\ \frac{\partial [\mathbf{N}_f]}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

No intuito de resolver problemas tridimensionais do domínio fluido em termos de pressão, são utilizados elementos finitos hexaédricos retangulares lineares com oito nós e um grau de liberdade por nó.

A obtenção das matrizes elementares do elemento do domínio fluido, aproveita o desenvolvimento do sólido hexaédrico da seção 3.4.5, para um grau de liberdade, a pressão p .

A função pressão é escrita na forma

$$p = [\mathbf{N}] \{\mathbf{p}\}_e \quad (3.140)$$

onde

$$\{\mathbf{p}\}_e^T = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8] \quad (3.141)$$

$$[\mathbf{N}] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8] \quad (3.142)$$

A energia cinética do elemento estrutural sólido hexaédrico em uma dimensão, é obtida especializando a Equação (3.29) para $u=p$,

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{p}^2 dV \quad (3.143)$$

Derivando a Equação (3.140) resulta

$$\dot{p} = [\mathbf{N}] \{\dot{\mathbf{p}}\}_e \quad (3.144)$$

Substituindo a Equação (3.144) na Equação (3.143) obtêm-se

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{\mathbf{p}}\}_e^T [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\dot{\mathbf{p}}\}_e dV \quad (3.145)$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{p}}\}_e^T \left(\int_{V_e} \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \right) \{\dot{\mathbf{p}}\}_e \quad (3.146)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{p}}\}_e^T [\mathbf{m}]_e \{\dot{\mathbf{p}}\}_e \quad (3.147)$$

onde a matriz de inércia é

$$[\mathbf{m}]_e = \int_{V_e} \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV \quad (3.148)$$

Um elemento típico desta matriz em coordenadas isoparamétricas continua sendo a Equação (3.85), citada novamente para facilitar o desenvolvimento, onde (ξ_i, η_i, ζ_i) são as coordenadas do nó i e (ξ_j, η_j, ζ_j) são as coordenadas do nó j , referidas à Figura 3.5.

$$\begin{aligned} m &= \rho abc \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i N_j d\xi d\eta d\zeta \\ m &= \frac{\rho abc}{64} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi_i \xi) (1 + \xi_j \xi) d\xi \int_{-1}^{+1} (1 + \eta_i \eta) (1 + \eta_j \eta) d\eta \int_{-1}^{+1} (1 + \zeta_i \zeta) (1 + \zeta_j \zeta) d\zeta \\ m &= \frac{\rho abc}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right) \end{aligned} \quad (3.149)$$

Alternativamente, as funções de forma do elemento fluido, como apresentadas na Equação (3.79), podem ser avaliadas utilizando as coordenadas isoparamétricas do nó j (ξ_j, η_j, ζ_j) , conforme Figura 3.5, resultando

$$\begin{aligned} \text{Nó } 1_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f1} &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) + (1 - \zeta) \\ \text{Nó } 2_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f2} &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) + (1 - \zeta) \\ \text{Nó } 3_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f3} &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) + (1 - \zeta) \\ \text{Nó } 4_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f4} &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) + (1 - \zeta) \\ \text{Nó } 5_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f5} &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) + (1 + \zeta) \\ \text{Nó } 6_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f6} &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) + (1 + \zeta) \\ \text{Nó } 7_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f7} &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) + (1 + \zeta) \\ \text{Nó } 8_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f8} &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) + (1 + \zeta) \end{aligned} \quad (3.150)$$

Assim, a Equação (3.142) apresenta-se como

$$[\mathbf{N}_f(\xi, \eta, \zeta)]_e = \left[[\mathbf{N}_{f1}] \quad [\mathbf{N}_{f2}] \quad [\mathbf{N}_{f3}] \quad [\mathbf{N}_{f4}] \quad [\mathbf{N}_{f5}] \quad [\mathbf{N}_{f6}] \quad [\mathbf{N}_{f7}] \quad [\mathbf{N}_{f8}] \right] \quad (3.151)$$

Substituindo a Equação (3.151) na Equação (3.148), ou ainda avaliando a Equação (3.149), obtêm-se a seguinte matriz de inércia elementar

$$[\mathbf{m}]_e = \begin{bmatrix} [\mathbf{m}_1] & [\mathbf{m}_2] \\ [\mathbf{m}_2] & [\mathbf{m}_1] \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

com

$$[\mathbf{m}_1] = 2 [\mathbf{m}_2] \quad (3.153)$$

$$[\mathbf{m}_2] = \rho \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

A matriz de inércia elementar do elemento fluido é dada pela Equação (3.136), logo aproveitando unicamente o desenvolvimento da integração isoparamétrica das Equações (3.153) e (3.154), a referida matriz resulta

$$[\mathbf{m}_{ff}]_e = \begin{bmatrix} [\mathbf{m}_{ff1}]_e & [\mathbf{m}_{ff2}]_e \\ [\mathbf{m}_{ff2}]_e & [\mathbf{m}_{ff1}]_e \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

com

$$[\mathbf{m}_{ff1}]_e = 2 [\mathbf{m}_{ff2}]_e \quad (3.156)$$

$$[\mathbf{m}_{ff^2}]_e = \frac{1}{\rho_f c_s^2} \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Finalmente a matriz de inércia completa do elemento fluido é dada por

$$[\mathbf{m}_{ff}]_e = \frac{1}{\rho_f c_s^2} \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 8 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 8 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

A matriz de rigidez do fluido também se baseia no desenvolvimento do sólido hexaédrico da seção 3.4.5. A energia de deformação do elemento estrutural sólido hexaédrico em uma dimensão, é obtida especializando a Equação (3.89) para $u=p$,

$$U_e = \frac{1}{2} \{\mathbf{p}\}_e^T [\mathbf{k}]_e \{\mathbf{p}\}_e \quad (3.159)$$

onde a matriz de rigidez do elemento como visto na seção 3.4.5. Neste caso a matriz de deformação $[\mathbf{B}]$ é da forma

$$[\mathbf{B}] = [[\mathbf{B}_1] \ \cdots \ [\mathbf{B}_8]] \quad (3.160)$$

$$\{\mathbf{B}_i\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (3.161)$$

Usando novamente (3.79) resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\xi_i}{8a} (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\eta_i}{8b} (1 + \xi_i \xi) (1 + \zeta_i \zeta) \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\zeta_i}{8c} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)\end{aligned}\quad (3.162)$$

$$[\mathbf{k}]_e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (3.163)$$

e $[\mathbf{D}]$, considerando um material isotrópico, é definido conforme Equação (3.26). Substituindo (3.160) até (3.162) em (3.163) e integrando, resultará a matriz de rigidez elementar. Em termos das coordenadas (ξ, η, ζ) , a Equação (3.163) torna-se

$$[\mathbf{k}]_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} abc [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d\xi d\eta d\zeta \quad (3.164)$$

No domínio fluido, $[\mathbf{D}]$ assume a forma da matriz identidade, como se pode deduzir da Equação (3.137), repetida na seqüência para facilitar

$$[\mathbf{k}_{ff}]_e = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] d\Omega_f \quad (3.165)$$

Finalmente a matriz de rigidez completa do elemento fluido é dada por

$$[\mathbf{k}_{ff}]_e = \frac{abc}{\rho_f} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/6 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & -1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 0 & 2/3 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 0 & 2/3 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 2/3 & 0 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & 2/3 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & 2/3 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & -1/6 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

3.6 Acoplamento fluido-estrutura

A presença de um meio acústico nos arredores de uma estrutura influencia no comportamento dinâmico da estrutura e vice-versa, isto é, a vibração estrutural é influenciada pela variação de pressão acústica e as ondas acústicas são sensíveis à variação de deslocamento da estrutura.

As frequências naturais e os modos de um sistema acoplado são geralmente diferentes daqueles apresentados pelos sistemas independentes. A energia total de um modo acoplado é dividida entre a estrutura e o fluido. Na maioria dos casos a maior parte da energia permanece no fluido ou na estrutura. Este fato leva à classificação de um modo acoplado como dominado pelo fluido ou pela estrutura.

Em geral, um modo dominado pela estrutura é originado por um modo estrutural desacoplado que induz um modo acústico no fluido. Da mesma forma, um modo dominado pelo fluido é, basicamente, um modo acústico da cavidade que induz um modo na estrutura. O meio pelo qual o fluido influencia o movimento da estrutura é a pressão na superfície bem como o movimento da superfície altera o campo acústico.

Adotando que o efeito da distribuição de pressões do fluido sobre a estrutura, na superfície de interface Γ_I , pode ser expresso por $f_{s\Gamma_I}$, que acrescidas às forças de volume f_{sB} constituem os termos de excitação na equação dinâmica.

$$[\mathbf{k}_{ss}] \{\mathbf{u}\} + [\mathbf{m}_{ss}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} = \{f_{s\Gamma_I}\} + \{f_{sB}\} \quad (3.167)$$

com

$$\{f_{s\Gamma_I}\} = \int_A [\mathbf{N}_s]^T q \, dA \quad (3.168)$$

A distribuição de pressão do fluido sobre a interface produz forças de superfície, gerando a componente normal da força de superfície q . Considerando a Equação (3.130) e substituindo q por \tilde{p} na Equação (3.168), podemos reescreve-la na forma

$$\{\mathbf{f}_{s\Gamma_I}\} = \int_A [\mathbf{N}_s]^T [\mathbf{N}_f] dA \mathbf{p} \quad (3.169)$$

que representa a condição de equilíbrio na interface.

Levando a Equação (3.169) na Equação (3.167) tem-se

$$[\mathbf{k}_{ss}] \{\mathbf{u}\} + [\mathbf{m}_{ss}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{k}_{fs}] \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{f}_s\} \quad (3.170)$$

onde

$$[\mathbf{k}_{fs}] = - \int_A [\mathbf{N}_s]^T [\mathbf{N}_f] dA \quad (3.171)$$

O acoplamento do domínio estrutural com o domínio fluido é imposto na direção normal \hat{n} da superfície de interface, através de uma identidade que garanta a compatibilidade cinemática (Zienkiewicz e Taylor, 1989)

$$\dot{\hat{v}}_n = \ddot{u}_n \quad (3.172)$$

que representa uma condição de escorregamento na direção tangencial à interface.

No domínio fluido, o acoplamento fluido-estrutura é descrito em termos das variações de pressão nas redondezas do domínio estrutural segundo a condição de contorno de interface dada pela Equação (3.125), que usando a Equação (3.172) é definida

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{n}} = -\rho_f \ddot{u}_n, \quad em \Gamma_I \quad (3.173)$$

Inserindo a Equação (3.172) na Equação (3.135), o que representa substituir o componente na direção normal $\dot{\hat{v}}_n$ por \ddot{u}_n , e adotando a Equação $\ddot{\tilde{\mathbf{u}}} = [\mathbf{N}_s] \{\ddot{\mathbf{u}}\}$ para aproximar o valor de \ddot{u}_n por $\ddot{\tilde{u}}_n$, ou em forma discreta por $[\mathbf{N}_s] \{\ddot{\mathbf{u}}\}$, resulta

$$[\mathbf{m}_{ff}] \{\ddot{\mathbf{p}}\} + [\mathbf{k}_{ff}] \{\mathbf{p}\} + [\mathbf{m}_{fs}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{f}_f\} \quad (3.174)$$

onde $[\mathbf{m}_{fs}]$ é a matriz com os termos de interface e permite escrever o sistema acoplado em sua forma semi-descretizada

$$[\mathbf{m}_{fs}] = \int_{\Gamma_I} [\mathbf{N}_f]^T [\mathbf{N}_s] d\Gamma_I \quad (3.175)$$

3.6.1 Formulação matricial

Evidenciando as Equações (3.170) e (3.174) em forma conjunta, podemos organiza-las numa forma matricial compacta, evidenciando a formulação acoplada $u-p$

$$[\mathbf{k}_{ss}] \{\mathbf{u}\} + [\mathbf{m}_{ss}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{k}_{fs}] \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{f}_s\} \quad (3.176)$$

$$[\mathbf{m}_{ff}] \{\ddot{\mathbf{p}}\} + [\mathbf{k}_{ff}] \{\mathbf{p}\} + [\mathbf{m}_{fs}] \{\ddot{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{f}_f\} \quad (3.177)$$

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{m}_{ss}] & 0 \\ [\mathbf{m}_{fs}] & [\mathbf{m}_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\mathbf{u}}\} \\ \{\ddot{\mathbf{p}}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{ss}] & [\mathbf{k}_{fs}] \\ 0 & [\mathbf{k}_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}\} \\ \{\mathbf{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}_s\} \\ \{\mathbf{f}_f\} \end{Bmatrix} \quad (3.178)$$

A disposição não simétrica desta formulação caracteriza sua principal desvantagem, pois impossibilita a utilização de diversos algoritmos eficientes desenvolvidos para matrizes simétricas. O principal benefício desta formulação ocorre devido ao seu reduzido número de graus de liberdade empregados no modelamento do domínio fluido. No caso de vibrações livres, o segundo termo da Equação (3.178) é zero.

3.6.2 Determinação das matrizes elementares

As expressões matriciais que representam o comportamento estrutural foram definidas pela Equação (3.62) no caso da matriz de inércia

$$\begin{aligned}
[\mathbf{k}_{22}] &= [\mathbf{I}_3]^T [\mathbf{k}_{11}] [\mathbf{I}_3] \\
[\mathbf{k}_{32}] &= [\mathbf{I}_3]^T [\mathbf{k}_{41}] [\mathbf{I}_3] \quad [\mathbf{k}_{33}] = [\mathbf{I}_1]^T [\mathbf{k}_{11}] [\mathbf{I}_1] \\
[\mathbf{k}_{42}] &= [\mathbf{I}_3]^T [\mathbf{k}_{31}] [\mathbf{I}_3] \quad [\mathbf{k}_{43}] = [\mathbf{I}_1]^T [\mathbf{k}_{21}] [\mathbf{I}_1] \quad [\mathbf{k}_{44}] = [\mathbf{I}_2]^T [\mathbf{k}_{11}] [\mathbf{I}_2]
\end{aligned} \tag{3.185}$$

onde

$$[\mathbf{I}_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.186}$$

para

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a} \tag{3.187}$$

Quando se trata da acústica do meio fluido, as expressões matriciais que representam o comportamento do fluido são definidas pela Equação (3.158), no caso da matriz de inércia

$$[\mathbf{m}_{ff}] = \frac{1}{\rho_f c_s^2} \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 8 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 8 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \tag{3.188}$$

e pela Equação (3.166) para o caso da matriz rigidez do fluido

$$[\mathbf{k}_{ff}]_e = \frac{abc}{\rho_f} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/6 & 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & -1/6 & -1/6 \\ -1/6 & 0 & 2/3 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 0 & 2/3 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & 2/3 & 0 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & 2/3 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 0 & -1/6 & -1/6 & 0 & 2/3 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & -1/6 & 0 & 0 & -1/6 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \tag{3.189}$$

As matrizes de interação fluido-estrutura são obtidas após serem desenvolvidas as expressões integrais dadas pelas Equações (3.171) e (3.175), avaliadas na interface Γ_I , obtendo-se a matriz de rigidez de acoplamento

$$[\mathbf{k}_{fs}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{fs_1}] \\ [\mathbf{k}_{fs_3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{fs_2}] \\ [\mathbf{k}_{fs_4}] \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

onde

$$[\mathbf{k}_{fs_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{k}_{fs}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{fs_1}] \\ [\mathbf{k}_{fs_3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{fs_2}] \\ [\mathbf{k}_{fs_4}] \end{bmatrix} \quad (3.191)$$

$$[\mathbf{k}_{fs_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

$$[\mathbf{k}_{fs_3}] = \begin{bmatrix} 11/45*a*b & 1/15*a*b^2 & -1/15*a^2*b & 19/180*a*b & 1/30*a*b^2 & 2/45*a^2*b \\ 19/180*a*b & 1/30*a*b^2 & -2/45*a^2*b & 11/45*a*b & 1/15*a*b^2 & 1/15*a^2*b \\ 2/45*a*b & 1/45*a*b^2 & -1/45*a^2*b & 19/180*a*b & 2/45*a*b^2 & 1/30*a^2*b \\ 19/180*a*b & 2/45*a*b^2 & -1/30*a^2*b & 2/45*a*b & 1/45*a*b^2 & 1/45*a^2*b \end{bmatrix} \quad (3.193)$$

$$[\mathbf{k}_{fs_4}] = \begin{bmatrix} 2/45*a*b & -1/45*a*b^2 & 1/45*a^2*b & 19/180*a*b & -2/45*a*b^2 & -1/30*a^2*b \\ 19/180*a*b & -2/45*a*b^2 & 1/30*a^2*b & 2/45*a*b & -1/45*a*b^2 & -1/45*a^2*b \\ 11/45*a*b & -1/15*a*b^2 & 1/15*a^2*b & 19/180*a*b & -1/30*a*b^2 & -2/45*a^2*b \\ 19/180*a*b & -1/30*a*b^2 & 2/45*a^2*b & 11/45*a*b & -1/15*a*b^2 & -1/15*a^2*b \end{bmatrix} \quad (3.194)$$

as quais satisfazem a relação

$$[\mathbf{k}_{fs}] = -[\mathbf{m}_{fs}]^T \quad (3.195)$$

4. Otimização Não Linear em Sistemas Vibroacústicos

4.1 Generalidades

Neste capítulo são revistas algumas definições de otimização não linear, e sua aplicação em sistemas vibroacústicos, de forma a compreender com maior detalhe o algoritmo de otimização utilizado neste trabalho. Além disso, apresenta-se o equacionamento essencial com vistas à otimização estrutural em sistemas vibroacústicos. As funções objetivo de interesse é a minimização ou maximização de uma frequência predominante estrutural predeterminada, e a minimização da massa, modificando com essa finalidade os parâmetros dimensionais da estrutura.

4.2 Otimização no projeto

A otimização no projeto envolve a modificação automatizada dos seus parâmetros para atingir um objetivo desejado enquanto são satisfeitas determinadas restrições do projeto. Algumas aplicações da otimização no projeto são citadas:

- Melhorias do projeto estrutural (através de otimização dimensional, de forma e topológica);
- Geração de projetos factíveis a partir de projetos não factíveis;
- Procura de semelhança do modelo numérico para produzir respostas estruturais similares;
- Identificação de parâmetros do sistema;
- Avaliações da configuração;
- Análise de sensibilidade.

Neste trabalho é utilizado o otimizador disponível no MSC.Nastran (MSC Software, 1996), que segue o fluxograma da Figura 4.1.

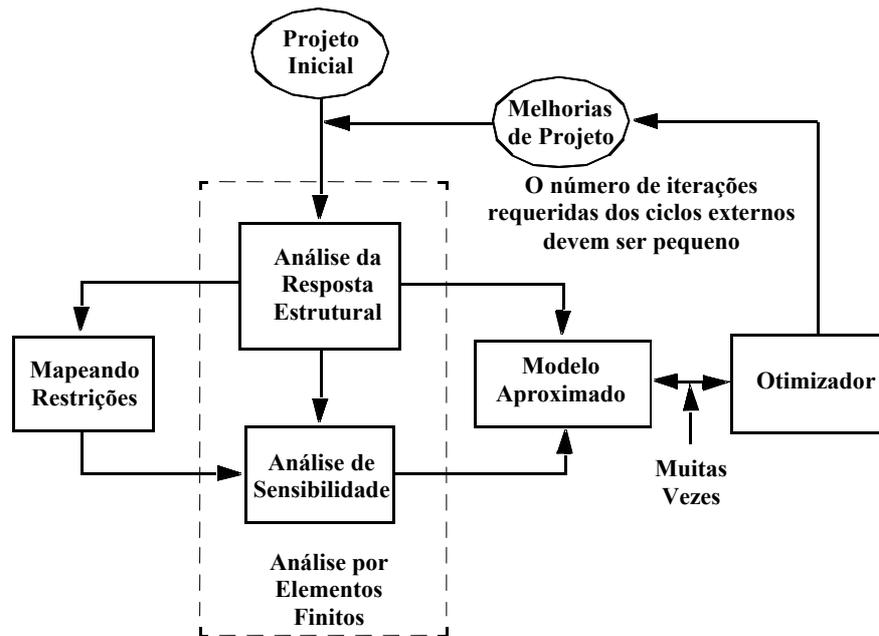


Figura 4.1 Ciclo iterativo do otimizador no MSC.Nastran

Neste trabalho poderiam ser utilizadas como parâmetros de otimização, diversas propriedades dimensionais, dentre as quais as propriedades do elemento finito, do material e da conectividade; contudo, nas aplicações consideram-se apenas as espessuras das chapas.

4.3 Problema básico de otimização

A otimização paramétrica é utilizada com a finalidade de determinar os valores mais adequados de um conjunto de parâmetros do projeto, estes definidos pelo vetor $\{\mathbf{x}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que de certa forma são definidos como pertencentes a um conjunto ótimo.

Num problema de suficiente complexidade, a função objetivo a ser otimizada (maximizada ou minimizada), $f(\{\mathbf{x}\})$, encontra-se sujeita a restrições de desigualdade, $g_j(\{\mathbf{x}\}) \leq 0$ ($j=1,2,\dots,l$), restrições de igualdade $g_k(\{\mathbf{x}\}) = 0$ ($k=1,2,\dots,m$), e restrições de contorno dos parâmetros tanto de limite inferior $\{\mathbf{x}\}^L \leq \{\mathbf{x}\}$ quanto de limite superior $\{\mathbf{x}\} \leq \{\mathbf{x}\}^U$.

Um problema de otimização restrita pode ser expresso de forma geral como, (Luenberger, 1989), (Bazaraa, Sherali e Shetty, 1993), etc.,

- Variáveis de projeto: Encontrar $\{\mathbf{x}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- Função objetivo Minimizar $f(\{\mathbf{x}\})$
 $\{\mathbf{x}\} \in \mathfrak{R}^n$
- Sujeita a:
- Restrições de desigualdade
 $g_j(\{\mathbf{x}\}) \leq \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, m$
- Restrições de igualdade
 $h_k(\{\mathbf{x}\}) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, l$
- Restrições de contorno
 $x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, \dots, n$

onde $\{\mathbf{x}\} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de parâmetros do projeto, $f(f : \mathfrak{R}^n \Rightarrow \mathfrak{R})$ é a função objetivo, $\mathbf{g}(\mathbf{g} : \mathfrak{R}^n \Rightarrow \mathfrak{R}^m)$ é o vetor de restrições de desigualdade, e $\mathbf{h}(\mathbf{h} : \mathfrak{R}^n \Rightarrow \mathfrak{R}^l)$ é o vetor de restrições de igualdade. Observa-se que um problema de maximização equivale a minimizar $-f(\{\mathbf{x}\})$.

A precisão e convergência de um problema de otimização dependem do tamanho do problema, este mensurado pelo número de variáveis de projeto mais o número das restrições, assim como das características lineares ou não lineares da função objetivo e suas restrições.

Em um problema de programação não linear, como os problemas vistos neste trabalho, a função objetivo e as restrições são funções não lineares das variáveis de projeto.

A solução de um problema não linear precisa de um processo iterativo para a direção de procura. Isto é obtido através da solução de um subproblema irrestrito, de programação linear ou de programação quadrática QP (*Quadratic Programming*). O problema QP envolve a minimização ou maximização de uma função objetivo quadrática linearmente restrita.

4.4 Otimização numérica

4.4.1 Minimização de funções de uma ou múltiplas variáveis

Considere-se a função de uma única variável x , $f=f(x)$, onde o extremo é definido para x^* no qual $df/dx=0$. O otimizador numérico *amostra* a função contínua e utiliza a data para determinar o extremo. Observa-se na Figura 4.2, o mínimo irrestrito igual a x^* , enquanto o mínimo restrito $x^*=x^u$ para o caso de uma restrição de contorno $x \leq x^u$.

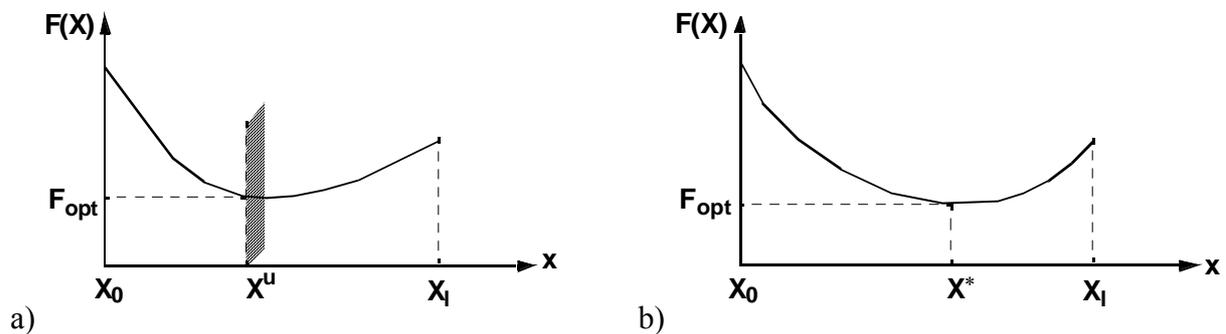


Figura 4.2 a) Mínimo irrestrito

b) Mínimo restrito de função de uma variável

A minimização de funções com variáveis múltiplas no MSC.Nastran baseia-se no gradiente. Seja $f=f(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ uma função escalar de n variáveis independentes. Considerando \hat{e}_n como o vetor unitário na n -ésima direção, o gradiente da função escalar é definido como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

Como exemplo, apresenta-se a função e gradiente de uma família de circunferências no plano x_1, x_2 com centro na origem e raio \sqrt{f} , mostrados na Figura 4.3, onde o gradiente ∇f aponta na direção dos valores incrementais da função.

$$f(\{x_1, x_2\}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\nabla f(\{x_1, x_2\}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \hat{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \hat{e}_2 = 2x_1 \hat{e}_1 + 2x_2 \hat{e}_2$$

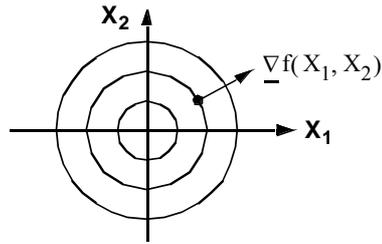


Figura 4.3 Função de duas variáveis e seu gradiente.

4.4.2 Métodos de minimização irrestrita

Baseiam-se nos métodos de descida rápida, onde as reduções na função objetivo são procuradas na direção dada pelo negativo do gradiente, conforme Figura 4.4.

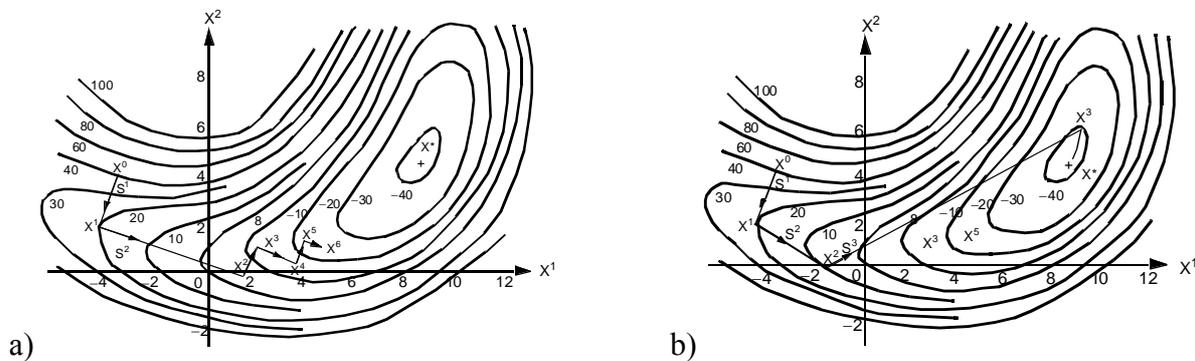


Figura 4.4 Comparação do: a) Método de descida rápida b) Método da direção conjugada.

As atualizações do projeto são dadas por:

$$\{\mathbf{x}\}^q = \{\mathbf{x}\}^{q-1} + \alpha^* \{\mathbf{s}\}^q \quad \{\mathbf{s}\}^q = -\nabla f(\{\mathbf{x}\}^{q-1}) = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{Bmatrix}^{q-1}$$

Esse método embora bastante atrativo, acaba sendo ineficiente, de forma que no MSC.Natran utiliza-se unicamente como a primeira iteração de outros métodos mais eficientes. Por exemplo, o método de direção conjugada demanda:

Primeira iteração ($q=1$), $\{\mathbf{s}\}^q = -\nabla f(\{\mathbf{x}\}^{q-1})$

$$q\text{-ésima iteração } (q > 1), \{\mathbf{s}\}^q = -\nabla f(\{\mathbf{x}\}^{q-1}) + \beta \{\mathbf{s}\}^{q-1}, \quad \beta = \frac{|\nabla f(\{\mathbf{x}\}^{q-1})|^2}{|\nabla f(\{\mathbf{x}\}^{q-2})|^2}$$

Nesse caso, a nova direção de procura se alimenta com informação prévia, significando uma grande melhoria sobre o método de descida rápida, como observado na Figura 4.4.

4.4.3 Condições de otimalidade de Kuhn-Tucker

As condições de Kuhn-Tucker para otimalidade originam-se de uma generalização dos multiplicadores de Lagrange λ_j , estabelecendo que a possibilidade da obtenção de um projeto ótimo, passa pela condição de três condições serem satisfeitas, conforme Figura 4.5.

1. \mathbf{x}^* é factível

$$g_j(\{\mathbf{x}^*\}) \leq \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$h_k(\{\mathbf{x}^*\}) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, l$$

2. $\lambda_j g_j(\{\mathbf{x}^*\}) = \mathbf{0}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m$

3. $\nabla f(\{\mathbf{x}^*\}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\{\mathbf{x}^*\}) + \sum_{k=1}^l \lambda_{k+m} \nabla h_k(\{\mathbf{x}^*\}) = \mathbf{0}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_{k+m}$ sem restrições de sinal

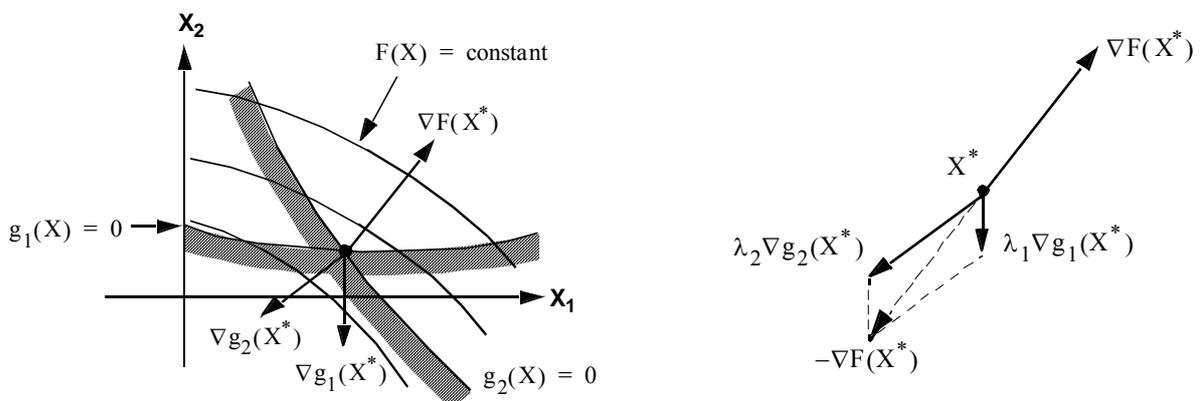


Figura 4.5 Interpretação geométrica das condições de Kuhn-Tucker para otimalidade

4.4.4 Método SQP

Os conceitos básicos são bastante similares aqueles da Programação Linear Seqüencial. Contudo, no método de programação quadrática seqüencial SQP (*Sequential Quadratic Programming*), se forma uma aproximação quadrática para a função objetivo e uma aproximação linear para as funções de restrição.

Inicialmente, o subproblema seguinte é resolvido utilizando o *Método Modificado de Direções Factíveis* para determinar a direção de procura s .

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & Q(\{s\}) = \{f\}^0 + \nabla \{f\}^T \{s\} + 0,5 \{s\}^T [\mathbf{B}] \{s\} \\ \text{sujeito a:} \quad & \nabla \{g\}_j^T \{s\} + \{g\}_j^0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

lembrando que a matriz $[\mathbf{B}]$ é uma matriz definida positiva, inicialmente igual à matriz identidade. Para atingir o ótimo no problema, $[\mathbf{B}]$ é atualizada se aproximando à matriz Hessiana das funções Lagrangeanas.

Na obtenção do ótimo do problema, os multiplicadores de Lagrange λ_j ($j=1, \dots, m$) devem ser calculados. Logo, uma aproximação da função Lagrangeana pode ser construída para uma procura unidimensional. A tarefa é determinar α para,

$$\text{Minimizar} \quad \Phi = f(\{x\}) + \sum_{j=1}^m u_j \max [0, g_j(\{x\})]$$

$$\text{onde:} \quad \{x\} = \{x\}^{q-1} + \alpha \{s\}$$

$$u_j = |\lambda_j| \quad j=1, \dots, m \quad \text{primeira iteração}$$

$$u_j = \max \left[|\lambda_j|, \frac{1}{2} (u_j + |\lambda_j|) \right] \quad j=1, \dots, m \quad \text{próximas iterações}$$

$$\text{e} \quad u_j = u_j \quad \text{da iteração prévia}$$

Durante a procura unidimensional, algumas aproximações são feitas para os componentes de Φ , devido a que esta função apresenta derivadas descontínuas nas restrições de contorno. Após a procura unidimensional tornar-se completa, a matriz $[\mathbf{B}]$ é atualizada utilizando a fórmula Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno BFGS

$$[\mathbf{B}^*] = [\mathbf{B}] - \frac{[\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\} \{\mathbf{p}\}^T [\mathbf{B}]}{\{\mathbf{p}\}^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\}} + \frac{\{\boldsymbol{\eta}\} \{\boldsymbol{\eta}\}^T}{\{\mathbf{p}\}^T \{\boldsymbol{\eta}\}}$$

onde: $\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{x}\}^q - \{\mathbf{x}\}$

$$\{\boldsymbol{\eta}\} = \theta \{\mathbf{y}\} + (1 - \theta) [\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\}$$

$$\{\mathbf{y}\} = \nabla_{\{\mathbf{x}\}} \Phi^q - \nabla_{\{\mathbf{x}\}} \Phi^{q-1}$$

$$\Phi = f(\{\mathbf{x}\}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\{\mathbf{x}\})$$

$$\theta = 1,0 \quad \text{se } \{\mathbf{p}\}^T \{\mathbf{y}\} \geq 0,2 \{\mathbf{p}\}^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\}$$

$$\theta = \frac{0,8 \{\mathbf{p}\}^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\}}{\{\mathbf{p}\}^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}\}^T \{\mathbf{y}\}} \quad \text{se } \{\mathbf{p}\}^T \{\mathbf{y}\} < 0,2 \{\mathbf{p}\}^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\}$$

assim, $[\mathbf{B}^*]$ substitui $[\mathbf{B}]$ e uma nova iteração começa.

Os problemas de otimização podem apresentar mais de um ponto de mínimo. As técnicas de programação matemática, utilizadas no MSC.Nastran, podem encontrar unicamente um ponto de mínimo local. Matematicamente, o mínimo global unicamente pode ser encontrado quando todas as possibilidades do espaço do projeto são avaliadas. Uma forma prática de encontrar um mínimo global é começar diferentes procuras locais com diversas variáveis iniciais do projeto.

A relação do modelo de análise no modelo de otimização do projeto pode ser observado na Figura 4.6, (MSC Software, 1996).

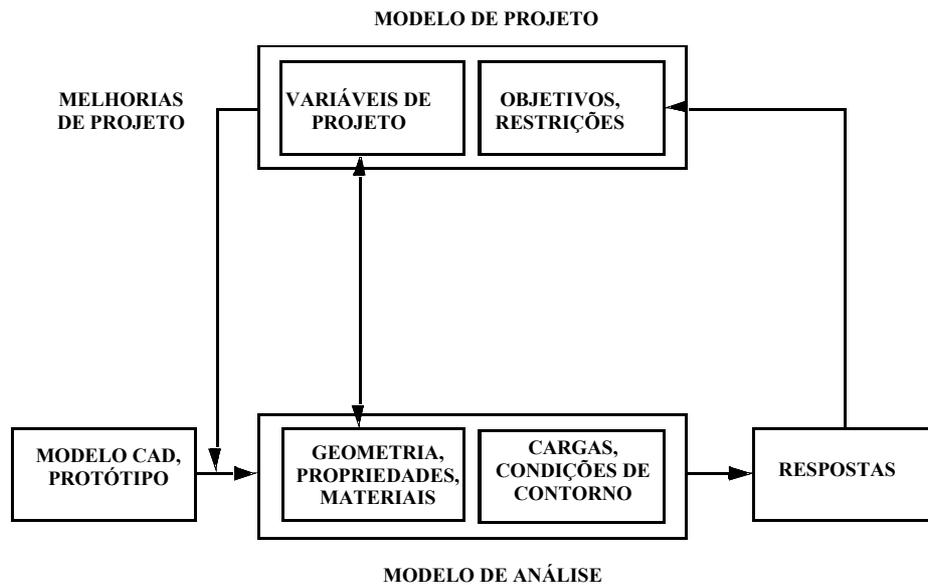


Figura 4.6 Relação dos modelos de análise e de projeto

4.5 Otimização estrutural em sistemas vibroacústicos

O trabalho trata da aplicação da otimização dimensional em sistemas vibroacústicos acoplados, com a finalidade de diminuir a massa ou otimizar alguma frequência natural predeterminada. O algoritmo SQP utilizado pelo MSC.Nastran foi testado preliminarmente em sistemas estruturais e logo aplicado nos sistemas vibroacústicos, sendo que o sistema é discretizado através do método dos elementos finitos. As espessuras das chapas são escolhidas para serem as variáveis do problema de otimização não linear com restrições.

4.5.1 Otimização da massa

Considera-se o problema de um sistema acoplado, onde o domínio estrutural é formado por chapas com a espessura pequena relativa às outras dimensões. Estuda-se o problema da otimização da massa do domínio estrutural, onde se considera um parâmetro dimensional, a espessura x da chapa, embora outras escolhas também sejam possíveis relativas às propriedades dos materiais e às propriedades da conectividade.

Sendo N a ordem de certa frequência, e considerando que os valores próprios são classificados em ordem crescente; o problema da otimização da massa é escrito de maneira que

sejam satisfeitas duas restrições, a primeira diz respeito aos limites da frequência N em Hz, e a segunda diz respeito aos limites de contorno mínimo e máximo das espessuras das chapas $\{\mathbf{x}\}$, de forma que se tornem tecnológica e matematicamente possíveis, pois as espessuras devem ter significado físico.

A descrição do problema de otimização, é estabelecido como

$$\begin{aligned} & \text{Otimizar} && \text{Peso}(\{\mathbf{x}\}) \\ & \{\mathbf{x}\} \in \mathbb{R}^r && \\ \text{sujeito a:} &&& \omega_N^L \leq \omega_N(\{\mathbf{x}\}) \leq \omega_N^U \\ &&& \{\mathbf{x}\}^{\min} \leq \{\mathbf{x}\} \leq \{\mathbf{x}\}^{\max} \end{aligned}$$

sendo r o número de elementos estruturais, $\omega_N(\{\mathbf{x}\})$ a N -ésima frequência natural função do vetor de espessuras $\{\mathbf{x}\}$ com limites inferior ω_N^L e superior ω_N^U , $\{\mathbf{x}\}^{\min}$ o vetor de espessuras mínimas e $\{\mathbf{x}\}^{\max}$ o vetor de espessuras máximas.

Uma otimização sem restrições da espessura pode conduzir a pontos singulares de valor zero. Por outro lado, a restrição $\{\mathbf{x}\} \leq \{\mathbf{x}\}^{\max}$ pode ser ignorada, se escolhendo um valor suficientemente grande de $\{\mathbf{x}\}^{\max}$, de maneira que a desigualdade seja sempre verificada. Neste caso, deve-se tomar cuidado para que permaneçam válidas as hipóteses de chapa.

Observa-se que durante o processo de otimização não existe controle explícito sobre o possível cruzamento dos modos.

4.5.2 Otimização de uma frequência predominante estrutural

Considera-se um sistema acoplado, onde o domínio estrutural é formado por chapas com a espessura pequena relativa às outras dimensões. Estuda-se o problema da otimização de uma frequência predominante estrutural predefinida, onde se consideram como parâmetros dimensionais, as espessura das chapas, embora outras escolhas também sejam possíveis relativas às propriedades dos materiais e às propriedades da conectividade.

Sendo N a ordem de uma certa frequência, e considerando que os valores próprios são classificados em ordem crescente; o problema da otimização da frequência N é escrito de maneira que sejam satisfeitas duas restrições, a primeira diz respeito aos limites do volume do sistema em m^3 , e a segunda diz respeito aos limites de contorno mínimo e máximo das espessuras das chapas $\{\mathbf{x}\}$, de forma que se tornem tecnológica e matematicamente possíveis, pois as espessuras devem ter significado físico.

A descrição do problema de otimização, é estabelecido como

$$\begin{aligned} \text{Otimizar} \quad & \omega_N(\{\mathbf{x}\}) \\ \{\mathbf{x}\} \in \mathcal{R}^r & \\ \text{sujeito a:} \quad & V^L \leq V(\{\mathbf{x}\}) \leq V^U \\ & \{\mathbf{x}\}^{\min} \leq \{\mathbf{x}\} \leq \{\mathbf{x}\}^{\max} \end{aligned}$$

sendo r o número de elementos estruturais, $V(\{\mathbf{x}\})$ o volume do sistema função do vetor de espessuras $\{\mathbf{x}\}$ com limites inferior V^L e superior V^U bastante próximos sugerindo um volume constante, $\{\mathbf{x}\}^{\min}$ o vetor de espessuras mínimas e $\{\mathbf{x}\}^{\max}$ o vetor de espessuras máximas.

Uma otimização sem restrições da espessura pode conduzir a pontos singulares de valor zero. Por outro lado, a restrição $\{\mathbf{x}\} \leq \{\mathbf{x}\}^{\max}$ pode ser ignorada, se escolhendo um valor suficientemente grande de $\{\mathbf{x}\}^{\max}$, de forma que a desigualdade seja sempre verificada. Neste caso, deve-se tomar cuidado para que permaneçam válidas as hipóteses de chapa.

Observa-se que durante o processo de otimização não existe controle explícito sobre o possível cruzamento dos modos.

5. Resultados e Discussões

5.1 Generalidades

Os objetivos deste capítulo envolvem apresentar os sistemas fluido-estrutura analisados; discutir os testes numéricos das formulações empregadas para calcular as frequências naturais e modos de vibração de forma analítica e por simulação; e na seqüência aplicar a otimização estrutural através de simulação em alguns casos simples, todavia representativos da interação fluido-estrutura. A implementação computacional das formulações analíticas para análise modal dos sistemas acoplados fluido-estrutura foram realizadas no ambiente do programa comercial MATLAB®, por causa das facilidades numéricas e gráficas disponíveis, empregando e ampliando as possibilidades do programa MEFLAB. O programa de elementos finitos de uso geral MEFLAB foi desenvolvido para aproveitar a ambiência numérica e gráfica do MATLAB®, estando em contínuo desenvolvimento. Para o estudo dos sistemas acoplados mais complexos e na otimização utiliza-se o programa comercial MSC.Nastran®, enquanto para o pré e pós-processamento dos resultados utiliza-se programa o comercial MSC.Patran®.

5.2 Sistema acústico-estrutural I – Cavidade cúbica sobre chapa

Objetivo do estudo de uma cavidade cúbica acústica sobre uma chapa quadrada é mostrar o acoplamento fraco dos modos quando os valores das frequências dos sistemas estrutural e acústico não resultam próximos para o intervalo de frequências analisadas.

5.2.1 Chapa quadrada

Trata-se de uma chapa quadrada fina em flexão de lado 0,3048 m e espessura 3,2766 mm suportada nos quatro vértices. O material utilizado apresenta as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E=73,084 \times 10^9$ N/m², coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ e densidade $\rho=2821$ kg/m³.

A chapa é representada através de uma malha (8x8), contabilizando 64 elementos bidimensionais *CQUAD4* de quatro nós cada e 81 nós. Adicionalmente considera-se o deslocamento dos vértices iguais a zero. Dessa maneira as condições de contorno são $u=v=w=0$ na chapa por inteiro e ainda nos vértices $z=0$, Figura 5.1.

As frequências naturais obtidas são comparadas, na Tabela 5.1, com soluções analíticas, experimentais e de simulação. A média da variação dos resultados do MEFLAB em relação aos analíticos para as três primeiras frequências é de 0,23%, valor considerado adequado se considerado que a variação de resultados semelhantes utilizando o MSC.Nastran é de 0,51%.

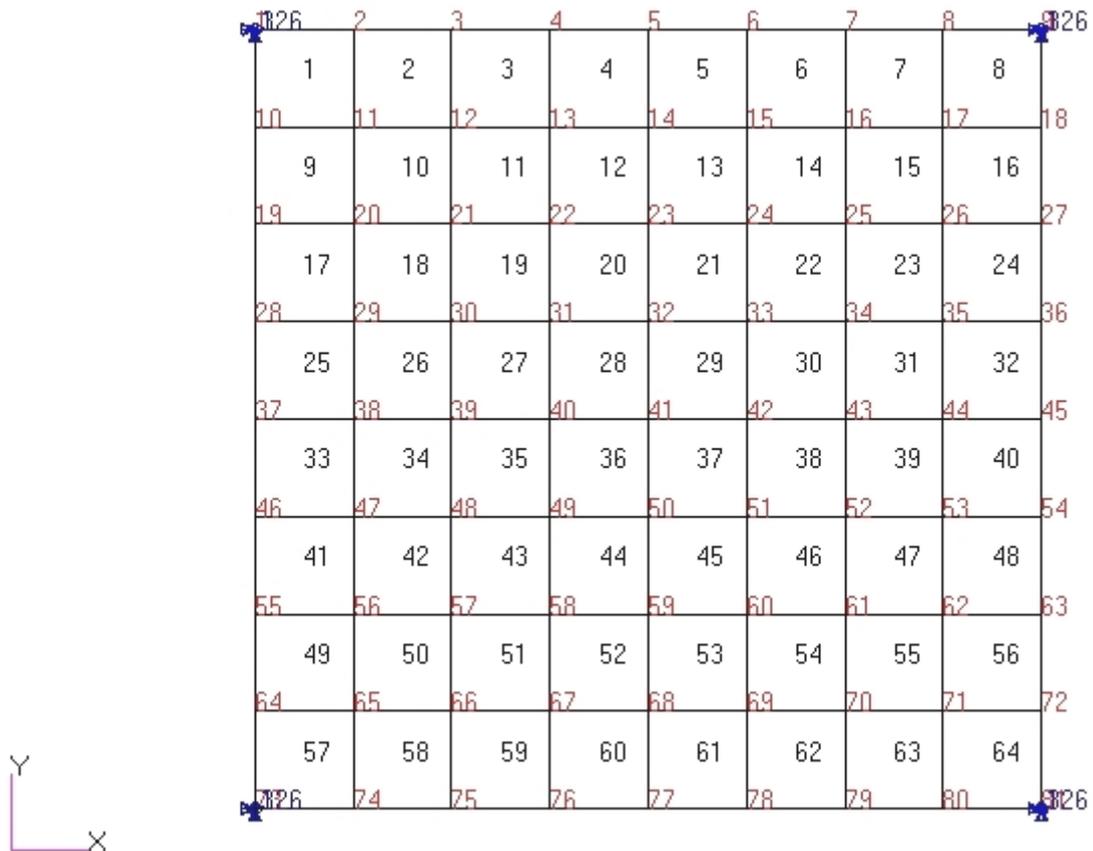


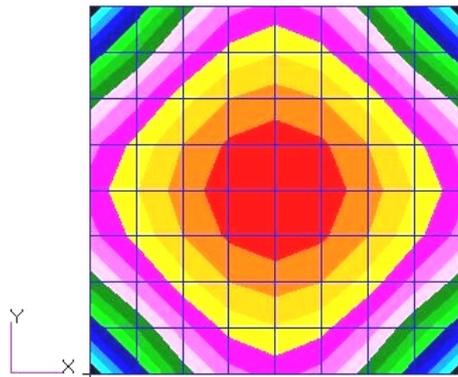
Figura 5.1 Malha da chapa quadrada com indicação das condições de contorno

Tabela 5.1 Frequências previstas em Hz de uma chapa quadrada suportada nos vértices

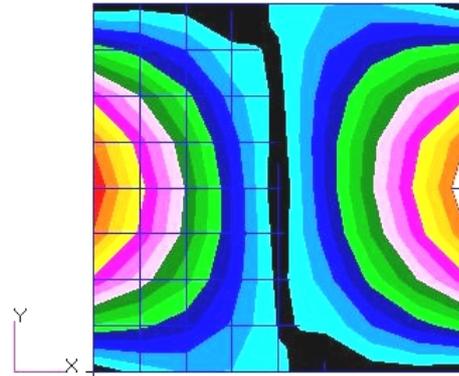
Modo	Analítico (Blevins, 1995)	Experimental (Reid, 1965)	MEF (Petyt e Mirza, 1972)	MEF MSC.Nastran	Variação (%) MSC.Nastran / Analítico	MEF MEFLAB	Variação (%) MEFLAB / Analítico
1	61,56	62	62,09	62,26	1,14	61,90	0,55
2	136,61	134	138,5	136,88	0,20	136,70	0,07
3	136,61	134	138,5	136,88	0,20	136,70	0,07
4		169	169,7	171,50		169,61	
5		330	340,0	346,41		335,43	
6		383	396,0	388,04		381,17	
7				457,36		439,77	

8	457,36	439,77
9	621,89	600,50
10	730,72	688,99

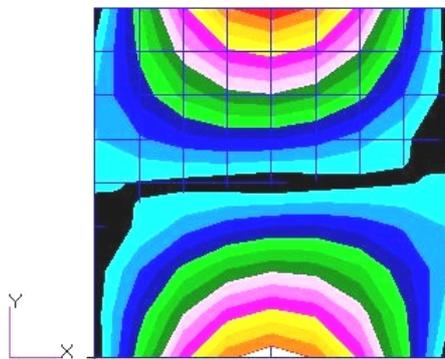
Observa-se na Figura 5.2 que existem dois modos, o segundo e o terceiro, com padrões modais diferentes apresentando frequências idênticas por causa da simetria.



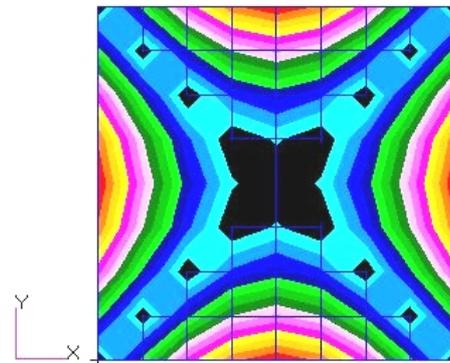
a) Modo 1.



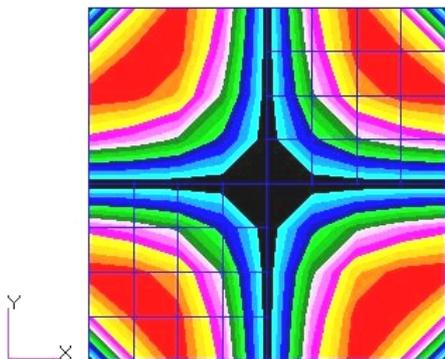
b) Modo 2.



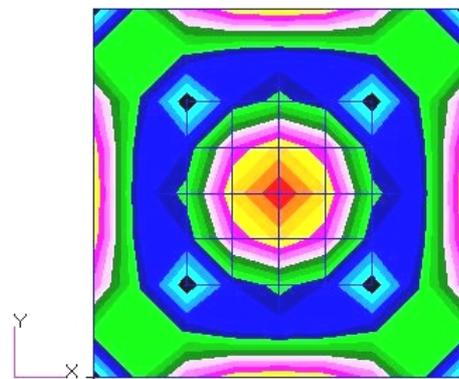
c) Modo 3.



d) Modo 4.



e) Modo 5.



f) Modo 6.

Figura 5.2 Padrões dos modos da chapa quadrada suportada nos vértices

5.2.2 Cavidade cúbica acústica

Trata-se de uma cavidade acústica de lado 0,3048 m. O fluido interno é ar a 20°C com densidade $\rho=1,204 \text{ kg/m}^3$ e velocidade do som $c_s=343,3 \text{ m/s}$.

A cavidade é representada através de uma malha (8x8x8) de elementos sólidos hexaédricos *CHEXA* de 8 nós cada, totalizando 512 elementos e 729 nós. Considera-se que a cavidade está contornada por paredes rígidas, Figura 5.3.

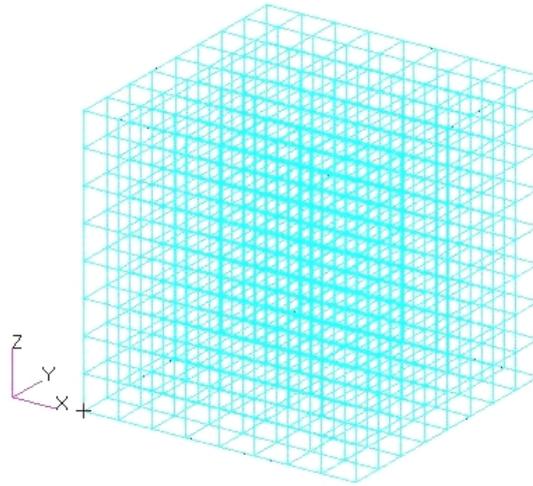


Figura 5.3 Malha da cavidade acústica com condições de contorno de parede rígida nas faces

As frequências naturais obtidas são comparadas, na Tabela 5.2, com soluções analíticas segundo Equação (5.1), da programação e por simulação.

A média da variação dos resultados do MSC.Nastran e do MEFLAB em relação aos valores analíticos é 1,56%, significando a conformidade dos resultados da programação e simulação. As frequências naturais analíticas de uma cavidade acústica retangular são obtidas através da Equação (5.1), Blevins (1995); onde as paredes da cavidade são consideradas como rígidas com impedância infinita.

$$f = \frac{c_s}{2} \sqrt{\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{k}{L_z}\right)^2} \quad i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

onde,

f = frequência natural em Hz;

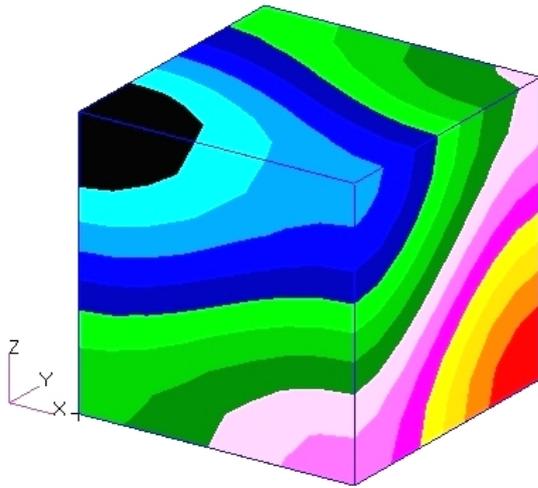
c_s = velocidade do som no meio, neste caso ar, igual a 343,3 m/s;

L_x, L_y, L_z = comprimento, largura e altura da cavidade, neste caso todas iguais a 0,3048 m.

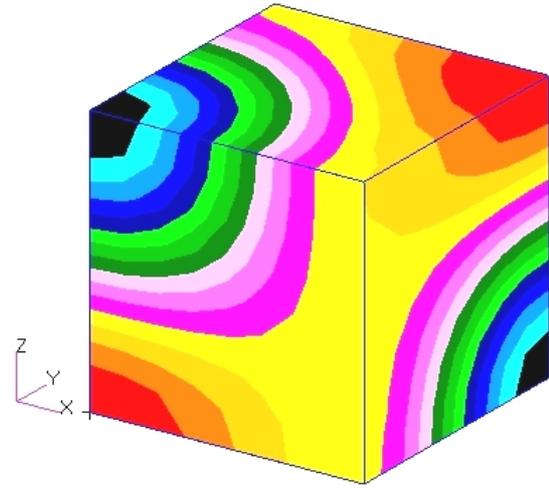
Tabela 5.2 Frequências preditas da cavidade acústica em Hz

Modo	Notação (i,j,k)	Analítico (Blevins, 1995)	MEF MEFLAB	Variação (%) MEFLAB / Analítico	MEF MSC.Nastran	Variação (%) MSC.Nastran / Analítico
1	(0,0,0)	0,0	0,0	0,00	0,0	0,00
2	(0,0,1)	563,2	566,80	0,64	566,78	0,64
3	(0,1,0)	563,2	566,80	0,64	566,78	0,64
4	(1,0,0)	563,2	566,80	0,64	566,78	0,64
5	(0,1,1)	796,4	801,50	0,64	801,55	0,65
6	(1,0,1)	796,4	801,50	0,64	801,55	0,65
7	(1,1,0)	796,4	801,50	0,64	801,55	0,65
8	(1,1,1)	975,4	981,70	0,65	981,69	0,64
9	(0,0,2)	1126,3	1155,40	2,58	1155,44	2,59
10	(0,2,0)	1126,3	1155,40	2,58	1155,44	2,59
11	(2,0,0)	1126,3	1155,40	2,58	1155,44	2,59
12	(0,1,2)	1259,3	1287,00	2,20	1286,96	2,20
13	(0,2,1)	1259,3	1287,00	2,20	1286,96	2,20
14	(1,0,2)	1259,3	1287,00	2,20	1286,96	2,20
15	(1,2,0)	1259,3	1287,00	2,20	1286,96	2,20
16	(2,0,1)	1259,3	1287,00	2,20	1286,96	2,20
17	(2,1,0)	1259,3	1287,00	2,20	1286,96	2,20
18	(1,1,2)	1379,4	1406,20	1,94	1406,24	1,95
19	(1,2,1)	1379,4	1406,20	1,94	1406,24	1,95
20	(2,1,1)	1379,4	1406,20	1,94	1406,24	1,95

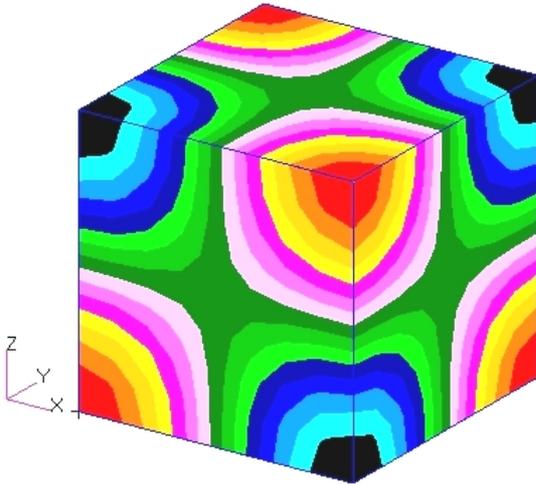
Observam-se na Figura 5.4 os padrões de seis modos com frequências naturais diferentes.



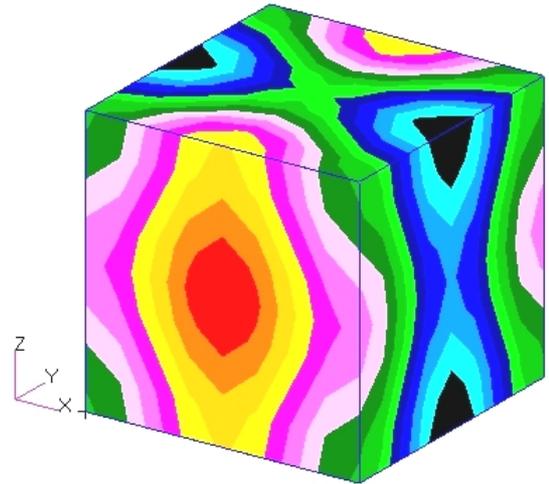
a) Modo 2.



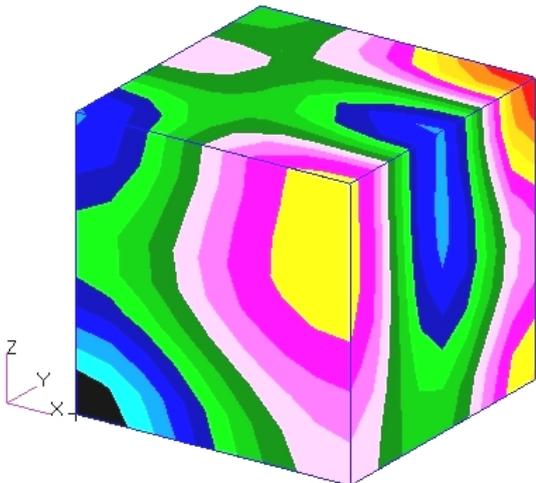
b) Modo 5.



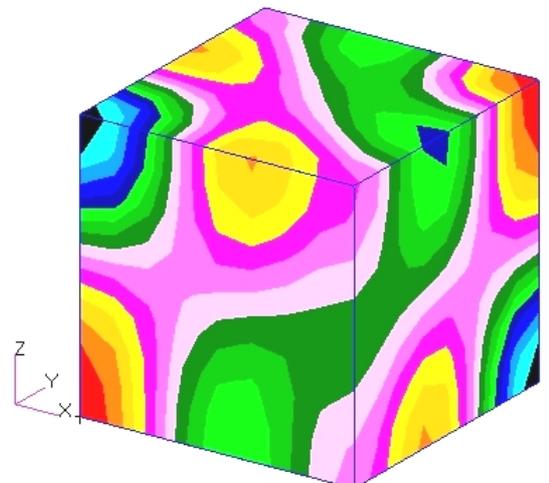
c) Modo 8.



d) Modo 9.



e) Modo 12.



f) Modo 18.

Figura 5.4 Padrões dos modos de uma cavidade cúbica com frequências naturais diferentes

5.2.3 Caverna cúbica acústica sobre chapa quadrada

Apresenta-se nesta seção a caverna cúbica acústica sobre a chapa quadrada, modelada como um sistema acoplado fluido-estrutura. A chapa é modelada através de elementos bidimensionais *CQUAD4*, com as dimensões e material especificado na seção 5.2.1. Por sua vez a caverna é modelada com elementos sólidos hexaédricos *CHEXA*, com as dimensões da caverna e propriedades de fluido especificadas na seção 5.2.2.

Considera-se que o deslocamento dos vértices da chapa seja igual a zero. Dessa maneira, as condições de contorno são $u=v=rz=0$ na chapa por inteiro e ainda nos vértices dela $z=0$. Também, a caverna está contornada por paredes rígidas.

A simplificação adotada resulta em uma malha de 64 elementos bidimensionais de chapa *CQUAD4* de chapa de quatro nós cada e 512 elementos sólidos hexaédricos *CHEXA* de oito nós cada, totalizando 576 elementos em 810 nós.

Observa-se na Tabela 5.3 a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas pelo MEFLAB em relação aos valores dos sistemas originais, para as frequências predominantemente estruturais S_i ($i=1,2,\dots$) resulta 0,15%, para as frequências predominantemente do tipo fluido F_j ($j=1,2,\dots$) resulta 0,49% e para todas as frequências 0,3%. O valor máximo da variação é 6,50 Hz. O conjunto dos resultados significa que existe um acoplamento fraco.

Tabela 5.3 Frequências previstas I da cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada em Hz

Chapa MEFLAB	Cavidade MEFLAB	Modo origem	Modo acoplado	Acoplado MEFLAB	Varição (%) MEFLAB acoplado / origem	Varição Hz MEFLAB acoplado / origem
	0,00	F1	1	0	0,00	0
61,90		S1	2	64,20	3,71	2,30
136,69		S2	3	136,50	-0,14	-0,19
136,69		S3	4	136,50	-0,14	-0,19
169,61		S4	5	169,50	-0,06	-0,11
335,43		S5	6	335,10	-0,10	-0,33
381,17		S6	7	380,90	-0,07	-0,27
439,77		S7	8	439,40	-0,08	-0,37
439,77		S8	9	439,40	-0,08	-0,37
	566,80	F2	10	569,90	0,55	3,10
	566,80	F3	11	569,90	0,55	3,10
	566,80	F4	12	570,20	0,60	3,40
600,50		S9	13	600,20	-0,05	-0,30
688,99		S10	14	688,60	-0,06	-0,39
688,99		S11	15	688,60	-0,06	-0,39
	801,50	F5	16	805,70	0,52	4,20
	801,50	F6	17	806,00	0,56	4,50
	801,50	F7	18	806,00	0,56	4,50
809,82		S12	19	809,30	-0,06	-0,52
	981,70	F8	20	986,80	0,52	5,10
1013,64		S13	21	1013,20	-0,04	-0,44
1013,64		S14	22	1013,20	-0,04	-0,44
1020,68		S15	23	1020,30	-0,04	-0,38
1039,04		S16	24	1038,70	-0,03	-0,34
	1155,40	F9	25	1161,30	0,51	5,90
	1155,40	F10	26	1161,30	0,51	5,90
	1155,40	F11	27	1161,40	0,52	6,00
1180,42		S17	28	1180,00	-0,04	-0,42
	1287,00	F12	29	1293,50	0,51	6,50
	1287,00	F13	30	1293,50	0,51	6,50

Observa-se na Tabela 5.4 a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas pelo MSC.Nastran em relação aos valores dos sistemas originais, para as frequências predominantemente estruturais resulta 0,57%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,14% e para todas as frequências 0,37 %. O valor máximo da variação é 8,45 Hz. Os valores encontrados se correspondem com os do MEFLAB da Tabela 5.3.

Tabela 5.4 Frequências previstas II da cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada em Hz

Chapa MSC.Nastran	Cavidade MSC.Nastran	Modo origem	Modo	Acoplado MSC.Nastran	Variação % MSC.Nastran acoplado / origem	Variação Hz MSC.Nastran acoplado / origem
	0,0	F1	1	0,00	0	0
62,26		S1	2	70,71	13,57	8,45
136,88		S2	3	136,09	-0,58	-0,79
136,88		S3	4	136,09	-0,58	-0,79
171,50		S4	5	170,99	-0,30	-0,51
346,41		S5	6	344,85	-0,45	-1,56
388,04		S6	7	386,91	-0,29	-1,13
457,36		S7	8	455,91	-0,32	-1,45
457,36		S8	9	455,91	-0,32	-1,45
	566,78	F2	10	568,05	0,22	1,27
	566,78	F3	11	568,05	0,22	1,27
	566,78	F4	12	569,07	0,40	2,29
621,89		S9	13	620,79	-0,18	-1,10
730,72		S10	14	729,00	-0,24	-1,72
730,72		S11	15	729,00	-0,24	-1,72
	801,55	F5	16	802,39	0,10	0,84
	801,55	F6	17	803,34	0,22	1,79
	801,55	F7	18	803,34	0,22	1,79
888,34		S12	19	885,99	-0,26	-2,35
	981,69	F8	20	982,91	0,12	1,22
1107,3		S13	21	1105,36	-0,18	-1,94
1107,3		S14	22	1105,36	-0,18	-1,94
1132,8		S15	23	1130,64	-0,19	-2,16

1134,5		S16	24	1132,55	-0,17	-1,95
	1155,40	F9	25	1156,15	0,06	0,71
	1155,40	F10	26	1156,48	0,09	1,04
	1155,40	F11	27	1156,67	0,11	1,23
	1287,00	F12	28	1287,60	0,05	0,64
	1287,00	F13	29	1287,60	0,05	0,64
	1287,00	F14	30	1288,13	0,09	1,17

5.2.4 Chapa quadrada de menor espessura

Trata-se da chapa quadrada da seção 5.2.1, porém com uma espessura menor, 2,62128 mm (80% da espessura da seção 5.2.1).

As frequências naturais obtidas são comparadas na Tabela 5.5, com soluções analíticas, experimentais e de simulação. A média da variação dos resultados do MEFLAB em relação aos analíticos para as três primeiras frequências é de 0,22%, valor considerado adequado se considerado que a variação de resultados semelhantes utilizando o MSC.Nastran é de 0,58%.

Tabela 5.5 Frequências previstas em Hz de uma chapa quadrada de espessura menor

Modo	Analítico (Blevins, 1995)	MEF MSC.Nastran	Variação (%) MSC.Nastran / Analítico	MEF MEFLAB	Variação (%) MEFLAB / Analítico
1	49,25	49,83	1,18	49,52	0,55
2	109,29	109,61	0,29	109,35	0,05
3	109,29	109,61	0,29	109,35	0,05
4		137,20		135,68	
5		277,60		268,34	
6		310,85		304,93	
7		366,20		351,82	
8		366,20		351,82	
9		498,26		480,4	
10		585,82		551,19	

Pela análise das frequências de vibração resultantes para a chapa quadrada de espessura menor, comparadas às frequências da chapa quadrada de espessura original, é possível verificar que as frequências se alteram de forma diretamente proporcional às mudanças efetuadas na espessura da chapa, ou seja, se a espessura diminui 20%, todas as frequências de vibração da chapa também diminuem em torno de 20 %, e isso pode inclusive ser comprovado pela Equação (5.2), que se origina de uma relação das Equações (3.62) e (3.69).

$$f = \sqrt{\frac{[\mathbf{k}]_e}{[\mathbf{m}]_e}} = \sqrt{\frac{E h^3 [\dots]}{\rho h a b [\dots]}} = h [\dots] \quad (5.2)$$

Fato similar acontece também com o meio fluido, onde se comprova pela Equação (5.3), que as frequências de vibração se modificam de forma diretamente proporcional às mudanças relativas a velocidade do som no meio.

5.2.5 Cavidade cúbica acústica sobre chapa quadrada de menor espessura

Apresenta-se nesta seção a cavidade cúbica acústica sobre a chapa quadrada de espessura menor, modelada como um sistema acoplado fluido-estrutura. A chapa é modelada através de elementos bidimensionais *CQUAD4*, com as dimensões e material especificados na seção 5.2.4. Por sua vez a cavidade é modelada com elementos sólidos hexaédricos *CHEXA*, com as dimensões da cavidade e propriedades de fluido especificadas na seção 5.2.2.

Todas as considerações e simplificações transcorrem conforme definido na seção 5.2.3.

Observa-se na Tabela 5.6 a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas pelo MEFLAB em relação aos valores dos sistemas originais, para as frequências predominantemente estruturais S_i ($i=1,2,\dots$) resulta 0,30%, para as frequências predominantemente do tipo fluido F_j ($j=1,2,\dots$) resulta 0,04% e para todas as frequências 0,20%. O valor máximo da variação é 3,51 Hz.

Tabela 5.6 Freqüências previstas I da cavidade cúbica sobre chapa de espessura menor em Hz

Chapa MEFLAB	Cavidade MEFLAB	Modo origem	Modo acoplado	Acoplado MEFLAB	Varição (%) MEFLAB acoplado / origem	Varição Hz MEFLAB acoplado / origem
	0	F1	1	0	0	0
49,52		S1	2	53,03	7,09	3,51
109,35		S2	3	109,16	-0,17	-0,19
109,35		S3	4	109,16	-0,17	-0,19
135,68		S4	5	135,56	-0,09	-0,12
268,34		S5	6	267,98	-0,13	-0,36
304,93		S6	7	304,67	-0,09	-0,26
351,82		S7	8	351,5	-0,09	-0,32
351,82		S8	9	351,5	-0,09	-0,32
480,4		S9	10	480,13	-0,06	-0,27
551,19		S10	11	550,69	-0,09	-0,50
551,19		S11	12	550,69	-0,09	-0,50
	566,80	F2	13	567,26	0,08	0,46
	566,80	F3	14	567,26	0,08	0,46
	566,80	F4	15	567,45	0,11	0,65
647,86		S12	16	647,43	-0,07	-0,43
	801,50	F5	17	801,66	0,02	0,16
	801,50	F6	18	801,91	0,05	0,41
	801,50	F7	19	801,91	0,05	0,41
810,91		S13	20	810,66	-0,03	-0,25
810,91		S14	21	810,66	-0,03	-0,25
816,54		S15	22	816,17	-0,05	-0,37
831,23		S16	23	830,86	-0,04	-0,37
944,33		S17	24	943,91	-0,04	-0,42
	981,70	F8	25	982,13	0,04	0,43
1102,58		S18	26	1102,16	-0,04	-0,42
	1155,40	F9	27	1155,62	0,02	0,22
	1155,40	F10	28	1155,62	0,02	0,22
	1155,40	F11	29	1155,82	0,04	0,42
1157,47		S19	30	1156,89	-0,05	-0,58

Observa-se na Tabela 5.7 a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas pelo MSC.Nastran em relação aos valores dos sistemas originais, para as frequências predominantemente estruturais resulta 1,10 %, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,16% e para todas as frequências 0,73 %. O valor máximo da variação é 12,65 Hz.

Tabela 5.7 Frequências preditas II da cavidade cúbica sobre chapa de espessura menor em Hz

Chapa MSC.Nastran	Cavidade MSC.Nastran	Modo origem	Modo	Acoplado MSC.Nastran	Variação % MSC.Nastran acoplado / origem	Variação Hz MSC.Nastran acoplado / origem
	0	F1	1	0	0	0
49,83		S1	2	62,48	25,39	12,65
109,61		S2	3	108,83	-0,71	-0,78
109,61		S3	4	108,83	-0,71	-0,78
137,20		S4	5	136,70	-0,36	-0,50
277,60		S5	6	276,09	-0,54	-1,51
310,85		S6	7	309,80	-0,34	-1,05
366,20		S7	8	364,89	-0,36	-1,32
366,20		S8	9	364,89	-0,36	-1,32
498,26		S9	10	497,16	-0,22	-1,10
	566,78	F2	11	567,81	0,18	1,03
	566,78	F3	12	567,81	0,18	1,03
	566,78	F4	13	569,53	0,49	2,75
585,82		S10	14	584,62	-0,20	-1,20
585,82		S11	15	584,62	-0,20	-1,20
712,51		S12	16	710,47	-0,29	-2,04
	801,55	F5	17	802,43	0,11	0,88
	801,55	F6	18	803,54	0,25	1,99
	801,55	F7	19	803,54	0,25	1,99
888,67		S13	20	886,92	-0,20	-1,76
888,67		S14	21	886,92	-0,20	-1,76
906,85		S15	22	905,17	-0,19	-1,68
910,76		S16	23	908,53	-0,24	-2,23
	981,69	F8	24	983,63	0,20	1,94
1062,58		S17	25	1060,57	-0,19	-2,01

	1155,40	F9	26	1156,17	0,06	0,72
	1155,40	F10	27	1156,20	0,07	0,76
	1155,40	F11	28	1156,99	0,13	1,55
1227,41		S18	29	1225,49	-0,16	-1,92
	1287,00	F12	30	1287,54	0,05	0,58

Tanto utilizando o MEFLAB (Tabela 5.6) como o MSC Nastran (Tabela 5.7), em comparação ao sistema que adota como estrutura a chapa quadrada de espessura original (Seção 5.2.3), percebe-se mudanças significativas na ordem das frequências acopladas, uma maior variação das frequências predominantemente estruturais devido ao acoplamento, e uma diminuição da variação das frequências predominantemente do tipo fluido, tudo isso ocasionado por uma redução de 20% na espessura da chapa quadrada descrita na seção 5.2.3.

5.3 Sistema acústico-estrutural II – Cavidade hexaédrica sobre chapa

Objetivo do estudo de uma cavidade hexaédrica acústica sobre uma chapa quadrada é mostrar o acoplamento dos modos quando os valores das frequências dos sistemas estrutural e acústico estão próximos para o intervalo de frequências analisadas, modelo descrito em MSC.SOFTWARE (1996). A modificação em relação ao sistema anterior foi passar de uma cavidade cúbica para uma cavidade retangular, com altura cinco vezes maior que o lado da base.

5.3.1 Chapa quadrada

Trata-se de uma chapa quadrada fina em flexão de lado 20 pol (0,508 m) e espessura 0,2 pol (5,08 mm) suportada nos quatro vértices. O material utilizado é alumínio com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E=1,0 \times 10^7$ psi ($68,948 \times 10^9$ N/m²), coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ e densidade $\rho=2,54 \times 10^{-4}$ lb-s²/pol⁴ (2700 kg/m³).

A chapa é representada através de uma malha (8x8), contabilizando 64 elementos bidimensionais *CQUAD4* de quatro nós cada e 81 nós. Adicionalmente considera-se o deslocamento dos vértices iguais a zero. Dessa maneira as condições de contorno são $u=v=rz=0$ na chapa por inteiro e ainda nos vértices $z=0$, Figura 5.5.

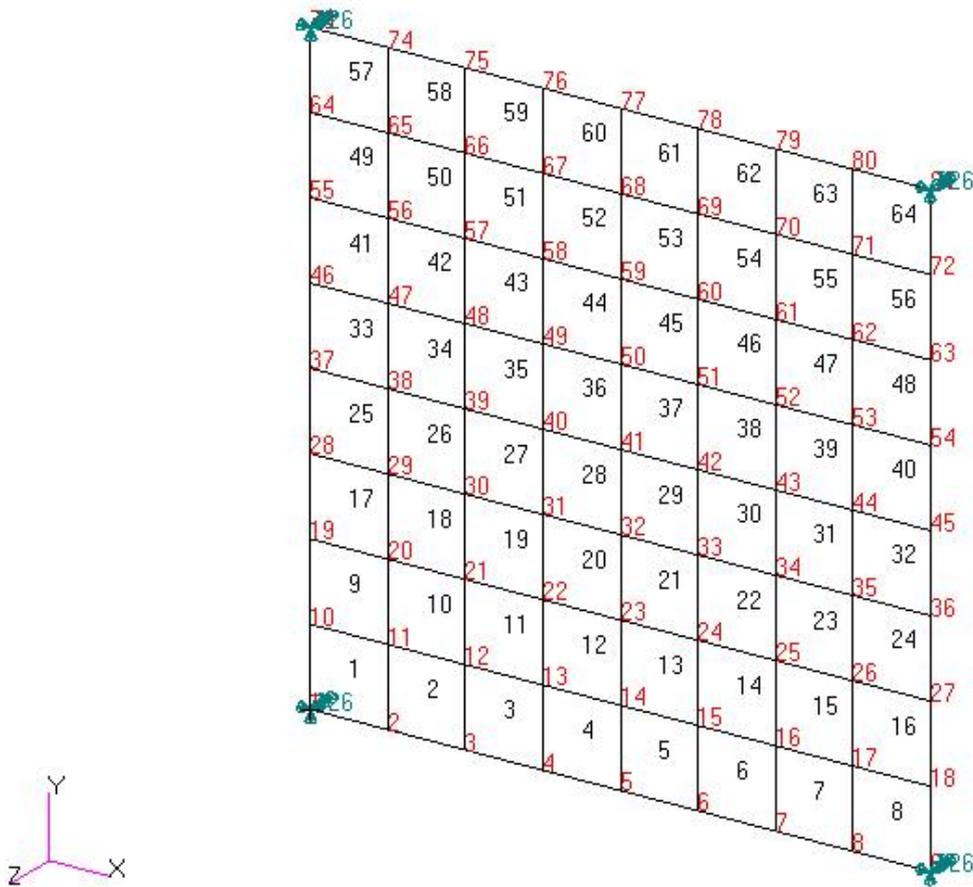


Figura 5.5 Malha da chapa quadrada com indicação das condições de contorno

As frequências naturais obtidas são comparadas, na Tabela 5.8, com soluções analíticas, de programação e por simulação. A média da variação dos resultados do MSC.Nastran em relação aos analíticos para as duas primeiras frequências é de 0,69%, valor considerado adequado se ponderado que a variação máxima é apenas 0,39 Hz.

Tabela 5.8 Frequências previstas em Hz de uma chapa quadrada suportada nos vértices

Modo	Analítico	MEF	Variação (%)	
	(Blevins, 1995)	MSC.Nastran	MSC.Nastran / Analítico	MSC.Nastran / Analítico
1	34,02	34,41	1,15	0,39
2	75,50	75,67	0,23	0,17
3		75,67		
4		94,78		
5		191,56		
6		214,55		

7	252,84
8	252,84
9	343,86
10	404,14

Observa-se, segundo a Figura 5.2, que existem dois modos, o segundo e o terceiro, com padrões modais diferentes apresentando frequências idênticas por causa da simetria.

5.3.2 Caverna hexaédrica acústica

Trata-se de uma caverna hexaédrica com dimensões 20 pol (0,508 m) nos lados da base e altura 100 pol (2,54 m). O fluido interno é ar com densidade $\rho=1,21 \times 10^{-7}$ lb-s²/pol⁴ (1,29 kg/m³) e velocidade do som $c_s=13000$ pol/s (330,2 m/s).

A caverna é representada através de uma malha (8x8x8) de elementos sólidos hexaédricos CHEXA de 8 nós cada, totalizando 512 elementos e 729 nós. Considera-se que a caverna está contornada por paredes rígidas, Figura 5.6.

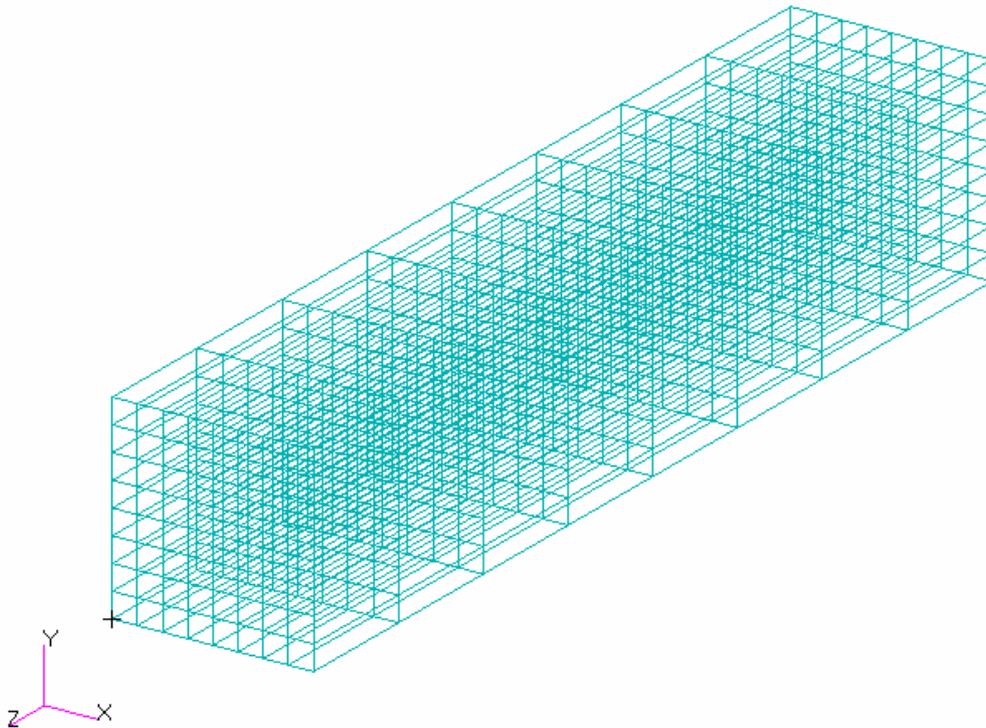


Figura 5.6 Malha da caverna retangular, condições de contorno de parede rígida nas faces

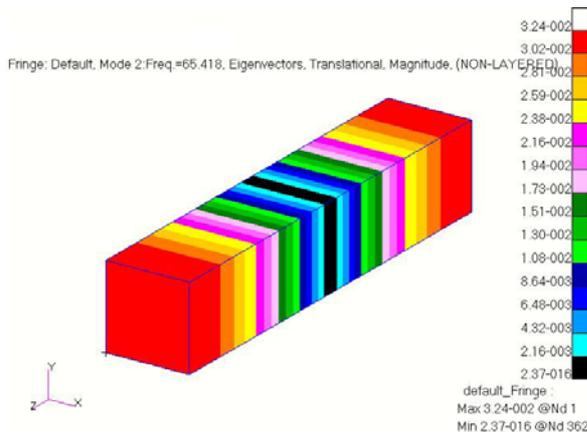
As freqüências naturais obtidas são comparadas, na Tabela 5.9, com soluções analíticas segundo Equação (5.1), onde as paredes da cavidade são consideradas como rígidas com impedância infinita, e por simulação.

A média percentual da variação dos resultados do MSC.Nastran em relação aos valores analíticos é 3,92 % para as vinte primeiras freqüências. Contudo a diferença máxima é 38,2 Hz (11,52%) para a freqüência de ordem 15. O conjunto dos resultados fornece suficiente conformidade, principalmente para as primeiras freqüências.

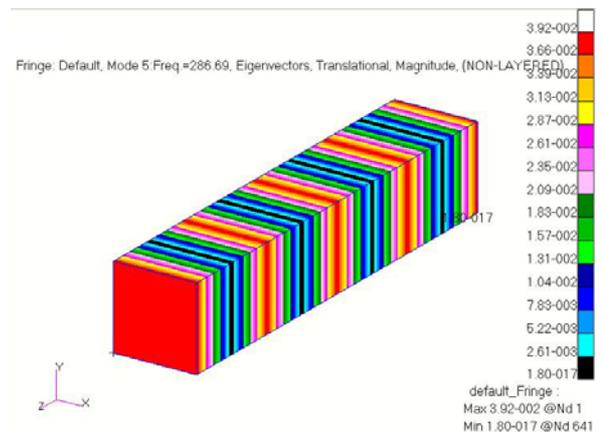
Tabela 5.9 Freqüências previstas da cavidade retangular acústica em Hz

Modo	Notação (<i>i,j,k</i>)	Analítico (Blevins, 1995)	MEF MSC.Nastran	Variação (%) MSC.Nastran / Analítico	Variação Hz MSC.Nastran / Analítico
1	(0,0,0)	0,00	0	0	0
2	(0,0,1)	65,00	65,41	0,63	0,26
3	(0,0,2)	130,00	133,36	2,58	2,14
4	(0,0,3)	195,00	206,37	5,83	7,27
5	(0,0,4)	260,00	286,69	10,27	17,24
6	(0,0,5)	325,00	327,09	0,64	1,33
7	(0,1,0)	325,00	327,09	0,64	1,33
8	(1,0,0)	325,00	333,56	2,63	7,80
9	(0,1,1)	331,44	333,56	0,64	1,36
10	(1,0,1)	331,44	353,23	6,58	20,63
11	(0,1,2)	350,04	353,23	0,91	2,03
12	(1,0,2)	350,04	374,88	7,10	8,32
13	(0,1,3)	379,01	386,75	2,04	4,93
14	(1,0,3)	379,01	386,75	2,04	4,93
15	(0,0,6)	390,00	434,94	11,52	38,20
16	(0,1,4)	416,20	434,94	4,50	12,00
17	(1,0,4)	416,20	462,57	11,14	29,70
18	(0,0,7)	455,00	465,88	2,39	6,51
19	(0,1,5)	459,62	467,18	1,64	6,48
20	(1,0,5)	459,62	481,41	4,74	20,43

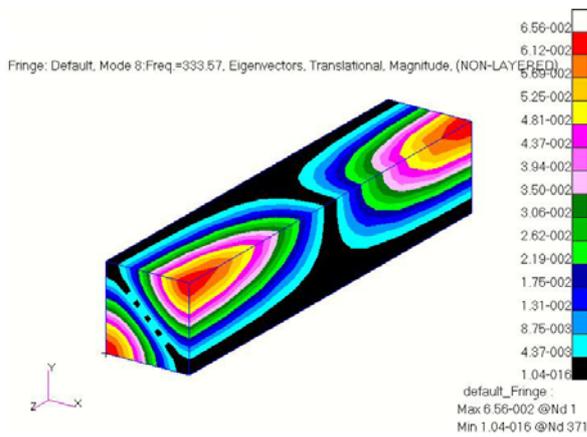
Observa-se na Figura 5.7 os padrões de seis modos com frequências naturais diferentes.



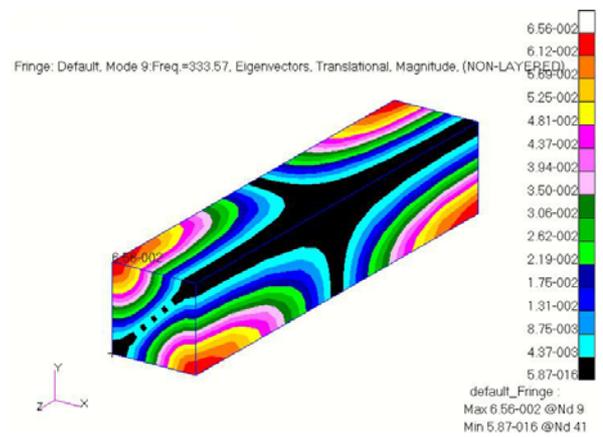
a) Modo 2: 65,41 Hz.



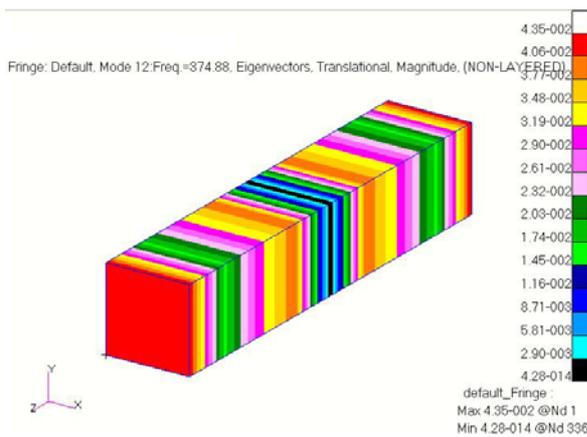
b) Modo 5: 286,69 Hz.



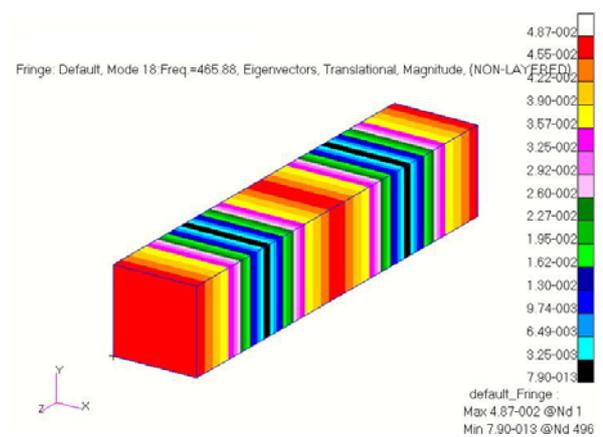
c) Modo 8: 333,57 Hz.



d) Modo 9: 333,57 Hz.



e) Modo 12: 374,88 Hz.



f) Modo 18: 455,88 Hz.

Figura 5.7 Padrões dos modos de uma cavidade acústica com frequências naturais diferentes

5.3.3 Cavidade hexaédrica acústica sobre chapa quadrada

Apresenta-se nesta seção a cavidade hexaédrica acústica sobre a chapa quadrada, modelada como um sistema acoplado fluido-estrutura. A chapa é modelada através de elementos bidimensionais *CQUAD4*, com as dimensões e material especificado na seção 5.3.1. Por sua vez a cavidade é modelada com elementos sólidos hexaédricos *CHEXA*, com as dimensões da cavidade e propriedades de fluido especificadas na seção 5.3.2.

Considera-se que o deslocamento dos vértices da chapa seja igual à zero. Dessa maneira, as condições de contorno são $u=v=rz=0$ na chapa por inteiro e ainda nos vértices dela $z=0$. Também, a cavidade está contornada por paredes rígidas.

A simplificação adotada resulta em uma malha de 64 elementos bidimensionais de chapa *CQUAD4* de chapa de quatro nós cada e 512 elementos sólidos hexaédricos *CHEXA* de oito nós cada, totalizando 576 elementos em 810 nós.

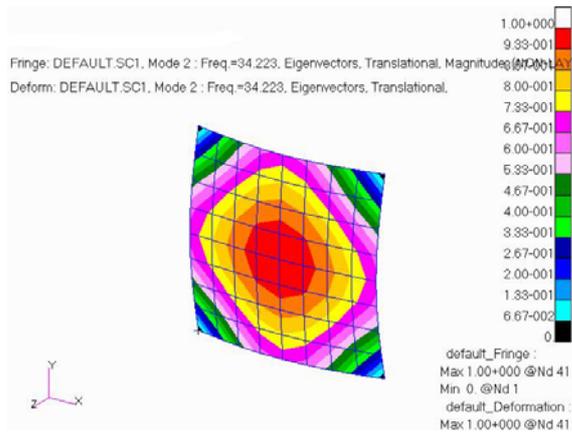
Observa-se na Tabela 5.10, através de simulação, que a média da variação das primeiras trinta frequências predominantemente estruturais resulta -1,34%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,92%, embora para todas as frequências 0,091%. Os resultados das médias relativas à condição desacoplada indicam que existiria um acoplamento ligeiramente maior neste sistema. O valor máximo da variação é -9,93 Hz (-0,03%).

Verifica-se também na Tabela 5.10 a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas pelo MEFLAB em relação aos valores obtidos pelo MSC.Nastran, onde para as frequências predominantemente estruturais resulta -1,83%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta -0,85% e para todas as frequências -1,21%. O valor máximo absoluto da variação é 16,93 Hz (4,20%) para o modo 24. O conjunto dos resultados mostra a correspondência dos resultados do MEFLAB em relação aos obtidos pelo MSC.Nastran.

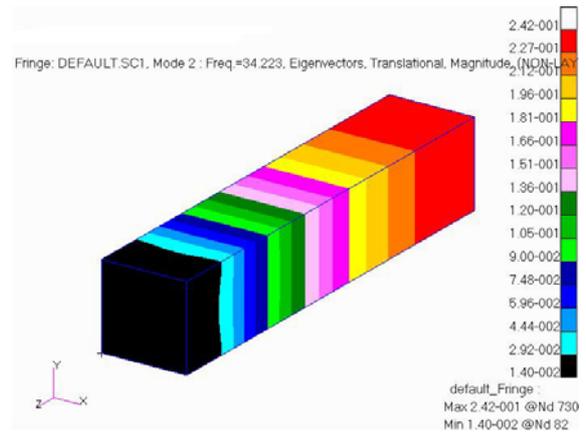
Tabela 5.10 Freqüências previstas da cavidade retangular sobre uma chapa quadrada em Hz

Chapa MSC.Nastran	Cavidade MSC.Nastran	Modo origem	Modo acoplado	Acoplado MSC.Nastran	Acoplado MEFLAB	Variação (%) acoplado MEFLAB / MSC.Nastran	Variação Hz acoplado MEFLAB - MSC.Nastran
	0	F1	1	0	0	0	0
34,41		S1	2	34,22	34,26	0,12	0,04
	65,41	F2	3	67,36	64,9	-3,65	-2,46
75,67		S2	4	75,22	75,66	0,58	0,44
75,67		S3	5	75,22	75,66	0,58	0,44
94,78		S4	6	94,55	93,79	-0,80	-0,76
	133,36	F3	7	134,17	133,16	-0,75	-1,01
191,56		S5	8	190,73	185,58	-2,70	-5,15
	206,37	F4	9	206,65	206,36	-0,14	-0,29
214,55		S6	10	214,4	210,63	-1,76	-3,77
252,84		S7	11	252,18	243,19	-3,56	-8,99
252,84		S8	12	252,18	243,19	-3,56	-8,99
	286,69	F5	13	287,23	286,56	-0,23	-0,67
	327,09	F6	14	327,24	327,05	-0,06	-0,19
	327,09	F7	15	327,24	327,05	-0,06	-0,19
343,86		S9	16	333,9	331,96	-0,58	-1,94
	333,56	F8	17	339,9	333,49	-0,12	-0,41
	333,56	F9	18	343,48	333,49	-2,91	-9,99
	353,23	F10	19	353,56	353,16	-0,11	-0,4
	353,23	F11	20	353,56	353,16	-0,11	-0,4
	374,88	F12	21	375,36	374,76	-0,16	-0,6
	386,75	F13	22	387,03	380,97	-1,57	-6,06
	386,75	F14	23	387,03	380,97	-1,57	-6,06
404,14		S10	24	403,54	386,61	-4,20	-16,93
404,14		S11	25	403,54	386,61	-4,20	-16,93
	434,94	F15	26	435,34	434,85	-0,11	-0,49
	434,94	F16	27	435,34	434,85	-0,11	-0,49
	462,57	F17	28	462,68	447,78	-3,22	-14,9
	465,88	F18	29	466,29	462,55	-0,80	-3,74
		F19	30	467,4	465,73	-0,36	-1,67

Observa-se na Figura 5.8 a forma modal e freqüências naturais de alguns modos do modelo acoplado, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura e vice-versa, a partir do qual se pode inferir se a estrutura ou o fluido predomina no modo.

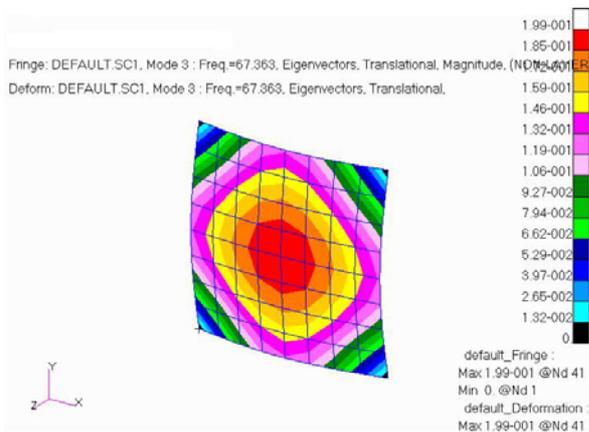


a) Deformação na estrutura

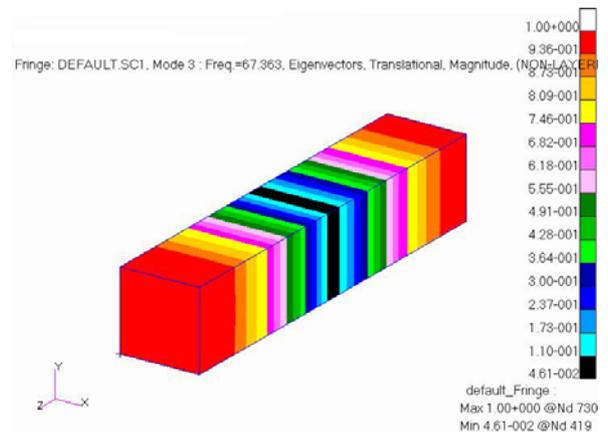


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 34,223 Hz, estrutura predominante.

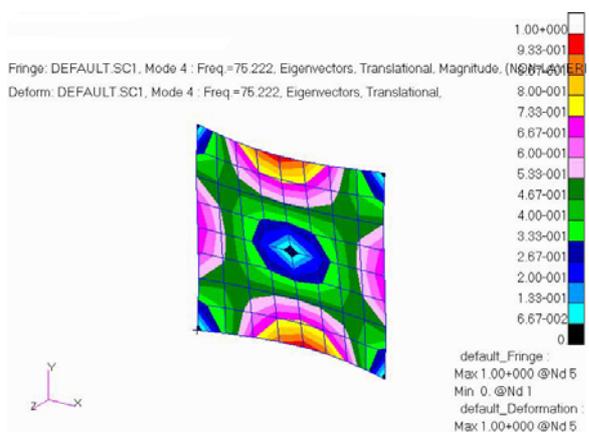


a) Deformação na estrutura.

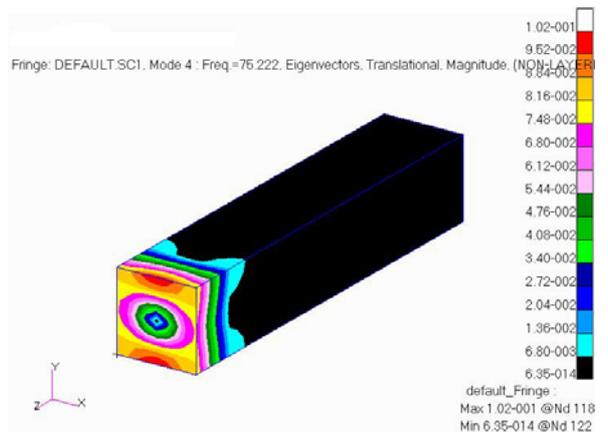


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 67,363 Hz, fluido predominante.

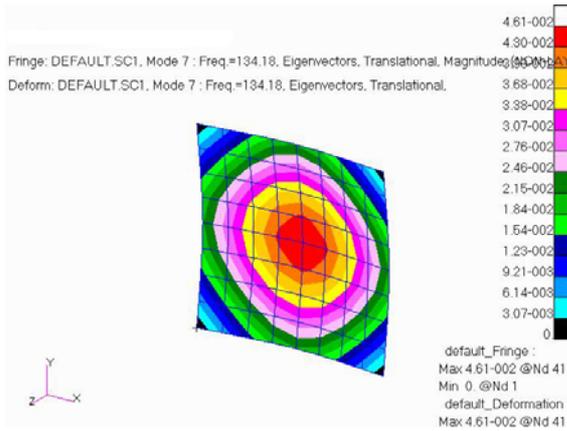


a) Deformação na estrutura

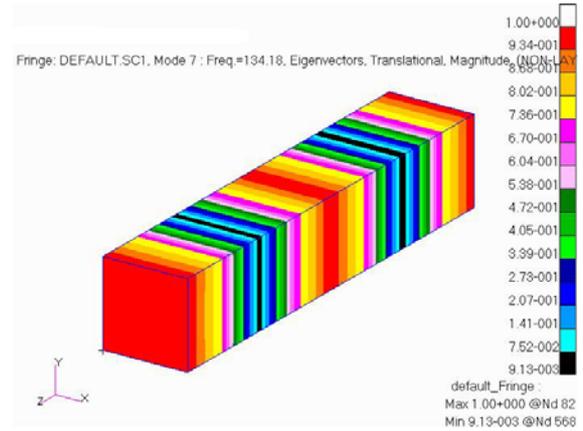


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 75,222 Hz, estrutura predominante.

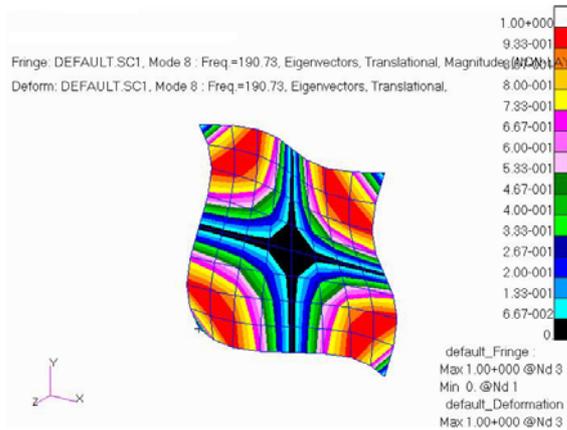


a) Deformação na estrutura

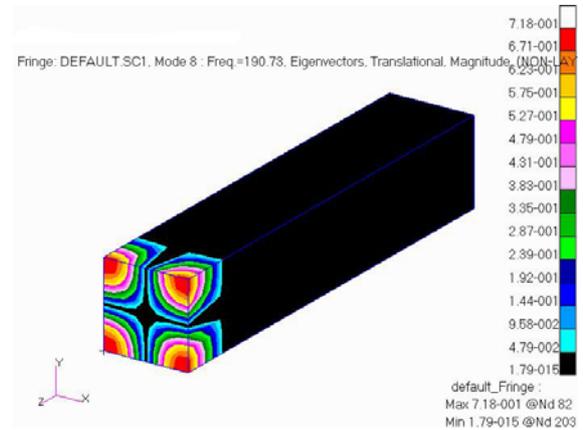


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 7: frequência 134,18 Hz, fluido predominante.

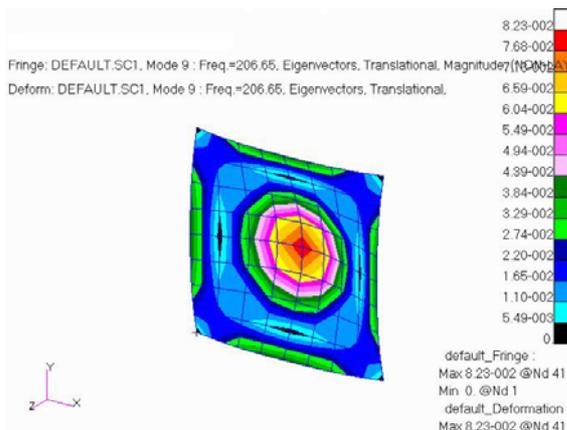


a) Deformação na estrutura

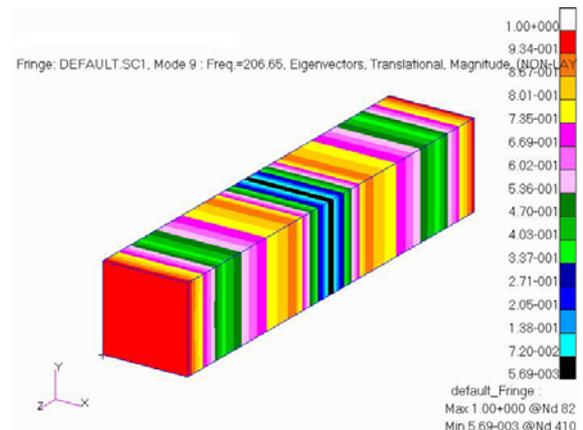


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 8: frequência 190,73 Hz, estrutura predominante.



a) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

Modo 9: frequência 206,65 Hz, fluido predominante.

Figura 5.8 Modos do modelo da cavidade hexaédrica sobre chapa

5.3.4 Minimização da segunda frequência natural

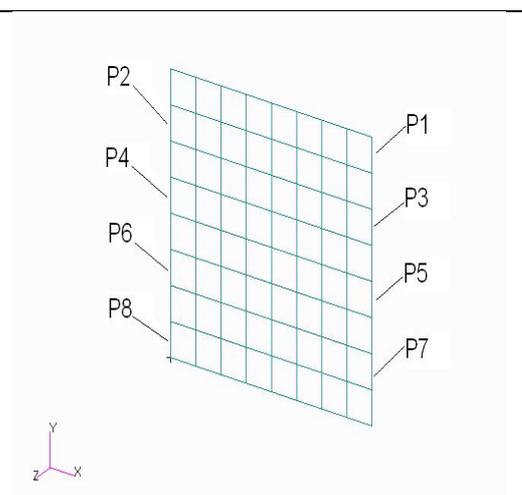
Na Tabela 5.11 se apresenta o resultado da minimização da segunda frequência natural acoplada, frequência do tipo estrutura predominante, considerando como variáveis do sistema as espessuras das oito filas da chapa segundo indicação na Tabela 5.9. As duas restrições dizem respeito aos limites mínimo e máximo das espessuras das filas e o valor limite inferior da segunda frequência natural acoplada.

Tabela 5.11 Otimização das frequências em Hz

Modo	Frequência antes da otimização	Frequência após a otimização
1	0,00	0,00
2	34,22	17,20
3	67,36	27,03
4	75,22	30,36
5	75,22	46,69
6	94,56	68,63
7	134,18	70,47
8	190,73	90,08
9	206,65	100,46
10	214,41	113,90

Tabela 5.12 Otimização de variáveis

Variável	Valor original	Valor otimizado
P1	0,2 pol (5,08 mm)	0,065536 pol (1,66 mm)
P2	0,2 pol (5,08 mm)	0,065536 pol (1,66 mm)
P3	0,2 pol (5,08 mm)	0,065567 pol (1,66 mm)
P4	0,2 pol (5,08 mm)	0,065541 pol (1,66 mm)
P5	0,2 pol (5,08 mm)	0,16319 pol (4,14 mm)
P6	0,2 pol (5,08 mm)	0,065861 pol (1,67 mm)
P7	0,2 pol (5,08 mm)	0,065659 pol (1,67 mm)
P8	0,2 pol (5,08 mm)	0,16279 pol (4,13 mm)



Na Tabela 5.13 se observam os volumes do sistema antes e após a otimização, e na Figura 5.9 apresentam-se as iterações das variáveis de projeto e da função objetivo durante o processo de otimização, observando que foram necessárias cinco iterações para esse fim.

Tabela 5.13 Volumes do sistema

Volume	Original	Otimizado
Fluido	40000 pol ³ (0,655 m ³)	40000 pol ³ (0,655 m ³)
Chapas	80 pol ³ (1,31e-3 m ³)	35,984 pol ³ (5,8967e-4 m ³)
Total	40080 pol ³ (0,656 m ³)	40035,984 pol ³ (0,65607 m ³)

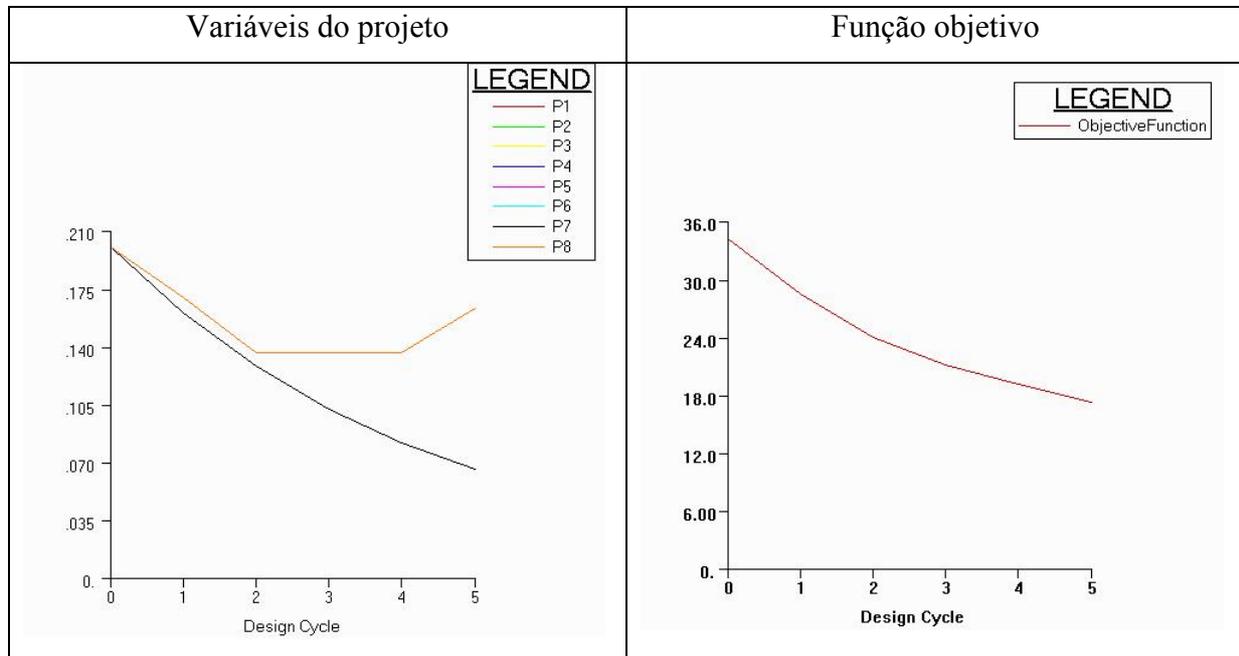
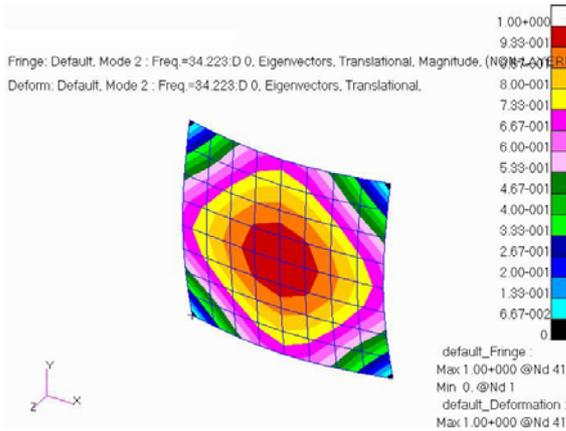
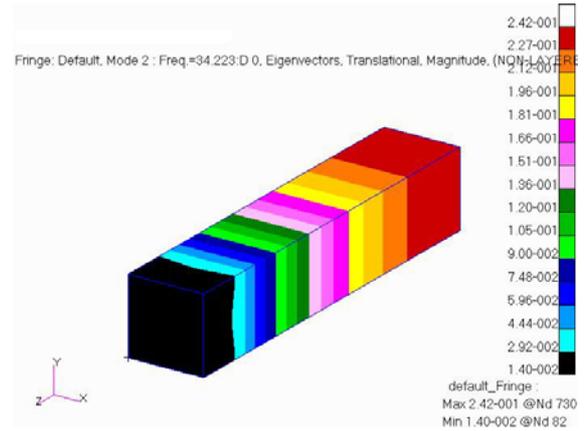


Figura 5.9 Iterações na minimização da segunda frequência

Observa-se na Figura 5.10 e na Figura 5.11, a forma modal e frequências naturais dos modos 2, 3, e 4 do modelo acoplado não otimizado e otimizado respectivamente, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura e vice-versa em ambos os casos, a partir do qual se pode inferir se a estrutura ou o fluido predomina no modo. A partir dessa consideração se observa que o segundo modo acoplado continua tendo a estrutura como predominante, e a frequência diminui de 34,223 Hz para 17,20 Hz, constituindo uma variação de -17,023 Hz (-49,74%). Como não existe controle explícito do cruzamento dos modos, observa-se que o terceiro modo acoplado não otimizado do tipo predominante fluido, torna-se do tipo estrutural após a otimização.

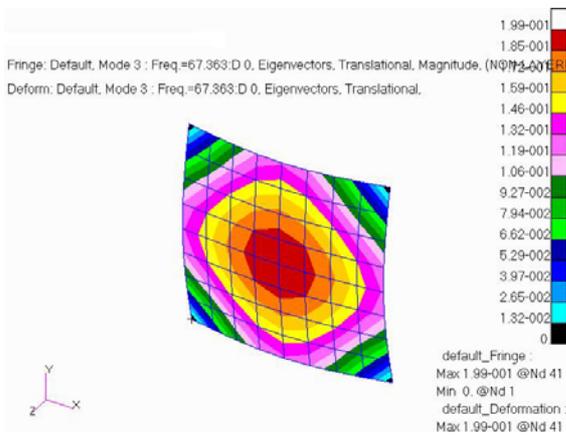


a) Deformação na estrutura

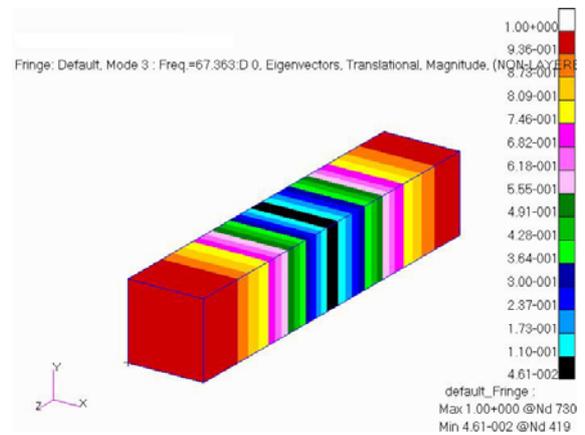


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 34,223 Hz, estrutura predominante.

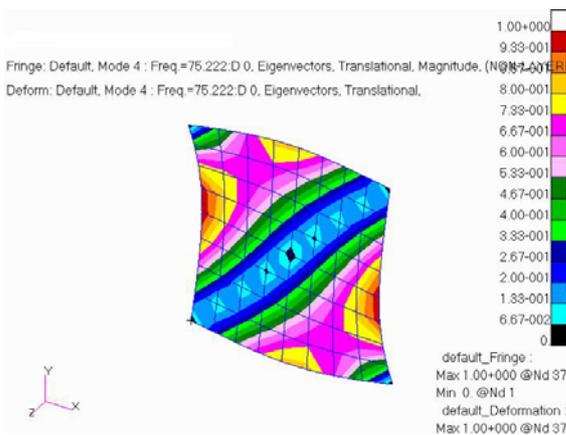


a) Deformação na estrutura

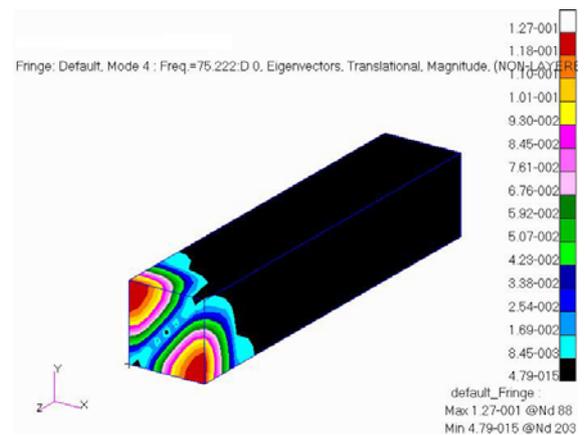


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 67,363 Hz, fluido predominante.



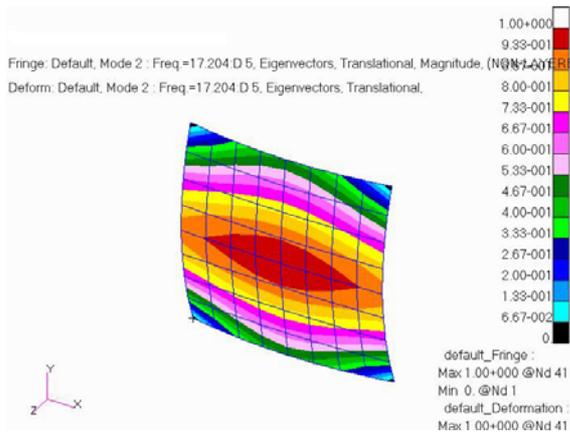
a) Deformação na estrutura



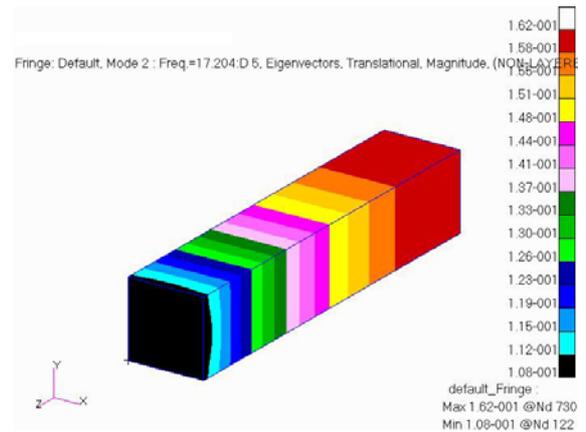
b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 75,222 Hz, estrutura predominante.

Figura 5.10 Modos do modelo antes da otimização

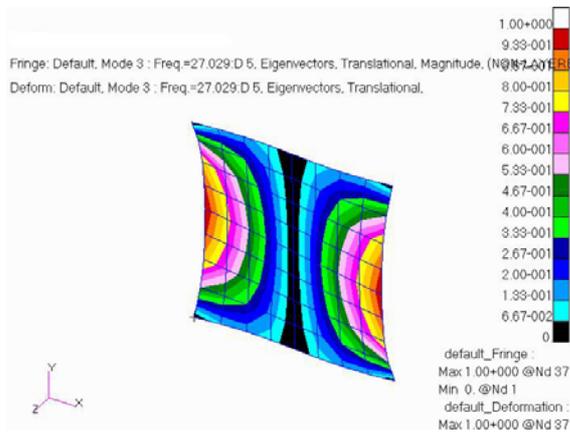


a) Deformação na estrutura

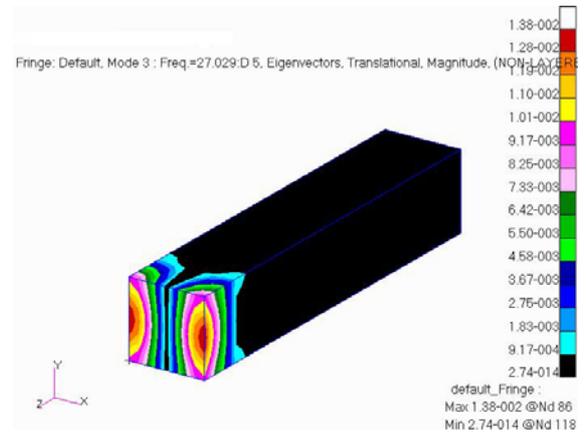


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 17,204 Hz, estrutura predominante.

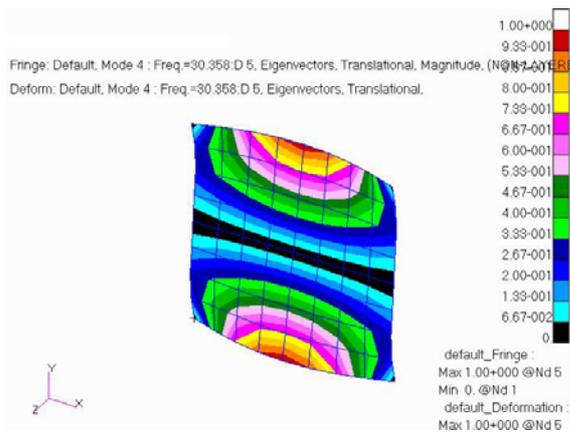


Deformação na estrutura

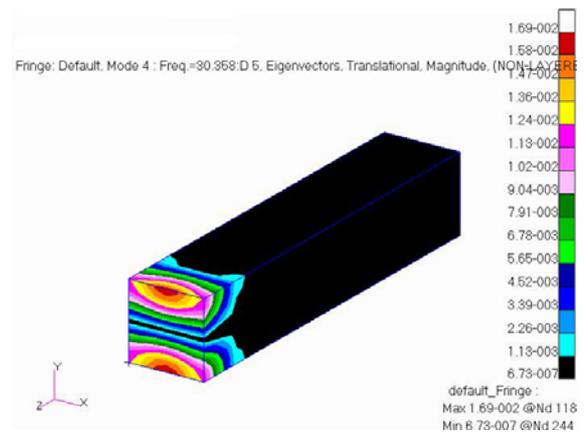


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 27,029 Hz, estrutura predominante.



a) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 30,358 Hz, estrutura predominante.

Figura 5.11 Modos do modelo após a otimização

5.3.5 Maximização da segunda frequência natural

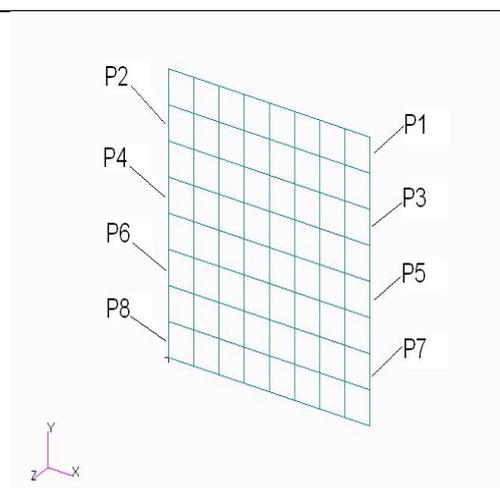
Na Tabela 5.14 se apresenta o resultado da maximização da segunda frequência natural acoplada, frequência do tipo estrutura predominante, considerando como variáveis do sistema as espessuras das oito filas da chapa segundo indicação na Tabela 5.15. As duas restrições dizem respeito aos limites mínimo e máximo das espessuras das filas e o valor limite inferior da segunda frequência natural acoplada.

Tabela 5.14 Otimização das frequências em Hz

Modo	Frequência antes da otimização	Frequência após a otimização
1	0,00	0,00
2	34,22	64,60
3	67,36	85,92
4	75,22	133,89
5	75,22	186,20
6	94,56	186,21
7	134,18	206,65
8	190,73	235,40
9	206,65	286,91
10	214,41	327,16

Tabela 5.15 Otimização de variáveis

Variável	Valor original	Valor otimizado
P1	0,2 pol (5,08 mm)	0,49766 pol (12,64 mm)
P2	0,2 pol (5,08 mm)	0,49739 pol (12,63 mm)
P3	0,2 pol (5,08 mm)	0,49766 pol (12,64 mm)
P4	0,2 pol (5,08 mm)	0,49766 pol (12,64 mm)
P5	0,2 pol (5,08 mm)	0,49766 pol (12,64 mm)
P6	0,2 pol (5,08 mm)	0,49739 pol (12,63 mm)
P7	0,2 pol (5,08 mm)	0,49766 pol (12,64 mm)
P8	0,2 pol (5,08 mm)	0,49766 pol (12,64 mm)



Na

Tabela 5.16 se observam os volumes do sistema antes e após a otimização, e na Figura 5.12 apresentam-se as iterações das variáveis de projeto e da função objetivo durante o processo de otimização, observando que foram necessárias cinco iterações para esse fim.

Tabela 5.16 Volumes do sistema

Volume	Original	Otimizado
Fluido	40000 pol ³ (0,655 m ³)	40000 pol ³ (0,655 m ³)
Chapas	80 pol ³ (1,31e-3 m ³)	199,044 pol ³ (3,26e-3 m ³)
Total	40080 pol ³ (0,656 m ³)	40199,044 pol ³ (0,65826 m ³)

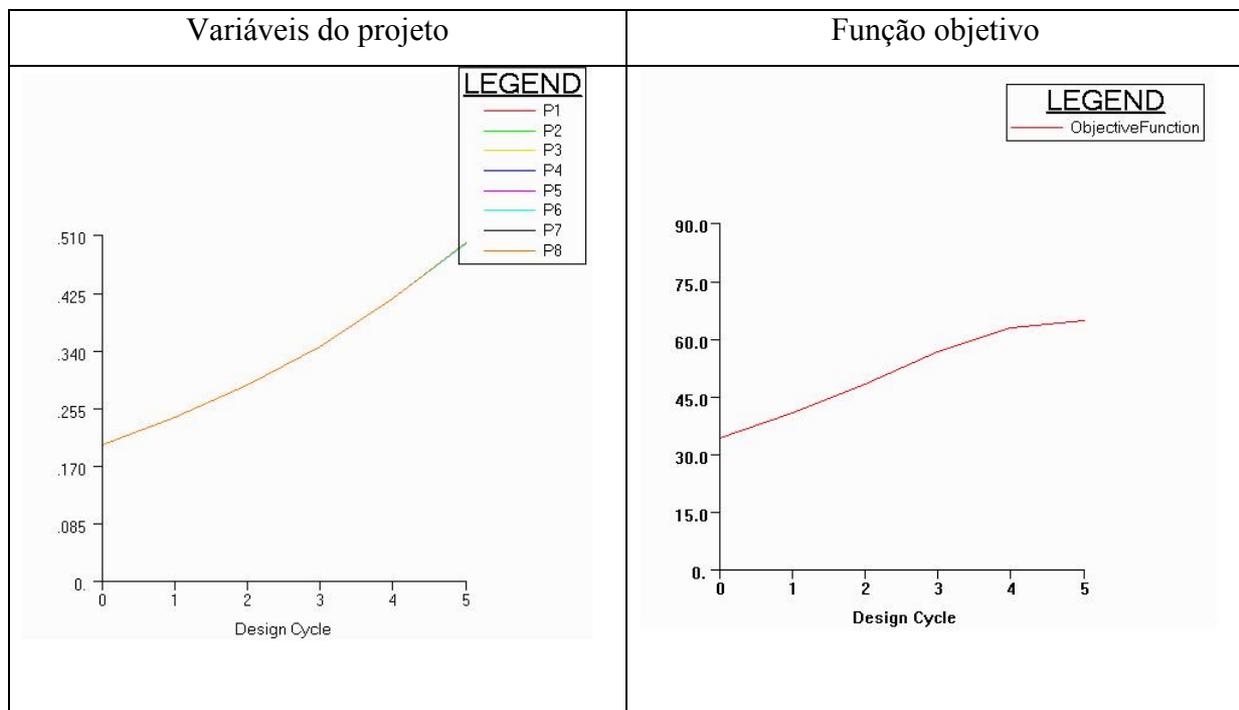
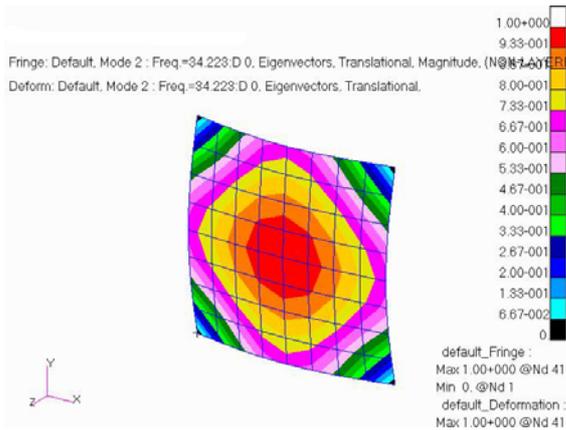
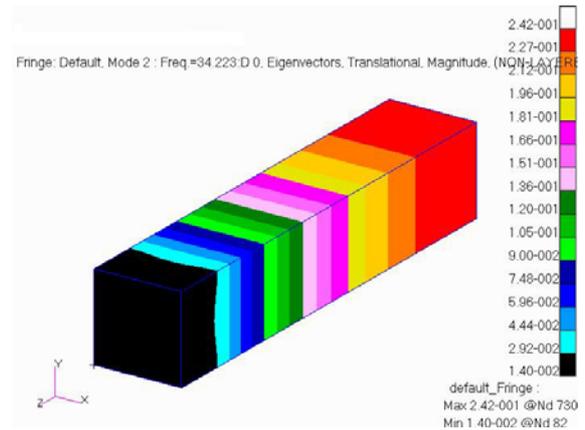


Figura 5.12 Iterações na maximização da segunda freqüência

Observa-se na Figura 5.13 e Figura 5.14, a forma modal e freqüências naturais dos modos 2 e 3 do modelo acoplado não otimizado e otimizado respectivamente, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura e vice-versa em ambos os casos, a partir do qual se pode inferir se a estrutura ou o fluido predomina no modo. A partir dessa consideração se observa que o segundo modo acoplado otimizado ao invés da estrutura passa a ter o fluido como predominante, e a freqüência acoplada aumenta de 34,223 Hz para 64,602 Hz, constituindo uma variação de 30,379 Hz (88,77%). Caso se tenha interesse em manter a informação relativa ao modo do tipo estrutural, este teria aumentado de 34,223 Hz para 85,922 Hz, constituindo uma variação de 151 % aproximadamente.

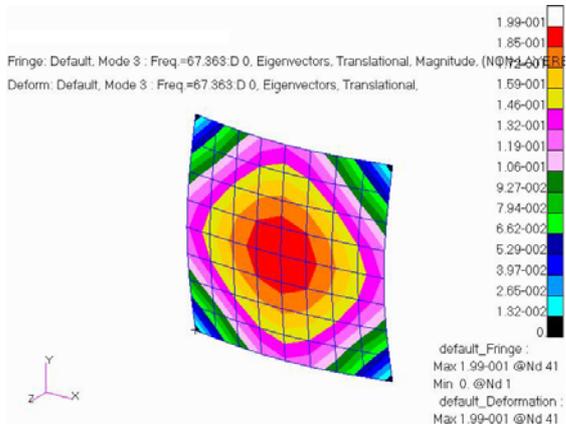


a) Deformação na estrutura

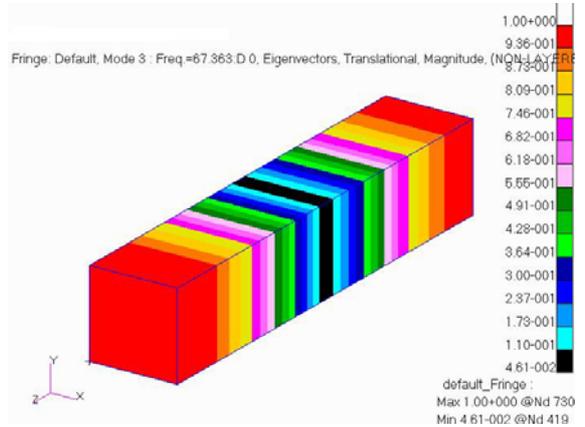


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 34,223 Hz, estrutura predominante.



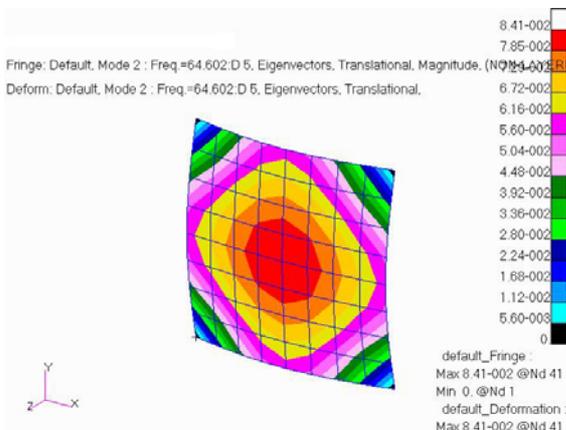
a) Deformação na estrutura



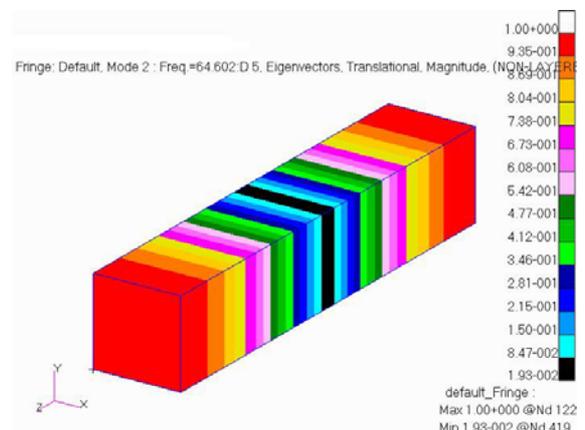
b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 67,363 Hz, fluido predominante.

Figura 5.13 Modos do modelo antes da otimização

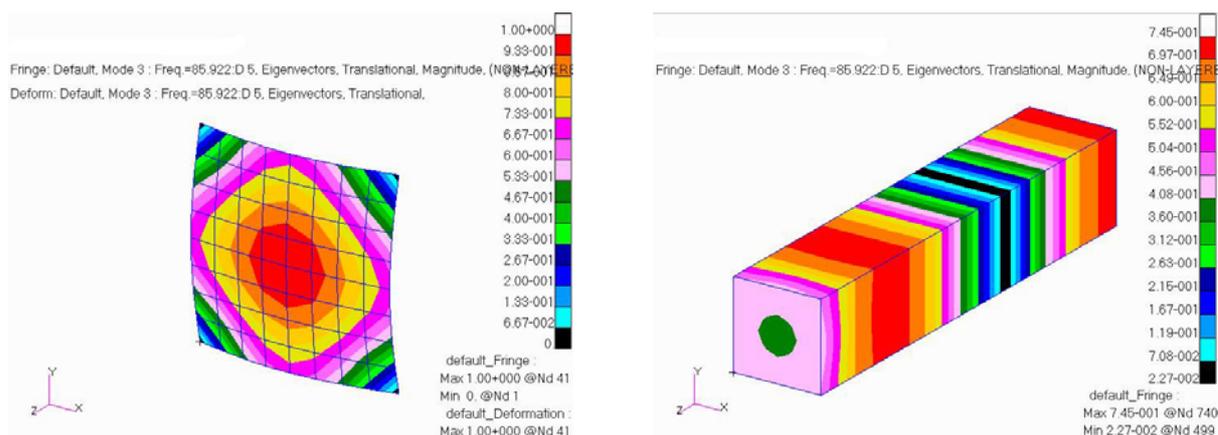


a) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 64,602 Hz, fluido predominante.



a) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 85,922 Hz, estrutura predominante.

Figura 5.14 Modos do modelo após a otimização

5.3.6 Minimização da massa

Na Tabela 5.17 apresenta-se os valores das frequências naturais antes e após a minimização da massa, considerando como variáveis do sistema as espessuras das oito filas da chapa segundo indicação na Tabela 5.18. As duas restrições dizem respeito aos limites mínimo 0,01 pol (0,0254 mm) e máximo 1 pol (25,4 mm) das espessuras das filas, e o valor limite inferior de 25 Hz para segunda frequência natural acoplada. Como consequência se observa que a segunda frequência natural acoplada diminui 9,21 Hz (26,9%).

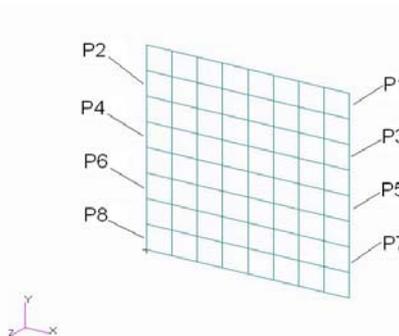
Tabela 5.17 Frequências naturais decorrentes da otimização da massa em Hz

Modo	Frequência antes da otimização	Frequência após a otimização
1	0,00	0,00
2	34,22	25,01
3	67,36	52,67
4	75,22	55,63
5	75,22	60,75
6	94,56	67,91
7	134,18	134,22
8	190,73	134,43
9	206,65	145,76
10	214,41	150,27

Na Tabela 5.15 se observa que as espessuras diminuíram em média 0,066 pol (1,676 mm), equivalente a 33%. A diminuição máxima é 0,091 pol (2,314 mm) ou 45,5%.

Tabela 5.18 Variáveis decorrentes da otimização da massa em m

Variável	Valor original	Valor otimizado
P1	0,2 pol (5,08 mm)	0,17718 pol (4,500mm)
P2	0,2 pol (5,08 mm)	0,10888 pol (2,765 mm)
P3	0,2 pol (5,08 mm)	0,12651 pol (3,213 mm)
P4	0,2 pol (5,08 mm)	0,12651 pol (3,213 mm)
P5	0,2 pol (5,08 mm)	0,12352 pol (3,137 mm)
P6	0,2 pol (5,08 mm)	0,10888 pol (2,765 mm)
P7	0,2 pol (5,08 mm)	0,17718 pol (4,500 mm)
P8	0,2 pol (5,08 mm)	0,12352 pol (3,137 mm)



A Tabela 5.19 apresenta os resultados das massas antes e após a otimização, se observando que a massa otimizada é referida às chapas. A massa estrutural diminui de 3,537 kg para 2,3706 kg, caracterizando uma redução de 1,1664 kg (33%). Já na Figura 5.15 se apresenta as iterações das variáveis de projeto e da função objetivo, se destacando que foram necessárias cinco iterações para esse fim.

Tabela 5.19 Massa do sistema antes e após a otimização

Meio	Volume original pol ³ , (m ³)	Volume otimizado pol ³ , (m ³)	Densidade lb s ² /pol ⁴ , (kg/m ³)	Massa original lb s ² /pol, (kg)	Massa otimizada lb s ² /pol, (kg)
Fluido	40000	40000	1,27 x 10 ⁻⁷	0,057	0,057
	(0,655)	(0,655)	(1,29)	(0,844)	(0,844)
Chapa	80	53,609	2,65 x 10 ⁻⁴	0,021	0,014
	(1,31 x 10 ⁻³)	(8,78 x 10 ⁻⁴)	(2700)	(3,537)	(2,370)
Total	40080	40053,609	---	0,078	0,071
	(0,657)	(0,656)		(4,381)	(3,215)

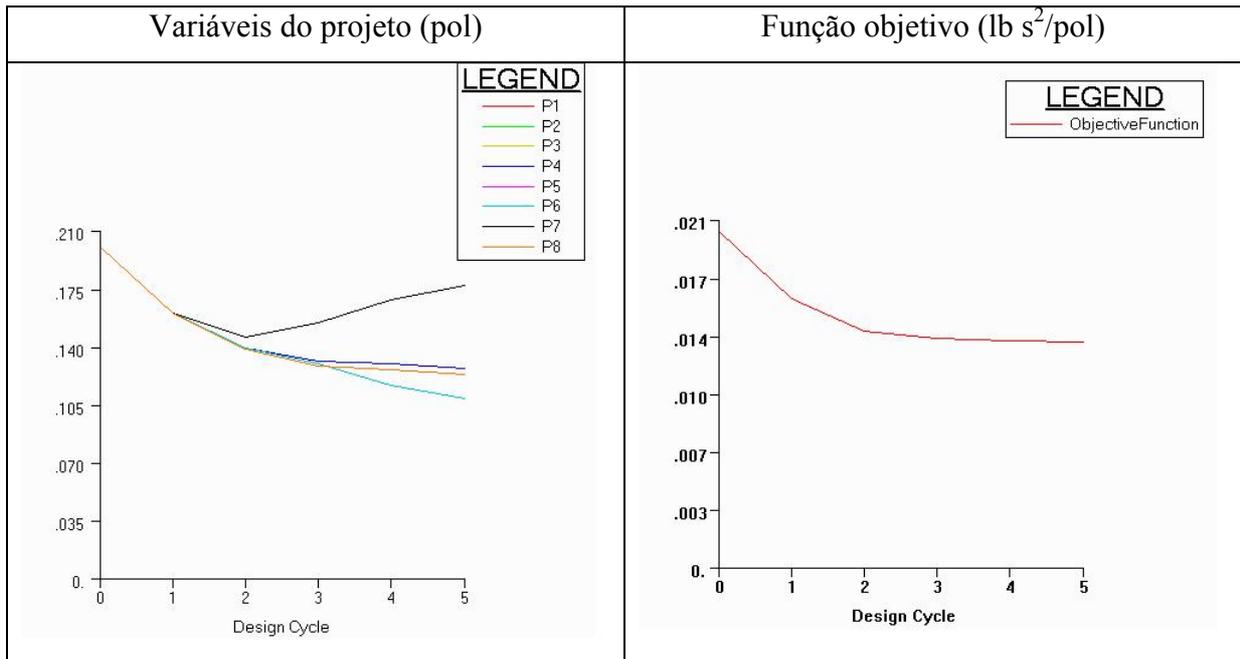
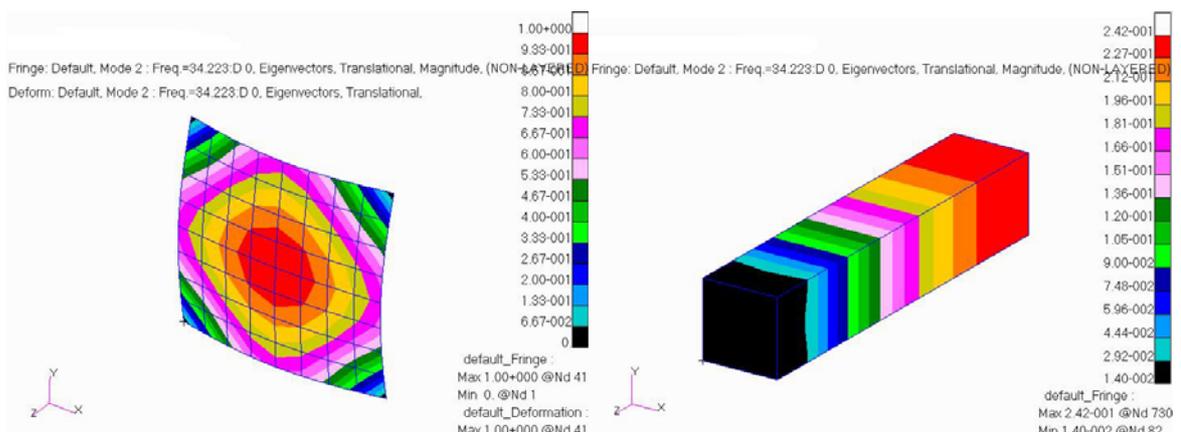


Figura 5.15 Iterações na minimização da massa

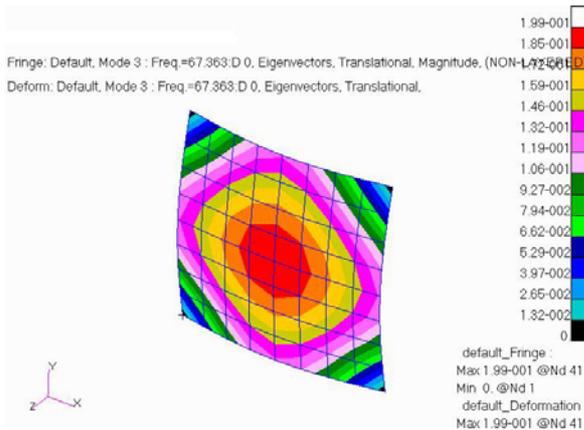
Observa-se na Figura 5.16 e Figura 5.17, a forma modal e as frequências naturais dos modos 2, 3 e 4 do modelo acoplado não otimizado e otimizado respectivamente, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura e vice-versa em ambos os casos, a partir do qual se pode inferir se a estrutura ou o fluido predomina no modo. A partir dessa consideração se observa que o terceiro modo acoplado otimizado ao invés do fluido passa a ter a estrutura como predominante, e a frequência acoplada diminui de 67,36 Hz para 52,67 Hz, constituindo uma variação de 14,69 Hz (21,81%).



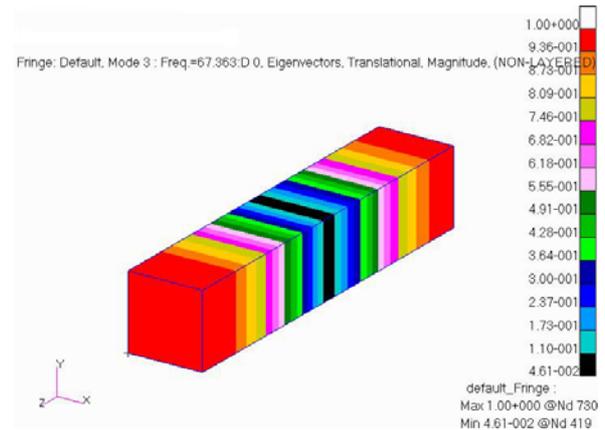
a) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 34,22 Hz, estrutura predominante.

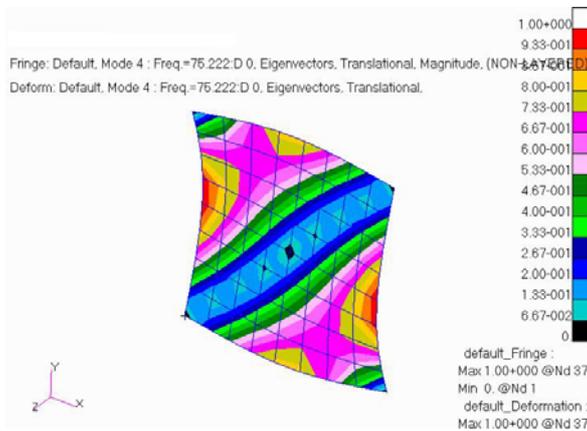


a) Deformação na estrutura

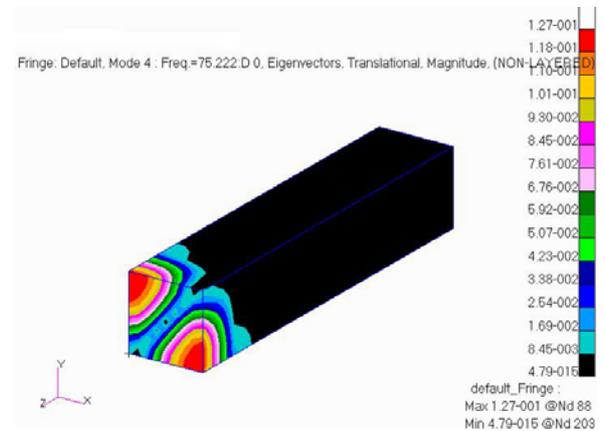


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 67,36 Hz, fluido predominante.



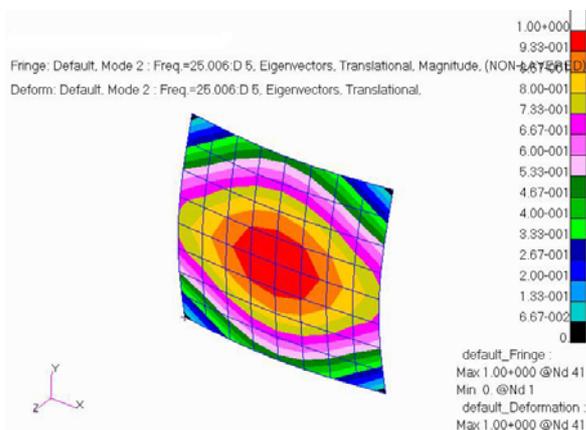
a) Deformação na estrutura



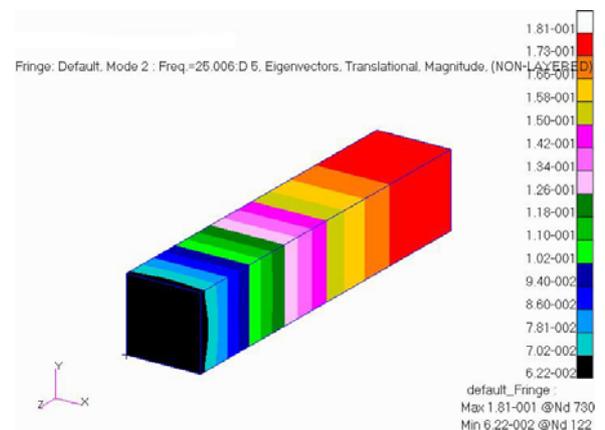
b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 75,22 Hz, estrutura predominante.

Figura 5.16 Modos do modelo antes da otimização

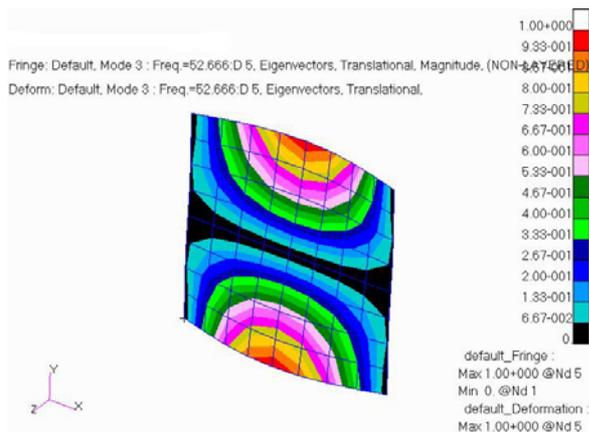


a) Deformação na estrutura

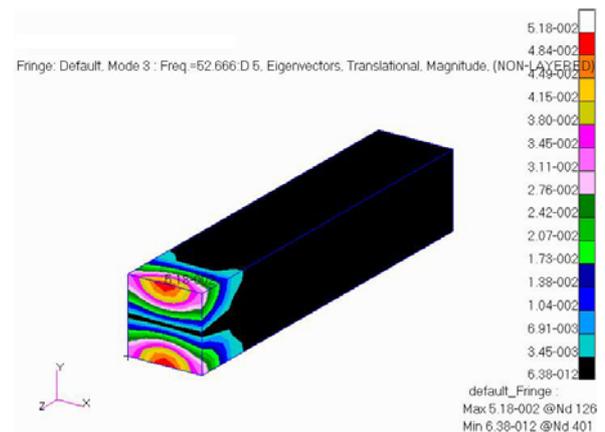


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 25,01 Hz, estrutura predominante.

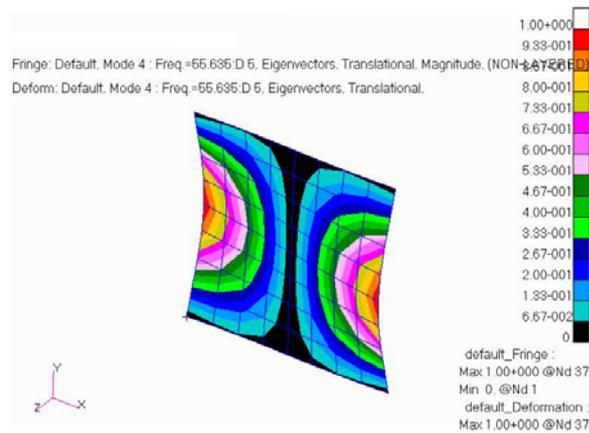


a) Deformação na estrutura

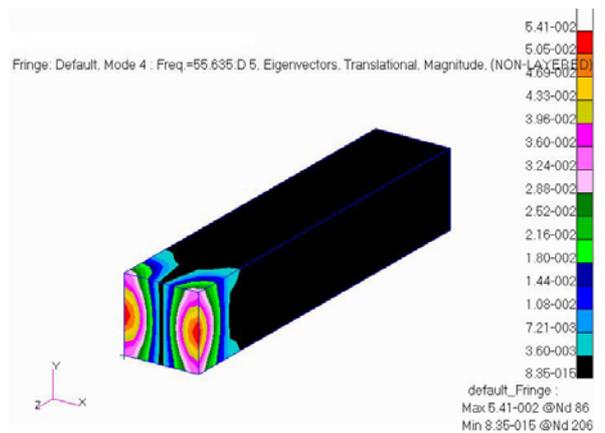


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 52,67 Hz, estrutura predominante.



a) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 55,63 Hz, estrutura predominante.

Figura 5.17 Modos do modelo após a otimização

5.4 Sistema acústico-estrutural III – Caixa

Objetivo do estudo deste sistema é comparar os resultados da simulação no MSC.Nastran com outros programas, neste caso o Sysnoise. O sistema escolhido é uma caixa de madeira compensada na forma de paralelepípedo, sistema apresentado e implementado experimentalmente por De Mello (2003), com a finalidade de determinar a influencia da estrutura nas freqüências acopladas.

Nesse trabalho as dimensões internas da caixa, correspondentes à cavidade acústica da mesma, foram medidas encontrando-se os valores de 1,093, 0,555 e 0,761 m para o comprimento, largura e altura, respectivamente.

5.4.1 Caixa hexaédrica

As paredes da caixa foram feitas com duas chapas sobrepostas e não coladas de madeira compensada de 0,024 m de espessura cada, significando uma espessura total de 0,048 m das chapas na modelagem. O elemento utilizado pelo Sysnoise é o *Casca63* com quatro nós enquanto o elemento utilizado pelo MSC.Nastran é o *CQUAD4*.

Experimentalmente, a caixa é apoiada sobre cavaletes de madeira; mas numericamente as condições de contorno numéricas são implementadas na condição de apoio nos nós próximos da borda da chapa inferior da caixa, Figura 5.18.

Essa hipótese numérica pode ser contestada, mas foi seguida com a finalidade de comparar aos resultados de De Mello (2003). Ainda nesse trabalho são especificadas as propriedades da madeira como: módulo de elasticidade $E=14$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu=0,235$ e densidade igual a $\rho=680$ kg/m³.

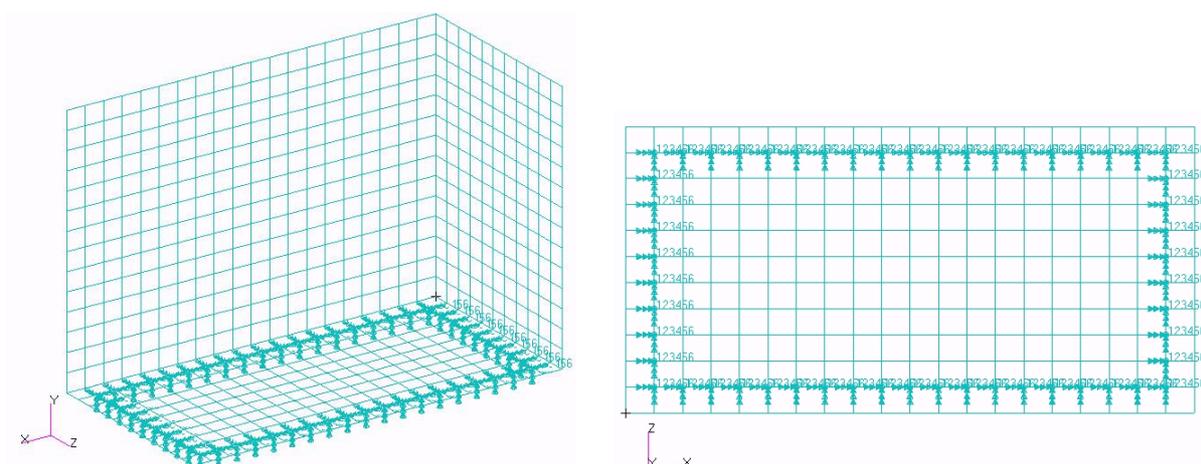


Figura 5.18 Caixa hexaédrica com detalhe das condições de contorno

Observa-se na Tabela 5.20 que a média da variação dos resultados do MSC.Nastran, em relação ao Sysnoise para as duas primeiras frequências é de -1,63%, o que manifesta conformidade da modelagem realizada no MSC.Nastran.

Tabela 5.20 Frequências naturais da caixa em Hz

Modo	Forma modal	MEF Sysnoise	MEF	Variação (%)
		(De Mello, 2003)	MSC.Nastran	MSC.Nastran / Sysnoise
1	Flexão transversal	241,27	235,38	- 2,44
2	Flexão local das chapas	349,22	346,37	- 0,82
3			405,75	
4			451,74	
5			529,43	
6			556,77	
7			570,47	
8			669,51	
9			726,73	
10			749,07	

Os resultados obtidos das formas modais, conforme se visualiza na Figura 5.19, indicam que o primeiro modo é de flexão transversal da caixa, o terceiro de flexão longitudinal, enquanto o segundo e o quarto modo mostram flexão local das chapas.

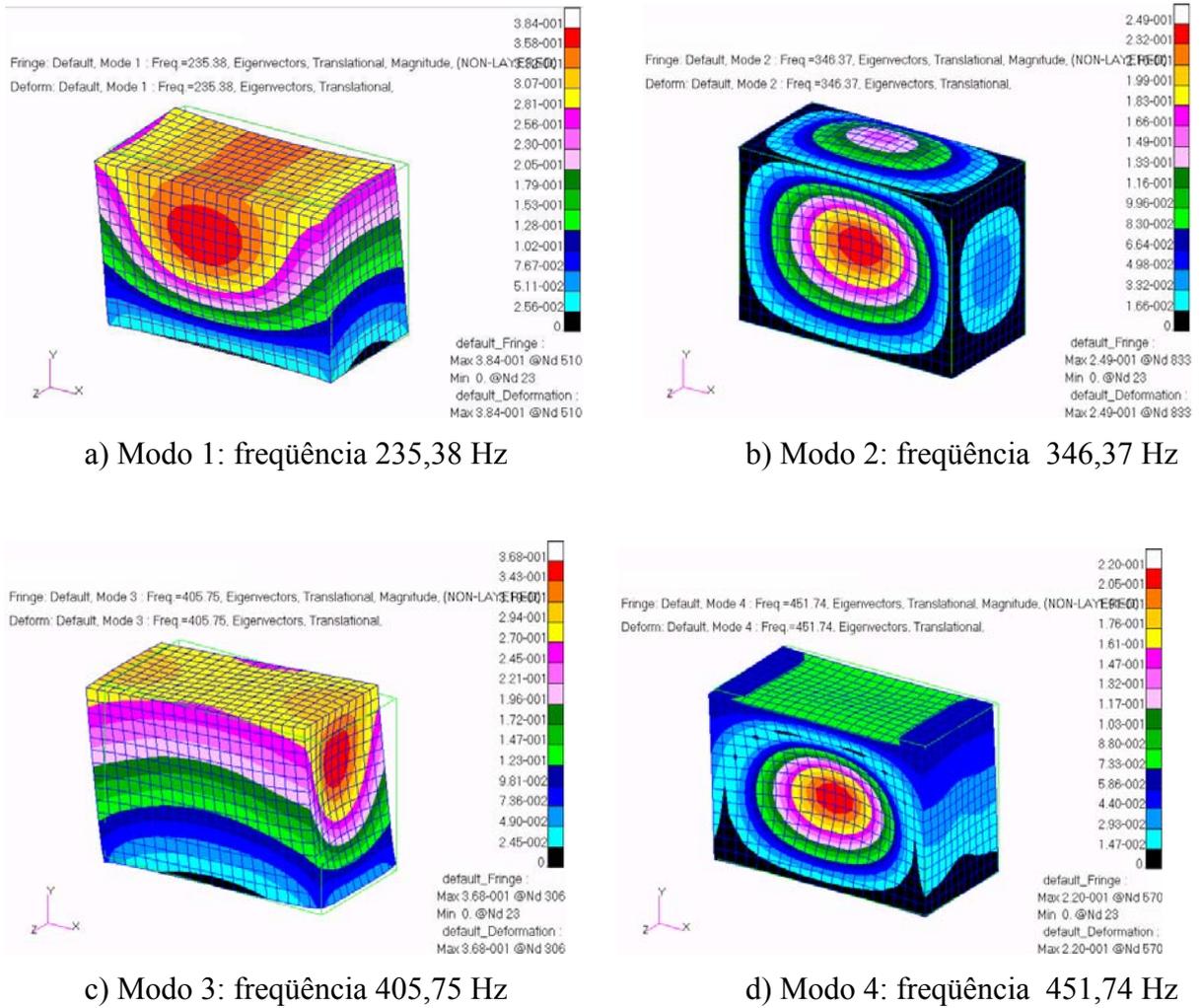


Figura 5.19. Modos de deformação da estrutura da caixa

5.4.2 Cavidade acústica

Considera-se como fluido interno da cavidade, ar a 27,5°C (temperatura medida experimentalmente) com velocidade aproximada do som $c_s = 346,2$ m/s. A densidade do ar utilizada por De Mello (2003) na avaliação das frequências naturais da cavidade é $\rho_{(15^\circ\text{C})} = 1,225$ kg/m³ com velocidade do som $c_{s(15^\circ\text{C})} = 340,4$ m/s, valor padrão do programa Sysnoise. Como a densidade do ar a 27,5°C é $\rho_{(27,5^\circ\text{C})} = 1,1745$ kg/m³ e a velocidade do som é $c_{s(27,5^\circ\text{C})} = 346,2$ m/s, as frequências encontradas por De Mello (2003) são corrigidas através da Equação (5.5), originada pela relação das Equações (3.158) e (3.166).

$$f = \sqrt{\frac{\mathbf{k}_{ff}}{\mathbf{m}_{ff}}} = \sqrt{\frac{\frac{a b c [\dots]}{\rho_f}}{\frac{1}{\rho_f} a b c [\dots]}} = c_s [\dots] \quad (5.3)$$

$$\frac{f_{27,5^\circ\text{C}}}{f_{15^\circ\text{C}}} = \frac{c_{s(27,5^\circ\text{C})} [\dots]}{c_{s(15^\circ\text{C})} [\dots]} \quad (5.4)$$

$$f_{27,5^\circ\text{C}} = f_{15^\circ\text{C}} \frac{c_{s(27,5^\circ\text{C})}}{c_{s(15^\circ\text{C})}} \quad (5.5)$$

$$f_{27,5^\circ\text{C}} = f_{15^\circ\text{C}} \frac{346,2 \text{ m/s}}{340,4 \text{ m/s}} = 1,017 f_{15^\circ\text{C}} \text{ [Hz]}$$

As notações longitudinal, transversal e vertical correspondem às dimensões comprimento, largura e altura, orientadas nos eixos x,y,z respectivamente.

As frequências naturais de uma cavidade acústica retangular são obtidas através da Equação (5.1), Blevins (1995); onde as paredes da cavidade são consideradas como rígidas com impedância infinita.

$$f = \frac{c_s}{2} \sqrt{\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{k}{L_z}\right)^2} \quad i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

onde,

f = frequência natural em Hz;

c_s = velocidade do som no meio, neste caso ar, igual a 346,2 m/s;

L_x, L_y, L_z = comprimento, largura e altura da cavidade, iguais a 1,093, 0,555 e 0,761 m.

As frequências naturais previstas da cavidade são comparadas, na Tabela 5.21, com soluções analíticas segundo Equação (5.6) e por simulação, onde as paredes da cavidade são consideradas como rígidas com impedância infinita.

A média da variação dos resultados do MSC.Nastran em relação aos valores analíticos é 0,46%, enquanto a variação máxima é 1,36%, significando a conformidade dos resultados da simulação.

Tabela 5.21 Frequências previstas da cavidade acústica em Hz

Modo	Notação analítica	Descrição do modo	Analítica (Blevins, 1995)	MEF Sysnoise (De Mello, 2003) *	MEF MSC.Nastran	Variação (%) MSC.Nastran / Analítica
1	(0,0,0)	Corpo rígido	0,00	0	0,00	0,00
2	(1,0,0)	1 ^{ro} longitudinal	158,74	161,5967	158,9	0,10
3	(0,0,1)	1 ^{ro} vertical	227,99	232,3576	228,47	0,21
4	(1,0,1)	1 ^{ro} longitudinal e 1 ^{ro} vertical	277,81	283,0233	278,29	0,17
5	(0,1,0)	1 ^{ro} transversal	312,61	319,0112	313,68	0,34
6	(2,0,0)	2 ^{do} longitudinal	317,48	324,1992	318,78	0,41
7	(1,1,0)	1 ^{ro} longitudinal e 1 ^{ro} transversal	350,61	357,608	351,63	0,29
8	(0,1,1)	1 ^{ro} transversal e 1 ^{ro} vertical	386,92	394,6613	388,06	-0,72
9	(2,0,1)	2 ^{do} longitudinal e 1 ^{ro} vertical	390,86	398,8536	392,2	1,36
10			418,22		419,33	0,27
11			445,55		447,23	0,38
12			455,98		459,81	0,84
13			476,21		480,63	0,93
14			482,82		486,5	0,76
15			500,50		502,21	0,34
16			527,97		532,17	0,80
17			552,85		556,62	0,68
18			555,61		559,51	0,70
19			569,65		573,93	0,75
20			575,19		578,85	0,64

* Os valores não corrigidos pelo fator 1,017 são idênticos aos obtidos pelo MSC.Nastran.

O elemento utilizado pelo Sysnoise é o “Sólido 45” com oito nós e graus de liberdade de deslocamento nos três eixos perpendiculares, mas por causa do material ser do tipo fluido tem-se um grau de liberdade por nó, a pressão.

O tamanho médio dos elementos atende a exigência do Sysnoise, de no mínimo, 12 elementos por comprimento de onda, como necessária para resultados confiáveis, através da Equação (5.7), resultando num comprimento máximo L_e igual a 0,072 m.

$$L_e = \frac{c_s}{12 f_m} \quad (5.7)$$

onde,

L_e = comprimento máximo permitido para a aresta dos elementos;

c_s = velocidade de propagação do som no meio, neste caso igual a 346,2 m/s no ar;

f_m = frequência máxima de análise em Hz, neste caso estipulada igual a 400 Hz.

Com a finalidade de obter um número inteiro de elementos nas três dimensões da caixa, foram assumidas novas dimensões para o tamanho médio dos elementos, resultando em 0,05465 m na direção do comprimento, 0,05045 m na largura e 0,05436 m na altura; que equivalem a 20, 11 e 14 elementos nas direções do comprimento, largura e altura da caixa. A malha acústica consiste em 3080 elementos e 3780 nós, como se observa na Figura 5.20.

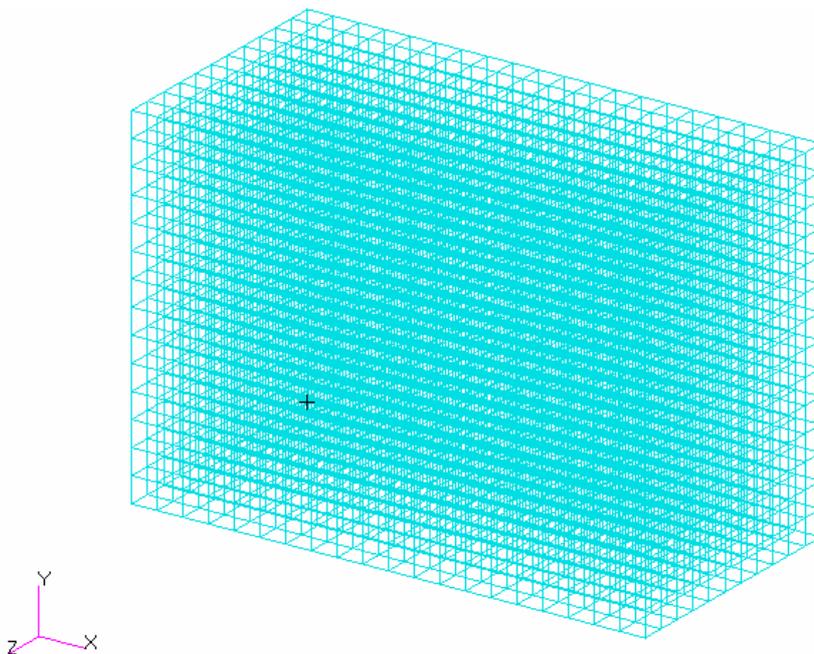


Figura 5.20. Malha acústica em elementos finitos da caixa

5.4.3 Caixa hexaédrica acoplada com ar interno

As frequências acopladas obtidas são entendidas como predominantemente estruturais ou acústicas em função da sua proximidade ao seu valor de origem, estrutura ou acústica desacoplada, quanto a sua forma modal. Os valores experimentais foram obtidos considerando o ar a 27,5°C, ao qual corresponde uma velocidade aproximada do som $c_s=346,2$ m/s.

Observa-se na Tabela 5.22, a pouca variação percentual das frequências naturais acopladas em relação às de origem, em média -1,33 % para os modos predominantemente estruturais e -0,39 % para os modos predominantemente fluidos, para as frequências consideradas, o que significa um acoplamento fraco no sistema.

Tabela 5.22 Frequências previstas da caixa hexaédrica acoplada com ar em Hz

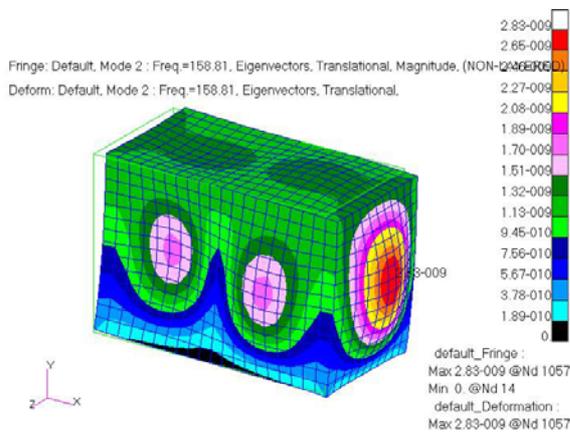
Forma modal acústica*	Analítica (Blevins, 1995)	Estrutural MEF MSC.Nastran	Modo origem ^{&}	Modo acoplado	Acoplado experimental (De Mello, 2003)	Acoplado MEF MSC. Nastran	Varição (%) MSC.Nastran / Experimental
CR	0,00		F1	1	---	0,00	----
L1	158,74		F2	2	160,0	158,80	- 0,75
V1	227,99		F3	3	226,0	228,32	1,03
L1 e V1		235,38	S1	4	237,5	234,34	- 1,33
T1	277,81		F4	5	279,0	278,22	- 0,28
L1	312,61		F5	6	316,5	314,57	- 0,61
L1 e T1	317,48		F6	7	320,0	318,11	- 0,59
T1 e V1		346,37	S2	8	Não observado	346,08	
L2 e V1	350,61		F7	9	354,0	351,22	- 0,78
	386,92		F8	10	391,5	387,91	- 0,92
	390,96		F9	11	393,0	392,04	- 0,24
		405,75	S3	12		405,28	
	418,22		F10	13		419,18	
	445,55		F11	14		442,89	
		451,74	S4	15		455,73	
	455,98		F12	16		459,90	
	476,21		F13	17		480,56	
	482,82		F14	18		486,32	

500,50		F15	19	502,21
527,97		F16	20	528,95

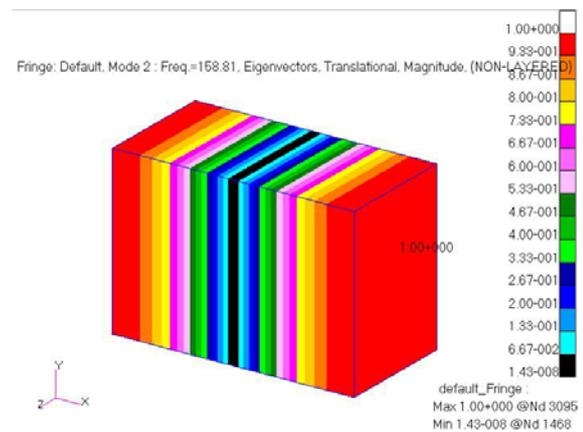
* CR: corpo rígido, L: longitudinal, T: transversal, V: vertical

& F: fluido, S: estrutura, o número indica o modo de origem

Observa-se na Figura 5.21 a forma modal e frequências naturais de alguns modos do modelo acoplado, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura e vice-versa, a partir do qual se pode inferir se a estrutura ou o fluido predomina no modo.

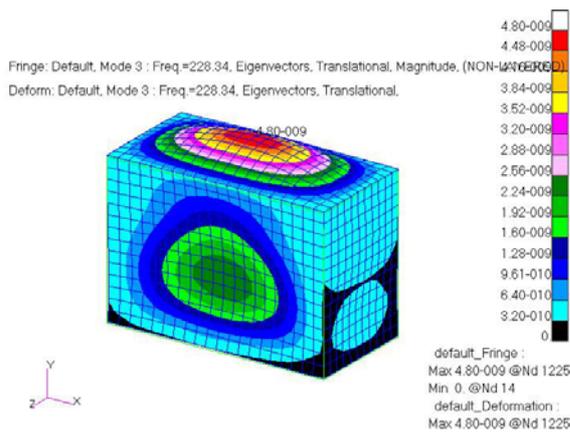


a) Deformação na estrutura

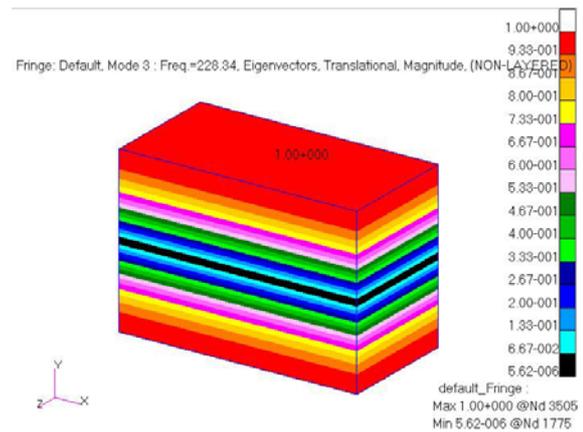


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 2: frequência 158,80 Hz, fluido predominante.

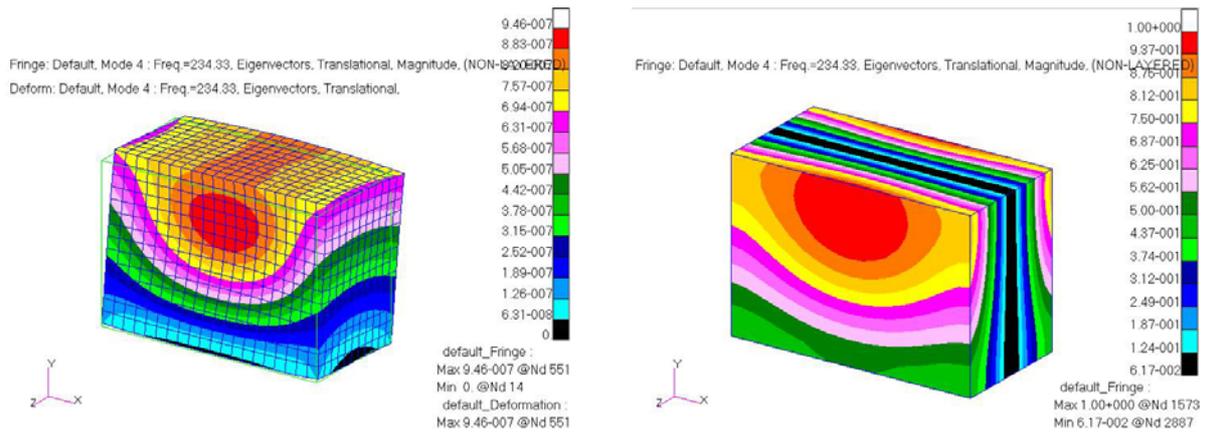


a) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

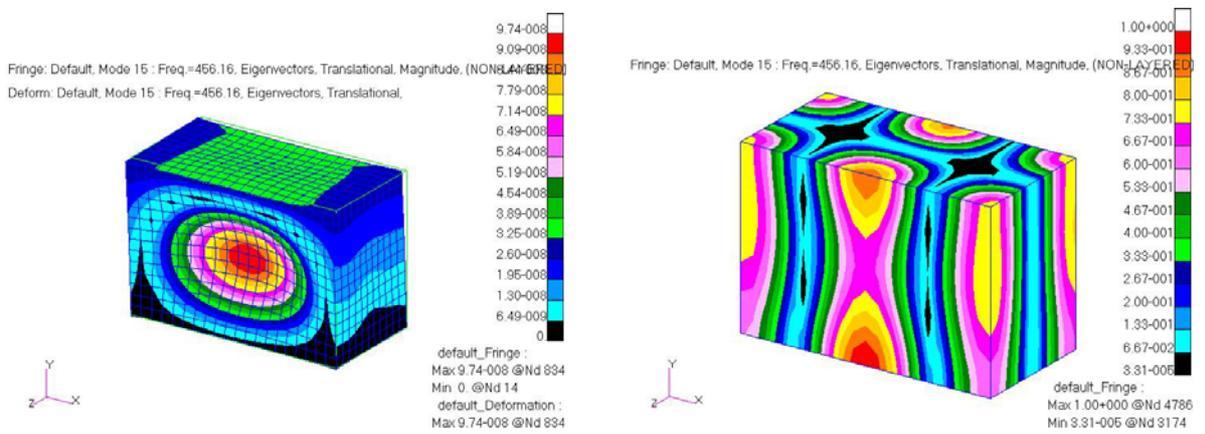
Modo 3: frequência 228,32 Hz, fluido predominante.



a) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 234,34 Hz, estrutura predominante.



a) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 5: frequência 455,73 Hz, estrutura predominante.

Figura 5.21 Modos do modelo da caixa acoplada

5.4.4 Minimização da primeira frequência natural acoplada estrutural

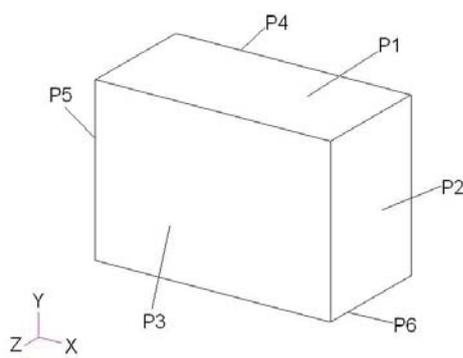
Na Tabela 5.23 se apresenta o resultado da minimização da primeira frequência natural acoplada estrutural, entenda-se quarto modo acoplado, considerando como variáveis do sistema as espessuras das chapas das faces segundo indicação na Tabela 5.24. As duas restrições dizem respeito aos limites mínimo e máximo das espessuras das chapas e o valor limite inferior da quarta frequência natural acoplada.

Tabela 5.23 Otimização das frequências em Hz

Modo	Frequência antes da otimização	Frequência após a otimização
1	0,00	0,00
2	158,80	158,70
3	228,32	194,24
4	234,34	228,27
5	278,22	269,33
6	314,57	278,21
7	318,11	314,42
8	346,08	319,84
9	351,22	333,95
10	387,91	349,64

Tabela 5.24 Otimização de variáveis em m

Variável	Valor original	Valor otimizado
P1	0,048	0,0696
P2	0,048	0,037637
P3	0,048	0,028
P4	0,048	0,048
P5	0,048	0,037171
P6	0,048	0,036409



Na Tabela 5.25 se observam os volumes do sistema antes e após a otimização, e na Figura 5.22 se apresentam as iterações das variáveis de projeto e da função objetivo durante o processo de otimização, observando que foram necessárias só duas iterações para esse fim.

Tabela 5.25 Volumes do sistema em m³

Volume	Original	Otimizado
Fluido	0,4616	0,4616
Chapas	0,1786	0,1591
Total	0,6403	0,6207

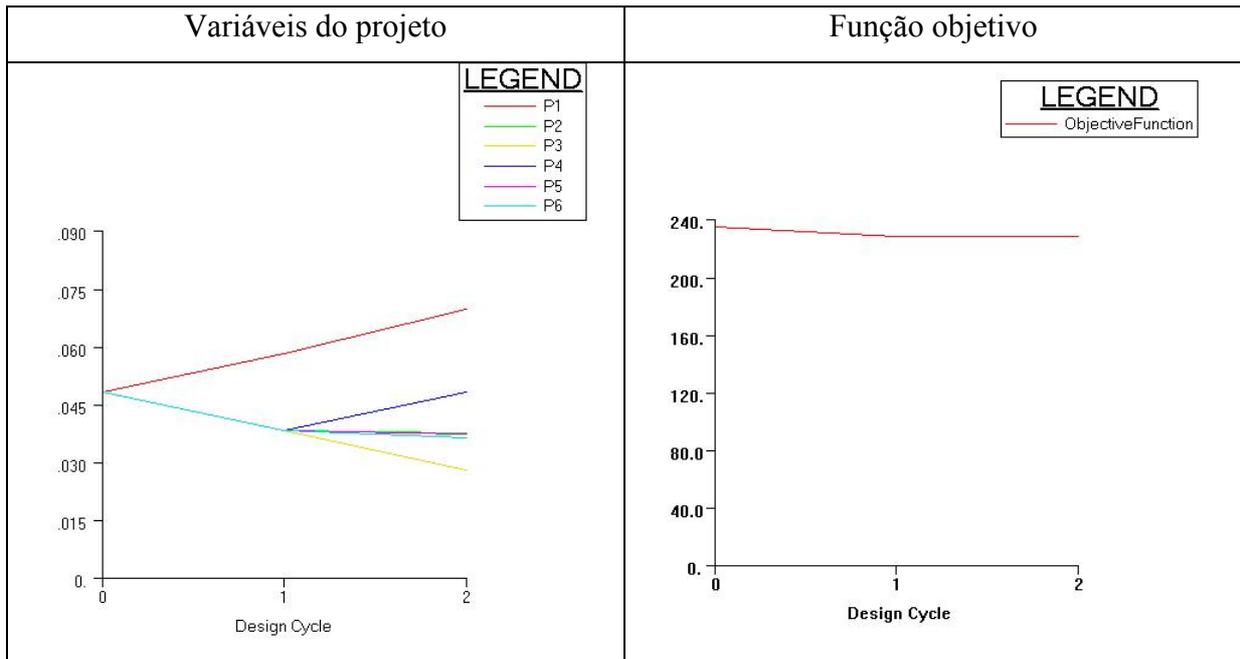
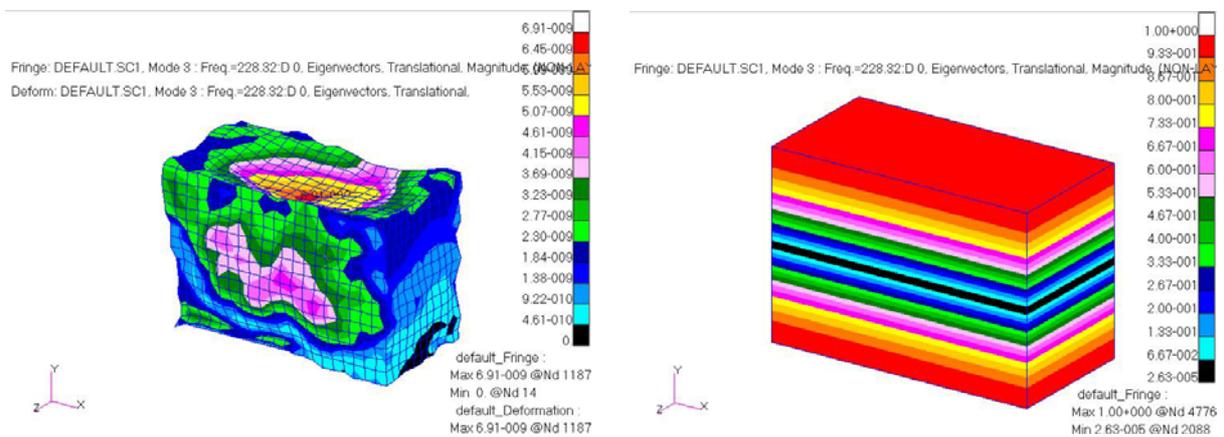


Figura 5.22 Iterações na minimização da primeira frequência acoplada do tipo estrutural

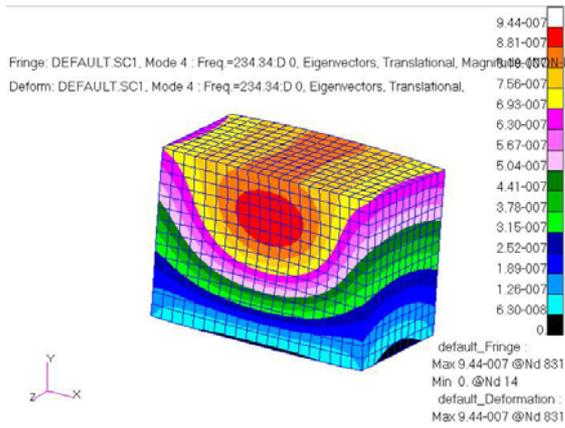
Observa-se na Figura 5.23 e na Figura 5.24, a forma modal e frequências naturais dos modos 3, 4, e 5 do modelo acoplado não otimizado e otimizado respectivamente, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura e vice-versa em ambos os casos, a partir do qual se pode inferir se a estrutura ou o fluido predomina no modo. A partir dessa consideração se observa que o quarto modo acoplado passa a ter o fluido como dominante ao invés da estrutura, e a frequência diminui de 234,34 Hz para 228,27 Hz, constituindo uma variação de -6,07 Hz (-2,59%). Como não existe controle explícito do cruzamento dos modos, observa-se que o quarto modo acoplado não otimizado do tipo predominante estrutural, assume o posto do terceiro modo após a otimização, diminuindo de 234,34 Hz para 194,24 Hz, constituindo uma variação de -40,1 Hz (-17,11%)



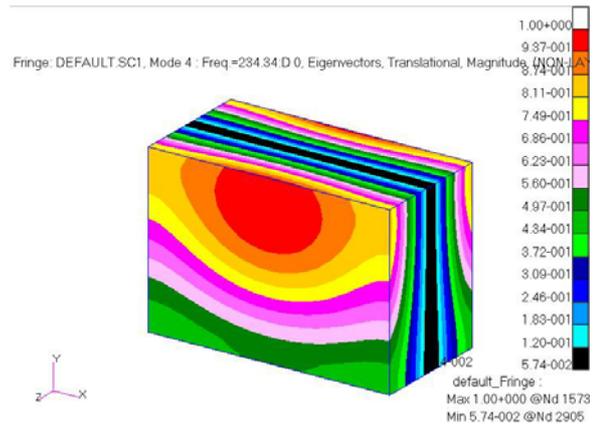
b) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 228,32 Hz, fluido predominante.

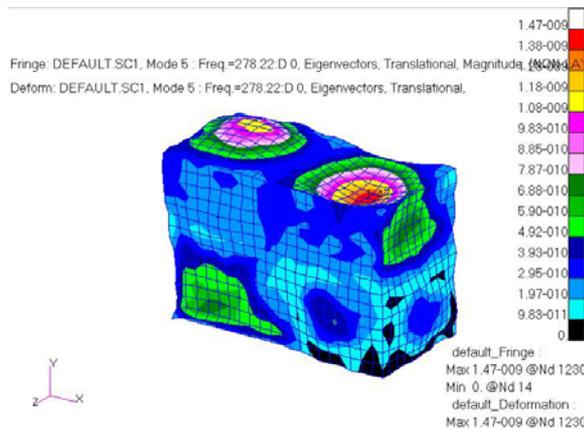


b) Deformação na estrutura

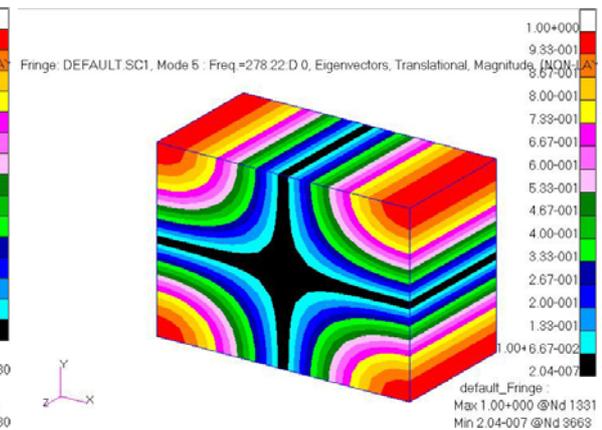


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 234,34 Hz, estrutura predominante.



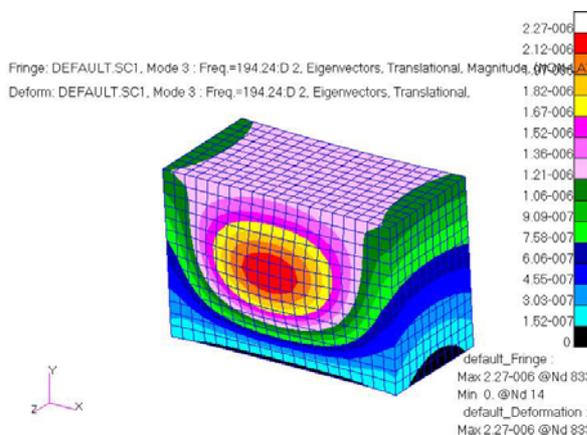
a) Deformação na estrutura



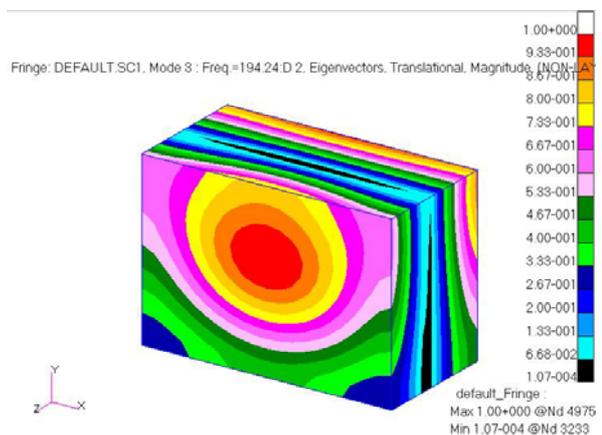
b) Franjas de pressão no fluido

Modo 5: frequência 278,22 Hz, fluido predominante.

Figura 5.23 Modos do modelo da caixa acoplada antes da otimização

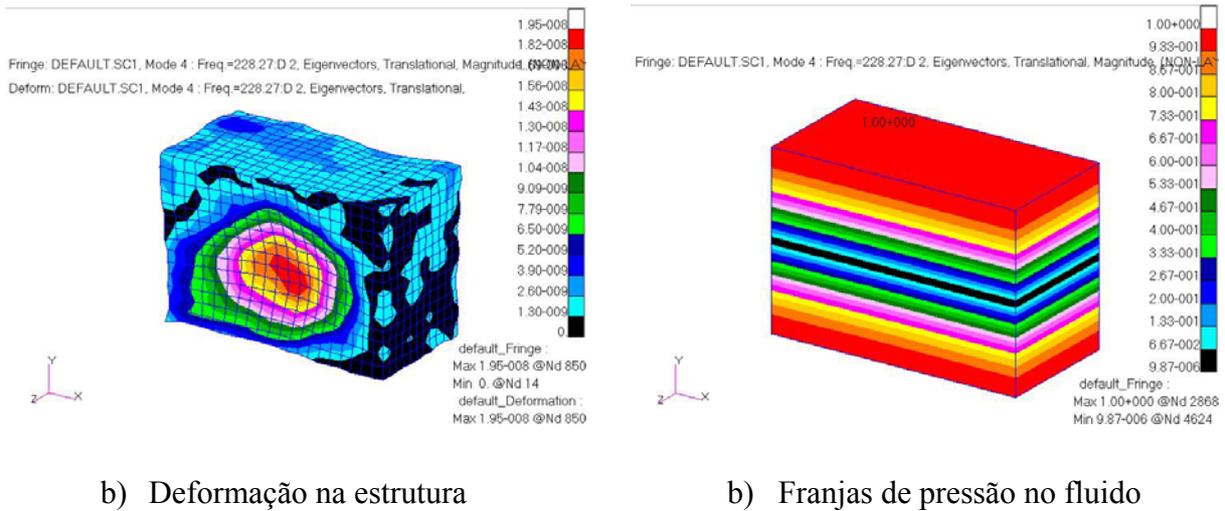


b) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

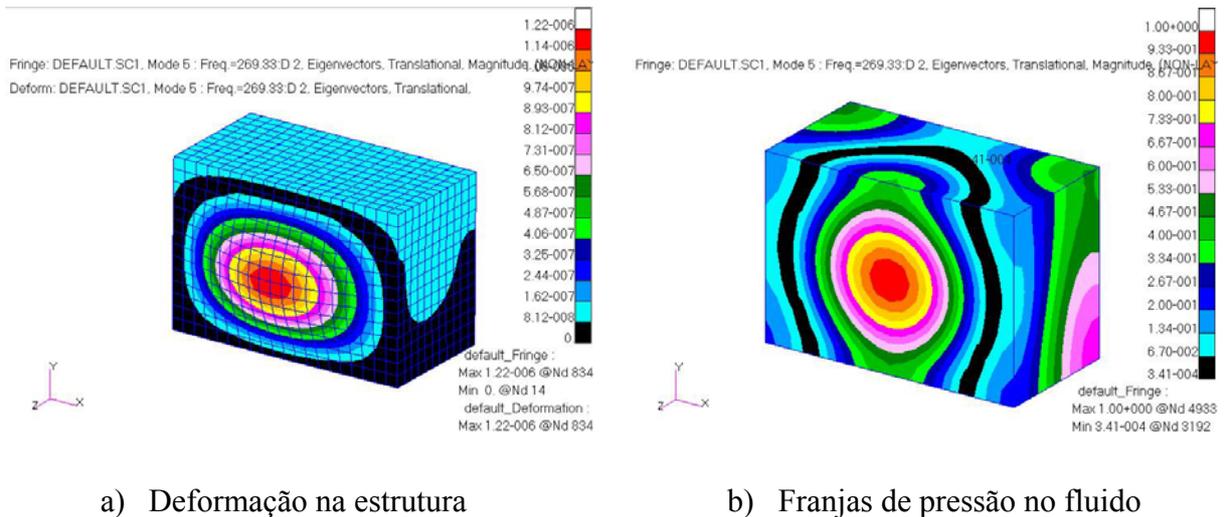
Modo 3: frequência 194,24 Hz, estrutura predominante.



b) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 228,27 Hz, fluido predominante.



a) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 5: frequência 269,33 Hz, fluido predominante.

Figura 5.24 Modos do modelo da caixa acoplada após a otimização

5.4.5 Minimização do massa estrutural

Na Tabela 5.26 se apresenta os valores das frequências naturais antes e após a minimização da massa, considerando como variáveis do sistema as espessuras das chapas das faces segundo indicação na Tabela 5.27. As duas restrições dizem respeito aos limites mínimo e máximo das espessuras das chapas, e o valor limite inferior para a quarta frequência natural acoplada. Como consequência se observa que a quarta frequência natural acoplada diminui de 234,34 Hz para 161,97 Hz, constituindo uma variação de -72,37 Hz (-30,9%).

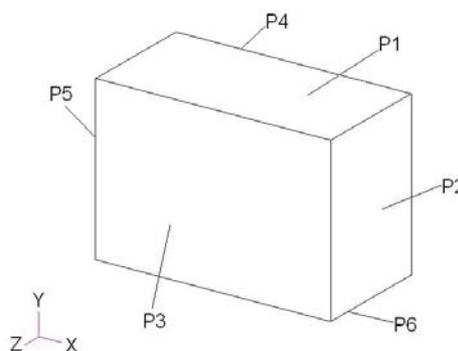
Tabela 5.26 Frequências decorrentes da otimização da massa em Hz

Modo	Frequência antes da otimização	Frequência após a otimização
1	0,00	0,00
2	158,80	135,63
3	228,32	157,91
4	234,34	161,97
5	278,22	226,49
6	314,57	236,47
7	318,11	238,01
8	346,08	263,64
9	351,22	277,57
10	387,91	281,07

Na Tabela 5.27 se observa que as espessuras diminuíram em média 0,026784 m, equivalente a 55,8%. A diminuição máxima é -0,032m ou -66,7%.

Tabela 5.27 Variáveis decorrentes da otimização da massa em m

Variável	Valor original	Valor otimizado
P1	0,048	0,02400
P2	0,048	0,02400
P3	0,048	0,024134
P4	0,048	0,01600
P5	0,048	0,054401
P6	0,048	0,018171



A Tabela 5.28 apresenta os resultados das massas antes e após a otimização, se observando que a massa otimizada é referida às chapas. A massa estrutural diminui de 121,448 kg para 62,612 kg, caracterizando uma redução de 58.83 kg (48,5%). Já na Figura 5.25 se apresenta as iterações das variáveis de projeto e da função objetivo, se destacando que foram necessárias cinco iterações para esse fim.

Tabela 5.28 Massa do sistema em kg

Massa	Volume original (m ³)	Volume otimizado (m ³)	Densidade (kg/m ³)	Massa original (kg)	Massa otimizada (kg)
Fluido	0,4616	0,4616	1,1745	0,5421	0,5421
Chapas	0,1786	0,0921	680	121,448	62,6123
Total	0,6403	0,5537	---	121,99	63,1545

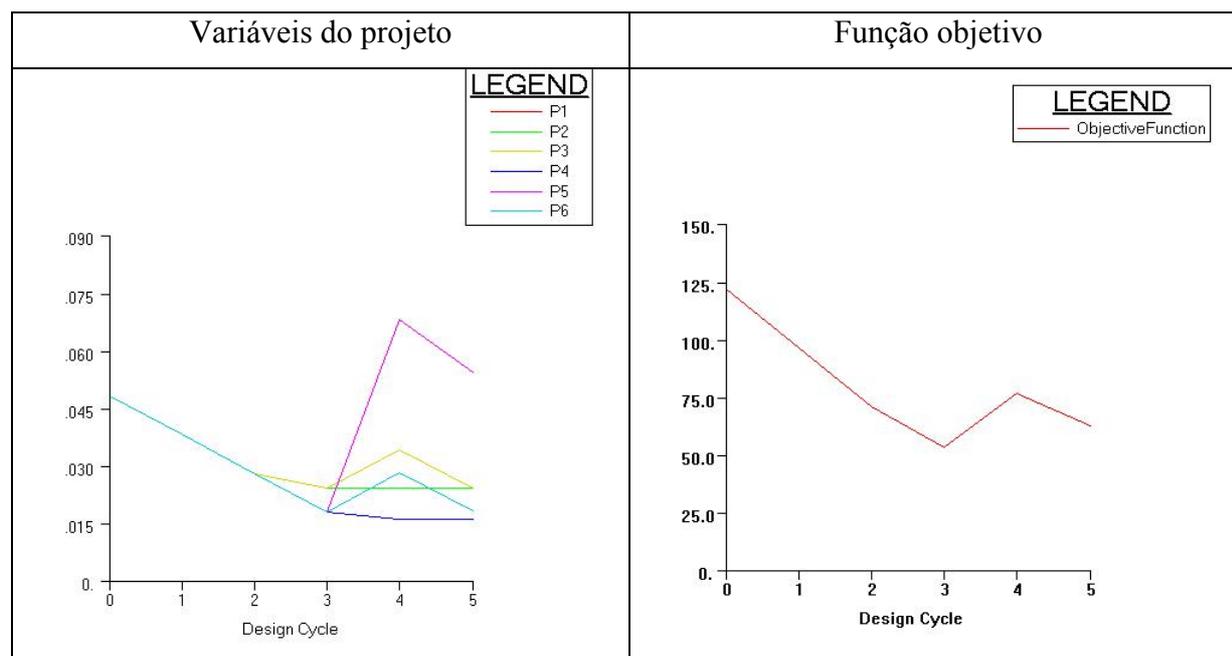
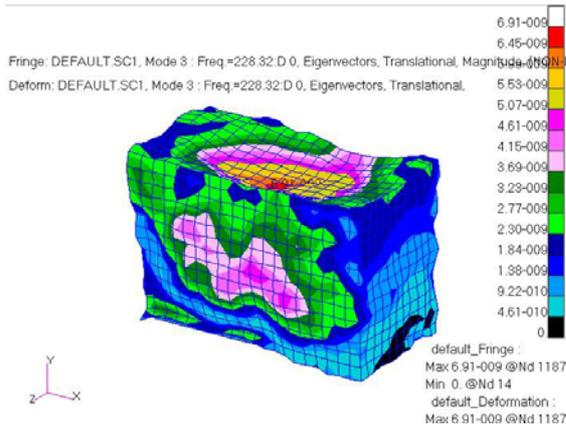
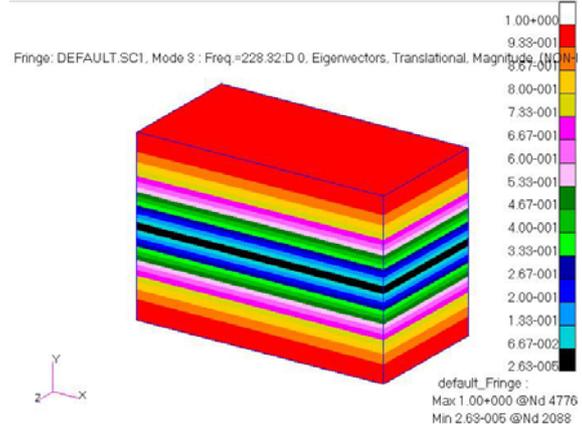


Figura 5.25 Iterações na minimização da massa

Observa-se na Figura 5.26 e na Figura 5.27, a forma modal e as frequências naturais dos modos 3, 4 e 5 do modelo acoplado não otimizado e otimizado respectivamente, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura e vice-versa em ambos os casos, a partir do qual se pode inferir se a estrutura ou o fluido predomina no modo. A partir dessa consideração se observa que o quarto modo acoplado otimizado continua tendo a estrutura como predominante, e a frequência acoplada diminui de 234,34 Hz para 161,97 Hz, constituindo uma variação de -72,97 Hz (-30,9%).

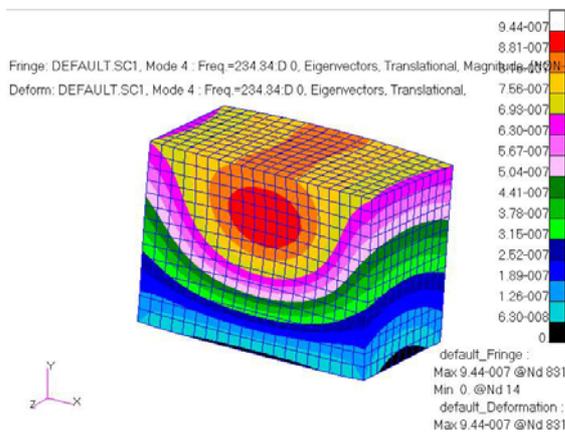


b) Deformação na estrutura

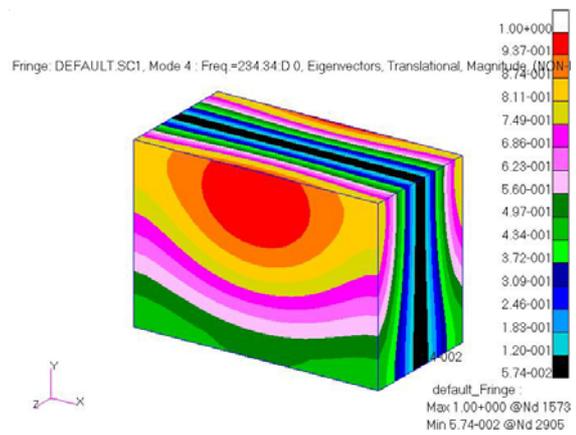


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 228,32 Hz, fluido predominante.

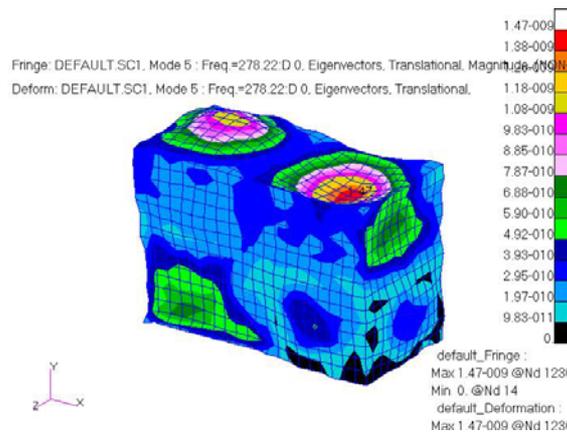


a) Deformação na estrutura

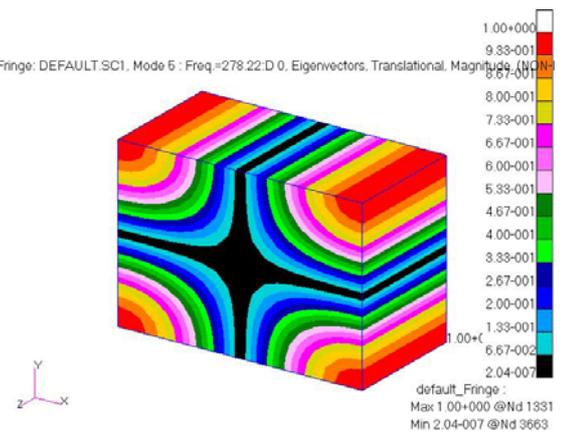


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 234,34 Hz, estrutura predominante.



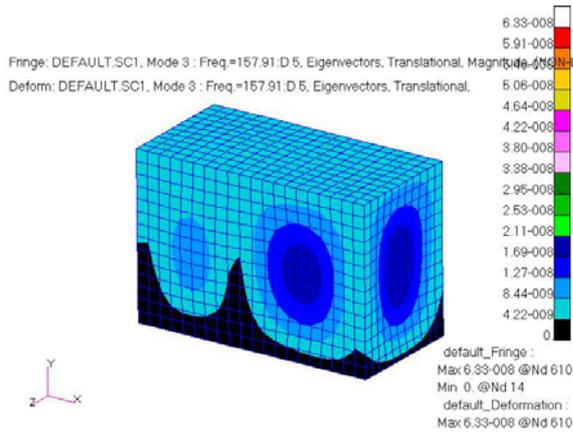
a) Deformação na estrutura



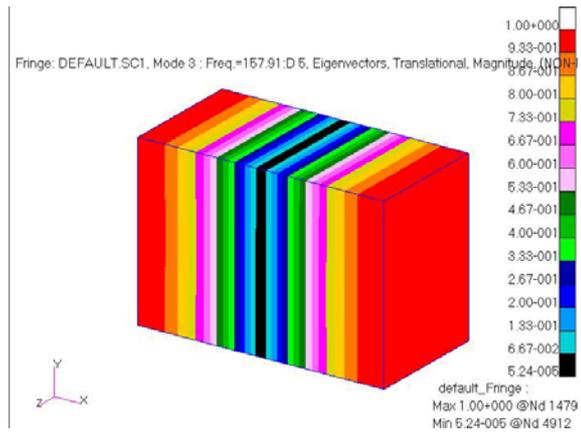
b) Franjas de pressão no fluido

Modo 5: frequência 278,22 Hz, fluido predominante.

Figura 5.26 Modos do modelo da caixa acoplada antes da otimização

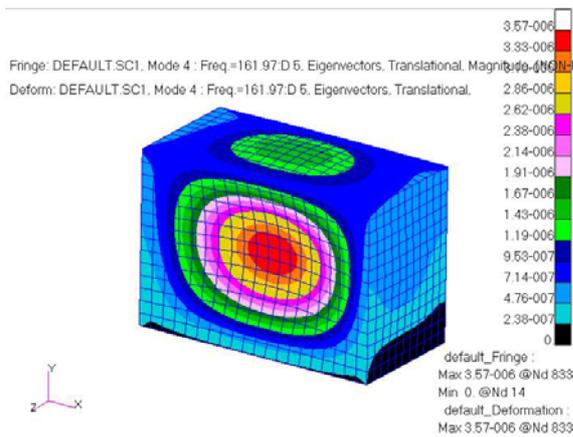


a) Deformação na estrutura

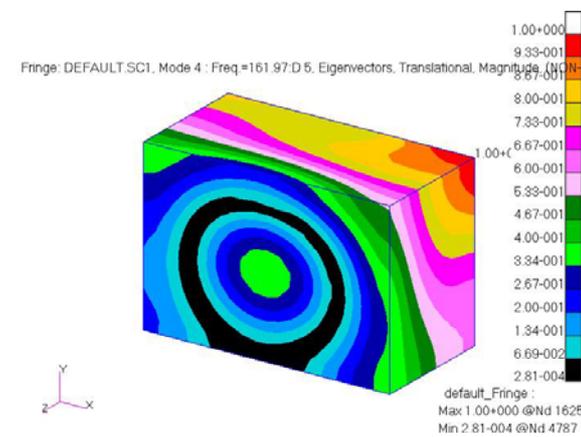


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 3: frequência 157,91 Hz, fluido predominante.

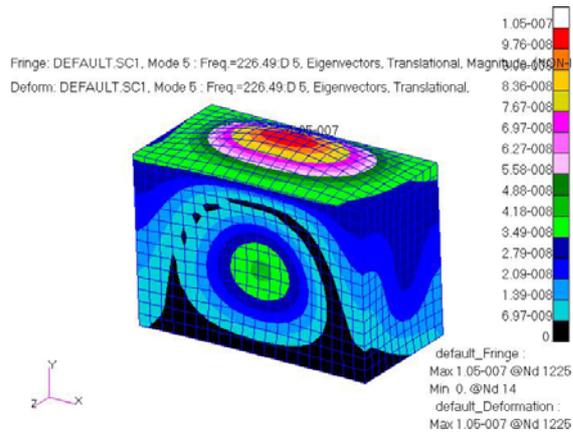


a) Deformação na estrutura

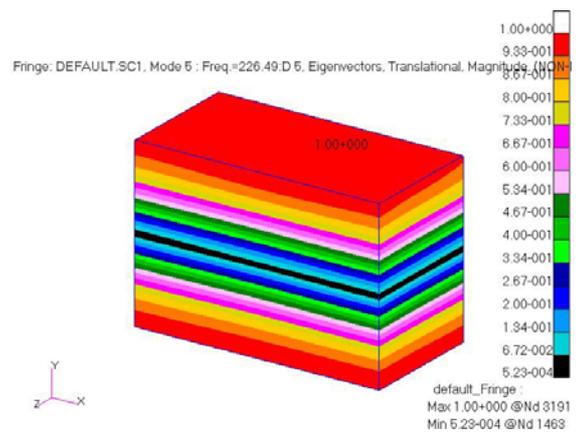


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 161,97 Hz, estrutura predominante.



a) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

Modo 5: frequência 226,49 Hz, fluido predominante.

Figura 5.27 Modos do modelo da caixa acoplada após a otimização

5.5 Sistema acústico-estrutural IV - Cabine

O objetivo do estudo de um modelo simplificado de uma cabine veicular é quantificar o acoplamento acústico-estrutural dos modos e frequências naturais desses domínios para um intervalo específico de frequências. O modelo original a ser estudado se apresenta na Figura 5.28.

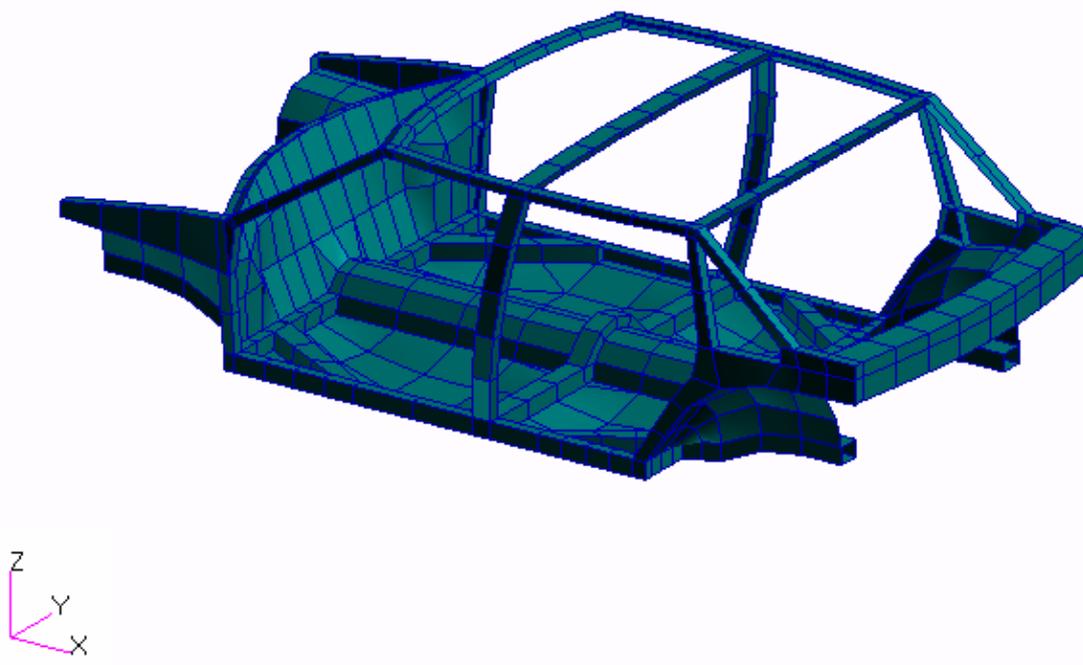


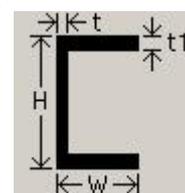
Figura 5.28 Modelo de origem da cabine veicular

5.5.1 Estrutura do chassi formada por vigas

O chassi é modelado através de vigas de seção C com as dimensões apresentadas na Tabela 5.29. O material utilizado é aço com propriedades do módulo de elasticidade $E=2,07 \times 10^{11}$ N/m², densidade $\rho=7800$ kg/m³ e coeficiente de Poisson $\nu=0,292$.

Tabela 5.29 Dimensões das seções das vigas do chassi

Dimensão	Seção viga transversal em Y	Seção viga longitudinal em X
W (m)	0,038587349	0,050799988
H (m)	0,089810059	0,085060059
t (m)	0,0050799999	0,0050799999
t_1 (m)	0,0050799999	0,0050799999



O chassi é suportado em quatro vértices, representado pelas condições de contorno $u_z=r_z=0$, como se observa na Figura 5.29. A simplificação adotada resulta em uma malha de 586 elementos de viga *CBAR2* de dois nós cada, totalizando 569 nós.

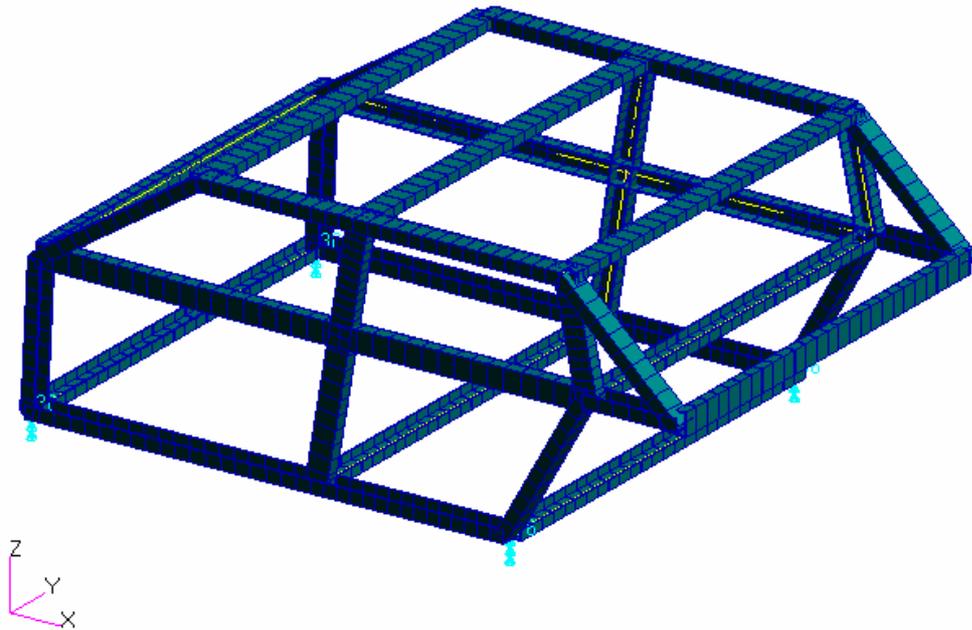
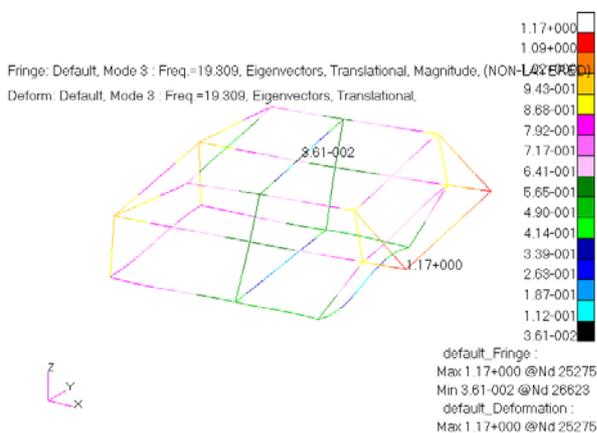
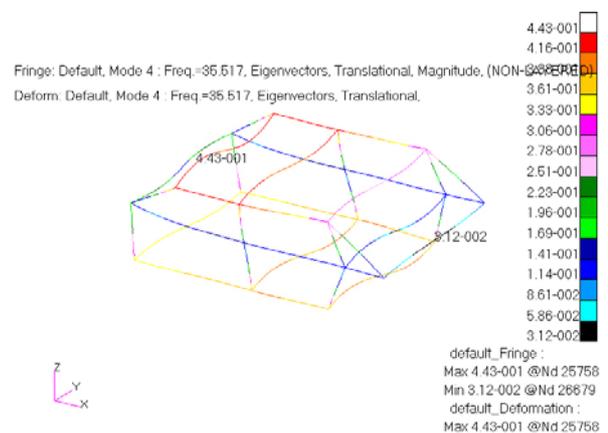


Figura 5.29 Modelo do chassi composto por vigas

As frequências naturais do modelo de chassi de vigas são apresentadas na Tabela 5.30, e comparadas com as frequências do modelo de chassi de chapas e da cabine acústica. Observa-se na Figura 5.30, a forma modal e frequências naturais de alguns modos do modelo estrutural de vigas, onde o modo 3 apresenta a deformação localizada das vigas inferiores transversais.



a) Modo 3: frequência 19,31 Hz



b) Modo 4: frequência 35,52 Hz

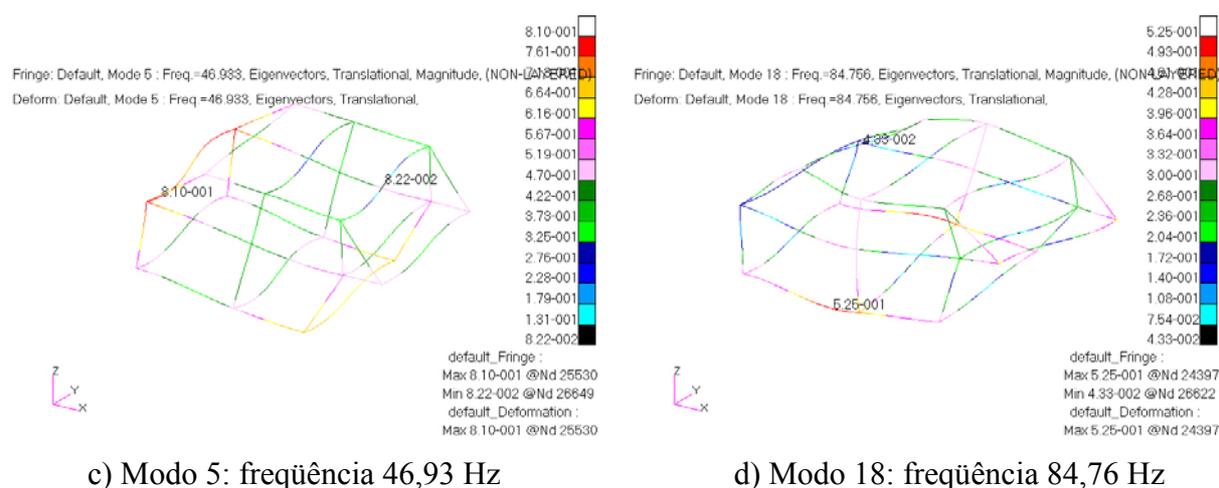


Figura 5.30 Modos do modelo de vigas do chassi

Tabela 5.30 Frequências previstas do chassi veicular em Hz

Modo	Modelo vigas	Modelo chapas	Modelo vigas e chapas	Modelo acústico	Modelo acoplado
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00	82,71	0,00
3	19,31	1,55	19,71	103,58	0,00
4	35,52	8,69	20,12	132,55	19,88
5	46,93	11,34	24,37	150,11	20,81
6	50,79	16,00	27,52	177,85	24,36
7	52,90	18,84	28,87	182,38	27,30
8	55,98	19,31	29,43	205,82	28,72
9	61,51	19,98	34,58	207,54	29,15
10	61,59	23,26	37,75	214,13	34,92
11	68,30	26,87	38,86	223,42	37,60
12	69,01	27,42	41,16	225,91	38,89
13	70,15	27,86	41,42	237,87	40,84
14	71,23	29,25	42,68	248,52	41,02
15	71,46	31,05	45,69	256,14	42,43
16	72,97	31,10	45,80	273,32	45,08
17	75,17	34,85	48,14	275,48	45,95
18	84,76	37,93	50,17	285,49	48,09
19	91,02	38,51	53,69	294,31	49,97
20	92,48	39,22	55,48	298,20	53,53
21	103,89	39,91	55,57	303,70	54,94
22	108,03	42,10	56,60	306,77	55,19
23	109,05	42,67	59,31	312,26	56,17

24	133,93	43,52	59,69	323,03	59,25
25	144,40	44,79	60,94	324,30	59,40
26	147,05	45,70	62,57	340,44	60,61
27	147,23	47,79	63,50	344,91	62,24
28	154,22	48,58	66,86	345,37	63,03
29	159,22	51,43	67,55	346,47	66,49
30	160,94	52,01	68,09	352,96	67,22
31	164,36	55,30	69,90	359,25	67,76
32	165,15	57,70	70,96	359,36	69,65
33	166,61	58,02	71,73	360,57	70,58
34	175,44	58,90	73,37	373,88	71,28
35	176,97	59,22	74,47	375,73	72,98
36	178,25	60,08	75,99	378,63	73,75
37	180,47	60,88	76,29	385,03	75,21
38	188,84	62,39	81,60	385,41	75,95
39	189,26	63,20	82,77	389,75	80,58
40	190,37	63,96	82,92	392,04	82,13
41	191,18	65,16	84,62	402,94	82,25
42	197,55	67,05	86,82	405,49	83,00
43	200,18	69,11	88,50	414,89	84,51
44	202,26	69,49	89,50	416,41	86,50
45	207,46	71,68	89,72	418,12	88,54
46	217,85	72,55	93,76	419,40	88,77
47	219,33	72,85	94,58	423,10	91,52
48	226,85	74,66	95,79	426,22	93,56
49	240,95	76,02	96,06	429,24	93,94
50	252,05	76,55	97,28	432,01	95,65

* L: longitudinal, T: transversal, V: vertical. (O número na seqüência é a ordem do modo)

& F: fluido, S: estrutura

5.5.2 Estrutura da carroceria formada por chapas

As chapas utilizadas no modelo da carroceria são compostas por diversos materiais. Para compensar os efeitos dos diferentes tipos de materiais que são utilizados na confecção da carroceria e principalmente nas portas do veículo, explora-se a idéia de um material equivalente com módulo de elasticidade, densidade e coeficiente de Poisson próprio, como exposto na Tabela 5.31.

O cálculo do módulo de elasticidade equivalente E_{eq} inicia da hipótese de rigidez extraída da expressão da frequência natural em chapas, assim

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{E h^3}{48(1-\nu^2)ab} [f(\nu, a, b)]}{\frac{\rho hab}{6300} [f(a, b)]}} = \sqrt{\frac{E h^2}{\rho} [f(\nu, a, b)]} \quad (5.8)$$

Observa-se nessa expressão que a rigidez k depende do produto $E \cdot h^2$, enquanto a massa m depende exclusivamente da densidade ρ . A rigidez equivalente k_{eq} de chapas em paralelo resulta

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{N^\circ \text{ chapas}} k_i = \sum_{i=1}^{N^\circ \text{ chapas}} E_i h_i^2 \quad (5.9)$$

Para o caso de chapas da mesma espessura h e material com módulo de elasticidade E ,

$$k_{eq} = N^\circ \text{ chapas} \cdot E \cdot h^2 \quad (5.10)$$

A rigidez equivalente para a espessura total h_t , onde a espessura livre é somada à espessura h das chapas, pode ser expressa como

$$k_{eq} = E_{eq} h_t^2 \quad (5.11)$$

Igualando as duas últimas expressões,

$$E_{eq} = \frac{(N^\circ \text{ chapas}) h^2}{h_t^2} E \quad (5.12)$$

A densidade ρ de uma chapa de massa m , volume V , área superficial A e espessura constante h , pode ser expressa como

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{A h} \quad (5.13)$$

A densidade equivalente ρ_{eq} de uma chapa composta por várias chapas de materiais diversos é calculada tomando em conta duas hipóteses, a primeira diz respeito à espessura do espaço livre h_{livre} ou dos materiais mais leves que é considerada na obtenção do volume total V_t , enquanto a segunda considera que a massa total m_t é igual essencialmente à soma das massas das chapas metálicas.

$$\rho_{eq} = \frac{m_t}{V_t} = \frac{(N^\circ \text{ chapas}) m}{A [(N^\circ \text{ chapas}) h + h_{livre}]} = \left(\frac{m}{A h} \right) \left[\frac{(N^\circ \text{ chapas})}{(N^\circ \text{ chapas}) h + h_{livre}} \right] \quad (5.14)$$

$$\rho_{eq} = \rho \left[\frac{(N^\circ \text{ chapas})}{(N^\circ \text{ chapas}) h + h_{livre}} \right] \quad (5.15)$$

Tabela 5.31 Propriedades dos materiais das diversas partes da carroceria da cabine

Propriedade	Traseiro	Assoalho	Teto, teto porta-mala	Frontal	Portas	Janelas (vidro)
<i>N° chapas</i>	1	1	1	1	2	1
Espessura chapa <i>h</i> (mm)	3	5	2	4	3	5
Espaço livre <i>h_{livre}</i> (mm)	2	2	2	2	2	---
Espessura total <i>h_t</i> (mm)	5	7	4	6	8	5
<i>E</i> aço (N/m ²) *	2,07E11	2,07E11	2,07E11	2,07E11	2,07E11	4,60E10
<i>E_{eq}</i> (N/m ²)	7,45E10	1,06E11	5,18E10	9,20E10	5,82E10	4,60E10
Massa (<i>N° chapas</i>)	1	1	1	1	2	1
Volume $\left[\frac{(N^\circ \text{ chapas}) h + h_{livre}}{h} \right]$	1,67	1,4	2	1,5	2,67	1,0
ρ aço (kg/m ³) *	7800	7800	7800	7800	7800	2600
ρ_{eq} (kg/m ³)	4680	5570	3900	5200	5850	2600
Módulo de Poisson ν	0,235	0,235	0,235	0,235	0,235	0,245
E_{eq}/ρ_{eq}	1,59E7	1,90E7	1,33E7	1,77E7	9,95E6	1,77E7

* Exceto as janelas de vidro

A carroceria é suportada nos quatro vértices, representado pelas condições de contorno $u_z=r_z=0$, como se observa na Figura 5.31. A simplificação adotada resulta em uma malha de 4504 elementos bidimensionais de chapa *CQUAD4* de quatro nós cada, totalizando 4506 nós.

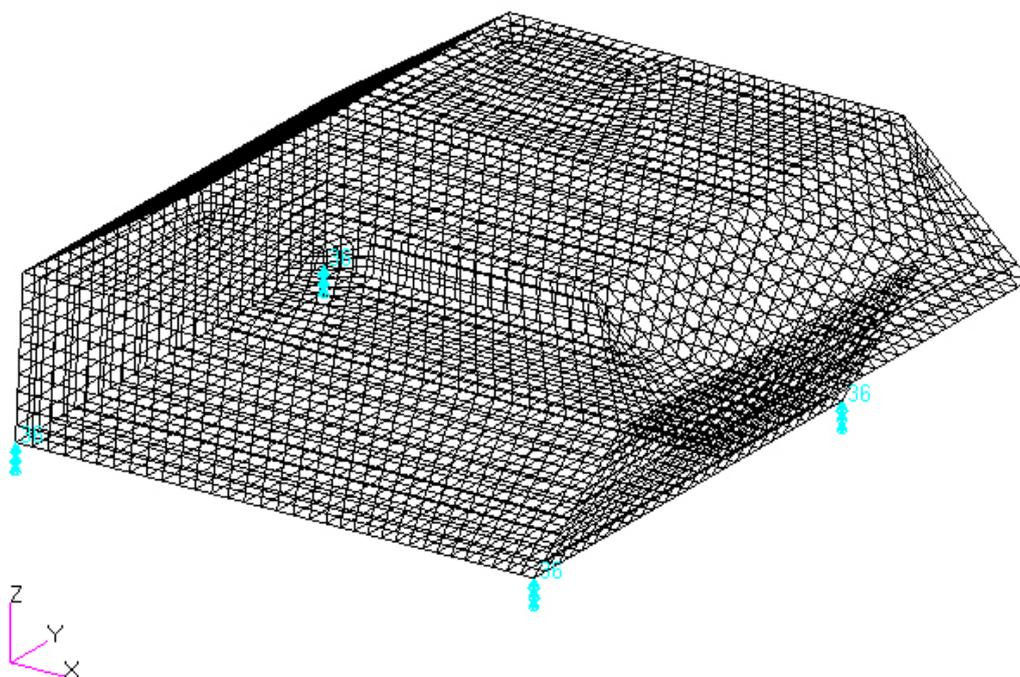
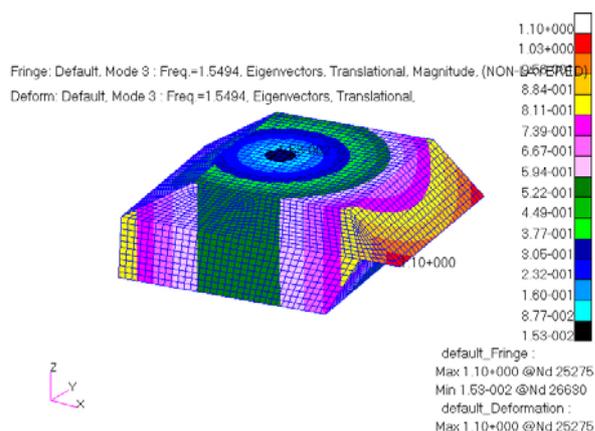
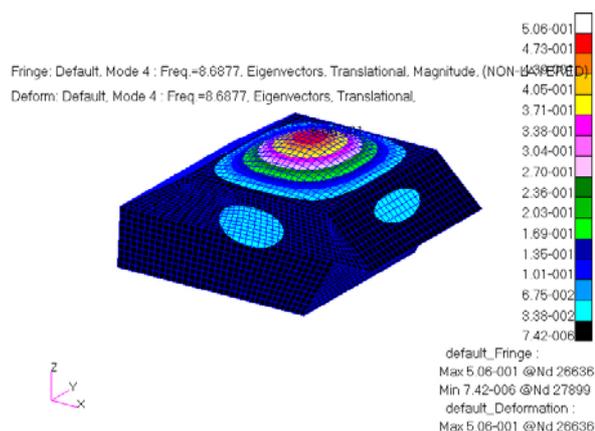


Figura 5.31 Modelo da carroceria composta por chapas

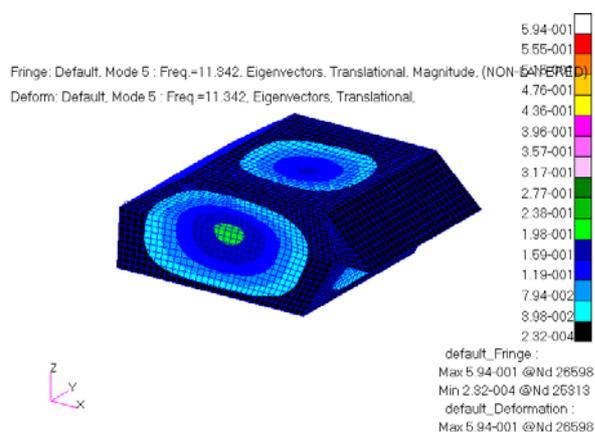
As frequências naturais do modelo da carroceria composta por chapas são apresentadas na Tabela 5.30, e comparadas com as frequências do modelo de chassi de vigas e da cabine acústica. Observa-se na Figura 5.32, a forma modal e frequências naturais de alguns modos do modelo da carroceria de chapas, se ressaltando a deformação localizada das chapas.



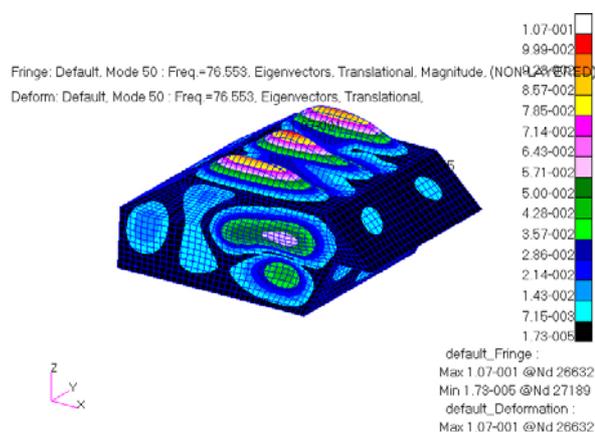
a) Modo 3: frequência 1,55 Hz



b) Modo 4: frequência 8,69 Hz



c) Modo 5: frequência 11,34 Hz



d) Modo 50: frequência 76,55 Hz

Figura 5.32 Modos do modelo da carroceria composta por chapas

5.5.3 Estrutura formada por vigas e chapas

Neste caso a estrutura da cabine formada pelo chassi e carroceria é modelada com vigas e chapas. O chassi é modelado através de vigas de seção e materiais especificadas na seção 5.5.1, enquanto a carroceria através de chapas com dimensões e materiais especificadas na seção 5.5.2.

A estrutura é suportada nos quatro vértices, representado pelas condições de contorno $u_z=r_z=0$, como se observa na Figura 5.33. A simplificação adotada resulta em uma malha de 586 elementos de viga *CBAR* de dois nós cada, 4504 elementos bidimensionais de chapa *CQUAD4* de quatro nós cada, totalizando 5090 elementos em 4506 nós.

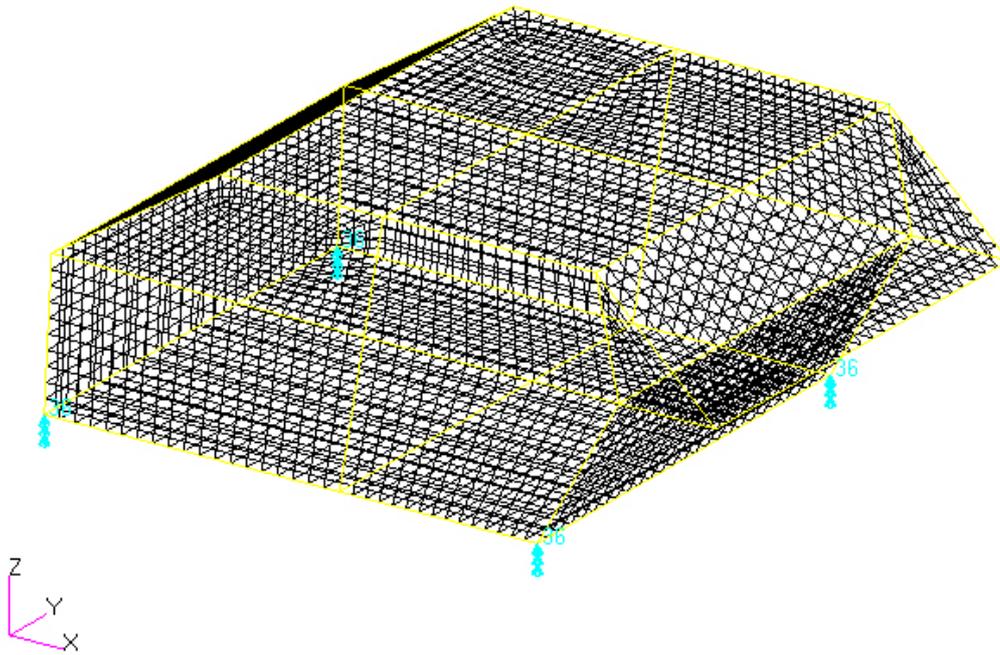
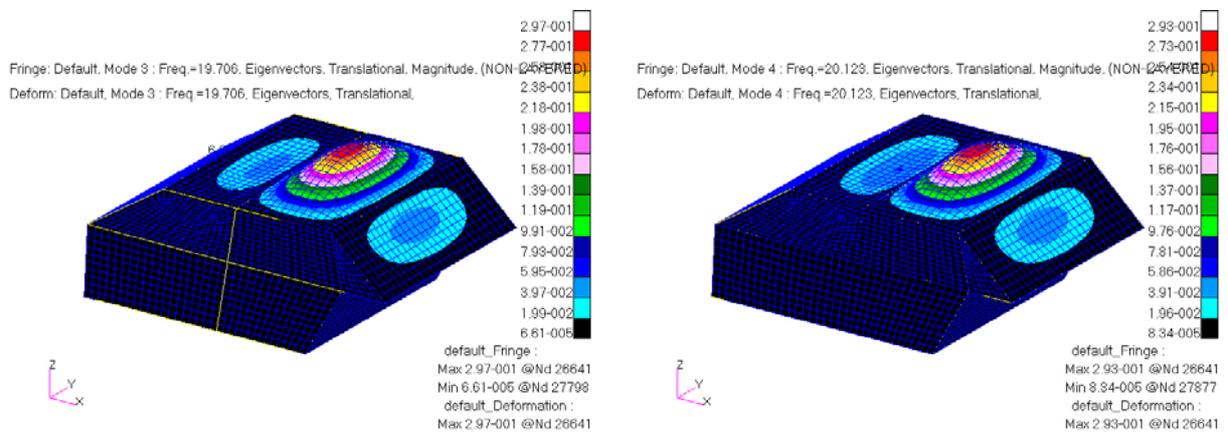


Figura 5.33 Modelo estrutural formado por vigas e chapas

As frequências naturais do modelo estrutural composto por vigas e chapas são apresentadas na Tabela 5.30, e comparadas com as frequências do modelo de chassi de vigas, da carroceria de chapas e da cabine acústica. Observa-se na Figura 5.34, a forma modal e frequências naturais de alguns modos do modelo estrutural, se ressaltando a deformação localizada das chapas.



a) Modo 3: frequência 19,71 Hz

b) Modo 4: frequência 20,12 Hz

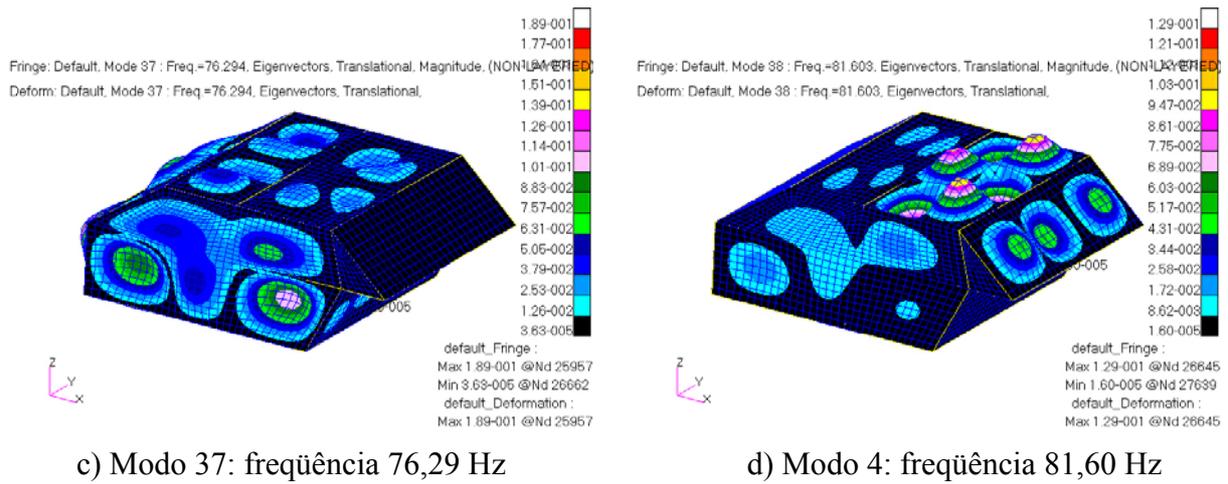


Figura 5.34 Modos do modelo estrutural composto por vigas e chapas

5.5.4 Cabine acústica

A cabine é modelada com elementos do tipo fluido ar com densidade $\rho=1,204 \text{ kg/m}^3$ e velocidade do som no ar $c=347 \text{ m/s}$. A simplificação adotada resulta em uma malha de 22048 elementos sólidos hexaédricos *CHEXA* de oito nós cada, totalizando 24381 nós, como se observa na Figura 5.35.

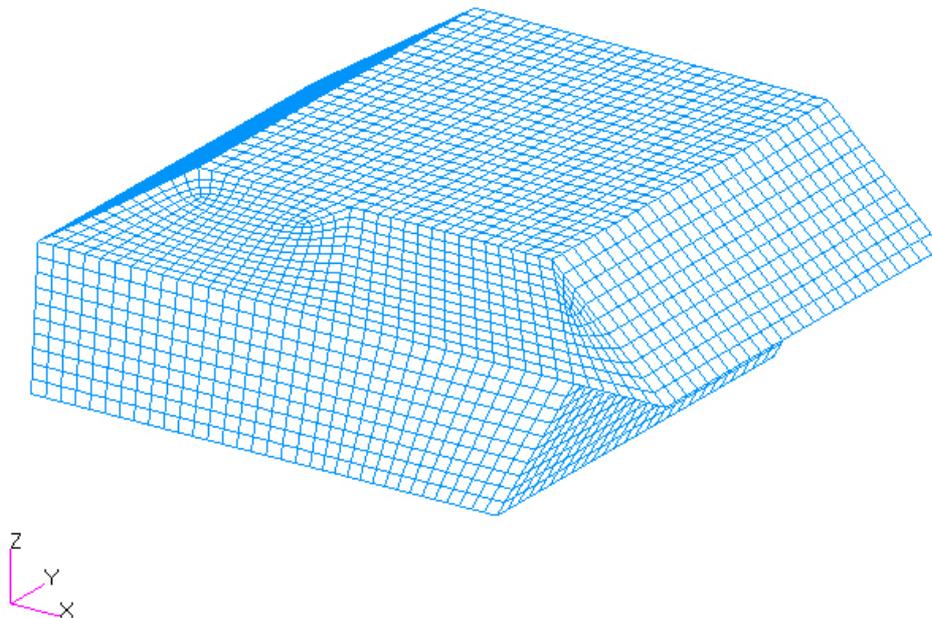


Figura 5.35 Modelo fluido da cabine acústica

As frequências naturais do modelo da cabine acústica são apresentadas na Tabela 5.30, e comparadas com as frequências do modelo estrutural. Observa-se na Figura 5.36 a forma modal e frequências naturais de alguns modos do modelo acústico. A forma do modo 2 é o primeiro longitudinal L1, o modo 3 é o primeiro transversal T1, o modo 4 é o primeiro combinado L1 e T1, enquanto o modo 5 é o segundo longitudinal L2.

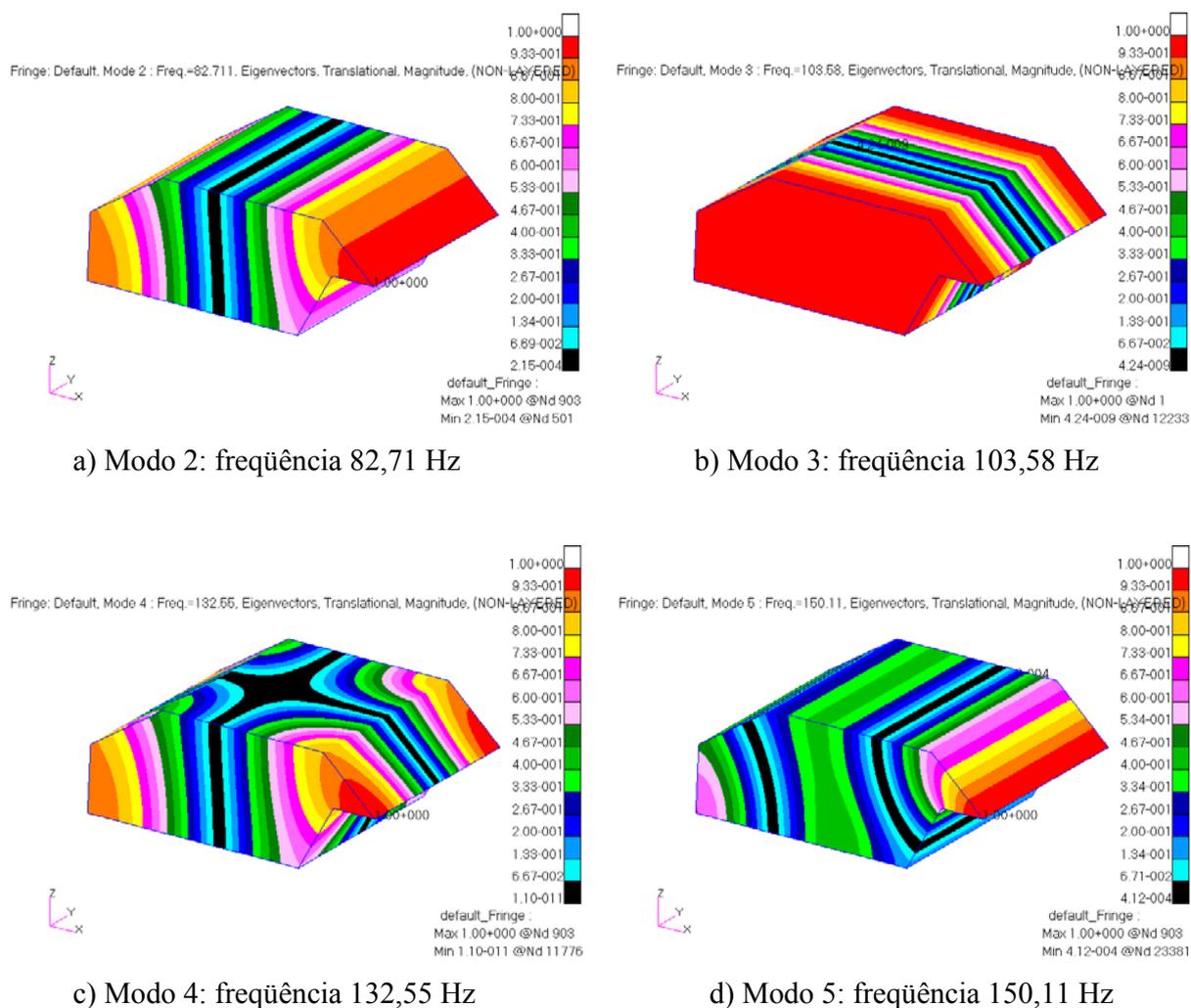


Figura 5.36 Modos do modelo acústico

5.5.5 Cabine acústico-estrutural

A estrutura da cabine formada pelo chassi e carroceria é modelada com vigas e chapas respectivamente, enquanto a cabine acústica é modelada com elementos do tipo fluido. O chassi é modelado através de vigas de seção e material especificado na seção 5.5.1, a carroceria através de chapas com dimensões e materiais especificados na seção 5.5.2, enquanto a cabine através de sólidos hexaédricos com propriedades do material especificado na seção 5.5.4.

A estrutura da cabine é suportada em quatro vértices, representada pelas condições de contorno $u_z=r_z=0$, como se observa na Figura 5.37.

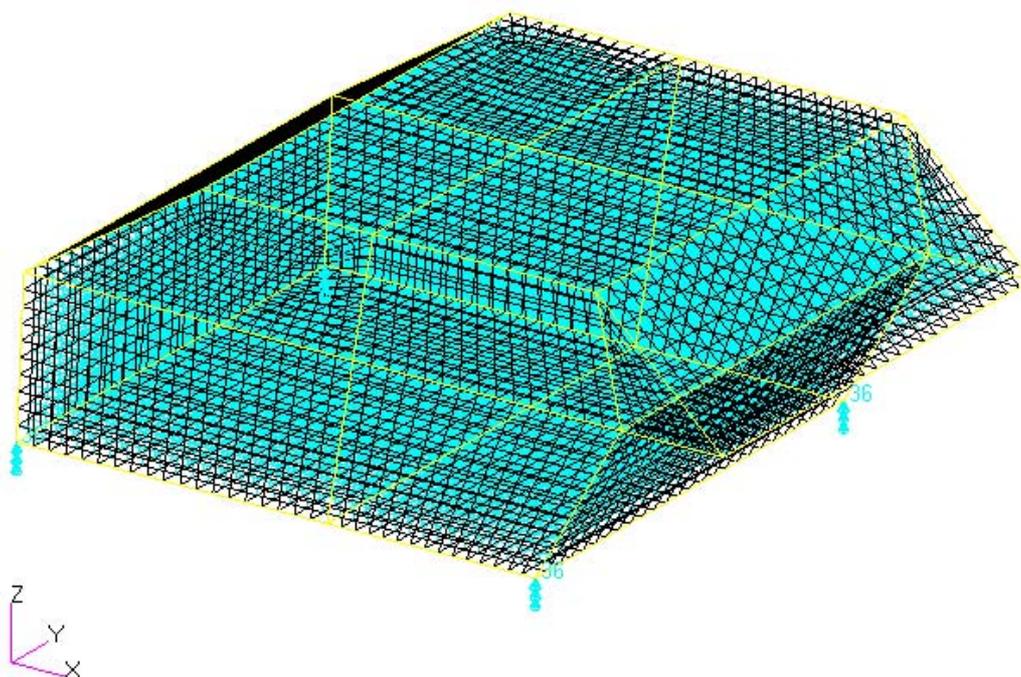


Figura 5.37 Modelo acústico-estrutural da cabine veicular

A simplificação adotada resulta em uma malha de 586 elementos de viga *CBAR* de dois nós cada, 4504 elementos bidimensionais de chapa *CQUAD4* de quatro nós cada e 22048 elementos sólidos hexaédricos *CHEXA* de oito nós cada, totalizando 27138 elementos em 28887 nós.

As frequências naturais do modelo estrutural composto por vigas e chapas, assim como as frequências naturais do modelo acústico composto por sólidos hexaédricos são apresentadas na Tabela 5.32, e comparadas com as frequências naturais do modelo acoplado. A média da variação percentual das frequências acopladas em relação às frequências de origem é -0,56%.

Observa-se na Figura 5.38 a forma modal e frequências naturais de alguns modos do modelo acoplado, se destacando que as franjas de pressão no fluido seguem a forma da

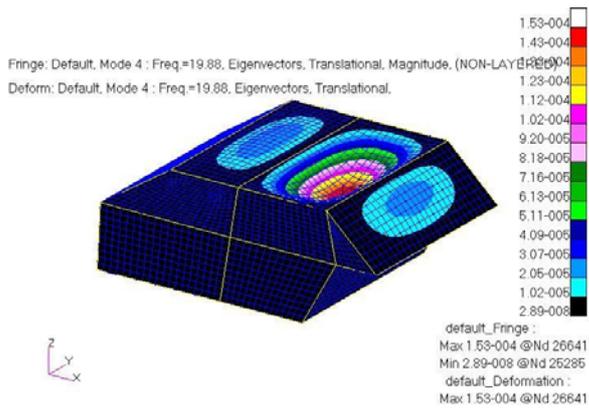
deformação da estrutura, o qual evidencia o acoplamento fluido-estrutura existente. O modo 42 apresenta uma forma modal predominantemente de origem fluido.

Tabela 5.32 Freqüências previstas da cabine veicular em Hz

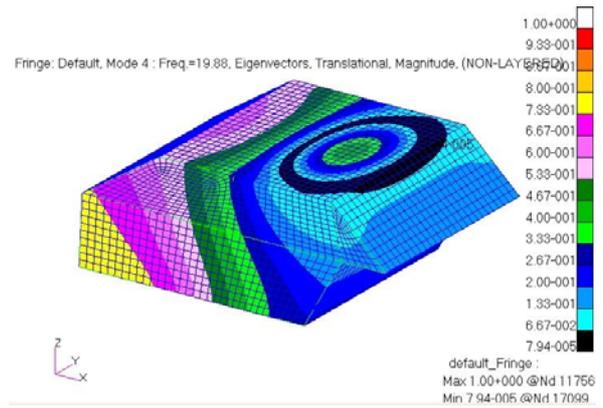
Modelo estrutural de vigas e chapas	Modelo acústico	Modo de origem &	Modo acoplado	Modelo acoplado	Variação (%) modo acoplado / origem
0,00	0,00	S1	1	0,00	0,00
0,00		S2	2	0,00	0,00
		F1	3	0,00	0,00
19,71		S3	4	19,88	0,88
20,12		S4	5	20,81	3,40
24,37		S5	6	24,36	-0,05
27,52		S6	7	27,30	-0,82
28,87		S7	8	28,72	-0,52
29,43		S8	9	29,15	-0,95
34,58		S9	10	34,92	1,00
37,75		S10	11	37,60	-0,40
38,86		S11	12	38,89	0,06
41,16		S12	13	40,84	-0,78
41,42		S13	14	41,02	-0,96
42,68		S14	15	42,43	-0,59
45,69		S15	16	45,08	-1,35
45,80		S16	17	45,95	0,34
48,14		S17	18	48,09	-0,10
50,17		S18	19	49,97	-0,40
53,69		S19	20	53,53	-0,30
55,48		S20	21	54,94	-0,98
55,57		S21	22	55,19	-0,69
56,60		S22	23	56,17	-0,77
59,31		S23	24	59,25	-0,10
59,69		S24	25	59,40	-0,49
60,94		S25	26	60,61	-0,55
62,57		S26	27	62,24	-0,53
63,50		S27	28	63,03	-0,74
66,86		S28	29	66,49	-0,56
67,55		S29	30	67,22	-0,50
68,09		S30	31	67,76	-0,48
69,90		S31	32	69,65	-0,36
70,96		S32	33	70,58	-0,53
71,73	S33	34	71,28	-0,61	

73,37	82,71	S34	35	72,98	-0,53
74,47		S35	36	73,75	-0,97
75,99		S36	37	75,21	-1,03
76,29		S37	38	75,95	-0,45
81,60		S38	39	80,58	-1,25
82,77		S39	40	82,13	-0,77
82,92		S40	41	82,25	-0,80
		F2	42	83,00	0,34
84,62		S41	43	84,51	-2,67
86,82		S42	44	86,50	-2,26
88,50	S43	45	88,54	-1,08	
89,50	S44	46	88,77	-1,06	
89,72	S45	47	91,52	-2,38	
93,76	S46	48	93,56	-1,08	
94,58	S47	49	93,94	-1,93	
95,79	S48	50	95,65	-0,43	

& F: fluido, S: estrutura

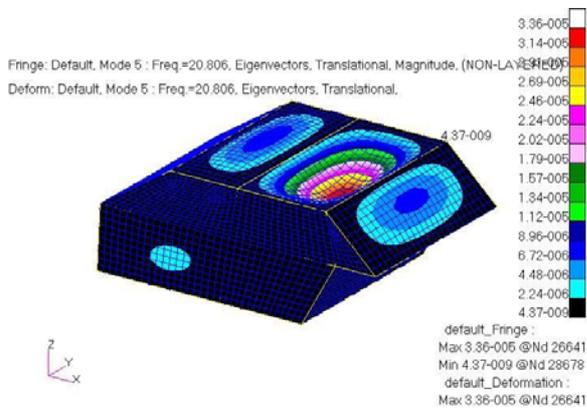


b) Deformação na estrutura

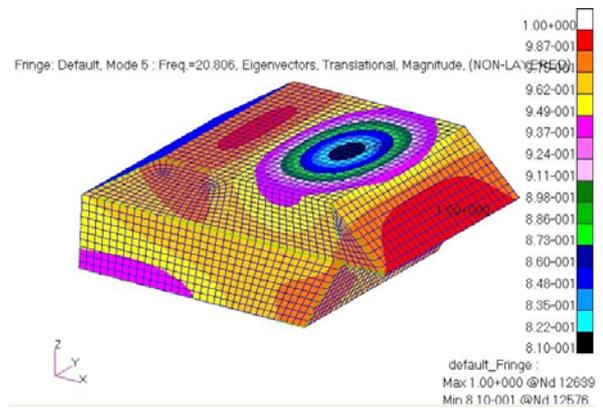


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 4: frequência 19,88 Hz

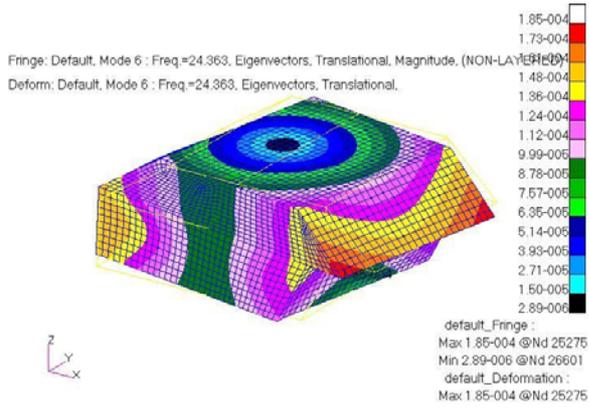


a) Deformação na estrutura

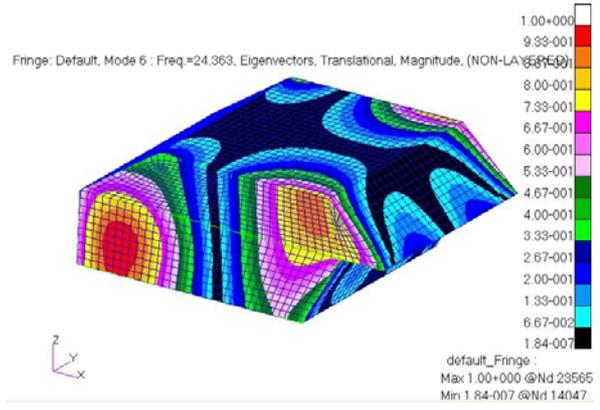


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 5: frequência 20,81 Hz

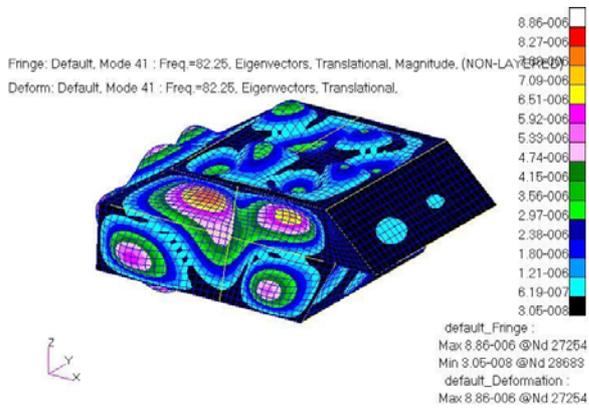


a) Deformação na estrutura

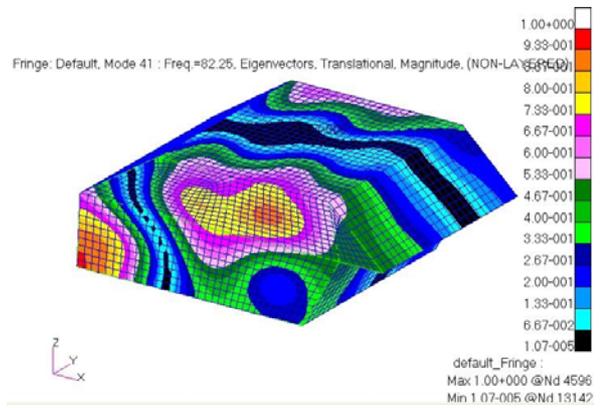


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 6: frequência 24,36 Hz

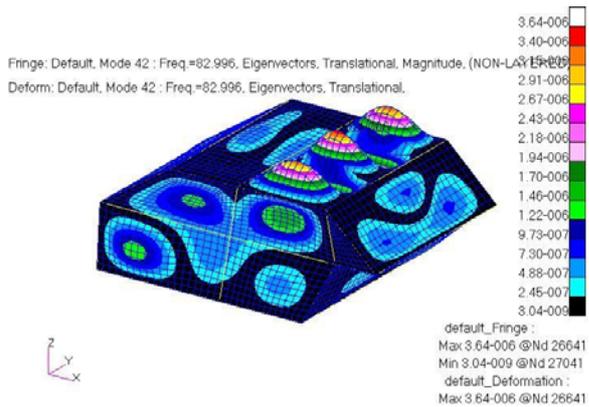


a) Deformação na estrutura

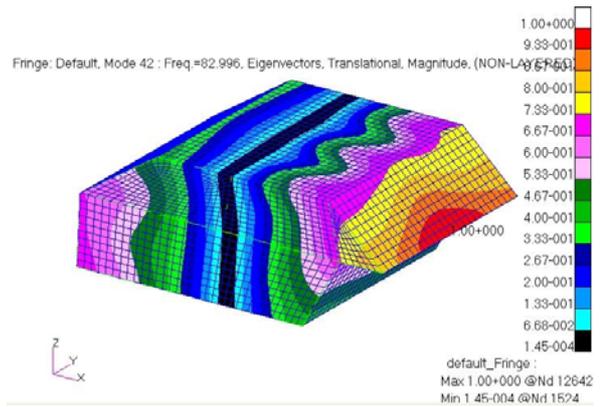


b) Franjas de pressão no fluido

Modo 41: frequência 82,25 Hz

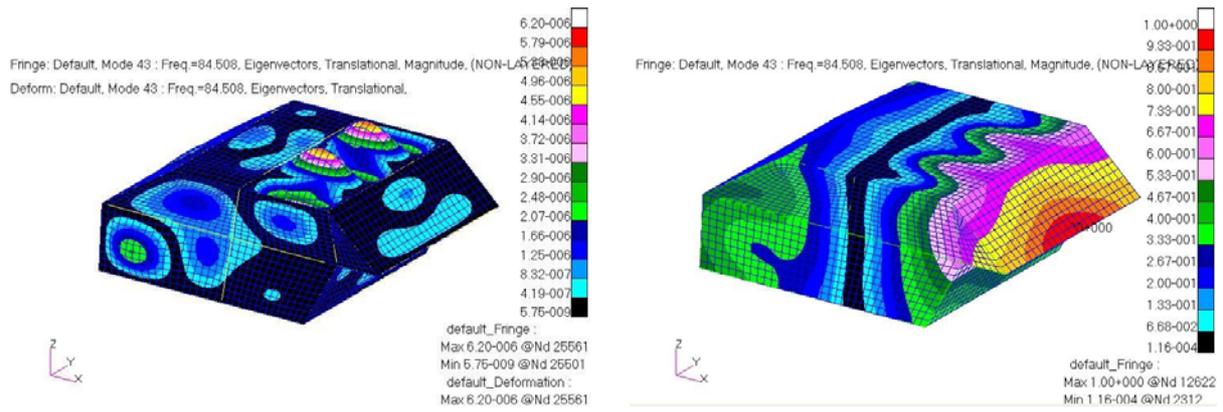


a) Deformação na estrutura



b) Franjas de pressão no fluido

Modo 42: frequência 82,97 Hz



a) Deformação na estrutura

b) Franjas de pressão no fluido

Modo 43: frequência 84,51 Hz

Figura 5.38 Modos do modelo acústico-estrutural

6. Conclusões

No estudo de um sistema cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada, através de programação, a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas por programação, em relação aos valores dos sistemas originais, para as frequências predominantemente estruturais resulta 0,15%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,49% e para todas as frequências 0,3%. O valor máximo da variação é 2,3 Hz (3,71%). O conjunto dos resultados significa que existe um acoplamento fraco no sistema.

No estudo do sistema cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada, através de simulação, a média da variação das primeiras trinta frequências predominantemente estruturais resulta 0,57%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,14% e para todas as frequências 0,37%. O valor máximo da variação é 8,45 Hz (13,57%). Os valores encontrados se correspondem com os obtidos por programação.

No estudo de um sistema cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada de espessura menor, através de programação, a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas por programação, em relação aos valores dos sistemas originais, para as frequências predominantemente estruturais resulta 0,30%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,04% e para todas as frequências 0,20%. O valor máximo da variação é 3,51 Hz (7,09%).

No estudo do sistema cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada de espessura menor, através de simulação, a média da variação das primeiras trinta frequências predominantemente estruturais resulta 1,10%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,16% e para todas as frequências 0,73%. O valor máximo da variação é 12,65 Hz (25,39%).

Tanto utilizando programação como simulação, no estudo do sistema cavidade cúbica sobre uma chapa quadrada de espessura menor, em comparação ao sistema que adota como estrutura a chapa quadrada de espessura original, percebe-se mudanças significativas na ordem das frequências acopladas, uma maior variação das frequências predominantemente estruturais devido ao acoplamento, e uma diminuição da variação das frequências predominantemente do tipo fluido, tudo isso ocasionado por uma redução de 20% na espessura da chapa quadrada original.

No estudo do sistema cavidade hexaédrica sobre chapa quadrada, através de simulação, a média da variação das primeiras trinta frequências predominantemente estruturais resulta -1,34%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta 0,92%, embora para todas as frequências 0,091%. Os resultados das médias relativas à condição desacoplada indicam que existiria um acoplamento ligeiramente maior neste sistema. O valor máximo da variação é -9,93 Hz (-0,03%).

No estudo do sistema cavidade hexaédrica sobre chapa quadrada, a média da variação das primeiras trinta frequências acopladas obtidas por programação, em relação aos valores obtidos por simulação, para as frequências predominantemente estruturais resulta -1,83%, para as frequências predominantemente do tipo fluido resulta -0,85% e para todas as frequências -1,21%. O valor máximo absoluto da variação é 16,93 Hz (4,20%) para o modo 24. O conjunto dos resultados mostra a correspondência dos resultados da programação em relação aos obtidos por simulação.

Na minimização da segunda frequência natural acoplada do sistema cavidade hexaédrica sobre chapa quadrada, se observa que o segundo modo acoplado continua tendo a estrutura como predominante, e a frequência diminui de 34,22 Hz para 17,20 Hz, constituindo uma variação de -17,02 Hz (-49,74%). Como não existe controle explícito do cruzamento dos modos, observa-se que o terceiro modo acoplado não otimizado do tipo predominante fluido, torna-se do tipo estrutural após a otimização.

Na maximização da segunda frequência natural acoplada, do sistema cavidade hexaédrica sobre chapa quadrada, se observa que o segundo modo acoplado otimizado ao invés da estrutura passa a ter a fluido como predominante, e a frequência acoplada aumenta de 34,22 Hz para 64,60 Hz, constituindo uma variação de 30,38 Hz (88,77%). Caso se tenha interesse em manter a informação relativa ao modo do tipo estrutural, este teria aumentado de 34,22 Hz para 85,92 Hz, constituindo uma variação de aproximadamente 151 %.

Na minimização da massa do sistema cavidade hexaédrica sobre chapa quadrada, se observa que a massa estrutural diminui de 3,537 kg para 2,370 kg, caracterizando uma redução de 1,166 kg (33%).

Na análise modal do sistema acústico-estrutural caixa, se observa pouca variação percentual das frequências naturais acopladas em relação às de origem, em média -1,33 % para os modos predominantemente estruturais e -0,39 % para os modos predominantemente fluidos, para as vinte primeiras frequências consideradas.

Na minimização da primeira frequência natural acoplada do tipo estrutural, ou quarto modo acoplado, se observa que o quarto modo acoplado passa a ter o fluido como dominante ao invés da estrutura, e a frequência diminui de 234,34 Hz para 228,27 Hz, constituindo uma variação de -6,07 Hz (-2,59%). Como não existe controle explícito do cruzamento dos modos, observa-se que o quarto modo acoplado não otimizado do tipo predominante estrutural, assume o posto do terceiro modo após a otimização, diminuindo de 234,34 Hz para 194,24 Hz, constituindo uma variação de -40,1 Hz (-17,11%).

Na minimização da massa do sistema acústico-estrutural caixa, se observa que a massa estrutural diminui de 121,448 kg para 62,6123 kg, caracterizando uma redução de 58,83 kg (48,5%).

A estrutura de uma cabine veicular formada pelo chassi e carroceria é modelada com vigas e chapas respectivamente, enquanto a cabine acústica é modelada com elementos do tipo fluido. A média da variação percentual das frequências acopladas em relação às frequências de origem é -0,56%.

De uma maneira geral, as franjas de pressão no fluido seguem a forma da deformação da estrutura ou vice-versa, a partir do qual, juntamente com a análise dos valores das frequências acopladas obtidas, se pode concluir se é a estrutura ou o fluido quem predomina no modo acoplado.

Constatou-se simplicidade e eficiência da formulação $u-p$ para a análise modal da interação fluido-estrutura em sistemas vibroacústicos tridimensionais.

A vantagem da formulação $u-p$ é o baixo número de graus de liberdade necessários para resolver o problema, enquanto a principal desvantagem é a falta de simetria do autoproblema, o que impede a utilização de algoritmos especializados para matrizes simétricas.

A implementação computacional da formulação $u-p$ dentro do ambiente MATLAB / MEFLAB, dos elementos finitos “chapa” e “hexaedro retangular”, fornece total domínio dos algoritmos e variáveis consideradas, e seus resultados fornecem importantes parâmetros de compreensão e comparação, em relação aos resultados obtidos com programas comerciais disponíveis que utilizam MEF.

Os resultados do MEFLAB se equivaleram na totalidade dos casos apresentados, com os resultados encontrados mediante simulação pelo NASTRAN, o que comprova sua eficiência e precisão e abre possibilidade para futuros trabalhos com outros tipos de formulações e elementos finitos, que hoje não são utilizados nos programas comerciais disponíveis.

A aplicação da otimização numérica em sistemas vibroacústicos tridimensionais, pela declaração das variáveis de projeto em funções objetivo ligadas a otimização da massa da estrutura, ou a otimização de alguma frequência, possibilita apreciados resultados de otimização dimensional.

Como principal contribuição, pode-se citar a programação de dois elementos finitos no MEFLAB e a demonstração de que é possível otimizar estruturas acopladas avaliando inclusive possíveis cruzamentos de modos acoplados

Algumas sugestões para continuidade da pesquisa são esboçadas na seqüência:

Reduzir o modelo da cabine veicular, para elevar os valores das frequências acopladas com predominância estrutural, e diminuindo a quantidade de frequências acopladas analisadas.

Implementar experimentalmente modelos simples para verificação de resultados.

Testar algoritmos de convergência global, a exemplo dos algoritmos genéticos, para avaliar a existência de ótimos globais.

Incorporar fontes acústicas na modelagem e propriedades de absorção sonora.

Avaliar a função de resposta em frequência de sistemas acoplados.

Utilizar outras variáveis de controle, principalmente referidas ao domínio fluido, por exemplo, propriedades de absorção sonora.

Considerar outras funções objetivo, por exemplo, do tipo multiobjetivo.

7. Referências Bibliográficas

ANDRIANARISON, O.; OHAYON, R., 2006. **Reduced models for modal analysis of fluid–structure systems taking into account compressibility and gravity effects.** International Journal for Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering 195, 5656–5672.

AUWERAER, H.V.; WYCKAERT, K., 2005. **Sound quality: Perception, analysis and engineering.** International Seminar on Advanced and Numerical Acoustics.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M., 1993. **Nonlinear programming.** John Wiley & Sons, Inc., 638p.

BLEVINS, R. D., 1995. **Formulas for natural frequency and mode shape.** Krieger Publishing Company.

CHRISTENSEN, S.T.; SOROKIN, S.V.; OLHOFF N., 1998. **On analysis and optimization in structural acoustics.** International Journal for Structural Optimization 16, 83-95.

DAVID, J.M.; MENELLE, M., 2007. **Validation of a modal method by use of an appropriate static potential for a plate coupled to a water-filled cavity.** International Journal of Sound and Vibration 301, 739-759.

DE MELLO, R., 2003. **Análise da sensibilidade do campo acústico veicular à excitação do sistema de transmissão.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 245p.

DEU, J.F.; LARBI, W.; OHAYON, R., 2007. **Piezoelectric structural acoustic problems: Symmetric variational formulations and finite element results.** International Journal for Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering.

DHATT, G., TOUZOT, G., 1984. **The finite element method displayed.** John Wiley & Sons, 509p.

- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T., 1992. **Introduction to fluid mechanics**. John Wiley & Sons, Inc., 662p.
- FRITZE, D.; MARBURG, S.; HARDTKE H.J., 2005. **Fem–Bem-coupling and structural–acoustic sensitivity analysis for shell geometries**. International Journal for Computers and Structures 83, 143–154.
- GALLI, L. A. F., 1995. **Estudo do comportamento dinâmico de sistemas acoplados fluido-estrutura utilizando uma formulação simétrica em potenciais de velocidade**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil, 111p.
- GERGES, S.N.Y., 2000. **Estado da Arte para Solução de Problemas Vibroacústicos por Métodos de Elementos Numéricos**. TecniAcústica Madri 2000.
- KAMBOUCHEV, N.; NOELS, L.; RADOVITZKY, R., 2007. **Numerical simulation of the fluid–structure interaction between air blast waves and free-standing plates**. International Journal for Computers and Structures 85, 923-931.
- KINSLER, L. E.; FREY, A. R., COPPENS, A. B., SANDERS, J. V., 1982. **Fundamentals of acoustics**. John Wiley & Sons, 480p.
- KRAL, R.; KREUZER, E., 1998. **O Multibody systems and fluid-structure interactions with application to floating**. Ocean Engineering II – Mechanics, Technical University Hamburg-Harburg, Germany.
- LUENBERGER, D. G., 1989. **Linear and nonlinear programming**. Addison-Wesley Publishing Company, 491p.
- MORAND, H. J.-P.; OHAYON, R., 1995. **Fluid structure interaction**. John Wiley & Sons, 212p.
- MSC SOFTWARE, 1996. **NAS115 - Fluid-structure analysis using MSC.Nastran - Course Notes**. The MacNeal-Schwendler Corporation.

- PANI, P.K; BHATTACHARYYA, S.K., 2007. **Fluid-structure interaction effects on dynamic pressure of a rectangular lock-gate**. International Journal of Finite Elements in Analysis and Design.
- PARRINELLO, F.; BORINO, G., 2007. **Lagrangian finite element modelling of dam–fluid interaction: Accurate absorbing boundary conditions**. International Journal of Computers and Structures 85, 932-943.
- PAVANELLO, R., 1991. **Contribution a l'étude hydroelastique des structures a symetrie cyclique**. Thèse de Docteur, Spécialité: Mécanique, L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, 198p.
- PETYT, M., 1998. **Introduction to finite element vibration analysis**. Cambridge University Press, 558p.
- PETYT, M.; MIRZA, W.H., 1972. **Vibration of column supported floor slabs**. Journal of Sound and Vibration 21, 355-364.
- REID, R.E., 1965. **Comparison of methods in calculating frequencies of corner supported rectangular plates**. NASA TN D-3030.
- SHI, Q. et al., 1997. **Holographic neural network approximations for acoustics optimization**. Tokyo Institute of Technology, Vehicle Design Department, Nissan Motor Co., Japan.
- SIGRIST, J.F.; GARREAU, S., 2007. **Dynamic analysis of fluid–structure interaction problems with modal methods using pressure-based fluid finite elements**. International Journal of Finite Elements in Analysis and Design 43, 287-300.
- SRIVASTAVA, A.; MISHRA, B.K.; JAIN, S.C., 2007. **Effect of enclosed fluid on the dynamic response of inflated torus**. International Journal of Sound and Vibration 309, 320-329.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L., 1989. **The finite element method**. McGraw-Hill, v.2.

8. Anexos

8.1 Exemplo de uma programação de elementos finitos implementada no Matlab

% Function placa retangular. caso dinâmico

```
function [ke,me,fe,kk,nk]=pla_rect(inci,i,Tmat,Tgeo,nos_el,cord,ID);
```

```
ke=zeros(12,12);
```

```
me=zeros(12,12);
```

```
matel=inci(2,i); % Numero da tabela de material do elemento
```

```
E=Tmat(1,matel); % Módulo de Young (sempre na linha 1)
```

```
Mi=Tmat(3,matel); % Módulo de Poisson (sempre na linha 3)
```

```
rho_s=Tmat(4,matel); % Densidade do material (sempre na linha 4)
```

```
geoel=inci(3,i); % Número de tabela de geometria do elemento
```

```
t=Tgeo(1,geoel); % Espessura da placa
```

```
h=t;
```

```
for k=1:nos_el
```

```
no=inci((3+k),i);
```

```
eval(['x' int2str(k) '=cord(no,1);']);
```

```
eval(['y' int2str(k) '=cord(no,2);']);
```

```
eval(['z' int2str(k) '=cord(no,3);']);
```

```
end
```

```
% Matriz de rigidez elementar num sistema de coordenadas elementar
```

```
a=abs((x3-x1)/2);
```

```
b=abs((y3-y1)/2);
```

```
%c=(z5-z1)/2;
```

```
coef_k=E*h^3/(48*(1-Mi^2)*a*b);
```

```
alfa=a/b;
```

```
beta=b/a;
```

```
k11=[4*(beta^2+alfa^2)+2/5*(7-2*Mi) 2*(2*alfa^2+1/5*(1+4*Mi))*b 2*(-2*beta^2-1/5*(1+4*Mi))*a 2*(2*alfa^2+1/5*(1+4*Mi))*b 4*(4/3*alfa^2+4/15*(1-Mi))*b^2 -4*Mi*a*b 2*(-2*beta^2-1/5*(1+4*Mi))*a -4*Mi*a*b 4*(4/3*beta^2+4/15*(1-Mi))*a^2];
```

```
k21=[-(2*(2*beta^2-alfa^2)+2/5*(7-2*Mi)) 2*(alfa^2-1/5*(1+4*Mi))*b 2*(2*beta^2+1/5*(1-Mi))*a 2*(alfa^2-1/5*(1+4*Mi))*b 4*(2/3*alfa^2-4/15*(1-Mi))*b^2 0 -2*(2*beta^2+1/5*(1-Mi))*a 0 4*(2/3*beta^2-1/15*(1-Mi))*a^2];
```

```
k31=[-(2*(beta^2+alfa^2)-2/5*(7-2*Mi)) 2*(-alfa^2+1/5*(1-Mi))*b 2*(beta^2-1/5*(1-Mi))*a 2*(alfa^2-1/5*(1-Mi))*b 4*(1/3*alfa^2+1/15*(1-Mi))*b^2 0 2*(-beta^2+1/5*(1-Mi))*a 0 4*(1/3*beta^2+1/15*(1-Mi))*a^2];
```

```
k41=[(2*(beta^2-2*alfa^2)-2/5*(7-2*Mi))  2*(-2*alfa^2-1/5*(1-Mi))*b  2*(-
beta^2+1/5*(1+4*Mi))*a  2*(2*alfa^2+1/5*(1-Mi))*b  4*(2/3*alfa^2-1/15*(1-Mi))*b^2  0
2*(-beta^2+1/5*(1+4*Mi))*a  0  4*(2/3*beta^2-4/15*(1-Mi))*a^2];
```

```
I1=[-1 0 0  0 1 0  0 0 1];
```

```
I2=[ 1 0 0  0 -1 0  0 0 1];
```

```
I3=[ 1 0 0  0 1 0  0 0 -1];
```

```
k22=I3'*k11*I3;
```

```
k32=I3'*k41*I3;  k33=I1'*k11*I1;
```

```
k42=I3'*k31*I3;  k43=I1'*k21*I1;  k44=I2'*k11*I2;
```

```
ke=coef_k*[k11 k21' k31' k41'      k21 k22 k32' k42'      k31 k32 k33 k43'      k41
k42 k43 k44];
```

```
% Matriz de massa elementar num sistema de coordenadas elementar
coef_m=(rho_s*h*a*b)/6300;
```

```
m11 = [3454  922*b  -922*a  1226  398*b  548*a
        922*b  320*b^2 -252*a*b  398*b  160*b^2  168*a*b
        -922*a -252*a*b  320*a^2 -548*a -168*a*b -240*a^2
        1226  398*b  -548*a  3454  922*b  922*a
        398*b  160*b^2 -168*a*b  922*b  320*b^2  252*a*b
        548*a  168*a*b -240*a^2  922*a  252*a*b  320*a^2];
```

```
m21 = [ 394  232*b  -232*a  1226  548*b  398*a
        -232*b -120*b^2  112*a*b -548*b -240*b^2 -168*a*b
        232*a  112*a*b -120*a^2  398*a  168*a*b  160*a^2
        1226  548*b  -398*a  394  232*b  232*a
        -548*b -240*b^2  168*a*b -232*b -120*b^2 -112*a*b
        -398*a -168*a*b  160*a^2 -232*a -112*a*b -120*a^2];
```

```
m22 = [3454  -922*b  922*a  1226  -398*b  -548*a
        -922*b  320*b^2 -252*a*b -398*b  160*b^2  168*a*b
        922*a -252*a*b  320*a^2  548*a -168*a*b -240*a^2
        1226  -398*b  548*a  3454  -922*b  -922*a
        -398*b  160*b^2 -168*a*b -922*b  320*b^2  252*a*b
        -548*a  168*a*b -240*a^2 -922*a  252*a*b  320*a^2];
```

```
me=coef_m*[m11 m21'
           m21 m22];
```

```
% Formação de indicador do numero de equações do elemento
% Ordem nk = 12 (número de graus de liberdade do elemento)
nk=12;
```

```
no1=inci(4,i);
```

```
no2=inci(5,i);
```

```
no3=inci(6,i);
```

```
no4=inci(7,i);
```

```
kk(1)=ID(3,no1);
kk(2)=ID(4,no1);
kk(3)=ID(5,no1);
kk(4)=ID(3,no2);
kk(5)=ID(4,no2);
kk(6)=ID(5,no2);
kk(7)=ID(3,no3);
kk(8)=ID(4,no3);
kk(9)=ID(5,no3);
kk(10)=ID(3,no4);
kk(11)=ID(4,no4);
kk(12)=ID(5,no4);
```

```
fe=0;
```

```
% Elemento hexaedro retangular de três dimensões. Análise acústica. Dinâmica.
function [ke,me,fe,kk,nk]=hexret3d(inci,i,Tmat,Tgeo,nos_el,cord,ID);
```

```
ke=zeros(8,8);
me=zeros(8,8);
T=zeros(8,8);
```

```
matel=inci(2,i); % Numero da tabela de material do elemento
rho_f=Tmat(4,matel); % Densidade do material (sempre na linha 4)
vel=Tmat(5,matel); % Velocidade do som no fluido (sempre na linha 5)
```

```
geael=inci(3,i); % Número de tabela de geometria do elemento
```

```
for k=1:nos_el
    no=inci((3+k),i);
    eval(['x' int2str(k) '=cord(no,1);'])
    eval(['y' int2str(k) '=cord(no,2);'])
    eval(['z' int2str(k) '=cord(no,3);'])
end
```

```
% Matriz de rigidez elementar num sistema de coordenadas elementar
a=(x2-x1)/2;
b=(y3-y2)/2;
c=(z5-z1)/2;
```

```
coef_k=1/rho_f;
%coef_k=(a*b*c)/rho_f;
ke = coef_k*[ 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2)    1/9/a/b/c*(-
2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2)    1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2)
1/9/a/b/c*(b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2)    -1/9/a/b/c*(-b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2)    -
1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2)    -1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2)    -
1/18/a/b/c*(-b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2)
```

$$\begin{aligned} & 1/9/a/b/c*(-2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 1/9/a/b/c*(b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) - \\ & 1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/9/a/b/c*(-b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) - \\ & 1/18/a/b/c*(-b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(b^2*c^2- \\ & 2*a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(- \\ & 2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(- \\ & b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/9/a/b/c*(-b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad - \\ & 1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/9/a/b/c*(b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2- \\ & 2*a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(-2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(-b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2) - \\ & 1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) - \\ & 1/9/a/b/c*(-b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -1/9/a/b/c*(-b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2- \\ & a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(- \\ & b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(- \\ & 2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 1/9/a/b/c*(b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/9/a/b/c*(-b^2*c^2- \\ & a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(-b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2) - \\ & 1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(-2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(- \\ & b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad -1/9/a/b/c*(-b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) - \\ & 1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad 1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) - \\ & 1/9/a/b/c*(b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 1/9/a/b/c*(-2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -1/18/a/b/c*(-b^2*c^2+2*a^2*c^2+2*a^2*b^2) - \\ & 1/18/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \quad -1/18/a/b/c*(2*b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) - \\ & 1/9/a/b/c*(-b^2*c^2-a^2*c^2+2*a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 1/18/a/b/c*(-2*b^2*c^2-2*a^2*c^2+a^2*b^2) \quad 1/9/a/b/c*(-2*b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2) \\ & 2/9/a/b/c*(b^2*c^2+a^2*c^2+a^2*b^2)]; \end{aligned}$$

% Matriz de massa elementar num sistema de cordenadas elementar

coef_m=(a*b*c)/(27*rho_f*vel^2);

me = coef_m*[8 4 2 4 4 2 1 2

4 8 4 2 2 4 2 1

2 4 8 4 1 2 4 2

4 2 4 8 2 1 2 4

4 2 1 2 8 4 2 4

2 4 2 1 4 8 4 2

1 2 4 2 2 4 8 4

2 1 2 4 4 2 4 8];

```
% Formacao de indicador do número de equações do elemento.
```

```
nk=8;
```

```
nos=inci(4:11,i);
```

```
aux=0;
```

```
for no=1:8
```

```
    for gdl=1:1
```

```
        kk(gdl+aux)=ID(gdl,nos(no));
```

```
    end
```

```
    aux=aux+gdl;
```

```
end
```

```
fe=0;
```

```
% Cria a matriz dos elementos de interface placa retangular e sólido hexaédrico retangular
```

```
function [cfse,kk,rhof]=fs_plher(inci_int,inci,j,Tmat,Tgeo,coord,ID);
```

```
% Determinacao do rhof do elemento fluido no contato
```

```
el_fl=inci_int(3,j);
```

```
matel=inci(2,el_fl); % Numero de tabela de material do elemento
```

```
rhof=Tmat(4,matel); % Densidade do material (sempre na linha 4)
```

```
for k=1:4 % numero de nos do elemento estrutural
```

```
    no=inci_int((3+k),j);
```

```
    eval(['x' int2str(k) '=cord(no,1);']);
```

```
    eval(['y' int2str(k) '=cord(no,2);']);
```

```
end
```

```
% Comprimentos meios do elemento - área de contato
```

```
a=(x3-x1)/2;
```

```
b=(y3-y1)/2;
```

```
% Matriz de interface fluido-estrutura elementar num sistema de cordenadas elementar
```

```
% No caso de Chargin se multiplica por L * sqrt(width) -> L * sqrt (25.4 e-3 [m])
```

```
%cfse = L * [ 0 7/20 L/20 0 3/20 -L/30
```

```
%          0 3/20 L/30 0 7/20 -L/20 ];
```

```
cfse=zeros(8,12);
```

```
cfse(1,1)=11/45*a*b;
```

```
cfse(2,1)=19/180*a*b;
```

```
cfse(3,1)=2/45*a*b;
```

```
cfse(4,1)=19/180*a*b;
```

```
cfse(1,2)=1/15*a*b^2;
```

```
cfse(2,2)=1/30*a*b^2;
```

```
cfse(3,2)=1/45*a*b^2;
```

```
cfse(4,2)=2/45*a*b^2;
```

```

cfse(1,3)=-1/15*a^2*b;
cfse(2,3)=-2/45*a^2*b;
cfse(3,3)=-1/45*a^2*b;
cfse(4,3)=-1/30*a^2*b;
cfse(1,4)=19/180*a*b;
cfse(2,4)=11/45*a*b;
cfse(3,4)=19/180*a*b;
cfse(4,4)=2/45*a*b;
cfse(1,5)=1/30*a*b^2;
cfse(2,5)=1/15*a*b^2;
cfse(3,5)=2/45*a*b^2;
cfse(4,5)=1/45*a*b^2;
cfse(1,6)=2/45*a^2*b;
cfse(2,6)=1/15*a^2*b;
cfse(3,6)=1/30*a^2*b;
cfse(4,6)=1/45*a^2*b;
cfse(1,7)=2/45*a*b;
cfse(2,7)=19/180*a*b;
cfse(3,7)=11/45*a*b;
cfse(4,7)=19/180*a*b;
cfse(1,8)=-1/45*a*b^2;
cfse(2,8)=-2/45*a*b^2;
cfse(3,8)=-1/15*a*b^2;
cfse(4,8)=-1/30*a*b^2;
cfse(1,9)=1/45*a^2*b;
cfse(2,9)=1/30*a^2*b;
cfse(3,9)=1/15*a^2*b;
cfse(4,9)=2/45*a^2*b;
cfse(1,10)=19/180*a*b;
cfse(2,10)=2/45*a*b;
cfse(3,10)=19/180*a*b;
cfse(4,10)=11/45*a*b;
cfse(1,11)=-2/45*a*b^2;
cfse(2,11)=-1/45*a*b^2;
cfse(3,11)=-1/30*a*b^2;
cfse(4,11)=-1/15*a*b^2;
cfse(1,12)=-1/30*a^2*b;
cfse(2,12)=-1/45*a^2*b;
cfse(3,12)=-2/45*a^2*b;
cfse(4,12)=-1/15*a^2*b;

```

% Formação de indicador do número de equações do elemento.

```

no1=inci_int(4,j);
no2=inci_int(5,j);
no3=inci_int(6,j);
no4=inci_int(7,j);
no5=inci_int(8,j);
no6=inci_int(9,j);
no7=inci_int(10,j);
no8=inci_int(11,j);

```

% Estrutura

```
kk(1)=ID(3,no1); % uz
kk(2)=ID(4,no1); % rx
kk(3)=ID(5,no1); % ry
kk(4)=ID(3,no2); % uz
kk(5)=ID(4,no2); % rx
kk(6)=ID(5,no2); % ry
kk(7)=ID(3,no3); % uz
kk(8)=ID(4,no3); % rx
kk(9)=ID(5,no3); % ry
kk(10)=ID(3,no4); % uz
kk(11)=ID(4,no4); % rx
kk(12)=ID(5,no4); % ry
```

% Fluido

```
kk(13)=ID(1,no5); % p no lugar de ux
kk(14)=ID(1,no6); % p no lugar de ux
kk(15)=ID(1,no7); % p no lugar de ux
kk(16)=ID(1,no8); % p no lugar de ux
```