

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Amplitudes de espalhamento na Cromodinâmica Quântica em altas energias no formalismo de dipolos *

João Thiago de Santana Amaral

Tese de Doutorado realizada sob orientação da Professora Dra. Maria Beatriz Gay Ducati e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Porto Alegre
2008

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Este trabalho é dedicado

A Maria Carmelita, minha mãe.

Agradecimentos

Nos últimos anos tenho usado menos as palavras, porém não posso deixar de fazer alguns agradecimentos:

Primeiramente agradeço a Maria Carmelita, minha mãe, a quem dedico esta tese. Uma mãe formidável, exemplo de força, luta e amor. Obrigado por fazer de mim o que sou. Agradeço a minha amada irmã Camila, amiga e companheira, por todos esses anos de convivência, paciência e carinho. Vocês são as mulheres da minha vida. Agradeço ao meu pai João pelo amor e apoio em todos os momentos, aos meus avós, tios e primos, seres que tanto amo e que são o que tenho de mais importante na vida.

Agradeço a Maria Beatriz, minha orientadora, pelos ensinamentos, pela amizade e pela paciência durante esses anos de doutorado. As discussões, as conversas de meio ou fim de tarde, as reuniões, os seminários, as confraternizações, todos esses momentos foram e são sinônimos de grande aprendizado para toda a vida. Obrigado pelas oportunidades e temas de pesquisa oferecidos e pelo ambiente científico construído no GFP AE, favorável em todos os aspectos.

Agradeço a Stoian Ivanov Zlatev, meu orientador de mestrado, que ajudou a tornar real a minha vinda a Porto Alegre, não há palavras para agradecer pela força incrível que ele me deu.

Agradeço à minha namorada Cacyara que eu adoro, um anjo que apareceu na minha vida neste ano. Obrigado pelo seu sorriso, pelo seu olhar, pelo seu carinho, pela paciência, especialmente neste ano tão decisivo e repleto de emoções. Obrigado por me fazer tão bem e feliz.

Agradeço a Alan e Samuel, amigos e irmãos, sempre do meu lado na alegria e na tristeza, desde o início dessa jornada. Simplesmente referências de amizade. Sem eles, tudo seria muito mais difícil. Agradeço a todos os amigos que fiz no IF, Aninha, Karen (grandes amores...), as famílias das salas M204 e M208, quantos felizes momentos dos quais sinto tanta falta, "mermão" Fábio Bemfica, enfim, todos aqueles que cruzaram meu caminho de forma tão bela. Agradeço também aos amigos e companheiros do Movimento da Quarta, nossa, quantas saudades!

Agradeço a todos os colegas e amigos do GFP AE, que contribuíram tanto, e de tantas maneiras, para a consolidação deste trabalho: Cristiano, Eduardo, Emmanuel, Gustavo,

Mairon, Magno, Victor, Thunder e Werner. Agradeço especialmente ao amigo Marcos André, um cara fantástico que sempre me apoiou muito desde os primeiros contatos e com quem aprendi bastante. Um exemplo de amizade e caráter.

Agradeço a todos os que iluminaram de forma tão maravilhosa os cinco meses que passei na França: os inesquecíveis Alex, Milena, Thalita, Juliano, Marcelo Napa, Stephi, a grande e também inesquecível Família Lotecolim que tanto alegrou os meus dias, assim como Marie, a bela, meiga e iluminada garotinha ruiva. Agradeço a Gregory Soyez, grande amigo e colaborador, grande companheiro nos bons e maus momentos, e a Edmond Iancu, com quem aprendi tanto em tão pouco tempo, um ser ímpar e uma mente brilhante.

Agradeço de forma bastante especial a Verinha, uma amiga, uma irmã... o mundo seria mais feliz se todos fossem metade do que Verinha é. Ela representa muito para mim, e será assim por toda a vida. Devo a ela a oportunidade de ter conhecido uma turma fantástica de biólogos, especialmente os amigos para toda a vida, Mateus, Manoel e Lu.

Agradeço aos amigos Célia e Márcio, meus afilhados e (felizmente) amigos inseparáveis. Sou muito feliz por tê-los ao meu lado. Doze anos de amizade e cumplicidade em todos os momentos. Amo vocês.

Agradeço a Nisse, Alex, Mauro e Lucas, grandes amigos com quem morei durante alguns bons anos, não há palavras para expressar o quanto foi bom compartilhar o dia-a-dia com vocês. Nisse, saudades das conversas na cozinha! Não posso esquecer de Michel, grande parceiro e, assim como eu, grande fã de Carga Pesada.

Agradeço a Leandro, amigo e parceiro em todas as empreitadas em qualquer hora do dia, um cara a quem se pode confiar a própria vida. Muito obrigado, meu amigo! Agradeço também a Adri, mulher de muita força e garra, sempre cuidando dos que estão à sua volta. Fui muito feliz dividindo o apê com os dois. Aliás, agradeço a Leandro duplamente, pois além de tudo me trouxe dois presentes: Cacy, minha musa, e Mari, sua alma gêmea, uma amiga mais que especial, sempre trazendo emoções para as nossas vidas. Beijo, menina!

Agradeço a Domingos, Kátia e Lu Adam, amigos especiais que, apesar dos contatos não muito frequentes, sempre estão na minha mente e no meu coração.

Agradeço aos meus estudantes pelos desafios e pela grande oportunidade de aprender com eles.

Agradeço a todos os amigos de Aracaju, todos mesmo. Vocês são a minha base, são parte de mim. Obrigado por existirem.

Naturalmente, muito obrigado também aos professores e funcionários do IF, que permitiram sempre um ambiente de trabalho formidável. Agradeço também ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos os que passaram pela minha vida, seja por alguns minutos, seja por anos. Vocês são parte da minha história.

Resumo

Numa colisão hadrônica em altas energias, a densidade de quarks e glúons dentro do hádron cresce rapidamente, o que leva também ao crescimento das seções de choque. Esse comportamento, previsto pela Cromodinâmica Quântica (QCD), foi revelado experimentalmente pela primeira vez através das medidas do espalhamento profundamente inelástico (DIS) elétron-próton, o processo mais simples que descreve as propriedades da QCD no regime de altas energias.

No formalismo de dipolos, as seções de choque do DIS podem ser expressas em termos da amplitude de espalhamento dipolo-próton, cuja evolução com a energia é descrita pela QCD perturbativa por meio de equações de evolução não-lineares. A mais simples dessas equações é a equação de Balitsky-Kovchegov (BK), que consiste em uma aproximação de campo médio das equações de Balitsky-JIMWLK e cujas principais propriedades são extraídas no espaço de momentum. A partir dessas propriedades, desenvolvemos o modelo AGBS para a amplitude de espalhamento dipolo-próton no espaço de momentum. Esse modelo fenomenológico é utilizado para descrever medidas do espalhamento profundamente inelástico (DIS) da função de estrutura do próton F_2 . A descrição dos dados mais recentes do DIS é realizada através do procedimento de ajuste e inclui a contribuição de quarks pesados. Uma análise similar, usando o mesmo modelo e o mesmo conjunto de dados de F_2 , inclui o efeito das flutuações no número de glúons, cuja importância foi descoberta apenas recentemente.

Devido à complexidade das equações da QCD para as amplitudes, alguns modelos simples de partículas têm sido desenvolvidos com o objetivo de compreender melhor a evolução e o espalhamento na QCD em altas energias. Na segunda parte da tese, desenvolvemos um desses modelos, um modelo estocástico (1+1)-dimensional, que reproduz a evolução e espalhamento na QCD em altas energias, no caso com parâmetro de impacto fixo. Uma das dimensões corresponde à rapidez, enquanto a outra corresponde ao logaritmo do inverso do tamanho transversal de um dipolo. O modelo exibe um mecanismo de saturação similar à saturação gluônica na QCD, assim como todas as características qualitativas esperadas na QCD, tanto em relação aos aspectos de campo médio como aos efeitos de flutuações com parâmetro de acoplamento fixo. O modelo se encontra na classe de universalidade do processo de reação-difusão, como também esperado para a QCD. As equações de evolução para as amplitudes geradas por este modelo aparecem como uma extensão natural das equações Balitsky-JIMWLK da QCD, nas quais o alvo e o projétil são tratados simetricamente.

Abstract

In a high energy hadron collision the density of quarks and gluons inside the hadron grows fast, which leads to the growth of the cross sections. This behaviour, predicted by Quantum Chromodynamics (QCD), was experimentally revealed for the first time through the measurements of electron-proton deep inelastic scattering (DIS), the simplest process which describes the properties of QCD in the high energy regime.

Within the dipole picture, the DIS cross sections can be expressed in terms of the dipole-proton scattering amplitude, whose evolution with energy is described by perturbative QCD through nonlinear evolution equations. The simplest of them is the Balitsky-Kovchegov (BK) equation, which consists in a mean field approximation of the Balitsky-JIMWLK equations and whose main properties are extracted in momentum space. From these properties, we develop the AGBS model for the dipole-proton scattering amplitude in momentum space. This phenomenological model is used to describe measurements of deep inelastic scattering (DIS) of the F_2 proton structure function. The description of the most recent DIS data is done by the fitting procedure and includes heavy quark contribution. A similar analysis, using the same model and the same data set, includes the effect of the gluon number fluctuations, whose importance has been only recently discovered.

Because of the complexity of the QCD equations for the amplitudes, some simple particle models have been developed aiming to better understand the evolution and scattering in QCD at high energies. In the second part of the thesis, we develop one of these models, a (1+1)-dimensional stochastic model, which reproduces the QCD evolution and scattering at high energies at fixed impact parameter. One of the dimensions corresponds to rapidity, while the another corresponds to the logarithm of the inverse of the size of a dipole. The model exhibits a saturation mechanism similar to the gluon saturation in QCD, as well as all the qualitative features expected in QCD, concerning both mean field aspects and the effects of fluctuations at fixed coupling. The model appears to be in the universality class of the reaction-diffusion process, as also expected for QCD. The evolution equations for the amplitudes generated by the model appear a natural extension of the QCD Balitsky-JIMWLK equations, in which the target and the projectile are symmetrically treated.

Artigos relacionados

1. J. T. de Santana Amaral, M. A. Betemps, M. B. Gay Ducati and G. Soyez, *Phys. Rev. D* **76**, 094018 (2007).
2. E. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, J. T. de Santana Amaral, *Eur. Phys. J. C* **58**, 9 (2008).
3. E. Iancu, J. T. de Santana Amaral, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys. A* **786**, 131 (2007).

Artigos publicados em anais de eventos

1. E. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, and J. T. de Santana Amaral, *Braz. J. Phys.* **38**, 3B, 483 (2008).
2. J. T. de Santana Amaral, M. B. Gay Ducati, M. A. Betemps and G. Soyez, *Int. J. Mod. Phys. E* **16**, 2818 (2007).
3. J. T. de Santana Amaral, *Int. J. Mod. Phys. E* **16**, 2814 (2007).
4. J. T. de Santana Amaral, M. A. Betemps, M. B. Gay Ducati and G. Soyez, *Braz. J. Phys.* **37**, 648 (2007).

Conteúdo

1. Introdução	1
2. A Cromodinâmica Quântica no limite de altas energias	7
2.1 Propriedades da QCD	7
2.2 O espalhamento profundamente inelástico	10
2.3 A função de estrutura F_2	14
2.3.1 O modelo de pártons	14
2.3.2 F_2 na QCD: o referencial de momentum infinito	15
2.3.3 O regime de altas energias	18
3. Evolução das amplitudes de espalhamento na QCD	22
3.1 Colisão entre dois hádrons em altas energias	22
3.1.1 Cinemática da colisão	22
3.1.2 Descrição da colisão	24
3.1.3 Intervalo de rapidez	25
3.2 Espalhamento dipolo-hádron	26
3.3 O formalismo de dipolos e a equação BFKL	28
3.4 A equação JIMWLK	32
3.5 Hierarquia de Balitsky	34
3.6 A equação BK	37
3.7 Para além das equações de Balitsky-JIMWLK: as flutuações	42
3.7.1 As equações de laços de pomeron	42
3.7.2 Resultados a partir da sFKPP e consequências para a QCD	47
3.7.3 O escalamento difusivo	48
4. Fenomenologia aplicada ao DIS: formalismo de dipolos	51
4.1 DIS no referencial de dipolo	51
4.2 Seção de choque σ_{dip} : fenomenologia	54
4.2.1 O modelo GBW	55
4.2.2 O modelo IIM	56

4.3	O modelo AGBS	57
4.3.1	A parametrização para \tilde{T}	58
4.4	Descrição dos dados para γ^*p	59
4.4.1	Conjunto de dados	59
4.4.2	Resultados	60
4.5	O efeito das flutuações	64
4.5.1	Conjunto de dados e resultados	66
5.	Um modelo unidimensional para a QCD a altas energias	70
5.1	Construção do modelo	70
5.2	Equações de evolução para os observáveis	77
5.2.1	Densidades de número de partículas	77
5.3	O limite para o contínuo	79
5.3.1	Amplitudes de espalhamento	79
5.4	Resultados analíticos	83
5.4.1	Evolução BFKL do modelo	84
5.4.2	Correções de unitariedade na aproximação de campo médio	85
5.4.3	Flutuações no número de partículas	87
5.5	Resultados numéricos	89
6.	Conclusões	93
A.	Equivalência entre as equações BK e FKPP	97
B.	A função de estrutura F_2 no espaço de momentum	100
C.	Evolução de observáveis no modelo unidimensional para a QCD	109
C.1	Densidades de partículas	110
C.2	Amplitudes de Espalhamento	112

Capítulo 1

Introdução

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é uma teoria de gauge não Abelianiana que descreve as interações fortes em termos de partículas de spin 1/2 chamadas quarks e de partículas de spin 1 chamadas glúons; tanto os quarks como os glúons são também chamados de pártons e portam um número quântico adicional, a chamada carga de cor. Essa consiste em uma das principais diferenças da QCD em relação à Eletrodinâmica Quântica (QED), na qual a partícula mediadora da interação eletromagnética, o fóton, não possui carga elétrica. O grupo de gauge da QCD é o $SU(N_c)$, onde $N_c = 3$. Os quarks possuem N_c valores distintos para sua carga de cor enquanto os glúons possuem $N_c^2 - 1$ valores. Essa teoria possui duas propriedades fundamentais: a *liberdade assintótica* e o *confinamento*: quando investigamos os fenômenos descritos pela QCD em distâncias cada vez menores (ou transferências de momentum cada vez maiores), menor é o parâmetro de acoplamento α_s . Por outro lado, quando a investigação é realizada em grandes distâncias, α_s torna-se grande e as observações mostram que os estados ligados da teoria são os hádrons (prótons, nêutrons, mésons, etc.). Em pequenas distâncias, as interações são descritas em termos dos estados próprios da teoria livre, ou seja, os pártons.

A investigação da estrutura dos hádrons é realizada experimentalmente através de colisões e, naturalmente, quanto maior a energia de uma colisão hadrônica, maior a possibilidade de investigação dessa estrutura. No regime no qual o acoplamento é forte, caracterizado por uma escala de energia $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV, a capacidade de realizar cálculos é limitada; a física neste regime é chamada de não perturbativa. Algumas colisões, no entanto, envolvem transferências de momentum muito grandes em relação a Λ_{QCD} . Em tal regime, dito perturbativo, as colisões podem ser descritas através de colisões microscópicas entre pártons e as seções de choque podem ser calculadas a partir do Lagrangeano da QCD. Como nesse caso o acoplamento é fraco, $\alpha_s \ll 1$, tais cálculos são realizados usando a teoria de perturbações com respeito a α_s .

No entanto, a partir de cálculos na QCD, verifica-se que as seções de choque hadrônicas crescem com o aumento da energia. Mais especificamente, elas crescem com uma potência de s , o quadrado da energia de centro de massa do processo, o que corresponde a uma

violação do limite de Froissart, que determina que as seções de choque totais, em altas energias, devem crescer como $\ln^2 s$. Esse comportamento é comprovado experimentalmente, por exemplo, nas medidas do espalhamento profundamente inelástico (DIS) elétron-próton [1–3]. A partir destas, observa-se que a densidade partônica, especialmente de glúons, cresce com o aumento da energia. Assim, no limite de altas energias, a QCD envolve altas densidades partônicas.

Naturalmente, as seções de choque hadrônicas não podem crescer indefinidamente e em algum ponto é necessário lidar com a recombinação gluônica e espalhamentos múltiplos para que a unitariedade seja restaurada.

O processo mais simples que apresenta as principais características da QCD no limite de altas energias é o DIS. O DIS elétron-próton é descrito pela reação $ep \rightarrow eX$, ou seja, um elétron e um próton interagem, tendo como resultado o elétron e um estado hadrônico X . Tal interação é mediada por um fóton virtual γ^* com momentum (momentum transferido) q^μ . Esse processo depende de duas variáveis cinemáticas: a virtualidade do fóton $Q^2 \equiv -q^2$, que mede a resolução com a qual o fóton sonda o próton, e o chamado x de Bjorken, que está relacionado à energia do centro de massa $s = Q^2/x$, significando que o limite de altas energias corresponde ao limite de pequeno x . Usualmente introduz-se a variável chamada *rapidez* definida por $Y = \log(1/x)$.

Na figura 1.1 é possível visualizar de forma esquemática a configuração típica do próton em diferentes regiões do espaço de fase. Consideremos inicialmente o próton no caso quando tanto a virtualidade Q^2 quanto a energia (e portanto Y) são pequenas. O próton é representado por três pártons (quarks). Se a energia for mantida fixa e a virtualidade Q^2 for aumentada, aumentará também a resolução com a qual o fóton investiga a estrutura do próton, o número de pártons cresce, mas a área ocupada por eles diminui. Particularmente, o número de pártons cresce logaritmicamente enquanto seus tamanhos típicos diminuem com $1/Q^2$, de modo que o próton torna-se cada vez mais *diluído*. Este tipo de evolução é descrita na QCD pelas equações de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi, chamadas equações DGLAP [4–6].

Consideremos agora outro tipo de evolução, que consiste em manter Q^2 fixo e aumentar a energia (ou Y), ou seja, uma evolução na direção de pequeno x de Bjorken. Neste caso, observa-se um crescimento rápido da distribuição de pártons, mais especificamente glúons, porém estes ocupam aproximadamente a mesma área. Esta evolução é descrita pela equação *linear* de Balitsky-Kuraev-Fadin-Lipatov, chamada equação BFKL [7–9]. As equações DGLAP e BFKL prevêem, contudo, um crescimento indefinido das distribuições partônicas à medida que a energia aumenta, ou seja no regime de pequeno x . Em particular, a solução da equação BFKL leva a seções de choque que crescem como uma potência da energia, o que indica que há informações físicas importantes que não estão presentes na equação BFKL.

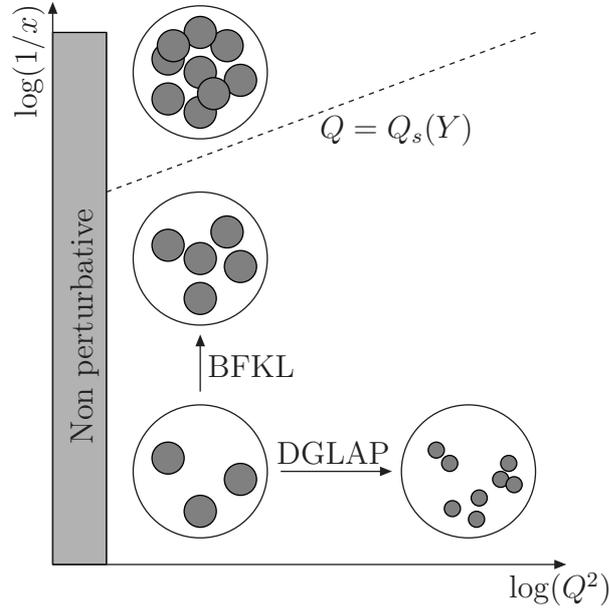


Fig. 1.1: Representação esquemática do próton no espaço de fase definido pelas variáveis do DIS, Q^2 e $Y = \log(1/x)$

A compreensão do regime de grande densidade gluônica nos espalhamentos em altas energias tem sido um dos maiores desafios da QCD perturbativa. Devido ao tamanho finito do próton, o crescimento das distribuições partônicas, e conseqüentemente, as seções de choque, não podem crescer indefinidamente. Espera-se, então que os pártons comecem a se sobrepor e efeitos de recombinação e de espalhamentos múltiplos tornem-se importantes no regime de pequeno x . A física que descreve a interação entre pártons que se sobrepõem é chamada física da *saturação partônica* [10–15] e a escala que separa os regimes diluído e saturado, é chamada de *escala de saturação*, $Q_s(x)$, que é uma função crescente da energia.

A física da saturação foi introduzida por Gribov, Levin e Ryskin [10], que consideraram o mecanismo de recombinação partônica (gluônica) na evolução na QCD em altas energias, resultando em uma equação de evolução com termos não lineares, a equação GLR. Outro formalismo, desenvolvido por Ayala Filho, Gay Ducati e Levin [13–15], estende o tratamento da QCD perturbativa até o início do regime de altas densidades partônicas através do cálculo da distribuição gluônica que é solução de uma equação não linear, a equação AGL. Esta inclui múltiplos espalhamentos da partícula virtual que prova o núcleo ou núcleon, na chamada aproximação de duplo logaritmo dominante (DLLA), levando à unitarização da distribuição gluônica no regime de pequeno x .

Mais recentemente, foi desenvolvido o formalismo denominado *Color Glass Condensate* (CGC) [16–23]. O resultado central desse formalismo é uma equação de evolução funcional,

a equação de Jalilian-Marian-Iancu-McLerran-Weiger-Leodinov-Kovner (JIMWLK) [16–24], que é equivalente a uma hierarquia infinita de equações para as funções de correlação dos campos clássicos de cor. Quando aplicada à amplitude de espalhamento entre um projétil simples e um CGC, a evolução JIMWLK reproduz as equações de Balitsky para as amplitudes de espalhamento [25–27], e por esse motivo estas são usualmente referidas como equações de Balitsky-JIMWLK. No limite de grande número de cores N_c e efetuando uma aproximação de campo médio, chega-se a uma única equação *não linear* determinística, originalmente derivada por Kovchegov [28, 29], referida como equação de Balitsky-Kovchegov (BK). A BK é a equação mais simples que descreve a QCD no limite de altas energias, e corresponde à equação (linear) BFKL, mas com um termo adicional não linear, responsável pela diminuição do crescimento da densidade de glúons, incluindo, assim como o formalismo AGL, correções de unitariedade através de efeitos (não lineares) de múltiplos espalhamentos.

Foi mostrado recentemente [30–32] que a equação BK se encontra na classe de equivalência da equação diferencial parcial não linear de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (FKPP) [33], a qual admite as chamadas soluções de ondas progressivas. Em termos de variáveis da QCD, este fato traduz-se no chamado *escalamento geométrico* [34]. O escalamento geométrico foi observado no colisor ep HERA, nas medidas do espalhamento γ^*p inclusivo [35]. Esta característica fenomenológica do espalhamento profundamente inelástico (DIS) é expressa como uma propriedade de escalamento da seção de choque fóton virtual-próton

$$\sigma^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \sigma^{\gamma^*p} \left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \right), \quad (1.0.1)$$

onde $Q_s^2 = 1/x^\lambda$ e $\lambda \sim 0,3$. Ou seja, a seção de choque depende da variável de escalamento $\tau = Q^2/Q_s^2(Y)$ ao invés de Q^2 e $Q_s^2(Y)$ separadamente (ver Figura 1.2). Como veremos, o escalamento geométrico é equivalente à formação de soluções de ondas progressivas para a equação BK.

Grande parte do progresso recente no campo da QCD em altas energias tem aparecido da gradual compreensão das analogias entre a evolução gluônica na QCD em altas energias e um processo estocástico, similar ao processo de reação-difusão $A \rightleftharpoons AA$ [36, 37]. Estas analogias levam à conclusão que as propriedades das amplitudes de espalhamento da QCD em muito altas energias, inclusive na vizinhança do limite de unitariedade, são fortemente influenciadas pelas *flutuações no número de glúons* no regime diluído, e portanto não podem ser calculadas corretamente a partir de aproximações de campo médio como a equação BK.

Foi verificado [38] que as flutuações relevantes não são levadas em conta pelas equações de Balitsky JIMWLK, e então novas equações foram propostas [38–41], levando a uma generalização da hierarquia de Balitsky-JIMWLK que abrange tanto saturação quanto efeitos de flutuações, no limite de grande N_c . Estas novas equações são chamadas de equações de

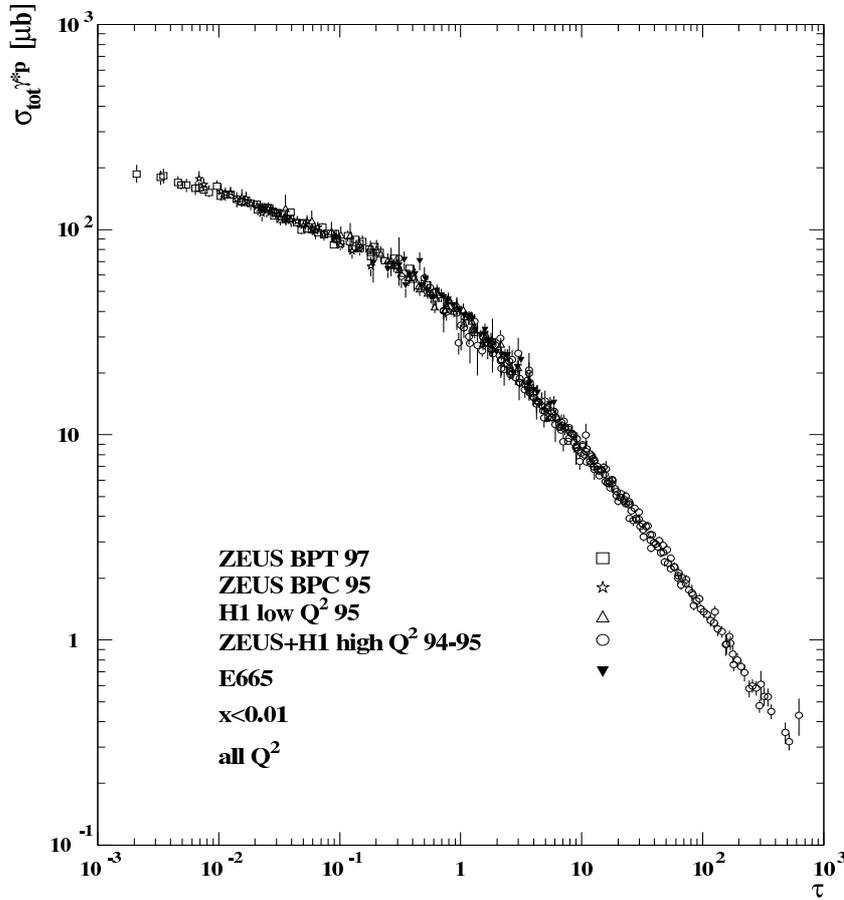


Fig. 1.2: Dados de HERA para a seção de choque para o DIS γ^*p na região $x < 0,01$ e $Q^2 < 450 \text{ GeV}^2$ versus a variável de escalamento $Q^2/Q_s^2(x)$ [35].

laços de pomerons. Estas, no entanto, são equações muito complexas, e tendo em vista esta complexidade, muitos autores têm investigado modelos mais simples com um número de dimensões transversais menor que na QCD real [42–47]. Esses modelos permitem estudos mais diretos da saturação e unitarização com o crescimento da energia.

Esta tese é organizada da seguinte maneira:

O Capítulo 2 é devotado à descrição do DIS elétron-próton. Descrevemos a cinemática do processo e introduzimos a função de estrutura do próton $F_2(x, Q^2)$, relacionada com as funções de distribuição de quarks e antiquarks dentro do próton, e diretamente proporcional à seção de choque σ^{γ^*p} . Descrevemos o referencial de momentum infinito, no qual fica explícito que o experimento do DIS fornece informação específica sobre distribuição de quarks no próton, e discutiremos o comportamento das funções de distribuição partônicas no limite de altas energias.

No Capítulo 3 apresentamos uma revisão das equações de evolução não lineares da QCD

para as amplitudes de espalhamento. Após a descrição de uma colisão entre partículas hadrônicas genéricas, consideramos a colisão entre um projétil simples, um dipolo, e um alvo suficientemente energético. Vemos de forma breve como esse alvo é descrito pelo CGC e apresentamos a equação JIMWLK. Como aplicação da equação JIMWLK, apresentamos a equação de evolução para a amplitude de espalhamento dipolo-hádron, resultando na hierarquia de Balitsky-JIMWLK, no formalismo de dipolos. Na aproximação de espalhamento fraco (alvo diluído), obtém-se a equação BFKL e realizando a aproximação de campo médio tem-se como resultado a equação BK. A equação é apresentada e as propriedades assintóticas de suas soluções são revisadas. O capítulo é finalizado com uma revisão dos efeitos das flutuações no número de glúons, que não são incluídos na hierarquia de Balitsky-JIMWLK e completamente desprezados pela equação BK.

No Capítulo 4 tratamos da aplicação do formalismo de dipolos à fenomenologia do DIS através de modelos para a seção de choque de dipolos. Com estes, é possível reproduzir as medidas do DIS para F_2 . Descrevemos dois dos principais modelos no espaço de coordenadas presentes na literatura e desenvolvemos o modelo AGBS, um novo e mais recente modelo que exprime a seção de choque de dipolos em termos da amplitude de espalhamento dipolo-próton no espaço de momentum, o primeiro da literatura. Duas abordagens distintas são realizadas: a primeira dentro do formalismo de campo médio, através das soluções assintóticas da equação BK e a segunda com a inclusão das flutuações. Os resultados experimentais são reproduzidos com sucesso e verificamos que não há evidência de efeitos das flutuações no DIS em HERA, dentro do formalismo de tal modelo.

No Capítulo 5 desenvolvemos um modelo unidimensional para a QCD em altas energias. Nesse modelo estocástico de partículas, a rapidez Y corresponde à dimensão temporal e a dimensão espacial é a posição de uma partícula em um eixo unidimensional infinito, e está associada com o tamanho de um dipolo na QCD. O modelo reproduz as características da evolução da QCD em altas energias e generaliza as equações de Balitsky-JIMWLK da QCD para as amplitudes de espalhamento, incluindo naturalmente as flutuações. Todas as propriedades esperadas através das equações resultantes são confirmadas pelos resultados numéricos, o que torna o modelo interessante para a investigação de novas estruturas na própria QCD. Este modelo foi completamente idealizado e desenvolvido durante o período no qual eu realizei um doutorado sanduíche, financiado pela CAPES, no Institut de Physique Théorique, Saclay, França, entre Junho e Outubro de 2006.

Capítulo 2

A Cromodinâmica Quântica no limite de altas energias

Neste Capítulo, após uma breve introdução à Cromodinâmica Quântica, apresentamos o espalhamento profundamente inelástico, o experimento que revelou pela primeira vez a estrutura hadrônica no limite de altas energias. Introduzimos, nesse contexto, a função de estrutura F_2 do próton, grandeza mensurável experimentalmente e cuja fenomenologia tem sido intensamente investigada. Discutimos o comportamento de F_2 , bem como da distribuição de glúons, no limite de interesse, o de altas energias.

2.1 Propriedades da QCD

O Lagrangeano da QCD, que descreve a interação de quarks e glúons é (como usual, índices repetidos são somados)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} + \sum_{\text{sabores}} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m)_{ij} \psi_j. \quad (2.1.1)$$

Antes de descrevermos os componentes desse Lagrangeano, é importante explicarmos algumas notações:

- (i) Índices do alfabeto grego ($\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$) são índices de Lorentz.
- (ii) i, j, k, l são índices de cor dos quarks ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).
- (iii) a, b, c, d, e são índices de cor dos glúons ($a, b, c, d, e = 1, \dots, 8$).
- (iv) N_c , como dito na Introdução, é o número de cores.

No Lagrangeano, ψ corresponde ao campo de quarks e $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor associado com o campo de glúons A_μ^a , e é construído a partir destes como

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.1.2)$$

onde g_s é a constante de acoplamento forte, expressa em termos de α_s por meio da equação

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}, \quad (2.1.3)$$

e f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo de cor $SU(N_c)$, que são antissimétricas sob a troca de quaisquer de dois índices e satisfazem a identidade de Jacobi

$$f_{abe}f_{ecd} + f_{cbe}f_{aed} + f_{dbe}f_{ace} = 0 \quad (2.1.4)$$

A derivada covariante D^μ possui a forma

$$(D_\mu)_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} + ig_s(t^a A_\mu^a)_{ij} \quad (2.1.5)$$

quando atua nos campos de quarks e

$$(D_\mu)_{ab} = \partial_\mu \delta_{ab} + ig_s(T^c A_\mu^c)_{ab} \quad (2.1.6)$$

quando atua nos campos de glúons. t^a e T^a são os geradores de $SU(N_c)$ nas representações fundamental e adjunta, respectivamente. Seus comutadores são

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (2.1.7)$$

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (T^a)_{bc} = -if^{abc}. \quad (2.1.8)$$

Os geradores t^a são normalizados como

$$\text{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (2.1.9)$$

e obedecem as relações

$$t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \left[\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N_c} \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \quad (2.1.10)$$

$$t_{ij}^a t_{jl}^a = C_F, \quad C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}. \quad (2.1.11)$$

para os geradores T^a , temos

$$\text{Tr}(T^a T^b) = f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}, \quad C_A = N_c. \quad (2.1.12)$$

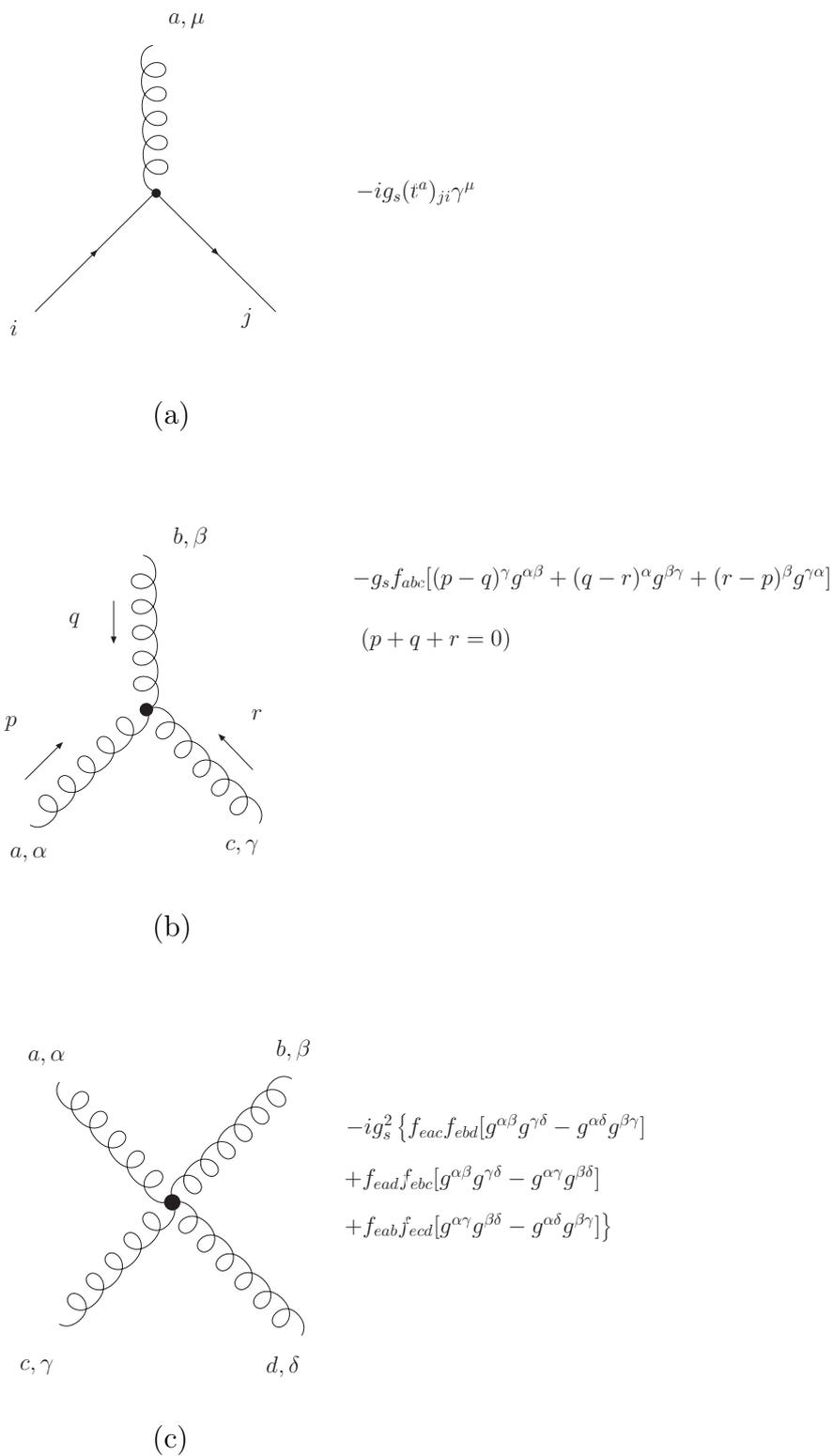


Fig. 2.1: Regras de Feynman para os vértices da QCD.

O anticomutador dos geradores t^a é

$$\{t^a, t^b\} = \frac{1}{N_c} \delta^{ab} \mathbf{1} + d^{abc} t^c, \quad (2.1.13)$$

onde d^{abc} são antissimétricos sob a troca de quaisquer de dois índices e satisfazem as relações

$$d_{abb} = 0, \quad d_{acd} d_{bcd} = \frac{N_c^2 - 4}{N_c}, \quad (2.1.14)$$

$$f_{abe} d_{ecd} + f_{cbe} d_{aed} + f_{dce} d_{ace} = 0. \quad (2.1.15)$$

Como descrito na Introdução, a QCD possui a propriedade chamada liberdade assintótica, o que significa que para processos que envolvem grandes transferências de momentum, o parâmetro de acoplamento α_s torna-se muito pequeno e a teoria de perturbações é aplicável. Levando em conta correções de um laço no propagador do glúon, tem-se a seguinte expressão para o acoplamento variável

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (2.1.16)$$

onde n_f é o número de sabores. As regras de Feynman para os vértices da QCD são resumidas na Figura 2.1.

2.2 O espalhamento profundamente inelástico

O espalhamento profundamente inelástico (DIS) é o espalhamento de um lépton-carregado ou neutro-com um núcleon com grande transferência de momentum. Este processo pode ser expresso por

$$l(k) + N(P) \rightarrow l'(k') + X(P_X) \quad (2.2.17)$$

e é representado na figura 2.2. Se considerarmos o caso de corrente neutra, o lépton, que inicialmente possui quadri-momentum k^μ interage com o núcleon, cujo quadri-momentum é P^μ , através da troca de um bóson de gauge (γ^* , Z^0). No estado final, tem-se o lépton com quadri-momentum k'^μ e um estado hadrônico X . Aqui, consideramos o DIS inclusivo, caracterizado pela detecção, no estado final, apenas do lépton. No caso de corrente neutra, onde o lépton pode ser um elétron ou um múon, o DIS é dominado pela troca de um fóton.

A reação representada em (2.2.17) é descrita por três variáveis cinemáticas. Uma delas, fixada pelas condições experimentais, é a energia E do lépton incidente, ou, alternativamente, o quadrado da energia do centro de massa $W = (k + P)^2$. As outras duas variáveis independentes são escolhidas entre os seguintes invariantes:

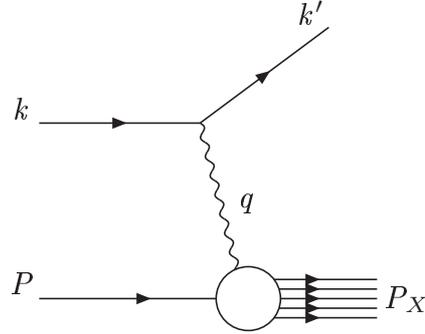


Fig. 2.2: *Espalhamento profundamente inelástico*

(i) O quadrado do momentum transferido

$$q^2 \equiv -Q^2 = (k - k')^2 \quad (2.2.18)$$

onde $Q^2 > 0$ é a chamada de virtualidade do bóson de gauge.

(ii) O quadrado da energia do centro de massa do sistema fóton-núcleon

$$s = (P + q)^2, \quad (2.2.19)$$

que é a massa invariante do estado hadrônico X .

(iii) A variável

$$\nu = \frac{P \cdot q}{m_N} = \frac{s + Q^2 - m_N^2}{2m_N}, \quad (2.2.20)$$

onde m_N é a massa do núcleon, que, no referencial de repouso do alvo, é igual a $\nu = E - E'$, onde E e E' são as energias do elétron no estado inicial e final, respectivamente.

(iv) A variável chamada x de Bjorken, definida por

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{Q^2 + s - m_N^2}. \quad (2.2.21)$$

(v) A variável chamada de inelasticidade

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} = \frac{s + Q^2 - m_N^2}{W - m_N^2} \quad (2.2.22)$$

que no referencial de repouso do núcleon é a fração de energia do lépton no estado inicial, carregada pelo fóton $y = \nu/E$.

Como $s \geq m_N^2$, x possui valores no intervalo entre 0 e 1. O limite de altas energias no qual estamos interessados corresponde a valores de $s \gg Q^2$, o que, da Eq.(2.2.21) implica em $x \rightarrow 0$. Assim, o regime de altas energias corresponde a um regime de pequeno x de Bjorken,

$$s \rightarrow \infty, x \approx \frac{Q^2}{s} \rightarrow 0 \quad (2.2.23)$$

Como é de nosso interesse, consideremos o DIS elétron-próton, ou seja, o caso especial no qual o lépton é um elétron e o núcleon é um próton de massa $m_N = M$. Assim, estamos interessados no processo inclusivo $ep \rightarrow eX$ e a estrutura do próton em pequenas distâncias é sondada por um fóton virtual.

No referencial de repouso do próton, a seção de choque diferencial para o processo é dada por

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2}{2MQ^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (2.2.24)$$

onde α_{em} é a constante de acoplamento da interação eletromagnética, $\Omega \equiv (\theta, \phi)$ é o ângulo sólido que caracteriza a direção do elétron no estado final,

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{m^2} [k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k \cdot k') g^{\mu\nu}] \quad (2.2.25)$$

é o tensor leptônico e $W_{\mu\nu}$ é o tensor hadrônico, que pode ser parametrizado como

$$\frac{1}{2M} W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} W_1(\nu, Q^2) \right) + \frac{1}{M^2} \left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) W_2(\nu, Q^2). \quad (2.2.26)$$

Na equação acima, W_1 e W_2 são as chamadas funções de estrutura e, em termos destas, a seção de choque para o DIS é dada pela expressão

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (2.2.27)$$

Introduz-se as funções de estrutura adimensionais [48]

$$F_1(x, Q^2) \equiv MW_1(\nu, Q^2) \quad (2.2.28)$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2) \quad (2.2.29)$$

Em termos destas e das variáveis x e y , obtém-se

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 W}{Q^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{xyM^2}{W}\right) F_2(x, Q^2) \right]. \quad (2.2.30)$$

É possível relacionar as funções de estrutura às seções de choque totais de foto absorção virtual, tendo como resultado

$$\sigma_L^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} (F_2 - 2xF_1) \quad (2.2.31)$$

$$\sigma_T^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} 2xF_1 \quad (2.2.32)$$

onde $\sigma_{L,T}^{\gamma^*p}$ são as seções de choque de foto absorção longitudinal e transversal, respectivamente. Definindo as funções de estrutura longitudinal e transversal como

$$F_L = F_2 - 2xF_1 \quad (2.2.33)$$

$$F_T = 2xF_1 \quad (2.2.34)$$

tem-se

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_{L,T}(x, Q^2) \quad (2.2.35)$$

Como $F_2 = F_L + F_T$, a seção de choque de foto absorção virtual σ^{γ^*p} é proporcional a F_2

$$\sigma^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \quad (2.2.36)$$

Se o próton fosse uma partícula carregada *pontual*, assim como o elétron, a seção de choque de foto-absorção seria simplesmente

$$\sigma^{\gamma^*e} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} \delta(x - 1), \quad (2.2.37)$$

onde a função delta corresponde à conservação de momentum. De fato, como as partículas incidentes encontram-se na camada de massa, tem-se exatamente que $x = 1$. Isso mostra que a função de estrutura $F_2(x, Q^2)$ é uma medida da estrutura do próton relativa à de um elétron pontual.

2.3 A função de estrutura F_2

2.3.1 O modelo de pártons

Antes do advento da QCD, Bjorken [49, 50] e Feynman [51] formularam o chamado modelo de pártons, que é baseado na suposição de que o fóton virtual espalha com os constituintes do próton, que são tratados como partículas livres. A Figura 2.3 representa o DIS descrito pelo modelo de pártons. O fóton virtual espalha com um dos pártons (os quarks de valência) que compõem o próton, que depois da colisão contribui para a formação do estado hadrônico X no estado final.

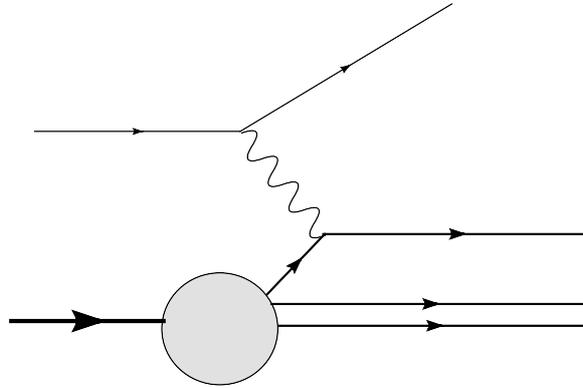


Fig. 2.3: O modelo de pártons.

Dentro deste modelo, no qual um próton é tratado como constituído por partículas pontuais, obtém-se que as funções de estrutura F_1 e F_2 dependem apenas da variável x , e não de x e Q^2 separadamente. Mais especificamente, essas funções são relacionadas,

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_q e_q^2 x f_q(x), \quad (2.3.38)$$

onde a soma é realizada sobre os sabores dos quarks e $f_q(x)$ são as funções de distribuição dos quarks. A relação acima é chamada de relação de Callan-Gross [52].

O escalamento em x acima, que é uma consequência do modelo de pártons, foi previsto por Bjorken; ele sugeriu que, em energias muito altas, a dependência das funções de estrutura em Q^2 desaparece, e elas se tornam funções de x apenas. Mais precisamente, isso ocorre no limite

$$\nu, Q^2 \rightarrow \infty, \quad x = \frac{Q^2}{2M\nu} \text{ fixo}, \quad (2.3.39)$$

que é o chamado escalamento de Bjorken, que foi de fato identificado no DIS elétron-próton no SLAC [53].

2.3.2 F_2 na QCD: o referencial de momentum infinito

O modelo de pártons é apenas a aproximação de mais baixa ordem à realidade, pois os constituintes partônicos dos hádrons não são objetos livres. Eles são descritos pela QCD, a teoria da interação de quarks e glúons. De acordo com essa teoria, novos subprocessos podem contribuir para a seção de choque do DIS elétron-próton.

O diagrama que representa o modelo de pártons, Figura 2.3, corresponde à contribuição para a seção choque de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em})$. No entanto, o quark de valência pode emitir um glúon, antes ou depois de interagir com o fóton, o que leva aos processos representados pelos diagramas da Figura 2.4. Há também as contribuições gluônicas, representadas pelos diagramas da Figura 2.5, nos quais um glúon, emitido, por exemplo, pelo quark de valência, flutua em um par quark-antiquark (quarks de mar), e um deles interage com o fóton virtual. Todos os diagramas descritos acima contribuem para a seção de choque com termos de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$.

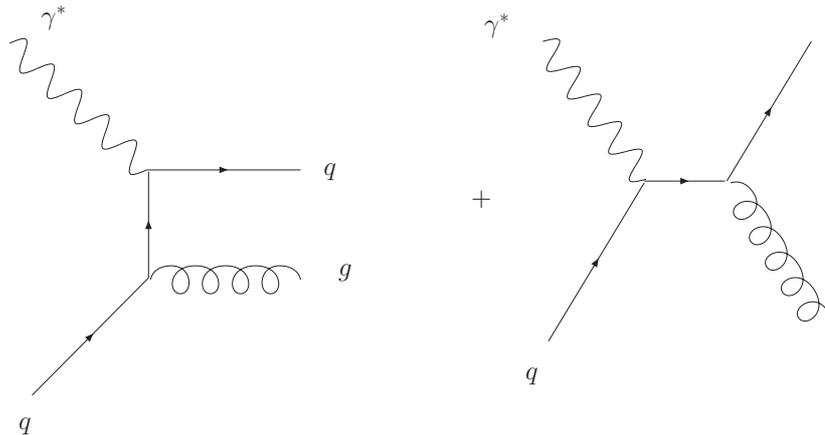


Fig. 2.4: Contribuições adicionais (de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$) para o processo $ep \rightarrow eX$.

Na QCD os quarks e glúons podem irradiar quanta virtuais (quarks ou glúons) e interagir uns com os outros através da troca desses quanta. Surge então a questão sobre a possibilidade de existir, na QCD, uma descrição partônica para processos hadrônicos.

As excitações virtuais dentro dos hádrons podem ter energias e momenta arbitrariamente grandes, e assim as interações associadas podem ter escalas de tempo arbitrariamente pequenas. Torna-se complicado, então, separar as interações que ocorrem dentro do alvo daquelas com o projétil (o fóton virtual no DIS). Devido à liberdade assintótica, flutuações com momenta muito grandes ocorrem com baixa probabilidade, o que permite cálculos em teoria de perturbações. Assim, torna-se possível desenvolver uma representação partônica para os

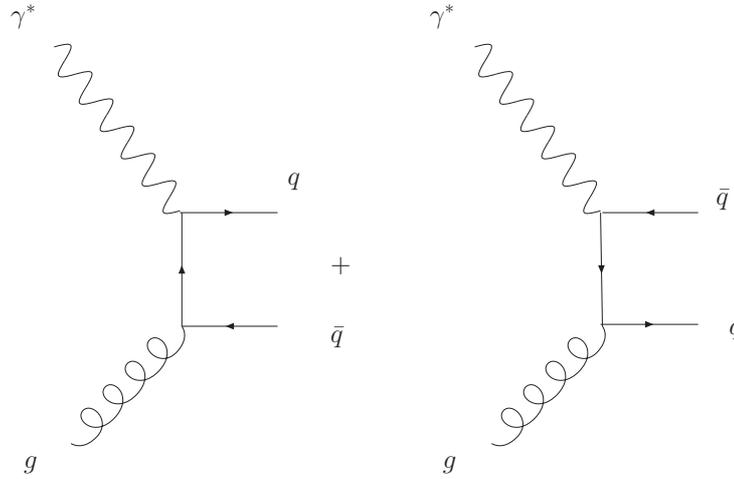


Fig. 2.5: Contribuições adicionais (de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$) para o processo $ep \rightarrow eX$.

processos em pequenos tempos, ou com grandes momenta transferidos. O tratamento de tal representação, no entanto, depende da escolha do referencial no qual os processos são vistos.

Um referencial especial é o chamado *referencial de momentum infinito* (IMF), que fornece uma maneira de separar as flutuações hadrônicas das flutuações de vácuo que possuem mesmo tempo de vida e mesmos momenta. O IMF consiste em realizar uma transformação de Lorentz para um referencial no qual o hádron (de massa M) possui um momentum longitudinal muito grande, $P_z \gg M$. O quadri-momentum do hádron é $P^\mu = (P, 0, 0, P)$, onde definimos $P_z \equiv P$.

Consideremos uma flutuação de um quark dentro do hádron, e assumamos, por simplicidade, que esse quark possua momentum longitudinal P . Todos os quanta envolvidos nessa flutuação possuem momenta longitudinais grandes e é possível calcular o tempo de vida da flutuação gluônica com momentum longitudinal $k^\mu = (k_0, k_1, k_2, k_z)$, onde $k_z = \zeta P$ com $0 \leq \zeta \leq 1$ e $k_\perp = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \ll \zeta P$. O tempo de vida pode ser estimado pelo princípio de incerteza

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta E}, \quad (2.3.40)$$

onde ΔE é a diferença de energia entre os estados final e inicial no vértice de emissão

gluônica(as massas dos pártons são desprezadas):

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \sqrt{\zeta^2 P^2 + k_\perp^2} + \sqrt{(1-\zeta)^2 P^2 + k_\perp^2} - P \\
 &= \zeta P \left(1 + \frac{k_\perp^2}{\zeta^2 P^2}\right)^{1/2} + (1-\zeta)P \left(1 + \frac{k_\perp^2}{(1-\zeta)^2 P^2}\right)^{1/2} - P \\
 &\simeq \zeta P + \frac{k_\perp^2}{2\zeta P} + (1-\zeta)P + \frac{k_\perp^2}{2(1-\zeta)P} - P \\
 &= \frac{k_\perp^2}{2\zeta P} + \frac{k_\perp^2}{2(1-\zeta)P} \\
 &= \frac{k_\perp^2(1-\zeta+\zeta)}{2(\zeta-\zeta^2)P} \\
 &\simeq \frac{k_\perp^2}{2\zeta P}
 \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Assim, tem-se que $\Delta t \sim 2\zeta P/k_\perp^2$ e essa estimativa deve ser comparada com o tempo de vida para uma flutuação de vácuo, $\Delta t_{vac} \sim 1/k_z$. Como $k_\perp \ll \zeta P$,

$$\Delta t \sim \frac{2\zeta P}{k_\perp^2} \gg \Delta t_{vac} \sim \frac{1}{\zeta P}, \tag{2.3.42}$$

o que diz que, no IMF, as flutuações hadrônicas típicas são bem separadas das flutuações de vácuo, e portanto a representação partônica faz sentido.

Veremos que o tempo de vida do quark da flutuação é muito maior que o tempo de colisão. Assim, esse quark está praticamente na camada de massa antes e depois do espalhamento. Se $k^\mu \approx (\zeta P, 0, 0, \zeta P)$ denota seu quadri-momentum original, a conservação de energia implica em

$$0 \approx (k+q)^2 = -Q^2 + 2\zeta P \cdot q = -2xP \cdot q + 2\zeta P \cdot q = 2(x-\zeta)P \cdot q \Rightarrow \zeta \approx x, \tag{2.3.43}$$

ou seja, o espalhamento seleciona um quark com fração do momentum longitudinal ζ igual ao x de Bjorken. Isso confirma que no DIS em altas energias, sondamos os constituintes do próton que possuem $\zeta \ll 1$.

Para obtermos o tempo de colisão, consideremos um IMF específico, o chamado *referencial de Breit*, no qual o fóton virtual possui momentum longitudinal zero, $q^\mu = (q_0, q_1, q_2, 0)$. Como $P \rightarrow \infty$,

$$q_0 = \frac{P \cdot q}{P} \rightarrow 0 \tag{2.3.44}$$

e pode-se deduzir que, nesse referencial, o momentum do fóton virtual é principalmente transversal: $q_0 \ll q_\perp$ e $Q^2 \simeq q_\perp^2$. Assim, variando experimentalmente a virtualidade Q^2 , controla-se a resolução do fóton virtual no plano transversal. O tempo de colisão pode ser

estimado por

$$\Delta t_{col} \sim \frac{1}{q_0} = \frac{P}{P \cdot q} = \frac{2Px}{Q^2}. \quad (2.3.45)$$

Para que uma flutuação de um quark seja capaz de absorver o fóton virtual, seu tempo de vida deve ser maior que o tempo de colisão. Essa condição, juntamente com as equações (2.3.42) e (2.3.45), implicam em que os pártons que participam no DIS possuem momentum transversal $k_{\perp}^2 \lesssim Q^2$. Pelo princípio da incerteza, esses pártons estão localizados em uma área $\sim 1/Q^2$ no plano transversal.

A partir do que foi discutido na seção anterior, pode-se concluir que o DIS é um experimento que analisa a distribuição de quarks no próton. O fóton virtual contabiliza o número de quarks e antiquarks que possuem uma fração de momentum longitudinal x e que ocupam uma área transversal da ordem de $1/Q^2$. Isso motiva escrever a seguinte fórmula para a função de estrutura F_2 :

$$F_2(x, Q^2) = \sum_f e_q^2 x [f_q(x, Q^2) + f_{\bar{q}}(x, Q^2)]. \quad (2.3.46)$$

$f_q(x)$ e $f_{\bar{q}}(x)$ são as funções de distribuição dos quarks e dos antiquarks, respectivamente.

2.3.3 O regime de altas energias

A Eq.(2.3.46) apresenta, para F_2 , uma dependência em ambos x e Q^2 , ao contrário do que é previsto pelo modelo de pártons. Essa violação do escalamento de Bjorken é um exemplo de evolução quântica na QCD: as funções de estrutura variam com Q^2 e x , e tal variação é induzida através de processos radiativos na própria teoria quântica de campos. O escalamento de Bjorken, confirmado no primeiro experimento do DIS no SLAC, aparece apenas como uma propriedade aproximada dos dados, e em um regime cinemático limitado. A partir da discussão anterior, espera-se que o número de pártons (quarks e glúons) intervenientes cresça com o aumento de Q^2 , pois o espaço de fase para a radiação é aumentado, o que pode ser traduzido como um crescimento de F_2 com Q^2 para x fixo.

Na Figura 2.6, onde são mostrados os resultados para F_2 com os dados mais recentes obtidos em HERA [1–3]. O crescimento citado acima é claramente visível para valores pequenos de x (essencialmente, F_2 cresce como uma potência de $1/x$). Fisicamente, aumentar Q^2 é como aperfeiçoar a resolução de um microscópio: com seu aumento, é possível discriminar pártons que estão cada vez mais localizados no espaço transversal e cujo tempo de vida é cada vez menor. Essa é a base para as equações DGLAP [4–6], que descrevem a evolução das funções de estrutura com o aumento de Q^2 .

Estamos, no entanto, especialmente interessados na evolução para o regime de altas energias, que é responsável pelo crescimento rápido de F_2 quando x decresce. Embora não

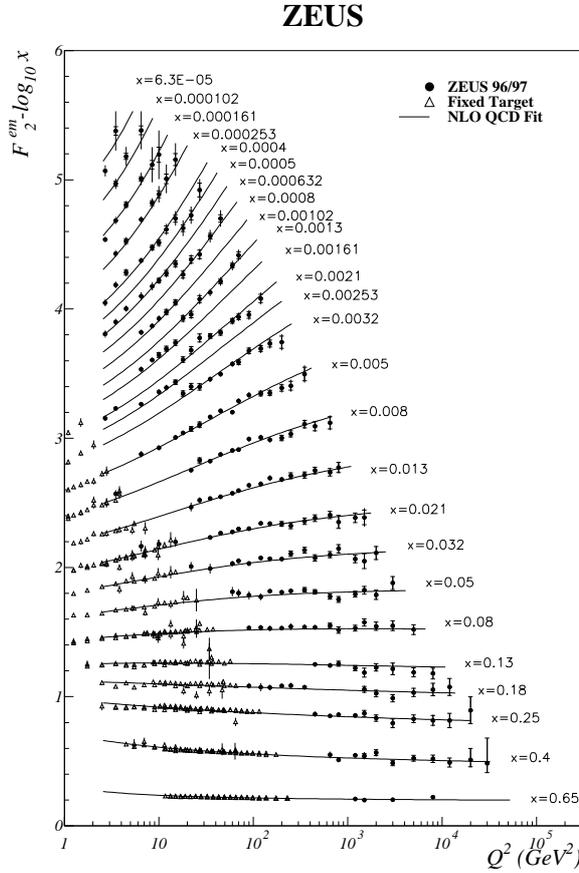


Fig. 2.6: A função de estrutura F_2 medida pelo experimento ZEUS, como uma função de Q^2 para diferentes valores de x [3].

seja diretamente medida pelo DIS, é o rápido crescimento da densidade de glúons que domina a evolução em pequeno x . Para que esse fato seja melhor compreendido, consideremos um párton na camada de massa que emite um glúon suave que carrega uma pequena fração do seu momentum longitudinal, $x \ll 1$ e um momentum transversal pequeno. A probabilidade diferencial para que isso ocorra é:

$$dP_{brem} \simeq \frac{\alpha_s C_R}{\pi^2} \frac{d^2 k_{\perp}}{k_{\perp}^2} \frac{dx}{x} \quad (2.3.47)$$

onde $C_R = C_F$ se o párton original é um quark, e $C_R = C_A$ se o párton é um glúon (ver Seção 2.1). O aumento logarítmico nos momenta transversais em (2.3.47) ocorre tanto para quarks ou glúons emitidos. No entanto, o aumento logarítmico em pequeno x está relacionado ao fato de que a partícula suave emitida é um glúon (a probabilidade de emissão de um quark suave não é singular em $x \rightarrow 0$). A radiação gluônica é, portanto, ampliada se comparada

com a radiação de quarks na evolução quântica com a diminuição de x . Assim, no regime de pequeno x do DIS, o quark sondado pelo fóton virtual é tipicamente produzido pela dissociação de um glúon.

Na ordem mais baixa da teoria de perturbações, tem-se

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} \simeq \frac{\alpha_s}{3\pi} \left(\sum_q e_q^2 \right) xG(x, Q^2), \quad (2.3.48)$$

onde $xG(x, Q^2)$ é a função de distribuição de glúons. Usando a equação acima, é possível extrair a distribuição de glúons a partir da função de estrutura F_2 medida em HERA e alguns resultados são mostrados na Figura 2.7, a distribuição de glúons é comparada com a distribuição de quarks de valência e de mar em um próton. Nesse gráfico, xG é multiplicada por 0,05, o que confirma o fato de que, em pequeno x , a evolução gluônica é dominante.

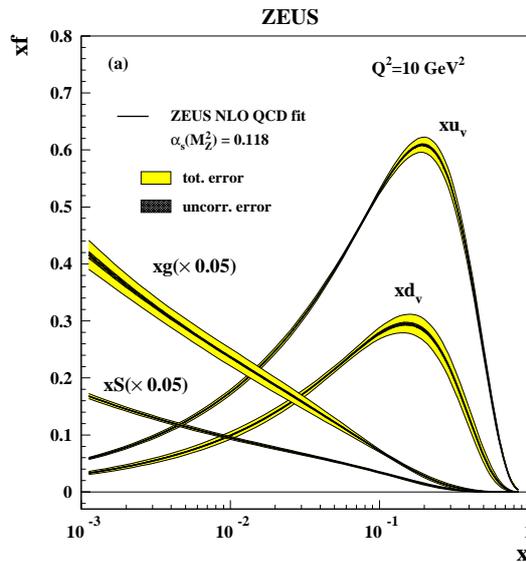


Fig. 2.7: As distribuições de quarks (xu_v, xd_v), glúons (xG) e quarks de mar (xS) em um próton como medidas em HERA. A distribuição de glúons é multiplicada por 0,05 [54].

Nesta tese, não trataremos diretamente com a função de distribuições de glúons, mas

com amplitudes de espalhamento e sua evolução na direção do regime de altas energias. Como veremos, a compreensão da evolução das amplitudes tem conseqüências importantes no estudo dos processos em altas energias, incluindo a fenomenologia do DIS elétron próton.

Capítulo 3

Evolução das amplitudes de espalhamento na QCD

Neste Capítulo, apresentaremos a cinemática de uma colisão entre dois hádrons em termos das chamadas coordenadas de cone de luz. A variável rapidez, diretamente relacionada com a energia da colisão, e escolhida como o parâmetro da evolução na QCD em altas energias, é introduzida. Consideramos o espalhamento de um projétil simples, um dipolo, e um hádron energético. As equações de evolução para as amplitudes de espalhamento são apresentadas, bem como as principais propriedades das suas soluções.

3.1 Colisão entre dois hádrons em altas energias

3.1.1 Cinemática da colisão

Para descrever a cinemática de uma colisão em altas energias, é conveniente utilizar as chamadas variáveis de cone de luz. Para um quadri-vetor arbitrário $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, onde $v^3 = v_z$, essas variáveis são definidas como

$$v^\mu \equiv (v^+, \mathbf{v}, v^-), \quad v^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^3), \quad \mathbf{v} \equiv (v^1, v^2), \quad (3.1.1)$$

o que implica na seguinte forma para o produto escalar de dois quadri-vetores:

$$\begin{aligned} v^\mu v'_\mu &= v^0 v'_0 + v^1 v'_1 + v^2 v'_2 + v^3 v'_3 \\ &= \frac{1}{2}(v^+ + v^-)(v'^+ + v'^-) - \frac{1}{2}(v^+ - v^-)(v'^+ - v'^-) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \\ &= v^+ v'^- + v^- v'^+ - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

A fim de verificarmos a utilidade destas definições, consideremos uma partícula que se move com velocidade próxima à da luz no eixo z , no sentido de z positivo. Sua trajetória

encontra-se ao longo do cone de luz positivo ($z \simeq t$) e a partícula está em $x^- \simeq 0$ enquanto nos referimos a $x^+ \simeq \sqrt{2}t$ como o *tempo do cone de luz*. Naturalmente, para uma partícula que se move rapidamente no sentido de z negativo ($z \simeq -t$), os papéis de x^+ e x^- se invertem: $x^- \simeq \sqrt{2}t$ faz o papel de tempo e $x^+ \simeq 0$ é a coordenada longitudinal. De agora em diante, usaremos a terminologia associada com a partícula (mais especificamente, o hádron) que se move para a direita (z positivo), ou seja, nos referiremos a x^+ como o tempo e a x^- como a coordenada longitudinal.

Consideremos a colisão entre duas partículas hadrônicas e escolhamos o eixo longitudinal de colisão de modo que ele coincida com o eixo z . Chamaremos de *projétil* a partícula que se move no sentido de z negativo, denotaremos seu momentum longitudinal por $Q^3 = -Q_z$ e sua massa por M_P , e chamaremos de *alvo* a partícula que se move no sentido de z positivo, denotando seu momentum longitudinal por $P^3 = P_z$ e sua massa por M_A .

Os quadri-momenta do projétil e do alvo, são dados, respectivamente, por

$$P^\mu = \left(P^+, \mathbf{0}, \frac{M_A^2}{2P^+} \right), \quad Q^\mu = \left(\frac{M_P^2}{2Q^-}, \mathbf{0}, Q^- \right) \quad (3.1.3)$$

Para partículas que se movem com velocidades próximas à da luz, de modo que $P_z \gg M_A$ e $Q_z \gg M_P$, temos $P^+ \simeq \sqrt{2}P_z$, $P^- \simeq 0$, $Q^- \simeq \sqrt{2}Q_z$, $Q^+ \simeq 0$, e a energia da colisão é $s \equiv (P^\mu + Q^\mu)(P_\mu + Q_\mu) \simeq 2P^+Q^-$.

Uma colisão em altas energias produz muitas partículas no estado final. Sejam m_f e k_f^μ a massa e o quadri-momentum de uma dessas partículas, respectivamente. Definimos uma variável bastante conveniente para caracterizar as partículas emitidas, a chamada rapidez y :

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_f^+}{k_f^-} \right) \quad (3.1.4)$$

Usando a Eq.(3.1.2), temos que $2k_f^+k_f^- = \mathbf{k}_f^2 + m_f^2$, e portanto

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2(k_f^+)^2}{\mathbf{k}_f^2 + m_f^2} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{2}k_f^+}{\sqrt{\mathbf{k}_f^2 + m_f^2}} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{\mathbf{k}_f^2 + m_f^2}}{\sqrt{2}k_f^-} \right). \quad (3.1.5)$$

Diante da definição de rapidez (3.1.4), é possível identificar três situações:

- (i) Uma partícula é emitida perpendicularmente ao eixo de colisão. Neste caso, $k_f^3 = 0$ e $k_f^+ = k_f^-$ e $y = 0$.
- (ii) Uma partícula é emitida na região de z positivo. Neste caso, $k_f^3 > 0$ e $k_f^+ > k_f^-$ e a partícula possui rapidez positiva $y > 0$.

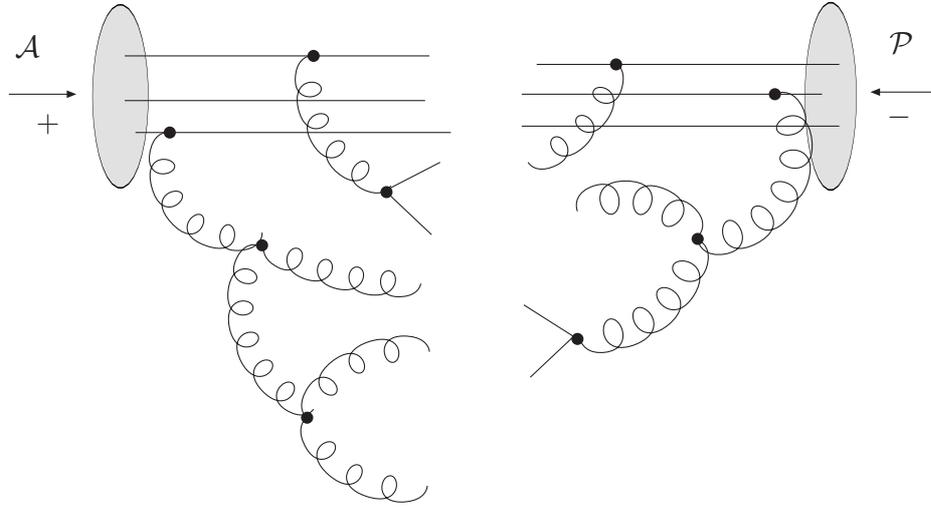


Fig. 3.1: Colisão entre o projétil \mathcal{P} e o alvo \mathcal{A} . Os pártons de valência são acompanhados por conjuntos coerentes de pártons virtuais.

- (iii) Uma partícula é emitida na região de z negativo. Neste caso, $k_f^3 < 0$ e $k_f^- > k_f^+$ e a partícula possui rapidez positiva $y < 0$.

Seja θ o ângulo de emissão da partícula em relação ao eixo dos z positivos e consideremos o caso no qual a massa da partícula é nula. O resultado obtido é que a rapidez é igual à pseudo-rapidez η , que é uma grandeza facilmente medida experimentalmente. Fazendo $m_f = 0$ em (3.1.4), temos

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_f^0 + k_f^3}{k_f^0 - k_f^3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) = -\ln \tan(\theta/2). \quad (3.1.6)$$

3.1.2 Descrição da colisão

A colisão em altas energias entre um projétil \mathcal{P} e um alvo \mathcal{A} hadrônicos é representada na Figura 3.1.2. Assintoticamente antes da colisão, esses hádrons são constituídos apenas por seus pártons de valência. À medida que projétil e alvo evoluem até o instante da colisão, os pártons de valência são acompanhados por um conjunto coerente de pártons virtuais. Formalmente, isso corresponde a decompor os estados iniciais em superposições de estados de Fock de quarks e glúons. Por exemplo, se um dos hádrons envolvidos for um próton, tem-se

$$|\text{próton}\rangle = |q_v q_v q_v\rangle + |q_v q_v q_v g\rangle + \cdots + |q_v q_v q_v g \cdots g g q \bar{q} g g\rangle \quad (3.1.7)$$

A colisão ocorre, portanto, entre as partículas vestidas e os pártons liberados pela colisão formam as partículas do estado final.

A população de pártons virtuais que vestem os pártons de valência é composta principalmente de glúons. Como veremos a seguir, a probabilidade de que o um dos participantes da colisão esteja vestido de um glúon é inversamente proporcional ao momentum longitudinal do glúon k^+ , o que, para pequenos momenta longitudinais, leva a divergências logarítmicas após a integração sobre k^+ . No entanto, como estes glúons virtuais possuem momenta longitudinais muito pequenos, eles não podem ser transformados em partículas reais, ou seja, não realizam nenhum papel na colisão. Assim, pode-se considerar que o momentum longitudinal dos glúons que vestem o alvo (ou o projétil) é limitado inferiormente. Este limite é determinado pela cinemática da colisão e no regime de altas energias torna-se muito pequeno.

Seja $z_A P^+$ o limite inferior dos momenta longitudinais relativos ao alvo e $z_P Q^-$ o limite correspondente para o projétil ($z_A, z_P < 1$). Na colisão projétil-alvo, as partículas liberadas vêm das colisões elementares entre os pártons virtuais. As únicas colisões possíveis são aquelas que implicam em partículas com suficiente momenta longitudinais para poder dar lugar a uma massa invariante positiva,

$$z_A z_P s = k_0^2, \quad (3.1.8)$$

onde k_0 é o momentum transversal típico das partículas no estado final, $\mathbf{k}_f^2 + m_f^2 \simeq k_0^2$. Notemos que o tratamento perturbativo só se justifica quando

$$k_0 \gg \Lambda_{QCD} \Rightarrow \alpha_s(k_0) \ll 1, \quad (3.1.9)$$

onde Λ_{QCD} é uma escala característica do regime não perturbativo da QCD e vale aproximadamente 200 MeV. É possível ver que, no limite de altas energias (s grande) os valores de z_A ou de z_P , ou mesmo dos dois, são muito pequenos.

3.1.3 Intervalo de rapidez

Analisemos agora algumas propriedades importantes das partículas virtuais que vestem o projétil e o alvo e que são liberadas na colisão entre eles, mais especificamente no que diz respeito à variável rapidez, a qual, como vimos tem uma grande importância no estudo de colisões em altas energias:

(i) A rapidez máxima em uma colisão é $y_{max} = \ln(\sqrt{2}P^+/k_0)$ e corresponde a uma partícula que vestia o alvo com um momentum longitudinal máximo P^+ . A menor rapidez possível para uma partícula proveniente do alvo é $\ln(\sqrt{2}z_A P^+/k_0)$ e o intervalo de rapidez no qual as partículas do alvo são emitidas é $Y_A = \ln(1/z_A)$.

(ii) A rapidez mínima é $y_{min} = -\ln(\sqrt{2}Q^-/k_0)$ e corresponde a uma partícula que

vestia o projétil com um momentum longitudinal máximo Q^- . A maior rapidez possível para uma partícula que provém do projétil é $-\ln(\sqrt{2}z_{\mathcal{P}}Q^-/k_0)$ e o intervalo de rapidez no qual as partículas do projétil são emitidas é então $Y_{\mathcal{P}} = \ln(1/z_{\mathcal{P}})$.

As partículas emitidas ocupam, portanto, um intervalo total de rapidez

$$\begin{aligned} y_{max} - y_{min} &= \ln(\sqrt{2}P^+/k_0) + \ln(\sqrt{2}Q^-/k_0) \\ &= \ln(2P^+Q^-/k_0^2) = \ln(s/k_0^2) \equiv Y. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Assim, tem-se que $Y = \ln(1/z_{\mathcal{A}}z_{\mathcal{P}}) = Y_{\mathcal{A}} + Y_{\mathcal{P}}$. Por abuso de linguagem, chamamos Y de rapidez total da colisão. Seja y' a rapidez que define o limite entre os intervalos $Y_{\mathcal{A}}$ e $Y_{\mathcal{P}}$, ou seja, a rapidez definida por

$$y' = y_{max} - Y_{\mathcal{A}} = y_{min} + Y_{\mathcal{P}}. \quad (3.1.11)$$

Com esta definição, tem-se que as partículas finais com rapidez $y > y'$ provém do alvo e aquelas com $y < y'$ provém do projétil. O valor de $z_{\mathcal{P}}$ pode ser escolhido arbitrariamente entre k_0^2/s e 1, o que impõe o valor de $z_{\mathcal{A}}$, e vice-versa. Em termos da rapidez, isso consiste em escolher uma maneira de dividir a rapidez total Y em duas partes, escolhendo $Y_{\mathcal{P}}$ e conseqüentemente $Y_{\mathcal{A}}$. Tal liberdade pode ser considerada como uma escolha de referencial para descrever a colisão. A partir de agora e nos próximos capítulos, trataremos de referenciais tais que $Y_{\mathcal{P}} \simeq 0$ e portanto $Y_{\mathcal{A}} \simeq Y$.

3.2 Espalhamento dipolo-hádron

Definida a cinemática e descrita a colisão entre dois hádrons genéricos, podemos partir para o estudo do espalhamento e da evolução na QCD em altas energias, tendo como principal objetivo apresentar as equações de evolução (em termos da rapidez Y) para a amplitude de espalhamento de um projétil com um hádron energético.

Consideremos inicialmente um quark—por exemplo, um quark de valência da função de onda de um hádron—que se move rapidamente com momentum longitudinal p^+ . Existe uma probabilidade dP deste quark emitir um glúon macio (com pequeno x) com momentum longitudinal no intervalo de k^+ a $k^+ + dk^+$, com $k^+ = xp^+ \ll p^+$, tal que

$$dP \propto \alpha_s \frac{dk^+}{k^+}. \quad (3.2.12)$$

Esta emissão está representada de forma diagramática na Figura 3.2(a). Se x é suficientemente pequeno e devido ao acoplamento de três glúons da QCD, o glúon com fração do momentum x pode ser gerado pela emissão intermediária de um ou mais glúons que possuem

seus momenta longitudinais fortemente ordenados o que implica em

$$x \ll x_n \ll \dots \ll x_1 \ll 1 \quad (3.2.13)$$

A Figura 3.2(b) mostra o diagrama que leva em conta correções radiativas de mais baixa ordem e que descreve a emissão de um glúon adicional, com momentum longitudinal $k^+ < p_1^+ < p^+$. A contribuição relativa para este processo pode ser estimada como

$$\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_{k^+}^{p^+} \frac{dp_1^+}{p_1^+} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \ln \frac{p^+}{k^+} = \bar{\alpha}_s \ln \frac{1}{x}. \quad (3.2.14)$$

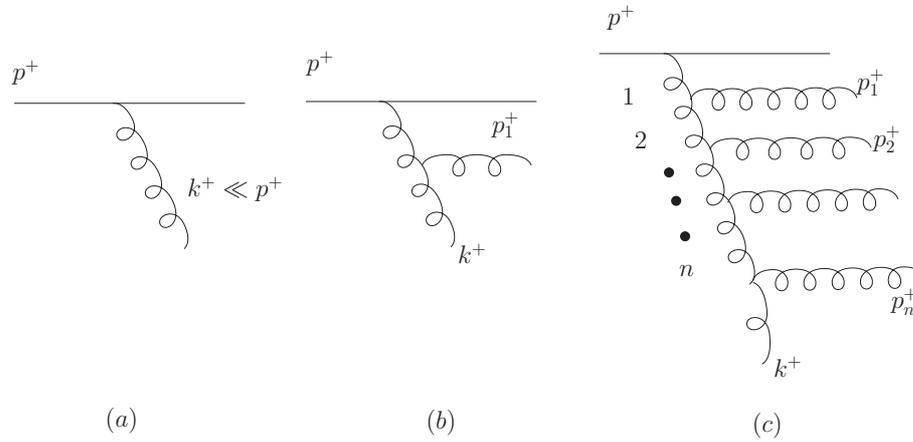


Fig. 3.2: (a) Emissão de um glúon com pequeno x por um párton rápido; (b) a correção radiativa de mais baixa ordem; (c) uma cascata de glúons.

No caso de emissões intermediárias de n glúons, tem-se formada uma cascata gluônica, representada pelo diagrama na Figura 3.2(c). A ordem relativa para a contribuição de tal cascata é

$$\bar{\alpha}_s^n \int_x^1 \frac{dx_1}{x_1} \dots \int_x^{x_{n-1}} \frac{dx_n}{x_n} = \frac{1}{n!} \left(\bar{\alpha}_s \ln \frac{1}{x} \right)^n, \quad (3.2.15)$$

onde o termo fatorial surge do ordenamento em p^+ . Se x é muito pequeno, $\bar{\alpha}_s \ln(1/x) \sim 1$, ou seja, em altas energias, a rapidez Y , definida como $\ln(1/x)$, pode compensar o pequeno valor do acoplamento $\bar{\alpha}_s$. Assim, torna-se necessário realizar uma ressonância de todos esses termos aumentados de $(\bar{\alpha}_s Y)^n$ e esta leva ao surgimento do chamado pomeron BFKL.

Imaginemos agora que desejamos medir a distribuição de glúons de um hádron energético genérico. Uma forma de fazer isso é sondar o hádron com um pequeno dipolo de cor, constituído por um quark, cuja coordenada transversal é \mathbf{x} , e por um antiquark, cuja

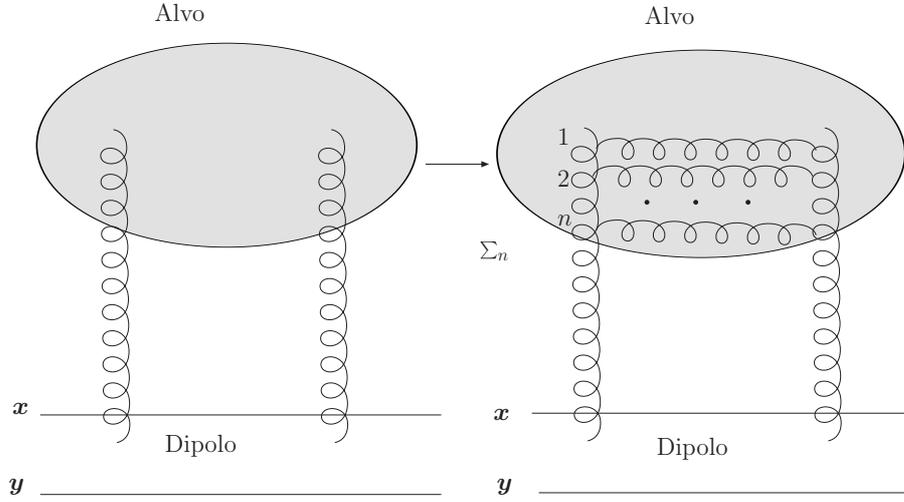


Fig. 3.3: *Pomeron BFKL.*

coordenada transversal é \mathbf{y} . Se $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ é o tamanho deste dipolo, ele sondará os componentes gluônicos do hádron com momenta tais que $k \sim 1/r \gg \Lambda_{QCD}$. Como veremos no Capítulo 4, essa descrição de uma colisão em termos de dipolos pode ser bem compreendida no DIS elétron-próton: em um referencial especial, o fóton virtual possui energia suficiente para se dividir em um par quark-antiquark, o qual interage com o próton.

Assume-se que o hádron (o alvo, que se move para a direita) é energético o suficiente, de modo que uma descrição partônica de sua função de onda seja possível, e que o dipolo (o projétil, que se move para a esquerda) é lento o suficiente, de modo que sua decomposição em estados de Fock possua apenas uma componente, um par $q\bar{q}$ em um estado singlete de cor. A interação entre o dipolo e o hádron é ilustrada na Figura 3.3. À esquerda temos o diagrama de mais baixa ordem, no qual a interação ocorre por meio da troca de dois glúons. À direita, é mostrada a situação na qual o glúon com pequeno x que interage com o dipolo é gerado por uma cascata gluônica. A soma sobre a cascata representa o chamado pomeron BFKL ou, equivalentemente, os componentes com pequeno x da função de onda hadrônica. É importante notar que a figura corresponde ao quadrado de um diagrama em teoria de perturbações, já que o interesse principal é a determinação da probabilidade de encontrar um dado modo na função de onda do hádron.

3.3 O formalismo de dipolos e a equação BFKL

Em vez de realizar a ressonância de diagramas, pode-se equivalentemente estudar a evolução da função de onda do alvo ou da amplitude de espalhamento após um acréscimo ΔY em

rapidez. Mais ainda, pode-se ver o último glúon suave como sendo emitido pelo dipolo, que é um objeto simples e portanto possui uma evolução que pode ser facilmente estudada. Nesta tese, trabalharemos num limite bastante especial, que é o limite de grande número de cores, ou seja, de grande N_c . Neste limite, um glúon de coordenada transversal \mathbf{z} pode ser considerado como um par quark-antiquark no ponto \mathbf{z} . Assim, o estado final é composto de dois dipolos (\mathbf{x}, \mathbf{z}) e (\mathbf{z}, \mathbf{y}) , ou seja, ao invés de considerarmos uma função de onda composta por quarks, antiquarks e glúons, é suficiente considerar um *onium*, que é um sistema de dipolos $q\bar{q}$ brancos (sem cor). Este é o chamado formalismo de dipolos introduzido por Mueller [55–57]. Na Figura 3.4 temos a representação da evolução de um dipolo à medida que a rapidez (energia) aumenta. Emissões sucessivas de glúons suaves podem ser consideradas como independentes. No formalismo de dipolos, os glúons emitidos são substituídos por dipolos, ou seja, a emissão gluônica é equivalente à divisão de dipolos.

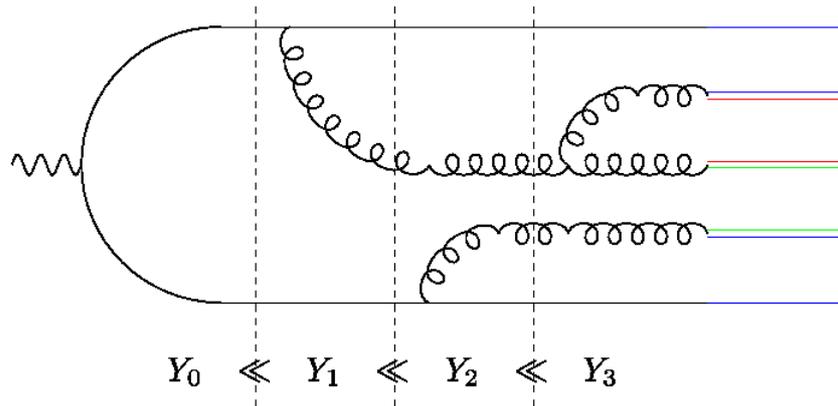


Fig. 3.4: *Passos consecutivos da evolução de um dipolo no limite de grande N_c .*

A probabilidade diferencial de um dipolo (\mathbf{x}, \mathbf{y}) se dividir em dois dipolos (\mathbf{x}, \mathbf{z}) e (\mathbf{z}, \mathbf{y}) é

$$dP = \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2(\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} d^2\mathbf{z} dY \equiv \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} d^2\mathbf{z} dY \quad (3.3.16)$$

Denotemos por $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle$ a amplitude de espalhamento para um dipolo composto por um quark de coordenada transversal \mathbf{x} e um antiquark de coordenada transversal \mathbf{y} . A notação $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre todas as realizações do campo de cor do alvo, e pode ser entendida como o valor médio para o operador da matriz T sobre a função de onda do alvo. Se uma transformação de Lorentz (boost) é realizada no dipolo, aumentando sua rapidez de Y para $Y + \delta Y$, esse dipolo pode se dividir em dois dipolos (\mathbf{x}, \mathbf{z}) e (\mathbf{z}, \mathbf{y}) , e cada um desses dipolos

pode interagir com o alvo, o que leva à seguinte equação linear:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2\mathbf{z} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} [\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y] . \\ &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int_{\mathbf{z}} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} [\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y] . \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Esta é a versão, na linguagem de dipolos, da equação BFKL [7–9]. O último termo do integrando de (3.3.17) é a contribuição virtual (o dipolo original interage antes de se dividir). Na linguagem diagramática, a evolução BFKL é representada na Figura 3.5.

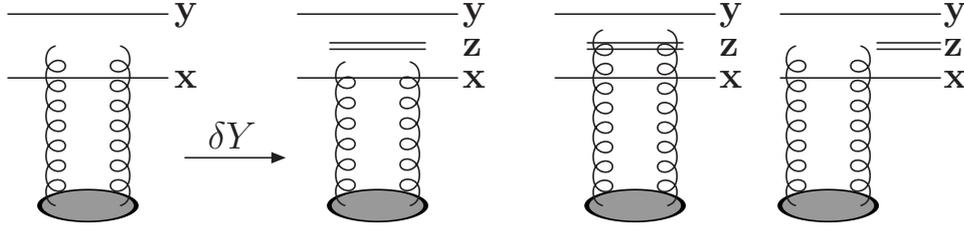


Fig. 3.5: *Evolução BFKL.*

O fato desta equação ser linear leva à expectativa de que sua solução cresça exponencialmente. De fato, se considerarmos independência do parâmetro de impacto, ou seja, uma solução homogênea do tipo $\langle T(r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rangle_Y$, obtemos, realizando uma transformada de Mellin,

$$\langle T(r) \rangle_Y = \int_C \frac{d\gamma}{2i\pi} \mathcal{T}_0(\gamma; r_0) e^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y - \gamma \log(r_0^2/r^2)}, \quad (3.3.18)$$

onde $\chi(\gamma)$ corresponde aos auto-valores do núcleo BFKL no espaço de Mellin, mostrados na Figura 3.6,

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma), \quad \psi(\gamma) \equiv d \ln \Gamma(\gamma) / d\gamma, \quad (3.3.19)$$

$\mathcal{T}_0(\gamma; r_0)$ descreve transformada de Mellin da condição inicial em $Y = 0$,

$$\mathcal{T}_0(\gamma; r_0) = \int_0^\infty \frac{d^2r}{r^2} \left(\frac{r_0^2}{r^2} \right)^\gamma T_0(r), \quad (3.3.20)$$

e r_0 é uma escala de referência arbitrária introduzida por razões dimensionais. Independentemente da forma da condição inicial $T_0(r)$, ela deve satisfazer a condição de transparência de cor, se anula com r^2 quando $r \rightarrow 0$, e satura em um valor constante quando $r \sim 1/Q_0$, com Q_0 sendo o corte infravermelho nas condições iniciais.

A integral na Eq.(3.3.20) é absolutamente convergente para $0 < \text{Re} < 1$. Assim, o

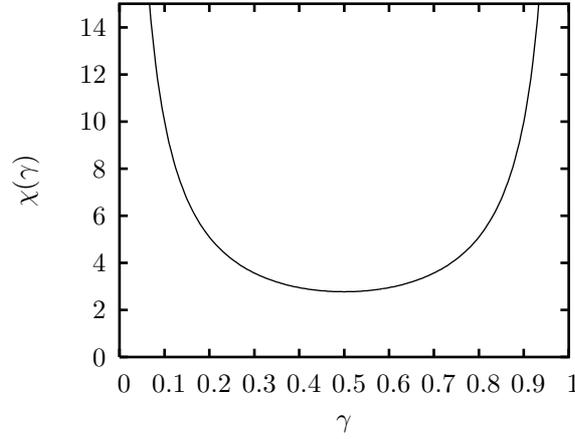


Fig. 3.6: Os autovalores do núcleo BFKL.

contorno para a integração complexa na Eq.(3.3.18) pode ser escolhida como

$$C = \{\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2; -\infty < \gamma_2 < \infty\},$$

com $0 < \gamma_1 < 1$.

Para um tamanho de dipolo fixo, é possível obter o comportamento em altas energias através da expansão em torno do ponto de sela $\gamma = 1/2$, e o resultado é

$$\langle T(r) \rangle_Y \sim \frac{r}{r_0} \exp \left[\omega_P Y - \frac{\log^2(r_0^2/r^2)}{2\chi''(1/2)\bar{\alpha}_s Y} \right], \quad (3.3.21)$$

onde $\omega_P = 4\bar{\alpha}_s \pi \ln 2$. Esta expressão possui dois problemas principais:

(i) O crescimento exponencial da amplitude com a rapidez Y , que leva a um crescimento da seção de choque com uma potência da energia, o que viola a unitariedade da amplitude de espalhamento, $T \leq 1$ e, conseqüentemente, o limite de Froissart, que afirma que o crescimento das seções de choque totais com a energia, em valores assintóticos de energia, é limitado por

$$\sigma \leq \frac{const}{m_\pi^2} \ln^2 s \quad (3.3.22)$$

(ii) Difusão para uma região não perturbativa: à medida que a rapidez aumenta, mesmo que uma condição inicial seja centrada em torno de um pequeno valor de r , a amplitude pode sofrer difusão para grandes tamanhos de dipolos, ou seja, para a região não perturbativa. Nesta, os momenta transversais de alguns dipolos tornam-se da ordem de Λ_{QCD} , levando a uma constante de acoplamento $\alpha_s(\Lambda) \sim 1$ e, portanto, invalidando a aplicação da QCD perturbativa, ou seja, a própria evolução BFKL.

Devido a tais problemas, vê-se que a equação BFKL não é ideal para a descrição da evolução em altas energias, e neste regime efeitos não lineares tornam-se importantes. Como veremos a seguir, tais efeitos surgem quando, por exemplo no caso do espalhamento de um único dipolo com um hádron, é considerada a situação na qual os dois dipolos resultantes da separação do dipolo original interagem com o hádron simultaneamente, resultando em um diagrama adicional, que descreve a fusão de glúons, ou fusão de pomerons, ou ainda, na linguagem de dipolos, a fusão de dipolos. Nas próximas seções, veremos como essas não linearidades se refletem nas equações de evolução das amplitudes de espalhamento.

3.4 A equação JIMWLK

O método que descreve a fusão de pomerons é o Condensado de Vidros de Cor (CGC), cuja evolução é dada pela chamada equação JIMWLK [16–24]. O CGC é uma teoria efetiva na QCD e cujo nome corresponde a algumas de suas características básicas: *Condensado* representa a grande densidade de glúons que pode atingir valores da ordem $\mathcal{O}(1/\alpha_s)$, *Vidros* diz respeito a uma separação clara de escalas de tempo entre os graus de liberdade suaves e rápidos na função de onda e *Cor* representa a carga de cor portada pelos glúons.

A motivação essencial para a formulação do CGC é a separação de escalas nos momenta longitudinais entre os pártons rápidos e os glúons suaves emitidos. Denotando por p^μ e k^μ os correspondentes quadri-momenta no cone de luz, tem-se que $k^+ \ll p^+$, o que por sua vez leva a uma separação análoga no que diz respeito às energias, pois $k^- = \mathbf{k}^2/2k^+ \gg p^+$. Tem-se, como conseqüência, uma separação também na escala de tempo: o tempo de vida $\Delta x^+ \sim 1/k^-$ dos glúons suaves é muito menor se comparado à escala de tempo típica $\sim 1/p^-$ para a dinâmica dos pártons rápidos. Assim, embora estes pártons rápidos sejam na realidade flutuações virtuais, eles aparecem para os glúons macios como uma fonte estática (independente de x^+) randômica, à qual está associada a densidade de carga de cor $\rho_a(x^-, \mathbf{x})$. Esta está localizada próxima ao cone de luz $x^- \simeq 0$ e a corrente correspondente possui apenas uma componente +, que pode ser representada por $J_a^\mu(x^-, \mathbf{x}) = \delta^{\mu+} \rho_a(x^-, \mathbf{x})$.

Os glúons macios correspondem aos campos de cor determinados pela equação de Yang-Mills na presença dessa corrente, ou seja,

$$(D_\nu F^{\nu\mu})_a(x) = \delta^{\mu+} \rho_a(x^-, \mathbf{x}). \quad (3.4.23)$$

Em certos gauges, pode-se resolver esta equação clássica e obter o campo de gauge $A[\rho]$ como uma função de uma dada fonte. Os observáveis de interesse na QCD em altas energias, por exemplo o número de ocupação de glúons ou a amplitude de um dipolo externo com o hádron, podem ser expressos como operadores construídos com as componentes A^+ do campo de

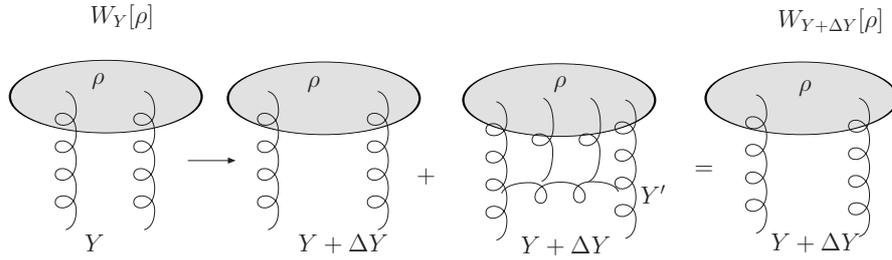


Fig. 3.7: Evolução da distribuição de probabilidade de cargas de cor.

gauge no alvo. Para qualquer operador $\mathcal{O}[\alpha]$ que representa o observável, seu valor médio é dado pela integral funcional

$$\langle \mathcal{O}[\rho] \rangle_Y \equiv \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{O}[\rho] W_Y[\rho], \quad (3.4.24)$$

onde $W_Y[\rho]$ serve como um peso e fornece a densidade de probabilidade de haver uma distribuição ρ em uma dada rapidez Y . Tal interpretação probabilística está baseada no fato da fonte ser randômica, pois corresponde à carga de cor vista pelos glúons suaves no período curto de suas flutuações virtuais; isto ocorre em um tempo arbitrário e é instantâneo comparado ao tempo de vida da própria fonte. Nas duas equações acima, não há nada relacionado com a dinâmica da QCD em pequeno x , a qual deve estar incluída na distribuição $W_Y[\rho]$, já que esta é a única quantidade da Eq.(3.4.24) que depende da rapidez Y . Vejamos, então, como se procede a evolução dessa distribuição.

Lembremos que $Y = \ln(1/x) = \ln(P^+/k^+)$, onde P^+ é o momentum longitudinal total do hádron. Está claro que, em qualquer valor de rapidez, todos os modos com momenta longitudinais muito maiores do que k^+ devem ser incluídos na fonte. Se a rapidez do hádron for aumentada de Y para $Y + \Delta Y$, alguns modos que anteriormente eram suaves necessariamente tornam-se rápidos e, portanto, devem ser integrados para serem incluídos na fonte, o que levará a uma modificação na distribuição de probabilidade. A teoria nesta nova escala $Y + \Delta Y$ é novamente definida pelas Eqs.(3.4.23) e (3.4.24) simplesmente fazendo $Y \rightarrow Y + \Delta Y$. A Figura 3.7 mostra uma interpretação simples da evolução em rapidez. Nesta, o glúon com rapidez Y' é representativo dos modos semi-rápidos que são integrados, ou seja, $Y \ll Y' \ll Y + \Delta Y$.

A derivação da equação de evolução para $W_Y[\rho]$ não será apresentada aqui, porém pode ser encontrada nos artigos originais [16, 17, 20–22, 24], bem como em [19, 58]. O resultado mais importante para nós é que esta equação pode ser escrita em uma formulação Hamiltoniana em uma forma mais compacta, não em termos de ρ , mas em termos do campo de cor $\alpha_Y(x^-, \mathbf{x}) \equiv A^+(x^-, \mathbf{x})$. O resultado é a equação JIMWLK (Jalilian-Marian, Iancu,

McLerran, Weigert, Leodinov, Kovner) na forma Hamiltoniana

$$\frac{\partial}{\partial Y} W_Y[\alpha] = -H W_Y[\alpha] \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \frac{\delta}{\delta \alpha_Y^a(\mathbf{x})} \chi^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \alpha_Y^b(\mathbf{y})} W_Y[\alpha], \quad (3.4.25)$$

com

$$\chi^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{(2\pi)^2} \mathcal{K}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} (1 + \tilde{V}_{\mathbf{x}}^\dagger \tilde{V}_{\mathbf{y}} - \tilde{V}_{\mathbf{x}}^\dagger \tilde{V}_{\mathbf{z}} - \tilde{V}_{\mathbf{z}}^\dagger \tilde{V}_{\mathbf{y}}). \quad (3.4.26)$$

Na equação acima,

$$\mathcal{K}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} \equiv \frac{(x^i - z^i)(y^i - z^i)}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \quad (3.4.27)$$

e

$$\tilde{V}_{\mathbf{x}} = \tilde{V}(\mathbf{x}) = \text{P exp} \left(ig \int dx^- \alpha^a(x^-, \mathbf{x}) T^a \right) \quad (3.4.28)$$

corresponde a uma linha de Wilson expressa na representação adjunta.

Naturalmente, nesta representação- α , o valor médio do operador \mathcal{O} é obtido através da integral

$$\langle \mathcal{O}[\alpha] \rangle_Y \equiv \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{O}[\alpha] W_Y[\alpha]. \quad (3.4.29)$$

Para que se obtenha a evolução do observável, efetua-se a derivação da expressão acima com respeito a Y . Como a única quantidade do integrando que depende da rapidez é a distribuição de probabilidade $W_Y[\alpha]$, usa-se a Eq.(3.4.25) e o resultado é

$$\frac{\partial}{\partial Y} \langle \mathcal{O} \rangle_Y = - \langle H \mathcal{O} \rangle_Y \equiv \left\langle \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \frac{\delta}{\delta \alpha_Y^a(\mathbf{x})} \chi^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \alpha_Y^b(\mathbf{y})} \mathcal{O} \right\rangle_Y. \quad (3.4.30)$$

3.5 Hierarquia de Balitsky

Consideremos um projétil que consiste em um par quark-antiquark, um dipolo que se propaga no campo de cor do alvo hadrônico. A matriz S correspondente é obtida como a média em cor do produto das matrizes S individuais para o quark (com coordenada transversal \mathbf{x}) e o antiquark (com coordenada transversal \mathbf{y}):

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}; A^+) = \frac{1}{N_c} \text{tr}(V_{\mathbf{x}}^\dagger V_{\mathbf{y}}). \quad (3.5.31)$$

Aqui,

$$V_{\mathbf{x}}^\dagger = \text{P exp} \left(ig \int dx^- A_a^+(x^-, \mathbf{x}) t^a \right) \quad (3.5.32)$$

onde o símbolo P denota o ordenamento em x^- das matrizes de cor $A_a^+(x^-, \mathbf{x}) t^a$ no expoente, da direita para a esquerda na ordem crescente dos seus argumentos x^- . A Eq.(3.5.32) é

uma linha de Wilson (na representação fundamental), ordenada na trajetória, representada pela trajetória do dipolo.

A matriz S para o espalhamento dipolo-hádron é obtida efetuando a média sobre todos os campos de cor no alvo, o que fornece

$$\langle S_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle \equiv \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}(V_{\mathbf{x}}^\dagger V_{\mathbf{y}}) \rangle. \quad (3.5.33)$$

Para obtermos sua evolução com a energia, substituímos $\mathcal{O} = S_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ na Eq.(3.4.30) e o resultado é

$$\frac{\partial}{\partial Y} \langle S_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int_{\mathbf{x}} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} [-\langle S_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y + \langle S_{\mathbf{x}\mathbf{z}} S_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y], \quad (3.5.34)$$

onde

$$\mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} \equiv \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} \quad (3.5.35)$$

e $\bar{\alpha}_s = \alpha_s N_c / \pi$. Esta equação não é uma equação fechada, mas a primeira equação de uma hierarquia infinita, a chamada hierarquia de Balitsky, pois a evolução da função de dois pontos das linhas de Wilson está acoplada à evolução da função de quatro pontos, que por sua vez está acoplada à de seis pontos e assim por diante. Tomemos, por exemplo, a segunda equação desta hierarquia, satisfeita pela função de 4 pontos no lado direito da Eq.(3.5.34). Ela tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \langle S_{\mathbf{x}\mathbf{z}} S_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int_{\mathbf{w}} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{w}} \langle (-\langle S_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_Y + S_{\mathbf{x}\mathbf{w}} S_{\mathbf{w}\mathbf{z}}) S_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y \\ &+ \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int_{\mathbf{w}} \mathcal{M}_{\mathbf{z}\mathbf{y}\mathbf{w}} \langle S_{\mathbf{x}\mathbf{z}} (-\langle S_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y + S_{\mathbf{z}\mathbf{w}} S_{\mathbf{w}\mathbf{y}}) \rangle_Y \\ &+ \frac{1}{N_c^2} \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int_{\mathbf{w}} [\mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} - \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{w}} - \mathcal{M}_{\mathbf{z}\mathbf{y}\mathbf{w}}] \langle Q_{\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{w}\mathbf{y}} + Q_{\mathbf{x}\mathbf{w}\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

onde

$$Q_{\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{w}\mathbf{y}} \equiv \frac{1}{N_c} [\text{tr}(V_{\mathbf{x}}^\dagger V_{\mathbf{z}}) V_{\mathbf{w}}^\dagger V_{\mathbf{y}} V_{\mathbf{z}}^\dagger V_{\mathbf{w}}) - \text{tr}(V_{\mathbf{x}}^\dagger V_{\mathbf{y}})] \quad (3.5.37)$$

é o operador de quadrupolo, que já torna a segunda equação da hierarquia bastante complicada. Contudo, como vemos, este termo possui um fator $1/N_c^2$, e portanto é suprimido no limite de grande N_c . Assim, neste limite, esta equação é reduzida aos termos das duas primeiras linhas da Eq.(3.5.36).

É importante notar que a hierarquia descrita acima foi obtida considerando a evolução do alvo (o CGC), mas também pode ser interpretada em termos da evolução do projétil, o que foi feito originalmente por Balitsky [25–27, 59]. A evolução é implementada realizando uma transformação de Lorentz (boost) no projétil, que evolui através da radiação de glúons (com pequeno x). No limite de grande N_c no qual o projétil é uma coleção de N dipolos, sua

evolução consiste na separação destes dipolos em dois novos dipolos, seguida pela interação do sistema final de $N + 1$ dipolos com o alvo.

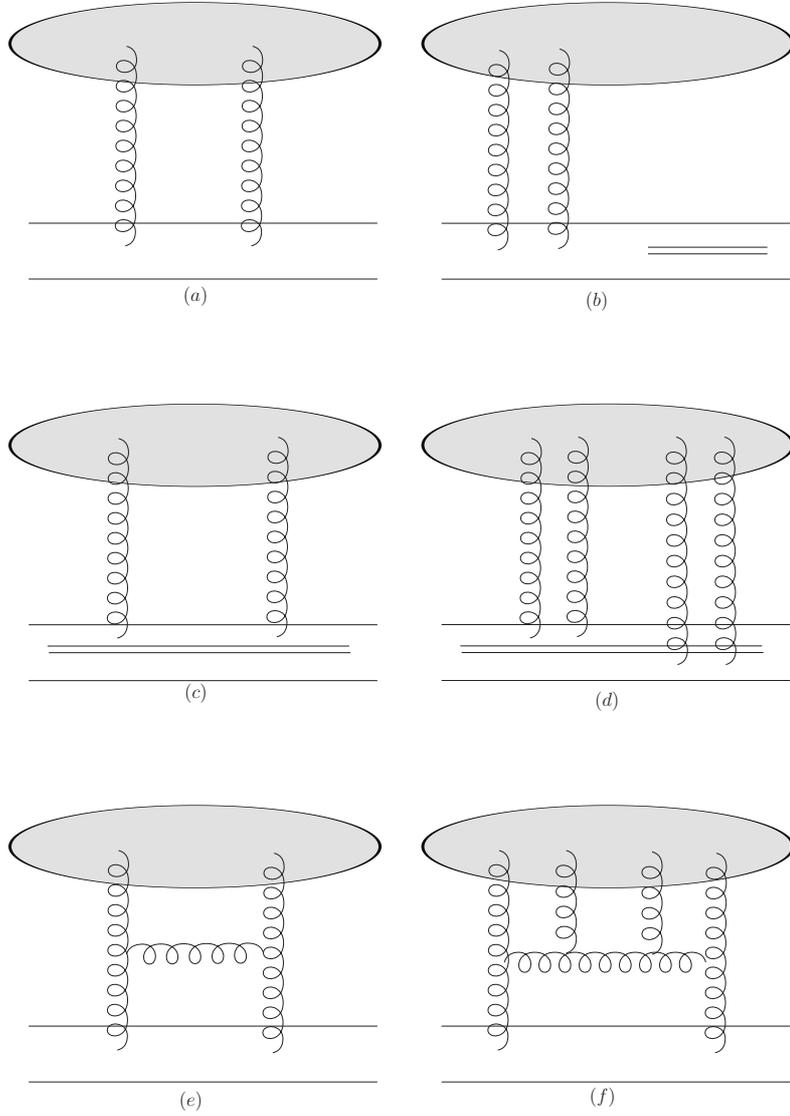


Fig. 3.8: Diagramas para o espalhamento de um único dipolo: (a) contribuição de árvore; (b,c,d) um passo na evolução do projétil; (e,f) um passo na evolução do alvo.

Nesta tese, estamos particularmente interessados na evolução da amplitude de espalhamento, ao invés da matriz S . Assim, usando $T_{xy} = 1 - S_{xy}$, a primeira equação de Balitsky para a amplitude de espalhamento tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \langle T_{xy} \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int_{\mathbf{x}} \mathcal{M}_{xyz} [-\langle T_{xy} \rangle_Y + \langle T_{xz} \rangle_Y + \langle T_{zy} \rangle_Y - \langle T_{xz} T_{zy} \rangle_Y]. \quad (3.5.38)$$

Na Figura 3.8, são mostrados diagramas de Feynman que ilustram os processos contidos na

Eq.(3.5.38) na perspectiva da evolução do projétil. O processo de espalhamento é tomado na ordem mais baixa da teoria de perturbações. O espalhamento entre o dipolo e o alvo começa com a troca de dois glúons, como mostrado na Figura 3.8(a). Os diagramas 3.8(b) e (c) representam as contribuições presentes na evolução BFKL (o termo virtual e o espalhamento de um dos dipolos com o alvo, respectivamente) e o diagrama 3.8(d) descreve o espalhamento simultâneo dos dois dipolos com o alvo, representado pelo termo quadrático na eq.(3.5.38). Os diagramas 3.8(e) e (f) ilustram o espalhamento do ponto de vista da evolução do alvo, ou seja do CGC, e correspondem aos diagramas 3.8(c) e (d), respectivamente.

Observemos que o termo de espalhamento múltiplo é da ordem dos outros quando $TT \sim T$, ou seja, quando $T \sim 1$. Assim, este termo é uma contribuição obrigatória próximo ao limite de unitariedade e deve, portanto, ser levado em conta. No regime no qual as energias são relativamente baixas, o alvo consiste em um sistema diluído e temos o caso no qual o espalhamento é fraco. Isto que implica em $T \ll 1$ e, portanto, $\langle TT \rangle \ll \langle T \rangle \ll 1$. Neste caso, o termo que corresponde ao múltiplo espalhamento da Eq.(3.5.38) torna-se desprezível e a equação para a amplitude de espalhamento dipolo-hádron reduz-se à equação linear BFKL.

3.6 A equação BK

A equação de Balitsky (3.5.38) não é uma equação fechada para $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle$, mas a primeira equação de uma hierarquia infinita. Para que seja obtida uma equação fechada para a amplitude de espalhamento de um dipolo, pode-se considerar que o alvo é suficientemente grande e homogêneo. Neste caso, considera-se a aproximação de campo médio $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y = \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_Y \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y$ na Eq.(3.5.38). Chamando $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y$, tem-se como resultado a equação abaixo:

$$\partial_Y N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2\mathbf{z} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} [N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + N_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z})N_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y})] \quad (3.6.39)$$

Esta expressão é a equação de Balitsky-Kovchegov (equação BK) [25–29], que é a equação mais simples que pode ser obtida na QCD perturbativa que inclui tanto as contribuições BFKL em altas energias como as correções de unitariedade.

Consideremos o caso no qual a amplitude $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ independe do parâmetro de impacto $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ e depende apenas do tamanho do dipolo $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Após a integração da parte angular, e após ser realizada a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y(k) &= \int \frac{d^2r}{2\pi} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r^2} N_Y(r) \\ &= \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) N_Y(r), \end{aligned} \quad (3.6.40)$$

obtem-se a equação BK no espaço de momentum para a amplitude $\mathcal{N}_Y(k = |\mathbf{k}|)$

$$\partial_Y \mathcal{N}_Y(k) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \left[\mathcal{N}_Y(k') - \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \mathcal{N}_Y(k) \right] - \bar{\alpha} \mathcal{N}_Y^2(k). \quad (3.6.41)$$

Esta equação pode ser reescrita de maneira compacta [29]

$$\partial_Y \mathcal{N} = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \mathcal{N} - \bar{\alpha} \mathcal{N}^2, \quad (3.6.42)$$

onde χ é dado pela Eq.(3.3.19) e $L = \ln(k^2/k_0^2)$, k_0 sendo uma escala fixa. O núcleo (3.3.19) é um operador integro-diferencial que pode ser definido por meio da expansão em série

$$\begin{aligned} \chi(-\partial_L) &= \chi(\gamma_0) \mathbf{1} + \chi'(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \chi''(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \chi^{(3)}(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.6.43)$$

para um γ_0 entre 0 e 1.

Recentemente Munier e Peschanski [30–32] mostraram que a equação BK encontra-se na classe de universalidade da equação de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (FKPP) [33]. Esta é uma equação conhecida na física estatística de não equilíbrio e sua dinâmica é utilizada para descrever muitos sistemas de reação-difusão na aproximação de campo médio, e tem sido bastante estudada há mais de 60 anos.

Esta redução da equação BK foi obtida ao se aplicar uma aproximação de ponto de sela (conhecida também como aproximação *difusiva*) ao núcleo (3.3.19), ou seja, ao considerar a expansão (3.6.43) até a segunda ordem na derivada ∂_L , em torno de $\gamma_0 = \frac{1}{2}$, após a qual a equação BK fica

$$\partial_Y \mathcal{N} = \bar{\alpha} \bar{\chi}(-\partial_L) \mathcal{N} - \bar{\alpha} \mathcal{N}^2, \quad (3.6.44)$$

com

$$\bar{\chi}(-\partial_L) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \chi''\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\partial_L + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (3.6.45)$$

A mudança de variáveis

$$t = \alpha Y, \quad x \sim L, \quad u(x, t) \propto \mathcal{N}_Y(k), \quad (3.6.46)$$

resulta na equação FKPP para $u(t, x)$ (ver Apêndice A):

$$\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + u(t, x) - u^2(t, x). \quad (3.6.47)$$

Sabe-se que esta equação admite ondas progressivas como soluções assintóticas, ou seja,

a solução $u(x, t)$ para a equação (3.6.47) adquire a forma $u(x - v_c t)$ de uma frente viajante para grandes valores de t a uma velocidade crítica v_c , sem deformação (ver figura 3.9). A seguir, faremos uma breve revisão dos principais resultados provenientes da Eq.(3.6.47) e em seguida abordaremos os aspectos relevantes relativos à equação BK (3.6.42).

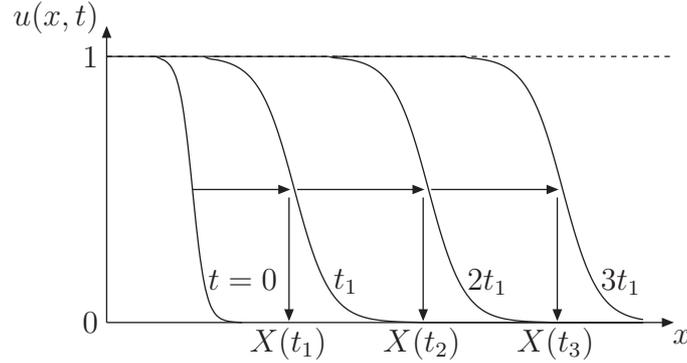


Fig. 3.9: Comportamento de ondas progressivas de $u(t, x)$, solução de (3.6.47)

A solução da Eq.(3.6.47) corresponde a uma superposição linear de ondas [30–32]:

$$u(t, x) = \int_C \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) \exp \{ -\gamma(x_{fo} + vt) + \omega(\gamma)t \}, \quad (3.6.48)$$

onde $\omega(\gamma)$ é a transformada de Mellin do núcleo da equação, ou seja, $\partial_x^2 + 1$, e define a relação de dispersão da equação linearizada, $x_{fo} = x - vt$ é a posição relativa da frente de onda. Cada onda parcial cujo número de onda é γ possui uma velocidade de fase

$$v_\varphi(\gamma) = \frac{\omega(\gamma)}{\gamma} \quad (3.6.49)$$

obtida pela imposição de que o fator exponencial na Eq.(3.6.48) seja independente do tempo. A velocidade de grupo é definida pelo ponto de sela γ_c do fator de fase exponencial:

$$v = \left. \frac{d\omega}{d\gamma} \right|_{\gamma_c} \equiv v_g. \quad (3.6.50)$$

Basicamente, a verdadeira velocidade da frente depende da competição entre as singularidades de $u_0(\gamma)$ (a transformada de Mellin da condição inicial $u(t = 0, x)$) e o ponto de sela do fator de fase. Supõe-se que $u(t = 0, x)$ seja uma função monotônica que conecta de forma suave 1 e 0 quando x vai de $-\infty$ até ∞ , com comportamento assintótico $u(t = 0, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma_0 x}$.

No caso onde $\gamma_0 \geq \gamma_c$, tem-se que a solução é levada ao comportamento crítico corres-

pondente a ondas progressivas para tempos grandes,

$$u(t, x) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma_c x_{fo}} \quad (3.6.51)$$

e o expoente crítico γ_c corresponde a uma onda que possui uma velocidade de fase mínima igual à velocidade de grupo

$$v_c = \frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c} = \left. \frac{d\omega}{d\gamma} \right|_{\gamma_c}. \quad (3.6.52)$$

Esta discussão pode ser traduzida em termos da QCD através da equação BK. Aqui, assim como em todos os capítulos seguintes, nos concentraremos apenas no caso no qual a constante de acoplamento forte $\bar{\alpha}_s$ é fixa. Como vimos anteriormente na discussão da equação BFKL, a solução da parte linear da Eq.(3.6.42) é dada por

$$\mathcal{N}_Y(k) = \int_C \frac{d\gamma}{2i\pi} \mathcal{N}_0(\gamma) e^{-\gamma L + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y}, \quad (3.6.53)$$

onde L faz o papel da variável espacial x . Para a determinação da quantidade análoga à velocidade de grupo v_g , pode-se comparar a Eq.(3.6.53) com (3.6.48) e vê-se que a relação de dispersão é dada por

$$\omega(\gamma) = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma). \quad (3.6.54)$$

A velocidade de fase possui um mínimo em γ_c . A partir das Eqs.(3.6.50) e (3.6.52), γ_c é a solução da equação implícita

$$\gamma_c \chi'(\gamma_c) = \chi(\gamma_c), \quad (3.6.55)$$

o que implica em $\gamma_c = 0,6275\dots$. Neste ponto, deve-se analisar a condição inicial $\mathcal{N}_0(\gamma)$, que deve ser tal que $\mathcal{N}(Y = 0, k) \sim k^2$ para grandes valores de L , ou seja, deve satisfazer a propriedade de transparência de cor. Isso corresponde a $\gamma_0 = 1$. Assim, tem-se que $\gamma_c \leq \gamma_0$ e, portanto, uma situação similar à discutida anteriormente para o comportamento assintótico de $u(t, x)$ da equação FKPP. A velocidade crítica da frente de onda é

$$v_c = \bar{\alpha}_s \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c}, \quad (3.6.56)$$

o que corresponde à seleção da onda mais lenta possível. Para o núcleo de ordem dominante (3.3.19), obtém-se $v_c = 4.88\bar{\alpha}_s$. Usando-se a aproximação difusiva para o núcleo BFKL, descrita anteriormente, é possível chegar a uma expressão para a solução assintótica para a equação BK independente do parâmetro de impacto. Em particular, para a cauda da

amplitude, obtém-se

$$\mathcal{N}(k, Y) \stackrel{k \gg Q_s}{\approx} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c} \log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) \exp \left[-\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right], \quad (3.6.57)$$

Na expressão acima, $Q_s(Y)$ é a *escala de saturação*, a qual mede a posição da frente de onda. Mais precisamente, é $L_s(Y) = \log(Q_s^2/k_0^2) = v_c Y$ que mede a posição da frente. Um cálculo mais detalhado permite a extração de duas correções subdominantes adicionais, resultando na escala de saturação [30–32]

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp \left(v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log(Y) - \frac{3}{\gamma_c^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}} \frac{1}{\sqrt{Y}} \right). \quad (3.6.58)$$

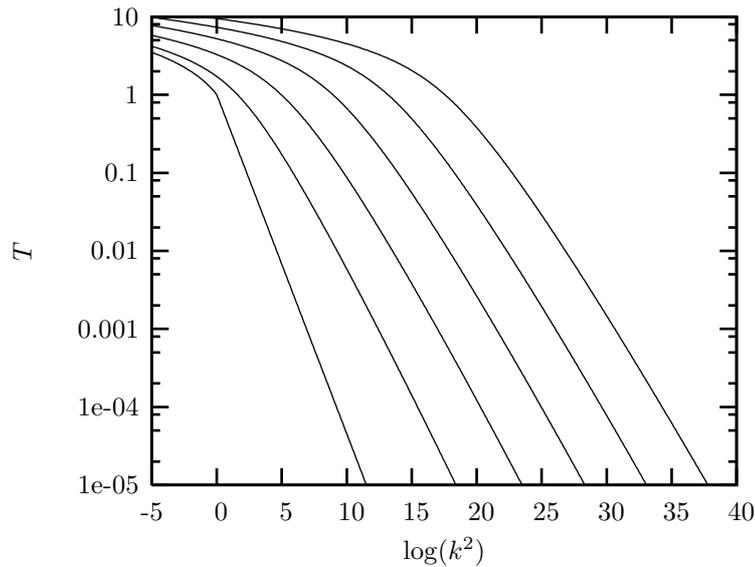


Fig. 3.10: *Comportamento de onda viajante da equação BK através de uma simulação numérica [60] para valores de rapidez $Y = 0, 5, 10, 15, 20, 25$.*

É importante saber que, na realidade, a utilização da aproximação difusiva é apenas uma maneira mais direta de verificar essas propriedades da equação BK [60], pois é possível provar a existência de ondas progressivas mesmo para equações mais complicadas que a FKPP, com núcleos mais complicados que $\partial_x^2 + 1$. Na figura 3.10 é apresentado o resultado de uma simulação numérica da evolução em rapidez da equação BK [60]. Pode-se ver que a amplitude de espalhamento apresenta um comportamento assintótico similar ao representado na Figura 3.9 para $u(x, t)$: para valores assintóticos da rapidez ela viaja para valores cada vez maiores de L , mantendo a sua forma.

Consideremos agora o limite de nosso interesse, ou seja, o de altas energias, que corres-

ponde a valores muito grandes da rapidez Y . Neste limite, o expoente em (3.6.57) tende a zero e portanto a exponencial tende a 1, levando a uma amplitude

$$\mathcal{N}(k, Y) \stackrel{Y \rightarrow \infty}{\cong} \mathcal{N}\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right) \stackrel{k \gg Q_s}{\cong} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)^{-\gamma_c} \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right). \quad (3.6.59)$$

a expressão acima mostra que, para valores assintóticos da rapidez, a amplitude $\mathcal{N}(k, Y)$ deixa de depender separadamente de k e Y e apresenta uma dependência apenas na variável de escalamento $k^2/Q_s^2(Y)$.

A equação (3.6.59) possui uma propriedade interessante. Ela mostra que a amplitude, em altas energias, não depende separadamente das variáveis k e Q_s , mas apenas da razão entre elas, ou seja, apresenta o escalamento geométrico. Essa propriedade expressa o fato de que quando se move ao longo da linha de saturação, o comportamento das amplitudes de espalhamento permanece invariável.

A saturação introduz naturalmente a escala Q_s que fornece um corte infravermelho que resolve o problema de instabilidade no infravermelho da equação BFKL. As correções subdominantes em (3.6.57) também possuem um papel importante. O último termo introduz uma dependência explícita da rapidez Y e, portanto, viola o escalamento geométrico. Contudo, este termo pode ser desprezado quando

$$\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} < 1.$$

Isto significa que o escalamento geométrico é obtido para

$$\log(k^2/Q_s^2(Y)) \lesssim \sqrt{2\chi''(\gamma_c)\bar{\alpha}Y},$$

ou seja, em uma janela que estende-se \sqrt{Y} acima da escala de saturação. Assim, em altas energias, as conseqüências da saturação podem ser observadas arbitrariamente longe, na cauda diluída, onde $\mathcal{N}_Y(k)$ é muito menor que 1.

3.7 Para além das equações de Balitsky-JIMWLK: as flutuações

3.7.1 As equações de laços de pomeron

Vimos nas seções anteriores que as equações da hierarquia de Balitsky, também chamadas de equações de Balitsky-JIMWLK, para as amplitudes de espalhamento são obtidas quando é considerado o espalhamento entre um dipolo e um alvo denso, cuja função de onda é

descrita pelo formalismo do CGC. Como foi observado, essas equações (ver por exemplo, Eq.(3.5.38)) possuem uma ampla região de validade, desde o regime diluído, no qual $T \ll 1$, onde temos o domínio da evolução BFKL, até o regime de altas densidades, no qual $T \sim 1$ e os efeitos não lineares (efeitos de saturação ou correções de unitariedade) tornam-se importantes. Entretanto, as equações de Balitsky-JIMWLK não incluem as chamadas *flutuações no número de glúons*, cuja importância foi apenas recentemente descoberta [38, 61–63]. Basicamente, a equação JIMWLK, em sua essência, não leva em conta as divisões de pomerons (apenas fusão), importantes no limite de densidade pequena, ou seja, no regime diluído.

Diante da constatação da importância das flutuações na evolução para o regime de altas energias, concluiu-se que as equações de Balitsky-JIMWLK estão incompletas. As novas equações, obtidas por Iancu e Triantafyllopoulos [38], incluem tanto fusão como a divisão de pomerons, e por isso são chamadas de *Equações de Laços de pomeron*.

Para entendermos essas novas equações, consideremos o espalhamento entre um alvo denso e um projétil composto por 2 dipolos. Alguns diagramas relativos a esse espalhamento são mostrados na Figura 3.11. A partir da Eq.(3.5.36), é fácil ver que a evolução de $\langle T^{(2)} \rangle$ envolverá termos de mesma ordem e termos não lineares, ou seja, amplitudes de espalhamento para 3 dipolos $\langle T^{(3)} \rangle$. Tais termos são representados, respectivamente, pelos diagramas 3.11(b) e (c) (evolução do projétil) ou 3.11(d) e (e) (evolução do alvo). O diagrama 3.11(a) corresponde à contribuição do tipo árvore.

Nas Figuras 3.11(f) e (g) são mostrados dois diagramas de mesma ordem em α_s que os diagramas para evolução linear (Figuras 3.11(b) e (d)). O diagrama 3.11(f) é corretamente incluído na versão completa das equações de Balitsky-JIMWLK, porém, no limite de grande N_c torna-se uma contribuição subdominante. O diagrama de flutuação 3.11(g), que corresponde a uma divisão de pomeron, ou fusão de pomeron, dependendo da perspectiva na qual enxergamos a evolução, não está presente no formalismo de Balitsky-JIMWLK. Na linguagem de dipolos, esse diagrama pode ser obtido a partir da divisão de dipolos dentro do alvo (diluído), como mostrado na Figura 3.12. Naturalmente, essas flutuações no alvo são completamente ignoradas quando é realizada uma aproximação de campo médio, ou seja, quando consideramos a equação BK, válida quando o número de partículas no alvo é muito grande.

Na aproximação de grande N_c e no nível de troca de dois glúons, o novo termo, representado pelo diagrama acima, foi calculado por Iancu e Triantafyllopoulos [38] e aqui apresentaremos alguns dos principais passos [60]. É importante frisar que espera-se que as flutuações sejam importantes quando o alvo é ainda diluído, o que é sempre o caso para dipolos com tamanhos suficientemente pequenos. Nesse caso, o alvo pode ser considerado como uma superposição de dipolos e o glúon no canal s no diagrama de flutuação pode ser

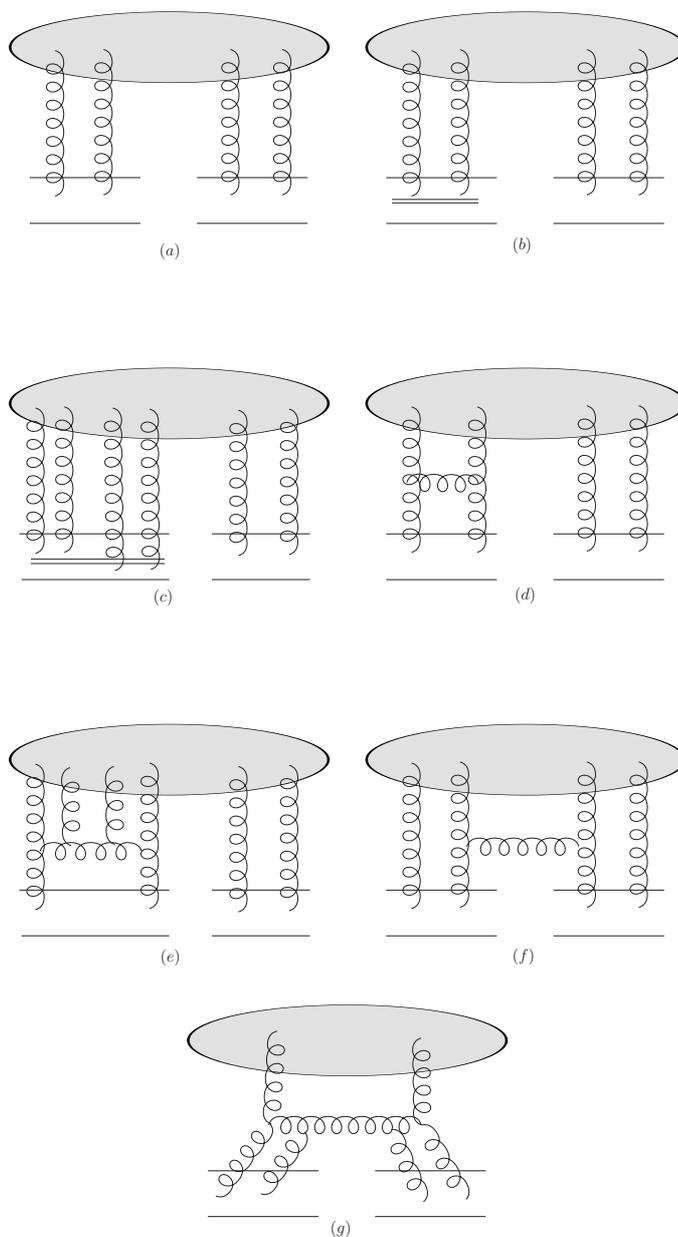


Fig. 3.11: Diagramas para o espalhamento de um par de dipolos: (a) contribuição de árvore; (b, c) um passo na evolução do projétil; (d, e) um passo na evolução do alvo; (f) um diagrama suprimido para grande N_c ; (g) o diagrama que falta, de ordem dominante tanto em α_s como em N_c .

considerado como emitido através de uma divisão de dipolo no alvo, como representado na Figura 3.12. Como é considerada a aproximação de troca de dois glúons, a amplitude de

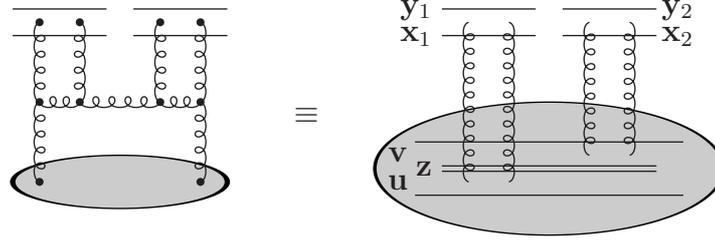


Fig. 3.12: Para um alvo diluído, o diagrama de flutuação pode ser obtido a partir da divisão de um dipolo no alvo.

espalhamento está relacionada com a densidade de dipolos através da fórmula

$$\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle = \alpha_s^2 \int_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \mathcal{A}_0(\mathbf{x}\mathbf{y}|\mathbf{u}\mathbf{v}) \langle n_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \rangle. \quad (3.7.60)$$

onde \mathcal{A}_0 é a amplitude de dipolo-dipolo no nível de troca de dois glúons

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{x}\mathbf{y}|\mathbf{u}\mathbf{v}) = \frac{1}{8} \ln^2 \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{u})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{v})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{v})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{u})^2} \right]. \quad (3.7.61)$$

Essa relação pode ser invertida e obtém-se

$$\langle n_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle = \alpha_s^{-2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \nabla_{\mathbf{y}}^2 \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle.$$

a nova contribuição para a evolução de $\langle T_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2}^{(2)} \rangle$ é, portanto,

$$\begin{aligned} \partial_Y \langle T_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2}^{(2)} \rangle \Big|_{\text{flut}} &= \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 \\ &\int_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{z}} \mathcal{M}_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{z}} \mathcal{A}_0(\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 | \mathbf{u}\mathbf{z}) \mathcal{A}_0(\mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 | \mathbf{z}\mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{u}}^2 \nabla_{\mathbf{v}}^2 \langle T_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \rangle + (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned} \quad (3.7.62)$$

que se torna da mesma ordem que a contribuição BFKL quando $T^2 \sim \alpha_s^2 T$, ou $T \sim \alpha_s^2$, ou seja, no regime diluído. Embora isso pareça irrelevante para a física de saturação, é importante lembrar que, devido à transparência de cor, a amplitude se torna arbitrariamente pequena para tamanhos pequenos de dipolos. Assim, mesmo para alvos densos, há sempre uma região do espaço de fase na qual o sistema é diluído e sua evolução governada por efeitos de flutuações.

Nossa discussão tem sido até agora centrada na equação de evolução para $\langle T^{(2)} \rangle$, mas, como tem-se uma hierarquia infinita de equações, é importante generalizar um pouco e considerar a evolução de $\langle T^{(j)} \rangle$, que é a amplitude de espalhamento de um projétil que contém j dipolos. Essa evolução contém três contribuições: um termo linear BFKL proporcional a

$\langle T^{(j)} \rangle$, um termo negativo de saturação proporcional a $\langle T^{(j+1)} \rangle$ e um termo de contribuição das flutuações, proporcional a $\langle T^{(j-1)} \rangle$. De uma maneira mais simples, sua estrutura (suprimindo as coordenadas transversais) tem a forma

$$\frac{\partial \langle T^{(j)} \rangle}{\partial Y} = j \bar{\alpha}_s \langle T^{(j)} \rangle - j \bar{\alpha}_s \langle T^{(j+1)} \rangle + \frac{j(j-1)}{2} \bar{\alpha}_s \alpha_s^2 \langle T^{(j-1)} \rangle. \quad (3.7.63)$$

O ponto crucial nessa discussão é que é possível mostrar [38, 60, 64] que essa hierarquia infinita para as amplitudes médias pode ser reescrita como uma única equação de Langevin:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\alpha}_s} \frac{\partial T_{\mathbf{x}\mathbf{y}}}{\partial Y} &= \frac{1}{2\pi} \int_z \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} [T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} + T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} - T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} - T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}}] \\ &+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{z}} \mathcal{A}_0(\mathbf{x}\mathbf{y}|\mathbf{u}\mathbf{z}) \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{(\mathbf{u} - \mathbf{z})^2} \sqrt{\nabla_{\mathbf{u}}^2 \nabla_{\mathbf{v}}^2 T_{\mathbf{u}\mathbf{v}}} \nu_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{z};Y}, \end{aligned} \quad (3.7.64)$$

onde $\nu_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{z};Y}$ é um ruído branco Gaussiano, que satisfaz

$$\langle \nu_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{z};Y} \rangle = 0 \quad (3.7.65)$$

$$\langle \nu_{\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{z}_1;Y} \nu_{\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{z}_2;Y'} \rangle = \delta_{\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2} \delta_{\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2} \delta_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2} \delta(\bar{\alpha}_s Y - \bar{\alpha}_s Y') \quad (3.7.66)$$

e todas as outras correlações se anulam.

A nova hierarquia gerada pela inclusão do termo de flutuação possui uma dependência do plano transversal muito mais complicada que a hierarquia de Balitsky-JIMWLK. É possível simplificar o problema realizando uma aproximação local na amplitude do espalhamento dipolo-dipolo \mathcal{A}_0 . Assume-se que dois dipolos interagem apenas se tiverem o mesmo tamanho e se seus centros de massa são suficientemente próximos de modo a permitir uma sobreposição dos dois dipolos, tem-se

$$\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle = \kappa \alpha_s^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4 \langle n_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle,$$

onde κ é um fator de ordem 1. Uma segunda aproximação possível se refere à dependência no parâmetro de impacto [38]. Após uma transformada de Fourier do tamanho do dipolo $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ para o momentum k e considerando independência no parâmetro de impacto, a hierarquia toma uma forma simplificada. Para as duas primeiras equações, tem-se

$$\begin{aligned} \partial_Y \langle T_k \rangle &= \bar{\alpha}_s \chi(-\partial_\rho) \langle T_k \rangle - \bar{\alpha}_s \langle T_{k,k}^{(2)} \rangle, \\ \partial_Y \langle T_{k_1, k_2}^{(2)} \rangle &= \bar{\alpha}_s \chi(-\partial_{\rho_1}) \langle T_{k_1, k_2}^{(2)} \rangle - \bar{\alpha}_s \langle T_{k_1, k_1, k_2}^{(3)} \rangle + (1 \leftrightarrow 2) \\ &+ \bar{\alpha}_s \kappa \alpha_s^2 k_1^2 \delta(k_1^2 - k_2^2) \langle T_{k_1} \rangle, \end{aligned}$$

onde $\rho_i = \log(k_i^2/k_0^2)$. Essa forma simplificada da hierarquia de equações para as amplitudes de espalhamento também pode ser reescrita na forma de uma equação de Langevin

$$\partial_Y T(\rho) = \bar{\alpha} \left[\chi(-\partial_\rho) T(\rho) - T^2(\rho) + \sqrt{\kappa \alpha_s^2 T(\rho)} \eta(\rho, Y) \right], \quad (3.7.67)$$

onde η é um termo de ruído que satisfaz

$$\begin{aligned} \langle \eta(\rho, Y) \rangle &= 0, \\ \langle \eta(\rho_1, Y_1) \eta(\rho_2, Y_2) \rangle &= \frac{4}{\bar{\alpha}} \delta(\rho_1 - \rho_2) \delta(Y_1 - Y_2). \end{aligned} \quad (3.7.68)$$

Esse termo, sendo local, é mais simples do que aquele para o caso geral, (3.7.64). A equação acima é estocástica e descreve um formalismo evento-por-evento. Cada realização do termo de ruído corresponde a uma evolução particular do alvo e pode-se mostrar que, após a média sobre todas elas ser efetuada, a hierarquia para a evolução de $\langle T^k \rangle$ é recuperada.

É importante observarmos que, formalmente, a Eq.(3.7.67) é a equação BK com um termo de ruído adicional. Se, da mesma maneira que para a equação BK pura, for realizada a aproximação difusiva descrita na Seção anterior, e uma mudança de variáveis (ver Apêndice A), chega-se à equação FKPP estocástica (sFKPP) [37, 65], que consiste em adicionar um termo de ruído à equação FKPP, que surge quando deve-se considerar efeitos de discreteza:

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t) - u^2(x, t) + \sqrt{\frac{2}{N}} u(x, t) \eta(x, t).$$

Quando o número de partículas N torna-se muito grande (o que na QCD corresponde a $\alpha_s^2 \rightarrow 0$), a aproximação de campo médio é justificada e a equação FKPP (não estocástica) é válida.

3.7.2 Resultados a partir da sFKPP e conseqüências para a QCD

A equação sFKPP tem sido bastante estudada no que diz respeito a problemas em física estatística, tanto por métodos numéricos como analíticos, com resultados que descreveremos de forma breve e adaptaremos ao nosso problema relacionado com a QCD.

Um dos resultados mostrados pelas simulações numéricas é que, para um número N de partículas grande (e finito), a frente gerada se propaga com uma velocidade assintótica v_N que é menor do que a velocidade correspondente v_0 para a equação FKPP. Além disso, quando N cresce, a convergência de v_N para v_0 é extremamente lenta: $v_0 - v_N \sim 1/\ln^2 N$ quando $N \gg 1$. Para o problema correspondente da QCD isso implica na seguinte depen-

dência em Y da escala de saturação:

$$v_c^* \equiv \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{d\rho_s(Y)}{dY} \simeq v_c - \frac{\mathcal{C}}{\ln^2(1/\alpha_s^2)} \quad \text{quando } \alpha_s \ll 1, \quad (3.7.69)$$

Assim, quando α_s diminui, o *exponente de saturação* v_c^* converge apenas lentamente para seu respectivo valor de campo médio (3.6.56).

Devido às flutuações inerentes no termo de ruído, realizações diferentes da mesma evolução levam a um *conjunto* de frentes que possuem a mesma forma, mas são deslocadas umas das outras ao longo do eixo ρ . Isso quer dizer que a posição $\rho_s \equiv \ln(Q_s^2/k_0^2)$ da frente é uma variável aleatória, caracterizada por um valor médio $\langle \rho_s(Y) \rangle$, o qual, para Y grande, cresce de acordo com a Eq. (3.7.69) (já que esse é o comportamento assintótico comum a todas as frentes do conjunto), e também por uma dispersão $\sigma^2 \equiv \langle \rho_s^2 \rangle - \langle \rho_s \rangle^2$, a qual espera-se que cresça linearmente com Y : $\sigma^2(Y) \sim \bar{\alpha}_s D Y$. A partir de simulações numéricas, mostrou-se que o coeficiente de difusão D escala como $1/\ln^3 N$ quando $N \gg 1$. Para a QCD, isso implica em:

$$D_{\text{fr}} \simeq \frac{\mathcal{D}}{\ln^3(1/\alpha_s^2)} \quad \text{quando } \alpha_s \ll 1, \quad (3.7.70)$$

que se anula, como esperado, quando $\alpha_s \rightarrow 0$, mas apenas muito lentamente.

Os resultados da equação sFKPP são consistentes com estudos dos modelos estocásticos de partículas cuja aproximação de campo médio é a equação FKPP. Nesse contexto, Brunet e Derrida [66] explicaram o escalamento $1/\ln^2 N$ da correção da velocidade da frente $v_0 - v_N$ para grande N , permitindo o cálculo do coeficiente \mathcal{C} . Traduzindo para a QCD, tem-se:

$$v_c^* \simeq v_c - \frac{\pi^2 \gamma_c \chi''(\gamma_c)}{2 \ln^2(1/\alpha_s^2)}, \quad \text{quando } \alpha_s \ll 1. \quad (3.7.71)$$

Na QCD, o coeficiente $\mathcal{C} = \pi^2 \gamma_0 \chi''(\gamma_0)/2$ é numericamente grande, $\mathcal{C} \approx 150$.

3.7.3 O escalamento difusivo

Vimos anteriormente que, devido às flutuações, diferentes realizações do alvo levam a frentes com posições ρ_s distintas. É importante frisar que essas frentes, mesmo na presença de flutuações, apresentam padrão de ondas progressivas, ou seja, apresentam escalamento geométrico, assim como as soluções da equação BK. Veremos, no entanto, que quando efetuamos uma média sobre todas as realizações, o que agora significa uma média sobre todas as posições das frentes de onda, o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento $\langle T(\rho) \rangle$ torna-se completamente diferente.

Consideremos a amplitude de um único evento, T e trabalhemos numa notação no espaço de coordenadas, de modo que $\rho = \ln(1/r^2 k_0^2)$. Essa amplitude, para uma dada realização,

possui um momentum de saturação $\rho_s(Y)$ e satura ao valor $T = 1$ na região atrás da frente formada. Além disso, a partir de resultados provenientes da equação FKPP [67], a amplitude toma a forma de escalamento $T(\rho, Y) \simeq e^{\gamma_c(\rho - \rho_s)}$ em um intervalo finito em $\rho - \rho_s$ adiante da frente, ou seja, a frente é compacta, diferentemente da solução da frente da equação BK, que estende-se até distâncias $\rho - \rho_s \sim \sqrt{Y}$ (janela de escalamento geométrico), e portanto, sua espessura cresce com a rapidez.

Para o que virá adiante, é suficiente descrever o comportamento de T através da seguinte interpolação:

$$T(\rho, \rho_s) = \begin{cases} 1 & \text{para } \rho \leq \rho_s \\ \exp[-\gamma_c(\rho - \rho_s)] & \text{para } \rho \geq \rho_s. \end{cases} \quad (3.7.72)$$

Recentemente, Marquet, Soyez e Xiao [68] mostraram que os valores de ρ_s são distribuídos, com uma boa aproximação, de acordo com uma densidade de probabilidade Gaussiana

$$P_Y(\rho_s) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(\rho_s - \langle\rho_s\rangle)^2}{\sigma^2}\right], \quad (3.7.73)$$

onde $\langle\rho_s\rangle \simeq v_c^*Y$ e $\sigma^2 \simeq D\bar{\alpha}_s Y$, como visto anteriormente. A amplitude média $\langle T \rangle$ é, então, determinada através da fórmula

$$\langle T(\rho, \langle\rho_s\rangle) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s P(\rho_s) T(\rho, \rho_s). \quad (3.7.74)$$

Usando as Eqs.(3.7.72) e a Eq.(3.7.73) pode-se mostrar que

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{\sigma}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\gamma_c^2 \sigma^2}{4} - \gamma_c z\right) \left[2 - \operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{\sigma} - \frac{\gamma_c \sigma}{2}\right)\right], \quad (3.7.75)$$

onde $z \equiv \rho - \langle\rho_s\rangle$ e $\operatorname{Erfc}(x)$ é a função erro complementar:

$$\operatorname{Erfc}(x) = \begin{cases} 2 - \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}x} & \text{para } x \ll -1 \\ 1 & \text{para } x = 0 \\ \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}x} & \text{para } x \gg 1. \end{cases} \quad (3.7.76)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq.(3.7.75) vem da parte de saturação da Eq.(3.7.72) enquanto o segundo termo vem da parte descrita pelo decaimento exponencial da mesma.

Consideremos duas situações interessantes:

(i) Baixas energias, ou $\sigma \ll 1/\gamma_c$. Neste caso, a amplitude mantém o perfil de um único

evento, exceto no pequeno intervalo $|z| \lesssim \sigma$, onde ela é mais suave:

$$\langle T(z) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{para } z \ll -\sigma \\ e^{-\gamma_c z} & \text{para } z \gg \sigma. \end{cases} \quad (3.7.77)$$

Nesse regime, o escalamento geométrico se manifesta no nível das amplitudes médias, situação similar à aproximação de campo médio, exceto pelos fatos de que a frente agora é compacta e possui uma velocidade menor.

(ii) Altas energias, ou seja, $\sigma \gg 1/\gamma_c$. Neste caso, o primeiro termo da Eq.(3.7.75) domina em todas as regiões, exceto a distâncias extremamente grandes adiante da frente, tais que $z \gtrsim \gamma_c \sigma^2$. Por exemplo, no intervalo $\sigma \ll z \ll \gamma_c \sigma^2$, no qual a amplitude média é pequena, obtém-se

$$\langle T(z) \rangle \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{z} \left\{ 1 + \frac{2z}{\gamma_c \sigma^2} \right\} e^{-z^2/\sigma^2}. \quad (3.7.78)$$

Por outro lado, para valores muito grandes de ρ , tais que $z \gg \sigma^2$, a contribuição dominante para a amplitude média vem da segunda parte da Eq.(3.7.72), ou seja, da cauda exponencial em (3.7.75). Tem-se, assim,

$$\langle T(z) \rangle \simeq \exp(-\gamma_c z) \exp\left(\frac{\gamma_c \sigma^2}{4}\right). \quad (3.7.79)$$

A expressão para a amplitude média toma, em altas energias, a seguinte forma:

$$\langle T(z) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{Erfc}(z/\sigma) & \text{para } -\infty < z \ll \gamma_c \sigma^2 \\ \sim e^{-z} & \text{para } \gamma_c \sigma^2 \ll z. \end{cases} \quad (3.7.80)$$

Nessa última expressão, consideramos um perfil mais realístico, de modo que a cauda exponencial, para muito grandes valores de z , seja determinada pela parte de transparência de cor. A partir da expressão acima, tem-se que, quando $z \ll \gamma_c \sigma^2$, o perfil da amplitude média não possui nenhum vestígio de γ_c e muito menos do escalamento geométrico. Em vez disso, ela obedece um novo tipo de escalamento: escala como uma função de z/σ , o chamado *escalamento difusivo*.

Neste Capítulo foram revisadas algumas das principais propriedades da evolução das amplitudes de espalhamento no formalismo de dipolos. Nos próximos capítulos essas propriedades serão utilizadas em aplicações fenomenológicas, mais especificamente ao DIS elétron-próton, e abordadas novamente em um outra perspectiva, a de um modelo unidimensional para o espalhamento na QCD em altas energias.

Capítulo 4

Fenomenologia aplicada ao DIS: formalismo de dipolos

Neste capítulo abordaremos algumas aplicações fenomenológicas ao DIS, mas especificamente ao DIS no referencial de dipolo, o qual permite que o processo seja escrito de forma fatorizada. Dentro deste formalismo, faremos uma breve revisão de alguns modelos para a seção de choque de dipolo e desenvolveremos o modelo fenomenológico AGBS, o mais recente proposto na literatura, que permite escrever a seção de choque de dipolo através de uma análise no espaço de momentum. Compararemos nossos resultados com os obtidos pelos outros modelos, todos desenvolvidos no espaço de coordenadas.

4.1 DIS no referencial de dipolo

Consideremos a colisão entre um fóton virtual e um próton em altas energias, ou seja pequeno x . Vimos que, em pequeno x , o fóton virtual sonda um quark que é tipicamente um quark de mar que é emitido pelos glúons com pequeno x no próton. É conveniente separar essa emissão de quarks da função de onda do próton através de uma mudança de referencial no qual vemos o processo. Este novo referencial—chamado de referencial de dipolo—pode ser obtido realizando uma transformação de Lorentz (boost), de modo que a maior parte da energia ainda é carregada pelo próton, mas o fóton possui energia suficiente para se dissociar, bem antes do espalhamento, em um par quark-antiquark $q\bar{q}$, um dipolo de cor, o qual então interage com o próton. Este processo é representado na Figura 4.1.

Mais especificamente, esse referencial é descrito, usando as coordenadas do cone de luz, por

$$P^\mu = (\sqrt{2}P, \mathbf{0}, 0), \quad q^\mu = \left(-\frac{Q^2}{2q^-}, \mathbf{0}, q^-\right) \quad (4.1.1)$$

onde $q_z \gg Q$, mas com $\alpha_s \ln(q/Q) \ll 1$. Pode-se mostrar que o tempo de vida do par $q\bar{q}$ é muito maior que o tempo de colisão, de modo que suas coordenadas transversais permanecem 'congeladas' durante a interação com o próton.

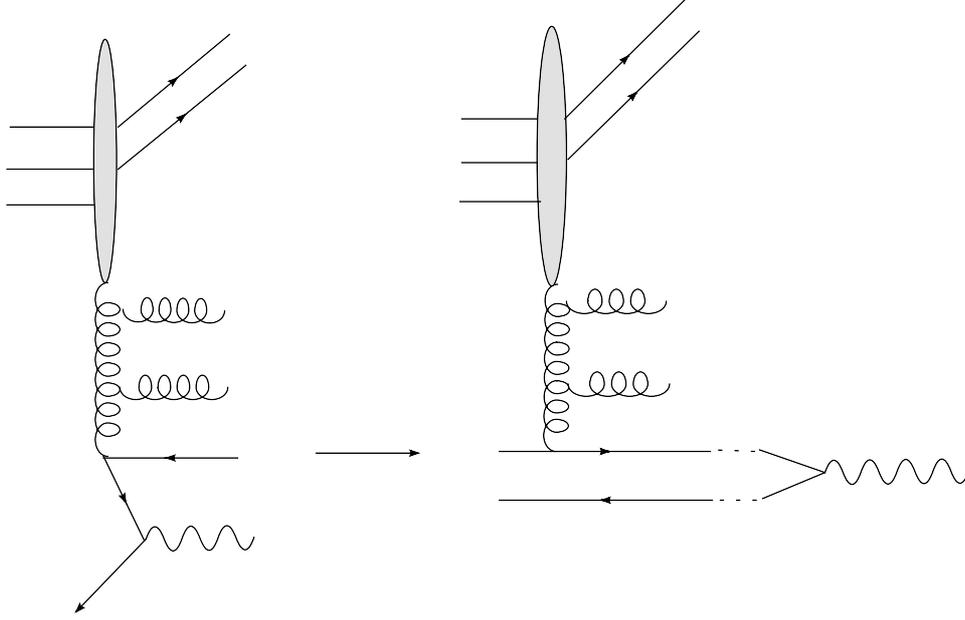


Fig. 4.1: Ilustração da transformação de Lorentz levando do referencial de Breit para o referencial de dipolo.

Chamando de κ e κ' os quadri-momenta do quark e do antiquark do par, respectivamente, tem-se

$$\kappa^\mu = \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{2zq^-}, \boldsymbol{\kappa}, zq^- \right), \quad (4.1.2)$$

$$\kappa'^\mu = \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{2(1-z)q^-}, -\boldsymbol{\kappa}, (1-z)q^- \right), \quad (4.1.3)$$

onde z e $(1-z)$ são as frações de momentum do fóton carregadas pelo quark e antiquark, respectivamente. Para calcular o tempo de formação do dipolo Δt_{form} , deve-se calcular a diferença de energia entre o par $q\bar{q}$ e o fóton virtual. A energia do par é

$$E_{q\bar{q}} = \frac{(\kappa + \kappa')^+ + (\kappa + \kappa')^-}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q^- + \frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{2z(1-z)q^-} \right), \quad (4.1.4)$$

e a energia do fóton virtual é obtida analogamente,

$$E_{\gamma^*} = \frac{q^+ + q^-}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q^- - \frac{Q^2}{2q^-} \right). \quad (4.1.5)$$

Assim,

$$\Delta E = E_{par} - E_{\gamma^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{2z(1-z)q^-} + \frac{Q^2}{2q^-} \right) \quad (4.1.6)$$

Para $\kappa^2 \lesssim z(1-z)Q^2$ [48],

$$\Delta E \simeq \frac{Q^2}{\sqrt{2}q^-}. \quad (4.1.7)$$

Usando

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}, \quad \nu = \frac{P \cdot q}{M} = \frac{\sqrt{2}Pq^-}{M}, \quad (4.1.8)$$

tem-se que

$$\Delta E \simeq \frac{Q^2}{\sqrt{2}q^-} = \frac{PQ^2}{M\nu} = 2Px. \quad (4.1.9)$$

Finalmente, o tempo de formação do par é estimado através da fórmula

$$\Delta t_{form} \sim \frac{1}{\Delta E} \simeq \frac{1}{2Px}. \quad (4.1.10)$$

Como $x \ll 1$, temos que o tempo de formação do par é muito maior que o tempo da colisão,

$$\Delta t_{form} \gg \Delta t_{col} \sim \frac{1}{P}. \quad (4.1.11)$$

Equivalentemente, pode-se dizer que o dipolo viaja uma longa distância $l \sim 1/2Px$ antes do espalhamento com o alvo.

Esta representação física é expressa numa fórmula fatorizada para as seções de choque $\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}$ (e portanto, para a seção de choque total σ^{γ^*p}). Estas são dadas pela seguinte convolução:

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{dip}(\mathbf{r}, Y), \quad (4.1.12)$$

onde $|\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2$ são as funções de onda do fóton (transversal e longitudinal) que fornecem as densidades de probabilidade para um fóton se separar em um dipolo com tamanho transversal \mathbf{r} . Estas podem ser calculadas na Eletrodinâmica Quântica (QED) perturbativa [69, 70] e suas formas explícitas são

$$|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 = \frac{2N_c\alpha_{em}}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (4.1.13)$$

$$|\Psi_L(r, z; Q^2)|^2 = \frac{2N_c\alpha_{em}}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (4.1.14)$$

onde $\bar{Q}_q = z(1-z)Q^2 + m_q^2$, m_q é a massa do quark com sabor q e $K_{0,1}$ são as funções de McDonald de ordem zero e um, respectivamente.

A função σ_{dip} é a seção de choque total da interação dipolo-próton, e é dada, através do

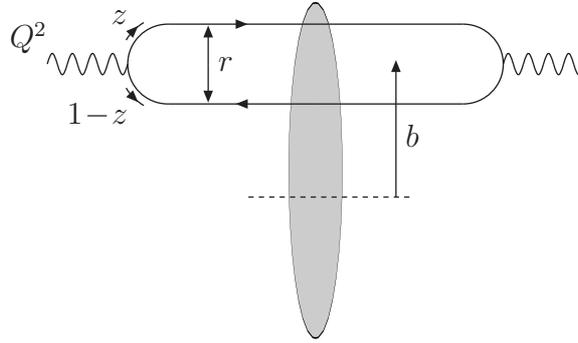


Fig. 4.2: Representação do DIS no referencial de dipolos em termos das variáveis envolvidas: o tamanho do dipolo r , o parâmetro de impacto \mathbf{b} e as frações de momentum carregadas pelos constituintes do dipolo.

teorema óptico, por

$$\sigma_{dip}(\mathbf{r}, Y) = 2 \int d^2\mathbf{b} \langle T(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \rangle_Y, \quad (4.1.15)$$

onde $\langle T(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \rangle_Y$ é a amplitude de espalhamento para um dipolo cujo tamanho transversal é dado pelo vetor $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, em um dado parâmetro de impacto $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}$. A Figura 4.2 ilustra a interação do dipolo com o próton, apresentando as variáveis envolvidas no processo.

4.2 Seção de choque σ_{dip} : fenomenologia

Como as formas explícitas das funções de onda do fóton virtual são conhecidas, resta-nos ter uma expressão para a seção de choque dipolo-próton. Diferentes modelos têm se mostrado muito eficientes na descrição dos dados do DIS.

Aqui, faremos uma breve revisão de dois destes modelos, o chamado modelo GBW [71,72], e sua extensão à análise DGLAP, resultando no modelo de saturação BGBK [73,74], e o modelo IIM [75] (ou ajuste CGC). Em seguida descreveremos em detalhes o modelo AGBS [76], o foco deste capítulo. Outros modelos que também descrevem com sucesso os dados do DIS podem ser encontrados na literatura. Estes incluem o modelo de Forshaw e Shaw [77–79], baseado nas idéias da teoria de Regge combinadas com a idéia de saturação, o modelo de McDermott, Frankfurt, Guzey e Strikman [80], bastante próximo ao modelo BGK, e a análise feita por Kowalski, Motyka e Watt [81], que leva em conta o problema da dependência no parâmetro de impacto da amplitude de espalhamento.

Os modelos GBW e IIM consideram que a amplitude de espalhamento não depende do parâmetro de impacto \mathbf{b} , o que é uma suposição razoável em altas energias. Neste caso, o próton é tratado como um disco homogêneo de raio R_p e a seção de choque dipolo-próton em

(4.1.12) torna-se proporcional à amplitude de espalhamento através da relação ($r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$)

$$\sigma_{dip}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 \langle T(r) \rangle_Y. \quad (4.2.16)$$

Vimos na Seção anterior que a função de estrutura do próton F_2 pode ser escrita em termos da seção de choque γ^*p através da fórmula

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} \left[\sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2) \right],$$

Assim, através das equações (4.1.12), (4.1.13), (4.1.14) e (4.2.16), é possível expressar F_2 em termos da amplitude de espalhamento $\langle T(r) \rangle_Y$:

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz \left\{ |\Psi_T(z, r)|^2 + |\Psi_L(z, r)|^2 \right\} \langle T(r) \rangle_Y \quad (4.2.17)$$

É importante observar que a amplitude de espalhamento depende do tamanho r do dipolo, ou seja, é expressa no espaço de coordenadas. Esta é uma característica comum aos modelos GBW e IIM, descritos a seguir.

4.2.1 O modelo GBW

O modelo de saturação desenvolvido por Golec-Biernat e Wüsthoff, ou modelo GBW [71, 72], é um modelo fenomenológico que incorpora de uma maneira simples elementos básicos da física de saturação. Este modelo está contido na seguinte parametrização para a seção de choque de dipolo:

$$\sigma_{dip}(x, r) = \sigma_0 \langle T(r) \rangle_Y = \sigma_0 \left(1 - e^{-r^2 Q_s^2(x)/4} \right), \quad (4.2.18)$$

onde $Q_s(x) = Q_0^2(x_0/x)^\lambda$, $Q_0 = 1$ GeV e σ_0 , x_0 e λ são parâmetros livres, extraídos a partir do ajuste aos dados de HERA para F_2 em pequeno x .

A Eq.(4.2.18) interpola entre o regime de transparência de cor ($\sigma_{dip} \propto r^2$) para pequenos tamanhos de dipolos e limite de disco negro ($\sigma_{dip} \approx \sigma_0$) para grandes tamanhos de dipolos, com a transição entre estes regimes ocorrendo em uma escala $r \sim 1/Q_s(x)$. Contudo, o modelo ignora algumas propriedades da evolução na QCD tanto no regime diluído, onde ele falha em descrever a violação do escalamento de Bjorken, como na transição para a saturação, onde a transparência de cor é modificada pela evolução BFKL já para pequenos dipolos $r < 1/Q_s(x)$.

O modelo GBW fornece um ajuste muito bom aos primeiros dados de HERA para σ^{γ^*p} para $x < 0.01$ e para valores pequenos e intermediários de Q^2 (até em torno de 100 GeV²). Os valores dos parâmetros obtidos a partir do ajuste original são $\sigma_0 = 23$ milibarns,

$\lambda = 0.288$ e $x_0 = 3.04 \times 10^{-4}$ [71, 72]. Tanto para a função de estrutura F_2 como para a função de estrutura difrativa F_2^D este modelo reproduziu os dados de HERA com bastante sucesso.

Com o advento de dados de HERA mais precisos, este modelo precisou ser aperfeiçoado para fornecer uma descrição melhor de F_2 em valores de virtualidade do fóton $Q^2 > 20$ GeV². Isto foi feito por Bartels, Golec-Biernat e Kowalski [73, 74], incorporando ao modelo de saturação uma densidade de glúons que evolui de acordo com as equações de evolução DGLAP, o que aperfeiçoa a parte de pequeno r da seção de choque de dipolo. Esta é dada por

$$\sigma_{dip} = \sigma_0 \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{\pi^2 r^2 \alpha_s(\mu^2) x g(x, \mu^2)}{3\sigma_0} \right) \right\}, \quad (4.2.19)$$

o que recupera o resultado conhecido na QCD perturbativa que para dipolos com tamanhos pequenos a seção de choque de dipolo é proporcional à distribuição de glúons com a escala $\mu^2 \sim 1/r^2$. A distribuição de glúons evolui com a escala de acordo com as equações DGLAP em ordem dominante. O comportamento da seção de choque (4.2.19) em grande r não é modificada em relação ao modelo GBW.

O modelo BGBK foi utilizado para a descrição dos dados de HERA para a função de estrutura F_2 , bem como para fazer previsões para as contribuições de quarks pesados $F_2^{c\bar{c}}$ e $F_2^{b\bar{b}}$. Foram obtidas boas descrições para os dados, bem como apresentadas previsões para a função de estrutura longitudinal F_L e função de estrutura difrativa.

4.2.2 O modelo IIM

O modelo proposto por Iancu, Itakura e Munier [75], também chamado de modelo IIM ou ajuste CGC, foi originalmente utilizado para reproduzir os dados de F_2 no regime cinemático $x < 0.01$ e $Q^2 < 50$ GeV². Os parâmetros livres neste modelo são exatamente os mesmos do modelo GBW, ou seja, $\sigma_0 = 2\pi R_p^2$, x_0 e λ .

A amplitude de espalhamento dipolo-próton, que entra na Eq.(4.2.16), é expressa da seguinte maneira,

$$\langle T(r) \rangle_Y = \begin{cases} T_0 \left(\frac{rQ_s}{2} \right)^{2[\gamma_c + \frac{\ln(2/rQ_s)}{\kappa\lambda Y}]} & \text{para } rQ_s \leq 2 \\ 1 - e^{-a \ln^2(brQ_s)} & \text{para } rQ_s > 2. \end{cases} \quad (4.2.20)$$

A primeira expressão de (4.2.20) é obtida a partir da análise da equação BFKL com uma condição de contorno na linha de saturação, enquanto a segunda expressão é obtida a partir da equação BK [82–84] ou mesmo a partir do formalismo do Condensado de Vidros de Cor (CGC) [23]. Os parâmetros a e b são fixos de modo a garantir que a amplitude e sua derivada sejam contínuas em $rQ_s = 2$ e, no artigo original, γ_c e $\kappa = \chi''(\gamma_c)\chi(\gamma_c)$ foram

fixados nos seus valores obtidos a partir do núcleo BFKL em ordem dominante, $\gamma_c \approx 0.6275$ e $\kappa \approx 9.9$. A amplitude T_0 foi variada entre os valores 0.5 e 0.9, o valor 0.7 fornecendo bons resultados do ajuste. Na análise original, o ajuste aos dados de HERA não incluem contribuições dos quarks pesados. Apenas recentemente [85] o modelo IIM foi aperfeiçoado com a inclusão dos quarks pesados (charm e bottom).

A parametrização do modelo IIM para a amplitude de espalhamento, e conseqüentemente para a seção de choque de dipolo, também foi usada para outras aplicações fenomenológicas, tanto para a física de HERA como de RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider).

4.3 O modelo AGBS

Tanto o modelo GBW como o IIM incorporam comportamentos esperados para a seção de choque de dipolos. Em particular, o modelo IIM fornece uma parametrização para a amplitude de espalhamento completamente baseada na QCD perturbativa, reproduzindo o seu comportamento nos regimes diluído e saturado.

Como vimos no Capítulo 3, o comportamento assintótico das soluções da equação BK é naturalmente expresso no espaço de momentum, especialmente no regime diluído, obtido a partir das soluções de ondas progressivas da equação BK. Isto nos motivou para desenvolvermos um modelo de dipolos para expressar a seção de choque σ^{γ^*p} em termos da amplitude neste espaço, a qual designaremos por $\tilde{T}(k, Y)$ ¹. Chamamos este modelo de AGBS [76], como referência aos nomes dos autores (Amaral-Gay Ducati-Betemps-Soyez). Este modelo é o primeiro da literatura desenvolvido em espaço de momentum no formalismo de dipolos.

Para compreendermos este modelo, iniciamos observando que, realizando a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} T(r, Y) &= r^2 \int \frac{d^2k}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{T}(k, Y) \\ &= r^2 \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{T}(k, Y) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

para a amplitude de espalhamento, podemos reescrever a função de estrutura F_2 em termos de $\tilde{T}(k, Y)$. Após algumas manipulações algébricas (ver Apêndice B), podemos reescrever a expressão (4.2.17) e chegamos à seguinte expressão para F_2 :

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 \tilde{T}(k, Y), \quad (4.3.22)$$

¹ A partir de agora, omitiremos a notação $\langle \cdot \rangle$.

onde a função de onda do fóton é agora expressa no espaço de momentum,

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 &= \sum_q \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \\
 &\times \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \right. \\
 &\left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{4\bar{Q}_q^4 + 2\bar{Q}_q^2 k^2 + k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\}. \quad (4.3.23)
 \end{aligned}$$

O modelo AGBS consiste em propor uma parametrização para $\tilde{T}(k, Y)$, a primeira no espaço de momentum da literatura, e tal proposta não consiste em usar diretamente soluções numéricas da equação BK como entrada, mas sim utilizar nossos conhecimentos das propriedades de suas soluções a fim de apresentar uma expressão analítica para $\tilde{T}(k, Y)$. Esta parametrização para a amplitude será então inserida em (4.3.22) com o objetivo de reproduzir medidas experimentais recentes obtidas para F_2 . Como veremos, a reprodução de tais medidas é realizada com sucesso.

4.3.1 A parametrização para \tilde{T}

A expressão (3.6.57) dá apenas a descrição da chamada 'cauda' diluída da frente de onda $\tilde{T}(k, Y) \ll 1$ ($k \gg Q_s$). Para descrever a frente de maneira completa, precisamos também das expressões para \tilde{T} na vizinhança da escala de saturação e na própria região de saturação. Na região de infravermelho, pode-se mostrar, por exemplo, calculando a transformada de Fourier da função Heaviside $T(r) = \Theta(rQ_s - 1)$, que a amplitude comporta-se como

$$\tilde{T} \left(\frac{k}{Q_s(Y)}, Y \right) \stackrel{k \ll Q_s}{\approx} c - \log \left(\frac{k}{Q_s(Y)} \right) \quad (4.3.24)$$

onde c é uma constante que não possui um valor fixo.

As parametrizações (3.6.57) e (4.3.24) descrevem completamente o comportamento assintótico da amplitude. Falta obter a transição entre estes dois regimes, ou seja, sermos capazes de descrever o comportamento da amplitude em torno da escala de saturação. Em princípio, a maneira mais simples de fazê-lo seria usar (3.6.57) para $k > Q_s$ e (4.3.24) para $k < Q_s$ e determinar a constante c assumindo uma distribuição contínua. Contudo, tal definição por partes pode introduzir oscilações em $T(r, Y)$ no espaço de coordenadas levando mesmo a amplitudes negativas. Portanto, a melhor maneira de obter a descrição da transição para a saturação é realizar um procedimento de ajuste através de uma interpolação

analítica entre os dois comportamentos assintóticos.

A fim de obter tal modelo de interpolação que descreve a transição do regime diluído para o de saturação, construímos o último a partir do primeiro. Inicialmente, deixemos de lado o termo logarítmico em ambas (3.6.57) e (4.3.24), já que a interpolação entre eles é uma tarefa mais simples. Partimos então de uma função monotonicamente decrescente de L que reproduz (a menos do fator logarítmico) a expressão para a cauda da frente de onda, Eq.(3.6.57). Chamaremos esta função de \tilde{T}_{dil} :

$$\tilde{T}_{\text{dil}} = A \exp \left[-\gamma_c \log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) - \frac{\mathcal{L}^2 - \log^2(2)}{2\bar{\alpha}_s \chi''(\gamma_c) Y} \right], \quad (4.3.25)$$

onde

$$\mathcal{L} = \log \left[1 + \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right]. \quad (4.3.26)$$

e a escala de saturação

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp(v_c Y), \quad v_c = \bar{\alpha}_s \chi'(\gamma_c) \quad (4.3.27)$$

A amplitude é unitarizada por meio de uma eikonal, ou seja, $T_{\text{unit}} = 1 - \exp(-T_{\text{dil}})$, e a expressão final para $\tilde{T}(k)$ é obtida após reinserirmos os comportamentos logarítmicos nos domínios infravermelho e ultravioleta. A expressão precisa para realizar a unitarização consiste puramente em um artifício matemático e não em uma escolha fisicamente motivada. Vale ressaltar que testamos outras escolhas, por exemplo, $T_{\text{dil}}/(1 + T_{\text{dil}})$, e obtivemos resultados similares. Optamos pela forma eikonal por causa de sua simplicidade.

Entre alguns fatores logarítmicos testados, uma escolha que nos forneceu bons resultados foi

$$\tilde{T}(k) = \left[\log \left(\frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k} \right) + 1 \right] (1 - e^{-T_{\text{dil}}}) \quad (4.3.28)$$

As equações (4.3.25)–(4.3.28) compõem o modelo AGBS para a amplitude de espalhamento e será utilizada para descrever, a função de estrutura F_2 dada por (4.3.22).

4.4 Descrição dos dados para γ^*p

4.4.1 Conjunto de dados

O procedimento de ajuste foi realizado utilizando as últimas medidas de HERA, de H1 [1] e ZEUS [2, 3], da função de estrutura do próton F_2 . Como nosso método pretende descrever o comportamento a pequeno x , mas considerando valores não tão grandes de Q^2

Massas	k_0^2 (10^{-3} GeV ²)	v_c	χ_c''	R_p (GeV ⁻¹)
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 50$ MeV	3.782 ± 0.293	0.213 ± 0.004	4.691 ± 0.221	2.770 ± 0.045
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	7.155 ± 0.624	0.193 ± 0.003	2.196 ± 0.161	3.215 ± 0.065
$m_q = 140$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	3.917 ± 0.577	0.161 ± 0.005	2.960 ± 0.279	4.142 ± 0.167

Tab. 4.1: Resultados do ajuste aos dados de F_2 . Os valores dos parâmetros com seus respectivos erros são indicados.

Massas	χ^2/nop
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 50$ MeV	0.960
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	0.988
$m_q = 140$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	1.071

Tab. 4.2: Valores de χ^2 por ponto para distintos valores para as massas dos quarks.

(o que significaria incluir correções DGLAP), nossa análise é aplicável ao seguinte regime cinemático:

$$\begin{cases} x \leq 0.01, \\ 0.045 \leq Q^2 \leq 150 \text{ GeV}^2. \end{cases} \quad (4.4.29)$$

Isto nos dá um total de 279 pontos. Os dados de H1 devem ser reescalados por um fator 1,05 que se encontra na incerteza de normalização.

No que diz respeito aos parâmetros, mantemos $\gamma_c = 0.6275$ and $\bar{\alpha} = 0.2$ fixos e, para a convolução com a função de onda do fóton, assumimos situações diferentes para as massas dos quarks: o valor da massa para os quarks leves m_q foi escolhido como sendo 50 ou 140 MeV enquanto usamos $m_c = m_q$ ou $m_c = 1.3$ GeV para a massa do charm. Assim, nossos parâmetros livres são v_c , χ_c'' , k_0^2 e R_p .

4.4.2 Resultados

Os parâmetros obtidos a partir do ajuste são mostrados juntamente com o χ^2 por número de pontos nas Tabelas 4.1 e 4.2. Plotamos também a comparação com os resultados experimentais para F_2^p na Figura 4.3, bem como previsões para a função de estrutura de charm F_2^c na Figura 4.4. Para ambos os casos, as curvas correspondem a $m_q = 50$ MeV e $m_c = 1.3$ GeV. Verifica-se uma boa concordância com as medidas para F_2^p devido ao pequeno valor de χ^2 fornecido pelo ajuste. Além disso, a F_2^c prevista pela parametrização está em concordância razoável com os resultados experimentais, o que mostra a robustez do modelo AGBS.

No nosso método, a escala de saturação Q_s corresponde à escala na qual a amplitude de espalhamento de dipolo é $T(k = Q_s(Y), Y) = [1 + \log(2)](1 - 1/e) \approx 1.07$. Vale observar que,

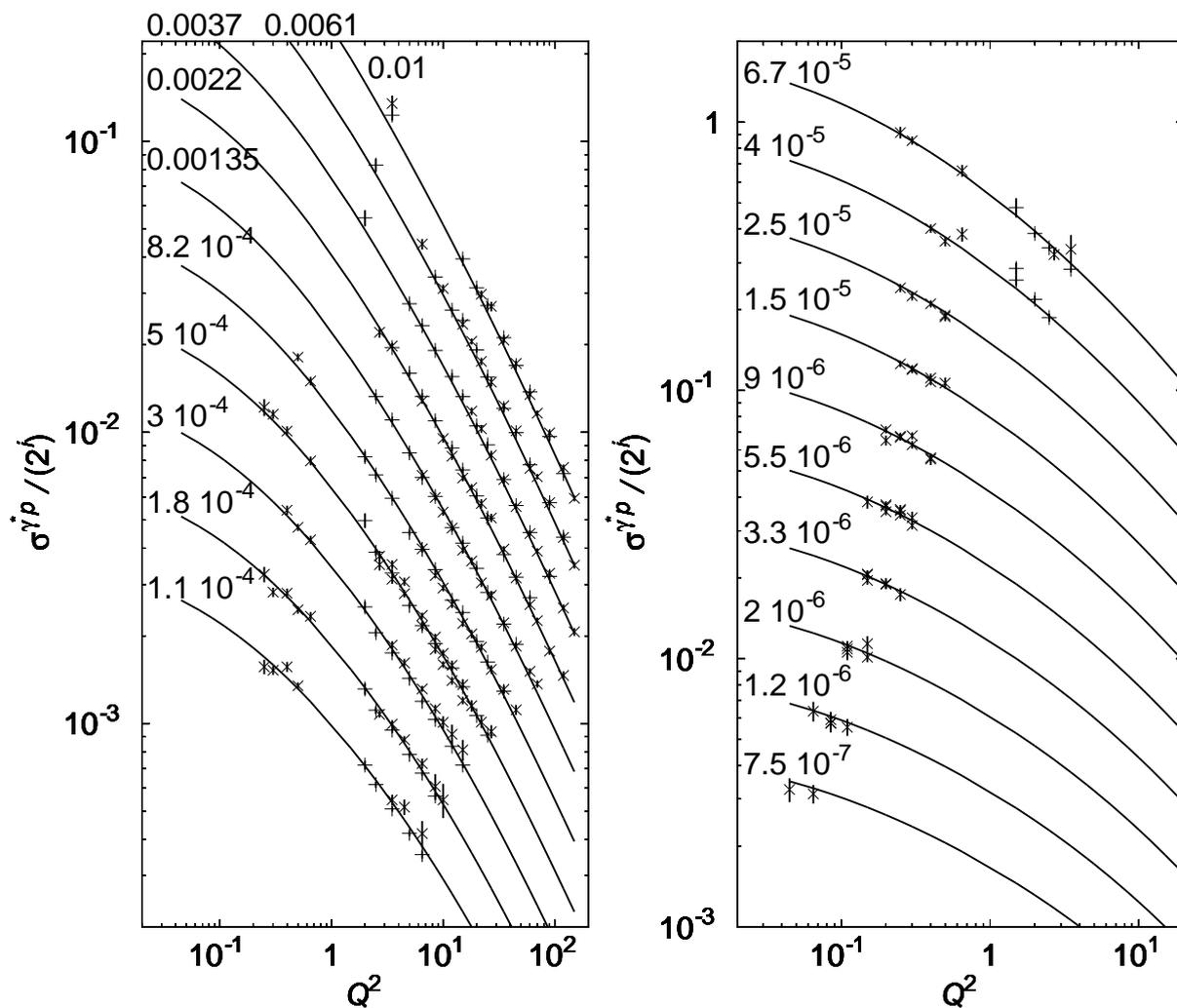


Fig. 4.3: Resultados para o ajuste da seção de choque fóton virtual-próton. Os pontos e o ajuste são mostrados como uma função de Q^2 para valores diferentes de x . O sinal de mais corresponde aos pontos de ZEUS e a cruz aos de H1 [1–3].

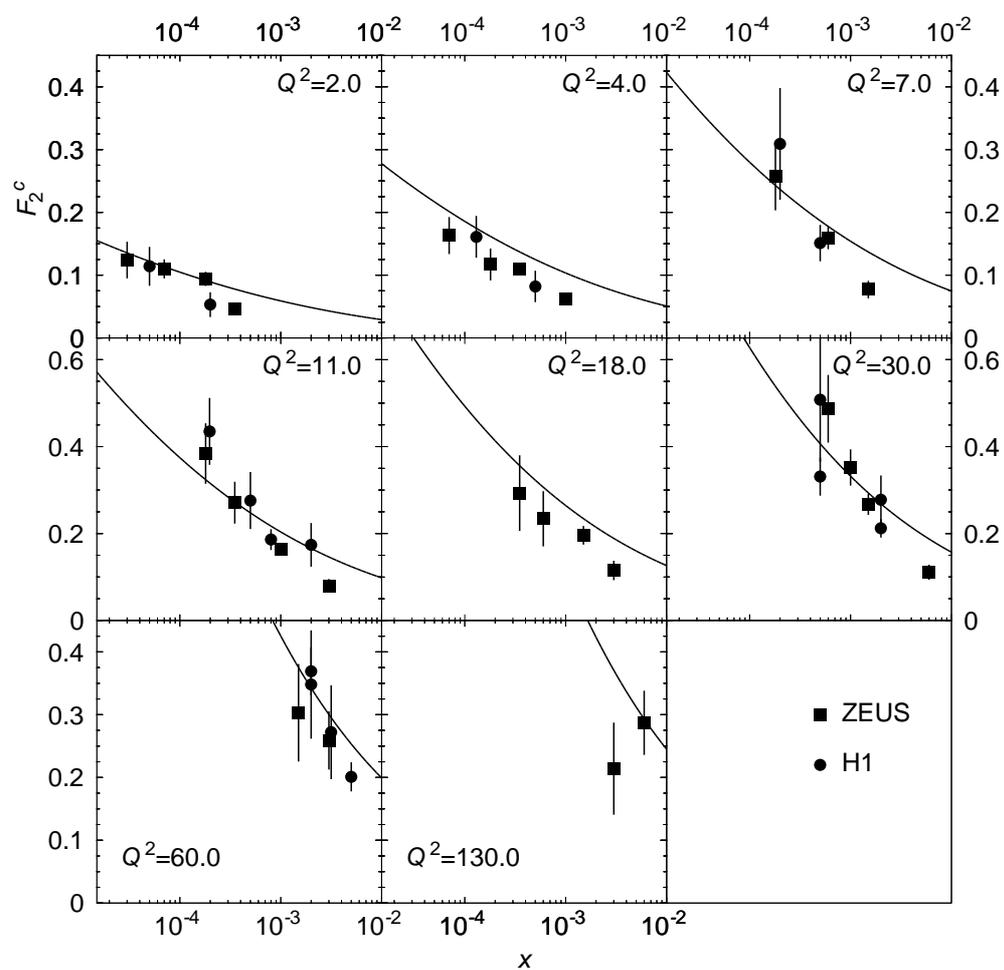


Fig. 4.4: *Predições para as medidas de H1 [86, 87] e ZEUS [88] da função de estrutura do charm. Para cada sub gráfico, o valor de Q^2 é dado em GeV^2 .*

Parametrização	Massas dos quarks	nop	χ^2/nop
GBW [71]	$m_q = 140 \text{ MeV}, m_c = 1.5 \text{ GeV}$	372	1.5
IIM [75]	$m_q = 140 \text{ MeV}, \text{ sem charm}$	156	0.81
BGBK [74]	$m_q = 0 \text{ MeV}, m_c = 1.3 \text{ GeV}$	288	1.06
AGBS	$m_q = 50 \text{ MeV}, m_c = 1.3 \text{ GeV}$	279	0.988

Tab. 4.3: Comparação entre os resultados das parametrizações em [71, 74, 75] e resultados obtidos através do modelo AGBS.

quando trabalha-se no espaço de momentum, o comportamento logarítmico da amplitude no infravermelho permite que esta tome valores maiores que um, o que não é uma contradição com a unitariedade.

Para o ajuste correspondente a $m_q = 50 \text{ MeV}$ e $m_c = 1.3 \text{ GeV}$, obtemos $Q_s = 0.206 \text{ GeV}$ para $x = 10^{-4}$ e $Q_s = 0.257 \text{ GeV}$ para $x = 10^{-5}$. Embora estes valores pareçam muito pequenos, devemos enfatizar que estes correspondem a valores maiores de T . Se, no entanto, extrairmos a escala de saturação a partir da condição $T = 1/2$ quando $k = Q_s$, obtemos $Q_s = 0.296$ (resp. $Q_s = 0.375$) GeV para $x = 10^{-4}$ (resp. $x = 10^{-5}$). Estes últimos valores são ainda um tanto menores que as escalas de saturação observada em estudos anteriores ($Q_s \approx 1 \text{ GeV}$ para $x \approx 10^{-5}$) e, portanto, confirmam a tendência da escala de saturação decrescer quando efeitos de quarks pesados são levados em conta. Assim, a janela de escalamento geométrico é deslocada para menores valores de Q^2 , o que significa que as correções de saturação possuem menos importância do que esperado a partir da análise sem efeitos de quarks pesados, especialmente na vizinhança da escala de saturação. Observemos, no entanto, que para $Q^2 \ll Q_s^2$ a amplitude é completamente saturada em ambos os casos e, portanto, a predição para F_2 permanece a mesma.

Neste ponto, é interessante comparar nossos resultados com os obtidos em métodos anteriores na literatura. Na última década alguns modelos de dipolo do DIS a pequeno- x foram propostos e foram bem sucedidos na descrição dos dados experimentais. Entre estes, nossas comparações serão focadas particularmente nos modelos GBW e IIM e desenvolvimentos recentes em relação ao modelo BGBK, que como vimos consiste no modelo GBW aprimorado com a inclusão de uma densidade de glúons que evolui de acordo com a equação de evolução DGLAP. Alguns resultados destes modelos são mostrados na Tabela 4.3.

Primeiramente, deve-se lembrar que os modelos citados acima foram desenvolvidos no espaço de coordenadas e não no espaço de momentum. Nossa escolha de trabalhar neste último está diretamente motivada pela análise da equação BK no espaço de momentum levando a resultados assintóticos universais nos quais nos baseamos. Embora a maioria dos outros métodos consiga reproduzir F_2 com um bom χ^2 , nosso modelo pode ser diferenciado dos anteriores em dois aspectos principais. Por um lado, nossa análise baseia-se na equação

BK para considerar efeitos de unitariedade. Assim, espera-se que nosso método seja mais preciso que o usado em [71, 72] e [74], especialmente no domínio de pequeno- x e baixo Q^2 sob investigação. Por outro lado, ao incluímos o charm massivo nós aprimoramos o modelo IIM, embora, numa análise um pouco distinta da apresentada aqui [85], este tenha sido aperfeiçoado com a inclusão de quarks pesados. Além disso, em ambos modelos GBW e IIM, algumas dificuldades são encontradas após realizar-se suas respectivas transformadas de Fourier. Estes aspectos foram analisados em detalhe em [89]. No caso do modelo GBW, a transformada de Fourier da seção de choque de dipolo apresenta um comportamento perturbativo não realístico, enquanto no modelo IIM ela apresenta valores não positivos. Estas dificuldades inexistem em nosso modelo, já que a transformada de Fourier (amplitude de espalhamento no espaço de coordenadas) permanece entre 0 e 1. Além disso, a seção de choque resultante apresenta a propriedade de transparência de cor, *i.e.* $\sigma_{dip} \sim r^2$ quando $r \rightarrow 0$ e a propriedade de saturação, *i.e.* $\sigma_{dip} \sim \sigma_0$ para grande r .

Estas características associadas com a boa descrição dos dados e χ^2 pequeno mostram que a amplitude de espalhamento proposta neste capítulo pode ser uma boa parametrização para investigar as propriedades dos observáveis em energias de RHIC e LHC, considerando o modelo de dipolos. No que diz respeito à arbitrariedade do modelo AGBS, embora os resultados não dependam significativamente da escolha feita para a unitarização da amplitude, é interessante para estudos futuros verificar se é possível obter mais informações analíticas diretamente a partir da equação BK.

4.5 O efeito das flutuações

Os modelos GBW e IIM foram recentemente utilizados para investigar se as flutuações estão presentes nas medidas do DIS em HERA. Kozlov, Shoshi e Xiang [90] usam as duas parametrizações GBW e IIM e consideram as expressões correspondentes para $T(r, Y)$ como amplitudes de espalhamento para um único evento. Assim, a inclusão formal das flutuações consiste em efetuar a média sobre todas as posições das frentes de onda individuais, dada pela Eq.(3.7.74). A amplitude média é, então, inserida na expressão para a função de estrutura F_2 e o procedimento de ajuste aos dados é realizado.

Em [90] os autores fazem o ajuste aos dados de HERA para F_2 , usando os últimos dados da colaboração H1 [1], num regime cinemático mais restrito, com $x < 0.01$ e $Q_{\max}^2 = 50$ GeV². O parâmetro livre adicional é o coeficiente de difusão D e os resultados dos ajustes são mostrados nas tabelas abaixo, que apresentam os parâmetros extraídos e o valor do $\chi^2/n.d.p.$ para os casos com e sem flutuações.

A partir destas tabelas, temos que, para os dois modelos, os ajustes são melhorados quando as flutuações são incluídas, especialmente para o caso do modelo GBW. Os valores

χ^2	$\chi^2/\text{d.o.f}$	$x_0 (\times 10^{-4})$	v_c	$R(\text{fm})$	D
266.22	1.74	4.11	0.285	0.594	0
173.39	1.14	0.0546	0.225	0.712	0.397

Tab. 4.4: modelo GBW: Os parâmetros da amplitude evento por evento (segunda linha) e da amplitude média (terceira linha) [90].

χ^2	$\chi^2/\text{d.o.f}$	$x_0 (\times 10^{-4})$	v_c	$R(\text{fm})$	D
150.45	0.983	0.5379	0.252	0.709	0
122.62	0.807	0.0095	0.198	0.812	0.325

Tab. 4.5: modelo IIM: Os parâmetros da amplitude evento por evento (segunda linha) e da amplitude média (terceira linha) [90].

obtidos para o expoente de saturação v_c também são consistentes com as predições da QCD perturbativa, e os valores obtidos para o coeficiente de difusão são similares aos valores obtidos na literatura. Os resultados, contudo, são inconclusivos: o melhoramento no ajuste no caso do modelo IIM não é tão expressivo quando para o caso do modelo GBW, e isso pode ser devido ao fato deste não incluir, na sua parametrização para a amplitude de espalhamento, termos de violação do escalamento geométrico, originalmente presentes no modelo IIM. Assim, por meio dessa análise, não é possível afirmar se as flutuações existem ou não em HERA.

Realizamos, então, uma análise similar à descrita acima, mas no espaço de momentum, através do modelo AGBS. Em termos de unidades logarítmicas, o modelo pode ser reescrito como

$$\tilde{T}^{\text{AGBS}}(\rho, Y) = L_F (1 - e^{-T_{\text{dil}}}), \quad (4.5.30)$$

onde

$$T_{\text{dil}} = \exp \left[-\gamma_c (\rho - \rho_s) - \frac{\mathcal{L}^2 - \log^2(2)}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right], \quad (4.5.31)$$

$$\mathcal{L} = \ln [1 + e^{(\rho - \rho_s)}] \quad \text{com} \quad Q_s^2(Y) = k_0^2 e^{v_c Y}, \quad (4.5.32)$$

e

$$L_F = 1 + \ln \left[e^{\frac{1}{2}(\rho - \rho_s)} + e^{-\frac{1}{2}(\rho - \rho_s)} \right]. \quad (4.5.33)$$

Como foi dito, para incluir as flutuações, consideramos a parametrização acima como a expressão para a amplitude para um único evento, e a amplitude média é obtida através da

integração abaixo:

$$\langle \tilde{T}_Y^{\text{AGBS}}(\rho, \rho_s) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho_s P_Y(\rho_s) \tilde{T}_Y^{\text{AGBS}}(\rho, \rho_s). \quad (4.5.34)$$

Esta é a expressão que deve ser inserida em (4.3.22) para reproduzir os dados do DIS para a função de estrutura F_2 com as flutuações corretamente incluídas.

4.5.1 Conjunto de dados e resultados

Nesta análise, assim como a realizada no trabalho original do modelo AGBS, todos os últimos dados das medidas de HERA de F_2 das Colocações H1 e ZEUS [1–3] são ajustados, considerando o regime cinemático (4.4.29), o que também corresponde a 279 pontos.

No que diz respeito aos parâmetros, mantemos fixos $\bar{\alpha} = 0.2$, e $\gamma_c = 0.6275$, cujo valor corresponde ao obtido a partir do núcleo BFKL em ordem dominante. Os outros parâmetros da amplitude, v_c , k_0^2 e $\chi''(\gamma_c)$, são deixados livres, assim como o raio do próton R_p , que fixa a normalização da seção de choque dipolo-próton em relação à amplitude de espalhamento, e o coeficiente de difusão D , que é o único novo parâmetro em relação à análise de campo médio. Consideramos apenas quarks leves e os valores para suas massas são $m_{u,d,s} = 50$ e 140 MeV.

$\chi^2/\text{n.d.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	v_c	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	$D (\times 10^{-2})$
0.949	3.79 ± 0.30	0.213 ± 0.003	3.576 ± 0.059	4.69 ± 0.23	0
0.949	3.79 ± 0.30	0.213 ± 0.003	3.576 ± 0.059	4.69 ± 0.23	0.0 ± 1.1

Tab. 4.6: *Parâmetros extraídos do ajuste aos dados de H1 e ZEUS para F_2 no caso onde $m_{u,d,s} = 50$ MeV, tanto da amplitude de evento por evento (segunda linha) e da amplitude média (terceira linha).*

$\chi^2/\text{n.d.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	v_c	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	$D (\times 10^{-3})$
0.942	1.69 ± 0.16	0.176 ± 0.004	4.83 ± 0.12	6.43 ± 0.29	0
0.942	1.69 ± 0.16	0.176 ± 0.004	4.83 ± 0.12	6.43 ± 0.29	0.0 ± 9.6

Tab. 4.7: *Parâmetros extraídos do ajuste aos dados de H1 e ZEUS para F_2 no caso onde $m_{u,d,s} = 140$ MeV, tanto da amplitude de evento por evento (segunda linha) e da amplitude média (terceira linha).*

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram a função de estrutura F_2 como uma função de x para valores pequenos e moderados de Q^2 , respectivamente. As Tabelas 4.6 e 4.7 apresentam os valores dos parâmetros obtidos do ajuste nos casos sem flutuações (primeira linha) e com flutuações (segunda linha). O primeiro caso corresponde ao valor $D = 0$ para o coeficiente de difusão.

É possível verificar, a partir das tabelas com os parâmetros e das figuras com os gráficos, que os dados de F_2 são reproduzidos com sucesso tanto no caso com flutuações, como no caso sem flutuações. Isto é mostrado pelos bons valores do $\chi^2/\text{n.o.p.}$ e pelas curvas nas Figuras 4.5 e 4.6. Se compararmos os resultados para ambos os casos (ver Tabelas 4.6 e 4.7), vemos que o valor do $\chi^2/\text{n.d.p.}$ não é sensível à inclusão das flutuações, e portanto não varia em relação ao caso sem flutuações, e o mesmo pode ser dito para os parâmetros. Especialmente para o coeficiente de difusão D , seu valor obtido na presença de flutuações é muito pequeno, mais especificamente muito próximo do seu valor de campo médio, $D = 0$. Assim, no formalismo do modelo AGBS, não há nenhuma evidência da presença das flutuações no DIS nas energias de HERA. Isto indica que o tratamento de campo médio, com parâmetro de acoplamento fixo ($\bar{\alpha}_s$ fixo), é suficiente para investigar a fenomenologia da QCD em altas energias, pelo menos para as energias de HERA.

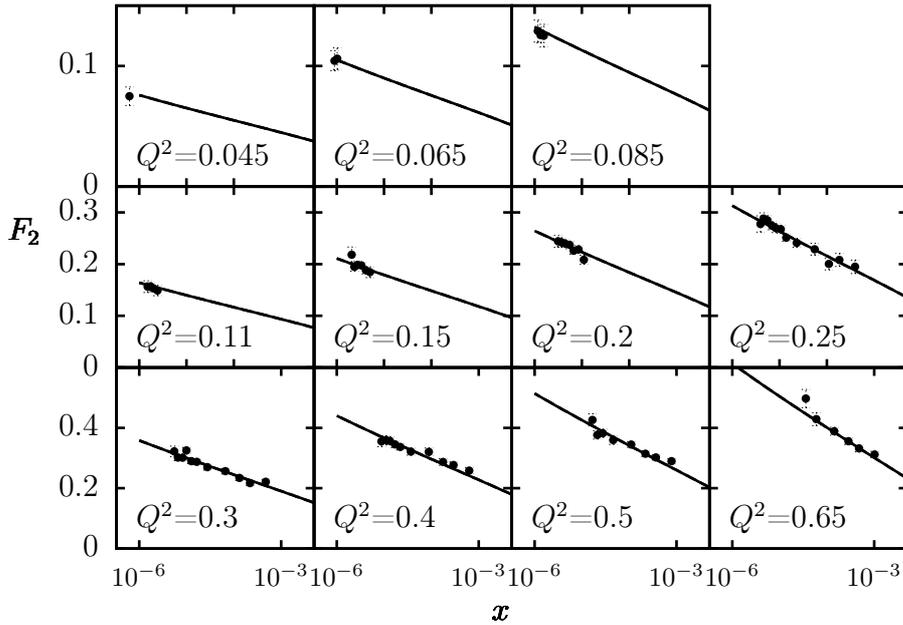


Fig. 4.5: *Predições para os dados de H1 e ZEUS para a função de estrutura F_2 versus x para pequenos valores de Q^2 , dados em GeV^2 . O ajuste foi realizado com massas dos quarks leves $m_{u,d,s} = 140 \text{ MeV}$.*

É importante compararmos nossos resultados com os obtidos na Ref. [90]. Como foi dito no início desta Seção, embora esta análise resulte em uma boa descrição dos dados de HERA, ela não é conclusiva em relação à presença de flutuações. Em particular, o valor de D extraído do ajuste está de acordo com os valores previstos na literatura [47, 91], ou seja, um número de ordem $\mathcal{O}(1)$, o que indica que as flutuações poderiam estar presentes em

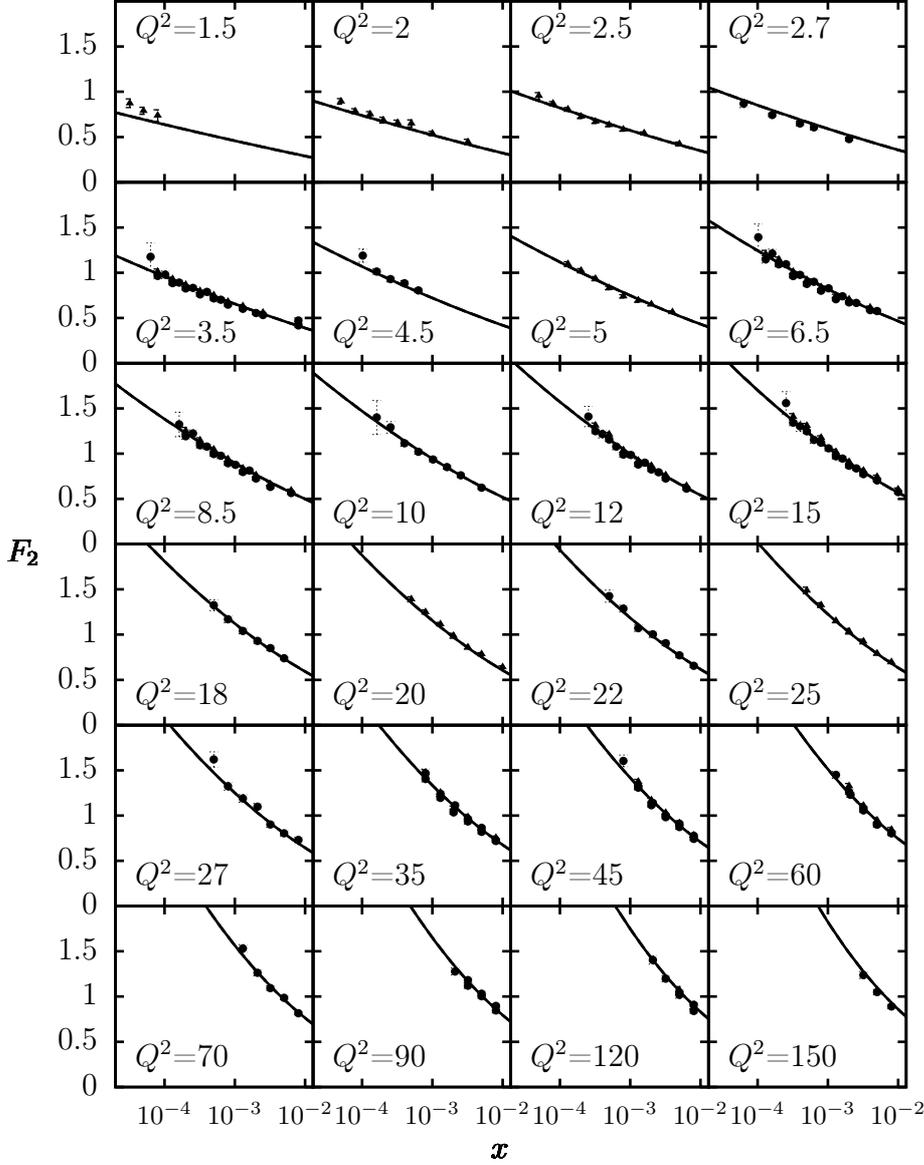


Fig. 4.6: *Predições para os dados de H1 e ZEUS para a função de estrutura F_2 versus x para valores moderados de Q^2 , dados em GeV^2 . O ajuste foi realizado com massas dos quarks leves $m_{u,d,s} = 140 \text{ MeV}$.*

HERA. No entanto, deve-se observar novamente que em [90] o ajuste é realizado utilizando apenas os dados de ZEUS, ou seja, não inclui os dados de H1, e em um regime cinemático mais restrito.

Na realidade, se repetirmos a análise feita em [90]—mesmo conjunto de dados (apenas ZEUS) e mesmo regime cinemático—usando o modelo AGBS, os resultados obtidos são bas-

$\chi^2/\text{n.d.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	v_c	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	D
0.788	4.26 ± 0.43	0.214 ± 0.005	3.497 ± 0.068	4.34 ± 0.28	0
0.782	4.02 ± 0.56	0.190 ± 0.030	3.64 ± 0.21	3.84 ± 0.21	0.92 ± 1.16

Tab. 4.8: Parâmetros extraídos do ajuste aos dados de ZEUS para F_2 , no caso onde $m_{u,d,s} = 50 \text{ MeV}$.

$\chi^2/\text{n.o.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	v_c	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	D
0.778	1.97 ± 0.22	0.177 ± 0.006	4.68 ± 0.14	5.95 ± 0.94	0
0.768	1.38 ± 0.12	0.120 ± 0.010	5.459 ± 0.043	5.46 ± 0.55	1.78 ± 0.38

Tab. 4.9: Parâmetros extraídos do ajuste aos dados de ZEUS para F_2 , no caso onde $m_{u,d,s} = 140 \text{ MeV}$.

tante similares, como pode ser visto na Tabela 4.9, com valores do $\chi^2/\text{n.d.p}$. melhores. Nossa análise é, portanto, mais completa, pois inclui todos os últimos dados de HERA para o DIS e considera um regime cinemático mais amplo.

Nossos resultados e nossas principais conclusões parecem esclarecer alguns dos principais aspectos da investigação dos efeitos das flutuações em HERA e confirmar a robustez do modelo AGBS na descrição de processos nos quais o formalismo de dipolos pode ser aplicado. Para valores de energia muito maiores que as de HERA, será possível verificar se as flutuações estão presentes em um futuro não muito distante, nos experimentos realizados no LHC. Mais especificamente, verificaremos se estas realmente afetam fortemente a evolução na QCD ou se são suprimidas pela variação do acoplamento forte α_s , como foi recentemente sugerido por desenvolvimentos recentes realizados no contexto do modelo unidimensional que reproduz com bastante sucesso as principais características do espalhamento e da evolução na QCD em altas energias [47, 92], que será descrito no próximo Capítulo.

Capítulo 5

Um modelo unidimensional para a QCD a altas energias

Como vimos nos capítulos anteriores, as equações de laços de pomerons são as principais candidatas para descrever a evolução das amplitudes de espalhamento em direção ao limite de altas energias. Contudo, estas equações possuem uma estrutura muito complicada, o que torna difícil uma análise detalhada do espalhamento na QCD em altas energias, principalmente no que diz respeito às soluções dessas equações. Após certas aproximações para simplificar a estrutura não local das equações de laços de pomeron, vimos que estas reduzem-se a uma equação de Langevin, confirmando as recentes descobertas associadas com a correspondência entre a QCD em altas energias e os processos de reação-difusão da física estatística. Diante desta correspondência, nos últimos anos alguns autores têm se voltado para o desenvolvimento de modelos estocásticos de partículas que apresentam características do espalhamento e da evolução na QCD em altas energias. Neste capítulo, apresentamos em detalhes um desses modelos.

5.1 Construção do modelo

Nesta seção, formularemos o modelo estocástico de partículas para evolução em altas energias e espalhamento na QCD. Como explicado na Introdução, este é um modelo (1+1)-dimensional onde uma das dimensões refere-se à rapidez Y (o logaritmo da energia), que realiza o papel de tempo para a evolução em altas energias, enquanto a outra é uma dimensão espacial—a posição da partícula ao longo de um eixo unidimensional infinito. Em analogia com a QCD, deve-se ter em mente que essa dimensão espacial corresponde a um *tamanho*, mais precisamente o logaritmo do inverso do tamanho transversal de um dipolo.

Primeiramente, descreveremos a versão discreta do modelo, na qual a dimensão espacial é associada a uma rede unidimensional cujos pontos são identificados por i . Obviamente, essa versão é a mais adequada para implementação numérica que será discutida em seções

posteriores.

Um *sistema* de partículas é caracterizado pelo número de partículas n_i (ou números de ocupação) em todos os sítios da rede (alguns destes podem estar vazios). A composição do sistema varia de forma randômica à medida que a rapidez aumenta, e esta variação é realizada através da dissociação de partículas (uma partícula se divide em duas) de acordo com uma lei a ser especificada nos próximos parágrafos. A distribuição de partículas é, portanto, estocástica, e o estado do sistema na rapidez Y é descrito pela probabilidade $P(\{n\}, Y)$ de encontrar uma dada configuração $\{n\} \equiv \{\dots, n_i, n_{i+1}, \dots\}$ de partículas.

A fim de tratar do problema de espalhamento, a primeira suposição é a de que o elemento de matriz- S médio para o espalhamento elástico é dada pela seguinte forma fatorizada:

$$\langle S \rangle_Y = \sum_{\{n\}, \{m\}} P_R(\{n\}, Y - Y_0) P_L(\{m\}, Y_0) \mathcal{S}(\{n\}, \{m\}), \quad (5.1.1)$$

onde Y é a separação total em rapidez entre os dois sistemas de partículas, de tipos direita, de índice R , e esquerda, de índice L . Estes índices referem-se ao fato de que, em um espalhamento real, os dois sistemas que colidem propagam-se em direções opostas ao longo do eixo de colisão. A rapidez total é dividida entre o alvo (R), que possui rapidez $Y - Y_0$, e o projétil (L), que possui rapidez $-Y_0$ (com $Y_0 > 0$), e as respectivas distribuições de probabilidades $P_R(\{n\}, Y - Y_0)$ e $P_L(\{m\}, Y_0)$ descrevem os respectivos sistemas no momento do espalhamento. A quantidade $\mathcal{S}(\{n\}, \{m\})$ é a matriz- S para o espalhamento elástico entre duas dadas configurações $\{n\}$ e $\{m\}$ do alvo e, respectivamente, do projétil. A soma na equação (5.1.1) é realizada sobre todas as configurações possíveis dos dois sistemas.

A matriz- S deve ser independente da rapidez divisora Y_0 , ou seja, independente da escolha de um referencial de Lorentz, o que implica em

$$0 = \frac{d\langle S \rangle}{dY_0} = \sum_{\{n\}, \{m\}} \left(P_R(Y - Y_0) \frac{\partial P_L(Y_0)}{\partial Y_0} + \frac{\partial P_R(Y - Y_0)}{\partial Y_0} P_L(Y_0) \right) \mathcal{S}(\{n\}, \{m\}). \quad (5.1.2)$$

Esta condição, que relaciona propriedades do espalhamento com as da evolução com Y , representa um vínculo ainda maior na última, e pode ser usado para fixar a estrutura da lei de evolução sob suposições adicionais. Enumeraremos aqui as principais suposições nas quais nos basearemos no que diz respeito à evolução:

- (i) *Espalhamentos múltiplos na aproximação eikonal.* Denotemos por $\sigma_{ij} = 1 - \tau_{ij}$ a matriz- S que descreve o espalhamento entre duas partículas elementares com posições i e j , e τ_{ij} é a matriz- T correspondente, a qual assumimos que seja real. Cada partícula do alvo pode interagir com todas as partículas do projétil e diferentes partículas do alvo interagem independentemente umas das outras. Assim, a matriz- S para dadas

configurações do alvo e do projétil é dada por

$$\mathcal{S}(\{n\}, \{m\}) = \prod_{i,j} \sigma_{ij}^{n_i m_j}. \quad (5.1.3)$$

(ii) *Uma emissão de partícula por passo na evolução.* Assumiremos que, quando a rapidez cresce em um passo ($Y \rightarrow Y + dY$), a evolução consiste na emissão de uma única partícula adicional, com uma probabilidade que em geral depende de todos os números de ocupação no sistema.

Essas duas suposições são naturais sob a perspectiva da QCD perturbativa em altas energias: a aproximação eikonal é o método padrão para ressonar espalhamentos múltiplos na QCD em altas energias, tanto para glúons [16–22, 25–27] quanto para dipolos [55, 56, 93, 94]. Além disso, a evolução na QCD em altas energias na aproximação de logaritmo dominante consiste na emissão de um glúon no canal s em cada passo da evolução. Ao contrário de outros modelos na literatura [42–45], nosso modelo não inclui um mecanismo para recombinação de partículas, o que concorda com o fato de que não há recombinação de glúons ou dipolos no canal s na aproximação de logaritmo dominante. Ainda, como veremos a seguir, a saturação ocorre através de efeitos de altas densidades na taxa de emissão, similar ao que acontece com a saturação gluônica no formalismo da evolução JIMWLK [23].

(iii) *Após um passo na evolução, a configuração do sistema é modificada apenas pela adição de uma nova partícula em um sítio arbitrário.* Assim, a configuração permanece igual à anterior à evolução, exceto pela presença da partícula adicional. Esta suposição é um vínculo ainda mais forte que a suposição (ii), a qual permitiria qualquer estado final com uma partícula adicional.

A partir dessas condições, é possível obter a equação de evolução para as distribuições de probabilidade na forma genérica

$$\frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} = \sum_i [f_i(\dots, n_i - 1, \dots) P(\dots, n_i - 1, \dots, Y) - f_i(\{n\}) P(\{n\}, Y)], \quad (5.1.4)$$

onde $f_i(\{n\})$, que é a taxa de depósito – a probabilidade por unidade de rapidez de encontrar uma partícula extra no sítio i após um passo na evolução, partindo de uma configuração original $\{n\}$. O termo positivo no lado direito da Eq.(5.1.4) mostra que para atingir uma configuração final $\{n\}$ após um passo na evolução, é preciso iniciar com uma configuração com uma partícula a menos no sítio i , onde i é arbitrário. O termo negativo é necessário para a conservação da probabilidade.

A fim de completar a construção do modelo, é preciso deduzir uma forma explícita para a taxa de depósito $f_i(\{n\})$, o que é obtido explorando a condição de invariância de Lorentz, ou seja, inserindo a equação (5.1.4) em (5.1.2). Obtemos

$$\sum_i [f_i(\{n\}) t_i(\{m\}) - f_i(\{m\}) t_i(\{n\})] = 0, \quad (5.1.5)$$

onde definimos

$$t_i(\{n\}) = 1 - \prod_j \sigma_{ij}^{n_j}, \quad (5.1.6)$$

que formalmente é igual à amplitude para o espalhamento de uma partícula do projétil no sítio i com um alvo com uma configuração $\{n\}$. A solução mais geral para a Eq.(5.1.5) possui a forma

$$f_i(\{n\}) = \sum_j c_{ij} t_j(\{n\}) \quad \text{com} \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad (5.1.7)$$

onde c_{ij} independe dos números de ocupação. Convém escolher $c_{ij} \propto \delta_{ij}$, já que tal escolha leva a um modelo intuitivo e relativamente simples que possui ainda uma estrutura rica, como veremos mais adiante. Em particular, fixaremos este modelo escolhendo

$$c_{ij} = \frac{\Delta}{\tau} \delta_{ij}, \quad (5.1.8)$$

onde $\tau \equiv \tau_{ii}$ e Δ é o espaçamento da rede ao longo do eixo espacial discretizado. O fato de c_{ij} ser proporcional a Δ é natural, pois a densidade f_i/Δ será bem definida no limite contínuo $\Delta \rightarrow 0$. Escolher c_{ij} proporcional a $1/\tau$ também é natural, pois no limite de baixa densidade f_i deve ser da ordem $\mathcal{O}(1)$ quando medida em unidades de τ . De fato, quando os n_j 's são relativamente pequenos, tais que $n_j \tau_{ij} \ll 1$, a amplitude de espalhamento t_i na equação (5.1.6) é reduzida a $t_i \approx \sum_j \tau_{ij} n_j$ e portanto a dependência paramétrica de c_{ij} em τ exibida acima é claramente necessária para que essa condição seja satisfeita.

A forma explícita para a taxa de depósito é, portanto, dada pela expressão

$$\frac{f_i(\{n\})}{\Delta} = \frac{1 - \prod_j \sigma_{ij}^{n_j}}{\tau} = \frac{t_i(\{n\})}{\tau}, \quad (5.1.9)$$

que, a menos de um fator de normalização, é simplesmente a amplitude para o espalhamento entre a nova partícula produzida no sítio i e as partículas pré-existentes no sistema, a partir

das quais a nova partícula foi emitida.

Para compreendermos melhor o conteúdo físico da fórmula acima, é necessário conhecer um pouco mais sobre a amplitude de espalhamento elementar τ_{ij} . Nas próximas seções, apresentaremos um modelo explícito para essa quantidade, também baseado na analogia com a QCD. Por enquanto, mencionaremos apenas que τ_{ij} depende da separação $|i-j|$ e decresce rapidamente quando esta separação aumenta. Em particular, $\tau \equiv \tau_{ii}$ é independente de i e é considerada pequena: $\tau \ll 1$ (a quantidade análoga na QCD é de $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$). Temos, portanto, $\tau_{ij} \ll 1$ para qualquer par (ij) .

Consideremos agora alguns casos-limite da Eq.(5.1.9), que já apresentam a similaridade entre este modelo e a QCD no limite de altas energias:

(i) Quando os números de ocupação são relativamente pequenos, de modo que $n_j \ll 1/\tau_{ij}$, é possível expandir $\sigma_{ij}^{n_j} \approx 1 - n_j \tau_{ij}$. Neste caso, a densidade da taxa de depósito para um sítio i se torna proporcional aos números de ocupação em todos os sítios:

$$\frac{f_i(\{n\})}{\Delta} \approx \sum_j \frac{\tau_{ij}}{\tau} n_j \quad \text{quando } n_j \ll 1/\tau_{ij} \text{ para qualquer } j, \quad (5.1.10)$$

o que descreve uma situação na qual a partícula extra em i é emitida *incoerentemente* por qualquer partícula pré-existente no sistema. Quando a aproximação (5.1.10) é válida para qualquer sítio i , fala-se em um regime *diluído* ou *linear*. Como τ_{ij} é uma função decrescente da separação $|i-j|$, o regime diluído é realizado quando todos os números de ocupação obedecem a condição $n_j \ll 1/\tau$. O formalismo de dipolos em QCD [55, 56] é o meio correto de comparação para nosso modelo nesse regime; de fato, se o análogo da taxa de depósito é calculado neste formalismo, o resultado encontrado é que este comporta-se linearmente com a densidade de dipolos [94].

(ii) Quando pelo menos um dos números de ocupação n_j torna-se tão grande que $\sigma_{ij}^{n_j} \ll 1$ (isto exige $n_j \gtrsim 1/\tau_{ij}$), a taxa de depósito em i satura em seu valor máximo de $\mathcal{O}(1/\tau)$:

$$\frac{f_i(\{n\})}{\Delta} \approx \frac{1}{\tau} \quad \text{quando } n_j \gtrsim 1/\tau_{ij} \text{ para algum } j. \quad (5.1.11)$$

Em particular, uma condição suficiente para ter saturação em um dado sítio i é que o número de ocupação respectivo n_i satisfaça $n_i \gtrsim 1/\tau$. Isto também é similar à situação na QCD, onde a taxa de emissão de glúons na equação JIMWLK satura quando os números de ocupação são suficientemente grandes.

Antes de prosseguirmos, é interessante realizarmos uma discussão física da evolução descrita pela Eq.(5.1.4). Para isto, imaginemos um mecanismo microscópico específico que leva a esta evolução. É natural assumir que o processo que leva à produção da partícula extra em um passo da evolução é a divisão de uma partícula em duas partículas novas.

Para que tal mecanismo seja consistente com a Eq.(5.1.4), uma suposição adicional é no entanto necessária: pelo menos uma das duas partículas produzidas após tal divisão deve permanecer no mesmo sítio da rede que a partícula que a originou. Introduzindo a taxa de emissão $g_{j \rightarrow ji}(\{n\})$ para uma partícula no sítio j se dividir em duas partículas em j e i , respectivamente, com i arbitrário, chegamos à seguinte equação

$$\frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} = \sum_{ij} [g_{j \rightarrow ji}(\dots, n_i - 1, \dots) P(\dots, n_i - 1, \dots, Y) - g_{j \rightarrow ji}(\{n\}) P(\{n\}, Y)], \quad (5.1.12)$$

que leva à Eq. (5.1.4) após a identificação $f_i(\{n\}) = \sum_j g_{j \rightarrow ji}(\{n\})$. O processo na Eq.(5.1.12) é bastante peculiar no sentido que a partícula que se divide não desaparece no estado final, mas é substituída por uma nova partícula no mesmo sítio (incidentalmente, esta discussão também mostra que uma generalização natural deste modelo seria permitir a divisão mais geral $i \rightarrow jk$ com i, j, k genéricos, e com uma taxa $g_{i \rightarrow jk}(\{n\})$). Na analogia com a QCD — na qual as posições das partículas correspondem a tamanhos de dipolos — isto corresponderia a um processo no qual um dipolo de tamanho j se divide em dois dipolos, um com o mesmo tamanho j e o outro com um tamanho arbitrário i . Isto é bastante diferente da representação (BFKL) da divisão de dipolos na QCD para N_c grande [55, 56], onde os dipolos resultantes possuem tamanhos genéricos, que são tipicamente comparáveis ao tamanho do dipolo original. Contudo, apesar dessa dissimilaridade explícita no nível de interpretação física, a evolução gerada pelas Eqs.(5.1.4) e (5.1.9) possui muitas características em comum com a evolução na QCD em altas energias, como se tornará claro nas seções subseqüentes.

Observemos que podemos expressar o modelo na forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} &= -\frac{\Delta}{\tau} \sum_i \left[1 - \exp\left(-\frac{\partial}{\partial n_i}\right) \right] \left[1 - \exp\left(\sum_j n_j \ln \sigma_{ij}\right) \right] P(\{n\}, Y) \\ &\equiv H P(\{n\}, Y), \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

onde o operador diferencial $\exp(-\partial/\partial n_i)$ é o operador de translação que reduz o número de ocupação no sítio i por um: $\exp(-\partial/\partial n_i) F(\dots, n_i, \dots) = F(\dots, n_i - 1, \dots)$ para uma função genérica $F(\{n\})$. Isto torna explícito o fato de que o Hamiltoniano que determina a evolução do modelo é ‘auto-dual’, ou seja, é invariante sob a transformação de auto-dualidade [95] que neste modelo consiste em efetuar a troca

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \longleftrightarrow -\sum_j n_j \ln \sigma_{ij}, \quad (5.1.14)$$

e então reverter a ordem dos operadores. Esta auto-dualidade é a expressão da restrição

de invariância de transformações de Lorentz (boosts) na estrutura do Hamiltoniano da evolução [95, 96]. Assim, esta condição é automaticamente satisfeita neste modelo, no qual a invariância de Lorentz já está presente em sua construção. Além disso, a presença de dois tipos de exponenciais — uma envolvendo número de ocupação de partículas e a outra envolvendo a derivada com respeito a ele — na Eq.(5.1.13) é remanescente dos dois tipos de linhas de Wilson que aparecem no Hamiltoniano da QCD proposto nas Referências [97, 98]. Nesse caso, $\sum_j n_j |\ln \sigma_{ij}|$ é substituído pelo campo de cor produzido pelos glúons no canal- s e $\partial/\partial n_i$ pela derivada funcional com respeito à densidade de carga de cor destes glúons.

É também interessante considerar a versão aproximada da equação acima, que formalmente é obtida através da expansão do operador $\exp(-\partial/\partial n_i)$ em ordem linear na derivada:

$$\frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} \approx - \sum_i \frac{\partial}{\partial n_i} \left[f_i(\{n\}) P(\{n\}, Y) \right]. \quad (5.1.15)$$

Menos formalmente, este é simplesmente o limite no qual a diferença entre os dois termos no lado direito da Eq.(5.1.4) é assimilada com uma derivada em relação a n_i , o que faz sentido quando $n_i \gg 1$ para qualquer i . Este é o limite de *grandes números de ocupação*, no qual as flutuações associadas com a discreteza do número de partículas torna-se desprezível.

Neste limite, obviamente a auto-dualidade da evolução é perdida, já que a propriedade do sistema ser denso depende do referencial. Além disso, deve ser intuitivamente claro que, qualquer que seja o sistema que escolhamos, o sistema não pode ser denso em *todos* os sítios. De fato, sendo o eixo espacial infinito, haverá sempre um número infinito de sítios nos quais os números de ocupação são zero ou pequenos, de ordem $\mathcal{O}(1)$, e isto para qualquer Y . Assim, a Eq.(5.1.15) é meramente uma aproximação formal, que para uma dada rapidez Y tem, no máximo, um intervalo de validade em x limitado — ela se refere à evolução do *conjunto* das partículas em uma região com grande ocupação.

Esta discussão é remanescente da equação JIMWLK na QCD, que foi estabelecida [16–22] para sistemas com uma densidade de glúons relativamente alta e que ignora as flutuações nos números de glúons [38]. E de fato pode-se reconhecer a equação (5.1.15) como uma versão da equação JIMWLK neste modelo.

Esta analogia já foi discutida no contexto do modelo em zero dimensões na Referência [46]. Para resumir, este modelo unidimensional que nós introduzimos reduz-se a versões unidimensionais do formalismo de dipolos no regime diluído e, respectivamente, ao formalismo JIMWLK no regime de grande ocupação, e em geral fornece uma interpolação auto-dual entre os dois formalismos, como é necessário para invariância de Lorentz.

5.2 Equações de evolução para os observáveis

Consideremos um observável genérico \mathcal{O} . Por observável designaremos uma quantidade cujo valor evento-por-evento $\mathcal{O}\{n\}$ depende da configuração $\{n\}$ das partículas no sistema. Seu valor médio na rapidez Y , que é uma quantidade mensurável, é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle_Y = \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \mathcal{O}(\{n\}). \quad (5.2.16)$$

Se diferenciarmos em relação a Y e realizarmos a mudança $n_i - 1 \rightarrow n_i$ nas contribuições que surgem a partir do termo de ganho (sinal positivo) na Eq.(5.1.4), é fácil obter a equação de evolução para $\langle \mathcal{O} \rangle_Y$ (ver Apêndice C):

$$\frac{\partial \langle \mathcal{O} \rangle_Y}{\partial Y} = \sum_i \langle f_i(\{n\}) [\mathcal{O}(\dots, n_i + 1, \dots) - \mathcal{O}(\{n\})] \rangle_Y. \quad (5.2.17)$$

Com esta equação para um observável genérico, obteremos as equações de evolução para dois tipos de observáveis nos quais estaremos interessados, as densidades de partículas e as amplitudes de espalhamento para projéteis que contém um dado número de partículas. Demonstraremos que o limite contínuo destas equações é bem definido e as compararemos com as equações correspondentes na QCD.

5.2.1 Densidades de número de partículas

Entre os observáveis a serem estudados, o mais simples é o número de ocupação médio em um dado sítio i , $\langle n_i \rangle_Y$. Usando a Eq.(5.2.17) e substituindo $\mathcal{O} = n_i$, obtemos

$$\frac{\partial \langle n_i \rangle_Y}{\partial Y} = \left\langle \frac{\Delta(1 - \prod_j \sigma_{ij}^{n_j})}{\tau} \right\rangle_Y = \langle f_i(\{n\}) \rangle_Y, \quad (5.2.18)$$

que possui uma interpretação física bastante natural: a taxa de variação no número de médio de partículas em um sítio i dado é igual ao valor médio da taxa de depósito nesse sítio. Há dois casos-limite da Eq.(5.2.18) que são particularmente interessantes, os quais correspondem aos dois casos-limite de f_i discutidos na seção anterior, são eles:

(i) Se o sistema é relativamente diluído em torno do sítio i —significando que, para as configurações típicas, temos $n_i \ll 1/\tau$ e também $n_j \ll 1/\tau$ para todos os sítios j que não estão tão distantes de i —podemos linearizar $\langle f_i \rangle_Y$ com respeito aos números (médios) de

ocupação e portanto obter:

$$\frac{\partial \langle n_i \rangle_Y}{\partial Y} \approx \frac{\Delta}{\tau} \sum_j \tau_{ij} \langle n_j \rangle_Y. \quad (5.2.19)$$

Neste regime, a ocupação de partículas no sítio i e nos sítios vizinhos passa por uma evolução *linear*, levando a um crescimento rápido (exponencial em Y) nos respectivos números médios de ocupação. Este crescimento rápido é análogo ao crescimento BFKL na distribuição de glúons (ou dipolos) na QCD no regime diluído [7–9].

(ii) Se, por outro lado, o sistema é denso em i , significando que a taxa de depósito $\langle f_i \rangle_Y$ satura em seu valor máximo, o crescimento do número (médio) de ocupação em i é consideravelmente reduzido:

$$\frac{\partial \langle n_i \rangle_Y}{\partial Y} \approx \frac{\Delta}{\tau}. \quad (5.2.20)$$

Esta equação mostra que, quando o número de ocupação em i torna-se de $\mathcal{O}(1)$, seu crescimento subsequente com Y é muito lento, *linear* em Y . Este é o mecanismo de *saturação* neste modelo, e é similar à saturação gluônica na QCD, onde os números de ocupação para os modos saturados também crescem linearmente com Y [23, 99, 100]

Deve-se notar que a Eq.(5.2.18) não é uma equação fechada para $\langle n_i \rangle_Y$, mas a primeira de uma hierarquia: se expandirmos $\sigma_{ij}^{n_j} = \exp\{n_j \ln \sigma_{ij}\}$ em potências de n_j , geramos correlações dos números de ocupação com qualquer $k \geq 1$. Isto nos leva a considerar as equações de evolução satisfeitas pelos números de ocupação gerais, ordenados de forma normal, definidos como

$$n_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \equiv n_{i_1} (n_{i_2} - \delta_{i_1 i_2}) \dots (n_{i_k} - \delta_{i_1 i_k} - \dots - \delta_{i_{k-1} i_k}). \quad (5.2.21)$$

O ordenamento normal se refere à subtração de funções- δ , que são necessárias para garantir que, ao construirmos $n^{(k)}$, contamos apenas conjuntos de k partículas que são todas diferentes umas das outras. A equação de evolução correspondente é

$$\frac{\partial \langle n_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} \rangle_Y}{\partial Y} = \sum_{j=1}^k \langle f_{i_j}(\{n\}) n_{i_1 i_2 \hat{i}_j \dots i_k}^{(k-1)} \rangle_Y, \quad (5.2.22)$$

onde a notação \hat{i}_j significa que a variável i_j deve ser omitida.

5.3 O limite para o contínuo

Nesta seção, discutiremos o limite contínuo deste modelo. Claramente, este limite é obtido pela substituição $i \rightarrow x_i = i\Delta$ e então fazer $\Delta \rightarrow 0$, de modo que $x_i \rightarrow x$, com x sendo a variável espacial contínua. Portanto, uma soma em i é convertida em uma integração em x :

$$\Delta \sum_i F_i \rightarrow \int dx F(x), \quad (5.3.23)$$

enquanto uma soma sobre todas as configurações possíveis da função de onda do onium (coleção de dipolos) torna-se uma integral de trajetória, ou seja,

$$\sum_{\{n\}} \rightarrow \int [Dn(x)]. \quad (5.3.24)$$

As *densidades* de ocupação de k corpos (ordenadas de forma normal) são obtidas a partir dos números de ocupação correspondentes após dividirmos por Δ^k e depois fazermos $\Delta \rightarrow 0$. Por exemplo, a densidade de 2 corpos é dada por

$$n^{(2)}(x, y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{n_i n_j}{\Delta^2} - \frac{\delta_{ij} n_i}{\Delta \Delta} \right) = n(x) n(y) - \delta(x - y) n(x), \quad (5.3.25)$$

enquanto a taxa de depósito pode ser imediatamente obtida a partir da Eq. (5.1.9):

$$f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f_i(\{n\})}{\Delta} = \frac{1 - \exp \left[\int dz n(z) \ln \sigma(x|z) \right]}{\tau} \equiv \frac{t(x)}{\tau}. \quad (5.3.26)$$

É possível, então, expressar as equações de evolução para as densidades de partículas no limite contínuo. Por exemplo, a densidade de 1 e 2 corpos são dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial \langle n(x) \rangle_Y}{\partial Y} = \langle f(x) \rangle_Y \quad (5.3.27)$$

$$\frac{\partial \langle n^{(2)}(x, y) \rangle_Y}{\partial Y} = \langle f(x)n(y) + f(y)n(x) \rangle_Y \quad (5.3.28)$$

É importante observar que a Eq.(1.3.24) não possui singularidades quando $y = x$, graças à subtração da função- δ na definição (5.3.25) da densidade de 2 corpos.

5.3.1 Amplitudes de espalhamento

Consideremos agora o problema de espalhamento assumindo que o projétil consiste em uma única partícula localizada em i . Em QCD isso corresponderia a um projétil com um

único dipolo de tamanho $r_i \propto \exp(-x_i/2)$. Isto, por sua vez, implicitamente significa que trabalhamos em um referencial no qual quase toda a rapidez Y é carregada pelo projétil, cuja função de onda evolui de acordo com a Eq.(5.1.4), enquanto a rapidez do projétil é tão baixa que sua evolução pode ser desprezada. Substituindo $m_j \rightarrow \delta_{jk}$ em (5.1.3) obtém-se $s_k(\{n\}) = \prod_i \sigma_{ik}^{n_i}$. Usando Eq. (5.2.17), obtém-se a seguinte equação

$$\frac{\partial \langle s_i \rangle_Y}{\partial Y} = \sum_j \frac{\Delta(1 - \sigma_{ij})}{\tau} \langle s_i s_j - s_i \rangle_Y, \quad (5.3.29)$$

que não é uma equação fechada—o elemento de matriz S médio para um projétil de uma partícula está relacionado ao elemento para um projétil composto por duas partículas—mas apenas à primeira equação de uma hierarquia infinita. A equação geral desta hierarquia pode ser obtida estudando o espalhamento de um projétil composto por m partículas, em dadas posições i_1, i_2, \dots, i_m . Para uma dada configuração $\{n\}$ do alvo, a matriz S correspondente é

$$s_{i_1} \dots s_{i_m} = \prod_{j_1} \sigma_{i_1 j_1}^{n_{j_1}} \dots \prod_{j_m} \sigma_{i_m j_m}^{n_{j_m}} = \prod_j (\sigma_{i_1 j} \dots \sigma_{i_m j})^{n_j} \quad (5.3.30)$$

e então a Eq.(5.2.17) implica em

$$\frac{\partial \langle s_{i_1} \dots s_{i_m} \rangle_Y}{\partial Y} = \sum_j \frac{\Delta(1 - \sigma_{i_1 j} \dots \sigma_{i_m j})}{\tau} \langle s_{i_1} \dots s_{i_m} s_j - s_{i_1} \dots s_{i_m} \rangle_Y. \quad (5.3.31)$$

Embora obtida aqui pela evolução do alvo, estas equações podem ser facilmente reinterpretadas como descrevendo a evolução no projétil. Para isso, é importante observar que o núcleo na equação acima, ou seja, a quantidade à frente do valor médio no lado direito é precisamente $f_j(\{m\})$, a taxa de depósito no sítio j calculada para uma dada configuração $\{m\}$ do *projétil*. Assim, a equação acima pode ser interpretada da seguinte maneira: uma separação ocorre no projétil, levando a um sistema com $m + 1$ partículas. em seguida este novo sistema espalha com o alvo, surgindo assim o primeiro termo da equação, enquanto o segundo termo (com sinal negativo) corresponde à possibilidade de que nenhuma partícula extra foi criada.

O conteúdo físico dessa hierarquia pode ser discutido na sua versão contínua,

$$\frac{\partial \langle s_{x_1} \dots s_{x_m} \rangle_Y}{\partial Y} = \int_z f_z(\{m\}) \langle s_{x_1} \dots s_{x_m} s_z - s_{x_1} \dots s_{x_m} \rangle_Y, \quad (5.3.32)$$

Neste ponto é instrutivo comparar essas equações com as equações de Balitsky-JIMWLK e também com as equações mais completas, as equações de laços de pomeron apresentadas

no Capítulo 3..

Lembremos que a hierarquia de Balitsky em QCD foi obtida realizando evoluções diferentes no projétil e no alvo: assume-se que o projétil é diluído e que evolui de acordo com o formalismo de dipolos (nos restringimos à versão com grande N_c da hierarquia de Balitsky, mais apropriado para comparação com o presente modelo), enquanto o alvo é denso e evolui de acordo com a equação JIMWLK. Diante destas suposições, as equações de Balitsky são formalmente invariantes sob transformações de Lorentz (boosts), mas o todo o esquema parece incompleto, pois um projétil que evolui eventualmente torna-se denso e, mesmo um alvo que parece denso em uma escala de resolução (para momenta relativamente pequenos) necessariamente possui uma cauda diluída em momenta transversais grandes, que dirige a sua evolução [63]

Este problema é superado, por construção, no presente modelo, no qual o alvo e o projétil são tratados simetricamente, e é interessante ver como isto se reflete na estrutura das equações de evolução. A primeira equação da hierarquia (5.3.32),

$$\frac{\partial \langle s_x \rangle}{\partial Y} = \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle s_x s_z - s_x \rangle, \quad (5.3.33)$$

é formalmente similar à equação de Balitsky correspondente, da qual ela difere apenas pela substituição do núcleo de dipolo (a taxa para a separação de dipolos em QCD) pela amplitude de espalhamento reduzida $\tau_x z / \tau$, que realiza o papel da taxa de separação elementar no modelo. Observemos que a separação é mais restrita no modelo do que na QCD, já que um dos dipolos resultantes x e z está restrito a ter o mesmo tamanho x do dipolo original.

Parece, portanto, natural identificar a separação elementar $x \rightarrow xz$, com taxa $\tau_x z / \tau$ neste modelo, com a separação de dipolos em QCD. Com esta identificação, as diferenças entre a hierarquia gerada neste modelo e as equações de Balitsky tornam-se visíveis nas equações de ordens mais altas. Consideremos a segunda equação:

$$\frac{\partial \langle s_x s_y \rangle}{\partial Y} = \int_z \frac{\tau_{xz} + \tau_{zy} - \tau_{xz} \tau_{zy}}{\tau} \langle s_x s_y s_z - s_x s_y \rangle. \quad (5.3.34)$$

A respectiva equação de Balitsky envolveria apenas os dois termos positivos, τ_{xz} e τ_{zy} no numerador do núcleo, que descrevem as separações independentes das partículas em x e em y , respectivamente. O termo adicional negativo, $-\tau_{xz} \tau_{zy}$, corresponde a efeitos de saturação na evolução do projétil, refletindo o fato de que as duas separações não são realmente independentes. Este termo é formalmente suprimido por uma potência de τ com respeito aos termos anteriores, mas como veremos a seguir, ele realiza um papel essencial na evolução.

Esta discussão pode ser facilmente generalizada para as equações de mais altas ordens

na hierarquia: as análogas às equações de Balitsky podem ser obtidas a partir das equações gerais (5.3.32) substituindo o núcleo $f_z(\{m\})$ por sua versão linearizada

$$f_z(\{m\}) \longrightarrow \sum_{i=1}^m \frac{\tau(x_i|z)}{\tau}, \quad (5.3.35)$$

que descreve a separação independente $x_i \rightarrow x_{iz}$ de qualquer das m partículas do projétil. Isto é claramente similar à QCD, já que isto corresponde a dizer que o projétil evolui de acordo com a aproximação diluída (5.1.10) para a equação mestre (5.1.4). Também como na QCD, pode-se checar que o mesmo conjunto de equações seria obtido evoluindo o alvo de acordo com a versão da equação JIMWLK dentro deste modelo, Eq.(5.1.15)

Portanto, claramente a hierarquia do modelo vai além das equações de Balitsky-JIMWLK incluindo efeitos de saturação na evolução do projétil, ou, equivalentemente, flutuações no número de partículas na evolução do alvo. É interessante, então, entender melhor o papel físico do termo adicional, como por exemplo o termo negativo do núcleo na Eq.(5.3.34). Para isto e para facilitar a comparação com as equações de laços de pomerons da QCD, é conveniente reescrever as equações acima em termos das amplitudes de espalhamento $t_x \equiv 1 - s_x$. As duas primeiras equações são

$$\frac{\partial \langle t_x \rangle}{\partial Y} = \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle t_z - t_x t_z \rangle \quad (5.3.36)$$

e

$$\frac{\partial \langle t_x t_y \rangle}{\partial Y} = \int_z \left[\frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle (t_z - t_x t_z) t_y \rangle + \frac{\tau_{yz}}{\tau} \langle (t_z - t_y t_z) t_x \rangle + \frac{\tau_{xz} \tau_{yz}}{\tau} \langle t_z (1 - t_x) (1 - t_y) \rangle \right]. \quad (5.3.37)$$

Observemos que $t_x t_y = (1 - s_x)(1 - s_y)$ é a amplitude para o espalhamento *simultâneo* de duas partículas no projétil. A hierarquia também admite o ponto fixo $t = 1$, o que sugere que as soluções correspondentes saturam no limite de disco negro (que corresponde a absorção total) em altas energias: $\langle t_x t_y t_z \dots \rangle \rightarrow 1$ as $Y \rightarrow \infty$. Este comportamento limite será visto nas simulações numéricas nas próximas seções.

Podemos facilmente reconhecer, neste modelo unidimensional, as análogas das equações BFKL e BK: a primeira é obtida desprezando o termo não linear no lado direito da Eq.(5.3.36); a segunda corresponde a tratar este termo em uma aproximação de campo médio que assume a fatorização $\langle t_x t_z \rangle \approx \langle t_x \rangle \langle t_z \rangle$. Esta fatorização é, contudo, inconsistente com as equações de ordens mais altas na hierarquia, começando pela Eq.(5.3.37). Essa quebra da aproximação de campo médio está associada com a presença de termos de flutuação, como o último termo $\propto \tau_{xz} \tau_{zy}$. Esse termos são importantes, pois geram as correlações no

regime diluído.

Consideremos o regime no qual o alvo é tão diluído que a amplitude de espalhamento média é muito fraca: $\langle t \rangle \lesssim \tau$. Isto corresponde à cauda diluída da distribuição do alvo para grandes valores de x , onde o número médio de ocupação é $\langle n \rangle \lesssim 1$. Neste regime, o último termo no lado direito da Eq.(5.3.37) pode ser aproximado como $(\tau_{xz}\tau_{yz}/\tau)$, que é comparável ou mesmo maior que os termos BFKL, como $(\tau_{xz}/\tau) \langle t_z t_y \rangle$. Isto mostra que, neste regime diluído, a amplitude de duas partículas $\langle tt \rangle$ é ainda muito pequena, mas é obtida a partir da amplitude de uma partícula $\langle t \rangle$, através do último termo na Eq.(5.3.37). Vale notar que no regime diluído pode-se escrever

$$\left. \frac{\partial \langle t_x t_y \rangle}{\partial Y} \right|_{\text{fluct}} \simeq \int_z \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \langle t_z \rangle \simeq \int_z \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \int_w \tau_{zw} \langle n_w \rangle \simeq \int_z \tau_{xz}\tau_{yz} \frac{\partial \langle n_z \rangle}{\partial Y}, \quad (5.3.38)$$

De acordo com esta equação, a variação na amplitude de duas partículas em um passo da evolução pode ser interpretada como a seguinte evolução no alvo: primeiro, uma partícula nova é criada em z , através do processo de separação $w \rightarrow wz$, para qualquer w ; então, a nova partícula do alvo espalha simultaneamente com as duas partículas do projétil em x e y .

Vemos então que a correlação de duas partículas $\langle t_x t_y \rangle - \langle t_x \rangle \langle t_y \rangle$ é obtida a partir de flutuações do alvo através de *espalhamento múltiplo*, mecanismo que é bastante similar ao identificado no contexto da QCD [38], e que inspirou a extensão da hierarquia de laços de pomeron. Sua estrutura geral é realmente similar àquela para as amplitudes de espalhamento no modelo, no sentido de incluírem termos BFKL, termos não lineares responsáveis por unitarização e termos de flutuações que geram correlações no regime diluído.

5.4 Resultados analíticos

Para realizar um estudo analítico da evolução descrita por este modelo, é necessário especificar a forma da amplitude elementar de espalhamento partícula-partícula $\tau(x|z)$. Inspirados pela analogia com a QCD, na qual esta quantidade corresponde à amplitude para o espalhamento dipolo-dipolo, escolhemos

$$\tau(x|z) = \tau \exp(-|x - z|). \quad (5.4.39)$$

A origem, na QCD, para esta fórmula pode ser reconhecida da seguinte maneira: após traduzirmos para as notações da QCD, ou seja, $x \equiv \ln(r_0^2/r^2)$ com r sendo o tamanho do dipolo atual e r_0 uma escala arbitrária de referência, Eq.(5.4.39) torna-se equivalente a $\tau(r_1|r_2) = \tau r_{<}^2/r_{>}^2$, onde $r_{<} = \min(r_1, r_2)$ e $r_{>} = \max(r_1, r_2)$ [63]. Com a identificação adi-

cional $\tau = \alpha_s^2$, temos uma boa aproximação para a amplitude que descreve o espalhamento central entre dois dipolos elementares na QCD. Por central queremos dizer uma colisão que ocorre em parâmetro de impacto relativo igual a zero. Está subentendido também que é tomada a média sobre as orientações dos vetores bidimensionais \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

5.4.1 Evolução BFKL do modelo

Iniciaremos com a versão linearizada da Eq.(5.3.36), que aqui faz o papel da equação BFKL. Com a forma específica de $\tau(x|z)$ dada acima, temos

$$\frac{\partial t_x}{\partial Y} = \int dz \exp(-|x-z|) t_z \quad (5.4.40)$$

onde assumimos que as médias estão implícitas. Definindo a transformada de Mellin com respeito a $\exp(-x)$

$$\tilde{t}(\gamma, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(\gamma x) t(x, Y), \quad (5.4.41)$$

obtemos $\tilde{t}(\gamma, Y) = \tilde{t}(\gamma, Y=0) \exp[\chi(\gamma)Y]$, onde a função característica é a transformada de Mellin do núcleo na Eq.(5.4.40) e tem a forma

$$\chi(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{1+\gamma}. \quad (5.4.42)$$

Assim, a solução geral da Eq.(5.4.40) é

$$t(x, Y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\gamma}{2\pi i} \tilde{t}(\gamma, 0) \exp[\chi(\gamma)Y - \gamma x], \quad (5.4.43)$$

onde o contorno de integração \mathcal{C} é paralelo ao eixo imaginário e com parte real tal que $|\text{Re}(\gamma)| < 1$. Da Eq.(5.4.41), vemos que $\tilde{t}(\gamma, 0)$ é a transformada de Mellin da amplitude de espalhamento em $Y=0$. Por definição, assumiremos que o alvo é inicialmente composto de um único dipolo de tamanho $r_0 = \exp(-x_0/2)$, e neste caso temos $\tilde{t}(\gamma, 0) = \tau \chi(\gamma) \exp(\gamma x_0)$.

Analisemos agora alguns limites especiais da equação acima, à qual nos referiremos usando uma terminologia inspirada na QCD:

(i) O limite de altas energias $Y \rightarrow \infty$ para x fixo. No plano cinemático (Y, x) , isto corresponde à evolução ao longo de um eixo vertical. Neste limite, a integral é dominada pela região em torno do ponto $\gamma_{\mathbb{P}}$ que satisfaz $\chi'(\gamma_{\mathbb{P}}) = 0$. Facilmente encontramos $\gamma_{\mathbb{P}} = 0$

e $\chi(\gamma_{\mathbb{P}}) = 2$, e realizando a integração Gaussiana em torno deste ponto de sela, obtemos

$$t(x, Y) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi Y}} \exp \left[2Y - \frac{(x - x_0)^2}{8Y} \right]. \quad (5.4.44)$$

A dependência em Y da amplitude é similar ao que ocorre na QCD, já que em ambos os casos ela cresce exponencialmente com Y . No entanto, a analogia não é completa, pois a amplitude acima é independente do tamanho r do dipolo do projétil. Em contraste, a amplitude respectiva na QCD é proporcional a r , o que no entanto é uma dependência relativamente fraca comparada com o resultado correspondente em ordem fixa na teoria de perturbações, $t(r) \sim r^2$ (transparência de cor). Observemos também a dependência Gaussiana da Eq.(5.4.44) em $x - x_0$, o que descreve difusão com um raio $\propto Y^{1/2}$. Isto é novamente similar à conhecida difusão BFKL na variável logarítmica $\ln(1/r^2)$.

(ii) *Aproximação de duplo logaritmo (DLA)*: Esta é a evolução ao longo de uma direção no plano (Y, x) tal que a diferença $x - x_0$ entre os tamanhos dos dipolos cresce mais rapidamente que a rapidez Y . Quando $x - x_0 \gg Y$, a integral é dominada por um valor de γ que é perto de 1. O ponto de sela ocorre em $\gamma_{DLA} = 1 - [Y/(x - x_0)]^{1/2}$ e chegamos em

$$t(x, Y) = \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}} [(x - x_0)Y]^{-1/4} \exp \left[-(x - x_0) + \sqrt{4(x - x_0)Y} \right]. \quad (5.4.45)$$

Este é exatamente correspondente ao resultado na QCD, o que não deveria ser uma surpresa: no limite de duplo logaritmo da QCD, um dos dipolos que surgem tem um tamanho igual ao do dipolo original, uma característica que está na construção do nosso modelo. Em particular, o resultado acima mostra transparência de cor, ou seja, $t(x) \propto \exp[-(x - x_0)]$, numa completa analogia com o comportamento, na QCD, $t(r) \sim r^2$ para valores muito pequenos de r

5.4.2 Correções de unitariedade na aproximação de campo médio

Como ficou explícito na análise anterior, a evolução em altas energias descrita pela Eq.(5.4.40) leva a uma amplitude de espalhamento que cresce rapidamente com Y , e portanto eventualmente viola o limite de unitariedade $t \leq 1$. Assim, para estudar o comportamento em altas energias, é necessário incluir os termos não lineares responsáveis pelas correções de unitariedade. Faremos isto primeiramente na aproximação de campo médio $\langle t_x t_y \rangle \approx \langle t_x \rangle \langle t_y \rangle$, na qual Eq.(5.3.36) é reduzida a apenas uma equação não linear

$$\frac{\partial t_x}{\partial Y} = \int dz \exp(-|x - z|) (t_z - t_x t_z) \quad (5.4.46)$$

que é a versão do modelo análoga à equação BK. Tal analogia não é apenas formal, mas cobre muitos aspectos essenciais: (a) Assim como a equação BK, Eq.(5.4.46) é consistente com unitariedade e, além disso, sua solução se aproxima ao limite de unitariedade em grande Y ($t = 1$ é um ponto fixo); (b) No limite de espalhamento fraco $t \ll 1$, Eq.(5.3.36) é reduzida a uma equação linear que descreve um crescimento exponencial com Y e difusão em x . Juntas, essas propriedades implicam na Eq.(5.4.46) estar na classe de universalidade da equação FKPP, assim como a equação BK, o que também implica na evolução em direção à saturação ser dirigida pela dinâmica linear no regime diluído—a forma precisa dos termos não lineares não é importante desde que forneçam saturação. Portanto, é fácil adaptar a análise da equação BK das referências [23, 30–32, 101] para a Eq.(5.4.46) com os resultados descritos abaixo.

Para valores suficientemente grandes de Y (para que se perca a memória da condição inicial e o comportamento universal seja alcançado), a solução $t(x, Y)$ é uma onda viajante, ou seja, uma frente que interpola entre $t = 1$ para valores negativos grandes de x e $t \rightarrow 0$ para valores positivos grandes e que se propaga na direção de valores maiores de x à medida que Y cresce. A posição $x_s(Y)$ desta frente define a linha de saturação, a direção de evolução no plano (Y, x) ao longo da qual a amplitude de espalhamento é constante e de $\mathcal{O}(1)$. Como mencionado antes, a localização dessa linha pode ser inferida a partir da solução da equação linearizada (BFKL) (5.4.40). Retornamos então a esta solução, Eq.(5.4.43) e consideramos uma terceira direção no plano (Y, x) , correspondente à linha de saturação.

(ii) *A linha de saturação:* Quando a rapidez cresce ao longo desta linha, a posição x (o inverso do tamanho do dipolo) deve também crescer para que a amplitude permaneça constante. Para Y grande o suficiente, pode-se usar a aproximação de ponto de sela na Eq.(5.4.43). A condição de ponto de sela

$$\chi'(\gamma_s)Y - x_s = 0, \quad (5.4.47)$$

juntamente com a condição de que o expoente se anula (para que a amplitude seja rigorosamente constante) ao longo da linha de saturação

$$\chi(\gamma_s)Y - \gamma_s x_s = 0, \quad (5.4.48)$$

determinam unicamente o valor do ponto de sela de saturação γ_s e a linha $x_s(Y)$ (a menos de uma constante aditiva), que nesta aproximação é simplesmente uma linha reta: $x_s(Y) \approx \lambda_s Y$. Obtemos

$$\chi'(\gamma_s) = \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} \Rightarrow \gamma_s = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{e} \quad \lambda_s = \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} = 3\sqrt{3}. \quad (5.4.49)$$

É possível ainda melhorar a estimativa para λ_s levando em conta mais apropriadamente os efeitos não lineares. Obtém-se, assim [101]

$$\lambda_s \equiv \frac{dx_s(Y)}{dY} \approx \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} - \frac{3}{2\gamma_s Y} = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2Y}, \quad (5.4.50)$$

que concorda com os resultados a partir da equação FKPP [37]. A amplitude na vizinhança da linha de saturação pode ser obtida através de uma expansão em torno do ponto de sela de saturação, o que implica em

$$t(x, Y) = c_1 \tau(x - x_s + c_2) \exp \left[-\gamma_s(x - x_s) - \frac{(x - x_s)^2}{2\chi''(\gamma_s)Y} \right]. \quad (5.4.51)$$

Isto é válido estritamente para $1 \ll x - x_s \ll 2\chi''(\gamma_s)Y$, que corresponde uma larga janela para grande Y . Na Eq.(5.4.51), c_1 e c_2 são constantes desconhecidas de ordem $\mathcal{O}(1)$, $\chi''(\gamma_s) = 27$.

Observemos que na região $x - x_s \ll \sqrt{2\chi''(\gamma_s)Y}$, onde o termo de difusão no expoente pode ser desprezado, a amplitude exibe escalamento geométrico, ou seja, depende de x e Y apenas através da combinação $x - x_s(Y)$. Isto é o que significa uma onda progressiva: uma frente que, quando Y cresce, é simplesmente deslocada para valores maiores de x , sem distorção na sua forma.

Também é instrutivo traduzir o cenário descrito acima para um número médio de partículas no alvo, $n(x, Y)$. Na cauda da frente em $x \gg x_s(Y)$, na qual $t \ll 1$, temos $t(x, Y) \approx \int dz \tau(x|z)n(z, Y)$, onde a integração em z tem um pico em $z = x$. Assim, um dipolo pequeno (com grande x), espalha com dipolos do alvo com tamanho similar ($z \sim x$), e o fato de a interação ser fraca corresponde ao fato de que o alvo parece diluído nessa escala de resolução: $n(x, Y) \ll 1/\tau$. Quando Y cresce neste regime diluído, n cresce muito rapidamente, exponencialmente com Y , assim como t . Em torno da posição da frente ($x \sim x_s(Y)$), temos $t \sim \mathcal{O}(1)$ e portanto $n \sim \mathcal{O}(1/\tau)$: nesta escala de resolução, o alvo é denso. Finalmente, atrás da frente, onde t satura em 1, o número de ocupação não satura, mas permanece crescendo com Y , embora apenas lentamente (ver Eq.(5.2.20)): $n(x, Y) \approx (Y - Y_c)/\tau$, onde $Y_c \sim \ln(1/\tau)$ é a rapidez crítica para que a saturação seja alcançada na taxa de depósito em x : $f(x) = 1/\tau$ para $Y > Y_c$. O valor preciso de Y_c depende de x e das condições iniciais em $Y = 0$.

5.4.3 Flutuações no número de partículas

Como discutido em seções anteriores, as equações de evolução envolvem termos de flutuações, que refletem o aspecto discreto do número de partículas e são inconsistentes com a

aproximação de campo médio. Como os números de ocupação são grandes na saturação, pode-se esperar que os efeitos de tais flutuações sejam relativamente pequenos e possam ser tratados em teoria de perturbações em torno dos resultados de campo médio. No entanto, como foi recentemente entendido na QCD [38,61–63], a evolução em altas energias é de fato dramaticamente sensível a flutuações, e a razão física para isso está implícita na discussão da seção anterior: a evolução é dirigida pelo crescimento e pela difusão BFKL na cauda diluída da frente, onde os números de ocupação são pequenos (da ordem de um) e portanto os efeitos de flutuações no número de partículas são realmente importantes.

A análise das aproximações linear e de campo médio sugere que o modelo em consideração encontra-se na classe de universalidade do processo de reação-difusão, e esta conclusão será reforçada pela análise numérica na próxima seção. Portanto, é possível fiar-se na correspondência com a física estatística a fim de caracterizar os aspectos universais da dinâmica na presença de flutuações. Estes são em sua maioria qualitativos e referem-se ao comportamento em tempo grande (aqui, grande Y) em acoplamento fraco (aqui $\tau \ll 1$). Abaixo são enumerados os principais aspectos qualitativos da dinâmica na presença das flutuações:

- (i) Para uma dada condição inicial em $Y = 0$, a evolução estocástica até Y gera um *conjunto estatístico de frentes* (ao invés de uma única frente para a dinâmica determinística na aproximação de campo médio), com as distintas frentes no conjunto diferindo por suas respectivas posições de frente. Portanto, $x_s(Y)$ (a *linha de saturação*) torna-se agora uma *variável aleatória*.
- (ii) Em uma boa aproximação, a distribuição de x_s em Y é uma Gaussiana, com um valor médio $\langle x_s \rangle$ e uma dispersão $\sigma^2(Y) = \langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2$ que crescem linearmente com Y : $\langle x_s \rangle = \lambda_s Y$ e $\sigma^2(Y) = D_f Y$.
- (iii) O valor assintótico da *velocidade média* λ_s é significativamente menor que sua predição na aproximação de campo médio

$$\chi'(\gamma_s) = \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} \Rightarrow \gamma_s = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{e} \quad \lambda_s = \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} = 3\sqrt{3}. \quad (5.4.52)$$

onde

$$\chi(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{1+\gamma}. \quad (5.4.53)$$

O respectivo desvio é conhecido analiticamente no limite formal de acoplamento fraco [66], com um resultado que, quando adaptado a este modelo fica

$$\lambda_s \simeq \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} - \frac{\pi^2 \gamma_s \chi''(\gamma_s)}{2 \ln^2 \tau} = 3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3} \pi^2}{2 \ln^2 \tau}, \quad (5.4.54)$$

válido quando $\ln^2 \tau \gg 1$. No mesmo limite, o *coeficiente de difusão da frente* D_f comporta-se como $D_f \sim 1/\ln^3(1/\tau)$ [102], e então se anula, como esperado, quando $\tau \rightarrow 0$. Deve-se notar, contudo, a convergência lenta, *logarítmica* em τ , destes resultados para seus respectivos limites de campo médio, o que reflete a forte sensibilidade da evolução às flutuações.

- (iv) Quando Y cresce, o valor assintótico de λ_s é rapidamente alcançado (*exponencialmente* em Y), ao contrário da lenta convergência prevista pelo resultado de campo médio (5.4.50).
- (v) As frentes individuais no conjunto exibem *escalamento geométrico*, mas apenas em uma região *compacta*: para cada frente, há apenas uma distância finita $x - x_s \leq \Delta x_g$, com $\Delta x_g \simeq (1/\gamma_s) \ln(1/\tau)$, além da frente, onde a amplitude escala como $t(x) \propto e^{-\gamma_s(x-x_s)}$, com $\gamma_s = 1/\sqrt{3}$. Em contraste, na amplitude de campo médio a janela de escalamento $x - x_s \propto \sqrt{Y}$ cresce com Y , e portanto pode tornar-se arbitrariamente grande.
- (vi) Observáveis físicos, como a amplitude de dipolo *média* $\langle t(x) \rangle_Y$, são obtidos realizando a média sobre o conjunto. Nesta média, a propriedade de escalamento geométrico desaparece por causa da dispersão nas posições das frentes [62, 63], e é eventualmente substituída, em valores de Y suficientemente grandes, por um novo tipo de escalamento [38, 63], conhecido como *escalamento difusivo* [103]. Especificamente, $\langle t(x) \rangle_Y$ é estimada como

$$\langle t(x) \rangle_Y \simeq \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left[\frac{x - \langle x_s \rangle}{\sqrt{2D_f Y}} \right], \quad (5.4.55)$$

Essa aproximação de escalamento difusivo é válida quando $D_f Y \gg 1$ e em uma grande região em torno da linha de saturação média $\langle x_s \rangle_Y$, tal que $|x - \langle x_s \rangle| \ll \gamma_s D_f Y$. Ela também interpola suavemente na direção do limite de disco negro $\langle t(x) \rangle = 1$ quanto $x \rightarrow -\infty$. Para distâncias maiores $x - \langle x_s \rangle \gtrsim \gamma_s D_f Y$, o comportamento de transparência de cor é recuperado, $\langle t(x) \rangle \propto \exp[-(x - \langle x_s \rangle)]$, com um pré-fator que é sensível às flutuações (ver Refs. [38, 103] para detalhes).

5.5 Resultados numéricos

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da investigação numérica do modelo unidimensional descrito neste capítulo.

Consideremos primeiramente a evolução de um único evento, Figura 5.1. A formação do padrão de onda viajante ocorre por meio de dois mecanismos distintos:

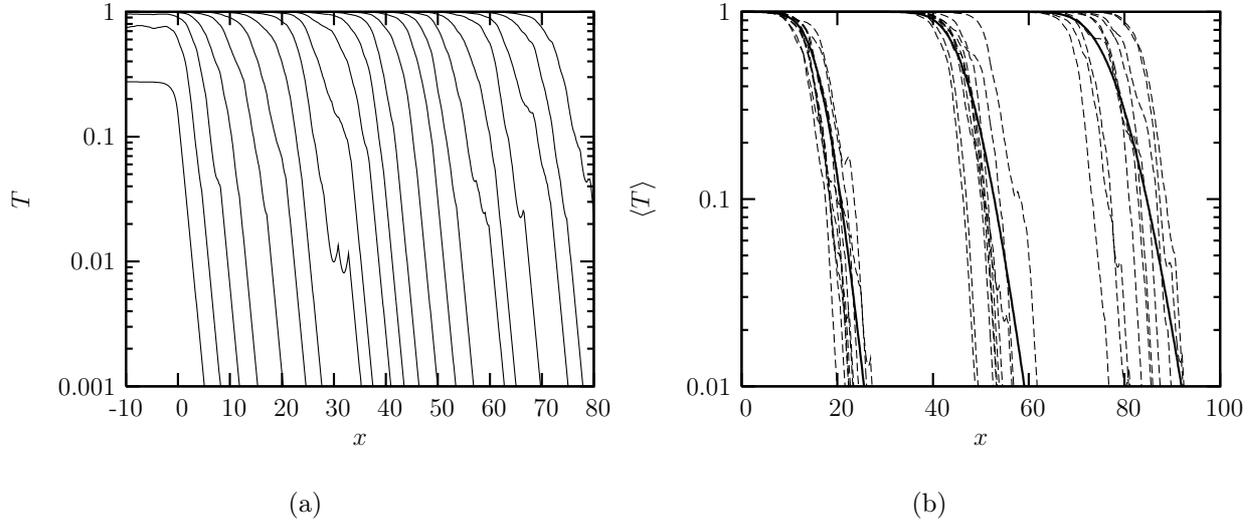


Fig. 5.1: *Evolução evento-por-evento da amplitude de espalhamento: (a) Evolução em rapidez da amplitude para um único evento. (b) Amplitude para 10 eventos (linhas tracejadas) e amplitude média (linha sólida) para $Y = 5, 12.5, \text{ e } 20$.*

- partículas são produzidas em sítios já ocupados. Esta evolução é basicamente governada pela dinâmica de campo médio e resulta na formação de uma frente de onda;
- às vezes uma flutuação rara surge bem adiante da extremidade da frente, na região que era anteriormente desocupada. A evolução subsequente é, portanto, uma competição entre o crescimento BFKL, local, daquela flutuação particular e o crescimento e progressão da frente de onda de campo médio. Quando um conjunto de eventos, tais flutuações levam a uma dispersão crescente na posição das frentes (ver gráfico direito da Figura 5.1).

Efetuada a média sobre um grande número de eventos ($N_{\text{ev}} = 10^5$), obtém-se as distribuições médias mostradas na Figura 5.2. À esquerda são observadas grandes flutuações no número médio de partículas por sítio quando $\langle n \rangle \approx 10^{-5} = 1/N_{\text{ev}}$. Essas correspondem a flutuações raras (apenas poucos eventos possuem número de ocupação não nulos nos respectivos sítios) na cauda diluída da frente. No que diz respeito à amplitude média, embora seja possível notar um padrão de onda viajante no gráfico à direita na Figura 5.2, a forma da frente média na realidade varia com Y – sua inclinação diminui com Y – o que reflete a violação do escalamento geométrico por meio das flutuações.

Para estudar a violação do escalamento geométrico mais detalhadamente, é necessário primeiro estudar a estatística da posição da frente (a escala de saturação x_s) como uma função da rapidez. Para um dado evento $t(x, Y)$, a posição da frente é determinada por $t(x = x_s(Y), Y) = t_0$, com t_0 sendo um número constante que escolhemos $t_0 = 0.1$. Espera-

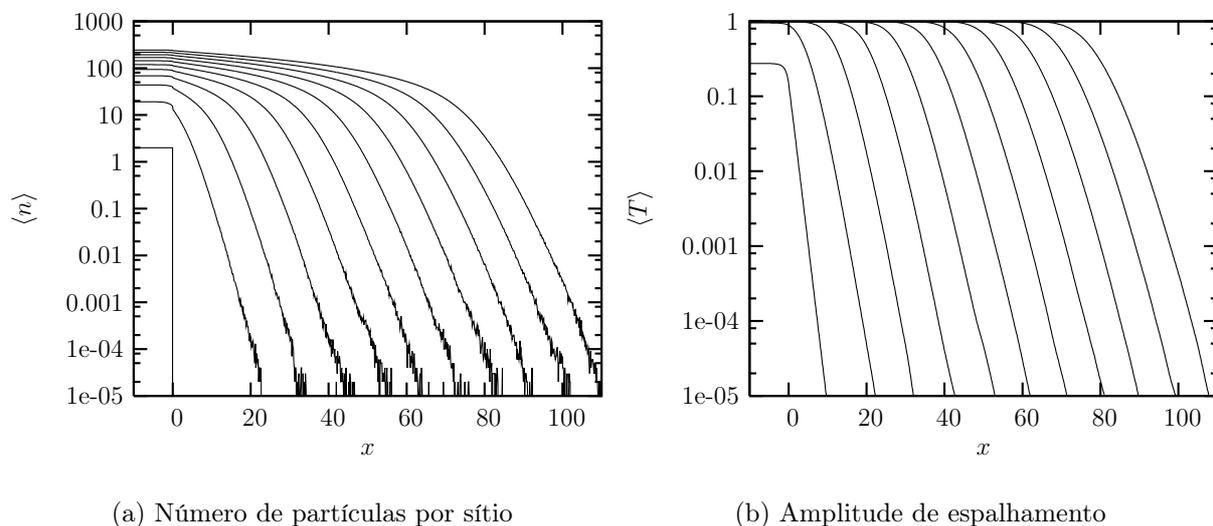


Fig. 5.2: Evolução das quantidades médias obtidas após 10^5 eventos. Os resultados são apresentados como uma função de x para, da esquerda para a direita, $Y = 0, 2, 4, \dots, 20$.

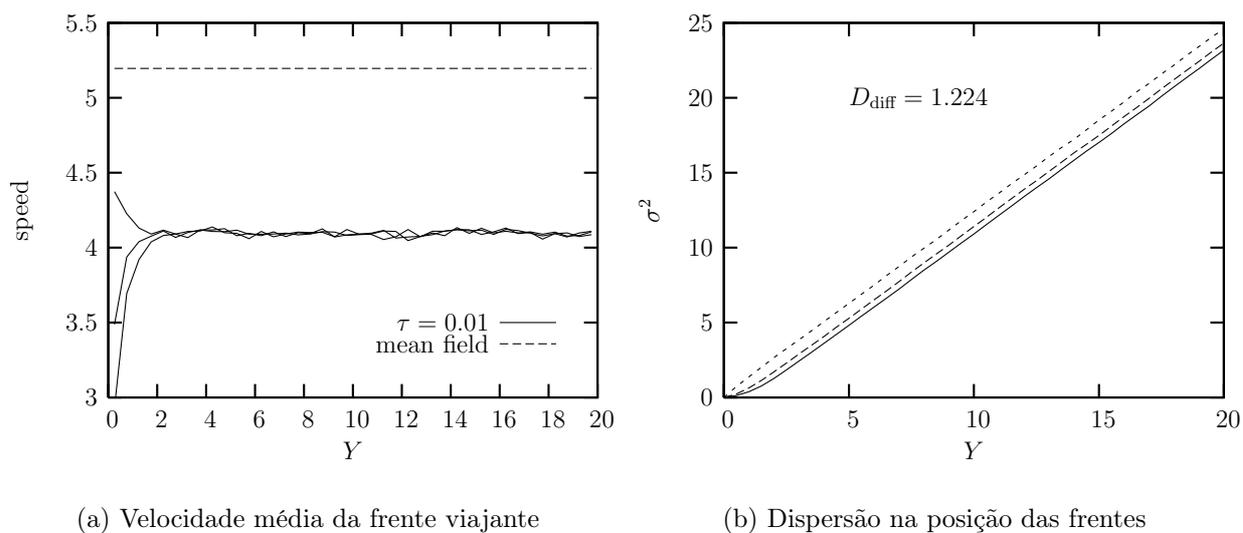


Fig. 5.3: Estatística da posição da frente (ou escala de saturação) x_s . Tanto a posição média como a dispersão ao quadrado crescem linearmente com a rapidez.

se que tanto o valor médio de $x_s(Y)$ quanto a dispersão associada cresçam linearmente com Y . Para o valor médio isto é verificado no gráfico à esquerda na Figura 5.3, que exhibe os resultados numéricos para $\partial_Y \langle x_s(Y) \rangle$. Este gráfico mostra que o valor assintótico em grande Y da velocidade é atingido muito rapidamente e, além disso, este é significativamente menor que a correspondente predição da aproximação de campo médio, $\lambda_s = 3\sqrt{3}$. Para a dispersão, $\sigma^2 = \langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2$, os resultados são mostrados no gráfico à direita na Figura 5.3. Esta é bem fitada por um crescimento linear, $\sigma^2 \simeq D_f Y$, com um coeficiente de difusão da frente $D_f = 1.224$. Assim, a estatística da escala de saturação segue realmente o padrão esperado para um processo de reação-difusão.

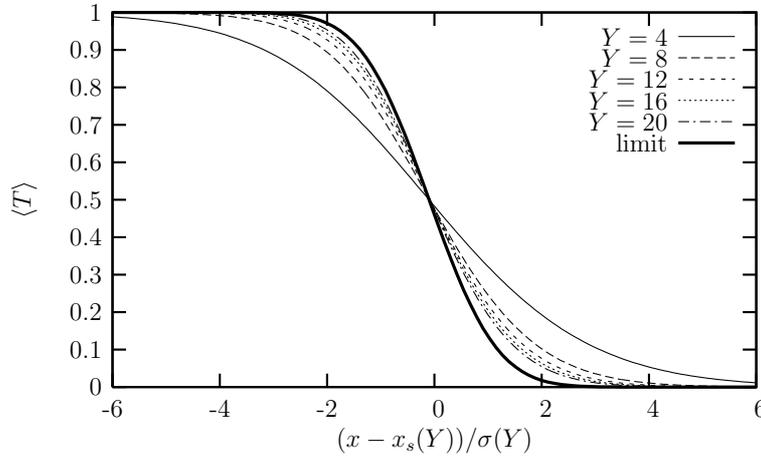


Fig. 5.4: A amplitude média representada como uma função da variável de escalamento difusivo. Quando a rapidez cresce, o resultado assintótico (5.4.55) (indicado na figura por *limit*) é de fato obtido.

Consideremos novamente a análise da forma da amplitude média a fim de verificar outra predição importante do problema de reação-difusão: o surgimento do *escalamento difusivo* em grande Y (ver Eq. (5.4.55)). Para isso, a amplitude média foi plotada, a partir das simulações numéricas, como uma função da variável de escalamento esperada, $(x - \langle x_s \rangle)/\sigma$, com $\langle x_s \rangle$ e σ^2 obtida da análise anterior (Figura 5.3) para vários valores da rapidez Y . Como manifestado na Figura 5.4, a amplitude média realmente converge para a curva assintótica esperada, Eq. (5.4.55), quando Y cresce. Assim, a propriedade de escalamento difusivo é completamente satisfeita pelo nosso modelo.

Capítulo 6

Conclusões

Nesta tese, foram abordados alguns dos principais aspectos da evolução e do espalhamento na QCD no regime de altas energias. A partir das propriedades do DIS, é possível compreender como ocorre a evolução na direção do limite de altas energias e a importância dos efeitos não lineares que levam a uma provável saturação partônica. Esses efeitos levam ao surgimento de equações de evolução não lineares para as amplitudes de espalhamento. Em particular, para o espalhamento dipolo-hádron, as amplitudes de espalhamento podem ter sua evolução descrita pelas equações de laços de pomeron, que basicamente consistem nas equações de Balitsky-JIMWLK levando em conta, não apenas a fusão de pomerons, mas a divisão de pomerons, ou seja, levando em conta as flutuações do número de glúons (ou dipolos). No regime no qual as energias não são muito altas, a equação linear BFKL é recuperada e, considerando uma aproximação de campo médio, obtém-se a chamada equação BK, que é a mais simples equação de evolução para a amplitude de espalhamento dipolo-hádron. Por ser mais simples, é também a equação mais estudada e as propriedades (assintóticas) de suas soluções são bem conhecidas.

Usando essas propriedades da equação BK, realizamos uma análise de suas implicações fenomenológicas no espalhamento profundamente inelástico (DIS) [76]. Propusemos uma expressão para a amplitude de espalhamento no espaço de momentum, o modelo AGBS, que interpola entre o comportamento da amplitude dipolo-próton no regime de saturação e as amplitudes de ondas progressivas, previstas pela QCD perturbativa no regime ultravioleta a partir da equação BK. Esta expressão foi usada para calcular a função de estrutura do próton F_2 (no formalismo de dipolos) e testada através de ajustes aos resultados experimentais de HERA. Obtivemos bons ajustes com massas de quarks leves $m_{u,d,s} = 50, 140$ MeV e massa do charm $m_c = 1.3$ GeV. Embora haja outros modelos na literatura que conseguem reproduzir F_2 com um bom χ^2 , nosso modelo pode ser diferenciado principalmente nos seguintes aspectos:

- (i) A análise baseia-se na equação BK para considerar efeitos de unitariedade. Assim, espera-se que nosso método seja mais preciso que os modelos no espaço de coordenadas

na literatura, em particular GBW e IIM, especialmente no domínio de pequeno- x e baixo Q^2 sob investigação;

- (ii) Em ambos modelos GBW e IIM, algumas dificuldades são encontradas após realizar-se suas respectivas transformadas de Fourier. No primeiro, a transformada de Fourier da seção de choque de dipolo apresenta um comportamento perturbativo não realístico, enquanto no segundo ela apresenta valores negativos. Estas dificuldades inexistem em nosso modelo, já que a transformada de Fourier (amplitude de espalhamento no espaço de coordenadas) permanece entre 0 e 1.

Essas características associadas com a boa descrição dos dados e χ^2 pequeno mostram que a amplitude de espalhamento proposta neste capítulo é uma boa parametrização para investigar as propriedades dos observáveis em energias de RHIC e LHC que podem ser descritos dentro do formalismo de dipolos.

Neste sentido, realizamos uma nova aplicação do modelo AGBS [104], a fim de investigar os efeitos das flutuações no DIS nas energias de HERA. Tal análise foi feita no espaço de coordenadas utilizando os modelos GBW e AGBS e os resultados foram inconclusivos no que diz respeito à presença de flutuações em HERA. A análise apresentada nesta tese, através do modelo AGBS, mostra que não há evidência da presença de flutuações nas medidas da função de estrutura do próton F_2 , o que é representado pelo valor muito pequeno, próximo a zero, do coeficiente de difusão D . Foi possível chegar a essa conclusão realizando o ajuste a todos os dados de HERA (H1 e ZEUS) para as medidas do DIS, ao contrário do que foi feito no outro estudo envolvendo os modelos GBW e IIM, que utilizou apenas dados de H1. O estudo apresentado aqui, portanto, é mais completo.

O Capítulo 5 desta tese foi dedicado a apresentar um trabalho de natureza puramente teórica, mas que certamente possui conseqüências profundas no que diz respeito à fenomenologia da QCD em altas energias. Este foi realizado durante o doutorado sanduíche que realizei no SPhT, Saclay, França, financiado pelo Programa de Estágio de Doutorando no Exterior da CAPES. Esse estágio foi realizado sob a responsabilidade do Dr. Edmond Iancu e teve uma duração de cinco meses, tendo como resultado outra publicação científica Referência [47].

O trabalho consiste na construção de um modelo estocástico de partículas (1+1)-dimensional que reproduz a evolução e o espalhamento em altas energias na QCD em parâmetro de impacto fixo. O modelo mostra-se interessante em vários aspectos:

- (i) Sua estrutura é consistente com princípios físicos gerais que são válidos na QCD: invariância de Lorentz, espalhamentos múltiplos e evolução através da emissão de uma partícula adicional por unidade de rapidez;

- (ii) O modelo exibe um mecanismo de saturação similar à saturação gluônica: as novas partículas criadas pela evolução são emitidas coerentemente a partir das partículas pré-existentes, com uma taxa de emissão que satura em alta densidade devido aos espalhamentos múltiplos entre a partícula adicional e as que a originaram.
- (iii) O modelo encontra-se na classe de universalidade do processo de reação-difusão, como também esperado em QCD, e exibe todas as características qualitativas esperadas na QCD em parâmetro de impacto fixo, no que diz respeito tanto aos aspectos de campo médio (crescimento BFKL no regime diluído, a formação de uma frente de saturação com escalamento geométrico) como os efeitos das flutuações (dispersão nas posições das frentes, quebra do escalamento geométrico na descrição estatística, convergência para escalamento difusivo em altas energias).
- (v) O modelo é suficientemente simples para permitir investigações numéricas detalhadas.
- (vi) Os aspectos estruturais do modelo são particularmente interessantes, já que estes podem inspirar buscas por estruturas correspondentes na QCD. Em particular, as equações de evolução para as amplitudes de espalhamento neste modelo aparecem como uma generalização natural (dentro dos limites do modelo) das equações de Balitsky–JIMWLK, com o projétil e o alvo tratados *simetricamente*: para cada um desses dois sistemas, as equações incluem flutuações e múltiplos espalhamentos tanto com as partículas internas ao sistema (efeitos de saturação) quanto com as do outro sistema (correções de unitariedade).

Diante dessas características, é natural que esse modelo unidimensional inspire buscas por novas estruturas na QCD. Na realidade, um importante passo nesse sentido já foi realizado na Referência [92], onde o modelo foi considerado no caso no qual o parâmetro τ (o análogo de α_s da QCD) não é fixo, e sim variável, com uma dependência explícita da variável espacial x (na QCD o logaritmo do inverso do tamanho transversal do dipolo). O principal resultado desse estudo é que o efeito das flutuações no número de glúons é suprimido pelo efeito da variação do parâmetro de acoplamento. Isso implica, para as energias de interesse da fenomenologia da QCD (mesmo nas energias do LHC), o tratamento de campo médio (equação BK), com acoplamento variável, ser suficiente para descrever o espalhamento e a evolução.

Diante desse resultado, surgem boas perspectivas da continuidade do trabalho desenvolvido até então. Evidentemente, é interessante realizar aplicações do modelo unidimensional para o estudo de observáveis físicos. O primeiro passo neste sentido é a descrição de processos difrativos dentro do formalismo do modelo em questão. Tal descrição foi realizada no formalismo da QCD em [103], onde nos limites da aproximação de grande N_c , os autores

estabeleceram o comportamento em altas energias das seções de choque difrativa e inclusiva para o DIS em parâmetro de impacto e parâmetro de acoplamento α_s fixos. Esse estudo entrará num projeto para a realização de um pós-doc e os primeiros rascunhos já foram iniciados.

Apêndice A

Equivalência entre as equações BK e FKPP

Neste Apêndice, explicitaremos os cálculos que levam ao resultado importante obtido por Munier e Peschanski [30], a equivalência entre as equações BK e FKPP.

Após a aproximação difusiva realizada no núcleo BFKL, a equação BK toma a forma

$$\begin{aligned}
 \partial_Y \mathcal{N} &= \bar{\alpha}_s \bar{\chi} (-\partial_L) \mathcal{N} - \bar{\alpha}_s \mathcal{N}^2 \\
 &= \bar{\alpha}_s \left[\chi \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\chi''(1/2)}{2} (\partial_L + 1/2)^2 \mathcal{N} - \bar{\alpha}_s \mathcal{N}^2 \right] \\
 &= \bar{\alpha}_s \chi \left(\frac{1}{2} \right) \mathcal{N} + \bar{\alpha}_s \frac{\chi''(1/2)}{2} (\partial_L + 1/2)^2 \mathcal{N} - \bar{\alpha}_s \mathcal{N}^2 \\
 &= \bar{\alpha}_s \chi \left(\frac{1}{2} \right) \mathcal{N} + \bar{\alpha}_s \frac{\chi''(1/2)}{2} (\partial_L^2 + \partial_L + 1/4) \mathcal{N} - \bar{\alpha}_s \mathcal{N}^2 \\
 &= \bar{\alpha}_s \chi \left(\frac{1}{2} \right) \mathcal{N} + \bar{\alpha}_s \frac{\chi''(1/2)}{2} \partial_L^2 \mathcal{N} + \bar{\alpha}_s \frac{\chi''(1/2)}{2} \partial_L \mathcal{N} + \bar{\alpha}_s \frac{\chi''(1/2)}{8} \mathcal{N} - \bar{\alpha}_s \mathcal{N}^2
 \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

Deve-se primeiramente introduzir a notação

$$\omega = \chi \left(\frac{1}{2} \right), \quad D = \chi''(1/2) \tag{A.0.2}$$

e definir

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8 \frac{\omega}{D}}. \tag{A.0.3}$$

Efetuada a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} (1 - \bar{\gamma})^2 Y, \quad x = (1 - \bar{\gamma}) \left(L + \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} Y \right) \\
 u(t, x) &= \frac{2}{D(1 - \bar{\gamma})^2} \mathcal{N} \left(\frac{2t}{\bar{\alpha}_s D (1 - \bar{\gamma})^2}, \frac{x}{1 - \bar{\gamma}} - \frac{t}{(1 - \bar{\gamma})^2} \right),
 \end{aligned} \tag{A.0.4}$$

é possível chegar à equação FKPP para a função $u(t, x)$.

Primeiramente, temos, na nova notação,

$$\partial_Y \mathcal{N} = \bar{\alpha}_s \chi \left(\frac{1}{2} \right) \mathcal{N} + \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} \partial_L^2 \mathcal{N} + \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} \partial_L \mathcal{N} + \frac{\bar{\alpha}_s D}{8} \mathcal{N} - \bar{\alpha}_s \mathcal{N}^2 \quad (\text{A.0.5})$$

Consideremos termo a termo da equação acima. A derivada no lado esquerdo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \partial_Y \mathcal{N} &= (\partial_t \mathcal{N}) \frac{\partial t}{\partial Y} + (\partial_x \mathcal{N}) \frac{\partial x}{\partial Y} \\ &= \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} (1 - \bar{\gamma})^2 \partial_t \left(\frac{D(1 - \bar{\gamma})^2}{2} u(t, x) \right) \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} (1 - \bar{\gamma}) + \partial_x \left(\frac{D(1 - \bar{\gamma})^2}{2} u(t, x) \right) \\ \therefore \partial_Y \mathcal{N} &= \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1 - \bar{\gamma})^4}{4} \partial_t u(t, x) + \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1 - \bar{\gamma})^3}{4} \partial_x u(t, x) \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

O primeiro termo do segundo membro:

$$\bar{\alpha}_s \omega \mathcal{N} = \bar{\alpha}_s \omega \frac{D(1 - \bar{\gamma})^2}{2} u(t, x) \quad (\text{A.0.7})$$

O segundo termo:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} \partial_L^2 \mathcal{N} &= \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} \partial_L (\partial_L \mathcal{N}) \\ &= \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} \partial_L \left[(\partial_x \mathcal{N}) \frac{\partial x}{\partial L} \right] \\ &= \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} \partial_L [(\partial_x \mathcal{N})(1 - \bar{\gamma})] \\ &= \bar{\alpha}_s \frac{D(1 - \bar{\gamma})}{2} \partial_L (\partial_x \mathcal{N}) \\ &= \bar{\alpha}_s \frac{D(1 - \bar{\gamma})^2}{2} \partial_x^2 \mathcal{N} \\ &= \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1 - \bar{\gamma})^4}{4} \partial_x^2 u(t, x) \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

O terceiro termo do segundo membro:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha}_s D}{2} \partial_L \mathcal{N} &= \bar{\alpha}_s \frac{D(1 - \bar{\gamma})}{2} \partial_x \mathcal{N} \\ &= \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1 - \bar{\gamma})^3}{4} \partial_x u(t, x) \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

O quarto termo:

$$\frac{\bar{\alpha}_s D}{8} = \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1 - \bar{\gamma})^2}{16} u(t, x) \quad (\text{A.0.10})$$

Por fim, o quinto termo:

$$-\bar{\alpha}_s \mathcal{N}^2 = -\bar{\alpha}_s \frac{D^2(1-\bar{\gamma})^4}{4} u^2(t, x) \quad (\text{A.0.11})$$

Reunindo todos os termos

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1-\bar{\gamma})^4}{4} \partial_t u(t, x) + \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1-\bar{\gamma})^3}{4} \partial_x u(t, x) = \\ & \bar{\alpha}_s \omega \frac{D(1-\bar{\gamma})^2}{2} u(t, x) + \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1-\bar{\gamma})^4}{4} \partial_x^2 u(t, x) + \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1-\bar{\gamma})^3}{4} \partial_x u(t, x) \\ & + \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1-\bar{\gamma})^2}{16} u(t, x) - \bar{\alpha}_s \frac{D^2(1-\bar{\gamma})^4}{4} u^2(t, x) \end{aligned} \quad (\text{A.0.12})$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{4}{\bar{\alpha}_s D^2(1-\bar{\gamma})^4}$,

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, x) + \frac{1}{1-\bar{\gamma}} \partial_x u(t, x) = \frac{2\omega}{D(1-\bar{\gamma})^2} u(t, x) + \partial_x^2 u(t, x) \\ & + \frac{1}{1-\bar{\gamma}} \partial_x u(t, x) + \frac{1}{4(1-\bar{\gamma})^2} u(t, x) - u^2(t, x) \\ & \therefore \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - u^2(t, x) + \frac{8\omega + D}{4D(1-\bar{\gamma})^2} u(t, x) \\ & \therefore \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - u^2(t, x) + \frac{\frac{8\omega}{D} + 1}{4(1-\bar{\gamma})^2} u(t, x) \\ & \therefore \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) - u^2(t, x) + u(t, x) \\ & \therefore \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + u(t, x)(1 - u(t, x)), \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

que é a equação FKPP para $u(t, x)$.

Apêndice B

A função de estrutura F_2 no espaço de momentum

Neste Apêndice, explicitamos os cálculos que levam à expressão (4.3.22) para a função de estrutura F_2 do próton, ou seja,

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 \tilde{T}(k, Y)$$

onde

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 &= \sum_q \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{4\bar{Q}_q^2 + k^2} \right)^2 e_q^2 \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{asinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} \right. \\ &\left. \left. - \frac{k^4 + 2k^2\bar{Q}_q^2 + 4\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{asinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

e

$$\bar{Q}_q^2 = z(1-z)Q^2 + m_q^2. \quad (\text{B.0.1})$$

Revisando as fórmulas necessárias, temos primeiramente que a função de estrutura F_2 é dada por

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} [\sigma_T^{\gamma^* p} + \sigma_L^{\gamma^* p}] \quad (\text{B.0.2})$$

onde $\sigma_T^{\gamma^* p}(x, Q^2)$ ($\sigma_L^{\gamma^* p}(x, Q^2)$) são as seções de choque para o espalhamento de um fóton virtual transversal (longitudinal) e o próton, dadas por

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(Q^2, Y) = \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{dip}^{\gamma^* p}(r, Y), \quad (\text{B.0.3})$$

onde $\sigma_{dip}^{\gamma^*p}(r, Y)$ é a seção de choque dipolo-próton, que, considerando independência do parâmetro de impacto, é proporcional à amplitude de espalhamento $T(r, Y)$ através da relação

$$\sigma_{dip}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 T(r, Y),$$

onde R_p^2 é o raio do próton. $\Psi_{T,L}(z, r)$ são as funções de onda que descrevem o fóton virtual que se divide em um par $q\bar{q}$, cujas formas explícitas são

$$|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 = \frac{2N_c\alpha_{em}}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (\text{B.0.4})$$

$$|\Psi_L(r, z; Q^2)|^2 = \frac{2N_c\alpha_{em}}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \}. \quad (\text{B.0.5})$$

Aqui, m_q denota as massas dos quarks e K_0 e K_1 são funções de McDonald de ordem zero e um, respectivamente. Usando as expressões acima, a função de estrutura é dada, no espaço de coordenadas, por

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz \{ |\Psi_T(z, r)|^2 + |\Psi_L(z, r)|^2 \} T(r, Y). \quad (\text{B.0.6})$$

A fim de simplificar a notação, escrevemos o termo que contém as funções de onda como

$$\Phi(r, z) = \Phi_T(r, z) + \Phi_L(r, z), \quad (\text{B.0.7})$$

onde

$$\Phi_{T,L}(r, z) = |\Psi_{T,L}(r, z)|^2. \quad (\text{B.0.8})$$

Assim, podemos escrever

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz \Phi(r, z) T(r, Y). \quad (\text{B.0.9})$$

Agora, realizamos a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} T(r, Y) &= r^2 \int \frac{d^2k}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{T}(k, Y) \\ &= r^2 \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{T}(k, Y). \end{aligned} \quad (\text{B.0.10})$$

A transformação inversa é

$$\begin{aligned} T(k, Y) &= \int \frac{d^2 r}{2\pi r^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) \\ &= \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y). \end{aligned} \quad (\text{B.0.11})$$

O mesmo pode ser feito para $\Phi(r, z)$. Escrevemos

$$\Phi(r, z) = \frac{1}{r^2} \int d^2 k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\Phi}(k, z) \quad (\text{B.0.12})$$

e sua inversa é facilmente obtida:

$$\tilde{\Phi}(k, z) = \int \frac{d^2 r}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} r^2 \Phi(r, z). \quad (\text{B.0.13})$$

Usando (B.0.10) e (B.0.12) em (B.0.9), obtemos

$$\begin{aligned} F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int d^2 r \int_0^1 dz \frac{1}{r^2} \int d^2 k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\Phi}(k, z) \times r^2 \int \frac{d^2 k'}{2\pi} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \tilde{T}(k', Y) \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \int \frac{d^2 k'}{2\pi} \tilde{\Phi}(k, z) \tilde{T}(k', Y) \int d^2 r e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \int \frac{d^2 k'}{2\pi} \tilde{\Phi}(k, z) \tilde{T}(k', Y) (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \tilde{\Phi}(k, z) \tilde{T}(k, Y) \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \int \frac{d^2 r}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} r^2 \Phi(r, z) \tilde{T}(k, Y) \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \int d^2 r r^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi(r, z) \tilde{T}(k, Y) \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \tilde{T}(k, Y) \int d^2 r r^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi(r, z) \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \tilde{T}(k, Y) \int_0^\infty dr r^3 \int_0^{2\pi} d\theta e^{irk \cos\theta} \Phi(r, z) \\ &= \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2 k \tilde{T}(k, Y) \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \Phi(r, z) \end{aligned} \quad (\text{B.0.14})$$

e portanto

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \left[\int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \Phi(r, z) \right] \tilde{T}(k, Y) \quad (\text{B.0.15})$$

Usando (B.0.7), (B.0.8) e as formas explícitas para as funções de onda, temos

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \cdot \frac{2N_c \alpha_{em}}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \\
 &\times \left\{ \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \right. \\
 &+ \left. \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) [4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r)] \right\} \tilde{T}(k, Y) \\
 &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \\
 &\times \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_1^2(\bar{Q}_q r) \right. \\
 &+ \left. [4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_0^2(\bar{Q}_q r) \right\} \tilde{T}(k, Y) \\
 &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 \Omega_1 \\
 &+ [4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \Omega_2 \} \tilde{T}(k, Y). \tag{B.0.16}
 \end{aligned}$$

Aqui,

$$\Omega_1 \equiv \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_1^2(\bar{Q}_q r) \tag{B.0.17}$$

e

$$\Omega_2 \equiv \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_0^2(\bar{Q}_q r) \tag{B.0.18}$$

Obviamente, para obtermos as formas explícitas para Ω_1 e Ω_2 , devemos realizar as integrações em r . Estas podem ser feitas usando *Mathematica* e os resultados são

$$\Omega_1 = \frac{2}{3\bar{Q}_q^4} {}_2F_1 \left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) \tag{B.0.19}$$

e

$$\Omega_2 = \frac{1}{15\bar{Q}_q^6} \left\{ 5\bar{Q}_q^2 {}_2F_1 \left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) - 2k^2 {}_2F_1 \left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) \right\} \tag{B.0.20}$$

onde ${}_2F_1$ é uma função hipergeométrica. A função de estrutura toma a forma

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \\
 &\times \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \frac{2}{3\bar{Q}_q^2} {}_2F_1 \left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) \right. \\
 &+ [4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \frac{1}{15\bar{Q}_q^6} \left[5\bar{Q}_q^2 {}_2F_1 \left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) \right. \\
 &\left. \left. - 2k^2 {}_2F_1 \left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) \right] \right\} \tilde{T}(k, Y) \tag{B.0.21}
 \end{aligned}$$

As funções hipergeométricas podem ser simplificadas através das seguintes equações [105]:

$${}_2F_1 \left(2, 2; \frac{5}{2}; w \right) = \frac{3}{4w(1-w)} \left[1 - \frac{1-2w}{\sqrt{w(1-w)}} \arcsin(\sqrt{w}) \right], \tag{B.0.22}$$

$${}_2F_1 \left(2, 3; \frac{5}{2}; w \right) = \frac{3}{16w(1-w)^2} \left[1 + 2w - \frac{1-4w}{\sqrt{w(1-w)}} \arcsin(\sqrt{w}) \right], \tag{B.0.23}$$

$${}_2F_1 \left(3, 3; \frac{7}{2}; w \right) = \frac{15}{64w^2(1-w)^2} \left[\frac{3-8w+8w^2}{\sqrt{w(1-w)}} \arcsin(\sqrt{w}) - 3(1-2w) \right]. \tag{B.0.24}$$

Aplicaremos essas simplificações para obtermos Eq.(4.3.22). Primeiro, chamamos $a^2 = \bar{Q}_q^2$ para simplificar a notação. Assim,

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \frac{2}{3a^2} {}_2F_1 \left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4a^2} \right) \right. \\
 &+ [4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \frac{1}{15a^6} \left[5a^2 {}_2F_1 \left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4a^2} \right) \right. \\
 &\left. \left. - 2k^2 {}_2F_1 \left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4a^2} \right) \right] \right\} \tilde{T}(k, Y) \tag{B.0.25}
 \end{aligned}$$

Calcularemos termo a termo da expressão acima. Para isso, a relação $\arcsin(ix) = i \operatorname{arcsinh}(x)$

será útil. Iniciaremos com a função hipergeométrica do primeiro termo:

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4a^2}\right) &= \\
 &= \frac{3}{16\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right)\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)^2} \left[1 + 2\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right) - \frac{1 - 4\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right)\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)}} \arcsin\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4a^2}}\right) \right] \\
 &= \frac{-3}{\frac{16k^2}{4a^2}\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)^2} \left[1 - \frac{k^2}{2a^2} - \frac{1 + \frac{k^2}{a^2}}{i\sqrt{\frac{k^2}{4a^2}\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)}} \arcsin\left(i\frac{k}{2a}\right) \right] \\
 &= \frac{-3a^2}{4k^2\left(\frac{k^2+4a^2}{4a^2}\right)^2} \left[1 - \frac{k^2}{2a^2} - \frac{1 + \frac{k^2}{a^2}}{i\sqrt{\frac{k^2}{4a^2}\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)}} i \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) \right] \\
 &= \frac{3a^2}{\frac{4k^2}{16a^4}\left(k^2 + 4a^2\right)^2} \left[\frac{k^2 + a^2}{a^2\sqrt{\frac{k^2}{4a^2}\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 1 + \frac{k^2}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{48a^6}{4k^2\left(k^2 + 4a^2\right)^2} \left[\frac{k^2 + a^2}{\frac{a^2}{4a^2}\sqrt{k^2\left(k^2 + 4a^2\right)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) + \frac{k^2 - 2a^2}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{48a^6}{4k^2\left(k^2 + 4a^2\right)^2} \left[\frac{4(k^2 + a^2)}{\sqrt{k^2\left(k^2 + 4a^2\right)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) + \frac{k^2 - 2a^2}{2a^2} \right] \\
 \Rightarrow \frac{2}{3a^2} {}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4a^2}\right) &= \frac{16a^4}{2k^2\left(k^2 + 4a^2\right)^2} \left[\frac{4(k^2 + a^2)}{\sqrt{k^2\left(k^2 + 4a^2\right)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) + \frac{k^2 - 2a^2}{2a^2} \right] \\
 &\hspace{15em} \text{(B.0.26)}
 \end{aligned}$$

A primeira função hipergeométrica do segundo termo pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4a^2}\right) &= \\
 &= \frac{3}{4\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right)\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)} \left[1 - \frac{1 - 2\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right)\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)}} \arcsin\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4a^2}}\right) \right] \\
 &= \frac{-3a^2}{k^2\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)} \left[1 - \frac{1 + \frac{k^2}{2a^2}}{i\sqrt{\frac{k^2}{4a^2}\left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)}} i \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) \right] \\
 &= \frac{12a^4}{k^2(k^2 + 4a^2)} \left[\frac{k^2 + 2a^2}{\frac{2a^2}{4a^2}\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 1 \right] \\
 &= \frac{12a^4}{k^2(k^2 + 4a^2)} \left[\frac{2(k^2 + 2a^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 1 \right] \\
 \Rightarrow \frac{1}{15a^6} 5a^2 {}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4a^2}\right) &= \frac{4}{k^2(k^2 + 4a^2)} \left[\frac{2(k^2 + 2a^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 1 \right] \\
 &= \frac{4a^4}{a^4 k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \left[\frac{2(k^2 + 2a^2)(k^2 + 4a^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - (k^2 + 4a^2) \right] \\
 &= \frac{4a^4}{k^2(k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{2(k^2 + 2a^2)(k^2 + 4a^2)}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{k^2 + 4a^2}{a^2} \right] \\
 &= \frac{8a^4}{k^2(k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{(k^2 + 2a^2)(k^2 + 4a^2)}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{k^2 + 4a^2}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{8a^4}{k^2(k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{k^4 + 6a^2 k^2 + 8a^4}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{k^2 + 4a^2}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{8a^4}{2k^2(k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{2k^4 + 12a^2 k^2 + 16a^4}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{k^2 + 4a^2}{a^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{B.0.27}$$

A segunda função hipergeométrica do segundo termo é dada por:

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4a^2}\right) &= \\
 &= \frac{15}{64 \frac{k^4}{16a^4} \left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)^2} \left[\frac{3 - 8\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right) + 8\frac{k^4}{16a^4}}{\sqrt{\frac{k^2}{4a^2} \left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 3 \left[1 - 2\left(-\frac{k^2}{4a^2}\right)\right] \right] \\
 &= \frac{15a^4}{4k^4 \left(1 + \frac{k^2}{4a^2}\right)^2} \left[\frac{3 + \frac{2k^2}{a^2} + \frac{k^4}{2a^4}}{\frac{1}{4a^2} \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 3 \left(1 + \frac{k^2}{2a^2}\right) \right] \\
 &= \frac{15a^4}{\frac{4k^4}{16a^4} (k^2 + 4a^2)^2} \left[\frac{12a^2 + 8k^2 + \frac{2k^4}{a^2}}{\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 3 \left(1 + \frac{k^2}{2a^2}\right) \right] \\
 &= \frac{15a^8}{\frac{k^4}{4} (k^2 + 4a^2)^2} \left[\frac{12a^2 + 8k^2 + \frac{2k^4}{a^2}}{\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - 3 \left(\frac{k^2 + 2a^2}{2a^2}\right) \right] \\
 \Rightarrow \frac{2k^2}{15a^6} {}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4a^2}\right) &= \frac{8a^2}{k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \left[\frac{12a^2 + 8k^2 + \frac{2k^4}{a^2}}{\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 3 \left(\frac{k^2 + 2a^2}{2a^2}\right) \right] \\
 &= \frac{8a^2}{k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \left[\frac{12a^2 + 8k^2 + \frac{2k^4}{a^2}}{\sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{3k^2 + 6a^2}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{8a^2}{k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \left[\frac{12a^4 + 8a^2k^2 + 2k^4}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{3k^2 + 6a^2}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{8a^4}{k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{12a^4 + 8a^2k^2 + 2k^4}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{3k^2 + 6a^2}{2a^2} \right] \\
 &= \frac{8a^4}{2k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{24a^4 + 16a^2k^2 + 4k^4}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) - \frac{3k^2 + 6a^2}{a^2} \right]
 \end{aligned} \tag{B.0.28}$$

Subtraindo (B.0.28) de (B.0.27), obtemos

$$\begin{aligned}
 &\frac{8a^4}{2k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{2k^2 + 2a^2}{a^2} - \frac{8a^4 + 4a^2k^2 + 2k^4}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) \right] \\
 &= \frac{16a^4}{2k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \frac{1}{a^2} \left[\frac{k^2 + a^2}{a^2} - \frac{4a^4 + 2a^2k^2 + k^4}{a^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2a}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{B.0.29}$$

A função de estrutura toma a forma

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \frac{16a^4}{2k^2 (k^2 + 4a^2)^2} \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
 &\times \left[\frac{4(k^2 + a^2)}{\sqrt{k^2 (k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2a} \right) + \frac{k^2 - 2a^2}{2a^2} \right] \\
 &\left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{a^2} \left[\frac{k^2 + a^2}{a^2} - \frac{4a^4 + 2a^2 k^2 + k^4}{a^2 \sqrt{k^2 (k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2a} \right) \right] \right\} \tilde{T}(k, Y)
 \end{aligned} \tag{B.0.30}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \left(\frac{4a^2}{k^2 + 4a^2} \right)^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
 &\times \left[\frac{4(k^2 + a^2)}{\sqrt{k^2 (k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2a} \right) + \frac{k^2 - 2a^2}{2a^2} \right] \\
 &\left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{a^2} \left[\frac{k^2 + a^2}{a^2} - \frac{4a^4 + 2a^2 k^2 + k^4}{a^2 \sqrt{k^2 (k^2 + 4a^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2a} \right) \right] \right\} \tilde{T}(k, Y)
 \end{aligned} \tag{B.0.31}$$

Na notação original, obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
 &\times \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \\
 &\left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{4\bar{Q}_q^4 + 2\bar{Q}_q^2 k^2 + k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\} \tilde{T}(k, Y)
 \end{aligned} \tag{B.0.32}$$

que é exatamente a Eq.(4.3.22).

Apêndice C

Evolução de observáveis no modelo unidimensional para a QCD

Aqui, explicitaremos os cálculos necessários para a obtenção da evolução de observáveis no formalismo do modelo unidimensional para a QCD em altas energias, descrito no Capítulo 5, mais especificamente a evolução das densidades de partículas e das amplitudes de espalhamento.

Primeiramente, obteremos a equação de evolução (5.2.17), para o valor médio de um observável \mathcal{O} arbitrário. Para isso, partimos da Eq.(5.2.16),

$$\langle \mathcal{O} \rangle_Y = \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \mathcal{O}(\{n\}). \quad (\text{C.0.1})$$

Derivando-a em relação a Y , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathcal{O} \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} \frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} \mathcal{O}(\{n\}) \\ &= \sum_{\{n\}} \sum_i [f_i(\dots, n_i - 1, \dots) P(\dots, n_i - 1, \dots, Y) - f_i(\{n\}) P(\{n\}, Y)] \mathcal{O}(\{n\}), \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

onde usamos a equação (5.1.4). Fazendo $n_i \rightarrow n_i + 1$ para o primeiro termos entre colchetes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathcal{O} \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} \sum_i f_i(\{n\}) P(\{n\}, Y) [\mathcal{O}(\dots, n_i + 1, \dots) - \mathcal{O}(\{n\})] \\ &= \sum_i \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) f_i(\{n\}) [\mathcal{O}(\dots, n_i + 1, \dots) - \mathcal{O}(\{n\})] \\ &= \sum_i \langle f_i(\{n\}) [\mathcal{O}(\dots, n_i + 1, \dots) - \mathcal{O}(\{n\})] \rangle_Y. \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

C.1 Densidades de partículas

Para obtermos a evolução das densidades de partículas, podemos usar Eq.(5.2.17) diretamente, mas aqui efetuaremos um cálculo mais detalhado e claro, para fins de aprendizado. Primeiramente, consideremos o número médio de ocupação no sítio i . Substituindo $\mathcal{O} = n_i$ em (5.2.16), temos

$$\langle n_i \rangle_Y = \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) n_i \quad (\text{C.1.4})$$

A evolução em Y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle n_i \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} \frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} n_i \\ &= \sum_{\{n\}} \sum_j [f_j(\dots, n_j - 1, \dots) P(\dots, n_j - 1, \dots, Y) - f_j(\{n\}) P(\{n\}, Y)] n_i, \end{aligned} \quad (\text{C.1.5})$$

Fazemos, na soma sobre todas as configurações, $n_k \rightarrow n_k + 1$ para todo k . Para todos os termos da soma em j , as contribuições dos termos de ganho e perda se cancelam, exceto para o caso quando $j = i$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle n_i \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) f_i(\{n\}) (n_i + 1 - n_i) \\ &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) f_i(\{n\}) \\ &= \langle f_i(\{n\}) \rangle_Y, \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

que é exatamente Eq.(5.2.18).

Para o número médio de ocupação de 2 corpos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle n_{ij}^{(2)} \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} \frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} n_i (n_j - \delta_{ij}) \\
 &= \sum_{\{n\}} \sum_k [f_k(\dots, n_k - 1, \dots) P(\dots, n_k - 1, \dots, Y) \\
 &\quad - f_k(\{n\}) P(\{n\}, Y)] n_i (n_j - \delta_{ij}), \\
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) [f_i(\{n\}) (n_i + 1) (n_j - \delta_{ij}) - f_i(\{n\}) n_i (n_j - \delta_{ij}) \\
 &\quad + f_j(\{n\}) n_i (n_j + 1 - \delta_{ij}) - f_j(\{n\}) n_i (n_j - \delta_{ij})] \tag{C.1.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \left\{ f_i(\{n\}) [n_i n_j - \delta_{ij} + n_j - n_i n_j + \delta_{ij}] \right. \\
 &\quad \left. + f_j(\{n\}) [n_i n_j + n_i - n_i \delta_{ij} - n_i n_j + n_i \delta_{ij}] \right\} \\
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) [f_i(\{n\}) n_j + f_j(\{n\}) n_i] \\
 \frac{\partial \langle n_{ij}^{(2)} \rangle_Y}{\partial Y} &= \langle f_i(\{n\}) n_j + f_j(\{n\}) n_i \rangle_Y \tag{C.1.8}
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos, finalmente, para o número médio de ocupação de k corpos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle n_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} \sum_j \left[f_j(\dots, n_j - 1, \dots) P(\dots, n_j - 1, \dots, Y) - f_j(\{n\}) P(\{n\}, Y) \right] \\
 &\quad \times n_{i_1} (n_{i_2} - \delta_{i_1 i_2}) (n_{i_3} - \delta_{i_1 i_3} - \delta_{i_2 i_3}) \cdots \times (n_{i_k} - \delta_{i_1 i_k} - \dots - \delta_{i_{k-1} i_k}) \\
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \left\{ f_{i_1}(\{n\}) (n_{i_2} - \delta_{i_1 i_2}) \cdots (n_{i_k} - \delta_{i_1 i_k} - \dots - \delta_{i_{k-1} i_k}) \right. \\
 &\quad + f_{i_2}(\{n\}) n_{i_1} (n_{i_3} - \delta_{i_1 i_3} - \delta_{i_2 i_3}) \cdots (n_{i_k} - \delta_{i_1 i_k} - \dots - \delta_{i_{k-1} i_k}) \\
 &\quad \left. + f_k(\{n\}) n_{i_1} (n_{i_2} - \delta_{i_1 i_2}) \cdots \times (n_{i_{k-1}} - \delta_{i_1 i_{k-1}} - \dots - \delta_{i_{k-2} i_{k-1}}) \right\} \\
 \frac{\partial \langle n_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{j=1}^k \langle f_{i_j}(\{n\}) n_{i_1 i_2 i_j \dots i_k}^{(k-1)} \rangle_Y, \tag{C.1.9}
 \end{aligned}$$

que é exatamente Eq.(5.2.22)

C.2 Amplitudes de Espalhamento

Como vimos, a matriz S que descreve o espalhamento no qual o projétil consiste em uma única partícula no sítio i é

$$s_i(\{n\}) = \prod_{jk} \sigma_{jk}^{n_j \delta_{ki}} = \prod_k \left(\prod_j \sigma_{jk}^{n_j} \right)^{\delta_{ki}} = \prod_j \sigma_{ji}^{n_j} \tag{C.2.10}$$

e o seu valor médio é

$$\langle s_i(\{n\}) \rangle_Y = \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \prod_k \sigma_{ki}^{n_k}. \tag{C.2.11}$$

Sua equação de evolução:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle s_i \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} \frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} \prod_k \sigma_{ki}^{n_k} \\
 &= \sum_{\{n\}} \sum_j \left[f_j(\dots, n_j - 1, \dots) P(\dots, n_j - 1, \dots, Y) - f_j(\{n\}) P(\{n\}, Y) \right] \\
 &\quad \times \prod_k \sigma_{ki}^{n_k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \sum_j f_j(\{n\}) [\sigma_{ij} - 1] \prod_k \sigma_{ki}^{n_k} \\
 &= \frac{\Delta}{\tau} \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \sum_j \left[1 - \prod_u \sigma_{ju}^{n_u} \right] [\sigma_{ij} - 1] \prod_k \sigma_{ki}^{n_k} \\
 &= \frac{\Delta}{\tau} \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \sum_j [s_j - 1] [1 - \sigma_{ij}] s_i \\
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \sum_j \frac{(1 - \sigma_{ij})\Delta}{\tau} (s_i s_j - s_i) \\
 \frac{\partial \langle s_i \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_j \frac{\Delta(1 - \sigma_{ij})}{\tau} \langle s_i s_j - s_i \rangle_Y. \tag{C.2.12}
 \end{aligned}$$

Para um projétil composto por m partículas, a matriz S é

$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} = \prod_{j_1} \sigma_{i_1 j_1}^{n_{j_1}} \times \cdots \times \prod_{j_m} \sigma_{i_m j_m}^{n_{j_m}} = \prod_j (\sigma_{i_1 j} \times \cdots \times \sigma_{i_m j})^{n_j} \tag{C.2.13}$$

e seu valor médio

$$\langle s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \rangle_Y = \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \prod_j (\sigma_{i_1 j} \times \cdots \times \sigma_{i_m j})^{n_j} \tag{C.2.14}$$

Derivando em relação a Y , obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_{\{n\}} \sum_k [f_k(\dots, n_k - 1, \dots) P(\dots, n_k - 1, \dots, Y) \\
 &\quad - f_k(\{n\}) P(\{n\}, Y)] \prod_j (\sigma_{i_1 j} \times \cdots \times \sigma_{i_m j})^{n_j} \\
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \sum_k f_k(\{n\}) [\sigma_{i_1 k} \times \cdots \times \sigma_{i_m k} - 1] \\
 &\quad \times \prod_j (\sigma_{i_1 j} \times \cdots \times \sigma_{i_m j})^{n_j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \sum_k \frac{\Delta}{\tau} \left(1 - \prod_u \sigma_{ku}^{n_u} \right) [\sigma_{i_1 k} \times \cdots \times \sigma_{i_m k} - 1] \\
 &\quad \times \prod_j (\sigma_{i_1 j} \times \cdots \times \sigma_{i_m j})^{n_j} \\
 &= \sum_{\{n\}} P(\{n\}, Y) \sum_k \frac{\Delta}{\tau} (1 - \sigma_{i_1 k} \times \cdots \times \sigma_{i_m k}) \\
 &\quad \times [s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} s_k - s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}] \\
 &= \sum_k \frac{\Delta}{\tau} (1 - \sigma_{i_1 k} \times \cdots \times \sigma_{i_m k}) \langle s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} s_k - s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \rangle_Y \\
 &= \sum_j \frac{\Delta}{\tau} \left(1 - \prod_{k=1}^m \sigma_{i_k j} \right) \langle s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} s_k - s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \rangle_Y \\
 \frac{\partial \langle s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \rangle_Y}{\partial Y} &= \sum_j f_j(\{m\}) \langle s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} s_k - s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \rangle_Y, \tag{C.2.15}
 \end{aligned}$$

que é exatamente a Eq.(5.3.31).

Tomando o limite contínuo, as equações de evolução para projéteis compostos por uma e duas partículas tomam as formas dadas pelas Eqs.(5.3.33) e (5.3.34), respectivamente:

$$\frac{\partial \langle s_x \rangle}{\partial Y} = \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle s_x s_z - s_x \rangle, \tag{C.2.16}$$

e

$$\frac{\partial \langle s_x s_y \rangle}{\partial Y} = \int_z \frac{\tau_{xz} + \tau_{zy} - \tau_{xz} \tau_{zy}}{\tau} \langle s_x s_y s_z - s_x s_y \rangle. \tag{C.2.17}$$

Desejamos obter essas equações em termos das amplitudes de espalhamento, ou seja, as Eqs.(5.3.36) e (5.3.37). Para isso, tomemos a primeira equação acima. Substituindo $s = 1 - t$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle 1 - t_x \rangle}{\partial Y} &= \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle (1 - t_x)(1 - t_z) - (1 - t_x) \rangle, \\
 -\frac{\partial \langle t_x \rangle}{\partial Y} &= \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle 1 - t_z - t_x + t_x t_z - 1 + t_x \rangle, \\
 \frac{\partial \langle t_x \rangle}{\partial Y} &= \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle t_z - t_x t_z \rangle. \tag{C.2.18}
 \end{aligned}$$

Para obtermos a equação para $\langle tt \rangle$, procedemos de maneira similar:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle (1-t_x)(1-t_y) \rangle}{\partial Y} &= \int_z \frac{\tau_{xz} + \tau_{zy} - \tau_{xz}\tau_{zy}}{\tau} \\
 &\quad \times \langle (1-t_x)(1-t_y)(1-t_z) - (1-t_x)(1-t_y) \rangle \\
 \frac{\partial \langle t_x t_y \rangle}{\partial Y} &= \frac{\partial \langle t_x \rangle}{\partial Y} + \frac{\partial \langle t_y \rangle}{\partial Y} \int_z \frac{\tau_{xz} + \tau_{zy} - \tau_{xz}\tau_{zy}}{\tau} \\
 &\quad \times \langle (1+t_x t_y - t_x - t_y)(1-t_z) - 1 + t_x + t_y - t_x t_y \rangle \\
 &= \int_z \left[\frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle t_z - t_x t_z \rangle + \frac{\tau_{yz}}{\tau} \langle t_z - t_y t_z \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau_{xz} + \tau_{zy} - \tau_{xz}\tau_{zy}}{\tau} \langle 1 - t_z + t_x t_y - t_x t_y t_z - t_x \right. \\
 &\quad \left. + t_x t_z - t_y + t_y t_z - 1 + t_x + t_y - t_x t_y \rangle \right] \\
 &= \int_z \left[\frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle t_z - t_x t_z \rangle + \frac{\tau_{yz}}{\tau} \langle t_z - t_y t_z \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau_{xz} + \tau_{zy} - \tau_{xz}\tau_{zy}}{\tau} \langle -t_z - t_x t_y t_z + t_x t_z + t_y t_z \rangle \right] \quad (C.2.19)
 \end{aligned}$$

Reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle t_x t_y \rangle}{\partial Y} &= \int_z \left[\frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle t_y t_z - t_x t_y t_z \rangle + \frac{\tau_{yz}}{\tau} \langle t_x t_z - t_x t_y t_z \rangle \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \langle t_x t_z + t_y t_z - t_z - t_x t_y t_z \rangle \right] \quad (C.2.20)
 \end{aligned}$$

O terceiro termo do integrando pode ser reescrito:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \langle t_x t_z + t_y t_z - t_z - t_x t_y t_z \rangle &= -\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \langle t_z(t_x + t_y - 1 - t_x t_y) \rangle \\
 &= -\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \langle t_z[t_x(1-t_y) - (1-t_y)] \rangle \\
 &= -\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \langle t_z(t_x - 1)(1-t_y) \rangle \\
 &= +\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau} \langle t_z(1-t_x)(1-t_y) \rangle \quad (C.2.21)
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle t_x t_y \rangle}{\partial Y} = & \int_z \left[\frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle t_y (t_z - t_x t_z) \rangle + \frac{\tau_{yz}}{\tau} \langle t_x (t_z - t_y t_z) \rangle \right. \\ & \left. + \frac{\tau_{xz} \tau_{yz}}{\tau} \langle t_z (1 - t_x)(1 - t_y) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2.22})$$

Bibliografia

- [1] H1 collaboration, C. Adloff *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C21**, 33 (2001).
- [2] ZEUS Collaboration, J. Breitweg *et al.*, *Phys. Lett.* **B487**, 273 (2000).
- [3] ZEUS Collaboration, S. Chekanov *et al.*, *Eur. Phys. J.* **B21**, 443 (2001).
- [4] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, *Sov. Journ. Nucl. Phys.* **15** (1972), 438.
- [5] G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B126** (1977), 298.
- [6] Yu. L. Dokshitzer, *Sov. Phys. JETP* **46** (1977), 641.
- [7] L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** (1976) 338.
- [8] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov and V.S. Fadin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **72**, 3 (1977) (*Sov. Phys. JETP* **45** (1977) 199).
- [9] Ya.Ya. Balitsky and L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822.
- [10] L.V. Gribov, E.M. Levin, and M.G. Ryskin, *Phys. Rept.* **100** (1983) 1.
- [11] A.H. Mueller and J. Qiu, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 427.
- [12] A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B335** (1990) 115.
- [13] A. L. Ayala, M. B. Gay Ducati and E. M. Levin, *Nucl. Phys.* **B493**, 305 (1997).
- [14] A. L. Ayala, M. B. Gay Ducati and E. M. Levin, *Nucl. Phys.* **B551**, 335 (1998).
- [15] A. L. Ayala, M. B. Gay Ducati and E. M. Levin; *Phys. Lett.* **B388**, 188 (1996).
- [16] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, *Nucl. Phys.* **B504** (1997) 415.
- [17] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014014.

-
- [18] J. Jalilian-Marian, A. Kovner and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014015.
- [19] A. Kovner, J. G. Milhano and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 114005.
- [20] E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A692** (2001) 583.
- [21] E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, *Phys. Lett.* **B510** (2001) 133.
- [22] E. Ferreira, E. Iancu, A. Leonidov and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A703** (2002) 489.
- [23] E. Iancu and L. McLerran, *Phys. Lett.* **B510** (2001) 145.
- [24] H. Weigert, *Nucl. Phys.* **A703** (2002) 823.
- [25] I. Balitsky, *Nucl. Phys.* **B463** (1996) 99.
- [26] I. Balitsky, *Phys. Lett.* **B518** (2001) 235.
- [27] I. Balitsky, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2024.
- [28] Yu.V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D60** (1999), 034008.
- [29] Yu.V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D61** (1999), 074018.
- [30] S. Munier and R. Peschanski, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 232001.
- [31] S. Munier and R. Peschanski, *Phys. Rev.* **D69** (2004) 034008.
- [32] S. Munier and R. Peschanski, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 077503.
- [33] R.A. Fisher, *Ann. Eugenics* **7** (1937) 355; A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskounov, *Moscou Univ. Bull. Math.* **A1** (1937) 1.
- [34] V. P. Gonçalves and M. V. T. Machado, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 202002 (2003).
- [35] A.M. Stasto, K. Golec-Biernat and J. Kwiecinski, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 596.
- [36] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, (Springer series in synergetics), Springer, Berlin, 2004.
- [37] W. Van Saarloos, *Phys. Rep.* **386** (2003) 29.
- [38] E. Iancu and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A756** (2005) 419.
- [39] A.H. Mueller, A.I. Shoshi, S.M.H. Wong, *Nucl. Phys.* **B715** (2005) 440.
- [40] E. Iancu and D.N. Triantafyllopoulos, *Phys. Lett.* **B610** (2005) 253.

- [41] E. Levin and M. Lublinsky, *Nucl. Phys.* **A763** (2005) 172.
- [42] P. Rembiesa and A.M. Stasto, *Nucl. Phys.* **B725** (2005) 251.
- [43] A. Kovner and M. Lublinsky, *Nucl. Phys.* **A767** (2006) 171.
- [44] A. I. Shoshi and B.-W. Xiao, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 094014.
- [45] M. Kozlov and E. Levin, *Nucl. Phys.* **A779** (2006) 142.
- [46] J.-P. Blaizot, E. Iancu, D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A784**, 227 (2007).
- [47] E. Iancu, J. T. de Santana Amaral, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A786**, 131 (2007).
- [48] V. Baronne and E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction*, Springer-Verlag (2002).
- [49] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **179**, 1547 (1969).
- [50] J. D. Bjorken and E. E. Paschos, *Phys. Rev.* **185**, 1975 (1969).
- [51] R. Feynman, *Photon-Hadron Interactions*, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972.
- [52] C. G. Callan, D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.*, **22** 156 (1969).
- [53] J.I. Friedman and H. W. Kendall, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **22**, 203 (1972).
- [54] ZEUS Collaboration, S. Chekanov *et al.*, *Phys. Rev. D* **67**, 012007 (2003).
- [55] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B415** (1994) 373.
- [56] A.H. Mueller, B. Patel, *Nucl. Phys.* **B425** (1994) 471.
- [57] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 107.
- [58] J. Jalilian-Marian, A. Kovner and H. Weigert, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014015.
- [59] I. Balitsky, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 014020.
- [60] G. Soyez, *Acta Phys. Polon.* **B37**, 3477 (2006).
- [61] E. Iancu and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **A730** (2004) 494.
- [62] A.H. Mueller and A.I. Shoshi, *Nucl. Phys.* **B692** (2004) 175.
- [63] E. Iancu, A.H. Mueller and S. Munier, *Phys. Lett.* **B606** (2005) 342.

- [64] D. N. Triantafyllopoulos, *Acta Phys. Polon.* **B36**, 3593 (2005).
- [65] D. Panja, *Phys. Rep.* **393** (2004) 87.
- [66] E. Brunet and B. Derrida, *Phys. Rev.* **E56** (1997) 2597; *Comp. Phys. Comm.* **121-122** (1999) 376; *J. Stat. Phys.* **103** (2001) 269.
- [67] C. Mueller, R.B. Sowers, *J. Funct. Anal.* **128** (1995) 439.
- [68] C. Marquet, G. Soyez, Bo-Wen Xiao, *Phys. Lett.* **B639** (2006) 635.
- [69] A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B335**, 115 (1990).
- [70] N. N. Nikolaev and B. G. Zakharov, *Z. Phys.* **C49**, 607 (1991).
- [71] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014017.
- [72] K. Golec-Biernat and M. Wüsthoff, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 114023.
- [73] J. Bartels, K. Golec-Biernat, and H. Kowalski, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 014001.
- [74] K. Golec-Biernat and S. Sapeta, *Phys. Rev.* **D74**, 054032 (2006).
- [75] E. Iancu, K. Itakura and S. Munier, *Phys. Lett.* **B590** (2004) 199.
- [76] J. T. de Santana Amaral, M. A. Betemps, M. B. Gay Ducati and G. Soyez, *Phys. Rev. D* **76**, 094018 (2007).
- [77] J. R. Forshaw, G. Kerley and G. Shaw, *Phys. Rev.* **D60**, 074012 (1999).
- [78] J. R. Forshaw, G. R. Kerley and G. Shaw, *Nucl. Phys.* **A675**, 80C (2000).
- [79] J. R. Forshaw and G. Shaw, *JHEP* **0412**, 052 (2004).
- [80] M. McDermott, L. Frankfurt, V. Guzey and M. Strikman, *Eur. Phys. J.* **C16**, 641 (2000).
- [81] H. Kowalski, L. Motyka and G. Watt, *Phys. Rev.* **D74**, 074016 (2006).
- [82] E. Levin and K. Tuchin, *Nucl. Phys.* **B573** (2000) 833.
- [83] E. Levin and K. Tuchin, *Nucl. Phys.* **A691** (2001) 779.
- [84] E. Levin and K. Tuchin, *Nucl. Phys.* **A693** (2001) 787.
- [85] G. Soyez, *Phys. Lett.* **B655**, 32 (2007).

- [86] H1 collaboration, C. Adloff et al., *Phys. Lett.* **B528** 199 (2002).
- [87] H1 collaboration, A. Aktas et al., *Eur. Phys. J.* **C45** 23 (2006).
- [88] ZEUS collaboration, S. Chekanov et al., *Phys. Rev.* **D69** 012004 (2004).
- [89] M. A. Betemps and M. B. Gay Ducati, *Phys. Rev.* **D70**, 116005 (2004).
- [90] M. Kozlov, A. Shoshi and W. Xiang, *JHEP* **0710** (2007) 020 .
- [91] G. Soyez, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 016007.
- [92] A. Dumitru, E. Iancu, L. Portugal, G. Soyez and D. N. Triantafyllopoulos, *JHEP* **0708**, 062 (2007).
- [93] Yu.V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 034008; **D61** (1999) 074018.
- [94] E. Iancu and A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **A730** (2004) 460.
- [95] A. Kovner and M. Lublinsky, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 181603.
- [96] J.-P. Blaizot, E. Iancu, K. Itakura, and D.N. Triantafyllopoulos, *Phys. Lett.* **B615** (2005) 221.
- [97] Y. Hatta, E. Iancu, L. McLerran, A. Stasto, and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A764** (2006) 423.
- [98] I. Balitsky, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 074027.
- [99] A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B558** (1999) 285.
- [100] E. Iancu, K. Itakura, and L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A724** (2003) 181.
- [101] A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B643** (2002) 501.
- [102] E. Brunet, B. Derrida, A. H. Mueller and S. Munier, *Phys. Rev.* **E73** (2006) 056126.
- [103] Y. Hatta, E. Iancu, C. Marquet, G. Soyez, and D.N. Triantafyllopoulos, *Nucl. Phys.* **A773** (2006) 95.
- [104] E. Basso, M. B. Gay Ducati, E. G. de Oliveira, J. T. de Santana Amaral, *Eur. Phys. J.* **C58** (2008) 9.
- [105] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev, O. I. *Integrals and Series, Vol. 3: More Special Functions*, Gordon and Breach, New York, 1989.