

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS EM RELAÇÃO AO TEMPO EM
MANIPULADOR HIDRÁULICO

por

Gabriel de Borba Luche

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Julho de 2020

OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS EM RELAÇÃO AO TEMPO EM
MANIPULADOR HIDRÁULICO

por

Gabriel de Borba Luche
Especialista em Automação

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Processo de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Aprovada por:

Prof. Dr. Flávio José LoriniDEMEC / UFRGS

Profa. Dra. Leticia Fleck Fadel Miguel PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Rafael Crespo IzquierdoCETEC / UNIVATES

Prof. Dr. Victor Juliano De NegriPOSMEC/UFSC

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 24 de Julho de 2020

Ao meu avô,
Alfrino Lopes de Borba (*in memoriam*),
pela sua dedicação à minha criação
e carisma ímpar.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Larissa Russo Gonçalves, por tornar meus dias mais felizes.

Ao meu orientador, Eduardo André Perondi, pela confiança depositada e por todas as contribuições para este trabalho.

Aos meus colegas e amigos André Rambo Birck, Celso Luís Teixeira, Jusuan Lang Mór e Renan Roberto Benitz da Silva pelo apoio nesse período.

RESUMO

Este trabalho aborda uma estratégia de planejamento de trajetórias de tempo ótimo para um manipulador serial com atuadores hidráulicos lineares. A elaboração de trajetórias, permite acréscimo no desempenho de manipuladores robóticos a partir de um determinado critério, sendo utilizado neste trabalho o aspecto da redução do tempo de trajetória, enfoque que permite que o ciclo de trabalho do manipulador seja reduzido e, desta forma, aumente sua produtividade. O método utilizado baseia-se na premissa da aplicação em tarefas com caminhos previamente definidos no espaço de trabalho, os quais são mapeados no espaço de atuador para permitir a aplicação do algoritmo de planejamento de trajetória. As trajetórias obtidas possuem sua terceira derivada temporal contínua, requisito necessário devido às características dos controladores baseados em técnicas de dinâmica inversa, tipicamente utilizados em manipuladores com atuadores hidráulicos. As trajetórias elaboradas devem ser adequadas às características do manipulador focado, evitando regiões em que ultrapassem os seus limites físicos. Desta forma, a partir dos parâmetros do manipulador utilizado como base para o estudo, é proposta uma metodologia para obtenção dos limites máximos e mínimos de velocidade, aceleração, força e *jerk* das hastes dos seus atuadores. Para aplicação dessas restrições, assim como da garantia da continuidade do *jerk*, utiliza-se a transformação paramétrica do caminho predefinido juntamente com *splines* de terceira ordem que, juntamente com uso de relaxações do espaço de busca do problema de otimização, permite a utilização de métodos convexos que garantem a solução ótima global do problema. Para tal, é elaborado um problema de otimização discreto solucionado através do uso da ferramenta CVX e do *solver* SDPT3. São comparadas as trajetórias obtidas a partir de diferentes caminhos geométricos e diferentes valores limites das grandezas cinemática e dinâmicas, de modo a analisar a influências de restrições nas trajetórias obtidas. Os resultados alcançados indicam que a metodologia utilizada gera trajetórias ótimas com a continuidade desejada e adequadas aos limites operacionais do manipulador de enfoque.

Palavras-chave: Planejamento de trajetória; Manipulador hidráulico; Otimização convexa.

ABSTRACT

This work deal with time-optimal trajectory planning strategy for a serial manipulator with linear hydraulic actuators. An conception of trajectories, allows an increase in the performance of robotic manipulators based on a determined specification, with this work being used or the aspect of reducing trajectory time, an approach that allows reduce the manipulator's work cycle and increase his productivity. The method used is based on the premise of application in tasks with predefined paths applied in the workspace, which are the main ones mapped in the actuator space for the application of the planning algorithm. Generated trajectories have their third continuous time derivative, requirement necessary due to the characteristics of the controllers the use in inversion techniques, typically used in manipulators with hydraulic actuators. As the elaborated trajectories must be feasible with manipulator's particulars, avoid regions that exceed the physical limits. Thus, based on the particulars of the manipulator of focus, a methodology is proposed for maximum and minimum limits of speed, acceleration, force and jerk in the rods of its actuators. To apply these restrictions, such as jerk continuous guarantee, use a predefined parametric transformation of the path as defined with third-order splines that, using numeric relaxation for the space search for the optimization problem, allows the use of convex methods that guarantee an global optimal solution of the problem. For this, a discrete optimization problem is elaborated solved using the CVX tool and the SDPT3 solver. Trajectories obtained from different geometric path and constraints values of kinematic and dynamic quantities are also compared, in order to analyze the influences of these limits in the trajectories. The results shows that the methodology used generates optimal trajectories with the desired continuity and not exceeds the capacity limits of the focus manipulator, satisfying the objectives of this work.

Keywords: Trajectory planning; Hydraulic manipulator; Convex optimization.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Descrição do Problema	3
1.2	Objetivo Geral	4
1.3	Objetivos específicos	4
1.4	Organização do Trabalho	5
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1	Manipuladores Robóticos	6
2.2	Modelagem Matemática	6
2.2.1	Cinemática	7
2.2.2	Modelagem Dinâmica	10
2.2.3	Modelo dos atuadores hidráulicos lineares	12
2.2.4	Dinâmica de manipuladores com atuadores hidráulicos	19
2.3	Planejamento de Trajetórias	23
2.3.1	Trajetórias Polinomiais	27
2.3.2	Trajetórias a Partir de Segmentos Polinomiais	29
2.3.3	Splines	29
2.4	Otimização	33
2.4.1	Otimização Convexa	34
2.4.2	Otimização Aplicada ao Planejamento de Trajetórias	36
3	O ROBÔ HIDRÁULICO	44
3.1	Cinemática	45
3.2	Dinâmica	51
3.3	Parâmetros do Atuadores	54
3.4	Restrições cinemáticas e dinâmicas	54
4	PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA	59
4.1	Parametrização de Caminho	59

4.2	Problema de Otimização	61
4.3	Solução Numérica	64
4.4	Conclusão do Capítulo	70
5	RESULTADOS	71
5.1	Valores nominais de restrição	72
5.1.1	Caminho Geométrico 1	75
5.1.2	Caminho Geométrico 2	79
5.1.3	Caminho Geométrico 3	82
5.1.4	Resultados a Partir de Valores Nominais de Restrição	86
5.2	Restrições com Aumento de Pressão de Suprimento	86
5.3	Aumento do Limite de Velocidade	88
5.4	Redução do Limite de <i>Jerk</i>	88
5.5	Aumento do Limite de Velocidade e Redução do Limite de <i>Jerk</i>	90
5.6	Discussão sobre os resultados	91
6	CONCLUSÕES	92
6.1	Sugestões para Trabalho Futuros	93
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Desenho de um robô de juntas rotativas acionadas por atuadores lineares [Valdiero, 2005].	3
Figura 2.1	Subsistemas de um sistema robótico, [Adaptado de Siciliano et al., 2008].	6
Figura 2.2	Manipulador com 6 GDL com ferramenta simétrica [Adaptado de Craig, 2012].	8
Figura 2.3	Mapeamento da cinemática direta e inversa [Adaptado de Ceccarelli, 2011].	10
Figura 2.4	Sistema de um atuador hidráulico [Adaptado de Valdiero, 2005].	12
Figura 2.5	Diagrama de corpo livre de um atuador hidráulico [Adaptado de Valdiero, 2005].	17
Figura 2.6	Mapa de atrito - Coulomb, Estático e Viscoso.	18
Figura 2.7	Mapa de atrito - Combinação dos modelos <i>Stribeck</i> , Coulomb, Estático e Viscoso	19
Figura 2.8	Dependência entre as dinâmicas dos subsistemas hidráulicos e mecânicos [Valdiero, 2005].	20
Figura 2.9	Categorias Trajetórias. [Adaptado de Biagiotti e Melchiorri, 2008].	25
Figura 2.10	Representação de trajetórias classificadas como de aproximação e de interpolação. [Adaptado de Biagiotti e Melchiorri, 2008].	25
Figura 2.11	Trajetória multidimensional definida no espaço de trabalho de um robô industrial. [Biagiotti e Melchiorri, 2008].	26
Figura 2.12	Trajetória multiponto com funções lineares combinadas com funções parabólicas. Adaptado de [Craig, 2012].	30
Figura 2.13	Trajetória tipo <i>spline</i> para $n + 1$ pontos. Adaptado de [Biagiotti e Melchiorri, 2008].	31
Figura 2.14	Interpolação polinomial e <i>spline</i>	32
Figura 3.1	Desenho do manipulador robótico [Valdiero, 2005].	44
Figura 3.2	Vista lateral do manipulador robótico. [Valdiero, 2005].	45

Figura 3.3	Representação geométrica da transmissão entre junta rotativa e atuadores lineares. [Valdiero, 2005]	46
Figura 3.4	Plano de trabalho do robô hidráulico.	49
Figura 3.5	Exemplo de caminho geométrico no plano de trabalho.	49
Figura 3.6	Representação do caminho geométrico no espaço de junta.	50
Figura 3.7	Representação do caminho geométrico no espaço de atuador.	50
Figura 3.8	Resultado do processo de cinemática inversa e direta.	51
Figura 3.9	Massa Equivalente 1 em relação às posições dos atuadores.	56
Figura 3.10	Massa Equivalente 2 em relação às posições dos atuadores.	56
Figura 4.1	Sistema de um atuador hidráulico.	60
Figura 5.1	Caminho Geométrico 2 no espaço de trabalho.	72
Figura 5.2	Caminho Geométrico 3 no espaço de trabalho.	72
Figura 5.3	Curvas $\sqrt{b^k}$, c^k e $1/d^k$ para cada um dos exemplos de caminho geométrico.	74
Figura 5.4	Caminho Geométrico 1 - Posição original e obtida a partir da integral da Velocidade.	75
Figura 5.5	Caminho Geométrico 1 - Velocidade dos atuadores.	76
Figura 5.6	Caminho Geométrico 1 - Aceleração dos atuadores.	76
Figura 5.7	Caminho Geométrico 1 - <i>Jerk</i> dos atuadores.	77
Figura 5.8	Caminho Geométrico 1 - Força hidráulica dos atuadores.	77
Figura 5.9	Caminho Geométrico 1 - Decomposição do equilíbrio de forças.	78
Figura 5.10	Caminho Geométrico 1 - Caminho Geométrico original e obtido a partir da integral da velocidade.	78
Figura 5.11	Caminho Geométrico 2 - Posição original e obtida a partir da integral da velocidade.	79
Figura 5.12	Caminho Geométrico 2 - Velocidade dos atuadores.	79
Figura 5.13	Caminho Geométrico 2 - Aceleração dos atuadores.	80
Figura 5.14	Caminho Geométrico 2 - <i>Jerk</i> dos atuadores.	80
Figura 5.15	Caminho Geométrico 2 - Força hidráulica dos atuadores.	81
Figura 5.16	Caminho Geométrico 2 - Decomposição do equilíbrio de forças.	81

Figura 5.17 Caminho Geométrico 2 - Caminho Geométrico original e obtido a partir da integral da velocidade.	82
Figura 5.18 Caminho Geométrico 3 - Posição original e obtida a partir da integral da Velocidade.	82
Figura 5.19 Caminho Geométrico 3 - Velocidade dos atuadores.	83
Figura 5.20 Caminho Geométrico 3 - Aceleração dos atuadores.	83
Figura 5.21 Caminho Geométrico 3 - <i>Jerk</i> dos atuadores.	84
Figura 5.22 Caminho Geométrico 3 - Força hidráulica dos atuadores.	84
Figura 5.23 Caminho Geométrico 3 - Decomposição do equilíbrio de forças. . .	85
Figura 5.24 Caminho Geométrico 3 - Caminho Geométrico original e obtido a partir da integral da Velocidade.	85
Figura 5.25 Caminho Geométrico 1 - Jerk dos atuadores com redução para 10% do seu limite.	89
Figura 5.26 Caminho Geométrico 1 - Jerk dos atuadores com redução para 30% do seu limite.	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Parâmetros cinemáticos.	48
Tabela 3.2	Parâmetros inerciais da estrutura do manipulador.	53
Tabela 3.3	Parâmetros de atrito.	53
Tabela 3.4	Parâmetros do Atuador.	54
Tabela 5.1	Limites cinemáticos e dinâmicos do manipulador com atuadores lineares.	73
Tabela 5.2	Tempos de trajetória para cada um dos caminhos geométricos. . .	86
Tabela 5.3	Limites cinemáticos e dinâmicos do manipulador com atuadores lineares para pressão de suprimento de 60 <i>bar</i>	87
Tabela 5.4	Tempos de trajetória para aumento da pressão de suprimento. . .	87
Tabela 5.5	Tempos de trajetória para o caso de aumento da velocidade limite dos atuadores em 50%.	88
Tabela 5.6	Tempos de trajetória para redução da <i>jerk</i> limite dos atuadores. .	89
Tabela 5.7	Tempos de trajetória para aumento da velocidade limite dos atuadores e redução de <i>jerk</i>	90
Tabela 5.8	Compilado dos tempos de trajetória para cada teste e caminho geométrico.	91

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

DH	Denavit-Hartenberg
GDL	Graus de Liberdade
IFR	International Federation of Robotics
LAMECC	Lobotatório de Mecatrônica e Controle
MOSEK	Mathematical Optimization Software Specified
PROMECC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
SCARA	Selective Compliance Assembly Robot Arm
SDPT3	SemiDefinite Programming
SeDuMi	Self-Dual-Minimization
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

$a(s)$	Variável de otimização contínua
\mathbf{a}	Parâmetros do problema de otimização
A_a	Área do êmbulo da câmara A [m^2]
A_b	Área do êmbulo da câmara B [m^2]
$\overline{\mathbf{Acc}}$	Vetor de máxima aceleração [m/s^2]
$\underline{\mathbf{Acc}}$	Vetor de mínima aceleração [m/s^2]
a_i	Parâmetros cinemáticos obtidos pela convenção de DH [m]
A_i	Ponto do sistema de referência i de DH [m]
a^k	Variável de otimização discreta
$b(s)$	Variável de otimização contínua
B	Módulo de Compressibilidade [Pa]
B_i	Ponto do sistema de referência i de DH [m]
b^k	Variável de otimização discreta
B_v	Amortecimento viscoso do carretel da válvula [$N.s/m$]
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Matriz de Coriolis da estrutura mecânica do manipulador
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^*$	Matriz de Coriolis do manipulador em função das variáveis de junta
$\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})^{**}$	Matriz de Coriolis do manipulador em função das variáveis de atuador
$c(s)$	Variável de otimização contínua
c^k	Variável de otimização discreta
$d(s)$	Variável de otimização contínua
d^k	Variável de otimização discreta
$f(s)$	Variável de otimização contínua
F_{atr}	Força de atrito do atuador hidráulico [N]
\mathbf{F}_{atr}	Vetor de forças de atrito do atuador hidráulico [N]
F_C	Força de atrito de Coulomb
\mathbf{F}_C	Vetor de forças de atrito de Coulomb
F_G	Força gravitacional [N]
F_H	Força hidráulica [N]
\mathbf{f}_H	Vetor de forças hidráulicas

$\overline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}}$	Vetor de máxima força hidráulica
$\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}}$	Vetor de mínima força hidráulica
$\mathbf{f}_{\mathbf{H}}^k$	Vetor de força hidráulica discretizado
f^k	Variável de otimização discreta
f_L	Força da carga mecânica [N]
F_v	Força aplicada no carretel [N]
F_V	Força de atrito viscoso [N]
\mathbf{F}_V	Vetor de forças de atrito viscoso
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	Vetor de torque gravitacional somente da estrutura mecânica do manipulador
$\mathbf{G}(\mathbf{q})^*$	Vetor de torque gravitacional do manipulador em função das variáveis de junta
$\mathbf{G}(\mathbf{y})^{**}$	Vetor de torque gravitacional do manipulador em função das variáveis de atuador
$\mathbf{H}(\mathbf{q})$	Matriz de inércia somente da estrutura mecânica do manipulador
$\mathbf{H}(\mathbf{q})^*$	Matriz de inércia do manipulador em função das variáveis de junta
$\mathbf{H}(\mathbf{y})^{**}$	Matriz de inércia do manipulador em função das variáveis de atuador
I_i	Momento de inércia do elo i [kg.m ²]
i_m	Corrente de bobina da válvula de controle [A]
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana entre coordenadas do espaço de trabalho e de junta
$\bar{\mathbf{J}}$	Matriz Jacobiana dos atuadores
\overline{jerk}_{α}	Vetor de máximo <i>jerk</i> pelo critério 1
$\underline{jerk}_{\alpha}$	Vetor de mínimo <i>jerk</i> pelo critério 1
\overline{jerk}_{β}	Vetor de máximo <i>jerk</i> pelo critério 2
\underline{jerk}_{β}	Vetor de mínimo <i>jerk</i> pelo critério 2
k_{em}	Constante eletromecânica [m/V]
K_f	Constante que relaciona corrente da bobina e força aplicada no carretel [N/A]
k_{sa}	Coefficiente de vazão da câmara A [m ³ .Pa ⁻¹ .s ⁻¹]
k_{sb}	Coefficiente de vazão da câmara B [m ³ .Pa ⁻¹ .s ⁻¹]
K_v	Constante elástica da mola de realimentação [N/m]
L	Indutância da bobina da válvula de controle [H]

L_{1i}	Segmento de reta formado pelos pontos O_{i-1} e A_i [m]
L_{2i}	Segmento de reta formado pelos pontos O_{i-1} e B_i [m]
L_{3i}	Comprimento do atuador i [m]
l_i	Posição do centro de massa em relação ao ponto O_{i-1} [m]
m	Massa da carga mecânica [kg]
\mathbf{M}	Matriz de inercial da massa dos atuadores
m_i	Massa do elo i [kg]
M_v	Massa do carretel da válvula de controle [kg]
O_{i-1}	Origem do sistema de referência i de DH
p_a	Pressão na câmara A [Pa]
p_b	Pressão na câmara B [Pa]
p_r	Pressão de retorno [Pa]
p_s	Pressão de suprimento [Pa]
$\dot{\mathbf{q}}$	velocidade de junta [rad/s]
$\ddot{\mathbf{q}}$	Posição de junta [rad]
q_i	Posição de junta i [rad]
R_b	Resistência elétrica da bobina da válvula de controle [ω]
$s(t)$	Função de parametrização do caminho geométrico
s^k	Função discretizada de parametrização do caminho geométrico
Q_a	Vazão de óleo na câmara A [m^3/s]
Q_b	Vazão de óleo na câmara B [m^3/s]
tf	Tempo de trajetória [s]
u	Tensão de controle da válvula [V]
V_a	Volume da câmara A [m^3]
V_{a0}	Volume inicial da câmara A [m^3]
V_b	Volume da câmara B [m^3]
V_{b0}	Volume inicial da câmara A [m^3]
V_s	Velocidade de <i>Stribeck</i> [m/s]
V_{sc}	Parâmetro referente ao atrito viscoso [$N.s/m$]
\mathbf{x}	Ponto do espaço de busca do problema de otimização
\mathbf{x}^*	Ponto ótimo
X_P	Coordenada horizontal do plano de trabalho

x_v	Deslocamento do carretel [m]
x_{vxm}	Deslocamento efetivo do carretel [m]
y	Posição da haste do atuador hidráulico [m]
\dot{y}	Velocidade da haste do atuador hidráulico [m/s]
\ddot{y}	Aceleração da haste do atuador hidráulico [m/s^2]
\dddot{y}	<i>Jerk</i> da haste do atuador hidráulico [m/s^3]
y_i	Posição de atuador i [m]
Y_P	Coordenada vertical do plano de trabalho [m]
z_{md}	Limite de zona morta à direita [m]
z_{me}	Limite de zona morta à esquerda [m]
β	Módulo de Compressibilidade do fluido [Pa]
Δp	Diferença de pressão entre as câmaras [Pa]
$\Delta\varphi_i$	Diferença entre os ângulos ϕ_{1i} e ϕ_{2i} [rad]
ω_v	Frequência natural do sistema dinâmico da válvula [rad/s]
φ_{1i}	Ângulo formado pelos segmentos de reta x_i e L_{1i} [rad]
φ_{2i}	Ângulo formado pelos segmentos de reta x_i e L_{2i} [rad]
Δs_k	Intervalo de discretização da parametrização do caminho geométrico
τ	Torque nos elos do manipulador [$N.m$]
θ	Variável do segmento de reta
ζ_v	Fator de amortecimento do sistema dinâmico da válvula

1 INTRODUÇÃO

Manipuladores robóticos são máquinas programáveis com alto nível de automação e versatilidade. Estes podem substituir pessoas em locais perigosos ou insalubres, sendo aplicados em tarefas de soldagem, transferência de materiais, pinturas e montagens, dentre outras. Além da possibilidade de integração através de seu controlador com sistemas complexos de automação, os robôs ainda apresentam como vantagens o ciclo de trabalho confiável e com alta repetibilidade. Esses sistemas também apresentam como característica uma alta flexibilidade, sendo possível que um mesmo dispositivo realize diferentes tarefas a partir de mudanças na programação e troca de ferramenta (efetuador). [Groover, 2011; Ceccarelli, 2011].

O desenvolvimento da eletrônica permitiu que esses dispositivos fossem cada vez mais popularizados, visto que o avanço no processamento de dados causou mudanças não só nos robôs mas também nos sistemas de manufatura dos quais estão inseridos. Situação que proporciona que, segundo a IFR (*International Federation of Robotics*), no período entre 2008 e 2018, o número de robôs adicionados à indústria anualmente mais que triplicasse, chegando ao número estimado de 384 mil unidades no ano de 2018.

Os robôs podem ser categorizados a partir de diferentes critérios. Uma possibilidade é a utilização dos princípios físicos dos atuadores para classificação, os quais podem ser pneumáticos, hidráulicos ou elétricos, sendo o último tipo o mais comum na indústria. Manipuladores com atuadores hidráulicos apresentam como vantagem o tempo de resposta e ótima relação entre peso e força, usualmente empregados para tarefas envolvendo massas elevadas. No entanto, devido às características não lineares dos sistemas hidráulicos e à possibilidade de vazamento de óleo nas linhas de produção, este tipo de robô tem tido sua aplicação limitada. A partir da década de 1980, com os avanços de tecnologia em diversas áreas, tornou-se possível o controle preciso desses dispositivos, assim como, a implementação de sistemas hidráulicos a prova de vazamentos, capazes de fornecer robustez e confiabilidade que as aplicações industriais requerem [Spong, 1989; Liyanage, 2014; Adeleke e Mattila, 2017].

A utilização de robôs em tarefas com caminhos predefinidos é algo recorrente em aplicações industriais, situação em que o tempo de trajetória está diretamente ligado ao ciclo de trabalho e, portanto, relacionado com a produtividade e ganhos econômicos,

aspectos sempre relevantes nas atividades industriais. Nem sempre a utilização de atuadores de alta potência se justifica como forma de redução de ciclo de trabalho, visto que seu volume e inércia também aumentam, além de resultar em incremento de custos e consumo de energia. Desta forma, desde a década de 1980, os estudos relacionados à otimização de trajetórias em relação ao tempo vem crescendo, visto que possibilita que o mesmo dispositivo realize a mesma tarefa com menor tempo de duração [Bobrow et al., 1985; Muller et al., 2012; Reiter, 2016].

Na literatura, diversos autores aplicam diferentes métodos para obtenção de trajetórias ótimas [Muller et al., 2012; Izquierdo, 2017; Reiter et al., 2016; Shiller, 1996]. Aspectos relacionados à redução de tempo, do consumo energético e de vibrações são alguns dos objetivos traçados nesses algoritmos. Algoritmos determinísticos podem ser aplicados para solução desses problemas. No entanto, torna-se necessária a adequação do problema para uma determinada classe ou família que já possua métodos de solução conhecidos. Conforme característica e solução do problema, é possível garantir a obtenção de uma solução ótima global. Métodos heurísticos também são frequentemente aplicados visto que, se parametrizados adequadamente, apresentam desempenho adequado para problemas de otimização complexos. No entanto, esses tipos de otimização garantem apenas que seja encontrada uma solução satisfatória, não necessariamente uma solução ótima global, além de, usualmente, exigirem uma maior tempo de processamento [Marti, 2015; Boyd e Vandenberghe, 2004; Izquierdo, 2017; Reynoso-Mora et al., 2016].

Com vistas à obtenção de trajetórias factíveis para aplicações práticas, é necessário que sejam consideradas na metodologia de planejamento de trajetórias as características construtivas e operacionais, assim como, as limitações físicas presentes nos robôs. Dessa forma, para definição dos limites cinemáticos (velocidade, aceleração e *jerk*) e dinâmicos (torque/força), torna-se necessária uma análise dos fenômenos físicos e das características construtivas do robô em análise.

Um outro ponto importante é a consideração do algoritmo de controle implementado, cujo objetivo é fazer com que o robô siga determinada trajetória, pois as características da trajetória de referência interferem diretamente no desempenho do controlador. Algoritmos de controle que utilizam técnicas baseadas em modelos da dinâmica inversa, empregados, por exemplo, para cancelamentos de não-linearidades em robôs, necessitam que os sinais de seguimento de trajetória sejam suaves, de forma que

reduza as variações de torques/forças dos atuadores, atenuando vibrações mecânicas e desgastes dos componentes. Estes são aspectos importantes a serem considerados no planejamento de trajetórias, especialmente naquelas que buscam a otimização do tempo de percurso, devido à característica que essas tendem a elevar os valores das grandezas cinemáticas [Shiller, 1996; Reynoso-Mora et al., 2016; Machado, 2010].

1.1 Descrição do Problema

Robôs hidráulicos apresentam uma dinâmica complexa devido ao acoplamento de duas dinâmicas não lineares, uma associada à estrutura mecânica do braço e outra aos atuadores hidráulicos. A Figura 1.1 mostra que o acoplamento presente entre essas dinâmicas se dá de forma variável, visto que, o torque presente nos elos varia tanto conforme a força aplicada pelos atuadores quanto pela posição de junta dos elos (ou das hastes), ao mesmo tempo que o torque produzido tende a alterar essas mesmas posições e provocar mudanças de velocidades, fatores que influem também na dinâmica dos atuadores.

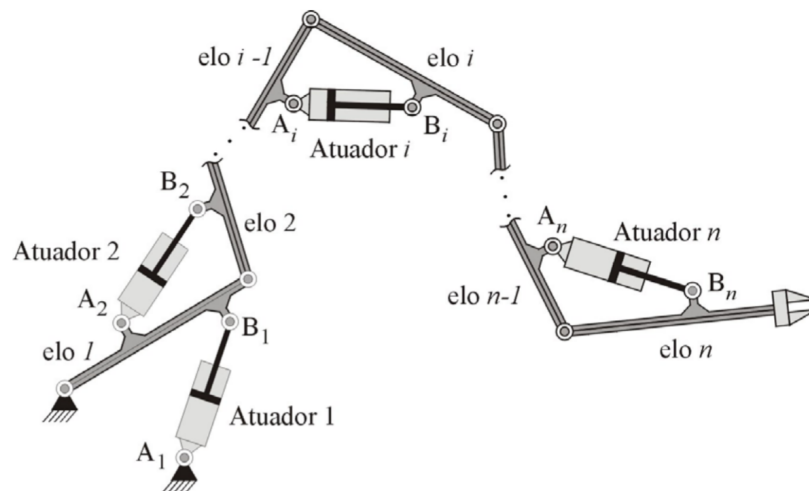


Figura 1.1 – Desenho de um robô de juntas rotativas acionadas por atuadores lineares [Valdiero, 2005].

Quando aplicados em robôs hidráulicos, controladores clássicos, como PID, apresentam baixa robustez ao lidarem com as características não lineares e variações paramétricas presentes. Desta forma, técnicas não lineares têm sido aplicadas nesses dispositivos, sendo usual a aplicação de técnicas baseadas na dinâmica inversa, como o controle em cascata utilizado em Machado, 2010 e Valdiero, 2005 em um manipulador

hidráulico e por Sarmanho [2014], em um robô pneumático. No entanto, devido às características desses métodos, é preciso que as trajetórias de referência do controlador possuam derivadas contínuas em relação ao tempo até terceiro grau [Machado, 2010].

A aplicabilidade das trajetórias desejadas depende tanto da técnica de controle aplicada quanto da compatibilidade dessas com as características cinemática e dinâmicas do manipulador. É necessário, por exemplo, que o torque disponível nos atuadores seja suficiente seguir determinada trajetória, evitando dessa forma a ocorrência da saturação dos mesmos, ou que, para seguimento da referência não sejam necessárias variações bruscas de aceleração de modo a dinâmica do atuador seja suficientemente rápida para fornecer os torque e forças adequadamente.

Assim, enfocando manipuladores hidráulicos seriais, este trabalho propõe o planejamento de trajetórias que aumentem a produtividade através da redução do ciclo de trabalho em tarefas com caminho predeterminado. Para isso, considera-se os requisitos físicos do manipulador relacionados às suas limitações cinemáticas e dinâmicas, bem como, trajetórias compatíveis com os controladores tipicamente utilizados nesses sistemas.

1.2 Objetivo Geral

Propor uma estratégia de planejamento de trajetórias de tempo ótimo global adequada para manipuladores hidráulicos seriais, respeitando as limitações cinemáticas e dinâmicas características desse tipo de robô e as características dos controlares tipicamente aplicados nesses dispositivos.

1.3 Objetivos específicos

- Elaborar um procedimento para determinação das restrições cinemáticas e dinâmicas de robôs hidráulicos seriais;
- Obter trajetórias com terceira derivada temporal contínua, adequadas para implementação em algoritmos usualmente utilizados em manipuladores hidráulicos;
- Utilizar algoritmos determinísticos para obter trajetórias com tempo ótimo global;
- Comparar, a partir de simulações, o tempo de trajetórias obtidas a partir de diferentes limites cinemáticos e dinâmicos.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos: o Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, onde são abordados embasamentos necessários para melhor compreensão da proposta e, ao seu final, são apresentados trabalhos científicos de diferentes autores relacionados ao tema desta dissertação. No Capítulo 3 são apresentadas as características do robô utilizado como base para o estudo e o método de obtenção dos valores limites de velocidade, aceleração, *jerk* e torque. No Capítulo 4 é apresentada a formulação do problema de otimização, assim como, a adequação para a aplicação de solução que permita implementação computacional e a obtenção do ponto ótimo global. No Capítulo 5 são apresentados os resultados para diferentes caminhos geométricos, assim como, para diferentes limitações cinemáticas e dinâmicas. Por último, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e as propostas de trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais introduzidos por outros autores para compreensão e desenvolvimento do trabalho proposto, além de artigos científicos sobre o estado da arte na área de planejamento de trajetórias.

2.1 Manipuladores Robóticos

Segundo Gao et al., 2015, sistemas robóticos são equipamentos importantes no âmbito dos sistemas modernos de manufatura, com projeto e aplicação que envolvem diversas áreas do conhecimento: mecânica, eletrônica, controle, informática, sensores, inteligência artificial, dentre outras.

Basicamente, os manipuladores robóticos podem ser decompostos em quatro subsistemas: mecânico (estrutura do braço); sensores (internos ou externos ao manipulador); controlador (responsável por processar as informações dos sensores para fornecer sinais adequados aos atuadores); atuadores (responsáveis por acionar o sistema mecânico). Na Figura 2.1 são mostradas as interações entre os subsistemas presentes em um sistema robótico, onde os sensores fornecem informações do manipulador e/ou do ambiente que esse está inserido. Esses dados são processados pelo controlador que envia sinais para os atuadores de modo que os elos se movimentem e que o robô execute tarefas da maneira desejada [Siciliano et al., 2008].

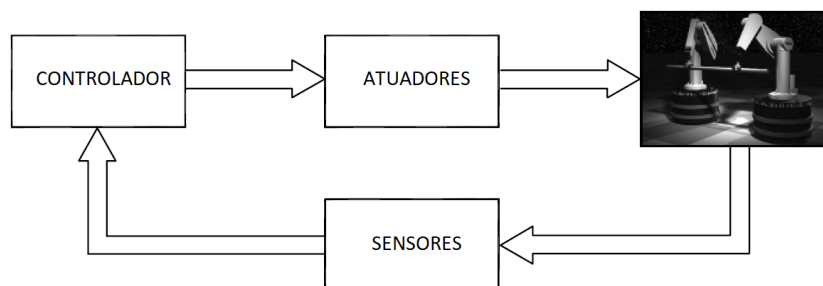


Figura 2.1 – Subsistemas de um sistema robótico, [Adaptado de Siciliano et al., 2008].

2.2 Modelagem Matemática

Modelo matemático de um sistema físico dinâmico é um conjunto de equações diferenciais que representa a dinâmica desse sistema. Estas equações são obtidas a partir

dos fenômenos físicos que regem o sistema, seja esse mecânico, elétrico ou de outro tipo qualquer. Outra possibilidade é a utilização de técnicas de identificação de sistemas, como as apresentadas por Aguirre [2015], onde a partir das análises dos dados de entrada e de saída de um sistema é possível a obtenção do seu modelo e parâmetros. Também é possível a utilização de técnicas estocásticas, como o método de identificação estocástica de subespaço, como o proposto por Overschee e Moor [1996], que utilizam a teoria da realização e modelos no espaço de estados para determinação das características dinâmicas de sistemas.

Um mesmo sistema físico pode vir a possuir mais de um modelo. As mesmas equações diferenciais correspondentes aos fenômenos físicos correntes podem ser representadas de diferentes formas, como, por exemplo, função de transferência ou espaço de estados. Outro aspecto importante é a utilização de um modelo apropriado, conciliando precisão e simplicidade. Para obter um modelo simplificado, alguns fenômenos podem ser desprezados ou linearizados, proporcionando a possibilidade de realizar uma análise geral e mais simples do sistema, o que pode ser adequado dependendo da aplicação. No entanto, essas simplificações podem fazer com que ocorram diferenças significativas entre simulação e experimento, ou que haja problemas de implementação de leis de controle, sendo necessário o uso de modelos mais completos [Ogata, 2010].

2.2.1 Cinemática

Segundo Siciliano et al., 2008, a estrutura de um manipulador robótico consiste em uma sequência de corpos rígidos, denominados elos, interligados por articulações, denominadas juntas. A cadeia cinemática de um manipulador pode ser caracterizada como aberta, onde uma única sequência de elos conecta os extremos da cadeia, ou fechada, onde a sequência de elos forma um caminho fechado. A estrutura mecânica de um robô manipulador é geralmente composta por um braço que garante mobilidade e um punho que confere destreza, além de uma ferramenta, ou efetuador, que realiza a tarefa requerida.

A ligação entre os elos está diretamente relacionada à mobilidade do manipulador. Esta conexão pode ser realizada através de juntas rotacionais ou prismáticas. Juntas rotacionais adicionam movimento angular relativo entre dois elos, enquanto juntas prismáticas adicionam movimento translacional relativo entre os

mesmos, sendo as primeiras mais comuns em robôs comerciais. Em configurações com cadeia cinemática aberta, cada junta adiciona à estrutura um grau de liberdade (GDL), em estruturas com cadeias cinemáticas fechadas, devido às restrições, o número de GDL é menor do que o número de juntas [Siciliano et al., 2008]. Segundo Craig, 2012, a definição de graus de liberdade é advinda do número de variáveis independentes necessárias para determinar a posição de cada elo do mecanismo. Genericamente, considerando um espaço tridimensional, para posicionar e orientar um objeto ou efetuator tornam-se necessários seis GDL, três para posicionamento e três para orientação do mesmo, requisitando do braço o posicionamento e do punho a orientação. No entanto, nem todas as tarefas requeridas necessitam dos seis GDL. Desta forma, quando o robô apresenta mais GDL do que a tarefa exige, o manipulador é tido como redundante do ponto de vista cinemático [Siciliano et al., 2008; Craig, 2012]. Na Figura 2.2 está esquematizado um exemplo apresentado por Craig, 2012, onde o manipulador apresenta seis GDL, devido à simetria sob próprio eixo e às características de uso da ferramenta, o robô é redundante para a tarefa, visto que neste caso o mesmo apresenta infinitas posições de junta que atendem a tarefa. Desta forma, muitos robôs presentes na indústria não apresentam seis GDL, devido, por exemplo, ao uso de ferramentas simétricas, como solda em arco, solda em ponto, rebarbagem e polimento, ou em casos em que se tornam desnecessários três eixos de orientação, como na colocação de componentes eletrônicos em placas de circuito impresso [Craig, 2012].

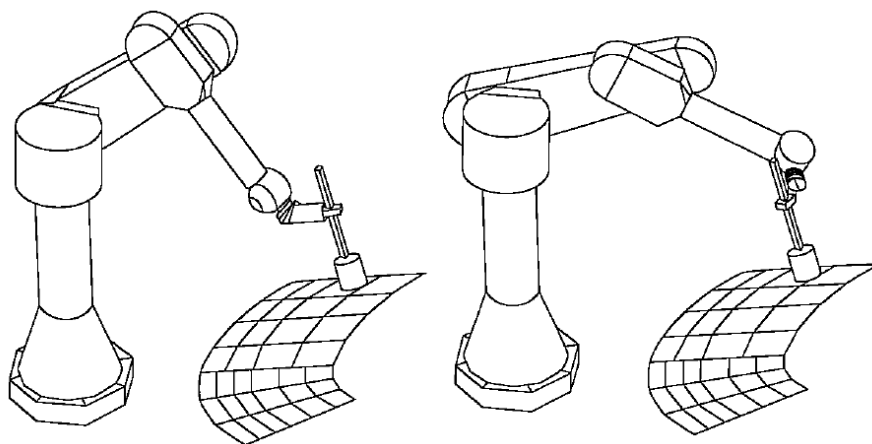


Figura 2.2 – Manipulador com 6 GDL com ferramenta simétrica [Adaptado de Craig, 2012].

O espaço de trabalho de um manipulador representa a região do espaço em que o efetuador do manipulador pode acessar. O formato e volume do espaço de trabalho dependem de restrições cinemáticas, relacionadas às limitações de juntas e da própria estrutura mecânica como um todo. Fatores, como restrições espaciais do ambiente de trabalho e posicionamento dos objetos, devem ser levados em consideração na escolha do espaço de trabalho do manipulador. O tipo e a sequência dos GDL da base até o efetuador permitem a classificação dos manipuladores em cartesiano, cilíndrico, esférico, SCARA e antropomórfico [Siciliano et al., 2008].

Os manipuladores robóticos consistem em uma cadeia de corpos rígidos (elos) conectados através de juntas, onde uma ponta consiste na base do manipulador e outra no efetuador. A cinemática é a ciência que estuda o movimento dos corpos sem considerar as forças externas e internas que o causam, ou seja, o estudo de como a estrutura do manipulador é alterada pelo deslocamento de cada elo e como este altera o posicionamento dos elos adjacentes [Siciliano et al., 2008]. Ceccarelli, 2011, complementa que a cinemática de robôs é o estudo da configuração e movimento da estrutura através de uma análise geométrica, desconsiderando limites ou ações do movimento, assim como, capacidade dos atuadores. A análise cinemática pode ser classificada como direta e inversa.

- Cinemática direta consiste no problema da determinação da posição e orientação da ferramenta ou efetuador do manipulador no espaço de trabalho cartesiano a partir das variáveis de junta do mesmo, as quais, para juntas rotacionais, consiste no ângulo entre os elos; e para as juntas prismáticas, consistem nas extensões ou retrações do elo [Spong, 1989].

- O problema da cinemática inversa consiste em, a partir da posição e orientação do efetuador, encontrar as variáveis de junta do mesmo. Este problema é relacionado com o planejamento de trajetórias, visto que para determinação do movimento desejado do efetuador deve ser determinado o movimento das juntas e, por consequência, também dos atuadores [Ceccarelli, 2011; Spong, 1989].

Um determinado vetor das variáveis de juntas é chamado de configuração, e pode ser considerado um ponto de um espaço que contempla todas as possíveis configurações que o robô pode assumir, denominado espaço de configuração (espaço de juntas). Essa abordagem é usualmente utilizada em técnicas de planejamento de trajetórias de

manipuladores que possuem obstáculos em seu espaço de trabalho [Spong, 1989; Siciliano et al., 2008]. A mesma ideia se aplica para posicionamento dos atuadores, formando o espaço de atuadores, e para o posicionamento e orientação do efetuador, formando o espaço cartesiano (ou de ferramenta).

A Figura 2.3 representa a correspondência entre as cinemáticas inversa e direta através do mapeamento entre espaço cartesiano, espaço de juntas (espaço de configuração) e espaço dos atuadores. De modo geral o problema de mapeamento entre os espaços de juntas e atuadores não é complexo, visto que as relações cinemáticas são facilmente determinadas com precisão, devido à simplicidade dos acoplamentos mecânicos presentes. Isso não se repete nas relações de mapeamento entre o espaço cartesiano e de juntas, pois consistem geralmente de uma relação não-linear [Ceccarelli, 2011].

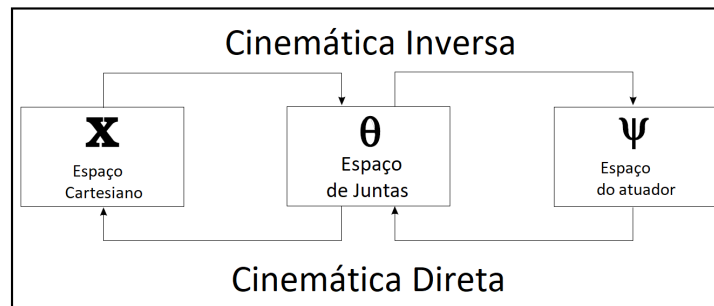


Figura 2.3 – Mapeamento da cinemática direta e inversa [Adaptado de Ceccarelli, 2011].

2.2.2 Modelagem Dinâmica

Diferente da cinemática, que apresenta um enfoque puramente no movimento, sem considerar suas causas, as equações dinâmicas apresentam justamente as relações de como, a partir das forças e dos torques, o movimento surge nos manipuladores. Desta forma, pode-se utilizar modelos dinâmicos de manipuladores para simulação do movimento e teste de técnicas de controle, possibilitando análise de projeto e dimensionamento de elos, juntas, transmissões e atuadores [Siciliano et al., 2008; Craig, 2012].

2.2.2.1 Dinâmica de manipuladores

Os principais métodos utilizados para modelagem da estrutura de manipuladores são o de Newton-Euler e o de Euler-Lagrange. O primeiro método proposto é baseado na 2ª

Lei de Newton, onde, a partir da distribuição de massa dos corpos rígidos do manipulador e das as forças e torques aplicados ao mesmo, utiliza-se suas características cinemáticas para equacionamento do equilíbrio dinâmico de forças e torques visando a determinar as acelerações nos elos. O método de Euler-Lagrange é baseado nas energias potenciais e cinéticas do manipulador, onde o modelo dinâmico resultante é dado pela variação de energia do sistema mecânico em relação às variáveis de junta e do torque oriundo dos atuadores. Desta forma, o modelo dinâmico de um manipulador obtido a partir do método de Euler-Lagrange pode ser expresso através da Equação (2.1), [Siciliano et al., 2008].

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de coordenadas generalizadas; $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica quadrada que representa a inércia do sistema, sendo os elementos diagonais os momentos de inércia de massa e os demais elementos os produtos de inércia de massa; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa os efeitos centrífugos e de coriolis; $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor que representa os momentos oriundos da força gravitacional; $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torque oriundos dos atuadores. A Equação (2.1) não possui representação das forças dissipativas, as quais podem ser incorporadas acrescentando termos representativos desse fenômeno.

Para implementação de técnicas de identificação de parâmetros e desenvolvimento de algoritmos de controle, ressaltam-se duas propriedades importantes do modelo apresentado:

- 1- A matriz $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é simétrica, positivamente definida.
- 2- A matriz $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, Equação (2.2), representa uma matriz anti-simétrica se os elementos da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ estão na forma dos símbolos de Christoffel .

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.2)$$

Sendo $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ anti-simétrica, é possível provar a estabilidade do modelo, demonstrando a aplicação do princípio de conservação de energia, demonstrando que a variação da energia cinética do manipulador depende da aplicação de torque nas juntas.

Essa mesma propriedade também pode ser aplicada para prova de estabilidade de controladores, como o controle em cascata [Siciliano et al., 2008].

2.2.3 Modelo dos atuadores hidráulicos lineares

Segundo Spong, 1989, manipuladores robóticos podem utilizar atuadores com diferentes princípios de funcionamento, sendo estes tipicamente classificados em eletromagnéticos, pneumáticos ou hidráulicos. Os últimos são caracterizados por uma alta velocidade de resposta e capacidade de produzir altos torques e forças, fazendo com que suas principais aplicações envolvam movimentação de grandes cargas. Como contrapartida, robôs hidráulicos são geralmente mais ruidosos e necessitam de mais equipamentos periféricos.

A representação de um atuador hidráulico linear pode ser realizada através da Figura 2.4, onde a pressão p_s é a pressão de suprimento e p_r é a pressão de retorno do sistema, onde a primeira é geralmente muito maior que a segunda.

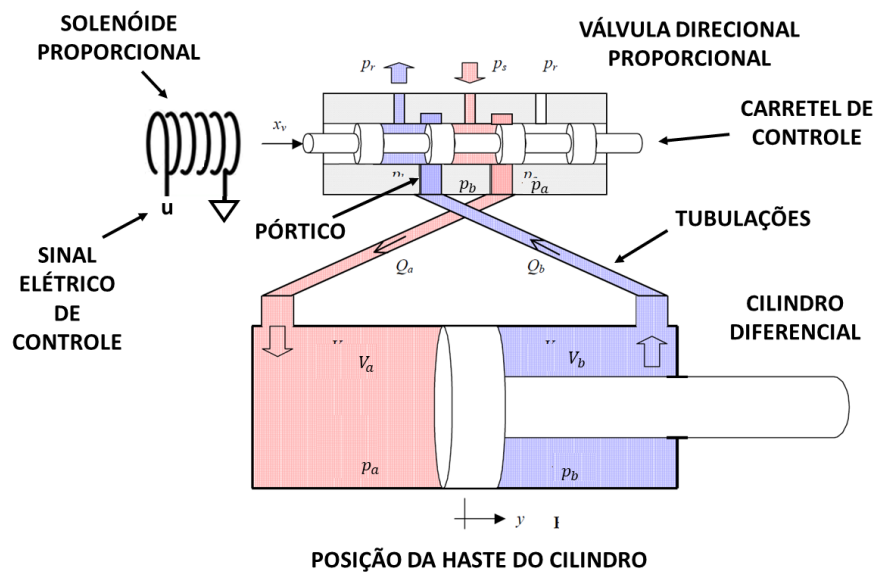


Figura 2.4 – Sistema de um atuador hidráulico [Adaptado de Valdiero, 2005].

O atuador em questão é controlado através da aplicação de sinal elétrico em uma bobina que, ao ser energizada, provoca deslocamento x_v no carretel da válvula. Não circulando corrente elétrica pela bobina, o carretel permanece centralizado na válvula, bloqueando os orifícios (pórticos) e desta forma impedindo a passagem de fluido. Ao

energizar a bobina, o fluxo magnético oriundo da corrente deslocará o carretel de controle, assim, por exemplo, quando este é movido para direita, os orifícios de controle da válvula são abertos, proporcionando aumento de pressão p_a e o surgimento de vazão do fluido hidráulico Q_a no sentido válvula-cilindro. Visto que a pressão na câmara adjacente B é menor que na câmara A, ocorre no êmbolo a ação de uma força hidráulica que tende a deslocar a haste do cilindro. Desta forma, há o retorno de óleo para o reservatório do fluido presente na câmara B, vazão Q_b , no sentido cilindro-reservatório. A diferença de pressão entre as câmaras da direita e da esquerda que atua sob as faces do êmbolo, faz surgir uma força hidráulica que altera a posição y do mesmo da esquerda para direita. Dentre as principais não linearidades presentes, destacam-se a relação entre vazão e pressão nos orifícios de controle, a saturação devido ao deslocamento máximo do carretel, o atrito no carretel e no pistão e a zona morta da válvula [Valdiero, 2005; Cunha, 2001].

Os procedimentos adotados para equacionamento dos fenômenos físicos presentes nos atuadores hidráulicos lineares são os mesmos adotados por Valdiero, 2005 e Cunha, 2001. A fim de deduzir o modelo, inicia-se pela dinâmica elétrica do solenoide, expressa pela Equação (2.3).

$$\frac{L}{R_b} \frac{di_m}{dt} + i_m = \frac{u}{R_b} \quad (2.3)$$

onde R_b é a resistência elétrica do solenoide; u a tensão aplicada na bobina; L é a indutância da bobina; i_m é a corrente que circula pelo solenoide.

Levando em consideração a premissa de que a dinâmica elétrica do solenoide é significativamente mais rápida do que as dinâmicas mecânicas presentes no sistema, a Equação (2.3) é reescrita através da Equação (2.4).

$$i_m = \frac{u}{R_b} \quad (2.4)$$

A dinâmica do carretel é obtida através da aplicação da 2ª lei de Newton, sendo esta apresentada através da Equação (2.5).

$$M_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} + B_v \frac{dx_v}{dt} + K_v x_v = F_v = K_f i_m \quad (2.5)$$

onde M_v é a massa do carretel; B_v é o amortecimento viscoso do carretel; K_v é a constante elástica da mola de realimentação; F_v é a força magnética oriunda do campo magnético do solenóide; K_f é uma constante que relaciona a corrente do solenóide e i_m com a força aplicada no carretel, F_v .

A Equação (2.5) pode ser reescrita em função da frequência natural, ω_v , e fator de amortecimento, ζ_v , resultado na Equação (2.6).

$$\frac{1}{\omega_v^2} \frac{d^2 x_v}{dt^2} + \frac{2\zeta_v}{\omega_v} \frac{dx_v}{dt} + x_v = \frac{K_f}{K_v} i_m \quad (2.6)$$

onde a frequência natural (ω_v) é dada pela Equação (2.7) e o fator de amortecimento pela Equação (2.8).

$$\omega_v = \sqrt{\frac{K_v}{M_v}} \quad (2.7)$$

$$\zeta_v = \frac{B_v}{2} \sqrt{\frac{1}{K_v M_v}} \quad (2.8)$$

Reescrevendo a Equação (2.6) utilizando a constante eletromecânica k_{em} , definida na Equação (2.9), como em Cunha, 2001, é obtida a Equação (2.10).

$$k_{em} = \frac{K_f}{K_v R_b} \quad (2.9)$$

$$\ddot{x}_v = k_{em} \omega_v^2 u - \omega_v^2 x_v - 2\zeta_v \omega_v \dot{x}_v \quad (2.10)$$

Valdiero, 2005, afirma que autores utilizam diferentes premissas para obtenção do modelo do carretel da válvula, sendo estas dependentes das características construtivas

de cada válvula. Inclusive, é possível considerar que a dinâmica do carretel é suficientemente rápida, de tal forma que a relação entre deslocamento e a tensão aplicada no solenóide (sinal de controle) pode ser dada de forma diretamente proporcional através da Equação (2.11).

$$x_v = k_{em}u \quad (2.11)$$

Como descrito de forma qualitativa, as vazões das câmaras do cilindro são fenômenos importantes a serem modelados, sendo estas dependentes do deslocamento x_v , visto que este altera a área do orifício entre o carretel e o pórtico. Além da área do orifício, a diferença de pressão entre a câmara do cilindro e da porta da válvula também influenciam a vazão. Para tal dedução, utiliza-se a Equação de Bernoulli para obter as vazões Q_a e Q_b , expressas pelas Equações (2.12) e (2.13), respectivamente [Cunha, 2001].

$$Q_a(x_v, p_a) = k_{sa}x_v g_1(p_a, \text{sing}(x_v)) \quad (2.12)$$

$$Q_b(x_v, p_b) = -k_{sb}x_v g_2(p_b, \text{sing}(x_v)) \quad (2.13)$$

onde Q_a e Q_b correspondem às vazões das câmaras e p_a e p_b correspondem às respectivas pressões. A correspondência das variáveis com as câmaras feita através do subscrito das mesmas; k_{sa} e k_{sb} são coeficientes de vazão que variam em função do deslocamento x_v e das características geométricas da válvula. Por simplificação, Valdiero, 2005 considera esses termos constantes. As funções g_1 e g_2 são definidas através das Equações (2.14) e (2.15), respectivamente.

$$g_1(p_a, \text{sign}(x_v)) = \sqrt{\Delta p} = \begin{cases} \sqrt{p_s - p_a}, & x_v \geq 0 \\ \sqrt{p_a - p_r}, & x_v < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$g_2(p_b, \text{sign}(x_v)) = \sqrt{\Delta p} = \begin{cases} \sqrt{p_b - p_r}, & x_v \geq 0 \\ \sqrt{p_s - p_b}, & x_v < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

onde Δp corresponde à queda de pressão no orifício da válvula.

Ressalta-se que o modelo apresentado não leva em consideração a não linearidade de zona morta presente nas válvulas do tipo supercrítica, a qual tem como característica o fato de o ressalto do carretel ser maior que a largura do pórtilo de passagem do fluido, fazendo com que o carretel tenha uma região onde o deslocamento x_v não resulta em aumento na área do orifício. Outra não linearidade desprezada é a saturação da válvula, que ocorre quando o aumento da tensão de controle não resulta em um aumento correspondente de vazão. Finalmente, outro fenômeno desconsiderado é o do efeito das forças de atrito que ocorrem devido ao movimento relativo entre pórtilo e carretel.

A análise da variação das pressões nas câmaras do cilindro pode ser obtida a partir da aplicação do princípio de continuidade. Segundo Valdiero, 2005, as variações de pressão nas câmaras do cilindro são expressas pelas Equações (2.16) e (2.17), respectivamente.

$$\frac{dp_a}{dt} = f_a(y)(Q_a(x_v, p_a) - A_a \dot{y}) \quad (2.16)$$

$$\frac{dp_b}{dt} = f_b(y)(Q_b(x_v, p_b) - A_b \dot{y}) \quad (2.17)$$

onde A_a e A_b são as áreas dos êmbulos das câmaras do cilindro; $f_a(y)$ e $f_b(y)$ são funções expressas pelas Equações (2.18) e (2.19):

$$f_a(y) = \frac{\beta}{V_a(y)} = \frac{\beta}{V_{a0} + A_a y} \quad (2.18)$$

$$f_b(y) = \frac{\beta}{V_b(y)} = \frac{\beta}{V_{b0} + A_b y} \quad (2.19)$$

onde β é o módulo de elasticidade do fluido; $V_a(y)$ e $V_b(y)$ são os volumes das câmaras A e B , respectivamente, e V_{a0} e V_{b0} são os respectivos volumes iniciais das câmaras A e B acrescidos volumes das tubulações.

Conforme a Figura 2.5, a partir da Segunda Lei de Newton é feito o equacionamento de forças no cilindro inclinado um ângulo α em relação à horizontal, Equação (2.20).

$$F_H = M\ddot{y} + f_{atr} + f_G + f_L \quad (2.20)$$

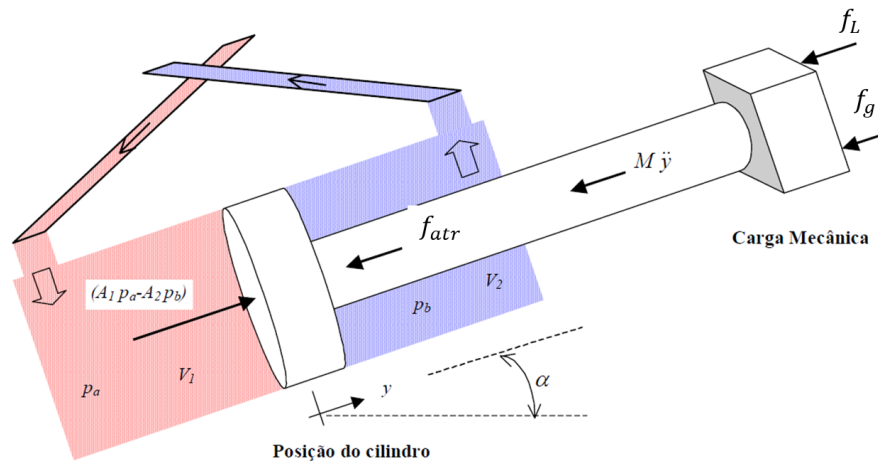


Figura 2.5 – Diagrama de corpo livre de um atuador hidráulico [Adaptado de Valdiero, 2005].

onde M é a massa em movimento, $M\ddot{y}$ é a força inercial, f_G é a força gravitacional da carga e da haste, f_{atr} é a força de atrito, f_L a força da carga mecânica; F_H é a força hidráulica, dada pela Equação (2.21).

$$F_H = A_a p_a - A_b p_b \quad (2.21)$$

Inserindo a Equação (2.21) na Equação (2.20) e isolando \ddot{y} , é obtida a Equação (2.22).

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}(A_a p_a - A_b p_b - f_G - f_{atr}) \quad (2.22)$$

2.2.3.1 Atrito

Considerando manipuladores seriais com atuadores hidráulicos, o atrito ocorre em diversos pontos do sistema. No entanto, o atrito presente nas vedações dos cilindros hidráulicos mostra-se significativamente mais influente do que o atrito presente nas juntas da estrutura mecânica, fazendo com que último possa ser desconsiderado. O fenômeno do atrito acrescenta características não lineares ao sistema que, dependendo da metodologia de controle, afetam tanto o desempenho como a estabilidade do controlador. Dentre os

modelos mais simples cita-se o atrito de Coulomb, estático e o viscoso, cujos mapas estão apresentados genericamente na Figura 2.6. O atrito viscoso, ou de Newton, representa uma força proporcional com a velocidade, apresentando, assim, uma característica linear, ao contrário do atrito estático, que consiste na força necessária para iniciar o movimento, e do atrito de Coulomb, que consiste de uma força constante e contrária à direção do movimento.

Um outro equacionamento de atrito muitas vezes utilizado é o correspondente ao modelo de *Stribeck*, que permite representar efeitos do atrito em velocidades mais baixas. Esses efeitos, dependendo das características do controlador utilizado, pode causar erros significativos de seguimento de trajetória a baixas velocidades [Machado, 2003; Valdiero, 2005]. O mapa de atrito dado pela combinação dos modelos de *Stribeck*, Viscoso, Coulomb e Estático é dado pela Equação (2.23) e é representado na Figura 2.7, onde os efeitos de cada um dos modelos de atrito é diferenciado através de cores.

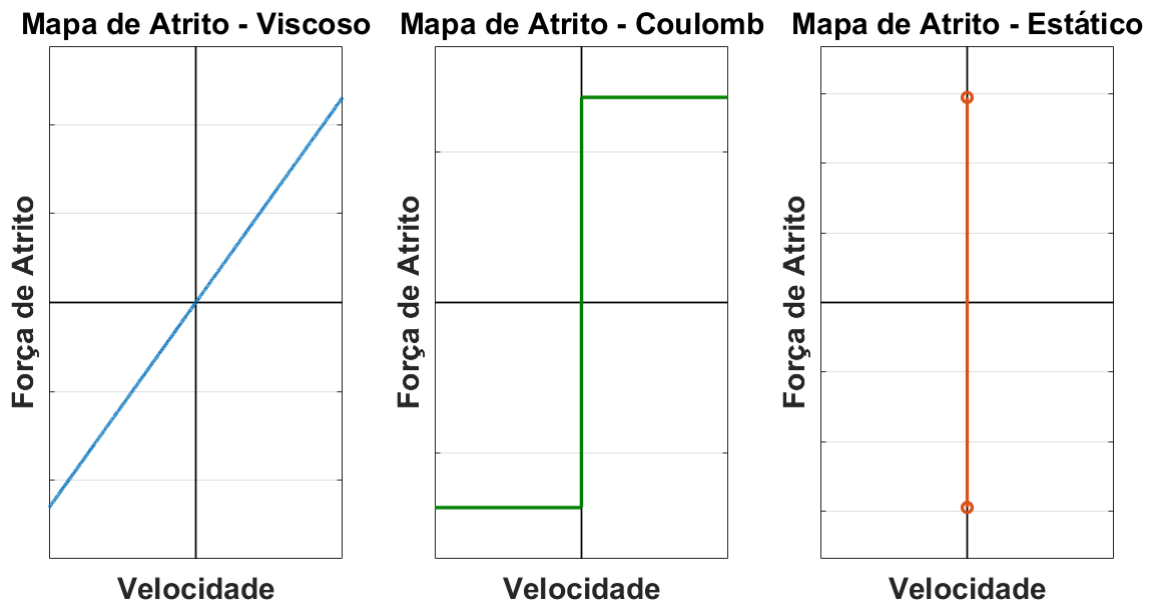


Figura 2.6 – Mapa de atrito - Coulomb, Estático e Viscoso.

$$F_{atrito} = sign(\dot{y})(F_c + (F_s - F_c)e^{-\frac{\dot{y}}{V_s^2}}) + V_{sc}\dot{y} \quad (2.23)$$

onde F_{atrito} é a força de atrito; \dot{y} é a velocidade da haste do atuador; F_c é o parâmetro referente ao atrito de Coulomb; V_{sc} é o parâmetro referente ao atrito viscoso; F_s é o parâmetro referente ao atrito estático; V_s é a velocidade de *Stribeck*, parâmetro relacionado a este modelo.

Existem ainda modelos de atrito mais complexos com características dinâmicas, como os utilizados por Valdiero, 2005 e Pereira, 2006 para representar o atrito presente no cilindro hidráulico, chamado de modelo de Dupont (Dupont et al., 2000), baseado no modelo de LuGre (C. Canudas de Wit e Lischinsky, 1995), que considera as microdeformações presentes no contato entre as superfícies, assim como, a suas variações temporais. Neste modelo, ainda é presente uma parcela relativa ao atrito viscoso.

Diferentes autores podem utilizar diferentes modelos, ou uma combinação desses. Cunha, 2001 considera apenas a parcela do atrito viscoso, Bonchis et al., 1999, utilizam uma combinação dos modelos de atrito viscoso e de Coulomb, mesmo modelo utilizado no presente trabalho de dissertação. Esse modelo é adotado porque tende a se aproximar do de Stribeck para valores de velocidades maiores do que o da velocidade de Stribeck e, como se verá mais adiante no presente trabalho, é adequado para o estabelecimento de um problema convexo de otimização.

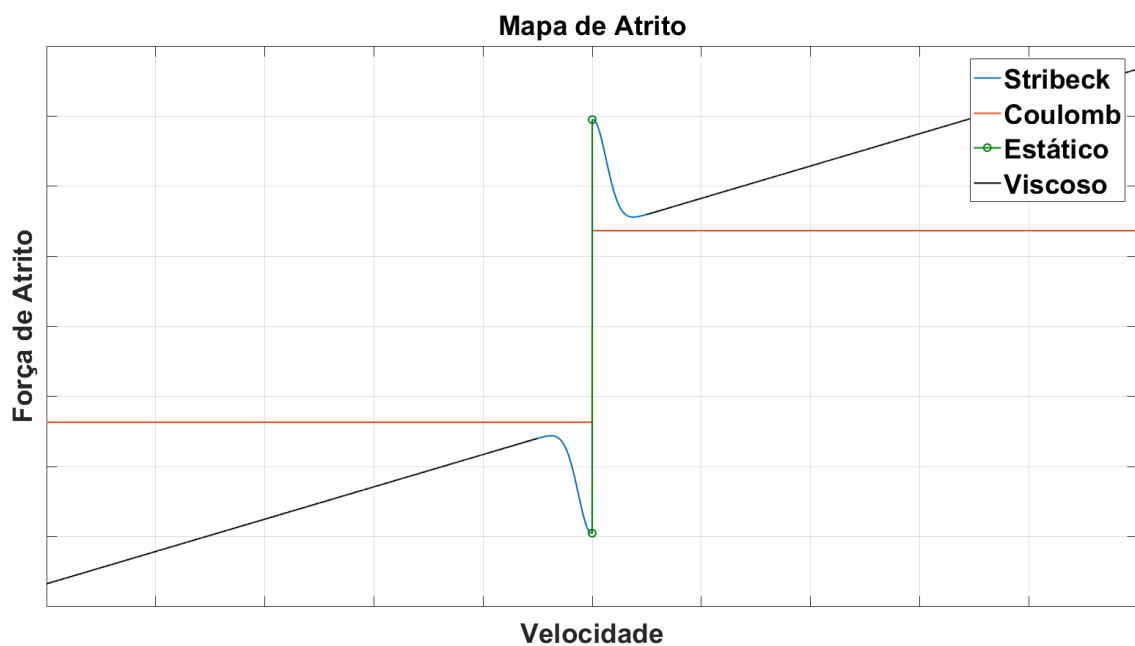


Figura 2.7 – Mapa de atrito - Combinação dos modelos *Stribeck*, Coulomb, Estático e Viscoso .

2.2.4 Dinâmica de manipuladores com atuadores hidráulicos

Conforme Valdiero, 2005, um robô hidráulico pode ser descrito como um subsistema hidráulico acoplado em um sistema mecânico (conforme a Figura 2.8) com a dinâmica de

cada subsistema agindo sobre a outra. Nesse fenômeno, que pode ser avaliado através da análise da Equação (2.1), os torques gerados pelos atuadores hidráulicos alteram o vetor de coordenadas generalizadas, \mathbf{q} . Além disso, de acordo com a Equação (2.22), a velocidade com que o pistão do atuador se desloca depende da carga e da inércia mecânica acoplada a este. A Figura 2.8 apresenta essa relação de dependência dinâmica entre os subsistemas, onde o vetor de posições (\mathbf{q}) e de velocidades ($\dot{\mathbf{q}}$) modificam a dinâmica dos atuadores, ao mesmo que as forças hidráulicas dos atuadores (\mathbf{f}_H) produzidas pelos atuadores alteram a dinâmica do subsistema mecânico.

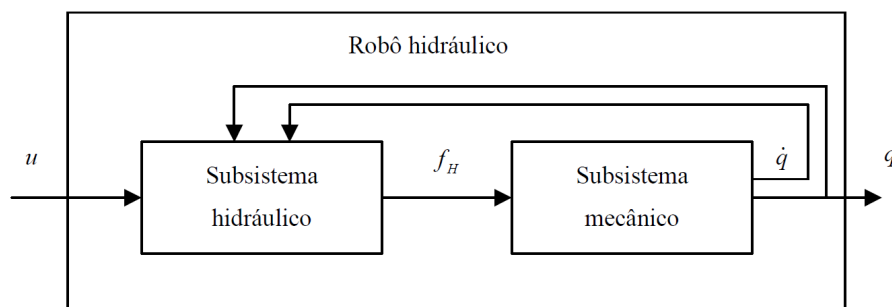


Figura 2.8 – Dependência entre as dinâmicas dos subsistemas hidráulicos e mecânicos [Valdiero, 2005].

Assumindo que os atuadores hidráulicos são lineares e que o robô em estudo tem juntas rotacionais, é apresentada a seguir uma análise que demonstra como o movimento linear dos atuadores se relaciona com as coordenadas generalizadas do robô. Com este intuito, Valdiero, 2005, faz uma dedução genérica para estes manipuladores a partir das características geométricas da estrutura do mesmo, obtendo a Matriz Jacobiana dos atuadores $\bar{\mathbf{J}}$, Equação (2.24), sendo seus elementos obtidos por meio da Equação (2.25).

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 & 0 \\ \ddots & \\ 0 & \bar{J}_i \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\bar{J}_i = \frac{\varphi y_i}{\varphi q_i} \quad (2.25)$$

Nas equações 2.24 e 2.25, y_i é o deslocamento linear da haste do i -ésimo atuador; q_i é a i -ésima coordenada generalizada.

Através da matriz da Equação (2.24) é obtida a relação entre as velocidades e acelerações lineares dos atuadores com as velocidades e acelerações angulares das coordenadas generalizadas de juntas da estrutura do robô, Equações (2.26) e (2.27), respectivamente.

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.26)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{J}}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{J}}}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.27)$$

Através do princípio do trabalho virtual, utiliza-se a matriz da Equação (2.24) para mapear as forças aplicadas na estrutura pelos atuadores hidráulicos nos torques de juntas equivalentes, resultando na Equação (2.28) [Craig, 2012; Ceccarelli, 2011].

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_L \quad (2.28)$$

onde \mathbf{f}_L é um vetor em que o elemento i representa a força de carga mecânica do i -ésimo atuador. O superíndice T indica que a matriz é transposta.

Substituindo a Equação (2.27) na Equação (2.22) e isolando o termo \mathbf{f}_L é obtida a Equação (2.29).

$$\mathbf{f}_L = -\mathbf{M}(\bar{\mathbf{J}}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{J}}}\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_{atr} - \mathbf{f}_G - \mathbf{f}_H \quad (2.29)$$

Reescrevendo as Equações (2.29) e (2.28) e substituindo-as em (2.1), é obtido o modelo dinâmico do sistemas formado pela estrutura do braço robótico e os atuadores hidráulicos, resultando na Equação (2.30).

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{J}}^T [-\mathbf{M}(\bar{\mathbf{J}}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{J}}}\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_{atr} - \mathbf{f}_G - \mathbf{f}_H] \quad (2.30)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz diagonal na qual o i -ésimo elemento representa a massa deslocada pelo i -ésimo atuador; \mathbf{f}_{atr} é um vetor onde o elemento i representa a força de atrito do i -ésimo atuador; \mathbf{f}_G é um vetor onde o elemento i representa a força gravitacional axial atuando sobre i -ésimo atuador; \mathbf{f}_H é um vetor onde cada elemento i representa a força hidráulica produzida pela diferença de pressão entre as câmaras do i -ésimo atuador.

Realizando um rearranjo da Equação (2.30), de modo a agrupar termos tanto ao mecanismo quanto aos atuadores, obtém-se a Equação (2.31).

$$[\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{J}}] \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{M} \dot{\bar{\mathbf{J}}}] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_G] + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_{atr} = \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_H \quad (2.31)$$

onde $[\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{J}}] \ddot{\mathbf{q}}$ é um vetor de torques inerciais nas juntas, incluindo uma parcela relativa aos elos e juntas do robô e outra que tem como origem a massa dos atuadores; $[\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{M} \dot{\bar{\mathbf{J}}}] \dot{\mathbf{q}}$ é o vetor de torques por forças centrípetas e de Coriolis, incluindo uma parcela relativa aos elos e juntas do robô e outra que tem origem nos atuadores; $[\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_G]$ é um vetor de torques que tem como origem forças gravitacionais, incluindo uma parcela relativa aos elos e juntas do robô e outra que tem como origem à massa dos atuadores; $\bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_{atr}$ é o vetor de torque que tem como origem o atrito dos atuadores e $\bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_H$ é o vetor de torque que tem como origem a força hidráulica dos atuadores.

Reescrevendo a Equação (2.31), substitui-se os termos inerciais por $\mathbf{H}(\mathbf{q})^*$, os termos relacionados aos torque de forças centrípetas e de coriolis por $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^*$, os termos com torque de origem gravitacional por $\mathbf{G}(\mathbf{q})^*$ e vetor de torque relativos a atrito como $\boldsymbol{\tau}_{atr}$, obtém-se a Equação (2.32). Logo, implica-se que $\mathbf{H}(\mathbf{q})^* = [\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{J}}] \ddot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^* = [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{M} \dot{\bar{\mathbf{J}}}] \dot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{G}(\mathbf{q})^* = [\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_G]$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})^* \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^* \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})^* + \boldsymbol{\tau}_{atr} = \bar{\mathbf{J}}^T \mathbf{f}_H \quad (2.32)$$

Valdiero, 2005, mostra que $\mathbf{H}(\mathbf{q})^*$ apresenta as mesmas propriedades presentes na Subseção 2.2.2.1 para $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, sendo ambas quadradas, simétricas e definidas positivas. Caso os elementos de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ estejam na forma dos símbolos de Christoffel, a matriz $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^*$, Equação (2.33), será igual à matriz $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, resultando dessa forma em $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^* = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q})^* - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^*$. Assim, obviamente,

$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^*$ possui as mesmas propriedades de $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ apresentadas na Subseção 2.2.2.1 [Siciliano et al., 2008].

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^* = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q})^* - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^* \quad (2.33)$$

A partir das relações geométricas da mecânica de acoplamento entre elos e atuadores, do uso da inversa da matriz Jacobiana dos atuadores ($\bar{\mathbf{J}}$) dada pela Equação (2.24), das relações presentes entre velocidade e aceleração, Equações (2.26) e (2.27), e da Equação (2.29) (que mapeia a relação entre força dos atuadores hidráulicos e os torques de juntas equivalente), é possível reescrever o modelo dinâmico do manipulador, Equação (2.31), em função das variáveis de atuador, resultando na Equação (2.34).

$$\begin{aligned} & [\mathbf{J}^{-T}\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{M}]\ddot{\mathbf{y}} + [\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) + \bar{\mathbf{J}}^{-T}\mathbf{H}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{J}}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{J}}})\mathbf{J}^{-1}]\dot{\mathbf{y}} + \\ & [\bar{\mathbf{J}}^{-T}\mathbf{G}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}_G] + \mathbf{f}_{atr} = \mathbf{f}_H \end{aligned} \quad (2.34)$$

Da mesma forma que foi feito com a Equação (2.31), é possível reescrever a Equação (2.34) agrupando seus termos e simplificando sua escrita, resultando na Equação (2.35).

$$\mathbf{H}(\mathbf{y})^{**}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})^{**}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}(\mathbf{y})^{**} + \mathbf{f}_{atr} = \mathbf{f}_H \quad (2.35)$$

onde $\mathbf{H}(\mathbf{y})^{**}\ddot{\mathbf{y}}$ corresponde a $[\mathbf{J}^{-T}\mathbf{H}(\mathbf{y})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{M}]\ddot{\mathbf{y}}$ que é um vetor de forças inerciais nas hastes dos atuadores, incluindo uma parcela relativa aos elos e juntas do robô e outra que tem como origem a massa dos atuadores; $\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})^{**}\dot{\mathbf{y}}$ corresponde a $[\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) + \bar{\mathbf{J}}^{-T}\mathbf{H}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{J}}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{J}}})\mathbf{J}^{-1}]\dot{\mathbf{y}}$ que é o vetor de forças por efeitos centrífugos e de Coriolis relativa aos elos e juntas do robô; $\mathbf{G}(\mathbf{y})^{**}$ corresponde a $[\bar{\mathbf{J}}^{-T}\mathbf{G}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}_G]$ que é um vetor de força que tem como efeitos gravitacionais, incluindo uma parcela relativa aos elos e juntas do robô e outra que tem como origem a massa dos atuadores; \mathbf{f}_{atr} e \mathbf{f}_H são termos já apresentados presentes na Equação (2.30).

2.3 Planejamento de Trajetórias

Craig, 2012, define trajetória como sendo uma histórico de posição, velocidade e

aceleração em função do tempo para cada grau de liberdade de um manipulador robótico. Para Biagiotti e Melchiorri, 2008, o problema do planejamento de trajetória está ligado a dois diferentes domínios, tempo e espaço, onde a trajetória, normalmente expressa em função do tempo, provê uma posição desejada para cada instante. Para tal, fatores como saturação dos atuadores, vibrações induzidas na carga e discretização no tempo devem ser considerados.

Segundo Angeles, 2006, movimentos de sistemas robóticos devem ser tão suaves quanto possível, evitando mudanças abruptas de posição, velocidade e aceleração. Tais situações demandam muita energia dos atuadores, inclusive sendo possível haver uma demanda que supere os seus limites físicos. No entanto, movimentos abruptos podem vir a ser necessários, como em situações que evitam colisões entre o robô e algum objeto. Craig, 2012, utiliza como definição de função suave aquela que a própria função, assim como sua primeira derivada, são contínuas. Ressaltando que para alguns casos é interessante que essa propriedade também se aplique à segunda derivada da função, em decorrência dos problemas que movimentos abruptos podem causar.

Siciliano et al., 2008, utilizam um conceito que destaca as diferenças entre caminho e trajetória. Estes autores definem o primeiro como os pontos, no espaço de trabalho ou de junta, que o manipulador deve seguir, sendo, portanto, uma descrição geométrica do movimento. Por outro lado, a trajetória trata do caminho submetido a uma lei temporal, definindo, além da posição, velocidades e acelerações em cada ponto.

As diferentes categorias de trajetórias estão apresentadas na Figura 2.9, onde são discriminadas como unidimensionais (sistemas com um grau de liberdade) e multidimensionais (sistemas com n graus de liberdade), onde a primeira é expressa por uma função escalar e a segunda por uma vetorial, sendo que a última oferece informações do movimento de cada junta. Ambas as categorias ainda podem ser divididas em trajetórias que são elaboradas somente a partir dos pontos iniciais e finais (ponto-a-ponto) ou trajetórias que são elaboradas a partir dos pontos iniciais, finais e intermediários (pontos de passagem) [Biagiotti e Melchiorri, 2008].

As trajetórias classificadas como multiponto, podem ainda ser subdivididas conforme a solução utilizada para sua otimização. Como resultado do método utilizado, a trajetória pode ter seu ajuste aos pontos intermediários realizado de duas formas: interpolação, onde a trajetória cruza os pontos definidos; ou de aproximação, onde a

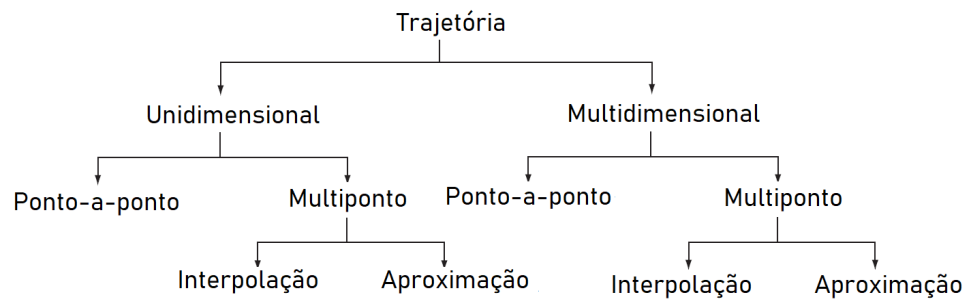


Figura 2.9 – Categorias Trajetórias. [Adaptado de Biagiotti e Melchiorri, 2008].

trajetória passa próximo destes, respeitando um limiar de tolerância de distância. Esta última é utilizada com intuito de melhorar as características da trajetória, como redução de velocidades e acelerações ao custo de diminuir a precisão, como exemplifica a Figura 2.10.

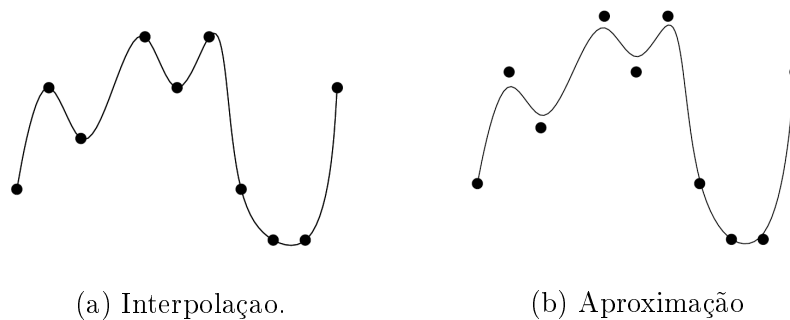


Figura 2.10 – Representação de trajetórias classificadas como de aproximação e de interpolação. [Adaptado de Biagiotti e Melchiorri, 2008]

Tratando-se de trajetórias multidimensionais e de um robô com diversos motores programados individualmente, se torna necessária a coordenação de diversos eixos de movimento para que seja obtida a trajetória desejada no espaço operacional. Assim como ressaltado na Seção 2.1, e exemplificado por meio da Figura 2.3, torna-se necessário obter sincronismo e controle de movimentos no espaço de junta e de atuador de modo que o efetuator realize o movimento desejado [Biagiotti e Melchiorri, 2008].

Biagiotti e Melchiorri, 2008, propõem uma forma de descrição da trajetória em duas partes: caminho geométrico p a ser seguido levando em consideração não só a posição mas também a orientação e lei de movimento $u(t)$, que define a forma com que caminho geométrico deve ser seguido ao longo do tempo, sendo o caminho geométrico uma função da lei de movimento ($p = p(u)$).

Em um manipulador, a curva a ser seguida pelo efetuador (ou caminho geométrico) será planejada baseada nas restrições da tarefa a ser executada, como a interpolação de um dado conjunto de pontos. Já, a lei de movimento será dada através das limitações de velocidade, aceleração e torques suportados pelos atuadores. A partir da lei de movimento e do caminho geométrico a ser seguido, é obtida a trajetória, expressa pela Equação (2.36).

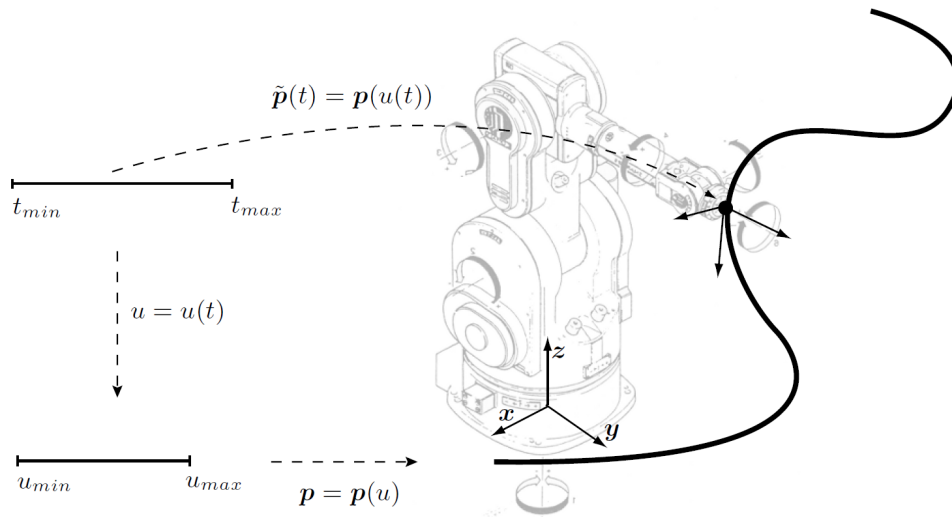


Figura 2.11 – Trajetória multidimensional definida no espaço de trabalho de um robô industrial. [Biagiotti e Melchiorri, 2008].

Uma vez obtida a trajetória do efetuador, devem ser utilizados os conceitos de cinemática inversa para obter as trajetórias de junta, onde o movimento é gerado e controlado. A Figura 2.11 apresenta um exemplo de trajetória de um robô. O caminho geométrico $p(u)$ é uma função da lei de movimento que é função do tempo ($u(t)$). Sendo assim, é possível descrever a trajetória a partir do percurso do caminho geométrico em função do tempo ($\tilde{p}(t)$).

$$\tilde{p}(t) = p(u(t)) \quad (2.36)$$

Segundo Craig, 2012, as trajetórias podem ser planejadas tanto no espaço de juntas quanto no espaço de trabalho, geralmente definido em coordenadas cartesianas. O primeiro caso normalmente é mais simples, visto que o planejamento pode ser descrito de forma individual para cada junta, sendo esses independentes entre si. Como

normalmente os pontos iniciais, intermediários e finais são definidos no espaço de trabalho, é utilizada a cinemática inversa em cada um desses, de modo a obter suas equivalências no espaço de juntas, sendo, a partir desses pontos, traçadas trajetórias suaves e com mesmo tempo de duração para cada uma das juntas. Garante-se, dessa forma, que os pontos desejados alcançarão os pontos de passagem no mesmo instante. Craig, 2012, comenta também existência de problemas geométricos ligados ao planejamento de trajetórias no espaço cartesiano, dentre eles, a possibilidade de trajetórias que ultrapassem o espaço de trabalho do manipulador ou que passem por singularidades cinemáticas. Estas singularidades ocorrem em regiões, nas quais, para haver uma baixa velocidade no espaço de trabalho, é necessária uma alta velocidade no espaço de junta, fenômeno que ocorre devido ao posto reduzido da matriz Jacobiana que relaciona esses dois espaços.

A complexidade envolvendo a definição do caminho torna inviável a especificação deste ser feita completamente pelo usuário, cabendo ao operador geralmente apenas a inserção de alguns parâmetros, como pontos iniciais e finais. Tipicamente, a lei temporal também é obtida a partir apenas de alguns parâmetros, não sendo especificada em cada ponto, apenas definindo as restrições no tempo, como, acelerações e velocidades máximas para trajetória como um todo ou para regiões de interesse. A partir dessas informações, é utilizado um algoritmo de planejamento de trajetórias responsável por gerar uma sequência de posições e orientações que o efetuador deve seguir ao longo do tempo, levando em conta as restrições existentes. Visto que o controle é realizado no espaço de juntas, deve-se utilizar cinemática inversa para obtenção do sinal de referência no espaço de juntas ao longo do tempo [Siciliano et al., 2008].

2.3.1 Trajetórias Polinomiais

Segundo Biagiotti e Melchiorri, 2008, para solução de problemas de trajetórias com $n + 1$ pontos podem ser utilizadas funções polinomiais de grau n , expressas por meio da Equação (2.37), onde, do ponto de vista matemático, o encontro de uma função que satisfaça as restrições impostas é obtida através da solução de um sistema linear com solução única correspondentes a $n + 1$ pontos conhecidos (t_k, q_k) , $k = 0, 1, \dots, n$.

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \quad (2.37)$$

onde $q(t)$ corresponde à posição de junta generalizada em função do tempo e a_k são coeficiente constantes.

A solução do problema consiste na resolução de um sistema de equações lineares, onde são construídos o vetor \mathbf{q} , correspondente às posições desejadas, o vetor \mathbf{a} , correspondente aos coeficientes do polinômios, e a matriz \mathbf{T} , correspondente aos tempos para alcançar cada uma das posições, conforme a Equação (2.38). É importante destacar que \mathbf{T} é sempre inversível se $t_{k+1} > t_k$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Desta forma, os elementos do vetor \mathbf{a} podem ser encontrados através da multiplicação da inversa da matriz \mathbf{T} em ambos os lados da igualdade, conforme a Equação (2.39).

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \dots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{a} \quad (2.38)$$

Na Equação (2.38), q_k são as posições de juntas desejadas nos instantes, t_k e a_k são as incógnitas, sendo $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q} \quad (2.39)$$

O uso de funções polinomiais apresenta como vantagens o fato de que a trajetória sempre poder cruzar os pontos de passagem fornecidos. Além disso, uma função polinomial pode ser facilmente descrita através de $n + 1$ coeficientes, possuindo todas as derivadas dentro do intervalo $[t_o, t_n]$ contínuas, sendo a n -ésima derivada constante e as de maior ordem nulas. Outro ponto positivo consiste no fato de que a trajetória $\mathbf{q}(t)$ é única. Como desvantagens, pode-se citar que para valores elevados de n , os resultados computacionais podem conter erros numéricos de arredondamento e exatidão. Outra dificuldade está associada ao fato de que, para um elevado número de pontos, é possível que os cálculos tenham uma carga computacional relevante. Outro problema reside na situação em que a alteração de apenas um ponto faz com que todos os coeficientes devam ser recalculados, sendo que, também a inserção de um novo ponto na trajetória eleva o grau do polinômio

que descreve a trajetória e que a trajetória resultante pode apresentar características oscilatórias não recomendadas para manipuladores. O acréscimo de restrições de velocidade ou aceleração em pontos iniciais, intermediários ou finais da trajetória também aumenta a ordem do polinômio que a descreve. Desta forma, uma trajetória descrita por um polinômio de ordem $n + 1$, ao serem acrescentadas k restrições, possui descrição através de um polinômio de ordem $n + 1 + k$.

2.3.2 Trajetórias a Partir de Segmentos Polinomiais

Craig, 2012, também considera a possibilidade de utilização de polinômios de primeira ordem para geração de trajetória, sendo realizada a interpolação entre os pontos inicial e final no espaço de juntas através de uma função polinomial de primeira ordem, o que não necessariamente resulta em uma função com mesmas características para descrever o deslocamento do efetuador, visto as características não lineares das relações cinemáticas entre espaço de trabalho e de junta. Este método apresenta problemas de continuidade de velocidade nos pontos iniciais, intermediários e finais. Como alternativa, é utilizada a combinação de polinômios para planejamento de trajetória, sendo utilizados polinômios de segundo grau em regiões próximas aos pontos iniciais, intermediários e finais visando a obter acelerações constantes e mudanças suaves de velocidades. Nas demais regiões, polinômios de primeiro grau são usualmente empregados. A Figura 2.12 apresenta uma trajetória genérica gerada a partir dessa metodologia, onde $\theta_{j,k,l}$ são pontos de trajetória vizinhos, t_{jk} é o intervalo de tempo com trajetória linear entre os pontos θ_j e θ_k e $t_{dj k}$ é o intervalo de tempo total de trajetória entre estes pontos.

2.3.3 Splines

Seguindo a mesma linha da utilização de combinação de funções polinomiais da Subseção 2.3.2, na ideia de garantir a continuidade na interpolação de pontos. As *splines* podem ser usadas como alternativa ao método de interpolação polinomial apresentado na Subseção 2.3.1, onde é utilizado um polinômio de grau n para a interpolação única de $n+1$ pontos. Biagiotti e Melchiorri, 2008, definem uma função *spline* de grau p como sendo uma função composta por n polinômios para definição de n segmentos de trajetória, sendo p definido conforme o grau de continuidade desejado para a função *spline*. Por exemplo,

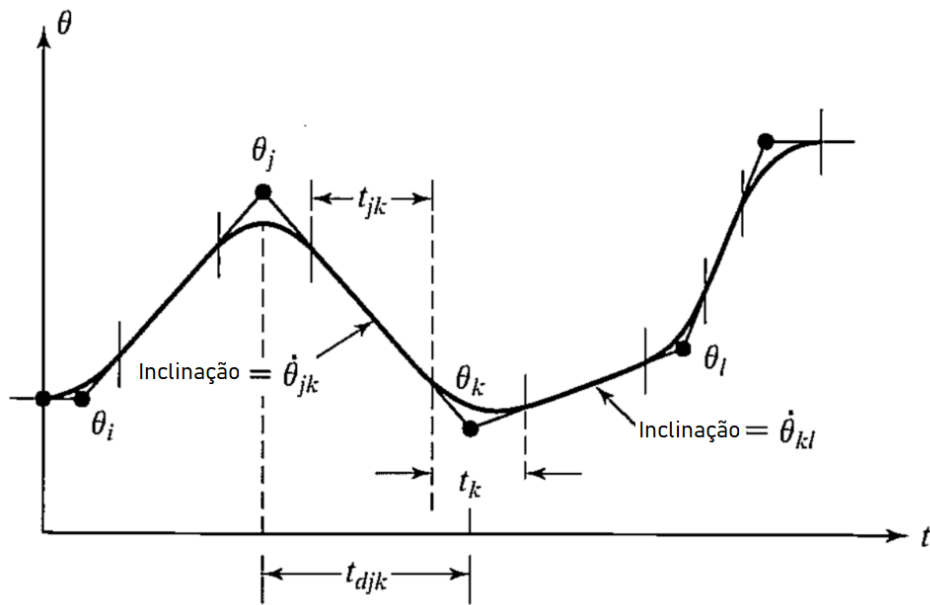


Figura 2.12 – Trajetória multiponto com funções lineares combinadas com funções parabólicas. Adaptado de [Craig, 2012].

para que sejam obtidas acelerações e velocidades contínuas no instante t_k , onde ocorre a transição entre segmentos, podem ser utilizados polinômios de grau $p = 3$, ou seja, *spline* cúbica, visto que para um segmento existem quatro restrições, duas de posição, uma de velocidade e outra de aceleração.

Craig, 2012, apresenta o conceito de *spline* utilizando dois polinômios cúbicos interconectados nos pontos de passagem (intermediários), onde as restrições impostas não especificam a velocidade nos pontos de passagem, mas, sim, a continuidade da velocidade e aceleração nesses pontos.

A Figura 2.13 representa um *spline*, onde a função $s(t)$ é formada por diferentes segmentos polinomiais, $q_k(t)$, unidos nos pontos q_k nos instantes t_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Em relação à interpolação polinomial, *splines* apresentam as vantagens de terem menos oscilações e maior suavidade, principalmente para um número mais elevado de interpolações ou variações abruptas entre pontos [Biagiotti e Melchiorri, 2008; Chapra, 2004].

A função geral de trajetória de um *spline* cúbico pode ser expressa por intermédio da Equação (2.40). Neste caso, é necessário encontrar 4 coeficientes para cada polinômio. Como são necessários n polinômios para $n + 1$ pontos, o total de coeficientes a serem

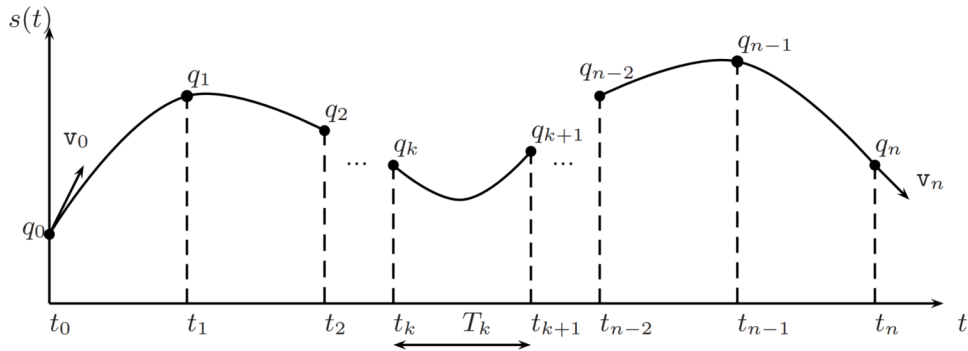


Figura 2.13 – Trajetória tipo *spline* para $n + 1$ pontos. Adaptado de [Biagiotti e Melchiorri, 2008].

encontrados é $4n$.

$$s(t) = q_k(t), t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.40)$$

$$q_k(t) = a_{k0} + a_{k1}(t - t_k) + a_{k2}(t - t_k)^2 + a_{k3}(t - t_k)^3$$

Segundo [Biagiotti e Melchiorri, 2008], para encontrar os $4n$ coeficientes, solucionando o problema, devem ser feitas as seguintes considerações:

- a) $2n$ condições são satisfeitas a partir das restrições relacionadas ao cruzamento das funções polinomiais que constituem a *spline* nos pontos intermediários e extremos (q_k);
- b) $n - 1$ condições são satisfeitas a partir da consideração de que a velocidade deve ser contínua nos pontos de transição;
- c) $n - 1$ condições são satisfeitas a partir da consideração de que a aceleração deve ser contínua nos pontos de transição.

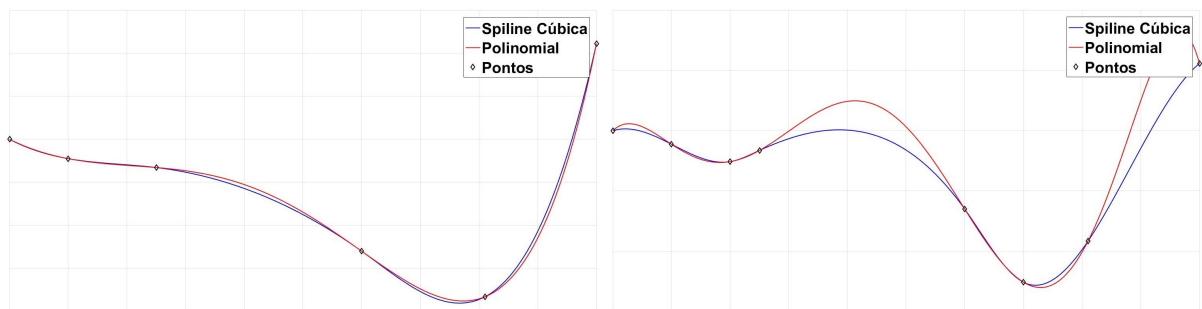
Desta forma, o sistema possui $4n$ coeficientes como incógnitas e $2n + 2(n - 1)$ restrições, sendo, portanto, um sistema indeterminado. Visando à solução do mesmo, pode ser escolhida uma das seguintes considerações abaixo para acréscimo de mais duas restrições e, assim, torná-lo um problema determinado:

1. velocidade inicial e final, $\dot{s}(t_0)$ e $\dot{s}(t_n)$;
2. aceleração inicial e final, $\ddot{s}(t_0)$ e $\ddot{s}(t_n)$;
3. velocidade inicial e final iguais, $\dot{s}(t_0) = \dot{s}(t_n)$, assim como, aceleração inicial e final, $\ddot{s}(t_0) = \ddot{s}(t_n)$, condição normalmente utilizada para *spline* cíclica;
4. continuidade de *jerk* em t_1 e t_{n-1} .

Segundo Biagiotti e Melchiorri, 2008, de maneira geral os *splines* apresentam as seguintes propriedades:

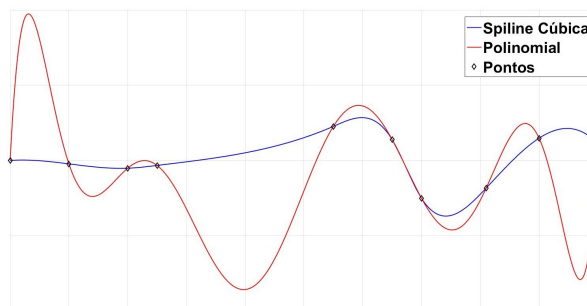
- a) são necessários $[n(p + 1)]$ parâmetros para definição de uma trajetória, sendo $s(t)$ de grau p interpolando n pontos (t_k, q_k) , $k = 0, 1, 2, \dots, n$;
- b) dados $n + 1$ pontos e $n - p$ restrições, a interpolação *spline* de grau p é única;
- c) o número de pontos dados não altera o grau p dos polinômios que formam o *spline*;
- d) a trajetória $s(t)$ possui continuidade até ordem $(p - 1)$;
- e) os *splines* ditos naturais apresentam a característica das segundas derivadas dos nós iniciais e finais serem nulas.

A Figura 2.14 exemplifica a interpolação de n pontos feita por meio de *splines* e polinômios, onde $n = 6, 8, 10$ para (a), (b) e (c), respectivamente. Além disso, a Figura 2.14 mostra que para interpolação polinomial, à medida em que o número de pontos aumenta, as oscilações da trajetória também, enquanto que para os casos de uso de *spline*, essa característica se mantém estável, já que a ordem dos polinômios que constituem os segmentos de *spline* que formam a trajetória não se alteram.



(a) Seis pontos.

(b) Oito pontos.



(c) Dez pontos.

Figura 2.14 – Interpolação polinomial e *spline*.

2.4 Otimização

Um método de otimização consiste em um algoritmo que, dentro de uma certa tolerância, busca a solução ótima, sob algum critério, de um problema [Goldbarg e Luna, 2005]. Desde a década de 1940 existe um empenho para desenvolvimento de novos algoritmos e análise de suas propriedades em diversos problemas de otimização. De acordo com diversos autores, a otimização de problemas consiste em minimizar ou maximizar uma função objetivo que pode ser mono ou multivariável em um determinado domínio [Boyd e Vandenberghe, 2004; Goldbarg e Luna, 2005]. Segundo Marti, 2015, a Equação (2.41) representa um problema genérico de otimização.

$$\begin{aligned}
 & \min f_0(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \\
 & \text{então} \\
 & f_i(\mathbf{a}; \mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_f \\
 & g_i(\mathbf{a}; \mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m_g \\
 & \mathbf{x} \in D_0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde f_0 é a função objetivo que se deseja otimizar, maximizando-a ou minimizando-a; f_i e g_i são as funções de restrição que um subconjunto deve satisfazer; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$ é um vetor das r entradas do modelo; $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_v)^T$ é o vetor dos v parâmetros do modelo. Os parâmetros das funções podem ser características de um material, como atributos de carga externa, fatores de custo, fatores operacionais, dentre outros. A função objetivo é otimizada visando a obter comando, decisão, desempenho, custo ou controle de um dado sistema de forma otimizada. As restrições representam a região de ocorrência ou de operação de um sistema ou processo, ou seja, descrevem as condições viáveis de solução. $D_0 \subset \mathfrak{R}^r$ consiste no espaço que abrange as possíveis soluções do problema de otimização. Ponto ótimo é o ponto formado pelas variáveis de entrada (\mathbf{x}) que otimizam a função objetivo. Valor ótimo é o valor da função objetivo no ponto ótimo.[Marti, 2015; Boyd e Vandenberghe, 2004]

Segundo Boyd e Vandenberghe, 2004, em um processo de otimização busca-se obter o ponto que minimiza (ou maximiza) a função objetivo dentro do espaço de possíveis soluções. No entanto, o resultado encontrado pode fornecer um ponto ótimo local, onde o valor é ótimo apenas para um espaço próximo ao ponto encontrado, não necessariamente

garantindo que não exista um outro ponto que resulte em um valor ótimo de melhor desempenho. Métodos que utilizam mínimos ou máximos locais podem ser rápidos e aplicados em larga escala, sendo úteis para casos em que se deseja apenas uma boa solução, não necessariamente a melhor. Seus resultados dependem criticamente das condições iniciais de busca e das características do problema, sendo necessário ajustes paramétricos do método para cada problema ou família de problemas.

Os métodos de otimização global são utilizados para casos em que encontrar o ponto (\mathbf{x}^*) que otimiza a função objetivo em todo domínio de busca ($D_0 \subset \mathbb{R}^r$), sendo relevante para casos de análise de sistemas críticos, por exemplo. Enquanto problemas de otimização local podem ser resolvidos de forma rápida, problemas de otimização global normalmente são empregados em problemas de poucas variáveis e de tempo de processamento não crítico, visto que, em certos casos, a carga computacional pode crescer de forma exponencial em relação ao tamanho do problema [Boyd e Vandenberghe, 2004].

2.4.1 Otimização Convexa

Os problemas de otimização matemática normalmente são classificados em famílias ou classes, caracterizadas por sua função objetivo e configuração de suas restrições. Dentre as diversas classes, o enfoque deste trabalho é em otimização convexa. Esta estratégia vem sendo trabalhada em estudos de várias áreas, como sistemas de controle, processamento de sinais, modelagem e em circuitos eletrônicos. Como vantagens, caracteriza-se pelo fato de que qualquer ponto ótimo local também é global, além de permitir soluções seguras e eficientes usando o método do ponto interior ou algum outro método especial para funções convexas. Os métodos do ponto interior¹ funcionam a partir de um ponto inicial dentro de uma região factível de soluções e, a partir deste, é analisada a vizinhança de modo a encontrar os pontos vizinhos que minimizem a função objetivo, o processo se repete até que o ponto ótimo seja encontrado [Boyd e Vandenberghe, 2004].

Um problema de otimização convexa possui o seguinte formato:

¹Maiores detalhes sobre o método do ponto interior podem ser encontrados em Boyd e Vandenberghe, 2004.

$$\begin{aligned}
& \min f_0(\mathbf{x}) \\
& \text{então} \\
& f_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \\
& i = 1, \dots, m_f
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde $f_0, \dots, f_m : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ são convexas e, por consequência, satisfazem a seguinte condição:

$$f_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \leq \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}) \tag{2.43}$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$ e todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ com $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Outro requisito para que a função seja convexa, é que seu domínio também seja, de modo que esse forme um conjunto (C) que satisfaça a Equação (2.44). Isso significa que qualquer reta formada por dois pontos quaisquer do conjunto também deve fazer parte do mesmo conjunto C para qualquer. A Equação 2.44, exemplifica essa condição através de um segmento de reta função de uma variável θ e formado pelos pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$, onde todos os pontos desse segmento também pertencem ao conjunto C para qualquer valor $0 \leq \theta \leq 1$.

$$\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta) \mathbf{x}_2 \in C \mid \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C \text{ e } \theta \in \mathfrak{R}, 0 \leq \theta \leq 1 \tag{2.44}$$

Para compreensão do conceito da convexidade é importante a definição do conceito de função afim. Boyd e Vandenberghe, 2004 definem uma função $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ como afim se essa é uma soma entre uma função linear e uma constante, *i.e.*, se f tem o formato $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^m$ e $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$.

Segundo Boyd e Vandenberghe, 2004, é possível formalizar as condições para convexidade em duas condições complementares que seguem:

- Condição de primeira ordem

Supondo que f seja diferenciável, ou seja, o gradiente existe para todo domínio $\mathbf{dom} f$. Então, f será convexa se e somente se $\mathbf{dom} f$ for convexo e a Equação (2.45)

for atendida:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mid \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{dom}f \quad (2.45)$$

onde a função afim de \mathbf{y} , dada por $f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ é a aproximação de primeira ordem da expansão em Série de Taylor de f em \mathbf{x} , sendo este um estimador do mínimo global. Logo, tem-se que para a função ser convexa, a aproximação de primeira ordem de Taylor deve ser um estimador do mínimo global. Caso a desigualdade seja estrita, sem a parcela referente à igualdade da inequação, a função será estritamente convexa.

- Condição de segunda ordem

Assumindo que f seja duplamente diferenciável, ou seja, sua Hessiana ou $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ existe para todo $\text{dom}f$, então f é convexa se e somente se $\text{dom}f$ é convexo e sua Hessiana é positiva definida, ou seja:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \succeq 0 \mid \mathbf{x} \in \text{dom}f \quad (2.46)$$

Isso implica que a função deve possuir uma curvatura positiva. Para uma função monovariável, sua segunda derivada deverá ser maior igual a zero, ou seja, sua primeira derivada deve ser crescente. Caso $\nabla^2 f(\mathbf{x}) \succ 0 \mid \mathbf{x} \in \text{dom}f$, a função será estritamente convexa, onde $\mathbf{X} \succeq \mathbf{Y}$ implica que $X_i \geq Y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Re^n$; $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$ implica que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é positiva-semidefinida para $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Re^{n \times m}$.

2.4.2 Otimização Aplicada ao Planejamento de Trajetórias

Nas últimas décadas, tem sido difundido cada vez mais o uso de robôs nas mais diferentes áreas, como medicina, agricultura, transporte e principalmente em aplicações industriais, envolvendo atividades de pintura, montagem, soldagem e *pick and place*. O planejamento de trajetória dedicado a uma dada aplicação é um aspecto importante no controle e programação dessas máquinas.

Visando a otimizar seu desempenho, algumas características das trajetórias podem ser otimizadas em seu planejamento, compensando erros e distúrbios que

ocorrem durante o movimento, ou, evitando a saturação dos atuadores, diminuindo o tempo de duração do ciclo de trabalho para aumento da produtividade ou reduzindo o consumo energético. Outros critérios frequentemente utilizados são a limitação de *jerk* ou da variação brusca dos torques ou forças com vistas a obter curvas mais suaves que reduzam vibrações mecânicas e preservem os componentes mecânicos do robô, além de permitir a obtenção de trajetórias factíveis, pois, que na prática, devido às suas dinâmicas internas, os atuadores não permitem mudanças instantâneas de torque/força. Especificamente em trajetória de tempo ótimo, é importante a utilização de algum critério direto ou indireto de redução ou limitação do *jerk*, pois a redução do tempo de duração da trajetória implica em valores elevados e variações bruscas de velocidade, aceleração e *jerk* [Abu-Dakka, 2011; Biagiotti e Melchiorri, 2008; Muller et al., 2012]. Nesta subseção são apresentadas algumas técnicas para planejamento de trajetória associadas a diferentes algoritmos e critérios de otimização.

Kim e Lee, 2015 destacam a complexidade dos problemas de otimização envolvendo casos de manipuladores com espaço de trabalho de dimensões elevadas e trajetórias com restrições dinâmicas, cinemáticas e de obstáculos. Ressaltando a recorrente utilização de algoritmos heurísticos para otimização no planejamento de trajetórias nesses casos, em razão da alta taxa de sucesso desses em problemas complexos, apesar de nem sempre apresentarem convergência para um mínimo global, característica dos métodos estocásticos. Kim e Lee, 2015 propõem a utilização de trajetória formadas por passos, onde cada um desses é codificado para implementação do algoritmo de enxame de partículas para otimização multi-critério, através de uma função custo que considera presença de obstáculos, distância percorrida, acelerações e modificações abruptas de trajetórias. Os autores afirmam que o método possui convergência rápida e que um valor da função custo do ponto ótimo encontrado é menor quando comparado com outros métodos estocásticos.

Missiaggia, 2014, propõe uma metodologia para planejamento de trajetórias com valores otimizados de *jerk*, aceleração ou velocidade para um robô cilíndrico pneumático em caminhos geométricos com pontos intermediários predefinidos. A partir dos pontos desejados no espaço de trabalho, é equacionada a cinemática inversa, obtendo os pontos no espaço de atuadores os quais são interpolados através *splines* de sétimo grau, com seus parâmetros ajustados conforme critério de otimização desejado. O uso de *splines*

de sétimo grau garante a continuidade da trajetória de posição e de suas três primeiras derivadas, requisito utilizado em várias estratégias de controle. A metodologia proposta garante a redução do *jerk*, assim como, um erro de posição nos pontos intermediários dentro de uma tolerância previamente especificada.

Izquierdo, 2017, utiliza *b-splines* de 5^a e 7^a ordem para planejamento de trajetórias livres de colisão de um robô cilíndrico pneumático. Para tanto, utiliza diferentes algoritmos estocásticos: enxame de partículas, genético e vagalumes tendo como critério de otimização a minimização das forças nos atuadores utilizando as restrições cinemáticas e dinâmicas associadas às características de um manipulador pneumático. O autor obteve resultados satisfatórios e baixo erro de posição em sua implementação. O autor ainda realiza comparação entre os resultados do método proposto e os apresentados por Missiaggia, 2014, concluindo que ambos apresentam erro de posição equivalentes que, segundo o autor, podem estar associados, em parte, às características do controlador utilizado. Assim como este trabalho de dissertação, os trabalhos desenvolvidos por Missiaggia, 2014 e Izquierdo, 2017 foram desenvolvidos junto ao Laboratório de Mecatrônica e Controle (LAMECC) da UFRGS, que vem desenvolvendo nos últimos anos pesquisas vinculadas à área de robótica.

Abu-Dakka et al., 2012, propõem uma metodologia para planejamento de caminhos geométricos livres de colisão em robôs industriais, tendo como critério de otimização a redução da distância percorrida entre os pontos inicial e final implementando um algoritmo genético em populações paralelas de *strings* aleatórias, levando em conta restrições cinemáticas e colisões não só do efetuador com obstáculos mas também da estrutura do braço. Apesar do elevado tempo computacional para processamento do algoritmo proposto, os resultados foram considerados satisfatórios, reduzindo a distância percorrida pelo efetuador quando comparado com outros trabalhos e mostrando-se aplicáveis para manipuladores industriais em geral. Abu-Dakka, 2011, aplica algoritmos genéticos de populações paralelas para a formulação de caminhos geométricos que evitem obstáculos do espaço de trabalho e que também reduzam a distância percorrida pelo efetuador. O planejamento de trajetória é realizado objetivando a redução do tempo de percurso e considerando restrições cinemáticas, dinâmicas e o desvio de obstáculos presentes no espaço de trabalho, demonstrando redução significativa do tempo de trajetória quando comparado com outros métodos.

Segundo Gao et al., 2015, o planejamento de trajetórias é essencial para o movimento de manipuladores robóticos, podendo aumentar a eficiência do movimento, reduzir o consumo de energia e prolongar a vida útil do sistema. Técnicas de otimização no planejamento de trajetórias podem ser aplicadas, sendo que os principais critérios utilizados estão relacionados à redução do *jerk* e tempo ótimo (mínimo). Para planejamento de trajetória de um robô de seis GDL, Gao et al., 2015, utilizam um método de interpolação polinomial, dividindo a trajetória em três segmentos intermediários entre quatro pontos. Para o primeiro e último segmentos são utilizados polinômios de quarta ordem e, para o segmento intermediário, é utilizado polinômio de terceira ordem, sendo aplicado o critério de tempo mínimo de trajetória através da utilização do algoritmo de otimização de enxame de partículas a partir de valores fixos de velocidade e aceleração para cada junta como restrição. No entanto, o método permite apenas a utilização de caminhos geométricos mais simples, formados por poucos pontos, visto que trajetória é dividida apenas por três segmentos.

Bobrow et al., 1985, e Shin e McKay, 1985, foram pioneiros ao apresentarem métodos para solução de problemas relacionados ao tempo mínimo em caminhos predeterminados com parametrização do caminho. A ideia dos métodos é que, respeitando os limites de torque do atuador, a trajetória sempre esteja na curva de máxima velocidade, reduzindo assim o tempo de trajetória. O problema dessas propostas consiste que, para que o manipulador esteja sempre com máxima velocidade, torna-se necessário que operem sempre com máxima aceleração ou desaceleração (*bang-bang control*), o que causa pontos de chaveamento entre esses dois estados, implicando em variações bruscas de toques que, por consequência, causam valores elevados de *jerk*.

A fim de obter soluções com maior aplicabilidade prática, visto que os métodos de Bobrow et al., 1985, e Shin e McKay, 1985, apresentam problemas tanto para implementação de leis de controle quanto relacionadas às características físicas dos manipuladores robóticos. Pfeiffer e Johanni, 1986, propõem a utilização de controle ótimo, programação dinâmica e adicionam critérios relacionados ao quadrado da velocidade e do torque para encontrar trajetórias ótimas em relação ao tempo que apresentem maior suavidade. Shiller, 1996, também utiliza parametrização do caminho para otimização de trajetórias em relação ao tempo através de *shooting methods* e

princípios de controle ótimo. Ainda acrescenta à função objetivo uma parcela relacionada ao consumo energético, aumentando assim, o tempo de percurso, mas com trajetórias mais suaves, diminuindo as variações bruscas de torque.

Verscheure et al., 2009, apresentam uma abordagem inédita garantindo que qualquer mínimo local também seja mínimo global, aplicando otimização convexa para solução de problemas de trajetórias de tempo mínimo. Esta abordagem foi utilizada posteriormente em vários outros trabalhos. Para tanto, usando troca de variáveis reescrevem o problema permitindo a utilização de otimização convexa para que, em caminhos predefinidos e com restrições de velocidade, torque e aceleração, fosse encontrada a trajetória ótima a partir de critérios de tempo e consumo de energia, sendo o último critério utilizado para suavização da trajetória. O método proposto desconsidera as forças de atrito do modelo dinâmico e apresenta descontinuidades que causam variações bruscas de torque e aceleração.

Com intuito de aumentar produtividade, deseja-se que, dentro das limitações da tarefa, o movimento do efetuador seja tão rápido quanto possível. Com este intuito, Muller et al., 2012, desenvolveram uma metodologia determinística através de mudanças de variáveis, parametrização do caminho e controle ótimo que leva em consideração restrições da dinâmica do manipulador, fixando valores máximos de velocidade em cada junta e torque máximo produzido pelos atuadores, assim como, a taxa de variação do torque para obter trajetórias com requisitos de suavidade e tempo ótimo. As curvas cinemáticas e dinâmicas apresentadas para as trajetórias aproximam-se das curvas de valores limite, apontando para resultados positivos do método quanto à redução do tempo de percurso. Os autores apontam que, pelo método ser baseado em modelos dinâmicos, variações paramétricas podem vir a afetar os resultados do planejamentos de trajetórias.

A partir de restrições cinemáticas envolvendo valores fixos para máxima velocidade em cada junta de um braço robótico, Somlo e Molnar, 2010, propõem uma metodologia baseada na análise cinemática e na parametrização do caminho geométrico predefinido para planejar o movimento de um robô, de modo que este seja realizado em tempo ótimo. Nota-se que a proposta aponta que, para aplicação prática, o torque necessário para o movimento do robô deve ser menor de que o torque disponível nos atuadores. No entanto, esses fatores não são levados em conta na metodologia de planejamento de movimento.

A proposta apresenta forte dependência das características cinemáticas mais simples que o manipulador de enfoque do trabalho apresenta, sendo necessárias modificações para generalização e conseqüente aplicação em manipuladores quaisquer.

Gasparetto e Zanutto, 2007 propõe a utilização de *b-splines* de 5ª ordem e SQP (*Sequential Quadratic Programming*) para planejamento de trajetória com restrições de velocidade, aceleração e *jerk*. Tendo como função objetivo a composição de termos relacionados com a minimização do tempo de trajetória e do *jerk*, o método apresentou redução nos valores médios e máximos de acelerações e *jerk* de junta para quase todas juntas de um robô de 6 GDL, quando comparado com outros trabalhos. Os autores não realizam comparações do tempo de trajetória, dada a prioridade em obter-se curvas mais suaves e não de tempo mínimo.

Kaserer et al., 2018, propõem o planejamento de caminhos sub-ótimos a partir de *b-splines* e otimização via programação dinâmica. Vários métodos de otimização de trajetória propõem restrições que não possibilitam aplicação prática das mesmas, visto que não consideram limites de *jerk* ou em todo espaço ou só consideram esses limites para determinadas regiões. Para obter um caminho que possibilite a trajetória factível mais rápida, Kaserer et al., 2018, consideram limitações de *jerk*, atrito viscoso e de Coulomb e as características do torque produzido pelo motor, visto que as características dinâmicas do atuador, assim como o atrito, limitam o torque nas juntas do robô.

Reiter et al., 2018, aplicam a metodologia para planejamento de trajetórias com tempo ótimo para robôs redundantes, respeitando limitações práticas importantes necessárias para aplicação como, limites de velocidade, aceleração, torque/forças, continuidade e consideração das forças de atrito (viscoso e de Coulomb). Segundo os autores, é proposto pela primeira vez na literatura uma metodologia que fornece meios para efetiva implementação prática. Para tal, utilizam substituição de variáveis e aplicação da cinemática inversa de ordem superior (posição, velocidade, aceleração, *jerk* e *jounce*). Os autores apresentam o problema como de programação não linear, com a qual, segundo os autores, pode-se aplicar diversos métodos já disponíveis em ferramentas computacionais, como por exemplo Ipopt 3.12.3. e CasADi, apresentando resultados com alto custo computacional e problemas de convergência para casos específicos.

Kong et al., 2013, utilizam os mesmos princípios da otimização convexa e modelo

dinâmico apresentados por Verscheure et al., 2009, em conjunto com interpolação com *b-splines* de 3ª ordem, de modo a garantir a continuidade da trajetória e redução de *jerk*. Kong et al., 2013, usam *nonlinear optimization* (SeDuMI) para obtenção de trajetórias de tempo ótimo com limitação de torque e velocidade e, logo após, realizam interpolação via *b-splines* para suavização da curva e conseqüente redução de *jerk* em relação ao método de Verscheure et al., 2009. No entanto, o método utiliza caminhos descritos diretamente no espaço de variáveis de parametrização, não sendo possível avaliar os resultados da interpolação no espaço de trabalho.

Visto que o equacionamento, tanto do *jerk* quanto da variação de torque, são não convexos, Zhang et al., 2013, utilizam linearização de modo que se obtenha uma aproximação convexa da variação de torque. Seguindo essas considerações, utilizam *b-splines* de terceira ordem para obter trajetórias de tempo ótimo com torque e sua derivada no tempo com continuidade e limitação, sem considerar em seu modelo dinâmico forças de atrito. O método proposto divide-se em duas etapas, a primeira utiliza os valores reais da variação do torque, onde não é obtida a convergência numérica, e, em segundo momento, são utilizados os dados da primeira etapa para obter-se uma aproximação da variação de torque. A partir desse método, são feitas comparações sobre a influência da inserção do limite da variação do torque no tempo total de trajetória, havendo um aumento aproximado de 75% para o caso de estudo.

Palleschi et al., 2019, também utilizam os conceitos de otimização convexa de Verscheure et al., 2009, para formulação de trajetórias com tempo ótimo e acelerações contínuas e limitações de *jerk*. Para resolver o problema de convexidade presente na equação que descreve o *jerk*, é utilizada a relaxação de McCorminck, possibilitando, dessa forma, sua solução via métodos de otimização convexa. Palleschi et al., 2019, ainda explanam sobre possíveis soluções através da utilização de restrições e modelos dinâmicos. No entanto, utilizam apenas restrições cinemáticas em seu método. Os resultados apresentados são considerados satisfatórios pelo autor, visto que os limites cinemáticos são atendidos para os casos apresentados. Contudo, aspectos ligados à garantia da continuidade do *jerk* não são explorados.

Debrouwere et al., 2013, utilizam decomposição DC (*difference of convex*) para reescrever a equação do *jerk*, de modo que essa se torne convexa. Dessa forma aplicam transformações sucessivas da variável de parametrização do caminho para variáveis de

junta e posteriormente para o espaço cartesiano, aplicando limitações de torque, velocidade, aceleração e *jerk* para otimização de tempo mínimo. Em seu trabalho, não são considerados efeitos de atrito no modelo dinâmico nem considerações sobre continuidade da trajetória.

Seguindo a mesma linha de otimização convexa e parametrização do caminho, Reynoso-Mora et al., 2016, utilizam *splines* normalizadas de grau dois para garantir continuidade de velocidade e aceleração em trajetórias de tempo ótimo. Utilizam variáveis de relaxação na função objetivo para reduzir o *jerk*, mas sem limitá-lo a valores específicos. Apresentam ainda a utilização de um modelo dinâmico com forças de atrito (Coulomb e viscoso) junto ao problema de otimização.

Como exposto, os problemas de otimização de trajetórias podem apresentar diferentes enfoques, como, por exemplo, suavidade, tempo de percurso e consumo energético. Os métodos de otimização podem ser heurísticos ou determinísticos, sendo neste trabalho utilizada a última categoria. Propostas que envolvem tempo ótimo e parametrização de caminhos têm sido empregados por diversos autores, como Bobrow et al., 1985, Shin e McKay, 1985 e Shiller, 1996. A partir da proposta desenvolvida por Verscheure et al., 2009, métodos que envolvem parametrização de caminhos e otimização convexa têm sido aplicados pelas características desse tipo de problema em relação à garantia de solução ótima global e à existência de métodos consolidados de solução, conforme exposto na Subseção 2.4.1. Essa mesma linha vem sendo desenvolvida por outros autores como Palleschi et al., 2019 e Reynoso-Mora et al., 2016, que têm explorado aspectos ligados à suavidade das trajetórias obtidas. A partir do mesmo segmento, aplica-se neste trabalho os conceitos de parametrização do caminho geométrico predefinido e otimização convexa para elaboração de um método de planejamento de trajetórias de tempo ótimo, detalhado no Capítulo 4.

3 O ROBÔ HIDRÁULICO

A metodologia de planejamento de trajetória utilizada neste trabalho possui aplicabilidade em diversos tipos de robôs. Contudo, o seu foco está centrado em robôs seriais com atuadores hidráulicos lineares. Dessa forma, com intuito de realizar implementação do algoritmo de otimização para o planejamento de trajetórias, são utilizados os mesmos parâmetros fornecidos por Valdiero, 2005, apresentando aqui parte de suas características cinemáticas e dinâmicas, juntamente com a metodologia utilizada para obtenção dos seus limites cinemáticos e dinâmicos do manipulador. O desenho do robô está apresentado na Figura 3.1.

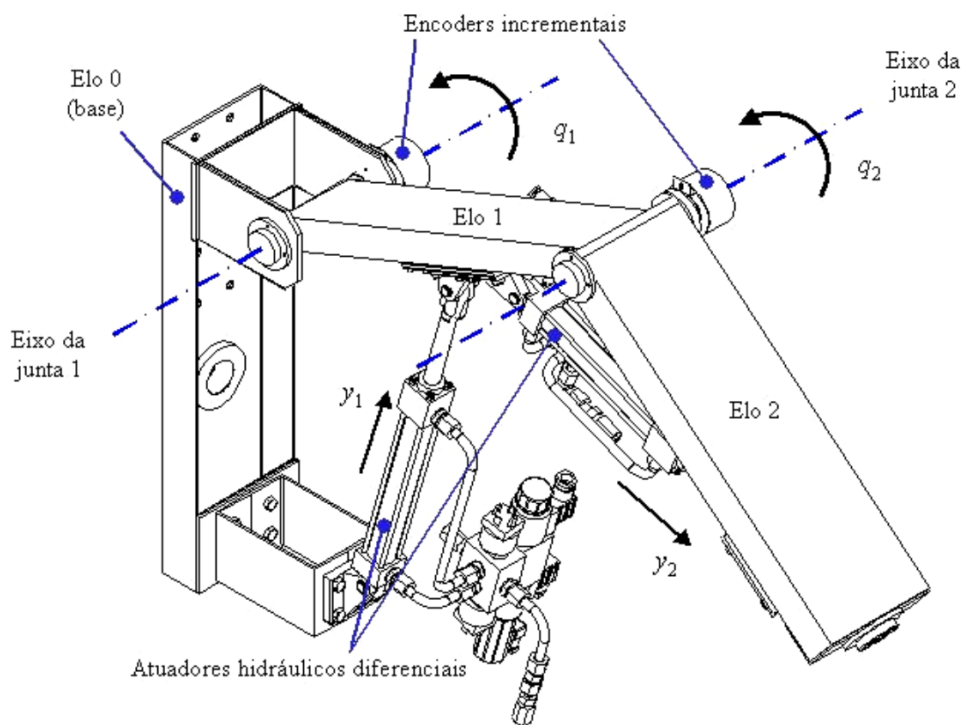


Figura 3.1 – Desenho do manipulador robótico [Valdiero, 2005].

O princípio de funcionamento básico do manipulador se dá a partir das válvulas de controle do atuador que ocasionam uma diferença de pressão entre as câmaras do cilindro hidráulico. Conforme o princípio de funcionamento apresentado no Capítulo 2, essa pressão diferencial produz uma força hidráulica que é aplicada nos elos, produzindo torques que tendem a alterar, tanto as posições de junta (q_1, q_2) quanto das hastes dos cilindros (y_1, y_2). Os atuadores são acoplados aos elos através de peças fixas em relação à estrutura mecânica mas com grau de liberdade de rotação em relação à ponta da haste,

implicando em relações cinemáticas entre elos e atuadores. Os elos são acoplados entre si através de juntas rotacionais, que possuem como sensores *encoders* incrementais de posição.

3.1 Cinemática

Assim como expresso na Subseção 2.2.1 e na Figura 3.2, existem relações cinemáticas entre os espaços de trabalho, junta e atuador, sendo possível dessa forma que um ponto em um dos espaços possa ser mapeado em outro em função das características geométricas do robô. A partir da convenção de Denavit-Hartenberg (DH), obtém-se as relações de referência para cada elo. Os pontos A_1, B_1, A_2 e B_2 são fixados no primeiro quadrante de cada sistema de coordenada. Sendo esses sistemas estáticos em relação à estrutura mecânica do braço, mas com grau de liberdade de rotação em relação à ponta da haste do atuador hidráulico. Os pontos O_{i-1} são as origens dos sistemas de coordenadas de cada elo.

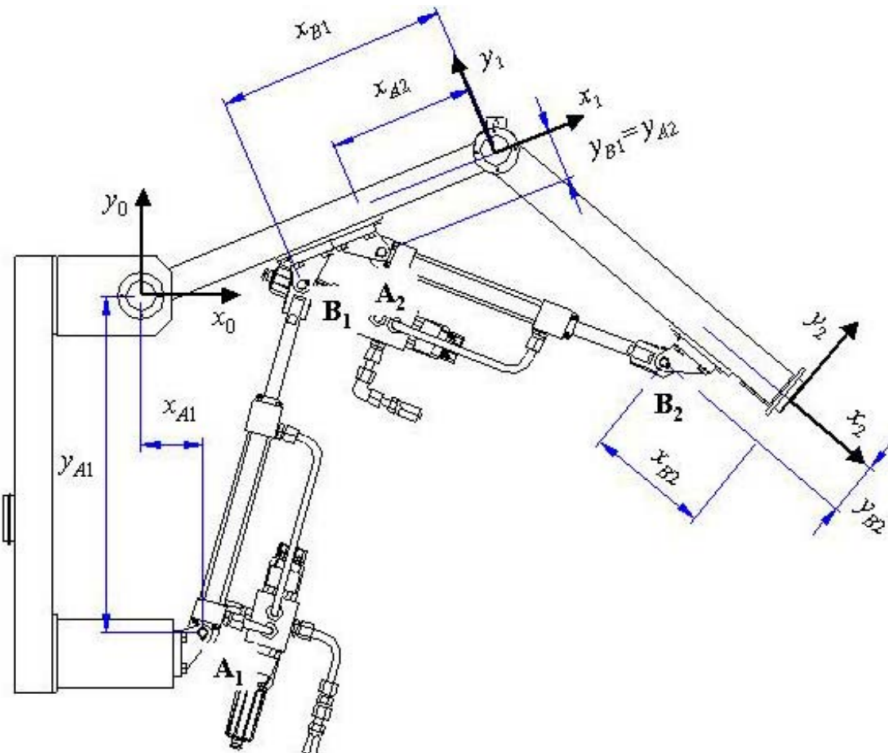


Figura 3.2 – Vista lateral do manipulador robótico. [Valdiero, 2005]

Para a determinação das relações cinemáticas, é formado um triângulo entre os pontos O_{i-1}, A_i e B_i , conforme a Figura 3.3. Assim, a partir da lei dos cossenos dos

triângulos, é possível relacionar o ângulo β com o deslocamento da haste y_i .

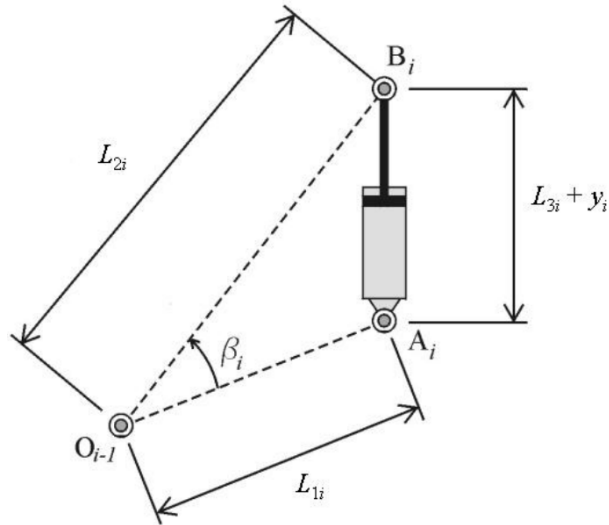


Figura 3.3 – Representação geométrica da transmissão entre junta rotativa e atuadores lineares. [Valdiero, 2005]

Na Figura 3.3, L_{1i} são os segmentos de reta formados pelos pontos O_{i-1} e A_i , expressos pela Equação (3.1); L_{2i} são os segmentos de reta formados pelos pontos O_{i-1} e B_i , descritos pela Equação (3.2); L_{3i} é comprimento do atuador para $y_i = 0$. Na notação adotada, as grandezas com subíndice i são pertencentes ao i -ésimo elo.

$$L_{1i} = \overline{O_{i-1}A_i} = \sqrt{x_{A_i}^2 + y_{A_i}^2} \quad (3.1)$$

$$L_{2i} = \overline{O_{i-1}B_i} = \sqrt{(a_i + x_{B_i})^2 + y_{B_i}^2} \quad (3.2)$$

onde a_i são os parâmetros cinemáticos obtidos pela convenção de Denavit-Hartenberg do i -ésimo elo, constituídos pela distância normal comum entre os eixos de junta que, para o caso em análise, corresponde ao comprimento dos elos.

A função que relaciona o deslocamento angular de junta (q_i) e linear de atuador (y_i) é obtido através dos conceitos da geometria plana e pode ser expresso por meio da Equação (3.3).

$$y_i = \sqrt{L_{1i}^2 + L_{2i}^2 - 2|L_{1i}||L_{2i}|\cos(q_i - \Delta\varphi_i)} - L_{3i} \quad (3.3)$$

onde $\beta = q_i - \Delta\varphi_i$; $\Delta\varphi_i$ é a diferença entre os ângulos φ_{1i} , formados pelos vetores x_i e

os segmentos de reta $\overline{O_{i-1}A_i}$, expresso pela Equação (3.5), e φ_{2i} , formados pelos vetores x_i e os segmentos de reta $\overline{O_{i-1}B_i}$, descrito pela Equação (3.6). Na notação adotada, as grandezas com subíndice i são pertencentes ao i -ésimo elo.

$$\Delta\varphi_i = \varphi_{1i} - \varphi_{2i} \quad (3.4)$$

$$\varphi_{1i} = \text{atan} \left(\frac{y_{Ai}}{x_{Ai}} \right) \quad (3.5)$$

$$\varphi_{2i} = \text{atan} \left(\frac{y_{Bi}}{a_i + x_{Ai}} \right) \quad (3.6)$$

Da mesma forma, pode-se isolar q_i da Equação (3.3) visando à obtenção da cinemática inversa e obter q_i a partir de y_i . A partir ainda da Equação (3.3) em conjunto das Equações (2.24), (2.26) e (2.27) podem ser obtidas as matrizes jacobinas dos atuadores e, posteriormente, as relações de aceleração e velocidade entre os espaços de junta e atuador.

Outro aspecto importante é relacionar a cinemática presente entre os espaços de junta e de trabalho. Para robôs seriais com dois graus de liberdade essa relação apresenta abordagens fornecidas por diversos autores, como, por exemplo, em Craig, 2012, Cesconeto, 2018 e Siciliano et al., 2008. As posições de junta (q_1, q_2) e do efetuador no espaço cartesiano (X_P, Y_P) podem ser expressas por meio das Equações (3.7) e (3.8), obtidas facilmente através de projeção dos elos nos eixos do plano do espaço de trabalho.

$$X_P = a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \quad (3.7)$$

$$Y_P = a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \quad (3.8)$$

O equacionamento da cinemática inversa apresentada por Siciliano et al., 2008 e Cesconeto, 2018, é expresso por meio das Equações (3.9) e (3.10), onde leva-se em consideração que, devido às características construtiva do robô, o ângulo da junta um

(q_1) sempre será positivo e o ângulo de junta 2 (q_2) sempre será negativo.

$$q_2 = \text{atan2} \left(-\sqrt{1 - \frac{a_1^2 + a_2^2 - X_P^2 - Y_P^2}{2a_1 a_2}}, -\frac{a_1^2 + a_2^2 - X_P^2 - Y_P^2}{2a_1 a_2} \right) \quad (3.9)$$

$$q_1 = \text{atan2} \left(\frac{Y_P(a_1 + a_2 \cos(q_2)) - X_P a_2 \sin(q_2)}{X_P^2 + Y_P^2}, \frac{X_P(a_1 + a_2 \cos(q_2)) + Y_P a_2 \sin(q_2)}{X_P^2 + Y_P^2} \right) \quad (3.10)$$

Através da matriz Jacobiana, apresentada na Equação (3.11), que relaciona as variações presentes entre espaço de trabalho e de junta, pode-se obter o mapeamento entre velocidade e acelerações entre esses mesmos espaços, por intermédio da Equação (3.12).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial q_1} & \frac{\partial Y_P}{\partial q_1} \\ \frac{\partial X_P}{\partial q_2} & \frac{\partial Y_P}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(q_1) - a_2 \sin(q_1 + q_2) & -a_2 \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) & a_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.12)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}$$

Na Tabela 3.1 estão apresentados os parâmetros cinemáticos do robô utilizado nas simulações.

Tabela 3.1 – Parâmetros cinemáticos.

Parâmetro	Atuador 1 ($i = 1$)	Atuador 2 ($i = 2$)
Posição do ponto A_i	$x_{A1} = 0,094 \text{ m}$ $y_{A1} = -0,440 \text{ m}$	$x_{A2} = -0,188 \text{ m}$ $y_{A1} = -0,066 \text{ m}$
Posição do ponto B_i	$x_{B1} = -0,300 \text{ m}$ $y_{B1} = -0,115 \text{ m}$	$x_{B2} = -0,115 \text{ m}$ $y_{B2} = -0,071 \text{ m}$
Parâmetro da convenção de DH (a_i)	0,5 m	0,5 m
Ângulo construtivo (φ_{1i})	-1,360 rad	-2,804 rad
Ângulo construtivo (φ_{2i})	-1,042 rad	-2,622 rad
$\Delta\varphi_i$	-1,042 rad	-2,622 rad
Distância entre A_i e o eixo de junta (L_{1i})	0,450 m	0,199 m
Distância entre B_i e o eixo de junta (L_{2i})	0,211 m	0,392 m
Distância entre os pontos A_i e B_i (L_{3i})	0,470 m	0,405 m
Limite de deslocamento da haste	$\pm 0,1 \text{ m}$	$\pm 0,075 \text{ m}$

Utilizando os limites dos parâmetros cinemáticos, apresentados na Tabela 3.1, e o mapeamento de posição entre os espaços de atuador, junta e de trabalho, descrito por meio das Equações (3.7), (3.8) e (3.3), pode-se a partir dos limites de deslocamento da haste dos atuadores e dos conceitos de cinemática direta obter o plano de trabalho do robô, o qual está apresentado na Figura 3.4.

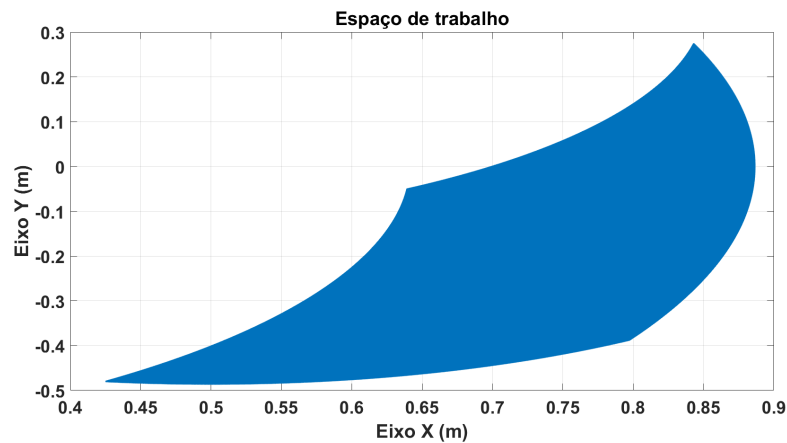


Figura 3.4 – Plano de trabalho do robô hidráulico.

A partir do plano de trabalho é possível definir um caminho geométrico pertencente a este e aplicar os conceitos de cinemática inversa e direta. Com isso, pode-se obter, a partir das posições do espaço de trabalho, o caminho geométrico equivalente no espaço de atuador e, da mesma forma, realizar o processo inverso, retornando ao caminho original no espaço de trabalho. Com esse intuito, é utilizada a elipse descrita pela Equação (3.13) que é graficada em conjunto com o espaço de trabalho na Figura 3.5.

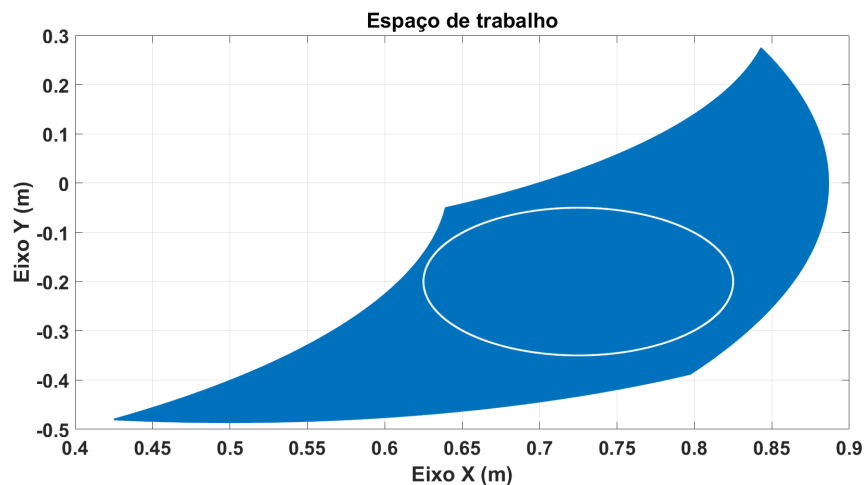


Figura 3.5 – Exemplo de caminho geométrico no plano de trabalho.

$$\frac{(X_P - 0.725)^2}{0.1^2} + \frac{(Y_P + 0.2)^2}{0.15^2} = 1 \quad (3.13)$$

As representações do caminho geométrico da Equação (3.13) no espaço de junta e de atuador são graficadas nas Figuras 3.6 e 3.7, respectivamente.

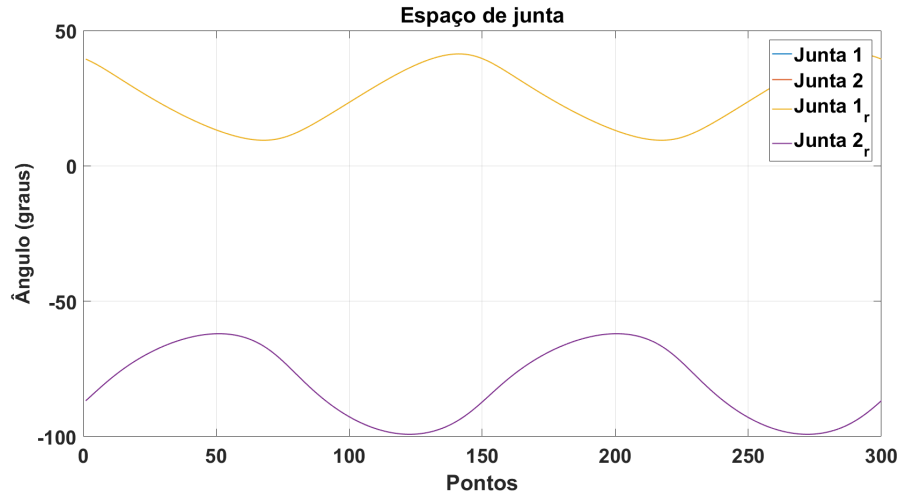


Figura 3.6 – Representação do caminho geométrico no espaço de junta.

A Figura 3.6 apresenta o caminho geométrico a partir tanto da cinemática inversa entre espaço de trabalho e junta (*Junta 1*, *Junta 2*) quanto da cinemática direta presente entre espaço de atuador e de junta (*Junta1_r*, *Junta2_r*). Ambos os processos apresentam os mesmos resultados, mostrando consistência dos processos de mapeamento cinemático entre esses espaços.

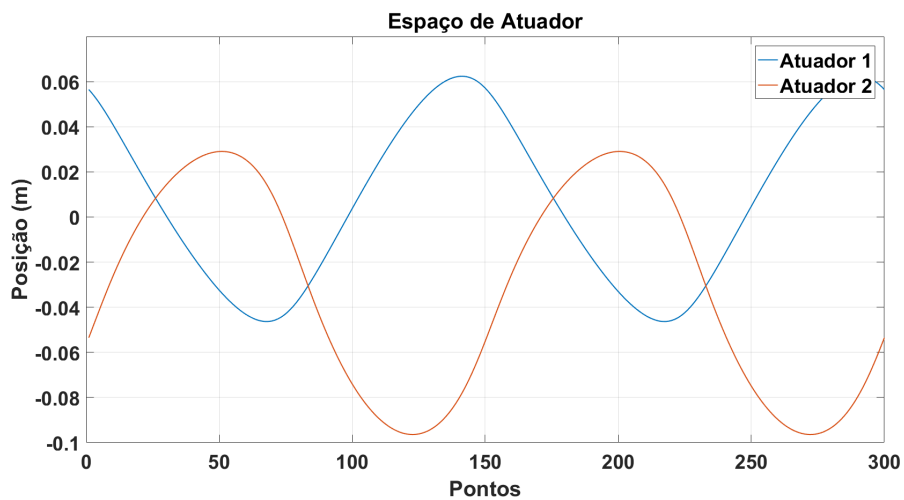


Figura 3.7 – Representação do caminho geométrico no espaço de atuador.

A partir dos equacionamentos de cinemática inversa, é possível usar as relações de cinemática direta para validar o processo. O resultado esperado é que o caminho geométrico original seja igual ao caminho geométrico obtido a partir do uso sequencial de cinemática direta e inversa, ambos presentes na Figura 3.8, que possui gráficos originais do caminho geométrico e gráficos obtidos através dos processos de transformação cinemática, os quais possuem subíndice r e apresentam equivalência ao primeiro. Isso mostra novamente a compatibilidade entre os processos de cinemática direta e inversa entre os espaços de trabalho, junta e atuador.

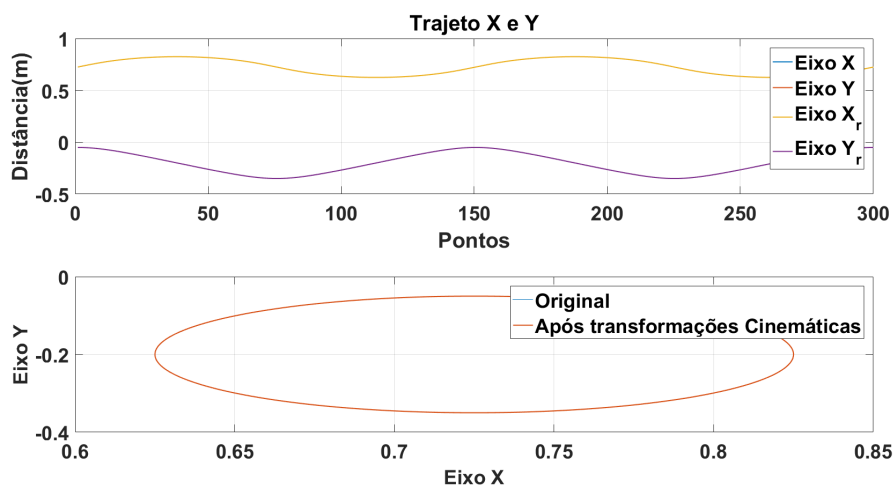


Figura 3.8 – Resultado do processo de cinemática inversa e direta.

Como apresentado no Capítulo 2, a cinemática descreve os movimentos e a sua propagação ao longo de uma cadeia cinemática, assim como, o mapeamento destes entre diferentes espaços. No entanto, essas relações não consideram os fenômenos que dão origem ao movimento, sendo necessário para essa análise a aplicação dos conceitos da dinâmica.

3.2 Dinâmica

Conforme já comentado na Subseção 2.2.2.1, são utilizados os conceitos de Euler-Lagrange com intuito de obter o modelo dinâmico do sistema estudado. Neste contexto, são equacionadas as matrizes de inércia e Coriolis, assim como, os vetores gravitacionais e de atrito. Assim, a partir das Equações (3.14) e (3.15), juntamente com a Matriz Jacobiana (\bar{J}) (Equação 2.24), podem ser obtidos os termos referentes à parcela inercial

das Equações (2.32) e (2.35).

$$\mathbf{H}(q) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde:

$$H_{11} = I_1 + m_1 l_1^2 + I_2 + m_2(a_1^2 + l_2^2 + 2a_1 l_2 \cos(q_2)) + m(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(q_2))$$

$$H_{12} = I_2 + m_2(l_2^2 + a_1 l_2 + 2a_1 l_2 \cos(q_2)) + m(a_2^2 + a_1 a_2 \cos(q_2))$$

$$H_{21} = H_{12}$$

$$H_{22} = I_2 + m_2 l_2^2 + m a_2^2$$

sendo I_i correspondente ao momento de inércia; m_i correspondente à massa; l_i correspondente à posição do centro de massa em relação ao ponto O_{i-1} ; onde ($i = 1, 2$), sendo as grandezas com subíndice i pertencem ao i -ésimo elo.

Com objetivo de simular uma carga mecânica, acrescenta-se ainda à ponta do segundo elo uma massa de valor m . O equacionamento somente da estrutura mecânica do manipulador pode ser obtido em Siciliano et al., 2008 e Craig, 2012. Já a dinâmica completa, considerando também os efeitos dinâmicos dos atuadores hidráulicos, pode ser encontrada em Valdiero, 2005 e em Cesconeto, 2018. A matriz de massa é simétrica e expressa como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde, M_1 e M_2 correspondem as massas dos atuadores 1 e 2, respectivamente.

Para cálculo da matriz de Coriolis presente nas Equações (2.32) e (2.34) é utilizada a Equação (3.16).

$$\mathbf{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde $h = -(m_2 l_2 + m a_2) a_1 \sin(q_2)$

A Tabela 3.2 apresenta os valores paramétricos inerciais do sistema robótico em estudo.

Tabela 3.2 – Parâmetros inerciais da estrutura do manipulador.

	Elo 1 ($i = 1$)	Elo 2 ($i = 2$)
Massa do elo (m_i)	11,45 kg	5,04 kg
Distância entre eixo de junta e centro de massa (l_i)	0,253 m	0,248 m
Momento de inércia (I_i)	1,4 kg m ²	0,433 kg m ²
Massa da carga (m)	5,477 kg	

Tanto o modelo dinâmico escrito em função das variáveis de atuador, quanto o modelo dinâmico escrito em função das variáveis de junta, possuem termos correspondentes às forças gravitacionais, \mathbf{f}_G e $\mathbf{G}(\mathbf{q})$. Os cálculos de $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ e \mathbf{f}_G podem ser realizados por meio das Equações (3.17) e (3.18).

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + (m_2 + m)a_1)g \cos(q_1) + (m_2 l_2 + m a_2)g \cos(q_1 + q_2) \\ (m_2 l_2 + m a_2)g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{f}_G = \begin{bmatrix} g M_1 \frac{L_{21} \sin(q_1 + \varphi_{21}) - L_{11} \sin(\varphi_{11})}{\sqrt{L_{11}^2 + L_{21}^2 - 2|L_{11}||L_{21}|\cos(q_1 - \varphi_1)}} \\ g M_2 \frac{L_{22} \sin(q_2 + \varphi_{22}) - L_{12} \sin(\varphi_{12})}{\sqrt{L_{12}^2 + L_{22}^2 - 2|L_{12}||L_{22}|\cos(q_2 - \varphi_2)}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Para obtenção do modelo do manipulador robótico, torna-se necessária a inclusão das forças dissipativas de atrito. Conforme apontado na Subseção 2.2.3.1, o modelo de atrito utilizado por Valdiero, 2005, modelo de LuGre, é mais complexo que o utilizado no trabalho corrente. Essa escolha foi feita baseada na convexidade presente nos modelos. No presente trabalho é utilizado o modelo de Coulomb-Newton, resultando em forças simétricas de atrito, ou seja, seus valores não são alterados em amplitude conforme o sentido da velocidade. A partir de um modelo que considera termos de atrito Newton e de Coulomb, utiliza-se aqui a média simples dos parâmetros de atrito utilizados por Valdiero, 2005, apresentados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Parâmetros de atrito.

	Atuador 1 ($i = 1$)	Atuador 2 ($i = 2$)
Atrito de Coulomb (F_{Ci})	68,3 N	60,55 N
Atrito Viscoso (F_{Vi})	115,28 N.s/m	114,9 N.s/m

O vetor de forças de atrito dos atuadores (\mathbf{f}_{atr}) pode ser expresso por meio da Equação (3.19).

$$\mathbf{f}_{atr}(\dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{F}_C \text{sign}(\dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{F}_V \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} f_{atrt1}(\dot{y}_1) \\ f_{atrt2}(\dot{y}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{C1} \text{sign}(\dot{y}_1) + F_{V1} \dot{y}_1 \\ F_{C2} \text{sign}(\dot{y}_1) + F_{V2} \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.3 Parâmetros do Atuadores

Como as dinâmicas da estrutura mecânica do robô e dos atuadores são acopladas, para analisar as características relacionadas às trajetórias é importante também dispor dos valores dos parâmetros dos atuadores hidráulicos, os quais estão apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Parâmetros do Atuador.

	Atuador 1 ($i = 1$)	Atuador 2 ($i = 2$)
Área do embolo (A_{ai})	4,91.10 ⁻⁴ m ²	
Área do embolo (A_{bi})	2,54.10 ⁻⁴ m ²	
Velocidade Máxima da haste	0,5 m/s	
Sinal de controle	±10 V	
Coefficiente de Vazão Câmara A (k_a)	2.10 ⁻⁸ m ³ /s/B/Pa ^{1/2}	
Coefficiente de Vazão Câmara B (k_b)	1.10 ⁻⁸ m ³ /s/B/Pa ^{1/2}	
Módulo de Elasticidade do Fluido Hidráulico (β)	10 ⁹ Pa	
Pressão de Suprimento (p_s)	30 bar	
Volume câmara A incluindo tubulações (V_{a0i})	5,35.10 ⁻⁵ m ³	4,15 10 ⁻⁵ m ³
Volume câmara B incluindo tubulações (V_{b0i})	3,60.10 ⁻⁵ m ³	2,93 10 ⁻⁵ m ³
Frequência natural de oscilação do carretel (ω_n)	62,8 rad/s	
Fator amortecimento do carretel (ζ_v)	0,68	
Massa do atuadores (M_i)	0,9 kg	0,8 kg

onde $k_a = k_{sa} k_m$ e $k_b = k_{sb} k_m$.

3.4 Restrições cinemáticas e dinâmicas

O planejamento de trajetórias de tempo ótimo implica na operação com grandezas cinemáticas elevadas. De acordo, por exemplo, com Bobrow et al., 1985, para que o tempo de trajetória seja reduzido, torna-se necessário que a velocidade opere próxima de

sua curva limite, implicando no chaveamento da aceleração entre seus valores máximos e mínimos. Desta forma, tendo em vista o planejamento de trajetórias factíveis, e levando em conta que o torque que pode ser aplicado é limitado, torna-se importante o uso de restrições cinemáticas e dinâmicas, adequadas ao sistema físico existente, assim como, a consideração de forças dissipativas.

Levando em conta as características do manipulador em estudo, as restrições relacionadas à velocidade e à força são facilmente identificadas. A primeira restrição é especificada pelo fabricante do atuador ($\pm 0.5 \text{ m/s}$), conforme informações apresentadas na Tabela 3.4. Já, a restrição de força pode ser obtida a partir da condição em que uma das câmaras do atuador se encontra na pressão de suprimento e a outra na pressão atmosférica do reservatório (0 bar manométrico). Desta forma, utilizando a Equação (2.21), os vetores de força máxima ($\overline{\mathbf{f}_H}$) e mínima ($\underline{\mathbf{f}_H}$) são dados, respectivamente, pelas Equações (3.20) e (3.21).

$$\overline{\mathbf{f}_H} = \begin{bmatrix} A_{a1} p_{sup} - A_{b1} 0 \\ A_{a2} p_{sup} - A_{b2} 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\underline{\mathbf{f}_H} = \begin{bmatrix} A_{a1} 0 - A_{b1} p_{sup} \\ A_{a2} 0 - A_{b2} p_{sup} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Para determinar o limite de aceleração do manipulador, é aplicado o conceito de massa equivalente, também utilizado por Izquierdo, 2017. A massa equivalente de um elo refere-se à massa concentrada do elo em um único ponto, com vista de fornecer um valor de momento de inércia, conforme o teorema de Steiner, semelhante à relação existente entre a estrutura do elo com seu eixo de rotação. Conforme desenho apresentado na Figura 3.2, devido ao movimento rotacional de junta do robô em estudo, a posição do êmbolo do atuador acaba alterando a massa equivalente acoplada à haste, visto que, também altera o momento de inércia em relação a mesma. Esse fenômeno pode ser observado através das Figuras 3.9 e 3.10, mostrando que a massa equivalente 1, relativa ao atuador 1, depende da posição de ambos os atuadores, pois o seu momento de inércia com relação à haste do atuador é alterado tanto pelo ângulo da junta 1, quanto o ângulo da junta 2. Já, a massa equivalente 2 tem seu respectivo momento alterado somente pela posição do atuador 2,

ou junta 2.

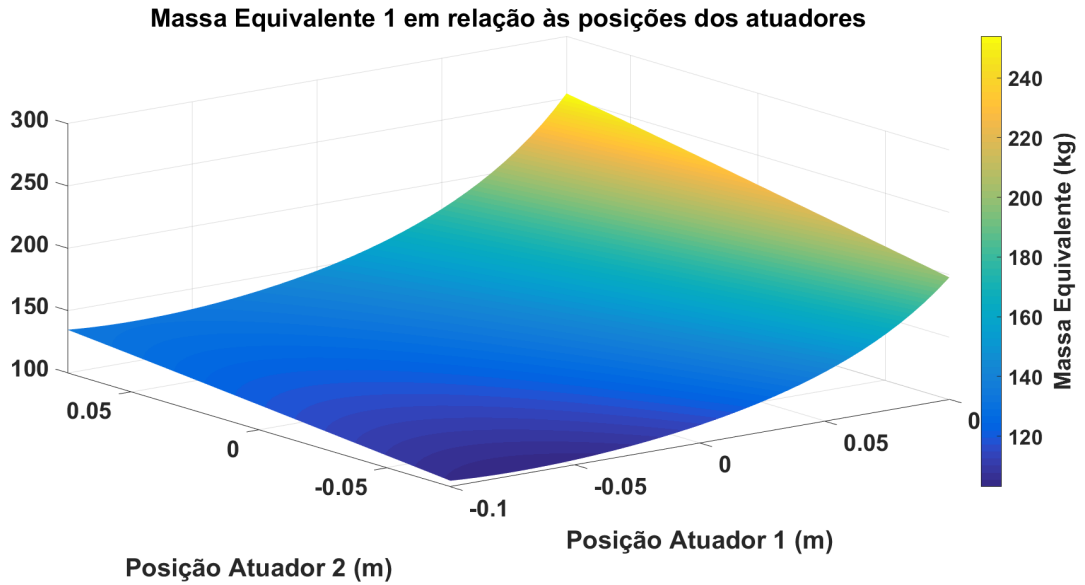


Figura 3.9 – Massa Equivalente 1 em relação às posições dos atuadores.

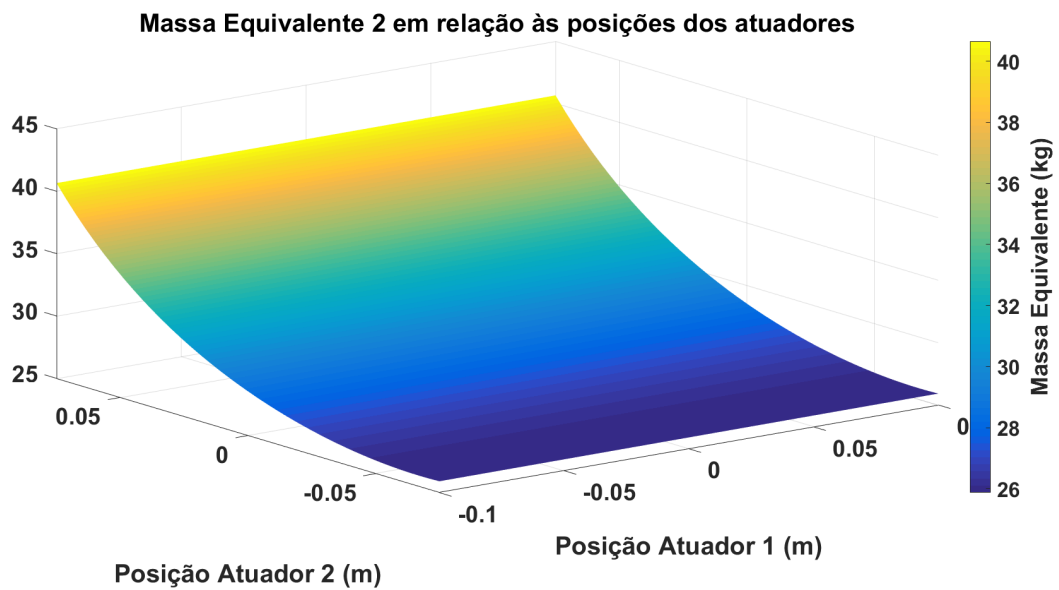


Figura 3.10 – Massa Equivalente 2 em relação às posições dos atuadores.

Dessa forma, para cálculo de aceleração máxima(\overline{Acc}) e mínima(\underline{Acc}) são utilizadas todas as posições possíveis de \mathbf{y} , variando tanto y_1 quanto y_2 do seu curso mínimo até o seu curso máximo, conforme a Equação (3.22). Repete-se o mesmo processo para velocidade, Equação (3.23), fazendo com que neste caso $\dot{\mathbf{y}}$ assumam todos os valores possíveis. Evidentemente, a varredura numérica é feita a partir de

incrementos discretos das variáveis independentes. Feitas essas considerações, isola-se $\ddot{\mathbf{y}}$ da Equação (2.35), substituindo \mathbf{y} por $\mathbf{y}_{i,j}$ e $\dot{\mathbf{y}}$ por $\dot{\mathbf{y}}_{m,n}$, resultando nas Equações (3.24) e (3.25) que determinam, respectivamente, as acelerações máximas e mínimas.

$$\mathbf{y}_{i,j} = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2j} \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, N; \quad (3.22)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{m,n} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{1m} \\ \dot{y}_{2n} \end{bmatrix}; \quad m = 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, M; \quad (3.23)$$

$$\overline{\mathbf{Acc}} = \max (\mathbf{H}(\mathbf{y}_{i,j})^{** -1} [\overline{\mathbf{f}_H} - \mathbf{C}(\mathbf{y}_{i,j}, \dot{\mathbf{y}}_{m,n})^{**} \mathbf{v}_{max} - \mathbf{G}(\mathbf{y}_{i,j})^{**} - \mathbf{f}_{atr}(\dot{\mathbf{y}}_{m,n})]) \quad (3.24)$$

$$\underline{\mathbf{Acc}} = \min (\mathbf{H}(\mathbf{y}_{i,j})^{** -1} [\underline{\mathbf{f}_H} - \mathbf{C}(\mathbf{y}_{i,j}, \dot{\mathbf{y}}_{m,n})^{**} \dot{\mathbf{y}}_{m,n} - \mathbf{G}(\mathbf{y}_{i,j})^{**} - \mathbf{f}_{atr}(\dot{\mathbf{y}}_{m,n})]) \quad (3.25)$$

onde N é o número de pontos nos quais deseja-se discretizar o curso dos atuadores; onde M é o número de pontos que se deseja discretizar a velocidade; $y_{11} = -0,1 \text{ m}$ e $y_{1N} = 0,1 \text{ m}$, sendo $y_{1i} - y_{1(i+1)}$ um valor constante; $y_{21} = -0,075 \text{ m}$ e $y_{2N} = 0,075 \text{ m}$, sendo $y_{2j} - y_{2(j+1)}$ um valor constante; $\dot{y}_{11} = -0,5 \text{ m/s}$ e $\dot{y}_{1M} = 0,5 \text{ m/s}$, sendo $\dot{y}_{2n} - \dot{y}_{2(n+1)}$ um valor constante; $\dot{y}_{21} = -0,5 \text{ m/s}$ e $\dot{y}_{2M} = 0,5 \text{ m/s}$, sendo $\dot{y}_{2m} - \dot{y}_{2(m+1)}$ um valor constante;.

Considerando a complexa dinâmica do robô de enfoque deste trabalho, utilizam-se dois critérios alternativos para obter os limites de *jerk*, sendo utilizados os valores mais conservadores obtidos por intermédio desses dois métodos (o menor valor entre os dois valores máximos e maior valor entre os valores mínimos de *jerk*).

No primeiro critério para estabelecer as limitações de *jerk*, em função das mesmas razões ligadas às variações da massa equivalente em relação à posição da haste do atuador e variação de velocidade, utilizam-se as Equações (2.16) e (2.17) em conjunto com a derivada temporal da Equação 2.21 para obter a variação da força do atuador e, desta forma, estimar os limites máximos e mínimos de *jerk* através das Equações (3.26) e (3.27), respectivamente. Nas Equações (3.26) e (3.27), são usados valores entre máxima e mínima velocidade ($\dot{\mathbf{y}}_{m,n}$) e valores de máxima e mínima tensão de controle das válvulas.

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{ak}}{dt} &= f_a(y_{i,j})(Q_a(u_{max}, p_{sup}) - A_a \dot{y}_{kM}) \\
\frac{dp_{bk}}{dt} &= f_b(y_{i,j})(Q_b(u_{max}, p_{sup}) - A_b \dot{y}_{kM}) \\
\overline{jerk}_\alpha &= \max \left(H_{k,k}(\mathbf{y}_{i,j})^{** -1} \left(A_{ak} \frac{dp_{ak}}{dt} - A_{bk} \frac{dp_{bk}}{dt} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{ak}}{dt} &= f_a(y_{i,j})(Q_a(u_{min}, p_{sup}) - A_a \dot{y}_{kM}) \\
\frac{dp_{bk}}{dt} &= f_b(y_{i,j})(Q_b(u_{min}, p_{sup}) - A_b \dot{y}_{kM}) \\
\underline{jerk}_\alpha &= \min \left(H_{k,k}(\mathbf{y}_{i,j})^{** -1} \left(A_{ak} \frac{dp_{ak}}{dt} - A_{bk} \frac{dp_{bk}}{dt} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Nas Equações 3.26 e 3.27, $k = 1, 2$; u_{max} é a tensão máxima da válvula; u_{min} é a tensão mínima da válvula.

O segundo critério utilizado para limitação de *jerk* envolve a dinâmica da válvula, expressa na Equação (2.5), a qual pode ser interpretada como um filtro passa-baixas de segunda ordem com frequência de corte igual à frequência natural da válvula (ω_n), conforme a Tabela (3.4). Portanto, considerando um sinal de controle harmônico e desprezando efeitos ressonantes amplificadores dos atuadores e da estrutura do braço, pode-se estimar que a frequência que causará maiores *jerk* será igual ou menor à frequência natural da válvula. Dessa forma, pode-se estimar as restrições de *jerk* a partir das restrições da aceleração, visto que, para sinais estacionários e harmônicos, é fácil a obtenção da primeira derivada temporal. Os limites superior e inferior de *jerk* podem ser expressos, respectivamente, por meio das Equações (3.28) e (3.29).

$$\overline{jerk}_\beta = \omega_n \overline{Acc} \tag{3.28}$$

$$\underline{jerk}_\beta = \omega_n \underline{Acc} \tag{3.29}$$

Outros critérios podem ser considerados, como, por exemplo, utilização das massas equivalentes junto a modelos linearizados dos atuadores ou considerações a respeito da própria estrutura do braço, visando a que restrições de *jerk* não ultrapassem os limites de deformação elástica dos elos, ou, ainda, limitações cinemáticas e dinâmicas (ligadas ao planejamento de manutenção) que prolonguem a vida útil dos componentes do robô.

4 PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIA

Baseado na metodologia de otimização convexa de trajetórias em relação ao tempo desenvolvida por Verscheure et al., 2009, e nos trabalhos de Reynoso-Mora et al., 2016 e Kong et al., 2013 que o seguiram, são propostas modificações nessas metodologias de modo que se obtenha trajetórias de tempo ótimo com restrições cinemáticas e dinâmicas e *jerk* contínuo.

O problema de otimização obtido deve possuir uma função objetivo que seja vinculada ao tempo da trajetória planejada (tf) e, também, deve possuir funções de restrição de velocidade, aceleração, *jerk* e força que satisfaçam os limites superiores e inferiores compatíveis com as características do manipulador de enfoque, como o problema descrito pela Equação 4.1.

$$\begin{aligned}
 & \min \left(\int_0^{tf} dt \right) \\
 & \text{então} \\
 & \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \leq \mathbf{H}(\mathbf{y})^{**} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})^{**} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{G}(\mathbf{y})^{**} + \mathbf{f}_{atr} \leq \overline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \\
 & \underline{\dot{\mathbf{y}}} \leq \dot{\mathbf{y}} \leq \overline{\dot{\mathbf{y}}} \\
 & \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \ddot{\mathbf{y}} \leq \overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\
 & \underline{\overset{..}{\mathbf{y}}} \leq \overset{..}{\mathbf{y}} \leq \overline{\overset{..}{\mathbf{y}}}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde tf é o tempo de trajetória; $\overline{(\)}$ e $\underline{(\)}$ representam os respectivos limites máximos e mínimos de uma grandeza.

4.1 Parametrização de Caminho

Dado um caminho geométrico mapeado no espaço de atuador $\mathbf{y}(t) \in \mathfrak{R}^n$, é possível parametrizá-lo através de uma função escalar normalizada e monótona s , ou seja, $s(t) \in [0, 1]$ e $\dot{s}(t) > 0 \forall 0 < t < tf$, propriedades que garantem uma transformação injectiva entre s e t , ou seja, s possui uma única correspondência em t e vice-versa. Assim, pressupondo que \mathbf{y} possui terceira derivada contínua em relação a s , pode-se obter velocidade, aceleração e *jerk* no espaço de atuador em função de s através da regra da cadeia, conforme mostra a Equação (4.2).

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(s)' \dot{s}$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(s)' \ddot{s} + \mathbf{y}(s)'' \dot{s}^2 \quad (4.2)$$

$$\dddot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(s)' \dddot{s} + 3\mathbf{y}(s)'' \dot{s} \ddot{s} + \mathbf{y}(s)''' \dot{s}^3$$

onde $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$; $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$; $\ddot{s} = \frac{d^3s}{dt^3}$; $(\)' = \frac{\partial(\)}{\partial s}$; $(\)'' = \frac{\partial^2(\)}{\partial s^2}$; $(\)''' = \frac{\partial^3(\)}{\partial s^3}$.

Utiliza-se como exemplo, o mesmo caminho predefinido dado pela Equação (3.13). O resultado da parametrização deste caminho geométrico no espaço do atuador 1, assim como, suas derivadas numéricas com relação à s podem ser observados na Figura (4.1).

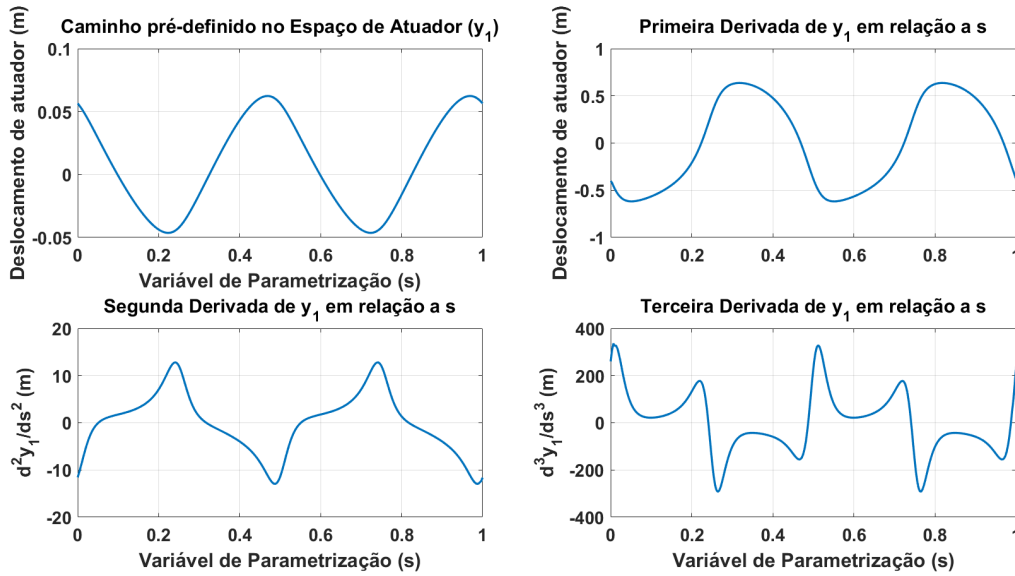


Figura 4.1 – Sistema de um atuador hidráulico.

A partir da Equação (4.2), utilizando o modelo dinâmico em função das variáveis de atuador, expresso por meio da Equação (2.35), obtém-se a Equação (4.3), a qual fornece o modelo dinâmico em função de s .

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{y}(s))^{**} [\mathbf{y}''(s) \dot{s}^2 + \mathbf{y}' \ddot{s}] + \mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s) \dot{s})^{**} \mathbf{y}'(s) \dot{s} + \\ \mathbf{G}(\mathbf{y}(s))^{**} + \mathbf{F}_C \text{sign}(\mathbf{y}' \dot{s}) + \mathbf{F}_V \mathbf{y}' \dot{s} = \mathbf{f}_H \end{aligned} \quad (4.3)$$

Como $\dot{s} > 0$, então $\mathbf{F}_C \text{sign}(\mathbf{y}' \dot{s}) = \mathbf{F}_C \text{sign}(\mathbf{y}')$, a partir da álgebra linear é possível mostrar que $\mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s) \dot{s})^{**} \mathbf{y}'(s) \dot{s} = \mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s))^{**} \mathbf{y}'(s) \dot{s}^2$, conforme Verscheure et al.

[2009]. Assim, a Equação (4.3) é reescrita como (4.4).

$$\mathbf{X}(s)\ddot{s} + \mathbf{Y}(s)\dot{s}^2 + \mathbf{Z}(s)\dot{s} + \mathbf{W}(s) = \mathbf{f}_H \quad (4.4)$$

onde $\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{y}(s))^{**}\mathbf{y}'$; $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{y}(s))^{**}\mathbf{y}''(s) + \mathbf{C}(\mathbf{y}(s), \mathbf{y}'(s))^{**}\mathbf{y}'$; $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{F}_V \mathbf{y}'$; $\mathbf{W}(s) = \mathbf{F}_C \text{sign}(\mathbf{y}') + \mathbf{G}(\mathbf{y}(s))^{**}$.

de modo que, devido ao caminho ser predefinido, $\mathbf{y}(s)$, $\mathbf{y}'(s)$, $\mathbf{y}''(s)$ e $\mathbf{y}'''(s)$ já são conhecidos e, portanto, podem ser calculados $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{Y}(s)$, $\mathbf{Z}(s)$ e $\mathbf{W}(s)$. Como o método de parametrização aplicado é genérico, pode-se substituir um modelo dinâmico multi-estado, como, por exemplo, de um robô de 6 GDL, por um sistema com apenas dois estados (s, \dot{s}) .

As expressões \ddot{s} , \dot{s} , \dot{s}^2 e $\mathbf{f}_H(s)$ que são funções de s , devem ser otimizadas de modo a reduzir o tempo de percurso do caminho geométrico $\mathbf{y}(s)$.

$$\mathbf{X}(s)a(s) + \mathbf{Y}(s)b(s) + \mathbf{Z}(s)c(s) + \mathbf{W}(s) = \mathbf{f}_H \quad (4.5)$$

Utilizando as seguintes definições $a(s) := \ddot{s}$, $b(s) := \dot{s}^2$, $c(s) := \dot{s}$, escreve-se (4.5) a partir de (4.4). Desta forma, $b(s) > 0$, $\dot{b}(s) = b'(s)\dot{s} = 2\dot{s}\ddot{s}$, $b'(s) = 2a(s)$ e $c(s) = \sqrt{b(s)}$.

4.2 Problema de Otimização

A partir da propriedade de s ser monótona, na Equação (4.6) escreve-se o tempo de trajetória (tf) em função de s .

$$tf = \int_0^{tf} dt = \int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{b(s)}} ds = \int_0^1 \frac{1}{c(s)} ds \quad (4.6)$$

Para que o tempo de trajetória seja reduzido, $c(s)$ deve ser assumir valores elevados, e, para evitar singularidades, $c(s) \neq 0$.

Visando à obtenção de trajetórias que tenham velocidade nula nos seus instantes inicial e final, o que implica em $c(0) = c(1) = 0$, o tempo total de trajetória é reescrito através da Equação (4.7), onde é considerado que $c(s) \neq 0 \forall 0 < s < 1$.

$$tf = \int_{0_+}^{1_-} \frac{1}{\sqrt{b(s)}} ds = \int_{0_+}^{1_-} \frac{1}{c(s)} ds \quad (4.7)$$

A partir das necessidades do uso de limites para velocidade, aceleração, *jerk* e torque para planjemaneto de trajetórias factíveis e da utilização de uma função objetivo que vise a diminuir o tempo de percurso do manipulador, utilizam-se as Equações (4.2), (4.5) e (4.7) para formular o problema de trajetórias de tempo ótimo através da Equação (4.8) [Kong et al., 2013].

$$\begin{aligned} & \min \left(\int_{0_+}^{1_-} \frac{1}{c(s)} ds \right) \\ & \text{então} \\ & \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \leq \mathbf{X}(s)a(s) + \mathbf{Y}(s)b(s) + \mathbf{Z}(s)c(s) + \mathbf{W}(s) \leq \overline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \\ & (\mathbf{y}(s)')^2 b(s) \leq (\overline{\dot{\mathbf{y}}})^2 \\ & \underline{\dot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'a(s) + \mathbf{y}(s)''b(s) \leq \overline{\dot{\mathbf{y}}} \\ (*) \quad \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'f(s)c(s) + 3\mathbf{y}(s)''a(s)c(s) + \mathbf{y}(s)'''b(s)c(s) \leq \overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\ & (**) \quad c(s) = \sqrt{b(s)} \\ & \forall s \in [0_+, 1_-] \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $f(s) := \ddot{s}/\dot{s}$; $b''(s) = 2 f(s)$.

O problema descrito por meio da Equação (4.8) apresenta os equacionamentos necessários para a obtenção de trajetórias de tempo ótimo. O problema apresenta função objetivo convexa, restrições lineares e pode ser escrito a partir de funções afim de s . No entanto, não é possível a aplicação de métodos de otimização convexa visto que o problema não é convexo devido à presença de equacionamentos não lineares que comprometem a convexidade nos termos (*) e (**) da Equação (4.8), como $c(s) = \sqrt{b(s)}$, $a(s)c(s)$, $f(s)c(s)$ e $b(s)c(s)$. Objetivando que o equacionamento aumente o espaço de soluções possíveis, mas possua convexidade, é possível reescrever o termo (**) das seguintes maneiras:

$$\begin{aligned} & \sqrt{b(s)} = c(s) \\ & c(s) \leq \sqrt{b(s)} \leq c(s) \\ & c(s)^2 \leq b(s) \leq c(s)^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Desse modo, a igualdade tem equivalência a duas inequações ($c(s)^2 \leq b(s) \leq c(s)^2$), visto que para esse caso a única solução possível é $b(s) = c(s)^2$. A primeira inequidade ($c(s)^2 \leq b(s)$) é convexa e a segunda ($b(s) \leq c(s)^2$) é côncava. Dessa forma, é desprezada a parcela côncava da igualdade para que o equacionamento seja convexo. Resultando na restrição hiperbólica relaxada, Equação (4.10).

$$c(s)^2 \leq b(s) \quad (4.10)$$

Com o intuito de linearizar as restrições e tornar convexo o problema de otimização, utiliza-se a igualdade $d(s) := 1/c(s)$, onde $d(s)$ é uma nova variável de otimização, tornando possível que o termo (*) da Equação (4.8) seja reescrito conforme a

$$\text{Equação} \quad (4.11).$$

$$\frac{1}{c(s)} \ddot{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}(s)' f(s) + 3\mathbf{y}(s)'' a(s) + \mathbf{y}(s)''' b(s) \leq \frac{1}{c(s)} \overline{\mathbf{y}}$$

$$\frac{1}{c(s)} = d(s) \quad (4.11)$$

$$d(s) \ddot{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}(s)' f(s) + 3\mathbf{y}(s)'' a(s) + \mathbf{y}(s)''' b(s) \leq d(s) \overline{\mathbf{y}}$$

De forma análoga à realizada com o termo $c(s) = \sqrt{b(s)}$, também é feita a equivalência da igualdade a partir da transformação desta em duas desigualdades $d(s) \leq 1/c(s)$ e $d(s) \geq 1/c(s)$, cuja intersecção, apresenta correspondência à respectiva igualdade. Do mesmo modo, é desprezado o termo côncavo, de modo que, após a relaxação, resulte apenas sua parcela convexa, de acordo com a Equação (4.12).

$$\frac{1}{c(s)} \leq d(s) \quad (4.12)$$

$$1 \leq c(s)d(s)$$

A partir de (4.10) e (4.12), o problema de otimização (4.8) pode ser reescrito, obtendo-se a Equação (4.13). Isto resulta em um problema com função objetivo e restrições lineares, escrito a partir das variáveis de caminho (s , \dot{s} e \ddot{s}) com limitações de torque, velocidade, aceleração e *jerk*, descrito por meio de 4.13.

$$\begin{aligned}
& \min \left(\int_{0_+}^{1-} d(s) ds \right) \\
& \text{então} \\
& \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \leq \mathbf{X}(s)a(s) + \mathbf{Y}(s)b(s) + \mathbf{Z}(s)c(s) + \mathbf{W}(s) \leq \overline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \\
& (\mathbf{y}(s)')^2 b(s) \leq (\bar{\mathbf{y}})^2 \\
& \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'a(s) + \mathbf{y}(s)''b(s) \leq \overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\
& d(s)\underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'f(s) + 3\mathbf{y}(s)''a(s) + \mathbf{y}(s)'''b(s) \leq d(s)\overline{\ddot{\mathbf{y}}} \\
& c(s)^2 \leq b(s) \\
& 1 \leq c(s)d(s) \\
& b'(s) = 2a(s) \\
& b''(s) = 2f(s) \\
& c(s), b(s) > 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3 Solução Numérica

A Equação (4.13) descreve uma solução contínua do problema de otimização do tempo de trajetória. No entanto, para sua aplicação numérica, deve-se modificá-lo adequadamente para implementação computacional. Dessa forma, sendo $b(s) \geq 0$ e $c(s) \geq 0$, reescrevem-se as restrições hiperbólicas (4.12) e (4.10) como restrições cônicas de segunda ordem. Isto permite sua aplicação em ferramentas para *Second-order Cone Program* (SOCP), conforme Boyd e Vandenberghe, 2004, viabilizando a utilização de pacotes específicos para essa classe de problemas, como, por exemplo, através do *software MATLAB*[®]. O equacionamento modificado é apresentado na Equação (4.14).

$$\begin{aligned}
& \min \left(\int_{0_+}^{1_-} d(s) ds \right) \\
& \text{então} \\
& \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \leq \mathbf{X}(s)a(s) + \mathbf{Y}(s)b(s) + \mathbf{Z}(s)c(s) + \mathbf{W}(s) \leq \overline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \\
& (\mathbf{y}(s)')^2 b(s) \leq (\bar{\mathbf{y}})^2 \\
& \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'a(s) + \mathbf{y}(s)''b(s) \leq \bar{\ddot{\mathbf{y}}} \\
& d(s)\underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s)'f(s) + 3\mathbf{y}(s)''a(s) + \mathbf{y}(s)'''b(s) \leq d(s)\bar{\ddot{\mathbf{y}}} \\
& \left\| \begin{array}{c} 2c(s) \\ b(s) - 1 \end{array} \right\|_2 \leq b(s) + 1 \\
& \left\| \begin{array}{c} 2 \\ c(s) - d(s) \end{array} \right\|_2 \leq c(s) + d(s) \\
& b'(s) = 2a(s) \\
& b''(s) = 2f(s) \\
& c(s), b(s) > 0 \\
& \forall s \in [0_+, 1_-]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Outra etapa importante no processo de solução é a discretização do problema para implementação computacional. Dessa forma, divide-se um caminho geométrico pertencente ao plano de trabalho do robô em N pontos e, a partir da cinemática inversa, é determinado o mapeamento desses no espaço de atuador. Assim, são obtidos os pontos $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^N$ e feita sua parametrização através de $s^1 = 0, s^2, \dots, s^{N-1}, s^N = 1$. A partir destes, são realizadas as derivadas discretas de \mathbf{y} em relação a s utilizando diferenças finitas, conforme descrito na Equação (4.15), a qual esta de acordo com [Chapra, 2004]. Dessa forma, são introduzidas no problema um número finito de as variáveis de otimização discretizadas, a^k, b^k, c^k, d^k, f^k e $\boldsymbol{\tau}^k$, onde $k = 1, \dots, N$, $a^k = a(s^k)$, $b^k = b(s^k)$, $c^k = c(s^k)$, $d^k = d(s^k)$, $f^k = f(s^k)$ e $\mathbf{f}_{\mathbf{H}}^k = \mathbf{f}_{\mathbf{H}}(s^k)$. Para os casos extremos, pontos inicial e final, $c^1 = c(0_+)$, $c^N = c(1_-)$, $d^1 = d(0_+)$, $d^N = d(1_-)$.

$$\begin{aligned}
y'(s_i) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{s_{i+1} - s_i}, \quad i = 1 \\
y'(s_i) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(s_{i+1} - s_i)}, \quad i = 2, \dots, N-1 \\
y'(s_i) &= \frac{y_i - y_{i-1}}{s_i - s_{i-1}}, \quad i = N \\
y''(s_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(s_{i+1} - s_i)^2}, \quad i = 1, 2 \\
y''(s_i) &= \frac{y_{i+2} - 2y_{i-1} + y_i}{(s_{i+1} - s_i)^2}, \quad i = 3, \dots, N-2 \\
y''(s_i) &= \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{(s_i - s_{i-1})^2}, \quad i = N-1, N \\
y'''(s_i) &= \frac{y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i}{(s_{i+1} - s_i)^3}, \quad i = 1, 2, 3 \\
y'''(s_i) &= \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(s_{i+1} - s_i)^3}, \quad i = 4, \dots, N-3 \\
y'''(s_i) &= \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{(s_i - s_{i-1})^3}, \quad i = N-2, N-1, N
\end{aligned} \tag{4.15}$$

De acordo com a Equação (4.2), para que a trajetória planejada tenha terceira derivada temporal ($\ddot{\mathbf{y}}$) contínua é necessário que $\mathbf{y}(s)'$, $\mathbf{y}(s)''$, $\mathbf{y}(s)'''$, \dot{s} , \ddot{s} e $\ddot{\ddot{s}}$ também sejam contínuos. Desta forma, a continuidade das derivadas de $\mathbf{y}(s)$ em relação a s ($\mathbf{y}(s)'$, $\mathbf{y}(s)''$ e $\mathbf{y}(s)'''$) é um requisito para aplicação do método presente. Reynoso-Mora et al., 2016, aplicam critério similar, sendo necessário que a segunda derivada do caminho geométrico seja contínua, já que o método proposto pelos autores objetiva aplicação em trajetórias duas vezes diferenciáveis.

Com o objetivo de garantir a continuidade necessária das derivadas temporais de s , utiliza-se $b(s)$ (\dot{s}^2) descrito a partir de *splines* normalizadas de terceira ordem com coeficientes $\alpha_{k,m}$ para os segmentos intermediários de trajetória, compreendidos entre o segundo e penúltimo ponto ($k = 2, \dots, N-2$), de acordo com a Equação (4.16), garantindo que as suas duas primeiras derivadas em relação a s sejam contínuas. Isto garante que \dot{s} , \ddot{s} e $\ddot{\ddot{s}}$ são também contínuos visto que $s(t) > 0$ e $\dot{s} > 0$ e as relações $b(s) = \dot{s}^2$, $b(s)' = 2a(s) = 2\ddot{s}$, $b(s)'' = 2f(s) = 2\ddot{\ddot{s}}/\dot{s}$. Deste modo, $a(s)$ e $f(s)$ nesses trechos são descritos pelas Equações (4.17) e (4.18), respectivamente.

$$b(s) = \sum_{m=0}^3 \alpha_{k,m} \left(\frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} \right)^m, \quad s \in [s_k, s_{k+1}], \quad k = 2, \dots, N-2 \tag{4.16}$$

A partir das relações entre $b(s)$, $a(s)$ e $f(s)$, são obtidas as Equações (4.17) e (4.18).

$$a(s) = \frac{b(s)'}{2} = \sum_{m=1}^3 \frac{(m)}{2} \alpha_{k,m} \left(\frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} \right)^{(m-1)} \left(\frac{1}{s_{k+1} - s_k} \right), \quad (4.17)$$

$$s \in [s_k, s_{k+1}], \quad k = 2, \dots, N - 2$$

$$f(s) = \frac{b(s)''}{2} = \sum_{m=2}^3 \frac{(m)(m-1)}{2} \alpha_{k,m} \left(\frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} \right)^{(m-2)} \left(\frac{1}{s_{k+1} - s_k} \right)^2, \quad (4.18)$$

$$s \in [s_k, s_{k+1}], \quad k = 2, \dots, N - 2$$

Conforme apresentado na Subseção 2.3.3, é necessário que os segmentos formados pela Equação (4.16), assim como suas duas primeiras derivadas, formem curvas contínuas, sendo necessário que os pontos intermediários apresentem mesmo valor tanto em aproximação à esquerda quanto à direita, $b(s_{k+}) = b(s_{k-})$, e que a mesma relação seja válida para suas duas primeiras derivadas, $a(s_{k+}) = a(s_{k-})$ e $f(s_{k+}) = f(s_{k-})$. Dessa forma, $f(s)$ é dado por segmentos lineares, $a(s)$ por segmentos polinomiais de segunda ordem e $b(s)$ por polinômios cúbicos.

A partir dessas considerações, é possível montar um sistema linear e obter os coeficientes $\alpha_{k,m}$ das *splines* a partir das variáveis de otimização discretizadas a^k , b^k e f^k , conforme a Equação (4.19).

$$\begin{aligned} \alpha_{k,0} &= b^k \\ \alpha_{k,1} &= 2a_k \Delta s_k \\ \alpha_{k,2} &= f_k \Delta s_k^2 \\ \alpha_{k,3} &= \frac{(f^{k+1} - f^k) \Delta s_k^2}{3} \\ \alpha_{k,3} &= \frac{2(a^{k+1} - a^k) \Delta s_k - 2f_k \Delta s_k^2}{3} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $k = 2, \dots, N - 2$; $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$.

De modo similiar ao realizado com os segmentos intermediários de trajetória, utiliza-se $b(s)$ (s^2) descrito a partir de *splines* normalizadas de quinta ordem para o primeiro e o último segmento de trajetória, compreendendo os trechos entre o primeiro e segundo ponto (1 e 2) e entre o penúltimo e último ponto ($N - 1$ e N), respectivamente. Essa escolha é feita a partir da inclusão das restrições impostas nesses segmentos devido

à necessidade de que velocidade, aceleração e *jerk* sejam nulas no primeiro e último pontos de trajetória. Para esses segmentos, também utiliza-se a premissa de que os pontos intermediários apresentem mesmo valor tanto em aproximação à esquerda quanto à direita, $b(s_{k+}) = b(s_{k-})$, e que a mesma relação seja válida para suas duas primeiras derivadas, $a(s_{k+}) = a(s_{k-})$ e $f(s_{k+}) = f(s_{k-})$. Os segmentos formados por *splines* de quinta ordem são descritos através da Equação (4.20).

$$b(s) = \sum_{m=0}^5 \alpha_{k,m} \left(\frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} \right)^m, \quad s \in [s_k, s_{k+1}], \quad k = 1, N - 1 \quad (4.20)$$

onde $\alpha_{k,m}$ coeficientes dos segmentos polinomiais que foram a *spline*.

Devido às mesmas relações descritas para *splines* de terceira ordem ($b(s)' = 2a(s)$ e $b(s)'' = 2f(s)$), $a(s)$ e $f(s)$), os trechos inicial e final são descritos pelas Equações (4.21) e (4.22), respectivamente.

$$a(s) = \frac{b(s)'}{2} = \sum_{m=1}^5 \frac{(m)}{2} \alpha_{k,m} \left(\frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} \right)^{(m-1)} \left(\frac{1}{s_{k+1} - s_k} \right), \quad (4.21)$$

$$s \in [s_k, s_{k+1}], \quad k = 1, N - 1$$

$$f(s) = \frac{b(s)''}{2} = \sum_{m=2}^5 \frac{(m)(m-1)}{2} \alpha_{k,m} \left(\frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} \right)^{(m-2)} \left(\frac{1}{s_{k+1} - s_k} \right)^2, \quad (4.22)$$

$$s \in [s_k, s_{k+1}], \quad k = 1, N - 1$$

A partir das Equações (4.20 - 4.22), é possível formar um sistema linear de equações e encontrar os coeficientes ($\alpha_{k,m}$) que descrevem a *spline*, problema que pode ser facilmente resolvido através das multiplicação matricial descrita pela Equação (4.23)

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k,0} \\ \alpha_{k,1} \\ \alpha_{k,2} \\ \alpha_{k,3} \\ \alpha_{k,4} \\ \alpha_{k,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b^k \\ a^k \Delta s_k \\ f^k \Delta s_k^2 \\ b^{k+1} \\ a^{k+1} \Delta s_k \\ f^{k+1} \Delta s_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

onde $k = 1, N - 1$; $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$.

Como forma de simplificar a representação do problema de otimização, utiliza-se a

Equação (4.24), que representa as funções *splines* descritas pelas Equações (4.16 - 4.18) e (4.20 - 4.22).

$$\begin{bmatrix} b^{k+1} & a^{k+1} & f^{k+1} \end{bmatrix}^T = S(s^k) \quad (4.24)$$

Assim como os demais termos de restrição do problema de otimização, a integração presente na função objetivo da Equação (4.14) também é discretizada, sendo realizada sua aproximação através do método de integração de quadratura numérica. A partir das considerações feitas para a discretização e de que o manipulador possui uma trajetória que as velocidades, acelerações e *jerk* iniciais e finais iguais à zero, define-se que $a^1 = a^N = 0$, $b^1 = b^N = 0$ e $f^1 = f^N = 0$. Assim, a partir da Equação (4.14), é obtida uma solução para o problema discretizado passível de implementação computacional, conforme descrito pela Equação (4.25).

$$\begin{aligned} & \min \left(\sum_{k=1}^N d^k \Delta s_k \right) \\ & \text{então :} \\ & \begin{bmatrix} b^{k+1} & a^{k+1} & f^{k+1} \end{bmatrix}^T = S(s^k) \\ & \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \leq \mathbf{X}(s^k)a^k + \mathbf{Y}(s^k)b^k + \mathbf{Z}(s^k)c^k + \mathbf{W}(s^k) \leq \overline{\mathbf{f}}_{\mathbf{H}} \\ & (\mathbf{y}(s^k)')^2 b^k \leq (\bar{\mathbf{y}})^2 \\ & \underline{\ddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s^k)'a^k + \mathbf{y}(s^k)''b^k \leq \bar{\ddot{\mathbf{y}}} \\ & d^k \underline{\dddot{\mathbf{y}}} \leq \mathbf{y}(s^k)'f^k + 3\mathbf{y}(s^k)''a^k + \mathbf{y}(s^k)'''b^k \leq d^k \bar{\dddot{\mathbf{y}}} \\ & \left\| \begin{array}{c} 2c^k \\ b^k - 1 \end{array} \right\|_2 \leq b^k + 1 \\ & \left\| \begin{array}{c} 2 \\ c^k - d^k \end{array} \right\|_2 \leq c^k + d^k \\ & b^{k'} = 2 a^k \\ & b^{k''} = 2 f^k \\ & c^k, b^k > 0 \\ & \forall k = 2, \dots, N - 1 \\ & a^1 = a^N = 0, b^1 = b^N = 0, f^1 = f^N = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.4 Conclusão do Capítulo

O objetivo deste capítulo foi apresentar a utilização de métodos de parametrização do caminho geométrico predefinidos, os quais permitem que a transformação de problemas de otimização multivariáveis sejam escritos a partir da variável $s(t)$. Com o intuito de tornar o problema convexo e, desta forma, utilizar métodos de solução já consolidados que garantem uma resposta ótima global, utilizam-se relaxações para aumentar o espaço de busca de solução mas garantir a convexidade do problema. Diante dos requisitos de continuidade da trajetória, torna-se necessário que a variável $b(s) = \dot{s}^2$ tenha sua segunda derivada contínua, optando-se desta forma a descrevê-la através de funções *splines* de quinta ordem nos trechos inicial e final de trajetória e funções *splines* de terceira ordem nos trechos intermediários. Como resultado desses procedimentos, é obtido o problema de otimização apresentado na Equação 4.25, que é utilizado em conjunto com os procedimentos de obtenção das restrições apresentados no Capítulo 3 para obtenção dos resultados apresentados a seguir no Capítulo 5.

5 RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados numéricos obtidos a partir do problema de otimização de trajetórias formulado no Capítulo 4. As análises foram realizadas utilizando o manipulador de 2 GDL com atuadores lineares. Os parâmetros, tanto da estrutura mecânica, quanto dos atuadores, estão apresentados no Capítulo 3. O trabalho foca principalmente o planejamento de trajetórias. Assim, como forma de avaliar a metodologia apresentada, são utilizados três diferentes caminhos geométricos predefinidos no espaço cartesiano para avaliação da solução proposta para o problema. Além disso, como forma de avaliar a influência no tempo de trajetória, são testadas situações com diferentes valores limites de restrições cinemáticas e dinâmicas.

Após a formulação e discretização do problema de otimização de trajetórias, conforme a estratégia apresentada no Capítulo 4, é possível escrever o problema em um formato padrão, como, por exemplo, no formato *SOCP* (*Second-order Cone Program*), que permite obter a solução por meio da utilização de programas dedicados para este fim (*solvers*). Assim, no presente caso, utiliza-se, juntamente com o *software MATLAB*[®], a ferramenta *CVX* (Grant e Boyd, 2008, 2019), que possui autoria comum com a publicação Boyd e Vandenberghe, 2004, a qual funciona como interface para utilização dos *solvers SDPT3* (*SemiDefinite Programming*), *SeDuMi* (*Self-Dual-Minimization*), *Gurobi* e *MOSEK* (*Mathematical Optimization Software Specified*), sendo todos disponíveis na versão completa (*Standard*) mas apenas os dois primeiros na versão *Redistributable*, que possui apenas *solvers* que não requerem licença [Toh et al., 1999; Sturm, 1999; Gurobi Optimization, 2020; Andersen e Andersen, 2000]. Dentre as opções, foi escolhido o *solver SDPT3*, porque este apresentou erros numéricos menores quando comparado com o *SeDuMi*, outra escolha disponível sem a necessidade de solicitação de licença.

São utilizados três caminhos geométricos: o Caminho Geométrico 1 é o mesmo utilizado na Seção 3.1 para validação das cinemáticas direta e inversa, formado por uma elipse expressa através da Equação (3.13) e com a representação no espaço de trabalho apresentada na Figura 3.5; o Caminho Geométrico 2, é composto por uma espiral expressa pela Equação 5.1 e exibida na Figura 5.1; o Caminho 3, composto por um segmento de reta expresso pela Equação 5.2 e representado na Figura 5.2.

$$\begin{aligned}
 X &= C \cdot 0,1 \sin(B); \\
 Y &= C \cdot 0,15 \cos(B); \\
 B &\in [-3\pi; 3\pi], C \in [0, 5; 1]
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

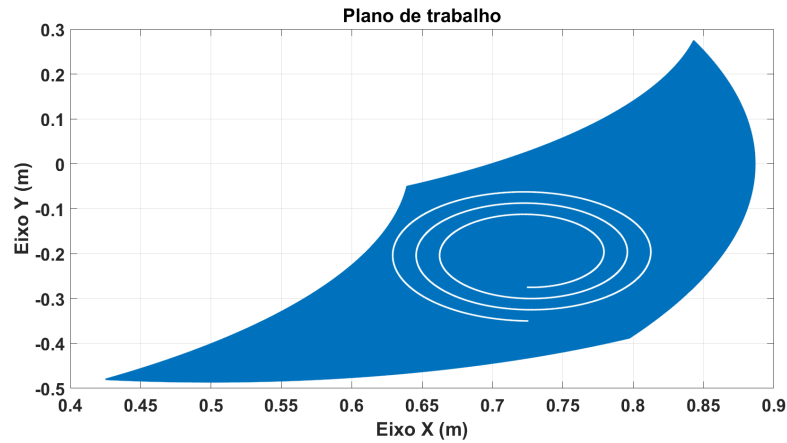


Figura 5.1 – Caminho Geométrico 2 no espaço de trabalho.

$$\begin{aligned}
 Y &= 2X + 0,15; \\
 X &\in [0,55; 0,85]
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

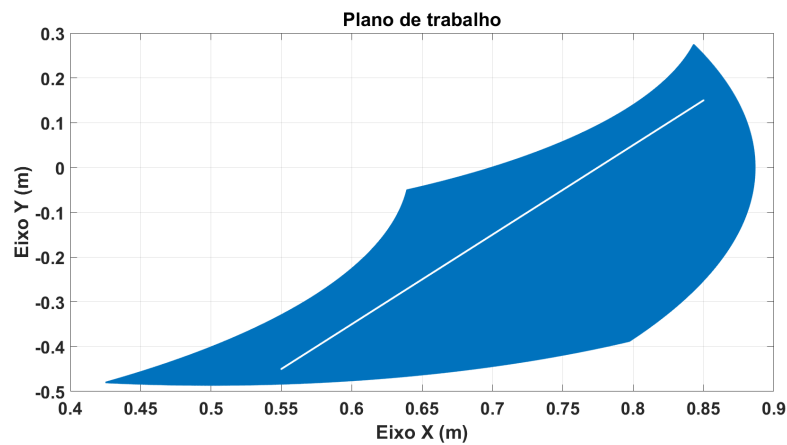


Figura 5.2 – Caminho Geométrico 3 no espaço de trabalho.

5.1 Valores nominais de restrição

Como já descrito, a consideração dos limites cinemáticos e dinâmicos compatíveis com as características construtivas e operacionais de um manipulador é importante para

o planejamento de suas trajetórias. Desta forma, a partir dos parâmetros cinemáticos e dinâmicos apresentados, respectivamente, nas seções 3.1 e 3.2, e dos atuadores apresentados na Seção 3.3, são utilizados os procedimentos apresentados na Seção 3.4 para obter as restrições impostas no planejamento de trajetórias. Estes resultados estão apresentados a seguir, na Tabela 5.1.

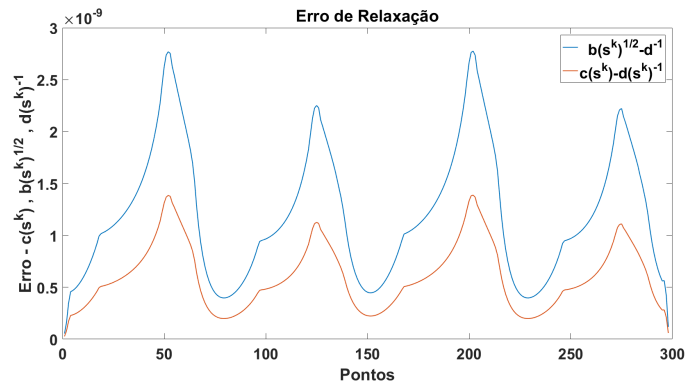
Tabela 5.1 – Limites cinemáticos e dinâmicos do manipulador com atuadores lineares.

	Atuador 1	Atuador 2
Velocidade Máxima	0,5 m/s	0,5 m/s
Velocidade Mínima	-0,5 m/s	-0,5 m/s
Aceleração Máxima (\overline{Acc})	11,55 m/s ²	57,87 m/s ²
Aceleração Mínima (\overline{Acc})	-10,21 m/s ²	-32,38 m/s ²
<i>Jerk</i> Máximo Critério 1 (\overline{jerk}_α)	6,31 10 ⁵ m/s ³	2,40 10 ⁶ m/s ³
<i>Jerk</i> Mínimo Critério 1 (\overline{jerk}_α)	-1,19 10 ⁵ m/s ³	-4,69 10 ⁵ m/s ³
<i>Jerk</i> Máximo Critério 2 (\overline{jerk}_β)	788,12 m/s ³	36361 m/s ³
<i>Jerk</i> Mínimo Critério 2 (\overline{jerk}_β)	-696,38 m/s ³	-2208 m/s ³
Força Máxima ($\overline{f_H}$)	1473 N	1473 N
Força Mínima ($\overline{f_H}$)	-762 N	-762 N

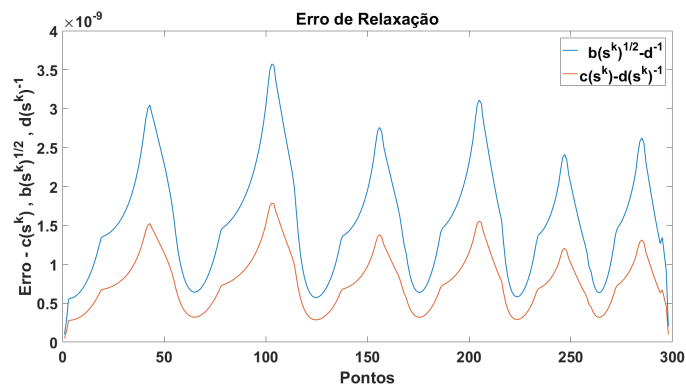
Ressalta-se que, a partir dos resultados dos critérios 1 e 2 para limite de *jerk*, são utilizados os valores mais conservadores. Neste caso, os limites apresentados na Tabela 5.1 são os obtidos a partir do segundo critério, através das Equações 3.28 e 3.29.

Conforme apresentado na Seção 4.2, são feitas relaxações nas relações matemáticas presentes entre as variáveis de otimização, de modo a representar o problema de forma convexa. Dessa forma, modifica-se adequadamente o espaço de soluções possíveis. Por exemplo, transformando restrições de igualdade em desigualdades, substituindo $c(s)^2 = b(s)$ por $c(s)^2 \leq b(s)$, desprezando, assim, a parcela côncava da equação. Com isso, espera-se que os valores obtidos por meio da solução numérica, obedecem as restrições originais do problema, ou seja, mesmo que seja feita a relaxação na formulação do problema de otimização, ampliando o espaço de soluções possíveis para a relação entre $c(s)$ e $b(s)$, por exemplo, é desejado que os valores encontrados mantenham a relação de igualdade $c(s)^2 = b(s)$. O mesmo se aplica para as demais relaxações presentes durante a formulação do problema convexo. Para cada caminho é, então, executado o algoritmo de planejamento de trajetória a partir da divisão de cada uma das curvas em um número adequado de pontos. No presente caso, foram utilizados 300 pontos, visto que a utilização de um

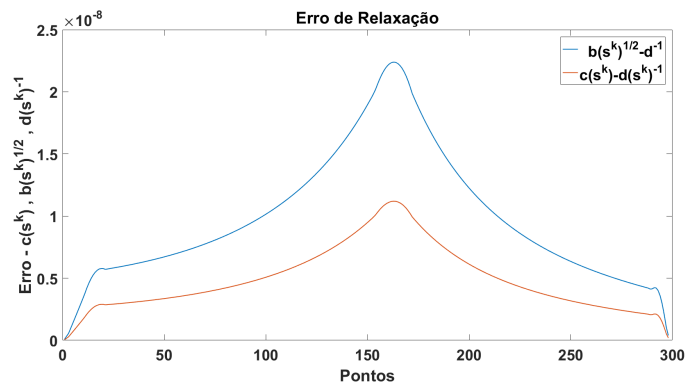
número baixo de pontos pode ocasionar uma diferença significativa entre as curvas. De posse dos resultados, os mesmos são analisados quanto às variáveis de otimização b^k, c^k e d^k , de modo que idealmente os valores respeitem as igualdades $\sqrt{b^k} = c^k = 1/d^k$. Essa verificação é feita através dos gráficos das diferenças numéricas entre as curvas ($\sqrt{b^k}, c^k$ e $1/d^k$) para cada um dos caminhos geométricos apresentados na Figura 5.3.



(a) Caminho Geométrico 1.



(b) Caminho Geométrico 2



(c) Caminho Geométrico 3

Figura 5.3 – Curvas $\sqrt{b^k}, c^k$ e $1/d^k$ para cada um dos exemplos de caminho geométrico.

É considerada satisfatória a convergência entre as curvas ($\sqrt{b^k}$, c^k e $1/d^k$), visto que, conforme a Figura 5.3, numericamente os resultados apresentam uma diferença inferior a $2,5 \cdot 10^{-8}$ entre as curvas.

5.1.1 Caminho Geométrico 1

Nesta subseção e nas seguintes (5.1.2 e 5.1.3) serão apresentadas as curvas cinemáticas de posição, velocidade, aceleração e *jerk*. Assim como, as curvas dinâmicas das forças presentes nos atuadores e do equilíbrio de forças que atuam sobre o manipulador, resultantes da aplicação do planejamento de trajetória proposto no Capítulo 4 nos caminhos 1, 2 e 3.

Nas Figuras 5.4 a 5.7, são apresentados, respectivamente, posição, velocidade, aceleração e *jerk* em relação ao tempo dos atuadores do manipulador para o Caminho Geométrico 1. Na Figura 5.4, são apresentadas a posição e a integral da velocidade, mostrando a relação diferencial desejada entre posição e velocidade. O método de integração de quadratura apresentou um erro numérico máximo de $6,57 \cdot 10^{-5} m$.

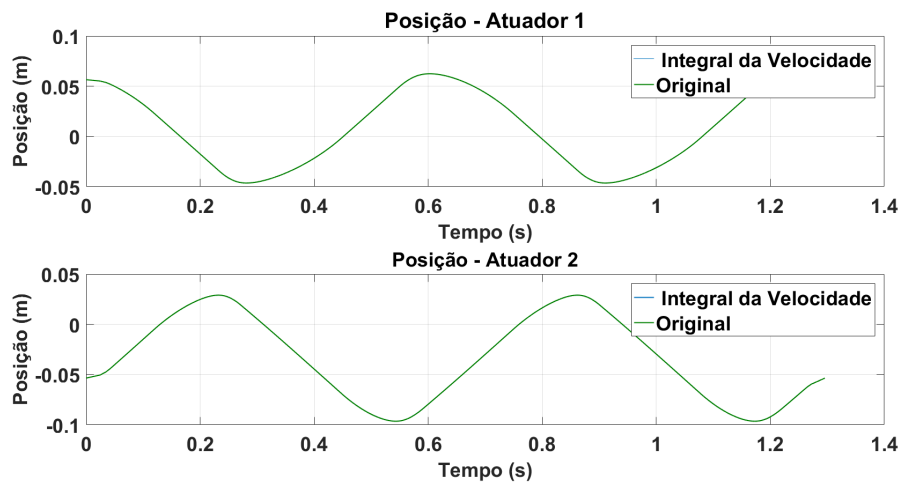


Figura 5.4 – Caminho Geométrico 1 - Posição original e obtida a partir da integral da Velocidade.

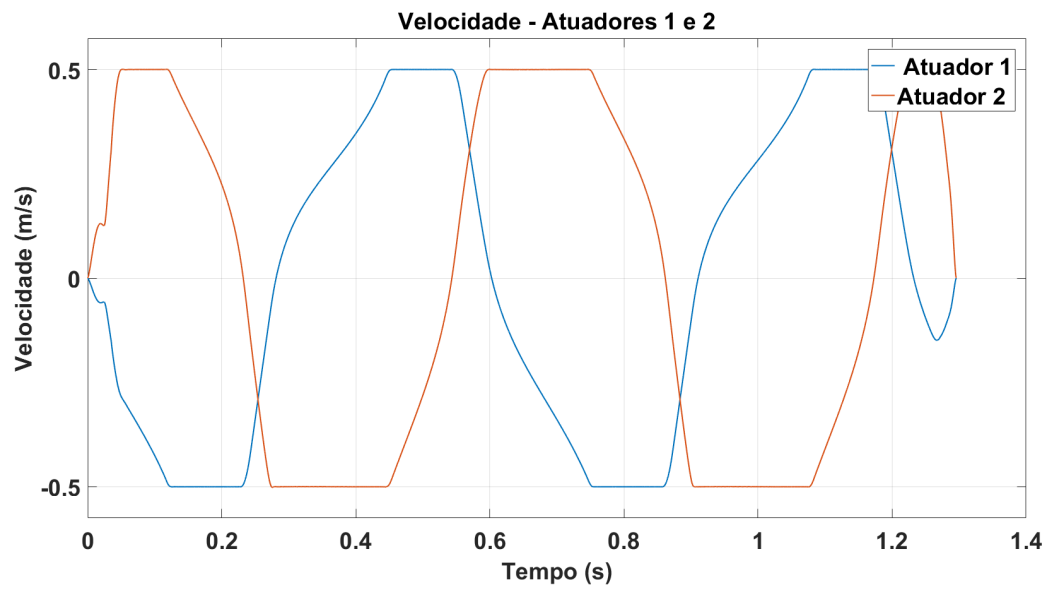


Figura 5.5 – Caminho Geométrico 1 - Velocidade dos atuadores.

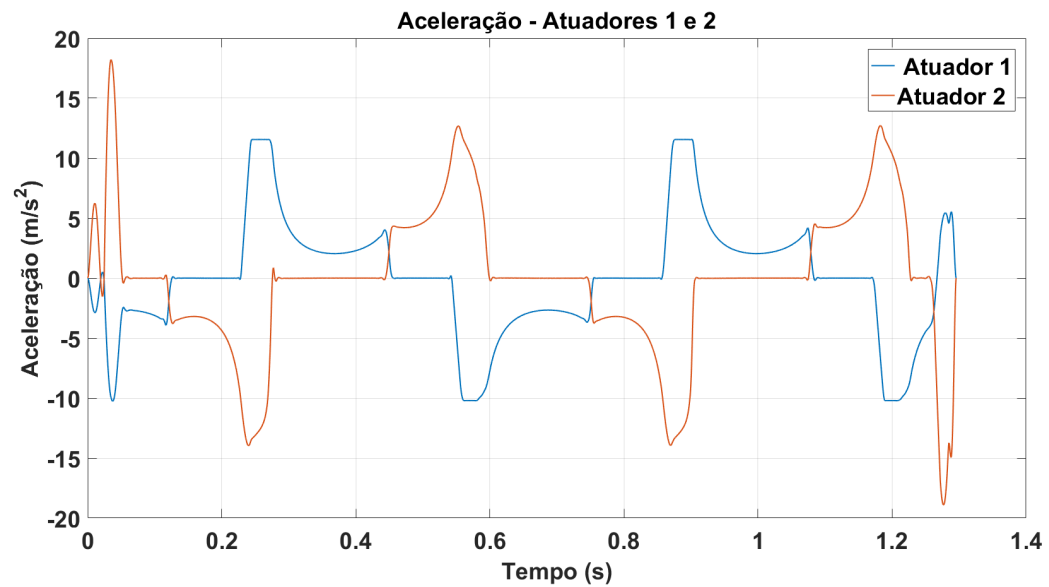


Figura 5.6 – Caminho Geométrico 1 - Aceleração dos atuadores.

Nos gráficos da Figura 5.7 observa-se que o *jerk*, apesar de ser uma curva contínua, apresenta comportamento oscilatório para alguns trechos, especialmente nos quais ocorre variações acentuadas na curva de aceleração.

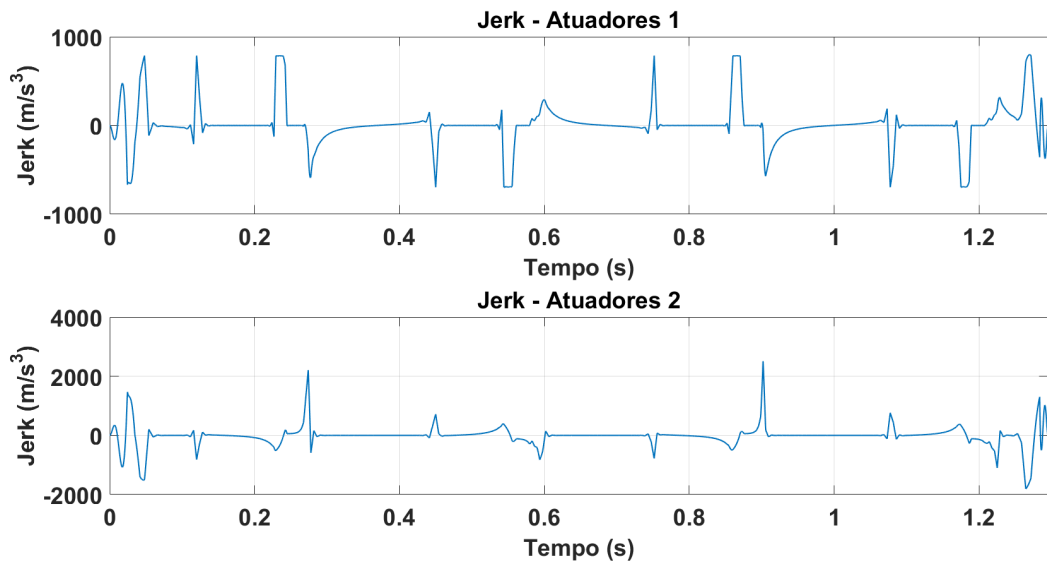


Figura 5.7 – Caminho Geométrico 1 - *Jerk* dos atuadores.

Também para o caminho Geométrico 1, na Figura 5.8 são graficadas as forças hidráulicas em cada um dos atuadores ao longo do tempo. Na Figura 5.9, são destacadas as parcelas do equilíbrio de forças conforme seu fenômeno, sendo dividida em inercial, Coriolis, gravitacional e de atrito, conforme expresso na Equação 2.35.

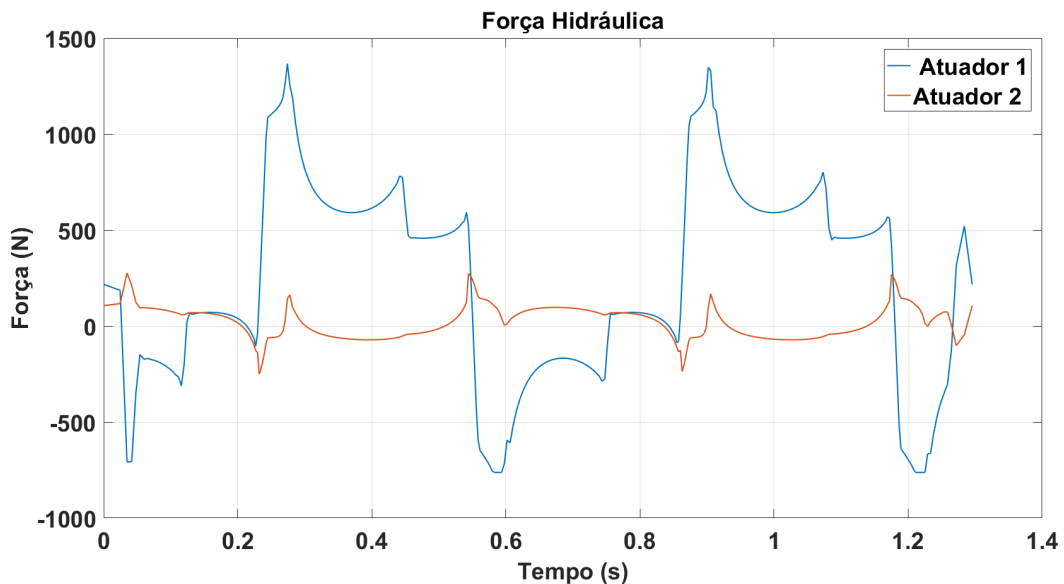


Figura 5.8 – Caminho Geométrico 1 - Força hidráulica dos atuadores.

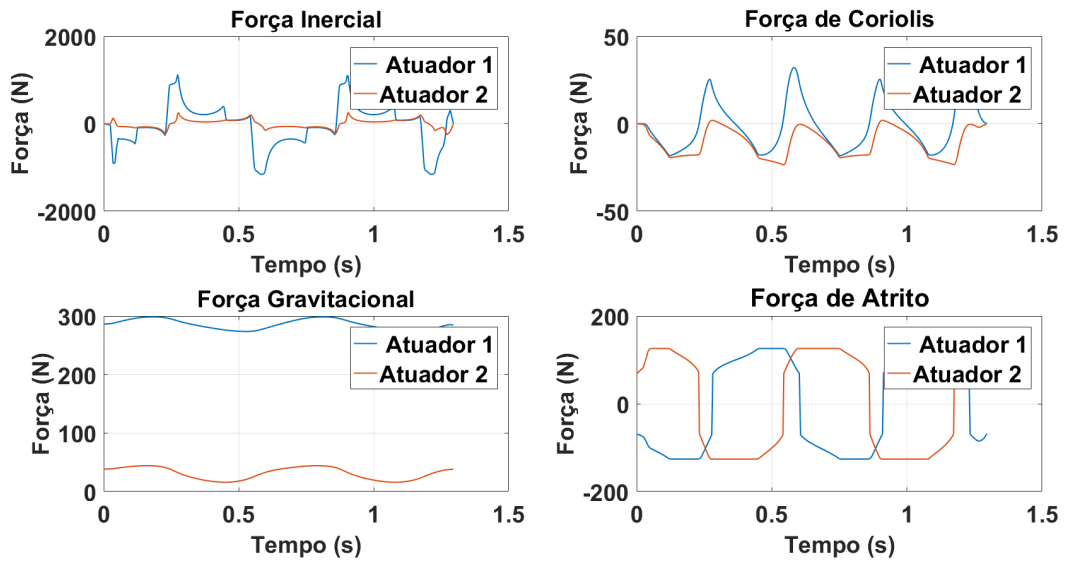


Figura 5.9 – Caminho Geométrico 1 - Decomposição do equilíbrio de forças.

Na Figura 5.10, utilizando os dados de posição dos atuadores obtidos a partir da integral da velocidade, apresentados na Figura 5.4, são utilizados os conceitos de cinemática direta de modo a mapear a integral da velocidade no espaço de trabalho e, logo após, comparar o resultado obtido com o Caminho Geométrico 1, mostrando sobreposição entre as curvas.

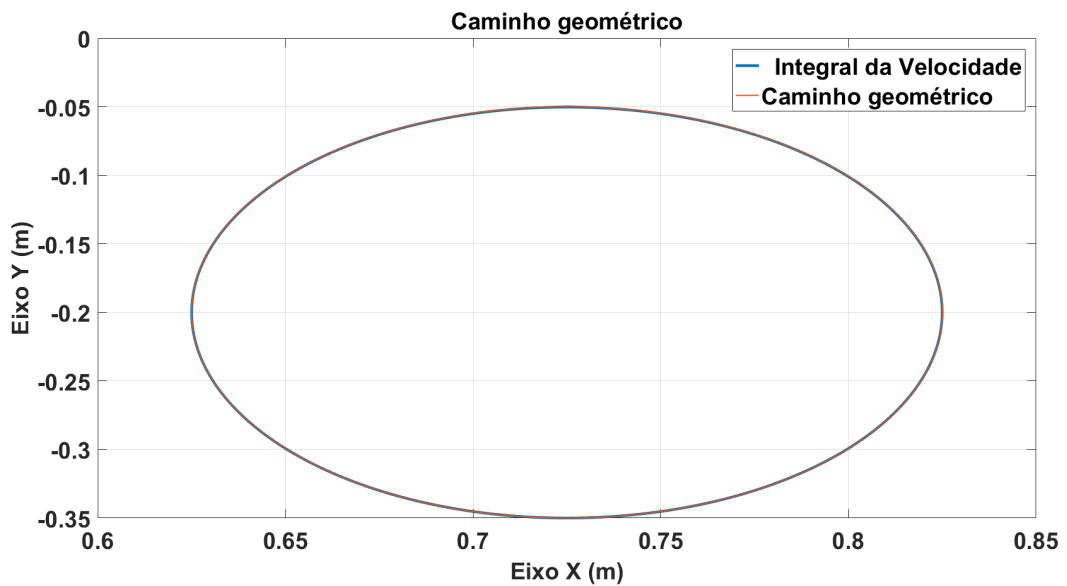


Figura 5.10 – Caminho Geométrico 1 - Caminho Geométrico original e obtido a partir da integral da velocidade.

5.1.2 Caminho Geométrico 2

Os mesmos procedimentos são repetidos para o Caminho Geométrico 2, sendo mostrados seus resultados de posição, velocidade, aceleração e *jerk*, respectivamente, através das Figuras 5.11 à 5.13. O erro entre a integral da velocidade e a posição a partir do método de integração de quadratura apresentou um erro numérico máximo de $1,30 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

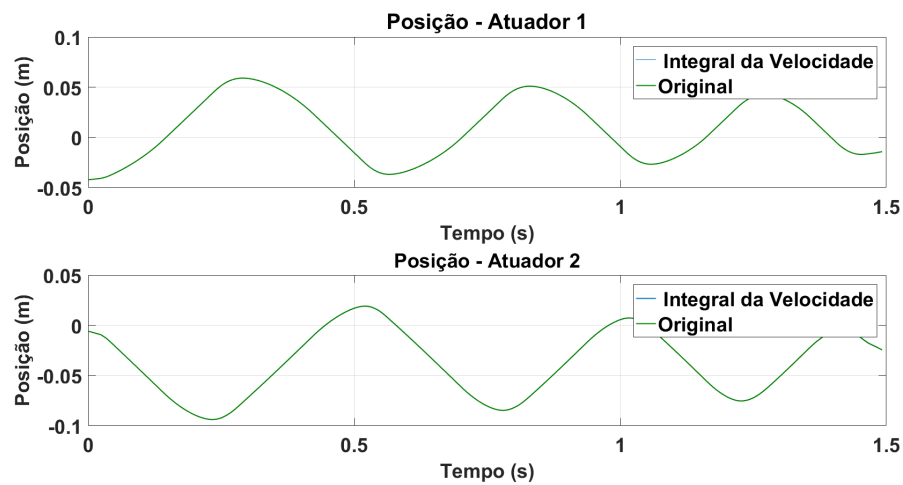


Figura 5.11 – Caminho Geométrico 2 - Posição original e obtida a partir da integral da velocidade.

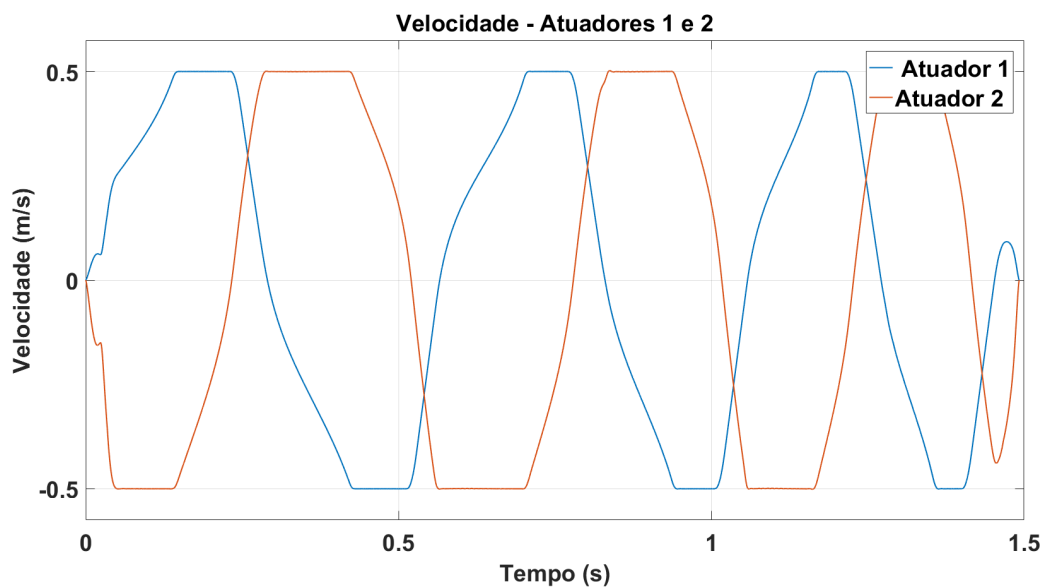


Figura 5.12 – Caminho Geométrico 2 - Velocidade dos atuadores.

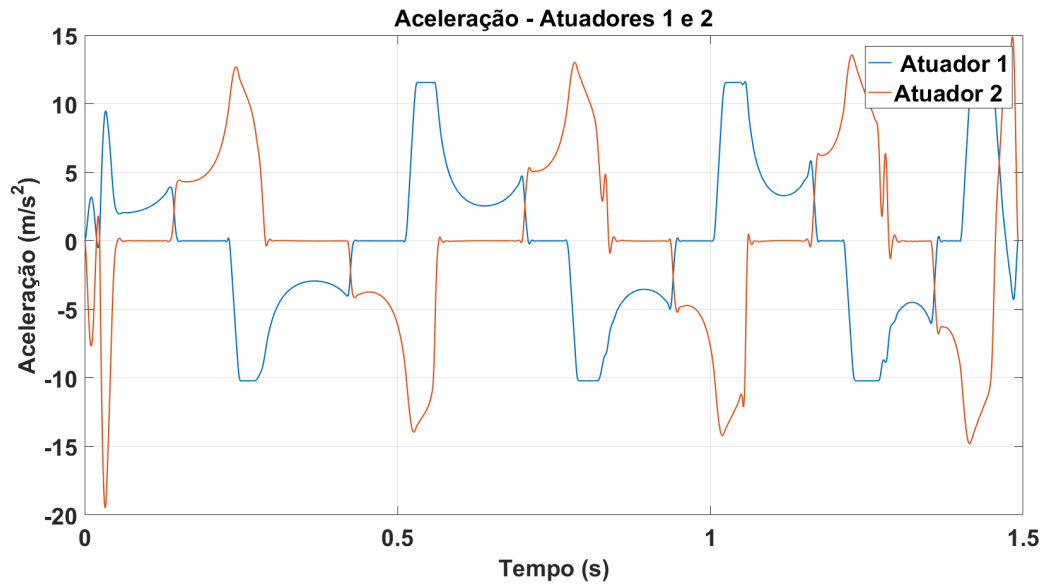


Figura 5.13 – Caminho Geométrico 2 - Aceleração dos atuadores.

Assim como para o Caminho Geométrico 1, o *jerk* do Caminho Geométrico 2 apresentou perfil oscilatório para alguns trechos, conforme exposto na Figura 5.14.

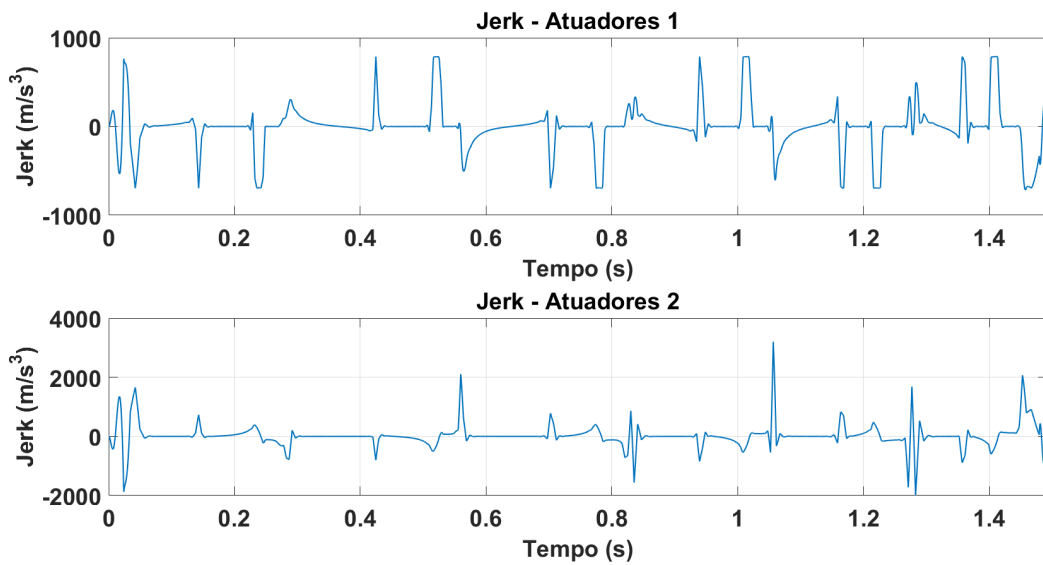


Figura 5.14 – Caminho Geométrico 2 - *Jerk* dos atuadores.

Na Figura 5.15, é apresentada a força hidráulica dos atuadores quando estes percorrem o Caminho Geométrico 2 ao longo do tempo e, na Figura 5.16, é apresentada a correspondente parcela da força conforme seu fenômeno de origem.

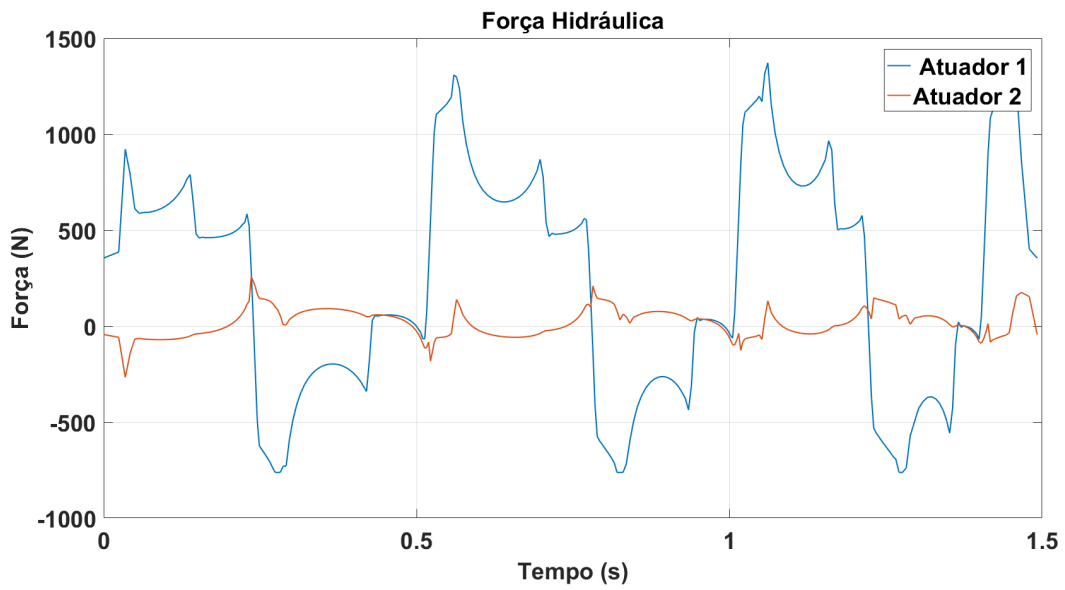


Figura 5.15 – Caminho Geométrico 2 - Força hidráulica dos atuadores.

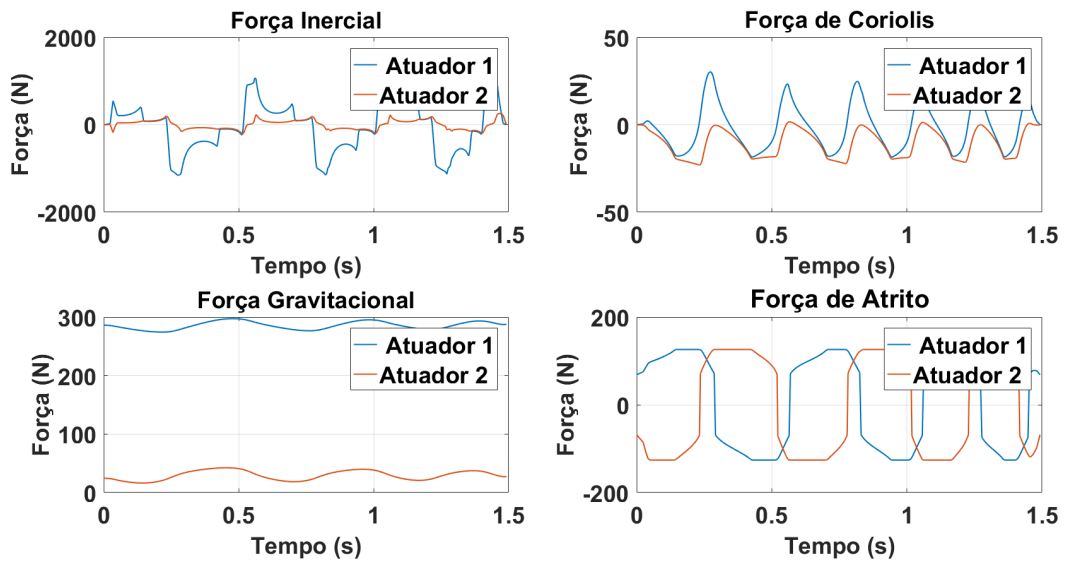


Figura 5.16 – Caminho Geométrico 2 - Decomposição do equilíbrio de forças.

Assim como feito para o Caminho 1, na Figura 5.17, é apresentado o mapeamento da integral da velocidade do Caminho 2 no espaço de trabalho. O resultado é sobreposto ao caminho geométrico original, mostrando novamente a boa aproximação das curvas.

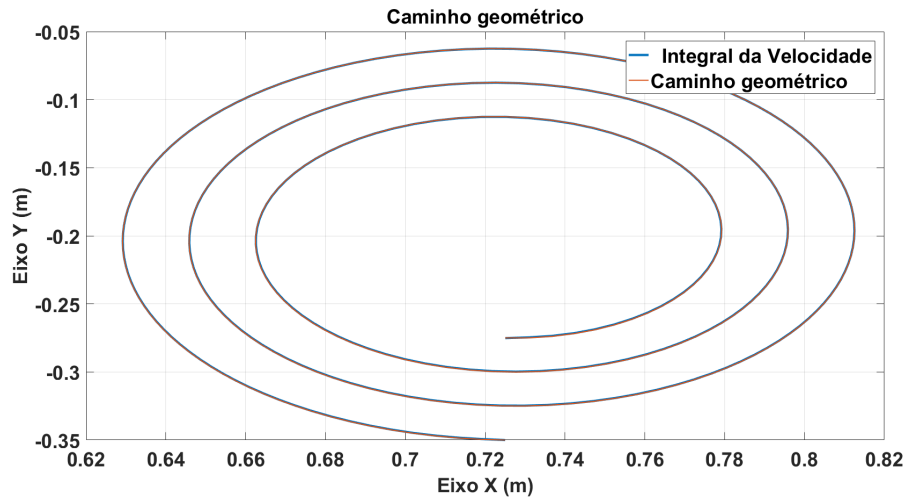


Figura 5.17 – Caminho Geométrico 2 - Caminho Geométrico original e obtido a partir da integral da velocidade.

5.1.3 Caminho Geométrico 3

São apresentados a seguir os resultados cinemáticos para o Caminho Geométrico 3, sendo posição, velocidade, aceleração e *jerk* graficados, respectivamente, nas Figuras 5.18 à 5.21. As mesmas considerações anteriormente realizadas sobre o *jerk* também podem ser aplicadas para o Caminho Geométrico 3. O erro entre a integral da velocidade e a posição a partir do método de integração de quadratura apresentou um erro numérico máximo de $2,22 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

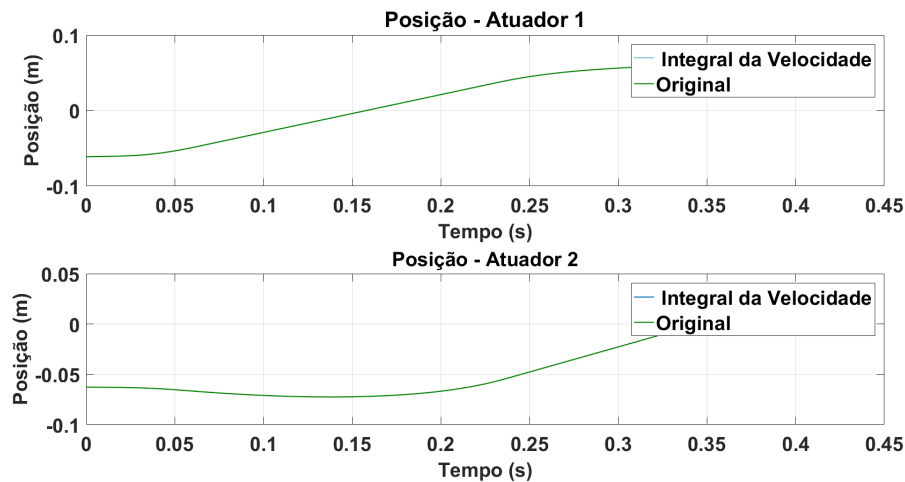


Figura 5.18 – Caminho Geométrico 3 - Posição original e obtida a partir da integral da Velocidade.

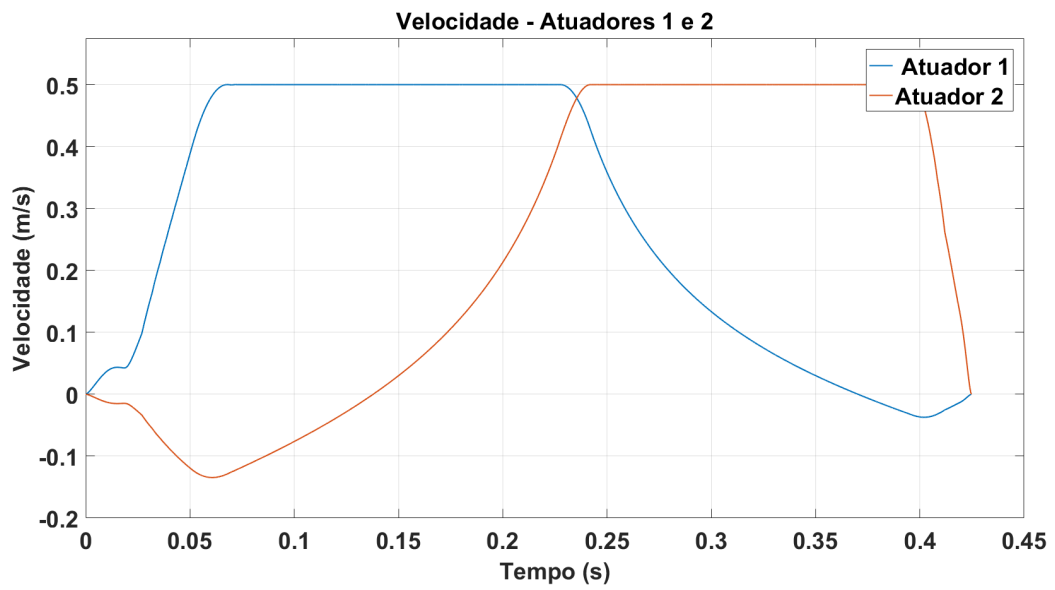


Figura 5.19 – Caminho Geométrico 3 - Velocidade dos atuadores.

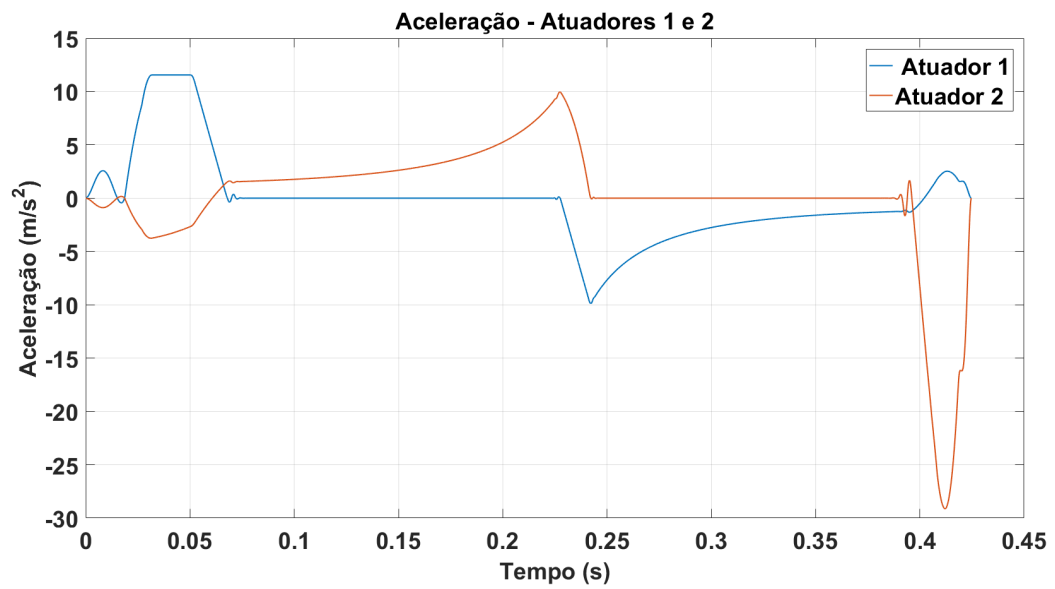


Figura 5.20 – Caminho Geométrico 3 - Aceleração dos atuadores.

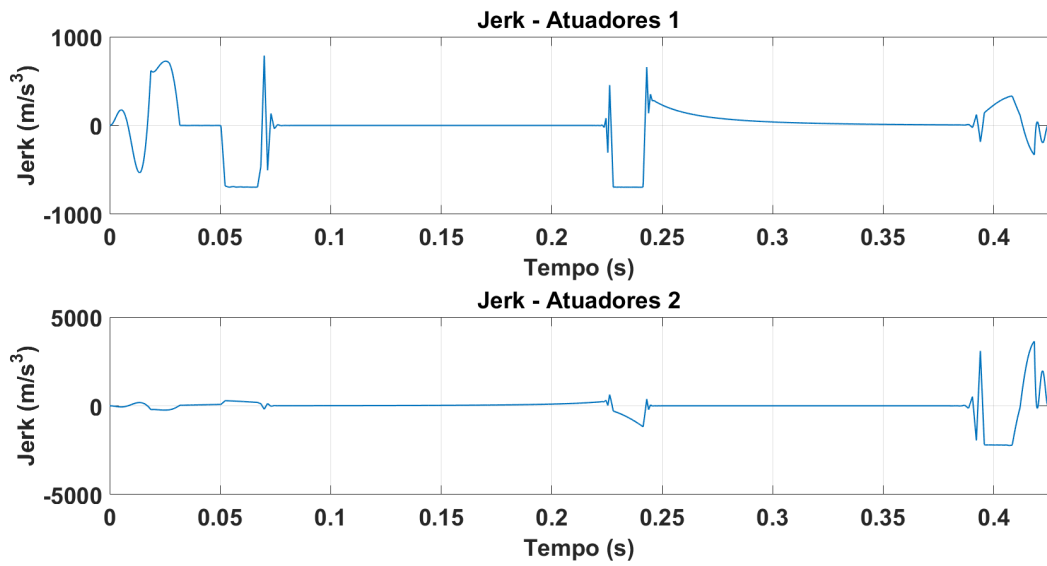


Figura 5.21 – Caminho Geométrico 3 - *Jerk* dos atuadores.

Na Figura 5.22 é apresentada a força hidráulica para o Caminho Geométrico 3 ao longo do tempo e, na Figura 5.23, é dada a correspondente parcela da força hidráulica conforme seu fenômeno de origem.

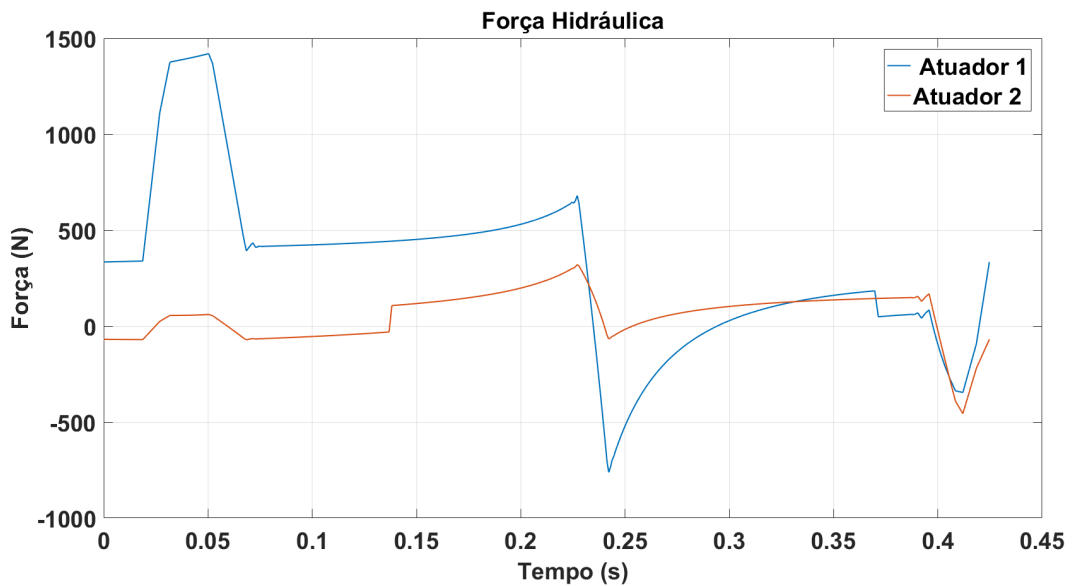


Figura 5.22 – Caminho Geométrico 3 - Força hidráulica dos atuadores.

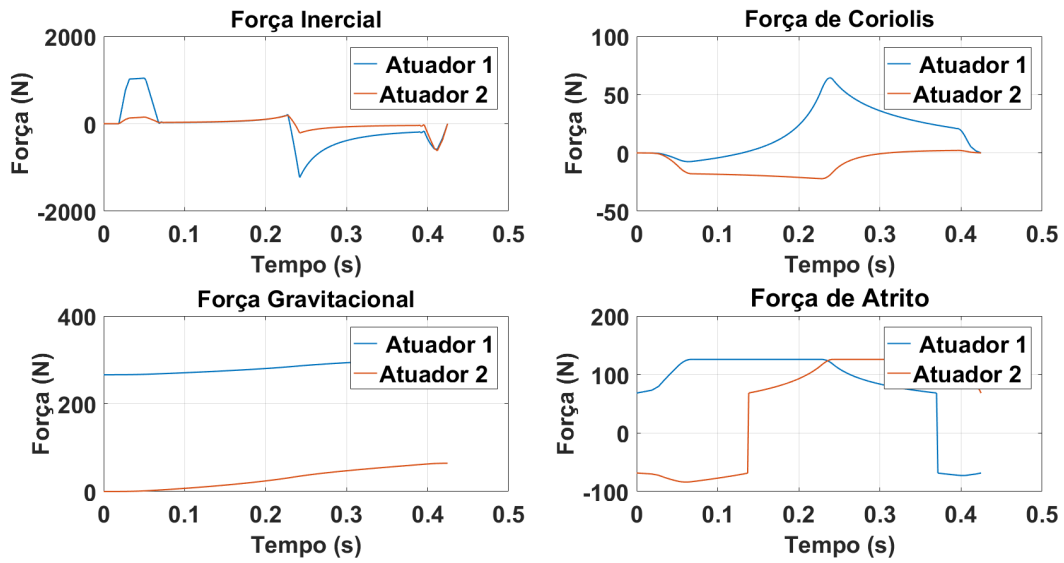


Figura 5.23 – Caminho Geométrico 3 - Decomposição do equilíbrio de forças.

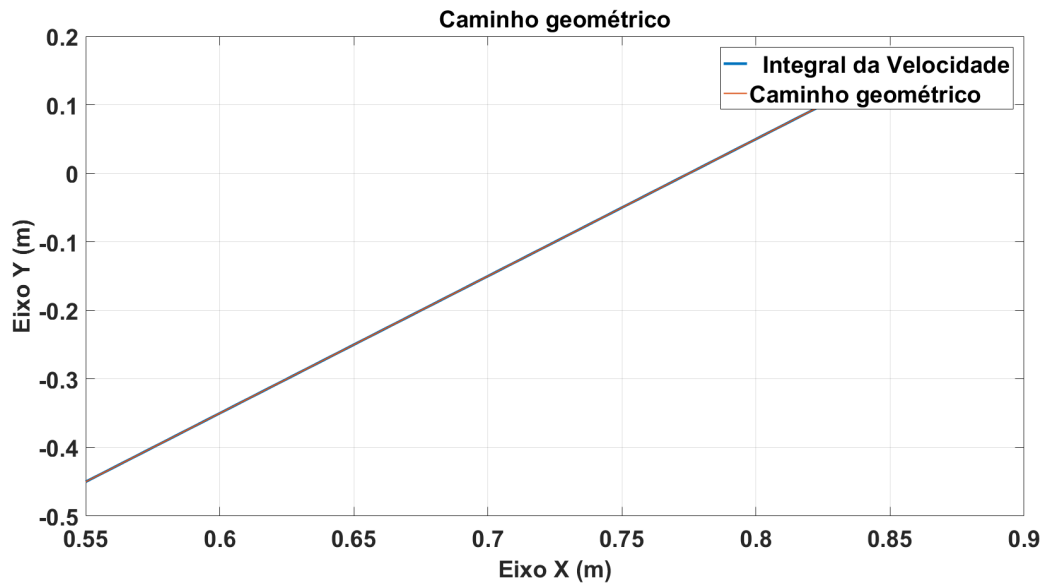


Figura 5.24 – Caminho Geométrico 3 - Caminho Geométrico original e obtido a partir da integral da Velocidade.

Na Figura 5.24, é apresentado o mapeamento da integral da velocidade do Caminho 3 (Figura 5.18) no espaço de trabalho, mostrando novamente a sobreposição entre o resultado da cinemática direta e o caminho geométrico original.

5.1.4 Resultados a Partir de Valores Nominais de Restrição

Como esperado, a partir dos conceitos apresentados nos capítulos 1 e 2, a utilização de uma função objetivo que visa a redução do tempo da trajetória acarretou em parâmetros cinemáticos e dinâmicos com valores elevados mas dentro dos limites estabelecidos nos pontos analisados. As Figuras 5.5, 5.12 e 5.19 evidenciam que os atuadores estão em boa parte da trajetória no limite máximo de velocidades ($\pm 0,5 \text{ m/s}$).

Os valores de aceleração também saturam em alguns trechos, conforme mostram as Figuras 5.6, 5.13 e 5.20, sendo mais recorrente a saturação para o Atuador 1 em função dos valores limites para essa grandeza serem menores, em decorrência do fato de que suas massas equivalentes são maiores, conforme mostram as Figuras 3.9 e 3.10. As curvas das forças hidráulicas dos atuadores, apresentadas nas Figuras 5.8, 5.15 e 5.22, também atingem seus valores máximos e mínimos, no entanto, de forma pontual.

Em relação às curvas de *jerk*, apresentadas nas Figuras 5.7, 5.14 e 5.21, é possível verificar que para o Atuador 1 manifestam-se trechos maiores de saturação do que para o atuador 2, que atinge seus limites de *jerk* de forma pontual, em função dos valores limites para essa grandeza serem menores do que para o atuador 1, também devido aos valores das massas equivalentes.

Os tempos de trajetória para os caminhos geométricos 1, 2 e 3 estão apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Tempos de trajetória para cada um dos caminhos geométricos.

	Tempo de Trajetória
Caminho Geométrico 1	1,295 s
Caminho Geométrico 2	1,481 s
Caminho Geométrico 3	0,4247 s

5.2 Restrições com Aumento de Pressão de Suprimento

Com o intuito de analisar as mudanças no tempo de trajetória causadas por alterações operacionais do robô. Altera-se, neste caso, a pressão de suprimento, que, de forma direta, não é uma das restrições utilizadas no problema de planejamento. No entanto, essa mudança acaba afetando os limites de força hidráulica, aceleração e *jerk*,

tanto pelo Critério 1 quanto pelo Critério 2, conforme mostram as Equações 3.20, 3.21 e 3.24 a 3.29, as quais determinam esses limites.

Mantidos os mesmos atuadores e, desta forma, os mesmos limites de velocidade especificados pelo fabricante de $\pm 0,5 \text{ m/s}$, mas utilizando uma pressão de suprimento duas vezes maior (60 bar), são calculadas as novas restrições de trajetória, apresentadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Limites cinemáticos e dinâmicos do manipulador com atuadores lineares para pressão de suprimento de 60 bar .

	Atuador 1	Atuador 2
Aceleração Máxima (\overline{Acc})	$25,83 \text{ m/s}^2$	$114,79 \text{ m/s}^2$
Aceleração Mínima (\underline{Acc})	$-17,59 \text{ m/s}^2$	$-61,83 \text{ m/s}^2$
<i>Jerk</i> Máximo Critério 1 (\overline{jerk}_α)	$7,87 \cdot 10^5 \text{ m/s}^3$	$3 \cdot 10^6 \text{ m/s}^3$
<i>Jerk</i> Mínimo Critério 1 (\underline{jerk}_α)	$-2,74 \cdot 10^5 \text{ m/s}^3$	$-1,06 \cdot 10^6 \text{ m/s}^3$
<i>Jerk</i> Máximo Critério 2 (\overline{jerk}_β)	1762 m/s^3	7829 m/s^3
<i>Jerk</i> Mínimo Critério 2 (\underline{jerk}_β)	-1199 m/s^3	-4216 m/s^3
Força Máxima ($\overline{f_H}$)	2946 N	2946 N
Força Mínima ($\underline{f_H}$)	-1524 N	-1524 N

A partir dos dados da Tabela 5.3, são utilizados os caminhos geométricos 1, 2 e 3, expressos, respectivamente, pelas Equações 3.13, 5.1 e 5.2. Desta forma, são obtidos os resultados para cada um dos tempos de trajetória, apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Tempos de trajetória para aumento da pressão de suprimento.

	Tempo de Trajetória
Caminho Geométrico 1	$1,259 \text{ s}$
Caminho Geométrico 2	$1,427 \text{ s}$
Caminho Geométrico 3	$0,4068 \text{ s}$

Comparando os resultados obtidos para diferentes valores de pressão de suprimento, verifica-se que, para os casos analisados, uma diferença significativa de pressão de suprimento, de 30 bar para 60 bar , compreende mudanças significativas nos limites de operação, conforme mostram os valores apresentados nas tabelas 5.1 e 5.3. No entanto, observa-se que essas variações nas restrições de aceleração, *jerk* e força ocasionaram mudanças menos significativas nos tempos de trajetórias, que apresentaram uma redução de 2,78% a 4,21%.

5.3 Aumento do Limite de Velocidade

É importante ressaltar que, para o teste anterior com aumento da pressão de suprimento para 60 *bar*, os limites de velocidade foram os únicos a não serem alterados com o aumento de pressão, visto que são especificados pelo fabricante do atuador. Como forma de análise a influência deste parâmetro no comportamento do tempo de trajetória, realizou-se um teste a partir do aumento do valor de restrição de velocidade em 50% ($\pm 0,75 \text{ m/s}$) e, apesar da influência desta em outras restrições, conforme apresentado na Seção 3.4, os demais limites presentes na Tabela 5.1 são mantidos. Na Tabela 5.5, estão presentes os tempos de trajetória obtidos para os caminhos geométricos 1, 2 e 3 para uma restrição de velocidade nos atuadores de $\pm 0,75 \text{ m/s}$.

Tabela 5.5 – Tempos de trajetória para o caso de aumento da velocidade limite dos atuadores em 50%.

	Tempo de Trajetória
Caminho Geométrico 1	0,9827 s
Caminho Geométrico 2	1,183 s
Caminho Geométrico 3	0,3179 s

Comparando os valores das tabelas 5.2, 5.4 e 5.5, é possível verificar que o parâmetro que provocou maiores alterações nos tempos de trajetória foi o limite de velocidade, onde um aumento de 50% nesse parâmetro ocasionou uma redução entre 20,12 % a 25,15 % no tempo necessário para percorrer os caminhos geométricos.

5.4 Redução do Limite de *Jerk*

Outro aspecto analisado trata do comportamento do *jerk*, considerando as características do atuadores hidráulicos apontadas no Capítulo 2. Esses atuadores possuem a capacidade de prover variações elevadas de torque e, conseqüentemente, também de *jerk*, de acordo com os valores apresentados na Tabela 5.1. Buscando o planejamento de trajetórias com valores reduzidos de *jerk* e, por conseqüência, mais suaves, o valor de restrição dessa grandeza é reduzido. No presente caso, visando a ilustrar este comportamento, mostra-se os resultados com uma redução de, respectivamente, 10% e 30% do seu valor original. Os resultados do impacto no tempo

de trajetória, estão apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Tempos de trajetória para redução da *jerk* limite dos atuadores.

<i>Jerk</i>	Tempo de Trajetória	
	10%	30%
Caminho Geométrico 1	1,489 s	1,344 s
Caminho Geométrico 2	1,755 s	1,556 s
Caminho Geométrico 3	0,5249 s	0,4608 s

A redução do limite de *jerk* para 10% do seu valor original implicou em um aumento do tempo de trajetória de 14,98% a 23,59% quando relacionados com os valores da Tabela 5.2. Já, para uma redução para 30%, não ocasionou em aumentos tão expressivo de tempo, resultando em valores maiores em torno de 3,78% a 8,50%. Analisando a suavidade, tomando o Caminho Geométrico 1 como exemplo, as curvas de *jerk* com os limites reduzidos para 10% e 30% dos valores originais, apresentados nas Figuras 5.25 e 5.26, respectivamente, são mais suaves quando comparadas com a Figura 5.7.

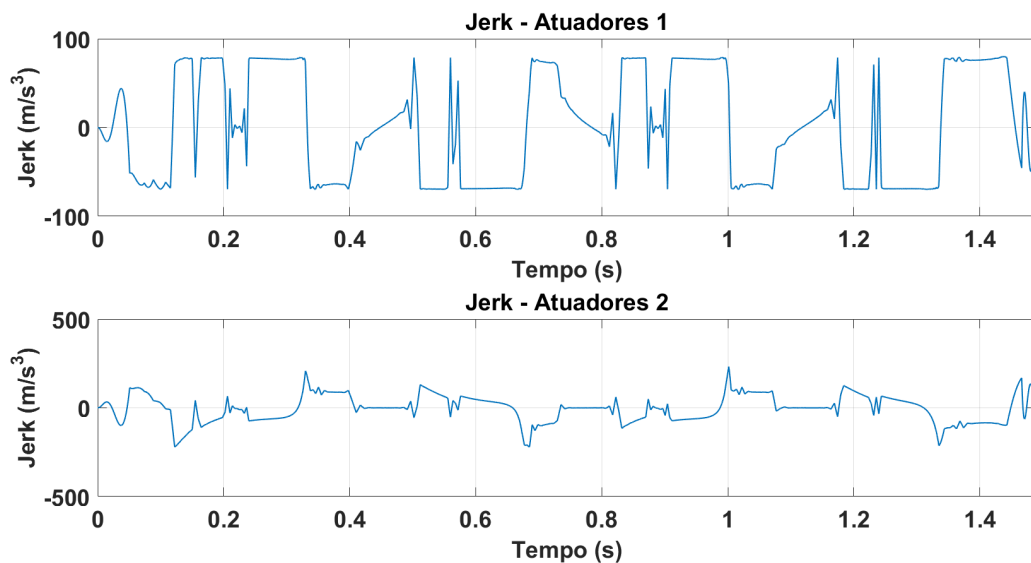


Figura 5.25 – Caminho Geométrico 1 - Jerk dos atuadores com redução para 10% do seu limite.

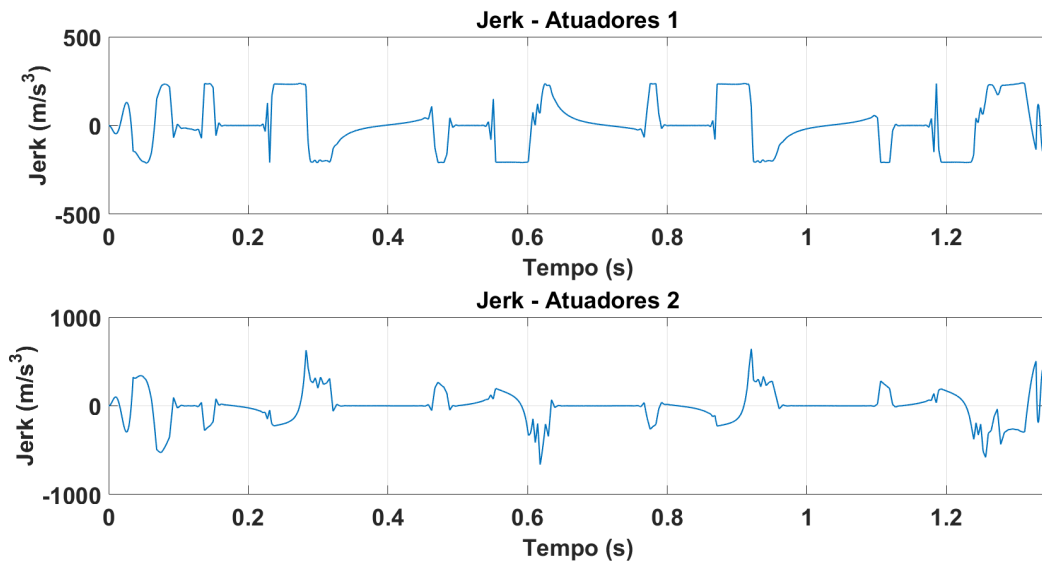


Figura 5.26 – Caminho Geométrico 1 - Jerk dos atuadores com redução para 30% do seu limite.

5.5 Aumento do Limite de Velocidade e Redução do Limite de *Jerk*

Baseado nos resultados prévios, com intuito de obter trajetórias mais suaves e rápidas, testou-se aumento de 50% da velocidade limite e redução de 70% do valor do limite de *jerk* (quando comparado com a Tabela 5.1). Estes resultados, presentes na Tabela 5.7, apresentam redução do tempo de trajetória de 14,92% a 24,72% em relação aos valores para os parâmetros originais (da Tabela 5.2 e de 19,02% a 30,62% em relação aos valores obtidos parâmetros de redução de *jerk* para 30% de seu valor (da Tabela 5.6). Por outro lado, os resultados mostram um aumento de tempo de trajetória de 5,42% a 6,51% em comparação com os dados relativos ao aumento da velocidade limite (da Tabela 5.5).

Tabela 5.7 – Tempos de trajetória para aumento da velocidade limite dos atuadores e redução de *jerk*.

	Tempo de Trajetória
Caminho Geométrico 1	1,036 s
Caminho Geométrico 2	1,260 s
Caminho Geométrico 3	0,3197 s

5.6 Discussão sobre os resultados

A partir dos tempos de trajetória dos testes aplicados aos três caminhos geométricos utilizados, compilados na Tabela 5.8, notou-se que as alterações relacionadas à pressão de suprimento não resultam em redução significativa do tempo de trajetória. Assim, o principal parâmetro a ser tratado para diminuição do tempo de percurso dos caminhos geométricos está vinculado ao limite de velocidade dos atuadores, visto que as curvas apresentam maiores trechos de saturação e sua alteração ocasionou maior impacto na redução do tempo de percurso. A redução do limite de *jerk* acrescenta suavidade às trajetórias obtidas mas, tomando como critério a redução do tempo, resulta em um aumento significativo, a partir da utilização de 10 % do valor nominal de *jerk*, já para valores de 30 % do valor nominal de *jerk*, há um pequeno aumento no tempo de percurso. Por último, foi realizado o teste para valores de restrição aumentados para velocidade e reduzidos para *jerk*, fornecendo, dessa forma, tempos mais rápidos e suaves quando comparados com os obtidos a partir dos valores nominais de restrição.

Tabela 5.8 – Compilado dos tempos de trajetória para cada teste e caminho geométrico.

Teste	Caminho Geométrico 1	Caminho Geométrico 2	Caminho Geométrico 3
Valores Nominais	1,295 s	1,481 s	0,4247 s
Aumento de pressão de suprimento	1,259 s	1,427 s	0,4068 s
Aumento do limite de velocidade	0,9827 s	1,183 s	0,3179 s
Redução do Limite de Jerk (10 %)	1,489 s	1,755 s	0,5249 s
Redução do Limite de Jerk (30 %)	1,344 s	1,556 s	0,4608 s
Alteração de velocidade e de jerk	1,036 s	1,260 s	0,3197 s

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho aborda uma análise sobre a aplicação de um método convexo de otimização em relação ao tempo para trajetórias de um robô serial com atuadores hidráulicos lineares. Baseado nos resultados de simulação apresentados no Capítulo 5, é possível afirmar que o objetivo principal foi atingido, sendo possível realizar o planejamento de trajetórias adequadas às características físicas e aos controladores usualmente utilizados para esses dispositivos.

A utilização da metodologia proposta permite que, por meio de uma otimização convexa, seja encontrada a melhor solução dentro do espaço de busca, ou seja, um ponto ótimo global. A partir dos requisitos de suavidade de um caminho geométrico predefinido, relacionado à sua terceira derivada, conforme o Capítulo 4, é utilizada uma metodologia que, através do uso de *splines* normalizadas e relaxações do espaço de busca da solução, permite a inclusão de restrições cinemáticas e dinâmicas no problema de planejamento. Desta forma, torna-se possível a elaboração de trajetórias de tempo ótimo global com *jerk* contínuo que apresentem compatibilidade com as características do manipulador de enfoque, permitindo, desse modo, sua aplicação prática.

Para permitir a inclusão dos limites máximos e mínimos de velocidade, aceleração, *jerk* e força hidráulica para uma dada trajetória, é necessário determinar precisamente estes limites considerando as características dos manipuladores utilizados. Assim, na Seção 3.4 são apresentados os métodos para estimação desses parâmetros, considerando as variações das massas equivalentes em relação às hastes dos atuadores, proporcionadas pelos diferentes pontos do espaço de posições possíveis. Para que isso seja possível, são também levadas em conta as considerações sobre as características dinâmicas tanto dos atuadores quanto da estrutura mecânica do manipulador.

A partir do problema de otimização e dos parâmetros de restrições, é proposto o método de planejamento de trajetórias, o qual, para obtenção de resultados, é aplicado considerando três caminhos geométricos diferentes, utilizados como forma de avaliação. Os resultados obtidos apresentaram características comuns, como longos trechos de saturação das curvas em relação ao limite velocidade e saturações pontuais em relação aos limites de aceleração e força hidráulica. As curvas de *jerk* apresentaram características de oscilatórias, especialmente em trechos de variações abruptas de

aceleração.

Testes com diferentes limites de restrição foram realizados visando a determinar como seus valores afetam o tempo de trajetória. Por exemplo, o incremento da pressão de suprimentos, resultou no aumento dos valores das restrições de aceleração, força hidráulica e *jerk*, o que representou uma redução pequena nos tempos de trajetória. Por outro lado, um aumento na velocidade limite dos atuadores representou uma redução significativa na duração de trajetória, o que é explicado por dois fatores, o primeiro consiste no conceito que é necessário a utilização de velocidades mais altas para redução do tempo de percurso. O segundo fator está vinculado com as curvas de velocidade obtidas a partir do valores iniciais de restrição, onde ocorrem em grandes trechos de saturação da velocidade, ilustradas na Figura 5.5. Desta forma, para o manipulador utilizado, as limitações para alcançar tempos menores de trajetória estão relacionadas mais diretamente aos limiares máximo e mínimos de velocidade. Outro aspecto analisado foi o de redução dos limites de *jerk*, o que aumentou o tempo de duração de trajetória, fornecendo, porém, curvas mais suaves. Ressalta-se que a utilização dos métodos de definição dos valores cinemáticos e dinâmicos limites, juntamente com o métodos de otimização de trajetória, pode servir como base para o desenvolvimento de manipuladores, caso um dos aspectos de interesse seja a construção de manipuladores com ciclo de trabalho reduzidos.

6.1 Sugestões para Trabalho Futuros

Como sugestão de desenvolvimento de atividades de pesquisa para continuidade deste trabalho, sugere-se:

- Desenvolver ferramentas para geração automática de caminhos geométricos com terceira derivada contínua, incluindo o problema de detecção de obstáculos;
- Testar e avaliar de forma prática os métodos de obtenção dos valores cinemáticos e dinâmicos máximos apresentados;
- Implementação prática das trajetórias em manipuladores seriais com atuadores lineares;
- Desenvolver uma metodologia que auxilie o desenvolvimento de robôs hidráulicos que, como um dos critérios de avaliação, considere manipuladores com características que permitam a redução do ciclo de trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abu-Dakka, F. J. **Trajectory Planning for Industrial Robots Using Genetic Algorithms**. Tese de doutorado, Universidad Politècnica de València, 2011.

Abu-Dakka, F. J., Valero, F., e Mata, V. Evolutionary Path Planning Algorithm for Industrial Robots, **Advanced Robotics**, vol. 26(11-12), p. 1369–1392, 2012.

Adeleke, A. e Mattila, J. **Adaptive backlash inverse augmented virtual decomposition control of a hydraulic manipulator**. In 2017 IEEE International Conference on Cybernetics and Intelligent Systems (CIS) and IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics (RAM). IEEE, 2017.

Aguirre, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas**. UFMG, 2015.

Andersen, E. D. e Andersen, K. D. **The Mosek Interior Point Optimizer for Linear Programming: An Implementation of the Homogeneous Algorithm**. In Applied Optimization, p. 197–232. Springer US, 2000.

Angeles, J. **Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms (Mechanical Engineering Series)**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.

Biagiotti, L. e Melchiorri, C. **Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots**. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

Bobrow, J., Dubowsky, S., e Gibson, J. Time-Optimal Control of Robotic Manipulators Along Specified Paths, **The International Journal of Robotics Research**, vol. 4(3), p. 3–17, 1985.

Bonchis, A., Corke, P., e Rye, D. **A pressure-based, velocity independent, friction model for asymmetric hydraulic cylinders**. In Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.99CH36288C). IEEE, 1999.

Boyd, S. e Vandenberghe, L. **Convex Optimization**. Cambridge University Press, 2004.

C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. A. e Lischinsky, P. A new model for control of systems with friction, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 40(3), p. 419–425, 1995.

Ceccarelli, M. **Fundamentals of mechanics of robotic manipulation**. Springer, 2011.

Cesconeto, E. M. **Metodologia de Desenvolvimento de um Manipulador Hidráulico para Atuação na Indústria**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2018.

Chapra, S. **Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineering and Science with Engineering Subscription Card**. McGraw-Hill International edition. McGraw-Hill Higher Education, 2004.

Craig, J. J. **Robótica**. Pearson, São Paulo, third edition, 2012.

Cunha, M. A. B. **Controle em Cascata de um Atuador Hidráulico: Contribuições Teóricas e Experimentais**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

Debrouwere, F., Looock, W. V., Pipeleers, G., Dinh, Q. T., Diehl, M., Schutter, J. D., e Swevers, J. **Time-optimal path following for robots with trajectory jerk constraints using sequential convex programming**. In 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2013.

Dupont, P., Armstrong, B., e Hayward, V. **Elasto-plastic friction model: contact compliance and stiction**. In Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334). IEEE, 2000.

Gao, M., Ding, P., e Yang, Y. **Time-Optimal Trajectory Planning of Industrial Robots Based on Particle Swarm Optimization**. In 2015 Fifth International Conference on Instrumentation and Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC). IEEE, 2015.

Gasparetto, A. e Zanotto, V. A new method for smooth trajectory planning of robot manipulators, **Mechanism and Machine Theory**, vol. 42(4), p. 455–471, 2007.

Goldberg, M. e Luna, H. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. CAMPUS - RJ, 2005.

Grant, M. e Boyd, S. **Graph implementations for nonsmooth convex programs**. In Blondel, V., Boyd, S., e Kimura, H., editors, Recent Advances in Learning and Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, p. 95–110. Springer-Verlag Limited, 2008.

Grant, M. e Boyd, S. **CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1**. <http://cvxr.com/cvx>, 2014, Acesso em: 01-11-2019.

Groover, M. P. **Automação industrial e sistemas de manufatura**. Pearson Education do Brasil, 2011.

Gurobi Optimization, L. **Gurobi Optimizer Reference Manual**, 2020.

Izquierdo, R. C. **Planejamento de Trajetórias Livres de Colisão: Um Estudo considerando Restrições Cinemáticas e Dinâmicas de um Manipulador Pneumático por Meio de Algoritmos Metaheurísticos**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.

Kaserer, D., Gattlinger, H., e Mueller, A. Nearly Optimal Path Following With Jerk and Torque Rate Limits Using Dynamic Programming, **IEEE Transactions on Robotics**, vol. , p. 1–8, 2018.

Kim, J.-J. e Lee, J.-J. Trajectory Optimization With Particle Swarm Optimization for Manipulator Motion Planning, **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, vol. 11(3), p. 620–631, 2015.

Kong, M., Ji, C., sheng Chen, Z., e feng Li, R. **Smooth and near time-optimal trajectory planning of robotic manipulator with smooth constraint based on cubic B-spline**. In 2013 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO). IEEE, 2013.

Liyanage, M. H. **Development and Testing of a High Speed Hydraulic Manipulator with Single Time Scale Visual Servoing**. Tese de doutorado, University of Newfoundland, 2014.

Machado, C. L. D. **Compensação de Atrito em Atuadores Hidráulicos Utilizando Redes Neurais**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

Machado, C. L. D. **Controlador em Cascata com Adaptação de Parâmetros para Robôs Hidráulicos**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.

Marti, K. **Stochastic Optimization Methods: Applications in Engineering and Operations Research**. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

Missiaggia, L. **Planejamento de Trajetória para um Robô Cilíndrico Acionado Pneumaticamente**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

Muller, P. A., Boucherit, R., e Liu, S. **Smooth and time-optimal trajectory planning for robot manipulators**. In 2012 American Control Conference (ACC). IEEE, 2012.

Ogata, K. **Modern Control Engineering**. Instrumentation and controls series. Prentice Hall, 2010.

Overschee, P. V. e Moor, B. D. **Subspace Identification for Linear Systems**. Springer US, 1996.

Palleschi, A., Garabini, M., Caporale, D., e Pallottino, L. Time-Optimal Path Tracking for Jerk Controlled Robots, **IEEE Robotics and Automation Letters**, vol. 4(4), p. 3932–3939, 2019.

Pereira, P. I. I. **Análise Teórico Experimental de Controladores para Sistemas Hidráulicos**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

Pfeiffer, F. e Johanni, R. **A concept for manipulator trajectory planning**. In Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1986.

Reiter, A. **Time-Optimal Trajectory Planning for Redundant Robots**. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016.

Reiter, A., Muller, A., e Gattringer, H. **Inverse kinematics in minimum-time trajectory planning for kinematically redundant manipulators**. In IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. IEEE, 2016.

Reiter, A., Muller, A., e Gattringer, H. On Higher Order Inverse Kinematics Methods in Time-Optimal Trajectory Planning for Kinematically Redundant Manipulators, **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, vol. 14(4), p. 1681–1690, 2018.

Reynoso-Mora, P., Chen, W., e Tomizuka, M. A convex relaxation for the time-optimal trajectory planning of robotic manipulators along predetermined geometric paths, **Optimal Control Applications and Methods**, vol. 37(6), p. 1263–1281, 2016.

Sarmanho, C. A. C. **Desenvolvimento de um Robô Pneumático de 5 Graus de Liberdade com Controlador Não Linear com Compensação de Atrito**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

Shiller, Z. **Time-energy optimal control of articulated systems with geometric path constraints**. In Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE Comput. Soc. Press, 1996.

Shin, K. e McKay, N. Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 30(6), p. 531–541, 1985.

Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., e Oriolo, G. **Robotics: Modelling, Planning and Control**. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008.

Somlo, J. e Molnar, J. **Time-optimal motion planning for robots**. In 19th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region (RAAD 2010). IEEE, 2010.

Spong, M. W. **Robot Dynamics and Control**. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition, 1989.

Sturm, J. F. Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones, **Optimization Methods and Software**, vol. 11(1-4), p. 625–653, 1999.

Toh, K. C., Todd, M. J., e Tütüncü, R. H. SDPT3 — A Matlab software package for semidefinite programming, Version 1.3, **Optimization Methods and Software**, vol. 11(1-4), p. 545–581, 1999.

Valdiero, A. C. **Controle de Robôs Hidráulicos com Compensação de Atrito**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

Verscheure, D., Demeulenaere, B., Swevers, J., Schutter, J. D., e Diehl, M. Time-Optimal Path Tracking for Robots: A Convex Optimization Approach, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 54(10), p. 2318–2327, 2009.

Zhang, Q., Li, S.-R., e Gao, X.-S. **Practical smooth minimum time trajectory planning for path following robotic manipulators**. In 2013 American Control Conference. IEEE, 2013.