

UMA ABORDAGEM ANALÍTICA PARA A DISPERSÃO DE POLUENTES EM MEIO AQUÁTICO DO ARROIO PAMPA AO RIO DOS SINOS

Cíntia Ourique Monticelli^{1}; Jorge Rodolfo Zabadal²; Daniela Muller Quevedo¹; Carlos Augusto Nascimento¹; Leonardo Birlem³*

Resumo – Neste estudo é apresentada uma nova abordagem analítica para a solução do problema de dispersão de poluentes em meio aquático com contornos irregulares. Nesta, a equação advectivo-difusiva é expressa em termos de coordenadas curvilíneas ortogonais, definidas pelo potencial de velocidade e pela função corrente. A solução obtida para o modelo unidimensional foi utilizada para efetuar simulações de carga unitária ao longo de um trecho do arroio Pampa, afluente do rio dos Sinos, que tem sua foz aproximadamente a 1,5 km do ponto de captação de água bruta para tratamento e consumo da população de Novo Hamburgo. Os resultados obtidos neste trabalho são qualitativamente consistentes com o comportamento do fenômeno e relativamente concordantes do ponto de vista quantitativo, comprovando a viabilidade da solução proposta.

Palavras-Chave – dispersão de poluentes; equação advectivo-difusiva; soluções analíticas.

AN ANALYTICAL APPROACH TO DISPERSION OF AQUATIC POLLUTANTS FROM PAMPA CREEK TO SINOS RIVER

Abstract – In this work a new analytical approach for solving pollutant dispersion problems along irregular shaped water bodies is presented. In this approach, the advection-diffusion equation is expressed in terms of orthogonal curvilinear coordinates, defined by velocity potential and stream function. The solution obtained for the one-dimensional model was used to perform unit load simulation along a stretch of the Pampa Creek, a tributary of Sinos river next to water abstraction for treatment and supplying of Novo Hamburgo people. The obtained results in this work was qualitatively consistent with the expected behavior of the phenomenon and relatively concordant with this point of view, proving the feasibility of the proposed solution.

Keywords – pollutants dispersion; advection-diffusion equation; analytical solution.

1. INTRODUÇÃO

A conservação da qualidade das águas de corpos hídricos superficiais possui grande importância para a sociedade, visto que a água é captada a fim de abastecer os sistemas de distribuição para a população. Entretanto, em razão de seu poder de diluição e autodepuração, diversos rios também servem como destino final do esgotamento sanitário. Daí a importância das ferramentas técnicas de auxílio ao planejamento, monitoramento e gestão dos recursos hídricos, entre as quais a modelagem matemática se destaca como um instrumento fundamental. Modelos matemáticos possibilitam a geração de informações organizadas adequadamente, integrando espacial e temporalmente dados experimentais dispersos e não raro estatisticamente desconexos, além de

¹ Universidade Feevale, cintiam@feevale.br, danimq@feevale.br; nascimento@feevale.br

² UFRGS: jorge.zabadal@ufrgs.br

³ Universidade Feevale: leobirlem@gmail.com

* Autor Correspondente: cintiam@feevale.br

promover um melhor entendimento da dinâmica dos processos e permitir a previsão de condições futuras do sistema em relação a parâmetros relevantes.

Para se resolver as equações diferenciais que descrevem o problema em questão, existem três possíveis formas de solução: métodos numéricos, analíticos e híbridos. Os métodos numéricos, usualmente empregados pela comunidade científica, costumam fornecer resultados suficientemente realistas para problemas de transporte de partículas, Jobim (2012). Na aplicação de soluções numéricas à dinâmica de fluídos computacional, seja pelo método das diferenças finitas, dos elementos ou dos volumes finitos, é comum ter de discretizar o domínio em malha fina com milhares ou até milhões de pontos, o que produz sistemas algébricos de ordem muito elevada como Fernandez (2007), Rosmann *et al.* (2009). Assim, na maioria das vezes, a solução numérica demanda alto esforço computacional, conseqüentemente apresenta alto tempo de processamento, o que pode inviabilizar, em alguns casos, a geração do número suficiente de cenários em tempo hábil.

Neste trabalho é apresentada uma nova abordagem analítica para solução do problema de dispersão de poluentes em meio aquático. Na qual, a equação advectivo-difusiva é expressa em termos de novas coordenadas curvilíneas ortogonais, definidas pelo potencial de velocidade e pela função corrente. O emprego desta técnica produz uma solução de forma fechada para o modelo de propagação de poluentes conservativos ou não conservativos. Sua implementação gera códigos simbólicos bastante compactos e de alta performance computacional.

A fim de comprovar a viabilidade e validade do método proposto são apresentados os resultados iniciais da pesquisa, para um modelo unidimensional na simulação da dispersão de poluentes orgânicos, neste caso, coliformes termotolerantes, em um trecho de 7Km do arroio Pampa até seu encontro com o Rio dos Sinos, em uma área urbana da cidade de Novo Hamburgo, Rio Grande do Sul, Brasil. Os dados utilizados para as simulações estavam disponíveis na literatura.

2. MODELO

2.1 Equacionamento

Neste estudo, a fim de obter-se uma aproximação para estimativa de concentração de coliformes termotolerantes à jusante de uma fonte pontual, considerou-se o meio: homogêneo, isotrópico, uniforme, o escoamento incompressível e irrotacional. Ainda, muitos rios e lagos podem ser reduzidos a um problema bidimensional pelo fato de se comportarem como lâminas d'água, uma vez que a profundidade é muito menor que a distância entre as margens, assim a dispersão já terá tido tempo suficiente para homogeneizar o perfil vertical de concentração no momento em que a pluma houver se espalhado horizontalmente em escala geográfica. Conseqüentemente será desprezada a dispersão na direção z .

Com as alterações e simplificações aplicadas à equação geral do balanço de partículas, Crank (1975); Kambe (2007), a partir de uma visão Euleriana do processo, e admitindo que a cinética de reações pode ser representada por um decaimento de primeira ordem, gera-se a equação advectivo-difusiva bidimensional para poluentes não conservativos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - kC \quad (1)$$

Em Eq. (1), C é a concentração de poluente, x e y são as direções o movimento, u e v são as velocidades do corpo hídrico nas direções x e y respectivamente, D é o coeficiente de difusão por oscilação superficial, Garcia (2009) e k é o coeficiente de velocidade.

Dado que o único efeito transiente sobre a distribuição de concentrações a ser considerado se deve aos efeitos da cinética de degradação, constituindo um fenômeno independente do transporte de massa, a Eq. (1) pode ser desacoplada através do processo de “split”, Zabadal *et al.* (2012):

Na equação cinética:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -kC \quad (2)$$

E na Equação de Transporte:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

2.1.1 Solução Analítica

Uma vez que a equação alvo foi desacoplada em um sistema de duas equações, Eq. (2) e Eq. (3), é possível resolvê-las paralelamente: a equação cinética por separação de variáveis e a equação de transporte utilizando transformações Bäcklund, Polyanin (2004) e de Fourier, Spiegel (1976).

2.1.2 Solução da equação cinética para decaimento de primeira ordem

O comportamento assintótico do modelo cinético para a maioria dos poluentes é exponencial, assim sendo resolvendo a Eq. (2) por separação de variáveis e isolando C obtém-se:

$$C(x, y, t) = f(x, y)e^{-kt} \quad (4)$$

A função $f(x, y)$ constitui justamente um solução exata para a equação de transporte, Eq. (3). Assim, substituindo Eq. (4) na Eq. (3) tem-se:

$$\left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) e^{-kt} = D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) e^{-kt} \quad (5)$$

Cancelando o termo exponencial, a equação de transporte é restaurada:

$$\left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) = D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

2.1.3 Solução da equação de transporte para fontes pontuais

É possível produzir a solução da equação do transporte escrevendo-a em termos de um novo sistema de coordenadas curvilíneas (ϕ, ψ) , onde $\phi(x, y)$ é o potencial de velocidades e $\psi(x, y)$ é a função corrente. Para executar esta tarefa, será necessário redefinir as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem da função $f(x, y)$ em termos do potencial de velocidade $\phi(x, y)$ e da função corrente $\psi(x, y)$. Utilizando a regra de cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (7)$$

as identidades e as condições de Cauchy-Riemann:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

Também utilizando a regra da cadeia para a derivada segunda, o Laplaciano de $f(x, y)$, fica:

$$\nabla^2 f(x, y) = (u^2 + v^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \right) \quad (9)$$

Substituindo as equações 7, 8 e 9 em 6 e efetuando as simplificações necessárias, é possível obter a equação advectivo-difusiva para o estado estacionário em função do novo sistema de coordenadas curvilíneas como:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \right) \quad (10)$$

3. MODELO UNIDIMENSIONAL

Para o caso de rios estreitos ou de escoamento lento, quando a distribuição de concentrações atingir o regime estacionário, o perfil transversal já estará homogeneizado. Assim o termo difusivo nesta direção ($\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}$) poderá ser desprezado e o modelo se tornará unidimensional, descrito através da equação diferencial ordinária:

$$\frac{df}{d\phi} = D \frac{d^2 f}{d\phi^2} \quad (11)$$

Resolvendo Eq. (12) pelo método de separação de variáveis, obtém-se:

$$f(\phi) = b_0 + c_0 e^{\frac{\phi}{D}} \quad (12)$$

Nesta solução b_0 representa um “buffer” constante, ou seja, o valor mínimo de concentração que a substância de interesse atingirá, o qual pode ser considerado nulo para poluentes não conservativos, já que para estes a concentração C cairá a zero quando $\phi \rightarrow -\infty$ na ausência de novas fontes. A constante c_0 representa a concentração inicial do contaminante no ponto de despejo.

Reacoplando a solução obtida pela Eq. (12) à solução da equação cinética dada pela Eq. (4), obtém-se a função de suporte compacto:

$$C = c_0 e^{\left(\frac{\phi}{D} - kt\right)} \quad (13)$$

A expressão Eq. (13) nos fornece a concentração do poluente à jusante do despejo uma vez sabida a concentração inicial do poluente e seu perfil de velocidade no trecho.

4. SIMULAÇÃO E RESULTADOS OBTIDOS

4.1 Dados experimentais

Para validação da solução proposta foram utilizados dados experimentais, para a quantidade de coliformes termotolerantes, disponíveis em Nascimento (2009) coletados na nascente, curso e foz do Arroio Pampa (Fig. 1) - afluente do Rio dos Sinos. Este rio abastece uma população de cerca de 97% da população urbana do município de Novo Hamburgo Rio Grande do Sul, Brasil (COMUSA, 2015), município com população estimada de 249.113 pessoas Rio Grande do Sul, Brasil (IBGE, 2017). O Arroio Pampa recebe carga doméstica de uma região com aproximadamente 40% da população total do município de Novo Hamburgo, (PMNH, 2017) que lançam seus efluentes, sem tratamento neste curso d'água, que desagua no rio dos Sinos cerca de 1,5Km do ponto de coleta de água bruta para tratamento e posterior distribuição pública da cidade.

Foi tomado como ponto de partida das partículas o ponto P1, localizado na nascente do arroio Pampa. O ponto P2, localizado no meio do curso do arroio está distante 3919m de P1, bem como P3, foz do arroio, está à 7669m longe P1. O ponto P4, no rio dos Sinos, localizado junto à estação de captação e tratamento de água está 1668m à jusante de P3.

4.2 Potenciais de velocidade

As velocidades nos quatro pontos utilizados neste trabalho, foram obtidas com o medidor portátil de velocidade Flo-Mate™ modelo 2000, em medições mensais nos pontos

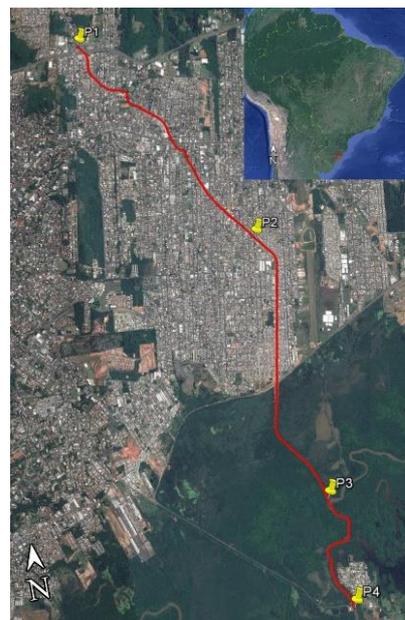


Figura 1 - vista aérea Arroio pampa e trecho do Rio dos Sinos Google Earth Pro. Versão 7.1.5.1557. Ano 2017

do trecho estudado e estão descritas nas tabelas 1, 2 e 3. Utilizou-se a velocidade média em cada ponto e período de interesse.

No ponto de captação de água pela Companhia Municipal de Saneamento de Novo Hamburgo (COMUSA), P4, utilizou-se a média de velocidade do curso d'água para o período de primavera/verão a qual foi medida em 0,37m/s e no período outono/inverno de 0,69m/s.

Foram calculados os valores da coordenada $\phi(x)$ em cada ponto e data considerando o valor da velocidade média de escoamento \bar{u} , pela definição do potencial de velocidade:

$$\phi(x)_i = \alpha \int_0^{-x_i} \bar{u} dx \quad (14)$$

Em Eq. (14) $\alpha = 10^{-4}$ representa um valor adimensional de correção à ordem de grandeza da velocidade para contemplar o efeito que a agitação da massa líquida exerce sobre a boia de medição da velocidade, uma vez que essa se desloca em todas as direções em pequeníssimos intervalos de tempo. Esse efeito provoca uma amplificação considerável sobre o coeficiente de difusão, uma vez que promove uma mistura essencialmente isotrópica quando as calotas formadas sobre a superfície da água sobem e descem alternadamente. Assim, não é necessário calcular a distância efetiva percorrida ao longo do tempo, acumulando as projeções do vetor velocidade sobre a direção principal do escoamento. Então divide-se o valor correspondente ao coeficiente de difusão referente a água estagnada (movimento Browniano), cuja ordem de grandeza é de 0,000001, Bird *et al.* (2004) pelo coeficiente de difusão, estimado através de um modelo oscilatório derivado das equações de Navier-Stokes (modelo Korteweg-de Vries), cujo valor é de aproximadamente 0,01, Garcia (2009). Logo este quociente é da ordem de 10^{-4} , esse quociente equivale ao produto entre a velocidade instantânea e a metade do percurso livre médio.

Tabela 1. Velocidades medidas e potenciais de velocidade no ponto P1

Período	Mai/06	Jul/06	Ago/06	Out/06	Nov/06	Jan/07	Mar/07	Mai/07
\bar{u} (m/s)	0,081	0,10	0,175	0,149	0,134	0,062	0,154	0,12
$\phi(x)$ (m ² /s)	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2. Velocidades medidas e potenciais de velocidade no ponto P2

Período	Mai/06	Jul/06	Ago/06	Out/06	Nov/06	Jan/07	Mar/07	Mai/07
\bar{u} (m/s)	0,23	0,102	0,376	0,326	0,392	0,367	0,394	0,39
$\phi(x)$ (m ² /s)	-0,0966	-0,03997	-0,1435	-0,1279	-0,15391	-0,14393	-0,15441	-0,15284

Tabela 3. Velocidades medidas e potenciais de velocidade no ponto P3

Período	Mai/06	Jul/06	Ago/06	Out/06	Nov/06	Jan/07	Mar/07	Mai/07
\bar{u} (m/s)	0,03	0,456	0,28	0,4518	0,063	0,221	0,242	0,18
$\phi(x)$ (m ² /s)	-0,02301	-0,34971	0,21473	-0,3465	-0,04875	-0,16948	-0,18559	-0,13804

4.3 Coeficiente de difusão

Na ausência de qualquer outra característica que possa fazer a probabilidade de uma molécula migrar de um ponto a outro ser diferente para cada direção de propagação do poluente, é seguro adotar que o coeficiente de difusão seja um valor constante. Assim, o coeficiente de difusão por oscilação superficial em microescala, D , adotado, foi dado pelo quociente entre o percurso livre médio e o dobro do período entre colisões moleculares sucessivas, no qual obteve-se $D = 0,25\text{m}^2/\text{s}$, Garcia *et al.* (2009).

4.4 Coeficiente de velocidade

O coeficiente de velocidade, k , presente no modelo relativo à cinética de decaimento bacteriano e de poluentes químicos, é indiretamente dependente da posição e da variável temporal. Para determinação de k foram utilizados os dados para o cálculo de outro coeficiente o T90. Este é obtido através de ensaios laboratoriais, e mede o tempo necessário para reduzir em 90% a população de

bactérias presentes na água, isto é, reduzir a população a 10% do valor original no local de emissão. No experimento utilizado, Lersch *et al.* (2013), tal redução ocorreu em 48h, o que a partir da solução da equação diferencial de primeira ordem que descreve a cinética de degradação, possibilitou estimar a constante de velocidade em $k = -0,0479$.

4.5 Tempo

O tempo foi calculado a partir da distância que a partícula percorreu em cada trecho e da velocidade média obtida experimentalmente. Para cada trecho em cada diferente data calculou-se o tempo médio de percurso. Optou-se por não os explicitar aqui devido à facilidade de cálculo pelo leitor e pela grande quantidade de informação, uma vez que são oito datas distintas e quatro diferentes pontos do percurso avaliados.

4.6 Simulações

Utilizando todos os dados descritos foi possível simular a dispersão de coliformes termotolerantes a partir da hipótese de que sejam despejados pontualmente no arroio Pampa e dispersos ao longo do seu curso.

Considerando o ponto P2 como uma fonte pontual de despejo de carga, simulou-se a quantidade de coliformes remanescentes que chegam ao ponto P3, ou seja, na foz do arroio. Este resultado é apresentado em Fig. 3, na qual percebe-se a concordância dos dados obtidos através da simulação com aqueles medidos experimentalmente, devido a ordem de grandeza do parâmetro envolvido.

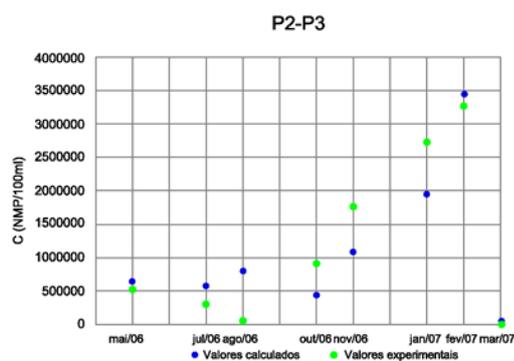


Figura 3 - Dados experimentais e simulados, influência da descarga de P2 em P3

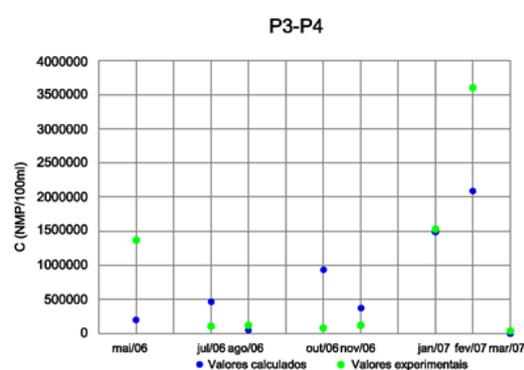


Figura 4 - Dados experimentais e simulados, influência da descarga de P3 em P4

O trecho localizado a partir da foz do arroio Pampa (P3) até o ponto de captação de água bruta para tratamento no rio dos Sinos (P4) não é urbanizado, portanto não há ponto de despejo de carga. Assim, considerou-se como dado de entrada todo o coliforme que chega em P3 e simulou-se o valor remanescente que chega em P4, Fig. 4. Porém, apesar de se esperar que os resultados obtidos nas simulações concordassem quase que totalmente com aqueles experimentais, não se obteve o êxito esperado em três das datas. Isso muito se deve a entrada de água do rio dos Sinos junto à foz do arroio Pampa, o que implica na má qualidade dos dados experimentais obtidos, conseqüentemente a simulação feita, com todas as restrições de hipótese ao modelo efetuadas, não reflete absolutamente a realidade.

Os pontos P1, P2 e P3 estão no mesmo curso de água, o arroio Pampa, já P4 está localizado no curso do rio dos Sinos, onde a vazão e velocidade da água mudam consideravelmente. Assim, a certa diferença verificada entre os valores calculados e os respectivos dados experimentais se deve basicamente à duas causas de erro: a inversão de fluxo e flutuações consideráveis no campo de velocidades. Ambos os fatores são observados com frequência em períodos de vazões elevadas, como na obtenção destes dados experimentais. Uma vez que o modelo hidrodinâmico empregado considera

que o escoamento é potencial, implicitamente está sendo assumida a hipótese de regime estacionário. Logo, qualquer perturbação que produza transientes no campo de velocidades é negligenciada no modelo proposto. Além, disso, mesmo as formulações hidrodinâmicas mais refinadas, baseadas nas equações de Navier-Stokes e Helmholtz, Bird (2004); Mott (2006), produzem resultados igualmente discrepantes, uma vez que não é possível reproduzir tais flutuações com fidelidade, mas apenas estimar suas amplitudes e frequências de forma relativamente grosseira. Em resumo, o modelo hidrodinâmico simplificado se revela, na prática, tão realista quanto as mais refinadas formulações em mecânica de fluidos, ainda que estas contemplem modelos de turbulência.

Para possibilitar a análise da concordância dos resultados obtidos com aqueles experimentais, contrapôs-se ambos os dados em gráficos de nuvem de pontos, Fig. 4. Neste foi traçada a reta bissetriz $y = x$, em que o coeficiente de correlação ficou acima de 80%, o que demonstra que os dados estão correlacionados.

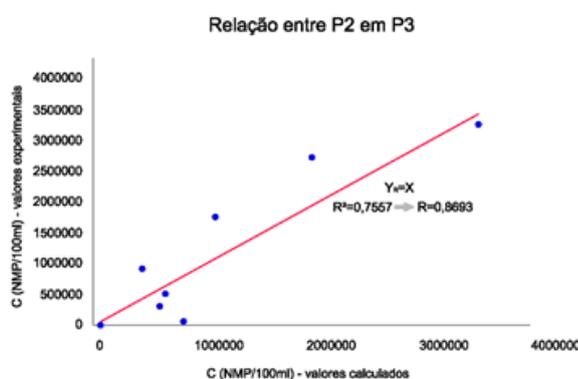


Figura 4 - Distribuição dos resultados em torno da Bissetriz - Influência de P2 em P3

5. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho são qualitativamente consistentes com o comportamento do fenômeno e relativamente concordantes do ponto de vista quantitativo, comprovando a viabilidade da solução proposta. Mesmo havendo certa divergência, pelo menos dois motivos principais à justificam: podem haver regiões onde a estratificação transversal do perfil de concentrações não seja negligenciável, ao passo que a amostragem pode ter sido feita em diferentes linhas de fluxo, não há como ter tal precisão experimentalmente; ainda a adoção de uma velocidade média constante em cada trecho modelado pode ter ocasionado um erro não desprezível no cálculo.

Entretanto, apesar das limitações desta análise preliminar, a tendência geral exibida pelo conjunto completo dos resultados numéricos concorda bem com os dados experimentais, dada a proporção da ordem de grandeza envolvida. Considerando que o modelo proposto é um modelo determinístico, ao passo que o fenômeno estudado é fortemente influenciado por fatores estocásticos, é esperado que haja uma certa diferença perfeitamente compreendida devido as diferentes características dos dados.

Uma vez obtidos resultados para o modelo unidimensional, parece razoável supor que o emprego de um modelo bidimensional ao problema venha a refinar as estimativas. Essa suposição é baseada na possibilidade de reduzir, por exemplo, o possível erro gerado por não se considerar as diferentes linhas de fluxo de cada trecho. Assim pretende-se implementar simulações do modelo bidimensional, a partir da solução da Eq. (11), proposto neste estudo, tão logo se tenha analisado novos dados experimentais, já coletados, de concentração de poluente e velocidade em diferentes linhas de fluxo ao longo do mesmo corpo hídrico.

REFERÊNCIAS

- BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, E. N. (2004). *Fenômenos de Transporte*. 2ª ed., LTC, Rio de Janeiro, Brasil.
- COMUSA. (2015). Companhia Municipal de Saneamento de Novo Hamburgo/RS. Disponível em: <http://www.comusa.rs.gov.br/index.php/noticia-536/economias-abastecidas-pela-comusa-aumentam-7-nos-ultimos-cinco-anos>. Acesso em abr. 2017.
- FERNANDEZ, L. C. (2007). *Simulação da propagação de Poluentes Utilizando Transformação de Backlund: Modelo Bidimensional*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica. PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, Brasil.
- GARCIA, R. L. (2009). *Soluções Exatas para Problemas de Dispersão de Poluentes: Modelo Difusivo Baseado na Equação KdV*. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, Brasil.
- GARCIA, R. L., ZABADAL, J., RIBEIRO, V., POFFAL, C. (2009). Definição do Coeficiente de Difusão para Propagação de Poluentes em Águas Rasas Empregando um Modelo Baseado em Soluções Exatas para a Equação de Korteweg-de Vries. *Vetor, Rio Grande*, vol.19, n.1, pp. 15-27.
- IBGE. Instituto Brasileiro de geografia e estatística. Disponível em <http://cidades.ibge.gov.br/painel/populacao.php?lang=&codmun=431340&search=rio-grande-do-sul|novo-hamburgo|infográficos:-evolução-populacional-e-pirâmide-etária>. Acesso em abr. 2017.
- KAMBE, T. (2007). *Elementary Fluid Mechanics*. World Scientific Publishing, Singapore.
- LERSCH, E.C., HOFFMANN, C. X., ROSMAN, P. C. (2013). Relatório Complementar de Avaliação do impacto Ambiental do projeto Socioambiental ETE Serraria – Aplicação de Modelos Matemáticos Transientes. DMAE, Porto Alegre, RS.
- MOTT, R. L. (2006). *Applied fluid mechanics*. 6th ed. Upper Saddle River, NJ.: Prentice Hall, 626 p.
- NASCIMENTO, C., NAIME, R. (2009). Monitoramento físico-químico das águas do arroio Pampa em Novo Hamburgo/RS. *Estudos Tecnológicos*, vol 5, nº 2, pp 245-269.
- POFFAL, C. A. (2005). *Solução da Equação Advectivo-Difusiva Utilizando Regras para Manipulação de Exponenciais de Operadores Diferenciais e Simetrias de Lie: Aplicações em Engenharia Ambiental*. Tese Doutorado em Engenharia Mecânica, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre.
- POLYANIN, A., ZAITZEV, V. (2004). *Handbook of nonlinear partial differential equations*. Editora Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, EUA.
- PMNH. Estudos de concepção e Projetos básicos de Requalificação urbana e Ambiental da sub-bacia do arroio pampa – Novo Hamburgo – RS. Disponível em https://www.novohamburgo.rs.gov.br/arquivos/File/revit_nh/Arroio_Pampa.pdf. Acesso em abr. 2017.
- ROSMAN, P. C. C., MASCARENHAS, F. C., MIGUEZ, M., CAMPOS, R., EIGER, S. (2009). Um sistema Computacional de Hidrodinâmica Ambiental. In: *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, vol. 5, 1ª ed., capítulo 1. Associação Brasileira de Recursos Hídricos (ABRH). Rio de Janeiro, Brasil.
- SPIEGEL, M. R. (1976). *Análise de Fourier*. Coleção Schaum. Editora McGraw-Hill Publications.
- ZABADAL, J. R.; GARCIA, R.; RIBEIRO, V. (2012). *Equações Diferenciais para Engenheiros: Uma Abordagem Prática*. Coleção Experiência Acadêmica. Editora UniRitter, Porto Alegre, Brasil, 115p.