

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FELIPE PEREIRA BRANDÃO

**O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A
INTRODUÇÃO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA EM UM CONTEXTO DE
PRÉ-VESTIBULAR**

Porto Alegre

2023

FELIPE PEREIRA BRANDÃO

**O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A
INTRODUÇÃO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA EM UM CONTEXTO DE
PRÉ-VESTIBULAR**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2023

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática

**O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A
INTRODUÇÃO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA EM UM CONTEXTO DE
PRÉ-VESTIBULAR**
FELIPE PEREIRA BRANDÃO

Banca examinadora:

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof.^a Dr.^a Marilaine de Fraga Sant'ana
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe Maria Inês que proporcionou a melhor educação e amparo possível. Além de ser a melhor mãe do mundo és também a melhor professora do mundo. Pode ter certeza que tu és o meu espelho e se hoje estou me tornando um grande docente e, sobretudo, um homem forte é por tua causa. A jornada é minha mas a conquista é nossa, obrigado por tudo. Te amo.

Agradeço ao meu irmão Eduardo e ao meu pai Sezefredo por toda força, carinho, companheirismo e por estarem sempre do meu lado nas vitórias e principalmente nas derrotas. Amo vocês.

Agradeço também à minha namorada Laura, por ter me acompanhado em boa parte desta trajetória, por me dar forças nos momentos que precisei e por servir de inspiração para ser um acadêmico cada vez melhor. Te amo.

Aos meus avós que estão sempre comigo seja neste plano ou em outro e toda a minha família que me apoia e que me ajudou a chegar até aqui.

Agradeço à minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Márcia Rodrigues Notare Meneghetti por estar comigo nesta etapa, por todo auxílio prestado e pelos ensinamentos em sala de aula. Me sinto honrado de ter sido seu aluno e orientando.

À minha banca avaliadora, Prof.^a Dr.^a Marilaine de Fraga Sant'ana e Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva. Obrigado pelos aprendizados durante minha formação como docente e por compartilharem seus conhecimentos acadêmicos e profissionais. O que vocês me ensinaram durante minha formação vai muito além dos conteúdos vistos nas aulas.

A todos meus amigos (do Quilmes, do cursinho, da UFRGS e da vida), obrigado pela parceria, carinho e irmandade.

Agradeço aos meus alunos do Conceito Vestibulares que aceitaram participar desta pesquisa e contribuíram de alguma forma para que eu pudesse realizar meu sonho. Aos diretores (e mentores) Samuel e Pedro que me abriram as portas do cursinho para minha iniciação profissional e também viabilizaram este trabalho, minha eterna gratidão.

Por fim, agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul por me proporcionar um ensino de qualidade e por me formar como um profissional capacitado e de alto nível.

RESUMO

Sabendo que a utilização de tecnologias digitais já é uma realidade em diversos âmbitos da sociedade, deve-se considerar que a Educação também necessita adaptar-se a esse contexto e, portanto, torna-se importante desenvolver métodos de ensino que estejam inseridos neste quadro. Pensando nisso, o presente trabalho objetiva apresentar uma pesquisa feita em um cursinho de pré-vestibular sobre o uso de tecnologias digitais para a aprendizagem de conceitos relacionados à Análise Combinatória. A pesquisa serve como resposta à pergunta diretriz: “Quais são as potencialidades da utilização de diferentes recursos digitais para a introdução à análise combinatória?”. Para respondê-la, o trabalho baseou-se em uma atividade prática, dividida em três encontros, do professor-autor com uma turma de um pré-vestibular privado de Porto Alegre, na qual fora empregada uma metodologia que conciliou o ensino de análise combinatória com o uso de tecnologias digitais como recurso didático. Após a aplicação prática, os alunos participantes receberam um formulário com questões sobre suas experiências na pesquisa e sobre a autoavaliação do aprendizado. Por meio do referencial teórico embasado no desenvolvimento do raciocínio combinatório e no uso de tecnologias digitais no ensino, analisou-se os dados coletados. Os resultados da pesquisa revelam que a prática didática se mostrou bem sucedida e a utilização dos recursos digitais auxiliou no desenvolvimento do pensamento combinatório dos estudantes.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Raciocínio Combinatório. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

Recognizing that the incorporation of digital technologies is already a reality across various societal domains, it must be considered that Education also needs to adapt to this context, thus underscoring the importance of devising instructional methodologies that are congruent with this framework. With this in view, the current study aims to present an investigation conducted within a pre-college preparatory program, focusing on the integration of digital technologies for the acquisition of concepts pertaining to Combinatorial Analysis. The research serves as a response to the guiding inquiry: "What are the potentialities of using diverse digital resources to teach introduction to combinatorial analysis?". To answer this question, the study drew upon a practical activity, segmented into three sessions, facilitated by the teacher-author in a class from a private pre-college preparatory institute in Porto Alegre. For this, a methodology was employed that combined the teaching of combinatorial analysis with the use of digital technologies as didactic resources. Following the practical implementation, participating students were administered a questionnaire encompassing queries about their research experience and self-assessment of their learning. Through a theoretical framework grounded in the development of combinatorial reasoning and the utilization of digital technologies in education, the collected data was analyzed. The research findings unveil that the didactic practice proved to be successful, and the utilization of digital resources facilitated the development of students' combinatorial thinking.

Key-word: Combinatorial Analysis. Combinatorial Reasoning. Digital Technologies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Resolução da questão 14 da lista de exercícios feita pela aluna.....	23
Figura 2: Resolução da questão 14 da lista de exercícios feita pelo autor.....	24
Figura 3: Exercício dos círculos inscritos em um triângulo.....	30
Figura 4: Miniaplicativo do jogo Mastermind desenvolvido no Scratch.....	32
Figura 5: Printscreen da tela com a lista de exercícios aberta no software OpenBoard.....	33
Figura 6: Slide sobre o exemplo da bandeira.....	35
Figura 7: Slide indicando as duas primeiras formas de pintar a bandeira.....	36
Figura 8: Slide indicando as próximas duas formas de pintar a bandeira.....	36
Figura 9: Slide demonstrando as duas últimas opções de pintura da bandeira.....	37
Figura 10: Slide referente ao exemplo das opções de combinações de um uniforme.....	38
Figura 11: Slide demonstrando as opções de combinações de camisetas e bermudas.....	39
Figura 12: Slide demonstrando as opções de combinações de camisetas e bermudas.....	40
Figura 13: Slide demonstrando as opções de combinações de camisetas e bermudas.....	41
Figura 14: Slide demonstrando todas as opções de combinações de camisetas e bermudas..	42
Figura 15: Slide demonstrando todas as opções de combinações de camisetas e bermudas..	42
Figura 16: Slide sinalizando que é possível solucionar os problemas de contagem de outra maneira.....	43
Figura 17: Slide de exemplificação de Anagrama.....	44
Figura 18: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	45
Figura 19: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	45
Figura 20: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	46
Figura 21: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	47
Figura 22: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	47
Figura 23: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	48
Figura 24: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	49
Figura 25: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.....	50
Figura 26: Slide de definição de Anagrama.....	51
Figura 27: Total de anagramas de “Roma”.....	51
Figura 28: Slide sobre o cálculo do total de anagramas de “Roma”.....	52
Figura 29: Slide sobre o cálculo do total de anagramas de “Roma”.....	52
Figura 30: Slide sobre a representação do fatorial de 4.....	53
Figura 31: Slide sobre a definição de permutação.....	54
Figura 32: Exemplos de Anagramas.....	55
Figura 33: Formalização de permutação com repetição.....	56
Figura 34: Exercício dos círculos inscritos em um triângulo.....	57
Figura 35: Slide de apresentação do problema.....	58
Figura 36: Slide com a resposta do problema.....	59
Figura 37: Slide com a resposta do problema.....	59
Figura 38: Anagramas da palavra “MESA” com as devidas restrições.....	60

Figura 39: Slide com o exercício da bandeira e a formalização de arranjo simples.....	61
Figura 40: Exercício sobre arranjo simples com formas de respostas distintas.....	62
Figura 41: Exercício sobre combinação simples.....	63
Figura 42: Slide com a resposta esperada dos estudantes.....	64
Figura 43: Slide com a indicação de que a resposta está errada.....	64
Figura 44: Retomada do exercício anterior, porém, desta vez, com a resolução correta.....	65
Figura 45: Exercício de Combinação Simples sobre a formação de uma comissão de 3 pessoas.....	66
Figura 46: Exercício de Combinação Simples sobre a formação de uma comissão de 3 pessoas.....	66
Figura 46: Slide destacando as diferenças entre arranjo simples e combinação simples.....	67
Figura 47: Slide destacando as diferenças entre arranjo simples e combinação simples.....	68
Figura 3: Exercício dos círculos inscritos em um triângulo.....	73
Figura 48: Resolução da questão 10 da lista de exercícios.....	78
Figura 49: Demonstração da regra de simplificação.....	79
Figura 50: Respostas da pergunta 1.....	81
Figura 51: Respostas da pergunta 1.1.....	81
Figura 52: Respostas da pergunta 2.....	82
Figura 53: Respostas da pergunta 3.....	83
Figura 54: Respostas da pergunta 4.....	84
Figura 55: Respostas da pergunta 5.....	84
Figura 56: Respostas da pergunta 6.....	85
Figura 57: Respostas da pergunta 7.....	86
Figura 58: Respostas da pergunta 8.....	88
Figura 59: Respostas da questão 9.....	89

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	9
2. OBJETIVOS.....	12
2.1. OBJETIVO GERAL.....	12
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	12
3. REVISÃO DE LITERATURA.....	13
4. REFERENCIAL TEÓRICO.....	20
4.1. ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS.....	20
4.2. O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO.....	20
4.3. AS TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	25
5. METODOLOGIA.....	27
5.1. CENÁRIO E PARTICIPANTES.....	27
5.2. RECURSOS TECNOLÓGICOS UTILIZADOS.....	28
5.2.1. O GOOGLE PRESENTATION®.....	28
5.2.2. O GEOGEBRA®.....	29
5.2.3. O SCRATCH®.....	30
5.2.4. O GOOGLE MEET®.....	32
5.2.5. O OPENBOARD®.....	33
5.3. PLANEJAMENTO E DESCRIÇÃO DAS AULAS.....	34
5.3.1. AULA 1.....	34
5.3.1.1. MOMENTO 1 - INTRODUÇÃO AO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.....	35
5.3.1.2. MOMENTO 2 - ANAGRAMAS E PERMUTAÇÃO.....	50
5.3.1.3. MOMENTO 3 - PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO.....	55
5.3.1.4. MOMENTO 4 - EXPLORAÇÃO DE UM PROBLEMA DE CONTAGEM POR MEIO DE UM MINIAPLICATIVO NO GEOGEBRA®.....	56
5.3.2. AULA 2.....	57
5.3.2.1. MOMENTO 1 - REVISÃO DA AULA 1.....	58
5.3.2.2. MOMENTO 2 - NOVOS PROBLEMAS DE CONTAGEM.....	58
5.3.2.3. MOMENTO 3 - FORMALIZAÇÃO DE ARRANJO SIMPLES.....	60
5.3.2.4. MOMENTO 4 - INTRODUÇÃO E FORMALIZAÇÃO DE COMBINAÇÃO SIMPLES.....	62
5.3.2.5. MOMENTO 5 - EXPLORAÇÃO NO SCRATCH® E FINALIZAÇÃO DA AULA.....	67
5.3.3. AULA 3.....	68
5.4. COLETA DE DADOS.....	69
6. RESULTADOS DA PESQUISA.....	72
6.1. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS AULAS.....	72
6.1.1. AULA 1 - INTRODUÇÃO AO CONTEÚDO E PRIMEIRAS IMPRESSÕES.....	72
6.1.2. AULA 2 - AMPLIAÇÃO E FECHAMENTO DOS CONCEITOS.....	75
6.1.3. AULA 3 - O ENCONTRO ONLINE.....	77
6.2. FORMULÁRIO DE PESQUISA.....	80
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	91

REFERÊNCIAS.....	94
APÊNDICE A.....	96
APÊNDICE B.....	98
APÊNDICE C.....	103

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar as potencialidades do uso de tecnologias digitais como recurso didático em sala de aula para introduzir a análise combinatória. Como consequência de vivências pessoais dentro da sala de aula como discente na universidade, iniciada em 2016 no curso de Engenharia Metalúrgica e, posteriormente, no curso de Licenciatura em Matemática em 2020, fui apresentado a diversos recursos tecnológicos utilizados como mecanismos de aprendizagem. A partir do contato com *softwares* e *applets* percebi que consegui compreender os conteúdos de forma mais efetiva. Com o tempo, refleti sobre o meu aprendizado na escola e cheguei à conclusão de que se eu tivesse contato com tecnologias digitais desde a escola, o meu aprendizado poderia ter sido mais proveitoso.

Assim que migrei para a Licenciatura em Matemática, a pandemia do Covid-19 iniciou e, por causa das medidas protetivas, o trabalho e ensino remoto tornaram-se uma realidade e, durante este período, as tecnologias digitais mostraram-se aliadas da docência. As minhas primeiras experiências como docente enquanto graduando de licenciatura em matemática foram de forma remota, seja como professor particular, bolsista do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) ou nas atividades práticas no Colégio de Aplicação da UFRGS da disciplina de Laboratório de Ensino-Aprendizagem de Matemática I. Como as aulas ministradas nestas experiências foram na realidade do ensino remoto, o uso de tecnologias digitais tornou-se essencial para o andamento do trabalho e considerei os seus usos positivos durante a abordagem dos conceitos trabalhados. Como, por exemplo, em duas ocasiões distintas, ao ministrar aulas particulares sobre trigonometria, desenvolvi um *applet* no software GeoGebra[®] sobre o círculo trigonométrico que me auxiliou na abordagem do conteúdo. Em ambas aulas pude contemplar os conteúdos de forma mais dinâmica e construtiva, fazendo com que os alunos tivessem um aprendizado positivo sobre o assunto.

Com o tempo, graças à vacinação contra o vírus do Covid-19 e proteção de grande parte da sociedade, as medidas sanitárias protetivas da pandemia possibilitaram o retorno às atividades presenciais. Assim, em 2022, já cursando a disciplina de Laboratório de Ensino-Aprendizagem de Matemática II, tive a minha primeira experiência como docente na modalidade presencial em sala de aula no Colégio de Aplicação em uma turma de 8º ano. As aulas ministradas foram expositivas, apenas com o “quadro e caneta” como ferramentas à minha disposição. Ao vivenciar essa nova prática me senti intrigado ao pensar sobre como as tecnologias digitais, que se tornaram "aliadas" do ensino durante quase dois anos de ensino remoto e que demonstraram um potencial para trabalhar conteúdos de matemática, foram

deixadas em segundo plano para que as aulas voltassem a ser exclusivamente “no quadro”, assim como era antes.

Ainda em 2022, fui contratado por um curso privado de pré-vestibular para trabalhar auxiliando os alunos nos plantões de dúvidas. Em 2023, nesta mesma instituição de ensino, ganhei a oportunidade de ser professor de sala de aula para a turma do turno da noite.

Diante deste contexto, decidi estudar formas para abordar a matemática com alunos de pré-vestibular, sobretudo sobre os conceitos relacionados à análise combinatória, de forma que torne os conceitos desta área da matemática mais tangíveis e auxilie os estudantes num melhor entendimento e compreensão do tema abordado de forma com que contemple o conteúdo necessário e torne a aula mais dinâmica.

O processo de ensino de matemática traz consigo a necessidade de que o estudante raciocine, desenvolva e compreenda os conteúdos e temas abordados para que sirvam, posteriormente, como recursos que auxiliem no desenvolvimento cognitivo e lógico dos educandos. Esse processo expositivo, no ensino tradicional, onde utiliza-se apenas o “quadro e caneta”, faz-se necessário ilustrar o conteúdo matemático na forma literal ou através de representações e desenhos no quadro. Tratando-se da disciplina de Matemática, esses métodos ainda são os mais usuais e comuns para ilustrar problemas e abordar conteúdos.

Sabendo do constante avanço tecnológico vivido em todos os âmbitos da sociedade, deve-se considerar também que o espaço educacional deve adaptar-se a essa realidade. Com isso, leva-se em consideração as potencialidades do uso da tecnologia em sala de aula. Por meio do uso de *softwares* e *applets*, a abordagem de conceitos matemáticos torna-se mais visual e dinâmica, além de permitir atualizar o método de ensino para os tempos atuais, conforme argumentado por Goldenberg (2000), D’Ambrósio (2012) e Tractenberg (2007), explicitado na seção Referencial Teórico.

Uma possibilidade de abordagem do conteúdo de análise combinatória, por se tratar de problemas de contagem, muitas vezes requer exposições visuais e ilustrativas sobre o que está sendo calculado. Essas demonstrações, no ensino tradicional, podem ser cabíveis de: erros humanos (pois as representações são apresentadas no quadro por meio de desenhos feitos pelo docente); falta de recursos que contribuem para a ilustração; falta de tempo e espaço para ilustrar o problema; etc. Uma maneira possível para contornar esses problemas é utilizar figuras impressas ou digitais, que diminuem a margem de erro mas que ainda não possibilitam a manipulação e limitam a exploração do pensamento matemático.

Pensando nisso, para contemplar o ensino de análise combinatória com o auxílio de tecnologias digitais, este trabalho embasa o aprendizado na utilização de diferentes recursos

digitais como *Google Presentation*[®], *GeoGebra*[®], *Scratch*[®], *Google Meet*[®] e *Open Board*[®]. Cada um deles cumprirá um papel diferente na apresentação do conteúdo como forma de possibilitar aos alunos uma visualização específica dos conceitos matemáticos estudados. No caso específico dos recursos utilizados nos *applets* do *GeoGebra*[®] e *Scratch*[®] que serão questões manipulativas nas quais os estudantes devem explorar os problemas abordados pode-se dizer que, assim como argumentado por Basso e Notare (2015, p. 3), que é possível utilizar a tecnologia “de modo a desencadear o pensamento matemático, a proporcionar aos alunos possibilidades para acessar e manipular objetos matemáticos até então não acessíveis”.

Sendo assim, esta pesquisa tem como viés responder à pergunta: Quais são as potencialidades da utilização de diferentes recursos digitais para a introdução à análise combinatória?

O presente trabalho tem seu referencial teórico dividido em dois pilares que sustentam a pesquisa, sendo o primeiro o ensino de análise combinatória - conforme sugerido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - e o desenvolvimento do raciocínio combinatório e, o segundo, o uso de tecnologias digitais como recursos didáticos. Sequentemente, a abordagem metodológica está devidamente detalhada bem como os resultados da pesquisa e, por último, as considerações finais do trabalho.

2. OBJETIVOS

A partir do questionamento de como o uso de recursos tecnológicos em sala de aula influencia no ensino de análise combinatória em curso preparatório para os vestibulares e ENEM, surgiram os seguintes objetivos dessa pesquisa.

2.1. OBJETIVO GERAL

- Analisar as potencialidades da utilização de diferentes recursos tecnológicos em sala de aula para o ensino de análise combinatória a partir do desenvolvimento e aplicação de uma sequência de práticas que abordem esses conceitos de forma integrada com diferentes tecnologias digitais.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar sobre o potencial das tecnologias digitais para aprendizagem de matemática.
- Analisar e selecionar diferentes recursos digitais para trabalhar com conceitos de análise combinatória.
- Elaborar e aplicar uma sequência de atividades que utilizem diferentes recursos digitais para desenvolver conceitos de análise combinatória.
- Analisar como a utilização dos recursos digitais pode contribuir para uma aprendizagem do conteúdo pelos estudantes de um curso preparatório para vestibulares e ENEM.

3. REVISÃO DE LITERATURA

Para este trabalho, foi realizada uma pesquisa *online* prévia nos arquivos do LUME¹ (repositório digital da UFRGS) e Google Scholar[®] sobre trabalhos de conclusão de curso e artigos que tratassem de alguma abordagem que envolvesse Análise Combinatória e o uso de tecnologias digitais como ferramentas auxiliares de ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula. Essa ação serviu como estratégia para analisar o que já foi estudado e produzido sobre este conteúdo e essa tendência de ensino para servir de base e filtro para a minha proposta de trabalho.

O tema pesquisado no repositório LUME teve como palavras-chave “Análise Combinatória” e, posteriormente, “tecnologias digitais”. Quando pesquisada a primeira palavra-chave foram encontrados 12 trabalhos de conclusão de graduação, conforme apresentado no Quadro 1. Apesar de todos tratarem do conteúdo de análise combinatória, nenhum trazia a utilização de tecnologias digitais. A ordem de apresentação dos trabalhos no Quadro 1 está conforme a ordem cronológica de suas publicações.

Quadro 1 - Quadro-resumo dos trabalhos pesquisados no LUME

Título	Autor(a)	Ano	Foco da pesquisa
Estudo de caso sobre o ensino de análise combinatória (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/29157)	Carla Soares Silva	2010	Relatar uma pesquisa realizada com alunos do Ensino Médio do Instituto Estadual Rio Branco, que participaram de uma oficina na qual foram aplicados dois jogos envolvendo conceitos de Análise Combinatória. A partir dos jogos foi avaliado o desenvolvimento do pensamento multiplicativo e do raciocínio combinatório dos alunos, tendo em vista a busca de alternativas ao ensino desse conteúdo.
Uma análise dos princípios combinatórios com alunos do ensino médio (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/61905)	Rafael da Costa Pereira	2011	É um estudo dos princípios Aditivo, Multiplicativo, Inclusão e Exclusão e Gavetas de Dirichlet, com duas turmas de estudantes do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRGS, que foram confrontados com questões sobre os princípios combinatórios, antes de estes serem formalizados.
Uma experiência de contagem no Ensino Médio (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/66875)	Daniela Barcellos Haas	2012	Avaliar uma proposta de prática pedagógica para o ensino de Análise Combinatória em uma turma de segundo ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Protásio Alves, considerando o uso do jogo “A senha” como uma forma de introduzir o conteúdo de forma dinâmica; e o método de contagem para formalizar os conceitos de

¹ <https://www.lume.ufrgs.br/> (Acesso em: Julho de 2023.)

			permutação, arranjo e combinação.
Análise combinatória, raciocínio lógico e a resolução de problemas (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/77251)	Fernanda de Abreu Lima	2013	Buscar justificar a importância dada ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, relacionando prática e teoria, a partir da análise dos dados advindos da prática, buscando compreender a maneira como o aluno interage com a resolução de problemas e verificando as possíveis evoluções apresentadas através da prática.
Uma proposta de ensino de análise combinatória para turmas de 8º ano do Ensino Fundamental (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/77259)	Diego de Freitas Leite	2013	Este trabalho investiga a possibilidade de se trabalhar o conteúdo de análise combinatória com turmas de 8º ano do Ensino Fundamental. As atividades foram construídas na intenção de colocar o aluno frente a diferentes situações de caráter combinatório. Foram trabalhadas diferentes estratégias de resolução, partindo inicialmente da listagem de possibilidades, utilizada para explicar o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo.
Uma investigação sobre o ensino de probabilidade e análise combinatória (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/128011)	Fábio Luis de Oliveira Gonzaga	2015	Relatar uma pesquisa efetuada com professores de Matemática do Ensino Médio sobre as dificuldades no ensino dos conteúdos de Probabilidade e Análise Combinatória. A pesquisa foi realizada através de entrevistas semiestruturadas com cinco professores, que abordaram o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade e a sua formação.
Análise combinatória e resolução de problemas em uma proposta didática para o ensino médio (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/179410)	Guilherme de Lima de Menezes	2017	Este trabalho de conclusão de curso analisa uma proposta de aprendizado de análise combinatória através da resolução de problemas aplicada no ensino médio. O foco da análise foi a busca por contribuições que a metodologia baseada na resolução de problemas proporciona para o desenvolvimento e aprendizado dos alunos.
A imagem do conceito de princípios combinatórios em diferentes públicos (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/193420)	Giuliana Gagg	2018	Estudar o processo de aprendizagem de alguns princípios combinatórios. A pesquisa foi separada em duas etapas, sendo a primeira uma aplicação de resolução de problemas em uma turma de 7º ano do ensino fundamental e, a segunda, um questionário proposto a alunos da graduação em licenciatura em Matemática.
Loteria em sala de aula: a resolução de problemas no aprendizado de análise combinatória e probabilidade por meio da mega-sena (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/21)	Guilherme Antonio Santi	2019	Analisar a forma como os alunos constroem seu raciocínio durante a resolução de problemas na aprendizagem de análise combinatória e probabilidade por meio da Mega-Sena.

2859)			
Os jogos no ensino de combinatória (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/212828)	Matheus da Costa Pereira	2019	Estudar as contribuições dos jogos no ensino de Análise Combinatória. Como suporte teórico são utilizados os estudos sobre a Investigação Matemática, uma vez que tal tendência pode proporcionar a elaboração de conjecturas, formulação de hipóteses e desta forma proporcionar uma maior autonomia ao discente.
A contextualização nos cenários de investigação com enfoque na elaboração de enunciados de questões (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/199199)	Guilherme Guedes Oliveira	2019	Baseado nos Cenários para Investigação de Ole Skovsmose, o trabalho visou classificar e estabelecer uma comparação entre enunciados criados por alunos e alunas de uma escola do Ensino Médio de Porto Alegre com questões do ENEM para responder a seguinte pergunta norteadora: “Quais referências pautam enunciados de questões de Análise Combinatória elaboradas por estudantes do 3º ano do Ensino Médio?”
Ensino-aprendizagem de análise combinatória por meio da resolução de problemas no Ensino Médio (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/231301)	João Carlos Motta dos Santos	2021	Analisar as principais mudanças na prática pedagógica e o processo de formação dos conceitos ao implementarmos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio.

Fonte: própria do autor.

Ao utilizar o filtro “tecnologias digitais” houve como retorno 14 publicações sendo, dessas, 13 trabalhos de conclusão de graduação e 1 trabalho de conclusão de especialização. Dessa vez, foi necessário selecionar aqueles que mais se aproximassem da minha proposta, ou seja, o uso de tecnologias digitais para o ensino-aprendizagem, chegando ao total de seis trabalhos de conclusão de curso. Sendo assim, o Quadro 2 apresenta os trabalhos que satisfazem os filtros de busca. A ordem de apresentação dos trabalhos no Quadro 2 está conforme a ordem cronológica de suas publicações.

Quadro 2 - Quadro-resumo dos trabalhos pesquisados no LUME

Título	Autor(a)	Ano	Foco da pesquisa
Utilizando medidas de tendência central para construir habilidades da literacia digital (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/231301)	Emanoel Gil Ferreira	2021	Analisar quais as potencialidades do tratamento estatístico de dados com medidas de tendência central para a construção de conceitos relacionados à Literacia Digital. Através de uma pesquisa com abordagem qualitativa de análise de dados, o autor se aprofunda nas habilidades

6528)			que compõem a Literacia Digital e também em referenciais que tratam da utilização de Tecnologias Digitais na educação matemática para estruturar a pesquisa.
Educação matemática e abordagem STEAM: números inteiros e a busca por sentidos (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/236552)	Samuel Fraga da Silva	2021	Pesquisar os sentidos que podem ser atribuídos a Números Inteiros em uma investigação feita por estudantes sob a perspectiva STEAM em um software que exibe uma vasta quantidade de informações sobre os locais do mundo em tempo real e colorimetricamente representada.
Reflexões dos alunos de Licenciatura em Matemática que atuaram como professores no PIC no contexto do Ensino Remoto Emergencial (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/236516)	Hérika Nalú Alencastro Rodrigues	2021	Analisar as percepções dos estudantes de Licenciatura em Matemática que atuaram como professores no Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) no contexto do Ensino Remoto Emergencial (ERE). O trabalho também objetiva analisar as percepções dos estudantes de Licenciatura em Matemática que atuaram como professores no Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) no contexto do Ensino Remoto Emergencial (ERE).
Ensino de matemática no período da pandemia: a emergência do uso de tecnologias digitais (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/241796)	Mariana Pires Morrudo	2022	Analisar as contribuições das tecnologias digitais, que foram utilizadas nas aulas de matemática no período da pandemia. Para isso foram realizadas entrevistas semiestruturadas com três professores de escolas públicas, que atuaram nos Ensinos Fundamental e Ensino Médio, no período entre os anos de 2019 e 2022.
Potencialidades entre educação financeira e educação matemática em sala de aula (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/253482)	Leticia Caroline Tibola da Silva	2022	Investigar contribuições de ações em sala de aula para a construção de ideias relacionadas à Educação Matemática Crítica e à Educação Financeira. Como principais embasamentos teóricos, a autora trouxe potencialidades das tecnologias digitais na perspectiva da Educação Matemática.
Uma proposta de resolução de problemas com tecnologia para situações de otimização (https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/253472)	Gustavo Ferreira Bassani	2022	Analisar a aplicação de duas aulas presenciais inspirada na tendência de resolução de problemas com o software GeoGebra, para a análise de problemas de otimização no Ensino Básico. A pesquisa busca compreender a relação de construção de conhecimento entre o ser humano e a tecnologia, analisada pela perspectiva seres-humanos-com-mídias.

Fonte: própria do autor.

Pode-se concluir, a partir da análise das buscas realizadas no repositório digital da UFRGS, que ainda não foi identificado algum trabalho publicado que trata do

ensino-aprendizagem de análise combinatória com o uso de tecnologias digitais como recurso educacional. Porém, pode-se, a partir dos resultados encontrados, utilizar como referências e base para esta pesquisa.

Com o objetivo de ampliar o campo de pesquisa e buscar trabalhos e referências que se assemelham ao meu projeto e, conseqüentemente, contribuir para um melhor repertório teórico na construção deste trabalho, optei por realizar também uma busca no repositório digital do Google Scholar².

Nesta busca foi utilizado o filtro “análise combinatória tecnologias digitais” e o site retornou um total de 15.900 resultados. Como uma análise mais minuciosa mostra-se inviável para este trabalho, foi feita uma investigação dos 20 primeiros resultados encontrados, conforme consta no Quadro 3. A ordem de apresentação dos trabalhos no Quadro 3 está conforme a ordem cronológica de suas publicações.

Quadro 3 - Quadro-resumo dos trabalhos pesquisados no Google Scholar[®]

Título	Autor(es)(a)(as)	Ano	Foco da pesquisa
Concepção de objetos digitais de aprendizagem para combinatória nos anos iniciais (https://lume.ufrgs.br/handle/10183/223904)	Elisa Friedrich Martins; Marcus Vinicius de Azevedo Basso.	2018	Apresentar o desenvolvimento de um Objeto Digital de Aprendizagem envolvendo Análise Combinatória voltado para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A concepção está fundamentada na teoria de Jean Piaget sobre a construção do conhecimento.
Objetos de aprendizagem como recurso didático para o ensino de análise combinatória (http://funes.uniandes.edu.co/28795/)	Italândia Ferreira de Azevedo; Wedson Francelino Ribeiro Noronha; Maria Cleide da Silva Barroso; Solonildo Almeida da Silva.	2019	Apresentar um relato de experiência referente a um conjunto de aulas para uma turma de Ensino Médio sobre Análise Combinatória, planejadas e executadas com o apoio de Objetos de Aprendizagem em formato digital. O objetivo da associação de recursos digitais, materializados pelos objetos de aprendizagem, foi criar um ambiente fomentador de Aprendizagem Significativa buscando um processo de ensino-aprendizagem de melhor qualidade.
Resolução de Problemas de Análise Combinatória e aplicação na Lousa Digital (http://www.bdttd.uerj.br/handle/1/13919)	Monique Andrade da Conceição Couto	2019	Desenvolver o ensino de Análise Combinatória através da resolução de problemas e a Lousa Digital como facilitadora do aprendizado. A fim de verificar quais são as potencialidades do ensino de matemática dentro deste contexto e, também, articular novas tecnologias com o conhecimento matemático, esse trabalho tem como objetivo apresentar sugestões de resolução de alguns problemas de Análise Combinatória utilizando como recurso tecnológico a Lousa

² <https://scholar.google.com/> (Acesso em: Julho de 2023)

			Digital.
Combesq: uma proposta de objeto de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de análise combinatória (http://www.repositorio.ufal.br/jspui/handle/riufal/5480)	Dayvid Evandro da Silva Lós	2019	Desenvolver um objeto de aprendizagem (CombEsq) que tem como principal objetivo auxiliar alunos e professores no ensino e aprendizagem de análise combinatória, buscando amenizar os principais problemas de aprendizagem como: a dificuldade dos alunos em interpretar o problema, a identificação dos tipos de agrupamento e a criação de novas estratégias para incentivar o professor no ensino do referido conteúdo. Para isso, o trabalho traz uma abordagem pedagógica fundamentada em uma metodologia de resolução de problemas.
App inventor 2: estudo propositivo para o ensino de análise combinatória (https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/4800)	Keila Hammerich	2021	Apresentar uma proposta de sequência didática para o ensino de Análise Combinatória para o Ensino Médio, utilizando a plataforma App Inventor 2. A proposta de sequência didática apresentada contém cinco atividades, dentro do campo computacional, e tem o intuito de despertar o interesse do estudante, possibilitando uma melhor aprendizagem do objeto do objeto de conhecimento Análise Combinatória: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Combinação e Permutação Simples.
Revisão sistemática de dissertações do profmat: um diálogo entre combinatória e tecnologias digitais (http://funes.uniandes.edu.co/29768/)	Marcos Oinhas; Thiarla Zanon.	2021	Buscar responder às seguintes questões: Como as dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) de 2016 a 2020 tratam, na educação básica, a resolução de problemas de análise combinatória mediada pelas tecnologias digitais? Quais contribuições uma revisão sistemática dessas dissertações pode oferecer à pesquisa sobre essa temática no Brasil e às práticas de sala de aula? Desse modo, foram apresentadas uma série de análises decorrentes de uma revisão bibliográfica sistemática de dissertações do PROFMAT produzidas no período de 2016 a 2020. Para isso foram analisadas principalmente as compreensões sobre análise combinatória e resolução de problemas, a presença das tecnologias digitais nas pesquisas, os aspectos metodológicos das investigações e os produtos que cada autor elaborou.
Ensino do binômio de Newton com o uso de tecnologias digitais da informação e comunicação (TDICs). (https://app.uff.br/riuff/handle/1/26588)	Amanda Azevedo Abou Mourad	2021	Criar uma sequência didática utilizando as novas Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs). A atividade é interdisciplinar, contextualizada e trabalha a transversalidade, por meio da Pluralidade Cultural. A SD teve abordagem STEM ("Science, Technology, Engineering and Mathematics" - Ciência, Tecnologia, Engenharia

			e Matemática), para apresentar o conteúdo de Binômios de Newton em consonância com conceitos da Genética.
Análise combinatória: conceitos e possibilidades no ensino-aprendizagem com auxílio do GeoGebra (https://repositorio.uferj.br/handle/prefix/7904)	Sueli Xavier da Silva	2021	Apresentar o software GeoGebra como uma ferramenta auxiliar na resolução de problemas de Análise Combinatória, evidenciando a importância das novas tecnologias para o ensino de Matemática. Desse modo, na fundamentação teórica apresentou-se: o contexto histórico, os principais conceitos da Análise Combinatória e as estratégias para resolução de problemas de contagem. Na quarta seção foi possível explorar os vários recursos oferecidos pelo GeoGebra, tais como: planilha, cálculo simbólico(CAS), além das construções de figuras e diagramas na janela de visualização para a resolução de problemas deste assunto.

Fonte: própria do autor.

A partir da investigação realizada, identificamos alguns trabalhos que não se aproximavam do teor da presente pesquisa e, também, algumas duplicatas. Os trabalhos que estiveram dentro dessas considerações não foram representados no Quadro 3. Além disso, encontramos dois trabalhos cujo acesso era restrito a algumas bibliotecas específicas, como a pesquisa foi feita através de um computador pessoal não foi possível acessá-los e, portanto, também não foram identificados no Quadro 3.

Por meio dessa busca pôde-se perceber que existem trabalhos e artigos publicados que tratam do ensino de análise combinatória com o uso de tecnologias digitais. Porém somente um - Couto (2019) - mais se assemelhou com a presente pesquisa, pois também trouxe a tecnologia digital como um recurso didático auxiliar para o aprendizado e não necessariamente como protagonista do ensino.

Ademais, essa ação cumpriu com seu objetivo e alguns referenciais teóricos que foram expostos em alguns dos trabalhos serviram de base ou inspiração para o presente trabalho.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico deste trabalho foi estruturado em dois pilares que sustentam a pesquisa, sendo o primeiro “o ensino de análise combinatória” e o segundo “as tecnologias no ensino de matemática”. Na sequência, serão abordados os documentos e referenciais que auxiliam no embasamento desta pesquisa.

4.1. ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Este trabalho tem como enfoque a apresentação dos conceitos fundamentais de Análise Combinatória. Como a pesquisa será realizada em uma turma de um curso preparatório para o ENEM e demais vestibulares, em que os editais são norteados por conteúdos do Ensino Médio, então o presente trabalho baseia-se em documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).

A respeito do ensino do conteúdo de Análise Combinatória, a BNCC, em seu documento, aponta que o estudante saiba:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p. 537).

No documento Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), é recomendado que o estudante deve desenvolver as seguintes competências:

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
 - Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
 - Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.
- (BRASIL, 2006, p. 127).

Buscando ampliar nossa compreensão sobre a aprendizagem de Análise Combinatória, na seção a seguir abordamos aspectos relacionados ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

4.2. O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Morgado *et al.* (2006) definem que a Análise Combinatória (ou simplesmente “Combinatória”) vai além do estudo de arranjos, combinações e permutações, por mais que

estes conceitos façam parte do conteúdo e permitam resolver alguns tipos de problemas pertinentes. Os autores descrevem que a análise combinatória trata de diversos outros tipos de problemas e utiliza também de outras técnicas como forma de resolução. Nesse sentido, os mesmos ainda afirmam que “de maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas” (Morgado *et al.*, 1991, p. 1).

Portanto, considerando que assuntos pertinentes à combinatória vão além das técnicas gerais que envolvem equações e fórmulas pré-estabelecidas, vale-se, então, relacionar com o conceito descrito, por Borba (2010), como “raciocínio combinatório”. Para Borba (2010),

O raciocínio combinatório pode ser definido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se - direta ou indiretamente - o número total de agrupamentos possíveis (apud BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p.2)

Ou seja, considerando então a análise combinatória como uma área da matemática que estuda as diferentes maneiras de contar, combinar, agrupar ou organizar elementos e/ou eventos, Pessoa e Borba (2010) definem que o raciocínio combinatório pode ser descrito como um modo de pensamento que auxilia na resolução dessas situações-problema e que, também, além da enumeração de elementos, trata-se de uma maneira matemática de pensar referente à Combinatória.

Morgado *et al* (1991, p. 2) discorrem que,

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Sendo assim, podemos estabelecer que o estudo de Análise Combinatória parte de problemas de natureza complexa e nem sempre fórmulas ou caminhos pré-estabelecidos são suficientes para resolvê-los. É neste momento que o conceito de “raciocínio combinatório” é explicitado, aqui o pensamento matemático que parte da iniciativa de resolução de uma situação-problema envolvendo contagem se desvincula de apenas empregar equações e métodos pragmáticos e se utiliza da interpretação e ferramentas da base teórica para encontrar a solução.

Como visto na seção [4.1](#), os documentos oficiais que tratam a respeito do ensino de Análise Combinatória na Educação Básica trazem que os estudantes devem identificar os

dados de problemas de contagem e traçar estratégias de resolução. Ou seja, conforme corroborado por Borba, Rocha e Azevedo (2015), o desenvolvimento do raciocínio combinatório durante o ensino deste conteúdo torna-se um ponto fundamental quando se faz necessário examinar o tipo de problema combinatório e/ou definir estratégias a serem utilizadas para a resolução do mesmo.

O estudo de Borba, Rocha e Azevedo (2015) permite avaliar - a partir da análise de pesquisas investigativas que tratam a respeito do uso de situações combinatórias em coleções de livros na Educação Básica (do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos) - que existe uma “falha” na base do ensino de combinatória, pois o pensamento matemático proposto pelos livros didáticos “pode ficar limitado a poucas oportunidades que permitam o desenvolvimento de raciocínios combinatórios e probabilísticos” (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p. 8). No mesmo sentido, tratando-se do ensino “condicionado” de combinatória e seus principais conceitos, Morgado *et al.* (1991, p. 2) afirmam que

(...) se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Para contornar essa situação, Borba, Rocha e Azevedo (2015), ressaltam que, para que o raciocínio combinatório tenha um maior desenvolvimento, faz-se necessária “a utilização de diferentes situações, com seus invariantes correspondentes, e o uso de diversificadas representações simbólicas” (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p. 10).

Sendo assim, para Borba, Rocha e Azevedo (2015, p. 13),

A partir de noções intuitivas já possuídas – referentes ao levantamento de espaços amostrais, considerando escolha e ordenação de elementos, estudos, como os de Barreto e Borba (2012) e de Azevedo e Borba (2013), evidenciaram que intervenções – mesmo com curtos espaços de tempo – auxiliam para um eficiente desenvolvimento de raciocínio combinatório, ao estimularem o uso de variadas formas de representação de problemas combinatórios.

Além do ensino das fórmulas e equações que envolvem o conteúdo de Análise Combinatória, pode-se considerar que trabalhar com o raciocínio combinatório em sala de aula também se mostra importante, construindo uma habilidade fundamental para tomada de decisões e resoluções de situações que envolvam problemas de contagem. Para ampliar o debate sobre a resolução de problemas utilizando o raciocínio combinatório, trago como exemplo a questão 14 da Lista de Exercícios utilizadas no experimento prático desta pesquisa ([Apêndice B](#)), na qual uma das alunas, ao invés de resolver o problema com a fórmula prevista de combinação simples, utilizou o método da permutação com repetição de

elementos, conforme ilustrado na Figura 1. Neste caso, o raciocínio combinatório foi empregado na sua forma mais genuína, pois a discente utilizou do seu pensamento combinatório para estabelecer uma estratégia e resolver o problema de contagem da questão sem necessariamente utilizar a fórmula habitual, separando em casos de combinações simples. A Figura 2 ilustra a resolução do pesquisador para a questão feita da “maneira esperada” utilizando combinações simples.

Figura 1: Resolução da questão 14 da lista de exercícios feita pela aluna.

14. (ENEM 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de igual formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura. N = nada (s/ cor)

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a. $C_{12,4} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,2}$

b. $C_{12,4} + C_{8,3} + C_{5,3} + C_{2,2}$

c. $C_{12,4} \cdot 2 \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,2}$

d. $C_{12,4} + 2 \cdot C_{12,3} + C_{12,2}$

\rightarrow $C_{12,4} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$

$P_{12,4} = \frac{12!}{4!8!}$ $P_{8,3} = \frac{8!}{3!5!}$ $P_{5,3} = \frac{5!}{3!2!}$ $P_{2,2} = \frac{2!}{2!}$

$C_{12,4} \times C_{8,3} \times C_{5,3} \times C_{2,2}$

Fonte: própria do autor

Figura 2: Resolução da questão 14 da lista de exercícios feita pelo autor.

14. (ENEM 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de igual formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a. $C_{12,4} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,2}$

b. $C_{12,4} + C_{8,3} + C_{5,3} + C_{2,2}$

c. $C_{12,4} \cdot 2 \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,2}$

d. $C_{12,4} + 2 \cdot C_{12,3} + C_{12,2}$

~~e. $C_{12,4} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$~~

Fonte: própria do autor

Nesta mesma perspectiva, Silva e Spinelli (2011), em sua pesquisa, afirmam que esse tipo de pensamento pode ser visto como um “sistema operacional”, ou seja, um método de conduzir e solucionar esses tipos de problemas que demandam deste raciocínio.

Portanto, entende-se que o desenvolvimento do raciocínio combinatório durante o ensino de análise combinatória se mostra tão importante quanto demonstrar resoluções sistemáticas por meio de equações e fórmulas, pois estimula o aluno a compreender, interpretar e definir estratégias de resolução das situações-problemas.

4.3. AS TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

As tecnologias estão presentes em todos os âmbitos da nossa sociedade e impactam diretamente no desenvolvimento humano. De acordo com Gravina e Basso (2012), o uso de tecnologias digitais para o desenvolvimento intelectual, sobretudo durante a formação escolar, contribui para uma possibilidade de ampliação de pensamentos. Portanto, à medida que a sala de aula precisa adaptar-se a essa realidade, surge uma necessidade de desenvolver novos métodos de ensino-aprendizagem que possam se utilizar do potencial dessas ferramentas.

Conforme argumentado por Tractenberg (2007), o uso de tecnologias digitais para o ensino da matemática traz inúmeros benefícios para o aprendizado como a rapidez, a flexibilização dos espaços educativos, a precisão e a melhor visualização das demonstrações de teoremas e resolução de problemas, por exemplo. No caso específico de ambientes de geometria dinâmica, a construção e a manipulação nestes espaços permitem a construção de figuras que enfatizam conceitos e propriedades importantes e, assim, envolvem mais ativamente os alunos.

Quando se trata do uso de tecnologias digitais como recurso educacional, Kenski (2012) afirma que as mesmas promovem uma transformação nas interações entre a abordagem do professor, a compreensão do aluno e o conteúdo veiculado, gerando novos mecanismos de atuação e, quando encaradas como recursos didáticos e sendo bem utilizadas, resultam em um aprimoramento do conhecimento e uma maior imersão no conteúdo estudado. No mesmo sentido, D'Ambrósio (2012, p. 74) afirma que quando se fala de ciência e tecnologia:

a escola deve estar integrada aos valores e expectativas da sociedade, quanto a sua capacidade de gerar, organizar e difundir “conhecimento vivo”, o que só será possível através da ampla utilização das tecnologias na educação, pois segundo o autor, a educação do futuro passará pela informática e comunicação. (apud SOUSA, 2018, p.21)

Contribuindo para a discussão, Goldenberg (2000) afirma que:

a tecnologia pode ajudar os alunos a desenvolver novas formas de olhar para os problemas matemáticos, ajudando-os a construir modelos mentais e a desenvolver habilidades de generalização e flexibilidade de pensamento. Os alunos que experimentam situações nas quais é possível movimentar e modificar objetos geométricos na tela do computador, começam a aprender como realizar os mesmos tipos de experiências em suas mentes, na ausência do recurso tecnológico. (apud BASSO; NOTARE, 2016, p.6)

Contudo, também deve-se ter cuidado na escolha das tecnologias digitais empregadas como recursos didáticos, conforme defendido por Kenski (2012, p. 57), “cada tecnologia tem

a sua especificidade e precisa ser compreendida como um componente adequado no processo educativo”. Ou seja, a utilização dessas ferramentas como uma forma de estratégia pedagógica precisa ser mediada da maneira correta, pois a tecnologia, apesar de ser essencial, quando empregada da forma errônea pode ser pouco eficaz no aprendizado ou até completamente falha.

Camargo e Daros (2018) além de afirmar que o uso de aplicativos na educação pode proporcionar diferentes propostas pedagógicas de modo significativo, declaram, também, que esses recursos precisam ser utilizados de maneira crítica e criativa. Além disso, igualmente ao argumento de Kenski (2012), os autores sinalizam o cuidado ao desenvolver uma sequência didática baseada na utilização de tecnologias digitais, devendo-se buscar adaptar o seu uso ao conteúdo necessário de maneira mais adequada.

Sendo assim, entende-se que a utilização de tecnologias para o abordar a introdução à análise combinatória apresenta potencial para o aprendizado dos estudantes. Para isso, é importante o estudo e a escolha dos recursos digitais que deverão ser empregados nessas aulas para conseguir desenvolver um ensino baseado em uma apresentação teórica e prática.

5. METODOLOGIA

Esta pesquisa busca investigar as potencialidades de diferentes tecnologias digitais em sala de aula para o ensino de conceitos relacionados à análise combinatória. Tem como objetivo explorar a dinamicidade dos diversos recursos digitais em prol do aprendizado. Os participantes da pesquisa serão estudantes de um cursinho de pré-vestibular privado de Porto Alegre do turno da noite, convidados a participar mediante assinatura do Termo de Assentimento ([Apêndice A](#)). Os materiais e recursos tecnológicos utilizados para a aplicação desta pesquisa foram projetor, notebook, apresentação de slides, *software* GeoGebra[®], *software* Scratch[®], Google Meet[®] e Open Board[®]. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, em que os dados produzidos tem caráter descritivo, rico em pormenores e em contexto natural, de difícil tratamento estatístico (BODGAN e BIKLEN, 1994). Assim, a pesquisa fará uma análise qualitativa descritiva da dinâmica de utilização dos recursos tecnológicos utilizados a partir do *feedback* dos alunos e da observação em sala de aula.

Para realizar o experimento prático desta pesquisa, o conteúdo foi organizado em três encontros, sendo: dois presenciais de 40 minutos cada e um *online* de 90 minutos. As aulas ministradas tiveram como recurso auxiliar a projeção de uma apresentação em slides no quadro fazendo com que a escrita no mesmo converse com os recursos da exibição projetados. Nas aulas foram abordados exemplos e exercícios que ilustram as definições matemáticas estabelecidas.

Apresento a seguir a contextualização do cenário de sala de aula, os recursos tecnológicos utilizados na sequência de atividades e a descrição das aulas planejadas e ministradas.

5.1. CENÁRIO E PARTICIPANTES

Como já dito anteriormente, a pesquisa ocorreu em uma turma do turno da noite de um cursinho de pré-vestibular privado de Porto Alegre na qual um total de treze alunos aceitaram participar da mesma. É relevante destacar o contexto da turma, o ambiente de sala de aula e o perfil dos participantes da pesquisa.

Nesta instituição de ensino, a turma do período noturno diferencia-se das demais turmas do período diurno. Os estudantes possuem uma média de idade acima dos 20 anos, trabalham durante o dia e estudam no pré-vestibular durante a noite. Além disso, as aulas de Matemática ocorrem nas sextas-feiras, último dia útil da semana, e alguns estudantes já se mostram com um aspecto cansado da semana de trabalho e estudos.

Em alguns momentos, apesar de estarem atentos à aula, não se demonstram, no geral, tão participativos (talvez pelo cansaço do dia e a semana de trabalho), cabendo a mim, como docente, encontrar novas alternativas para fazer com que o aprendizado ocorra. Em todos os dias de aula é identificada a ausência de alguns alunos; os mesmos porventura optam por ir para casa descansar ou acompanhar a aula de forma *online*.

Outro ponto relevante a se destacar é de que a instituição de ensino na qual foi realizada a pesquisa não possui uma “sala de informática”, onde poderíamos fomentar o engajamento ativo dos estudantes com as tecnologias digitais. Por outro lado, em compensação, as salas de aula contam com um projetor e um notebook em cada sala. Portanto, levou-se em consideração, para a sequência didática planejada, os recursos disponíveis e a realidade do cenário de pesquisa.

5.2. RECURSOS TECNOLÓGICOS UTILIZADOS

Apresentam-se, nesta seção, os recursos tecnológicos digitais utilizados nesta pesquisa para sequência didática planejada.

5.2.1. O GOOGLE PRESENTATION®

O Google Presentation^{®3} é uma ferramenta de apresentações de slides *online* desenvolvida pelo Google[®]. Faz parte de um conjunto de aplicativos do Google Drive[®], que inclui o Google Docs[®], o Google Sheets[®] e o Google Forms[®]. Esse aplicativo, que se assemelha ao “PowerPoint[®]”, permite desenvolver e apresentar slides de forma *online* e colaborativa através da nuvem.

De acordo com o blog Mgtek Soluções e Tecnologia⁴, o Google Presentation[®], ou “Google Apresentações[®]”, é uma ferramenta do Google[®] que tem como objetivo principal criar slides. Com ele é possível criar, editar e compartilhar apresentações tanto no formato real que seria a própria ferramenta dentro do Google Drive[®], quanto pelo Power Point[®]. A ferramenta cria novas apresentações em branco ou a partir de *templates* com diferentes tipos de informações. Afinal, ela permite que sejam incluídas fotos, textos, formas, vídeos, tabela entre várias outras opções.

O aplicativo foi selecionado para preparar a apresentação do conteúdo devido a seus recursos, funcionalidades e a familiaridade com o programa. A escolha em abordar o conteúdo por meio da apresentação em slides se deu para tornar a aula mais dinâmica e,

³ <https://docs.google.com/presentation> (Acesso em: Junho de 2023)

⁴ <https://mgtek.com.br/lages/blog/google-apresentacoes/> (Acesso em: Junho de 2023)

principalmente, ilustrativa, fazendo com que o tempo seja otimizado e que os estudantes consigam visualizar os problemas de contagem propostos e desenvolvidos. Além disso, de acordo com Vieira (2011), ministrar aulas através da apresentação slides pode despertar a atenção e interesse dos alunos, além de atrair a atenção dos espectadores para a aula lecionada pelo docente.

Além disso, a utilização da apresentação em slides serviu como um “*storytelling*” em que a exposição do conteúdo foi sendo abordada numa linha do tempo e os conceitos trabalhados foram sendo apresentados com recursos visuais e de forma interativa, no qual os alunos também se tornam uma peça ativa na construção do aprendizado. A utilização do Google Presentation[®] e seus recursos contribuiu para elaborar uma aula na qual o conteúdo apresentado conseguia conversar com a fala do professor e as observações dos alunos, formando um “tripé” didático.

Camargo e Daros (2018) destacam que esse tipo de estratégia pedagógica, em que se faz o uso de uma metodologia ativa de aprendizagem, desenvolve competências nos âmbitos pessoais e profissionais que vão além daquelas desenvolvidas na aula tradicional. Portanto, a utilização da apresentação de slides para a apresentação do conteúdo de análise combinatória, elaboradas neste trabalho, contribuem para o aprendizado ativo que, parafraseando Camargo e Daros (2018, p. 17), “permitem a construção interativa do conhecimento”.

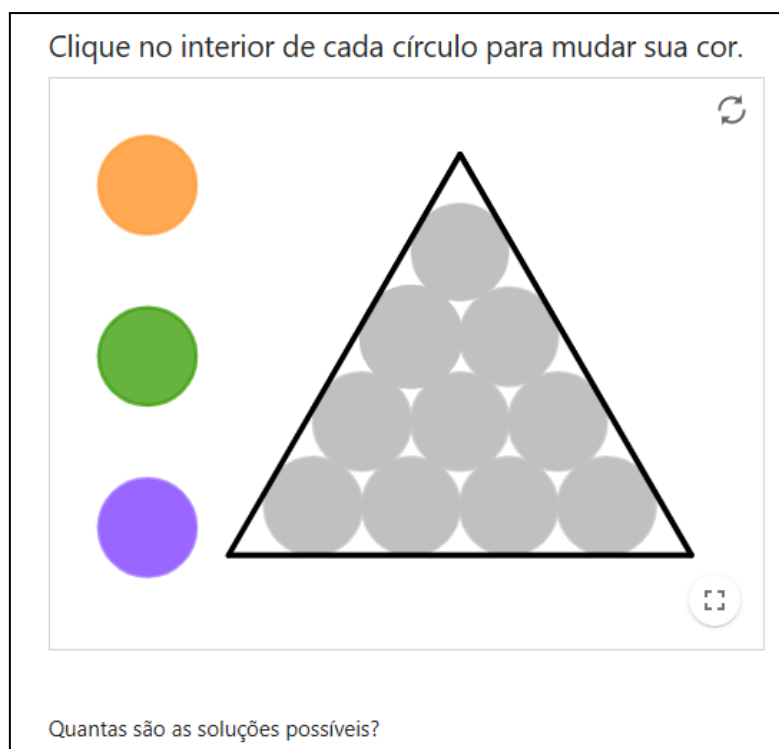
5.2.2. O GEOGEBRA[®]

O GeoGebra[®], de acordo com o seu próprio site⁵, é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Além disso, o GeoGebra[®] oferece uma plataforma *online* com mais de um milhão de recursos gratuitos criados por sua comunidade em vários idiomas. Esses recursos podem ser facilmente compartilhados por meio da plataforma de colaboração GeoGebra Tarefa, onde o progresso dos alunos pode ser monitorado em tempo real.

A aplicabilidade do GeoGebra[®] para introduzir análise combinatória, neste trabalho, tem como objetivo explorar e resolver a seguinte questão em aula: “De quantas formas pode-se preencher os círculos no interior do triângulo com as cores disponíveis de modo que círculos de mesma cor não se encostem um no outro?”, conforme a Figura 3.

⁵ <https://www.geogebra.org/about> (Acesso em: Junho de 2023)

Figura 3: Exercício dos círculos inscritos em um triângulo.



Fonte: própria do autor

Através do minipalcativo (disponível no link: <https://www.geogebra.org/m/np7favj8>), os estudantes poderão manipular e explorar o problema de contagem em questão. O GeoGebra[®], por se tratar de um *software* de geometria dinâmica, permite fazer com que os usuários resolvam problemas além de criar, analisar e manipular objetos matemáticos, ajudando na visualização interativa de conceitos e trazendo dinamicidade e para o aprendizado.

Segundo com Lopes (2011, p. 5) a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica “possibilitam fazer investigações, descobertas, confirmar resultados, fazer simulações, e permitem levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática”. Sendo assim, o GeoGebra[®] apresenta-se como um recurso com um potencial para auxiliar na visualização e no desenvolvimento de conjecturas matemáticas.

5.2.3. O SCRATCH[®]

O Scratch[®] é um *software* desenvolvido pelo MIT (Massachusetts Institute of Technology). De acordo com informações apresentadas em seu próprio site⁶, o Scratch[®] é a maior comunidade de codificação do mundo para crianças e uma linguagem de codificação

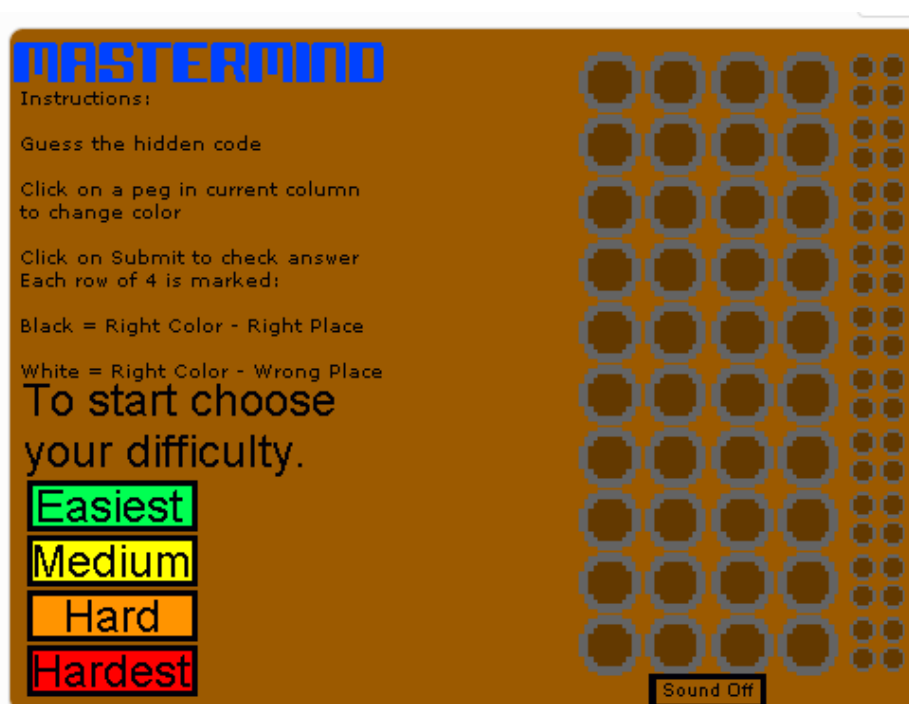
⁶ <https://scratch.mit.edu/about> (Acesso em: Junho de 2023)

com uma interface visual simples que permite aos jovens criar histórias, jogos e animações digitais. O Scratch[®] é projetado, desenvolvido e moderado pela Fundação Scratch, uma organização sem fins lucrativos. Esse aplicativo pode promover o pensamento computacional e as habilidades de resolução de problemas; ensino e aprendizagem criativos; auto-expressão e colaboração; e equidade na computação.

Com uma interface e abordagem simplificada, o Scratch[®] torna a programação acessível a pessoas de todas as idades, permitindo que explorem sua criatividade e desenvolvam projetos interativos sem a necessidade de conhecimentos avançados de programação.

Neste trabalho, considerando a sequência das aulas procurei por algum aplicativo que contribuísse para a apresentação dos conceitos de arranjo simples e combinação simples. Sendo assim, pensei em utilizar o “Mastermind” que se trata de um jogo cujo objetivo é acertar a sequência de cores correta utilizando a lógica, onde a cada rodada é dado um *feedback* da tentativa dizendo se há alguma cor da sequência na posição correta ou se há alguma cor da sequência porém na posição errada ou se não há nenhuma cor da sequência escolhida na sequência correta. Portanto, considerando o contexto deste trabalho que se baseia em tecnologias, optei por escolher um miniaplicativo (Figura 4) deste jogo no Scratch[®] desenvolvido por um usuário do *software* e disponibilizado de forma livre em seu site (disponível em: <https://scratch.mit.edu/projects/109954222/>).

Figura 4: Miniaplicativo do jogo Mastermind desenvolvido no Scratch.



Fonte: própria do autor

5.2.4. O GOOGLE MEET®

O Google Meet®⁷ é uma plataforma de videoconferências desenvolvida pelo Google® que possibilita a realização de reuniões *online* por meio de vídeo, áudio e bate-papo. Graças aos seus recursos, pode-se utilizá-lo como uma ferramenta de comunicação remota em tempo real, sendo assim, mostra-se uma importante ferramenta para a educação a distância.

Durante a pandemia da Covid-19, devido às normas sanitárias de distanciamento e isolamento recomendadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS), o Google Meet® mostrou-se ser um aliado para os trabalhos e reuniões à distância que necessitavam de um meio de comunicação em tempo real. Neste contexto, a plataforma serviu como meio de ministrar aulas para muitas instituições e profissionais de ensino, corroborando com Fonseca e Vaz (2020) que afirmam que o uso de plataformas como o Google Meet®:

possibilita o desenvolvimento de um “processo de ensino e aprendizagem de forma mais colaborativa e efetiva”, promovendo uma mudança significativa na educação, pois permite o implemento das tecnologias educacionais contextualizando o ensino a sua modernidade. (apud TEIXEIRA; NASCIMENTO, 2021, p.12)

No contexto desta pesquisa, a utilização do Google Meet® servirá para ministrar uma aula extra de resoluções de exercícios sobre análise combinatória. Por não haver um espaço

⁷ <https://meet.google.com/> (Acesso em: Junho de 2023)

físico disponível nem a viabilidade de um horário mais adequado para os alunos se encontrarem num mesmo ambiente para esta aula, a plataforma de videoconferências servirá como um facilitador para a mediação do conhecimento e interação entre os participantes.

5.2.5. O OPENBOARD®

O OpenBoard⁸ é um *software* de quadro branco interativo gratuito e de código aberto, seu layout e seus recursos, resumidamente, transformam a tela em um quadro branco onde é possível escrever e desenhar com “canetas” de diferentes cores e espessuras, utilizar borrachas, fazer linhas, textos, formas geométricas, inserir imagens e etc. Ele é projetado para ser utilizado junto de *hardwares* como canetas e mesas digitalizadoras que utilizo durante as aulas que ministro de forma *online*.

Nesta pesquisa, o OpenBoard® será utilizado de forma integrada ao Google Meet® para a resolução dos problemas propostos aos participantes da pesquisa. O arquivo PDF da lista de exercícios será aberto no próprio *software* (Figura 5) e sua tela será compartilhada através do Google Meet®, fazendo com que a minha escrita e resolução seja projetada nas telas dos alunos.

Figura 5: Printscreen da tela com a lista de exercícios aberta no *software* OpenBoard.

The screenshot shows the OpenBoard interface with a list of math problems on the left and a grid with a compass rose on the right. The problems are:

- $5!$
 - $\frac{26!}{5!}$
 - 26^5
 - 5^{26}
- Quantas palavras com menos de 5 letras podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras? (“EEE” é considerado como uma palavra de 3 letras).
 - $26^4 + 26^3 + 26^2 + 26^1$
 - $26^4 \cdot 26^3 \cdot 26^2 \cdot 26^1$
 - $26^5 \cdot 26^4 \cdot 26^3 \cdot 26^2$
 - 26^5
 - $\frac{26!}{5!}$
- Cinco amigos irão viajar em um carro. Se apenas três deles podem dirigir o veículo, de quantas maneiras diferentes eles podem ocupar os lugares do veículo?
 - $\frac{4!}{3!}$
 - $3! \cdot 4!$
 - $3 \cdot 4!$
 - $5!$
 - $\frac{5!}{3!}$
- (FGV-SP) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR de modo que as letras A e R fiquem juntas em qualquer ordem?
 - 28
 - 42
 - 210
 - 120
 - 35

The grid on the right has a point A at the bottom-left corner and a compass rose to its right. Below the grid, the text reads: "Pedro sai de carro do ponto A e vai até o ponto B, dirigindo-se sempre para o norte (N) ou para o leste (L), realizando, desse modo, trajetórias de comprimento mínimo. Quantas são as possíveis trajetórias que Pedro pode fazer?"

Fonte: própria do autor

Apresento a seguir a metodologia de pesquisa.

⁸ <https://openboard.ch/index.en.html> (Acesso em: Junho de 2023)

5.3. PLANEJAMENTO E DESCRIÇÃO DAS AULAS

Esta seção destina-se à apresentação dos planejamentos e descrições das aulas ministradas para a presente pesquisa. Cada dia de aula possui, na introdução da sua respectiva seção, um breve resumo do que fora planejado. Além disso, cada aula foi subdividida em “momentos” que orientam e descrevem a sequência didática elaborada. Os exemplos utilizados durante as aulas foram retirados de vivências anteriores nas disciplinas de Estágio de Docência em Educação Matemática III (EDU02194) e Educação Matemática e Tecnologia (MAT01074).

5.3.1. AULA 1

O Quadro 4 apresenta o resumo da Aula 1.

Quadro 4 - Quadro-resumo da Aula 1 (conteúdo abordado e tecnologias digitais utilizadas)

Aula	Tecnologia Digital utilizada
Aula 1: Princípio fundamental da contagem, Permutação e Permutação com Repetição.	Google Presentation [®]
	GeoGebra [®]

A primeira aula sobre Análise Combinatória visou a abordagem dos conceitos de Permutação Simples, Permutação com Repetição e Princípio Fundamental da Contagem (princípio aditivo e princípio multiplicativo). Com o auxílio do Google Presentation[®], o planejamento foi iniciar a aula abordando os conceitos e definições do Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo “e” e Princípio Aditivo “ou”) para depois definir Permutação. Para elucidar o conteúdo, junto da explicação de cada conceito, foram apresentados exemplos de aplicações de cada um deles.

A utilização do GeoGebra[®] nesta aula serviu como recurso de exploração para uma questão envolvendo um problema de contagem, conforme visto na [Seção 4.2.2](#). Em sua aplicação, os estudantes puderam manipular e investigar o problema proposto em um *applet* desenvolvido no programa, a fim de inferir suas conclusões e contribuir para o aprendizado do conteúdo, sobretudo dos conceitos do Princípio Fundamental da Contagem.

Apresento a seguir a descrição dos momentos planejados para a aula 1.

5.3.1.1. MOMENTO 1 - INTRODUÇÃO AO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM


Primeiramente, iniciou-se a aula levantando um problema de contagem, perguntando a quantidade de maneiras distintas em que se pode pintar uma bandeira com três cores distintas sem que haja repetição de cor, conforme Figura 6.

Figura 6: Slide sobre o exemplo da bandeira.

Análise Combinatória

Exemplo 1:

De quantas maneiras distintas podemos pintar a bandeira abaixo as cores Azul, Vermelho e Amarelo?



Fonte: própria do autor

A partir desse problema, foram listadas as opções de bandeiras levantadas pelos estudantes e, nos próximos slides (Figuras 7, 8 e 9), as mesmas foram projetadas conforme a fala do professor, indicando as formas distintas de disposição de cores, mostrando caso a caso, no quadro com a finalidade de ilustrar todas as opções possíveis. Abaixo segue a sequência de slides junto da fala do professor-autor que conduziu a apresentação.

Professor: “Vamos, primeiramente, pensar em pintar as bandeiras. Primeiro, posso pintar a parte superior da bandeira com a cor azul. Correto? Então, como as cores não podem se repetir, a parte de baixo só poderá ser pintada com a cor vermelha ou cor amarela.”

Figura 7: Slide indicando as duas primeiras formas de pintar a bandeira.

Análise Combinatória

Desafio 1

De quantas maneiras distintas podemos pintar a bandeira abaixo as cores Azul, Vermelho e Amarelo?



Fonte: própria do autor

Professor: “E, agora, se pintarmos a parte superior de vermelho? Então a parte de baixo da bandeira deverá ser ou azul ou amarela.”

Figura 8: Slide indicando as próximas duas formas de pintar a bandeira.

Análise Combinatória

Desafio 1

De quantas maneiras distintas podemos pintar a bandeira abaixo as cores Azul, Vermelho e Amarelo?



Fonte: própria do autor

Professor: “*Por último só resta pintar a parte de cima de amarelo. Restando pintar a parte de baixo ou de azul ou de vermelho.*”

Figura 9: Slide demonstrando as duas últimas opções de pintura da bandeira.

Análise Combinatória

Exemplo 1:

De quantas maneiras distintas podemos pintar a bandeira abaixo
as cores Azul, Vermelho e Amarelo?



The image displays six distinct two-colored flags arranged in a 2x3 grid. The top row shows three flags: the first has a blue top half and a red bottom half; the second has a red top half and a blue bottom half; the third has a yellow top half and a blue bottom half. The bottom row shows three flags: the first has a blue top half and a yellow bottom half; the second has a red top half and a yellow bottom half; the third has a yellow top half and a red bottom half.

Fonte: própria do autor

Professor: “*Sendo assim, podemos pintar a bandeira de seis maneiras distintas! Assim como mostra o slide.*”

Em seguida foi abordado um novo exemplo sobre quantas combinações distintas de vestimentas podem ser feitas a partir de quatro camisetas e duas bermudas, conforme Figura 10.

Figura 10: Slide referente ao exemplo das opções de combinações de um uniforme.

Análise Combinatória

Exemplo 2:

Suponha que uma escola possui como uniforme **quatro opções de camiseta** e **duas de bermuda**. De quantas maneiras **distintas** um aluno pode se **vestir** usando essas opções?



The image shows four t-shirts in a row: white, gray, yellow, and black. Below them are two pairs of shorts: black and gray.

Fonte: própria do autor

Mais uma vez, foram listadas caso a caso, com a participação dos alunos, todas as opções de combinações possíveis em que cada combinação analisada era apresentada no slide projetado no quadro com a finalidade de ilustrar todas as possibilidades, conforme a indica a sequência de Figuras 11, 12, 13, 14, e 15. Abaixo, segue a sequência de falas do professor que acompanhou a projeção dos slides indicados pelas Figuras 11, 12, 13, 14 e 15.

Professor: *“Primeiro vamos separar por casos. Fazendo a combinação de uniformes a partir das camisetas.”*

Figura 11: Slide demonstrando as opções de combinações de camisetas e bermudas.

Análise Combinatória

Desafio 2

Suponha que uma escola possui como uniforme **quatro opções de camiseta** e **duas de bermuda**. De quantas maneiras **distintas** um aluno pode se **vestir** usando essas opções?



The image shows four t-shirt icons arranged vertically. From top to bottom, they are: a white t-shirt, a grey t-shirt, a yellow t-shirt, and a black t-shirt.

Fonte: própria do autor

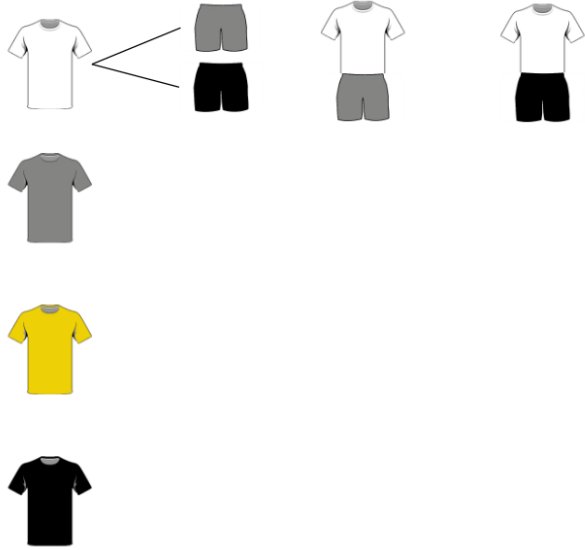
Professor: *“Começando pela camiseta branca. Temos duas opções de bermuda para combinar com essa peça, correto? Então podemos formar a combinação camiseta branca com bermuda cinza e camiseta branca com bermuda preta. Então, neste caso, podemos formar duas opções de combinação.”*

Figura 12: Slide demonstrando as opções de combinações de camisetas e bermudas.

Análise Combinatória

Desafio 2

Suponha que uma escola possui como uniforme **quatro opções de camiseta** e **duas de bermuda**. De quantas maneiras **distintas** um aluno pode se **vestir** usando essas opções?



The diagram shows a white t-shirt on the left. Two lines branch out from its right side to a pair of grey shorts and a pair of black shorts. To the right of these, two complete outfits are displayed: the first consists of a white t-shirt and grey shorts, and the second consists of a white t-shirt and black shorts. Below the white t-shirt, there are three more t-shirt options: a grey one, a yellow one, and a black one, arranged vertically.

Fonte: própria do autor

Professor: “*E agora com a camiseta cinza?*”

Alunos: “*Dá para combinar com a bermuda cinza e a bermuda preta.*”

Professor: “*Então, temos mais quantas combinações possíveis?*”

Alunos: “*Duas.*”

Figura 13: Slide demonstrando as opções de combinações de camisetas e bermudas.

Análise Combinatória

Desafio 2

Suponha que uma escola possui como uniforme **quatro opções de camiseta** e **duas de bermuda**. De quantas maneiras **distintas** um aluno pode se **vestir** usando essas opções?

Fonte: própria do autor

Professor: “Para as camisetas amarela e preta então podemos utilizar a mesma lógica?”

Alunos: “Sim.”

Professor: “Então, temos mais quantas combinações possíveis?”

Alunos: “Quatro. Duas combinações com a camiseta amarela e duas combinações para a camiseta preta.”

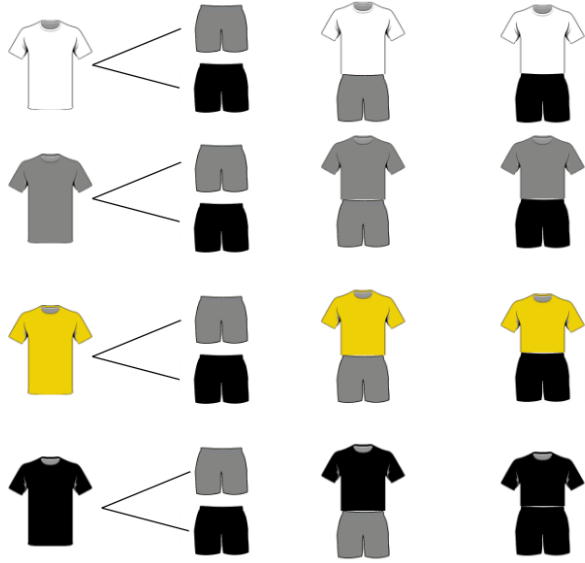
Professor: “Muito bem! Então vamos representar isso no slide.”

Figura 14: Slide demonstrando todas as opções de combinações de camisetas e bermudas.

Análise Combinatória

Desafio 2

Suponha que uma escola possui como uniforme **quatro opções de camiseta** e **duas de bermuda**. De quantas maneiras **distintas** um aluno pode se **vestir** usando essas opções?



The diagram illustrates the combinations of shirts and shorts. On the left, four shirts are shown: white, grey, yellow, and black. Each shirt is connected by lines to two pairs of shorts: grey and black. On the right, the resulting eight distinct combinations are displayed in a grid: (white shirt, grey shorts), (white shirt, black shorts), (grey shirt, grey shorts), (grey shirt, black shorts), (yellow shirt, grey shorts), (yellow shirt, black shorts), (black shirt, grey shorts), and (black shirt, black shorts).

Fonte: própria do autor

Professor: “Agora, respondendo a pergunta. De quantas maneiras distintas um aluno pode se vestir usando essas opções?”

Alunos: “Oito.”

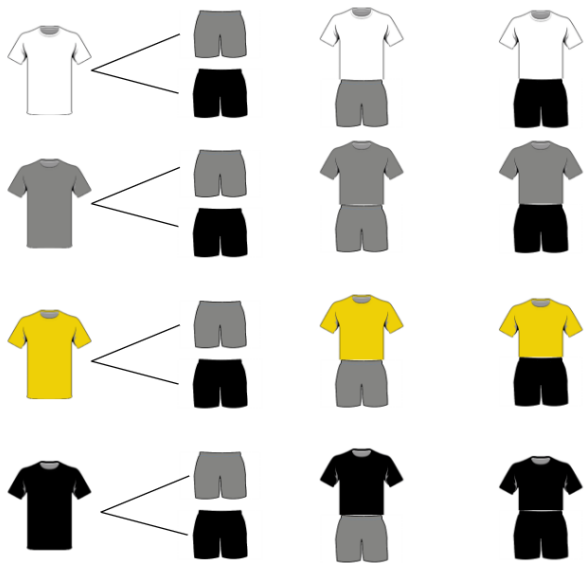
Figura 15: Slide demonstrando todas as opções de combinações de camisetas e bermudas.

Análise Combinatória

Exemplo 2:

Suponha que uma escola possui como uniforme **quatro opções de camiseta** e **duas de bermuda**. De quantas maneiras **distintas** um aluno pode se **vestir** usando essas opções?

Resposta: 8 opções distintas.

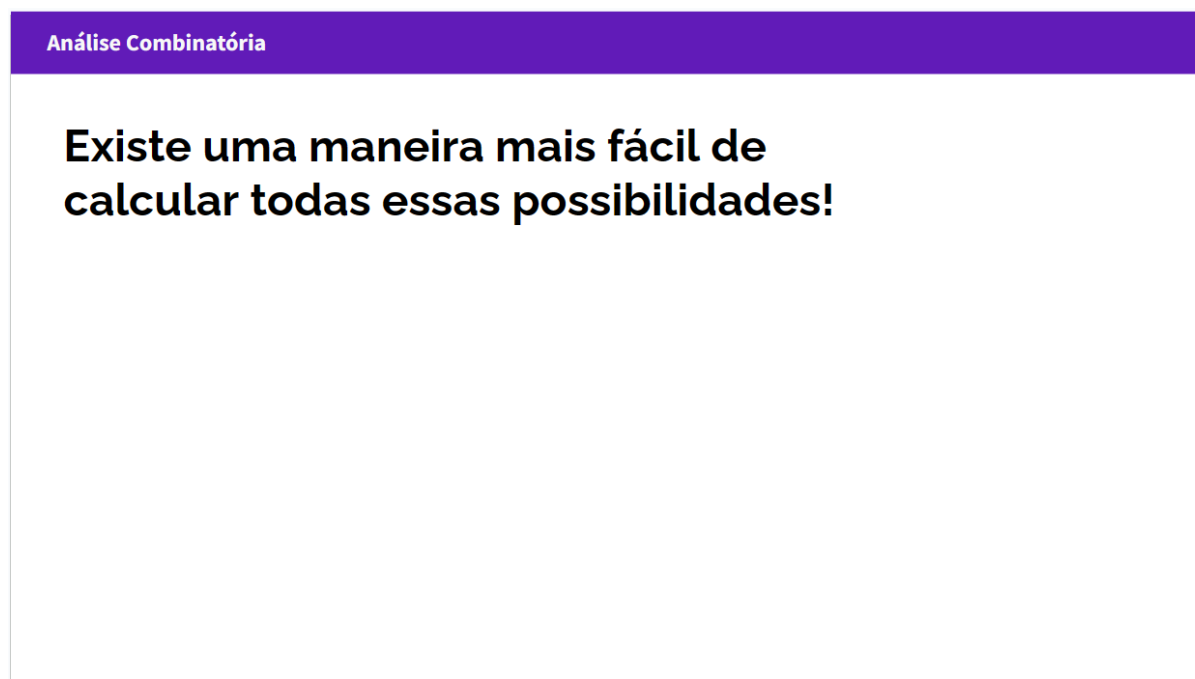


The diagram is identical to Figure 14, showing the four shirt options (white, grey, yellow, black) each paired with two shorts options (grey, black), resulting in eight distinct combinations of clothing.

Fonte: própria do autor

Posteriormente, um novo slide foi projetado com a mensagem da existência de uma nova maneira de calcular esses tipos de problemas de contagem, conforme ilustra a Figura 16. Essa mensagem teve o objetivo de despertar a atenção dos estudantes e instigar uma possível curiosidade, revelando, no próximo slide, o método de resolução, ilustrado na Figura 17.

Figura 16: Slide sinalizando que é possível solucionar os problemas de contagem de outra maneira.



Fonte: própria do autor

Professor: *“E se eu disser para vocês que existe uma maneira mais fácil de solucionar esses problemas de contagem? Nós vamos, a partir de agora, ao invés de ficar desenhando os problemas, montando uma árvore de possibilidades e desenvolvendo métodos mais complexos, poderemos, a partir da análise e interpretação do problema, concluir todas as possibilidades desses tipos de questão. Como? Utilizando o princípio multiplicativo e o princípio aditivo.”*

Figura 17: Slide de exemplificação de Anagrama.

Análise Combinatória

Existe uma maneira mais fácil de calcular todas essas possibilidades!

- **Princípio Aditivo (OU)**
 - Adicionar (+)
- **Princípio Multiplicativo (E)**
 - Multiplicar (x)

Fonte: própria do autor

O slide ilustrado pela Figura 17 ficou projetado no quadro enquanto o professor-autor explicava sobre o princípio fundamental da contagem. Para ampliar a discussão sobre este método, os dois exemplos anteriores (pintura da bandeira e combinação do uniforme) foram retomados projetando-os novamente e escrevendo seu método resolutivo a partir dos princípios multiplicativo e aditivo.

A abordagem desses dois exemplos teve o objetivo de introduzir o conceito do princípio fundamental da contagem, tratando dos princípios aditivo e multiplicativo, indicando que os mesmos são recursos que servem de apoio para o cálculo e análise de problemas de contagem. Em seguida, foram projetados exercícios que podem ser resolvidos a partir da utilização desses princípios. A sequência de Figuras 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 e 25 ilustram, junto das falas do professor-autor e dos estudantes, a sequência de um desses exercícios.


Figura 18: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, stroganoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



Fonte: própria do autor

Professor: “*Vamos resolver esse problema montando, juntos, o passo-a-passo. Primeiro vamos separar as opções por espaços e colocar o ‘e’ ou ‘ou’ entre eles.*”


Figura 19: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, stroganoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



entrada

OU

E

prato

OU

E

sobrem.

Fonte: própria do autor

Professor: “Percebam que nós temos que escolher uma opção para entrada e uma opção para o prato principal e uma opção para a sobremesa. Então vamos completar com ‘e’ entre os espaços.”


Figura 20: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, stroganoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



entrada **E** prato **E** sobrem.

Fonte: própria do autor

Professor: “O ‘e’ é princípio aditivo ou multiplicativo?”

Alunos: “Multiplicativo.”

Professor: “Logo temos que utilizar a multiplicação ou adição entre os termos?”

Alunos: “Multiplicação.”


Figura 21: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, strogonoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



entrada **E** prato **E** sobrem.
 X **X**

Fonte: própria do autor

Professor: “*Temos quantas opções para a entrada?*”

Alunos: “Duas.”


Figura 22: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, strogonoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



entrada **E** prato **E** sobrem.
 2 **X** **X**

Fonte: própria do autor

Professor: “*E temos quantas opções para o prato principal?*”

Alunos: “*Três.*”

Figura 23: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, stroganoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



entrada **E** prato **E** sobrem.

2 **X** 3 **X**

Fonte: própria do autor

Professor: “*Por último. Temos quantas opções para a sobremesa?*”

Alunos: “*Duas.*”

Figura 24: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, stroganoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



entrada **E** prato **E** sobrem.

2 **x** 3 **x** 2

Fonte: própria do autor

Professor: “*Multiplicando 2 vezes 3 vezes 2 dá quanto?*”

Alunos: “*Doze.*”

Figura 25: Slide sobre o problema de contagem de combinações de um cardápio.

Análise Combinatória

Retomando...

Suponha que você está organizando uma festa e precisa escolher um **cardápio** com **2** opções de entradas (**salada ou sopa**), **3** opções de prato principal (**macarrão, stroganoff de frango e feijoada**) e **2** opções de sobremesa (**pavê e sorvete**).

Quantas combinações de cardápio você pode escolher?



entrada **E** prato **E** sobrem.

$$\underline{2} \times \underline{3} \times \underline{2} = 12$$

Fonte: própria do autor

Os demais problemas foram resolvidos através da escrita das suas resoluções no quadro com os slides *powerpoint* projetados no quadro como ferramenta auxiliar. Aqui foi reforçada e incentivada a participação dos estudantes para tornar construtiva a estruturação do pensamento matemático.

5.3.1.2. MOMENTO 2 - ANAGRAMAS E PERMUTAÇÃO

No momento seguinte, levantou-se um novo exemplo que trata do assunto de Anagramas. Esse problema servirá como “*link*” para o conteúdo de Permutação. Primeiramente, foi apresentado no slide, a definição de anagramas (Figura 26) e, como sequência dos exercícios do momento anterior, uma pergunta sobre quantas palavras podem ser formadas com as letras de “ROMA”. Após alguns levantamentos e sugestões dos estudantes, um novo slide (Figura 27) indica o total de anagramas.

Figura 26: Slide de definição de Anagrama.

Análise Combinatória

ANAGRAMAS

Anagrama é a transposição de letras de palavras ou frases para formar outras palavras ou frases diferentes.

Exemplo:

ROMA: AMOR, OMAR, RAMO, ...

Fonte: própria do autor

Figura 27: Total de anagramas de “Roma”.

Análise Combinatória

Quantos são os anagramas de “ROMA”?

ROMA	OMAR	MORA	AMOR
ROAM	OMRA	MOAR	AMRO
RAMO	<u>OARM</u>	MARO	AROM
RAOM	<u>OAMR</u>	MAOR	ARMO
RMOA	ORMA	MRAO	AORM
<u>RMAO</u>	ORAM	<u>MROA</u>	<u>AOMR</u>

24 ANAGRAMAS

Fonte: própria do autor

Essa ação teve como intuito sugerir o método de contagem utilizando o princípio fundamental da contagem para o cálculo do total de anagramas. Assim como nos exemplos anteriores, o passo-a-passo para a resolução foi sendo construído a partir das falas dos alunos

e sendo projetado conforme o desenvolvimento do raciocínio (conforme exemplificado na Figura 28 que ilustra um dos slides) e, por fim, finalizando o cálculo (Figura 29).

Figura 28: Slide sobre o cálculo do total de anagramas de “Roma”.

Análise Combinatória

Quantos são os anagramas de “ROMA”?

4 letras **E** 3 letras **E** 2 letras **E** 1 letras

Fonte: própria do autor

Figura 29: Slide sobre o cálculo do total de anagramas de “Roma”.

Análise Combinatória

Quantos são os anagramas de “ROMA”?

4 letras **E** 3 letras **E** 2 letras **E** 1 letras

4 **x** 3 **x** 2 **x** 1 = 24

Fonte: própria do autor

Finalmente, o professor-autor indicou que essa multiplicação do exemplo do número 4 pelos seus antecessores 3, 2 e 1 pode ser reescrita como o fatorial de 4. Ilustrando, assim, num novo slide a sua representação (Figura 30).

Figura 30: Slide sobre a representação do fatorial de 4.

Análise Combinatória

Quantos são os anagramas de "ROMA"?

4 letras **E** 3 letras **E** 2 letras **E** 1 letra

4 **x** 3 **x** 2 **x** 1 = 24

→ **4!**

Fonte: própria do autor

A partir disso, o objetivo foi mostrar que seu cálculo pode ser por meio de fatoriais e formalizar o conceito de Permutação Simples (Figura 31).

Figura 31: Slide sobre a definição de permutação.

Análise Combinatória

PERMUTAÇÃO!

Uma **permutação** é um arranjo ordenado de objetos, no qual a ordem dos elementos é importante. Em outras palavras, **uma permutação é uma reorganização dos elementos de um conjunto em uma ordem específica.**

Generalizando:

Permutação de n elementos:

$$P_n = n!$$
$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

Fonte: própria do autor

Em seguida, foram apresentados exemplos rápidos na apresentação (Figura 32), em que os alunos deveriam responder em voz alta a quantidade de anagramas (em fatorial) de diversas palavras, conforme as respostas dos mesmos, os slides foram apresentando os gabaritos de cada resposta uma a uma, finalizando com a sua generalização.

Figura 32: Exemplos de Anagramas.

Análise Combinatória

Retomando...

ANAGRAMAS

Quantos anagramas tem os nomes/palavras:

RELATIVO: 8!
BRASIL: 6!
MOCHILA: 7!
LÁPIS: 5!
PERNAMBUCO: 10!
TESOURA: 7!

Generalizando:
 Uma palavra de n letras não repetidas possui $n!$ anagramas.

Fonte: própria do autor

5.3.1.3. MOMENTO 3 - PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Este momento teve o objetivo de abordar Permutações com Repetições. O mesmo foi introduzido por meio da apresentação do problema sobre o total de Anagramas possíveis com o nome “SARA” onde há letras repetidas. Em seguida, foi apresentado como resolver esse tipo de problema e, finalmente, formalizado o cálculo de permutações com repetição (Figura 33).

Figura 33: Formalização de permutação com repetição.

Análise Combinatória

Permutação com Repetição

ANAGRAMA

Exemplo:

SARA

CALCULA O TOTAL DE ANAGRAMAS

DEPOIS

ELIMINA AS REPETIÇÕES

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!}$$

Fonte: própria do autor

5.3.1.4. MOMENTO 4 - EXPLORAÇÃO DE UM PROBLEMA DE CONTAGEM POR MEIO DE UM MINIAPLICATIVO NO GEOGEBRA®

O fim da aula foi destinado para abordar um exercício em um *applet* do GeoGebra® (disponibilizado no link: <https://www.geogebra.org/m/np7favj8>) no qual deve-se preencher os círculos no interior do triângulo com as cores disponíveis de modo que círculos de mesma cor não se encostem um no outro (Figura 34). Posteriormente, caso sobrasse tempo, foram planejados alguns exercícios e questões do ENEM e de vestibulares sobre os conteúdos abordados em aula.

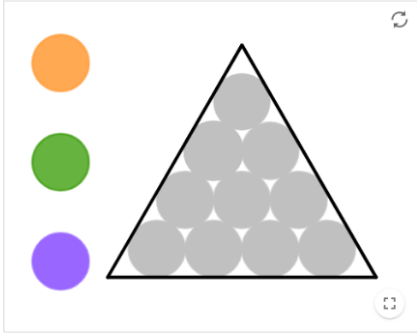
Figura 34: Exercício dos círculos inscritos em um triângulo.

Análise Combinatória

Exercício nível ENEM:

De quantas formas pode-se preencher os círculos no interior do triângulo com as cores disponíveis de modo que círculos de mesma cor não se encostem um no outro?

<https://www.geogebra.org/m/np7favi8>



Quantas são as soluções possíveis?

Fonte: própria do autor

5.3.2. AULA 2

O Quadro 5 apresenta o resumo da Aula 2.

Quadro 5 - Quadro-resumo da Aula 2 (conteúdo abordado e tecnologias digitais utilizadas)

Aula	Tecnologia Digital utilizada
Aula 2: Princípio fundamental da contagem, Arranjo Simples e Combinação Simples.	Google Presentation®
	Scratch®

A segunda aula sobre Análise Combinatória abordou conceitos de Arranjo Simples, Combinação Simples e Princípio Fundamental da Contagem (princípio aditivo e princípio multiplicativo). Assim como na primeira aula, foi utilizada a apresentação em slides projetada no quadro como ferramenta didática. Para elucidar o conteúdo, junto da explicação de cada conceito, foram apresentados exemplos de aplicações de cada um deles.

A utilização do Scratch® neste encontro teve como objetivo apresentar um mini aplicativo desenvolvido e disponibilizado de forma livre no *software* chamado Mastermind, que é um jogo no qual deve-se descobrir uma sequência específica de cores (melhor detalhado na [Seção 4.2.3](#)). Por meio da exploração do jogo pelos estudantes, este momento

serviu como forma de resolver um problema de contagem e contextualizar a diferença entre os conceitos de Arranjo Simples e Combinação Simples.

Apresento a seguir a descrição dos momentos planejados para a aula 2.

5.3.2.1. MOMENTO 1 - REVISÃO DA AULA 1

Primeiramente, como forma de contextualizar a aula e revisar conceitos vistos previamente, fez-se uma revisão da aula anterior de maneira breve.

5.3.2.2. MOMENTO 2 - NOVOS PROBLEMAS DE CONTAGEM

Após a revisão, foi proposto um novo problema sobre pintar uma bandeira com cores distintas, semelhante ao exercício trabalhado na semana anterior. Desta vez, tem-se mais cores do que espaços para pintar conforme mostra a Figura 35.

Figura 35: Slide de apresentação do problema.

Análise Combinatória

De quantas maneiras podemos pintar a bandeira?

Com as seguintes cores:

- Amarelo
- Vermelho
- Azul
- Preto
- Verde

Fonte: própria do autor

Aqui, era esperado que os estudantes utilizassem o Princípio Multiplicativo para concluir que é possível pintar a bandeira de 20 maneiras distintas e, após a participação oral dos mesmos, a resposta foi projetada no slide (Figura 36).

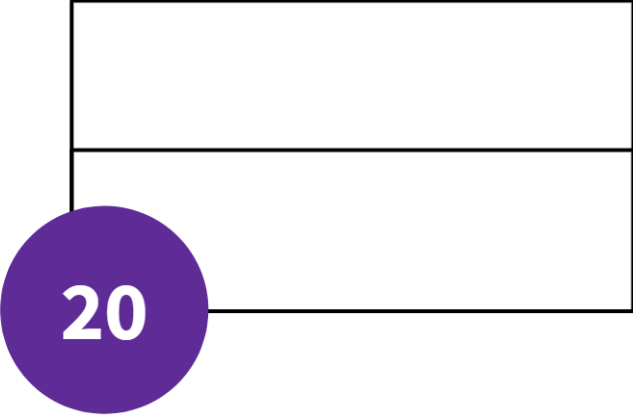
Figura 36: Slide com a resposta do problema.

Análise Combinatória

De quantas maneiras podemos pintar a bandeira?

Com as seguintes cores:

- Amarelo
- Vermelho
- Azul
- Preto
- Verde



The diagram shows a flag with two horizontal rows. A purple circle with the number 20 is overlaid on the bottom row.

Fonte: própria do autor

Em seguida, foi apresentado um novo exemplo semelhante ao anterior mas, desta vez, apresentando uma bandeira com três espaços disponíveis para pintar com as mesmas cinco cores do exercício anterior. Após a análise do problema e participação oral dos estudantes, um novo slide (Figura 37) com a resposta foi projetado e, assim, finalizou-se a nova questão.


Figura 37: Slide com a resposta do problema.

Análise Combinatória

De quantas maneiras podemos pintar a bandeira?

Com as seguintes cores:

- Amarelo
- Vermelho
- Azul
- Preto
- Verde



The diagram shows a flag with three horizontal rows. A purple circle with the number 60 is overlaid on the bottom row.

Fonte: própria do autor

Na sequência, foi feita uma pergunta envolvendo anagramas, revisitando o exercício da aula anterior sobre a quantidade de anagramas da palavra “Mesa”. Assim como nas situações anteriores, a resposta de cada questionamento só aparecia projetada após o retorno dos estudantes, valorizando a participação e envolvimento dos mesmos no processo de construção da solução do problema. Na figura 38, apresentamos o slide em que aparecem as três perguntas e suas respectivas respostas.

Figura 38: Anagramas da palavra “MESA” com as devidas restrições

Análise Combinatória

Quantos são os anagramas da palavra “MESA”...

1. Utilizando apenas 1 das letras.	➔	4
2. Utilizando apenas 2 das letras.	➔	12
3. Utilizando apenas 3 das letras.	➔	24

Fonte: própria do autor

5.3.2.3. MOMENTO 3 - FORMALIZAÇÃO DE ARRANJO SIMPLES

A partir dos problemas abordados, a turma foi questionada sobre qual seria a diferença desses problemas de contagem em relação aos que foram abordados na aula anterior. A expectativa era que os mesmos identificassem que agora, existe um número maior de possibilidades de elementos para escolha do que de “posições” para os mesmos, ou seja, desta vez não se pode permutar todos os elementos.

Com isso, formalizou-se que problemas de contagem com estas características tratam-se de Arranjo Simples. No quadro, foi escrita a sua definição e fórmula, sendo, essa segunda, obtida por meio de dedução a partir dos problemas apresentados e identificou-se na forma “ n escolhe p ”. Posteriormente, os exercícios do Momento 2 ([5.3.2](#)) foram mais uma

vez projetados, porém, desta vez, acompanhados da formalização de Arranjo Simples como forma de identificar esse conceito matemático, assim como exemplifica a Figura 39. Ainda, foi discutido com a turma um novo problema com abordagens de solução diferentes para exemplificar como essas respostas podem aparecer em provas de concursos vestibulares e ENEM (Figura 40).


Figura 39: Slide com o exercício da bandeira e a formalização de arranjo simples.

Análise Combinatória

De quantas maneiras podemos pintar a bandeira?

Com as seguintes cores:

- Amarelo
- Vermelho
- Azul
- Preto
- Verde


$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!}$$

“5 escolhe 2”

Fonte: própria do autor

Figura 40: Exercício sobre arranjo simples com formas de respostas distintas.

Durante uma palestra no auditório, há 6 cadeiras vazias consecutivas, assim, o número de maneiras distintas que Amanda, Beatriz, Carla e Daiane podem se sentar nessas cadeiras é igual a:

A) $A_{6,2} = \frac{6!}{2!}$

B) $A_{6,4} = \frac{6!}{4!}$

C) $A_{6,2} = \frac{6!}{4!}$

D) $A_{6,4} = \frac{6!}{2!}$

Durante uma palestra no auditório, há 6 cadeiras vazias consecutivas, assim, o número de maneiras distintas que Amanda, Beatriz, Carla e Daiane podem se sentar nessas cadeiras é igual a:

A) 720

B) 360

C) 120

D) 90

E) 15

Fonte: própria do autor

5.3.2.4. MOMENTO 4 - INTRODUÇÃO E FORMALIZAÇÃO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Um novo exercício foi proposto na sequência da apresentação, desta vez tratando de conceitos de Combinação Simples contextualizando a mistura de duas frutas dentre seis para a fazer um suco (Figura 41).

Figura 41: Exercício sobre combinação simples.

Análise Combinatória

Exercício



1. Quantos sabores de sucos podem ser feitos misturando duas das seis frutas disponíveis?

- Morango
- Melancia
- Laranja
- Limão
- Maracujá
- Uva

Fonte: própria do autor

Não foi antecipado aos alunos sobre a diferença deste problema em relação aos anteriores; apenas foi projetado e os mesmos deveriam resolver assim como os problemas prévios. Esperou-se que os alunos resolvessem utilizando os métodos de Arranjo Simples, chegando à resposta de 30 sucos distintos. O erro na solução foi esperado e a resposta “30” foi projetada no slide como certa (Figura 42), porém, na sequência, foi indicada como errada (Figura 43) para problematizar e introduzir o novo conceito.

Figura 42: Slide com a resposta esperada dos estudantes.

Análise Combinatória

Exercício



1. Quantos sabores de sucos podem ser feitos misturando duas das seis frutas disponíveis?

Morango
Melancia
Laranja
Limão
Maracujá
Uva


30

Fonte: própria do autor

Figura 43: Slide com a indicação de que a resposta está errada.

Análise Combinatória

Exercício



1. Quantos sabores de sucos podem ser feitos misturando duas das seis frutas disponíveis?

Morango
Melancia
Laranja
Limão
Maracujá
Uva

~~30~~

Fonte: própria do autor

Levantou-se a pergunta do porquê a resposta está errada e fomentou-se o debate entre a turma. Caso não houvesse resposta positiva ou se nenhum aluno conseguisse chegar à


conclusão no debate coletivo, o professor deveria demonstrar que é necessário eliminar as repetições, exemplificando que ao se escolher, por exemplo, Maracujá e Laranja para a mistura se faz o mesmo suco caso a escolha fosse Laranja e Maracujá, ou seja, a ordem de escolha não importa. Portanto, a partir deste momento, os estudantes deviam analisar, em cada caso, se a ordem importa ou não.

Na sequência foi explicado como podem ser eliminadas as repetições de escolha, partindo da fórmula de arranjo simples e posteriormente eliminando as repetições de forma semelhante a “Permutação com Repetição”. O exemplo do suco foi retomado e projetado do quadro junto do novo conceito apresentado, conforme mostra a Figura 44.

Figura 44: Retomada do exercício anterior, porém, desta vez, com a resolução correta.

Análise Combinatória

Exercício



1. Quantos sabores de sucos podem ser feitos misturando duas das seis frutas disponíveis?

Morango	Melancia	Laranja
Limão	Maracujá	Uva

$$C_{6, 2} = \frac{6!}{(6-2)! 2!} = \frac{6!}{4! 2!}$$

“6 escolhe 2”

Fonte: própria do autor

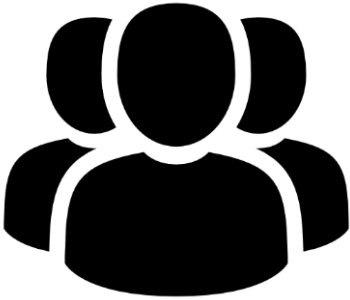
Na sequência apresentou-se um novo exercício, que abordou a formação de uma comissão de 3 pessoas com um grupo de 5 pessoas (Figura 45). Foram feitas perguntas-chaves aos alunos e demonstrou-se que a ordem de escolha não importava. Assim, após a participação oral dos mesmos às perguntas, a resolução foi projetada no quadro junto da questão (Figura 46).

Figura 45: Exercício de Combinação Simples sobre a formação de uma comissão de 3 pessoas.

Análise Combinatória

Exercício

2. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas com um grupo de 5 pessoas?




Fonte: própria do autor

Figura 46: Exercício de Combinação Simples sobre a formação de uma comissão de 3 pessoas.

Análise Combinatória

Exercício

2. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas com um grupo de 5 pessoas?



$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!}$$

“5 escolhe 3”

Fonte: própria do autor

A utilização deste exemplo foi pensada para enfatizar a diferença desse tipo de contagem em relação aos problemas anteriores, pois nestes casos a ordem de escolha não importa. Em seguida, esse conceito foi definido como combinação simples. Finalmente, um

novo slide foi projetado para formalizar as diferenças entre os tipos de contagem abordados neste dia, conforme mostra a Figura 46.

Figura 46: Slide destacando as diferenças entre arranjo simples e combinação simples.



Fonte: própria do autor

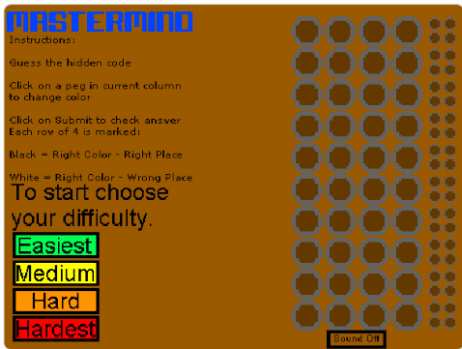
5.3.2.5. MOMENTO 5 - EXPLORAÇÃO NO SCRATCH® E FINALIZAÇÃO DA AULA

O momento final da aula foi destinado à exploração dos conceitos de arranjo simples e combinação simples e, principalmente, suas diferenças na resolução de problemas. Para isso, foi escolhido o jogo chamado “Mastermind” desenvolvido como *applet* no Scratch® (disponível em: <https://scratch.mit.edu/projects/109954222/>), ilustrado na Figura 47, sua descrição e regras estão já escritas na [Seção 5.2.3](#). Esse momento teve como objetivo explorar os conceitos de análise combinatória no jogo e debater sobre as diferenças nas regras do jogo caso se utilize os conceitos de arranjo simples ou combinação simples.

Figura 47: Slide destacando as diferenças entre arranjo simples e combinação simples.

Análise Combinatória

Exemplo



<https://scratch.mit.edu/projects/109954222/>

<https://scratch.mit.edu/projects/2365194/remixes/>

Fonte: própria do autor

5.3.3. AULA 3

O Quadro 6 apresenta o resumo da Aula 3.

Quadro 6 - Quadro-resumo da Aula 2 (conteúdo abordado e tecnologias digitais utilizadas)

Aula	Tecnologia Digital utilizada
Aula 3: Resolução da lista de exercícios e esclarecimento de dúvidas.	Google Meet®
	Open Board®

Com a apresentação do conteúdo de Análise Combinatória finalizado dentro das duas aulas prévias, a terceira aula teve como objetivo resolver uma lista de problemas ([Apêndice B](#)) já disponibilizada para os alunos anteriormente sobre os conceitos abordados nos encontros anteriores, além de devidos esclarecimentos e eventuais dúvidas sobre o conteúdo. Esta aula, em especial, foi ministrada em um ambiente virtual de videoconferências Google Meet®, uma plataforma para a realização de reuniões *online*. Como ferramenta auxiliar para a escrita e resolução dos problemas, foi utilizado o *software* OpenBoard®, que consiste em um aplicativo de quadro branco interativo que permite a apresentação e escrita na tela de forma digital. A tela do programa foi compartilhada através do Google Meet® e apresentada para os estudantes que compareceram no encontro.

5.4. COLETA DE DADOS

Dado que a proposta deste trabalho trata de uma pesquisa qualitativa, os dados foram produzidos a partir de um estudo documental por meio de um questionário, avaliação de questionamentos das vivências, coleta de comentários e *feedbacks* e diário de campo do pesquisador.

O questionário foi desenvolvido na plataforma do Google Forms⁹ que, de acordo com o seu próprio site, é uma ferramenta para criar formulários *online* para pesquisa e avaliação onde é possível criar perguntas e personalizá-las conforme a necessidade.

A seguir apresento cada pergunta presente no formulário seguida de seu formato (múltipla escolha, dissertativa, etc.) bem como a justificativa da escolha de cada pergunta como pilar avaliativo da pesquisa. Observação: as perguntas marcadas com asterisco (*) são obrigatórias.

- Pergunta 1: Múltipla escolha “Sim” ou “Não”.
 1. Você já teve experiências anteriores com o uso de tecnologias para o ensino de matemática em sala de aula?*
- Pergunta 1.1: Descritiva.
 - 1.1. Se sua resposta anterior foi "Sim", poderia contar como foi a sua experiência? (Tecnologia utilizada, *feedbacks*, etc.)

As perguntas 1 e 1.1 foram planejadas para iniciar o formulário para, primeiramente, obter informações sobre o cenário da pesquisa, analisando se os estudantes já tiveram algum contato prévio com o uso de tecnologias para o ensino de matemática durante suas vivências em sala de aula. A pergunta 1.1, mais especificamente, objetivou descobrir quais tecnologias os alunos já tiveram alguma interação, sobretudo com os recursos utilizados nesta pesquisa.

- Perguntas 2 a 6: Múltipla escolha (escala de 0 a 5, sendo 0 como “não foi satisfatório” e 5 como “foi satisfatório”).
 2. Considerando as aulas de Análise Combinatória no cursinho, em uma escala de 0 a 5, como você avalia a **apresentação do conteúdo de análise combinatória** através do uso de tecnologias digitais?*

A pergunta 2 foi planejada para investigar sobre a apresentação do conteúdo e avaliar se o mesmo foi preparado de acordo com o cenário da pesquisa.

⁹ <https://docs.google.com/forms> (Acesso em: Junho de 2023)

3. Considerando as aulas de Análise Combinatória no cursinho, em uma escala de 0 a 5, como você avaliaria a **apresentação do conteúdo** pelo **professor**?*

O terceiro questionamento apresenta uma avaliação sobre a condução da aula pelo professor, autor desta pesquisa, a fim de aferir se minhas falas estavam condizentes ou não com a apresentação do conteúdo. A importância desse tópico está na hipótese de conseguir conciliar o uso de tecnologias digitais com as falas do professor, fazendo com que a apresentação do conteúdo consiga harmonizar os aspectos digitais e pessoais da aula.

4. Considerando as aulas de Análise Combinatória no cursinho, em uma escala de 0 a 5, como você avalia **o seu aprendizado sobre o conteúdo de análise combinatória** através do uso de tecnologias digitais?*
5. Considerando as aulas de Análise Combinatória no cursinho, em uma escala de 0 a 5, como você avalia o quanto as aulas foram úteis para **a resolução da lista de exercícios**?

As interrogações de números 4 e 5 possuem o caráter de compreender, a partir de uma auto reflexão dos alunos, seus aprendizados sobre o conteúdo abordado após as aulas. A resposta da pergunta número 5 não é de caráter obrigatório pois, por se tratar de um curso preparatório, a resolução de listas de exercícios serve como sugestão para práticas de aprendizado. Sendo assim, os estudantes não são obrigados a resolvê-las e, conseqüentemente, é possível que alguns alunos não queiram resolver os exercícios propostos.

6. Considerando as aulas de Análise Combinatória **on-line**, em uma escala de 0 a 5, como você avalia a **sua experiência** de uma aula remota através do **Google Meet**[®]?

A pergunta 6 também tem o objetivo de avaliar a experiência pessoal dos estudantes na aula 3 destinada à resolução da lista de exercícios de forma *online* e aferir se os mesmos consideraram uma ação positiva ou não para o aprendizado do conteúdo.

- Pergunta 7 a 9: Descritivas.

7. O que você avalia como **ponto positivo** das aulas sobre o conteúdo de Análise Combinatória através tecnologias digitais?*
8. O que você avalia como **ponto negativo** das aulas sobre o conteúdo de Análise Combinatória através tecnologias digitais?*

9. Neste espaço escreva opiniões pessoais sobre a pesquisa, feedbacks e/ou sugestões.

O objetivo das perguntas 7, 8 e 9 foi finalizar o formulário de forma com que os estudantes pudessem expressar, com suas palavras, suas experiências nessa pesquisa, destacando suas observações, pontos positivos, pontos negativos, opiniões pessoais e sugestões. Esses questionamentos não foram obrigatórios, pois nem todos os estudantes participaram de todas as aulas. Além disso, essa ação teve o objetivo de oportunizar aos estudantes destacar suas impressões, sem a obrigatoriedade de dissertar sobre sua experiência, dando a possibilidade de apenas avaliar de forma quantitativa por meio das perguntas anteriores.

6. RESULTADOS DA PESQUISA

Este capítulo destina-se a apresentar as decorrências da pesquisa como os relatos e análise das aulas pelo professor autor e a análise das respostas dos estudantes no formulário disponibilizado após a finalização da experiência. Esses resultados foram analisados junto às perguntas norteadoras e ao referencial teórico que embasa esta pesquisa.

6.1. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS AULAS

6.1.1. AULA 1 - INTRODUÇÃO AO CONTEÚDO E PRIMEIRAS IMPRESSÕES

A primeira aula, datada no dia 12 de maio, sexta-feira, iniciou-se às 19:40 e foi finalizada às 20:20. Neste dia, estava um pouco aflito com relação ao tempo, pois em 40 minutos precisava dedicar o início da aula para explicar sobre a pesquisa e recolher as assinaturas dos participantes para o Termo de Assentimento dos mesmos e, posteriormente, iniciar a aula planejada. Porém, o tempo foi suficiente e a aula foi finalizada dentro do prazo.

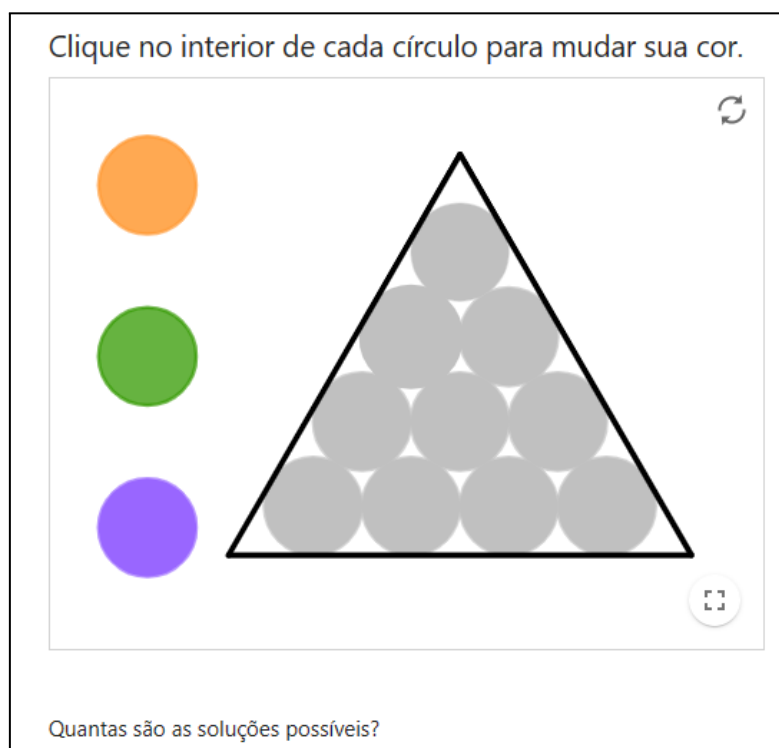
No que diz respeito à apresentação do conteúdo planejado, foi possível abordar tudo que fora programado. O recurso de utilização de slides, preparados previamente, proporcionou uma boa articulação do tripé “explicação, professor e alunos” e trouxe dinamicidade para a aula, o que contribuiu para a finalização da apresentação dentro do tempo previsto. Levando-se em consideração que se trata de uma aula de curso preparatório para concursos de vestibular e ENEM, o tempo dedicado a cada conteúdo matemático é limitado e a utilização de slides permitiu uma abordagem dinâmica, porém completa, para o planejamento inicial.

Sobre as tecnologias utilizadas, na apresentação de slides, foi possível identificar uma aceitação dos estudantes, que participaram ativamente da aula conforme idealizado. A apresentação do conteúdo, projeção de exercícios, ilustração dos problemas e exemplificações através dos slides foram projetados para serem dinâmicos, em que os conceitos, eram projetados conforme a participação ativa dos estudantes, tornando a abordagem do conteúdo não apenas centrada no professor, mas na interação entre professor e alunos, contribuindo para o aprendizado ativo apontado por Camargo e Daros (2018).

Além disso, a utilização da apresentação em slides foi ao encontro da argumentação de Goldenberg (2000), pois, diante deste contexto, a tecnologia digital possibilita o desenvolvimento de um novo olhar para os problemas matemáticos, neste caso envolvendo combinatória, no momento em que os slides dialogavam com a explicação do problema e ajudaram a construir soluções para os problemas de contagem abordados.

No momento da aplicação do problema “De quantas formas pode-se preencher os círculos no interior do triângulo com as cores disponíveis de modo que círculos de mesma cor não se encostem um no outro”, utilizando o GeoGebra® (conforme ilustra a [Figura 3](#)), os estudantes exploraram o *applet* para fazerem conjecturas e chegar a conclusões sobre a problemática do exercício proposto, que exigia uma enumeração de conjuntos que atendessem os critérios identificados no problema.

Figura 3: Exercício dos círculos inscritos em um triângulo.



Fonte: própria do autor

Ou seja, a partir da exploração do *applet*, os estudantes deveriam elaborar alguma estratégia a partir de suas interpretações e independente de fórmulas e soluções pragmáticas para resolver a questão proposta. Como a instituição não possui laboratório de informática, a situação-problema foi explorada por meio da projeção e com a participação dos alunos no debate. A aluna que estava auxiliando na passagem dos slides no notebook foi a encarregada de manipular o *applet*, e os demais estudantes da turma contribuíram com falas e orientações. Abaixo, algumas falas destacadas durante a exploração do problema no *applet*.

Aluno 1: “Escolhe a primeira bolinha laranja e depois vamos ver o resto (Na fileira que só tem uma bolinha).”

Aluno 2: “*Depois (fileira com duas bolinhas) verde e por último roxa porque não pode ser nem laranja nem verde.*”

Aluno 1: “*(Na terceira fileira contando de cima para baixo) Tem que botar laranja no meio porque não pode ser nem roxa nem verde.*”

Aluno 3: “*Então só resta roxa na esquerda e verde na direita*”

Aluno 2: “*Na última fileira vai ser assim também né, sôr? Só tem uma possibilidade de cor para cada posição.*”

Professor: “*Exatamente.*”

Aluno 2: “*Então quer dizer que a nossa primeira escolha de cores das duas primeiras fileiras (contando de cima para baixo) define as cores de todas as outras bolinhas?*”

Professor: “*Sim.*”

Neste momento, percebe-se que o raciocínio combinatório dos estudantes foi se desenvolvendo, conforme levantado por Borba (2010), pois foi estabelecido um problema de contagem em que os estudantes deviam analisar a situação de modo a atender um critério específico e determinar a quantidade de conjuntos ou agrupamentos que satisfizesse a resolução da questão sem necessariamente desenvolver um único tipo de resolução.

Após a exploração e as considerações dos estudantes sobre o problema, o mesmo foi retomado no quadro e resolvido, escrevendo sobre a projeção do slide e relacionando com as observações feitas pela turma. Essa exploração relacionando os conceitos e noções construídas, o *applet* e a explicação final, o que vai ao encontro do que Borba, Rocha e Azevedo (2015) defendem em relação ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, no sentido de conseguir estimular o uso de distintas formas de representação de situações-problemas que envolvem a combinatória.

Depois da explicação do problema de contagem em questão, retomei o *applet* e, junto com os alunos, visualizamos todas as possibilidades de contagem questionadas no exercício. Assim, o *applet* no GeoGebra® assumiu um papel fundamental para possibilitar a exploração e investigação do problema bem como desenvolver o pensamento matemático envolvido, conforme corroborado por Lopes (2011). Neste caso, o GeoGebra® mostrou-se uma ferramenta auxiliar para dar suporte à explicação do docente, pois permitiu que os alunos visualizassem e, acima de tudo, interagissem com o problema em questão, o que seria difícil de ser feito somente usando o quadro e caneta. Além disso, o uso desta tecnologia digital

conseguiu se mostrar como um recurso didático que pôde promover uma imersão no conteúdo estudado e interagir com a fala do professor, os conceitos estudados e a compreensão dos estudantes, conforme defendido por Kenski (2012).

Alguns dias depois da aula, recebi o feedback de um estudante via aplicativo de mensagem WhatsApp com algumas considerações pessoais sobre a aula, transcrita a seguir.

Aluno: “Fala, Felipe! Tudo certo? O meu, ontem a aula foi muito boa! De verdade. E quando eu não conseguia entender contigo falando o material estava bem completo e bem mastigado. Foi bem boa a aula e o pessoal, pelo que eu vi, curtiu afu tu ter levado a lista de exercícios. Disseram que faz falta isso [...].”

A mensagem do aluno revela a apreciação pelo material elaborado e pela condução da aula.

6.1.2. AULA 2 - AMPLIAÇÃO E FECHAMENTO DOS CONCEITOS

A segunda aula, datada no dia 19 de maio, sexta-feira, iniciou-se às 19:40 e foi finalizada às 20:20. Neste dia, apenas sete alunos compareceram à aula. O fator predominante, relatado pelos próprios estudantes presentes, foi que no dia seguinte (sábado, 20 de maio) no turno da manhã haveria um simulado ENEM interno do próprio cursinho. Por ter poucos participantes na sala, a aula não ocorreu exatamente conforme o planejado no sentido da necessidade da participação dos estudantes durante a construção dos conceitos abordados.

De qualquer forma, o uso do Google Presentation[®] para elaborar e apresentar os *slides* mostrou-se mais uma vez eficiente. A apresentação pausada e dialogada, assim como na aula anterior, permitiu interação com os alunos e mostrou-se uma via positiva de tornar a aula mais dinâmica e colaborativa, tornando o espaço educativo propício para a construção do conhecimento matemático e o envolvimento ativo dos alunos, conforme argumentado por Tractenberg (2007).

Destacamos para análise o momento que abordou a questão apresentada nos slides sobre os anagramas da palavra “mesa” utilizando apenas 1, 2 ou 3 letras da palavra no Momento 2 ([Seção 5.3.2](#)). Em um primeiro momento, os alunos apresentaram dúvidas sobre o que seria a restrição “utilizando apenas 1 (ou 2 ou 3) das letras”. Esta dúvida revela a natureza não trivial do pensamento combinatório, em que a apresentação de critérios que

delimitam o problema, conduz a uma solução que não se reduz à simples aplicação de regras e fórmulas, conforme já destacado por Morgado *et al* (2006) e também por Borba, Rocha e Azevedo (2015). Para o debate da solução com a turma, formalizei no quadro de forma escrita o significado de cada problema, escrevendo os agrupamentos de cada um, separando em conjuntos. O Quadro 6 ilustra o modo de como as ideias foram abordadas.

Quadro 6 - Ilustração do problema de contagem sobre os anagramas da palavra “MESA” com restrições de letras.

“Utilizando 1 das letras”	“‘M’; ‘E’; ‘S’; ‘A’.”
“Utilizando 2 das letras”	“‘ME’; ‘MS’; ‘MA’; ‘EM’; ‘ES’; ‘EA’; ‘SM’; ‘SE’; ‘SA’; ‘AM’; ‘AE’; ‘AS’.”
“Utilizando 3 das letras”	“‘MES’; ‘MEA’ ‘MSA’; ‘MSE’; ‘MAS’; ‘MAE’; ‘ESA’; ‘ESM’; ‘EMA’; ‘EMS’; ‘EAM’; ‘EAS’; ‘SAM’; ‘SAE’; ‘SME’; ‘SMA’; ‘SEA’; ‘SEM’; ‘AME’; ‘AMS’; ‘AES’; ‘AEM’; ‘ASM’; ‘ASE’.”

Após a escrita no quadro, os mesmos entenderam do que se tratava e que foi utilizado o princípio multiplicativo para calcular as possibilidades. A solução deste problema consistiu em dois momentos: primeiro a sua interpretação e depois encontrar a estratégia para a sua solução. Essa ação vai ao encontro de Borba, Rocha e Azevedo (2015) que indicam que para que se tenha uma otimização do desenvolvimento do pensamento combinatório, faz-se necessária “a utilização de diferentes situações, com seus invariantes correspondentes, e o uso de diversificadas representações simbólicas” (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015, p. 10)”.

Sobre a utilização do jogo Mastermind através de um *applet* no Scratch[®], a dinâmica com o miniaplicativo não se mostrou tão exitosa conforme planejado. Houve poucas interações e um baixo engajamento da turma na sua apresentação. Levantamos algumas hipóteses que possam justificar esse fato, nas quais foram elencadas abaixo:

- Alunos não tão responsivos a atividades com jogos;
- Alunos já cansados da rotina do dia e da semana (todos trabalham durante o dia e estudam no pré-vestibular a noite);
- Poucos alunos presentes em aula;
- Não entenderam exatamente as regras do jogo;

Diferente do miniaplicativo do GeoGebra[®] utilizado na semana anterior, o que se mostrou efetivo naquela oportunidade, desta vez não funcionou. Mesmo com as orientações

do professor sobre o jogo e auxílio na manipulação do *applet*, os estudantes pareceram não se interessar pela atividade exploratória planejada. Eles jogaram poucas rodadas (somente as iniciais) e não finalizaram o jogo.

Mesmo que essa última ação não tenha sido efetiva do ponto de vista do jogo, aproveitei o momento para relacionar com os conteúdos vistos em aula, indicando sobre os conceitos que diferenciam Arranjo Simples de Combinação Simples e onde isso poderia ser relacionado com o jogo. Segue, abaixo, um diálogo que ocorreu neste momento.

Professor: *“Usando este exemplo do jogo. A escolha da senha se trata de um arranjo ou combinação?”*

Aluno 1: *“Arranjo.”*

Professor: *“Por quê?”*

Aluno 1: *“Porque a ordem das cores importa.”*

Professor: *“Muito bem. E caso fosse combinação?”*

Aluno 2: *“A ordem não importaria.”*

Professor: *“Isso mesmo! Ou seja, bastava simplesmente acertar quais cores faziam parte da senha. Independente da ordenação delas.”*

Neste caso o objetivo era fazer com que se empregasse, aqui, mais um recurso para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, evitando limitar-se a empregar fórmulas e situações padronizadas, mas sim analisar o problema combinatório em questão e tomar as devidas ações e decisões, conforme corroborado por Morgado *et al* (2006).

6.1.3. AULA 3 - O ENCONTRO ONLINE

A terceira aula ocorreu no dia 03 de junho de 2023, sábado, iniciou-se às 15:00 e foi finalizada aproximadamente às 16:30. O encontro tratou-se da resolução da lista de exercícios e esclarecimento de dúvidas sobre o conteúdo. Esse encontro ocorreu de forma *online* por meio da plataforma Google Meet[®] e a apresentação através do *software* OpenBoard[®]. No total, sete alunos compareceram ao encontro.

A apresentação foi realizada com o recurso de espelhamento da tela no *software* OpenBoard[®]. A lista de exercícios no formato PDF foi compartilhada no aplicativo, onde foi possível escrever sobre o arquivo, conforme exemplifica a Figura 48.

Figura 48: Resolução da questão 10 da lista de exercícios.

10. (UNICAMP 2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a:

a. 48
 * 72
 c. 96
 d. 120
 e. 210

TODAS AS PERM. QUANDO ESTÃO JUNTAS

ABCDE

$$5! - (2! \cdot 4!) = 120 - 48 = 72 //$$

$$120 - (2 \cdot 24) = 72 //$$

Fonte: própria do autor

O encontro *online* corroborou com as falas de Gravina e Basso (2012) sobre o uso de tecnologias digitais para o desenvolvimento intelectual no âmbito de adaptar a sala de aula para a realidade do “mundo digital” e pôde-se utilizar deste momento como forma de se utilizar do potencial dessa ferramenta.

Além disso, a aula cumpriu seu objetivo de revisar os conceitos abordados em aula e esclarecer eventuais dúvidas sobre questões específicas ou o conteúdo no geral. Aproveitando o momento, aqui, mais uma vez, para contribuir com o desenvolvimento do raciocínio combinatório, desta vez, com a aplicação de exercícios do conteúdo de Análise Combinatória e explicitando formas distintas para as suas resoluções - conforme defendido por Morgado *et al* (2006) e Borba, Rocha e Azevedo (2015) - sempre buscando o aprendizado ativo, em que o aluno contribua na condução e solução dos problemas, bem como discorre Silva e Spinelli (2011).

Neste encontro foram resolvidas todas as questões propostas, da primeira à última, e os conceitos de Análise Combinatória foram enfatizados e desenvolvidos em cada questão. Um ponto a se destacar é que a aula também serviu como forma de revisar assuntos de matemática básica que estavam presentes na resolução das questões, como por exemplo: regras de simplificação e propriedades da potenciação. A Figura 49 ilustra uma questão em que foram utilizadas regras de simplificação para ajudar no cálculo do problema de contagem.

Figura 49: Demonstração da regra de simplificação.

16. Um time de futsal é formado por uma goleira e quatro jogadoras de linha. No plantel de um time, um técnico tem à disposição 3 goleiras e 10 jogadoras de linha. Quantos times distintos o treinador pode escalar considerando que as jogadoras de linha não possuem posição fixa?

a. 286
 X 630
 c. 332
 d. 213
 e. 660

GOL: LIN: $\left. \begin{array}{l} \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} \\ C_{3,1} \in C_{10,4} \\ \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{10!}{6! \cdot 4!} \end{array} \right\} 3 \cdot 210$

$\boxed{630}$

Fonte: própria do autor

Durante a abordagem da simplificação ilustrada na Figura 49, surgiram falas como

Aluno: “Bah, sôr, não sabia que dava pra simplificar direto o 8 com o 4 e 2.”

Assim, pude observar que, em alguns momentos os erros e/ou dúvidas presentes nos desenvolvimentos das respostas não se encontravam necessariamente nos conceitos, fórmulas e equações do conteúdo de análise combinatória, mas sim, no aprendizado e entendimento prévio de aritmética e matemática básica.

Um ponto importante a se destacar nesta aula, é o potencial do uso de tecnologias digitais como o Google Meet® e o OpenBoard® no contexto do ensino remoto. Primeiramente, tratando mais especificamente tecnologias da informação e comunicação (TIC's), como o Google Meet®, que proporcionou o encontro de forma remota, em que os alunos e o professor mesmo em locais distintos puderam mostrar-se presentes, corroborando com o argumento de Fonseca e Vaz (2020) que afirmam que o uso de plataformas como o Google Meet®:

possibilita o desenvolvimento de um “processo de ensino e aprendizagem de forma mais colaborativa e efetiva”, promovendo uma mudança significativa na educação, pois permite o implemento das tecnologias educacionais contextualizando o ensino a sua modernidade. (apud TEIXEIRA; NASCIMENTO, 2021, p.12)

Além disso, no mesmo sentido, vale ressaltar a utilização do *software* OpenBoard®, que se mostrou efetivo dentro deste contexto pois sem ele, a prática pedagógica proposta teria sido mais dificultosa ou até inviabilizada. O cuidado de sua escolha, levantado por Kenski

(2012) e Camargo e Daros (2018), como o *software* para ser o “quadro branco” da aula foi importante pois pôde contribuir para uma melhor construção do aprendizado.

Portanto, considera-se que esse encontro proporcionou um reforço do conteúdo para os alunos que compareceram. Os *feedbacks* dos estudantes presentes durante a resolução das questões foram afirmativos e mostraram-se favoráveis ao aprendizado.

6.2. FORMULÁRIO DE PESQUISA

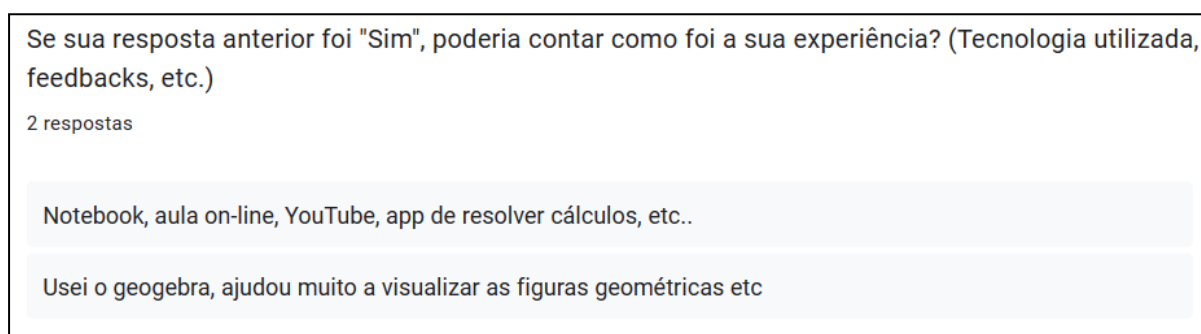
Nesta seção foram analisadas as respostas dos estudantes no formulário de pesquisa cujas perguntas estão detalhadas na seção [5.3](#). Aqui, a análise dos dados foi explicitada sob a luz do referencial teórico que embasa esta pesquisa. As respostas das perguntas nas quais os alunos precisavam quantificar a resposta dentro de uma escala de 0 a 5 serviram como uma base quantitativa para, posteriormente, fazer uma análise qualitativa.

As perguntas iniciais, numeradas como 1 e 1.1, mostraram que cinco dos oito estudantes que responderam ao formulário de pesquisa nunca tiveram experiências com o uso de tecnologias para o ensino de matemática em sala de aula, conforme indica o gráfico da Figura 50. Portanto, verifica-se que as estratégias utilizadas com tecnologias digitais se mostraram como uma novidade para a maior parte da turma. Além disso, este dado, mostra que, apesar de o uso de tecnologias digitais em como um recurso pedagógico traga consigo diversos benefícios para o aprendizado - conforme defendido por Gravina e Basso (2012), Tractenberg (2007), Kenski (2012), D’Ambrósio (2012), Goldenberg (2000), Camargo e Daros (2018) - sua aplicação no campo da matemática ainda não se mostra presente durante a formação escolar dos estudantes.

Figura 50: Respostas da pergunta 1.

Fonte: própria do autor

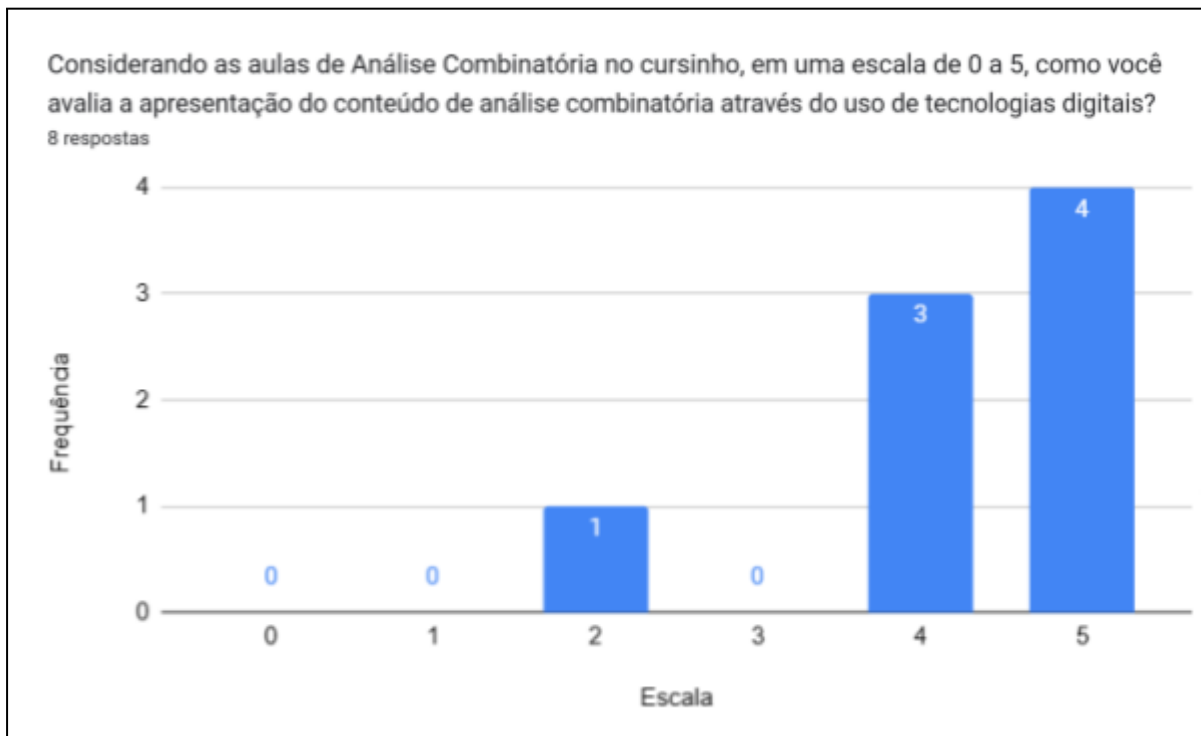
A Figura 51 indica que, dos dois participantes que marcaram como “sim” na pergunta anterior, pôde-se perceber que um estudante já teve contato prévio com o ambiente GeoGebra® e considerou como uma experiência positiva. Essa declaração vai ao encontro dos argumentos de Tractemberg (2007) sobre o ambiente de geometria dinâmica, em específico, que permite a construção de figuras que contribuem no aprendizado de conceitos e propriedades matemáticas. Além disso, os dados também mostram que o outro participante mencionou, possivelmente, as tecnologias digitais utilizadas durante o período de estudo remoto decorrente da pandemia do vírus da Covid-19 ou ferramentas utilizadas para seu estudo pessoal fora do espaço de sala de aula.

Figura 51: Respostas da pergunta 1.1.

Fonte: própria do autor

A pergunta de número 2 (Figura 52) objetivou analisar se os estudantes consideraram, de modo geral, a apresentação do conteúdo positiva ou negativa, avaliando a sua experiência e o material apresentado.

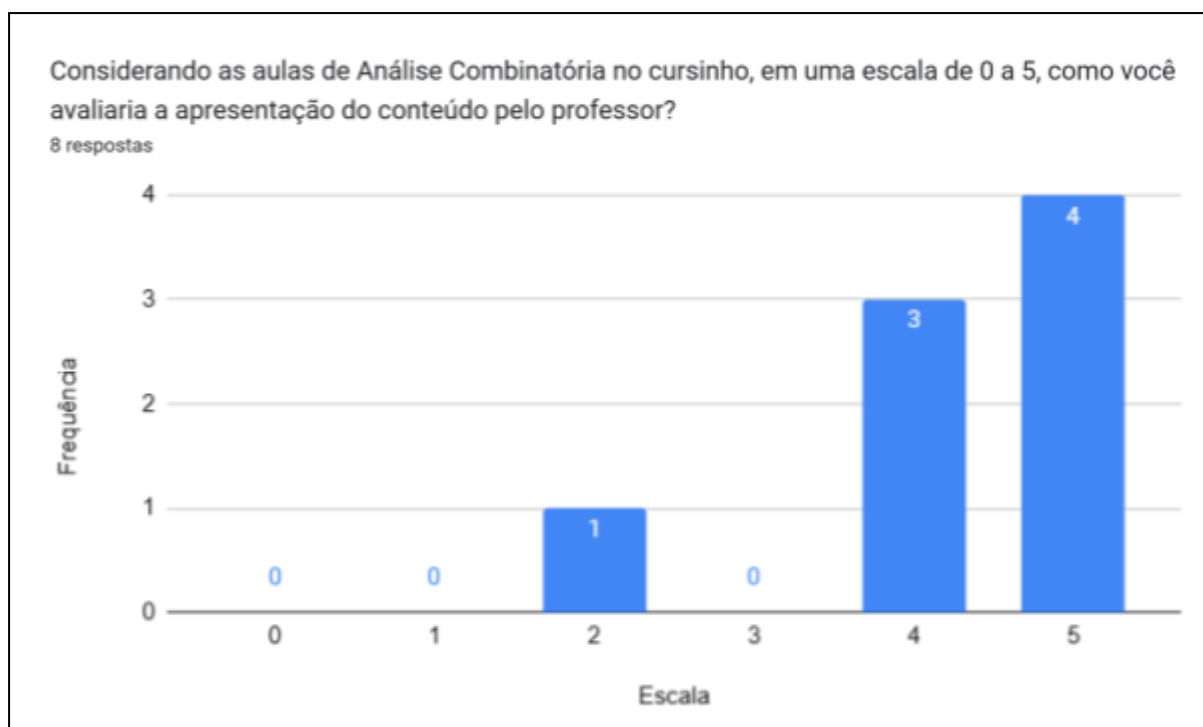
Figura 52: Respostas da pergunta 2.



Fonte: própria do autor

A partir das respostas percebe-se que sete dos oito estudantes consideraram esse tópico como um aspecto positivo (considerando as notas 4 e 5) no experimento e 1 estudante avaliou sua experiência como média/baixa (considerando a nota 2). A partir disso, foi possível avaliar que os métodos aplicados para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, defendido por Borba, Rocha e Azevedo (2015), por meio do uso de tecnologias digitais, conseguiram se mostrar eficientes para os alunos a partir de suas experiências na pesquisa.

A terceira pergunta (Figura 53), complementa a anterior, desta vez solicitando a avaliação da apresentação do conteúdo pelo professor. Esse questionamento teve como finalidade identificar separadamente a diferença entre a avaliação da aula como um todo e se a sua apresentação demonstrou-se coerente.

Figura 53: Respostas da pergunta 3.

Fonte: própria do autor

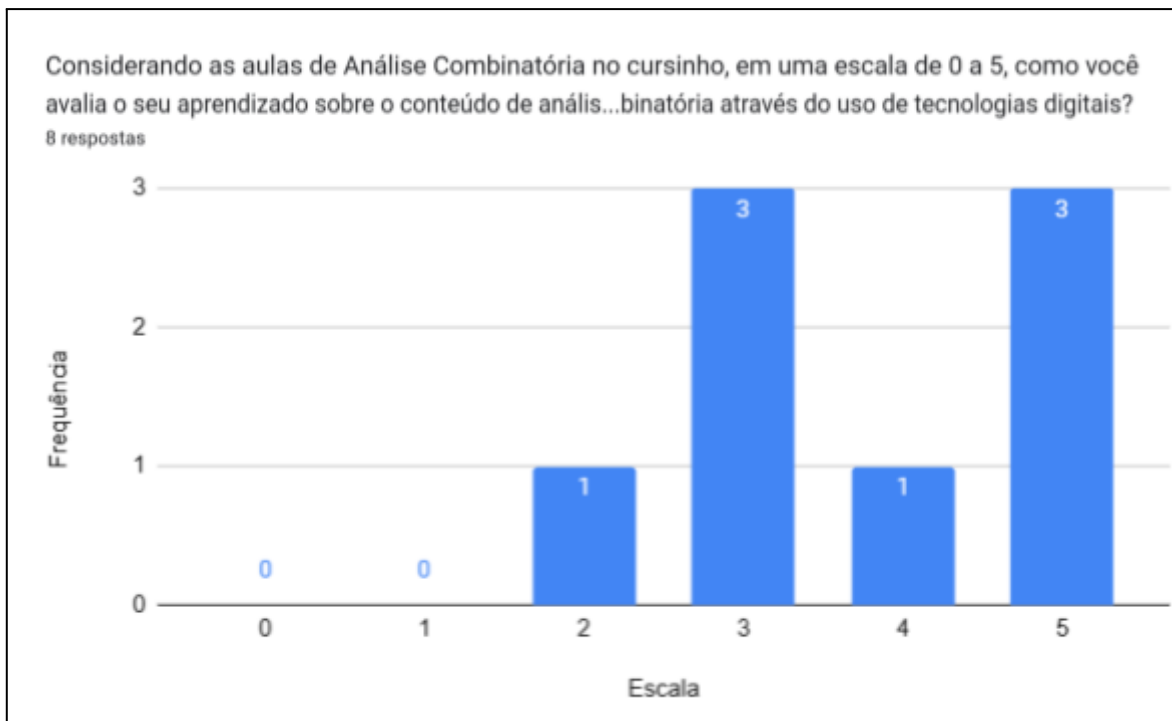
Como pode-se analisar a partir das Figuras 52 e 53, os aspectos mantiveram-se com as mesmas notas da pergunta anterior, portanto, nenhum dos dois aspectos avaliados nas perguntas 2 e 3 sobressaiu-se em relação ao outro e, assim, considera-se a apresentação do conteúdo pelo professor condizente com o material elaborado.

Depois da avaliação da aula e apresentação do conteúdo, foram elaboradas perguntas de cunho particular como uma forma de “autoavaliação” com a finalidade de que os alunos pudessem refletir sobre seu aprendizado. Com esses dados, foi possível avaliar se os benefícios do uso de tecnologias digitais como recurso didático atingiu seu potencial e possibilitou “ampliar os pensamentos” dos alunos, assim como Gravina e Basso (2012) definiram.

Primeiramente, de forma mais geral, a pergunta de número 4 (Figura 54) teve como finalidade fazer com que os alunos avaliassem sua compreensão dos conceitos abordados após as aulas, enquanto a pergunta de número 5 (Figura 55) objetiva com que os estudantes indiquem se as aulas foram importantes para a resolução dos problemas propostos na lista de exercícios. A intenção de avaliar essas duas perguntas de forma conjunta foi encontrar uma forma de analisar as auto reflexões dos alunos com a avaliação do aprendizado por meio da

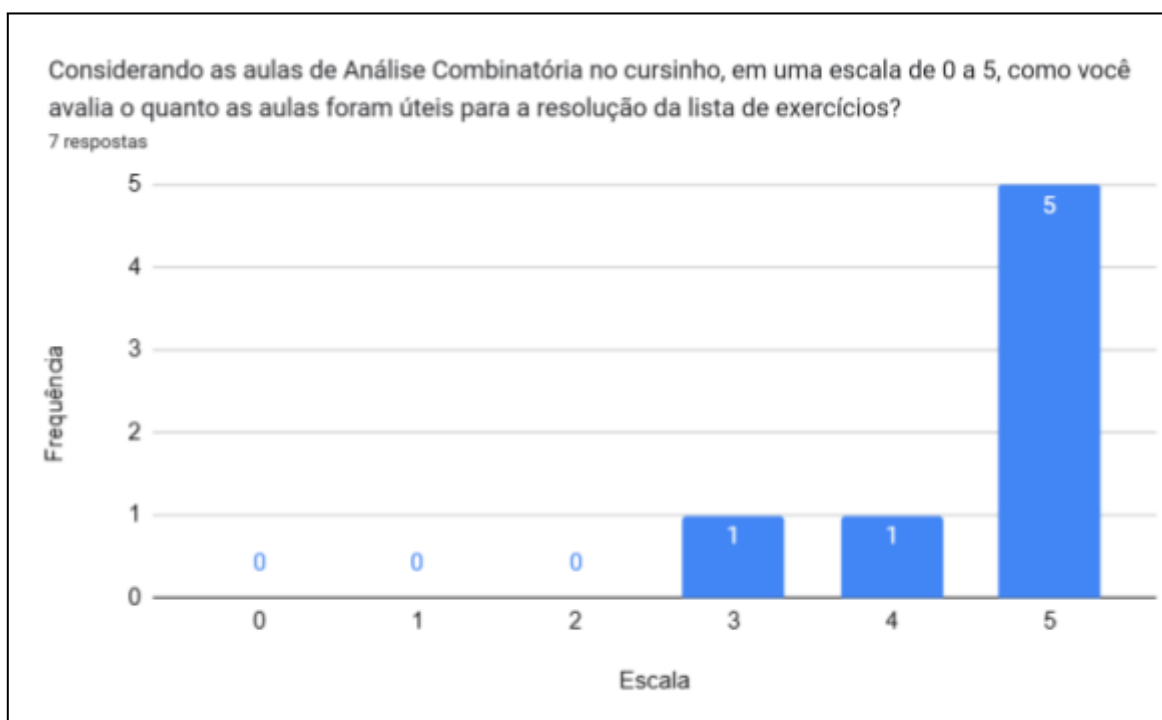
resolução dos exercícios propostos. Aqui, por meio do contraste das respostas obtidas, o desenvolvimento do pensamento combinatório será explicitado.

Figura 54: Respostas da pergunta 4.



Fonte: própria do autor

Figura 55: Respostas da pergunta 5.

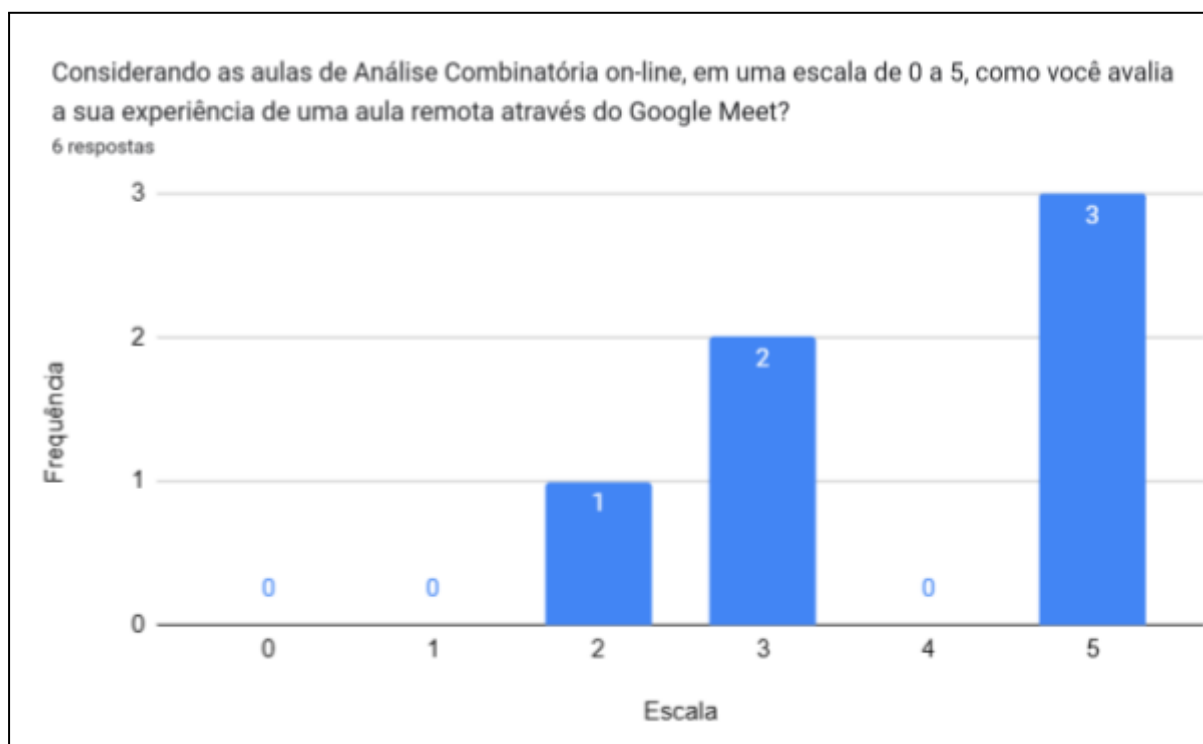


Fonte: própria do autor

A partir das respostas, pôde-se observar que os estudantes consideraram o seu aprendizado do conteúdo com avaliação média de 3,75, numa escala de 0 a 5. Porém, ao classificar o seu aprendizado do conteúdo para resolução da lista de exercícios a avaliação média atingiu a marca de aproximadamente 4,57, numa escala de 0 a 5, revelando o contraste das respostas às perguntas 4 e 5.

A respeito das respostas da sexta pergunta do questionário, ilustrada na Figura 56, sobre a avaliação dos estudantes sobre sua experiência com a aula remota através do Google Meet®, observa-se que, no geral, os alunos dividiram-se entre uma avaliação boa (nota 5) e média/baixa (notas 2 e 3).

Figura 56: Respostas da pergunta 6.



Fonte: própria do autor

Sobre as notas médias/baixas, pode-se relacionar com os relatos dos alunos, nos quais afirmam que os mesmos se sentem numa “zona de conforto” durante uma aula *online* e têm uma maior propensão à distração, indicando que a aula em um ambiente virtual não se mostra tão atrativo para estes estudantes.

As perguntas finais destinadas aos *feedbacks*, observações pessoais e avaliações descritivas sobre as experiências (positivas, negativas e gerais) dos alunos como participantes da pesquisa revelaram, a partir das respostas, pontos significativos para a análise do trabalho.

O sétimo questionamento (Figura 57), sobre o levantamento dos aspectos positivos das aulas, trouxe em evidência que os estudantes consideraram a aula mais dinâmica e prática, fazendo com que facilitasse o entendimento do conteúdo, conforme aponta Trattemberg (2007). Além disso, os alunos observaram que o formato de apresentação das aulas contribuiu para tornar os conceitos mais visíveis e acessíveis, mediante a utilização do material digital utilizado para complementar a fala do professor e vice-e-versa, assim como defendido por Kenski (2012).

Figura 57: Respostas da pergunta 7.

O que você avalia como **ponto positivo** das aulas sobre o conteúdo de Análise Combinatória através tecnologias digitais?

8 respostas

- O professor conseguiu explicar os exercícios com maior facilidade e mais rapidamente, além da praticidade voltar e rever e conseguir salvar as resoluções que ele fez.
Os joguinhos foram top, não teria pensado em análise combinatória desse jeito.
- Aula fica fácil de anotar e prestar atenção ao mesmo tempo
- Não sei
- os exemplos se tornam mais visíveis através de algumas das tecnologias levadas.
- clareamento das questões
- é positivo poder acompanhar de qualquer lugar, ainda mais quando voce estuda e trabalha. também é positivo quando a aula é gravada, porque é possível resgatar pontos importantes da aula quando quiser.
- a praticidade
- Layout da apresentação facilita o entendimento da matéria e serve como complemento da fala do professor

Fonte: própria do autor

Nota-se que os três pilares da pesquisa (conteúdo, uso de tecnologias e didática) foram destacados pelos discentes. A apresentação do conteúdo, o material elaborado, as tecnologias utilizadas e o planejamento didático trabalhado mostraram-se como aspectos

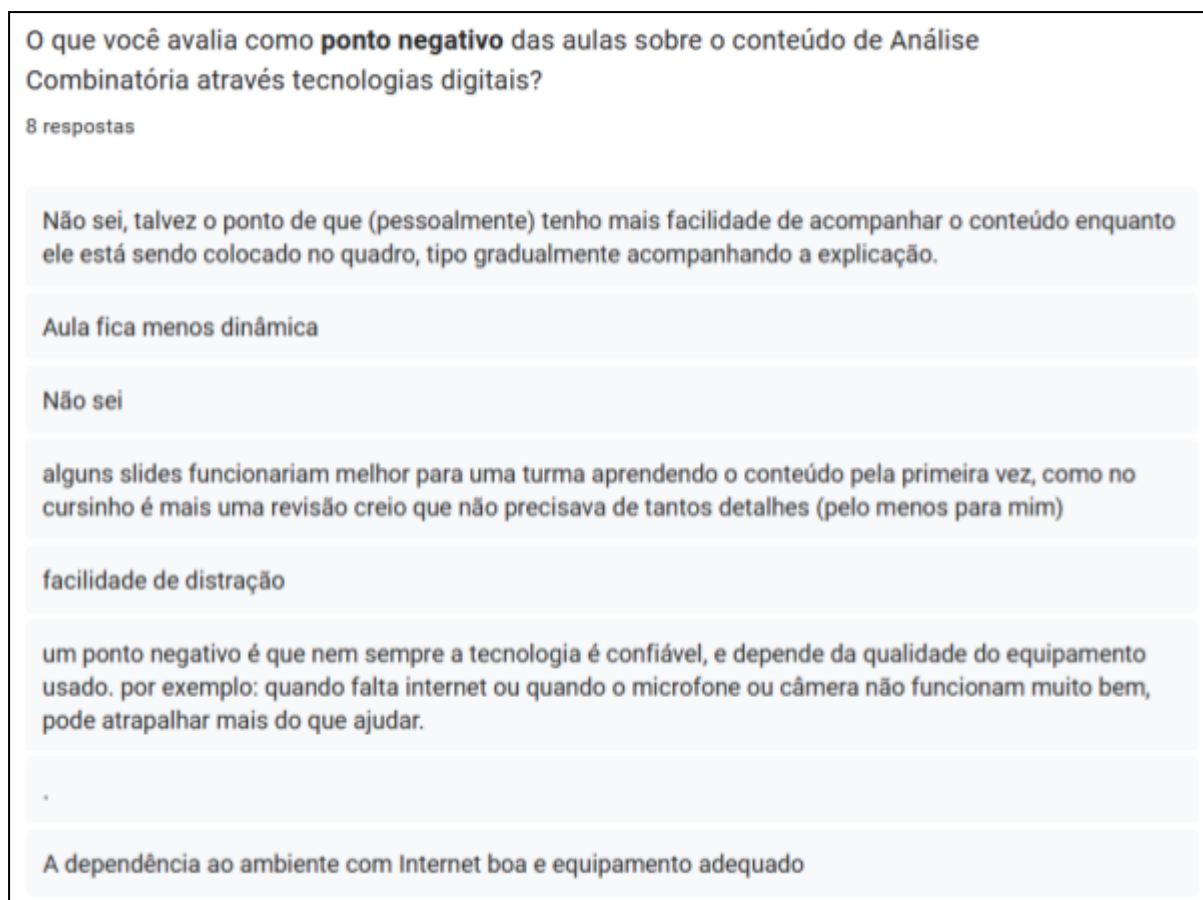
positivos e relevantes para a pesquisa e contribuíram para o aprendizado dos estudantes. Destacamos a fala da primeira resposta que expressa “os joguinhos foram top, não teria pensado em análise combinatória desse jeito”, revelando um entusiasmo com o material elaborado e mostrando o quanto o afeto está presente nas práticas de ensino.

Além disso, o argumento de Borba, Rocha e Azevedo (2015) sobre o uso das variadas formas de representação dos problemas combinatórios para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório foi evidenciado a partir de algumas respostas e, a partir das mesmas, mostrou-se eficiente.

Destaca-se também o comentário de um(a) aluno(a), que acompanhou as aulas 1 e 2 de forma remota fornecida pela instituição de ensino especificamente para essa turma. Apesar deste ponto não ser um aspecto a ser estudado no planejamento deste trabalho, considera-se que o uso de tecnologias como ferramenta que viabilize o estudo a distância mostrou-se importante para o estudante.

A Figura 58 apresenta as respostas dos participantes da pesquisa sobre a pergunta de número 8, que tratou de pontos negativos sobre as aulas de análise combinatória de acordo com a visão dos estudantes.

Figura 58: Respostas da pergunta 8.



Fonte: própria do autor

Dos pontos negativos citados pelos alunos, percebe-se que foram destacados posicionamentos pessoais distintos. É possível identificar uma categoria de resposta que diz respeito à distração durante a aula e a preferência por acompanhar a explicação através da escrita no quadro. Tratam-se de percepções individuais de cada estudante, que revelam a pluralidade das preferências e perfis de aprendizado.

Outra categoria de respostas que foi identificada refere-se à dependência de equipamentos adequados para o trabalho em sala de aula, o que ainda é uma realidade pois, sem o acesso às tecnologias digitais e os recursos básicos necessários, a sua utilização torna-se utópica. É importante destacar que depender desses recursos também apresenta desafios, pois faz-se necessário adaptar a aula planejada à realidade da instituição limitando-se aos recursos disponíveis, corroborando, de alguma forma, com a sinalização de Kenski (2012) e Camargo e Daros (2018) sobre os cuidados na escolha das tecnologias digitais para que sejam mais adequadas possíveis à sequência didática a ser desenvolvida.

Gostaria de ressaltar a quarta resposta sobre “como se estivesse aprendendo o conteúdo pela primeira vez”, dadas as características particulares do cenário da pesquisa (cursinho de pré-vestibular), em que os estudantes são de realidades distintas e cada um possui o seu próprio nível de conhecimento matemático e, durante o trabalho, essa diversidade é perceptível. Portanto, cabe ao professor atender aos diferentes níveis de estudantes da turma para que o trabalho possa ter uma sequência adequada para todos. Dessa forma, cria-se um dilema pois, para alguns, a explicação do conteúdo torna-se algo repetitivo, pois já estudaram esses temas anteriormente, enquanto, para outros, é uma novidade e, então, é necessária uma maior cautela durante a explicação.

A Figura 59 ilustra o espaço onde os participantes da pesquisa poderiam escrever suas opiniões pessoais sobre a pesquisa, *feedbacks* e/ou sugestões.

Figura 59: Respostas da questão 9.

Neste espaço escreva opiniões pessoais sobre a pesquisa, *feedbacks* e/ou sugestões.

7 respostas

Noice. 👍

Não sei

achei bacana participar, é bom que novas formas de apresentação de conteúdo estão sendo pensadas pra fugir do convencional e interessar mais os alunos.

gostei da facilidade de acesso, o tempo adicional para resolução das perguntas com professor e o incentivo ao estudo, porém, poderiam ser realizadas durante a semana e em um período de tempo mais curto para não tornar-se cansativo

o cenário perfeito seria a alternativa do uso da tecnologia nas aulas de análise combinatória, com a didática do professor felipe, junto à equipamentos de qualidade favoráveis à aula e à aprendizagem.

tive muita facilidade com o conteúdo pela maneira que foi passado

Sor ta voando, evoluindo cada semana

Fonte: própria do autor

A partir das respostas dessa última questão, pôde-se avaliar que os estudantes consideraram a participação na pesquisa e a metodologia aplicada positiva para o seu aprendizado de análise combinatória. Cabe o destaque aos comentários que enfatizam o material e apresentação que estruturaram a pesquisa, dando ênfase para a utilização de

tecnologias digitais para o ensino de matemática, sobretudo o conteúdo de análise combinatória, método esse que se mostrou até como novidade de acordo com uma das observações. As respostas do último questionamento também revelaram que a utilização das tecnologias digitais pode proporcionar novos mecanismos de aprendizado, conforme descrito por Kenski (2012), e contribuir para o desenvolvimento de um novo olhar para os problemas matemáticos, como Goldenberg (2000) afirmou.

Portanto, de acordo com os levantamentos, avaliações e *feedbacks* dos participantes da pesquisa, avalia-se que a proposta elaborada conseguiu convergir para as ideias e hipóteses de conseguir combinar a didática em sala de aula com o uso de tecnologias digitais para o ensino de matemática, sobretudo, dos conceitos relacionados à análise combinatória.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de responder à pergunta diretriz “Quais são as potencialidades da utilização de diferentes recursos digitais para a introdução à análise combinatória?”, no presente trabalho, aplicou-se uma sequência de atividades na qual pudesse integrar o uso de tecnologias digitais e a aprendizagem de matemática e, a partir disso, objetivou identificar as potencialidades desses recursos tecnológicos para as aulas de um curso preparatório de vestibular.

A pesquisa foi realizada em um total de três encontros com estudantes de uma turma de pré-vestibular privado de Porto Alegre do turno da noite. Dois destes encontros foram destinados às aulas presenciais de 40 minutos cada para abordar o conteúdo e o terceiro encontro foi destinado a uma aula *online* de 90 minutos para correção da lista de exercícios e explanação de dúvidas. As aulas presenciais ministradas tiveram como recursos auxiliares as projeções de uma apresentação em slides e de *applets* que serviram para ilustrar e explorar os conceitos, além de permitir o diálogo entre a explicação do professor-autor e as respostas dos estudantes.

Portanto, esta pesquisa baseou-se no paradigma da metodologia qualitativa na qual realizou-se uma análise qualitativa do experimento realizado a partir do *feedback* dos alunos (através do formulário de respostas após os três encontros e falas durante o experimento) e o diário de campo do professor-autor. Essa ação objetivou trazer à tona - a partir do referencial teórico - as potencialidades das tecnologias digitais como recursos pedagógicos para auxiliar o professor na abordagem de análise combinatória em um contexto expositivo e dialogado.

A partir dos dados coletados durante a pesquisa e sob à luz do referencial teórico, pôde-se inferir que a sequência de atividades e o material didático elaborado conseguiram explorar os potenciais das tecnologias digitais como recursos didáticos no ensino de análise combinatória. No que se refere ao uso dos recursos digitais em si, eles trouxeram uma maior dinamicidade às aulas, otimizando o tempo de trabalho (uma necessidade inerente ao contexto da pesquisa) e ajudando a ilustrar os problemas de contagem. Além disso, no que diz respeito ao aprendizado do conteúdo, inferimos que os estudantes passaram a desenvolver raciocínio combinatório e, a partir das auto-avaliações dos estudantes, a abordagem mostrou-se eficiente para a resolução dos exercícios. Além disso, o uso das tecnologias digitais escolhidas para a sequência didática mostrou-se importante para complementar as falas do professor-autor durante as explicações e, também, para a construção do pensamento matemático dos alunos. Destacamos também que o encontro *online* mostrou sua eficiência, pois proporcionou uma aula de forma remota, indicando que a tecnologia digital pode ser

uma aliada para facilitar o acesso à educação, desde que estejamos atentos aos contextos educacionais aos quais ela se aplica.

Mesmo com os diversos benefícios apontados, vale destacar aquilo que se mostrou ineficaz nesta pesquisa. Primeiramente tratando do cenário, realçamos que o tempo destinado aos períodos de aula são curtos, fazendo com que a apresentação dos conteúdos fique mais enxuta - apesar da sequência didática embasada nas tecnologias digitais terem otimizado o tempo - e assim o trabalho de construção do raciocínio combinatório precisa ser mais “corrido”, podendo se tornar um empecilho para o aprendizado. Outro ponto é sobre a aula *online* ministrada no Google Meet[®], que se mostrou menos atrativa para os estudantes. A partir dos seus *feedbacks*, conclui-se que os mesmos se sentem em uma “zona de conforto” durante os encontros *onlines* e possuem uma maior tendência à distração. Também vale destacar o uso do jogo *Mastermind* através de um miniaplicativo no Scratch[®], a dinâmica planejada não se mostrou eficaz refletida pelo baixo engajamento e interesse da turma pelo jogo. Contudo, destacamos que estas limitações ocorreram neste cenário de pesquisa, o que sugere novas investigações em outros contextos e cenários.

Pode-se considerar a possibilidade de aplicar a sequência de atividades em uma turma com mais tempo de aula, seja com mais horas/aula ou com mais períodos semanais e assim, conseqüentemente, poder aprofundar a abordagem sobre os conceitos de Análise Combinatória, possibilitar mais tempo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, e utilizar mais problemas voltados a questões de vestibulares e ENEM que exijam a utilização deste tipo de raciocínio. Também pode-se avaliar que, trabalhar com outra turma com horários mais flexíveis, poderia flexibilizar a escolha de uma data mais adequada para o encontro *online* destinado à correção da lista de exercícios e esclarecimento de dúvidas.

Conclui-se que a presente pesquisa cumpriu com seus objetivos e se mostrou efetiva, bem planejada e executada dentro das condições do cenário apresentado. A utilização do Google Presentation[®], GeoGebra[®] e Scratch[®] em sala de aula pôde contribuir para o trabalho (trazendo dinamicidade e imersão nos conceitos trabalhados), para o aprendizado dos estudantes (desencadeando o desenvolvimento do raciocínio combinatório) e para as falas do professor-autor (fazendo com que a didática fosse melhor contemplada). Além disso, a utilização do Google Meet[®] e OpenBoard[®] na aula remota mostraram-se como facilitadores para a educação a distância onde, devido às suas funcionalidades, foi possível contornar inviabilidades de espaço físico e horários.

Portanto, pode-se inferir que o presente trabalho explorou as potencialidades do uso de diferentes tecnologias digitais como recursos didáticos para a introdução à análise

combinatória e o desenvolvimento do pensamento combinatório em um contexto de pré-vestibular.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular (BNCC). Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 14 set. 2023.

BRASIL. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e Suas Tecnologias. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 14 set. 2023.

TRACTENBERG, L. Motivação para o estudo da docência colaborativa online: um novo território a explorar. In: CONGRESSO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA (ABED), 13, 2007, Curitiba, PR. Anais... Curitiba: ABED, 2007. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2007/tc/562007122423AM.pdf>. Acesso em 27 abr. 2022.

SOUSA, J. F. de. Uso do Geogebra no ensino da Matemática. 2018. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 12 dez. 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/2482>. Acesso em: 16 ago. 2022.

BASSO, M.; RODRIGUES NOTARE, M. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. RENOTE, Porto Alegre, v. 13, n. 2, 2015. DOI: 10.22456/1679-1916.61432. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61432>. Acesso em: 16 ago. 2022.

LOPES, M. M. Contribuições do software geogebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013/matematica_artigos/artigo_maria_maroni_lopes.pdf. Acesso em: 29 set. 2022.

TEIXEIRA, D. A. de O. .; NASCIMENTO, F. L. . ENSINO REMOTO: O USO DO GOOGLE MEET NA PANDEMIA DA COVID-19. Boletim de Conjuntura (BOCA), Boa Vista, v. 7, n. 19, p. 44–61, 2021. DOI: 10.5281/zenodo.5028436. Disponível em:

<https://revista.ioles.com.br/boca/index.php/revista/article/view/374>. Acesso em: 23 maio. 2023.

GRAVINA, M. A., BASSO, M. V. A., Mídias Digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A., BÚRIGO, E. Z., BASSO, M.V.A., GARCIA, V.C.V. (org.) Matemática, Mídias Digitais e Didática - tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro2-matematica_midiasdigitais_didatica.pdf. Acesso em 18 jul. 2023

PESSOA, C. A. D. S.; BORBA, R. E. D. S. R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 1, n. 1, p. 1-22, 2010. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/31781/>. Acesso em: 25 jul. 2023.

SILVA, J. F. G.; SPINILLO, A. G. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes (CO). In: XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática. 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/993/0. Acesso em 31 jul. 2023.

KENSKI, V. M. Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação. 8ª ed. Campinas, SP: Papyrus, 2012.

CAMARGO, F.; DAROS, T. A sala de aula inovadora: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre, RS: Penso, 2018.

MORGADO, A. C. D. O. *et al.* Análise Combinatória e Probabilidade. 9ª ed. Rio de Janeiro, RJ: GRAFTEX Comunicação Visual, 2006.

APÊNDICE A



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
 INSTITUTO DE MATEMÁTICA
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
 Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
 Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
 e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br



Termo de Assentimento

Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Aluno(a),

Você está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa AS POTENCIALIDADES DO USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO DE CONCEITOS RELACIONADOS À ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA UMA TURMA DE PRÉ-VESTIBULAR. Você foi escolhido(a) pois está matriculado(a) no Conceito Vestibulares no turno da noite e é aluno(a) do Prof. Felipe Pereira Brandão.

A pesquisa está sendo desenvolvida pelo pesquisador Felipe Pereira Brandão, o qual é estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Prof^a. Dr^a. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem você poderá contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (XX) XXXX-XXXX ou e-mail xxxx@xxxx.

O objetivo desta pesquisa é avaliar as potencialidades do uso de diferentes tecnologias em sala de aula para o ensino de conceitos relacionados à análise combinatória.

Para isto, solicitamos sua especial colaboração na participação da pesquisa, a qual ocorrerá por meio de formulário escrito e por meio de participação nas aulas, em que seu trabalho, sua participação, suas discussões com os colegas e suas produções serão analisadas, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Estima-se que sejam investidas 3 horas para a realização das aulas referentes às tarefas propostas.

O uso das informações decorridas de sua participação (produção escrita/gravação em áudio) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico. No caso de fotos e filmagem obtidas durante sua participação, elas também serão utilizadas exclusivamente em atividades acadêmicas, sem identificação. Todas as informações fornecidas por você serão armazenadas sob responsabilidade do(a) pesquisador(a) por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Com relação aos riscos da pesquisa, poderá haver algum desconforto ou acanhamento frente a uma aula com uso de recursos tecnológicos. Ao mesmo tempo, você receberá todo o apoio do professor/pesquisador no sentido de minimizar estes riscos, tais como esclarecimento de dúvidas, sigilo das respostas, uso do anonimato no formulário, etc.

Já com relação aos benefícios da pesquisa, você terá a oportunidade de: participar de um projeto único e pioneiro na universidade além aprender o conteúdo através de novos recursos e metodologias de ensino e esclarecer dúvidas pertinentes ao conteúdo e às tecnologias.

Sua participação não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. Você poderá recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para você se essa for sua decisão. Sua colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado.

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone (XX) XXXX-XXXX ou pelo e-mail xxxx@xxxx. Estou disponível para prestar informações adicionais.

Caso tenha dúvidas acerca de procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na xxxx e que tem como fone (XX) XXXX-XXXX e email xxxx@xxxx.

Obrigada pela sua colaboração.

Eu, _____, declaro por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada AS POTENCIALIDADES DO USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS PARA O ENSINO DE CONCEITOS RELACIONADOS À ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA UMA TURMA DE PRÉ-VESTIBULAR, desenvolvida pelo pesquisador Felipe Pereira Brandão.

Autorização do Uso de Imagem:

• SIM, autorizo a divulgação de minha imagem, com uso de efeitos para a não identificação da minha pessoa, em atividades acadêmicas.

• NÃO autorizo a divulgação de minha imagem.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

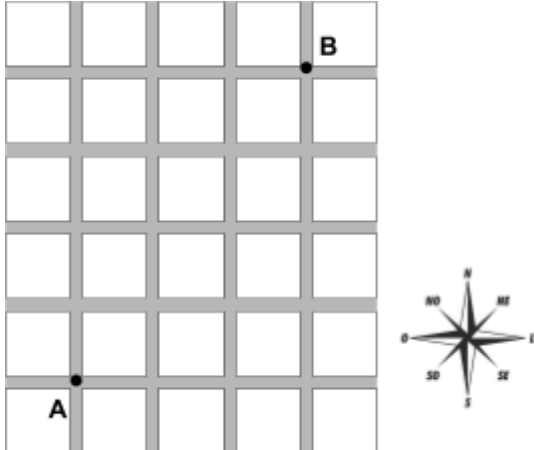
Assinatura do(a) Aluno(a): _____

Assinatura do(a) Pesquisador(a): _____

Assinatura do(a) Orientador(a): _____

APÊNDICE B

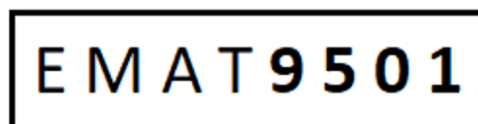
Lista de Exercícios - Análise Combinatória

- Quantas palavras de 5 letras podem ser feitas com um alfabeto de 26 letras?
 - $26!$
 - $5!$
 - $\frac{26!}{5!}$
 - 26^5
 - 5^{26}
- Quantas palavras com menos de 5 letras podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras? (“EEE” é considerado como uma palavra de 3 letras).
 - $26^4 + 26^3 + 26^2 + 26^1$
 - $26^4 \cdot 26^3 \cdot 26^2 \cdot 26^1$
 - $26^5 \cdot 26^4 \cdot 26^3 \cdot 26^2$
 - 26^5
 - $\frac{26!}{5!}$
- Cinco amigos irão viajar em um carro. Se apenas três deles podem dirigir o veículo, de quantas maneiras diferentes eles podem ocupar os lugares do veículo?
 - $\frac{4!}{3!}$
 - $3! \cdot 4!$
 - $3 \cdot 4!$
 - $5!$
 - $\frac{5!}{3!}$
- A palavra “ESTOJOS” possui quantos anagramas?
 - 2 830
 - 5 040
 - 24
 - 210
 - 1 260
- Na figura abaixo, que representa parte do mapa de uma cidade, as ruas são indicadas com a cor cinza.
 

Pedro sai de carro do ponto A e vai até o ponto B, dirigindo-se sempre para o norte (N) ou para o leste (L), realizando, desse modo, trajetórias de comprimento mínimo. Quantas são as possíveis trajetórias que Pedro pode fazer?

 - 28
 - 42
 - 210
 - 120
 - 35
- (FGV-SP) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR de modo que as letras A e R fiquem juntas em qualquer ordem?
 - 360
 - 720
 - 1 080
 - 1 440
 - 1 800
- (ENEM 2020/Digital) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @ . O e-mail terá a forma *****@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu”

- apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail `eduardo@site.com.br` já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado. De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?
- 59
 - 60
 - 118
 - 119
 - 120
8. Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:
- 720
 - 600
 - 500
 - 320
 - 120
9. Uma pessoa decidiu organizar a sua estante de livros. Ela possui 7 livros, todos distintos entre si, sendo que 2 possuem capas na cor azul, 3 possuem capas na cor amarela e os demais possuem capa na cor preta. De quantas maneiras distintas ela pode ordenar os seus livros de modo que livros de uma mesma cor fiquem sempre lado a lado?
- 24 maneiras
 - 36 maneiras
 - 72 maneiras
 - 120 maneiras
 - 210 maneiras
10. (UNICAMP 2020) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a:
- 48
 - 72
 - 96
 - 120
 - 210
11. (UFRGS 2018) Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, a quantidade de números divisíveis por 5 que se pode obter é
- 12
 - 14
 - 22
 - 24
 - 26
12. (UFRGS 2023) Uma biblioteca está elaborando etiquetas de identificação para os livros do acervo de tal forma que, em cada etiqueta, são usadas quatro letras distintas, de um alfabeto de 26 letras, e quatro algarismos distintos de 0 a 9.



A figura abaixo mostra um exemplo de modelo de etiqueta produzida.

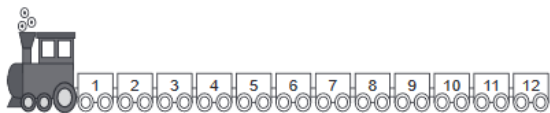
Análise a alternativa que apresenta o número total de etiquetas distintas produzidas pela biblioteca:

- $26 + 10$
- $26 \cdot 10$
- $A_{26,4} \cdot A_{10,4}$
- $A_{26,4} + A_{10,4}$
- $10A_{26,4} + 26A_{10,4}$

13. (PUCRS 2012) Uma companhia de teatro lírico é formada por cinco sopranos e seis tenores. Para uma das cenas de uma ópera, o diretor precisa de cinco cantores, sendo três sopranos e dois tenores. Então, o número de possibilidades para a escolha dos participantes desta cena é

- a. 150
- b. 462
- c. 1 800
- d. 7 200
- e. 55 440

14. (ENEM 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de igual formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

- a. $C_{12,4} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,3} \cdot C_{12,2}$
- b. $C_{12,4} + C_{8,3} + C_{5,3} + C_{2,2}$
- c. $C_{12,4} \cdot 2 \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,2}$
- d. $C_{12,4} + 2 \cdot C_{12,3} + C_{12,2}$
- e. $C_{12,4} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$

15. (UFRGS 2019) Uma caixa contém 32 esferas numeradas de 1 a 32. O número de maneiras distintas de retirar 3 esferas da caixa, ordenadas como primeira segunda e terceira, em que a esfera com o número 8 seja uma das 3 sorteadas é:

- a. 27
- b. 96
- c. 2 000
- d. 2 018
- e. 2 790

16. Um time de futsal é formado por uma goleira e quatro jogadoras de linha. No plantel de um time, um técnico tem à disposição 3 goleiras e 10 jogadoras de linha. Quantos times distintos o treinador pode escalar considerando que as jogadoras de linha não possuem posição fixa?

- a. 286
- b. 630
- c. 332
- d. 213
- e. 660

17. Quantos arranjos diferentes de duas cartas podem ser retirados de um baralho de 52 cartas?

- a. 1 980
- b. 2 128
- c. 2 652
- d. 3 100
- e. 4 136

18. (ENEM - adaptada) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 3 tipos de tecidos diferentes e 6 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão:

- a. $A_6^3 \cdot A_{15}^6$
- b. $A_6^3 + A_{15}^6$
- c. $C_6^3 \cdot C_{15}^6$
- d. $C_6^3 + C_{15}^6$
- e. $P_6^3 \cdot P_{15}^6$

19. Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas com um grupo de 20 pessoas?

- a. 4 845
- b. 116 280
- c. 24
- d. 5 080
- e. 16!

20. Uma equipe de basquete consiste em cinco jogadores. Quantos times diferentes de jogadores podem ser escolhidos a partir de um grupo de 15 jogadores?

- a. $A_{15}^5 = \frac{15!}{10!}$
- b. $P_{15}^5 = \frac{15!}{5!}$
- c. $C_{15}^5 = \frac{15!}{10! 5!}$
- d. $2 \cdot C_{15}^5 = 2 \cdot \frac{15!}{10! 5!}$
- e. $5 \cdot A_{15}^5 = 5 \cdot \frac{15!}{10!}$

21. Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

- a. 6 720
- b. 336
- c. 56
- d. 120
- e. 30

22. Para fazer uma aposta simples da Lotofácil, devem-se marcar 15 números entre os 25 que constam no volante. De quantas maneiras é possível preencher uma aposta simples em um cartão da Lotofácil?

- a. $\frac{25!}{15! 10!}$
- b. $\frac{25!}{15!}$
- c. 25!
- d. $\frac{25!}{10!}$
- e. 10!

23. (ENEM 2017) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



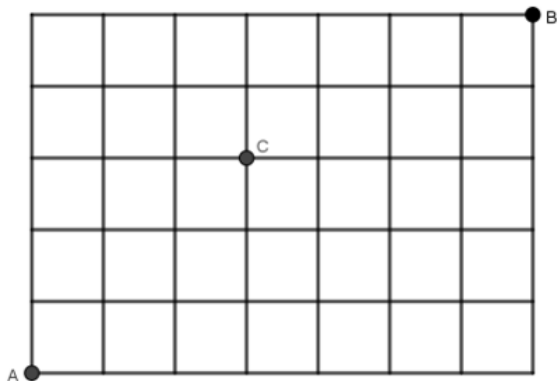
JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

- a. 15
- b. 30
- c. 108
- d. 360
- e. 972

24. (UFRGS 2020) Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é

- 28
 - 35
 - 100
 - 300
 - 792
25. (ENEM 2020) Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

- $9!$
- $4! 5!$
- $2 \times 4! 5!$
- $\frac{9!}{2}$
- $\frac{4! 5!}{2}$

Gabarito:

- 1: c; 2: a; 3: c; 4: e; 5: e;
 6: d; 7: d; 8: b; 9: a; 10: b;
 11: d; 12: c; 13: a; 14: e; 15: e;
 16: b; 17: c; 18: c; 19: a; 20: c;
 21: c; 22: a; 23: e; 24: ; 25: e;

APÊNDICE C



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA



Porto Alegre, 12/05/2023.

Prezado Diretor [REDACTED]

Do Conceito Vestibulares

O acadêmico Felipe Pereira Brandão é estudante regularmente matriculado no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do currículo do curso, o aluno está desenvolvendo uma pesquisa sobre o uso de tecnologias digitais para o ensino de análise combinatória, para a conclusão de seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o qual é exigido para que possa adquirir o título de Licenciado em Matemática.

Os objetivos do trabalho, estritamente acadêmicos, em linhas gerais, consistem em avaliar as potencialidades do uso de diferentes tecnologias em sala de aula para o ensino de conceitos relacionados à análise combinatória. Neste sentido, torna-se importante proceder à coleta de dados para futuras análises e obtenção dos resultados relacionados com a aprendizagem da Matemática. Por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os participantes dessa pesquisa e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte contato: [REDACTED]

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

[REDACTED]

Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Professora do Instituto de Matemática e Estatística/IME-UFRGS

[REDACTED]

Diretor do [REDACTED]