UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Princípios Variacionais para Dimensão Métrica Média de uma Ação de Semigrupo

THOMAS ÉRICO JACOBUS

PORTO ALEGRE, NOVEMBRO 2023

Tese submetida por Thomas Érico Jacobus[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Paulo Varandas (IME-UFBA, FCT-CMUP)
Prof. Dr. Wescley Bonomo (PPGMAT/UFES)
Prof. Dr. Lucas Backes (PPGMat/UFRGS)
Prof. Dr. Fagner Bernardini Rodrigues (Orientador, PPGMat/UFRGS)

Data de Defesa: 22 de dezembro de 2023.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) no período 2019-2023.

Resumo. Neste trabalho mostramos que a dimensão métrica média de uma ação de semigrupo satisfaz três princípios variacionais: (a) em nosso primeiro resultado consideramos a função de entropia local para uma ação de semigrupo livre e mostramos que a dimensão métrica média satisfaz um princípio variacional em termos dessa função; (b) a segunda trata de uma definição da entropia de Katok para uma ação de semigrupo livre introduzida em [11]; (c) em nosso terceiro resultado, baseado na definição de entropia de Shapira, introduzida em [33] para uma única dinâmica, estendemos a definição de entropia de Shapira para uma ação de semigrupo. Obtemos também uma fórmula que relaciona a entropia de Shapira de uma ação de semigrupo livre e a entropia de Shapira do *skew product* induzido; (d) em nosso quarto resultado obtemos um princípio variacional envolvendo a dimensão métrica média e a entropia de Shapira de uma ação de semigrupo livre; (e) nos dois últimos teoremas estendemos a definição de dimensão média métrica e de entropia topológica quando temos um semigrupo gerado finitamente inspirado na definição de entropia topológica introduzida em [21]. Neste contexto obtemos um princípio variacional parcial para a dimensão métrica média. Nossos resultados são inspirados nos obtidos por [27], [39], [35] e [34].

Palavras-chave: dimensão métrica média; princípio variacional; ações de semigrupo livres.

Abstract. In this work we show that the metric mean dimension of a semigroup action satisfies three variational principles: (a) in our first result we consider the local entropy function for a free semigroup action and show that the metric mean dimension satisfies a variational principle in terms of such function; (b) the second one is about a definition of Katok's entropy for a free semigroup action introduced in [11]; (c) in our third result, based on the definition of Shapira's entropy, introduced in [33] for a single dynamic, we extend the definition of Shapira's entropy for a semigroup action. We also obtain a formula which relates the Shapira's entropy of a free semigroup action and the Shapira's entropy of the induced skew product; (d) in our fourth result we obtain a variational principle involving the metric mean dimension and the Shapira's entropy of a free semigroup action; (e) in the last two theorems we extend the definition of metric mean dimension and the topological entropy when we have a finitely generated semigroup inspired in the definition of topological entropy introduced in [21]. In this context we obtain a partial variational principle for the metric mean dimension. Our results are inspired in the ones obtained by [27], [39], [35] and [34].

Keywords: metric mean dimension; princípio variacional; free semigroup action.

AGRADECIMENTOS

Sou muito grato pela minha família, meu orientador, professores e colegas que me ajudaram nesta jornada e pelo auxílio financeiro da Capes que tornou possível a realização deste doutorado e ao CNPq pela bolsa de mestrado.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Uma das noções mais importantes em Sistemas Dinâmicos é a de *entropia topológica*. É um invariante topológico e, a grosso modo, mede o quão caótico é um sistema. Em particular, é uma ferramenta eficaz para decidir se dois sistemas são ou não conjugados.

Um resultado importante ao se tratar de entropia topológica é o Princípio Variacional que diz que, para uma aplicação contínua $f : X \mapsto X$ em um espaço métrico compacto X, vale que a entropia topológica pode ser calculada através do supremo das entropias métrica das medidas de probabilidade que são invariantes pela aplicação f, mais precisamente

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}(X, f)\},$$

onde $h_\mu(f)$ denota a entropia métrica de f com respeito a medida μ e $\mathcal{M}(X, f)$ denota o espaço das medidas de probabilidades invariantes por f. Tal relação vincula as informações estatísticas do sistema às topológicas e, por exemplo, encontrar condições necessárias para que o supremo seja alcançado em alguma probabilidade, ou seja garantir a existência de estados de equilíbrio mostra-se como um problema muito interessante, com aplicações em física matemática e que tem sido objeto de estudo de diversos autores [24, 13, 5, 4, 15, 16, 30].

No entanto, existem muitos sistemas com entropia topológica infinita (por exemplo, eles formam um conjunto C^0-genérico no espaço de homeomorfismos de uma variedade compacta [40] com dimensão maior que um) e assim, neste contexto, a entropia não é uma ferramenta útil para classificar sistemas dinâmicos em classes de conjugação. Assim, para estudar estes tipos de sistemas, novas grandezas dinâmicas são necessárias e um exemplo de tal grandeza é a *dimensão métrica média*. Para um sistema dinâmico $f : (X, d) \mapsto (X, d)$ a dimensão métrica média denotada por $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(X, f, d)$, foi introduzida em [26] e refina o conceito de entropia topológica para dinâmicas com entropia topológica infinita. De fato, ela pode ser pensada como uma fusão das definições de entropia topológica e dimensão de Minkowski e tem diversas aplicações, como no estudo de problemas de mergulho [20]. É importante enfatizar que todo sistema com entropia topológica finita tem dimensão métrica média igual a zero e, além disso, ela depende da métrica escolhida d, ou seja, a dimensão métrica média não é um invariante topológico, mas sim um invariante geométrico. Porém, para um espaço topológico metrizável X, $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(X, f) = \inf_{d'} \mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(X, f, d')$ é invariante sob conjugação topológica, onde o ínfimo é tomado sobre todas as métricas em X que induzem a topologia do espaço. Por outro lado, foi mostrado em [27], [34], [39] e mais recentemente [7] que a dimensão métrica média está fortemente relacionada com o comportamento ergódico do sistema.

No intuito de generalizar o conceito de dinâmica, alguns autores passaram a considerar um conjunto (que pode ser infinito) de aplicações contínuas atuando em espaço métrico compacto

(X, d), denotado aqui por $G_1 = \{f_i : X \to X\}_i$, e então tentar entender os efeitos da ação do semigrupo gerado por G_1 no espaço ambiente (ver, por exemplo [6, 3, 21, 8, 9, 10, 26] e referência lá citadas). Para tanto diversas noções precisaram ser introduzidas e entre tais, a noção de entropia topológica para uma ação de grupo ou semigrupo. Assim como para o caso de sistemas dinâmicos clássicos é possível garantir que a entropia topológica de uma ação de semigrupo pode ser obtida a partir de um princípio variacional e que, como toda aplicação contínua gera um semigrupo, a entropia neste contexto pode ser infinita.

Em [11] os autores consideraram o espaço métrico compacto $(Y^{\mathbb{N}}, D)$ e (X, d), onde (Y, d_Y) é um espaço métrico compacto e D é a métrica produto induzida por d_Y. Neste contexto, eles introduziram a noção de dimensão métrica média para uma ação de semigrupo livre e provaram que para uma certa classe de passeios aleatórios, os induzidos por medidas de probabilidades homogêneas em Y, é possível obter um tipo de fórmula de Bufetov (veja [6]) para a entropia topológica de uma ação de semigrupo livre.

Nosso objetivo neste trabalho é mostrar que a dimensão métrica média de uma ação de semigrupo pode ser obtida a partir de um princípio variacional. Nossa inspiração reside nos trabalhos [27], [34], [39] e [7], onde em [27] os autores desenvolvem um princípio variacional entre a teoria da dimensão média e a teoria da taxa de distorção, mostrando que se o sistema dinâmico possui a "marker property", então a dimensão média coincide com o valor mínimo da dimensão taxa de distorção inferior e superior, onde o mínimo é tomado entre todas as métricas compatíveis com a topologia do espaço. Em [34], o autor prova vários princípios variacionais para a dimensão métrica média, onde no primeiro princípio variacional ele mostra que a dimensão métrica média superior e inferior de um sistema dinâmico topológico estão relacionadas com a entropia de Shapira. No segundo princípio variacional, o autor estabelece uma relação entre as dimensões métricas médias inferior e superior com o conceito de entropia de Katok e no terceiro resultado ele consegue estabelecer mais um princípio variacional para a dimensão métrica média em termos da entropia de Brin-Katok.

Em [39], os autores provaram o seguinte princípio variacional para a dimensão métrica média de um sistema dinâmico:

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\left(X, f, d\right) = \lim_{\delta \to 0} \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\sup_{\mu \in M(X,f)} h_\mu(\varepsilon, f, \delta)}{|\log \varepsilon|},$$

mostrando que a dimensão métrica média superior está relacionada com a função

$$h_\mu(\varepsilon, f, \delta) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(n, \varepsilon, \delta),$$

onde μ é uma medida de probabilidade f-invariante, $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, 1)$ e $N_\mu(n, \varepsilon, \delta)$ denota o menor número de (n, ε)-bolas dinâmicas necessárias para cobrir um conjunto de medida μ estritamente maior que $1 - \delta$. Um fato importante sobre essa função é que no contexto de X espaço métrico compacto e $f : X \mapsto X$ contínua, para qualquer μ ergódica e f-invariante vale que $h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\mu(\varepsilon, f, \delta)$ para qualquer $\delta \in (0, 1)$, onde $h_\mu(f)$ denota a entropia métrica de μ.

Em [7], os autores introduziram o conceito de dimensão métrica média superior de uma família a um parâmetro de funções de pressão escalonadas e determinaram um princípio variacional quando consideramos a dinâmica um homeomorfismo tal que a dimensão métrica média superior é finita.

Nosso primeiro resultado tem como objetivo escrever a dimensão métrica média de uma ação de semigrupo em termos da função entropia que, para cada $x \in X$, nos dá um valor $h_d(x, \mathbb{P})$

que também está relacionado com a entropia topológica de uma ação de semigrupo, $h_{top}(\mathbb{S})$. O segundo resultado estabelece uma relação entre dimensão métrica média superior de uma ação e a uma generalização de entropia de Katok para o contexto de ações de semigrupo livre, onde em um primeiro momento mostramos uma desigualdade e, posteriormente, uma igualdade quando estamos avaliando um grupo de medidas com características específicas. Nosso terceiro resultado mostra que a entropia topológica de uma cobertura pode ser calculada por meio de um princípio variacional que utilize e entropia de Shapira para o cálculo e o quarto resultado obtemos um princípio variacional envolvendo a dimensão métrica média e a entropia de Shapira para uma ação de semigrupo livre. Finalmente estendemos os conceitos de entropia métrica superior local com respeito a uma medida para um definição relacionada com a dimensão métrica média que aparece em [3], obtendo um princípio variacional parcial e, quando a medida é fortemente G-homogênea obtemos uma igualdade entre a dimensão métrica média local da medida e a dimensão métrica média da ação de semigrupo.

Esta Tese foi organizada para apresentar inicialmente as principais definições e resultados, depois relembrar alguns fatos e definições sobre dimensão de contagem de caixas, medidas homogêneas e medidas G-homogêneas.

Capítulo 2

Definições e Principais Resultados

Inicialmente, vamos relembrar os principais conceitos a serem utilizados neste trabalho e, além disso, descreveremos os sistemas com os quais vamos trabalhar.

2.1 Dimensão métrica média de uma aplicação

Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Dada uma função contínua $f\colon X \to X$ e um inteiro não negativo n, definimos a métrica dinâmica $d_n\colon X \times X \to [0, \infty)$ por

$$d_n(x, z) = \max \Big\{ d(x, z),\, d(f(x), f(z)),\, \ldots,\, d(f^n(x), f^n(z)) \Big\}$$

que gera a mesma topologia de d. Fixado $\varepsilon > 0$, dizemos que um conjunto $E \subset X$ é (n, ε)–separado por f se $d_n(x, z) > \varepsilon$ para todo $x, z \in E$ com $x \neq z$. No caso particular em que $n = 1$, vamos chamar o conjunto de ε–separado. Denotamos por $s(f, n, \varepsilon)$ a cardinalidade máxima de todos subconjuntos de X que são (n, ε)–separados por f. Como X é compacto, o número $s(f, n, \varepsilon)$ é finito para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Dizemos que $R \subset X$ é um conjunto (n, ε)–gerador se para qualquer $x \in X$ existe $z \in R$ tal que $d_n(x, z) < \varepsilon$. Quando $n = 1$, dizemos que o conjunto é ε–gerador. Consideramos $b(f, n, \varepsilon)$ a cardinalidade mínima dos subconjuntos de X que são (n, ε)–geradores.

Definição 2.1. *A* dimensão métrica média inferior *de f com respeito a métrica fixada d é dada por*

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, f, d \Big) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{h(f, \varepsilon)}{|\log \varepsilon|}$$

onde

$$h(f, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s(f, n, \varepsilon).$$

Analogamente, a dimensão métrica média superior *de f com respeito a d é o limite*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, f, d \Big) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{h(f, \varepsilon)}{|\log \varepsilon|}.$$

Claramente, $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, f, d \Big) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, f, d \Big) = 0$ sempre que a entropia topológica de f, dada por $h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} h(f, \varepsilon)$, é finita.

Os próximos resultados são encontrados em [39] e nos dão exemplos em que a dimensão métrica média consegue fornecer, de certa forma, a dimensão em que estamos variando cada entrada no espaço das sequências, por exemplo $[0,1]^{\mathbb{Z}}$, quando consideramos a aplicação *shift* σ (deslocamento) agindo neste espaço, onde $\sigma : [0,1]^{\mathbb{Z}} \mapsto [0,1]^{\mathbb{Z}}$ é tal que para cada $x = (\ldots, x_{-1}, \overline{x}_0, x_1, \ldots) \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$ associa $\sigma(x) = (\ldots, x_{-1}, x_0, \overline{x}_1, x_2, \ldots)$, ou seja, é a aplicação tal que transladamos em uma posição a sequência $x \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$.

Proposição 2.1.1. *A dimensão métrica média superior da aplicação shift em* $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ *com a métrica* $D(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} d(x_k, y_k)$ *é dada por*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}([0,1]^{\mathbb{Z}}, D, T) = 1,$$

onde $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$, $y = (\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots)$ *e* d *é a distância usual em* $[0,1]$.

Analogamente, para o caso em que consideramos o espaço $([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}$ em lugar de $[0,1]^{\mathbb{Z}}$,

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}, D, T) = d,$$

onde d é um inteiro não negativo, mostrando que de certa forma a dimensão métrica média está conseguindo nos fornecer uma noção de dimensão de cada entrada no espaço das sequências $([0,1]^d)^{\mathbb{Z}}$. O próximo resultado, encontrado em [39], é uma generalização do resultado anterior, mostrando uma relação entre a dimensão métrica média e a dimensão de contagem de caixa superior, *Upper Box Dimension*, a ser definia mais adiante no texto.

Teorema 2.2. *Seja* (Y, D) *espaço métrico compacto e* T *a aplicação shift em* $Y^{\mathbb{Z}}$. *Então*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(Y^{\mathbb{Z}}, D, T) = \overline{\dim}_B Y,$$

onde $\overline{\dim}_B Y$ *denota a dimensão de contagem de caixa superior do conjunto* Y.

2.2 Ações de semigrupo livre compactamente gerados por funções contínuas

Sejam (X,d) e (Y,d_Y) espaços métricos compactos e $(g_y)_{y\in Y}$ uma família de aplicações contínuas $g_y \colon X \to X$. Denotamos por G o semigrupo livre que possui o conjunto $G_1 = \{g_y \colon \ y \in Y\}$ como gerador, onde a ação de semigrupo $\circ$ é a composição de aplicações. Seja $\mathbb{S}$ a ação de semigrupo livre induzida

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{S}\colon & G \times X & \to & X \\ & (g,x) & \mapsto & g(x) \end{array}$$

e denotamos por T_G o *skew product* associado por

$$\begin{array}{rccc} T_G\colon & Y^{\mathbb{N}} \times X & \to & Y^{\mathbb{N}} \times X \\ & (\omega, x) & \mapsto & \Big(\sigma(\omega), g_{\omega_1}(x)\Big), \end{array} \tag{2.2.1}$$

onde $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ é um elemento do espaço de sequências unilaterais $Y^{\mathbb{N}}$ e σ denota a aplicação *shift* agindo no espaço métrico compacto $(Y^{\mathbb{N}}, D)$, onde

$$D(\omega, \theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_Y(\omega_n, \theta_n), \ \text{ para } \omega, \theta \in Y^{\mathbb{N}}. \tag{2.2.2}$$

Se para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in Y^{\mathbb{N}}$ escrevermos

$$f_\omega^n = g_{\omega_n} \, \cdots \, g_{\omega_1},$$

então

$$T_G^n(\omega, x) = \Big(\sigma^n(\omega), f_\omega^n(x)\Big).$$

Considerando o conjunto $G_1^* = G_1 \setminus \{id\}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n^* denota o espaço das concatenações de n elementos em G_1^*. Analogamente, definimos $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} G_n$, onde $G_0 = \{id\}$ e $\underline{g} \in G_n$ se, e somente se, $\underline{g} = g_{\omega_n} \, \cdots \, g_{\omega_2} \, g_{\omega_1}$, com $g_{\omega_j} \in G_1$ (para simplificar a notação, vamos utilizar $g_j \, g_i$ em substituição da composição $g_j \circ g_i$). No que segue, vamos assumir que o conjunto gerador G_1 é minimal, significando que nenhuma função $g_y \in G_1$, para $y \in Y$, pode ser expressa como composição dos geradores restantes. Para citar um elemento $\underline{g}$ de G_n^*, escrevemos $|\underline{g}| = n$ ao invés de $\underline{g} \in G_n^*$. Cada elemento $\underline{g}$ de G_n pode ser visto como uma palavra que origina das concatenações de n elementos em G_1. Além disso, diferentes concatenações podem gerar o mesmo elemento em G. No entanto, nos cálculos a serem feitos, consideraremos as diferentes concatenações em vez dos elementos em G que são criados por elas.

2.3 Passeios aleatórios

Um passeio aleatório $\mathbb{P}$ em $Y^{\mathbb{N}}$ é uma medida boreliana de probabilidade no espaço das sequências que são invariantes pela aplicação *shift* σ. Por exemplo, podemos considerar um subconjunto finito $F = \{p_1, \dots, p_k\}$ de Y, um vetor de probabilidade $(a_1, \cdots, a_k)$ (isto é, uma seleção de números positivos a_i tais que $\sum_{i=1}^k a_i = 1$), a medida de probabilidade $\nu = \sum_{i=1}^k a_i \, \delta_{p_i}$ em F e o produto de medidas de Borel $\mathbb{P}_\nu = \nu^{\mathbb{N}}$ em $Y^{\mathbb{N}}$. Tal medida $\mathbb{P}_\nu$ pode ser chamada uma *medida de Bernoulli*, que é dita *simétrica* se $a_i = \frac{1}{k}$ para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$, neste caso, denotamos a medida por $\mathbb{P}_k$. Se Y é um grupo de Lie, um passeio aleatório simétrico natural é dado por $\nu^{\mathbb{N}}$ onde ν é a medida de Haar. Denotamos por $\mathscr{P}(Y^{\mathbb{N}})$ o espaço das medidas de probabilidade de Borel em $Y^{\mathbb{N}}$ e por $\mathscr{P}_B(Y^{\mathbb{N}})$ seu subconjunto de elementos de Bernoulli. Ficará claro, posteriormente, que o papel de cada passeio aleatório é apontar uma característica particular da dinâmica, aqui definida em termos de entropia topológica (definição em Seção 2.4) ou dimensão métrica média (definição em Seção 2.6)

2.4 Entropia topológica de uma ação $\mathbb{S}$

Dado $\varepsilon > 0$ e $\underline{g} := g_{\omega_n} \dots g_{\omega_2} \, g_{\omega_1} \in G_n$, a n–ésima bola dinâmica $B_n(x, \underline{g}, \varepsilon)$ é o conjunto

$$B_n(x, \underline{g}, \varepsilon) := \Big\{ z \in X : d(\underline{g}_j(z), \underline{g}_j(x)) \leqslant \varepsilon, \ \forall \, 0 \leqslant j \leqslant n \Big\}$$

onde, para todo $0 \leqslant j \leqslant n$, a notação $\underline{g}_j$ significa a concatenação $g_{\omega_j} \dots g_{\omega_2} \, g_{\omega_1}$ em G_j, e $\underline{g}_0 = id$. Note que esta é uma bola clássica com respeito a métrica dinâmica $d_{\underline{g}}$ definida por

$$d_{\underline{g}}(x, z) := \max_{0 \leqslant j \leqslant n} d(\underline{g}_j(x), \underline{g}_j(z)). \tag{2.4.1}$$

Observe também que tanto a bola dinâmica quanto a métrica dinâmica dependem da concatenação subjacente de geradores $g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}$ e não do elemento do semigrupo $\underline{g}$, uma vez que este pode ter distintas representações.

Seja $\underline{g} = g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1} \in G_n$, dizemos que um conjunto $K \subset X$ é $(\underline{g}, n, \varepsilon)$*–separado* se $d_{\underline{g}}(x,z) > \varepsilon$ para quaisquer dois elementos distintos $x, z \in K$. A maior cardinalidade de qualquer subconjunto $(\underline{g}, n, \varepsilon)$–separado em X é denotada por $s(\underline{g}, n, \varepsilon)$ (ou, equivalentemente, $s(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon)$). Um conjunto $K \subset X$ é dito $(\underline{g}, n, \varepsilon)$*–gerador* se para todo $x \in X$ existe $k \in K$ tal que $d_{\underline{g}}(x,k) \leqslant \varepsilon$. A menor cardinalidade de qualquer subconjunto $(\underline{g}, n, \varepsilon)$–gerador em X é denotado por $b(\underline{g}, n, \varepsilon)$ (ou $b(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon)$).

Definição 2.3. *A* entropia topológica da ação de semigrupo $\mathbb{S}$ *com respeito a um conjunto fixado de geradores G_1 e um passeio aleatório $\mathbb{P}$ em $Y^{\mathbb{N}}$ é dado por*

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{S}, \mathbb{P}) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} s(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon) \, d\,\mathbb{P}(\omega)$$

onde $\omega = \omega_1 \, \omega_2 \cdots \omega_n \cdots$. A entropia topológica da ação de semigrupo $\mathbb{S}$ *é, então, definida por*

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{S}) = \sup_{\mathbb{P}} \mathrm{h_{top}}(\mathbb{S}, \mathbb{P}).$$

Observamos que o semigrupo $\mathbb{S}$ pode ter múltiplos conjuntos geradores e as propriedades dinâmicas ou ergódicas (como a entropia topológica) dependem do conjunto gerador escolhido. Mais informações sobre esses conceitos no caso de ações de semigrupos livres geradas finitamente podem ser lidas em [8, 9, 10].

2.5 Função entropia

Nesta seção vamos apresentar uma generalização da definição de função entropia local dada em [34], que tem sua definição dada para uma única dinâmica e, no nosso caso, desenvolvemos uma definição para ações de semigrupo.

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \mapsto X$ uma aplicação contínua. Para cada $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, a função entropia local encontrada em [34] é dada por:

$$H_d(x, \varepsilon) = \inf\{S(K, \varepsilon) : \text{K é uma vizinhança fechada de } x\},$$

onde

$$S(K, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(K, \varepsilon)$$

e $s_n(K, \varepsilon)$ denota a maior cardinalidade de um conjunto (n, ε)-separado de K.

Para nossa definição consideramos também (X, d) um espaço métrico compacto. Para cada $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, definimos

$$h_d(x, \varepsilon, \mathbb{P}) = \inf\{B(K, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) : K \text{ é uma vizinhança compacta de } x\},$$

onde

$$B(K, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\int_{Y^{\mathbb{N}}} b(K, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, \varepsilon) \; d\mathbb{P}(\omega) \right),$$

e $b(K, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, \varepsilon)$ denota a menor cardinalidade de um conjunto $(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, \varepsilon)$-gerador de K. Como $h_d(x, \varepsilon, \mathbb{P})$ cresce quando ε decresce para zero, está bem definido o seguinte limite

$$h_d(x, \mathbb{P}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} h_d(x, \varepsilon, \mathbb{P}) \tag{2.5.1}$$

que é menor ou igual a $\mathrm{h_{top}}(\mathbb{S}, \mathbb{P})$.

Definição 2.4. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \to X$ a ação de semigrupo livre contínua finitamente gerada. A função $\mathrm{h_{top}} : X \to [0, \mathrm{h_{top}}(\mathbb{S}, \mathbb{P})]$, $x \mapsto \mathrm{h_{top}}(x, \mathbb{P})$ é chamada a função entropia de $\mathbb{S}$ com respeito ao passeio aleatório $\mathbb{P}$ em $Y^{\mathbb{N}}$ e é definida como segue:*

Desde que $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) \leq S(K, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) \leq B(K, \mathbb{S}, \varepsilon/2, \mathbb{P})$, onde

$$S(K, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\int_{Y^{\mathbb{N}}} s(K, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, \varepsilon) \, d\mathbb{P}(\omega) \right),$$

e $s(K, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, \varepsilon)$ denota a maior cardinalidade de um conjunto $(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, \varepsilon)$-separado de K. Então

$$\mathrm{h_{top}}(x, \mathbb{P}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(K, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) : K \text{ é uma vizinhança compacta de } x\}.$$

2.6 Dimensão métrica média de uma ação de semigrupo

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $\mathbb{S}$ a ação de semigrupo livre induzida em (X, d) por uma família de aplicações contínuas $(g_y \colon X \to X)_{y \in Y}$. A seguinte definição para o contexto de semigrupo foi introduzida por [12].

Definição 2.5. *A* dimensão métrica média superior e inferior de uma ação de semigrupo $\mathbb{S}$ *em (X, d) com respeito a um conjunto de geradores fixado G_1 e um passeio aleatório $\mathbb{P}$ em $Y^{\mathbb{N}}$ são dados respectivamente por*

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P} \right) &= \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{h(X, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P})}{-\log \varepsilon} \\ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P} \right) &= \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{h(X, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P})}{-\log \varepsilon} \end{aligned}$$

onde

$$h(X, \mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} s(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon) \, d\mathbb{P}(\omega). \tag{2.6.1}$$

O próximo exemplo pode ser encontrado em [11] e consegue mostrar uma relação entre a dimensão métrica média superior de uma ação de semigrupo e a dimensão métrica média de uma aplicação por meio do seguinte corolário encontrado em [11]:

Corolário 2.6. *Suponha que $Y = [0, 1]^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}_{Leb} \right) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(([0, 1]^k)^{\mathbb{N}} \times X, T_G, D \times d, \right) - k.$$

Exemplo 2.7. *Considerando S^1 o círculo unitário. Seja $\mathbb{S}$ a ação de semigrupo gerada pela família de rotações $(R_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ em S^1 dada por $z \in S^1 \mapsto R_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z$. Denotamos por d a métrica euclidiana em S^1, T_G o skew product induzido em $[0, 1]^{\mathbb{N}} \times S^1$ e o passeio aleatório $\mathbb{P}_{Leb} = Leb^{\mathbb{N}}$ em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Então,*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left([0, 1]^{\mathbb{N}} \times S^1, T_G, D \times d, \right) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(S^1, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}_{Leb} \right) + 1.$$

Além disso, os autores mostraram que

$$h_{top}(\mathbb{S}, \mathbb{P}_{Leb}) = 0 = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(S^1, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}_{Leb} \right).$$

Logo, isto implica que $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left([0, 1]^{\mathbb{N}} \times S^1, T_G, D \times d, \right) = 1.$

Agora, vamos apresentar um resultado que é uma das motivações do nosso teorema. Em [34], o autor relaciona a dimensão métrica média com sua definição de função entropia local da seguinte forma:

Teorema 2.8. *Seja (X,d,f) um sistema dinâmico topológico. Então*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\Big(X,d,f\Big)=\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\sup_{x\in X}H_d(x,\varepsilon)}{-\log\varepsilon}$$

Com base neste teorema, o nosso primeiro resultado mostra que a dimensão métrica média de uma ação de semigrupo pode ser calculado em termos da função entropia. O que mostra que a dimensão métrica média representa uma extensão natural do conceito de entropia topológica já que um resultado análogo vale para tal invariante (ver [11]).

Teorema A. *Seja (X,d) um espaço métrico compacto e $\mathbb{S}$ a ação de semigrupo livre induzida em (X,d) pela família de aplicações contínuas $(g_y\colon X\to X)_{y\in Y}$. Então*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\Big(X,\mathbb{S},d,\mathbb{P}\Big)=\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\sup_{x\in X}h_d(x,\varepsilon,\mathbb{P})}{-\log\varepsilon},$$

para todo $\mathbb{P}\in\mathcal{M}(Y^{\mathbb{N}})$.

Demonstração. É claro das definições de função entropia que $h_d(x,\varepsilon,\mathbb{P})\leq h(X,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})$, para todo $x\in X$, implicando que

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\Big(X,\mathbb{S},d,\mathbb{P}\Big)\geq\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\sup_{x\in X}h_d(x,\varepsilon,\mathbb{P})}{-\log\varepsilon}.$$

Para provar a desigualdade contrária, inicialmente note que, para um valor fixado $\varepsilon>0$, se $X=\cup_{i=1}^k F_i$, união finita de conjuntos fechados, então $B(X,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})\leq\max_i B(F_i,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})$. Neste caso, a cobertura de X por bolas fechadas e raio 1, denotamos por $\mathcal{B}_1=\{B_1^1,\ldots,B_{\ell_1}^1\}$ tal cobertura. Seja $B_{j_1}^1$ a bola fechada nesta cobertura tal que o máximo ocorre, ou seja, $B(B_{j_1}^1,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})=\max_i B(B_{j_i}^1,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})$. Agora, cubra $B_{j_1}^1$ por uma família finita de bolas fechadas de raio no máximo $\frac{1}{2}$ denotada por $\mathcal{B}_2=\{B_1^2,\ldots,B_{\ell_2}^2\}$. Novamente, existe $B_{j_2}^2\in\mathcal{B}_2$ para a qual $B(X,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})\leq B(B_{j_2}^2,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})$. Seguindo por indução, para cada $k\in\mathbb{N}$, existe uma bola fechada de raio no máximo $\frac{1}{k}$ de modo que $B(X,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})\leq B(B_{j_k}^k,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})$. Além disso, pela construção anterior temos uma sequência de bolas fechadas aninhadas $\{B_{j_k}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cujo diâmetro tende a zero. Neste caso, existe $\bar{x}=\cap_{k\in\mathbb{N}}B_{j_k}^k$ e para qualquer vizinhança fechada F de $\bar{x}$ temos $B_{j_k}^k\subset F$, para $k\in\mathbb{N}$ suficientemente grande. Logo,

$$B(F,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})\geq B(B_{j_k}^k,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})\geq B(X,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P}),$$

implicando que, pela definição de $h_d(\bar{x},\varepsilon,\mathbb{P})$, $h_d(\bar{x},\varepsilon,\mathbb{P})\geq B(X,\mathbb{S},\varepsilon,\mathbb{P})$. Consequentemente,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\sup_{x\in X}h_d(x,\varepsilon,\mathbb{P})}{-\log\varepsilon}\geq\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\Big(X,\mathbb{S},d,\mathbb{P}\Big),$$

finalizando a prova do Teorema A.

□

Capítulo 3

Entropia de Katok

Antes de enunciarmos nosso próximo resultado principal, precisamos introduzir a noção de medida homogênea e Dimensão de Contagem de Caixa Superior.

3.1 Dimensão de Contagem de Caixa Superior

Seja (Y, d_Y) um espaço métrico compacto.

Definição 3.1. *A* dimensão de contagem de caixa superior *de (Y, d_Y) é dada por*

$$\overline{\dim}_B Y = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N(\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}, \tag{3.1.1}$$

onde $N(\varepsilon)$ denota a cardinalidade máxima de um conjunto ε–separado em (Y, d_Y).

Consideremos agora uma medida de probabilidade de Borel ν em Y.

Definição 3.2. *A* dimensão de contagem de caixa superior *de ν é dada por*

$$\overline{\dim}_B\, \nu = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \Big\{ \overline{\dim}_B\, Z\colon \;\; Z \subset Y \quad e \quad \nu(Z) \geqslant 1 - \delta \Big\}.$$

Vale ressaltar que, embora a dimensão de contagem de caixa superior de um conjunto Z coincida com a dimensão de contagem de caixa superior de seu fecho, a dimensão de contagem de caixa superior de uma medida de probabilidade pretende estimar o tamanho de subconjuntos em vez de todo o suporte da medida (isto é, o menor subconjunto fechado com medida total). Na verdade, pode acontecer que $\overline{\dim}_B\, \nu < \overline{\dim}_B\, (\text{supp}\ \nu)$ (cf. Exemplo 7.1 em [37]). Indicamos ao leitor [18, 37] para considerações em teoria da dimensão.

3.1.1 Medidas Homogêneas

Seja ν uma medida de probabilidade boreliana em um espaço métrico compacto (Y, d_Y). Uma medida equilibrada deve atribuir a mesma probabilidade para quaisquer duas bolas com o mesmo raio, mas esta é, em geral, uma exigência muito forte. Em vez disso, enfraquecemos esta exigência da seguinte forma:

Definição 3.3. *Dizemos que ν é* homogênea *se existe $L > 0$ tal que*

$$\nu\big(B(y_1, 2\varepsilon)\big) \leqslant L\, \nu\big(B(y_2, \varepsilon)\big) \qquad \forall\, y_1,\, y_2 \in \text{supp}\ \nu \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{3.1.2}$$

Por exemplo, a medida de Lebesgue em $[0,1]$, medidas atômicas e medidas de probabilidade absolutamente contínuas em relação às últimas, com densidades delimitadas de zero e infinito, são exemplos de medidas homogêneas de probabilidade. Denotamos por $\mathcal{H}_Y$ o conjunto de tais medidas homogêneas de probabilidade borelianas em Y.

Por definição, toda medida homogênea satisfaz

$$\nu\big(B(y,2\varepsilon)\big) \leqslant L\,\nu\big(B(y,\varepsilon)\big) \qquad \forall\, y \in \operatorname{supp}\nu \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{3.1.3}$$

e, como $\nu\big(B(y_1,\varepsilon)\big) \leqslant \nu\big(B(y_1,2\varepsilon)\big)$,

$$\nu\big(B(y_1,\varepsilon)\big) \leqslant L\,\nu\big(B(y_2,\varepsilon)\big) \qquad \forall\, y_1,\, y_2 \in \operatorname{supp}\nu \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{3.1.4}$$

Uma medida ν satisfazendo (3.1.3) é dita ser uma *medida de duplicação.*

Para uma discussão sobre as condições em Y que garantem a existência de medidas homogêneas e outras relações entre a homogeneidade e a propriedade de duplicação, remetemos o leitor para [3, Section 4] e referências nele contidas.

3.1.2 Entropia de Katok para ações de semigrupos livres e princípio variacional

Inicialmente vamos fazer uma breve introdução da definição de Entropia de Katok. Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $f : X \mapsto X$ uma aplicação contínua. Para qualquer medida μ boreliana de probabilidade, ergódica e invariante por f e $0 < \delta < 1$, a fórmula para a Entropia de Katok é dada por

$$h_\mu^K(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{\log N_\mu(n,\varepsilon,\delta)}{n} = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{\log N_\mu(n,\varepsilon,\delta)}{n},$$

onde $N_\mu(n,\varepsilon,\delta)$ denota o número mínimo de bolas dinâmicas a tempo n com raio ε cuja união é um conjunto de medida μ maior um igual que $1-\delta$.

Em [10] os autores consideraram uma extensão da entropia de Katok quando o sistema dinâmico em questão é uma ação de semigrupo livre.

Definição 3.4. *Dada uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ em $Y^{\mathbb{N}}$ e uma medida de Borel de probabilidade $\nu \in \mathcal{M}(X)$ ($\mathcal{M}(X)$ é o conjunto das medidas de probabilidade em X), $\delta \in (0,1)$ e $\varepsilon > 0$, definimos*

$$h_\nu^K(\mathbb{S},\varepsilon,\delta) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{Y^{\mathbb{N}}} s_\nu(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1},n,\varepsilon,\delta)\,d\mathbb{P}(\omega), \tag{3.1.5}$$

onde $\omega = \omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n\cdots$,

$$s_\nu(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1},n,\varepsilon,\delta) = \inf_{\{E\subseteq X\,:\,\nu(E)>1-\delta\}} s(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1},n,\varepsilon,E)$$

e $s(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1},n,\varepsilon,E)$ denota a cardinalidade máxima de um conjunto $(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1},n,\varepsilon)$–separado em E.

A *entropia de uma ação de semigrupo $\mathbb{S}$ com respeito a ν e $\mathbb{P}$* é definida por

$$h_\nu^K(\mathbb{S},\mathbb{P}) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{Y^{\mathbb{N}}} s_\nu(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1},n,\varepsilon,\delta)\,d\mathbb{P}(\omega). \tag{3.1.6}$$

Note que o limite anterior está bem definido devido a monotonicidade da função

$$(\varepsilon, \delta) \mapsto \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} s_\nu(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

nas variáveis ε e δ. Além disso, se o conjunto de geradores é $G_1 = \{Id, f\}$, relembramos da definição de Katok para uma única dinâmica f.

3.1.3 Princípio variacional para a dimensão métrica média de uma ação de semigrupo livre envolvendo a entropia de Katok

Nesta subseção vamos apresentar um resultado encontrado em [34] para uma dinâmica e generalizá-lo para o contexto de ações de semigrupo. Em [34] o autor prova que para um espaço métrico compacto (X, d) e uma aplicação contínua $f : X \to X$, vale o seguinte princípio variacional para a dimensão métrica média:

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, f, d, \mathbb{P}\Big) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sup\limits_{\nu \in \mathcal{E}_f(X)} h_\nu^K(X, f, \varepsilon, \delta)}{-\log \varepsilon}, \text{ para todo } \delta \in (0, 1),$$

onde $\mathcal{E}_f(X)$ denota o conjunto das medidas de probabilidade ergódicas em X. No caso em que o sistema dinâmico é dado por uma ação de semigrupo livre, o último resultado pode ser estendido para:

Teorema B. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $\mathbb{S}$ a ação de semigrupo livre induzida em (X, d) por uma família de aplicações contínuas $(g_y \colon X \to X)_{y \in Y}$. Neste caso*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}\Big) \geq \lim_{\delta \to 0} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sup\limits_{\nu \in \mathcal{M}(X)} h_\nu^K(\mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon, \delta)}{-\log \varepsilon},$$

para todo $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(Y^{\mathbb{N}})$. Se $\mathbb{P} = \gamma^{\mathbb{N}}$, com γ medida de probabilidade homogênea em Y e $\mathrm{supp}(\gamma) = Y$*, então*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}\Big) = \lim_{\delta \to 0} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sup\limits_{\nu \in \mathcal{M}(X)} h_\nu^K(\mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon, \delta)}{-\log \varepsilon}.$$

Demonstração. Primeiramente, note que para qualquer $\nu \in \mathcal{M}(X)$ e $\delta > 0$, $\nu(X) > 1 - \delta$ e, para todo $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $\omega \in Y^{\mathbb{N}}$,

$$s(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon) \geq s_\nu(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta).$$

isto implica que, para qualquer $\nu \in \mathcal{M}(X)$,

$$h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon) \geq h_\nu^K(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon, \delta).$$

Consequentemente,

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}\Big) \geq \lim_{\delta \to 0} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sup\limits_{\nu \in \mathcal{M}(X)} h_\nu^K(\mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon, \delta)}{-\log \varepsilon}. \tag{3.1.7}$$

Para segunda parte, notamos que a definição 3.4 pode ser dada em termos dos conjuntos geradores. Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$, um inteiro positivo n e $\underline{g} = g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}$, dizemos que o subconjunto A de $E \subset X$ é um conjunto $(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, E)-$gerador se para qualquer $x \in E$ existe $y \in A$ de modo que $d_{\underline{g}}(x, y) < \varepsilon$. Pela compacidade de X, dado ε, n e $\underline{g}$ como antes, existe um conjunto finito $(\underline{g}, n, \varepsilon, E)-$gerador. Dado $\delta > 0$ e

$$b_\nu(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) = \inf_{\{E \subseteq X \,:\, \nu(E) > 1-\delta\}} b(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, E),$$

não é difícil ver que

$$h_\nu^K(\mathbb{S}, \mathbb{P}) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} b_\nu(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) \, d\mathbb{P}(\omega).$$

Agora, seja $\mathbb{P} = \gamma^{\mathbb{N}}$ com $\gamma \in \mathcal{H}_Y$ e considere $\nu \in \mathcal{M}(X)$. Fixado $\varepsilon > 0$ e considere um inteiro positivo $k = k(\varepsilon) \geq 1$ de modo que $\sum_{i \geq k} \frac{diam(Y)}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Escolha um conjunto $\frac{\varepsilon}{4}$-separado de cardinalidade máxima $E \subset Z = \text{supp}(\gamma)$, cuja cardinalidade é denotada por $N_Z(\varepsilon)$. Pela definição de dimensão de contagem de caixa superior,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{N_Z(\varepsilon)}{-\log \varepsilon} = \overline{\dim}_B(Z).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada ponto $(p_1, \dots, p_{n+k}) \in E^{n+k}$, considere o cilindro

$$C_{i_1 \dots i_{n+k}} = \left\{ \omega \in Y^{\mathbb{N}} : \omega_i \in B\left(p_i, \frac{\varepsilon}{4}\right), \text{ para } i = 1, \dots, n+k \right\}. \tag{3.1.8}$$

Note que a coleção de cilindros definida acima cobre $Z^{\mathbb{N}}$ e tem diâmetro menor que ε. Logo, segue que

$$\begin{aligned} &\int_{Y^{\mathbb{N}}} b_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) \, d\mathbb{P} \\ &\geq \sum_{\underline{i} = (i_1 \dots i_{n+k})} \min_{\omega \in C_{\underline{i}} \cap Z^{\mathbb{N}}} b_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) \times \min_{\underline{i}} \mathbb{P}(C_{\underline{i}} \cap Z^{\mathbb{N}}). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Agora, notamos que a imagem de $b_\nu(\mathbb{S}, \cdot, n, \varepsilon, \delta) : C_{\underline{i}} \to \mathbb{Z}_+$ tem um mínimo em $\mathbb{Z}_+$ e tal mínimo é alcançado por algum $\omega^{(\underline{i})} \in C_{\underline{i}}$. Então, juntamente com (3.1.9) e o fato que $\mathbb{P}$ é um produto de medidas,

$$\begin{aligned} &\int_{Y^{\mathbb{N}}} b_\nu(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\geqslant \Big[\sum_{\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{n+K})} \min_{\omega \in C_{\underline{i}} \cap Z^{\mathbb{N}}} b_\nu(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) \Big] \times \min_{\underline{i}} \mathbb{P}(C_{\underline{i}} \cap Z^{\mathbb{N}}) \\ &\geqslant \sum_{\underline{i}} b_\nu(g_{\omega^{(\underline{i})}}, n, \varepsilon, \delta) \times \min_{\underline{i}} \prod_{j=0}^{n+k-1} \gamma\Big(B(p_{i_j}, \frac{\varepsilon}{4}) \cap Z\Big). \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Afirmação 1. $\sum_{\underline{i}} b_\nu(g_{\omega^{(\underline{i})}}, n, \varepsilon, \delta) \geqslant b_\mu(T_G |_{Z^{\mathbb{N}} \times X}, n, \varepsilon, \delta)$, para $\mu \in \Pi(\sigma, \nu)_{erg}$.

De fato, se $\{x_1^{(i)}, \dots, x_{b(g_{\omega^{(i)}}, n, \varepsilon)}\}$ é um conjunto $(g_{\omega^{(i)}}, n, \varepsilon)$–gerador para um subconjunto $\overline{Z} \subset Z$, satisfazendo $\nu(\overline{Z}) \geq 1 - \delta$, com menor cardinalidade, então

$$\bigcup_{\underline{i}} \left\{ \left(\omega^{(\underline{i})}, x_1^{(\underline{i})}\right), \dots, \left(\omega^{(\underline{i})}, x_{b(g_{\omega^{(i)}}, n, \varepsilon)}^{(\underline{i})}\right) \right\}$$

é um conjunto (T_G, n, ε)–gerador para $Y^{\mathbb{N}} \times \overline{Z}$ e $\mu(Y^{\mathbb{N}} \times \overline{Z}) = \nu(\overline{Z}) \geq 1 - \delta$.
Afirmação 2. Existe $L > 0$, dado pela homogeneidade de γ, de modo que

$$\min_{\underline{i}} \prod_{j=0}^{n+k-1} \gamma\Big(B(p_{i_j}, \frac{\varepsilon}{4})\Big) \geqslant \left(\frac{1}{L^2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{N_Z(\varepsilon)}\right)^{n+k}.$$

De fato, devido à homogeneidade γ, implicando que, para todo $q \in \operatorname{supp} \nu$, e p_{i_j} e todo $\underline{i}$,

$$\gamma\Big(B(p_{i_j}, \varepsilon)\Big) \geqslant \frac{1}{L}\, \gamma\Big(B(q, \varepsilon)\Big) \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

e, do fato que como $\bigcup_{e \in E} B(e, \frac{\varepsilon}{4}) = Z$,

$$1 = \gamma\left(\bigcup_{e \in E} B(e, \frac{\varepsilon}{4})\right) \leqslant \sum_{e \in E} \gamma\Big(B(e, \frac{\varepsilon}{4})\Big) \leqslant N_Z(\varepsilon)\, L\, \gamma\Big(B(q, \frac{\varepsilon}{4})\Big).$$

Portanto,

$$\gamma\Big(B(q, \frac{\varepsilon}{4})\Big) \geqslant \frac{1}{L} \frac{1}{N_Z(\varepsilon)}.$$

Pelas Afirmações 1, 2 e a equação 3.1.10, obtemos que

$$\int_{Y^{\mathbb{N}}} b_\nu(g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta)\, d\mathbb{P}(\omega) \geq b_\mu(T_G\,|_{Z^{\mathbb{N}} \times X}, n, \varepsilon, \delta) \left(\frac{1}{L^2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{N_Z(\varepsilon)}\right)^{n+k}$$

implicando que

$$h^K_\nu(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon, \delta) \geq \sup_{\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{erg}} h^K_\mu(Y^{\mathbb{N}} \times X, T_G, \varepsilon, \delta) - \log N_Z(\varepsilon).$$

Desde que $Z = \operatorname{supp}(\gamma) = Y$, por [34, Theorem 4.2] e [10, Theorem A],

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \to 0} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sup_{\nu \in \mathcal{M}(X)} h^K_\nu(\mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon, \delta)}{-\log \varepsilon} &\geq \lim_{\delta \to 0} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\sup_{\mu \in \mathcal{E}_{T_G}(Y^{\mathbb{N}} \times X)} h^K_\mu(T_G, \varepsilon, \delta)}{-\log \varepsilon} - \overline{\dim}_B Y \\
&= \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(Y^{\mathbb{N}} \times X, T_G, D \times d\Big) - \overline{\dim}_B Y \\
&= \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}\Big).
\end{aligned}$$

Por (3.1.7) obtemos a igualdade desejada e concluímos a prova.

□

Observação 3.5. *Notamos que a hipótese supp$(\gamma) = Y$ pode ser substituída pela hipótese de que o conjunto supp$(\gamma) \times X$ é T_G-invariante. Para chegar à mesma conclusão que no Teorema B precisamos apenas combinar a prova anterior à [34, Teorema 4.2] e [10, Proposição 4.2].*

Capítulo 4

Princípio Variacional envolvendo a entropia de Shapira

Neste capítulo iremos provar que a dimensão métrica média para uma ação de semigrupo livre pode ser calculada a partir de um princípio variacional que envolve a noção de entropia introduzida por Shapira em [33].

4.1 Entropia de uma cobertura aberta para uma ação de semigrupo livre

Considerando $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(Y^{\mathbb{N}})$, seja $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ uma cobertura aberta finita de X. Para cada $\omega \in Y^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{U}(\omega, n) = \left\{U_{i_0} \cap (f_\omega^1)^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap (f_\omega^{n-1})^{-1}(U_{i_{n-1}}) : U_{i_j} \in \mathcal{U}\right\}.$$

Seja $N(\mathcal{U}, w, n)$ a cardinalidade mínima de uma subcobertura de $\mathcal{U}(w, n)$. Definimos

$$\mathrm{h_{top}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \mathbb{P}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} N(\mathcal{U}, \omega, n)\ d\mathbb{P}(\omega).$$

Como consequência do teorema [38, Theorem 2.4]

$$\mathrm{h_{top}}(Y^{\mathbb{N}} \times X, \mathbb{S}, \mathbb{P}) = \sup_{\mathcal{U}} \mathrm{h_{top}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \mathbb{P}),$$

onde as coberturas abertas em consideração no supremo acima são aquelas que são finitas e têm entropia topológica finita.

4.2 Entropia de Shapira de uma ação de semigrupo

Para $\nu \in \mathcal{M}(X)$ e $\delta \in (0, 1)$, seja $N_\nu(\mathcal{U}, w, n, \delta)$ a cardinalidade mínima de uma subcobertura de $\mathcal{U}(w, n)$, a menos de um conjunto de medida ν menor que $\delta > 0$. Definimos

$$h_\nu^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \mathbb{P}) = \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} N_\nu(\mathcal{U}, \omega, n, \delta)\ d\mathbb{P}(\omega). \tag{4.2.1}$$

Chamamos de $h_\nu^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \mathbb{P})$ a *entropia métrica de uma cobertura* $\mathcal{U}$ com respeito a ν. Como

$$N_\nu(\mathcal{U}, \omega, n, \delta) \leq N(\mathcal{U}, \omega, n) \text{ para todo } \delta \in (0, 1),$$

segue que $h_\nu^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \mathbb{P}) \leq \mathrm{h_{top}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \mathbb{P})$. É importante mencionar que quando $G_1 = \{id, f\}$, nossa definição coincide com a definição clássica dada em [33].

Antes de enunciarmos nosso próximo teorema, precisamos introduzir algumas notações. Associada a uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X, seja $\tilde{\mathcal{U}} = \{[i] \times V : i = 1, \ldots, p \text{ e } V \in \mathcal{U}\}$ e, para $\nu \in \mathcal{M}(X)$, denotamos por $\Pi(\sigma, \nu)_{erg}$ o conjunto das medidas ergódicas de probabilidade e T_G-invariantes de modo que a marginal Σ_p^+ é σ-invariante e ν é a marginal em X. Dizemos que uma medida de probabilidade $\gamma \in \mathcal{M}(X \times Y)$ tem marginais μ e ν se satisfaz $\gamma(A \times Y) = \mu(A)$ e $\gamma(X \times B) = \nu(B)$ para todos $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ mensuráveis.

Agora, vamos apresentar um exemplo onde $\Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset$.

Exemplo 4.1. *Seja $X = \mathcal{S}^1$ o círculo, e consideremos $f_i : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$, onde $i = 1, 2$, dado por $f_1(x) = 2x \pmod 1$ e $f_2(x) = 3x \pmod 1$. Denotamos por G o semigrupo livre gerado por $G_1 = \{id, f_1, f_2\}$ e por $\mathbb{S}$ a ação de semigrupo livre induzida em $\mathcal{S}^1$. Se $\mathrm{Leb}_{\mathcal{S}^1}$ é a medida de Lebesgue em $\mathcal{S}^1$ e $\mathbb{P}$ é qualquer medida de probabilidade σ-ergódica, então $\mu = \mathbb{P} \times \mathrm{Leb}_{\mathcal{S}^1} \in \Pi(\sigma, \mathrm{Leb}_{\mathcal{S}^1})_{erg}$ (veja [10] para mais detalhes).*

Se consideramos um conjunto finito $G_1 = \{id, f_1, \ldots, f_p\}$ de aplicações contínuas agindo em um espaço métrico compacto X, de modo que as aplicações em G_1 admitem uma medida de probabilidade ergódica comum $\nu \in \mathcal{M}(X)$, então $\eta_{\underline{p}} \times \nu \in \Pi(\sigma, \nu)_{erg}$.

Nosso próximo resultado mostra que a entropia topológica de uma cobertura pode ser calculada por meio de um princípio variacional que faz uso da entropia de Shapira acima definida.

Teorema C. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $\mathbb{S}$ uma ação de semigrupo livre induzida em (X, d) por uma família de aplicações contínuas $(g_i \colon X \to X)_{i=1}^p$. Nas condições acima,*
(a) $\mathrm{h_{top}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \eta_{\underline{p}}) = \mathrm{h_{top}}(\tilde{\mathcal{U}}, T_G) - \log p$;
(b) $\mathrm{h_{top}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \eta_{\underline{p}}) = \sup \left\{ h_\nu^{\mathcal{S}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \eta_{\underline{p}}) : \nu \in \mathcal{M}(X) \text{ e } \Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset \right\}$,
onde $\eta_{\underline{p}} = \left(\frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p}\right)^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Tome $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{1, \ldots, p\}$, $U_{j_0}, \ldots, U_{j_{n-1}} \in \mathcal{U}$ e considere

$$\begin{aligned} &([i_0] \times U_{j_0}) \cap \left(T_G^{-1}([i_1] \times U_{j_1}\right) \cap \cdots \cap T_G^{-n}\left([i_{n-1}] \times U_{j_{n-1}}\right) \\ &= [i_0 \ldots i_{n-1}] \times \left(U_{j_0} \cap \cdots \cap (f_\omega^{n-1})^{-1}(U_{j_{n-1}})\right), \end{aligned}$$

onde ω pertence ao cilindro $[i_0 \ldots i_{n-1}]$. Se denotamos por $\mathcal{U}(\omega, n) = \{V_{j_0} \cap \cdots \cap (f_\omega^{n-1})^{-1}(V_{j_{n-1}}) : V_{j_\ell} \in \mathcal{U}\}$ a cobertura aberta de X induzida por ω, $N(\mathcal{U}, \omega, n)$ coindice com o número mínimo de conjuntos abertos de $\tilde{\mathcal{U}}^{(n)}$ necessários para cobrir $[i_0 \ldots i_{n-1}] \times X$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{h_{top}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \eta_{\underline{p}}) + \log p &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{p^n} \sum_{\underline{g} \in G_n} N(\mathcal{U}, \underline{g}, n) \right) + \log p \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(\tilde{\mathcal{U}}, T_G, n) \\ &= \mathrm{h_{top}}(\tilde{\mathcal{U}}, T_G), \end{aligned}$$

provando o item (a).

Para provar o segundo item, tomamos $\delta \in (0,1)$ e $\nu \in \mathcal{M}(X)$ de modo que $\Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset$. Para $\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{erg}$, observe que

$$\sum_{\underline{g}\in G_n} N_\nu(\mathcal{U}, \underline{g}, n, \delta) = N_\mu(\mathcal{U}, T_G, n, \delta),$$

sendo que esta igualdade vem do fato de que se

$$\sum_{\underline{g}\in G_n} N_\nu(\mathcal{U}, \underline{g}, n, \delta) > N_\mu(\mathcal{U}, T_G, n, \delta),$$

existe um cilindro $[i_0 \dots i_{n-1}]$ tal que $[i_0 \dots i_{n-1}] \times X$ é coberto por no máximo $N_\nu(\mathcal{U}, \underline{g}, n, \delta) - 1$ conjuntos abertos, onde $w = i_0 \dots i_{n-1}$. As $(\pi_X)_*(\mu) = \nu$, contradizendo a minimalidade de $N_\nu(\mathcal{U}, \underline{g}, n, \delta)$. Com isto,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\{\nu\in\mathcal{M}(X) \text{ e } \Pi(\sigma,\nu)_{erg}\neq\emptyset\}} h_\nu^S(\mathcal{U}, \mathbb{S}) \\
&= \sup_{\{\nu\in\mathcal{M}(X) \text{ e } \Pi(\sigma,\nu)_{erg}\neq\emptyset\}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{p^n} \sum_{\underline{g}\in G_n} N_\nu(\mathcal{U}, \underline{g}, n) \right) \\
&= \sup_{\mu\in\mathcal{E}_{T_G}(\Sigma_p^+\times X)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(\tilde{\mathcal{U}}, T_G, n) - \log p \\
&= \mathrm{h_{top}}(\tilde{\mathcal{U}}, T_G) - \log p \\
&= \mathrm{h_{top}}(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \eta_{\underline{p}}),
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do segundo item.

□

Como uma consequência direta do teorema C e [10] segue o seguinte resultado:

Corolário 1. *Seja (X,d) um espaço métrico compacto e $\mathbb{S}$ uma ação de semigrupo livre induzida em (X,d) por uma família de aplicações contínuas $(g_i \colon X \to X)_{i=1}^p$. Neste caso,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{h_{top}}(\mathbb{S}, \eta_{\underline{p}}) &= \sup_{\mathcal{U}} \sup_{\{\nu\in\mathcal{M}(X) \text{ e } \Pi(\sigma,\nu)_{erg}\neq\emptyset\}} h_\nu^S(\mathcal{U}, \mathbb{S}, \eta_{\underline{p}})) \\
&= \mathrm{h_{top}}(T_G) - \log p,
\end{aligned}$$

onde $\eta_{\underline{p}} = \left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)^{\mathbb{N}}$.

Em [34] foi provado que, para um espaço métrico compacto (X,d) e uma aplicação contínua $f : X \to X$,

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \Big(X, f, d\Big) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\sup_{\nu\in\mathcal{E}_f(X)} \inf_{\mathrm{diam}(\mathcal{U})\leq\varepsilon} h_\nu^S(\mathcal{U}, f)}{-\log\varepsilon},$$

No próximo teorema estendemos este resultado para ações de semigrupo livre compactamente geradas.

Teorema D. *Seja* (X, d) *o espaço métrico compacto e* $\mathbb{S}$ *a ação de semigrupo livre induzida em* (X, d) *pela família de aplicações contínuas* $(g_y \colon X \to X)_{y\in Y}$*. Se* $\mathbb{P} = \gamma^{\mathbb{N}}$*,* $\gamma \in \mathcal{M}(Y)$ *é homogênea e* $\operatorname{supp}(\gamma) = Y$*, então*

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}\Big(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}\Big) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\sup\limits_{\{\nu\in\mathcal{M}(X):\Pi(\sigma,\nu)_{erg}\neq\emptyset\}} \inf\limits_{\operatorname{diam}(\mathcal{U})\leq\varepsilon} h^S_\nu(\mathbb{S},\mathcal{U})}{-\log\varepsilon}.$$

Demonstração. Fixado $\varepsilon > 0$, seja $\mathcal{U}_0$ uma cobertura aberta de X com $\operatorname{diam}(\mathcal{U}_0) \leq \varepsilon$ e $Leb(\mathcal{U}_0) \geq \dfrac{\varepsilon}{8}$ (a existência de tal cobertura é garantida pelo [35, Lema 3.4]). Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X com diâmetro menor que $\dfrac{\varepsilon}{8}$, $\omega \in Y^{\mathbb{N}}$, como $Leb(\mathcal{U}_0) \geq \operatorname{diam}(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}(\omega, n)$ refina $\mathcal{U}_0(\omega, n)$. Isto implica que, para $\delta \in (0, 1)$, $N_\nu(\mathbb{S},\mathcal{U}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \delta) \geq N_\nu(\mathbb{S},\mathcal{U}_0, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \delta)$. Portanto, uma vez que

$$N_\nu(\mathbb{S},\mathcal{U}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \delta) \geq s_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) \geq b_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta),$$

para todo $\omega \in Y^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{Y^{\mathbb{N}}} N_\nu(\mathbb{S},\mathcal{U}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \delta)\ d\mathbb{P}(\omega) \geq \int_{Y^{\mathbb{N}}} N_\nu(\mathbb{S},\mathcal{U}_0, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \delta)\ d\mathbb{P}\\
&\geq \int_{Y^{\mathbb{N}}} s_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta)\ d\mathbb{P}\\
&\geq \int_{Y^{\mathbb{N}}} b_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta)\ d\mathbb{P} \qquad (4.2.2)\\
&\geq \sum_{\underline{i}=(i_1\dots i_{n+k})} \min_{\omega\in C_{\underline{i}}\cap Z^{\mathbb{N}}} b_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta) \times \min_{\underline{i}} \mathbb{P}(C_{\underline{i}} \cap Z^{\mathbb{N}}),
\end{aligned}$$

onde $Z = \operatorname{supp}(\gamma)$ e $C_{\underline{i}}$ denota o cilindro definido em (3.1.8). Agora, observamos que a imagem de $b_\nu(\mathbb{S}, \cdot, n, \varepsilon, \delta) : C_{\underline{i}} \to \mathbb{Z}_+$ tem um mínimo em $\mathbb{Z}_+$ e tal mínimo é obtido em algum $\omega^{(\underline{i})} \in C_{\underline{i}}$. Com isto, adaptando as afirmações 1 e 2 obtidas no teorema B juntamente com (4.2.2), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{Y^{\mathbb{N}}} N_\nu(\mathbb{S},\mathcal{U}, g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \delta)\ d\mathbb{P}(\omega) \qquad (4.2.3)\\
&\geq \int_{Y^{\mathbb{N}}} b_\nu(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta)\, d\mathbb{P}(\omega)\\
&\geqslant \left[\sum_{\underline{i}=(i_1,i_2,\dots,i_{n+K})} \min_{\omega\in C_{\underline{i}}\cap Z^{\mathbb{N}}} b_\nu(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon, \delta)\right] \times \min_{\underline{i}} \mathbb{P}(C_{\underline{i}} \cap Z^{\mathbb{N}})\\
&\geqslant \sum_{\underline{i}} b_\nu(g_{\omega^{(\underline{i})}}, n, \varepsilon, \delta)\ \times\ \min_{\underline{i}} \prod_{j=0}^{n+k-1} \gamma\Big(B(p_{i_j}, \frac{\varepsilon}{4}) \cap Z\Big)\\
&\geqslant b_\mu(T_G\,|_{Z^{\mathbb{N}}\times X}, n, \varepsilon, \delta)\ \left(\frac{1}{L^2}\right)^{n+K} \left(\frac{1}{N_Z(\varepsilon)}\right)^{n+k}\\
&\geqslant N_\mu(T_G\,|_{Z^{\mathbb{N}}\times X}, \mathcal{V}_0, n, \delta)\ \left(\frac{1}{L^2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{N_Z(\varepsilon)}\right)^{n+k}
\end{aligned}$$

onde por $g_{\omega^{(\underline{i})}}$ queremos dizer que $g_{\omega_n^{(\underline{i})}} \dots g_{\omega_1^{(\underline{i})}}$ se $\omega^{(\underline{i})}|_{[1,n]} = \omega_1^{(\underline{i})} \dots \omega_n^{(\underline{i})}$ e $\mu \in \Pi(\sigma, \nu)_{erg}$, $\mathcal{V}_0$ é uma cobertura aberta com $Leb(\mathcal{V}_0) \leq \varepsilon$ e $L > 0$ é especificada pela homogeneidade de γ e não depende de ε e n.

Neste caso, notamos que, desde que $Z = \text{supp}(\gamma) = Y$, se

$$h^S_\nu(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) := \inf_{\text{diam}(\mathcal{U}) \leq \varepsilon} h^S_\nu(\mathbb{S}, \mathcal{U}, \mathbb{P}) \text{ e } h^S(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) := \sup_{\{\nu \in \mathcal{M} : \Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset\}} h^S_\nu(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}),$$

por (4.2.3) e [34, Lema 2.3],

$$\begin{aligned} h^S(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) = \sup_{\{\nu \in \mathcal{M} : \Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset\}} h^S_\nu(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) &\geq \sup_{\mu \in \mathcal{E}(T_G)} h^S_\mu(T_G, \mathcal{V}_0) - \log N_Y(\varepsilon) \\ &= h_{\text{top}}(T_G, \mathcal{V}_0) - \log N_Y(\varepsilon) \\ &\geq h(T_G, 3\varepsilon) - \log N_Z(\varepsilon). \end{aligned}$$

Portanto, por [34, Teorema 4.2] e [10, Teorema A],

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h^S(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P})}{-\log \varepsilon} &\geqslant \overline{\text{mdim}}_{\text{M}} \left(Y^{\mathbb{N}} \times X, T_G, D \times d \right) - \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N_Y(\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \\ &= \overline{\text{mdim}}_{\text{M}} \left(Y^{\mathbb{N}} \times X, T_G, D \times d \right) - \overline{\dim}_B Y \\ &= \overline{\text{mdim}}_{\text{M}} \left(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P} \right). \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Para a desigualdade contrária, observamos que se fixamos $\varepsilon > 0$ e consideramos $\mathcal{U}_0$ de modo que $\text{diam}(\mathcal{U}_0) \leq \varepsilon$ e $Leb(\mathcal{U}_0) \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Também constatamos que

$$\begin{aligned} &\int_{Y^{\mathbb{N}}} N_\nu(\mathbb{S}, \mathcal{U}_0, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \delta) \; d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_{Y^{\mathbb{N}}} s_\nu(\mathbb{S}, Leb(\mathcal{U}_0), g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \delta) \; d\mathbb{P} \\ &\leq \sum_{\underline{i} = (i_1 \dots i_{n+k})} \left[\max_{\omega \in C_{\underline{i}} \cap Z^{\mathbb{N}}} s_\nu(\mathbb{S}, Leb(\mathcal{U}_0), g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \delta) \times \mathbb{P}(C_{\underline{i}}) \right]. \end{aligned}$$

Como a imagem de $s_\nu(\mathbb{S}, \cdot, n, Leb(\mathcal{U}_0)) : C_{\underline{i}} \to \mathbb{Z}_+$ está contida em $[0, s(T_G, n, Leb(\mathcal{U}_0))$, possui um máximo em $\mathbb{Z}_+$ e tal máximo é obtido em algum $\omega^{(\underline{i})} \in C_{\underline{i}}$. Usando o fato que γ é homogênea e a desigualdade

$$\sum_{\underline{i} = (i_1 \dots i_{n+k})} s_\nu(\mathbb{S}, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, Leb(\mathcal{U}_0), \delta) \leq s_\mu(T_G, n, Leb(\mathcal{U}_0)),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Y^{\mathbb{N}}} N_\nu(\mathbb{S}, \mathcal{U}_0, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \delta) \; d\mathbb{P}(\omega) &\leq s_\mu(T_G, n, Leb(\mathcal{U}_0)) \left(\frac{1}{N_Z(Leb(\mathcal{U}_0))} \right)^{n+K} \\ &\leq N_\mu(T_G, \mathcal{V}_0, n, \delta) \left(\frac{1}{N_Z(Leb(\mathcal{U}_0))} \right)^{n+K}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}_0$ é uma coleção finita de conjuntos abertos que cobre $Y^{\mathbb{N}} \times X$ a menos de um conjunto de medida μ menor que δ e $\dfrac{3\varepsilon}{4} \leq 3Leb(\mathcal{U}_0) = \operatorname{diam}(\mathcal{V}_0) \leq 3\varepsilon$ e $Leb(\mathcal{V}_0) \geq \dfrac{3\varepsilon}{16}$. Logo,

$$\begin{aligned}
h^S(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P}) &= \sup_{\{\nu \in \mathcal{M}(X) : \Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset\}} \inf_{\operatorname{diam}(\mathcal{U}) \leq \varepsilon} h_\nu^S(\mathbb{S}, \mathcal{U}, \mathbb{P}) \\
&\leq \sup_{\{\nu \in \mathcal{M}(X) : \Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset\}} h_\nu^S(\mathbb{S}, \mathcal{U}_0, \mathbb{P}) \\
&= \sup_{\{\nu \in \mathcal{M}(X) : \Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset\}} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int_{Y^{\mathbb{N}}} N_\nu(\mathbb{S}, \mathcal{U}_0, g_{\omega_n} \dots g_{\omega_1}, n, \delta) \; d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leq \sup_{\{\nu \in \mathcal{M}(X) : \Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset\}} \sup_{\mu \in \Pi(\sigma,\nu)} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N_\mu(T_G, \mathcal{V}_0, n, \delta) - \log N_Y(Leb(\mathcal{U}_0)) \\
&= \mathrm{h_{top}}(T_G, \mathcal{V}_0) - \log N_Y\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s(T_G, n, Leb(\mathcal{V}_0)) - \log N_Y\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s\left(T_G, n, \frac{3\varepsilon}{16}\right) - \log N_Y\left(\frac{\varepsilon}{4}\right).
\end{aligned}$$

Por isso,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h^S(\mathbb{S}, \varepsilon, \mathbb{P})}{-\log \varepsilon} &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{h\left(T_G, \frac{3\varepsilon}{16}\right)}{-\log \varepsilon} - \frac{\log N_Y\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)}{-\log \varepsilon} \right] \\
&= \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\Big(Y^{\mathbb{Y}} \times X, T_G, D \times d\Big) - \overline{\dim}_B(Y) \\
&= \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\Big(X, \mathbb{S}, d, \mathbb{P}\Big).
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Por (4.2.4) e (4.2.5), obtemos o resultado.

□

Exemplo 4.2. *Seja $X = (S^1)^{\mathbb{N}}$ com a métrica D definida em ((2.2.2)). Para $\alpha \in [0,1]$, considere a aplicacão*

$$f_1 : \omega \in X \mapsto (e^{2\pi\alpha i}\omega_1, e^{2\pi\alpha i}\omega_2, \dots)$$

e $f_2 = \sigma$ a aplicação shift *em X. Seja G o semigrupo livre gerado por $G_1 = \{Id_X, f_1, f_2\}$ e seja $\mathbb{P} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathbb{N}}$. Como f_1 é uma isometria e comuta com f_2, $s(g_\omega, n, \varepsilon) = s(f_2, m, \varepsilon)$, onde m denota o número de vezes que f_2 aparece em $\omega_{[1,\dots,n]}$, para todo $\omega \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$.*

Considere $\varepsilon > 0$ e defina $\ell = \lceil \log(4/\varepsilon) \rceil$. Neste caso, $\sum_{n > \ell} 2^{-n} \leq \varepsilon/2$. Consideramos uma cobertura aberta de $[0,1]$ dada por

$$I_k = \left(\frac{(k-1)\varepsilon}{12}, \frac{(k+1)\varepsilon}{12} \right), 0 \leq k \leq \left\lceil \frac{12}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Cada I_k tem um comprimento menor que $\varepsilon/6$. Seja $n \geq 1$, considere a seguinte cobertura aberta $[0,1]^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\{x : x_1 \in I_{k_1},\ x_2 \in I_{k_2}, \dots,\ x_{n+\ell} \in I_{k_{n+\ell}}\},\ \textit{para } 0 \leq k_1, k_2, \dots, k_{n+\ell} \leq \left\lceil \frac{12}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Cada conjunto aberto tem diâmetro menor que ε *com respeito a distância dinâmica* D_n *induzida por* f_2*. Novamente, como* f_1 *é uma isometria e comuta com* f_2 *obtemos que, para* $\omega \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ *e* m *definidas acima,*

$$b(g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}, n, \varepsilon) = b(f_2, m, \varepsilon) \leq \left(1 + \left\lceil \frac{12}{\varepsilon} \right\rceil\right)^{m+2\ell+1} = \left(1 + \left\lceil \frac{12}{\varepsilon} \right\rceil\right)^{m+2\lceil\log(4/\varepsilon)\rceil+1}$$

Então,

$$\begin{aligned} h(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, \varepsilon) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2^n} \sum_{m=1}^{n-1} b(f_2, m, \varepsilon) \right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2^n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-m)!m!} \left(1 + \left\lceil \frac{12}{\varepsilon} \right\rceil\right)^{m+2\lceil\log(4/\varepsilon)\rceil+1} \right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2^n} \frac{(1+\lceil\frac{12}{\varepsilon}\rceil)(1-(1+\lceil\frac{12}{\varepsilon}\rceil)^{n+2\lceil\log(4/\varepsilon)\rceil})}{1-(1+\lceil\frac{12}{\varepsilon}\rceil)} \right) \\ &= \log\left(1 + \left\lceil \frac{12}{\varepsilon} \right\rceil\right) - \log 2, \end{aligned}$$

implicando que $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}\Big(X, \mathbb{S}, D, \mathbb{P}\Big) \leq 1$*.*

Agora, vamos provar a desigualdade reversa. Para $k \geq 1$ *considere o conjunto* $P_k = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$*, onde* $p_i = \frac{2i-1}{2k}$*. Defina* $\lambda_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \delta_{p_i}$ *em* $[0,1]$ *e seja* $\mu_k = \lambda_k^{\mathbb{N}}$*, a medida produto em* $[0,1]^{\mathbb{N}}$*.*

Defina

$$C_{i_1,\dots,i_n} = \{x \in [0,1]^{\mathbb{N}} : x_1 = p_{i_1}, \dots, x_n = p_{i_n}\}.$$

Afirmação. Seja $r < \frac{1}{4k}$*,* $q \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *e* $\underline{g} \in G_n$ *de modo que* f_2 *aparece em* $\underline{g}$*. Neste caso, existe um único conjunto* $C_{i_1,\dots,i_m}$*, com* $1 \leq m \leq n$*, tal que*

$$\mathrm{supp}(\mu_k) \cap B_n(q, \underline{g}, r) \subset C_{i_1,\dots,i_m}.$$

Prova da afirmação. Seja $y \in \mathrm{supp}(\mu_k) \cap B_n(q, \underline{g}, r)$*. Assumimos que* $\underline{g} = g_{\omega_n}\dots g_{\omega_1}$ *e seja* $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$ *as posições na palavra finita* $\underline{g}$ *para a qual* $g_{\omega_{t_j}} = f_2$*. Por definição*

$$d(y_j, q_j) \leq D(g_{\omega_{t_j}}\dots g_{\omega_1}(y), g_{\omega_{t_j}}\dots g_{\omega_1}(q)) \leq D_{\underline{g}}(y, q) < r < \frac{1}{2k}, \tag{4.2.6}$$

para todo $j \in \{1, \dots, m\}$*. Desde que* $y \in \mathrm{supp}(\mu_k)$ *e* $y_j \in P_k$*, para* $j \in \{1, \dots, m\}$*. Pela escolha de* r *e (4.2.6) temos que para um fixado* $j \in \{1, \dots, m\}$ *existe um único* $p_{i_j} \in P_k$ *de modo que* $y_j = p_{i_j}$*. Isso garante a unicidade de* $C_{i_1,\dots,i_m}$ *e prova a afirmação.*

Agora, para r *e* $\underline{g} \in G_n$ *satisfazendo a condição da afirmação anterior,*

$$\mu_k(B_n(q, \underline{g}, r)) \leq \mu_k(C_{i_1,\dots,i_m}) = \frac{1}{k^m},$$

para todo $q \in [0,1]^{\mathbb{N}}$*. Neste caso, se* A *satisfaz* $\mu_k(A) > 1 - \delta$ *e* $A \subset \bigcup_{i=1}^{L} B_n(q^{(i)}, \underline{g}, r)$*, então*

$$1 - \delta < \mu_k(A) \leq \sum_{i=1}^{L} \mu_k(B_n(q^{(i)}, \underline{g}, r)) \leq \frac{L}{k^m},$$

implicando que $N_{\mu_k}(\underline{g}, r, \delta) \geq (1-\delta)k^m$, *para todo* $\delta \in (0,1)$. *Com isto,*

$$
\begin{aligned}
h_{\mu_k}(\mathbb{S}, \mathbb{P}, \frac{1}{2k}, \delta) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2^n} \sum_{|\underline{g}|=n} N_{\mu_k}(\underline{g}, r, \delta) \right) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(n-m)!m!} (1-\delta)k^m \right) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} (1-\delta)k^m \right) \\
&= \log k - \log 2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(X, \mathbb{S}, D, \mathbb{P} \right) &= \lim_{\delta\to 0} \limsup_{r\,\to\,0^+} \frac{\sup\limits_{\nu\in\mathcal{M}(X)} h_{\mu}(\mathbb{S}, \mathbb{P}, r, \delta)}{-\log r} \\
&\geq \lim_{\delta\to 0} \limsup_{k\to\infty} \frac{h_{\mu_k}(\mathbb{S}, \mathbb{P}, \frac{1}{2k}, \delta)}{\log 2k} \\
&= \lim_{\delta\to 0} \lim_{k\to\infty} \frac{\log k - \log 2}{\log 2k} = 1,
\end{aligned}
$$

neste caso $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}} \left(X, \mathbb{S}, D, \mathbb{P} \right) = 1$.

Capítulo 5

Dimensão métrica média para uma ação de semigrupo compactamente gerado

Neste capítulo final consideramos semigrupos compactamente gerados. Nossa intenção aqui é estender o conceito de entropia topológica introduzido em [21] para tal contexto e a partir daí motivar a necessidade de se ter uma definição de dimensão métrica média que aborde as situações em que a entropia de [21] é infinita.

5.1 Entropia de Ghys-Langevan-Walczack

Ghys, Langevin and Walczak propuseram em [21] a seguinte definição de entropia topológica de uma ação de semigrupo dada por um semigrupo G finitamente gerado: Um subconjunto E de um espaço métrico compacto (X, d_X) é (n, ε)-*pontos separados por elementos de* G se para qualquer $x \neq y$ em E existe $0 \leqslant j \leqslant n$ e $g \in G_j$ tal que $d(g(x),\, g(y)) > \varepsilon$. A entropia topológica da ação de semigrupo $\mathbb{S}$, induzido pelo semigrupo G gerado por um conjunto finito G_1 de aplicações contínuas, é dada por

$$h_{GLW}(\mathbb{S}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \varepsilon), \tag{5.1.1}$$

onde $s(n, \varepsilon)$ é a maior cardinalidade de (n, ε)-pontos separados por elementos de G_n. Note que, desde que X é compacto, $s(n, \varepsilon)$ é finito para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Além disso, a aplicação

$$\varepsilon > 0 \quad \mapsto \quad h_{GLW}(\mathbb{S}, \varepsilon) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log\, s(n, \varepsilon)$$

é monótona, logo $h_{GLW}(\mathbb{S})$ está bem definida (apesar de que depende do conjunto de geradores G_1). Esta é uma noção puramente topológica, independente de qualquer passeio aleatório fixado previamente no semigrupo. Note também que

$$\sup_{g \in G_1} \quad \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(g) \;\leqslant\; h_{GLW}(\mathbb{S}),$$

porém esta desigualdade pode ser estrita (cf. [21]).

Observação 5.1. *Notamos que $h_{GLW}(\mathbb{S})$ pode ser construída em termos de conjuntos (n,ε)-geradores ou (n,ε)-coberturas. Mais precisamente, um subconjunto F de um espaço métrico compacto (X, d_X) é (n,ε)-*gerador *se para quaisquer x em X existe $y \in F$ de modo que $d(g(x), g(y)) < \varepsilon$ para qualquer $0 \leqslant j \leqslant n$ e qualquer $g \in G_j$. Denotamos por $b(n,\varepsilon)$ a cardinalidade mínima de um conjunto (n,ε)-gerador.*

Para $n \in \mathbb{N}$ seja

$$B_n^G(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(g(x), g(y)) < \varepsilon \text{ para todo } g \in G_j,\ 0 \leq j \leq n\},$$

chamada de n-ésima bola dinâmica de centro x e raio ε, que é um subconjunto aberto de X (veja [21, 3] para mais detalhes). denotamos por $\operatorname{cov}(n,\varepsilon)$ *o númemero mínimo de bolas dinâmicas necessárias para cobrir X. É possível mostrar que*

$$\operatorname{cov}(n, 2\varepsilon) \leq b(n,\varepsilon) \leq s(n,\varepsilon),$$

implicando que $h_{GLW}(\mathbb{S})$ pode ser calculada em termos dos conjuntos (n,ε)-geradores ou (n,ε)-coberturas.

Observação 5.2. *Uma importante observação é que a definição anterior de entropia pode ser feita para semigrupos compactamente gerados. A título de comparação, vale destacar que* $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{S},\mathbb{P}) \leq h_{GLW}(\mathbb{S})$ *para um semigrupo livre compactamente gerado e um passeio aleatório $\mathbb{P}$.*

5.2 Dimensão métrica média no contexto de GLW

Como uma extensão natural para a dimensão métrica média para uma única dinâmica, podemos considerar a *GLW-dimensão métrica média superior* como

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}\Big(X, \mathbb{S}, d\Big) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h_{GLW}(\mathbb{S},\varepsilon)}{-\log \varepsilon}. \tag{5.2.1}$$

Como uma consequência direta da definição acima, para qualquer $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(Y^{\mathbb{N}})$,

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}\Big(X, \mathbb{S}, \mathbb{P}, d\Big) \leq \overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}\Big(X, \mathbb{S}, d\Big),$$

e no caso onde o conjunto gerador consiste de apenas uma dinâmica, as duas definições coincidem com a clássica.

5.3 Entropia métrica local e dimensão métrica média de uma medida

Antes de apresentarmos a noção de entropia topológica abordada em [3], precisamos introduzir o conceito de medida G-homogênea.

5.3.1 Medidas G-Homogêneas

Para um semigrupo compactamente gerado por uma família de aplicações contínuas $(g_y \colon X \to X)_{y \in Y}$ atuando em um espaço métrico, dizemos que uma medida de Borel $\nu \in \mathcal{M}(X)$ é *G-homogênea* se

(a) $\nu(K) < \infty$, para qualquer conjunto compacto $K \subset X$;

(b) existe $K_0 \subset X$ tal que $\nu(K_0) > 0$;

(c) para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\nu(B_n^G(x, \delta(\varepsilon))) \leq c \cdot \nu(B_n^G(y, \varepsilon))$$

vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e todo $x, y \in X$. No caso onde $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = A > 0$, dizemos que ν é *fortemente G-homogênea*.

Como exemplos de espaços que admitem uma medida fortemente G-homogênea, temos os seguintes espaços:
1. A forma canônica de volume dV em uma variedade Riemanniana orientada, compacta e fechada X determina uma medida fortemente G-homogênea ν se G é um grupo de isometrias finitamente gerado.
2. Se X é um grupo topológico localmente compacto, μ é uma medida invariante a direita e G é um grupo finitamente gerado por $G_1 = \{id_X, T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}, \ldots, T_p, T_p^{-1}\}$, um conjunto de homeomorfismos finitos e simétricos, então μ é fortemente G-homogênea (veja [3, Proposição 4.6]).

Para qualquer $\nu \in \mathcal{M}(X)$, a quantidade

$$h_\nu^G(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\nu^G(x, \varepsilon),$$

onde

$$h_\nu^G(x, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(B_n^G(x, \varepsilon)),$$

é chamada de *entropia métrica superior local com respeito a ν* em um ponto x. Se tomamos lim inf com respeito a n na definição acima, chamamos de *entropia métrica inferior local com respeito a ν* em um ponto x, denotada por $h_{\nu,G}(x)$. Estas quantidades foram definidas e exploradas em [3], onde o autor provou que no caso em que ν é uma medida G-homogênea $h_\nu^G(x) = h_{GLW}(\mathbb{S})$, para todo $x \in X$.

Para termos um conceito relacionado à dimensão métrica média, definimos a *dimensão métrica média superior local* como

$$\overline{\mathrm{mdim}}_\nu (x, d) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\nu^G(x, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}. \tag{5.3.1}$$

Se tomarmos lim inf em relação a ε obtemos a *dimensão métrica média inferior local*, denotada por $\underline{\mathrm{mdim}}_\nu (x, d)$.

Se, ao invés de $h_\nu^G(x, \varepsilon)$ considerarmos $h_{\nu,G}(x, \varepsilon)$ temos a *dimensão métrica média superior local inferior* e *dimensão métrica média inferior local inferior*, denotadas por $\overline{\mathrm{mdim}}'_\nu (x, d)$ e $\underline{\mathrm{mdim}}'_\nu (x, d)$, respectivamente.

Observação 5.3. *Todas as definições acima podem ser dadas em termos das bolas dinâmicas.*

No caso onde o espaço ambiente X é uma variedade orientada, ela admite uma forma de volume dV que induz uma medida de volume natural ν_v nos conjuntos de Borel, definida como

$$\nu_v(A) = \int_A dV.$$

O próximo teorema dá um tipo de princípio variacional para a dimensão métrica média de uma ação em termos da medida de volume, no caso onde G é um grupo de homeomorfismos.

Teorema E. *Seja (G, G_1) um grupo de homeomorfismos finitamente gerado de uma variedade orientada e compacta fechada (X, d). Sejam $s \in (0, \infty)$ e ν_v a forma de volume natural em X. Se*

$$\overline{\text{mdim}}_{\nu_v}(x, d) \leq s \text{ para todo } x \in X, \text{ então } \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}^{GLW}\Big(X, \mathbb{S}, d\Big) \leq s.$$

Para a prova do Teorema E precisamos relembrar a definição de dimensão métrica média de uma ação de semigrupo em um subconjunto não compacto. Este é o conteúdo da próxima subseção.

Dimensão métrica média de uma ação de semigrupo em um subconjunto não compacto

Vamos apresentar a noção de dimensão métrica média de uma ação de semigrupo em um subconjunto não compacto introduzida, no caso onde a dinâmica a ser considerada é dada por uma aplicação contínua em um espaço métrico compacto, em [14]. A definição aqui apresentada é uma ligeira adaptação daquela dada em [14] combinada com a noção de capacidades inferiores e superiores de Carathéodory introduzidas em [3].

Dado um conjunto $Z \subset X$, vamos considerar

$$m(Z, s, N, \varepsilon) = \inf_{\Gamma} \left\{ \sum_{i \in I} \exp\left(-s n_i\right) \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas $\Gamma = \{B^G_{n_i}(x_i, \varepsilon)\}_{i \in I}$ de Z com $n_i \geq N$. Também consideramos

$$m(Z, s, \varepsilon) = \lim_{N \to \infty} m(Z, s, N, \varepsilon).$$

Pode-se mostrar que (veja por exemplo [37]) que existe um certo número $s_0 \in [0, +\infty)$ tal que $m(Z, s, \varepsilon) = 0$ para todo $s > s_0$ e $m(Z, s, \varepsilon) = +\infty$ para todo $s < s_0$. Em particular, podemos considerar

$$h_{GLW}\Big(Z, \mathbb{S}, \varepsilon\Big) = \inf\{s : m(Z, s, \varepsilon) = 0\} = \sup\{s : m(Z, s, \varepsilon) = +\infty\}.$$

A *dimensão métrica média superior de Z* é então definida como o seguinte limite

$$\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}\Big(Z, \mathbb{S}, d\Big) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h_{GLW}\Big(Z, \mathbb{S}, \varepsilon\Big)}{|\log \varepsilon|}. \tag{5.3.2}$$

No caso onde $Z = X$ pode-se verificar que as duas definições de dimensão métrica média fornecidas acima realmente coincidem.

Outra ferramenta importante para provar o teorema é a seguinte.

Lema 5.4. *(Lema de Cobertura de Vitali (veja [29])) Seja X um espaço métrico boundedly compact (um espaço métrico é boundedly compact se todos os subconjuntos de X limitados e fechados são compactos) $\mathcal{B}$ uma família de bolas fechadas em X tal que*

$$\sup\{\text{diam}(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

Neste caso existe uma sequência finita ou enumerável $B_i \in \mathcal{B}$ de bolas disjuntas tais que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i} 5 \cdot B_i,$$

onde $5 \cdot B_i$ denota a bola fechada de mesmo centro que B_i e raio cinco vezes maior que o raio de B_i.

Demonstração do Teorema E. Seja ν_v a medida de volume natural em X e assumimos que $\overline{\mathrm{mdim}}_{\nu_v}(x,d) \leq s$, para todo $x \in X$. Fixado $\delta > 0$ e seja

$$X_k = \left\{ x \in X : \frac{\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \nu_v(B_n^G(x,\varepsilon))}{-\log \varepsilon} < (s+\delta/2) \text{ para todo } \varepsilon \in (0, \frac{1}{k}) \right\}.$$

Por hipótese, $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Para $\varepsilon \in (0, \frac{1}{5\cdot k}]$ e $x \in X_k$, existe $n(x) \in \mathbb{N}$ e uma sequência crescente $\{n_\ell(x)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ que converge para o infinito e está contida em $\mathbb{N}$ de modo que para qualquer $n_\ell(x) \geq n(x)$ obtemos

$$\nu_v(B^G_{n_\ell(x)}(x,\varepsilon)) \geq e^{-(s+\delta)n_\ell(x)(-\log\varepsilon)}.$$

Desde que X é uma variedade Riemanniana compacta, tem geometria limitada (veja [17] para mais detalhes em variedades de geometria limitada). Isto implica que para cada função $f_m : X_k \to \mathbb{R}$ dada por $f_m(x) := \nu_v(B^G_m(x,\varepsilon))$ é contínua e, então

$$N_0 := \sup\{n(x) : x \in X_k\} < \infty.$$

Pelo Lema da Cobertura de Vitali, para qualquer $N \geq N_0$ é possível escolher da cobertura $\mathcal{B}_N := \{\overline{B^G_{n_\ell(x)}(x,\varepsilon)} : x \in X_K \text{ e } n_\ell(x) \geq N\}$ de $\overline{X_k}$ e um subconjunto $F_N \subset X_k$ e uma família $\mathcal{D}_N := \{\overline{B^G_{n_\ell(x)}(x,\varepsilon)} : x \in F_N\}$ de bolas disjuntas, tais que

$$X_k \subset \overline{X_k} \subset \bigcup_{x\in F_N} \overline{B^G_{n_\ell(x)}(x,5\varepsilon)} \subset \bigcup_{x\in F_N} B^G_{n_\ell(x)}(x,6\varepsilon),$$

e

$$\nu_v(\overline{B^G_{n_\ell(x)}(x,\varepsilon)}) \geq e^{-(s+\delta)n_\ell(x)(-\log\varepsilon)} \text{ para todo } x \in F_N.$$

Neste caso, como a família $\mathcal{D}_N$ é dada por bolas disjuntas,

$$m(X_k,(s+\delta)(-\log\varepsilon),N,6\varepsilon) \leq \sum_{x\in F_N} e^{-(s+\delta)n_\ell(x)(-\log\varepsilon)} \leq \sum_{x\in F_N} \nu_v(\overline{B^G_{n_\ell(x)}(x,\varepsilon)}) \leq 1$$

e, consequentemente

$$m(X_k,(s+\delta)(-\log\varepsilon),6\varepsilon) = \limsup_{N\to\infty} m(X_k,(s+\delta)(-\log\varepsilon),N,\varepsilon) \leq 1,$$

o que por sua vez implica que $h_{GLW}(X_k,\mathbb{S},6\varepsilon) \leq (s+\delta)(-\log\varepsilon)$ e, com isto

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X_k,\mathbb{S},d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{GLW}(X_k,\mathbb{S},6\varepsilon)}{-\log\varepsilon} \leq s+\delta.$$

Logo,

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X,\mathbb{S},d) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X_k,\mathbb{S},d) \leq s+\delta.$$

Como $\delta \geq 0$ pode ser considerado arbitrariamente pequeno,

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X,\mathbb{S},d) \leq s$$

e isto finaliza a prova.

$\square$

Nosso último teorema mostra que, no caso em que a ação de grupo admite uma medida fortemente G-homogênea ν, temos uma igualdade entre a dimensão métrica média local de ν e a dimensão métrica média da ação de grupo.

Teorema F. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $\mathbb{S}$ a ação de semigrupo induzida em (X, d) pela família de aplicações contínuas $(g_i \colon X \to X)_{i=1}^{p}$.*
(a) Se $\nu \in \mathcal{M}(X)$ é fortemente G-homogênea, então

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}\Big(X, \mathbb{S}, d\Big) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\nu^G(x, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \forall x \in X.$$

(b) Seja ν uma medida de Borel em X e $s \in (0, \infty)$. Se

$$\inf_{x \in X} \underline{\mathrm{mdim}'_\nu}\,(x, d) \geq s \ \ , \textit{ então } \ \ \overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}\Big(X, \mathbb{S}, d\Big) \geq s.$$

O seguinte lema é uma importante ferramenta para a prova do Teorema F.

Lema 5.5. *Seja $\nu \in \mathcal{M}(X)$ uma medida de probabilidade fortemente G-homogênea. Então*

$$\overline{\mathrm{mdim}_\nu}\,(x, d) = \overline{\mathrm{mdim}_\nu}\,(y, d), \textit{ para todo } x, y \in X.$$

Demonstração. Para $\varepsilon > 0$, pela G-homogeneidade, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ e $c > 0$ de modo que

$$\nu(B_n^G(x, \delta(\varepsilon))) \leq c \cdot \nu(B_n^G(y, \varepsilon))$$

e, isso implica que

$$h_\nu^G(x, \delta(\varepsilon)) = \limsup_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(B_n^G(x, \delta(\varepsilon))) \geq \limsup_{n \to \infty} -\frac{1}{n} \log \nu(B_n^G(y, \varepsilon)) = h_\nu^G(y, \varepsilon).$$

Neste caso,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\nu^G(x, \delta(\varepsilon))}{-\log \delta(\varepsilon)} \frac{\log \delta(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \geq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\nu^G(y, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \text{ para todo } x, y \in X,$$

implicando que $\overline{\mathrm{mdim}_\nu}\,(x, d) \geq \overline{\mathrm{mdim}_\nu}\,(y, d)$. Ao trocar os papéis de x e y nos cálculos anteriores, obtém-se a desigualdade inversa e finaliza a prova.

$\square$

Como uma consequência do lema 5.5, faz sentido definir a dimensão métrica média de uma ação de semigrupo com respeito a uma medida fortemente G-homogênea como segue:

$$\overline{\mathrm{mdim}_\nu}\,(X, \mathbb{S}, d) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{h_\nu^G(x, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \text{ para todo } x \in X,$$

desde que o limsup considerado é constante em X.

Proposição 5.3.1. *Seja G um semigrupo compactamente gerado, ν uma medida de probabilidade fortemente G-homogênea em um espaço métrico compacto (X, d). Neste caso,*

$$\overline{\mathrm{mdim}_\nu}\,(X, \mathbb{S}, d) = \overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}\,(X, \mathbb{S}, d).$$

Demonstração. Fixado $\varepsilon > 0$ e tomando E um conjunto (n,ε)-separado maximal em X. Pela propriedade da maximalidade de E, $B_n^G(x,\varepsilon/2) \cap B_n^G(y,\varepsilon/2) = \emptyset$ para qualquer $x, y \in E$. Pela G-homogeneidade forte, existe $0 < \delta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $c > 0$ tais que $\nu(B_n^G(y,\delta(\varepsilon))) \leq c \cdot \nu(B_n^G(x,\varepsilon/2))$, para todo $x, y \in X$. Em particular, para um $x \in E$ fixo,

$$\nu(X) \geq \sum_{y \in E} \nu\left(B_n^G(y,\varepsilon/2)\right) \geq s(n,\varepsilon) \cdot \nu(B_n^G(x,\varepsilon/2)) \cdot \frac{1}{c}.$$

Seguindo que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s(n,\varepsilon) \leq \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \nu(B_n^G(x,\delta(\varepsilon))).$$

Agora, usando novamente a G-homogeneidade forte,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X,\mathbb{S},d) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{GLW}(\mathbb{S},\varepsilon)}{-\log\varepsilon} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{h_\nu^G(\delta(\varepsilon))}{-\log\delta(\varepsilon)} \frac{\log\delta(\varepsilon)}{\log\varepsilon} \\ &= \overline{\mathrm{mdim}}_\nu(X,\mathbb{S},d), \end{aligned}$$

implicando que $\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X,\mathbb{S},d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_\nu(\mathbb{S},d)$.

Para obter a desigualdade oposta, fixe $\delta > 0$ e note que se F é um conjunto (n,δ)-gerador com cardinalidade mínima $b(n,\delta)$, então $X \subset \bigcup_{x\in F} B_n^G(x,\delta)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ e $c > 0$ para o qual

$$\nu\left(B_n^G(x,\delta(\varepsilon))\right) \leq c \cdot \nu\left(B_n^G(y,\varepsilon)\right) \text{ para todo } x, y \in X \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Isso garante que

$$c \cdot b(n,\delta(\varepsilon)) \cdot \nu\left(B_n^G(y,\varepsilon)\right) \geq \nu(X) > 0$$

e com isto, pela G-homogeneidade forte,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X,\mathbb{S},d) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{GLW}(\mathbb{S},\delta(\varepsilon))}{-\log\delta(\varepsilon)} \\ &\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{h_\nu^{GLW}(y,\varepsilon)}{-\log\varepsilon} \frac{\log\varepsilon}{\log\delta(\varepsilon)} \\ &= \overline{\mathrm{mdim}}_\nu(X,\mathbb{S},d), \end{aligned}$$

e isso finaliza a prova.

□

Demonstração do Teorema F. Para a parte (a), note que isto é uma consequência da proposição 5.3.1. Para a parte (b), seja ν uma medida de Borel em X de modo que $\underline{\mathrm{mdim}}'_\nu(x,d) \geq s$, para todo $x \in X$. Fixado $\delta > 0$, seja

$$X_k = \left\{ x \in X : \frac{\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\nu(B_n^G(x,\varepsilon))}{-\log\varepsilon} > (s-\delta/2) \text{ para todo } \varepsilon \in (0,\frac{1}{k}) \right\}.$$

Por hipótese, $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Disto segue que $0 < \nu(X) \leq \sum_k \nu(X_k)$, que garante a existência de algum $k_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $\nu(X_{k_0}) > 0$. Novamente, podemos escrever $X_{k_0} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} X_{k_0,N}$ onde

$$X_{k_0,N} = \left\{ x \in X_{k_0} : \frac{-\log \nu(B_n^G(x,\varepsilon))}{-n\log\varepsilon} > (s-\delta/2) \text{ para todo } n \geq N \right\}.$$

Neste caso, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $\nu(X_{k_0,N_0}) > 0$. Em particular,

$$\nu(B_n^G(x,\varepsilon)) \leq e^{-n(s-\delta)\cdot(-\log\varepsilon)}, \text{ para todo } x \in X_{k_0,N_0}, \varepsilon \in (0, \frac{1}{k_0}) \text{ e } n \geq N_0.$$

Agora, para cada inteiro $N \geq N_0$ considere a cobertura aberta X_{k_0,N_0} dada por $\mathcal{B}_N = \{B_N^G(x,\varepsilon) : x \in X_{k_0,N_0}\}$. Neste caso, para um subcobertura $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}_N$

$$\inf_{\mathcal{C}} \cdot\sharp(\mathcal{C}) e^{-N(s-\delta)\cdot(-\log\varepsilon)} = \inf_{\mathcal{C}} \left\{ \sum_{B_N^G(x,\varepsilon)\in\mathcal{C}} e^{-N(s-\delta)\cdot(-\log\varepsilon)} \right\} \geq \nu(X_{k_0,N_0}).$$

Como $\operatorname{cov}(X,N,\varepsilon) \geq \operatorname{cov}(X_{k_0,N_0},N,\varepsilon)$, para todo N e $\varepsilon > 0$,

$$\operatorname{cov}(X,N,\varepsilon) e^{-N(s-\delta)\cdot(-\log\varepsilon)} \geq \nu(X_{k_0,N_0}),$$

implicando que

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \operatorname{cov}(X,N,\varepsilon) e^{-N(s-\delta)\cdot(-\log\varepsilon)} \geq 0$$

e então,

$$h_{GLW}(X,\mathbb{S},\varepsilon) \geq (s-\delta)\cdot(-\log\varepsilon).$$

Consequentemente,

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X,\mathbb{S},d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{GLW}(X,\mathbb{S},\varepsilon)}{-\log\varepsilon} \geq s-\delta.$$

Como a desigualdade foi obtida para um δ arbitrário, concluímos que

$$\overline{\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}}^{GLW}(X,\mathbb{S},d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{GLW}(X,\mathbb{S},\varepsilon)}{-\log\varepsilon} \geq s,$$

como a parte (b) afirma.

$\square$

Capítulo 6

Comentários Finais

Os resultados aqui apresentados encontram-se publicados na referência [32] e seguem os estudos em dimensão métrica média iniciados no mestrado, porém agora com ênfase em ações de semigrupo. A motivação para trabalhar com este assunto vem do fato de muitos sistemas dinâmicos apresentarem entropia topológica infinita, fazendo com que a entropia não consiga distinguir tais sistemas. Como já existem muitos trabalhos deste assunto para uma única dinâmica, decidimos então trabalhar em um contexto que pudéssemos generalizar vários resultados já existentes a uma dinâmica.

Após a leitura de [7] fica em aberto o seguinte problema: estender o conceito apresentado pelos autores para o contexto de ações de semigrupo e verificar a possibilidade de encontrar estados de equilíbrio neste contexto. Além disso, podemos estender também o conceito de entropia geométrica de uma folheação encontrado em [21] e definir uma generalização para o contexto de ações de semigrupo.

Além deste trabalho, possuímos outros em aberto que levam em consideração uma abordagem de entropia sob um ponto de vista mais voltado a teoria de dimensões. Esta abordagem relaciona os conceitos apresentados no livro de Pesin, referência [37], no contexto da aplicação Skew Product com uma definição para ações de semigrupo. Como não obtivemos um princípio variacional, somente parcialmente em um contexto mais específico, posteriormente vamos dar continuidade neste trabalho, pois se conseguirmos avançar e finalizar o princípio variacional vamos relacionar a teoria de uma dinâmica com a teoria de ações de semigrupo.

Referências Bibliográficas

[1] L. Barreira and C. Wolf. *Measures of maximal dimension for hyperbolic diffeomorphisms.* Comm. Math. Phys. 239 (2003) 93–113.

[2] J. Bélair and S. Dubuc, Eds. Fractal Geometry and Analysis. NATO ASI Series C, vol. 346, 1989.

[3] A. Biś. *An analogue of the variational principle for group and pseudogroup actions.* Ann. Inst. Fourier 63:3 (2013) 839–863.

[4] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, **470**, (2008).

[5] R. Bowen and D. Ruelle, *The ergodic theory of Axiom A flows*, Invent. Math., **29**, (1975), 181–202.

[6] A. Bufetov. *Topological entropy of free semigroup actions and skew-product transformations.* J. Dynam. Control Systems 5 (1999) 137–143.

[7] M. Carvalho, G. Pessil and P. Varandas, *A convex analysis approach to the metric mean dimension: limits of scaled pressures and variational principles.* (2022)

[8] M. Carvalho, F. Rodrigues, P. Varandas. *Semigroups actions of expanding maps.* J. Stat. Phys. 116:1 (2017) 114–136.

[9] M. Carvalho, F. Rodrigues, P. Varandas. *Quantitative recurrence for free semigroup actions.* Nonlinearity 31:3 (2018) 864–886.

[10] M. Carvalho, F. Rodrigues and P. Varandas. *A variational principle for free semigroup actions.* Adv. Math. 334 (2018) 450–487.

[11] M. Carvalho, F. Rodrigues and P. Varandas. *A variational principle for the metric mean dimension of free semigroup actions.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. 42 (2022), 65–85.

[12] M. Carvalho, F. Rodrigues and P. Varandas. *Generic homeomorphisms have full metric mean dimension.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. 42 (2022) 42–64.

[13] A. Castro and P. Varandas, *Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability*, Ann. Inst. H. Poincaré, **30**, (2013), 225–249.

[14] D. Cheng, Z. Liand B. Selmi. *Upper metric mean dimensions with potential on subsets.* Nonlinearity 34 (2021), 852–867.

[15] V. Climenhaga and D. Thompson, *Unique equilibrium states for flows and homeomorphisms with non-uniform structure*, Advances in Mathematics, **303** (2016), 745–799.

[16] M. Denker, M. Gordin, *Gibbs measures for fibred systems*, Adv. Math, **148**, (1999), 161–192.

[17] Eldering J. Manifolds of Bounded Geometry. Normally Hyperbolic Invariant Manifolds. Atlantis Series in Dynamical Systems, vol 2. Atlantis Press, Paris.

[18] K. Falconer. Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, 1990.

[19] M. Gromov. *Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps I.* Math. Phys. Anal. Geom. 2:4 (1999) 323–415.

[20] Y. Gutman, E. Lindenstrauss and M. Tsukamoto. *Mean dimension of $\mathbb{Z}^k$-actions.* Geom. Funct. Anal. Vol. 26 (2016) 778–817.

[21] E. Ghys, R. Langevin and P. Walczak. *Entropie géométrique des feuilletages.* Acta Math. 160:1-2 (1988), 105–142.

[22] B. Kloeckner. *Optimal transport and dynamics of expanding circle maps acting on measures.* Ergodic Theory & Dynam. Systems 33:2 (2013) 529–548.

[23] F. Ledrappier and P. Walters. *A relativised variational principle for continuous transformations.* J. Lond. Math. Soc. 16:3 (1977) 568–576.

[24] R. Leplaideur, K. Oliveira and I. Rios, *Equilibrium states for partially hyperbolic horseshoes*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **31**, (2011) 179–195.

[25] E. Lindenstrauss. *Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem.* Publications Mathématiques de l'IHES 89:1 (1999) 227–262.

[26] E. Lindenstrauss and B. Weiss. *Mean topological dimension.* Israel J. Math. 115 (2000) 1–24.

[27] E. Lindenstrauss and M. Tsukamoto. *Double variational principle for mean dimension.* Geom. Funct. Anal. Vol. 29 (2019) 1048–1109.

[28] E. Lindenstrauss. *Mean dimension, small entropy factors and embedding maintheorem*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1999, Vol. 89, Issue 1, 227–262.

[29] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, (1995) Fractals and rectifibility.

[30] I. Rios and J. Siqueira, *On equilibrium states for partially hyperbolic horseshoes*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **38**, (2018) 301–335.

[31] F. Rodrigues, T. Jacobus and M. Silva. *Entropy points and applications for free semigroup actions.* J. Stat. Phys. (2022) 186(6).

[32] Rodrigues, F.B., Jacobus, T. and Silva, M.V. *Some Variational Principles for the Metric Mean Dimension of a Semigroup Action.* J Dyn Control Syst 29, 919–944 (2023).

[33] Uri Shapira. *Measure theoretical entropy of covers.* Israel Journal of Mathematics (2007) 158(1) 225-247.

[34] Ruxi Shi. *On variational principle for the metric mean dimension.*IEEE Transactions on Information Theory (2022) 68(7) 4282–4288.

[35] Yonatan Gutman and Adam Śpiewak. *Around the variational principle for metric mean dimension.* Studia Mathematica (2021) 261 345–360.

[36] Yonatan Gutman and Adam Śpiewak. *Metric mean dimension and analog compression.* IEEE Transactions on Information Theory (2020) 66(11) 6977–6998 .

[37] Ya. Pesin. Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications. Lectures in Mathematics, Chicago Press, 1997.

[38] Jingru Tang, Bing Li and Wen-Chiao Cheng Some properties on topological entropy of free semigroup action, Dynamical Systems, 33(1), 54-71, 2018.

[39] Anibal Velozo and Renato Velozo. *Rate distortion theory, metric mean dimension and measure theoretic entropy*, arXiv:1707.05762 [math.DS](preprint).

[40] Koichi Yano, *A remark on the topological entropy of homeomorphisms.* Inventiones mathematicae 59 (3) 215-220, 1980.