

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FISICA

Amplitudes de Espalhamento da Cromodinâmica Quântica em Ordem Seguinte à Dominante

Mateus Broilo da Rocha

Porto Alegre
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Amplitudes de Espalhamento da Cromodinâmica Quântica em Ordem Seguinte à Dominante*

Mateus Broilo da Rocha

Trabalho de conclusão de curso realizado sob orientação da Profa. Dra. Maria Beatriz Gay Ducati e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Porto Alegre
2011

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Agradecimentos*

Gostaria de agradecer minha família, acima de tudo meus pais, Maria de Fátima Crepaldi Broilo e Paulo Roberto Ribeiro da Rocha, por me apoiarem inclusive nos momentos difíceis (como o último final de semana, onde quase tudo poderia ter chegado ao fim). Meus queridos amigos que de alguma forma fazem parte da minha família:

(i) Gabriel "Dau" Marin Canabarro, Thales "Töruh" e Thalibe Mathias Gerude (e a Casa dos Gerude), Alexandre Zuleger, Rafael de Mattos Madruga (e a Casa dos Madruga) e meus primos Lucas e Vinícius da Rocha Poggetti, pelos incríveis finais de semana regados a Heineken e vinho de péssima safra enquanto tocávamos violão no meio da rua e fugíamos da polícia por arruaça e vadiagem; pelas rodadas de Imagem & Ação e as épicas bebedeiras assistindo NFL e comendo amendoim japonês. E também por jamais contarem à minha avó que foi eu quem roubou o licor de cinzano.

(ii) Vitor Hugo Zorzi, Rafael Pacheco Acosta, Maurício "Bolonha" Rezende Pereira (e a casa dos Rezende) e Fábio Uequet Pitol (e a Casa dos Pitol), pelos incríveis tempos de escola onde regras não significavam nada – ainda não significam – e pelas jogatinas quase que diárias. Bons tempos que não voltam mais e que, certamente, não aproveitei o suficiente.

(iii) Bio Broilo, por jamais fazer cara feia e nem contestar minhas decisões.

Sou grato pelos incríveis e excelentes professores que tive o prazer de ter tido aula, desde os poucos dos tempos de escola, e de alguns durante estes quatro anos de faculdade. Mas também agradeço aos péssimos professores, por me mostrarem o tipo de profissional que jamais devo me tornar.

Gostaria de agradecer meus colegas, e amigos, de faculdade Patrice Audibert Camati, Ernany Rossi Schmitz, David William Sabino Carvalho, Henrique dos Santos Flores (tá me devendo 20 pila!) e Matheus Giroto, pela excelente companhia e pelas besteiras ditas e feitas durante estes quatro anos; e um agradecimento especial para Bruna Cesira Folador, que se não fosse por ela eu não teria prestado o ENADE, e também pelos quebra galhos no Café.

Um agradecimento especial para o quase Doutor Eduardo André Flach Basso, por toda a ajuda durante estes anos de bolsa de iniciação científica e imensa paciência com o início, meio e fim deste trabalho de conclusão de curso.

Agradeço a oportunidade de ter sido orientado pela Profa. Dra. Maria Beatriz Gay Ducati, e pela pressão constante, oferecida por ela, de estar diariamente trabalhando com a força no pescoço. Além do mais agradeço à Profa. Beatriz por ter dado um rumo a minha graduação.

* Gostaria de agradecer aos membros da banca examinadora Prof. Dr. Silvio Renato Dahmen e Prof. Dr. Miguel Angelo Cavalheiro Gusmão, pelas correções feitas e idéias compartilhadas para o degradingolar do referente estudo.

Por último, mas não menos importante, um agradecimento para a Srta. Prepotência, Luana Medeiros; uma amiga muito querida que infelizmente não está mais aqui... Mudou-se para São Paulo. Uka!

Glossário

- AGBS** *Amaral-Gay Ducati-Betemps-Soyez*
BFKL *Balitskiĭ-Fadin-Kuraev-Lipatov*
BK *Balitskiĭ-Kovchegov*
DGLAP *Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi*
DIS *Deep Inelastic Scattering – Espalhamento Profundamente Inelástico*
EDOL *Equação Diferencial Ordinária Linear*
FKPP *Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov*
GBW *Golec Biernat-Wüsthoff*
HERA *Hadron Electron Ring Accelerator*
IMF *Infinite Momentum Frame – Referencial de Momentum Infinito*
LO *Leading Order – Ordem Dominante*
NLL *Next to Leading Order – Logaritmo Seguinte ao Dominante*
NLO *Next to Leading Order – Ordem Seguinte à Dominante*
QCD *Quantum Chromodynamics – Cromodinâmica Quântica*
QED *Quantum Electrodynamics – Eletrodinâmica Quântica*
RFP *Reduced Front Profile – Frente de Onda Reduzida*
SLAC *Stanford Linear Accelerator*
TWS *Travelling Wave Solutions – Soluções de Ondas Progressivas*

Resumo

O comportamento das amplitudes de espalhamento em colisões de altas energias é bem entendido atualmente em termos da teoria de *Cromodinâmica Quântica (QCD)*, que descreve a dinâmica dos quarks e glúons. Além disso, sabe-se que a QCD descreve apenas a evolução de tais amplitudes nas variáveis cinemáticas próprias para a descrição dos processos, sendo que no limite de altas energias elas devem ser limitadas afim de garantir a unitariedade. Isto é feito com o uso de equações de evolução não lineares incluindo termos de recombinação de partículas, os quais saturam a densidade de quarks e – principalmente – glúons no interior dos entes em colisão.

O objetivo deste trabalho é o estudo e modelagem de amplitudes de espalhamento da QCD em mais altas ordens em teoria de perturbação. Para isto, partimos da equação de evolução *Balitskiĭ-Kovchegov (BK)*, para a qual as soluções assintóticas em *Ordem Dominante (LO)* e *Ordem Seguinte à Dominante (NLO)* são conhecidas pela analogia com processos de reação e difusão da Física Estatística. Vamos estudar diferentes interpolações entre os comportamentos assintóticos e o esperado comportamento saturado para as amplitudes da QCD em região perturbativa. Será apresentada uma revisão da teoria da QCD em altas energias, detalhando a necessidade das equações de evolução – com ênfase na equação BK e suas soluções.

Abstract

The scattering amplitudes behavior in high energy collisions is well known in terms of the *Quantum Chromodynamics (QCD)* theory, which describes the quark's and gluon's dynamics. Besides, for the processes description it is known that QCD describes only these amplitudes evolutions in its own kinematical variables, where in the high energy limit should be limited in way to ensure the unitarity. These can be done using non-linear equations including particle recombination terms which quark's densities is saturated – and mostly – gluons inside the stuff into collision.

The central point of these work is the study and shaping the QCD scattering amplitudes in higher orders of perturbation theories. To do that, our starting point is the *Balitskiĭ-Kovchegov (BK)* evolution equation, which the asymptotic solutions in *Leading Order (LO)* and *Next to Leading Order (NLO)* are known due similarities with Statistical Physics reaction-diffusion process. We will study different interpolations between asymptotic ongoings and the QCD expected amplitude's saturated behavior on perturbative region. A high energy QCD theory revision will be shown, pointing out the needs of evolution equations – emphasizing the BK equation and its solutions.

Conteúdo

Introdução	1
1. A Cromodinâmica Quântica	3
1.1 Liberdade Assintótica	4
1.2 Confinamento	5
2. O Espalhamento Profundamente Inelástico	8
2.1 Cinemática do DIS	8
2.2 Seção de Choque Inclusiva no Processo $ep \rightarrow eX$	10
2.3 Modelo de Pártons	12
2.3.1 Escalamento de Bjorken	12
2.3.2 Função de Estrutura do Próton	13
2.3.3 A Contribuição dos Quarks na Estrutura do Próton	14
2.3.4 Fração de Momentum do Próton Portado pelos Glúons	16
2.4 O Referencial de Momentum Infinito	18
2.5 O Regime de Altas Energias	19
2.6 Conclusões	20
3. Fenomenologia Aplicada ao DIS	22
3.1 DIS no Referencial de Dipolos de Cor	22
3.2 A Função de Estrutura do Próton no Referencial de Dipolos	23
3.3 F_2 no Espaço de Momentum	24
3.4 Escalamento Geométrico	24
3.5 Conclusões	26
4. Amplitudes de Espalhamento em Altas Energias	27
4.1 As Correções de Unitariedade	27
4.2 A Equação de Balitskiĭ-Kovchegov	28
4.2.1 O Escalamento Geométrico e a Física Estatística	28
4.3 Equação BK em Ordem Seguinte à Dominante	32
4.4 Conclusões	33
5. Ajuste aos Dados de HERA	35
5.1 Solução Assintótica da BK em NLO	35
5.2 Modelo Logarítmico de Unitarização Eikonal em NLO	38
5.3 Conclusões	41

6. Conclusão	42
A. O Lagrangeano da QCD	45
B. Equações de Evolução Lineares	47
B.1 Equação de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi	48
B.2 Equação de Balitskiĭ-Fadin-Kuraev-Lipatov	49
Bibliografia	50

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática dos vértices de interação de glúons.	5
1.2	Representação esquemática do confinamento de quarks em analogia com um sistema de duas massas ligadas por uma mola.	6
1.3	Representação gráfica da dependência com a energia da constante de acoplamento dinâmico α_s	7
2.1	DIS em LO em teoria de perturbação.	9
2.2	O triângulo é a região cinemática permitida para o DIS ep . $\nu_{max} = E$ no referencial de repouso do alvo; W é a massa invariante do estado hadrônico final X , equação (2.6)[13].	11
2.3	DIS no modelo de pártons.	13
2.4	Razão F_2^{en}/F_2^{ep} como função de x obtidos de DIS no SLAC[13].	17
2.5	Contribuições adicionais de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$ para o processo $ep \rightarrow eX$ não contidos no modelo de pártons. (a)Emissão de glúons pelos quarks e (b) glúons no estado inicial.	18
2.6	Diagramas que contribuem no processo $ep \rightarrow eX$ em ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$	19
2.7	A função de estrutura F_2 medida pelo experimento ZEUS, como uma função de Q^2 para diferentes valores de x [20].	20
2.8	As distribuições de quarks (xu_v, xd_v), glúons (xG) e quarks de mar (xS) em um próton para dados de HERA[23].	21
3.1	Representação do DIS no referencial de dipolos de cor em termos das variáveis envolvidas: o tamanho do dipolo r , o parâmetro de impacto \mathbf{b} e as frações de momentum do fóton carregadas pelos constituintes do dipolo.	22
3.2	Escalamento geométrico observado nos dados de HERA de espalhamento γ^*p em altas energias. Os dados dependem apenas da variável $\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}$ [14].	25
4.1	Comportamento das TWS da equação FKPP.	30
4.2	TWS da equação BK obtido por simulação numérica para rapidez $Y = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ [24].	31
5.1	Predições para os dados de ZEUS e H1[15] para a função de estrutura do próton em função de x para valores intermediários de Q^2 , dados em GeV^2	36
5.2	(a) Forma para as amplitudes de espalhamento no espaço de momentum segundo a solução assintótica da região diluta da equação BK em NLO para diferentes valores de rapidez Y . Os parâmetros para este gráfico foram tomados do ajuste correspondente à Tabela (5.1). (b) Descrição gráfica para a região de saturação partônica. Este gráfico foi obtido através da ampliação da região em que $k \ll Q_s$ em (a).	37

5.3	Predições para os dados de ZEUS e H1[15] para a função de estrutura do próton em função de x para valores intermediários de Q^2 , dados em GeV^2	39
5.4	(a) Forma para as amplitudes de espalhamento no espaço de momentum segundo a solução assintótica da região diluta da equação BK em NLO para diferentes valores de rapidez Y . Os parâmetros para este gráfico foram tomados do ajuste correspondente à Tabela (5.2). (b) Descrição gráfica para a região de saturação partônica. Este gráfico foi obtido através da ampliação da região em que $k \ll Q_s$ em (a).	40
6.1	Evolução da frente de onda reduzida para ambos casos de acoplamento fixo (esquerda) e dinâmico (direita). A frente de onda reduzida para diferentes valores de rapidez. As linhas correspondem desde $Y = 2$, curva mais abaixo, até $Y = 10$, curva mais acima. Note a similaridade das frentes de onda, porém uma evolução mais rápida para acoplamento fixo.	42
6.2	Representação das funções de Airy assintóticas.	44
B.1	Representação esquemática do próton no espaço de fase definido pelas variáveis do DIS.	47

Lista de Tabelas

- 5.1 Resultados do ajuste aos dados de F_2 . Os valores dos parâmetros com seus respectivos erros são mostrados, juntamente com o χ^2 por graus de liberdade. 36
- 5.2 Resultados do ajuste aos dados de F_2 . Os valores dos parâmetros com seus respectivos erros são mostrados, juntamente com o χ^2 por graus de liberdade. 41

Introdução

No estudo da Física de Partículas Elementares utiliza-se a QCD como a teoria de campo que descreve as interações fortes entre quarks e glúons. Uma das principais características da QCD é a liberdade assintótica, propriedade que se caracteriza pela redução do parâmetro de acoplamento entre quarks e glúons para curtas distâncias, i.e., grandes momenta transferidos. Através da QCD verificamos que os hádrons são formados de quarks e glúons. Um dos mais importantes resultados da QCD é a fatorização das seções de choque hadrônicas em termos das seções de choque partônicas[1].

A teoria da QCD tem sido usada para descrever satisfatoriamente uma grande variedade de processos, buscando explicar a dinâmica dos sistemas hadrônicos em altas energias. No entanto, a QCD não prediz a quantidade de pártons no interior dos hádrons, mas sim a evolução da densidade de pártons mediante condições iniciais. No limite de altas energias, o parâmetro de acoplamento forte é pequeno o bastante para que métodos perturbativos possam ser utilizados. A evolução das densidades de pártons na QCD perturbativa é descrita pelas equações *Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP)*[2, 3, 4] e *Balitskiï-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL)*[5, 6, 7, 8](veja apêndice B). Contudo, ambas equações levam a um crescimento indefinido das distribuições partônicas à medida que a energia aumenta; por conseguinte, leva à seções de choque que crescem como uma potência da energia. Este comportamento pode levar à violação dos vínculos de unitariedade da QCD perturbativa.

É conveniente trabalhar com o *Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS)* no referencial de dipolos de cor da QCD pois na região de pequeno x , fração de momentum do párton provado[†], o DIS ep no referencial de dipolos permite a fatorização da seção de choque $\gamma^* - \text{próton}$ [9]. Neste referencial o próton carrega a maior parte da energia do processo, porém o fóton possui energia suficiente para desdobrar-se em um par $(q\bar{q})$, ou um dipolo de cor.

A equação mais simples que descreve a evolução da QCD é a equação BK[10] para as amplitudes de espalhamento dipolo-alvo. Esta descreve a evolução com a variável de rapidez Y do espalhamento do dipolo de cor por um alvo, sendo o dipolo formado por um par $q\bar{q}$. É bem conhecida a correspondência entre a evolução das amplitudes de espalhamento em altas energias e os processos de reação difusão da Física Estatística de não equilíbrio. Neste sentido, Munier e Peschanski[11] mostraram que mediante uma mudança de variáveis e da aproximação difusiva, i.e., expansão de Taylor até segunda ordem dominante, do núcleo da equação BFKL, a equação BK se encontra na mesma classe de universalidade que as equações *Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (FKPP)*[12]. Esta possui a propriedade

[†] Assim como em Astronomia observacional diz-se *resolver uma estrela* como um jargão para "analisar" a estrela, em Física de Partículas o termo *alvo provado* é cunhado para a entidade que está interagindo no espalhamento com por exemplo um elétron.

de admitir as chamadas *Soluções de Ondas Progressivas (TWS)*, que nas variáveis da QCD representam o escalamento geométrico das amplitudes de espalhamento da equação BK.

No capítulo primeiro, será feito um estudo dos processos de DIS; neste, será apresentado o modelo de pártons que considera o DIS como o espalhamento do fóton pelos constituintes do hádrón. Introduziremos a variável x de Bjorken, onde está intimamente ligada à energia do centro de massa do processo e discutiremos o escalamento das funções de estrutura no limite de Bjorken, verificado em processos de DIS *ep* no *Stanford Linear Accelerator (SLAC)*[13]. Como o modelo de pártons é apenas uma aproximação de ordem mais baixa do respectivo espalhamento, discutiremos a necessidade de subprocessos, descritos pela QCD, para o cálculo das seções de choque e falaremos do crescimento das funções de estrutura no regime de altas energias.

No capítulo segundo, o DIS será abordado de uma perspectiva diferente, através do referencial de dipolos de cor da QCD. Neste, as seções de choque e funções de estrutura serão tratadas no espaço de momentum. E por fim será introduzido as propriedades de escalamento geométrico das seções de choque dipolo-alvo sendo observadas pela primeira vez em dados de HERA[14].

No capítulo terceiro, será discutido a necessidade das correções de unitariedade para a saturação partônica, veja também apêndice B, e a equação BK será apresentada. Estudaremos as relações entre a equação BK e a equação FKPP, onde esta apresenta TWS; esta apresenta a propriedade de que para grandes tempos de propagação, a forma das frentes de onda não mudam, caracterizando em um escalamento das frente de onda. A equação BK em NLO será apresentada, bem como sua solução assintótica no regime diluto de pártons no interior dos hádróns.

No capítulo quarto, será feito um estudo fenomenológico das amplitudes de espalhamento dadas pelas soluções assintóticas da equação BK para dados de *Hadron Electron Ring Accelerator (HERA)*[15] em seu intervalo cinemático. Através de modelos propostos, estudaremos a forma das amplitudes de espalhamento em NLO procurando descrever a região de saturação partônica, i.e., região em que $k \ll Q_s$. Para ambos modelos, será feito uma previsão da função de estrutura do próton para os respectivos intervalos cinemáticos de HERA.

Capítulo 1

A Cromodinâmica Quântica

A QCD é uma teoria de calibre não Abelianiana que descreve as interações fortes em termos de partículas de spin 1/2 chamadas de *quarks* (q) e de partículas de spin 1 chamadas de *glúons* (g); tanto quarks como glúons são chamados de *pártons* e portam um número quântico adicional, a chamada carga forte, ou carga de cor*. O grupo de calibre da QCD é o $SU(N_c)$, onde N_c representa os valores distintos de carga de cor para os quarks enquanto que os glúons apresentam $N_c^2 - 1$ valores distintos.

Os quarks que constituem os hádrons estão continuamente trocando glúons. Como parte deste processo de troca, os glúons podem criar novos pares $q\bar{q}$, especialmente pares mais leves como $u\bar{u}$ e $d\bar{d}$, e estes podem sofrer aniquilação resultando em glúons. Nos hádrons, há uma condição de equilíbrio[16],

$$g \longleftrightarrow q + \bar{q} \quad (1.1)$$

com os limites permitidos segundo o princípio de incerteza. Então, um hádron pode ser pensado como um “saco” de quarks e glúons. Esta condição de equilíbrio não cria nenhum sabor de quark preferencial, ou total no hádron, pois um quark é sempre criado ou aniquilado com o seu respectivo antiquark. Os números quânticos dos hádrons não mudam devido aos processos complicados de ligação da interação forte. Todo sabor de quark possui um de três valores de números quânticos de cor. Estes valores são *Red*(R), *Green*(G) ou *Blue*(B). Os antiquarks são dados pelas respectivas anticores, \bar{R} , \bar{G} ou \bar{B} . Desta forma, quarks e glúons possuem carga de cor responsável por sua interação mútua, excluindo assim as partículas que não possuem este grau de liberdade, como léptons.

Em termos matemáticos, os quarks – por serem férmions – são representados por espiniores q_a , onde $a = 1, \dots, N_c = 3$ é o índice de cor. Os glúons são campos vetoriais representados pelas matrizes T^a geradoras do grupo de simetria $SU(3)$ (veja apêndice A), de tal forma que surgem oito matrizes geradoras, ou oito glúons, identificadas pelo índice $a = 1, \dots, 8$.

Entretanto, quarks jamais foram observados livres, mas sim em estados hadrônicos de dois ou três quarks, o que de fato é observado são mésons ($q_a\bar{q}_b$) e bárions ($q_aq_bq_c$). Por exemplo, para um méson o par $q\bar{q}$ será dado por $|R\bar{R}\rangle$, i.e., não apresentará uma resultante de carga de cor, da mesma forma para as demais cargas de cor juntamente com suas respectivas anticores. Já para um bárion contendo $|RGB\rangle$ ou um antibárion $|\bar{R}\bar{G}\bar{B}\rangle$, também não apresentará carga resultante de cor.

* Essa consiste na principal diferença da QCD em relação à QED, na qual a partícula mediadora da interação eletromagnética, o fóton, não possui carga elétrica, enquanto que a partícula mediadora da interação forte, o glúon, apresenta carga de cor.

A não observação de quarks livres evidencia que a força agindo entre estes deve aumentar com a distância de separação, diferentemente do que ocorre na QED. Por outro lado, pode-se descrever razoavelmente bem as seções de choque para processos em altas energias, como no caso do DIS utilizando um modelo no qual os quarks interagem simplesmente através de sua carga elétrica. Isto resulta em uma interação entre os quarks na qual a força é menos intensa para pequenas separações enquanto que para grandes separações esta força se torna muito intensa. Estes comportamentos são muito bem descritos pela QCD através de duas propriedades fundamentais, liberdade assintótica e confinamento.

Partindo da hipótese de que todos os hádrons não apresentam uma resultante de carga forte, i.e., cor[†], dizemos que os hádrons fazem parte de um singlete de cor, i.e., um estado em que a combinação dos quarks seja tal que o efeito resultante é zero – sem cor. Cada quark pertence a um tripleto de cor, i.e., possui um valor de carga de cor das três disponíveis. A consequência disto é que as únicas combinações de q , e \bar{q} , observáveis são singletos de cor.

Vamos rapidamente examinar os vetores de estado representando os hádrons. Para o méson, temos o seguinte vetor de estado[17]

$$\frac{1}{\sqrt{3}}|R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}\rangle, \quad (1.2)$$

vemos que há amplitudes equiprováveis de encontrarmos os pares $q\bar{q}$ como $R\bar{R}$ ou $G\bar{G}$ ou $B\bar{B}$. Já os vetores de estado referente aos bárions[‡]

$$\frac{1}{\sqrt{6}}|RGB - GRB + BRG - RBG + GBR - BGR\rangle. \quad (1.3)$$

Os glúons apresentam vetores de estado com resultantes de cor, i.e., seus vetores de estado apresentam termos cruzados de cargas de cor. Há nove maneiras de escolhermos os vetores de estado com uma cor e sua respectiva anticor. A primeira combinação é igual a equação (1.2) referente ao singlete de cor. Os oito vetores de estado restantes fazem parte de um octeto de cor, i.e., um sistema em que o número quântico de cor pode ter um dos oito valores escolhidos combinando-se uma cor com uma anticor. Então os vetores de estado destes oito glúons são

$$\begin{aligned} &|R\bar{G}\rangle, |R\bar{B}\rangle, |G\bar{R}\rangle, |G\bar{B}\rangle, |B\bar{R}\rangle, |B\bar{G}\rangle, \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}|R\bar{R} - G\bar{G}\rangle, \\ &\frac{1}{\sqrt{6}}|R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}\rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.1 Liberdade Assintótica

[†] Também chamada de hipóteses dos hádrons brancos.

[‡] Historicamente, os graus de liberdade de cor surgiram como a solução do problema de como construir a função de onda para o o bárion Δ^{++} . Este apresenta spin 3/2, sendo obtido pela combinação de três quarks idênticos – três quarks u . Dado que os quarks possuem spin 1/2, a estatística de Fermi-Dirac necessita que tenhamos uma função de onda antissimétrica; e além disso, o Princípio de Exclusão de Pauli garante que cada um dos três quarks deve apresentar números quânticos distintos. E de fato apresentam, uma vez que consideremos a função de onda totalmente antissimétrica nos graus de liberdade de cor.

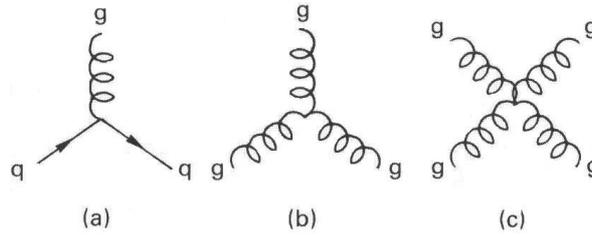


Fig. 1.1: Representação esquemática dos vértices de interação de glúons.

Na QCD, a carga de cor é trocada entre partículas coloridas através dos glúons, o que é uma propriedade das teorias de calibre não Abelianas. Uma consequência disto é que, diferentemente dos fótons, os glúons podem interagir com outros glúons[16]. Mais tecnicamente, a QCD possui vértices de interação de três e quatro glúons, mostrados da Figura (1.1), os quais não possuem análogos na QED. Uma propriedade fundamental verificada experimentalmente, é a liberdade assintótica. Esta refere-se ao fato de que enquanto quarks estiverem ligados formando hádrons, para distâncias cada vez menores[§], a intensidade da interação entre quarks diminui, fazendo com que estes se comportem como partículas livres presos em um poço de potencial, i.e., para separações cada vez menores os quarks se tornam assintoticamente livres, o que caracteriza a não observação de quarks livres. O conceito de liberdade assintótica foi formulado teoricamente em 1973 por H. David Politzer e independentemente por David Gross e Frank Wilczek.

Na QCD, a intensidade do parâmetro de acoplamento forte α_s não é especificado mediante argumentos de primeiros princípios, assim como $\alpha^¶$ na QED não pode ser obtido teoricamente. Para determinarmos α devemos fazer uma medida de alguma quantidade que seja sensível a magnitude da carga elétrica do elétron. A situação é mais complicada na QCD pois o acoplamento da interação forte muda rapidamente com o comprimento de onda do quark para distâncias próximas de $1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$. Em termos da energia do quark $E = \frac{hc}{\lambda}$, temos $\alpha_s \approx 1$ para $E = 1\text{GeV}$, $\alpha_s \approx 0.1$ para $E = 100\text{GeV}$ [16]. Esta é a propriedade da liberdade assintótica: o parâmetro fundamental que especifica a intensidade de acoplamento qq decresce para distâncias pequenas, ou grandes transferências de momentum.

1.2 Confinamento

Uma outra consequência da estrutura da QCD é que a parte central do potencial entre dois quarks cresce indefinidamente à medida que a distância entre eles aumenta, de maneira que seja impossível separar quarks ligados. Assim, quarks são ditos estarem confinados. Uma analogia que pode ser feita com esta propriedade de confinamento seria um arranjo de dois corpos de massa m ligados por uma mola de constante elástica k , como mostrado na Figura (1.2).

Se esticarmos a mola, a energia potencial elástica aumenta de maneira a trazer as massas de volta a sua posição de equilíbrio. Dizemos que a força atuando nas massas é uma força

[§] Ou transferências de momentum cada vez maiores.

[¶] Parâmetro de acoplamento eletromagnética.

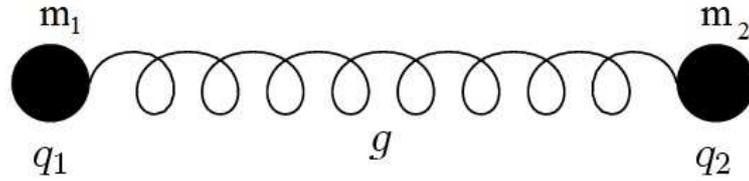


Fig. 1.2: Representação esquemática do confinamento de quarks em analogia com um sistema de duas massas ligadas por uma mola.

restauradora. No entanto, duas pontas serão criadas se esticarmos a mola ao ponto de rompê-la, mas não serão livres, i.e., não haverá duas pontas com quarks e duas pontas livres de quarks. A matéria pela qual a natureza é composta não apresenta quarks livres, e o fato de que nenhum foi observado, mesmo nas colisões mais energéticas, parece concordar com esta propriedade de confinamento de quarks.

Podemos aproximar o potencial de interação entre dois quarks como[16]

$$V = -\frac{k_1}{r} + k_2 r \tag{1.5}$$

no qual k_1 e k_2 são exatamente constantes de proporcionalidade. O primeiro termo corresponde à atração coulombiana, que é dominante para pequenos valores de r . O termo linear é dominante para valores grandes de r , i.e., representa o confinamento de quarks. Portanto, para pequenas distâncias os quarks estão livres do termo linear. Uma razão qualitativa para isto ocorrer é que para pequenas distâncias a nuvem de glúons que envolve o quark se torna penetrável. Os glúons portam carga forte, assim a carga forte efetiva de um quark é reduzida em pequenas distâncias^{||}.

A variação do acoplamento forte com a energia é qualitativamente determinado na QCD. O valor de α_s , a uma dada energia, depende do número de sabores N_f dos quarks que podem participar do processo de interação através do seu acoplamento com glúons. Para energias muito maiores que as massas dos quarks, em unidades de energia, todos os sabores de quarks participam do processo. Para especificar a dependência teórica de α_s com a energia, ainda nos resta uma constante fundamental no qual pode ser apenas determinada experimentalmente. A definição desta constante é arbitrária, mas convencionalmente a constante Λ_{QCD} que tem dimensões de energia é utilizada. Esta representa a energia na qual o acoplamento se torna infinito, i.e., o mecanismo pelo qual quarks estão confinados em hádrons. Portanto a constante Λ_{QCD} define uma fronteira, um limite, de energia onde abaixo deste limite temos hádrons e acima temos quarks. A ordem de magnitude de Λ_{QCD} é a massa do hádron mais leve, o pión. Em termos desta e de N_f , a dependência com a energia e do parâmetro de acoplamento forte pode ser escrito como[16]

$$\alpha_s(E) \approx \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \log\left(\frac{E^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)}, \tag{1.6}$$

para a menor ordem em energia. Na Figura (1.3), mostramos $\alpha_s \times E$. Através de uma

^{||} É análogo aos efeitos de blindagem da nuvem eletrônica que envolve o núcleo atômico para os elétrons de valência.

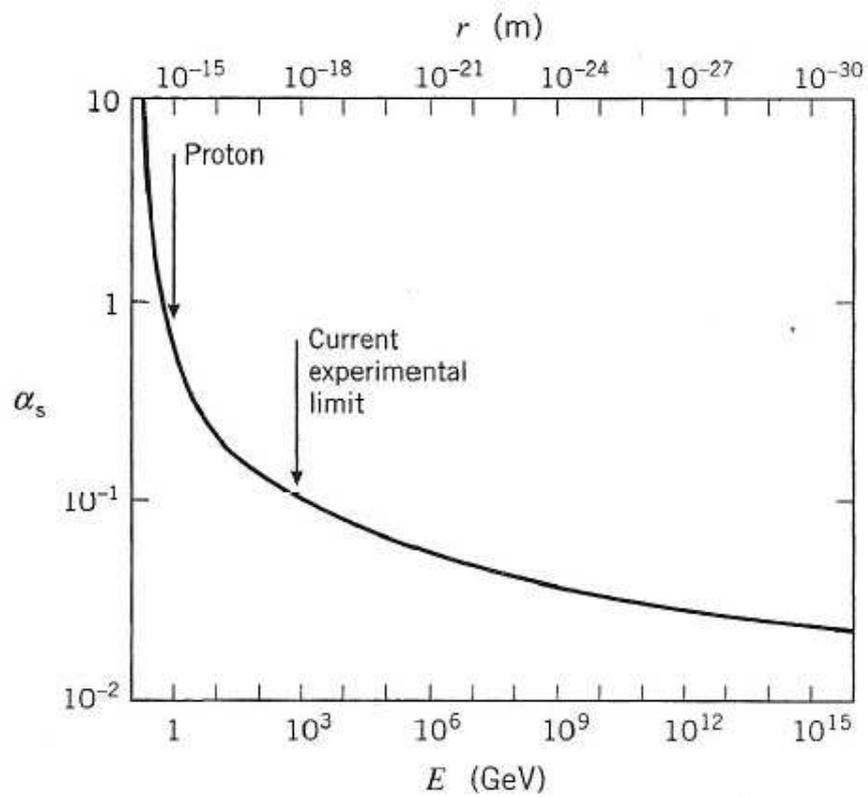


Fig. 1.3: Representação gráfica da dependência com a energia da constante de acoplamento dinâmico α_s .

variedade de experimentos, foi determinado que

$$\Lambda_{\text{QCD}} \approx 0.2\text{GeV}.$$

Capítulo 2

O Espalhamento Profundamente Inelástico

O DIS caracteriza-se pela interação eletromagnética de um *lépton* (l) de alta energia com um *nucleon* (N), sendo este um próton ou um nêutron, ou com nucleons dentro do núcleo. Tais interações ocorrem por meio da troca de um bóson de calibre (γ^* , Z^0 para corrente neutra e W^\pm para corrente carregada). No caso de corrente neutra o lépton final é do mesmo tipo que o inicial, enquanto que para corrente carregada os léptons finais e iniciais são diferentes. No estado final são medidos o lépton e um estado hadrônico X , dado por

$$l + N \rightarrow l' + X. \quad (2.1)$$

No caso de medirmos, além do estado hadrônico X , somente o lépton no estado final, temos um processo dito inclusivo; enquanto que havendo a seleção de um certo estado final o processo é chamado exclusivo. O processo caracterizado por (2.1) é ilustrado na Figura (2.1), onde k^μ e k'^μ são respectivamente o 4-momentum inicial e final do lépton, assim como P^μ e P_X^μ são respectivamente o 4-momentum inicial e final do nucleon e do respectivo estado hadrônico; o fóton virtual* γ^* apresenta 4-momentum $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$ do tipo espaço ($q^2 < 0$), que define a escala de energia pela qual a estrutura hadrônica será provada[18].

2.1 Cinemática do DIS

A reação representada em (2.1)[†] é descrita por três variáveis cinemáticas chamadas de variáveis independentes de Mandelstam. Para o sistema γ^* -nucleon a energia E do lépton é

* Estes são fótons no qual a energia não é igual ao momentum multiplicado por c . Apenas fótons reais satisfazem a relação de Einstein para energia total e momentum

$$E^2 = M^2c^4 + P^2c^2,$$

com massa de repouso M sendo zero. Fótons virtuais não satisfazem esta relação e podem ser do tipo tempo, $E > PC$, ou tipo espaço, $E < PC$. Estes não podem ser livres e, no entanto, existem pelo intervalo de tempo permitido pelas relações de incerteza de Heisenberg.

[†] Faz-se uso do sistema de unidades naturais (UN), i.e., $\hbar = c = 1$. A fórmula de conversão do MKS $\rightarrow UN$ é $[M]^i[L]^j[T]^k = [M]^{i-j-k}$, onde as quantidades entre colchetes referem-se às unidades de massa, comprimento e tempo; e i, j, k são números inteiros.

fixada pelas condições experimentais, ou, alternativamente, o quadrado da energia do centro de massa

$$W = (P + q)^2 = P_X^2 = M_X^2, \quad (2.2)$$

também identificada como a massa invariante do estado hadrônico X .

Através do quadrado do momentum transferido, defini-se a virtualidade do bóson de calibre

$$Q^2 \equiv -q^2 = q^\mu q_\mu > 0. \quad (2.3)$$

A virtualidade indica a resolução com a qual o bóson de calibre, neste caso o fóton virtual, sonda o alvo. Espera-se que a virtualidade seja maior que a massa dos nucleons para que o fóton possa interagir isoladamente com os componentes do nucleon.

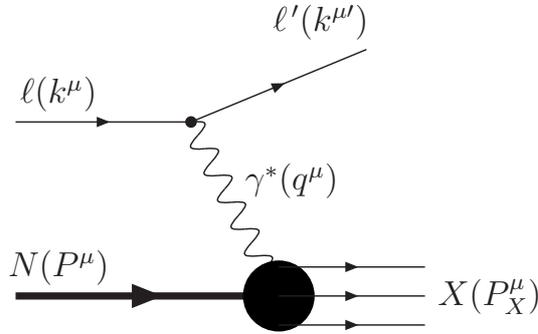


Fig. 2.1: DIS em LO em teoria de perturbação.

As variáveis independentes de Mandelstam são escritas como

$$\begin{aligned} s &= (K + P)^2 = E_{CM}, \\ t &= (k - k')^2 = -Q^2, \\ u &= (k - P_X)^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

no qual s é a energia do centro de momentum lépton-nucleon.

As variáveis de Mandelstam são invariantes de Lorentz que relacionam energia, momentum e ângulo de espalhamento. No referencial de repouso do nucleon temos

$$\begin{aligned} P^\mu &= (M, 0, 0, 0), \\ k^\mu &= (E, 0, 0, E), \\ k'^\mu &= (E', E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

no qual M é a massa do nucleon e θ é o ângulo de espalhamento do lépton. Neste referencial, valem as seguintes relações

$$\begin{aligned} s &= M^2 + 2EM, \\ Q^2 &= 2EE'(1 - \cos \theta) = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ W^2 &= M^2 + 2M(E - E') - Q^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Estas três variáveis são suficientes para caracterizar completamente o processo para um estado final hadrônico X .

Em relação ao referencial de repouso do alvo é possível determinar a diferença de energia entre os estados inicial e final do lépton

$$\nu = E - E' = \frac{P \cdot q}{M}. \quad (2.7)$$

O DIS é descrito pela fração de momentum do párton provado

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (2.8)$$

e utilizando a equação (2.6), encontramos

$$x = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - M^2}, \quad (2.9)$$

como

$$\begin{aligned} W^2 &= (P + q)^2 \\ &= M^2 + 2M\nu(1 - x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

concluimos que x está limitado entre $0 \leq x \leq 1$, pois $W^2 \geq M^2$.

A variável chamada de inelasticidade define a fração de energia perdida pelo lépton no referencial de repouso do nucleon

$$y = \frac{\nu}{E} = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} = \frac{W^2 + Q^2 - M^2}{s - M^2}, \quad (2.11)$$

também está limitada entre $0 \leq y \leq 1$. A região cinemática permitida está representada na Figura (2.2). A expressão profundamente inelástico é cunhada em relação ao regime no qual $M\nu \ll M^2$ e $Q^2 \ll M^2$, mantendo-se x fixo. Assim é possível desprezar a massa do nucleon frente às outras grandes escalas de energia do processo.

Por fim, podemos definir a variável Y , chamada de rapidez, que está relacionada à energia do centro de massa do processo com a virtualidade da partícula de prova que sonda o hádron. A rapidez Y é expressa por

$$Y = \log \frac{1}{x}. \quad (2.12)$$

Para Q fixo,

$$\lim_{W \rightarrow \infty} x = \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{Q^2}{W^2 - M^2 + Q^2} = 0, \quad (2.13)$$

i.e., quanto maior a energia do sistema fóton-hádron (W), menor será x , por conseguinte maior será Y .

2.2 Seção de Choque Inclusiva no Processo $ep \rightarrow eX$

Considerando um DIS *elétron-próton* (ep), i.e., o caso em que o lépton incidente seja um elétron e cujo nucleon alvo um próton; assim estamos interessados em descrever o processo

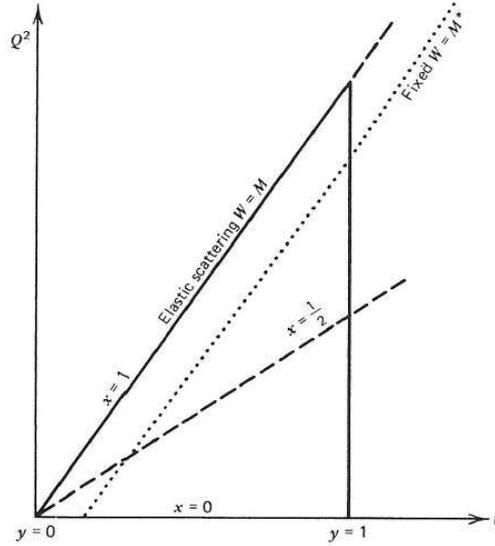


Fig. 2.2: O triângulo é a região cinemática permitida para o DIS ep . $\nu_{max} = E$ no referencial de repouso do alvo; W é a massa invariante do estado hadrônico final X , equação (2.6)[13].

inclusivo $ep \rightarrow eX$ e a estrutura do próton em pequenas distâncias sendo sondado por um fóton virtual.

No referencial de repouso do próton, a seção de choque diferencial – em ordem dominante na *Eletrodinâmica Quântica (QED)* – para o processo é dada por[13, 18]

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2 E'}{2MQ^4 E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

sendo α_{em} a constante de acoplamento eletromagnética; $\Omega \equiv (\theta, \phi)$ é o ângulo sólido de espalhamento que caracteriza a direção do elétron no estado final; $L^{\mu\nu}$ é o tensor de vértice leptônico que é calculado através das regras de Feynman da QED e $W_{\mu\nu}$ é o tensor de vértice hadrônico que é escrito através de uma parametrização dos 4-momenta presentes no vértice fóton-próton (γ^*p). Portanto, da equação (2.14) obtemos

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1(\nu, Q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(\nu, Q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.15)$$

sendo $W_1(\nu, Q^2)$ e $W_2(\nu, Q^2)$ chamadas de funções de estrutura; estas trazem informações relevantes da estrutura do próton para o DIS ep .

Devido à simetria cilíndrica, é possível reescrever a seção de choque dada por (2.15)[19],

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{d^2\sigma}{dE'2\pi \sin \theta d\theta}. \quad (2.16)$$

Então, utilizando as equações (2.6),(2.8) e (2.11), e avaliando o determinante de Jacobi

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} &= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(E', \theta)} \right| \frac{d^2\sigma}{dxdy} \\
 &= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \left| \frac{\frac{\partial x}{\partial E'} \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}}{\frac{\partial y}{\partial E'} \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}} \right| \frac{d^2\sigma}{dxdy} \\
 &= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \left| \begin{array}{c} \frac{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}}{M} \left[\frac{E' + (E - E')}{(E - E')^2} \right] \\ -\frac{1}{E} \end{array} \right| \frac{2EE'}{(E - E')M} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left| \frac{d^2\sigma}{dxdy} \right. \\
 &= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \frac{2E'}{(E - E')M} \frac{\sin \theta}{2} \frac{d^2\sigma}{dxdy} \\
 &= \frac{E'}{2\pi MEy} \frac{d^2\sigma}{dxdy}. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Introduz-se as funções de estrutura adimensionais[‡]

$$F_1(x, Q^2) \equiv MW_1(\nu, Q^2) \tag{2.18}$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2). \tag{2.19}$$

Em termos destas funções e das variáveis x e y , podemos escrever a equação (2.15) como

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{8\pi MyEE'\alpha_{em}}{Q^4} \left[\frac{2}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} F_1(x, Q^2) + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{yE} F_2(x, Q^2) \right], \tag{2.20}$$

e com isto a seção de choque inclusiva no processo $ep \rightarrow eX$ é dada por

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{8\pi ME\alpha^2}{Q^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{M}{2E}xy \right) F_2(x, Q^2) \right]. \tag{2.21}$$

2.3 Modelo de Pártons

Antes do advento da QCD, Bjorken e Feynman formularam o chamado modelo de pártons, o qual é baseado na suposição de que o fóton virtual é espalhado com os componentes do próton, tratados como partículas livres. A Figura (2.3) ilustra o DIS descrito pelo modelo de pártons. O fóton virtual espalha com um dos pártons que compõem o próton, que depois da colisão contribui para a formação do estado hadrônico X final.

2.3.1 Escalamento de Bjorken

No limite de altas energias, quando $\nu \rightarrow \infty$ e $Q^2 \rightarrow \infty$, i.e., quando $x \rightarrow 0$, a razão ν/Q^2 mantém-se finita, limite este conhecido como limite de Bjorken. As funções de estrutura $W_{1,2}$ dependem apenas de uma variável adimensional ω definida como[13, 18]

$$\omega = \frac{2M\nu}{Q^2}. \tag{2.22}$$

[‡] As funções de estrutura serão tratadas na próxima seção.

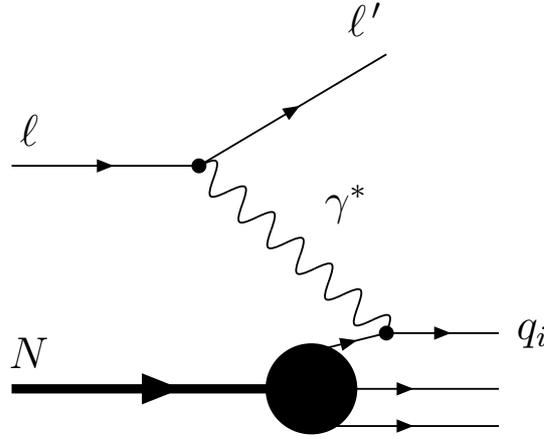


Fig. 2.3: DIS no modelo de pártons.

Assim, neste limite, podemos convenientemente reescrever as funções de estrutura de forma adimensional

$$F_1(\omega, Q^2) \equiv MW_1(\nu, Q^2) \quad (2.23)$$

$$F_2(\omega, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2). \quad (2.24)$$

2.3.2 Função de Estrutura do Próton

Neste modelo, no qual os pártons são tratados como partículas pontuais, obtém-se que $F_{1,2}$ dependem apenas de ω , e não de ω e Q^2 . O limite de Bjorken implica

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} MW_1(\nu, Q^2) = F_1(\omega), \quad (2.25)$$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \nu W_2(\nu, Q^2) = F_2(\omega). \quad (2.26)$$

Este comportamento é chamado de escalamento das funções de estrutura, e foi de fato verificado experimentalmente no DIS ep no SLAC[14].

Em um hádron, cada párton carrega uma fração x de momentum deste. A função de distribuição de momentum do i -ésimo párton é dada por[13]

$$f_i(x) = \frac{dP_i}{dx}, \quad (2.27)$$

esta descreve a probabilidade do i -ésimo párton carregar uma fração x do momentum do próton. O número de pártons no próton pode ser expresso como

$$N = \int_0^1 dx f_i(x). \quad (2.28)$$

Por conservação de momentum, a soma sobre todas as frações de x portadas pelos pártons deve ser igual ao momentum do próton

$$\sum_i \int_0^1 dx x f_i(x) = 1, \quad (2.29)$$

no qual a integral fornece a fração média de momentum carregado pelo i -ésimo parton.

A partir das funções de distribuição de momentum dos partons, podemos obter as funções de estrutura do próton. No entanto, para obtermos as funções de estrutura do próton é necessário considerar as funções de estrutura dos partons que o formam, dadas por

$$F_1(\omega) = \frac{Q^2}{4m\nu x} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) = \frac{1}{2x^2\omega} \delta\left(1 - \frac{1}{x\omega}\right), \quad (2.30)$$

$$F_2(\omega) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right) = \delta\left(1 - \frac{1}{x\omega}\right). \quad (2.31)$$

Somando $F_{1,2}$ para um parton, sobre todos os partons que formam o próton, obtemos

$$F_2(\omega) = \sum_i \int dx e_i^2 f_i(x) x \delta\left(x - \frac{1}{\omega}\right), \quad (2.32)$$

$$F_1(\omega) = \frac{\omega}{2} F_2(\omega). \quad (2.33)$$

É conveniente redefinir $F_{1,2}(\omega)$ como $F_{1,2}(x)$. Desta forma obtemos

$$F_1(x) = \frac{F_2(x)}{2x}, \quad (2.34)$$

$$F_2(x) = x \sum_i e_i^2 f_i(x), \quad (2.35)$$

onde e_i corresponde à carga do i -ésimo parton. A equação (2.35) é chamada de Relação de Callan-Gross; e a variável x de Bjorken é definida como o inverso de ω

$$x = \frac{1}{\omega} = \frac{Q^2}{2M\nu}. \quad (2.36)$$

2.3.3 A Contribuição dos Quarks na Estrutura do Próton

O somatório na equação (2.35) é realizado sobre os partons carregados, pois do contrário, o termo seria nulo. Desconsiderando a possibilidade da presença do quark *charm* (c) e de quarks mais pesados, temos apenas os quarks *up* (u), *down* (d) e *strange* (s); e seus respectivos antiquarks. Assim, para um elétron colidindo em um próton, a equação (2.35) é escrita como

$$\frac{1}{x} F_2^{ep}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)]. \quad (2.37)$$

No caso de o alvo ser um nêutron, temos

$$\frac{1}{x} F_2^{en}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^n(x) + \bar{s}^n(x)], \quad (2.38)$$

onde ($u^p, u^n, \bar{u}^p, \dots$) são as funções de distribuição de momentum dos respectivos quarks.

Como o próton e o nêutron formam um duplete de isospin, suas funções de distribuição de momentum estão relacionadas. Devido às semelhanças de ambos, mesmo número quântico de spin=1/2; possuem aproximadamente a mesma massa e interação da mesma forma na interação forte – atribui-se o número quântico de isospin, relacionando o próton e o nêutron como sendo estados quânticos diferentes de uma mesma entidade chamada nucleon. Como há tantos quarks u em um próton quanto d em um nêutron, podemos dizer que as funções de distribuição de momentum destes quarks serão iguais, $u^p(x) = d^n(x)$; e pelo mesmo motivo temos também $d^p(x) = u^n(x)$ e $s^p(x) = s^n(x)$. Portanto

$$\begin{aligned} u^p(x) &\equiv d^n(x), \\ d^p(x) &\equiv u^n(x), \\ s^p(x) &\equiv s^n(x). \end{aligned} \tag{2.39}$$

O próton é formado por três quarks de valência[§] ($u_v u_v d_v$), i.e., que possuem uma natureza não perturbativa e definem cada tipo de hádron conhecido, e também é formado pelos quarks de mar[¶] ($u_s \bar{u}_s, d_s \bar{d}_s \dots$), estes produzidos em pares $q\bar{q}$ pela flutuação dos propagadores da interação forte. A partir dos quarks de valência do próton, tem-se um vínculo para as funções de distribuição de momentum dos quarks.

Em primeira aproximação, podemos considerar que os consituíntes do mar de quarks que são mais leves, i.e., os quarks u , d e s , ocorrem com a mesma freqüência e mesma distribuição de momentum, e desconsiderando os sabores de quarks mais pesados. Esta representação do próton pode ser resumida como

$$\begin{aligned} u_s(x) = \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) &= S(x), \\ u(x) &= u_v(x) + u_s(x), \\ d(x) &= d_v(x) + d_s(x), \end{aligned} \tag{2.40}$$

sendo $S(x)$ a distribuição de momentum do mar de quarks.

Através das relações (2.40), obtêm-se as seguintes relações

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &= u - \bar{u}_s = u - u_s = u_v, \\ d - \bar{d} &= d - \bar{d}_s = d - d_s = d_v, \\ s - \bar{s} &= s_s - \bar{s}_s = 0, \end{aligned} \tag{2.41}$$

pois não há quarks \bar{u} , \bar{d} e \bar{s} de valência.

Integrando estas equações, obtemos a quantidade de quarks de valência do próton.

$$\int_0^1 dx [u(x) - \bar{u}(x)] = 2, \tag{2.42}$$

$$\int_0^1 dx [d(x) - \bar{d}(x)] = 1, \tag{2.43}$$

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0. \tag{2.44}$$

[§] Quarks e antiquarks responsáveis pelas propriedades como spin, carga e energia de repouso do hádron.

[¶] Pares $q\bar{q}$ o qual não mudam a natureza do hádron, mas contribuem com uma fração significativa para a energia de repouso.

Podemos reescrever as equações (2.37) e (2.38) em termos das relações (2.40). Então, para o próton temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x}F_2^{ep} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u_v + u_s + \bar{u}_v + \bar{u}_s] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d_v + d_s + \bar{d}_v + \bar{d}_s] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [S + S] \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u_v + S + S] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d_v + S + S] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [S + S] \\
 &= \frac{1}{9}[4u_v + d_v] + \frac{4}{9}S.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Para o nêutron

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x}F_2^{en}(x) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [d_v + d_s + \bar{d}_v + \bar{d}_s] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [u_v + u_s + \bar{u}_v + \bar{u}_s] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [S + S] \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [d_v + S + S] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [u_v + S + S] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [S + S] \\
 &= \frac{1}{9}[u_v + 4d_v] + \frac{4}{9}S.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Como glúons criam pares $q\bar{q}$ de mar, espera-se que $S(x)$ apresente um espectro tipo Bremsstrahlung para região de pequeno x , de maneira que o número de quarks de mar cresce logaritmicamente à medida que $x \rightarrow 0$ [13].

Quando $x \approx 0$, a fração de momentum dos quarks de valência é muito menor que a dos pares $q\bar{q}$ de mar, já que o número de pares cresce logaritmicamente. Portanto das equações (2.45) e (2.46) temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \rightarrow 0. \tag{2.47}$$

Quando $x \approx 1$ os quarks de valência u_v e d_v possuem grande parte do momentum do hádron, deixando uma pequena fração de momentum para os quarks de mar. Portanto das equações (2.45) e (2.46) temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \rightarrow \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v}. \tag{2.48}$$

2.3.4 Fração de Momentum do Próton Portado pelos Glúons

Se somarmos os momenta de todos os pártons, devemos recuperar o momentum total do próton

$$\int_0^1 dx xp [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = p - p_g, \tag{2.49}$$

onde consideramos apenas a contribuição dos quarks, portanto o resultado deve ser a diferença entre o momentum total do próton do momenta dos glúons p_g . Multiplicando por p^{-1} , e definindo a fração de momentum portado pelos glúons $\epsilon_g \equiv p_g/p$, temos

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 - \epsilon_g. \quad (2.50)$$

Pode-se mostrar que – desconsiderando o momentum dos quarks s , pois estes carregam um pequena fração do momentum no nucleon – a partir das equações (2.37) e (2.38) temos[13]

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x F_2^{ep}(x) &= \frac{4}{9} \int_0^1 dx x [u + \bar{u}] + \frac{1}{9} \int_0^1 dx x [d + \bar{d}] = \frac{4}{9}\epsilon_u + \frac{1}{9}\epsilon_d = 0.18, \\ \int_0^1 dx x F_2^{en}(x) &= \frac{1}{9} \int_0^1 dx x [u + \bar{u}] + \frac{4}{9} \int_0^1 dx x [d + \bar{d}] = \frac{1}{9}\epsilon_u + \frac{4}{9}\epsilon_d = 0.12, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde ϵ_u e ϵ_d é definido como a fração de momentum portado por $(u + \bar{u})$ e $(d + \bar{d})$. Pela equação (2.50) obtém-se uma relação aproximada para ϵ_g

$$\epsilon_g \approx 1 - \epsilon_u - \epsilon_d, \quad (2.52)$$

e resolvendo a equação (2.51), encontra-se

$$\begin{aligned} \epsilon_u &= 0.36, \\ \epsilon_d &= 0.18, \\ \epsilon_g &= 0.48. \end{aligned} \quad (2.53)$$

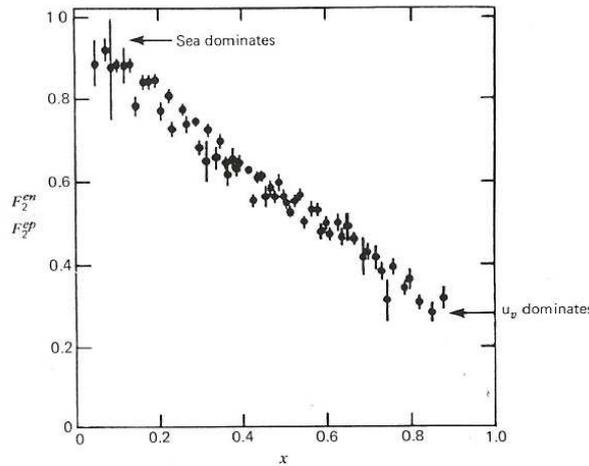


Fig. 2.4: Razão F_2^{en}/F_2^{ep} como função de x obtidos de DIS no SLAC[13].

Portanto, a distribuição de momentum dos quarks no espalhamento ep nos leva a concluir que incluindo apenas a contribuição de pártons carregados na equação (2.35), obtém-se que uma fração substancial do momentum do hádron, aproximadamente 50%, é carregado por pártons neutros, não sendo diretamente detectados em experimentos de DIS ep . Estes

pártons podem ser associados com as partículas mediadoras da interação forte, os glúons. Experimentalmente, as distribuições de quarks de valência anulam-se para $x = 0$, enquanto que os quarks de mar tendem a popular a região de pequeno x , Figura (5.2). Os glúons, por sua vez, são originados em maior número na região de pequeno x , já que não possuem massa[13].

2.4 O Referencial de Momentum Infinito

O modelo de pártons é apenas uma aproximação de mais baixa ordem do espalhamento do γ^* com as componentes do próton, pois os constituintes partônicos não são realmente objetos livres. Estes são descritos pela QCD, a teoria da interação de quarks e glúons. De acordo com essa teoria, novos subprocessos podem contribuir para a seção de choque do DIS ep . O diagrama que representa o modelo de pártons, Figura (2.3), corresponde a seção de choque de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em})$. No entanto os quarks de valência podem emitir um glúon, antes ou depois de interagir com o fóton, o que leva aos processos representados pelos diagramas da Figura (2.5). Também há as contribuições gluônicas, representadas pelos diagramas da Figura (2.6), onde o glúon, emitido pelo quark de valência, flutua em um par $q\bar{q}$ de mar, onde um deles interage com o fóton. Estes diagramas contribuem para a seção de choque com termos de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$, onde α_s é o parâmetro de acoplamento forte.

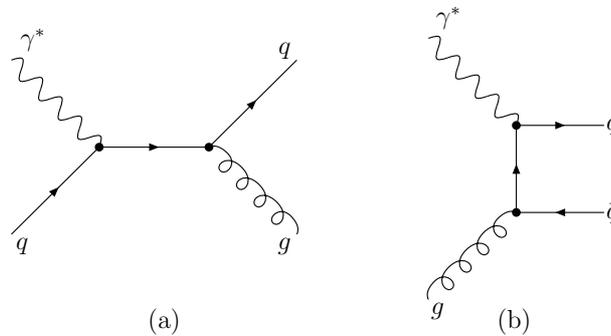


Fig. 2.5: Contribuições adicionais de ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$ para o processo $ep \rightarrow eX$ não contidos no modelo de pártons. (a) Emissão de glúons pelos quarks e (b) glúons no estado inicial.

Na QCD, os quarks e glúons podem irradiar quanta virtuais (quarks e glúons) e estes interagem através da troca desses quanta. As excitações dentro dos hádrons podem ter energias e momenta arbitrariamente grandes, i.e., as interações podem ter escalas de tempo arbitrariamente pequenas. Portanto, é complicado separar as interações que ocorrem dentro do alvo com aquelas com o projétil (γ^* no caso do DIS ep). Devido à liberdade assintótica, flutuações com momenta muito grandes possuem baixa probabilidade de ocorrer, o que permite cálculos em teoria de perturbação. Assim, é possível desenvolver uma representação partônica para pequenos tempos, i.e., grandes momenta transferidos. Entretanto, esta representação depende do referencial onde os processos são vistos.

Um referencial especial é o *Referencial de Momentum Infinito (IMF)*, que fornece uma maneira de separar as flutuações hadrônicas das flutuações de vácuo. O IMF consiste em realizar uma transformação de Lorentz para um referencial no qual o hádron possui um

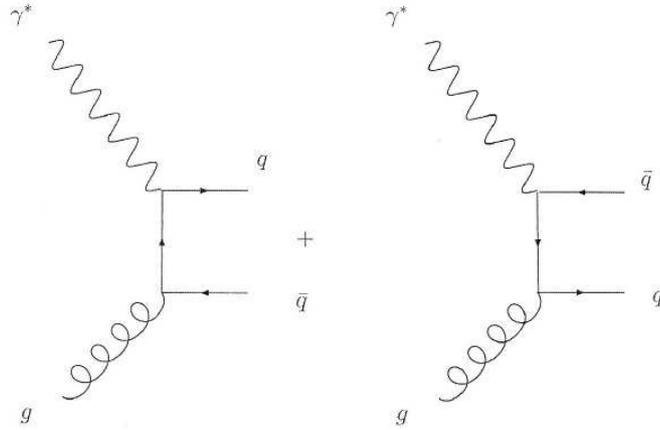


Fig. 2.6: Diagramas que contribuem no processo $ep \rightarrow eX$ em ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$.

momentum longitudinal muito grande. Esta representação de IMF, e como o DIS ep é um experimento que analisa a distribuição partônica no próton, motiva escrever a função de estrutura F_2 como

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_i e_i^2 [f_i(x, Q^2) + \bar{f}_i(x, Q^2)], \quad (2.54)$$

onde $f_i(x, Q^2)$ e $\bar{f}_i(x, Q^2)$ são as funções de distribuição de momentum dos quarks e anti-quarks.

2.5 O Regime de Altas Energias

A equação (2.54) apresenta uma dependência em ambos x e Q^2 , ao contrário do que é previsto pelo modelo de pártons. Essa violação do escalamento de Bjorken é um exemplo de evolução dos observáveis na QCD. O escalamento de Bjorken aparece apenas como uma propriedade aproximada dos dados, e em um regime cinemático limitado. Na representação de IMF, espera-se que o número de pártons cresça com o aumento de Q^2 , i.e., crescimento de F_2 com Q^2 para x fixo.

Na Figura (2.7), é mostrada a F_2 para os dados de HERA[20]. É claramente visível o crescimento de F_2 no limite de pequeno x . Fisicamente, aumentar Q^2 é como melhorar a resolução de um microscópio, com seu aumento, é possível resolver pártons que estão cada vez mais localizados e cujo tempo de vida é cada vez menor. Esta é a base para as equações DGLAP[21, 22], que descrevem a evolução das funções de distribuição de momentum dos pártons com o aumento de Q^2 , veja apêndice B.

A região de maior interesse é a de pequeno x , responsável pelo rápido crescimento de F_2 . Embora não seja diretamente medida pelo DIS, é o crescimento rápido da densidade de glúons que domina a evolução no limite de pequeno x . Em ordem mais baixa da teoria de perturbação, tem-se

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} \approx \frac{\alpha_s}{3\pi} xG(x, Q^2) \sum_i e_i^2, \quad (2.55)$$

o qual $\alpha_s = e_s^2/4\pi$ em analogia à α_{em} e $xG(x, Q^2)$ é a função de distribuição de momentum de glúons. Através da equação (2.55) tem-se a distribuição de glúons a partir da evolução

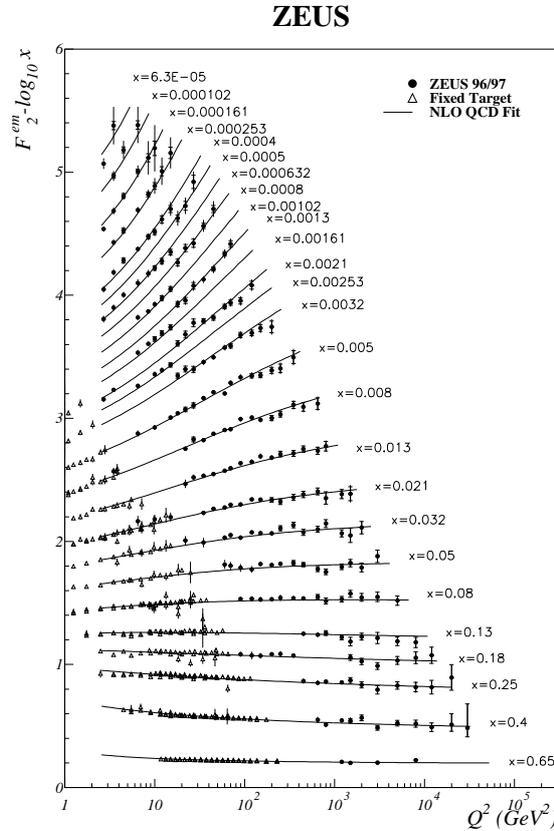


Fig. 2.7: A função de estrutura F_2 medida pelo experimento ZEUS, como uma função de Q^2 para diferentes valores de x [20].

da F_2 . A Figura (2.8) mostra a comparação entre a distribuição de glúons, de quarks de valência e de mar em um próton.

2.6 Conclusões

Neste capítulo, apresentamos o DIS ep onde introduzimos as variáveis cinemáticas de virtualidade Q^2 e x de Bjorken. Introduzimos as funções de estrutura o qual são relacionadas com a distribuição de pártons no interior do hádron. Discutimos as correções necessárias de ordem $\alpha_{em}\alpha_s$ que contribuem para o cálculo das seções de choque, uma vez que o modelo de pártons é uma aproximação de mais baixa ordem do espalhamento do fóton com as componentes do próton. Também verificamos que aproximadamente 50% do momentum total do hádron é carregado por pártons neutros que não são detectados em experimentos de DIS ep , sendo estes pártons os glúons. A QCD, no entanto, não prediz a distribuição dos pártons no interior dos hádrons, descreve apenas sua evolução mediante algum observável. A violação do escalamento de Bjorken relaciona-se com a evolução dos observáveis na QCD. As equações DGLAP descrevem a evolução das funções de distribuição de momentum em relação ao aumento da virtualidade.

É interessante estudarmos o DIS ep no referencial de dipolos de cor da QCD no qual

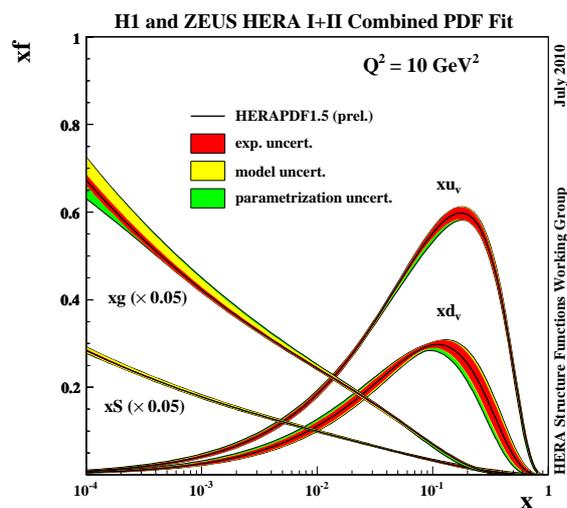


Fig. 2.8: As distribuições de quarks (xu_v, xd_v), glúons (xG) e quarks de mar (xS) em um próton para dados de HERA[23].

considera-se o fóton virtual como uma flutuação de uma par $q\bar{q}$ ou um dipolo de cor. Este referencial permite também a fatorização da seção de choque e, por conseguinte, em uma fatorização das funções de estrutura, como será mostrado no capítulo segundo.

Capítulo 3

Fenomenologia Aplicada ao DIS

O DIS ep pode ser estudado também no referencial de repouso do alvo, mais conhecido como referencial de dipolos de cor. Este referencial pode ser obtido através de uma transformação de Lorentz, de modo que a maior parte do momentum ainda seja carregado pelo próton, mas o fóton virtual (*a partícula prova*) emitido pelo elétron possui momentum suficiente para desdobrar-se, antes do espalhamento, em um par quark-antiquark ($q\bar{q}$), i.e., em um dipolo que posteriormente interage com o alvo. Ou seja, no referencial de dipolos de cor a quantidade que está provando o alvo não é mais o fóton, mas sim o par $q\bar{q}$. A Figura (3.1) ilustra a interação dipolo-alvo, apresentando as variáveis envolvidas no processo.

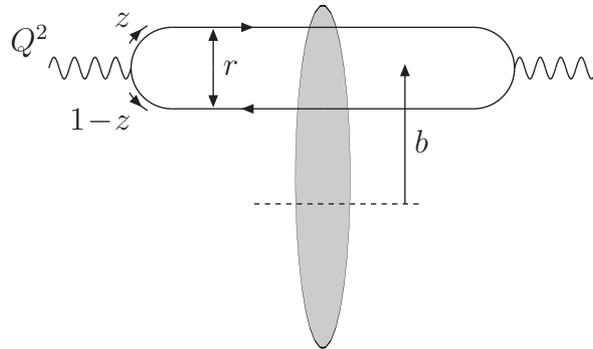


Fig. 3.1: Representação do DIS no referencial de dipolos de cor em termos das variáveis envolvidas: o tamanho do dipolo r , o parâmetro de impacto \mathbf{b} e as frações de momentum do fóton carregadas pelos constituintes do dipolo.

3.1 DIS no Referencial de Dipolos de Cor

Pode-se mostrar que o tempo de vida do par $q\bar{q}$ é muito maior que o tempo de colisão, de tal forma que a separação transversal do dipolo seja constante durante a interação, como mostrado na Figura (3.1). O tempo de vida, também chamado de comprimento (ou tempo) de coerência l_c , pode ser estimado com o uso da relação de incerteza. Considerando o fóton com virtualidade Q^2 , energia q_0 e momentum $|\mathbf{q}|$, de forma que o comprimento de coerência é o tempo no qual o fóton virtual existe como uma flutuação $q\bar{q}$ de massa $M_{q\bar{q}}$. Pela relação de incerteza, temos que l_c é inversamente proporcional à diferença de energia ΔE entre o

fóton e o par $q\bar{q}$. Então

$$l_c = \frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{q}|^2 + M_{q\bar{q}}^2} - q_0} \approx \frac{2|\mathbf{q}|}{M_{q\bar{q}}^2 + Q^2} \approx \frac{|\mathbf{q}|}{Q^2}, \quad (3.1)$$

o qual, por conservação de momentum, usamos $M_{q\bar{q}} = Q^2$. Utilizando (2.36), e levando em consideração que no referencial de repouso do alvo $p \cdot q = M_N |\mathbf{q}|$, portanto $Q^2 = 2xM_N |\mathbf{q}|$, com isso l_c é escrito como

$$l_c = \frac{1}{2xM_N}, \quad (3.2)$$

sendo M_N a massa do alvo.

Esta representação física é expressa em uma fórmula fatorizada para as seções de choque inclusiva $\gamma^* -$ próton, onde este é escrito da seguinte maneira[9]

$$\sigma_{\text{T,L}}^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz |\Psi_{\text{T,L}}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y), \quad (3.3)$$

o qual $|\Psi_{\text{T,L}}(r, z; Q^2)|^2$ são as funções de onda (transversal e longitudinal) do fóton que fornecem as amplitudes de probabilidades* para um fóton separar-se em um dipolo com tamanho transversal r ; z e $1 - z$ são as frações de momentum do fóton portadas pelo quark e antiquark e $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}$ é a seção de choque de dipolo, a qual não pode ser calculada perturbativamente, sendo assim dependente do modelo.

3.2 A Função de Estrutura do Próton no Referencial de Dipolos

Considerando o próton[†] como um disco homogêneo de raio R_p , i.e., se o parâmetro de impacto for mantido fixo, pode-se relacionar a seção de choque de dipolo da equação (3.3) com a amplitude de espalhamento para a frente $N(r, Y)$ através da relação[10]

$$\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 N(r, Y), \quad (3.4)$$

A função de estrutura F_2 do próton pode ser escrita em termos da seção de choque γ^*p através da expressão

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi\alpha_{\text{em}}} \left[\sigma_{\text{T}}^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_{\text{L}}^{\gamma^*p}(x, Q^2) \right]. \quad (3.5)$$

Assim, é possível expressar a F_2 em termos da amplitude de espalhamento $N(r, Y)$

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{\text{em}}} \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz \left[|\Psi_{\text{T}}(r, z; Q^2)|^2 + |\Psi_{\text{L}}(r, z; Q^2)|^2 \right] N(r, Y), \quad (3.6)$$

onde a amplitude de espalhamento depende do tamanho r do dipolo, i.e., é expressa no espaço de coordenadas.

* Estas são calculadas na QED.

[†] Consideraremos, agora, o alvo como sempre sendo o próton.

3.3 F_2 no Espaço de Momentum

Para expressarmos estas quantidades no espaço de momentum[24], usamos a seguinte transformada de Fourier

$$N(r, Y) = \frac{r^2}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathcal{N}(k, Y) = r^2 \int_0^\infty dk k J_0(kr) \mathcal{N}(k, Y), \quad (3.7)$$

a qual tem por inversa

$$\mathcal{N}(k, Y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{r^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} N(r, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) N(r, Y), \quad (3.8)$$

onde $J_0(kr)$ é a função de Bessel de primeira espécie.

Definindo

$$\Phi(r, z) = \Phi_T(r, z) + \Phi_L(r, z) \quad \text{com} \quad \Phi_{T,L}(r, z) = |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2, \quad (3.9)$$

então, da mesma forma temos as transformadas de Fourier para $\phi(r, z)$

$$\Phi(r, Y) = \frac{1}{r^2} \int d^2\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\Phi}(k, Y) = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{\Phi}(k, Y), \quad (3.10)$$

e a respectiva transformada inversa

$$\tilde{\Phi}(k, Y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{r} r^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi(r, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \Phi(r, Y). \quad (3.11)$$

Com estas transformadas, a F_2 no espaço de momentum apresenta a seguinte forma

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz \left| \tilde{\Psi}(k, z; Q^2) \right|^2 \mathcal{N}(k, Y), \quad (3.12)$$

onde N_c é o número de cor.

3.4 Escalamento Geométrico

O escalamento geométrico é uma propriedade, empírica, importante das seções de choque do DIS em altas energias. Foi observado pela primeira vez nos dados de HERA[14] de espalhamento γ^*p inclusivo de pequeno x . O escalamento é dado por uma relação de combinação entre Y e Q^2 para as seções de choque, ao invés de ter dependência nas duas variáveis separadamente

$$\sigma^{\gamma^*p}(Y, Q^2) = \sigma^{\gamma^*p} \left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \right), \quad (3.13)$$

onde $Q_s^2(Y)$ é uma função crescente de Y .

Esta propriedade de escalamento está relacionada ao conceito de saturação, i.e., ao comportamento das amplitudes da QCD quando a densidade de pártons é suficientemente

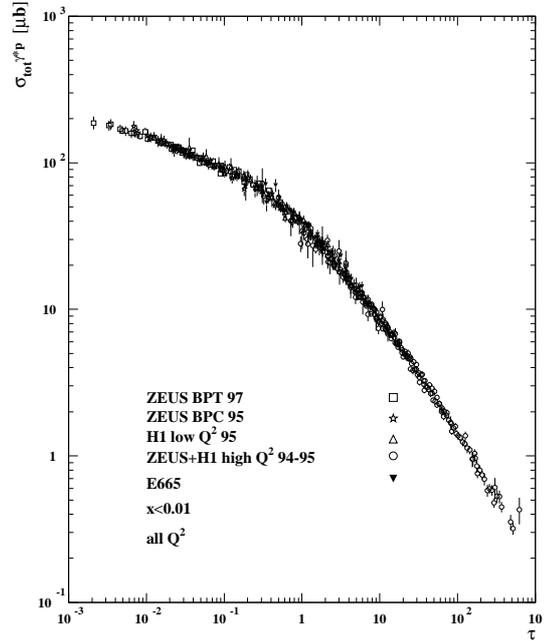


Fig. 3.2: Escalamento geométrico observado nos dados de HERA de espalhamento γ^*p em altas energias. Os dados dependem apenas da variável $\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}$ [14].

grande para que seja necessário introduzir correções para as amplitudes não violarem o limite de unitariedade da matriz de espalhamento S . Portanto, $Q_s^2(Y)$ é chamada de escala de saturação, pois esta marca um limite superior para a região onde deve ocorrer saturação partônica,

$$Q_s^2(Y) \approx x^{-\lambda} = e^{\lambda Y}, \quad (3.14)$$

o valor $\lambda \approx 0.3$ do expoente de saturação foi confirmado pelo modelo GBW[25]. O nome escalamento *geométrico* vem justamente desta dependência em uma potência de x ; lembramos que a variável rapidez é $Y = \log(1/x)$. Logo, quanto maior a rapidez, maior a escala de saturação.

Na figura (3.2), os dados de HERA[14] mostram o escalamento geométrico, visto que os pontos caem aproximadamente sobre uma linha em função da variável de escalamento.

No referencial de dipolos da QCD para o DIS, a seção de choque γ^*p assume a forma fatorizada como mostrado na equação (3.3), no qual é uma função da probabilidade do fóton virtual decair em um par $q\bar{q}$ e da seção de choque dipolo-próton. Esta, considerando a não dependência do parâmetro de impacto, é proporcional à amplitude de espalhamento dipolo-próton, como mostrado na equação (3.4). E a amplitude de espalhamento pode ser escrita no espaço de momentum segundo a equação (3.8). Desta forma, na representação de dipolos da QCD, a propriedade de escalamento toma a seguinte forma

$$\mathcal{N}(k, Y) = \mathcal{N}\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right). \quad (3.15)$$

3.5 Conclusões

Apresentamos a descrição do DIS ep no chamado referencial de dipolos de cor da QCD no qual a seção de choque $\gamma^* - p$ pode ser fatorizada, levando à forma fatorizada das funções de estrutura. Apresentamos as funções de estrutura no espaço de momentum, o qual foram obtidas através da transformada de Fourier dada pela equação (3.7). Fizemos um breve estudo sobre a propriedade de escalamento geométrico das seções de choque no qual é dada por uma combinação da variável de rapidez Y e da virtualidade Q^2 , i.e., não deve haver uma dependência explícita em Y .

No capítulo terceiro ficará claro o motivo pelo qual escolhemos trabalhar com a função de estrutura no espaço de momentum. Veremos no entanto que as soluções da equação BK, que será apresentada no capítulo seguinte, possui termos subdominantes em Y , no caso de LO; e um termo explícito em Y , no caso de NLO. No entanto, o escalamento geométrico está presente nas amplitudes de espalhamento; logo, estes termos, de certa maneira, não influenciam o comportamento das amplitudes.

Capítulo 4

Amplitudes de Espalhamento em Altas Energias

4.1 As Correções de Unitariedade

A evolução dos observáveis segundo a dinâmica apresentada na formulação DGLAP e BFKL (veja apêndice B) prevêem o crescimento indefinido das distribuições partônicas, e portanto das seções de choque, com o aumento da energia, i.e., no regime de pequeno x . A unitariedade fornece uma conexão entre a seção de choque total e a amplitude de espalhamento; esta conexão é chamada de *Teorema Óptico**, e é a partir deste em que a seção de choque é calculada e também cresce segundo

$$\sigma_{\text{tot}} \sim \left(\frac{1}{x}\right)^\lambda, \quad (4.1)$$

com $\lambda = 4\bar{\alpha} \log 2$. Intuitivamente, espera-se que as seções de choque sejam limitadas à medida que $x \rightarrow 0$, de forma que o limite

$$\sigma_{\text{tot}} < C_0 \log^2 \left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow 0, \quad (4.2)$$

sendo C_0 uma constante, seja satisfeito; este limite é chamado de *Limite de Froissart-Martin*. O comportamento das soluções da equação BFKL não satisfaz este limite, tal que correções de unitariedade devem ser utilizadas para uma descrição “real” de processos em altas energias. No referencial do centro de massa do processo de colisão, o aumento da seção de choque é devido à proliferação da emissão de glúons durante a evolução; em altas energias, a densidade deverá ser grande o bastante para que haja a possibilidade de múltiplos espalhamentos. Correções como esta levam à saturação da densidade de pártons no alvo e, por conseguinte, ao controle do crescimento da seção de choque total, em acordo com a unitariedade.

* O Teorema Óptico diz que $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y; \mathbf{b}) = \int d\mathbf{b}' N(r, Y; \mathbf{b}')$. Considerando a independência com o parâmetro de impacto \mathbf{b} , e por simetria esférica, encontra-se $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 N(r, Y)$ justificando a equação (3.4)[24].

4.2 A Equação de Balitskiï-Kovchegov

A equação mais simples que descreve o limite de altas energias da QCD, incluindo tanto as contribuições da BFKL como as correções de unitariedade, é a equação BK. Esta descreve a evolução das amplitudes de espalhamento dipolo-alvo com a variável de rapidez, sendo o alvo formado por um par $q\bar{q}$ com coordenadas transversas \mathbf{x} e \mathbf{y} [11].

$$\partial_Y N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \frac{|\mathbf{x}\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}\mathbf{z}|^2 |\mathbf{z}\mathbf{y}|^2} [N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + N_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{z})N_Y(\mathbf{z}, \mathbf{y})], \quad (4.3)$$

o qual $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c / \pi$ é o parâmetro de acoplamento fixo e $|\mathbf{x}\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$ é o tamanho do dipolo. Para obter-se uma equação mais simples, é possível supor que a amplitude $N_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ independe do parâmetro de impacto \mathbf{b} e depende apenas do tamanho do dipolo $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Portanto, utilizando a transformada de Fourier dada pela equação (3.8), encontra-se a equação BK sem dependência em parâmetro de impacto no espaço de momentum para a amplitude $\mathcal{N}_Y(k = |\mathbf{k}|)$ [26]

$$\partial_Y \mathcal{N}_Y(k) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(k - k')^2} \left[\mathcal{N}_Y(k') - \frac{k^2}{k'^2 + (k - k')^2} \mathcal{N}_Y(k) \right] - \bar{\alpha} \mathcal{N}_Y^2(k), \quad (4.4)$$

e pode ser reescrita de maneira compacta como

$$\partial_Y \mathcal{N}_Y = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \mathcal{N}_Y - \bar{\alpha} \mathcal{N}_Y^2, \quad (4.5)$$

o qual $\chi(\gamma)$ corresponde aos valores próprios do núcleo da BFKL e $L = \log(k^2/k_0^2)$, sendo k_0 uma escala fixa de momentum. Este núcleo é um operador integro-diferencial que pode ser definido por meio da expansão em série

$$\chi(-\partial_L) = \chi(\gamma_0 \mathbf{1}) + \chi'(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1}) + \frac{1}{2!} \chi''(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^2 + \frac{1}{3!} \chi'''(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^3 + \dots, \quad (4.6)$$

para um γ_0 entre 0 e 1.

4.2.1 O Escalamento Geométrico e a Física Estatística

Vamos trabalhar na representação de dipolos da QCD para o DIS. Nesta representação, a seção de choque γ^*p assume a forma fatorizada na qual é uma função da amplitude de probabilidade do fóton virtual decair em um par $q\bar{q}$ convolvida com a seção de choque dipolo-próton, como mostrado na equação (3.3). Esta última é uma função da amplitude de espalhamento dipolo-próton $N(r, Y)$, que pode ser escrita no espaço de momentum através da transformada de Fourier dada pela equação (3.8). Desta forma, a propriedade de escalamento geométrico na representação de dipolos da QCD tem a seguinte forma

$$\mathcal{N}(k, Y) = \mathcal{N}\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right), \quad (4.7)$$

como já havia sido mostrado no capítulo segundo.

Assim, uma vez que descreve a evolução em energia da amplitude de dipolos, assintoticamente, a equação BK possui soluções que devem obedecer a propriedade de escalamento geométrico. Trabalhando com uma aproximação de ponto de sela, também chamada de aproximação difusiva[10], i.e., expansão de Taylor até segunda ordem do núcleo (4.6) em torno de $\gamma_0 = 1/2$ a equação BK fica

$$\partial_Y \mathcal{N}_Y = \bar{\alpha} \bar{\chi} (-\partial_L) \mathcal{N}_Y - \bar{\alpha} \mathcal{N}_Y^2, \quad (4.8)$$

sendo

$$\bar{\chi}(-\partial_L) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) + \chi'\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\partial_L - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!} \chi''\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\partial_L - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (4.9)$$

o qual $\chi'\left(\frac{1}{2}\right)$ é nula pois no ponto de sela devemos ter extremos da função; definindo $\tilde{\gamma} \equiv 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8\omega}{D}}$, $\omega \equiv \chi\left(\frac{1}{2}\right)$ e $D \equiv \chi''\left(\frac{1}{2}\right)$ temos

$$\chi(-\partial_L) = \omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4} \right), \quad (4.10)$$

e fazendo a seguinte substituição de variáveis

$$t = \frac{\bar{\alpha} D}{2} (1 - \tilde{\gamma})^2 Y, \quad x = (1 - \tilde{\gamma}) \left(L + \frac{\bar{\alpha} D}{2} Y \right), \quad (4.11)$$

pode-se mostrar que a equação BK na aproximação difusiva reduz-se na equação de FKPP[12] – famosa equação da Física Estatística de não equilíbrio cuja dinâmica é chamada de reação-difusão, dada por

$$\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + u(t, x) - u^2(t, x). \quad (4.12)$$

O termo $\partial_x^2 u(x, t)$ é o termo de difusão; $u(x, t)$ é o termo de aumento da densidade na posição x e o termo não linear de dissipação $-u^2(x, t)$ responsável pelo decréscimo desta densidade na posição x , i.e., saturação da solução da equação para $u(x, t)$.

Então, mediante às substituições de variáveis, reescrevemos (4.5) como

$$\partial_Y \mathcal{N}_Y = \bar{\alpha} \left[\omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4} \right) \right] \mathcal{N}_Y - \bar{\alpha} \mathcal{N}_Y^2. \quad (4.13)$$

Portanto, analisando o termo à esquerda de (4.13)

$$\begin{aligned} \partial_Y \mathcal{N}_Y &\equiv \frac{\partial}{\partial Y} \mathcal{N}_Y = \frac{\partial \mathcal{N}_Y}{\partial t} \frac{dt}{dY} + \frac{\partial \mathcal{N}_Y}{\partial x} \frac{dx}{dY} \\ &= \frac{\bar{\alpha} D}{2} (1 - \tilde{\gamma})^2 \partial_t \mathcal{N} + \frac{\bar{\alpha} D}{2} (1 - \tilde{\gamma}) \partial_x \mathcal{N}_Y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Analisando o primeiro termo a direita de (4.13)

$$\begin{aligned} \partial_L \mathcal{N}_Y &= \frac{\partial \mathcal{N}_Y}{\partial t} \frac{dt}{dL} + \frac{\partial \mathcal{N}_Y}{\partial x} \frac{dx}{dL} = (1 - \tilde{\gamma}) \partial_x \mathcal{N}_Y \\ \partial_L^2 \mathcal{N}_Y &= \partial_L [(1 - \tilde{\gamma}) \partial_x \mathcal{N}_Y] = (1 - \tilde{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_Y = (1 - \tilde{\gamma})^2 \mathcal{N}_Y, \end{aligned} \quad (4.15)$$

portanto,

$$\bar{\alpha} \left[\omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4} \right) \right] \mathcal{N}_Y = \bar{\alpha} \left[\omega \mathcal{N}_Y + \frac{D}{2} (1 - \tilde{\gamma})^2 \partial_x^2 \mathcal{N}_Y + \frac{1}{2} (1 - \tilde{\gamma}) \partial_x \mathcal{N}_Y + \frac{D}{8} \mathcal{N}_Y \right]. \quad (4.16)$$

Assim, reescrevendo a equação (4.13)

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\alpha}D}{2} (1 - \tilde{\gamma})^2 \partial_t \mathcal{N}_Y + \frac{\bar{\alpha}D}{2} (1 - \tilde{\gamma}) + \partial_x \mathcal{N}_Y = \\ & \bar{\alpha} \left(\omega \frac{D}{8} \right) \mathcal{N}_Y + \frac{\bar{\alpha}D}{2} (1 - \tilde{\gamma})^2 \partial_x^2 \mathcal{N}_Y + \frac{\bar{\alpha}D}{2} (1 - \tilde{\gamma}) \partial_x \mathcal{N}_Y - \bar{\alpha} \mathcal{N}_Y^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da definição de $\tilde{\gamma}$, tem-se que $\omega + \frac{D}{8} = \frac{D}{2} (1 - \tilde{\gamma})$. Logo, encontra-se

$$\frac{D}{2} (1 - \tilde{\gamma}) \partial_t \mathcal{N}_Y = \frac{D}{2} (1 - \tilde{\gamma}) \partial_x^2 \mathcal{N}_Y + \frac{D}{2} (1 - \tilde{\gamma})^2 \mathcal{N}_Y - \mathcal{N}_Y, \quad (4.18)$$

multiplicando por $\frac{4}{D^2(1-\tilde{\gamma})^4}$, encontra-se

$$\partial_t \left(\frac{2}{D(1-\tilde{\gamma})^2} \mathcal{N}_Y \right) = \partial_x^2 \left(\frac{2}{D(1-\tilde{\gamma})^2} \mathcal{N}_Y \right) + \frac{2}{D(1-\tilde{\gamma})^2} \mathcal{N}_Y - \frac{4}{D^2(1-\tilde{\gamma})^4} \mathcal{N}_Y, \quad (4.19)$$

que é justamente a equação FKPP onde

$$u(x, t) = \left(\frac{2}{D(1-\tilde{\gamma})^2} \mathcal{N}(L, Y) \right) = \frac{2}{D(1-\tilde{\gamma})^2} \mathcal{N} \left(\frac{x}{1-\tilde{\gamma}} - \frac{t}{(1-\tilde{\gamma})^2}, \frac{2t}{\bar{\alpha}D(1-\tilde{\gamma})^2} \right). \quad (4.20)$$

Portanto $\partial_x^2 u(x, t)$ é o termo de difusão; $u(x, t)$ é o termo referente à criação de partículas na posição x e o termo não linear de dissipação $-u^2(x, t)$ responsável pela destruição de partículas na posição x , i.e., saturação da solução da equação para $u(x, t)$.

A equação FKPP[†] admite dois pontos fixos, sendo um deles instável em $u = 0$ e outro estável em $u = 1$, o qual corresponde ao número máximo de ocupação de partículas em uma certa região do espaço. Uma propriedade importante da equação FKPP, e de equações deste tipo, é que para condições iniciais $u(x, 0) = \text{tais que } u(x, 0) \rightarrow 1 \text{ quando } x \rightarrow -\infty$ e $u(x, 0) \sim e^{-\gamma x}$ quando $x \rightarrow \infty$, existe uma família de soluções chamadas de TWS em que a solução $u(x, t)$ adquire a forma $u(x - v_c t)$ de uma frente de onda propagante para grandes intervalos de tempo a uma velocidade crítica v_c – definida como o mínimo da velocidade de fase – sem deformação como mostrado na Figura (4.1).

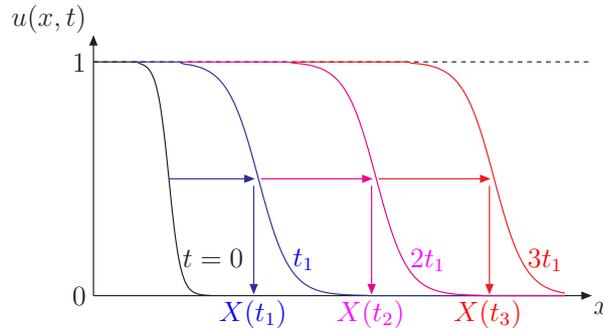


Fig. 4.1: Comportamento das TWS da equação FKPP.

[†] A equação de Fokker-Planck descreve a evolução temporal da função densidade de probabilidade da velocidade de uma partícula, podendo ser generalizada para outros observáveis. Esta equação é também conhecida como Equação Avançada de Kolmogorov. Em 1937, esta equação foi também deduzida por Fisher e utilizada no estudo de problemas em genética. Esta, em problemas de reação-difusão, está relacionada com a equação FKPP.

A equação BK a parâmetro de acoplamento fixo $\bar{\alpha}$ apresenta TWS com v_c dado por

$$v_c = \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c}, \quad (4.21)$$

sendo $\gamma_c = 0.6275$ o ponto crítico, solução da equação

$$\gamma_c \chi'(\gamma_c) = \chi(\gamma_c). \quad (4.22)$$

Para estudar a formação das frentes de ondas, utiliza-se a aproximação difusiva em torno de γ_c

$$\chi(-\partial_L) = \chi(\gamma_c) + (-\partial_L - \gamma_c \mathbf{1}) \chi'(\gamma_c) + \frac{1}{2!} \chi''(\gamma_c) (-\partial_L - \gamma_c \mathbf{1})^2, \quad (4.23)$$

então a equação BK no espaço de momentum é dada por

$$\partial_Y \mathcal{N}_Y = -v_c \partial_L \mathcal{N}_Y + \frac{1}{2!} \bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) (\partial_L + \gamma_c \mathbf{1})^2 \mathcal{N}_Y - \bar{\alpha} \mathcal{N}_Y^2. \quad (4.24)$$

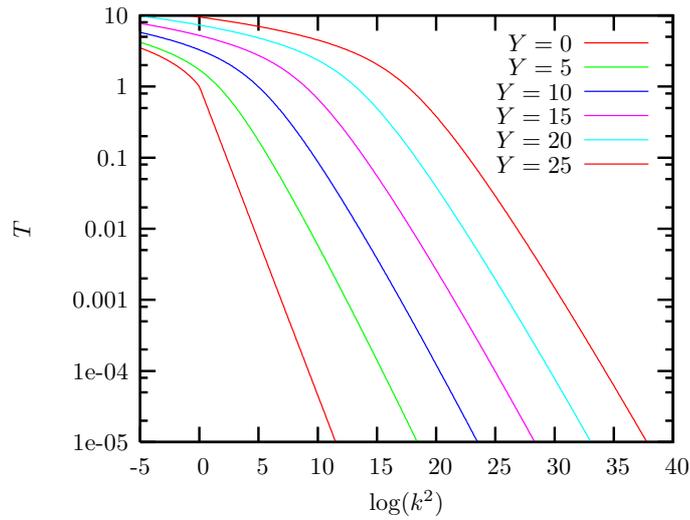


Fig. 4.2: TWS da equação BK obtido por simulação numérica para rapidez $Y = 0, 5, 10, 15, 20, 25$ [24].

Pode-se mostrar que a amplitude de espalhamento no regime diluto, i.e., $k \gg Q_s$, para o DIS a parâmetro de acoplamento fixo possui a seguinte estrutura[10]

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(k^2/Q_s^2(Y), Y) &\approx \text{constante} \times \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)} \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)^{-\gamma_c} \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) Y} \log^2\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)\right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo a escala de saturação dada por

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 \exp\left[\bar{\alpha} v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log Y - \frac{3}{\gamma_c} \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}} \frac{1}{\sqrt{Y}}\right], \quad (4.26)$$

o qual Q_0^2 absorve as constantes indeterminadas, mas continua sendo da ordem de Λ_{QCD}^2 . Para uma completa descrição das amplitudes de espalhamento dipolo-próton no espaço de momentum, i.e., levando em consideração a região diluída ($k \gg Q_s$) como a região de saturação ($k \ll Q_s$), faz-se uso do modelo AGBS[24]. Este utiliza as soluções assintóticas da equação BK da região diluta em conjunto com uma expressão que descreva a evolução partônica na vizinhança da escala de saturação e na região de saturação. Na Figura (4.2) são mostradas as TWS obtidas para a equação BK, onde pode-se ver a propriedade de escalamento geométrico das soluções.

O escalamento geométrico tem importantes conseqüências, como o fato de que o movimento, ao longo do espaço de fases, ao longo da linha de saturação $Q = Q_s(Y)$, não muda o comportamento das amplitudes de espalhamento. Analisando o comportamento da equação (4.25) vemos que esta possui um termo subdominante com dependência explícita da rapidez Y , o que viola o escalamento geométrico dado pela equação (4.7). Entretanto, este termo pode ser desprezado quando

$$\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \ll 1, \quad (4.27)$$

i.e., o escalamento geométrico é obtido quando

$$\log(k^2/Q_s^2(Y)) \lesssim \sqrt{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y}, \quad (4.28)$$

ou seja, em uma janela cinemática que se estende por um fator da ordem de \sqrt{Y} acima da escala de saturação.

4.3 Equação BK em Ordem Seguinte à Dominante

O termo NLO refere-se ao caso em que o parâmetro de acoplamento forte seja uma função de L , portanto dinâmico

$$\bar{\alpha}(L) = \frac{\alpha_s(L)N_c}{\pi} = \frac{1}{bL}, \quad b = \frac{11N_c - 2N_f}{12N_c}, \quad (4.29)$$

sendo N_c o número de cor e N_f é o número de sabor; como estamos considerando um DIS ep , então $N_f = 3$ pois estamos considerando apenas a contribuição de quarks leves. Reescreve-se a equação BK no espaço de momentum dada por (4.5) como

$$bL\partial_Y\mathcal{N}_Y = \chi(-\partial_L)\mathcal{N}_Y - \mathcal{N}_Y^2. \quad (4.30)$$

Para um valor arbitrário de γ pode-se mostrar que a velocidade da frente de onda é dada pela seguinte expressão

$$v_c = \sqrt{\frac{2\chi(\hat{\gamma})}{b\hat{\gamma}}}, \quad (4.31)$$

o qual – analisando a relação de dispersão e o valor mínimo da velocidade de grupo em $\hat{\gamma}$, e comparando com o caso de acoplamento fixo – $\hat{\gamma}$ deve ser idêntico à $\gamma_c = 0.6275$, sendo $\hat{\gamma}$ solução da equação

$$\hat{\gamma}\chi'(\hat{\gamma}) = \chi(\hat{\gamma}). \quad (4.32)$$

Portanto a velocidade da frente de onda é simplesmente v_c , dada pela equação (4.31), no ponto crítico γ_c

$$v_c = \sqrt{\frac{2\chi(\gamma_c)}{b\gamma_c}}. \quad (4.33)$$

Então, dado que é conhecida a relação para a velocidade da frente de onda, calcula-se a transição para a saturação através de correções subdominantes em v_c . Portanto, expandindo a parte linear da equação BK[‡] em torno de γ_c , onde $Y \propto t^2$

$$\frac{bL}{2t} \partial_t \mathcal{N}_Y = -\frac{bv_c^2}{2} \partial_L \mathcal{N}_Y + \frac{\chi''(\gamma_c)}{2} (\partial_L^2 \mathcal{N}_Y + 2\gamma_c \partial_L \mathcal{N}_Y + \gamma_c^2 \mathcal{N}_Y). \quad (4.34)$$

Pode-se mostrar que, através da FKPP e de um ansatz[10] adequado para a solução desta equação para grandes intervalos de t , a equação (4.34) transforma-se em uma EDOL de segunda ordem, cuja amplitude de espalhamento para DIS à parâmetro de acoplamento dinâmico possui a seguinte estrutura no regime diluto[10]

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(k^2/Q_s^2(Y), Y) &\approx \text{constante} \times Y^{1/6} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c} \\ &\times Ai \left(\xi_1 + \left(\frac{\sqrt{2b\gamma_c\chi(\gamma_c)}}{\chi''(\gamma_c)} \right)^{1/3} \frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{Y^{1/6}} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

vemos que esta amplitude de espalhamento é dada pela função de Airy sendo $\xi_1 = -2,338$ o seu primeiro zero; a escala de saturação é dada por

$$Q_s^2(Y) = Q_0 \exp \left[v_c \sqrt{Y} + \frac{3}{4} \left(\frac{\chi''(\gamma_c)}{\sqrt{2b\gamma_c\chi(\gamma_c)}} \right)^{1/3} \xi_1 Y^{1/6} \right], \quad (4.36)$$

o qual $Q_0 \sim \Lambda_{\text{QCD}}^2$ absorve constantes não determinadas.

4.4 Conclusões

Dedicamos este capítulo para fazer um estudo sobre a equação BK na qual dá a evolução das amplitudes de espalhamento com a variável de rapidez Y . Apresentamos a analogia que pode ser feita entre a equação BK e a equação FKPP; assim obtemos como solução as chamadas TWS. Discutimos o fato destas soluções possuírem propriedades de escalamento geométrico. Fizemos um tratamento da equação BK, no espaço de momentum através da expansão difusiva. Estudamos suas soluções assintóticas em LO e NLO, sendo que em NLO, i.e., para parâmetro de acoplamento dinâmico, obtém-se como solução assintótica uma amplitude proporcional a uma função de Airy.

Analisando a expressão (4.35), vemos que possui um termo explícito de $Y^{1/6}$, o que violaria o escalamento geométrico como foi discutido no capítulo terceiro. Contudo, a

[‡] As correções de NLO e NLL ao termo não-linear podem ser feitas, no entanto pelas propriedades das TWS, as soluções assintóticas não mudam[27].

subdominância da escala de saturação com Y , e a dependência da função de Airy com Y , devem de alguma maneira compensar essa dependência explícita. No capítulo seguinte, vamos apresentar dois modelos usado para o ajuste aos dados de HERA[15] – utilizando a solução assintótica da BK em NLO – e como será mostrado, ambos descrevem a propriedade de escalamento geométrico das amplitudes de espalhamento.

Capítulo 5

Ajuste aos Dados de HERA

Com o objetivo de estudar a forma das amplitudes de espalhamento da QCD em ordens mais altas em teoria de perturbação, vamos partir da equação de evolução BK em NLO pois, como foi apresentado no capítulo terceiro, esta apresenta soluções assintóticas de TWS em analogia à equação FKPP, onde as amplitudes de espalhamento são dadas pela equação (4.35) e a respectiva escala de saturação pela equação (4.36). Neste capítulo, serão expostos dois modelos para o ajuste aos dados das contribuições ZEUS e H1[15] (do colisor HERA) para o DIS *ep*.

5.1 Solução Assintótica da BK em NLO

Primeiramente, será considerada apenas a solução da equação BK em NLO; portanto, apenas a região diluída será considerada para o ajuste.

Assim, escrevendo novamente a equação (4.35), e chamando esta como uma “*amplitude diluída*”, temos

$$T_{\text{dil}}(k/Q_s(Y), Y) = A Y^{1/6} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c} Ai \left(\xi_1 + \left(\frac{\sqrt{2b\gamma_c\chi(\gamma_c)}}{\chi''(\gamma_c)} \right)^{1/3} \frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{Y^{1/6}} \right), \quad (5.1)$$

sendo A uma constante a ser determinada, e a escala de saturação sendo expressa como

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp \left(v_c \sqrt{Y} \right), \quad (5.2)$$

o qual k_0^2 é uma escala de momentum a ser ajustada.

As expressões (5.1), (5.2) determinam a forma das amplitudes de espalhamento no espaço de momentum. Utilizando estas expressões, podemos escrever a função de estrutura do próton, equação (3.12), o qual será ajustada aos dados de HERA[15] disponíveis para esta quantidade.

Nesta análise, as medidas de HERA, vindos das colaborações ZEUS e H1, foram ajustados dentro do regime cinemático

$$\begin{aligned} x &\leq 0.01 \\ 3.5 &\leq Q^2 \leq 120 \text{GeV}^2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

	T_{dil}
$\chi^2/d.o.f$	1.369
$R_p[\text{GeV}^{-1}]$	8.423 ± 0.062
v_c	1.305 ± 0.007
$\chi''(\gamma_c)$	1.501 ± 0.003
$k_0^2(10^{-3}\text{GeV}^2)$	0.127 ± 0.003
A	$1,229 \pm 0.018$

Tab. 5.1: Resultados do ajuste aos dados de F_2 . Os valores dos parâmetros com seus respectivos erros são mostrados, juntamente com o χ^2 por graus de liberdade.

o que resulta em um total de 126 graus de liberdade de dados a serem ajustados. O regime cinemático apresentado refere-se à descrição do limite de altas energias das amplitudes de espalhamento – o limite de pequeno x , como já mostrado no capítulo primeiro – considerando valores intermediários de virtualidade Q^2 .

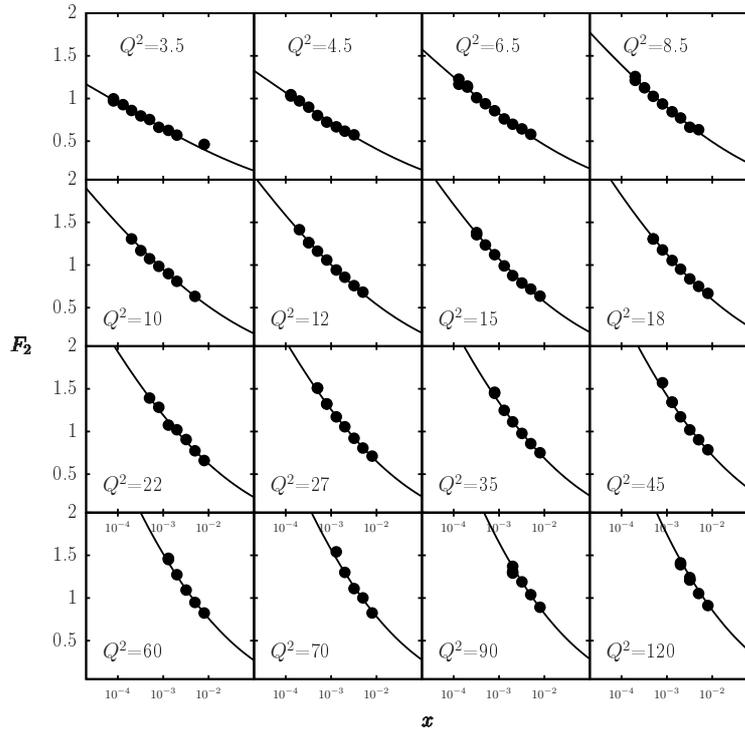


Fig. 5.1: Predições para os dados de ZEUS e H1[15] para a função de estrutura do próton em função de x para valores intermediários de Q^2 , dados em GeV^2 .

Em relação aos parâmetros, foi mantido fixo $\gamma_c = 0.6275$, que é o valor esperado em LO, e em NLO como discutido no capítulo terceiro. Com isto, os parâmetros R_p , v_c , $\chi''(\gamma_c)$, k_0^2 e A ficam livres para o ajuste aos dados. Os parâmetros obtidos do ajuste aos dados estão na Tabela (5.1), juntamente com o χ^2 por número de pontos.

A Figura (5.2) mostra a forma das amplitudes de espalhamento obtidas para diferentes

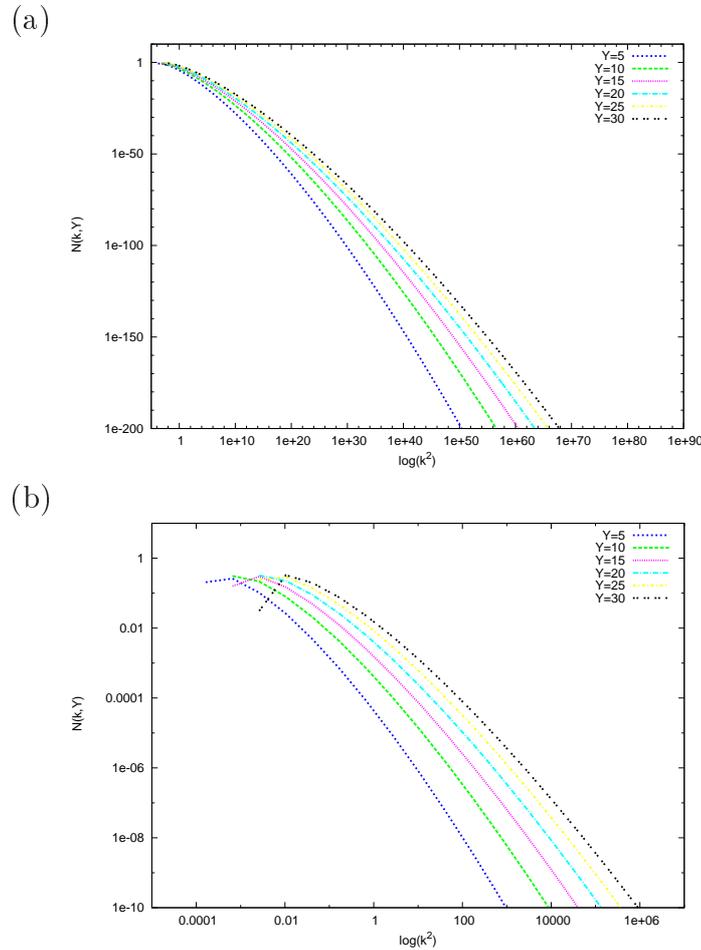


Fig. 5.2: (a) Forma para as amplitudes de espalhamento no espaço de momentum segundo a solução assintótica da região diluta da equação BK em NLO para diferentes valores de rapidez Y . Os parâmetros para este gráfico foram tomados do ajuste correspondente à Tabela (5.1). (b) Descrição gráfica para a região de saturação partônica. Este gráfico foi obtido através da ampliação da região em que $k \ll Q_s$ em (a).

valores de rapidez Y . Vemos claramente o comportamento das amplitudes de espalhamento na região de $k \gg Q_s$, i.e., região diluta da evolução; no entanto, estamos interessados na região de saturação, região esta correspondente à valores de $k \ll Q_s$ como dito anteriormente. Nesta região de saturação partônica, vemos que as amplitudes de espalhamento não são bem descritas, embora tendam a se unitarizar – como de fato é imposto pelos vínculos da matriz de espalhamento S [22]. Ainda é possível constatar a propriedade de escalamento geométrico das TWS na evolução com a rapidez.

A fim de investigar melhor a região de saturação, apresentamos uma ampliação da Figura (5.2.a) para pequenos valores de k , como mostrado na Figura (5.2.b). Nesta, é possível constatar certas irregularidades nas amplitudes de espalhamento, possivelmente causadas pelas oscilações da função de Airy; nesta região, vemos que as amplitudes tendem a decair.

5.2 Modelo Logarítmico de Unitarização Eikonal em NLO

Vamos apresentar um outro modelo para as amplitudes de espalhamento no espaço de momentum. Para isso, vamos usar as soluções assintóticas da equação BK em NLO para descrever as amplitudes de espalhamento tanto na região de saturação como na região de pártons diluídos. Como mostrado no capítulo terceiro, a expressão (4.35) é válida somente no regime diluto, i.e., $k \gg Q_s$, por conseguinte $\mathcal{N}(k, Y) \ll 1$. Para o modelo se tornar completo, é preciso de uma expressão que descreva a evolução partônica tanto na região diluta como na vizinhança da escala de saturação e na região de saturação. Nesta última, é esperado que a densidade de pártons tenha um limite superior devido à unitariedade, então escrevemos esta amplitude nesta região como um função degrau de Heaviside

$$N(r, Y) = \Theta(rQ_s(Y) - 1). \quad (5.4)$$

Através da transformada de Fourier (3.8), mostra-se que[24]

$$\mathcal{N}(k/Q_s(Y), Y) \stackrel{k \ll Q_s}{\approx} c - \log\left(\frac{k}{Q_s(Y)}\right), \quad (5.5)$$

onde c é uma constante ainda não fixada. Desta maneira, as expressões (4.35) e (5.5) descrevem completamente o comportamento assintótico das amplitudes de espalhamento.

Entretanto, ao tentar unir estas duas expressões e obter a constante c impondo continuidade em $k = Q_s$, esta definição por partes da amplitude em toda a região cinemática podem introduzir efeitos de oscilação na amplitude, quando transformada para o espaço de coordenadas pela equação (3.7), podendo inclusive torná-las negativas. A fim de modelar esta interpolação, partimos do regime diluto para o saturado, construindo uma expressão que se torne saturada quando $k \ll Q_s$.

Na tentativa de obtermos uma melhor descrição da região de saturação, vamos utilizar a função T_{dil} em (5.1) como argumento de uma função Eikonal. Assim garantimos que no limite em que $k \ll Q_s$ a região de saturação seja unitarizada.

$$T_{unit} = 1 - e^{-T_{dil}}. \quad (5.6)$$

Deste modo, nos resta apenas incluir os fatores logarítmicos dos regimes diluto e saturado, sendo este fator logarítmico L_F dado por

$$L_F = \log\left(\frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k}\right) + 1. \quad (5.7)$$

A expressão usada no modelo é

$$\tilde{T}(k/Q_s(Y), Y) = \left[\log\left(\frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k}\right) + 1 \right] (1 - e^{-T_{dil}}), \quad (5.8)$$

onde a escala de saturação Q_s^2 é dada pela equação (5.2).

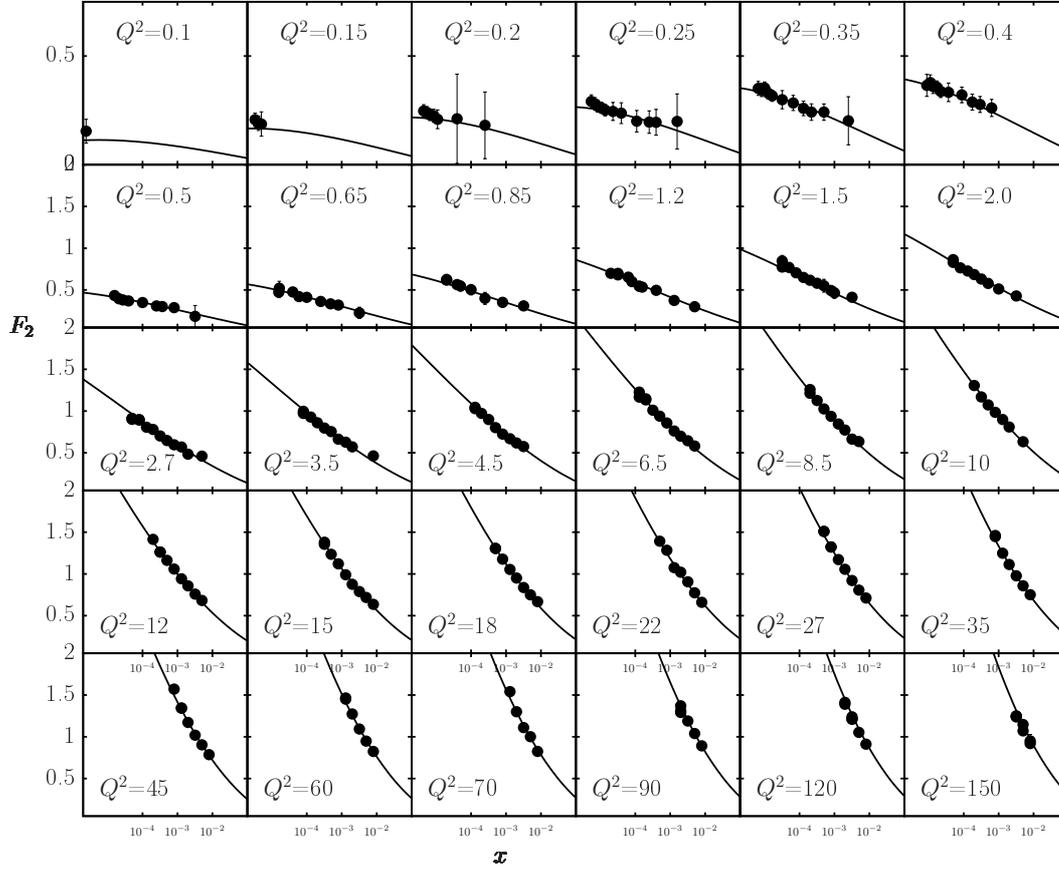


Fig. 5.3: *Predições para os dados de ZEUS e H1[15] para a função de estrutura do próton em função de x para valores intermediários de Q^2 , dados em GeV^2 .*

Como estamos particularmente interessados na região de saturação partônica, estendemos o limite cinemático para valores de virtualidade Q^2 menores, mantendo o limite superior de $120 GeV^2$. Desta maneira temos o seguinte limite cinemático

$$\begin{aligned} x &\leq 0.01 \\ 0.1 &\leq Q^2 \leq 150 GeV^2, \end{aligned} \tag{5.9}$$

resultando em um total de 244 graus de liberdade para o ajuste aos dados ser feito.

Novamente, γ_c foi mantido fixo. Os parâmetros obtidos do ajuste aos dados estão na Tabela (5.2). Notemos que o valor obtido para χ^2 por graus de liberdade está mais próximo do valor de 1, i.e., teremos uma melhor previsão da função de estrutura do próton à obtida anteriormente quando consideramos apenas a solução assintótica da BK para o ajuste aos dados, embora estejamos em um intervalo cinemático de HERA significativamente maior.

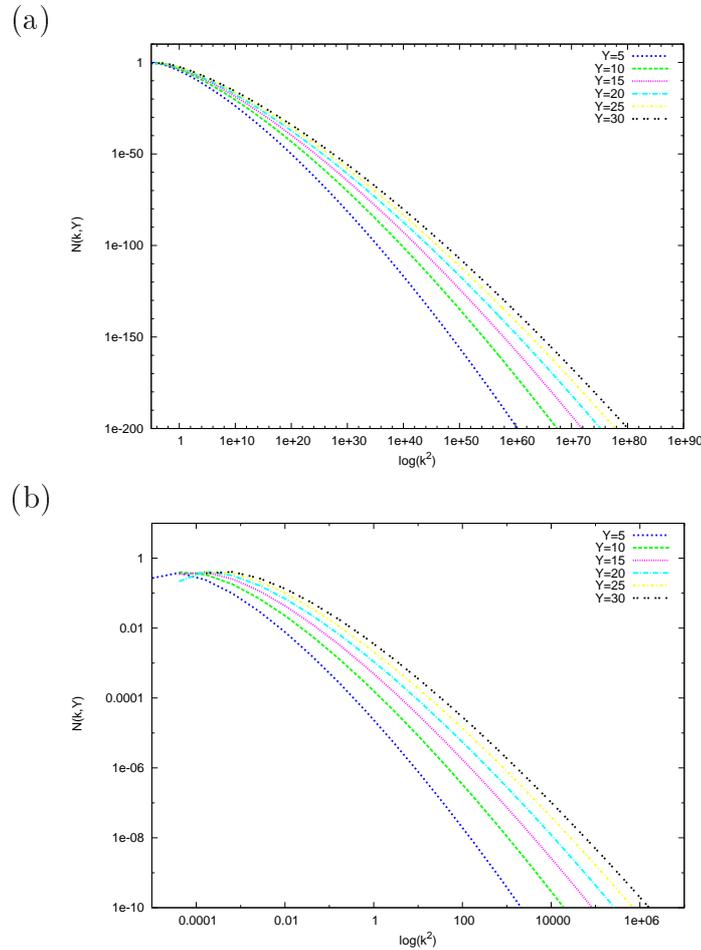


Fig. 5.4: (a) Forma para as amplitudes de espalhamento no espaço de momentum segundo a solução assintótica da região diluta da equação BK em NLO para diferentes valores de rapidez Y . Os parâmetros para este gráfico foram tomados do ajuste correspondente à Tabela (5.2). (b) Descrição gráfica para a região de saturação partônica. Este gráfico foi obtido através da ampliação da região em que $k \ll Q_s$ em (a).

Na Figura (5.4.a), são representadas as amplitudes de espalhamento para este modelo considerado em diferentes valores de rapidez Y , onde foi proposto uma nova maneira de descrever a região de saturação. Notemos que, novamente, as propriedades de escalamento geométrico das TWS são evidenciadas na representação gráfica. Vemos ainda que a região em que os pártons estão diluídos no interior dos hádrons, neste caso considerando um processo de DIS ep , i.e., no interior do próton, continua sendo bem descrita; como de fato deveria ser.

Analisando a região de saturação partônica, vemos que, novamente, as amplitudes de espalhamento passam a decrescer, embora tendam assintoticamente a ser unitarizadas. Para uma melhor visualização desta região de $k \ll Q_s$, mostramos na Figura (5.4.b) uma ampliação desta região da representação gráfica mostrada na Figura (5.4.a).

	\tilde{T}
$\chi^2/d.o.f$	1.107
$R_p[\text{GeV}^{-1}]$	10.000 ± 0.992
v_c	1.123 ± 0.007
$\chi''(\gamma_c)$	2.427 ± 0.032
$k_0^2(10^{-4}\text{GeV}^2)$	0.216 ± 0.004
A	1.077 ± 0.015

Tab. 5.2: Resultados do ajuste aos dados de F_2 . Os valores dos parâmetros com seus respectivos erros são mostrados, juntamente com o χ^2 por graus de liberdade.

5.3 Conclusões

Neste capítulo apresentamos os dois modelos utilizados pra o ajuste aos dados das colaborações ZEUS e H1[22] (do colisor HERA), onde primeiramente consideramos apenas a solução assintótica da equação BK em NLO; e a seguir utilizamos uma interpolação para unir as expressões que descrevem ambas regiões diluta como a de saturação partônica.

Além de ficar evidenciado as propriedades de escalamento geométrico, vemos ainda que para ambos modelos a forma das amplitudes de espalhamento na região diluta são muito bem descritas como de fato deveria ser; pois a solução assintótica da equação BK em NLO (assim como em LO) é escrita para a região diluta, i.e., $k \gg Q_s$. Contudo, a região saturada, portanto região de $k \ll Q_s$, não está tão mal descrita; embora as amplitudes de espalhamento passem a decair a partir de determinado valor de k , estas mantêm-se contínuas, não assumindo valores negativos e nem oscilando, como poderia acontecer no espaço de coordenadas. Este decaimento tem origem da função de Airy.

A maneira com a qual as duas expressões estão sendo interpoladas no segundo modelo não está compensando este decaimento; i.e., a forma como a T_{dil} está sendo unitarizada não "dando conta" da função de Airy.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, fizemos um estudo da conexão entre as soluções da equação BK em LO e NLO com as TWS da equação FKPP, bem como as propriedades de escalamento geométrico que estas soluções apresentam. Realizamos um estudo fenomenológico de como estas TWS descrevem as amplitudes de espalhamento da QCD em processos de DIS de colisões hadrônicas, sendo consideradas neste trabalho o DIS *ep*. A escala de saturação está relacionada com a velocidade da frente de onda v_c , e a transição à saturação da distribuição de pártons à formação difusa da frente de onda. Em particular, estudamos diretamente a solução da equação BK não-linear. A transição à saturação partônica leva a violações do escalamento geométrico; para acoplamento fixo a evolução da frente de onda é dada por um comprimento de difusão da ordem de \sqrt{t} , enquanto que a acoplamento dinâmico é da ordem de $t^{1/3}$; como visto pelas equações (4.25) e (4.35). Este contraste entre os padrões de evolução levando a saturação é dada explicitamente na evolução da *Frente de Onda Reduzida (RFP)* dada por $(k^2/Q_s^2(Y))^{\gamma_c} \mathcal{N}(k/Q_s(Y), Y)$, mostrado na Figura (6.1).

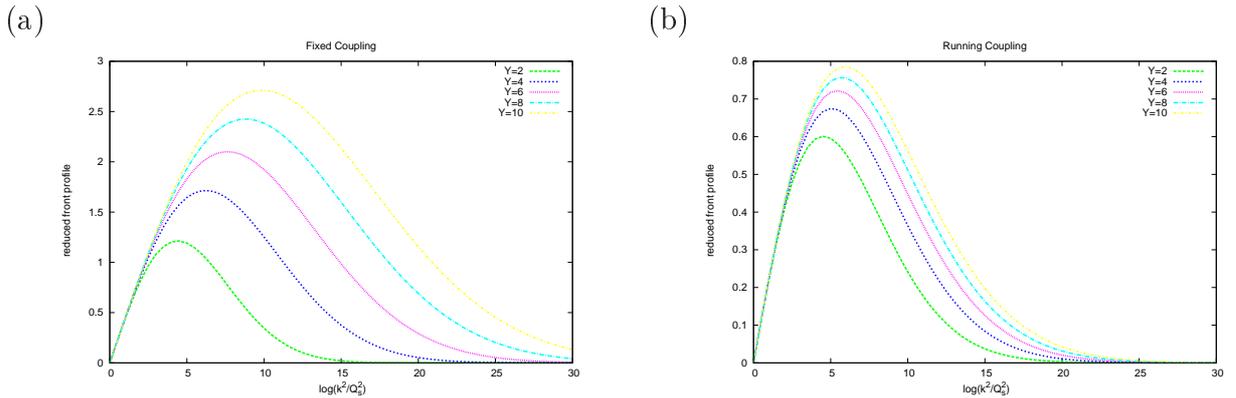


Fig. 6.1: *Evolução da frente de onda reduzida para ambos casos de acoplamento fixo (esquerda) e dinâmico (direita). A frente de onda reduzida para diferentes valores de rapidez. As linhas correspondem desde $Y = 2$, curva mais abaixo, até $Y = 10$, curva mais acima. Note a similaridade das frentes de onda, porém uma evolução mais rápida para acoplamento fixo.*

Começamos o trabalho apresentando uma descrição sobre o DIS e sua cinemática, os fundamentos do modelo de pártons e as correções de ordem $\alpha_{em}\alpha_s$ que contribuem para o cálculo das seções de choque em colisões hadrônicas. Apresentamos o DIS no referencial de dipolos de cor, sendo este mais conveniente para o estudo da evolução da QCD em altas

energias, e apresentamos a função de estrutura do próton no espaço de momentum, uma vez que vamos – mediante o ajuste aos dados das colaborações ZEUS e H1[15] (do colisor HERA) – fazer previsões sobre a função de estrutura do próton em altas energias.

Por fim, apresentamos a forma das amplitudes de espalhamento, referente a solução assintótica da equação BK em NLO, através de duas abordagens para o ajuste aos dados. Primeiramente, consideramos apenas a solução assintótica da equação BK dada pela equação (4.35); nesta abordagem, obtivemos as amplitudes de espalhamento dadas pelas Figuras (5.2.a) e (5.2.b). Em seguida, utilizamos uma nova maneira de descrever a região de saturação, fazendo uma interpolação entre as duas funções que descrevem o regime diluto e saturado, desta forma obtivemos as amplitudes mostradas nas Figuras (5.4.a) e (5.4.b). Em ambos modelos, mostramos que – como era esperado – a região diluta é bem descrita, contudo, a região de saturação partônica apresentou amplitudes que passavam a decair a partir de certo valor de k , possivelmente pelo comportamento da função de Airy; no entanto tendendo assintoticamente a serem unitarizadas. No segundo modelo utilizado, vemos que, para valores altos de rapidez Y , a amplitude passa a decair a partir de certo a partir de certo valor de k , porém ainda possui uma forma aceitável, i.e., não há efeitos de oscilação para valores negativos, como poderia ocorrer no espaço de coordenadas. É válido ressaltar que neste estudo da região de saturação em NLO, não foram consideradas escalas de renormalização, o que de certa maneira viria a melhorar o ajuste dos parâmetros, como o da velocidade da frente de onda v_c [28].

A função de estrutura do próton, para ambos modelos, foi bem descrita para valores intermediários de virtualidade Q^2 para dados de HERA[15] no seu respectivo intervalo cinemático. Do estudo da equação BFKL, a velocidade da frente de onda deve estar em um intervalo dado por $0.3 \ll v_c \ll 0.6$, o que não corresponde aos valores obtidos para ambos modelos. Uma busca de um melhor ajuste para a região de saturação partônica, obtendo melhores parâmetros, pode ser feito através da busca de novas parametrizações para esta região de $k \ll Q_s$. Uma possível nova parametrização seria trabalhar com a forma assintótica da função de Airy.

Perspectivas

A função de Airy é descrita por duas funções assintóticas $Ai(x)$ e $Bi(x)$, onde estas apresentam a seguinte forma

$$Ai(x) \approx \frac{e^{-2/3 x^{3/2}}}{\sqrt{2\pi x^{1/4}}}, \quad (6.1)$$

$$Bi(x) \approx \frac{e^{2/3 x^{3/2}}}{\sqrt{2\pi x^{1/4}}}. \quad (6.2)$$

Podemos fazer um tratamento assintótico da função de Airy na solução da equação BK em NLO dada pela equação (4.35). Então, reescrevendo a equação (5.1) como

$$T_{\text{dil}} \approx AY^{1/6} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c} Ai(x), \quad (6.3)$$

onde o argumento x da exponencial é definido como $x \equiv Y^{-1/6} \log(k^2/Q_s^2(Y))$; e x no denominador como $x \equiv Y^{4/6}$. Desta maneira tiramos a dependência explícita em Y , e

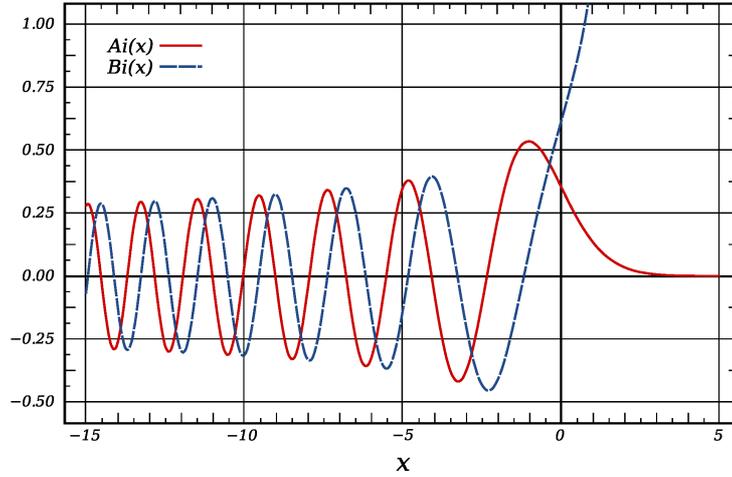


Fig. 6.2: Representação das funções de Airy assintóticas.

obtemos uma forma assintótica para a amplitude de espalhamento diluída definida em (5.1).

$$T_{\text{dil-assint}}(k/Q_s(Y), Y) = AY^{1/6} \left(\frac{k^2}{Q_s^2} \right)^{-\gamma_c} \frac{\exp \left\{ -\frac{2}{3} [2Y^{-1/6} \log(k/Q_s)]^{3/2} \right\}}{2\sqrt{\pi} [2Y^{4/6}]^{1/4}}, \quad (6.4)$$

portanto, transferindo toda a dependência em k para o argumento da exponencial, obtemos

$$T_{\text{dil-assint}} = \frac{A}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -2\gamma_c \log \left(\frac{k}{Q_s} \right) - \frac{2}{3} \left[2 \frac{\log \left(\frac{k}{Q_s} \right)}{Y^{1/6}} \right]^{3/2} \right\}. \quad (6.5)$$

A expressão (6.5) é unitarizada por uma função Eikonal, e assim, resta apenas reinserir os fatores logarítmicos nos regimes diluto e saturado. Portanto, a amplitude do modelo será

$$\hat{T}(k/Q_s(Y), Y) = \left[\log \left(\frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k} \right) + 1 \right] (1 - e^{-T_{\text{dil-assint}}}). \quad (6.6)$$

Com este modelo, talvez seja possível obtermos uma melhor descrição da região de saturação partônica. Vemos da expressão (6.5) que para $k \ll Q_s$ a amplitude de espalhamento assintótica $T_{\text{dil-assint}} \rightarrow \infty$, e portanto da expressão (6.6) o termo que domina é o L_f , que é justamente a expressão que descreve a região de saturação.

Apêndice A

O Lagrangeano da QCD

A densidade Lagrangeana da QCD é dada por[22]

$$\mathcal{L}_{\text{clássico}}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{\text{sabores}} \bar{q}_i(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)_{ij}q_j(x) \quad (\text{A.1})$$

onde m é a massa do férmion e $q_k(x)$ corresponde ao campo de quarks. $(D_\mu)_{ij}$ é a derivada covariante

$$(D_\mu)_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} + i\alpha_s (t^a A_\mu^a)_{ij}, \quad (\text{A.2})$$

quando atua no campo de quarks e

$$(D_\mu)_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} + i\alpha_s (T^a A_\mu^a)_{ij}, \quad (\text{A.3})$$

quando atua no campo de glúons. t^a e T^a são os geradores de $SU(N_c)$ onde satisfazem a relação de comutação

$$[\mathcal{X}^a, \mathcal{X}^b] = i f^{abc} \mathcal{X}^c. \quad (\text{A.4})$$

$F_{\mu\nu}^a$ é o tensor associado ao campo de glúons* A_μ^a

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \alpha_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (\text{A.5})$$

sendo f^{abc} a constante de estrutura do grupo $SU(N_c)$, é antissimétrica frente a troca de dois índices e satisfaz a identidade de Jacobi

$$f_{abe} f_{ecd} + f_{cbe} f_{aed} + f_{dbe} f_{ace} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A QCD é uma teoria de calibre local, i.e, é invariante frente a transformações

$$q_i(x) \rightarrow q'_i(x) = U(x)q_i(x) \quad (\text{A.7})$$

onde $U(x)$ é um conjunto de funções representando a invariância de calibre. Para a teoria ser invariante, o campo vetorial deve ser modificado frente a transformação

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu \quad (\text{A.8})$$

onde a derivada covariante transformada é reconhecida como

$$(D'_\mu)_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} + i\alpha_s (t^a A'_\mu^a)_{ij}, \quad (\text{A.9})$$

* Em teoria de perturbação o termo $\alpha_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ na equação (A.5) gera os vértices da QCD de três e quatro glúons mostrados na Figura (1.1).

de tal maneira que frente a esta transformação de calibre, possamos escrever

$$D'_\mu q'(x) = U(x) [D_\mu q(x)]. \quad (\text{A.10})$$

Então, verificando a proposta acima

$$(\partial_\mu + i\alpha_s t^a A'_\mu{}^a) U(x) q(x) = U(x) (\partial_\mu + i\alpha_s t^a A_\mu{}^a) q(x) \quad (\text{A.11})$$

$$[\partial_\mu U(x)] q(x) + U(x) \partial_\mu q(x) + i g_s t^a A'_\mu{}^a U(x) q(x) = U(x) \partial_\mu q(x) + i\alpha_s U(x) t^a A_\mu{}^a q(x). \quad (\text{A.12})$$

Comparando os termos, vemos que

$$[\partial_\mu U(x)] q(x) + i\alpha_s t^a A'_\mu{}^a U(x) q(x) = i\alpha_s U(x) t^a A_\mu{}^a q(x) \quad (\text{A.13})$$

$$[\partial_\mu U(x) + i\alpha_s t^a A'_\mu{}^a U(x) - i\alpha_s U(x) t^a A_\mu{}^a] q(x) = 0, \quad (\text{A.14})$$

o que nos remete a

$$t^a A'_\mu{}^a U(x) = U(x) t^a A_\mu{}^a + \frac{i}{\alpha_s} [\partial_\mu U(x)], \quad (\text{A.15})$$

e com isso, obtemos

$$t^a A'_\mu{}^a = U(x) t^a A_\mu{}^a U^{-1}(x) + \frac{i}{\alpha_s} [\partial_\mu U(x)] U^{-1}(x). \quad (\text{A.16})$$

Portanto, o tensor de campo $F_{\mu\nu}^a$ transforma-se da seguinte maneira

$$T^a F_{\mu\nu}^a = U(x) T^a F_{\mu\nu}^a U^{-1}(x), \quad (\text{A.17})$$

mantendo a invariância da Lagrangeana

$$\mathcal{L}'_{\text{QCD}}(x) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{QCD}}(x). \quad (\text{A.18})$$

O interessante da invariância frente às transformações de calibre locais da teoria é que a amplitude para qualquer processo deve ser independente da escolha do calibre com o qual os cálculos serão feitos; isso nos possibilita uma certa liberdade de escolha de calibres para àqueles que sejam mais convenientes para os cálculos.

Em escalas de momentum suficientemente grandes temos que g_s é pequeno de maneira a permitir o uso de teoria de perturbação na análise de interação entre partículas. Usualmente, a teoria de perturbação de Feynman é utilizada, com vértices correspondendo às interações de quarks e glúons e propagadores para os quarks e glúons nos estados intermediários (partículas que não pertencem ao estado inicial nem ao final). Os vértices advêm dos termos do Lagrangeano que envolvem três ou mais campos acoplados, enquanto os propagadores são determinados a partir do inverso dos termos envolvendo somente dois campos.

Apêndice B

Equações de Evolução Lineares

Na Figura (B.1) é mostrado, de forma esquemática, a configuração típica do próton em diferentes regiões do espaço de fase. Considerando o próton, inicialmente, no caso em que tanto Q^2 como Y são pequenos. Se a energia for mantida fixa e Q^2 for aumentado, então a resolução com a qual o fóton investiga a estrutura do próton também aumentará; o número de pártons cresce dentro do próton, porém a área ocupada por eles diminui, i.e., o próton torna-se cada vez mais diluído. Este tipo de evolução é descrito pelas equações DGLAP.

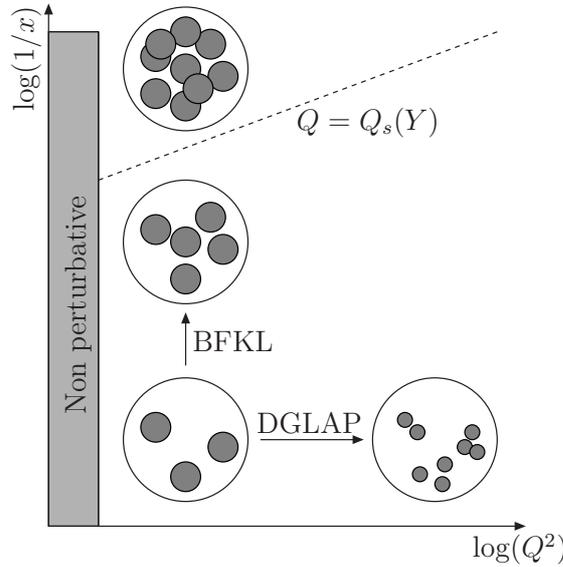


Fig. B.1: Representação esquemática do próton no espaço de fase definido pelas variáveis do DIS.

Agora, considerando uma evolução onde Q^2 é mantido fixo e a energia é aumentada, i.e., a evolução ocorre na direção de pequeno x . Neste caso, observa-se um crescimento rápido da distribuição de pártons, mais especificamente glúons, porém estes ocupam aproximadamente a mesma área. Esta evolução é descrita pela equação BFKL.

As equações DGLAP e BFKL prevêem um crescimento indefinido das distribuições partônicas à medida que a energia aumenta. Em particular, a solução da equação BFKL, leva a seções de choque que crescem como uma potência da energia. Devido ao tamanho finito do próton, o crescimento das distribuições partônicas, e conseqüentemente as seções de choque, não podem crescer indefinidamente. Espera-se que efeitos de recombinação e

de espalhamentos múltiplos se tornem importantes no regime de pequeno x . A física que descrever estes efeitos é chamada de Física de Saturação Partônica [29, 30, 31, 32], e a escala que separa os regimes diluído e saturado é chamada de escala de saturação $Q_S(Y)$, que é uma função crescente da energia.

B.1 Equação de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi

O modelo de pártons descreve o DIS como o espalhamento do fóton virtual com os constituintes do hádron, como mostrado na Figura (2.3). No entanto, a QCD prevê a existência de uma nuvem de glúons e pares $q\bar{q}$ ao redor dos quarks de valência que formam os hádrons, sendo que a virtualidade Q^2 da partícula que prova o hádron determina a quantidade de pártons que serão observados no interior desta nuvem. Cada um destes pártons porta uma fração de momentum, tal que, quanto maior for Q^2 , maior será a probabilidade de encontrar um párton no interior do hádron com uma fração menor de momentum do hádron. Portanto, a função de estrutura F_2 do hádron experimentado deve apresentar dependência com Q^2 , violando o escalamento de Bjorken previsto para o modelo de pártons.

Este comportamento ocorre pelo fato de o modelo de pártons descrever o DIS sem a contribuição da dinâmica dos glúons como os bósons da força forte associada às cargas de cor; i.e., desconsidera a possibilidade de diagramas em ordem $\mathcal{O}(\alpha_{em}\alpha_s)$ mostrados na Figura (2.6). A inclusão destes diagramas para o DIS implica que as funções de estrutura não sejam mais escalonadas apenas pela variável x de Bjorken, Figura (2.7). A interação entre quarks e glúons revela que os constituintes dos hádrons não são objetos livres, o que revela além dos quarks de valência a existência de uma nuvem que os envolvem. Portanto, as equações DGLAP [2, 3, 4] descrevem as correções de QCD perturbativa para as funções de distribuições de momentum – cujo definem as F_2 – consideradas no modelo de pártons.

Quando Q^2 é muito maior que a massa dos quarks, a distribuição de glúons afeta, igualmente, a variação de Q^2 das distribuições de quarks e antiquarks; e a variação de Q^2 da distribuição de glúons recebe, igualmente, contribuições das distribuições de quarks e antiquarks. Ou seja, a evolução das distribuições de glúons está acoplada as distribuições de quarks

$$q(x, Q^2) = u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s} + c + \bar{c} + u + \dots \quad (\text{B.1})$$

O número de termos correspondentes à quarks pesados que devem ser incluídos depende do valor da energia do centro de massa W . Então, a forma da equação DGLAP introduz a quantidade

$$\mathcal{U}(x, Q^2) = \begin{pmatrix} q(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

sendo escrita como

$$Q^2 \frac{\partial \mathcal{U}(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 dz \mathcal{P}(z, Q^2) \mathcal{U}(x/z, Q^2), \quad (\text{B.3})$$

o qual

$$\mathcal{P}(z, Q^2) = \begin{pmatrix} P_{qq}(z, Q^2) & 2N_f P_{qg}(z, Q^2) \\ P_{gq}(z, Q^2) & P_{gg}(z, Q^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

é chamada de matriz de desdobramento, pois P_{ij} representa a probabilidade “i emitir j”, i.e., um quark emitir um quark; um quark emitir um glúon...

B.2 Equação de Balitskiï-Fadin-Kuraev-Lipatov

As equações DGLAP não fornecem nenhuma predição sobre a evolução das distribuições partônicas com a variável x de Bjorken, sendo considerada apenas como uma condição inicial; no entanto, contribuições em $1/x$, dominantes para pequeno x , aparecem sempre acompanhados de $\log Q^2$, sendo tal descrição válida somente para grandes valores de x e Q^2 . A análise da região cinemática de pequeno x e valores intermediários de Q^2 consiste em somar diagramas que contribuem com termos da ordem de $[\alpha_s \log(1/x)]^n$, com $\alpha_s \log(Q^2/Q_0^2) \ll 1$ e $\alpha_s \log(1/x) \approx 1$. Para termos dominantes em $\log(1/x)$ as equações de evolução DGLAP não são mais válida.

Para descrever processos em altas energias – limite de pequeno x – utiliza-se a equação BFKL[5, 6, 7, 8], esta dita a evolução na variável x de Bjorken. A forma diferencial da equação BFKL em LO é dada por

$$\frac{\partial \phi(x, k^2)}{\partial \log(1/x)} = \bar{\alpha} k^2 \int_0^\infty \frac{dk'}{k'} \left[\frac{\phi(x, k'^2) - \phi(x, k^2)}{|k'^2 - k^2|} + \frac{\phi(x, k^2)}{\sqrt{4k'^4 - k^4}} \right], \quad (\text{B.5})$$

o qual $\phi(x, k^2)$ fornece a probabilidade de encontrar um glúon com fração de momentum x e momentum transversal k . A condição inicial para esta equação deve ser tomada para um valor pequeno de x_0 , sendo as seguintes condições satisfeitas

$$\alpha_s \ll 1, \quad \alpha_s \log(Q^2/Q_0^2) \ll 1, \quad \alpha_s \log(1/x) \approx 1, \quad (\text{B.6})$$

tal que a equação BFKL seja apropriada para a descrição de processos de altas energias, uma vez que descreve o limite $x \rightarrow 0$, região onde a distribuição de glúons domina a dinâmica.

Pode-se escrever a equação BFKL como

$$\frac{\partial \phi(x, \gamma)}{\partial \log(1/x)} = \bar{\alpha} \chi(\gamma) \phi(x, \gamma), \quad (\text{B.7})$$

o qual tomou-se a transformada de $\phi(x, k^2) \rightarrow \phi(x, \gamma)$ e

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma), \quad (\text{B.8})$$

é o chamado kernel da equação BFKL.

Mostra-se que a solução da equação BFKL em (B.8) é expressa como

$$\phi(x, \gamma) = \phi(x_0, \gamma) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\chi(\gamma)}, \quad (\text{B.9})$$

a qual pode ser transformada e expressa como

$$\phi(x, k^2) \sim \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\lambda} \left[\frac{k^2}{k_0^2 \log(x_0/x)} \right]^{1/2} \exp \left(-2 \frac{\log^2(k/k_0)}{\lambda' \log(x_0/x)} \right), \quad (\text{B.10})$$

sendo $\lambda = 4\bar{\alpha} \log 2$ e $\lambda' \approx 34\bar{\alpha}$. O termo dominante é $\phi(x, k^2) \sim x^{-\lambda}$, com $\lambda \approx 2$ para $\alpha_s \approx 0.2$. Este comportamento é típico da dinâmica BFKL e representa o crescimento na distribuição de glúons em altas energias, i.e., corresponde a um rápido crescimento na seção de choque.

Bibliografia

- [1] ROBERTS, R. G. *The Structure of the proton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [2] DOKSHITZER, Y. L. *Sov.Phys. JETP*, New York, v.46, (1997).
- [3] ALTARELLI, G.; PARISI, G. *Nucl.Phys. B*, Amsterdam, v.126, (1977).
- [4] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. *Sov.J.Nucl.Phys*, New York, v.15, (1978).
- [5] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N. *Phys.Lett. B*, Amsterdam, v.60, (1952).
- [6] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. *Sov.Phys. JETP*, New York, v.44, (1975).
- [7] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. *Sov.Phys. JETP*, New York, v.45, (1977).
- [8] BALITSKII, Y.; LIPATOV, L. N. *Sov.J.Nucl.Phys.*, New York, v.28, (1978).
- [9] NIKOLAEV, N. N.; ZAKHAROV, B. G. *Z.Phys.C* **49**, 607 (1991); MUELLER, A. H. *Nucl.Phys.* **B415**, 373 (1994).
- [10] MUNIER, S.; PESCHANSKI, R. *Phys.Rev.Lett.* **91**, 232001 (2003); *Phys.Rev.* **D69**, 034008 (2004); *Phys.Rev.* **D70**, 077503 (2004).
- [11] BALISTSKII, I. *Nucl.Phys.* **B463**, 99 (1996); KOVCHEGOV, Y. V. *Phys.Rev.* **D60**, 034008 (1999); **61**, 074018 (2000).
- [12] FISHER, R. A. *Ann.Eugenics* **7**, 355 (1937); KOLMOGOROV, A.; PETROVSKY, I.; PISCOUNOV, N. *Moscow Univ.Bull.Math* **A1**, 1 (1937).
- [13] HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks & Leptons: an Imtroductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley, 1984.
- [14] STASTO, A. M.; GOLEC-BIERNAT, K.; KWIECINSKI, J. *Phys.Rev.Lett.* **86**, 596 (2001).
- [15] AARON, F. D. et al. [H1 and ZEUS collaborations], *JHEP* **0110**, 109 (2010).
- [16] ROHL. J. W. *Modern Physics: From α to Z^0* . John Wiley, 1994.
- [17] WILLIAMS, W. S. C. *Nuclear and Particle Physics*. Clarendson Press Oxford, (2001).

- [18] CANAL, C. A.; GAY DUCATI, M. B.; SIMÕES, J. A. M. *Notes in deep inelastic scattering*. Strasbourg: Centre de Recherches Nucléaires, Université Louis Pasteur, 1979.
- [19] GREINER, W.; SCHAMM, E.; STEIN, E. *Quantum Chromodynamics 3rd*. Springer, 2007.
- [20] ZEUS Collaboration,; CHEKANOV, S. *et al.*, *Eur. Phys. J.* **D21**, 443 (2001).
- [21] FORSHAW, J. R.; ROSS, D. A. *Quantum Chromodynamics and the Pomeron*. Cambridge University Press, 1997.
- [22] DONNACHIE, S.; DOSCH, G.; LANDSHOFF, P.; NACHTMANN, O. *Pomeron Physics and QCD*. Cambridge University Press, 2002.
- [23] ZEUS Collaboration,; CHEKANOV, S. *et al.*, *Phys.Rev.* **D67**, 012007,(2003).
- [24] DE SANTA AMARAL, J.T.; GAY DUCATI, M.B.; BETEMPS, M. A.; SOYEZ, G. *Phys.Rev.* **D76**, 094018 (2007) [arXiv:hep-ph/0612091]; BASSO, E. GAY DUCATI, M. B.; DE OLIVEIRA, E. G. *Phys.Rev* **D84**, 034024 (2011).
- [25] GOLEC-BIERNAT, K.; WÜSTHOFF, M. *Phys.Rev D, Melville*, v.59, n.1, 014017 10p, (1998).
- [26] MARQUET, C.; SOYEZ, G. *Nucl.Phys.*, **A760**, (2005).
- [27] PESCHANSKI, R.; SAPETA, S. *Phys.Rev.* **D74** 114021, (2006).
- [28] BEUF, G. Brookhaven National Laboratory NY 11973, USA, arXiv:1008.0498v1 [hep-ph] 3 Aug 2010.
- [29] MUELLER, A. H.; QIU, J. W. *Nucl.Phys. B Amsterdam*, v.268, n.2, (1986).
- [30] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B.; LEVIN, E. M. *Nucl.Phys. B Amsterdam*, v.493, n.1/2, (1997).
- [31] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B.; LEVIN, E. M. *Nucl.Phys. B Amsterdam*, v.511, n.1/2, (1998).
- [32] GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M.; RYSKIM, M.G. *Phys.Rep.* Amsterdam, v.100, n.1/2, (1983).