

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalurgia e de
Materiais (PPGEM)

**ABORDAGEM PROBABILÍSTICA EM UM MODELO DE
PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADO AO PLANEJAMENTO
MINEIRO**

José Adolfo de Carvalho Júnior
Engenheiro de Minas

Dissertação para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre
2006

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalurgia e de
Materiais (PPGEM)

**ABORDAGEM PROBABILÍSTICA EM UM MODELO DE
PROGRAMAÇÃO LINEAR APLICADO AO PLANEJAMENTO
MINEIRO**

José Adolfo de Carvalho Júnior
Engenheiro de Minas

Dissertação realizada no Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro da Escola de Engenharia da UFRGS, dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalurgia e de Materiais (PPGEM), como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração: Metalurgia Extrativa e Tecnologia Mineral

Porto Alegre
2006

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia, área de concentração de Metalurgia Extrativa e Tecnologia Mineral e aprovada em sua forma final, pelo Orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.

Orientador:

Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jair Carlos Koppe

Prof. Dr. Paulo Salvadoretti

Dr. Marcelo Cheuiche Godoy

Prof. Dr. Jair Carlos Koppe
Coordenador do PPGEM

Dedico este trabalho aos meus filhos Fernanda e João Pedro, e a minha esposa Vanessa pelo apoio, carinho, dedicação e companheirismo que permitiram a realização deste trabalho.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. João Felipe C. L. Costa pela orientação, dedicação e amizade, sendo o grande incentivador na conclusão deste trabalho.

À Copelmi Mineração por proporcionar condições para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa.

Aos Colegas da Copelmi Mineração pelo apoio e colaboração.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Minas (DEMIN) e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalurgia e de Materiais (PPGEM).

Sumário

Lista de Figuras.....	ix
Lista de Tabelas.....	x
Resumo.....	xi
Abstract.....	xii
CAPÍTULO 1 – Apresentação.....	1
1.1. Introdução.....	1
1.2 Meta.....	5
1.3 Objetivos Específicos.....	5
1.4 Metodologia.....	6
1.5. Estrutura da Dissertação.....	7
CAPÍTULO 2 – Revisão Bibliográfica	8
2.1. Pesquisa Operacional.....	8
2.2. Sistemas, Modelos e Modelagem.....	10
2.2.1. Classificação dos Modelos.....	13
2.2.2. Processo de Construção de Modelos.....	14
2.2.3. Padrões para a Construção de Modelos.....	15
2.2.4. Modelos Matemáticos.....	16
2.3. Utilização dos Modelos.....	17
2.4. Programação Linear.....	18
2.4.1. Algoritmos de Resolução.....	21
2.4.1.1. Resolução Gráfica.....	21
2.4.1.2. Método Simplex.....	25
2.5. Simulação.....	26
2.5.1. Simulação Estocástica.....	29
2.5.2. Principais Distribuições Teóricas de Probabilidade.....	31
2.5.2.1. Distribuição Normal.....	32
2.5.2.2. Distribuição Uniforme.....	33
2.5.2.3. Distribuição Triangular.....	34
2.5.2.4. Distribuição Exponencial.....	34
2.5.2.5. Distribuição Lognormal.....	35

2.5.2.7. Distribuição Weibull.....	35
2.5.3. Testes de Aderência.....	36
2.5.3.1. Teste Qui-quadrado.....	36
2.5.3.2. Teste Kolmogorov-Smirnov.....	37
2.5.4. Geração de Números Aleatórios.....	38
2.6. Risco.....	40
2.6.1. Modelagem Sob Condições de Riscos e Incertezas.....	42
CAPÍTULO 3 – Modelagem do Estudo de Caso.....	44
3. Descrição e Modelagem do Processo Produtivo.....	45
3.1. Modelagem Matemática do Processo Produtivo.....	48
3.1.1. Função Objetivo.....	49
3.1.1.1. Custo de Lavra.....	50
3.1.1.2. Custo de Utilização de Estoque.....	50
3.1.1.3. Custo de Beneficiamento.....	51
3.1.1.4. Receita Bruta.....	55
3.1.2. Restrições.....	57
3.1.2.1. Proporção de Camadas em Cada Frente de Lavra.....	58
3.1.2.2. Limites de Extração de Carvão Bruto.....	60
3.1.2.3. Limite de Utilização de Carvão Bruto.....	60
3.1.2.4. Limite de Beneficiamento.....	60
3.1.2.5. Demanda de Mercado.....	62
3.1.2.6. Restrições Qualitativas.....	63
3.1.3. Simplificações.....	64
CAPÍTULO 4 – Análise das Respostas do Modelo.....	66
4.1. Análise dos Resultados do Modelo de Otimização.....	67
4.2. Análise de Risco do Modelo de Otimização.....	70
4.2.1. Análise Estatística dos Dados Históricos.....	74
4.2.2. Identificação da Função de Distribuição Teórica de Probabilidade....	75
4.2.3. Simulação e Cálculo.....	76
4.2.4. Análise dos Resultados.....	76
4.3. Discussão dos Resultados.....	80

CAPÍTULO 5 – Considerações Finais.....	82
5.1. Conclusões.....	82
5.2. Proposta Metodológica.....	85
5.3. Sugestões para Futuros Trabalhos.....	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	88

Apêndice A: Exemplo de aplicação do modelo de otimização

Apêndice B: Resultados do processo de otimização

Apêndice C: Análise estatística dos dados históricos

Lista de Figuras

Figura 1.1: Participação do carvão mineral na matriz energética brasileira.....	3
Figura 2.1: Formas de estudar um sistema.....	11
Figura 2.2: Restrições do exemplo 1.....	22
Figura 2.3: Identificação gráfica do ponto ótimo.....	23
Figura 2.4: Soluções ótimas alternativas.....	24
Figura 2.5: Valores ilimitados das variáveis na solução ótima.....	24
Figura 2.6: Inexistência de valor ótimo finito.....	25
Figura 2.7: Representação esquemática do processo de simulação.....	27
Figura 2.8: Uso da distribuição uniforme (0,1) para gerar outras distribuições específicas (modificado de Vose, 2001).....	39
Figura 3.1: Representação gráfica das possíveis estratégias de produção de CV54.....	52
Figura 3.2: Representação gráfica da estratégia de produção de CV47, CV35 e CV30.....	53
Figura 3.3: Representação gráfica da estratégia de produção de CV20.....	54
Figura 4.1 Diferença relativa da receita bruta para cada cenário de produção comparando os processos otimizados e os não otimizados.....	69
Figura 4.2 Histograma e descrição estatística dos valores do coeficiente de recuperação da Camada S da Mina do Faxinal quando beneficiada para a produção de CV47.....	74
Figura 4.3 Gráfico de frequência acumulada do índice de recuperação.....	75
Figura 4.4: Histograma mostrando a variação dos resultados da simulação em relação ao valor ótimo.....	77
Figura 4.5: Distribuição de frequência acumulada, mostrando a variação dos resultados da simulação em relação ao valor ótimo.....	77
Figura 4.6: Variação da função objetivo em função da variação dos índices de recuperação simulado a partir de funções teóricas.....	78
Figura 4.7: Hierarquização dos coeficientes de correlação linear entre os resultados da função objetivo e os índices de recuperação simulados.....	79

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Identificação dos índices empregados na modelagem.....	48
Tabela 4.1: Resumo das principais condições de contorno para cada cenário.....	68
Tabela 4.2: Extração de carvão bruto por mina.....	71
Tabela 4.3: Aplicação da produção bruta.....	72
Tabela 4.4: Índices de recuperação para cada camada.....	72
Tabela 4.5: Quantidades de produtos gerados.....	73

Resumo

Neste trabalho é discutido o impacto causado pelos parâmetros de processo com comportamento estocástico em um modelo de otimização, aplicado ao planejamento mineiro. Com base em um estudo de caso real, construiu-se um modelo matemático representando o processo produtivo associado à mineração, beneficiamento e comercialização de carvão mineral. Este modelo foi otimizado com a técnica de programação linear, sendo a solução ótima perturbada pelo comportamento estocástico de um dos principais parâmetros envolvidos no processo produtivo. A análise dos resultados permitiu avaliar o risco associado à decisão ótima, sendo com isto proposta uma metodologia para avaliação do risco operacional.

Abstract

This work analyses the impact caused by stochastic process parameters on a mine planning optimization model. One real case was taken to construct a mathematical model representing the coal production process. This model was optimized using the linear program concepts where the best solution was disturbed by stochastic behavior of main parameters involved in the production process. The results analysis has allowed the evaluation of risks associated with the best solution. Finally, is proposed a methodology to evaluate the operation risk.

CAPÍTULO 1

Apresentação do Trabalho

1.1. Introdução

A história do carvão confunde-se com a do desenvolvimento do homem. Na Pré-História, o fogo era considerado algo produzido pelos deuses, até que os primitivos observaram que as florestas transformavam-se em pedras negras após serem incendiadas por um raio, e que estes resíduos, também, eram inflamáveis. O carvão vegetal proporcionou mais conforto e facilidade aos homens das cavernas. Já no Período Neolítico, uma nova descoberta: minerais negros colocados para proteger as fogueiras eram reduzidos a metal quando em contato com a lenha carbonizada. Seguiram-se as idades do cobre, do bronze e do ferro, e o homem foi utilizando o calor do carvão mineral para tornar moldáveis as matérias-primas para a fabricação de suas ferramentas.

No Brasil, o carvão mineral começou a ser estudado a partir de 1814, quando o naturalista alemão Friedrich Sellow chegou ao Brasil, como pensionário do Rei Dom João VI, para pesquisar as jazidas de ouro, prata e carvão mineral nos Estados do Rio Grande do Sul e de Santa Catarina (Belolli, 2002).

Em 1832, começou a ser organizada uma pequena empresa para a primeira tentativa de exploração das jazidas do carvão catarinense. No Rio Grande do Sul, o inglês James Johnson, por solicitação do presidente provincial Luiz Vieira Sininbu, desenvolveu uma campanha de pesquisa e após abre, em Arroio dos Ratos, uma mina começando a produzir carvão em 1855. Por sua vez, a mineração de carvão nas localidades de Candiota e Hulha Negra, no sudoeste do Rio Grande do Sul, onde se localiza a maior jazida brasileira de carvão mineral, data de 1863.

Desde então, a mineração do carvão foi responsável pela emancipação e desenvolvimento de uma série de municípios localizados nas bacias carboníferas sul brasileiras. A produção carbonífera brasileira tinha, no final do século XIX, dois destinos principais: o das fornalhas dos navios e o das fornalhas das locomotivas a vapor. Ambos os mercados foram perdidos para os derivados de petróleo: o do transporte marítimo no período entre guerras e o ferroviário na década de 1950 (Aramis, 2002).

A partir da primeira metade do século XX, esses mercados foram progressivamente substituídos pelo da geração termoelétrica. Atualmente, o parque termoelétrico brasileiro é composto pelo Complexo Termoelétrico de Jorge Lacerda em Tubarão (SC) com uma capacidade instalada de 832 MW, pela Usina Termoelétrica Presidente Médici em Candiota (RS) com 446 MW e Usina Termoelétrica de Charqueadas (RS) com 78 MW.

Apesar de o carvão mineral corresponder a aproximadamente 50% das reservas nacionais de combustível fóssil, a sua participação na matriz energética brasileira vem caindo continuamente ao longo dos anos, e atualmente não passa de 1,5%, como mostra a Figura 1.1. Isto tem impelido às empresas mineradoras a diversificarem sua carteira de clientes, fornecendo carvão energético também para aplicações industriais, tais como:

- indústrias dos ramos petroquímico, cerâmico, de papel e de celulose: nestas, o carvão é utilizado para a geração de calor, vapor e/ou energia elétrica para as respectivas unidades fabris;
- indústria de alimentos: sendo utilizado nos processos de secagem de grãos;
- indústria cimenteira: onde o carvão é utilizado nos fornos de clínquer.

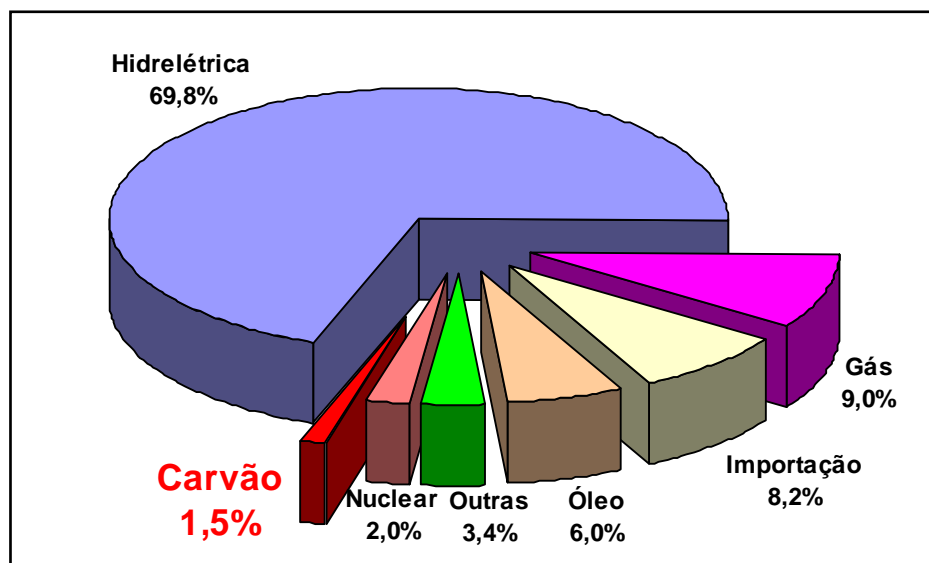


Figura 1.1. Participação do carvão mineral na matriz termoelétrica brasileira (Fonte MME)

Esta diversificação de clientes forçou as empresas mineradoras a desenvolver novos produtos, que atendam as necessidades específicas de cada cliente. Com isto, estas empresas, que no passado produziam carvões energéticos com poder calorífico de 3.000 a 4.500 kcal/kg, e praticamente nenhuma restrição quanto ao teor de enxofre, tiveram que aumentar sua gama de produtos. Atualmente, o mercado consumidor de carvão mineral para uso industrial, exige cada vez mais produtos de mais elevado poder calorífico (4.700 a 6.800 kcal/kg) e baixo teor de enxofre (normalmente menor que 1,2%). Neste contexto, e com a crescente globalização da economia, as empresas mineradoras têm buscado alternativas para a produção de produtos mais nobres e com preço competitivo em relação a outros energéticos concorrentes, tais como: gás natural, óleo combustível, carvão importado.

As alternativas de produção buscadas incluem, entre outras, as seguintes medidas:

- exploração simultânea de várias frentes de lavra (várias minas), o que aumenta a variedade de matéria prima disponível para a obtenção dos diferentes produtos;
- beneficiamento, em separado, de cada camada de carvão, a fim de gerar produtos cujas características sejam as mais semelhantes as do produto final desejado;
- controle da diluição de lavra, com o objetivo de obter um carvão bruto com as características mais semelhantes as do produto desejado.

Analisando este problema sobre a ótica da Pesquisa Operacional, verifica-se estar diante de um problema de otimização, onde se deseja produzir um bem (carvão energético) com um menor custo, ou com a maior lucratividade possível, de acordo com o enfoque selecionado. Esta produção está sujeita a uma série de parâmetros e restrições, tais como: disponibilidade de matéria prima (diferentes camadas de carvão), demanda por cada tipo de produto, recuperação no processo de beneficiamento (o qual depende das características da matéria prima utilizada e das características do produto que se deseja obter) e dos custos de lavra e beneficiamento. Estes parâmetros condicionam a produção dentro de determinados limites.

Nessa realidade, a modelagem e a programação matemática se apresentam como poderosas ferramentas para a solução deste tipo de problema. Dentre as várias técnicas de otimização desenvolvidas, a Programação Linear (PL) é a mais estudada e conseqüentemente a mais usada nas diversas áreas das ciências aplicadas. A PL constitui-se, não somente a técnica mais simples dentro da programação matemática, mas, também, a mais versátil, com a possibilidade de uma análise de sensibilidade do modelo e ainda com a garantia de obtenção do ótimo global, se este existir (Medeiros, 1985).

Devido ao comportamento complexo de alguns dos parâmetros de processo, estes podem ser tratados como variáveis estocásticas. Para

quantificar o impacto que estas variáveis produzem nas respostas dos modelos de planejamento baseados em PL, podem ser utilizados processos de simulação, os quais levam em consideração não somente as médias ou padrões determinísticos, mas também as distribuições estatísticas associadas aos parâmetros em questão.

Atualmente, a definição da estratégia de produção para atender a uma determinada demanda de mercado é feita simulando alguns cenários de produção, escolhendo-se entre estes, o que gera um resultado final mais positivo. Entretanto, esta metodologia não garante, de forma alguma, que o cenário escolhido seja realmente o melhor possível. Com a utilização de técnicas de PL, associadas a processos de simulação, espera-se encontrar o cenário de produção ótimo para cada demanda de mercado. Segundo Prado (1999), a utilização de técnicas de PL, em realidades semelhantes a aqui descrita, pode representar uma redução dos custos de produção em até 15%.

1.2 Meta

Tem-se como meta deste trabalho, desenvolver uma metodologia para avaliação do impacto causado pela variabilidade dos parâmetros de processo nas respostas geradas por um modelo de otimização, por programação linear. Esta metodologia será testada em um estudo de caso.

1.3 Objetivos Específicos

Com vistas a atingir a meta proposta, essa dissertação busca cumprir os seguintes objetivos específicos:

- i. desenvolver um modelo matemático (teórico) que represente as características do processo produtivo de carvão energético, considerando as várias restrições de ordem geológica, operacional e mercadológica;

- ii. verificar a aplicabilidade da técnica de programação linear para obtenção da solução ótima para cada conjunto de condições de contorno;
- iii. avaliar as possibilidades de ganho em decorrência da implantação e uso da técnica de otimização por PL em um sistema produtivo;
- iv. analisar o comportamento estatístico dos parâmetros de processo de comportamento estocástico;
- v. quantificar o impacto causado pela variabilidade dos parâmetros de processo em um modelo de programação linear.

Desta maneira, além de obter uma ferramenta de planejamento de produção mais ágil e objetiva, espera-se também, por meio de replicações do processo de simulação, poder avaliar a sensibilidade do modelo perante o comportamento estocástico de algumas variáveis de processo. Com isto, espera-se que seja possível quantificar o risco associado à estratégia de produção selecionada.

1.4 Metodologia

Tendo como base os objetivos propostos, será adotada a seguinte metodologia para a elaboração deste trabalho:

Revisão Bibliográfica: Esta primeira etapa tem como objetivo a aquisição do domínio teórico sobre o tema em estudo. Para tanto, será feita uma revisão bibliográfica na área de Pesquisa Operacional, dando ênfase as técnicas de modelagem matemática, otimização por programação linear e de simulação.

Desenvolvimento do Modelo Teórico: O segundo passo será a organização do conhecimento obtido por meio da pesquisa bibliográfica, elaborando um modelo teórico que represente todas as etapas do processo produtivo em questão. Este modelo será implementado computacionalmente utilizando programas apropriados.

Estudo de Caso: A aplicação prática do modelo será feita com estudos de casos. Os casos escolhidos representam a realidade atual da operação de uma mineradora de carvão que lavra simultaneamente em várias frentes, cada uma dessas com várias camadas de carvão de características distintas entre si, e com um mercado consumidor composto por um universo de clientes com necessidades específicas.

1.5. Estrutura da Dissertação

A apresentação final do trabalho está estruturada da seguinte forma:

Capítulo 1: Contém uma introdução, histórica e teórica, sobre o assunto, esclarece as metas e os objetivos específicos do trabalho, bem como apresenta a metodologia que será empregada para a realização do mesmo.

Capítulo 2: Apresenta uma breve revisão teórica sobre os tópicos de Pesquisa Operacional empregados neste trabalho. Inclui uma visão de modelagem matemática, otimização, métodos de programação linear, simulação e análise de risco;

Capítulo 3: Descreve o modelo matemático (ou teórico), gerado para um estudo de caso correspondente à produção de carvão energético a partir da realidade de Copelmi Mineração Ltda. Neste capítulo, é mostrado, também, como foi feita a implementação computacional deste modelo;

Capítulo 4: Discute os resultados obtidos pelo estudo de caso, incluindo análises de sensibilidade e comparação dos resultados obtidos com a prática industrial;

Capítulo 5: Apresenta os principais resultados obtidos ao longo de todo o trabalho, as considerações finais e sugestões para trabalhos subseqüentes.

CAPÍTULO 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, é feita uma introdução à Pesquisa Operacional, sendo revisados os conceitos teóricos envolvidos nas técnicas de modelagem matemática, otimização por programação linear, simulação e análise de risco.

2.1. Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional – PO, é um método científico de tomada de decisões que, em linhas gerais, consiste na descrição de um sistema organizado com o auxílio de um modelo, e pela experimentação deste, na descoberta da melhor maneira de operar o sistema (Silva, 1995).

Os problemas de PO existem desde longa data, considera-se que os primeiros trabalhos nesta área foram desenvolvidos pelo físico e matemático italiano Girolamo Cardano com a publicação em 1564 do livro intitulado *Liber de Ludo Aleae*, o qual abordava as probabilidades teóricas de jogos de azar (Gass, 2004).

Desde então diversos trabalhos e estudos nesta área foram desenvolvidos, entretanto, considera-se que o surgimento da PO, como ramo científico independente, ocorreu durante a Segunda Grande Guerra Mundial, quando então passou a ser amplamente utilizada para fins militares. Neste período, suas técnicas foram intensamente empregadas por equipes multidisciplinares de cientistas para estudar os mais variados problemas estratégicos e táticos, desde a formulação da dieta ideal para os soldados até o dimensionamento do tamanho dos comboios de navios mercantes que atravessavam o Atlântico Norte.

Ainda embutido na problemática militar surge, em 1947, o fato consolidador da PO: a criação, por George Dantzig, do Método Simplex, o qual é uma forma sistemática de resolução de problemas de programação linear e que se revelou de uma eficácia extraordinária. Como este algoritmo implica em uma grande quantidade de cálculos, encontrou, a partir da década de cinquenta, o computador como um grande aliado.

Desde então, a PO vem evoluindo, sendo hoje formada por um conjunto de técnicas utilizadas para a solução dos mais variados tipos de problemas. As técnicas de maior relevância podem ser resumidas em (Loesch, 1999):

Programação Linear: técnica de otimização, utilizada na resolução de problemas de maximização ou minimização de algum tipo de objetivo, atendendo a um conjunto de restrições. Neste caso, tanto a função objetivo, como as restrições são constituídas por equações lineares, ou são consideradas assim para efeito de simplificação;

Programação Não-Linear: expande o alcance da programação linear, permitindo que se trate de problemas onde a função objetivo e/ou as restrições sejam equações não-lineares;

Programação Dinâmica: trata-se de uma técnica de análise de possibilidade de problemas decisórios, em que o processo de decisão envolve etapas sucessivas de decisão correlacionadas entre si, isto é, quando a decisão de uma etapa influencia a etapa

posterior. Desta maneira, o ótimo deve levar em consideração a análise da rede decisória como um todo;

Simulação: abrange situações onde fatores, sujeitos à diferentes distribuições de probabilidades, podem ser otimizados por meio de simulações matemáticas, pelo emprego da técnica de Monte Carlo. Para isto, deve-se conhecer a função de distribuição de probabilidades dos fatores estocásticos envolvidos. A técnica permite ainda verificar como as alterações dos valores de parâmetros do modelo alteram os resultados. Embora, de certa forma, esta técnica não garanta a solução ótima, é eficaz no tratamento de modelos aleatórios complexos, onde a solução analítica é impraticável.

Para atingir as metas desse trabalho, serão empregadas as técnicas de programação linear e de simulação. A seguir apresetam-se uma revisão bibliográfica sobre estes temas. Antecede a esta revisão uma breve abordagem teórica sobre a modelagem de sistemas, pois se faz necessário modelar o sistema (ou problema) antes de procurar qualquer solução para o problema em questão.

2.2. Sistemas, Modelos e Modelagem

Um sistema é definido, segundo Law e Kelton (2000), com sendo um conjunto de entidades, tais como: pessoas e/ou máquinas, que agem e interagem com a finalidade de realizar alguma atividade lógica, como por exemplo, um processo produtivo qualquer. Na prática, entretanto, o conceito de sistema depende dos objetivos particulares de cada estudo, pois para um determinado estudo, o conjunto de entidades que compõem o sistema pode ser um, mas em um outro estudo, pode ser somente uma pequena parte do todo.

O termo “modelo” possui vários significados. Para Goldbarg (2000) os modelos são representações simplificadas da realidade, que preservam, para determinadas situações e enfoques, uma equivalência adequada com a realidade. O verbo modelar, no entanto, induz a uma idéia mais ampla, a da

simulação da realidade. Pode-se, também, definir, o estado do sistema, como sendo o conjunto de variáveis necessárias à descrição do sistema em um determinado instante. O estudo ou a análise de um sistema pode ser feito de várias formas (Figura 2.1).

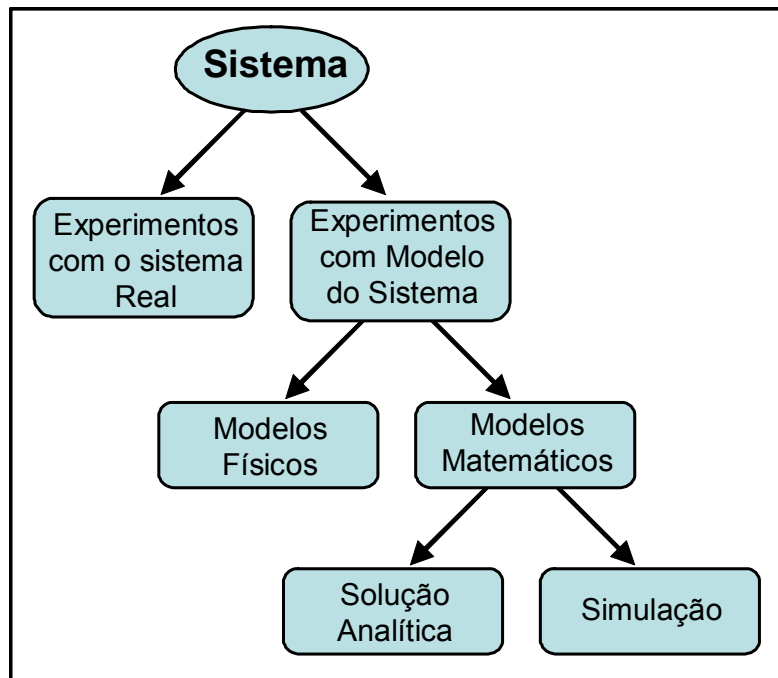


Figura 2.1: Formas de estudar um sistema.

Ao analisar a Figura 2.1, pode-se fazer as seguintes considerações:

Experimento com o sistema real: esta opção é utilizada quando é possível alterar fisicamente o sistema de modo a que ele opere sob novas condições, gerando assim resultados para este novo estado. Este tipo de abordagem, entretanto, raramente é empregado em escala industrial por apresentar, via de regra, custos elevados e/ou por causar interrupções ou interferências no processo produtivo representado pelo sistema;

Experimento com modelo do sistema: quando o experimento com o sistema real é inviável, usualmente constrói-se um modelo que represente e substitua o sistema real. A utilização de modelos

geralmente tem custos bem menores que o experimento com o sistema real, entretanto, como o modelo é uma representação simplificada da realidade, surge a preocupação sobre a representatividade do modelo, isto é, da validade do modelo;

Modelos físicos vs. modelos matemáticos: para a grande maioria das pessoas, a idéia de modelo diz respeito à representação em escala reduzida de um determinado elemento (Modelo Icônico). Este conceito, no entanto, não é aplicável à área de pesquisa operacional, onde utiliza-se modelos numéricos ou matemáticos para representar as grandezas envolvidas no sistema.

Solução analítica vs. simulação: quando se constrói um modelo matemático para representar um determinado sistema, este modelo é utilizado para estudar e responder questionamentos sobre o comportamento deste sistema. Caso o modelo em questão apresente uma complexidade relativamente pequena, de maneira a permitir a obtenção dos resultados por uma rota analítica, esta geralmente é preferida. Entretanto, não raro, encontram-se sistemas de alta complexidade, e que geram por sua vez, modelos matemáticos igualmente complexos cuja solução via métodos analíticos é na prática inviável. Para estes casos, a utilização da simulação é indicada.

Praticamente, todas as pessoas, mesmo que sem ter consciência disto, já manipularam algum tipo de modelo. Estes modelos podem ser bastante simples, como por exemplo, uma fotografia, como extremamente complexos, como os utilizados para explicar a mecânica quântica. Entretanto, eles têm em comum o objetivo de transmitir e interpretar a realidade por meio de metáforas de substituição.

A complexidade de um modelo pode ser mensurada por meio da análise de três dimensões: meio ambiente, domínio e dinâmica. Um modelo é dito simples quando (Goldbarg, 2000):

- é pouco influenciado pelas variações em seu meio ambiente, isto é, possui um perímetro de interferência simples e bem definido;
- possui uma estrutura estável e homogênea, com poucas variáveis;
- apresenta um comportamento previsível e sua estrutura interna não se altera ao longo do tempo.

Na construção de um modelo de um problema complexo, torna-se praticamente impossível considerar todos os elementos intervenientes. Desta maneira, faz-se necessário a adoção de simplificações e abstrações, sendo que estas devem capturar apenas os elementos fundamentais do processo.

2.2.1. Classificação dos Modelos

Muitos são os enfoques, objetivos e usos dos modelos. Com isto surgem várias classificações para estes. Entretanto, segundo Ackoff (1971) existem três tipos de modelos que podem ser normalmente empregados em PO, bem como na maioria das outras ciências: icônicos, analógicos e simbólicos.

Modelos Icônicos: nestes, as propriedades relevantes dos objetos são representadas como tais, sendo que o fator de escala é uma das mais significativas diferenças entre a realidade e o modelo. Como exemplos destes têm-se as fotografias, os mapas e as maquetes;

Modelos Analógicos: estes usam um conjunto de propriedades para representar outro conjunto de propriedades. Um exemplo disto é a substituição de sistemas hidráulicos por elétricos;

Modelos Simbólicos: estes usam letras, números e símbolos para representar as variáveis e suas relações. Em grande parte dos

casos usam-se relações lógicas ou matemáticas. O principal exemplo deste tipo de modelo é o modelo matemático.

2.2.2. Processo de Construção de Modelos

O processo genérico de construção de modelos, ou de modelagem, é formado por pelo menos quatro etapas:

- definição do problema;
- formulação e construção do modelo;
- validação do modelo;
- reformulação do modelo;

A definição do problema é uma das etapas mais importantes do processo de modelagem, pois não é possível solucionar um problema sem conhecê-lo profundamente. Nesta etapa, é preciso definir claramente os objetivos relacionados ao problema. É comum a ocorrência de situações-problema que a primeira vista se apresentam com um grande número de variáveis, parâmetros, relacionamentos, restrições e metas. No entanto, uma análise mais detalhada pode revelar que somente alguns destes aspectos são realmente relevantes para o estudo, podendo, nestes casos, muitas das características do sistema real, serem ignoradas. Trata-se, portanto, de abstrair da situação real os aspectos relevantes (Costa, 2000).

Na fase de formulação do modelo, são definidos os tipos de variáveis que serão utilizadas na representação do problema. Devem ser representadas as restrições do problema, tanto as de natureza quantitativa como lógica. O modelo deverá ser capaz de expressar as funções de desempenho que, possivelmente, serão exigidas no processo de otimização. As funções de desempenho, via de regra, serão denominadas de funções objetivo. A formulação será completa com o estabelecimento das hipóteses de representação, que irão orientar a escolha e a possível utilização de modelos já existentes e de técnicas de solução (exatas, heurísticas, etc.) para o caso (Goldbarg, 2000).

A etapa de validação do modelo é responsável por comparar o comportamento deste com a realidade. Trata-se de um processo de verificação da representatividade do modelo. Caso o modelo não reproduza satisfatoriamente a realidade, este deverá ser reformulado.

Além destas etapas, Loesch (1999) sugere que sejam observados os seguintes aspectos durante o processo de modelagem:

- dividir, sempre que possível, o problema principal em problemas menores;
- identificar eventuais inter-relacionamentos entre as variáveis do problema;
- descartar aspectos que não comprometem a otimalidade da solução, bem como as redundâncias, de modo a não aumentar desnecessariamente o porte e a complexidade do modelo.

2.2.3. Padrões para a Construção de Modelos.

Existem, segundo Ackoff (1971), cinco padrões de construção de modelos:

Padrão 1: quando a estrutura do sistema é suficientemente simples e evidente para ser compreendida por inspeção. Neste caso, o modelo pode ser construído com facilidade, o que não significa que não possa ser muito difícil ou até mesmo impossível avaliar as variáveis não controladas, bem como diversos outros parâmetros;

Padrão 2: quando a estrutura do sistema é relativamente aparente, mas a representação simbólica não é tão aparente. Nesta situação, é comum a busca por um sistema análogo com estrutura já conhecida. O sistema análogo poderá auxiliar na descoberta das propriedades do sistema em estudo;

Padrão 3: quando a estrutura do sistema não é aparente, contudo, uma análise estatística do mesmo pode atender ao desejado.

Neste caso, o sistema é considerado uma “caixa preta”, onde se conhece as respostas do modelo para determinados estímulos, mas não os mecanismos que geram estas respostas;

Padrão 4: Quando a estrutura do sistema não é aparente, nem tampouco é possível isolar os efeitos das diversas variáveis com uma análise estatística. Para este caso, é sugerido o projeto de experimentos com vistas a determinar variáveis e correlações relevantes que levem a redução para o padrão 3;

padrão 5: Quando verifica-se as situações do padrão 4, porém as experimentações possíveis sobre o modelo são limitadas para o fim desejado.

2.2.4. Modelos Matemáticos

A modelagem matemática constitui o primeiro passo na busca da solução de um problema de PO. O modelo matemático é considerado o modelo universal da PO, e é expresso na forma de equações e inequações matemáticas. Em sua formulação admite-se que todas as variáveis relevantes são quantificáveis (Loesch, 1999).

Os modelos matemáticos possuem uma estrutura fixa composta por três conjuntos fundamentais de elementos (Montevichi, 2000):

variáveis de decisão e parâmetros de controle: As variáveis de decisão representam as incógnitas que serão determinadas na solução do modelo. Os parâmetros de controle representam as variáveis sobre as quais é possível exercer algum tipo de controle. Estes parâmetros podem ser determinísticos ou estocásticos;

restrições: Para considerar as limitações físicas que condicionam o sistema, o modelo deve incluir um conjunto de restrições que limitem os possíveis valores das variáveis de decisão;

função objetivo: Define a medida de efetividade do sistema como uma função matemática de suas variáveis de decisão. Em geral, a solução ótima do modelo é obtida quando os melhores valores

correspondentes das variáveis de decisão são substituídos na função objetivo, enquanto satisfazem simultaneamente a todas as restrições.

Resumidamente, os modelos matemáticos utilizados em PO podem ser entendidos como: determinar os valores das variáveis de decisão que otimizem a função objetivo e ao mesmo tempo atenda a todas as restrições.

A estrutura básica dos modelos matemáticos empregados em PO é dada por:

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad (2.1)$$

onde:

Z = função objetivo (FO);

x₁, x₂, x₃, ..., x_n = sistema de variáveis que não são sujeitas a controle (variáveis de decisão);

y₁, y₂, y₃, ..., y_n = sistema de variáveis que são sujeitas a controle (parâmetros).

Na prática, a função objetivo é, geralmente, expressa na forma de lucro ou de custos de produção, e procura-se normalmente maximizar ou minimizar, respectivamente, estes valores de acordo com a abordagem escolhida.

2.3. Utilização dos Modelos

Concluída a etapa de modelagem do sistema em estudo, o passo seguinte é utilizar o modelo gerado a fim de obter as respostas para uma determinada situação problema. Isto pode ser feito, basicamente, por dois caminhos: por meio dos métodos analíticos e/ou dos métodos de simulação.

Os métodos analíticos procuram solucionar o problema empregando técnicas da pesquisa operacional que otimizam solução, tais como programação linear (PL) e a programação dinâmica, dentre outras. Estes métodos requerem que o problema seja expresso na forma de um modelo matemático, de forma particular dependendo do algoritmo de solução a ser utilizado. Por outro lado, a quantidade de problemas que podem ser resolvidos

de forma analítica é limitada, e quando isto não é possível, pode-se utilizar métodos de computação numérica, por exemplo: a simulação, para encontrar as respostas para o problema em questão.

A seguir apresenta-se a fundamentação teórica básica para o entendimento e utilização destas duas técnicas, iniciando pela Programação Linear e concluindo com a Simulação.

2.4. Programação Linear

De acordo com Prado (1999), a PL é uma técnica que permite estabelecer a mistura ótima de diversas variáveis segundo uma função linear de efetividade (função objetivo), satisfazendo simultaneamente a um conjunto de restrições lineares para estas variáveis. Para que um determinado problema possa ser representado por meio de um modelo de PL, ele deve possuir as seguintes características (Goldbarg, 2000):

- proporcionalidade: a quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema. Além disso, o custo de cada atividade é proporcional ao nível de operação da atividade.
- não negatividade: deve ser sempre possível desenvolver as atividades em qualquer nível não negativo.
- aditividade: o custo total é a soma das parcelas associadas a cada atividade.
- separabilidade: pode-se identificar de forma separada o custo (ou consumo de recursos) específico das operações de cada atividade.

A construção de um modelo de programação linear segue três passos básicos (Ravindran, 1987):

Passo I: Identificar as variáveis desconhecidas a serem determinadas e representá-las por símbolos algébricos;

Passo II: Listar todas as restrições do problema e expressá-las como equações ou inequações lineares em termos das variáveis de decisão definidas no passo anterior;

Passo III: Identificar o objetivo ou critério de otimização do problema, representando-o como uma função linear das variáveis de decisão. O objetivo pode ser do tipo maximizar ou minimizar.

Um problema de programação linear consiste, portanto, na maximização, ou minimização, de uma função linear de muitas variáveis, designada função objetivo (FO), em que as variáveis estão sujeitas a um conjunto de restrições também lineares.

De uma forma genérica, um problema de PL formula-se da seguinte maneira:

i) Maximizar ou minimizar a função objetivo do tipo:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \text{ ou} \quad (2.2)$$

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.3)$$

ii) Sujeita as seguintes restrições:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{=, \geq, \leq\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{=, \geq, \leq\} b_2 \\ (\dots) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{=, \geq, \leq\} b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

onde:

x_n = variáveis de decisão;

c_n = parâmetros da função objetivo;

a_{mn} = parâmetros das equações de restrição;

b_n = termo independente das equações de restrição;

n = número de variáveis de decisão;

m = número de restrições funcionais.

Reescrevendo o problema sob a forma matricial tem-se:

i) Maximizar ou minimizar a função objetivo do tipo:

$$z = \underline{c} \underline{x} \quad (2.5)$$

ii) Sujeita às seguintes restrições:

$$\left. \begin{array}{l} A \underline{x} \{ \geq, \leq, = \} \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

onde:

\underline{c} é um vetor de dimensão $1 \times n$, correspondendo aos parâmetros (c_1, c_2, \dots, c_n) da função objetivo;

\underline{x} é um vetor de dimensão $n \times 1$, correspondendo as variáveis de decisão (x_1, x_2, \dots, x_n);

\underline{b} é um vetor de dimensão $m \times 1$, correspondendo aos termos independentes (b_1, b_2, \dots, b_n) das equações de restrição, conhecido como vetor das necessidades;

A é uma matriz de dimensão $m \times n$, correspondendo aos parâmetros ($a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$) das equações de restrição.

Um vetor \underline{x} que satisfaça todas as restrições chama-se solução admissível. O conjunto de todas as soluções admissíveis é um poliedro convexo denominado região admissível. Uma solução admissível que otimize a FO é chamada de solução ótima.

O algoritmo de resolução do sistema de equações, tipicamente o Algoritmo Simplex, procura a solução ótima dentro da região admissível (Loesch, 1999), e sempre que a solução ótima existir ela será um ponto de fronteira da região admissível (Montevechi, 2000).

As restrições de não negatividade das variáveis de decisão constituem condição necessária à aplicação do Algoritmo Simplex. Embora esta restrição ocorra, normalmente, em decorrência da natureza da variável dentro do modelo, pode haver situações onde as variáveis sejam irrestritas, e neste caso deve ser usado um artifício de substituir cada variável irrestrita pela diferença de duas outras, onde a restrição de não negatividade se aplica (Loesch, 1999).

Os valores de todos os coeficientes, ou parâmetros de controle, são conhecidos durante a modelagem do problema. Estes coeficientes podem ser

de natureza determinística ou probabilística, de acordo com a natureza do problema modelado (Montevecchi, 2000).

Em problemas de PL, existem apenas pontos ótimos globais, o que não acontece em outros tipos de problemas, como por exemplo, os de programação não linear. Desta forma, qualquer solução que satisfaça as condições de ótimo local é uma solução ótima global do problema. Esta propriedade facilita a resolução dos problemas de PL.

2.4.1. Algoritmos de Resolução

Existem fundamentalmente duas maneiras de se resolver um problema de PL, a gráfica e a analítica. Neste trabalho, a introdução aos métodos de resolução de problemas de PL será feita pelo método gráfico, após, apresentarse o Algoritmo Simplex, que se constitui na forma analítica mais difundida para a resolução deste tipo de problema.

2.4.1.1. Resolução Gráfica

A resolução gráfica de um problema de PL, apesar de ser de aplicação bastante limitada, é extremamente didática para mostrar a lógica da resolução de problemas de PL. Para ilustrar como é feito este processo utilizaremos o seguinte exemplo:

Maximizar a FO dada por:

$$Z = 25x_1 + 20x_2 \quad (2.7)$$

Sujeita às seguintes restrições:

$$\text{Restrição 1: } x_1 + x_2 \leq 50$$

$$\text{Restrição 2: } 2x_1 + x_2 \leq 80$$

$$\text{Restrição 3: } 2x_1 + 5x_2 \leq 220$$

$$\text{Restrição 4: } x_1, x_2 \geq 0$$

(2.8)

Traçando-se as retas correspondentes às restrições, verifica-se que existe uma região onde todas as restrições são satisfeitas, (vide a região hachurada na Figura 2.2.). Esta região, delimitada no caso pelos pontos A, B, C, D e E, é conhecida como “região admissível”.

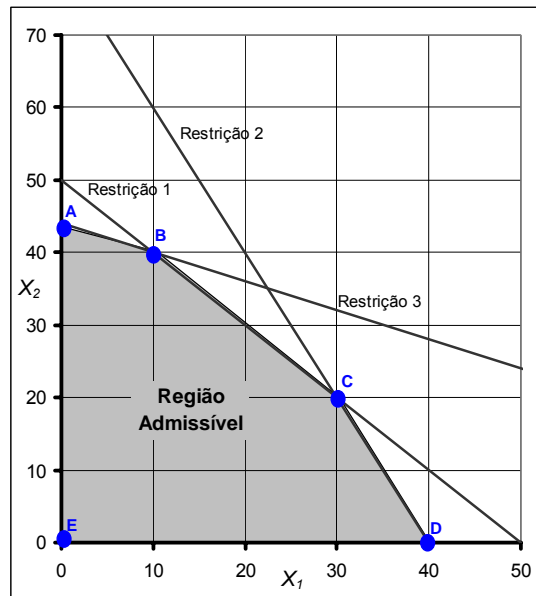


Figura 2.2: Restrições do exemplo 1.

Para localizar o ponto ótimo, deve-se primeiramente traçar a reta correspondente a FO para um dado valor de Z , em seguida variar o valor de Z obtendo assim um conjunto de retas paralelas entre si, denominadas retas de nível da FO (vide linhas tracejadas em vermelho na Figura 2.3). Como a FO é crescente no sentido do seu gradiente, para encontrar a solução ótima basta traçar uma reta de nível da FO e deslocá-la, no sentido do gradiente, o mais possível dentro da região admissível. A solução admissível com maior valor para Z será a solução ótima.

No caso de um problema de minimização, a solução é análoga, diferindo apenas nas restrições, que devem limitar a região admissível na área inferior do gráfico, e obviamente na busca por valores menores de Z .

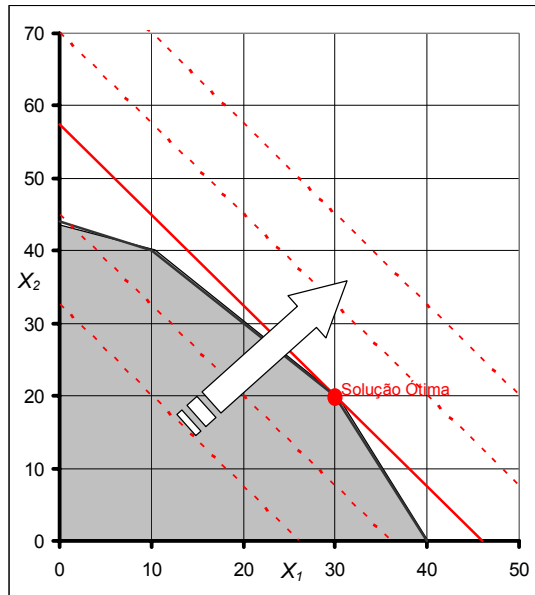


Figura 2.3: Identificação gráfica do ponto ótimo, as linhas tracejadas representam as retas de nível da FO.

A solução ótima pode, também, não ser única, considere-se que no exemplo anterior a FO objetivo seja dada por:

$$(Max) Z = 25x_1 + 25x_2 \quad (2.9)$$

Neste caso, a reta correspondente a FO apresenta o mesmo coeficiente angular que a restrição 1 (equação 2.8). Desta maneira, todos os pontos sobre a reta $x_1+x_2=50$, possuem igual valor para Z e máximo dentro da região admissível, sendo denominados Soluções Ótimas Alternativas. A Figura 2.4 ilustra este caso.

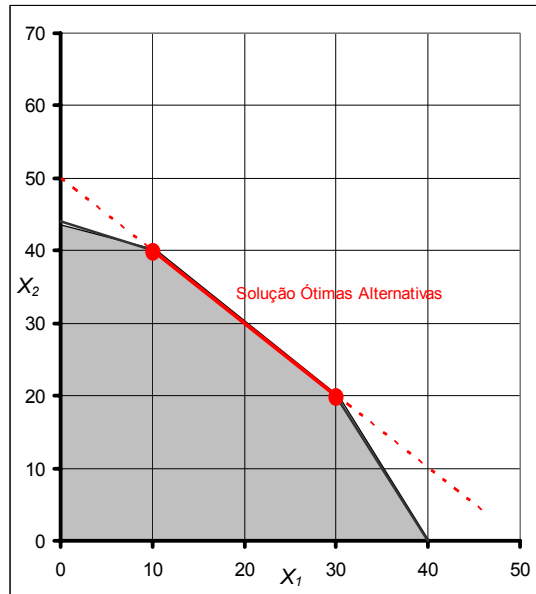


Figura 2.4: Soluções ótimas alternativas.

Ainda é possível a ocorrência de casos particulares, onde existem soluções ótimas alternativas. Entretanto, as variáveis, no caso x_1 e x_2 , podem tomar valores arbitrariamente elevados, mas o Z ótimo é finito (Figura 2.5). Por outro lado, podem existir situações em que a função objetivo pode tomar valores infinitamente grandes dentro da região admissível, inexistindo, neste caso, valor ótimo finito para Z . Esta última situação é mostrada graficamente pela Figura 2.6.

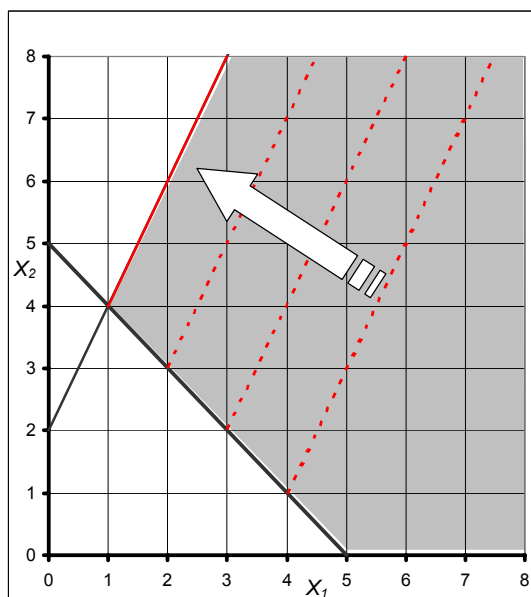


Figura 2.5: Valores ilimitados das variáveis na solução ótima.

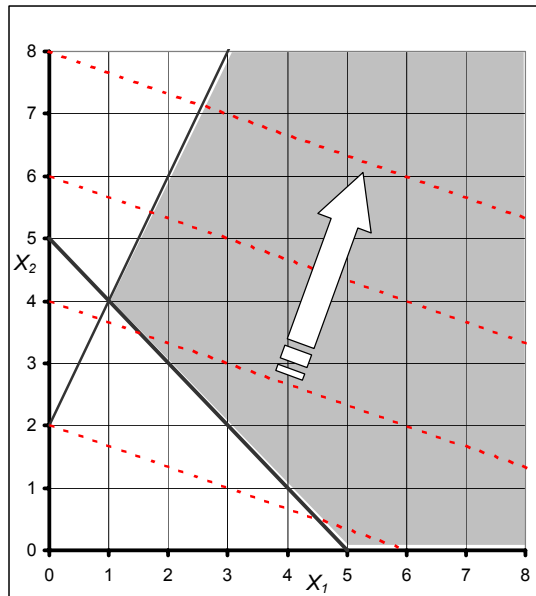


Figura 2.6: Inexistência de valor ótimo finito.

Existem ainda situações onde o conjunto de restrições corresponde a um conjunto vazio, não existindo, nestes casos, qualquer solução admissível.

2.4.1.2. Método Simplex

O Método Simplex é um algoritmo que utiliza um ferramental baseado na Álgebra Linear para determinar, por um método algébrico iterativo, a solução ótima de um Problema de Programação Linear - PPL. Em linhas gerais, o algoritmo parte de uma solução viável do sistema de equações que constituem as restrições do PPL, e a partir dessa solução inicial vai identificando novas soluções viáveis de valor igual, ou melhor, que a corrente. O algoritmo, portanto, possui um critério de escolha o qual permite encontrar sempre novos e melhores vértices da envoltória convexa do problema, e um critério de parada que consegue verificar se o vértice escolhido é ou não o vértice ótimo (Goldbarg, 2000).

A chave do algoritmo simplex está no formato da região limitada pelas restrições, comum a todos os problemas de PO, conforme verificado por Dantzig (1963); tal região é denominada simplex. Quaisquer dois pontos selecionados no contorno de um simplex, quando unidos por uma linha, resultam em uma linha inteiramente contida dentro do simplex. A partir dessa

constatação, a busca pela solução ótima em problemas de PO passou a ser limitada aos pontos extremos da região simplex. Isto permitiu o desenvolvimento, por George Dantzig em 1947, de um algoritmo de baixa complexidade computacional para o tratamento deste tipo de problema.

Em um espaço bidimensional, a região formada pelo espaço de soluções viáveis é um plano. A equação que representa a função objetivo pode ser representada por um vetor, assim, seguindo a direção de melhoria da função objetivo, determinada pelo vetor, dentro do espaço de soluções viáveis, é possível chegar ao ponto ótimo. A busca garante que: (i) o ponto ótimo maximiza ou minimiza a função objetivo, sendo seu valor máximo ou mínimo respectivamente; (ii) o ponto ótimo satisfaz o conjunto das restrições que compõem o problema de programação linear, já que a busca pelo ótimo se restringe ao espaço de soluções viáveis do problema (Fogliatto, 2004).

Este raciocínio pode ser estendido a problemas de maior dimensionalidade. Bazaraa (1999) demonstra que ao rastrear-se o espaço de soluções viáveis de um problema de PL em busca do ponto ótimo, este deverá corresponder a um dos pontos extremos do simplex, o que, na prática, poderá corresponder a um ponto, uma reta, um plano ou outra forma de maior dimensão.

A demonstração matemática do algoritmo simplex pode ser encontrada de uma forma extremamente detalhada e vastamente ilustrada, com exemplos práticos, na maior parte da bibliografia que trata sobre programação linear, como por exemplo: Dantzig (1963), Bronson (1985), Ravindran (1987), Bazaraa (1999), Loesch (1999) e Goldberg (2000).

2.5. Simulação

A simulação computacional de sistemas, ou simplesmente simulação, consiste da utilização de determinadas técnicas matemáticas, empregadas em computadores, as quais permitem imitar o funcionamento de, praticamente, qualquer tipo de operação ou processo (sistemas) do mundo real (Freitas, 2001).

São muitas as definições para o termo simulação. Para Schriber (1974), a simulação implica na modelagem de um processo ou sistema, de tal forma que o modelo imite as respostas do sistema real numa sucessão de eventos que ocorrem ao longo do tempo.

Mais recentemente, Pegden (1990) apresenta uma definição mais completa e que abrange todo o processo de simulação. Segundo o referido autor, simulação é o processo de projetar um modelo computacional de um sistema real e conduzir experimentos com este modelo com o propósito de entender seu comportamento e/ou avaliar estratégias para sua operação. A simulação tem como objetivos básicos:

- descrever o comportamento de um determinado sistema;
- construir teorias e hipóteses considerando as observações efetuadas sobre o modelo simulado;
- usar este modelo para prever comportamento futuro, isto é, os efeitos produzidos por alterações no sistema ou nos métodos empregados em sua operação.

Diferentemente das técnicas de otimização, a simulação não garante a obtenção de resultados ótimos. Na simulação, obtém-se normalmente um conjunto de respostas do modelo para um conjunto de variáveis que condicionam o problema (Figura 2.7).

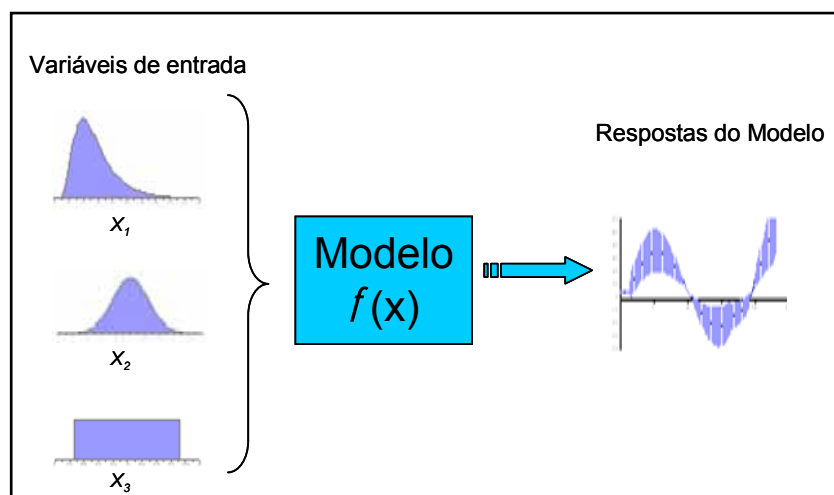


Figura 2.7: Representação esquemática do processo de simulação.

Esta técnica é, muitas vezes, eficaz para o tratamento de modelos aleatórios complexos, onde, pela complexidade do problema, as técnicas de otimização não são praticáveis.

As principais características do processo de simulação segundo Pegden (1990) e Banks (1984) são:

- a simulação é geralmente mais simples de aplicar do que os métodos analíticos;
- enquanto os modelos analíticos (de otimização) requerem um número muito grande de simplificações para torná-los matematicamente tratáveis, os modelos de simulação não apresentam tais restrições;
- hipóteses sobre como ou porquê certos fenômenos acontecem podem ser testadas para confirmação;
- pode-se compreender melhor quais variáveis são as mais importantes em relação à performance e como as mesmas interagem entre si e com os outros elementos do sistema;
- novas situações sobre as quais se tem pouco conhecimento e experiência podem ser tratadas de tal forma que se possa ter, teoricamente, alguma preparação diante de futuros eventos;
- os resultados da simulação podem ser muitas vezes de difícil interpretação. Uma vez que os modelos tentam capturar a variabilidade do sistema, é comum que existam dificuldades em determinar quando uma observação realizada durante uma execução se deve a alguma relação significativa no sistema ou processos aleatórios construídos e embutidos no modelo.

Quando o sistema modelado não apresenta nenhum componente probabilístico, ele é dito determinístico, e os resultados obtidos pela utilização do modelo determinístico de simulação são condicionados unicamente aos dados de entrada do modelo e as suas inter-relações.

Em vários casos, no entanto, os sistemas apresentam características randômicas, e são representados por modelos estocásticos de simulação.

Nestas situações, as respostas do modelo são condicionadas também a variabilidade dos parâmetros não determinísticos.

2.5.1. Simulação Estocástica

Como mencionado, os modelos de simulação estocástica são utilizados para modelar sistemas que apresentem características estocásticas em pelo menos um de seus componentes (Ripley, 1987).

A principal característica da simulação estocástica é a utilização de distribuições teóricas de probabilidade para representar o comportamento das variáveis aleatórias presentes nos sistemas a serem modelados. Desta maneira, estes valores são amostrados aleatoriamente em distribuições de probabilidade teóricas, as quais devem apresentar um comportamento estatístico o mais próximo possível ao de cada variável modelada.

Para garantir a correta reprodução do comportamento aleatório de uma dada variável, por meio da utilização de distribuições teóricas de probabilidade, devem ser observados os seguintes aspectos (Banks, 1984):

Coleta de dados: todo processo de identificação da distribuição de probabilidade mais adequada a expressar o comportamento da variável aleatória sob estudo, começa, obrigatoriamente, com a coleta de dados. Nesta tarefa, geralmente surgem duas situações básicas: a existência ou possibilidade de obtenção de dados e a não existência ou impossibilidade de obtenção dos dados. Enquadram-se no primeiro caso os modelos de sistemas reais existentes e acessíveis, e no segundo caso enquadram-se aqueles modelos de sistemas que ainda não existem ou que não podem ser acessados.

As principais fontes de dados podem ser:

- arquivos históricos do sistema;
- observação direta do sistema sob estudo;
- oriundos de sistemas semelhantes;

- determinadas com base em estimativas de operadores e projetistas;
- considerações teóricas sobre o sistema.

Amostragem: durante a etapa de amostragem deve-se analisar os dados na medida de sua coleta, visando verificar se estes são adequados ao fornecimento das distribuições as quais serão tomadas como entrada de dados na simulação. Verificar se os dados formam conjuntos homogêneos que obedeçam ao mesmo tipo de distribuição.

Tratamento dos dados: após a obtenção dos dados é preciso que estes sejam adequadamente tratados de modo a extrair todas as informações desejadas. Este tratamento é formado basicamente pela descrição estatística dos dados amostrados, pela identificação dos valores de tendência central e de dispersão, além de representações gráficas por meio de histogramas.

Identificação da distribuição teórica de probabilidades: o terceiro passo do processo de análise dos dados amostrados é a identificação de uma distribuição teórica de probabilidade que possa representar, da melhor maneira possível, o comportamento estocástico da variável sob análise. A simples comparação dos parâmetros estatísticos descritivos dos dados amostrados com as características das distribuições teóricas pode ser um bom indicativo para a identificação do tipo de distribuição.

Estimativa de parâmetros: após a escolha preliminar da função de distribuição de probabilidades, o passo seguinte é a estimativa dos parâmetros de cada distribuição. Esta etapa, juntamente com a identificação do tipo de distribuição teórica de probabilidade, que rege o comportamento estocástico do sistema sob investigação, é de fundamental importância para que o modelo

construído possa ter a maior identidade possível com o sistema analisado.

Para uma dada função de distribuição de probabilidade, existem até três tipos de parâmetros que devem ser ajustados (Law, 2000):

Parâmetro de localização: este parâmetro localiza no eixo das abscissas pontos (médios ou extremos dependendo da função) da faixa de variação da função;

Parâmetro de escala: define a escala de variação da função;

Parâmetro de forma: é utilizado por algumas funções para definir sua forma. A alteração deste parâmetro modifica as propriedades da função, tais como curtose e assimetria.

Testes de aderência: O objetivo destes testes é verificar a qualidade na escolha da distribuição que, se acredita, melhor represente os dados da população. Os principais métodos teóricos empregados nesta etapa são os testes do Chi-quadrado e Kolmogorov-Smirnov.

Atualmente, existem programas computacionais que podem realizar as etapas de identificação do tipo de distribuição, cálculo dos parâmetros e realização dos testes de aderência para várias distribuições teóricas de probabilidade. Entretanto, para a perfeita compreensão dos resultados obtidos, é essencial o entendimento de todas estas etapas. Desta maneira, apresenta-se a seguir as descrições das principais distribuições teóricas de probabilidade e dos testes de aderência.

2.5.2. Principais Distribuições Teóricas de Probabilidade

Existe um grande número de distribuições teóricas de probabilidades, como pode ser verificado nas publicações de vários autores, tais como: Bratley

(1987), Evans (1988), Law (2000), Vose (2000). Apresenta-se a seguir as características principais das funções de distribuição teórica de probabilidades mais comumente empregadas em processos de simulação de sistemas industriais.

2.5.2.1. Distribuição Normal

Dentre as várias funções teóricas de distribuição de probabilidades, a distribuição normal ou Gaussiana, é a principal delas. Historicamente, foi estudada, primeiramente, no início do século XVIII quando alguns pesquisadores verificaram o incrível grau de regularidade associado com erros de medição (Freitas, 2001).

A distribuição normal de probabilidade é contínua, simétrica e mesocúrtica. A curva que representa esta distribuição é freqüentemente descrita como tendo a forma de sino (Kazmier, 1982). De acordo com este mesmo autor, esta distribuição é importante na inferência estatística por três razões distintas:

- as medidas produzidas em diversos processos aleatórios seguem esta distribuição;
- probabilidades normais são usadas freqüentemente como aproximação de outras distribuições de probabilidade, tais como as distribuições binomiais e Poisson;
- as medidas estatísticas de amostras, tais como: média e proporção, freqüentemente seguem a distribuição normal, independente da distribuição da população (Teorema do Limite Central).

A equação da função de probabilidade, para uma variável normalmente distribuída, é dada por:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.10)$$

onde:

π é a constante pi (3,1416);
 e é a constante neperiana (2,7183);
 μ é a média da distribuição;
 σ é o desvio padrão da distribuição.

O parâmetro de localização é dado por μ , o parâmetro de escala é dado por σ , e o parâmetro de forma não se aplica a esta função (Law, 2000). Esta distribuição é normalmente empregada quando a aleatoriedade for causada por várias fontes independentes agindo de forma aditiva.

2.5.2.2. Distribuição Uniforme

Esta distribuição é aplicável a fenômenos aleatórios cujo comportamento é totalmente desconhecido. É tradicionalmente empregada quando as únicas informações disponíveis sobre a variável aleatória são os seus limites máximo e mínimo (Freitas, 2001). A característica principal desta distribuição é que qualquer valor, dentro dos limites máximo e mínimo, possui a mesma probabilidade de ocorrer.

A função densidade de probabilidade é dada por (Law, 2000):

$$f(X) = \frac{1}{b-a} \quad (2.11)$$

para $a \leq x \leq b$, onde:

a corresponde ao limite inferior da função;
 b corresponde ao limite superior da função.

O parâmetro de localização é definido por a , o de escala é definido por $b-a$, e o de forma não se aplica a esta função. No processo de simulação esta distribuição é utilizada para gerar outras distribuições teóricas, como ilustra a figura 2.8.

2.5.2.3. Distribuição Triangular

O emprego da distribuição triangular ocorre, comumente, quando se desconhece a curva associada à distribuição de probabilidade da variável aleatória que está sob análise. Entretanto, se tem boas estimativas sobre seus limites inferior e superior, bem como do seu valor mais provável (Freitas, 2001).

A função densidade de probabilidade é dada por (Law, 2000):

$$f(X) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & \text{para } a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & \text{para } c \leq x \leq b \end{cases} \quad (19)$$

onde:

a corresponde ao limite inferior da função;
 b corresponde ao limite superior da função;
 c corresponde ao valor mais provável.

O parâmetro de localização é definido por a , o de escala é definido por $b-a$, e o de forma é definido por c .

2.5.2.4. Distribuição Exponencial

A principal característica da distribuição de probabilidade exponencial é a sua falta de memória, ou seja, todo o fenômeno aleatório descrito por esta distribuição caracteriza-se pela imprevisibilidade, mesmo que se conheça o seu passado (Freitas, 2001). Segundo Law (2000), a função densidade de probabilidade é definida por:

$$f(X) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (2.13)$$

onde:

β é o parâmetro de escala ($\beta \geq 0$);
 e é a constante neperiana (2,7183).

2.5.2.5. Distribuição Lognormal

O logaritmo natural de uma variável aleatória que segue a distribuição normal de probabilidade possui uma distribuição lognormal. Quando a variável sob análise é resultante do produto de um grande número de variáveis aleatórias positivas, é comum que esta variável tenha uma aderência a uma distribuição lognormal (Freitas, 2001).

A função densidade de probabilidade é dada por (Law, 2000):

$$f(X) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.14)$$

onde:

π é a constante pi (3,1416);
 e é a constante neperiana (2,7183);
 σ é o parâmetro de forma ($\sigma > 0$);
 μ é o parâmetro de escala.

2.5.2.6. Distribuição Weibull

A distribuição Weibull é frequentemente utilizada para modelar variáveis aleatórias que representam características de confiabilidade de sistemas e equipamentos, também é comumente empregada para modelar a altura de ondas em estudos de oceanografia e radiocomunicação (Freitas, 2001).

Esta distribuição caracteriza-se pela capacidade de assumir vários perfis dependendo de seus parâmetros. Por exemplo, com $\beta = 3,602$ a curva se assemelha a uma distribuição normal, e com $\alpha = 1$ assemelha-se a uma distribuição exponencial (Vose, 2001).

A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(X) = \alpha \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \quad (2.15)$$

onde:

e é a constante neperiana (2,7183);
 α é o *Parâmetro de Forma* ($\alpha > 0$);
 β é o *Parâmetro de Escala* ($\beta > 0$).

2.5.3. Testes de Aderência

O objetivo de um teste de aderência é verificar se os dados de uma amostra comportam-se de acordo com uma determinada distribuição teórica. Essa distribuição teórica pode ser uma distribuição de probabilidade clássica, como, por exemplo, a normal e a exponencial, ou uma definida especificamente para a modelagem de um determinado problema (Barbetta, 2004).

Usualmente, os testes de aderência empregam métodos gráficos e/ou teóricos. Graficamente, a qualidade é avaliada de forma visual, comparando o desenho da distribuição teórica com o desenho referente aos dados coletados.

Já os métodos teóricos, ou estatísticos, procuram provar a hipótese de que o conjunto de dados amostrados não difere, de maneira significativa, daquele esperado de uma determinada distribuição teórica. Os testes mais conhecidos e empregados são: teste do qui-quadrado (Q^2) e o teste de Kolmogorov-Smirnov (KS).

2.5.3.1. Teste Qui-quadrado

O teste qui-quadrado de aderência pode ser aplicado quando estuda-se dados distribuídos em categorias e houver interesse em verificar se as freqüências observadas nas K diferentes categorias são significativamente distintas de um conjunto de K freqüências esperadas.

A estatística desse teste é uma espécie de medida de distância entre as freqüências observadas e as freqüências esperadas de cada categoria, sua expressão é dada por:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (2.16)$$

onde:

- Q^2 = valor do qui-quadrado;
- O_i = freqüência observada na categoria i ;
- E_i = freqüência esperada na categoria i ;
- K = número de categorias.

Havendo aderência, as freqüências observadas devem ficar próximas das esperadas, acarretando um valor pequeno para Q^2 . Neste caso, as variações encontradas seriam apenas casuais. Contudo, se não houver aderência, as diferenças entre as freqüências observadas e as esperadas poderão ser grandes, resultando em um valor grande para Q^2 , e desta maneira será pouco provável que as variações encontradas sejam casuais (Barbetta, 2004).

Para que este teste seja estatisticamente significativo, é requerido pelo menos cinco observações por classe e um número razoável de graus de liberdade, não é recomendável a aplicação do teste qui-quadrado em pequenas amostras (Freitas, 2001). Geralmente, a aplicação deste teste exige conjuntos com pelo menos 100 valores, segundo alguns autores (Pegden, 1990; Law, 1991).

2.5.3.2. Teste Kolmogorov-Smirnov

Este teste é indicado para verificar a aderência de um conjunto de valores em relação a uma distribuição de probabilidade específica. Embora nestes casos, o teste de qui-quadrado possa, também, ser aplicado, o teste KS tem mostrado ser uma alternativa mais robusta e poderosa.

O procedimento para aplicação deste teste, em cinco passos (Barbetta, 2004), é descrito a seguir, e considera os seguintes elementos:

- $S(x)$ = distribuição de freqüência empírica acumulada;
- $F(x)$ = distribuição de freqüência teórica acumulada;
- n = tamanho da amostra;
- x_i = valor qualquer da amostra.

Passo 1: Definir $S(x)$ para cada valor x_i como:

$$s(x_i) = \frac{\text{número de valores} \leq x_i}{n} \quad (2.17)$$

Passo 2: Obter, para cada valor de x_i , os respectivos valores teóricos de $F(x)$, calculado pela função de distribuição acumulada teórica considerada.

Passo 3: Calcular a discrepância entre $S(x)$ e $F(x)$ pelas diferenças absolutas entre $F(x_i)$ e $S(x_i)$, e entre $F(x_i)$ e $S(x_{i-1})$.

Passo 4: Identificar a distância máxima d , por meio da expressão:

$$d = \max_i \left\{ |F(x_i) - S(x_i)|, |F(x_i) - S(x_{i-1})| \right\} \quad (2.18)$$

Passo 5: Comparar o valor de d , com um valor tabelado, d_c , de acordo com o nível de significância α e do tamanho n da amostra.

A regra de decisão é:

- Se $d < d_c$, então há aderência à distribuição considerada;
- Se $d \geq d_c$, então não há aderência a distribuição considerada.

As tabelas com os valores críticos de d_c , podem ser encontradas na literatura especializada, como por exemplo, no já citado Barbetta (2004).

O teste de Kolmogorof-Smirnov pode ser aplicado para avaliar a aderência a qualquer distribuição, desde que seus parâmetros sejam especificados.

2.5.4. Geração de Números Aleatórios

A simulação computacional de qualquer fenômeno aleatório envolve a geração de variáveis aleatórias com distribuições pré-definidas. Uma vez que um modelo de distribuição de probabilidade tenha sido escolhido, um algoritmo para geração da variável aleatória deve ser utilizado.

Computacionalmente, existem métodos de geração de variáveis aleatórias que são baseados em números aleatórios uniformemente distribuídos entre zero e um. Estes números aleatórios com distribuição

uniforme podem ser usados para gerar números com probabilidades arbitrárias, como é ilustrado pela Figura 2.8.

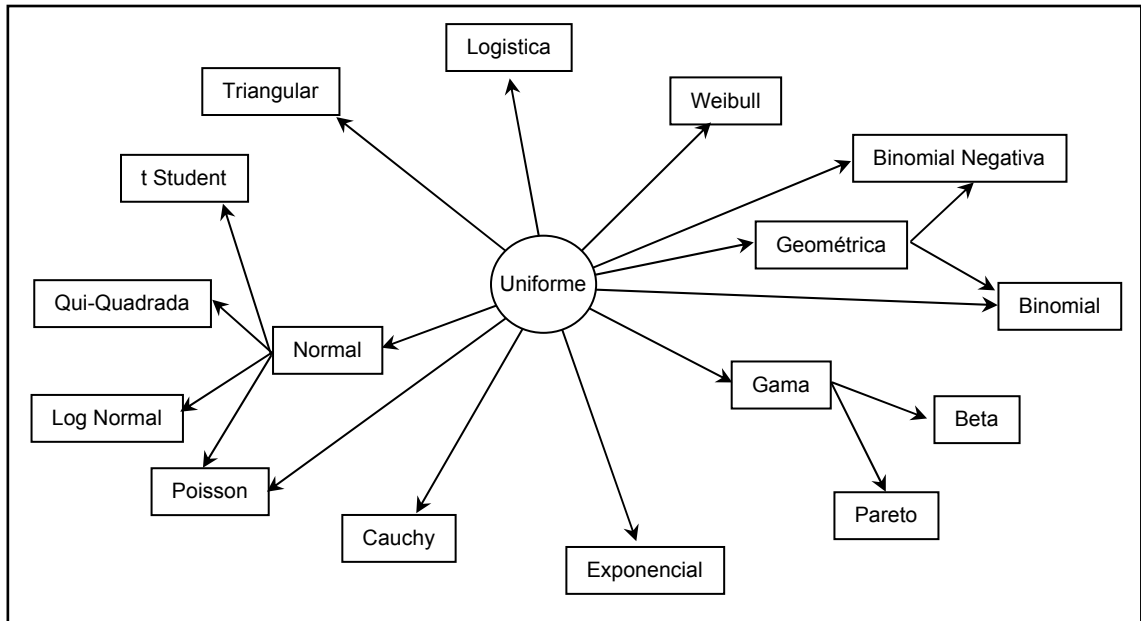


Figura 2.8: Uso da distribuição uniforme $[0,1]$ para gerar outras distribuições específicas (modificado de Vose, 2001).

É importante destacar que, uma seqüência de números, ditos aleatórios, gerados por um algoritmo de computador, é na realidade determinística ou pseudoaleatória. Isto significa, que esta seqüência de números é reproduzível e, portanto, não aleatória no sentido estrito do termo. Porém, do ponto de vista estatístico, a comparação entre um conjunto de valores gerados em um computador com outro, verdadeiramente aleatório, gerado um processo natural qualquer, não apresenta diferenças (Freitas, 2001).

A técnica matemática para geração de números aleatórios mais estudada, e mais comumente empregada, é a geração por meio do Método de Monte Carlo. Esta técnica teve origem a partir dos trabalhos secretos dos cientistas envolvidos no projeto *Manhattan*, para o desenvolvimento da bomba atômica dos aliados durante a Segunda Guerra Mundial. A técnica recebeu o código de “Monte Carlo” e foi posteriormente, em 1949, divulgada em um artigo científico intitulado “*The Monte Carlo Method*” (Dudewics, 1985).

A abordagem mais amplamente utilizada para a geração computacional de números aleatórios envolve o uso de fórmulas recursivas, como por

exemplo, o algoritmo de congruência linear, introduzido por Lehmer (1951). Neste algoritmo, os números não gerados utilizando-se fórmulas do tipo:

$$Z_{i+1} = f(Z_i) \bmod m \quad (2.19)$$

onde: $f(Z_i)$ pode ser uma função do tipo multiplicativa do tipo $f(Z_i) = aZ_i$, ou linear do tipo $f(Z_i) = aZ_i + c$.

O valor de Z_0 é chamado de semente do gerador de números aleatórios, e determina o ponto no qual a seqüência inicia.

A equação (2.19) desenvolve-se de forma recursiva, i vezes, tomando o resto da divisão de $f(Z_i)$ por m . Os valores resultantes estarão entre 0 e $m-1$, correspondendo a uma seqüência periódica, de período máximo $m-1$. Para obter números entre o intervalo $[0, 1]$, basta dividir Z_{i+1} por m (Evans, 1988).

Os valores dos parâmetros multiplicativos a , aditivo c , e do módulo m devem ser criteriosamente escolhidos de modo a que os i números gerados possam ser realmente considerados como aleatórios. Discussões sobre a escolha destes parâmetros podem ser encontradas na bibliografia específica para o assunto, como por exemplo, em: Ripley (1987), Bratley (1987), Evans (1988) e Law (2000).

2.6. Risco

Quando se cria um modelo representativo de um processo industrial qualquer, cujo o comportamento de todos os parâmetros não é perfeitamente determinado, não é possível ter certeza absoluta acerca dos resultados gerados pelo modelo. No entanto, é sempre possível utilizar metodologias de análise de risco para mitigar os efeitos da incerteza e visualizar o problema de risco (Motta, 2002).

Como o citado anteriormente, no processo de simulação, obtém-se normalmente um conjunto de respostas do modelo para cada conjunto de variáveis que condicionam o problema (Figura 2.7). Este conjunto de respostas pode ser associado com a idéia de risco, como será mostrado a seguir.

Existem definições simples sobre o conceito de risco, como por exemplo, a de Gitman (1984): “no sentido mais básico, risco pode ser definido como a possibilidade de perda”, ou a de Soloman e Pringle (1981): “risco é o grau de incerteza de um evento”. Em ambas as definições, pode-se entender a idéia de probabilidade pelo uso dos termos “possibilidade” e “grau de incerteza”. Esta ligação fica mais clara se lembrarmos que, no cálculo de probabilidades, ao evento certo corresponde a probabilidade unitária. Assim, pode-se entender que o evento “não certo”, ou que apresenta um determinado grau de incerteza, pode ser expresso por uma probabilidade.

Esta lógica permite definir o risco como a probabilidade de ocorrência de um evento gerador de perda. Caso não existam elementos para usar probabilidades, ocorrerá a situação limite caracterizada pela incerteza em sua plenitude.

Para Ackoff (1971), o tipo de critério de decisão mais adequado a um determinado problema dependerá do grau de conhecimento dos resultados que se dispõe. Existindo três hipóteses e, conseqüentemente, três tipos de problemas possíveis:

certeza: situações nas quais quem toma a decisão acredita que a cada linha de ação corresponde um único resultado;

risco: situações nas quais quem toma decisão acredita que, a cada linha de ação podem corresponder diversos resultados, sendo suas probabilidades conhecidas ou de possível estimativa;

incerteza: situações nas quais não se sabe que resultados podem ou devem ocorrer como conseqüência de cada linha de ação e, portanto, não se pode atribuir probabilidades aos resultados possíveis.

Os problemas de certeza e incerteza podem ser considerados casos limites dos problemas de risco, onde se tem, respectivamente, o conhecimento total ou ignorância total dos possíveis resultados.

Outro conceito que deve ser abordado é o da variabilidade. Um fenômeno é dito variável quando o resultado exato não é conhecido, entretanto é possível determinar se ele pode ocorrer. Por exemplo, ao lançar-se uma

moeda não é possível prever qual das faces ficará para cima, entretanto sabe-se, perfeitamente, que cada face tem 50% de chance de ocorrer (Vose, 2000).

Considerando que os resultados decorrentes da tomada de decisão podem acarretar em sucesso, quando os objetivos forem atingidos, e em fracasso, quando os objetivos não forem atingidos, então o risco pode ser definido como a probabilidade de ocorrer fracassos (Securato, 1996). Desta maneira, sendo U o conjunto de possíveis resultados, S o conjunto de sucessos e F o conjunto de fracassos, com $F \cup S = U$ e $F \cap S = 0$, então a definição formal de risco será dada pela igualdade:

$$\text{Risco} = P(F) \quad (2.20)$$

Como a soma das probabilidades de sucesso e fracassos é 1, ou seja, $P(F) + P(S) = 1$, também pode-se expressar risco como:

$$\text{Risco} = 1 - P(S) \quad (2.21)$$

A definição de risco na forma de probabilidades de fracassos e sucessos tem sua aplicação restrita a aplicações onde seja claramente possível a separação em fracassos e sucessos. Ocorre, no entanto, que a simplicidade desta formulação nem sempre é de possível aplicação, e em um grande número de casos implica em perda de sensibilidade.

2.6.1. Modelagem Sob Condições de Riscos e Incertezas

Em estudos de simulação, conforme a visualização funcional proposta por Menner (1995), os modelos possuem: (i) um número de entradas x_1, x_2, \dots, x_r ; (ii) um número de parâmetros relacionados ao sistema p_1, p_2, \dots, p_t e (iii) um número de saídas ou resultados y_1, y_2, \dots, y_s , sendo os resultados definidos por uma função tipo $f(x, y)$.

Caso se pretenda criar um modelo de simulação, visando a análise do processo produtivo de carvão energético, este poderia ter como: (i) variáveis de entrada, x : a quantidade de carvão bruto proveniente de diferentes camadas ou minas, (ii) parâmetros do sistema, p : os custos operacionais associados a extração e beneficiamento do minério bruto, os índices de recuperação do processo de beneficiamento, o preço de venda dos diferentes produtos, e (iii)

variáveis de saída, y : fluxo de caixa e valor presente líquido. Nestes termos, os conjuntos das variáveis de entrada e parâmetros do sistema, podem conter elementos associados a incertezas. Os quais podem ser tratados como variáveis aleatórias.

Nas áreas de ciência econômica e engenharia, em estudos de sistemas, nem sempre é possível determinar com confiabilidade as fontes de aleatoriedade envolvidas. Para os casos em que seja possível, pode-se utilizar distribuições empíricas ou teóricas, as quais, em análises de projetos, são denominadas como probabilidades objetivas.

Distribuições empíricas podem ser obtidas a partir de dados coletados. Estes devem ser classificados e arranjados em classes, as quais apresentam-se associadas a níveis de probabilidade de ocorrência. Quanto às distribuições teóricas, consistem no emprego de técnicas de inferência estatística que objetivam ajustar aos dados coletados um modelo teórico de distribuição. Estes casos caracterizam situações em que é possível tratar as fontes de riscos por meio de ferramentais estatísticos.

Para os elementos associados a incertezas, pode-se lançar mão de artifícios como: a intuição e, ou, opinião de especialista, visando definir probabilidades de ocorrência de fenômenos e eventos. Nestes casos, em análise de projetos, essas probabilidades são denominadas como subjetivas.

CAPÍTULO 3

Modelagem do Estudo de Caso

Esta etapa do trabalho tem como objetivo criar um modelo matemático, que represente o processo produtivo do carvão energético, tendo como base um estudo de caso correspondente à realidade da operação da empresa Copelmi Mineração LTDA.

Este modelo será posteriormente utilizado, por meio da técnica de otimização por programação linear, para identificar as estratégias de produção mais lucrativas (estratégias ótimas). O modelo será utilizado, também, para verificar a sensibilidade destas estratégias aos parâmetros de produção de comportamento estocástico, avaliando assim o risco associado a cada cenário.

3. Descrição e Modelagem do Processo Produtivo

A exemplo da maioria dos outros ramos da indústria extrativa mineral, o processo produtivo do carvão energético empregado pela COPELMI, pode ser dividido em duas etapas principais: a lavra e o beneficiamento do minério.

A lavra de carvão, neste caso específico, dá-se a céu aberto utilizando o método de lavra em tiras. Neste método, as camadas de solo superficial e de outras formações sedimentares que recobrem as camadas de carvão, constituindo a cobertura de estéril, são removidas no estágio inicial de lavra, propiciando a descobertura das camadas de carvão que são, posteriormente, lavradas (Hartman, 1992).

Esta operação envolve, genericamente, a remoção de grandes quantidades de material estéril para cada tonelada de carvão produzida, constituindo-se assim em uma das etapas do processo produtivo de maior custo.

Durante o período analisado, a empresa operou simultaneamente até quatro frentes de lavra, ou minas. Cada uma com um número distinto de camadas de carvão com características qualitativas e quantitativas distintas entre si.

Concluída a etapa de lavra, o carvão bruto extraído das minas é transportado até uma planta de beneficiamento, onde é processado visando à obtenção de um determinado produto.

Devido aos diferentes ambientes de formação dos carvões, normalmente existe a ocorrência de material inorgânico (basicamente argilas e piritas) misturados com o material orgânico (macerais do carvão). As argilas são as principais responsáveis pelas cinzas geradas após a combustão do carvão, e a pirita pelo teor de enxofre, muitas vezes prejudicial ao processo empregado e danoso ao meio ambiente. O mercado consumidor vem, cada vez mais, exigindo produtos com menores teores destas impurezas.

O processo de separação dessas impurezas é chamado beneficiamento (ou lavagem) e é feito em unidades conhecidas como lavadores ou usinas de

beneficiamento. Estas usinas por sua vez são constituídas de várias unidades contínuas onde ocorrem operações unitárias que se complementam em função de um objetivo central: a obtenção de um produto com características (qualidades) bem definidas pelo mercado consumidor (Rubio, 1988).

Um dos parâmetros operacionais mais relevantes no processo de beneficiamento é o índice de recuperação, ou simplesmente recuperação. Este parâmetro corresponde a relação percentual entre a quantidade de produto gerada e a quantidade de carvão bruto alimentada na planta, dado por:

$$R = \frac{\textit{produto}}{\textit{bruto}} \quad (3.1)$$

onde:

R = índice de recuperação (%);
produto = quantidade de produto gerada (t)
bruto = quantidade de carvão bruto alimentado na planta (t)

Considera-se como rejeito do processo de beneficiamento, a parte do carvão bruto alimentada na planta que não foi convertida em produtos comercialmente utilizáveis. Este material é composto, predominantemente, pelas impurezas existentes originalmente no carvão bruto (argila e pirita).

Devido à ineficiência do processo de beneficiamento, pode haver, dependendo da camada de carvão utilizada e do tipo de produto para o qual esta camada foi beneficiada, uma grande quantidade de matéria orgânica presente nestes rejeitos. Sendo assim, a reutilização, ou relavagem, destes rejeitos pode ser viável para a geração de produtos cujo uso tolere teores de cinza relativamente mais elevados.

No caso específico do processo produtivo da Copelmi, o carvão mineral é explorado a partir de quatro minas a céu aberto, localizadas na Região do Baixo Jacuí, a saber:

Mina do Recreio: Localiza-se entre os municípios de Butiá e de Minas do Leão, possui uma planta de beneficiamento de carvão com capacidade de beneficiar 2.400.000t de carvão bruto por ano.

Em termos de lavra, são mineradas até seis camadas de carvão de características distintas;

Mina do Butiá-Leste: Esta Mina localiza-se no município de Butiá, não possui planta de beneficiamento, sendo que todo o minério extraído nesta unidade é transportado, via rodoviária, para beneficiamento na Mina do Recreio, a qual dista 10km desta unidade. São minerados nesta unidade duas camadas de carvão;

Mina do Faxinal: Situa-se no município de Arroio dos Ratos, e a exemplo da Mina do Recreio, possui um lavador de carvão, porém com capacidade de beneficiar 800.000t de carvão bruto por ano. Na frente de lavra desta unidade são mineradas três camadas de carvão;

Mina do Cerro: Localiza-se no município de Cachoeira do Sul, e a exemplo da Mina do Recreio e do Faxinal, possui um lavador de carvão, porém com capacidade de processar 600.000t de carvão bruto por ano. Em termos de lavra, são mineradas nesta mina essencialmente duas camadas de carvão.

Considera-se que todo o carvão bruto extraído de cada mina será beneficiado no lavador mais próximo. Desta maneira, a produção das Minas do Recreio e do Butiá-Leste será beneficiada integralmente no lavador da Mina do Recreio, e a produção das Minas do Faxinal e do Cerro nas respectivas plantas de beneficiamento localizadas nestas unidades.

O processo de beneficiamento dá origem a vários tipos de produtos, como será explicitado a seguir. Para esta produção, cada camada de carvão, de cada mina, é beneficiada, em separado, visando a obtenção um determinado produto. As diferentes estratégias de produção serão explicadas no item referente ao detalhamento da função objetivo.

Quando o aproveitamento integral de uma determinada camada, extraída durante a etapa de lavra, não é possível, devido as suas características intrínsecas e às exigências do mercado consumidor, gera-se um

estoque de carvão bruto. Por outro lado, é possível que em um momento futuro as exigências de mercado ou as condições operacionais se alterem, tornando viável o aproveitamento deste material a partir deste estoque.

3.1. Modelagem Matemática do Processo Produtivo

A questão central da modelagem matemática consiste na descrição do processo produtivo, em termos de suas variáveis de decisão, de uma maneira tal que seja possível determinar a quantidade ótima em que cada camada de carvão bruto deva ser extraída e beneficiada, visando ao atendimento da demanda por cada um dos produtos comercializados pela empresa. A otimização se dará quando o processo produtivo gerar a maior contribuição operacional possível, respeitando a todas as restrições impostas pelo processo produtivo e pelo mercado consumidor.

Iniciando o processo de modelagem matemática, definiu-se um conjunto de índices que identificam as frentes de lavra (ou minas), as camadas de carvão, as plantas de beneficiamento (ou lavadores) e os produtos (Tabela 3.1).

Tabela 3.1: Identificação dos índices empregados na modelagem

Identificação	Índices	Valores Possíveis
Minas	i	$i = 1$ (Mina do Recreio) $i = 2$ (Mina do Butiá-Leste) $i = 3$ (Mina do Faxinal) $i = 4$ (Mina do Cerro)
Camadas	j	Para $i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Para $i = 2, j = 7, 8$ Para $i = 3, j = 9, 10, 11$ Para $i = 4, j = 12, 13$
Lavadores	l	$l = 1$ (Lavador da Mina do Recreio) $l = 2$ (Lavador da Mina do Faxinal) $l = 3$ (Lavador da Mina do Cerro)
Produtos	k	$k = 1$ (CV54) $k = 2$ (CV47) $k = 3$ (CV35) $k = 4$ (CV30) $k = 5$ (CV20)

Assim, partir destes índices, as variáveis de decisão podem ser definidas por:

- Q_{ji} : Quantidade de carvão bruto da camada j extraída da mina i ;
- E_{ji} : Quantidade de carvão bruto da camada j utilizada (ou acrescida) a partir do estoque da mina i ;
- A_{jllk} : Quantidade de carvão bruto da camada j , extraído da mina i , beneficiado no lavador l visando a obtenção do produto k .

3.1.1. Função Objetivo

Definidas as variáveis de decisão, o passo seguinte da modelagem matemática consiste na definição da função objetivo. Neste trabalho, ela é representada pela Equação 3.2, e tem como meta, maximizar a contribuição operacional (CO) visando o atendimento de uma determinada demanda de mercado.

Entende-se por contribuição operacional o resultado financeiro gerado pela comercialização dos produtos gerados (receita bruta) menos os custos associados exclusivamente ao processo produtivo (custos de produção), como mostra a equação 3.2.

$$\text{Receita Bruta} - \text{Custo de Produção} = \text{Contribuição Operacional} \quad (3.2)$$

Esta função pode ser melhor entendida se subdividida em quatro parcelas, correspondentes a: custos de lavra (CL), custos de utilização de estoques (CUE), custos de beneficiamento (CB) e as receitas brutas (RB). Para esta discretização, é utilizada uma série de parâmetros de natureza econômica, operacional, comercial e geológica, os quais podem apresentar comportamentos determinísticos ou probabilísticos dependendo do enfoque empregado. A descrição de cada uma destas parcelas é dada a seguir.

3.1.1.1. Custo de Lavra

Cada mina (ou frente de lavra) apresenta um custo de lavra próprio, fortemente dependente da quantidade de material estéril que deve ser removida para permitir a lavra do minério, ou seja, da relação estéril/minério da área em lavra. Além disto, é influenciado pelos custos das operações unitárias referentes a: remoção de estéril, desmonte, extração e transporte do minério até a planta de beneficiamento ou até a área de estocagem. Desta maneira o custo total de lavra pode ser escrito de acordo com a seguinte equação:

$$CL = \sum_i \sum_j (REM_i \cdot CE_i + CD_i + CC_i) \cdot Q_{ji} \quad (3.3)$$

onde:

i = índice identificador das minas;

j = índice identificação das camadas;

REM_i = Relação estéril/minério da mina i ($m^3/tROM$);

CE_i = Custo de remoção de estéril da mina i ($R\$/m^3$);

CD_i = Custo de desmonte da mina i ($R\$/tROM$);

CC_i = Custo de extração e transporte de carvão da mina i ($R\$/tROM$);

Q_{ji} = Quantidade de carvão da camada j extraída da mina i ($R\$/tROM$);

CL = Custo total de lavra ($R\%$).

3.1.1.2. Custo de Utilização de Estoque

Eventualmente, pode haver um estoque de carvão bruto resultante da lavra em período anterior ao planejado, que pode ser utilizado no processo de otimização, bem como, pode ocorrer um aumento deste estoque devido a não utilização da totalidade de carvão bruto de uma determinada camada de uma dada mina. Este custo é definido por:

$$CUE = \sum_i \sum_j CUE_i \cdot E_{ji} \quad (3.4)$$

onde:

i = índice identificador das minas;

j = índice identificador das camadas;

CUE_i = Custo unitário de movimentação de estoque de carvão bruto na mina i ($R\$/tROM$);

E_{ij} = Quantidade de carvão bruto da camada j movimentada a partir do estoque da mina i ($tROM$);

CUE = custo total de utilização de estoques ($R\%$).

3.1.1.3. Custo de Beneficiamento

O custo de beneficiamento depende da estratégia de produção específica de cada produto e dos custos unitários inerentes às plantas de beneficiamento. No caso específico deste estudo, considera-se que a empresa produz cinco tipos básicos de produtos, com teores de cinza de 54%, 47%, 35%, 30% e 20 %, que, teoricamente, podem ser produzidos em qualquer uma das três plantas de beneficiamento disponíveis.

As diferentes estratégias de produção serão apresentadas a seguir, antes, entretanto, salienta-se que a denominação utilizada para identificar estes produtos acrescenta o prefixo CV antes do valor correspondente ao teor de cinzas. Assim, por exemplo, um produto com teor de cinzas de 30% recebe a denominação de CV30, cujo significado corresponde a: “carvão vendável com 30% de cinzas”.

No caso da produção de CV54, tendo em vista que o teor de cinzas deste produto é bastante próximo ao teor de cinzas verificado em algumas camadas *in natura*, ele normalmente é gerado utilizando-se de carvão bruto somente britado e misturado, quando necessário, com produtos de 35 % de cinzas, em proporções tais que os teores de cinza e enxofre fiquem dentro das especificações definidas pelo mercado. Outra estratégia usualmente empregada é a relavagem dos rejeitos gerados pela produção de CV30. A Figura 3.1. sintetiza, de uma forma gráfica, as possíveis estratégias empregadas na produção do CV54.

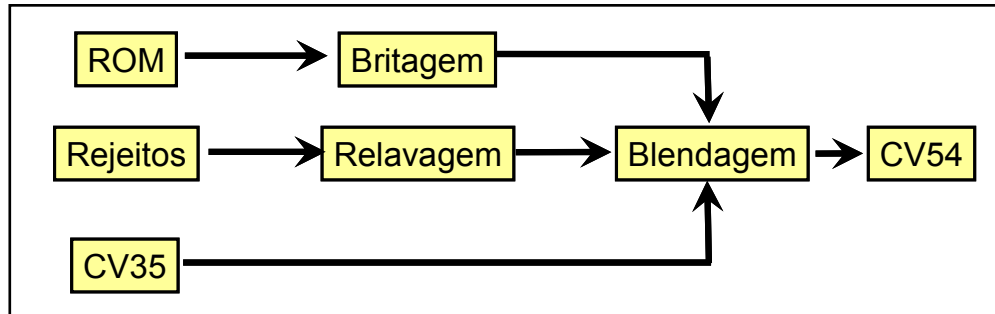


Figura 3.1: Representação gráfica das possíveis estratégias de produção de CV54

Se considerarmos que os custos de produção dos carvões energéticos tipo CV35, utilizados na produção de CV54, encontram-se apropriados as suas respectivas etapas produtivas, então o custo de beneficiamento para o produto CV54 pode ser resumido em: custo de relavagem de rejeito e custo de utilização de carvão bruto, podendo os mesmos serem expressos pelas equações 3.5 e 3.6 respectivamente.

$$CB'_{CV54} = \sum_l CLR_l AR_l \quad (3.5)$$

$$CB''_{CV54} = \sum_l \sum_j CBr_l ACV54_{jl} \quad (3.6)$$

onde:

l = Índice identificador das plantas de beneficiamento;

j = Índice identificador das camadas;

CLR_l = Custo de lavagem de rejeito no lavador l ($R\$/t$);

CBr_l = Custo de britagem de carvão bruto no lavador l ($R\$/t$);

AR_l = Quantidade de rejeito alimentada no lavador l , para a produção de CE3100 (t);

$ACV54_{jl}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j britado na planta de beneficiamento l para a produção de CV54 (t);

CB'_{CV54} = Custo de beneficiamento de CV54 decorrente da relavagem de rejeitos ($R\%$).

CB''_{CV54} = Custo de beneficiamento de CV54 decorrente da britagem de carvão bruto ($R\%$).

Desta maneira, o custo final de beneficiamento de CV54 (CB_{CV54}) será dado por:

$$CB_{CV54} = CB'_{CV54} + CB''_{CV54} \quad (3.7)$$

Como mostra a Figura 3.2, para a produção de CV47, CV35 e CV30, as estratégias de produção são basicamente as mesmas entre si, ou seja, o carvão bruto extraído das minas é beneficiado em um determinado lavador visando à obtenção direta destes produtos.

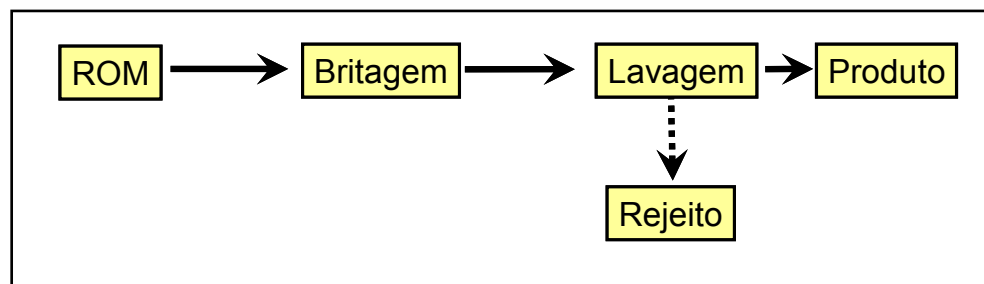


Figura 3.2: Representação gráfica da estratégia de produção de CV47, CV35 e CV30

Destaca-se, que este raciocínio é uma simplificação da realidade, pois nem sempre o beneficiamento do carvão bruto gera diretamente um produto dentro das especificações definidas pelo mercado, sendo na prática necessário realizar misturas de diferentes lotes de carvão lavado com o objetivo de homogeneizar e corrigir eventuais desvios dos teores de cinza e enxofre. Considerando esta simplificação, o custo de beneficiamento destes produtos é dado respectivamente por:

$$CB_{CV47} = \sum_l \sum_j CB_l ACV47_{jl} \quad (3.8)$$

$$CB_{CV35} = \sum_l \sum_j CB_l ACV35_{jl} \quad (3.9)$$

$$CB_{CV30} = \sum_l \sum_j CB_l ACV30_{jl} \quad (3.10)$$

onde:

I = Índice identificador das plantas de beneficiamento;

j = Índice identificador das camadas;

CB_I = Custo de beneficiamento de carvão bruto no lavador I (R\$/t);

$ACV47_{ji}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado no lavador I visando a produção de CV47 (t);

$ACV35_{ji}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado no lavador I visando a produção de CV35 (t);

$ACV30_{ji}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado no lavador I visando a produção de CV30(t).

Por sua vez, considera-se que a produção de carvões energéticos de menores teores de cinza, tais como o CV20, se dá exclusivamente pela relavagem do produto CV30. Nesta situação, considera-se o rejeito deste processo é na realidade um subproduto com características semelhantes ao CV35, como é mostrado na Figura 3.3.

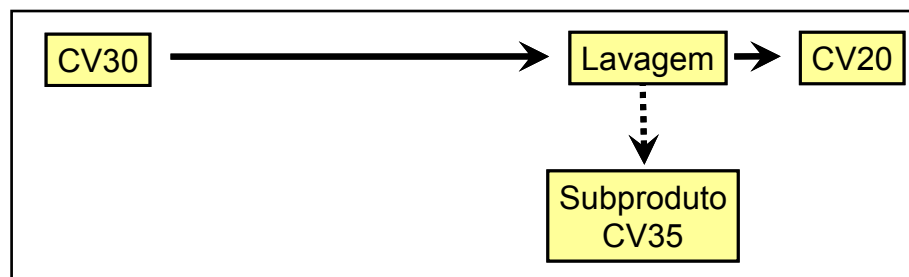


Figura 3.3: Representação gráfica da estratégia de produção de CV20

Com base neste raciocínio, os custos de produção deste produto podem ser expressos pela da equação 3.11. Esta abordagem assume que o custo de produção do CV30, utilizado na etapa de relavagem, já foi apropriado.

$$CB_{CV20} = \sum_I CR_I . ACV20_I \quad (3.11)$$

onde:

I = Índice identificador das plantas de beneficiamento;

CR_I = Custo unitário da relavagem de CV30 na planta I (R\$/t);

$ACV20_I$ = Quantidade de CV30 relavada visando a obtenção do produto CV20 (t).

O custo de beneficiamento total (CBT) é dado pelo somatório dos custos de beneficiamento referente a cada produto. Por sua vez, o custo de produção total (CPT) é obtido por:

$$CPT = CL + CE + CBT \quad (3.14)$$

onde:

CL = Custo de lavra (R\$/t);

CE = Custo de uso de estoque de carvão bruto (R\$/t).

3.1.1.4. Receita Bruta

A receita bruta é realizada pela comercialização dos produtos gerados, sendo expressa pelas equações 3.15 à 3.21:

$$RB_{CV54} = \left(\sum_I (QCV35_I + AR_I RR_I) + \sum_j (ACV54_{jI}) \right) PV_{CV54} \quad (3.15)$$

$$RB_{CV47} = \sum_I \sum_j ACV47_{jI} \cdot RCV47_{jI} \cdot PV_{CV47} \quad (3.16)$$

$$RB_{CV35} = \sum_I \sum_j (ACV35_{jI} - QCV35_I) \cdot RCV35_{jI} \cdot PV_{CV35} \quad (3.17)$$

$$RB_{CV30} = \sum_I \sum_j (ACV30_{jI} - ACV20_I) \cdot RCV30_{jI} \cdot PV_{CV30} \quad (3.18)$$

$$RB_{CV20} = \sum_I ACV20_I \cdot RCV20 \cdot PV_{CV20} \quad (3.19)$$

onde:

I = Índice identificador das plantas de beneficiamento;

j = Índice identificador das camadas;

$QCV35_i$ = Quantidade de CV35, utilizada no lavador i , para a produção de CV54 (t);

AR_i = Quantidade de rejeito alimentada no lavador i , para a produção de CV54 (t);

$ACV54_{ji}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j britado na planta de beneficiamento i para a produção de CV54(t);

$ACV47_{ji}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado na planta de beneficiamento i para a produção de CV47(t);

$ACV35_{ji}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado na planta de beneficiamento i para a produção de CV35(t);

$ACV30_{ji}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado na planta de beneficiamento i para a produção de CV30(t);

$ACV20_i$ = Quantidade de CV30 beneficiado na planta de beneficiamento i para a produção de CV20(t);

RR_i = Recuperação de CV54 na relavagem de rejeitos na planta i (%);

$RCV47_{ji}$ = Recuperação de CV47 pela da lavagem de carvão bruto da camada j no lavador i (%);

$RCV35_{ji}$ = Recuperação de CV35 pela da lavagem de carvão bruto da camada j no lavador i (%);

$RCV30_{ji}$ = Recuperação de CV30 pela da lavagem de carvão bruto da camada j no lavador i (%);

$RCV20_i$ = Recuperação de CV20 pela da relavagem de CV30 no lavador i (%);

PV = Corresponde ao preço de venda para cada um dos produtos gerados (R\$/t);

RB = Corresponde à receita bruta gerada pela produção e comercialização de cada produto (R\$).

O rejeito do processo de relavagem de CV30 para a produção de CV20 corresponde a um subproduto com características semelhantes ao produto CV35, podendo ser utilizado para atender a demanda deste mercado, gerando assim receita que pode ser definida pela equação 3.20.

$$RB_{CV35} = \sum_l ACV20_l \cdot (1 - RCV20_l) \cdot PV_{CV35} \quad (3.20)$$

A receita bruta total (*RBT*) decorrente do processo de produção e comercialização dos produtos resulta em:

$$RBT = RB_{CV54} + RB_{CV47} + RB_{CV35} + RB'_{CE35} + RB_{CV30} + RB_{CV20} \quad (3.21)$$

Desta maneira, a função objetivo resume-se a maximizar a contribuição operacional (*CO*) dada por:

$$CO = RBT - CPT \quad (3.22)$$

onde:

RBT = Receita Bruta Total

CPT = Custo de Produção Total

Visando preservar à empresa, mantendo o sigilo industrial e comercial, os valores dos parâmetros referentes aos custos de produção e à receita bruta não serão explicitados ao longo deste trabalho. Além disto, para não ser exposto o valor da contribuição operacional da empresa, este valor será apresentado na forma de um percentual dos custos de produção, desta maneira o Valor da Função Objetivo (*VFO*) será representado por:

$$VFO = \frac{CO}{CPT} \quad (3.23)$$

3.1.2. Restrições

Para o exemplo do estudo de caso em questão, o conjunto de restrições, correspondentes às condições de contorno do problema, é formado pelos seguintes itens:

- proporção de camadas em cada frente de lavra;
- limites de extração de carvão bruto das minas;

- limite de utilização de carvão bruto nas plantas de beneficiamento;
- limite de beneficiamento;
- demanda de mercado;
- restrições qualitativas.

3.1.2.1. Proporção de Camadas em Cada Frente de Lavra

Para cada mina, ou frente de lavra, existe uma determinada distribuição de camadas que deve ser respeitada. Esta distribuição deve-se essencialmente a fatores geológicos, correspondendo a proporção natural destas camadas em cada uma das minas consideradas, e a fatores operacionais que podem permitir, por um curto período de tempo, a lavra prioritária de uma camada em detrimento a outra.

Assim, com base nestes fatores, para a lavra de uma determinada camada, as outras camadas existentes na referida frente de lavra devem ser extraídas de acordo com as proporções de disponibilidade. Matematicamente esta restrição pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\forall i, \forall j \neq 1 \quad \therefore \quad Q_{i1} - \frac{D_{i1}}{D_{ij}} Q_{ij} = 0 \quad (3.24)$$

onde:

i = índice identificador das minas;

j = Índice identificador das camadas;

D_{ij} = Distribuição das camadas em cada mina (%);

Q_{ij} = Quantidade de carvão bruto da camada j extraída da mina i (t).

Destaca-se que a lavra das camadas não quer dizer que a integralidade destas será efetivamente utilizada no processo de beneficiamento. Podendo haver casos em que, devido às características de uma determinada camada, o seu aproveitamento não seja a melhor alternativa para atingir o ponto ótimo da

função objetivo, e neste caso a porção não aproveitada será apropriada ao estoque de carvão bruto.

Como será mostrado no capítulo 4, o valor numérico referente à distribuição de cada camada pode variar em cada cenário modelado de acordo com a disponibilidade de carvão bruto nas frentes de lavra.

3.1.2.2. Limites de Extração de Carvão Bruto

Em função de restrições operacionais, tais como: capacidade instalada em uma determinada mina, e/ou de algum tipo de definição contratual, pode haver limites mínimos e máximos pré-estabelecidos para extração de carvão bruto para cada frente de lavra.

Esta restrição pode ser expressa da seguinte forma:

$$\forall i \quad \therefore \sum_j Q_{ji} \leq Q_{\max_i} \quad (3.25)$$

$$\forall i \quad \therefore \sum_j Q_{ji} \geq Q_{\min_i} \quad (3.26)$$

onde:

i = índice identificador das minas;

j = Índice identificador das camadas;

Q_{ij} = Quantidade de carvão bruto da camada j extraída da mina $i(t)$;

Q_{\min_i} = Quantidade mínima de carvão bruto extraída da mina $i(t)$;

Q_{\max_i} = Quantidade máxima de carvão bruto extraída da mina $i(t)$.

Estes valores dizem respeito à quantidade total de carvão bruto, sua composição, em termos das diferentes camadas existentes em cada frente de lavra, deve respeitar as proporções dadas pela restrição anteriormente descrita (equação 3.24).

3.1.2.3. Limite de Utilização de Carvão Bruto

Esta restrição condiciona a utilização de cada camada para o processo de beneficiamento à quantidade extraída em cada mina e/ou à quantidade disponível em eventuais estoques de carvão bruto. Desta maneira, é possível que seja lavrado mais carvão bruto do que o utilizado no processo de beneficiamento, mas não o contrário, como mostra a Equação 3.27:

$$\sum_k \sum_l \sum_j \sum_i (Q_{ji} + E_{ji} - A_{klji}) \geq 0 \quad (3.27)$$

onde:

i = índice identificador das minas;

j = índice identificador das camadas;

l = índice identificador das plantas de beneficiamento;

k = índice identificador dos produtos;

Q_{ij} = Quantidade de carvão bruto da camada j extraída da mina i (t);

E_{ij} = Quantidade de carvão bruto da camada j movimentada a partir do estoque da mina i (t);

A_{klji} = Quantidade de carvão bruto da camada j , extraída da mina i , beneficiado no lavador l , visando a obtenção do produto k (t).

3.1.2.4. Limite de Beneficiamento

Cada planta de beneficiamento possui uma capacidade máxima instalada que deve ser respeitada. Esta restrição independe da distribuição de camadas, e faz referência somente à quantidade total de material lavado e relavado na planta de beneficiamento.

As restrições deste processo devem condicionar a relavagem a um determinado valor máximo, pré-definido *a priori*, bem como a quantidade total de rejeitos disponíveis para a relavagem. Esta disponibilidade está vinculada à quantidade de rejeitos gerada pela produção de CV30 no período e a uma eventual disponibilidade destes rejeitos em estoque. As expressões

matemáticas das duas condicionantes anteriormente citadas são mostradas respectivamente pelas equações 3.28 e 3.29.

$$\forall l \quad \therefore \quad AR_l \leq AR_{max_l} \quad (3.28)$$

$$\forall l \quad \therefore \quad AR_l - ER_l - \sum_j (ACV30_{jl} (1 - RCV30_{jl})) \leq 0 \quad (3.29)$$

onde:

j = índice identificador das camadas;

l = índice identificador das plantas de beneficiamento;

AR_l = Quantidade de rejeito alimentada no lavador l , para a produção de CV54 (t);

AR_{max_l} = Capacidade máxima de relavagem de rejeitos no lavador l (t);

$ACV30_{jl}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado na planta de beneficiamento l para a produção de CV30(t);

$RCV30_{jl}$ = Recuperação de CV30 pela da lavagem de carvão bruto da camada j no lavador l (%);

ER_l = Utilização dos rejeitos a partir do estoque (t).

Quanto a relavagem de CV30, como já foi mencionado, esta tem como objetivo a obtenção de produtos de menor teor de cinzas. Do mesmo modo que a relavagem de rejeitos deve respeitar um valor máximo de relavagem de CV30 predefinido, bem como a disponibilidade de CV30 gerado durante o período, como mostram as equações 3.30 e 3.31.

Ao contrário do rejeito e do beneficiamento de carvão bruto, para este caso, não é considerado a possibilidade de utilização de eventuais estoques de produto tipo CV30.

$$\forall l \quad \therefore \quad ACV20_l \leq RACV30_{max_l} \quad (3.30)$$

$$\forall l \quad \therefore \quad ACV20_l - \sum_j (ACV30_{jl} RCV30_{jl}) \leq 0 \quad (3.31)$$

onde:

I = índice identificador das plantas de beneficiamento;

$ACV20_I$ = Quantidade de CV30 beneficiado na planta de beneficiamento I para a produção de CV20 (t);

$RACV30max_I$ = Capacidade máxima de relavagem de CV30 (t);

$ACV30_{jI}$ = Quantidade de carvão bruto da camada j beneficiado na planta de beneficiamento I para a produção de CV30 (t);

$RCV30_{jI}$ = Recuperação de CV30 pela lavagem de carvão bruto da camada j no lavador I (%).

Por sua vez, a capacidade total da planta deve ser respeitada, como mostra a equação 3.32.

$$\forall I \quad \therefore \quad ACV20_I + AR_I + \sum_k \sum_j \sum_i A_{kji} \leq QT_I \quad (3.32)$$

onde:

$ACV20_I$ = Quantidade de CV30 beneficiado na planta de beneficiamento I para a produção de CV20(t);

AR_I = Quantidade de rejeito alimentada no lavador I , para a produção de CV54 (t);

A_{ijk} = Quantidade de carvão bruto da camada j , extraída da mina i , beneficiado no lavador j , visando à obtenção do produto k (t);

QT_I = Capacidade de beneficiamento máxima total do lavador I (t).

3.1.2.5. Demanda de Mercado

O modelo foi gerado de modo a procurar um ponto ótimo que atenda sempre a demanda mínima de mercado. Isto é, independente da rentabilidade, o mercado mínimo sempre deverá ser atendido, desde que o conjunto de restrições de produção seja flexível o suficiente para permitir o atendimento da demanda.

A definição da demanda mínima de mercado se faz necessária em função de interesses estratégicos, políticos e/ou contratuais da empresa. Foi criado, também, um limite de produção máximo, que corresponde à máxima

quantidade de um determinado produto que pode ser comercializada no período. Neste caso, a produção máxima só será atingida se ela melhorar o resultado operacional no período considerado.

De uma forma genérica, esta restrição pode ser resumida pelas equações 3.33 e 3.34.

$$\forall k \therefore \sum_l \sum_j \sum_i A_{klji} R_{klji} \geq Min_k \quad (3.33)$$

$$\forall k \therefore \sum_l \sum_j \sum_i A_{klji} R_{klji} \leq Max_k \quad (3.34)$$

onde:

i = índice identificador das minas;

j = índice identificador das camadas;

l = índice identificador das plantas de beneficiamento;

k = índice identificador dos produtos;

A_{klji} = Quantidade de carvão bruto da camada j , extraída da mina i , beneficiado no lavador l , visando a obtenção do produto k (t);

R_{klji} = Fator de recuperação da camada j , extraída da mina i , beneficiado no lavador l , visando à obtenção do produto k (t);

Min_k = Demanda mínima de mercado para o produto k (t);

Max_k = Demanda máxima de mercado para o produto k (t).

3.1.2.6. Restrições Qualitativas

Para o modelo em questão, estas restrições dizem respeito ao teor máximo de enxofre total admissível para cada um dos cinco diferentes produtos considerados neste modelamento. Genericamente, esta restrição pode ser representada pela seguinte equação.

$$\forall k \therefore \sum_l \sum_j \sum_i A_{klji} R_{klji} S_{klji} \leq S \max_k \quad (3.35)$$

onde:

i = índice identificador das minas;

j = índice identificador das camadas;

l = índice identificador das plantas de beneficiamento;

k = índice identificador dos produtos;

A_{ijk} = Quantidade de carvão bruto da camada j , extraída da mina i , beneficiado no lavador j , visando à obtenção do produto k (t);

R_{ijk} = Fator de recuperação da camada j , extraída da mina i , beneficiado no lavador j , visando a obtenção do produto k (%);

S_{ijk} = Teor de enxofre da camada j , extraída da mina i , beneficiado no lavador j , visando à obtenção do produto k (%);

S_{max_k} = Quantidade máxima de enxofre para o produto k (t).

3.1.3. Simplificações

Para viabilizar a construção deste modelo, assumiu-se uma série de simplificações, tais como:

- O resultado do beneficiamento de cada campanha gera um produto com as características exatas a do produto desejado. Isto é, quando uma determinada camada é beneficiada, visando à obtenção de um dado produto, o resultado obtido é o produto com as características exatamente às desejadas.
- As variáveis qualitativas consideradas foram os teores de cinza e enxofre, tendo sido desconsideradas a umidade e a distribuição granulométrica;
- Considerou-se somente a produção de cinco tipos diferentes de produtos, classificados pelo seu teor de cinza, desconsiderando-se assim variações destes produtos no que diz respeito à distribuição granulométrica e umidade.

- Considerou-se que o subproduto da relavagem do CV30 para CV20 corresponde a um carvão tipo CV35, o que na prática nem sempre ocorre.
- Foi pré-definido o local de beneficiamento do minério bruto extraído de cada mina. Desta maneira, o minério extraído em uma dada unidade será beneficiado no lavador da referida unidade, não sendo possível considerar a transferência de minério bruto, ou subprodutos, para beneficiamento em outra unidade.
- O modelo considera a produção em períodos isolados, desta maneira a produção de um determinado período não influencia e nem é influenciada por outros períodos.
- A modelagem considera a produção em um único período de tempo, que pode ser: dia, mês ou ano. Neste trabalho, a unidade de tempo considerada será o mês.

O modelo de otimização composto pela função objetivo, pelo conjunto de restrições e considerando as simplificações acima expostas foi implementado em planilha Excel, utilizando como otimizador a versão educacional do programa What'sBest[®] 7.0 produzido pela empresa Lindo Systems Inc, obtido em <http://www.lindo.com>.

Estas simplificações foram aceitas tendo em vista que o objetivo principal deste trabalho é verificar o impacto que as variáveis estocásticas causam em um modelo de otimização por PL, ficando relegado a um segundo plano a criação de um modelo que contemple toda a complexidade do processo produtivo em questão. Além disto, o modelo de otimização foi implementado na versão educacional do programa, o qual limita o número de variáveis e de restrições, impedindo assim a implementação de um modelo de maior complexidade.

CAPÍTULO 4

Análise das Respostas do Modelo

Neste capítulo, serão analisadas as respostas geradas pelo modelo de otimização, descrito no capítulo anterior, considerando diferentes cenários de produção. Os cenários de produção correspondem à estratégia de produção adotada pela empresa em 10 diferentes momentos ao longo dos anos de 2004 e 2005.

Visando quantificar o ganho que a utilização de um modelo de otimização pode proporcionar ao processo produtivo em questão, será feito, em um primeiro momento, a comparação das respostas geradas pelo modelo de otimização com os resultados apontados pelo planejamento original adotado pela empresa (planejamento não otimizado).

Em um segundo momento, será feita a análise do risco associado a cada cenário de produção, considerando que alguns parâmetros adotados na

modelagem não apresentam um comportamento determinístico e sim estocástico.

4.1. Análise das Respostas do Modelo de Otimização

Para quantificar o ganho que um modelo de otimização pode gerar no processo produtivo da empresa, foi feita uma comparação do resultado final gerado pelo modelo de otimização com o resultado final obtido quando este modelo não é utilizado.

Os cenários de comparação correspondem à estratégia de produção adotada pela empresa em 10 diferentes situações verificadas ao longo dos anos de 2004 e 2005. Estas situações, aqui denominadas de “Cenário 1” a “Cenário 10”, foram escolhidas por representarem momentos onde, por motivos mercadológicos ou operacionais, houve uma mudança significativa nas condições de contorno que definem a estratégia de produção da empresa. As principais condições que definem cada um dos cenários são mostradas na Tabela 4.1.

Além das condições explicitadas pela Tabela 4.1, cada cenário de produção teve associado a si um conjunto de parâmetros que definem os índices de recuperação de cada camada quando beneficiada para a obtenção de cada produto.

O outro conjunto de parâmetros que está vinculado a cada cenário diz respeito aos custos de lavra e beneficiamento, e aos preços de venda de cada produto. Estes parâmetros, por motivos de sigilo industrial, não serão explicitados ao longo deste trabalho.

Para permitir a reprodutibilidade do modelo descrito no Capítulo 3, apresenta-se no Apêndice A um exemplo de aplicação hipotético deste modelo, onde são explicitados os valores numéricos de todos os parâmetros envolvidos, salienta-se, no entanto que os valores referentes a grandezas financeiras estão distorcidos da realidade, tendo sido multiplicados por uma constante.

Tabela 4.1 Resumo das principais condições de contorno para cada um dos 10 cenários otimizados, mostrando a disponibilidade de carvão em cada mina, a distribuição das diferentes camadas e a expectativa de mercado

	Cenários									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mina do Recreio										
Carvão Bruto Disponível (t)	10.000	10.000	55.000	54.000	68.000	60.000	93.000	93.000	92.000	87.000
Distribuição de Camadas										
Camada AB	0%	0%	16%	19%	15%	16%	25%	32%	33%	29%
Camada S	0%	0%	33%	30%	24%	33%	18%	19%	20%	21%
Camada S3	0%	0%	10%	9%	7%	10%	10%	9%	9%	10%
Camada L	0%	0%	6%	6%	9%	6%	4%	4%	4%	3%
Camada M	0%	0%	24%	22%	34%	24%	23%	15%	15%	16%
Camada I	100%	100%	10%	15%	12%	10%	20%	20%	20%	21%
Mina do Butiá Leste										
Carvão Bruto Disponível (t)	50.000	60.000	0	0	0	50.000	20.000	20.000	20.000	15.000
Distribuição de Camadas										
Camada S	68%	67%	50%	50%	50%	50%	100%	100%	100%	100%
Camada M	32%	33%	50%	50%	50%	50%	0%	0%	0%	0%
Mina do Faxinal										
Carvão Bruto Disponível (t)	75.000	75.000	75.000	75.000	75.000	75.000	75.000	75.000	75.000	75.000
Distribuição de Camadas										
Camada S	38%	38%	39%	39%	39%	39%	44%	44%	42%	42%
Camada M	39%	39%	37%	37%	37%	37%	31%	35%	33%	35%
Camada I	24%	24%	24%	24%	24%	24%	25%	22%	25%	24%
Mina do Cerro										
Carvão Bruto Disponível (t)	60.000	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000	0	0	0	0
Distribuição de Camadas										
Camada S	67%	62%	81%	81%	81%	81%	50%	50%	50%	50%
Camada M	33%	38%	19%	19%	19%	19%	50%	50%	50%	50%
Mercado (t de produto)										
CV54	12.250	12.250	21.000	18.000	22.000	21.000	29.800	30.400	29.100	28.900
CV47	12.000	11.000	5.000	1.500	1.500	5.000	0	0	0	0
CV35	23.000	22.000	21.000	25.000	31.000	21.000	31.000	24.000	26.000	25.000
CV30	35.000	35.000	23.000	23.000	23.000	24.000	22.000	22.500	22.500	23.000
CV20	1.500	1.500	3.500	3.500	3.500	3.500	1.000	1.000	1.000	1.000
Total	83.750	81.750	73.500	71.000	81.000	74.500	83.800	77.900	78.600	77.900

O conjunto de parâmetros que definem as condições de contorno de cada cenário foi inserido no modelo de otimização, implementado como descrito no Capítulo 3. Após executar o processo de otimização, gera-se uma

série de resultados de saída, os quais correspondem à quantidade de carvão que deve ser extraída de cada mina, e o destino, em termos de beneficiamento, que cada camada deverá ter de modo que seja gerada a maior receita operacional bruta possível.

Apresenta-se, no Apêndice B, os resultados gerados pelo processo de otimização para cada um dos 10 cenários modelados. Estes valores são comparados com os resultados do processo não otimizado empregado pela empresa. Estes resultados constituem-se na estratégia de produção que deverá ser adotada para a que o resultado ótimo seja atingido em cada um dos cenários considerados.

Para quantificar o ganho que o processo de otimização pode gerar em relação a um processo não otimizado, compararam-se as contribuições operacionais geradas das duas formas, para cada um dos 10 cenários de produção. A diferença relativa entre cada receita, para cada um dos respectivos cenários de produção, é apresentada na Figura 4.1.

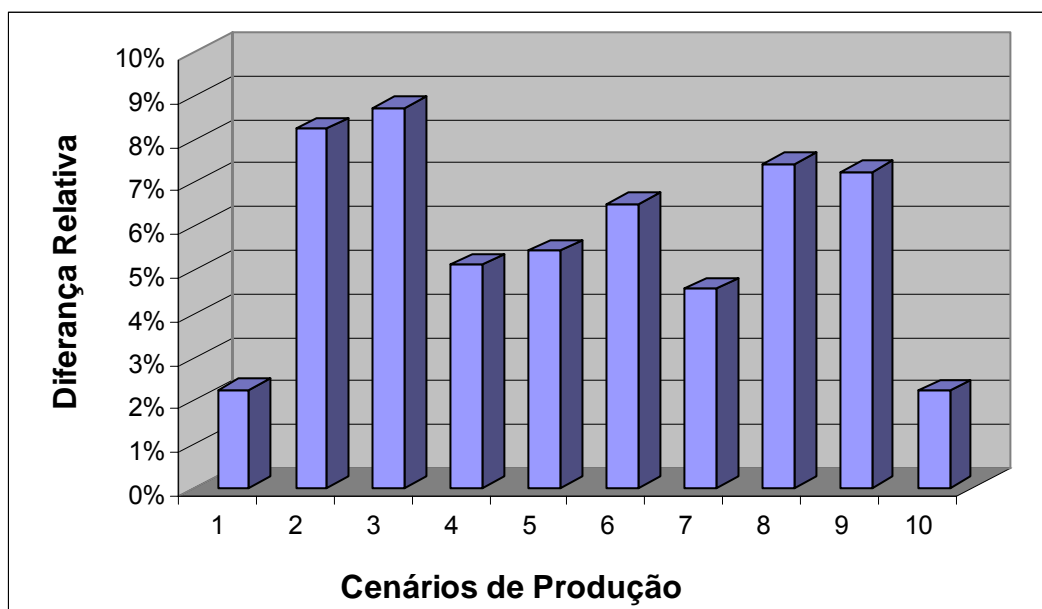


Figura 4.1: Diferença relativa da receita bruta para cada cenário de produção comparando os processos otimizados aos não otimizados

Ao analisar a Figura 4.1, verifica-se que nos 10 cenários de produção considerados houve um aumento mínimo de 2,2% e máximo de 8,7% na

receita bruta total, quando se compara os cenários otimizados com os respectivos cenários não otimizados.

Um aspecto prático importante a salientar é que este ganho pode ser obtido somente otimizando o processo produtivo dentro de seus limites operacionais, isto é, sem a necessidade de investimentos na alteração estrutural do processo produtivo.

A utilização de um modelo de otimização como este, pode proporcionar, além de ganhos mensuráveis como o descrito anteriormente, uma grande agilidade para analisar o impacto de possíveis alterações no processo produtivo, tais como: alterações nos níveis de venda, alterações nos custos de produção, entre outras.

4.2. Análise de Risco do Modelo de Otimização

Um modelo de otimização, como o utilizado neste trabalho, busca um resultado ótimo de uma forma determinística. Entretanto, quando o modelo utilizado é influenciado por parâmetros com comportamento não determinístico, a única certeza que se pode ter é que o resultado ótimo apontado pelo modelo não se refletirá na prática.

Neste caso, três questões surgem:

- Quão diferente pode ser o resultado prático em relação ao resultado ótimo?
- Qual a probabilidade do resultado financeiro ótimo ser menor do que um determinado valor mínimo esperado?
- Qual parâmetro impacta mais significativamente no resultado ótimo?

Para responder a estas questões, perturbou-se os resultados do modelo de otimização considerando o comportamento estocástico dos parâmetros de processo, os quais tiveram seus valores determinísticos substituídos por valores numéricos simulados. Os valores simulados respeitam as funções de distribuição de probabilidade observada para cada parâmetro.

Para cada conjunto de valores simulados a função objetivo, utilizada no modelo de otimização, gera uma resposta diferente. A análise estatística do conjunto de respostas mostra quanto estas podem variar em relação a uma determinada resposta considerada ótima.

Ao construir-se a função de distribuição de probabilidades acumulativa das diferentes respostas, pode-se facilmente identificar a probabilidade das respostas geradas terem um valor numérico menor do que um dado valor mínimo esperado.

Analisando o coeficiente de correlação linear entre o conjunto de possíveis respostas do modelo e cada conjunto de parâmetros, pode-se identificar qual parâmetro está mais fortemente correlacionado com a resposta final do modelo.

Para esta etapa do trabalho, utilizou-se o modelo de otimização construído para modelar o Cenário 2, o qual descreve o cenário de produção ótimo da seguinte forma:

- Considerando as restrições referentes a este cenário de produção, a extração de carvão bruto deveria ocorrer a partir das Minas do Butiá-leste, Faxinal e Cerro nas quantidades mostradas na Tabela 4.2. Verifica-se que neste cenário a lavra de carvão na Mina do Recreio não se mostrou economicamente viável.

Tabela 4.2 Extração de carvão bruto por mina

Camadas	Minas			Total
	Butiá Leste	Faxinal	Cerro	
S (t)	34.839	28.125	15.426	78.389
M (t)	17.419	29.167	9.574	56.161
I (t)		17.708		17.708
Total(t)	52.258	75.000	25.000	152.258
Estéril (m³)	574.842	337.500	112.500	1.024.842
REM (m³/t)	11,0	4,5	4,5	6,7

- O carvão bruto extraído de cada mina é beneficiado com o objetivo de atender às demandas de mercado. Neste caso específico, a

quantidade de carvão bruto, de cada camada, alimentada nas plantas de beneficiamento obedece às quantidades mostradas na Tabela 4.3. Salienda-se que o termo “Rejeito” diz respeito ao rejeito do beneficiamento de produtos tipo CV30 passível de ser reaproveitado na produção de CV54. Este material encontra-se estocado em pilhas junto ao lavador da Mina do Recreio.

Tabela 4.3 Aplicação da produção bruta (t)

Minas	Camadas	CV54	CV47	Produtos		
				CV35	CV30	CV20
Butiá Leste	S				26.393	8.446
Butiá Leste	M			10.489	6.931	
Recreio	Rejeito	49.000				
Faxinal	S		14.751		13.374	
Faxinal	M				29.167	
Faxinal	I		3.056		14.653	
Cerro	S			15.426		
Cerro	M			9.574		
	Total	49.000	17.807	35.489	90.517	8.446

- Cada camada de carvão bruto, quando submetida ao processo de beneficiamento, apresenta diferentes índices de recuperação para cada tipo de produto. A Tabela 4.4 mostra os índices de recuperação empregados no processo de otimização deste cenário.

Tabela 4.4 Índices de recuperação (%) para cada camada

Minas	Camadas	CV54	CV47	Produtos		
				CV35	CV30	CV20
BL	S				51	18
BL	M			53	43	
RE	Rejeito	25				
RE	Sub			28		
FX	S		58		29	
FX	M				31	
FX	I		80		39	
CE	S			60		
CE	M			50		

- A quantidade de produtos gerada em função do beneficiamento de cada camada é mostrada pela Tabela 4.5. O termo “Sub” diz respeito

ao subproduto gerado quando do beneficiamento de CV20, o qual é considerado como produto CV35.

Tabela 4.5 Quantidades de produtos gerados (t)

Minas	Camadas	Produtos				
		CV54	CV47	CV35	CV30	CV20
BL	S	-	-	-	13.393	1.500
BL	M	-	-	5.594	2.972	-
RE	Rejeito	12.250	-	-	-	-
RE	Sub	-	-	2.363	-	-
FX	S	-	8.556	-	3.878	-
FX	M	-	-	-	9.042	-
FX	I	-	2.444	-	5.715	-
CE	S	-	-	9.255	-	-
CE	M	-	-	4.787	-	-
Total		12.250	11.000	22.000	35.000	1.500

No entanto, ao analisar os índices de recuperação observados durante um dado período de tempo, é possível verificar que estes índices possuem uma significativa dispersão no entorno do valor médio mostrado na Tabela 4.4.

Para quantificar o impacto que esta dispersão gera no resultado final do modelo, procedeu-se da seguinte maneira:

- Análise estatística dos dados históricos desse índice;
- Identificação da função de distribuição teórica de probabilidade que mais se adapta aos dados históricos;
- Simulação dos possíveis resultados utilizando a distribuição teórica;
- Cálculo do resultado do modelo, considerando as variações dos parâmetros simulados;
- Análise da variabilidade dos resultados finais e dos parâmetros mais relevantes.

Em seqüência será descrita cada uma destas etapas.

4.2.1. Análise Estatística dos Dados Históricos

Considerando o esquema de produção ótimo gerado para o Cenário 2, foram reunidos os valores referentes aos coeficientes de recuperação verificados durante um período de produção correspondente a 12 meses, de acordo com a estratégia ótima definida pelo processo de otimização.

Por exemplo, o modelo de otimização indicou para o Cenário 2 que a Camada S da Mina do Faxinal deveria ser beneficiada para a produção de CV47. Assim identificou-se durante o período especificado os valores do coeficiente de recuperação obtidos quando esta seqüência de beneficiamento foi executada. A Figura 4.2 mostra o histograma destes dados juntamente com sua estatística.

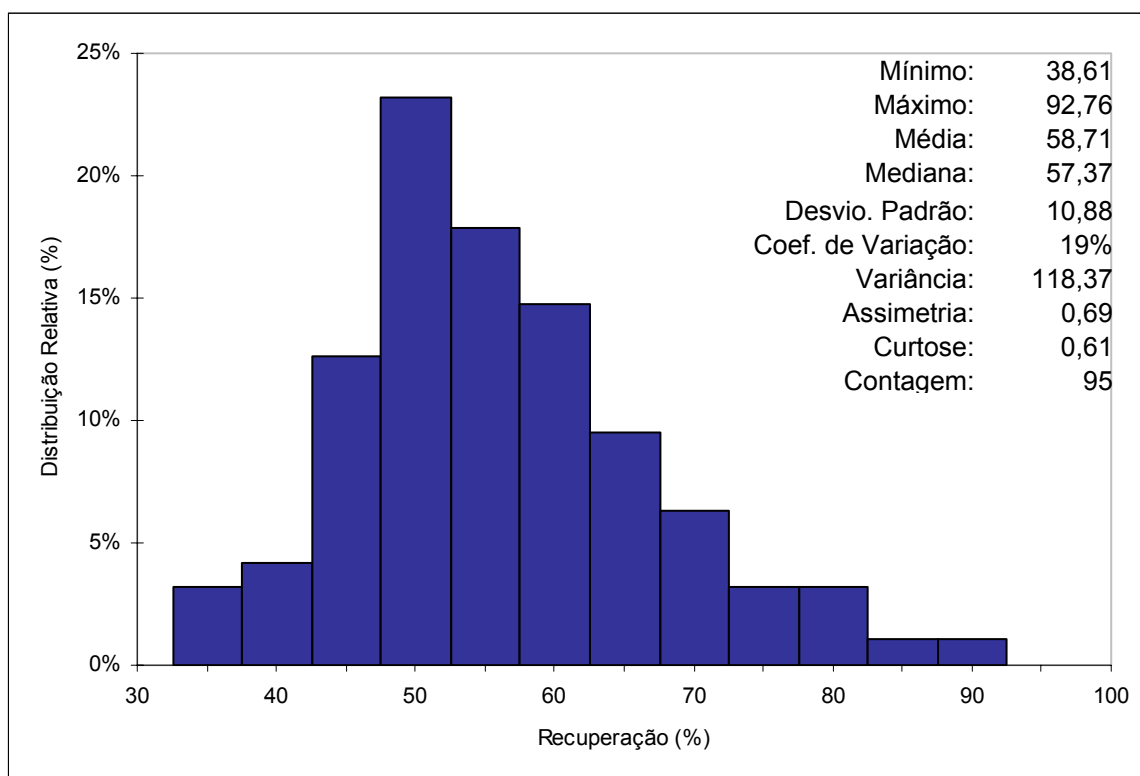


Figura 4.2: Histograma e estatística dos valores do coeficiente de recuperação da Camada S da Mina do Faxinal quando beneficiada para a produção de CV47

Este procedimento foi repetido para os treze índices de recuperação mostrados na Tabela 4.4, sendo os resultados apresentados no Apêndice C.

4.2.2. Identificação da Função de Distribuição Teórica de Probabilidade

Para cada um dos treze conjuntos de dados históricos, identificou-se a função de distribuição teórica de probabilidade que mais se aproxima da distribuição real. Para este procedimento, utilizou-se o programa *BestFit*® 4.5 produzido pela *Palisade Corporation*.

Este programa verifica a aderência de várias distribuições teóricas aos dados reais, hierarquizando-as com testes de aderência como o Teste Qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov. A distribuição escolhida é a que apresenta o maior índice de aderência.

Como exemplo da aplicação deste procedimento, apresenta-se o caso do beneficiamento da Camada S da Mina do Faxinal para a produção de CV 47. Neste exemplo, a função teórica que mais se aproximou dos resultados experimentais foi a Lognormal (Figura 4.3), com valor do teste qui-quadrado (Q^2) de 4,46.

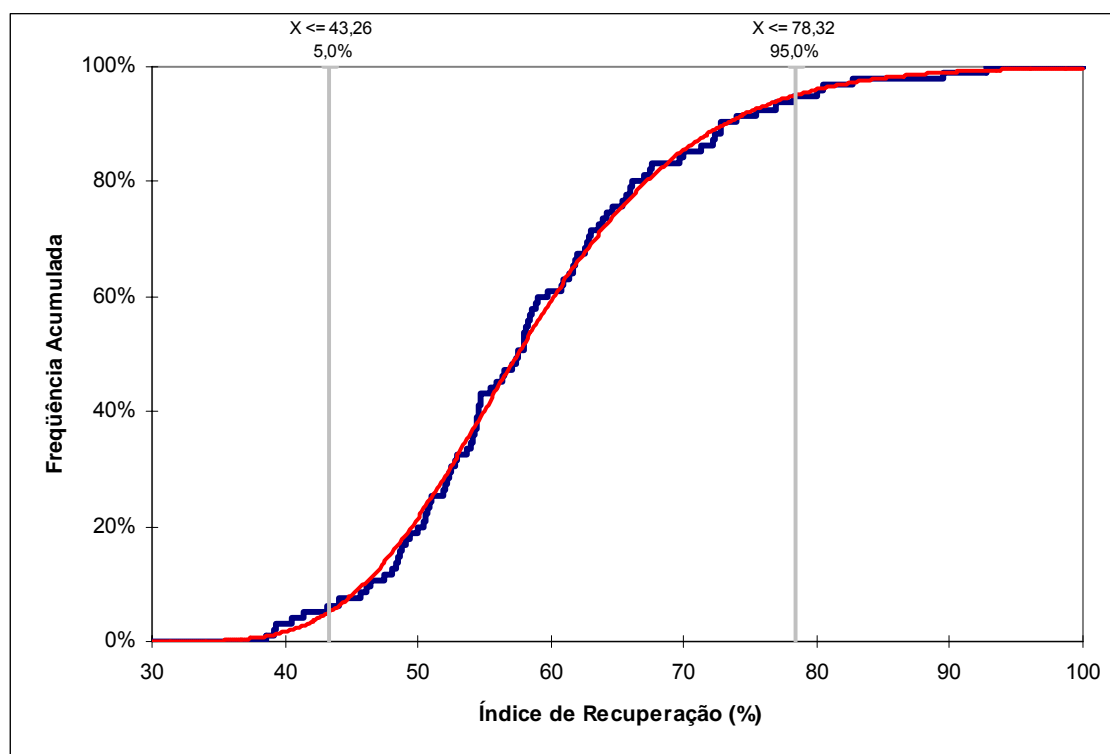


Figura 4.3: Histograma de frequência acumulada do índice de recuperação. Em azul os valores experimentais e em vermelho a distribuição teórica (Função Lognormal)

Segundo a abordagem da estatística clássica (Barbetta, 2004), o valor crítico χ^2_c da distribuição qui-quadrada, com 94 graus de liberdade para 95% de certeza é aproximadamente 77,93. Desta maneira, como $Q^2 < \chi^2_c$ é possível aceitar a hipótese de aderência à referida função teórica.

Este procedimento foi repetido para os demais índices de recuperação, sendo os valores de Q^2 também apresentados no Apêndice C.

4.2.3. Simulação e Cálculo

Os procedimentos de simulação dos possíveis resultados dos índices de recuperação e cálculo do resultado final do modelo para cada conjunto de dados simulados foram feitos utilizando o programa *@Risk*[®] versão 4.5 da *Palisade Corporation*.

Para a simulação dos valores de resposta da função objetivo, foram gerados 2000 valores para cada um dos 13 parâmetros de recuperação considerados. Os valores simulados são independentes, pois parâmetros de recuperação de cada camada não possuem correlação entre si.

No modelo computacional, o cálculo do valor da função objetivo dá-se de forma simultânea após a simulação dos parâmetros de recuperação.

4.2.4. Análise dos Resultados

Para facilitar a avaliação dos efeitos causados pelos parâmetros estocásticos, o valor absoluto da função objetivo foi substituído por um valor relativo que mede a variação percentual de cada um dos 2000 resultados da função objetivo em relação ao valor ótimo apontado pelo processo de otimização.

Estes resultados podem ser visualizados no histograma relativo e da distribuição de freqüências acumuladas, mostrados pelas Figuras 4.4 e 4.5, respectivamente.

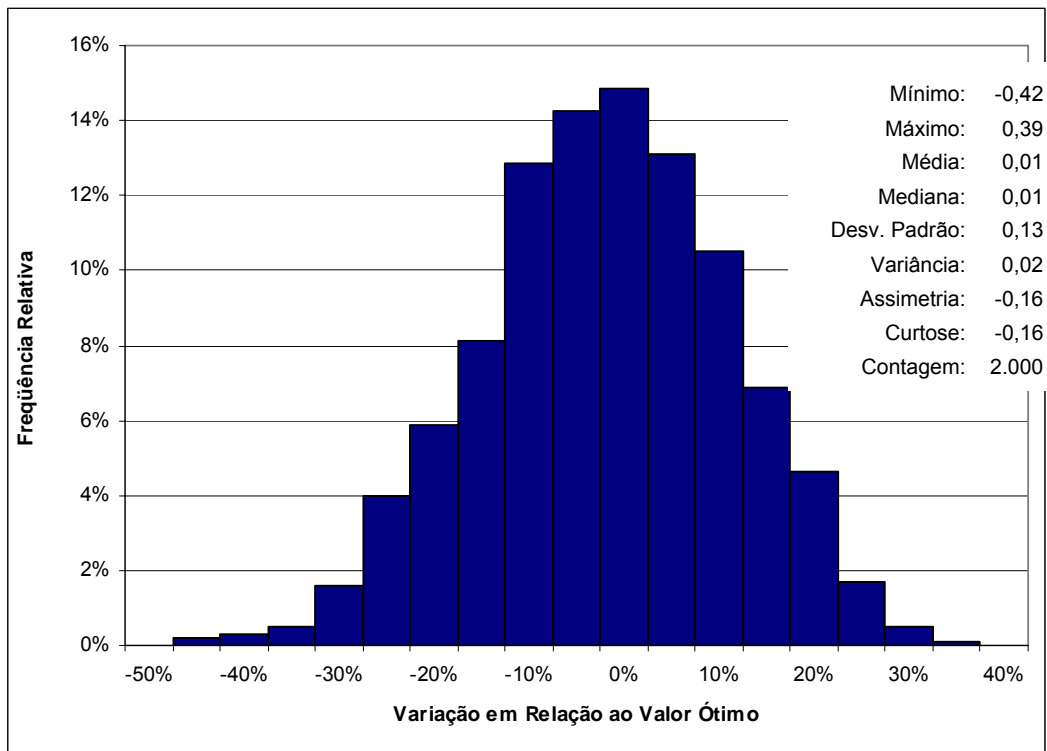


Figura 4.4: Histograma mostrando a variação dos resultados da simulação em relação ao valor ótimo

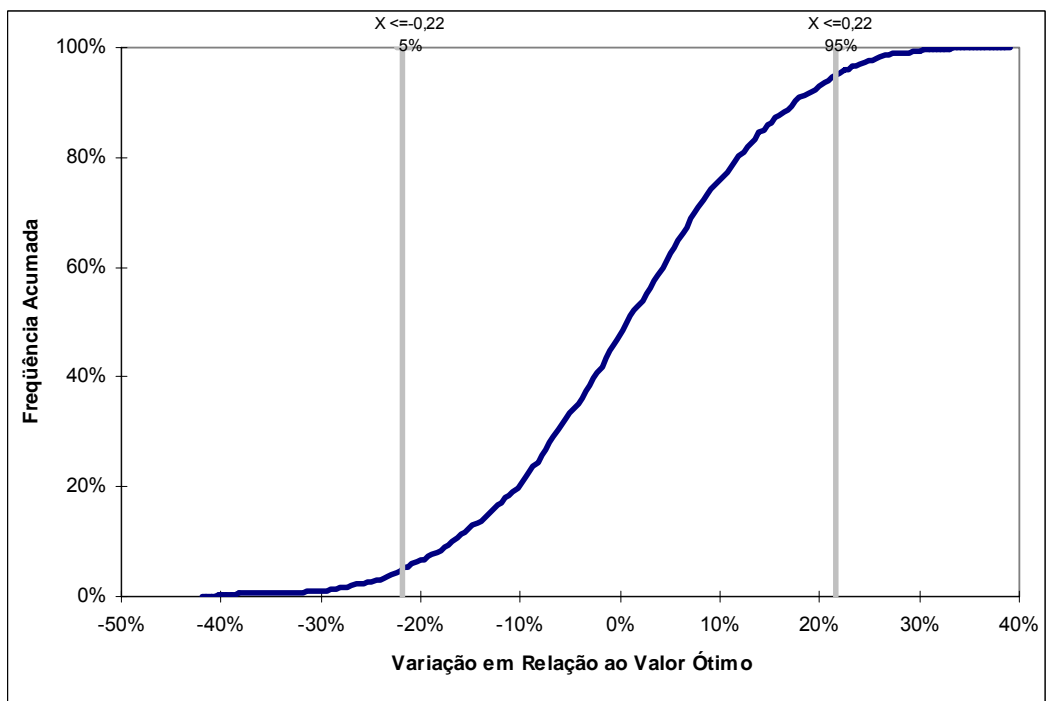


Figura 4.5: Distribuição de frequência acumulada, mostrando a variação dos resultados da simulação em relação ao valor ótimo

Analisando-se estes resultados verifica-se que:

- A distribuição dos resultados possui uma baixa assimetria, no entorno do valor médio próximo a zero. Isto indica que na prática não há tendência para super ou sub-estimativa do valor da função objetivo em relação ao valor ótimo;
- Os resultados apresentam uma alta variabilidade, variando de -42% à +39% em relação ao valor ótimo da função objetivo, sendo que 90% dos valores estão entre -22% e +22%;

A alta variabilidade dos resultados da função objetivo caracteriza, como era *a priori* esperado, sua forte correlação com os índices de recuperação.

Para quantificar a influência de cada parâmetro estocástico no resultado da função objetivo, foi calculado o coeficiente de correlação linear entre os valores simulados, para cada parâmetro, e os valores calculados para a função objetivo. A Figura 4.6 exemplifica o exposto, mostrando a correlação entre o índice de recuperação da relavagem de rejeitos para a produção de CV54 e a variação do resultado da função objetivo.

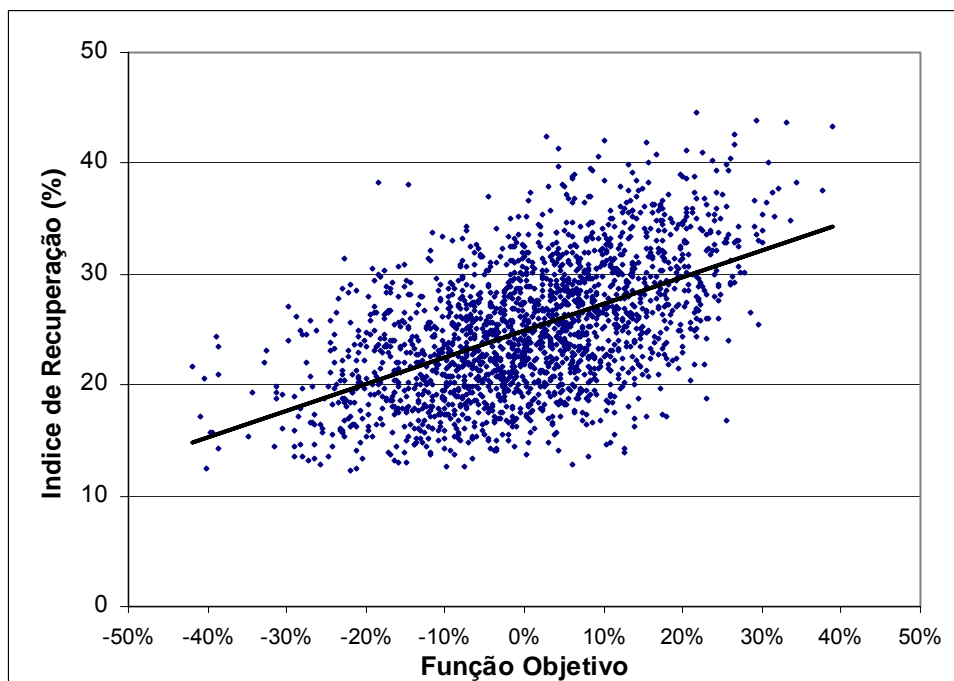


Figura 4.6: Variação da função objetivo em função da variação dos índices de recuperação simulados a partir das distribuições teóricas de probabilidades.

A Figura 4.7 mostra os coeficientes de correlação linear entre os resultados da função objetivo e os índices de recuperação simulados para cada um dos parâmetros simulados.

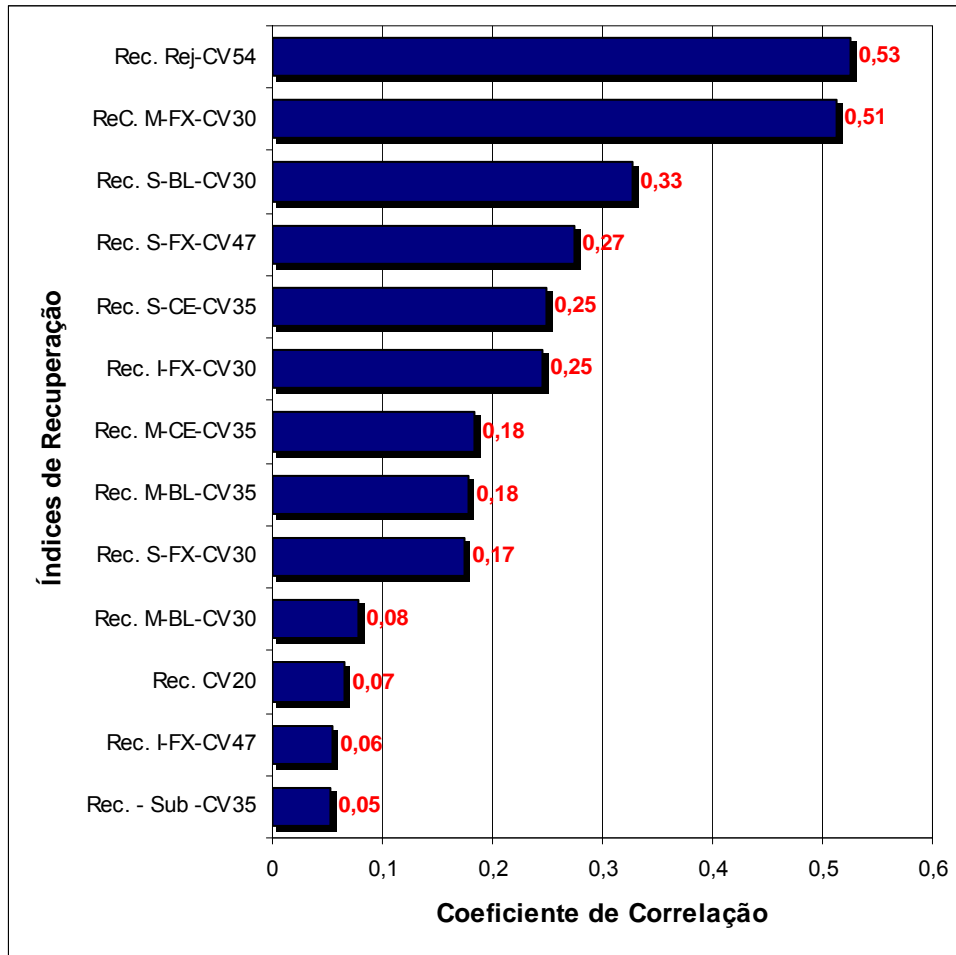


Figura 4.7: Hierarquização dos coeficientes de correlação linear entre os resultados da função objetivo e os índices de recuperação simulados.

Na Figura 4.7 verifica-se que:

- Todos os parâmetros simulados possuem uma correlação positiva com os resultados da função objetivo;
- Os índices de recuperação da relavagem de rejeito para a produção de CV54 e do beneficiamento da camada M da Mina do Faxinal para a produção de CV30 são os parâmetros de maior correlação com a função objetivo.

4.3. Discussão dos Resultados

Os resultados do processo de otimização indicaram que a contribuição operacional poderia ter um ganho médio de 5,8%, comparando os resultados obtidos pelas estratégias de produção originalmente adotados pela empresa (sem qualquer processo de otimização) com as estratégias de produção ótimas (geradas pelo processo de otimização), dentro do universo dos 10 cenários analisados (vide Figura 4.1).

Esperava-se, a priori, um ganho maior, segundo a bibliografia (Prado, 1999) os ganhos quando da adoção inicial de um processo de otimização por programação linear podem chegar a até 15%.

Como a melhoria indicada pelo processo de otimização não foi tão significativa como o inicialmente esperado, pode-se presumir que as estratégias de produção anteriormente adotadas pela empresa impediam que o resultado operacional divergisse significativamente do valor ótimo, mesmo sem a utilização de uma técnica de otimização.

Por outro lado, a melhoria obtida na contribuição operacional pode ser considerada bastante importante, pois para ser alcançada não é necessário nenhum investimento relevante na melhoria do processo produtivo. Este ganho seria obtido somente com a definição ótima das produções em cada frente de lavra e pela da adoção da mistura ótima das matérias-primas (diferentes camadas de carvão) para a manufatura dos produtos finais.

Chama a atenção, a grande variabilidade encontrada nos valores da função objetivo. Acredita-se, no entanto, que esta variabilidade esteja superestimada devido à utilização de dados históricos no processo de simulação.

Os dados históricos utilizados correspondem a um período de 12 meses, durante este período a lavra ocorreu ao longo de diferentes locais, podendo com isto ter havido variações significativas na geologia das camadas, acarretando, assim, diferentes resultados para os parâmetros considerados. No planejamento de curto prazo, estas variações tendem a ser menos expressivas.

O uso de um modelo matemático representativo do processo produtivo gera outros benefícios, além dos ganhos tangíveis anteriormente descritos. Permite uma visão ampla, transparente e iterativa do processo produtivo, tornando fácil e ágil o teste de diferentes parâmetros condicionantes deste processo.

Desta maneira, o modelo gerado pode ser empregado não somente para a otimização do processo produtivo existente, mas também para o teste de alterações significativas na estrutura produtiva, na avaliação de novas frentes de lavra, da comercialização de outros produtos, no balizamento dos custos de produção e na avaliação da política de preços, entre outros aspectos.

A utilização de técnicas de simulação permite quantificar o impacto que os parâmetros estocásticos produzem na resposta dos modelos de planejamento, propiciando uma visão mais ampla dos possíveis valores que a contribuição operacional pode assumir. Esta abordagem amplia as informações disponíveis ao tomador de decisão, pois a resposta do sistema é dada por uma distribuição de saída da resposta associada ao risco de obtê-la, em vez de um único valor determinístico para a função objetivo.

O uso do coeficiente de correlação entre cada parâmetro estocástico e as respostas obtidas pela função objetivo permitem hierarquizar os parâmetros que maior impacto geram no resultado final desta função (vide Figura 4.7). Após a definição dos parâmetros mais relevantes, o comportamento destes pode ser acompanhado mais atentamente, e sempre que possível serem conduzidos para valores que melhorem o resultado da função objetivo.

Outra abordagem que pode ser dada, após a identificação dos parâmetros de maior correlação com os resultados da função objetivo, é a adoção de medida para redução da incerteza associada a estes parâmetros o que conseqüentemente reduzirá a variabilidade dos resultados da função objetivo.

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

Este capítulo tem o objetivo de apresentar as conclusões obtidas ao longo deste trabalho, a proposição de uma metodologia para avaliação do risco operacional e sugestões para trabalhos futuros.

5.1. Conclusões

Em seqüência serão reapresentados os objetivos específicos que nortearam o desenvolvimento deste trabalho, juntamente com as respectivas conclusões acerca destes objetivos.

Objetivo I: desenvolver um modelo matemático (teórico) que represente as características do processo produtivo de carvão energético, considerando as várias restrições de ordem geológica, operacional e mercadológica.

Foi desenvolvido um modelo matemático, conforme descrito no capítulo 3, tendo sido respeitadas as restrições de ordem geológica (proporção de camadas por minas e as características do minério bruto), operacional (capacidade instalada em cada mina e planta de beneficiamento) e mercadológica (demandas e especificações dos produtos).

O modelo foi criado tendo em mente a sua utilização na versão educacional do programa de otimização What'sBest® 7.0. Com isto, uma série de simplificações foram assumidas (vide item 3.1.3) contudo o modelo mostrou-se satisfatoriamente capaz de representar as principais características do processo produtivo referente ao estudo de caso.

Objetivo II: verificar a aplicabilidade da técnica de programação linear para obtenção da solução ótima para cada conjunto de condições de contorno.

A Programação Linear mostrou-se capaz de encontrar soluções ótimas para os cenários modelados, respeitando a todas as condições de contorno propostas.

Mais do que simplesmente apontar o resultado ótimo da função objetivo, a técnica indica a estratégia ótima que deve ser adotada em todas as etapas do processo produtivo, visando à obtenção do resultado ótimo. Destaca-se, no entanto, que é fundamental a análise crítica detalhada da estratégia proposta visando avaliar a sua exequibilidade prática.

Pela agilidade e rapidez na obtenção das respostas, menos de 2 segundos utilizando um microcomputador Pentium® 4 de 1.6 GHz, esta técnica constitui-se realmente em uma poderosa ferramenta não só para a obtenção de valores ótimos que respeitem um determinado conjunto de restrições, mas também para a realização de testes de hipóteses variando as próprias restrições do problema.

Objetivo III: avaliar as possibilidades de ganho em decorrência da implantação e uso da técnica de otimização por PL em um sistema produtivo.

Com base no modelo matemático utilizado e dentro dos cenários considerados neste estudo, os ganhos obtidos na função objetivo (contribuição operacional) foram em média de 5,8%. Salienta-se, mais uma vez, que estes ganhos podem ser obtidos somente com a adoção da estratégia de produção ótima, não havendo a necessidade de maiores investimentos na mudança estrutural do processo produtivo.

Ressalta-se também, que com esta ferramenta em mãos, o tomador de decisão poderá avaliar de uma forma bastante ágil uma série de alternativas e hipóteses referentes ao processo produtivo e com isto propor mudanças estruturais neste processo de forma a gerar ganhos com ordem de grandeza bem maior do que a anteriormente citada.

Objetivo IV: analisar o comportamento estatístico dos parâmetros de processo de comportamento estocástico.

Neste estudo, foram considerados como parâmetros de comportamento estocástico os índices de recuperação para a obtenção de cada produto. Tendo sido adotado como base de dados uma série histórica de resultados.

Considera-se, que a variabilidade observada representa, obviamente, o período total da série histórica, e sua utilização para avaliações de curto prazo tende a superestimar a variabilidade dos parâmetros envolvidos.

Acredita-se, que os modelos geológicos gerados por simulação geoestatística, podem constituir-se em fonte de dados mais eficientes para expressar a variabilidade de atributos geológicos como o índice de recuperação.

Objetivo V: quantificar o impacto causado pela incerteza dos parâmetros de processo em um modelo de programação linear.

Com a técnica de simulação matemática, foi possível reproduzir o comportamento estocástico dos índices de recuperação, e com isto verificar a influência destes parâmetros no resultado da função objetivo.

Com base nas distribuições estatísticas teóricas ajustadas à série de dados históricos de cada índice de recuperação, foi possível mensurar o risco associado resultado da função objetivo. Na realidade testada, verificou-se que em 90% dos casos poderá haver uma variação de +/- 22% em torno do valor ótimo da função objetivo.

Desta maneira, considera-se que as técnicas de modelagem matemática, otimização por programação linear e de análise de risco constituem-se de poderosas ferramentas para a análise do processo produtivo e para a tomada de decisão, sobretudo em condições críticas.

5.2. Proposta Metodológica

Conforme apresentado no item 1.2, a meta deste trabalho consiste basicamente no desenvolvimento de uma proposta metodológica que, a partir das respostas ótimas geradas por um modelo de otimização por programação linear e considerando a incerteza de alguns parâmetros de processo, quantifique o risco operacional associado à estratégia de produção ótima apontada pelo modelo.

A seqüência de passos apresentada a seguir não pretende servir como guia ideal para a avaliação dos riscos operacionais para os processos produtivos de uma forma geral. As particularidades de cada processo implicam em inevitáveis adaptações e implementações específicas, onde algumas etapas aqui citadas podem vir a ser suprimidas e outras, não consideradas nesta dissertação, podem se fazer necessárias. Com este intuito, buscou-se elaborar uma proposta básica englobando as seguintes etapas:

- i. Coleta dos dados representativos de cada parâmetro considerado no modelo;

- ii. Identificação dos parâmetros de comportamento estocástico e determinístico;
- iii. Análise estatística dos dados amostrais que apresentem os parâmetros de comportamento estocástico;
- iv. Identificação da distribuição de probabilidade teórica melhor ajustada a cada parâmetro de comportamento estocástico;
- v. Utilizar técnicas de simulação para gerar valores que representem os parâmetros estocásticos, utilizando as distribuições teóricas definidas no item anterior;
- vi. Calcular o valor da função objetivo, considerando os valores simulados no item anterior e a estratégia ótima obtida pelo processo de otimização;
- vii. Analisar a distribuição dos resultados gerados no item anterior.

5.3. Sugestões para Futuros Trabalhos

Propõe-se, como sugestão para a realização de novos trabalhos que apliquem as técnicas de pesquisa operacional aos problemas de planejamento de lavra, os seguintes temas:

- utilização de modelos geológicos, construídos por técnicas de simulação geoestatística para modelar a variabilidade dos parâmetros estocásticos das variáveis geológicas. Criando desta maneira, vínculos com as posições geográficas onde a lavra ocorrerá nas diferentes minas;
- considerar que um maior número de parâmetros apresentam comportamento estocástico, na realidade quase todos os parâmetros podem assim ser considerados;
- empregar as técnicas de análise de risco para verificar a flutuação não só de funções objetivo de caráter econômico, mas também qualitativo. Um exemplo prático seria a

verificação da variabilidade de parâmetros qualitativos como o teor de enxofre e umidade, avaliando assim o risco das especificações finais dos produtos serem integralmente atendidas, minimizando desta maneira o risco de penalizações financeiras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ackoff, R. L.; Sasieni, M. W. (1971). “Pesquisa Operacional”, LTC – Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 199p.

Aramis J. P. (2002). “Carvão do Brasil Turfa Agrícola”, Suliani Editigrafia Ltda, Porto Alegre, 164p.

Banks, J. Carson; J.S. (1984). “Discrete-Event System Simulation”, Prentice Hall College Div; New Jersey, 548p.

Barbetta, P. A.; Reis, M. M.; Bornia, A. C. (2004). “Estatística para Cursos de Engenharia e Informática”, Editora Atlas, São Paulo, 410p.

Bazaraa, J. (1999). “Linear Programming and Network Flows”, John Wiley, 684p.

Belolli, M.; Quadros, J.; Guidi, A. (2002). “A História do Carvão de Santa Catarina”, Imprensa Oficial de Santa Catarina, Crisciuma, 296p.

Bronson, R. (1985). “Pesquisa Operacional”. MacGraw-Hill, São Paulo, 317p.

Bratley, P.; Fox, B. L.; Schrage, L. E. (1987). “A Guide to Simulation”, Springer-Verlag, New York, 374p.

Costa, M. A. B. (2000). "Simulação de Sistemas". Material de apoio à disciplina 'Simulação Aplicada à Engenharia de Produção' do Departamento de Engenharia de produção da Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, SP.

Dantzig, G. B. (1963). "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, New Jersey, 625p.

Dudewicz, E. J.; Karian, Z. A. (1985). "Modern Design and Analysis of Discrete-Event Computer Simulations", IEEE Computer Society Press, Washington 475p

Evans, J. R.; Olson, D. L. (1988). "Introduction to Simulation and Risk Analysis". Prentice Hall Inc., New Jersey, 279p

Freitas, P. J. (2001). "Introdução à Modelagem e Simulação de Sistemas". Editora Visual Books. Florianópolis, 322p.

Fogliatto, F. (2004), "Pesquisa Operacional I – Modelos Determinísticos". Apostila da disciplina – Pesquisa Operacional I. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFRGS. Porto Alegre, 190p.

Gass, S. I.; Assad A. A. (2004). "An Annotated Timeline of Operations Research, An Informal History", Springer Science and Business Media Inc, New York, 213p.

Guerra, P. A. (1988). "Geoestatística Operacional", DNPM, Brasília, 143p

Gitman, L. J. (1984). "Princípios de Administração Financeira", Editora Harbra, São Paulo, 745p.

Goldberg, M. C. (2000). "Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos". Editora Campus, Rio de Janeiro. 649 p.

Hartman, H.L. (1992) "SME Mining Engineering Handbook". SME, Littleton, 2394p.

Kazmier, L. J. (1982). "Estatística Aplicada a Economia e Administração". McGraw-Hill, São Paulo, 376p.

Landim, P. M. (1997). "Análise Estatística de Dados Geológicos", Editora UNESP, São Paulo, 226p.

Law, A. M.; Kelton, W. D. (2000). "Simulation Modeling and Analysis". McGraw-Hill, Boston, 3rd ed, 709p.

Lehmer, D. H. (1951). "Mathematical Methods in Large-scale Computing Units". Proceeding of the Second Symposium on Large-Scale Digital Calculating Machinery. Harvard University Press, Cambridge, 141-146 p.

Loesch, C., Hein, N. (1999). "Pesquisa Operacional". Editora da FURB, Blumenau, 270 p.

Menner, W. A. (1995) "Introduction to modeling and simulation". Johns Hopkins APL Technical Digest, v. 16, n. 1, p. 6-17.

Motta, R.R. (2002). "Análise de Investimentos – Tomada de Decisão em Projetos Industriais", Editora Atlas, São Paulo, 391p.

Montevevechi, J. A. B. (2000). "Pesquisa Operacional (Programação Linear)". Apostila da disciplina EPR05 – Pesquisa Operacional II. Escola Federal de Engenharia de Itajubá, 118p.

Pegden, C.D.; Shannon, R.E.; Sadowski, R.P. (1990). "Introduction to Simulation Using SIMAN", McGraw-Hill, New York, 600p

Prado, D. S. (1999). "Programação Linear". Editora de Desenvolvimento Gerencial, Belo Horizonte, MG, 220 p.

Ravindran, A.; Phillips, D.T.; Solberg, J.J. (1987). "Operations Research Principles and Practice", New York, 637p.

Ripley, B. D. (1987). "Stochastic Simulation", John Wiley & Sons, New York, 233p.

Rubio, J. (1988), "Carvão Mineral – Caracterização e beneficiamento", Nova Lima Artes Gráfica, Porto Alegre, 240p.

Schriber, T. J. (1974). "Simulation Using GPSS", Wiley, New York, 464p

Securato, J. R. (1996). "Decisões Financeiras em Condições de Risco", Editora Atlas, São Paulo, 244p.

Silva, E. M.; Gonçalves, V.; Silva, E. M.; Murolo, A. C. (1995). "Pesquisa Operacional", Editora Atlas. São Paulo. 474p.

Vose, D. (2000). "Risk Analysis, A quantitative guide". John Wiley & Sons Ltd, 2nd ed., Chichester, Inglaterra, 418p.

Apêndice A:

Exemplo de Aplicação do Modelo de Otimização

Exemplo de Aplicação do Modelo de Otimização

Este exemplo tem com finalidade permitir a reprodutibilidade do modelo descrito no Capítulo 3. Salienda-se, que os valores referentes a grandezas financeiras estão distorcidos da realidade, tendo sido multiplicados por uma constante.

Exemplo de Aplicação

Uma empresa de mineração opera simultaneamente três minas, denominadas respectivamente de Mina A, B e C. A capacidade instalada em cada mina, juntamente com a distribuição de camadas e a relação estéril minério é apresentada na Tabela A1.

Tabela A1: Quadro resumo com as informações básicas de cada mina

	Mina A	Mina B	Mina C
Capacidade Instalada Mina (tROM/mês)	70.000	50.000	40.000
Distribuição de Camadas (%)			
Camada S	38	70	60
Camada M	40	30	40
Camada I	22	0	0
Relação Estéril/Minério (m ³ /tROM)	4,5	11,0	4,0

Cada mina possui sua própria planta de beneficiamento com capacidade de processar respectivamente 75.000, 100.000 e 50.000 t/mês. Como mostra a Tabela A2, cada camada de cada mina apresenta um índice de recuperação diferente para a obtenção de cada um dos produtos considerados.

Os produtos gerados no processo de beneficiamento apresentam teores de enxofre diferentes entre si, como mostra a Tabela A3.

Tabela A2: Índice de recuperação para cada camada

	Minas:	A	A	A	B	B	C	C
	Camadas:	S	M	I	S	M	S	M
Recuperação	CV47	58%	56%	80%	79%	70%	77%	69%
	CV35	34%	34%	48%	58%	53%	60%	50%
	CV30	29%	31%	39%	51%	43%	20%	20%

Tabela A3: Teores de enxofre dos produtos beneficiados

	Minas:	A	A	A	B	B	C	C
	Camadas:	S	M	I	S	M	S	M
Teor de Enxofre	CV47	1,0%	1,1%	1,9%	1,0%	1,8%	0,8%	1,0%
	CV35	0,9%	0,9%	1,3%	1,1%	1,1%	0,6%	1,0%
	CV30	0,9%	0,9%	1,1%	1,1%	1,0%	0,6%	1,2%

Para a produção do CV54 considera-se que somente a Camada S da Mina C, devido ao seu baixo teor de enxofre *in situ* (1,2%), pode ser utilizada de forma direta, isto é, somente britada sem necessidade de lavagem. Considera-se, também, que a relavagem dos rejeitos originados do beneficiamento do CV30 gera um produto tipo CV54 com um índice de recuperação de 25% e teor de enxofre de 0,7%.

A produção de CV20 é feita exclusivamente pela relavagem de CV30, com índice de recuperação de 35% e teores de enxofre menores do que 1,0%. Neste processo, há uma perda de 5% sobre a alimentação, e o rejeito gerado corresponde a um subproduto tipo CV35.

Os custos associados a esta operação, são mostrados pela Tabela A4, e considera-se como constante para todas as minas. Salienta-se que os valores reais foram multiplicados por uma constante maior do que 1.

Tabela A4: Custos associados ao processo

<i>Custo de Britagem</i>	7,35	(R\$/tROM)
Custo de Lavagem	14,70	(R\$/tROM)
Custo de Blendagem	3,68	(R\$/tROM)
Remoção de Estéril	11,32	(R\$/m ³)
Lavra do Carvão	13,16	(R\$/tROM)

A produção das três minas deverá, conjuntamente, atender a uma determinada demanda de mercado (Tabela A5). Nesta tabela, são também indicados os valores de comercialização deste produto, bem como o teor máximo de enxofre exigido pelo mercado consumido.

Tabela A5: Parâmetros associados ao mercado consumidor

Mercado	Demanda (t/me)s	Teor de Enxofre (%)	Preço (R\$/t)
CV54	10.000	1,2	455,70
CV47	5.000	1,2	477,75
CV35	20.000	1,1	646,80
CV30	30.000	1,1	698,25
CV20	2.000	1,1	823,20

Considerando as restrições até aqui apresentadas, e utilizando o modelo descrito no Capítulo 3, o qual encontra-se implementado na versão educacional do otimizador What'sBest® 7.0, chega-se a seguinte estratégia de produção ótima:

Extração de carvão bruto nas minas

Como mostra a Tabela A6, as Minas A e C tiveram sua produção máxima atingida, enquanto que a Mina B restringiu-se a aproximadamente 64% de sua capacidade instalada. A distribuição de camadas obedece aos percentuais previamente definidos.

Tabela A6: Extração de carvão projetada em cada mina

	Mina A	Mina B	Mina C
Lavra de Carvão (tROM/mês)			
Camada S	26.600	22.558	24.000
Camada M	28.000	9.668	16.000
Camada I	15.400		
Total	70.000	32.226	40.000
Estéril Movimentado (m³/mês)	315.000	354.487	160.000

Estratégia de Beneficiamento

Para a produção de CV54, a estratégia de produção ótima aponta que 8.750 t de carvão da camada S da Mina C devam ser utilizadas na forma direta, isto é somente britada, e que 5.000 t de produto intermediário (rejeito), oriundo da produção de CV30, deva ser relavado dando origem a 1.250 t de produto final tipo CV54, totalizando assim as 10.000 t demandadas pelo mercado consumidor.

A produção de CV47 deverá ser feita beneficiando 5.991 t de Camada S da Mina A, 1.389 t de Camada I da Mina A e 602 t de Camada M da Mina C, totalizando 7.982 t beneficiadas. Este beneficiamento produzirá respectivamente 3.475 t de CV47 oriundos do beneficiamento da Camada S da Mina A, 1.111 t de CV47 oriundos do beneficiamento da Camada I da Mina A, e 414 t de CV47 oriundos do beneficiamento da Camada M da Mina C, totalizando assim 5.000 t de CV47.

A produção de CV35 concentrou-se na Mina C com o beneficiamento de 15.250 t de Camada S e 15.398 t de Camada M, dando origem a respectivamente 9.150 t e 7.699 t de CV35. A esta produção acrescenta-se 3.151 t de CV35 produzidas na Mina B na forma de subproduto do beneficiamento do CV20, totalizando assim as 20.000 t de CV35 exigidas pelo mercado.

Como mostra a Tabela A7, para a produção de CV30 foram utilizados 22.558 t da Camada S da Mina B, 9.668 t da Camada M da Mina B, 20.609 t da Camada S da Mina A, 28.000 t da Camada M da Mina A e 14.011 t da Camada I da Mina A, dando origem a 11.447 t de CV30 a partir da Camada S da Mina B, 4.146 t de CV30 a partir da Camada M da Mina B, 5.977 t de CV30 a partir da Camada S da Mina A, 8.680 t de CV30 a partir da Camada M da Mina A e 5.464 t de CV30 a partir da Camada I da Mina A, totalizando em 35.714 t de

CV30. Desta produção, 30.000 t foram utilizadas para atendimento da demanda de mercado e 5.714 t foram utilizadas para a relavagem de CV20.

Tabela A7: Resumo da produção de CV30

Mina	Camada	ROM Beneficiado (tROM)	Produto Gerado (t)
A	S	20.609	11.447
A	M	28.000	4.146
A	I	14.011	5.977
B	S	22.558	8.680
B	M	9.668	5.464
	Total	94.846	35.714

A relavagem das 5.714 t de CV30 gera 2.000 t de CV20, que atende a demanda de mercado, e também 3.151 t de CV35 na forma de subproduto.

Resultado econômico

A estratégia de produção apontada pelo processo de otimização apresenta um custo operacional de R\$ 14.882.179, gera uma receita bruta de R\$ 42.475.650 resultando em uma contribuição operacional de R\$ 27.593.471.

Comparando a estratégia de produção apontada pelo processo de otimização com uma estratégia não otimizada, mas que priorize a obtenção dos produtos de maior poder calorífico com as camadas de maior índice de recuperação e os produtos menor poder calorífico com as camadas de menor índice de recuperação, como normalmente ocorre em ambientes onde o processo de otimização não está presente, verificaríamos que o processo de otimização geraria um ganho, em relação ao processo não otimizado da ordem de 7% (ganho este compatível com o verificado no item 4.1 desta dissertação).

Apêndice B:

Resultados do Processo de Otimização

Resultados do Processo de Otimização

As tabelas apresentadas a seguir mostram a estratégia de produção gerada pelo processo de otimização para cada um dos 10 cenários considerados. Também é feita a comparação das estratégias geradas pelo processo de otimização e as originalmente adotadas pela empresa.

As tabelas são divididas em dois campos principais: o Resumo da Lavra e o Resumo do beneficiamento. O resumo da lavra sumariza a quantidade de carvão bruto de cada camada extraída de cada mina.

O resumo do beneficiamento por sua vez é subdividido em dois sub-campos: Aplicação da Produção Bruta e Produto Gerado. O primeiro sub-campo corresponde à quantidade de carvão bruto de cada camada beneficiada em cada lavador visando à obtenção dos produtos finais. O segundo sub-campo corresponde à quantidade de produto final gerada.

Visando facilitar o entendimento das tabelas em questão são feitos os seguintes esclarecimentos para os termos:

- Modelo Otimizado: corresponde a estratégia de produção apontada pelo processo de otimização e diz respeito à quantidade de carvão bruto extraído de cada camada em cada mina, a quantidade de carvão bruto aplicada na produção de cada produto e finalmente a quantidade de produto obtida.
- Modelo S/ Otimiz.: diz respeito a estratégia de produção originalmente empregada pela empresa, sem qualquer processo de otimização.
- CV54-d: corresponde a quantidade de carvão bruto empregado na produção do CV-54 de forma direta, isto é, o carvão bruto é somente britado, não passando pela etapa de beneficiamento (lavagem). Os demais produtos (CV54, CV47, CV35, CV30 e CV20) são todos beneficiados em algum lavador.
- Rej-P: Corresponde ao rejeito de processo gerado durante o período considerado. Este material é utilizado, por meio de relavagem, para a produção de CV54.

- Rej-P: Corresponde ao rejeito de processo gerado em período anterior ao considerado, estando na forma de “estoque de rejeito”. Este material é também utilizado, por meio de relavagem, para a produção de CV54.
- Sub: Diz respeito ao rejeito da relavagem de CV30 para CV20, sendo considerado um subproduto com características semelhante ao CV35;
- Minas RE, FX, BL e CE: Correspondem respectivamente as Minas do Recreio, Faxinal, Butiá-Leste e Cerro.
- Lavador RE, FX e CE: Correspondem respectivamente aos lavadores das Minas do Recreio, Faxinal e Cerro.

Cenário 1

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)

	Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro			
	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	-	-								
S	-	-	30.362	26.000	28.125	27.000	24.619	31.000		
S3	-	-								
L	-	-								
M	-	-	14.013	12.000	29.167	28.000	11.912	15.000		
I	-	6.000			17.708	17.000				
Total	-	6.000	44.375	38.000	75.000	72.000	36.531	46.000	155.906	162.000
Estéril (m³)	-	24.000	443.753	380.000	337.500	324.000	146.125	184.000	927.377	912.000
REM (m³/t)	4,00	4,00	10,00	10,00	4,50	4,50	4,00	4,00	5,95	5,63

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta

Mina	Camada	Lavador	CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	I	RE	-	6.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	22.368	26.000	7.994	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	4.286	-	-	6.000	9.728	6.000	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE												
RE	Rej-E	RE			49.000	25.000								
FX	S	FX	-	-	-	-	15.517	-	-	-	12.608	27.000	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	29.167	28.000	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	17.708	6.286	-	10.714
FX	Rej-P	FX												
FX	Rej-E	FX												
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	24.619	31.000	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	0	-	-	15.000	11.912	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			-	6.000	49.000	25.000	4.286	-	-	6.000	32.095	32.000	7.994	-
Alimentação Lavador FX			-	-	-	-	15.517	-	-	-	59.483	61.286	-	10.714
Alimentação Lavador CE			-	-	0	-	-	15.000	36.531	31.000	-	-	-	-
Total			-	6.000	49.000	25.000	19.803	15.000	36.531	37.000	91.578	93.286	7.994	10.714

Produto Gerado

Mina	Camada	Lavador	CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	I	RE	-	6.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	11.991	13.938	1.500	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	3.000	-	-	2.400	3.405	2.100	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE												
RE	Rej-E	RE			12.250	6.250								
RE	Sub	RE							2.386	-				
FX	S	FX	-	-	-	-	9.000	-	-	-	3.656	7.830	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	9.042	8.680	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	6.906	2.452	-	1.500
FX	Rej-P	FX												
FX	Rej-E	FX												
FX	Sub	FX							-	2.143				
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	14.658	18.457	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	0	-	-	12.000	5.956	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE												
Total RE			-	6.000	12.250	6.250	3.000	-	2.386	2.400	15.396	16.038	1.500	-
Total FX			-	-	-	-	9.000	-	-	2.143	19.604	18.962	-	1.500
Total CE			-	-	0	-	-	12.000	20.614	18.457	-	-	-	-
Total			-	6.000	12.250	6.250	12.000	12.000	23.000	23.000	35.000	35.000	1.500	1.500

Cenário 2

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)										
	Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro		Total	
	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
S	-	-	34.839	24.000	28.125	27.000	15.426	29.000	-	-
S3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
L	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M	-	-	17.419	12.000	29.167	28.000	9.574	18.000	-	-
I	-	6.000	-	-	17.708	17.000	-	-	-	-
Total	-	6.000	52.258	36.000	75.000	72.000	25.000	47.000	152.258	161.000
Estéril (m³)	-	24.000	574.842	396.000	337.500	324.000	112.500	211.500	1.024.842	955.500
REM (m³/t)	4,00	4,00	11,00	11,00	4,50	4,50	4,50	4,50	6,73	5,93

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
Mina	Camada	Lavador	CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	I	RE	-	6.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	26.393	24.000	8.446	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	10.489	3.000	6.931	9.000	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	4.000	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	16.000	-	2.000	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	49.000	25.000	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	14.751	-	-	13.374	27.000	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	29.167	28.000	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	3.056	-	-	14.653	6.286	-	10.714	-
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	0	-	-	-	15.426	25.000	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	9.574	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			-	6.000	49.000	25.000	-	16.000	10.489	9.000	33.324	33.000	8.446	-
Alimentação Lavador FX			-	-	-	-	17.807	-	-	-	57.193	61.286	-	10.714
Alimentação Lavador CE			-	-	0	-	-	-	25.000	25.000	-	-	-	-
Total			-	6.000	49.000	25.000	17.807	16.000	35.489	34.000	90.517	94.286	8.446	10.714

Produto Gerado

Mina	Camada	Lavador	CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	I	RE	-	6.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	13.393	12.178	1.500	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	5.594	1.600	2.972	3.860	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	2.257	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	11.000	-	1.000	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	12.250	6.250	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	2.363	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	8.556	-	-	3.878	7.830	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	9.042	8.680	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	2.444	-	-	5.715	2.452	-	1.500	-
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	2.143	15.000	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	0	-	-	-	9.255	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	4.787	-	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			-	6.000	12.250	6.250	-	11.000	7.957	4.857	16.365	16.038	1.500	-
Total FX			-	-	-	-	11.000	-	-	2.143	18.635	18.962	-	1.500
Total CE			-	-	0	-	-	-	14.043	15.000	-	-	-	-
Total			-	6.000	12.250	6.250	11.000	11.000	22.000	22.000	35.000	35.000	1.500	1.500

Cenário 3

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)										
Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro				
	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	8.980	8.000								
S	17.959	16.000	-	-	24.361	29.000	19.843	22.000		
S3	5.612	5.000								
L	3.367	3.000								
M	13.469	12.000	-	-	23.520	28.000	4.510	5.000		
I	5.612	5.000			15.120	18.000				
Total	55.000	49.000	-	-	63.001	75.000	24.353	27.000		
Estéril (m³)	220.000	196.000	-	-	283.506	337.500	97.411	108.000		
REM (m³/t)	4,00	4,00	10,00	10,00	4,50	4,50	4,00	4,00		
									Total	
									Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
									600.917	641.500

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	1.667	-	7.313	8.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6.476	17.959	9.524
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	5.612	-	-	5.000	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	3.367	-	-	-	-	3.000	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	11.000	9.206	1.000	4.263	-
RE	I	RE	5.612	5.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	2.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	5.063	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	42.291	36.667	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	3.698	-	-	3.000	20.663	26.000	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	23.520	28.000	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	15.120	3.348	-	14.652
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	2.258	-	-	7.000	17.585	15.000	-	-	-	-
CE	M	CE	-	3.000	-	-	-	-	4.510	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			5.612	7.000	47.354	36.667	5.034	-	12.925	19.000	9.206	15.476	22.222	9.524
Alimentação Lavador FX			-	-	-	-	3.698	-	-	3.000	59.304	57.348	-	14.652
Alimentação Lavador CE			-	3.000	2.258	-	-	7.000	22.095	15.000	-	-	-	-
Total			5.612	10.000	49.612	36.667	8.732	7.000	35.020	37.000	68.510	72.824	22.222	24.176

Produto Gerado

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	667	-	1.463	1.600	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.914	2.829	1.500
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	2.806	-	-	1.475	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	2.189	-	-	-	-	1.020	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	5.261	4.143	450	671	-
RE	I	RE	5.612	5.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	2.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	1.519	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	12.687	11.000	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	-	5.389	2.310	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	2.145	-	-	1.000	5.992	7.540	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	6.968	8.295	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	5.897	1.306	-	2.000
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	-	2.982	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	1.182	-	-	5.000	9.200	7.848	-	-	-	-
CE	M	CE	-	3.000	-	-	-	-	2.142	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			5.612	7.000	14.206	11.000	2.855	-	9.658	9.170	4.143	5.859	3.500	1.500
Total FX			-	-	-	-	2.145	-	-	3.982	18.857	17.141	-	2.000
Total CE			-	3.000	1.182	-	-	5.000	11.342	7.848	-	-	-	-
Total			5.612	10.000	15.388	11.000	5.000	5.000	21.000	21.000	23.000	23.000	3.500	3.500

Cenário 4

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)										
Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro				
	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	9.290	10.000								
S	14.863	16.000	-	-	29.000	29.000	20.370	22.000		
S3	4.645	5.000								
L	2.787	3.000								
M	11.148	12.000	-	-	28.000	28.000	4.630	5.000		
I	7.432	8.000			18.000	18.000				
Total	50.164	54.000	-	-	75.000	75.000	25.000	27.000		
Estéril (m³)	376.232	405.000	-	-	337.500	337.500	100.000	108.000		
REM (m³/t)	7,50	7,50	10,00	10,00	4,50	4,50	4,00	4,00		
									Total	
									Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
									813.732	850.500

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	500	-	8.790	10.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	711	-	-	-	3.078	-	-	6.476	11.075	9.524
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	4.645	5.000	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	2.000	-	-	1.500	787	1.500	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	12.000	-	-	11.148	-
RE	I	RE	7.432	8.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	33.924	30.000	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	-	-	-	3.000	29.000	26.000	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	28.000	28.000	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	7.083	-	10.917	3.348	-	14.652
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	2.000	20.370	20.000	-	-	-	-
CE	M	CE	-	1.000	-	-	-	-	4.630	-	-	4.000	-	-
Alimentação Lavador RE			7.432	8.000	34.635	30.000	2.500	-	11.867	23.500	5.432	12.976	22.222	9.524
Alimentação Lavador FX			-	-	-	-	-	-	7.083	3.000	67.917	57.348	-	14.652
Alimentação Lavador CE			-	1.000	-	-	-	2.000	25.000	20.000	-	4.000	-	-
Total			7.432	9.000	34.635	30.000	2.500	2.000	43.950	46.500	73.349	74.324	22.222	24.176

Produto Gerado

Produto Gerado														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	200	-	1.758	2.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	391	-	-	-	1.693	-	-	2.914	1.744	1.500
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	1.770	1.905	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	1.300	-	-	600	268	510	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	5.739	-	-	1.756	-
RE	I	RE	7.432	8.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	10.177	9.000	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	-	5.389	2.310	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	-	-	-	1.000	8.410	7.540	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	8.295	8.295	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	3.400	-	4.258	1.306	-	2.000
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	-	2.982	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	1.500	10.562	10.370	-	-	-	-
CE	M	CE	-	1.000	-	-	-	-	2.199	-	-	530	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			7.432	8.000	10.568	9.000	1.500	-	8.840	10.649	2.037	5.329	3.500	1.500
Total FX			-	-	-	-	-	-	3.400	3.982	20.963	17.141	-	2.000
Total CE			-	1.000	-	-	-	1.500	12.761	10.370	-	530	-	-
Total			7.432	9.000	10.568	9.000	1.500	1.500	25.000	25.000	23.000	23.000	3.500	3.500

Cenário 5

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)											
		Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro			
		Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB		10.000	10.000								
S		16.000	16.000	-	-	29.000	29.000	17.199	22.000		
S3		5.000	5.000								
L		6.000	6.000								
M		23.000	23.000	-	-	28.000	28.000	3.909	5.000		
I		8.000	8.000			18.000	18.000				
Total		68.000	68.000	-	-	75.000	75.000	21.108	27.000	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
Estéril (m³)		476.000	476.000	-	-	337.500	337.500	84.433	108.000	897.933	921.500
REM (m³/t)		7,00	7,00	10,00	10,00	4,50	4,50	4,00	4,00	5,47	5,42

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
Mina	Camada	Lavador												
RE	AB	RE	-	-	-	-	500	-	9.500	10.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	16.000	-	-	6.476	-	9.524
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	5.000	5.000	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	2.000	-	-	5.000	4.000	1.000	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	23.000	778	-	22.222	-
RE	I	RE	8.000	8.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	2.000	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	45.263	46.667	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	-	-	-	3.000	29.000	26.000	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	28.000	28.000	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	10.679	-	7.321	3.348	-	14.652
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	867	-	-	-	16.332	20.000	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	3.909	-	-	5.000	-	-
Alimentação Lavador RE			8.000	8.000	45.263	46.667	2.500	2.000	25.500	38.000	9.778	12.476	22.222	9.524
Alimentação Lavador FX			-	-	-	-	-	-	10.679	3.000	64.321	57.348	-	14.652
Alimentação Lavador CE			-	-	867	-	-	-	20.241	20.000	-	5.000	-	-
Total			8.000	8.000	46.131	46.667	2.500	2.000	56.420	61.000	74.098	74.824	22.222	24.176

Produto Gerado

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
Mina	Camada	Lavador												
RE	AB	RE	-	-	-	-	200	-	1.900	2.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	8.800	-	-	2.914	-	1.500
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	1.905	1.905	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	1.300	-	-	2.000	1.360	340	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	11.000	350	-	3.500	-
RE	I	RE	8.000	8.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	1.500	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	13.579	14.000	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	-	5.389	2.310	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	-	-	-	1.000	8.410	7.540	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	8.120	8.120	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	5.126	-	2.855	1.306	-	2.000
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	-	2.982	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	421	-	-	-	7.928	9.709	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	1.857	-	-	875	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			8.000	8.000	13.579	14.000	1.500	1.500	16.089	17.310	3.615	5.159	3.500	1.500
Total FX			-	-	-	-	-	-	5.126	3.982	19.385	16.966	-	2.000
Total CE			-	-	421	-	-	-	9.785	9.709	-	875	-	-
Total			8.000	8.000	14.000	14.000	1.500	1.500	31.000	31.000	23.000	23.000	3.500	3.500

Cenário 6

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)											
		Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro			
		Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	RE	7.244	8.000								
S	RE	14.489	16.000	-	-	29.000	29.000	20.370	22.000		
S3	RE	4.528	5.000								
L	RE	2.717	3.000								
M	RE	10.867	12.000	-	-	28.000	28.000	4.630	5.000	Total	
I	RE	4.528	5.000			18.000	18.000			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
Total		44.373	49.000	-	-	75.000	75.000	25.000	27.000	144.373	151.000
Estéril (m³)		332.794	367.500	-	-	337.500	337.500	100.000	108.000	770.294	813.000
REM (m³/t)		7,50	7,50	10,00	10,00	4,50	4,50	4,00	4,00	5,34	5,38

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
Mina	Camada	Lavador												
RE	AB	RE	-	-	-	-	1.667	-	5.578	8.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	1.733	-	-	-	2.825	-	-	6.476	9.931	9.524
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	3.040	5.000	1.488	-
RE	L	RE	-	-	-	-	2.717	-	-	-	-	3.000	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	11.000	-	1.000	10.867	-
RE	I	RE	4.528	5.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	2.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE			1.730	-								
RE	Rej-E	RE			50.000	36.667								
FX	S	FX	-	-	-	-	4.427	-	-	3.000	24.573	26.000	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	28.000	28.000	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	184	-	17.816	3.348	-	14.652
FX	Rej-P	FX												
FX	Rej-E	FX												
CE	S	CE	-	-	-	-	-	7.000	20.370	15.000	-	-	-	-
CE	M	CE	-	3.000	-	-	-	-	4.630	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			4.528	7.000	53.463	36.667	4.383	-	8.403	19.000	3.040	15.476	22.285	9.524
Alimentação Lavador FX			-	-	-	-	4.427	-	184	3.000	70.390	57.348	-	14.652
Alimentação Lavador CE			-	3.000	-	-	-	7.000	25.000	15.000	-	-	-	-
Total			4.528	10.000	53.463	36.667	8.810	7.000	33.587	37.000	73.430	72.824	22.285	24.176

Produto Gerado

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
			Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
Mina	Camada	Lavador												
RE	AB	RE	-	-	-	-	667	-	1.116	1.600	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	953	-	-	-	1.554	-	-	2.914	1.564	1.500
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	1.310	2.155	224	-
RE	L	RE	-	-	-	-	1.766	-	-	-	-	1.020	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	5.261	-	450	1.712	-
RE	I	RE	4.528	5.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	2.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE			519	-								
RE	Rej-E	RE			15.000	11.000								
RE	Sub	RE							5.386	2.310				
FX	S	FX	-	-	-	-	2.567	-	-	1.000	7.126	7.540	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	8.615	8.615	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	88	-	6.948	1.306	-	2.000
FX	Rej-P	FX												
FX	Rej-E	FX												
FX	Sub	FX							-	2.982				
CE	S	CE	-	-	-	-	-	5.000	10.658	7.848	-	-	-	-
CE	M	CE	-	3.000	-	-	-	-	2.199	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE							-	-				
Total RE			4.528	7.000	16.472	11.000	2.433	-	8.055	9.170	1.310	6.539	3.500	1.500
Total FX			-	-	-	-	2.567	-	88	3.982	22.690	17.461	-	2.000
Total CE			-	3.000	-	-	-	5.000	12.857	7.848	-	-	-	-
Total			4.528	10.000	16.472	11.000	5.000	5.000	21.000	21.000	24.000	24.000	3.500	3.500

Cenário 7

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)									
Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro			
Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	16.608	25.000							
S	11.958	18.000	20.000	16.000	32.813	21.000	0	-	
S3	6.643	10.000							
L	2.657	4.000							
M	15.279	23.000	0	-	23.438	15.000	0	-	
I	13.286	20.000			18.750	12.000			
Total	66.432	100.000	20.000	16.000	75.000	48.000	0	-	Total
									Modelo Otimizado
									Modelo S/ Otimiz.
Estéril (m³)	531.460	800.000	200.000	160.000	300.000	192.000	0	-	1.031.460
REM (m³/t)	8,00	8,00	10,00	10,00	4,00	4,00	4,00	4,00	6,39
									7,02

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	0	-	16.608	25.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	11.958	-	-	-	18.000	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	6.643	10.000	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	1.635	-	1.023	4.000	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	15.279	20.500	-	2.500	-	-
RE	I	RE	13.286	20.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	14.286	16.000	5.714	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	4.865	29.200	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	50.000	10.000	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	7.172	-	0	-	7.504	21.000	18.137	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	15.000	23.438	-	-	-
FX	I	FX	-	-	649	-	-	-	18.101	4.700	-	-	-	7.300
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			13.286	20.000	54.865	39.200	0	-	45.480	45.500	21.952	50.500	5.714	-
Alimentação Lavador FX			-	-	7.821	-	0	-	25.605	40.700	41.574	-	-	7.300
Alimentação Lavador CE			-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Total			13.286	20.000	62.686	39.200	0	-	71.085	86.200	63.526	50.500	5.714	7.300

Produto Gerado

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	-	-	0	-	3.575	5.381	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	6.577	-	-	-	7.960	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	2.458	3.700	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	654	-	343	1.340	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	7.334	9.840	-	1.000	-	-
RE	I	RE	13.286	20.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	7.143	8.000	1.000	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	1.216	7.300	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	12.500	2.500	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	-	1.571	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	2.486	-	0	-	2.601	7.278	5.260	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	5.100	6.797	-	-	-
FX	I	FX	-	-	312	-	-	-	8.688	2.256	-	-	-	1.000
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	-	1.145	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			13.286	20.000	13.716	9.800	0	-	19.711	15.221	9.943	22.000	1.000	-
Total FX			-	-	2.797	-	0	-	11.289	15.779	12.057	-	-	1.000
Total CE			-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Total			13.286	20.000	16.514	9.800	0	-	31.000	31.000	22.000	22.000	1.000	1.000

Cenário 8

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)									
Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro			
Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	17.591	30.000							
S	10.555	18.000	20.000	9.000	31.676	24.000	0	-	
S3	4.691	8.000							
L	2.345	4.000							
M	8.209	14.000	0	-	25.077	19.000	0	-	
I	11.141	19.000			15.838	12.000			
Total	54.533	93.000	20.000	9.000	72.592	55.000	0	-	147.124 / 157.000
Estéril (m³)	436.261	744.000	200.000	90.000	290.368	220.000	0	-	926.628 / 1.054.000
REM (m³/t)	8,00	8,00	10,00	10,00	4,00	4,00	4,00	4,00	6,30 / 6,71

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	11.769	-	0	-	5.823	30.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	10.555	18.000	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	4.691	8.000	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	2.345	4.000	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	8.209	14.000	-	-
RE	I	RE	11.141	19.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	14.286	9.000	5.714	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	15.246	35.600	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	50.000	10.000	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	0	-	15.116	24.000	16.560	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	25.077	19.000	-	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	15.838	4.700	-	-	-	7.300
FX	Rej-P	FX	-	-	2.408	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			11.141	19.000	77.014	45.600	0	-	5.823	30.000	40.086	53.000	5.714	-
Alimentação Lavador FX			-	-	2.408	-	0	-	56.032	47.700	16.560	-	-	7.300
Alimentação Lavador CE			-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Total			11.141	19.000	79.422	45.600	0	-	61.854	77.700	56.646	53.000	5.714	7.300

Produto Gerado

Produto Gerado														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	2.345	-	0	-	1.160	5.979	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	4.750	8.100	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	1.736	2.960	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	786	1.340	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	3.284	5.600	-	-
RE	I	RE	11.141	19.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	7.143	4.500	1.000	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	3.811	8.900	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	12.500	2.500	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	-	1.571	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	0	-	5.140	8.160	4.802	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	8.526	6.460	-	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	7.602	2.256	-	-	-	1.000
FX	Rej-P	FX	-	-	602	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	-	1.145	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			11.141	19.000	18.657	11.400	0	-	2.732	5.979	17.698	22.500	1.000	-
Total FX			-	-	602	-	0	-	21.268	18.021	4.802	-	-	1.000
Total CE			-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Total			11.141	19.000	19.259	11.400	0	-	24.000	24.000	22.500	22.500	1.000	1.000

Cenário 9

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)									
Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro			
Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB	18.371	30.000							
S	11.023	18.000	20.000	9.000	31.250	25.000	0	-	
S3	4.899	8.000							
L	2.449	4.000							
M	8.573	14.000	0	-	25.000	20.000	0	-	
I	11.023	18.000			18.750	15.000			
Total	56.338	92.000	20.000	9.000	75.000	60.000	0	-	
Estéril (m³)	450.707	736.000	200.000	90.000	300.000	240.000	0	-	
REM (m³/t)	8,00	8,00	10,00	10,00	4,00	4,00	4,00	4,00	
								Total	
								Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
								950.707	1.066.000

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	11.882	-	0	-	6.489	30.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	5.264	-	5.759	18.000	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	4.899	8.000	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	2.449	4.000	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	8.573	14.000	-	-
RE	I	RE	11.023	18.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	14.286	9.000	5.714	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	13.027	34.400	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	50.000	10.000	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	0	-	8.136	25.000	23.114	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	25.000	20.000	-	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	18.750	7.700	-	-	-	7.300
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			11.023	18.000	74.909	44.400	0	-	11.753	30.000	35.967	53.000	5.714	-
Alimentação Lavador FX			-	-	-	-	0	-	51.886	52.700	23.114	-	-	7.300
Alimentação Lavador CE			-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total			11.023	18.000	74.909	44.400	0	-	63.639	82.700	59.080	53.000	5.714	7.300

Produto Gerado														
			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	2.321	-	0	-	1.267	5.859	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	2.895	-	2.592	8.100	-	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	1.813	2.960	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	821	1.340	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	3.429	5.600	-	-
RE	I	RE	11.023	18.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	7.143	4.500	1.000	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	3.257	8.600	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	12.500	2.500	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	-	1.571	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	0	-	2.766	8.500	6.703	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	8.500	6.800	-	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	9.000	3.696	-	-	-	1.000
FX	Rej-P	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	-	1.145	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			11.023	18.000	18.077	11.100	0	-	5.734	5.859	15.797	22.500	1.000	-
Total FX			-	-	-	-	0	-	20.266	20.141	6.703	-	-	1.000
Total CE			-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total			11.023	18.000	18.077	11.100	0	-	26.000	26.000	22.500	22.500	1.000	1.000

Cenário 10

Resumo da Lavra

Extração de ROM (t)											
		Recreio		Butiá-Leste		Faxinal		Cerro			
		Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.		
AB		17.361	25.000								
S		12.500	18.000	15.000	10.000	29.636	23.000	0	-		
S3		6.250	9.000								
L		2.083	3.000								
M		9.722	14.000	0	-	24.482	19.000	0	-		
I		12.500	18.000			16.751	13.000				
Total		60.416	87.000	15.000	10.000	70.868	55.000	0	-	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
Estéril (m³)		453.117	652.500	150.000	100.000	318.905	247.500	0	-	922.022	1.000.000
REM (m³/t)		7,50	7,50	10,00	10,00	4,50	4,50	4,00	4,00	6,30	6,58

Resumo do Beneficiamento

Aplicação da Produção Bruta

			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	2.797	-	0	-	14.564	25.000	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	6.527	18.000	5.973	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	6.250	9.000	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	2.083	3.000	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	9.522	1.400	200	12.600	-	-
RE	I	RE	12.500	18.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	15.000	10.000	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	8.837	33.600	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	50.000	10.000	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	0	-	29.636	23.000	-	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	19.000	24.482	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	10.417	5.700	6.333	-	-	7.300
FX	Rej-P	FX	-	-	4.132	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Alimentação Lavador RE			12.500	18.000	61.634	43.600	0	-	24.086	26.400	30.060	52.600	5.973	-
Alimentação Lavador FX			-	-	4.132	-	0	-	40.053	47.700	30.815	-	-	7.300
Alimentação Lavador CE			-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Total			12.500	18.000	65.766	43.600	0	-	64.139	74.100	60.875	52.600	5.973	7.300

Produto Gerado

			CV54-d		CV54		CV47		CV35		CV30		CV20	
Mina	Camada	Lavador	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.	Modelo Otimizado	Modelo S/ Otimiz.
RE	AB	RE	-	-	658	-	0	-	3.426	5.881	-	-	-	-
RE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	3.122	8.610	1.000	-
RE	S3	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	2.312	3.330	-	-
RE	L	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	708	1.020	-	-
RE	M	RE	-	-	-	-	-	-	4.571	672	80	5.040	-	-
RE	I	RE	12.500	18.000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BL	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	7.500	5.000	-	-
BL	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
CE	S	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CE	M	RE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-P	RE	-	-	2.209	8.400	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Rej-E	RE	-	-	12.500	2.500	-	-	-	-	-	-	-	-
RE	Sub	RE	-	-	-	-	-	-	1.558	-	-	-	-	-
FX	S	FX	-	-	-	-	0	-	10.445	8.106	-	-	-	-
FX	M	FX	-	-	-	-	-	-	-	6.460	7.100	-	-	-
FX	I	FX	-	-	-	-	-	-	5.000	2.736	2.178	-	-	1.000
FX	Rej-P	FX	-	-	1.033	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Rej-E	FX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
FX	Sub	FX	-	-	-	-	-	-	-	1.145	-	-	-	-
CE	S	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	M	CE	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
CE	Sub	CE	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total RE			12.500	18.000	15.367	10.900	0	-	9.555	6.553	13.723	23.000	1.000	-
Total FX			-	-	1.033	-	0	-	15.445	18.447	9.277	-	-	1.000
Total CE			-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
Total			12.500	18.000	16.400	10.900	0	-	25.000	25.000	23.000	23.000	1.000	1.000

Apêndice C:

Análise Estatística dos Dados Históricos

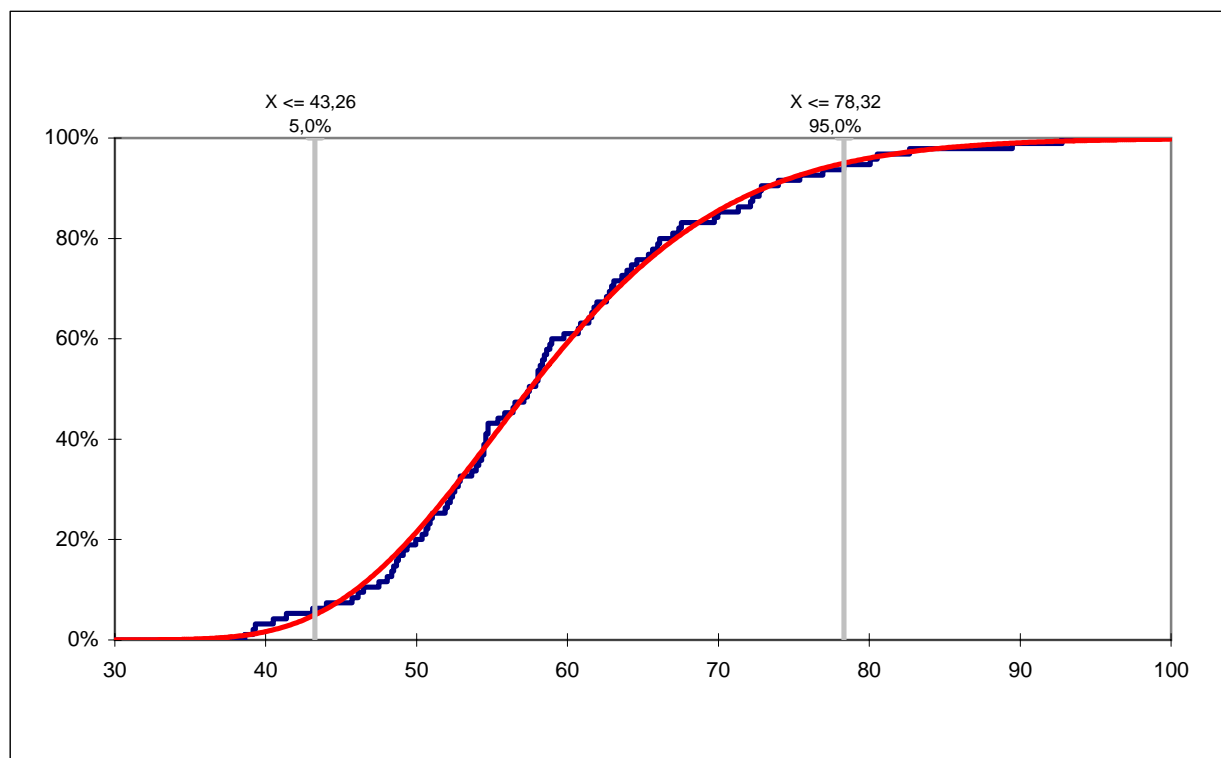
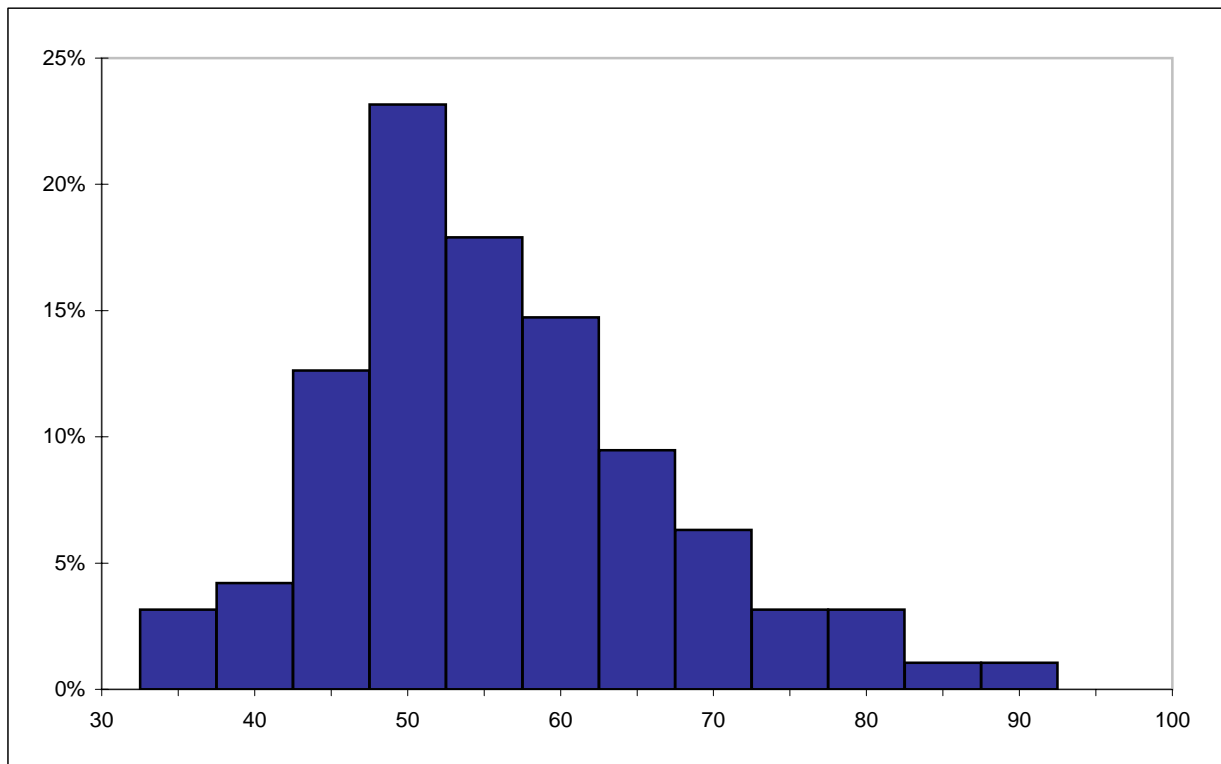
Variável: **Recuperação da Camada S - FX para CV47**

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	38,61
Máximo:	92,76
Média:	58,71
Mediana:	57,37
Desv. Padrão:	10,88
Coef. de Variação:	19%
Variância:	118,37
Assimetria:	0,69
Curtose:	0,61
Contagem:	95

Função Teórica Ajustada

Função:	Log Normal
μ :	46,22
σ :	10,83
Q^2	4,46



Obs.: em **azul** dados amostrais e em **vermelho** a função teórica melhor ajustada ao valores observados

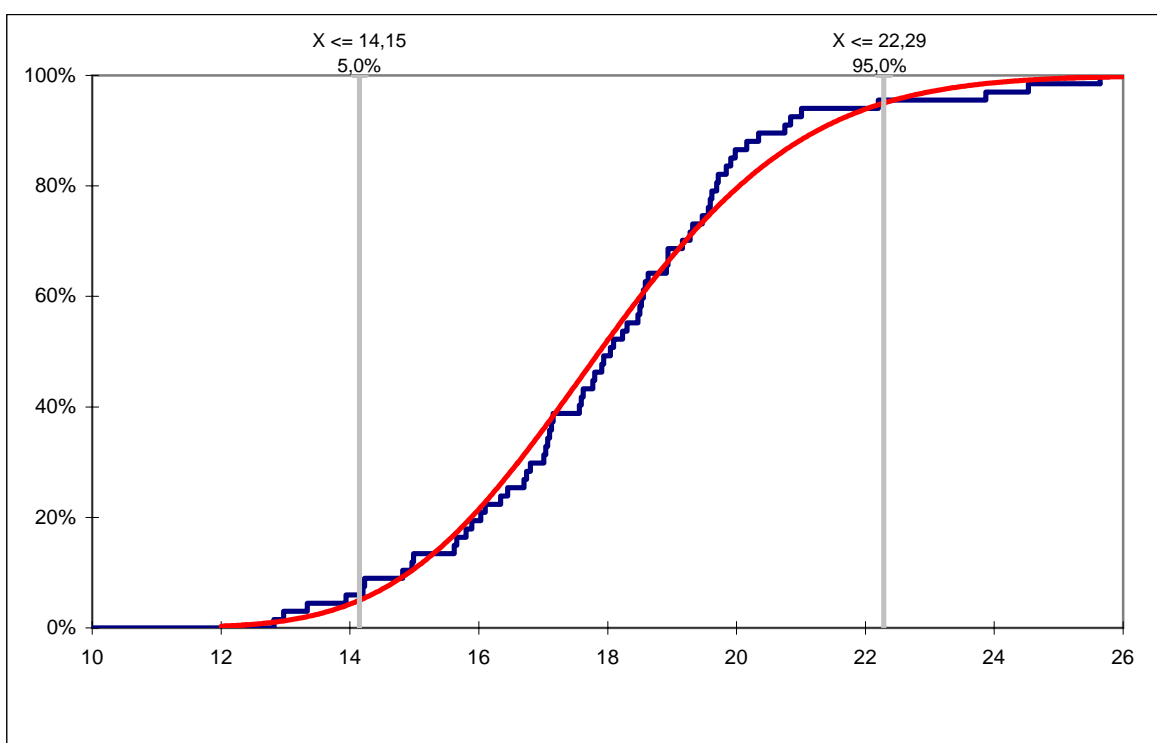
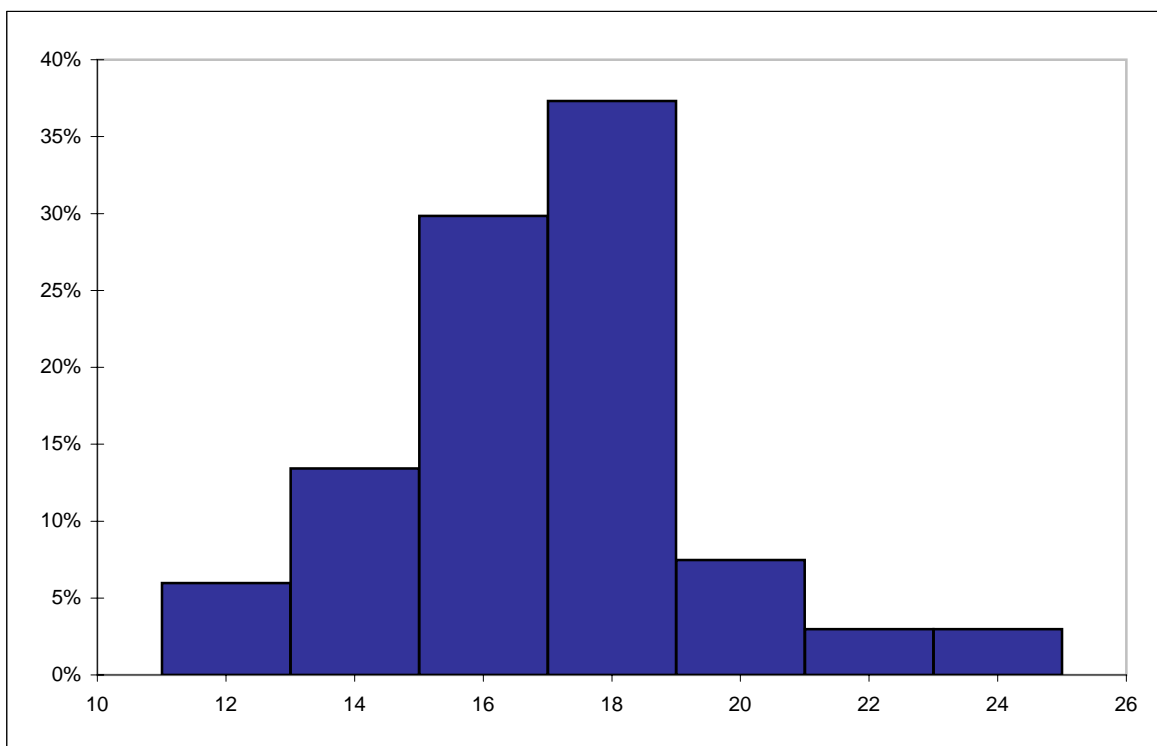
Variável: Recuperação Camada S - BL para CV20

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	12,82
Máximo:	25,64
Média:	18,00
Mediana:	18,04
Desv. Padrão:	2,51
Coef. de Variação:	14%
Variância:	6,28
Assimetria:	0,43
Curtose:	1,07
Contagem:	67

Função Teórica Ajustada

Função:	Weibull
α :	0,38
β :	42,08
Q^2 :	6,88



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada ao valores observados

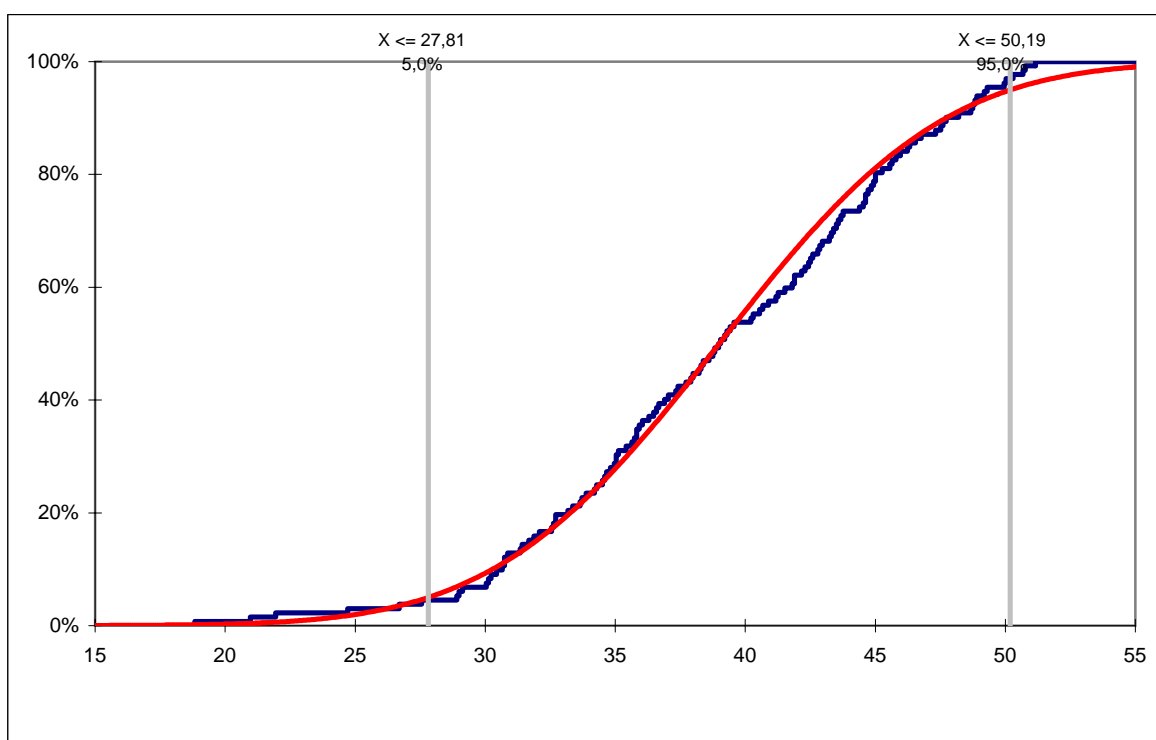
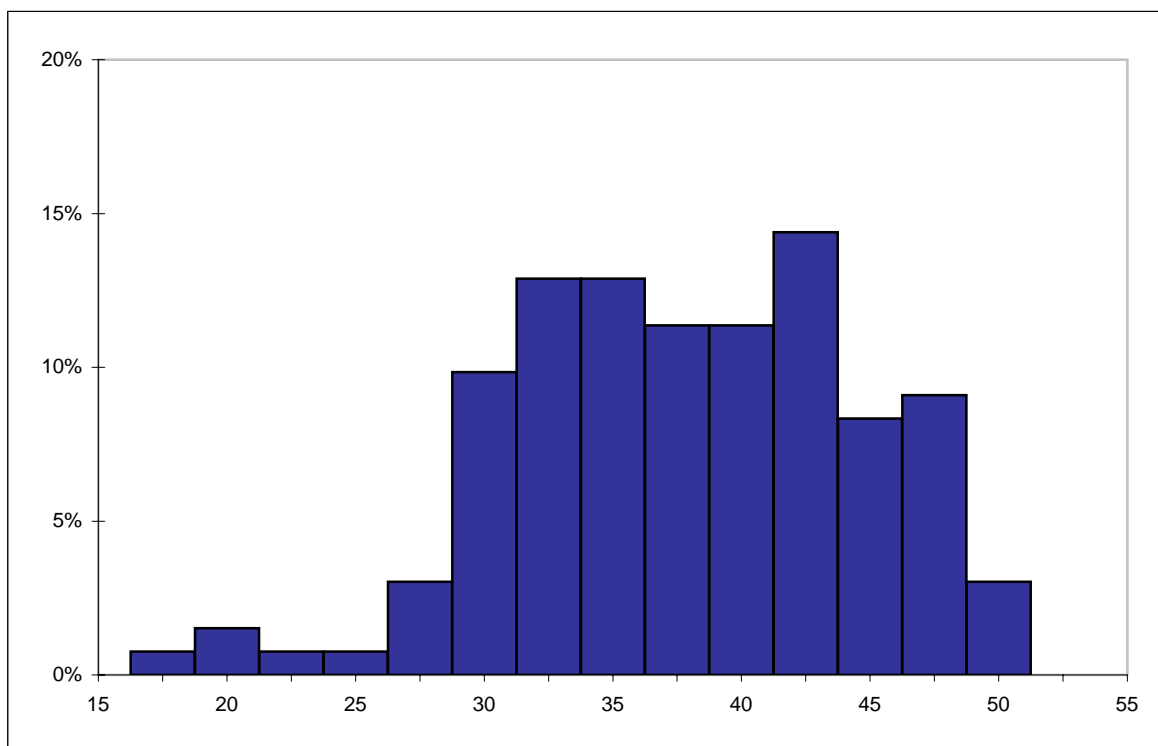
Variável: Recuperação da Camada I - FX para CV30

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	18,84
Máximo:	51,16
Média:	39,00
Mediana:	39,00
Desv. Padrão:	6,80
Coef. de Variação:	17%
Variância:	46,30
Assimetria:	-0,35
Curtose:	-0,21
Contagem:	132

Função Teórica Ajustada

Função:	Normal
μ :	39,00
σ :	6,80
Q^2 :	5,88



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada ao valores observados

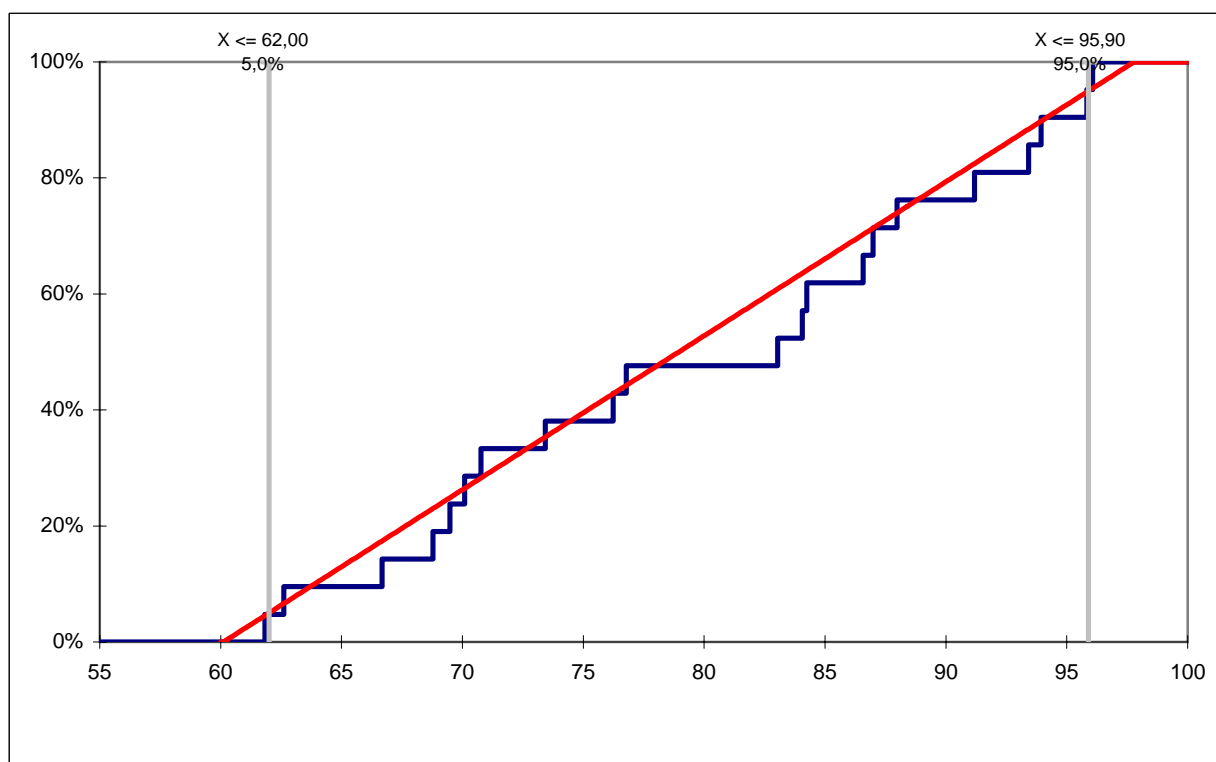
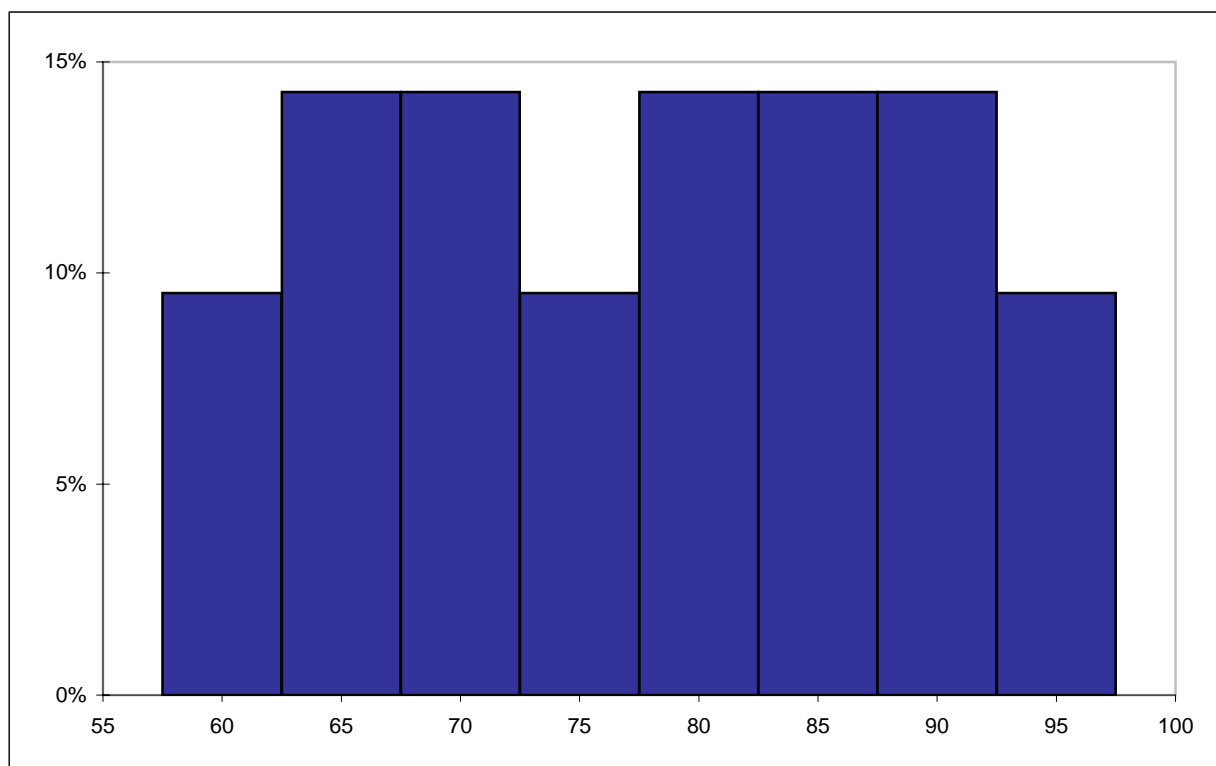
Variável: **Recuperação da Camada I - FX para CV47**

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	61,83
Máximo:	96,07
Média:	80,00
Mediana:	83,04
Desv. Padrão:	11,19
Coef. de Variação:	14%
Variância:	125,27
Assimetria:	-0,09
Curtose:	-1,34
Contagem:	21

Função Teórica Ajustada

Função:	Uniforme
Mínimo:	60,12
Máximo:	97,78
Q^2 :	0,14



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada aos valores observados

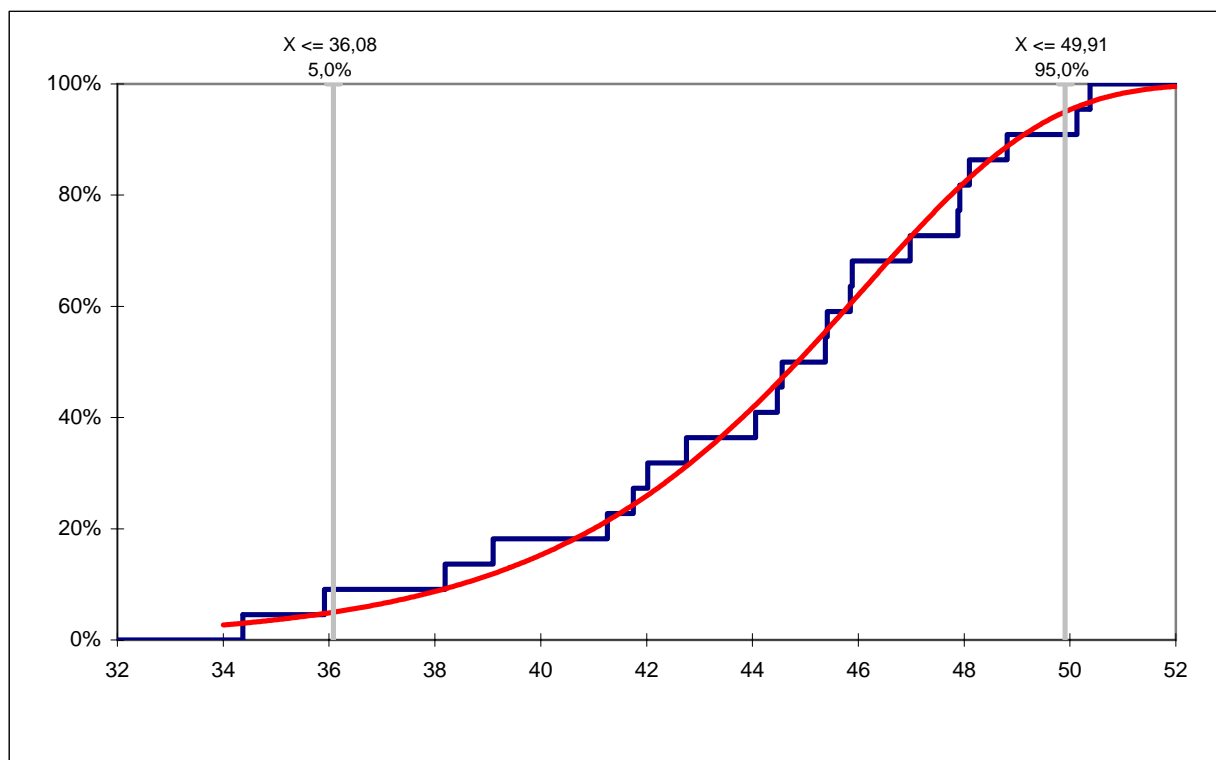
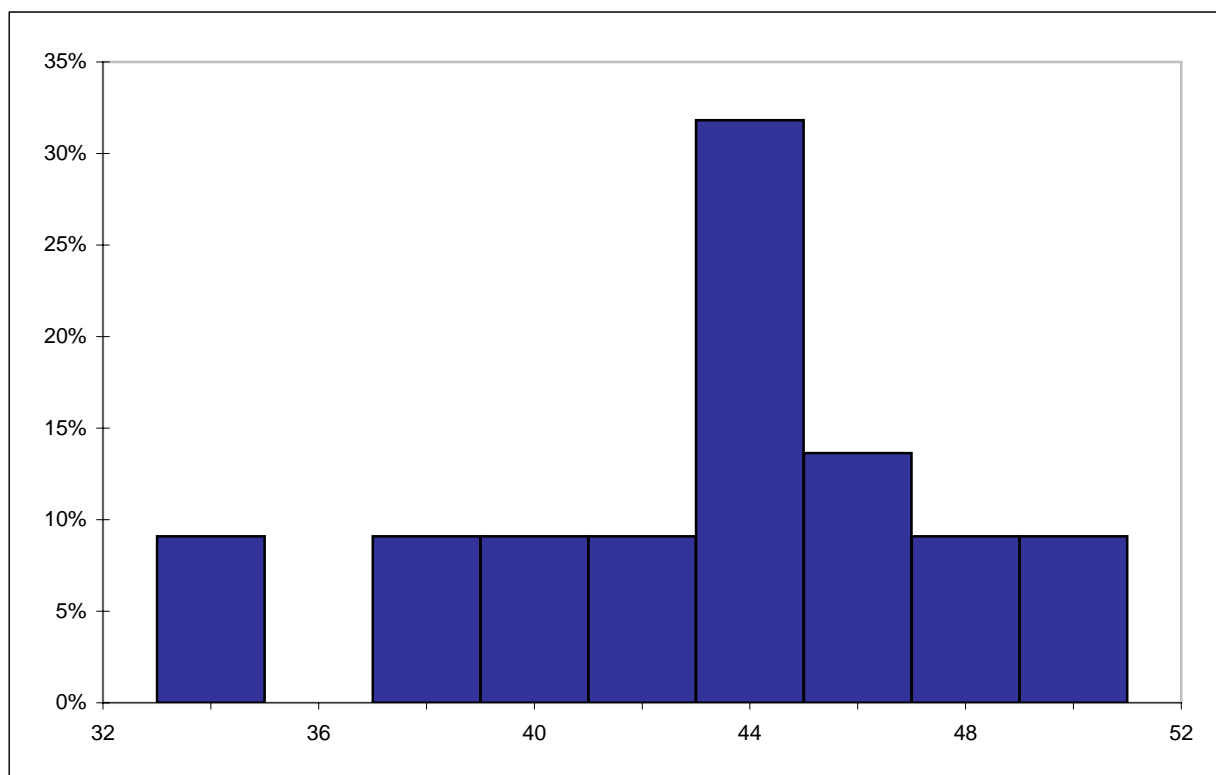
Variável: Recuperação da Camada M - BL para CV30

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	34,37
Máximo:	50,38
Média:	44,14
Mediana:	44,97
Desv. Padrão:	4,38
Coef. de Variação:	10%
Variância:	19,15
Assimetria:	-0,70
Curtose:	-0,07
Contagem:	22

Função Ajustada

Função:	Weibull
α :	77,50
β :	266,59
Q^2 :	0,18



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada ao valores observados

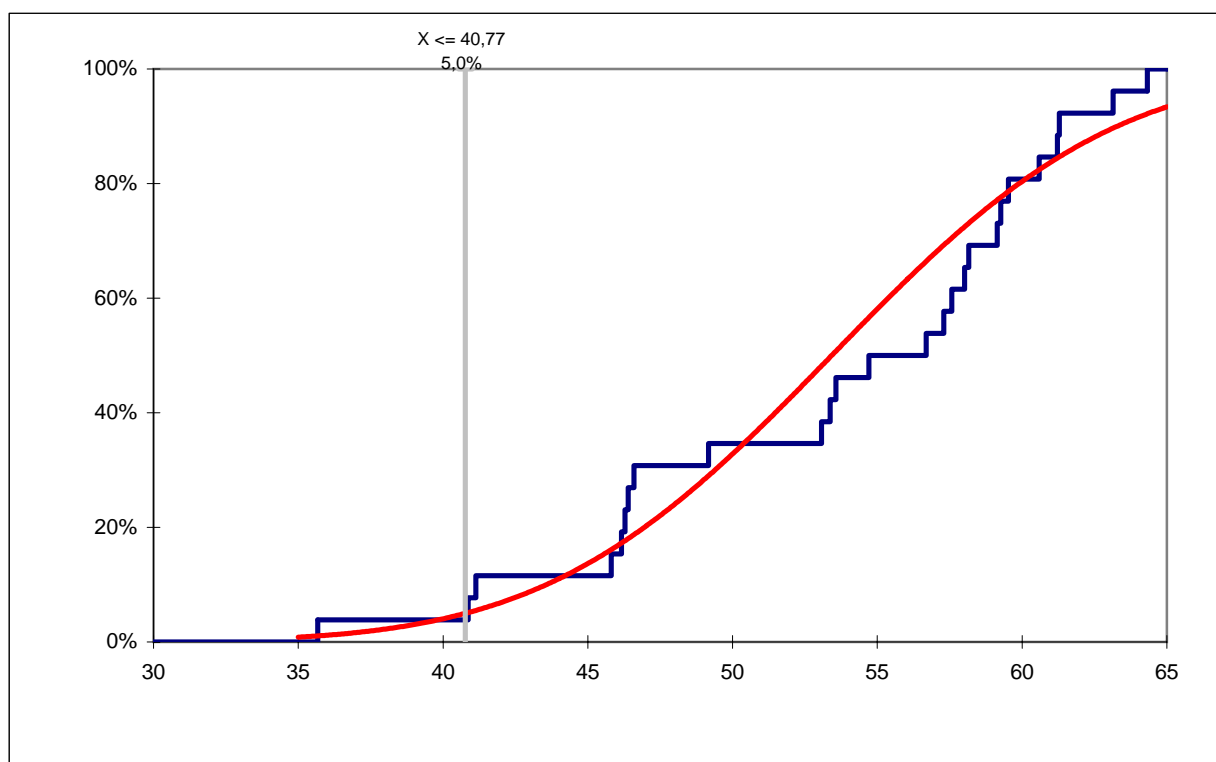
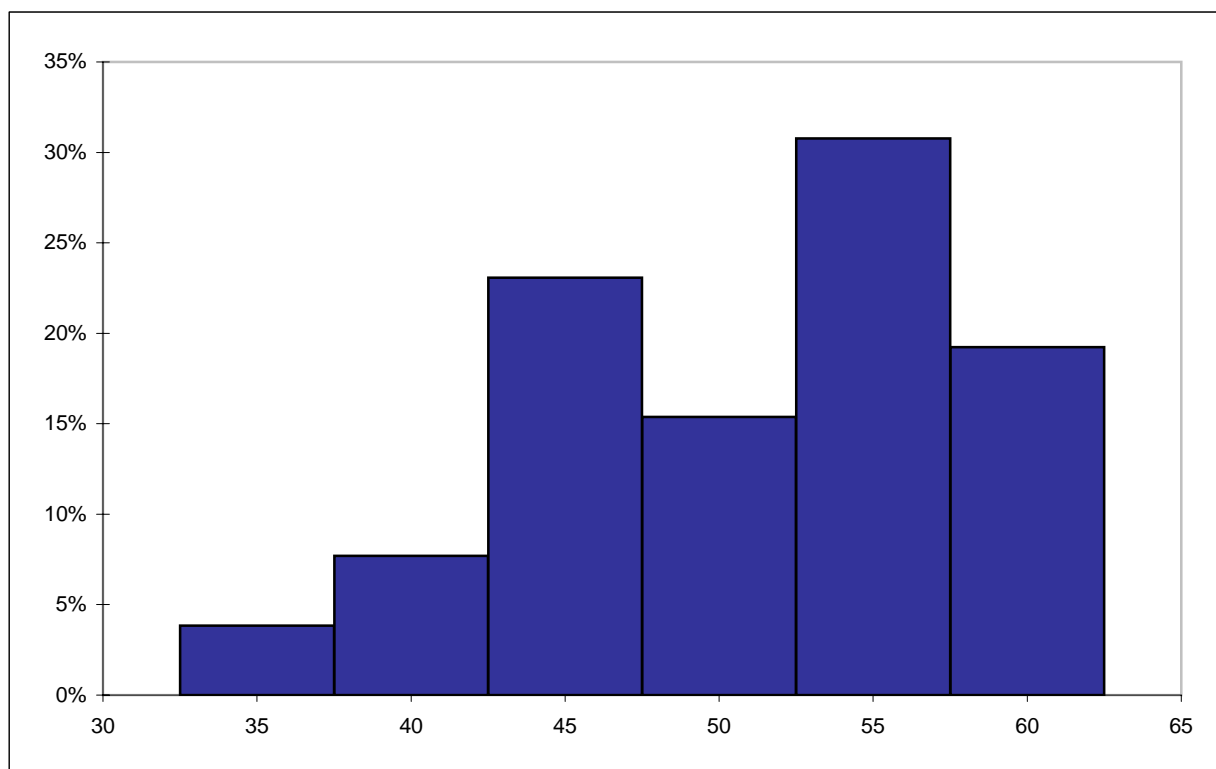
Variável: **Recuperação da Camada M - BL para CV35**

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	35,67
Máximo:	64,33
Média:	53,42
Mediana:	55,70
Desv. Padrão:	7,69
Coef. de Variação:	14%
Variância:	59,17
Assimetria:	-0,65
Curtose:	-0,50
Contagem:	26

Função Teórica Ajustada

Função:	Normal
μ :	53,42
σ :	7,69
Q^2 :	6,69



Obs.: em **azul** dados amostrais e em **vermelho** a função teórica melhor ajustada ao valores observados

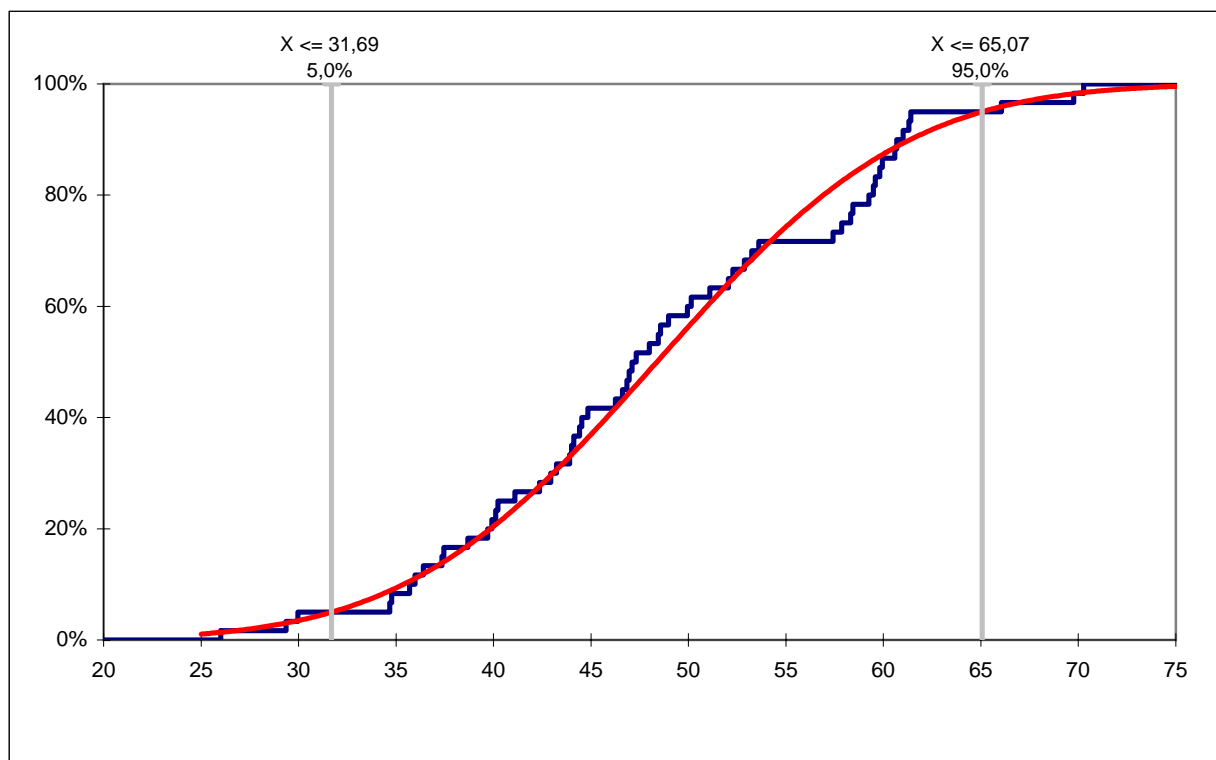
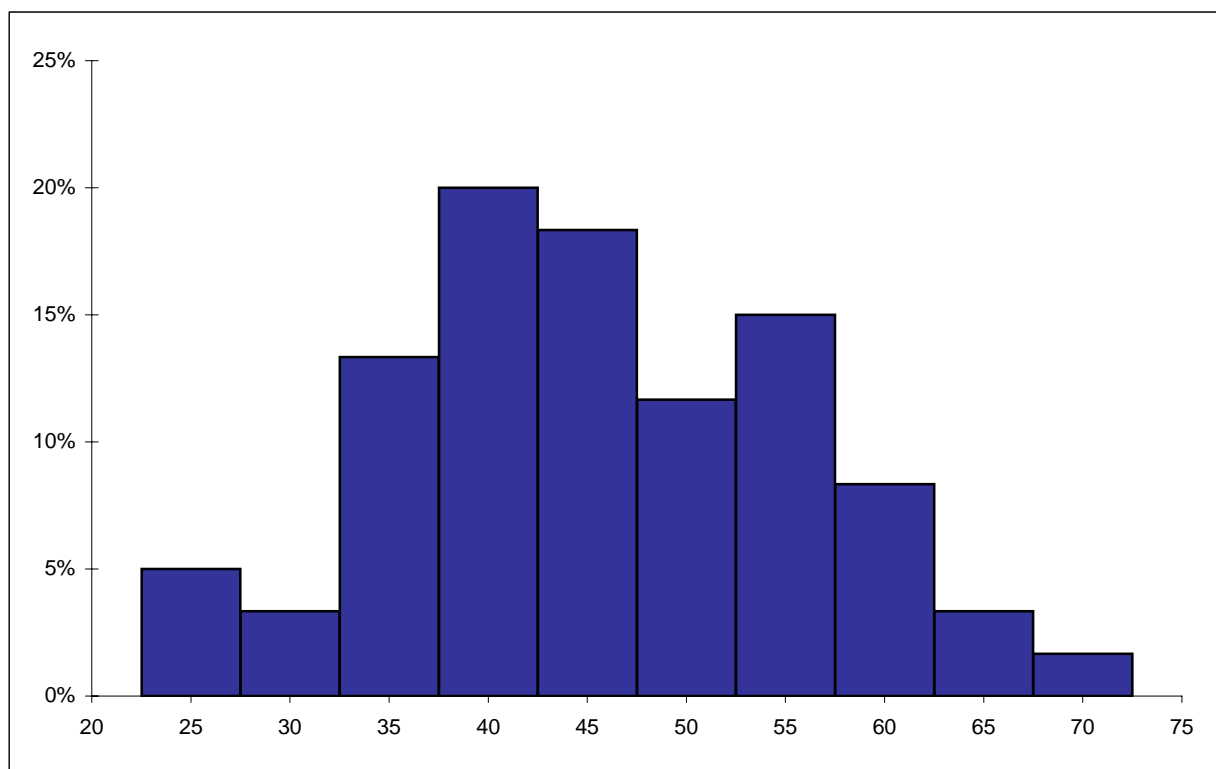
Variável: **Recuperação da Camada M - CE para CV35**

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	26,01
Máximo:	70,27
Média:	48,38
Mediana:	47,22
Desv. Padrão:	10,14
Coef. de Variação:	21%
Variância:	102,91
Assimetria:	0,08
Curtose:	-0,53
Contagem:	60

Função Teórica Ajustada

Função:	Normal
μ :	48,38
σ :	10,15
Q^2 :	6,9



Obs.: em **azul** dados amostrais e em **vermelho** a função teórica melhor ajustada ao valores observados

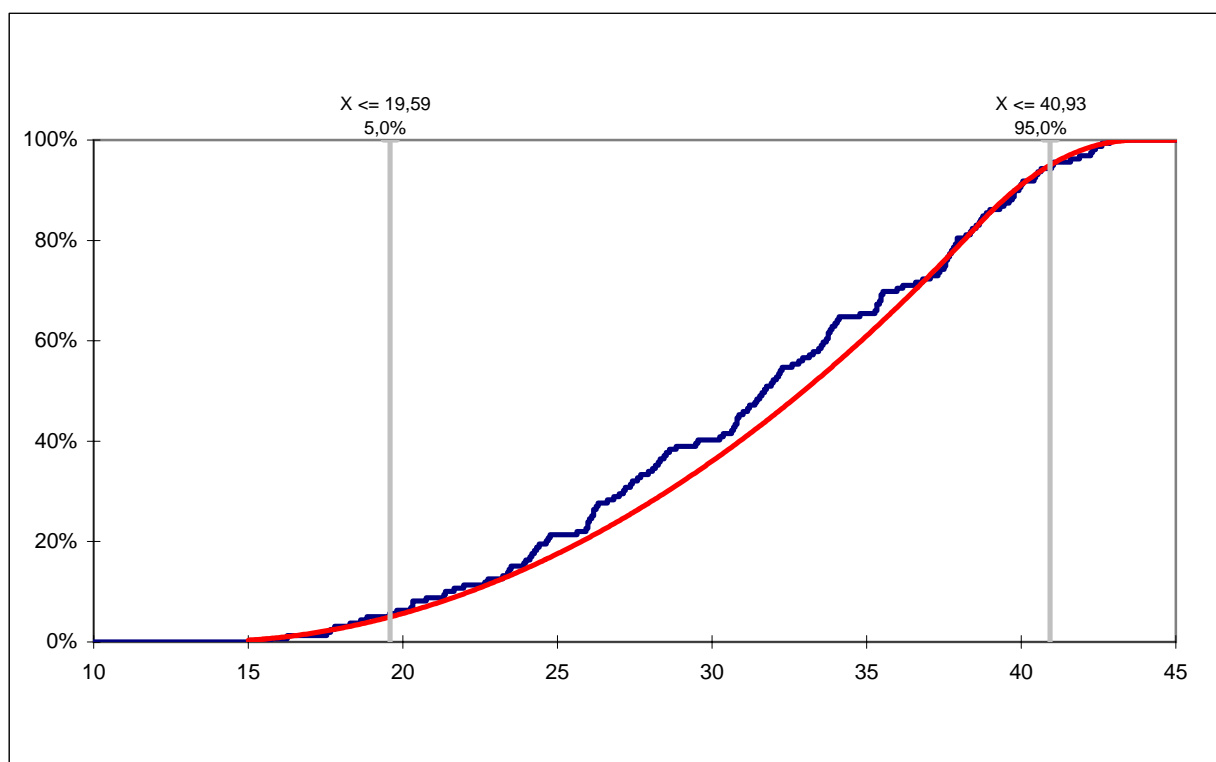
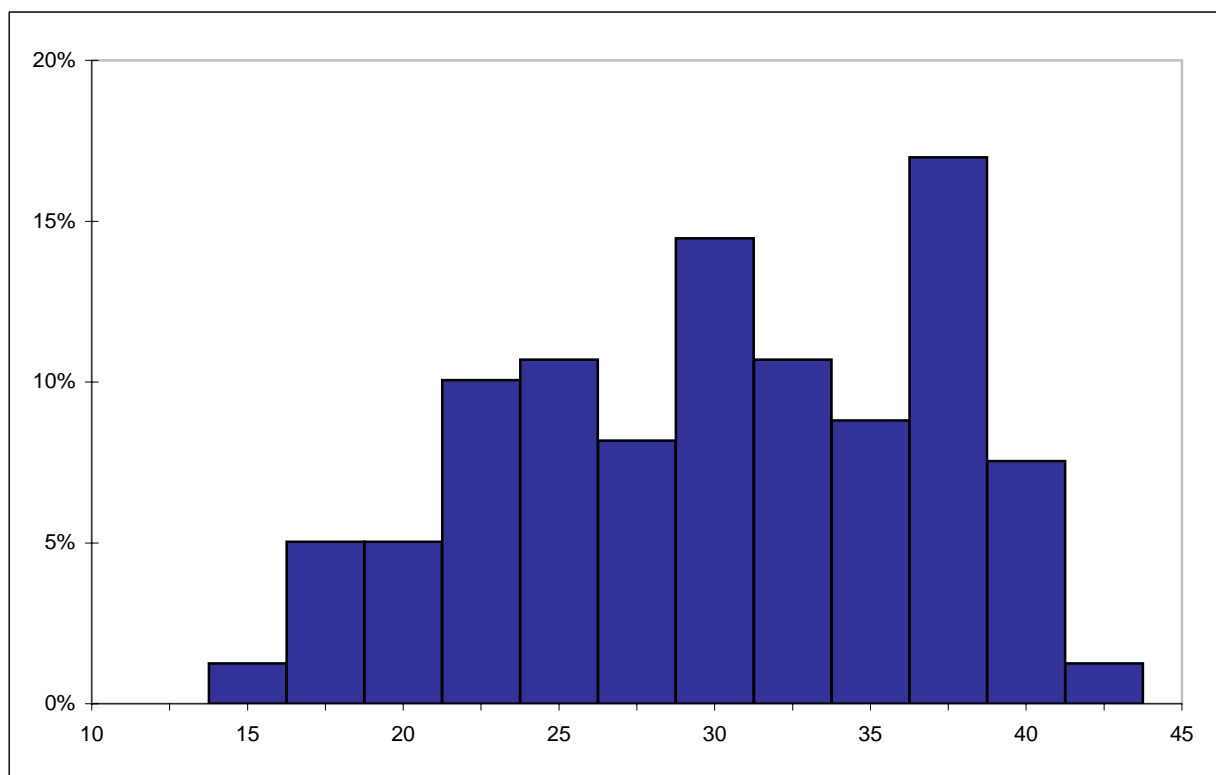
Variável: **Recuperação da Camada M - FX para CV30**

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	15,70
Máximo:	42,87
Média:	31,24
Mediana:	31,70
Desv. Padrão:	6,83
Coef. de Variação:	22%
Variância:	46,64
Assimetria:	-0,26
Curtose:	-0,86
Contagem:	159

Função Teórica Ajustada

Função:	Triangular
Mínimo:	13,41
Média:	38,64
Máximo:	43,70
Q ² :	15,96



Obs.: em **azul** dados amostrais e em **vermelho** a função teórica melhor ajustada ao valores observados

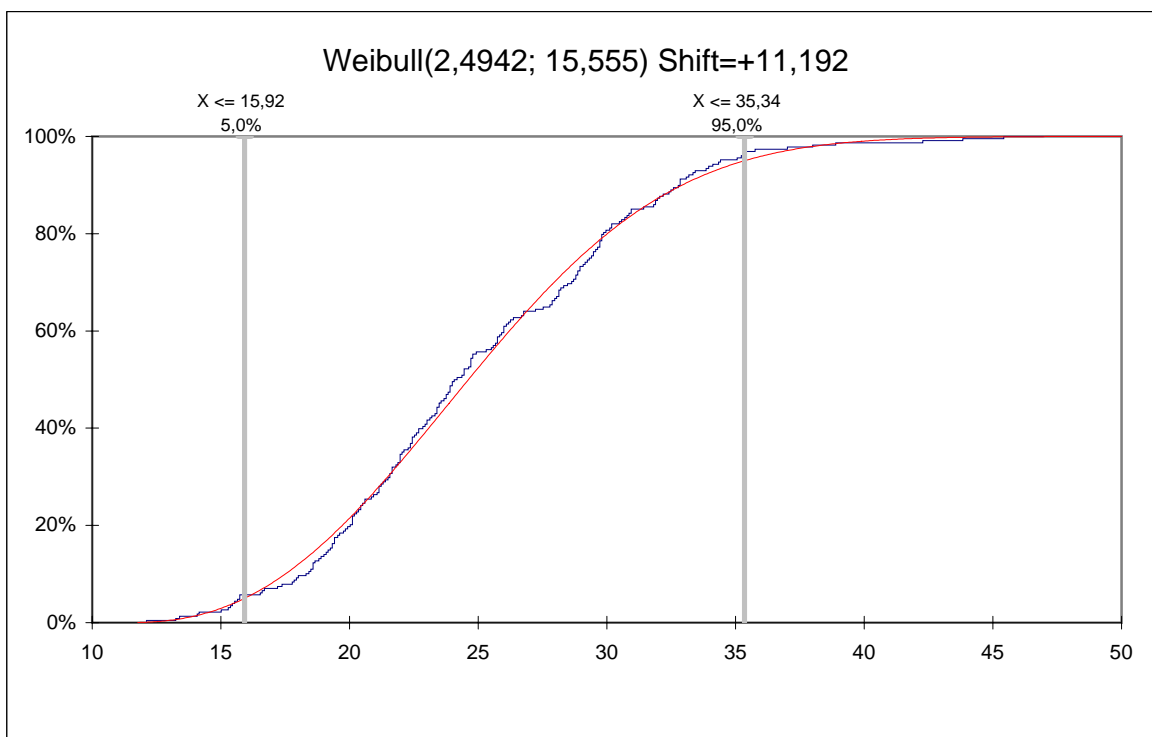
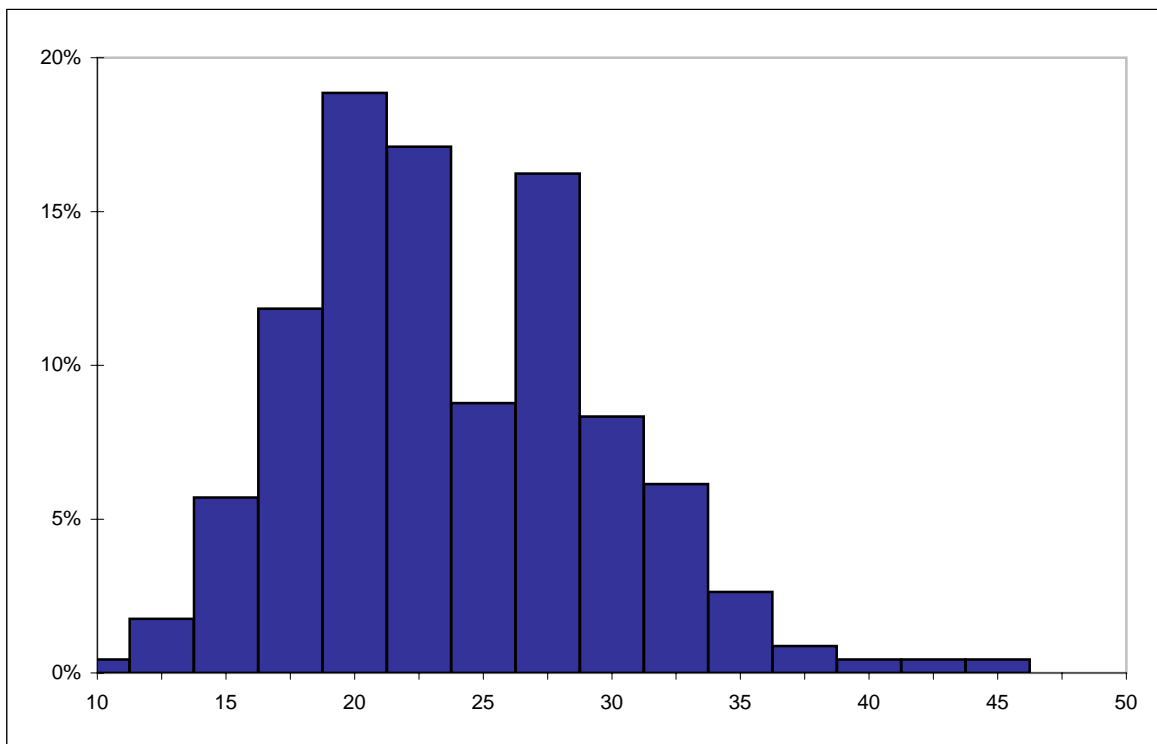
Variável: Recuperação da Relavagem de Rejeito para CV54

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	12,10
Máximo:	45,42
Média:	25,00
Mediana:	24,09
Desv. Padrão:	5,90
Coef. de Variação:	24%
Variância:	34,82
Assimetria:	0,47
Curtose:	0,24
Contagem:	228

Função Teórica Ajustada

Função:	Weibull
α :	2,49
β :	15,56
Q^2 :	18,18



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada aos valores observados

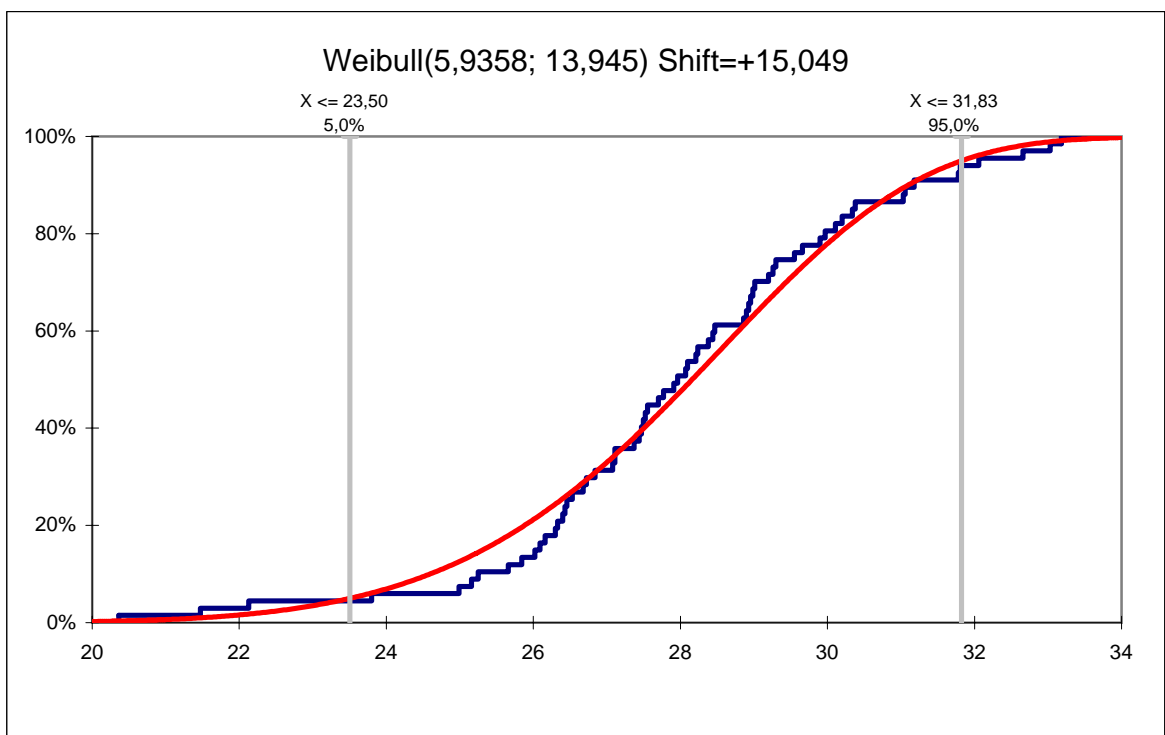
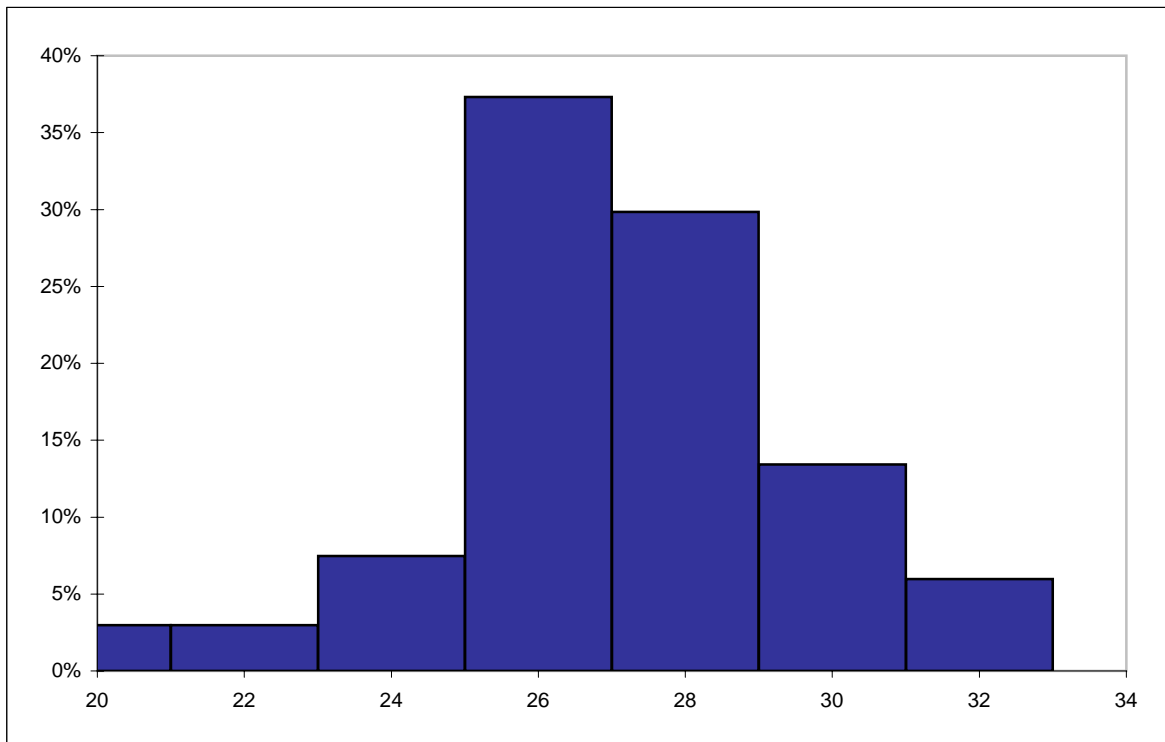
Variável: Subproduto da Relavagem de CV30 para CV20 (CV35)

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	20,36
Máximo:	33,18
Média:	28,00
Mediana:	27,96
Desv. Padrão:	2,51
Coef. de Variação:	9%
Variância:	6,28
Assimetria:	-0,43
Curtose:	1,07
Contagem:	67

Função Teórica Ajustada

Função:	Weibull
α :	5,94
β :	13,94
χ^2 :	6,88
Shift:	15,05



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada aos valores observados

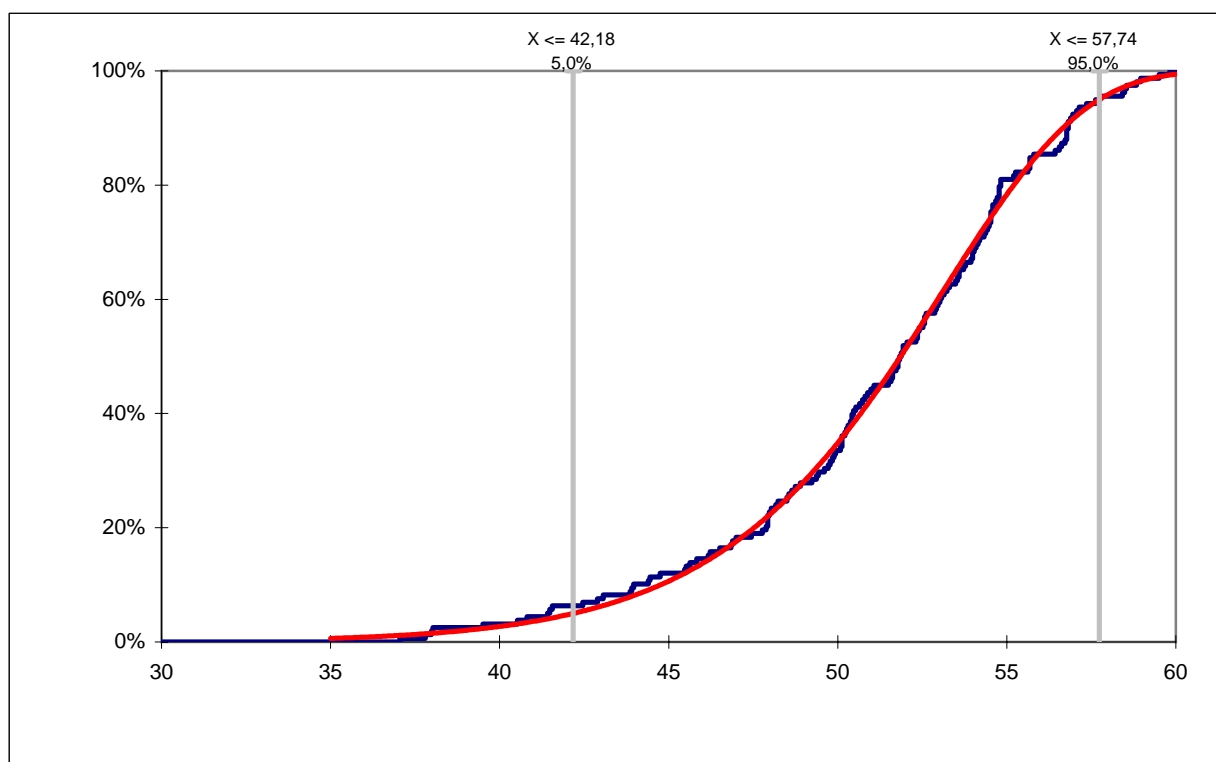
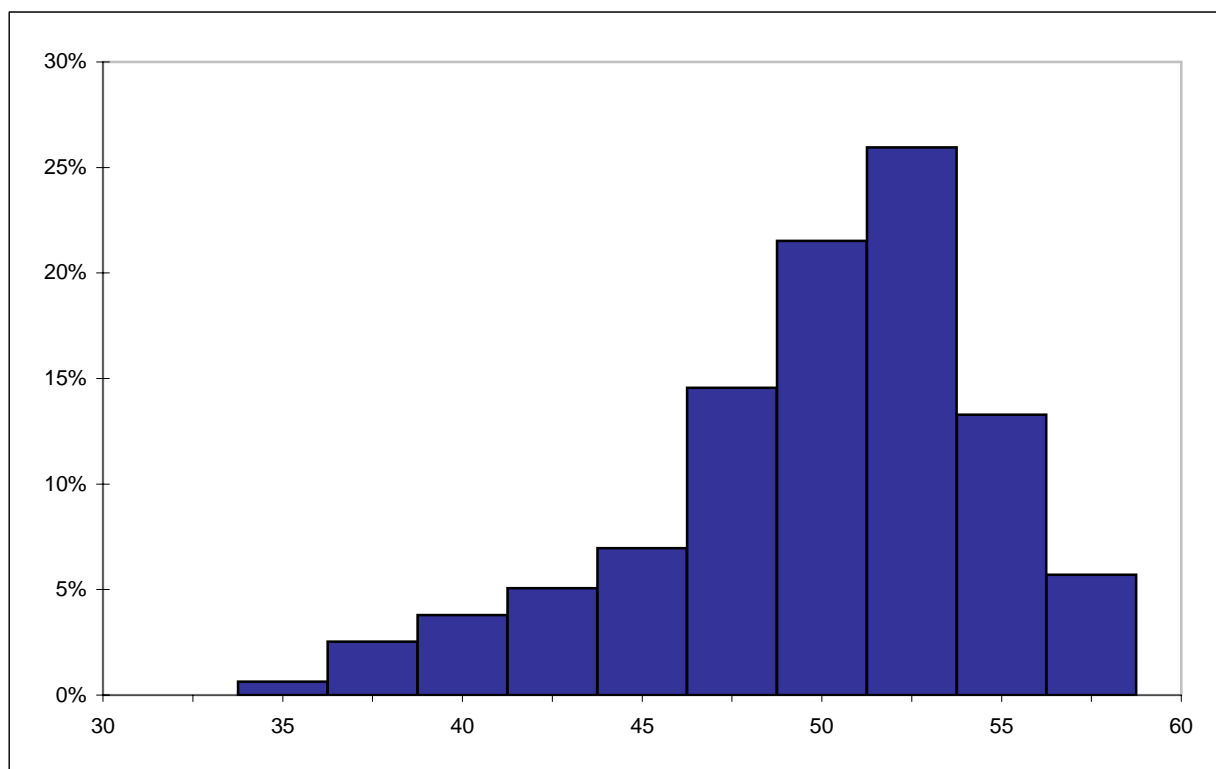
Variável: Recuperação da Camada S - BL para CV30

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	37,05
Máximo:	59,83
Média:	51,14
Mediana:	51,83
Desv. Padrão:	4,86
Coef. de Variação:	9%
Variância:	23,59
Assimetria:	-0,77
Curtose:	0,35
Contagem:	158

Função Teórica Ajustada

Função:	Weibull
α :	26,42
β :	104,64
Q^2	8,58



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada ao valores observados

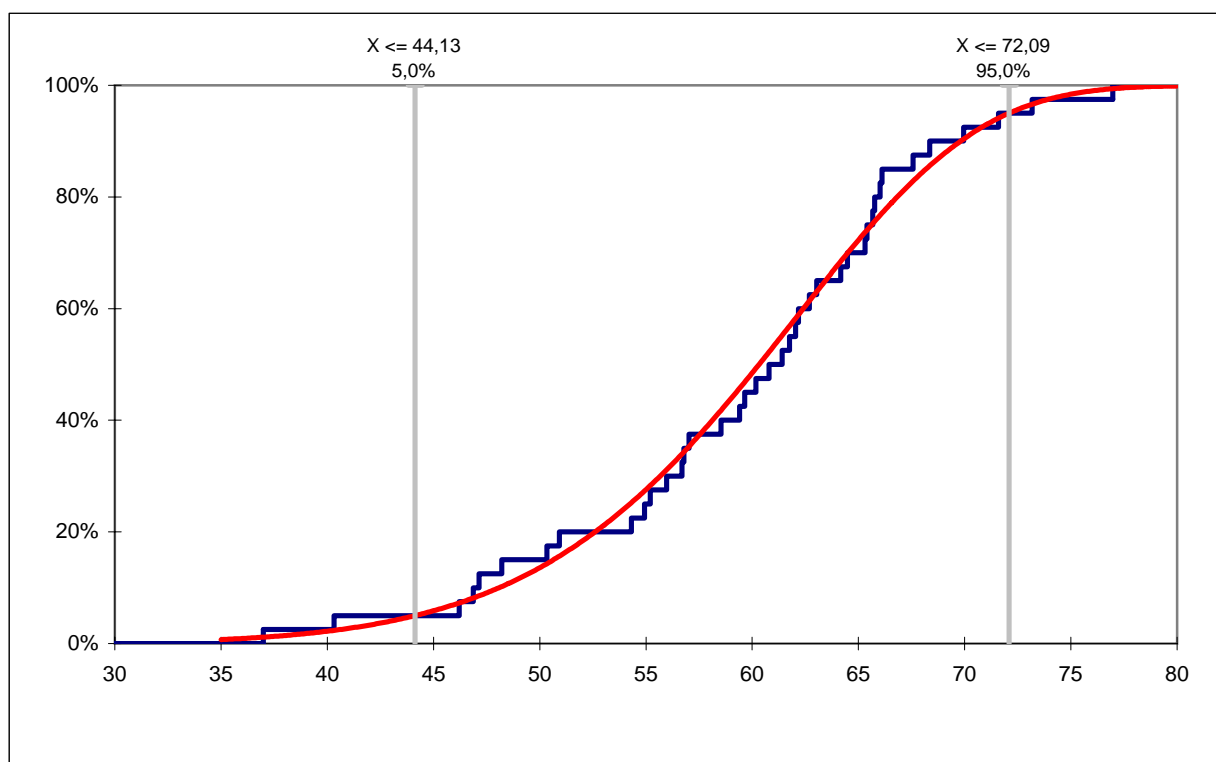
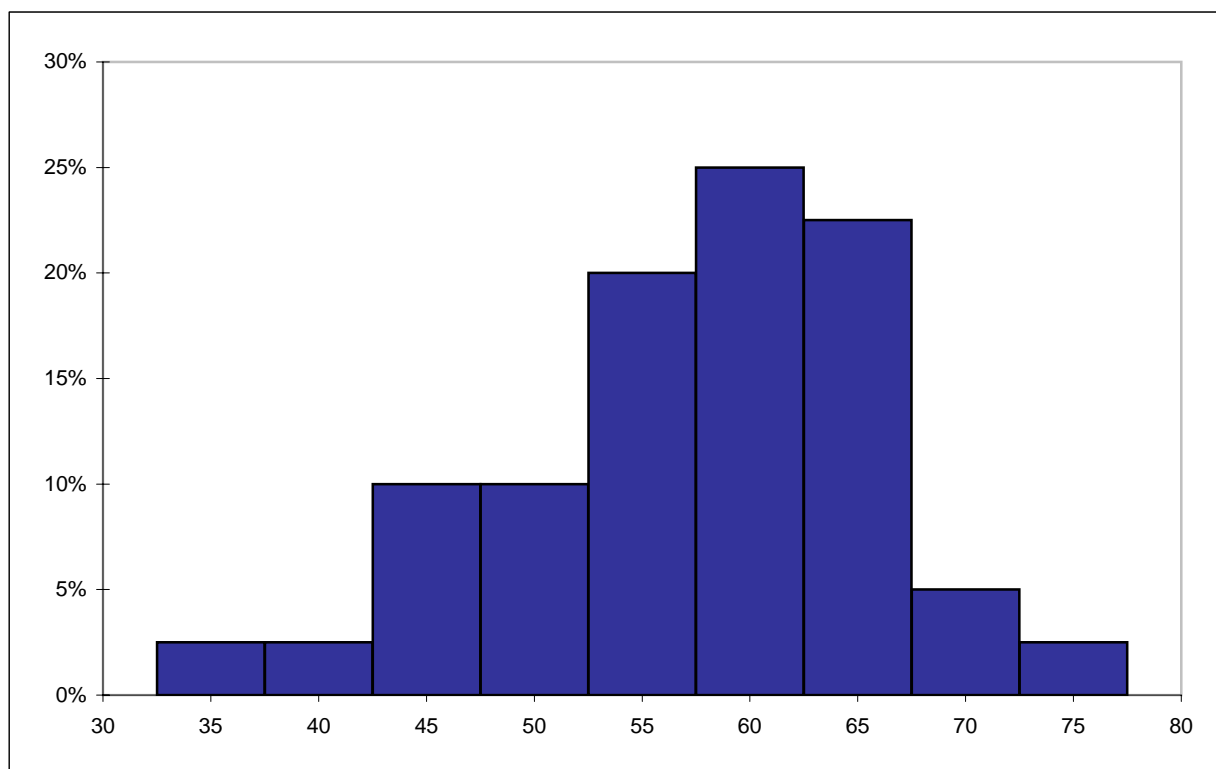
Variável: **Recuperação da Camada S - CE para CV35**

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	36,99
Máximo:	76,97
Média:	59,50
Mediana:	61,10
Desv. Padrão:	8,72
Coef. de Variação:	15%
Variância:	76,06
Assimetria:	-0,58
Curtose:	0,30
Contagem:	40

Função Teórica Ajustada

Função:	Weibull
α :	7,84
β :	60,04
Q^2	3,6



Obs.: em **azul** dados amostrais e em **vermelho** a função teórica melhor ajustada ao valores observados

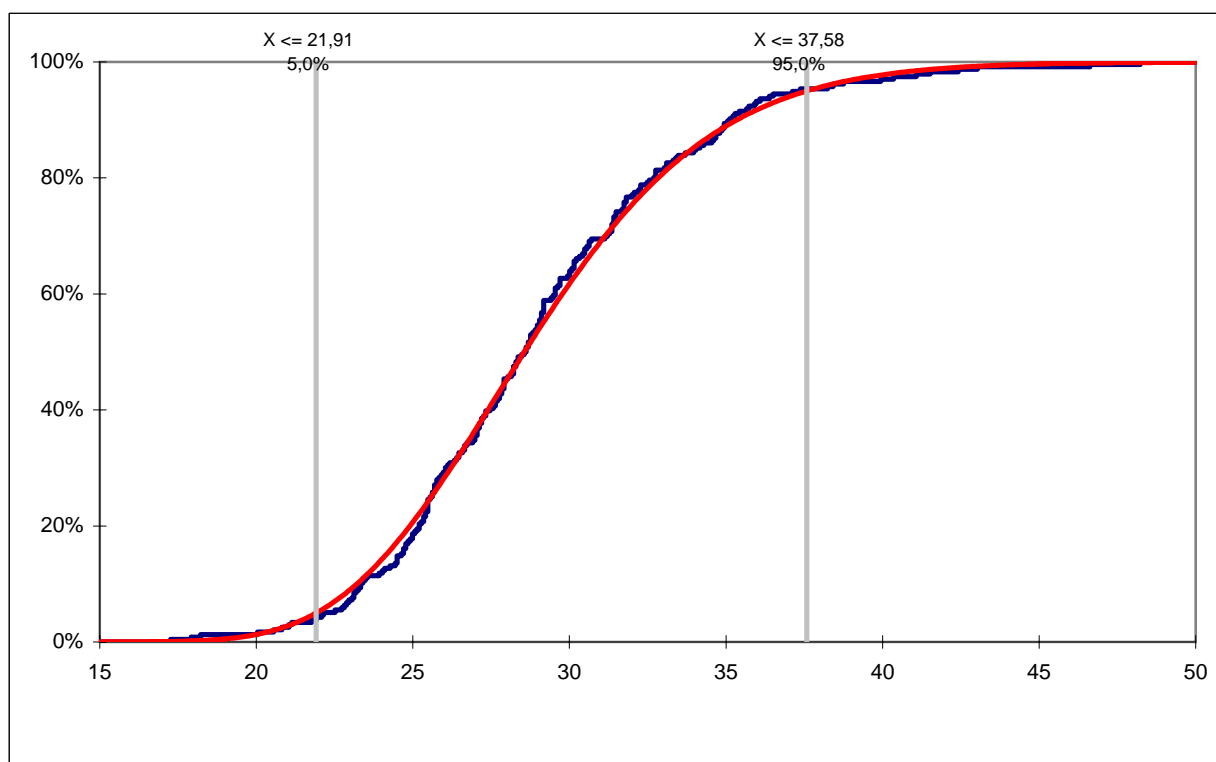
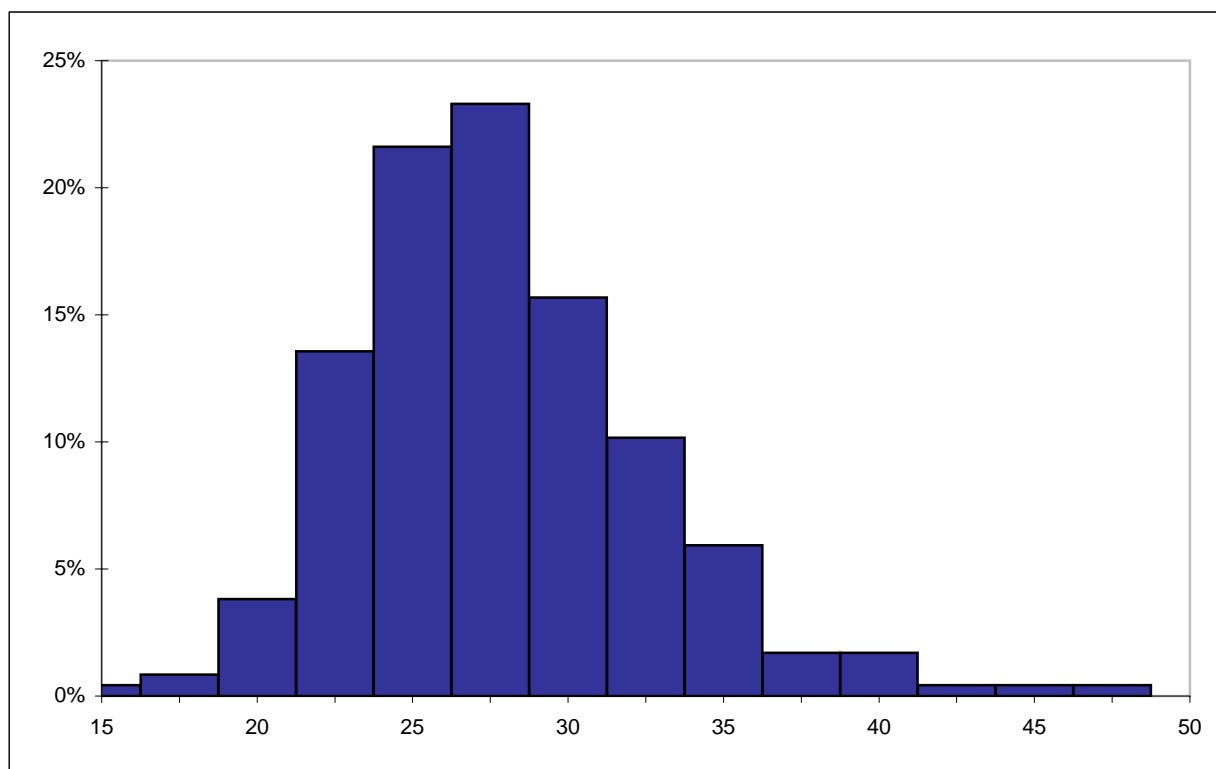
Variável: **Recuperação da Camada S - FX para CV30**

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	17,27
Máximo:	48,22
Média:	29,00
Mediana:	28,55
Desv. Padrão:	4,87
Coef. de Variação:	17%
Variância:	23,69
Assimetria:	0,76
Curtose:	1,37
Contagem:	236

Função Teórica Ajustada

Função:	Lognormal
μ :	25,65
σ :	4,81
Q^2	12,54



Obs.: em **azul** dados amostrais e em **vermelho** a função teórica melhor ajustada ao valores observados

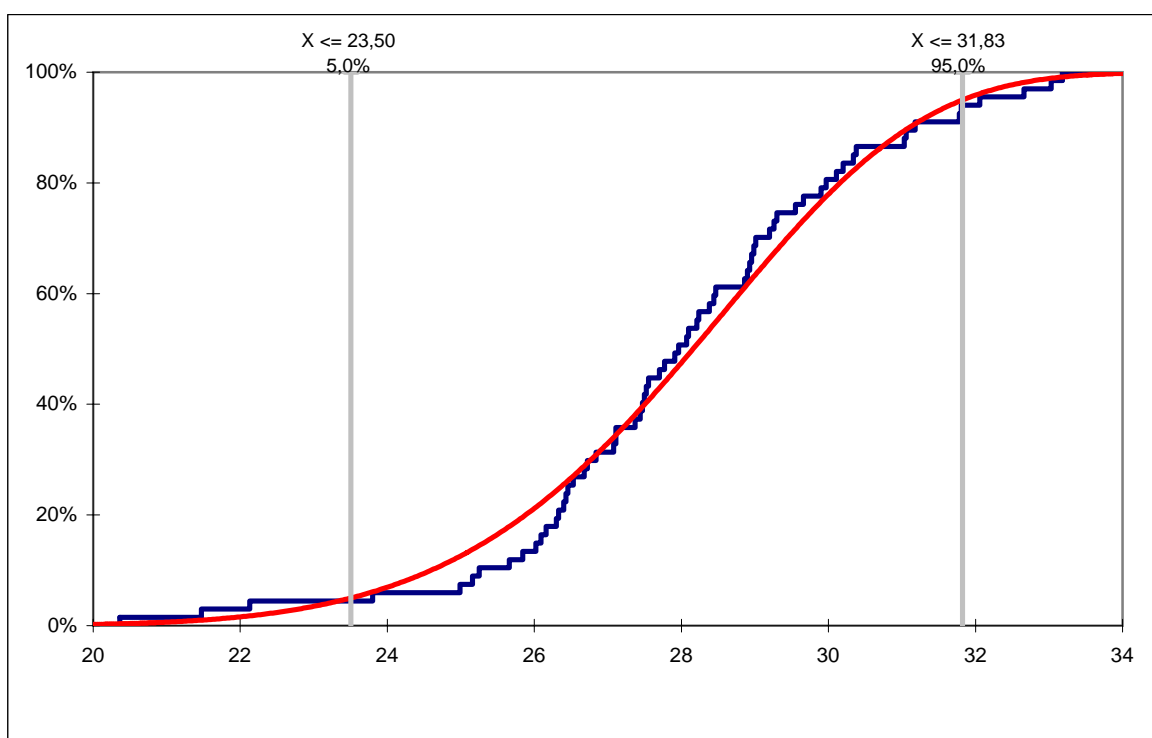
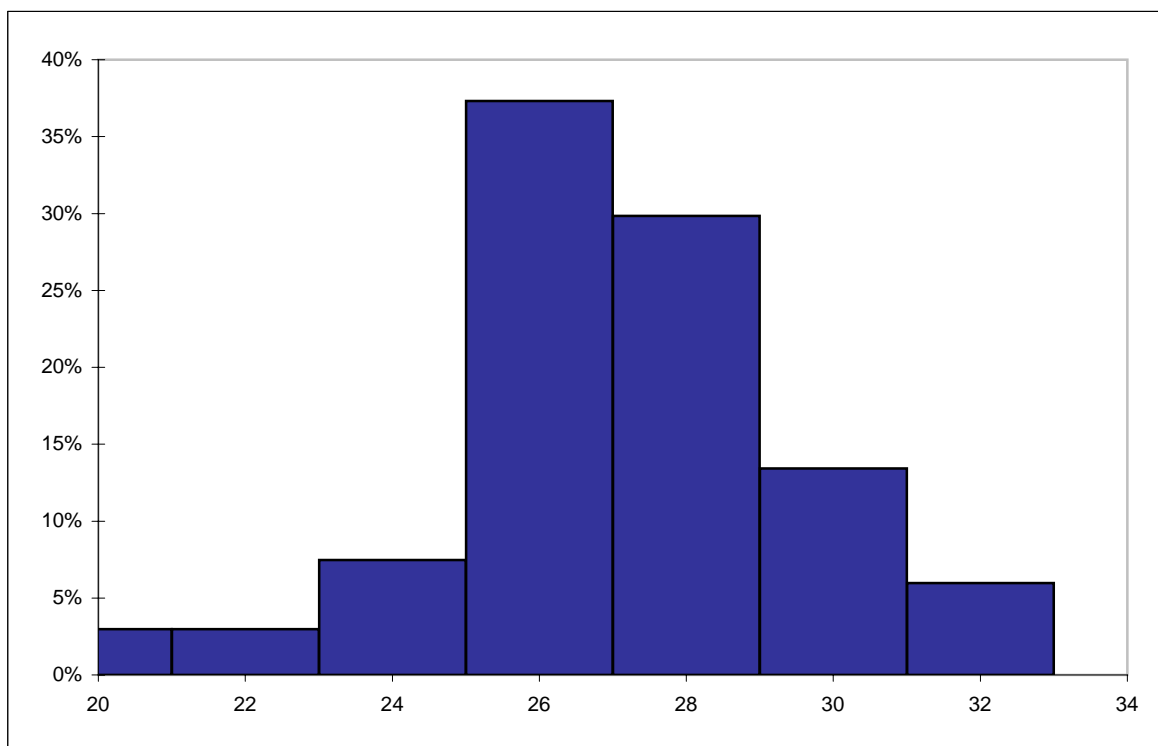
Variável: Subproduto da Relavagem de CV30 para CV20 (CV35)

Estadística dos Dados Amostrais

Mínimo:	20,36
Máximo:	33,18
Média:	28,00
Mediana:	27,96
Desv. Padrão:	2,51
Coef. de Variação:	9%
Variância:	6,28
Assimetria:	-0,43
Curtose:	1,07
Contagem:	67

Função Teórica Ajustada

Função:	Weibull
α :	5,94
β :	13,94
Q^2 :	6,88



Obs.: em azul dados amostrais e em vermelho a função teórica melhor ajustada ao valores observados