Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ÁLGEBRAS DE OPERADORES, ESPERANÇA CONDICIONAL E A ENTROPIA DE CONNES-STORMER

por

RODRIGO BISSACOT PROENÇA

Porto Alegre, julho de 2005

Dissertação submetida por *Rodrigo Bissacot Proença como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Banca Examinadora:
Dr. Artur Oscar Lopes
Dr. Alexandre Tavares Baraviera
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza (IMPA)

Data de Defesa: 22 de julho de 2005.

* Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Esta dissertação é dedicada à minha noiva Pita. :-*

Agradecimentos

Primeiramente ao meu orientador Alexandre Tavares Baraviera, não por me ensinar demonstrações quilométricas, mas por me ensinar a aprender, por me deixar escolher o assunto; por tentar transformar um estudante de matemática em um matemático; pela paciência não-mensurável que ele teve comigo e, principalmente, pela convivência, bom humor e por ser o exemplo de pessoa que ele é pra mim.

Aos meus colegas desde a graduação Eduardo Garibaldi, Joana Mohr, Bárbara Seelig Pogorelsky e Leandro Colau Merlo por tudo o que fizeram por mim durante minha formação. E, principalmente, à Cíntia Rodrigues de Araújo Peixoto pela amizade fiel e discussões sobre matemática. Aos meus amigos de mais doze anos Vladimir Lacerda e Orlando Gonçalves Costa que, juntamente com os já citados, me deram suporte emocional e financiaram muitas de minhas idas ao IMPA, o que sem dúvida mudou minha carreira.

A todos professores do departamento de matemática da UFRGS e em especial: ao Jaime Ripoll pelo curso de leitura no primeiro semestre do mestrado, ao Luis Gustavo por não nos tratar como órbitas periódicas burras e nos deixar ir adiante, mas principalmente aos dois super-heróis do departamento Leonardo Bonorino e Artur Oscar Lopes, pelos quais tenho grande admiração. Sem dúvida, o contato com pesquisadores como o professor Lopes ajuda na hora de darmos um exemplo de coragem e disposição para a pesquisa em matemática.

Agradeço ao professores Carlos Isnar do IMPA e Aldo Procacci da UFMG pelo ensino de Análise Funcional que é a ferramenta principal deste trabalho.

Agradeço à minha mãe, meus irmãos e ao meu pai pela força que me deram no mestrado e à família Nascimento por ter me ajudado a chegar nele, principalmente ao seu Alcídio por tudo que me ensinou.

Agradeço ao meu amigo e colega Marcelo Mendes Disconzi pela parceria na matemática e pela amizade sincera e ao Renne Battaglin pelos artigos que me enviou sem os quais eu não teria conseguido escrever o texto e, finalmente, à Rosane por ter sido sempre tão legal comigo.

Por fim, o mais importante, agradeço à minha noiva Pita, o amor da minha vida. Obrigado por me fazer feliz.

Resumo

Neste trabalho fazemos um breve estudo de Álgebras de Operadores, mais especificamente Álgebras-C^* e Álgebras de von Neumann. O objetivo é expor alguns resultados que seriam os análogos não-comutativos de teoremas em Teoria da Medida e Teoria Rrgódica.

Inicialmente, enunciamos alguns resultados de Análise Funcional e Teoria Espectral, muitos destes sendo demonstrados, com ênfase especial aos que dizem respeito às álgebras. Com isso, dispomos das ferramentas necessárias para falarmos de alguns tópicos da então chamada Teoria da Integração Não-Comutativa. Uma desigualdade tipo Jensen é provada e, com o teorema de Radon-Nikodym para funcionais normais positivos, construimos uma esperança condicional, provando que esta possui as mesmas propriedades da esperança condicional da Teoria das Probabilidades.

Dada a Esperança Condicional, objeto este que faz parte do cenário atual de pesquisa na área de Álgebra de Operadores e que está relacionado com resultados fundamentais tal como o Índice de Jones, passamos à definição da Entropia de Connes-Størmer.

Finalizamos o trabalho analisando esta entropia, que é a versão para as álgebras de von Neumann da entropia Kolmogorov-Sinai em Teoria Ergódica. Provamos algumas propriedades que são análogas às do conceito clássico de entropia e indicamos uma aplicação da mesma.

O texto não possui resultados originais, trata-se apenas de uma releitura de artigos usando versões mais recentes de alguns teoremas.

Abstract

In this work we do a brief study of Operator Algebras, more specificly, C^*-Algebras and von Neumann Algebras. The point is to explain some results that are the non-commutative analogous of some theorems on Measure Theory and Ergodic Theory.

First, we announce some results of Functional Analysis and Spectral Theory, much of them are proved. Our attention is in results about algebras. So we have the necessary tools to discuss some topics of non-Commutative Integration Theory. A Jensen-like inequality is proved and, with the Radon-Nikodym theorem for normal positive functionals, we construct a conditional expectation. We prove that this expectation have the same properties of conditional expectation of probability theory.

Conditional expectations are objects of the actual research in operator algebras and this concept it is connected with important results like Jones index. After this we define the Connes-Stormer entropy.

In the final part of the work we analyse this entropy, which is the von Neumann algebras' version of Kolmogorov-Sinai's entropy from Ergodic Theory. We also prove some properties that are analogous of the classical concept of entropy and we mention an application.

The text does not have original results, it is just a review of some articles using younger versions of some theorems.

Introdução

Em Teoria Ergódica, para resolver o problema da conjugação, ou equivalência, o conceito de entropia introduzido por Kolmogorov e Sinai foi fundamental. Duas transformações mensuráveis μ-invariantes $T_1, T_2 : X \to X$ de um espaço de probabilidade (X, β, μ) são equivalentes quando existe uma bijeção mensurável (com inversa mensurável) $\varphi : X \to X$, μ-invariante, tal que $\varphi T_1 = T_2 \varphi$. Todas as condições são μ-qtp ver [44] ou [8] para mais detalhes.

Decidir se tal φ existe, em geral não é tarefa fácil e, uma alternativa é tentar definir invariantes numéricos, ou seja, associar um número a cada transformação de forma que transformações associadas a números iguais ou distintos, sejam equivalentes ou não, respectivamente. De fato, a entropia definida por Kolmogorov desenvolvida juntamente com Sinai não é um invariante completo em geral. Existem transformações de mesma entropia que não são equivalentes. No entanto, para determinadas classes de transformações como os shifts de Bernoulli, as entropias coincidem se, e somente se, as transformações são equivalentes.

O objetivo deste trabalho é fornecer uma breve introdução ao estudo das álgebras de von Neumann expondo os objetos desta teoria que aparecem na definição da entropia de Connes-Størmer, uma das versões para Álgebra de Operadores da entropia de Kolmogorov-Sinai de Teoria Ergódica.

De fato, no caso comutativo, a entropia mostrou-se um invariante muito mais forte que o espectro, por exemplo, resolvendo o problema da não conjugação dos shifts $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, para os quais o espectro não nos dizia nada pois eram iguais. No caso não-comutativo a primeira aplicação também é mostrar que os n-shifts, agora definidos no contexto da álgebras de von Neumann, não são conjugados.

O texto se divide em três partes. No primeiro capítulo são enunciados alguns resultados de análise Funcional, álgebras-C^* e álgebras de von Neumann que serão usados posteriormente. Alguns deles são demonstrados, mais precisamente os que são específicos das álgebras.

A maioria dos resultados que, em geral, fazem parte dos cursos de Análise Funcional e Teoria Espectral ministrados no Brasil, são enunciados sem demonstração, sendo citadas as referências onde podem ser encontradas as provas.

O segundo capítulo é formado por alguns resultados da então chamada Teoria da Integração não-Comutativa. Provamos uma desigualdade tipo Jensen nesse contexto. E usamos o teorema de Radon-Nikodym para funcionais positivos normais com o objetivo de provar a existência e a unicidade da esperança condicional τ-invariante de uma álgebra de von Neumann finita $\mathfrak{M}$, de traço fiel normal finito τ, sobre uma sub-álgebra $\mathfrak{N}$.

Na primeira sessão do terceiro capítulo citamos a entropia de Kolmogorov-Sinai como na maioria dos textos sobre o assunto, iniciando com a entropia de uma partição mensurável, definida primeiramente por Shanonn, até chegarmos na definição da entropia de uma transformação mensurável que preserva a medida dada. Logo a seguir definimos a Entropia de Connes-Størmer que, como veremos, é uma generalização da entropia de Kolmogorov-Sinai. Ainda neste capítulo são feitas analogias com o conceito clássico de entropia. Provamos duas propriedades desta entropia, comuns àquelas da definição de entropia de uma partição mensurável em um espaço de probabilidade. De fato, o caso comutativo é usado para obtermos o caso não-comutativo.

Por fim, analisamos o que foi feito a respeito da entropia de Connes-Størmer, outras definições de entropia e alguns trabalhos que relacionam estas com outros conceitos importantes no contexto de Álgebras de Operadores.

É bom ressaltar que diferentemente de muitas dissertações de matemática, não vamos nos deter na demonstração do teorema principal, que aqui seria exibir a demonstração da versão não-comutativa do teorema de Kolmogorov-Sinai feita por Connes e Størmer, na prova de todas as propriedades da nova entropia ou explicitar o cálculo da entropia dos shifts. Nos concentraremos nos pré-requisitos, descrevendo os objetos que aparecem na definição.

O texto tem uma grande quantidade de referências específicas para as demonstrações, de modo que os interessados possam encontrá-las mais rapidamente. Em outras palavras, este trabalho é destinado ao leigos na teoria de Álgebras de Operadores.

Conteúdo

Capítulo 1

Análise Funcional, Álgebras-C^* e Álgebras de von Neumann

Definição 1.1. *Uma **álgebra** sobre um corpo C é um espaço vetorial sobre C, equipado com uma operação bilinear e associativa*

$. : A \times A \to A$, $(a, b) \to a.b = ab$

*Esta operação será dita a **multiplicação** e o elemento **ab** será chamado de produto de **a** por **b**.*

Observação 1.1. *A menos que se diga o contrário, toda a álgebra citada neste texto será uma álgebra sobre o corpo dos complexos denotado por $\mathbb{C}$.*

Definição 1.2. *Uma álgebra provida de uma norma $\|.\|$ que satisfaz $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, será dita uma **álgebra normada**. Se com esta norma a álgebra for um espaço vetorial completo, ou seja, um espaço de Banach, então ela será chamada de **álgebra de Banach**.*

Definição 1.3. *Uma **álgebra-**C^* é uma álgebra de Banach equipada com uma involução $(*)$ que satisfaz:*

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$
2. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ $(\forall\ \lambda \in \mathbb{C})$
3. $(ab)^* = b^* a^*$
4. $(a^*)^* = a$
5. $\|a^*\| = \|a\|$
6. $\|a^* a\| = \|a\|^2$

Observação 1.2. *Da última igualdade em particular tiramos que se $a^* a = 0$, então $a = 0$.*

Exemplo 1.1. *Seja H um espaço de Hilbert. O conjunto dos operadores limitados $B(H)$, munido das operações usuais é uma álgebra-C^*, aqui a involução é a operação de tomar o adjunto do operador.*

Exemplo 1.2. *Dizemos que uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se anula no infinito quando para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um compacto* $K \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| < \varepsilon$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \backslash K$.
O espaço vetorial complexo de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *que se anulam no infinito com a norma* $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ *é uma álgebra-*C^**, onde a involução é a conjugação complexa tomada ponto a ponto.*

Definição 1.4. *Um subconjunto de uma álgebra-*C^* $\mathfrak{U}$ *que é ele próprio uma álgebra-*C^**, ou seja, que é sub-espaço vetorial fechado(em relação a topologia da norma) de* $\mathfrak{U}$ *e algebricamente fechado em relação ao produto e à involução é dito uma **sub-álgebra-***C^*.

Definição 1.5. *Um elemento* $a \in \mathfrak{U}$ *será dito **auto-adjunto** quando* $a = a^*$.

Exemplo 1.3. *O subconjunto dos operadores auto-adjuntos é uma sub-álgebra-*C^* *de* $B(H)$.

Definição 1.6. *Uma álgebra-*C^* *é dita **unitária** quando possui unidade, ou seja, quando existe um elemento e na álgebra-*C^* *tal que* $xe = ex = x$*, para todo elemento* x *da álgebra.*

No exemplo 1.2 temos uma álgebra-C^* que não possui unidade. Existem maneiras de introduzirmos uma unidade numa álgebra-C^*, por exemplo, identificando-a com uma sub-álgebra-C^* de outra unitária. Para mais detalhes ver [35].

No que se segue, muitas demonstrações são feitas para álgebras-C^* no abstrato, mas estamos indo em direção às álgebras de von Neumann, que são sub-álgebras-C^* de $B(H)$ que contém o operador identidade $\mathbf{1}$. Desta forma, assumiremos daqui para frente que nossas álgebras-C^* são sub-álgebras-C^* de $B(H)$. Isto pode parecer um tanto restritivo, no entanto, por um resultado chamado **construção GNS**, cujo nome cita as iniciais dos matemáticos Gelfand, Naimark e Segal, é sabido que toda álgebra-C^* pode ser identificada com uma sub-álgebra-C^* de $B(H)$, para algum espaço de Hilbert H. Mais precisamente temos:

Definição 1.7. *Uma **representação** de uma álgebra-*C^* $\mathfrak{U}$ *em um espaço de Hilbert* H *é um ***-homomorfismo*** $\pi : \mathfrak{U} \to B(H)$*, isto é,*
i) π *é linear.*
ii) $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$
iii) $\pi(a^*) = \pi(a)^*$

Teorema 1.1. *Se* $\mathfrak{U}$ *é uma álgebra-*C^**, então existe uma representação isométrica* $\pi : \mathfrak{U} \to B(H)$ *em um espaço de Hilbert* H.

Prova: [35] teorema 11.5 pg 34.
Notação: A partir daqui H sempre denotará um espaço de Hilbert sobre o corpo dos complexos e, a menos que diga o contrário, $\mathfrak{U}$ será uma sub-álgebra-C^* de $B(H)$ que contém o operador identidade $\mathbf{1}$.

1.1 Topologias de B(H)

Dependendo do espaço topológico, precisamos refinar nossa noção de convergência e não é mais suficiente considerar apenas seqüências, ou seja, subconjuntos do espaço topológico indexados pelos naturais. Pelo nível elementar deste trabalho talvez isto não fique claro, o leitor pode consultar por exemplo [32], para uma melhor abordagem sobre este ponto.

Definição 1.8. *Seja X um conjunto. Chamaremos de* ***net*** *um subconjunto de X indexado por um conjunto de índices I, tal que I é parcialmente ordenado e, dados quaisquer i_1 e i_2 em I, existe $i_3 \in I$ tal que $i_1 \leq i_3$ e $i_2 \leq i_3$.*

Notação: $(x_i)_{i\in I}$

Definição 1.9. *Seja (X, β) um espaço topológico e, $(x_i)_{i\in I}$ um net em X. Diremos que $(x_i)_{i\in I}$ converge a $x_0 \in X$ quando para qualquer aberto U de β tal que $x_0 \in U$, exista $i_0 \in I$ tal que $x_i \in U$, $\forall\ i \geq i_0$.*

Notação: $x_i \to x_0$ ou $\lim\limits_i x_i = x_0$.

Além da topologia da norma, no estudo de Álgebra de Operadores muitas outras topologias são usadas, definiremos duas destas agora:

Definição 1.10. *A topologia* ***fraca*** *em $B(H)$ é a topologia localmente convexa gerada pela família de semi-normas $\{p_{h,\xi} : h, \xi \in H\}$ onde $p_{h,\xi}(a) = |\langle h, a\xi\rangle|$, $\forall\ a \in B(H)$.*

Uma base de vizinhanças desta topologia é formada pelos conjuntos da forma,

$$V(a, h_1, ..., h_n, \xi_1, ..., \xi_n, \varepsilon) = \{b \in B(H) : |\langle h_i, (b-a)\xi_i\rangle| < \varepsilon, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

Definição 1.11. *A topologia* ***forte*** *em $B(H)$ é a topologia localmente convexa gerada pela família de semi-normas $\{p_h : h \in H\}$ onde $p_h(a) = \|a(h)\|$,$\forall\ a \in B(H)$.*

Aqui uma base de vizinhanças é dada pelos conjuntos,

$$V(a, h_1, ..., h_n, \varepsilon) = \{b \in B(H) : \|(b-a)h_i\| < \varepsilon, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Na bibliografia estas topologias são encontradas, respectivamente, com os nomes de *weak operator topology* e *strong operator topology*. Inspirado nisso, quando um net de operadores $(a_i)_{i\in I}$ convergir para um operador a na topologia fraca escreveremos $w - \lim\limits_i a_i = a$; para a topologia forte a notação será $s - \lim\limits_i a_i = a$.

Das definições segue que,

$$\begin{aligned} i)\ w - \lim_i a_i &= a \quad \Leftrightarrow \lim_i \langle h, a_i(\xi)\rangle = \langle h, a(\xi)\rangle \quad \forall\ h, \xi \in H \\ ii)\ s - \lim_i a_i &= a \quad \Leftrightarrow \lim_i \|a_i(h) - a(h)\| = 0 \qquad \forall\ h \in H \end{aligned}$$

Seja X um conjunto. Dizemos que uma topologia β em X é **mais fraca** que outra β' quando todo aberto de β também for aberto de β'. Isto significa que β' contém no mínimo todos os abertos de β, ou seja, mais fraca é sinônimo de menos abertos.

Já como sugerem os nomes, a topologia fraca de $B(H)$ é mais fraca do que a topologia forte, e esta é mais fraca do que a topologia da norma. Ao invés de dizermos que β é mais fraca do que β', poderíamos dizer que β' é **mais forte** que β. A nomenclatura também pode ser associada ao fato de que a convergência de um net em uma topologia mais forte obriga a convergência na outra topologia. Em nosso caso, se $(a_i)_{i\in I}$ é um net em $B(H)$, então:

$$\lim_i \|a_i - a\|_{B(H)} = 0 \Rightarrow \; s - \lim_i a_i = \; a \; \Rightarrow \; w - \lim_i a_i = \; a$$

Assim, dado um conjunto $R \subseteq B(H)$ temos as seguintes inclusões entre os fechos:

$$\overline{R}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{R}^{s} \subseteq \overline{R}^{w}$$

onde $\overline{R}^{\|\cdot\|}$, $\overline{R}^{s}$ e $\overline{R}^{w}$ denotam, respectivamente, os fechos de R em relação as topologias da norma, forte e fraca em B(H).

Lema 1.1. *Seja $(a_i)_{i\in I} \subset B(H)$ com $w - \lim_i a_i = \; a$, então*

$$w - \lim_i a_i b = \; ab \qquad e \qquad w - \lim_i b a_i = \; ba, \; \forall \; b \in B(H)$$

Prova :

$$\begin{aligned}
w - \lim_i a_i = a \Leftrightarrow \quad & \lim_i \langle h, a_i(\xi)\rangle = \langle h, a(\xi)\rangle \quad \forall \; h, \xi \in H \\
\Rightarrow \quad & \lim_i \langle h, a_i(b\eta)\rangle = \langle h, a(b\eta)\rangle \quad \forall \; h, \eta \in H \\
\Rightarrow \quad & \lim_i \langle h, (a_i b)\eta\rangle = \langle h, (ab)\eta\rangle \quad \forall \; h, \eta \in H \\
\Leftrightarrow \quad & w - \lim_i a_i b = ab
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
w - \lim_i a_i = a \Leftrightarrow \quad & \lim_i \langle h, a_i(\xi)\rangle = \langle h, a(\xi)\rangle \quad \forall \; h, \xi \in H \\
\Rightarrow \quad & \lim_i \langle b^*(\eta), a_i(\xi)\rangle = \langle b^*(\eta), a(\xi)\rangle \quad \forall \; \eta, \xi \in H \\
\Rightarrow \quad & \lim_i \langle \eta, (b a_i)(\xi)\rangle = \langle \eta, (ba)(\xi)\rangle \quad \forall \; \eta, \xi \in H \\
\Leftrightarrow \quad & w - \lim_i b a_i = ba \qquad \square
\end{aligned}$$

Definição 1.12. *Seja R um subconjunto de $B(H)$, denotaremos por R' o conjunto de todos os operadores de $B(H)$ que comutam com cada operador de R, ou seja,*

$$R' = \{a \in B(H) : a.b = b.a, \forall \; b \in \mathrm{R}\}$$

.

Observação 1.3. *$R \subseteq R^{''}$. De fato,*

$$c \in R \Rightarrow cb = bc, \ \forall \ b \in R^{'} \Rightarrow c \in R^{''}$$

Este mesmo raciocínio prova as seguintes inclusões:

$$R \subseteq R^{''} \subseteq R^{(iv)} \subseteq ... \subseteq R^{(2n)} \subseteq ... \tag{1.1}$$
$$R' \subseteq R^{'''} \subseteq R^{(v)} \subseteq ... \subseteq R^{(2n+1)} \subseteq ... \tag{1.2}$$

Definição 1.13. *Dizemos que um subconjunto $R \subset B(H)$ é* ***auto-adjunto****, denotando $R^* = R$, quando ele for invariante pela involução, em outras palavras, se $a \in R$ então $a^* \in R$.*

Proposição 1.1. *Dada uma álgebra-C^* $\mathfrak{U} \subseteq B(H)$, $\mathfrak{U}^{'}$ é uma álgebra-C^* fracamente fechada.*

Prova : É evidente que $\mathfrak{U}^{'}$ é subespaço vetorial auto-adjunto de $B(H)$ que contém o operador $\mathbf{1}$. Seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{U}^{'}$ tal que $\lim_n \|b_n - b\|_{B(H)} = 0$. Denotando $\|.\|_{B(H)}$ simplesmente por $\|.\|$, a desigualdade

$$\|b_n a - ba\| = \|(b_n - b)a\| \leq \|b_n - b\|\|a\|$$

garante que $\lim_n b_n a = ba$ (topologia da norma de $B(H)$) e, outra desigualdade totalmente análoga, nos dá $\lim_n ab_n = ab$, para todo $a \in B(H)$. Sendo assim, para qualquer $a \in \mathfrak{U}$, como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{U}^{'}$, segue que $ab = \lim_n ab_n = \lim_n b_n a = ba$. Isso prova que é um espaço de Banach. Para concluirmos que é uma álgebra-C^* basta verificar que $\mathfrak{U}^{'}$ é algebricamente fechado em relação ao produto. De fato, dados b e c em $\mathfrak{U}^{'}$ para qualquer $a \in \mathfrak{U}$ temos que $ab = ba$ e $ac = ca$, então:

$$a(bc) = (ab)c = (ba)c = b(ac) = b(ca) = (bc)a$$

A prova de que $\mathfrak{U}^{'}$ é fracamente fechado segue do lema 1.1 pois, para um net $(b_i)_{i\in I} \subset \mathfrak{U}^{'}$ tal que $w - \lim_i b_i = \ b$ o lema assegura que:

$$ab = w - \lim_i ab_i = w - \lim_i b_i a = ba \quad \ \forall \ a \in \mathfrak{U}$$

provando que $b \in \mathfrak{U}^{'}$, ou seja, $\overline{\mathfrak{U}^{'}}^{w} = \mathfrak{U}^{'}$, concluindo a demonstração. $\Box$

De fato $\mathfrak{U}^{'}$ é fechada em várias outras topologias localmente convexas, inclusive na topologia forte. Ver [6] pg 71, por exemplo.

A proposição 1.1 prova, em particular, que se $\mathfrak{U}$ é uma álgebra-C^* então $\mathfrak{U}^{''} = (\mathfrak{U}^{'})^{'}$ também o é, e esta última tem a propriedade adicional de ser fracamente fechada. Da mesma forma $\mathfrak{U}^{'''}$, $\mathfrak{U}^{(iv)}$, $\mathfrak{U}^{(v)}$,... são álgebras-C^* fracamente fechadas. Agora podemos definir um dos principais objetos deste trabalho, lembrando sempre que nossas álgebras-C^* continuam sendo sub-álgebras-C^* de $B(H)$ contendo o operador identidade $\mathbf{1}$.

Definição 1.14. *Uma álgebra-C^* $\mathfrak{M} \subseteq B(H)$ é dita uma* ***álgebra de von Neumann*** *quando $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}^s$, isto é, quando for fechada na topologia forte de $B(H)$.*

Exemplo 1.4. *$B(H)$.*

Exemplo 1.5. *Qualquer sub-álgebra-C^* de dimensão finita em $B(H)$ que contenha o operador **1**. É bom lembrar que não estamos assumindo que $dim(H) < \infty$.*

Exemplo 1.6. *Se (X, μ) é um espaço de probabilidade então $L^\infty(X, \mu) \subseteq B(L^2(X, \mu))$ é uma álgebra de von Neumann. Aqui, a ação do $L^\infty(X, \mu)$ sobre $L^2(X, \mu)$ se dá através da multiplicação ponto a ponto. É importante notar que neste exemplo a álgebra é comutativa.*

Agora estamos prontos para enunciar o principal teorema da Álgebra de Operadores, este foi provado por von Neumann em 1929.

Teorema 1.2. (Duplo Comutante)
Dada $\mathfrak{M} \subseteq B(H)$ é uma álgebra-C^* então $\overline{\mathfrak{M}}^s = \mathfrak{M}''$.

Prova : [23] pg 54.

O corolário a seguir nos dá outras possibilidades para a definição de álgebra de von Neumann.

Corolário 1.1. *São equivalentes:*
(i) $\mathfrak{M}$ é uma álgebra de von Neumann.
(ii) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$
(iii) $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}^w$

Prova : O teorema 1.2 garante que (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Agora, como $\overline{\mathfrak{M}}^s \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^w$ e $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}''$, se $\mathfrak{M}$ é uma álgebra de von Neumann, temos:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'' = \overline{\mathfrak{M}}^s \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^w \Rightarrow \\
&\overline{\mathfrak{M}}^w \subseteq \overline{\mathfrak{M}''}^w = \overline{\overline{\mathfrak{M}}^s}^w \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^w \Rightarrow \\
&\overline{\mathfrak{M}''}^w = \overline{\mathfrak{M}}^w \Rightarrow \mathfrak{M}'' = \overline{\mathfrak{M}}^w
\end{aligned}$$

Onde a última implicação é conseqüência da proposição 1.1. Reciprocamente, segue que se $\overline{\mathfrak{M}}^w = \mathfrak{M}$, então das inclusões $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^s \subseteq \overline{\mathfrak{M}}^w$ segue que (iii) implica (i). $\square$

Corolário 1.2. *Se $\mathfrak{M}$ é uma álgebra-C^* então $\mathfrak{M}'$ é uma álgebra de von Neumann.*

Este último corolário implica que as contenções 1.1 e 1.2 para o caso de R ser uma álgebra de von Neumann transformam-se todas em igualdades, ou seja, se $\mathfrak{M}$ é uma álgebra de von Neumann então:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}^{(iv)} = ... = \mathfrak{M}^{(2n)} = ... \\
&\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}''' = \mathfrak{M}^{(v)} = ... = \mathfrak{M}^{(2n+1)} = ...
\end{aligned}$$

Definição 1.15. *O* ***centro*** *de uma álgebra de von Neumann* $\mathfrak{M}$ *é o conjunto:*

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$$

Definição 1.16. *Quando o centro de uma álgebra de von Neumann for trivial, isto é,* $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}) = \mathbb{C}\boldsymbol{1}$*, então a álgebra será dita um* ***fator****.*

Exemplo 1.7. *B(H) é um fator.*

Prova : É uma conseqüência de um resultado geral de álgebra chamado **Lema de Schur**. Uma prova que é uma versão particular deste lema para operadores limitados em espaços de Hilbert pode ser encontrada na página 355 de [24].

Falaremos mais dos fatores na seção de teoria da dimensão, porém é bom ressaltar que este tipo de álgebra de von Neumann tem um papel fundamental na teoria pois toda álgebra de von Neumann é decomposta em uma soma direta de fatores, nos dizendo que de certo modo as álgebras de von Neumann podem ser entendidas a partir dos os fatores, para os teoremas sobre este ponto pode-se consultar [42].

Apenas para salientar a importância que os fatores têm não só para a teoria das Álgebras de Operadores bem como para a matemática no geral, a Medalha Fields de 1982 foi concedida a Alain Connes pela classificação de alguns fatores. Uma breve exposição histórica pode ser encontrada na introdução de [23].

1.2 Positividade e o Teorema Espectral

Notação: A partir daqui $\mathfrak{M}$ sempre denotará uma álgebra de von Neumann contida em $B(H)$.

Definição 1.17. *Dado $a \in \mathfrak{M}$, o **resolvente de** a é o conjunto*

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \text{ é inversível}\}$$

*O **espectro** de a é o conjunto $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$.*

Lembramos que um elemento $b \in \mathfrak{M}$ é inversível quando existe um elemento de $\mathfrak{M}$, denotado por b^{-1}, tal que $bb^{-1} = \mathbf{1}$.

Teorema 1.3. *Dado $a \in \mathfrak{M}$ temos que $\sigma(a)$ é um conjunto compacto não vazio.*

Prova : [35] teorema 3.9 pg 10.

Teorema 1.4. *Se $a \in \mathfrak{M}$ é auto-adjunto, então $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Prova : [35] Proposição 7.10 pg 22 ou [34] teorema VI.8 pg 194.

Definição 1.18. *O **raio espectral** de um elemento $a \in \mathfrak{M}$ é definido por:*

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

Note que pelo teorema 1.3, $r(a)$ é um número real.

Teorema 1.5. *Seja $a \in \mathfrak{M}$ um elemento auto-adjunto, então $r(a) = \|a\|$.*

Prova : [35] proposição 7.11 pg 23 ou [34] teorema VI.6 pg 192.

Definição 1.19. *Um elemento $a \in \mathfrak{M}$ será dito **positivo** quando for auto-adjunto e $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$.*

Notação: Escreveremos $a \geq 0$ para indicar que a é positivo.

Observação 1.4. *Esta definição de positivo é equivalente à definição usual encontrada em textos de análise funcional, isto é, a é positivo se, e somente se, $\langle h, a(h)\rangle \geq 0$, $\forall\, h \in H$.*

Prova : [6] pg 38.

Notação: Denotaremos por $W^*(a)$ a álgebra de von Neumann **gerada por** a, isto é, a menor álgebra de von Neumann de $B(H)$ que contém a.

Notação: Seja X um espaço topológico compacto. Denotaremos por $C(X)$ o espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$, provido da norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$.

Teorema 1.6. ***(Stone-Weierstrass)*** *Seja X um espaço Hausdorff compacto. Se U é uma sub-álgebra auto-adjunta de $C(X)$ contendo as constantes e separando pontos em X, então U é densa em $C(X)$.*

Prova : [32] pg 146.

Lembramos que um conjunto $E \subseteq C(X)$ **separa pontos** em X quando, dados quaisquer x e y em X, existir uma $f \in E$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Note que aqui não estamos exigindo que a sub-álgebra seja da Banach. Quando X for um compacto da reta, o conjunto do polinômios é uma álgebra auto-adjunta contida em $C(X)$, ela contém os polinômios constantes e, tomando o polinômio identidade $P(z) = z$ temos que ela separa pontos de X. Isso mostra que o conjunto dos polinômios é denso em $C(X)$. Na maioria das vezes, o compacto X será o espectro de um operador auto-adjunto limitado.

Notação: Seja S um boreliano contido em $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathfrak{B}_0(S)$ o conjunto das funções limitadas e mensuráveis em relação à σ-álgebra de borel de S.

Teorema 1.7. ***(Teorema espectral, Cálculo Funcional)***
*Seja $a \in B(H)$ auto-adjunto. Existe um *-homomorfismo $\Phi_a : \mathfrak{B}_0(\sigma(a)) \to B(H)$, tal que: (escreveremos $f(a)$ ao invés de $\Phi_a(f)$)*

(i) $f(Id_{\sigma(a)}) = a \quad e \quad f(1) = \mathbf{1}$

(ii) $\|f(a)\| \leq \|f\|_\infty, \ \forall \ f \in \mathfrak{B}_0(\sigma(a))$

(iii) $\|f(a)\| = \|f\|_\infty, \ \forall \ f \in \mathrm{C}(\sigma(a))$

(iv) Se $f \in \mathfrak{B}_0(\sigma(a))$ e $f \geq 0$ então $f(a) \geq 0$

(v) Se $b \in B(H)$ e $ab = ba$ então $f(a)b = bf(a), \ \forall \ f \in \mathfrak{B}_0(\sigma(a))$

(vi) Se f_n é uma seqüencia limitada em $\mathfrak{B}_0(\sigma(a))$ que converge pontualmente a $f \in \mathfrak{B}_0(\sigma(a))$ então $f(a) = s - \lim\limits_n f_n(a)$

(vii) $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)), \ \forall \ f \in \mathrm{C}(\sigma(a))$

Prova: [4] teoremas 23.38 pgs 1122 ou, de maneira mais direta, [26] teorema 2.5.5 e 2.5.6 pgs 69 e 72, respectivamente.

Observação 1.5. *Do item (vi) e do teorema de Stone-Weierstrass tiramos que $f(a) \in W^*(a), \ \forall \ f \in \mathrm{C}(\sigma(a))$.*

De fato, como toda $f \in \mathrm{C}(\sigma(a))$ é limite uniforme de polinômios em $\sigma(a)$ e, cada polinômio em $\sigma(a)$ é transformado em uma combinação linear de potências de a pela Φ_a, que portanto pertence a $W^*(a)$, do item (vi) e do fato de $W^*(a)$ ser fechado em relação a topologia forte temos que $f(a) \in W^*(a)$. $\square$

Definição 1.20. *Dizemos que $p \in \mathfrak{M}$ é uma **projeção** quando $p = p^2 = p^*$.*

Podemos extrair mais do teorema 1.7, se $ab = ba$, então o item (v) em particular garante que para toda função $f \in C(\sigma(a))$ vale $f(a)b = bf(a)$. Disso, conforme a proposição abaixo, segue que uma álgebra de von Neumann é sempre rica em projetores.

Notação: Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, denotaremos por χ_S a sua função característica.

Proposição 1.2. *Seja $a \in \mathfrak{M}$, auto-adjunto, então:*

$$f(a)b = bf(a),\ \forall f \in C(\sigma(a)) \quad \Leftrightarrow \quad \chi_S(a)b = b\chi_S(a),\ \forall\ S \text{ boreliano de } \sigma(a).$$

Prova : [26] teorema 2.5.5 pg 69.

A existência de projeções em uma álgebra de von Neumann deve-se ao seguinte fato:
Dado $b \in (W^*(a))'$ já sabemos que como $ab = ba$ então $f(a)b = bf(a)$, $\forall f \in C(\sigma(a))$ e, pela proposição acima, vale $\chi_S(a)b = b\chi_S(a)$, $\forall$ S boreliano de $\sigma(a)$. Como b é arbitrário, provamos que $\chi_S(a) \in (W^*(a))'' = W^*(a)$, $\forall$ S boreliano de $\sigma(a)$.

É claro que $\Phi_a(\chi_S) = \chi_S(a)$ é projeção pois, $\chi_S \geq 0$ e $\chi_S^2 = \chi_S$ implicam que $\chi_S(a) \geq 0$ e $\chi_S^2(a) = \chi_S(a)$, donde $\chi_S(a)$ é projeção. Isso nos mostra a diferença brutal entre álgebras-C^* que podem não possuir projeção alguma como no exemplo 1.2 e álgebras de von Neumann. De fato, em [26] pode ser encontrada a prova de que von Neumann coincide com o fecho do espaço vetorial gerado por suas projeções.

Agora descreveremos um pouco mais da estrutura das álgebras de von Neumann.

Proposição 1.3. *Seja $a \in \mathfrak{M}$ auto-adjunto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $a \geq 0$

(ii) $a = b^2$ para algum b auto-adjunto

(iii) $\|c\mathbf{1} - a\| \leq c$ para todo $\|a\| \leq c$

(iv) $\|c\mathbf{1} - a\| \leq c$ para algum $\|a\| \leq c$

Prova : Aqui $\|.\|$ é a norma usual de B(H).

$(i) \Rightarrow (ii)$ Pelo teorema espectral item (iv), sendo $f(x) = \sqrt{x}$ uma função positiva sobre o espectro de a, segue que $\sqrt{a}$ é um auto-adjunto pois é positivo e satisfaz $(\sqrt{a})^2 = b$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Tomamos $f \in C(\sigma(b))$, $f(x) = x^2$. Temos que $f(b) = a$ e, pelo teorema espectral item (iii), segue que $\|f\|_\infty = \|a\|$. Seja c tal que $0 \leq f \leq \|a\| \leq c$, então $0 \leq c - f \leq c$, $\forall\ c \geq \|a\|$. Novamente pelo teorema espectral, temos:

$$\|c\mathbf{1} - a\| = \|(c - f)(b)\| = \|c - f\|_\infty \leq c \quad \forall\ c \geq \|a\|.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Óbvio.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Se $\|c\mathbf{1} - a\| \leq c$ para algum $c \geq \|a\|$, então:

$$\|c - Id_{\sigma(a)}\|_\infty = \|(c - z)(a)\| = \|c - a\| \leq c$$

Isto implica que a função identidade é não-negativa sobre $\sigma(a)$, assim $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$ e, sendo a auto-adjunto por hipótese concluímos que a é positivo. $\square$

Lema 1.2. *Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a + b \geq 0$.*

Prova : Escolhemos r e s em $\mathbb{R}$ tais que $\|a\| \leq r$ e $\|b\| \leq s$. Desta forma,

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq r + s$$

Sendo a e b positivos, pelo item (iii) da proposição 1.3, temos que $\|r\mathbf{1} - a\| \leq r$ e $\|s\mathbf{1} - b\| \leq s$ daí,

$$\|(r + s)\mathbf{1} - (a + b)\| \leq \|r\mathbf{1} - a\| + \|s.\mathbf{1} - b\| \leq r + s.$$

Pelo item (iv) da proposição anterior, $a + b$ é positivo. $\square$

Notação: O conjunto dos elementos positivos de $\mathfrak{M}$ será denotado por $\mathfrak{M}_+$.

Lema 1.3. *Se a e b são positivos de $\mathfrak{M}$ tais que $a + b = 0$, então $a = 0$ e $b = 0$.*

Prova : Se a é positivo, então $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$. Pelo teorema espectral $\sigma(-a) = \sigma(b) \subseteq (-\infty, 0]$. Como b é positivo, então $\sigma(b) \subseteq [0, \infty)$; isso implica que $\sigma(b) = \{0\}$. Logo, $\|b\| = r(b) = 0$ donde $a = b = 0$. $\square$

Observação 1.6. *Em particular provamos que $\mathfrak{M}_+ \cap (-\mathfrak{M}_+) = \{0\}$.*

Proposição 1.4. *Se a e b são positivos de $\mathfrak{M}$ tais que $ab = ba$, então ab é positivo.*

Prova : Pelo teorema espectral existem dois elementos positivos c e d em $\mathfrak{M}$ tais que $c^2 = a$ e $d^2 = b$, onde c comuta com a e d comuta com b. E ainda, como c e d são limites de polinômios em a e b, respectivamente, a e b comutam entre si, portanto b e c também comutarão e, assim, $ab = c^2d^2 = (cd)^2$. Como c e d são positivos, logo auto-adjuntos, usando que c comuta com d obtemos $(cd)^* = d^*c^* = dc = cd$. Agora que já sabemos que cd é auto-adjunto, usando o teorema espectral em cd, temos que $ab = (cd)^2$ é positivo, isso porque a função $f(x) = x^2$ é positiva sobre $\mathbb{R}$ e, portanto, sobre o espectro de cd. $\square$

Um dos jargões que ouvimos quando começamos a estudar álgebras-C^* é que os operadores são tratados como números, isto pela manipulação dos mesmos sem levar em conta sua ação no espaço de Hilbert. Porém, sutilezas podem causar certo espanto aos que ainda não fizeram um curso de teoria espectral, por exemplo, para ver que nem sempre o produto de operadores positivos é um operador positivo sugerimos [26].

Agora apresentaremos um lema extremamente útil no que segue:

Lema 1.4. ***Raiz Quadrada***

Dado $a \in \mathfrak{M}_+$ existe um único $b \in \mathfrak{M}_+$ tal que $a = b^2$.

Notação: *Este elemento será denotado por $\sqrt{a}$.*

Prova : Pelo teorema espectral já sabemos que existe b tal que $a = b^2$, mostraremos que este é único. Suponhamos então que $a = b^2 = c^2$, onde b e c são positivos. Observando que $ac = c^2c = cc^2 = ca$ e, levando em conta que se $b = \sqrt{a}$, obtido a partir do teorema espectral, então b é limite de polinômios em a. Assim, como c comuta com a, comuta com qualquer polinômio em a, logo comuta com b. Disso segue que $(b - c)$ comuta com b e com c, logo o quadrado $(b - c)^2$ é um positivo que também comuta com ambos. Pela proposição anterior, $(b - c)^2 b$ e $(b - c)^2 c$ são positivos e somam zero, pois:

$$(b - c)^2 b + (b - c)^2 c = (b - c)b(b - c) + (b - c)c(b - c) = (b - c)[b(b - c) + c(b - c)] =$$
$$= (b - c)[b^2 - bc + bc - c^2] = (b - c)[a - a] = 0$$

Pelo lema 1.3 ambos $(b - c)^2 b$ e $(b - c)^2 c$ devem ser nulos, sendo assim, sua diferença também deve ser zero, e daí:

$$(b - c)^2 b - (b - c)^2 c = (b - c)^3 = 0 \Rightarrow (b - c)^4 = 0 \Rightarrow 0 = \|(b - c)^4\| = \|b - c\|^4 \Rightarrow b = c. \ \square$$

Proposição 1.5. *Todo elemento $a \in \mathfrak{U}$ admite uma decomposição $a = a_1 + ia_2$, onde a_1, a_2 são elementos de $\mathfrak{U}$, auto-adjuntos. Tal decomposição é única e, a_1 e a_2 são ditos a* ***Parte Real*** *e a* ***Parte Imaginária de a****, respectivamente.*

Prova :

(Unicidade) Suponhamos que $a = a_1 + ia_2 = b_1 + ib_2$, sejam duas decomposições de a, onde a_1, a_2, b_1, b_2 são auto-adjuntos. Então que $(a_1 - b_1)$ e $(b_2 - a_2)$ são auto-adjuntos, disto e da igualdade $(a_1 - b_1) = i(b_2 - a_2)$ segue que $(a_1 - b_1) = -i(b_2 - a_2)$ e, portanto $(a_1 - b_1) = -(a_1 - b_1)$ donde segue que $a_1 - b_1 = 0$. Logo $a_1 = b_1$, implicando que $a_2 = b_2$, provando a unicidade da decomposição.

(Existência): Basta tomar $a_1 = (a + a^*)/2$ e $a_2 = (a - a^*)/2i$.

Teorema 1.8. *Seja $a \in \mathfrak{U}$ auto-adjunto.*

Definindo $a_+ = (|a| + a)/2$ e $a_- = (|a| - a)/2$ temos que:

(i) a_+ e a_- estão em $\mathfrak{U}_+$.

(ii) $a = a_+ - a_-$

(iii) $a_+a_- = 0$

E ainda, a_+ e a_- respectivamente chamados de ***Parte Positiva*** *e* ***Parte Negativa*** *de* ***a****, são os únicos elementos de $\mathfrak{U}$ que possuem as propriedades i, ii e iii simultaneamente.*

Prova: Proposição 2.2.11, pg 63 de [6].

Observação 1.7. *A partir da proposição e do lema anteriores temos o seguinte: Todo elemento* $a \in \mathfrak{U}$ *admite uma decomposição única da forma* $a = (a_1 - a_2) + i(a_3 - a_4)$ *onde* a_1, a_2, a_3 *e* a_4 *são positivos, tais que* $a_1 a_2 = 0$ *e* $a_3 a_4 = 0$.

Proposição 1.6. *O elemento* a^*a *é sempre positivo qualquer que seja* $a \in \mathfrak{M}$.

Prova: Como $b = a^*a$ é auto-adjunto, pela proposição anterior segue que $b = b_+ - b_-$ onde b_+, b_- são positivos tais que $b_+.b_- = 0$. Seja $t = a\sqrt{b_-}$, sendo $\sqrt{b_-}$ um limite de polinômios em b_- e, lembrando que $b_+.b_- = 0$ segue que $\sqrt{b_-}.b_+ = 0$. Portanto:

$$-t^*t = -(a\sqrt{b_-})^*(a\sqrt{b_-}) = -\sqrt{b_-}.(a^*a).\sqrt{b_-} = -\sqrt{b_-}.(b_+ - b_-).\sqrt{b_-} = \sqrt{b_-}.(b_-).\sqrt{b_-} = (b_-)^2$$

Donde $-t^*t$ é positivo. Agora, tomamos x e y as partes real e imaginária de t. Então:

$$t^*t + tt^* = (x + iy)^*.(x + iy) + (x + iy).(x + iy)^* = 2.(x^2 + y^2)$$

Ou seja, $t^*t + tt^*$ também é positivo pois é soma de positivos. Daí:

$$tt^* = t^*t + tt^* - t^*t = t^*t + tt^* + (b_-)^2 \geq 0$$

Assim concluimos que t^*t e $-t^*t$ são positivos e portanto $t^*t = 0$. Agora fica fácil de ver que b_- é nulo, de fato:

$$\|b_-\|^2 = \|b_-^* b_-\| = \|b_- b_-\| = \|(b_-)^2\| = \|0\| = 0 \quad \square$$

Lema 1.5. *Se* a *e* b *são auto-adjuntos tais que* $a \leq b$ *então* $x^*ax \leq x^*bx \ \forall \ x \in \mathfrak{U}$.

Prova: Como $b - a \geq 0$ então existe um $c \in \mathfrak{U}_+$ tal que $c^2 = b - a$. Assim,

$$x^*bx - x^*ax = x^*(bx - ax) = x^*(b - a)x = x^*c^2x = (x^*c)(cx) = (cx)^*(cx) \geq 0. \quad \square$$

Observação 1.8. *Se* a *é auto-adjunto então* $a \leq \| a \|$.

Prova: Como a é auto-adjunto então $\|a\| - a$ é auto-adjunto. Considerando o polinômio $p(z) = \|a\| - z$ e que, $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$, de $\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$ temos
$p(\sigma(a)) \subseteq [0, 2\|a\|]$.

Observação 1.9. *Dado* $a \in \mathfrak{U}_+$ *então:*
1) $\alpha.a \in \mathfrak{U}_+$, *se* $\alpha \geq 0$
2) $\alpha.a \in \mathfrak{U}_-$, *se* $\alpha \leq 0$

Prova : Em ambos os casos como $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha.a$ é auto-adjunto e, considerando o polinômio p(z)= $\alpha.z$ temos que $p(\sigma(a)) = \sigma(p(a))$ provando o resultado.

Definição 1.21. *Chamaremos de* ***Peso*** *uma função* $\tau : \mathfrak{M}_+ \to [0, +\infty]$ *tal que:*
i) $\tau(a + b) = \tau(a) + \tau(b)$
ii) $\tau(\alpha.a) = \alpha.\tau(a), \ \forall \ a \in \mathfrak{U}_+$
Quando $\tau(a^*a) = \tau(aa^*), \ \forall \ a \in \mathfrak{U}$ *dizemos que o peso é um* ***traço****.*
Se um peso só assume valores reais diremos que ele é ***finito****.*

É bom ressaltar que em alguns textos, ser traço não implica ser positivo, em alguns livros da literatura a condição $\tau(a^*a) = \tau(aa^*)$ ser válida para todo elemento da álgebra é tomada como definição ser requerer a positividade. De fato, o próximo lema enuncia a condição mais corriqueira para que um funcional seja chamado de traço.

Definição 1.22. *Uma função $f : \mathfrak{U} \rightarrow \mathbb{C}$ será dita um **funcional linear** quando:*

i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

ii) $f(\alpha.a) = \alpha.f(a)$, $\forall a \in \mathfrak{U}$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

*Um funcional linear será dito **positivo** quando sua restrição a $\mathfrak{U}_+$ for um peso finito. Um funcional linear positivo f será chamado de **estado** quando $f(\mathbf{1})$= 1.*

Lema 1.6. *Um funcional linear positivo τ é traço se, e somente se, $\tau(ab) = \tau(ba)$, $\forall\ a, b \in \mathfrak{M}$.*

Prova : Dado $a = b + ic \in \mathfrak{M}$, onde b e c são respectivamente, as partes real e imaginária de a, temos:

$$\begin{aligned} a^*a &= b^2 + c^2 + i(bc - cb) \\ aa^* &= b^2 + c^2 - i(cb - bc) \end{aligned}$$

Das equações fica claro que τ é traço se, e somente se, $\tau(bc) = \tau(cb)\ \forall\ b, c \in \mathfrak{M}_{sa}$. Assim, como já sabemos que todo elemento é combinação de dois auto-adjuntos é fácil ver que $\tau(bc) = \tau(cb)\ \forall\ b, c \in \mathfrak{M}_{sa}$ se, e somente se, $\tau(ad) = \tau(da)\ \forall\ a, d \in \mathfrak{M}$. $\square$

Esta última caracterização para traços finitos é a mais usada neste texto.

O lema a seguir tem uma demonstração entediante, porém esta é feita pelo grande uso deste lema no texto e porque usaremos esta mesma demonstração mais adiante.

Lema 1.7. *Para cada peso finito τ existe um único funcional linear positivo f definido em $\mathfrak{M}$ que coincide com τ em $\mathfrak{M}_+$.*

Prova :

Por proposição anterior todo elemento de $\mathfrak{M}$ é combinação linear de dois auto-adjuntos, definindo f para estes depois fica fácil.

Dado a $\in \mathfrak{U}$ auto-adjunto e sendo $a = a_+ - a_-$, a decomposição do teorema em diferença de positivos que já discutimos, definimos:

$$f(a) =: \tau(a_+) - \tau(a_-)$$

Na verdade, tal definição pode ser enfraquecida, dada outra decomposição de a como diferença de positivos, digamos $a = a_p - a_n$. Provaremos que vale $\tau(a_+) - \tau(a_-) = \tau(a_p) - \tau(a_n)$ e, portanto, $f(a) = \tau(a_+) - \tau(a_-) = \tau(a_p) - \tau(a_n)$.

De fato, das igualdades $a = a_+ - a_- = a_p - a_n$ obtemos que $a_+ + a_n = a_p + a_-$, donde $\tau(a_+) + \tau(a_n) = \tau(a_+ + a_n) = \tau(a_p + a_-) = \tau(a_p) + \tau(a_-)$, provando que $\tau(a_+) - \tau(a_-) = \tau(a_p) - \tau(a_n)$.

Levando em conta o fato anterior e que soma de positivos é um elemento positivo, para a e b auto-adjuntos, temos:

$$f(a+b) = f((a_+ - a_-)+(b_+ - b_-)) = f((a_+ + b_+)-(a_- + b_-)) = \tau(a_+ + b_+) - \tau(a_- + b_-) = \\ = \tau(a_+) - \tau(a_-) + \tau(b_+) - \tau(b_-) = f(a) + f(b).$$

E ainda, se a é auto adjunto e sendo $a = a_+ - a_-$ sua decomposição em parte negativa e positiva, temos que:

(i) Se $\alpha \geq 0$, então $\alpha a_+ \geq 0$ e $\alpha a_- \geq 0$, onde $\alpha a = \alpha a_+ - \alpha a_-$ é uma decomposição de a como diferença de positivos.

(ii) Se $\alpha \leq 0$, então $\alpha a_+ \leq 0$ e $\alpha a_- \leq 0$, sendo $\alpha a = (-\alpha a_-) - (-\alpha a_+)$ uma decomposição de αa como diferença de positivos.

Agora podemos provar a linerearidade em relação ao produto por um escalar real sobre os auto-adjuntos. Dados $a \in \mathfrak{U}$ auto-adjunto e $\alpha \in \mathbb{R}$ vale:

$$\alpha \geq 0 \Rightarrow f(\alpha a) = f(\alpha a_+ - \alpha a_-) = \tau(\alpha a_+) - \tau(\alpha a_-) = \alpha(\tau(a_+) - \tau(a_-)) = \alpha f(a)$$
$$\alpha \leq 0 \Rightarrow f(\alpha a) = f(\alpha a_+ - \alpha a_-) = f(-\alpha a_- - (-\alpha a_+)) = \tau(-\alpha a_-) - \tau(-\alpha a_+) = \\ = -\alpha\tau(a_-) + \alpha\tau(a_+) = \alpha f(a).$$

Pelo que provamos está claro que se outro funcional coincidir com τ sobre os positivos ele também irá coincidir sobre todos elementos auto-adjuntos e, pelo que pelo que segue abaixo, coincidirá sobre todos os elementos de $\mathfrak{U}$ provando a unicidade do funcional.

Usando o fato de que todo elemento a é decomposto de maneira única na forma $a = a_1 + ia_2$, com a_1 e a_2 auto-adjuntos definimos:

$$f(a) := f(a_1) + if(a_2) = \tau(a_{1+}) - \tau(a_{1-}) + i\tau(a_{2+}) - i\tau(a_{2-})$$

É fácil ver que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para quaisquer a e b em $\mathfrak{U}$. Dados agora $a \in \mathfrak{U}$ e $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ temos:

$$f(\lambda a) = f((\alpha + i\beta)(a_1 + ia_2)) = f((\alpha a_1 - \beta a_2) + i(\beta a_1 + \alpha a_2)) = \\ = f(\alpha a_1 - \beta a_2) + if(\beta a_1 + \alpha a_2) = \alpha f(a_1) - \beta f(a_2) + i\beta f(a_1) + i\alpha f(a_2) = \\ = (\alpha + i\beta)(f(a_1) + if(a_2)) = \lambda f(a). \quad \square$$

O lema nos dá o direito de a partir daqui confundir um peso ou, um traço finito positivo com sua extensão. Isto será feito muitas vezes sem ser chamarmos atenção ao fato.

No que se segue, daremos vários resultados sobre álgebras de matrizes cujas entradas são elementos de uma álgebra-C^*, estes serão usados posteriormente.

Proposição 1.7. *A álgebra de matrizes $n \times n$ com entradas em $B(H)$ denotada por $M_n(B(H))$, munida das operações usuais é *-isomorfa a $B(H^n)$.*

Prova : A prova é análoga à demonstração da existência do *-isomorfismo entre as matrizes $M_n(\mathbb{C})$ e os operadores lineares de $\mathbb{C}^n$.

Definição 1.23. *Sejam* $\mathfrak{M}$ *e* $\mathfrak{A}$ *álgebras-*C^**. Diremos que uma aplicação linear* $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$ *é* **positiva** *quando* $x \geq 0$ *implicar que* $\varphi(x) \geq 0$.

Já sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}^*$ $M_n(\mathfrak{M})$ e $M_n(\mathfrak{A})$ possuem uma estrutura de álgebra-C^* natural. Cada aplicação linear $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$ induz uma outra aplicação linear $\varphi_{(n)} : M_n(\mathfrak{M}) \to M_n(\mathfrak{A})$ definida por $\varphi_{(n)}([a_{ij}]) = [\varphi(a_{ij})]$.

Vamos dizer que $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$ é **n-positiva** quando $\varphi_{(n)} : M_n(\mathfrak{M}) \to M_n(\mathfrak{A})$ for positiva. Quando φ for n-positiva para todo n ≥ 1, então φ será dita **completamente positiva**.

Teorema 1.9. (Stinespring)
Seja $\mathfrak{U}$ *uma álgebra-*C^* *com unidade* $\mathfrak{e}$ *,* H *um espaço de Hilbert e* $\pi : \mathfrak{U} \to B(H)$ *uma aplicação linear tal que* $\pi(\mathfrak{e}) = \mathbf{1}$*. Então* π *é completamente positiva se, e somente se, existem* K *espaço de Hilbert,* $V : H \to K$ *operador linear com* $\|V\| \leq 1$ *e* $\rho : \mathfrak{U} \to B(K)$ *representação tal que* $\pi(a) = V^*\rho(a)V$, $\forall\ a \in \mathfrak{U}$.

Prova : No artigo original [41] ou em [23] pg 40.

Proposição 1.8. *Sejam* $\mathfrak{M}$ *e* $\mathfrak{A}$ *duas álgebras-*C^**. Se* $\mathfrak{M}$ *for comutativa então toda aplicação linear positiva de* $\mathfrak{M}$ *em* $\mathfrak{A}$ *é completamente positiva.*

Prova : [23] pg 42 ou [41].

1.3 Álgebras de von Neumann de dimensão finita

Faremos agora uma rápida descrição das sub-álgebras-C^* de $B(H)$ de dimensão finita contendo o operador identidade $\mathbf{1}$. Já vimos que estas são álgebras de von Neumann e é sobre elas que definiremos a entropia de Connes-Størmer do capítulo 3. A estrutura destes objetos vai garantir uma das principais propriedades desta entropia que é a finitude, apesar de não explicitarmos a prova da propriedade no texto, falaremos um pouco sobre estas álgebras pela importância delas na definição da entropia.

Toda álgebra-C^* de dimensão finita $\mathfrak{U}$ é decomposta numa soma direta $\mathfrak{U} = \bigoplus_{k=1}^{d} \mathfrak{U} p_k$ onde $\{p_k : 1 \leq k \leq d\}$ é um conjunto de projeções minimais do centro de $\mathfrak{U}$ tal que $\sum_{k=1}^{d} p_k = \mathbf{1}$ e, cada álgebra $\mathfrak{U}p_k$ é *-isomorfa à álgebra de matrizes $M_{n_k}(\mathbb{C})$.

E ainda, o conjunto $\{n_1, ..., n_d\}$ e o valor d formam um invariante algébrico completo da álgebra-C^* no sentido de que se $\mathfrak{V}$ é outra álgebra-C^* de dimensão finita, admitindo portanto uma decomposição numa soma direta $\mathfrak{V} = \bigoplus_{k=1}^{l} \mathfrak{V}_k$, onde cada $\mathfrak{V}_k$ é *-isomorfa a $M_{m_k}(\mathbb{C})$, então $\mathfrak{V}$ é *-isomorfa a $\mathfrak{U}$ se, e somente se, $l = d$ e o conjunto $\{m_1, ..., m_l\}$ é uma permutação de $\{n_1, ..., n_d\}$.

Estas afirmações são o teorema 11.2 da página 50 de [42], cuja demonstração garante que, para cada p_k a existência de um conjunto ortogonal $\{e_1, ..., e_s\}$ de projeções minimais da álgebra $\mathfrak{U}_k$ tais que $\sum_{i=1}^{s} e_i = p_k$.

Agora que já sabemos alguns fatos sobre álgebras de von Neumann de dimensão finita vamos tratar de uma questão que está relacionada com a definição da Entropia de Connes-Størmer. De fato, o exemplo a seguir nos mostra porque no futuro a entropia de um número finito de sub-álgebras no caso não comutativo deve ser obtida por um processo de limite, no caso, um supremo.

Duas álgebras de von Neumann de dimensão finita sempre geram uma álgebra de von Neumann de dimensão finita?

A resposta é negativa e o contra-exemplo é o seguinte:

Exemplo 1.8.

Neste exemplo nosso espaço de Hilbert H será o $L^2([0,1])$, espaço das funções $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ mensuráveis em relação a σ-álgebra de borel cujo módulo ao quadrado é integrável à lebesgue. Para cada função mensurável e limitada f em $[0,1]$ vamos considerar o operador de multiplicação por f em H, isto é

$$g \in H \mapsto fg \in H.$$

Em outras palavras, estamos considerando funções do $L^\infty([0,1]) \subseteq B(H)$. Pela proposição 1.7 identificamos $B(H^2)$, com $M_2(B(H))$. Em $M_2(B(L^2([0,1]))$ tomamos os seguintes elementos:

$$A = \begin{pmatrix} t & \sqrt{t-t^2} \\ \sqrt{t-t^2} & 1-t \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $A = A^2 = A^*$ e $P = P^2 = P^*$ segue que $W^*(A)$ e $W^*(P)$ são álgebras de von Neumann de dimensão 2, cujos geradores são $\{A, \mathbf{1}\}$ e $\{P, \mathbf{1}\}$, respectivamente. Provaremos que a álgebra de von Neumann gerada por estas duas álgebras, ou seja, a menor álgebra de von Neumann contida em $M_2(B(H))$ que contém ambas, tem dimensão infinita. Para ver isto vamos verificar que os elementos da forma $(AP)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ são L. I. dois a dois.

De fato,

$$AP = \begin{pmatrix} t & \sqrt{t-t^2} \\ \sqrt{t-t^2} & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t-t^2} & t \\ 1-t & \sqrt{t-t^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} APA &= \begin{pmatrix} \sqrt{t-t^2} & t \\ 1-t & \sqrt{t-t^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & \sqrt{t-t^2} \\ \sqrt{t-t^2} & 1-t \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} t\sqrt{t-t^2} & t-t^2 \\ t-t^2 & (1-t)\sqrt{t-t^2} \end{pmatrix} \\ &= 2\sqrt{t-t^2}. \begin{pmatrix} t & \sqrt{t-t^2} \\ \sqrt{t-t^2} & 1-t \end{pmatrix} = 2\sqrt{t-t^2}A \end{aligned}$$

$$(AP)^2 = (APA)P = 2\sqrt{t-t^2}AP$$

Concluindo a demonstração segue abaixo a prova por indução de que:

$$\begin{aligned} (AP)^n &= 2^{n-1}\sqrt{(t-t^2)^{n-1}}AP, \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \\ (AP)^{n+1} &= (AP)^n(AP) = 2^{n-1}\sqrt{(t-t^2)^{n-1}}APAP = 2^{n-1}\sqrt{(t-t^2)^{n-1}}(AP)^2 = \\ &= 2^{n-1}\sqrt{(t-t^2)^{n-1}}(2\sqrt{(t-t^2)}AP) = 2^n\sqrt{(t-t^2)^n}(AP). \ \square \end{aligned}$$

O exemplo acima foi-me comunicado pelo professor Ruy Exel Filho da UFSC.

1.4 Teoria da Dimensão de Murray-von Neumann

Definição 1.24. *Dizemos que* $u \in B(H)$ *é* ***isometria parcial*** *quando* u^*u *é uma projeção.*

Definição 1.25. *Dizemos que duas projeções* $\boldsymbol{p}$ *e* $\boldsymbol{q}$ *em uma álgebra de von Neumann* $\mathfrak{M}$ *são* ***equivalentes*** *quando* $\exists\ u \in \mathfrak{M}$ *, isometria parcial tal que* $p = u^*u$ *e* $q = uu^*$*.*

Notação: Escreveremos $p \sim q$ para indicar que p é equivalente a q.

Note que " $\sim$ " é uma relação de equivalência no conjunto das projeções de $\mathfrak{M}$. O conceito de equivalência deve ser interpretado como uma generalização da definição de dimensão para espaços vetoriais. De fato, no caso de H ter dimensão finita não é difícil mostrar que $p \sim q$ se, e somente se, dim p(H) = dim q(H).

Definição 1.26. *Dizemos que uma projeção p em uma álgebra de von Neumann* $\mathfrak{M}$ *é* ***finita*** *quando p não possui projeções menores do que p distintas de p equivalentes a ela em* $\mathfrak{M}$*, ou seja,*

$$(q \in \mathfrak{M}, q \sim p, q \leq p) \Rightarrow q = p$$

Se uma projeção de $\mathfrak{M}$ *não é finita, então será dita* ***infinita****.*

Definição 1.27. *Uma álgebra de von Neumann* $\mathfrak{M}$ *será dita* ***finita*** *ou* ***infinita*** *de acordo com a propriedade do seu projetor identidade* ***1****.*

Definição 1.28. *Dizemos que uma projeção* $p \neq 0$ *é* ***minimal em*** $\mathfrak{M}$ *quando:*
$\forall\ q \in \mathfrak{U}$, $(0 \leq q \leq p$ *e* $q^2 = q) \Rightarrow (q = 0$ *ou* $q = p)$.

Agora que já temos as noções de álgebra de von Neumann finita e infinita falaremos um pouco mais sobre os fatores. Começamos com o seguinte teorema:

Teorema 1.10. (Murray, von Neumann) *Seja* $\mathfrak{M}$ *um fator agindo num espaço de Hilbert separável. Existe uma* ***função dimensão d:***$\{$*projetores de* $\mathfrak{M}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$*, única a menos de normalização, tal que:*

(i) $d(p) > 0$ quando $p \neq 0$ e $d(0) = 0$.
(ii) $p \sim q \Leftrightarrow d(p) = d(q)$.
(iii) $pq = 0 \Rightarrow d(p + q) = d(p) + d(q)$.
(iv) p é finita $\Leftrightarrow d(p) < +\infty$.

E ainda, quando nossa álgebra de von Neumann for um fator, o conjunto das classes de equivalência de projeções de $\mathfrak{M}$ é totalmente ordenado, onde $[p] \leq [q]$ quando as classes de equivalência $[p]$ e $[q]$ contém, respectivamente, projetores p' e q' tais que $p' \leq q'$.

A primeira classificação dos fatores, agindo num espaço de Hilbert separável foi feita analizando a imagem da função dimensão conforme abaixo:

• **Tipo $\mathbf{I_n}$**, onde $n < \infty$: $\mathfrak{M}$ tem projeções minimais, todas são finitas e, d assume os valores do conjunto $\{0, 1, ..., n\}$. Um fator do tipo I_n é sempre *-isomorfo a álgebra das matrizes quadradas de ordem n.

• **Tipo $\mathbf{I_\infty}$**: $\mathfrak{M}$ possui projeções minimais e, d assume os valores {0,1,...,∞ }. Fatores deste tipo são *-isomorfos ao espaço de operadores limitados de um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita.

• **Tipo $\mathbf{II_1}$**: $\mathfrak{M}$ não possui projeções minimais, todos os projetores tem como imagem espaços vetoriais de dimensão infinita mas, o projetor identidade $\mathbf{1}$ é finito segundo a definição de Murray-von Neumann. Normalizando a função dimensão d, ou seja, $d(\mathbf{1}) = 1$, a imagem de d é o intervalo [0,1].

• **Tipo $\mathbf{II_\infty}$**: $\mathfrak{M}$ não possui projeções minimais, todos os projetores tem como imagem espaços vetoriais de dimensão infinita, o projetor identidade $\mathbf{1}$ é infinito segundo a definição de Murray-von Neumann mas álgebra possui projetores finitos. A imagem da função dimensão é o intervalo [0,∞].

• **Tipo III**: $\mathfrak{M}$ não possui projeções minimais, todos os projetores tem como imagem espaços vetoriais de dimensão infinita todos com base de Hamel de mesma cardinalidade e ainda, todos os projetores são equivalentes no sentido de Murray-von Neumann. A função dimensão assume somente os valores 0 e ∞.

Dentre os resultados que valeram a medalha Fields a Connes, está a classificação a menos de *-isomorfismo, dos fatores **hiperfinitos** do tipo II e III, onde a nomenclatura hiperfinito significa que a álgebra $\mathfrak{M}$ contém uma sequência crescente de álgebras de dimensão finita cujo o fecho fraco da união coincide com $\mathfrak{M}$.

Para nós, do trabalho de Connes, o mais importante é o fato de que a menos de *-isomorfismo existe apenas um único fator hiperfinito do tipo $\mathbf{II_1}$ e, que este possui um único estado normal fiel e finito, para a prova pode-se consultar [22]. Este fato será muito importante para entender as aplicações da entropia de connes-størmer no final do texto.

Outro ponto importante é a conexão entre a teoria da dimensão de Murray-von Neumann e a existência de traços normais, falaremos um pouco disso agora.

Definição 1.29. *Seja φ um funcional definido sobre um álgebra de von Neumann $\mathfrak{M}$. Se para todo net crescente limitado $(x_i)_{i\in I} \subset \mathfrak{M}_{sa}$ com $\sup_{i\in I} x_i = x$ tivermos $\lim_i \varphi(x_i) = \varphi(x)$, o funcional φ será dito* ***normal***.

Ao olharmos para a nossa definição de álgebra de von Neumann finita talvez não fique claro porque em muitos artigos lemos na introdução o seguinte:

"Seja $\mathfrak{M}$ uma álgebra de von Neumann finita e τ seu traço normal fiel finito...".

A justificativa é o seguinte resultado:

Teorema 1.11. *Seja $\mathfrak{M}$ uma álgebra de von Neumann. Então são equivalentes:*

(i) $\mathfrak{M}$ é finita.
(ii) Existe $\tau\colon \mathfrak{M}_+ \to [0, \infty)$ traço normal fiel finito.

Prova: Ver [42] ou no livro de Dixmier [12].

1.5 Dualidades

Nesta seção falaremos um pouco mais dos funcionais normais e damos uma nova caracterização das álgebras de von Neumann devida a Sakai.

Proposição 1.9. *O espaço vetorial de todos os funcionais normais de $\mathfrak{M}$ é um espaço de Banach. Este será dito o* ***Pré-dual*** *de $\mathfrak{M}$ e denotado por $\mathfrak{M}_*$.*

Prova: Proposição 3.6.2 de [30] pg 53.

Observação 1.10. *Se φ é um funcional linear positivo definido sobre um álgebra de Von Neumann $\mathfrak{M}$, então φ é normal se, e somente se, $\varphi(\sup_{i\in I} x_i) = \sup_{i\in I} \varphi(x_i)$ para todo net crescente limitado $(x_i)_{i\in I} \subset \mathfrak{M}_{sa}$.*

O teorema abaixo é uma das versões do teorema de **Radon-Nikodym** no contexto álgebras de von Neumann.

Teorema 1.12. *Seja $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e τ um estado normal fiel de uma álgebra de von Neumann $\mathfrak{M}$. Se $\psi \in \mathfrak{M}_*$ é tal que:*

$$|\psi(y^*x)| \leq (\tau(x^*x))^{1/2}(\tau(y^*y))^{1/2}$$

então existe um $a \in \mathfrak{M}$ com $\|a\| \leq 1/2$ tal que $\psi(x) = \lambda\tau(ax) + \lambda^{-1}\tau(xa)$.

Prova: [22] Lema 8.3.1 pg 51.

Observação 1.11. *O teorema acima é uma versão do teorema de Radon-Nikodym no seguinte sentido:*

Se $0 \leq \psi \leq \tau$, onde $\psi \in \mathfrak{M}_*$ e, τ é um estado normal fiel de $\mathfrak{M}$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que:

$$|\psi(y^*x)| \leq (\psi(x^*x))^{1/2}(\psi(y^*y))^{1/2} \leq (\tau(x^*x))^{1/2}(\tau(y^*y))^{1/2}$$

o que nos deixa nas hipóteses do teorema.

Agora que já vimos que toda álgebra de von Neumann é o dual de um espaço de Banach chamamos a atenção para uma espécie de recíproca deste fato, um resultado muito forte provado por Sakai que nos dá uma nova caracterização das álgebras de von Neumann:

Teorema 1.13. ***(Sakai)*** *Uma álgebra-C^* é uma álgebra de von Neumann se e somente se ela é o dual de algum espaço de Banach.*

Prova: Ver [38].

Capítulo 2

Teoria da Integração não-comutativa

2.1 A Desigualdade de Jensen

Nesta seção I denotará um intervalo da reta real.

Definição 2.1. *Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **função operador crescente** quando dados quaisquer $a \leq b$ em $B(H)_{sa}$, ambos com espectro em I, tivermos $f(a) \leq f(b)$.*

Teorema 2.1. *A função $\ln x$ é operador crescente em $[0, +\infty)$.*

Prova : Ver [37].

Definição 2.2. *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é uma **função operador convexa** quando para todo $\lambda \in [0, 1]$, tivermos:*

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

para quaisquer operadores a e b de $B(H)_{sa}$ cujos espectros estão contidos em I.

Invertendo a desigualdade temos a definição de **função operador côncava**.

Aqui é importante ressaltar que em muitos artigos a função é dita operador convexa no intervalo $[0, \alpha[$ quando:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

para quaisquer x e y auto-adjuntos de $M_n(B(H))$, cujo os espectros estejam em $[0, \alpha[$ e, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$.

Isso poderia, a princípio, restringir o counjunto de funções que serão operador convexa, no entanto não é isto que acontece. No lema 3.1 de [5] prova-se que estas duas definições são equivalentes. Outra observação é que $B(H)$ pode ser substituída uma álgebra de von Neumann qualquer no enunciado.

Teorema 2.2. *A função η é uma função operador côncava no intervalo* $[0, +\infty)$.

$Prova$: Ver [27].

Teorema 2.3. *Se x e y são elementos de $B(H)_+$ que comutam, então:*

$$\eta(xy) = \eta(x)y + x\eta(y).$$

$Prova$: Ver [37] ou [42] pg 12.

Corolário 2.1. *Se e é uma projeção de $B(H)$ então $\eta(e) = 0$.*

$Prova$: e comuta com ela própria e pelo teorema espectral com $\eta(e)$, assim:

$$\eta(e) = \eta(ee) = \eta(e)e + e\eta(e) = 2e\eta(e) = 2e(-e\ln e) = 2(-e^2 \ln e) = 2(-e \ln e) = 2\eta(e)$$

donde $\quad \eta(e) = 0$. $\square$

Usaremos o corolário do teorema a seguir para provar a primeira propriedade da Entropia de Connes-Størmer de um número finito de sub-álgebras de uma álgebra de von Neumann dada.

Para provar o teorema usaremos o Lema a seguir:

Lema 2.1. *Seja a um operador linear limitado num espaço de Hilbert H com $\| a \| \leq 1$. Se $b = (\mathbf{1} - aa^*)^{1/2}$ e $c = (\mathbf{1} - a^*a)^{1/2}$ então o operador U do espaço de Hilbert $H \oplus H$ definido por $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$ é unitário.*

Prova:

Observando que a involução no caso dos operadores de $H \oplus H$ é tomar a transposta da matriz cujo os elementos são os adjuntos dos operadores da matriz original e que, b e c são operadores auto-adjuntos de H, temos:

$$UU^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^* & c \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* + b^2 & ac - ba \\ ca^* - a^*b & c^2 + a^*a \end{pmatrix}$$

$$U^*U = \begin{pmatrix} a^* & c \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a + c^2 & a^*b - ca^* \\ ba - ac & b^2 + aa^* \end{pmatrix}$$

E ainda,

$aa^* + b^2 = \mathbf{1} - b^2 + b^2 = \mathbf{1} = \mathbf{1} - a^*a + a^*a = c^2 + aa^*$

Para concluirmos que U é unitário, basta provarmos que $ac = ba$. Mas como $ac^2 = b^2a$ e, sendo b e c positivos, temos que $\sqrt{b^2} = b$ e $\sqrt{c^2} = c$, o resultado segue do item (v) do teorema espectral. $\square$

Teorema 2.4. ***(Desigualdade de Jensen para operadores)*** *Seja f é uma função real contínua definida no intervalo $[0, \alpha[$, onde $\alpha \leq \infty$ com $f(0) \leq 0$. Se f é operador convexa e x é auto-adjunto com $\sigma(x) \subseteq [0, \alpha[$ então $f(a^*xa) \leq a^*f(x)a \quad \forall\ a$ tal que $\| a \| \leq 1$.*

Prova : Sejam U e V os operadores de $H \oplus H$ definidos como no lema anterior e, seja X o operador definido por:

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então temos as seguintes relações:

$$U^*XU = \begin{pmatrix} a^*xa & a^*xb \\ bxa & bxb \end{pmatrix} \quad e \quad V^*XV = \begin{pmatrix} a^*xa & -a^*xb \\ -bxa & bxb \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} f(a^*xa) & 0 \\ 0 & f(bxb) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a^*xa & 0 \\ 0 & bxb \end{pmatrix} = f\left[\frac{1}{2}(U^*XU) + \frac{1}{2}(V^*XV)\right] \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}f(U^*XU) + \frac{1}{2}f(V^*XV)$$

Como f é contínua e, $[0, \| X \|]$ é um compacto, podemos aplicar o teorema de Stone-Weiestrass juntamente como fato de que sendo U unitário temos $U = U^{-1} = U^*$. Esta última afirmação implica que $p(U^*XU) = U^*p(X)U$ para todo polinômio de $[0, \| X \|]$, aliando isso a continuidade da multiplicação à direita e à esquerda em relação a topologia da norma, o teorema de Stone-Weiestrass nos garante que $f(U^*XU) = U^*f(X)U$. Exatamente o mesmo ocorre para o operador V, assim:

$$\begin{pmatrix} f(a^*xa) & 0 \\ 0 & f(bxb) \end{pmatrix} \leq \tfrac{1}{2}f(U^*XU) + \tfrac{1}{2}f(V^*XV) = \tfrac{1}{2}U^*f(X)U + \tfrac{1}{2}V^*f(X)V =$$
$$= \tfrac{1}{2}U^*\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}U + \tfrac{1}{2}V^*\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}V \leq \tfrac{1}{2}U^*\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U + \tfrac{1}{2}V^*\begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V =$$
$$= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a^*f(x)a & a^*f(x)b \\ bf(x)a & bf(x)b \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a^*f(x)a & -a^*f(x)b \\ -bf(x)a & bf(x)b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*f(x)a & 0 \\ 0 & bf(x)b \end{pmatrix}$$

Onde a última desigualdade é garantida pela proposição 1.6, em particular provamos que $f(a^*xa) \leq a^*f(x)a$. $\square$

É bom citar que a recíproca também é verdadeira, de fato estas duas condições são duas das 4 equivalentes encontradas em [19].

Corolário 2.2. *Seja* $\mathfrak{U}$ *uma álgebra-*C^* *e* $\pi : \mathfrak{U} \to B(H)$ *uma contração linear positiva. Se* f *é uma função operador convexa nas hipóteses do teorema acima então,*
$f(\pi(x)) \leq \pi(f(x))$ $\forall$ x *auto-adjunto com* $\sigma(x) \subseteq [0, \alpha[$.

Prova : Restringindo π a $W^*(x)$, temos que essa restrição é uma contração positiva definida sobre uma álgebra-C^* comutativa, pela proposição 1.8 tal restrição é completamente positiva. Pelo teorema de Stinespring existem um espaço de Hilbert K, um operador limitado $V : H \to K$ com $\|V\| \leq 1$ e uma representação $\rho : W^*(x) \to B(K)$ tal que $\pi(a) = V^*\rho(a)V$, $\forall$ $a \in W^*(x)$.

Como f é contínua, portanto contínua em $\sigma(x)$ que é um compacto de $\mathbb{R}$, pelo teorema de Stone Weiestrass e pelo teorema espectral segue que existe uma sequência de polinômios p_n em $\sigma(x)$ tal que a sequência de operadores $p_n(x)$ converge para o operador $f(x)$. Assim, como a representação ρ é um *-homomorfismo, portanto contínua, segue que:

$$\begin{aligned}
\pi(f(x)) = V^*\rho(f(x))V = V^*\rho(\lim_n p_n(x))V = V^* \lim_n p_n(\rho(x))V = \\
= V^*f(\rho(x))V \geq f(V^*\rho(x)V) = f(\pi(x))
\end{aligned}$$

2.2 Esperança Condicional

Nesta seção vale a pena notar a grande semelhança com o caso comutativo, ver [40] por exemplo.

Definição 2.3. *Damos o nome de* **Esperança** *de uma álgebra-C^* $\mathfrak{U}$ sobre uma sub-álgebra-C^* $\mathfrak{V}$ para uma aplicação $E_{\mathfrak{V}}$: $\mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ que satisfaz:*

(i) $E_{\mathfrak{V}}$ é linear e sobrejetiva.

(ii) $E_{\mathfrak{V}}$ é positiva, isto é, se $x \geq 0$ então $E_{\mathfrak{V}}(x) \geq 0$.

(iii) $E_{\mathfrak{V}}$ é Unitária, ou seja, $\|E_{\mathfrak{V}}\| = 1$.

(iv) $E_{\mathfrak{V}}^2 = E_{\mathfrak{V}}$. (Idempotente)

Se para $E_{\mathfrak{V}}$ ainda tivermos:

(v) $E_{\mathfrak{V}}(wxy) = wE_{\mathfrak{V}}(x)y \; \forall \; x \in \mathfrak{U}, \forall \; y, w \in \mathfrak{V}$.

então $E_{\mathfrak{V}}$ é dita **Esperança Condicional**.

Dada uma álgebra de von Neumann finita $\mathfrak{M}$ e, um traço normal fiel finito τ definido sobre $\mathfrak{M}$, o teorema a seguir garante a existência e unicidade de uma esperança condicional invariante para τ, $E_{\mathfrak{N}}$: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, para cada sub-álgebra de von Neumann $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$.

Muitos artigos que tratam sobre álgebras de von Neumann finitas iniciam com a seguinte frase:

“ Seja ($\mathfrak{M}$,τ) uma álgebra de von Neumann finita de traço normal fiel finito τ e $\mathfrak{N}$ uma sub-álgebra. Considere E: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ a esperança condicional τ-invariante definida pela identidade $\tau(E(x)y) = \tau(xy)$, $\forall \; x \in \mathfrak{M}$, $\forall \; y \in \mathfrak{N}$,...”

Os resultados sobre esperanças condicionais em álgebras de von Neumann são vastos e este é um tema atual de pesquisa desta área. Aqui provaremos apenas o que garante a validade da frase anterior.

A demonstração abaixo foi feita por Umegaki em [43], porém, há uma diferença entre nossa prova e a original. Usamos uma versão diferente do teorema de Radon-Nikodym da citada pelo autor. O artigo de Umegaki remete-nos a [39], enquanto que em nossa prova utilizamos o teorema 1.12 que é uma versão de Sakai adaptada por V. Jones em [22].

Para $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ como antes, temos o seguinte:

Teorema 2.5. *Existe uma função* $E_{\mathfrak{N}}$*:* $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ *tal que:*
(Para deixar a notação menos carregada usaremos apenas E *ao invés de* $E_{\mathfrak{N}}$*).*

(1) E *é linear e sobrejetora*

(2) $E(x^*) = E(x)^*$ *(preserva a involução)*

(3) $x \geq 0 \Rightarrow E(x) \geq 0$ *(positiva)*

(4) $(x \geq 0$ *e* $E(x) = 0) \Rightarrow x = 0$ *(fiel)*

(5) $E(y) = y \ , \forall \ y \in \mathfrak{N}$

(6)$\| \ E(x) \ \| \leq \| \ x \ \|$

(7) $E(E(x).y) \ = E(x.E(y)) \ = E(x).E(y) \ \forall \ x, y \in \mathfrak{M}$

(8) $E(yxw) \ = yE(x)w \ , \forall \ x \in \mathfrak{M} \ \forall \ y, w \in \mathfrak{N}$

(9) $E(x^*x) \leq E(x^*).E(x) \ , \forall \ x \in \mathfrak{M}$

Prova :

Para cada x fixado em $\mathfrak{M}_+$, provaremos que $n_x(y) = \tau(xy)$ é um funcional normal positivo sobre $\mathfrak{N}$. É evidente que n_x só assume valores finitos, além disso:

Afirmação 1. n_x é positivo.
Prova: Se $y \in \mathfrak{N}_+$ então como $x \in \mathfrak{M}_+$ valem $(x^{1/2})^2 = x$ e $x^{1/2}yx^{1/2} \geq 0$, assim:
$n_x(y) = \tau(xy) = \tau(x^{1/2}(x^{1/2}y)) = \tau(x^{1/2}yx^{1/2}) \geq 0$.

Afirmação 2. n_x é normal.
Prova : Se $(y_i)_i \uparrow y$, $(y_i)_i \subset \mathfrak{N}_+$, então $(x^{1/2}y_ix^{1/2})_i \uparrow x^{1/2}yx^{1/2}$. Logo,

$$\sup_i n_x(y_i) = \sup_i \tau(x^{1/2}y_ix^{1/2}) = \tau(x^{1/2}yx^{1/2}) = \tau(xy) = n_x(y).$$

Agora observamos que, como $x \in \mathfrak{M}_+$ então $x \leq \|x\|$, assim:

$$n_x(y) = \tau(xy) = \tau(y^{1/2}xy^{1/2}) \leq \tau(y^{1/2}\|x\|y^{1/2}) = \|x\|\tau(y), \quad \forall \ y \in \mathfrak{N}_+.$$

Usando este fato e, a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada ao funcional positivo n_x, segue que para quaisquer y e z em $\mathfrak{N}$ vale:

$$|n_x(y^*z)| \leq (n_x(y^*y))^{1/2}(n_x(z^*z))^{1/2} \leq (\|x\|\tau(x^*x))^{1/2}(\|x\|\tau(y^*y))^{1/2} = \|x\|(\tau(x^*x))^{1/2}(\tau(y^*y))^{1/2}$$

Tomamos então o funcional normal positivo $n'_x(y)$ definido por $n'_x(y) = n_x(y)/\|x\|$, $\forall\ y \in \mathfrak{N}$. Da desigualdade acima segue que $|n'_x(y^*z)| \leq (\tau(x^*x))^{1/2}(\tau(y^*y))^{1/2}$ e, sendo assim, pelo teorema de Radon-Nikodym, usando $\lambda = 1$ nas hipóteses do teorema, existe um $\tilde{x} \in \mathfrak{N}$ com $\|2\tilde{x}\| \leq 1$ tal que $n'_x(y) = \tau(\tilde{x}y) + \tau(y\tilde{x}) = \tau(2\tilde{x}y)$, $\forall\ y \in \mathfrak{N}$. Assim:

$$n'_x(y) = n_x(y)/\|x\| = \tau(xy)/\|x\| = \tau(2\tilde{x}y) \quad \Rightarrow \quad \tau(xy) = \tau(2\|x\|\tilde{x}y),\ \forall\ y \in \mathfrak{N}.$$

Definimos a esperança condicional como $E(x) := 2\|x\|\tilde{x}$. É imediato da definição que $\tau(E(x)y) = \tau(xy)$ e E é uma contração, pois $\|E(x)\| = \|(2\|x\|\tilde{x})\| = 2.\|x\|.\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$.

Afirmação 3. E está bem definida.

Prova : Se x_1,$x_2 \in \mathfrak{N}$ são tais que $\tau(xy) = \tau(x_1y) = \tau(x_2y)$, então $\tau((x_1 - x_2)y) = 0, \forall \in \mathfrak{N}$. Fazendo $y = (x_1 - x_2)^*$, obtemos $\tau((x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^*) = 0$ e, sendo τ fiel, segue que $(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^* = 0$, donde $x_1 = x_2$. Esta mesma demonstração garante que $E(y) = y$,
$\forall\ y \in \mathfrak{N}$ e, portanto, E é idempotente. Em particular, E é sobrejetiva.

Afirmação 4. Se $x \geq 0$, então $E(x) \geq 0$.

Prova :
Primeiramente, provaremos que se $x \geq 0$, então $E(x)$ é auto-adjunto. Sabemos que $E(x) = E_a(x) + iE_b(x)$, onde $E_a(x)$ e $E_b(x)$ são, respectivamente, as partes real e imaginária de $E(x)$. Como n_x é funcional linear positivo,

$$n_x(y) = \tau(E(x)y) = \tau((E_a(x) + iE_b(x))y) = \tau(E_a(x)y) + i\tau(E_b(x)y) \in \mathbb{R}, \forall\ y \in \mathfrak{N}_+.$$

Assim, $\tau(E_b(x)y) = 0, \forall \in \mathfrak{N}_+$. Fazendo $y = E_b(x) = E_b(x)^*$ segue que $\tau(E_b(x)E_b(x)^*) = 0$ e, como τ é fiel $E_b(x)E_b(x)^* = 0$ concluímos que $E_b(x) = 0$.

Já obtemos que, se $x \geq 0$ então $E(x)$ é auto-adjunto, escrevendo $E(x) = E_p(x) - E_n(x)$ onde $E_p(x)$ e $E_n(x)$ são, respectivamente, as partes positiva e negativa de $E(x)$. Sendo n_x um funcional positivo segue que:

$$n_x(y) = \tau(E(x)y) = \tau((E_p(x) - E_n(x))y) = \tau(E_p(x)y) - \tau(E_n(x)y) \geq 0, \forall\ y \in \mathfrak{N}_+.$$

Agora, fazendo $y = E_n(x) = E_n(x)^*$ e lembrando que $E_p(x).E_n(x) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} n_x(E_n(x)^*) &= \tau(E(x)E_n(x)^*) = \tau((E_p(x) - E_n(x))E_n(x)^*) = \tau(E_p(x)E_n(x)^*) - \tau(E_n(x)E_n(x)^*) = \\ &= -\tau(E_n(x)E_n(x)^*) \leq 0. \end{aligned}$$

Disso segue que $\tau(E_n(x)E_n(x)^*) = 0$ e, novamente pela fidelidade de τ, concluímos que $E_n(x) = 0$, provando que $E(x) \geq 0$.

Afirmação 5. Se $x \geq 0$ e $E(x) = 0$, então $x = 0$.

Prova : Como $\tau(xy) = \tau(E(x)y)\ \forall\ y \in \mathfrak{N}$ e, sendo $\mathfrak{N}$ uma álgebra de von Neumann, segue que $1 \in \mathfrak{N}$. Fazendo $y = 1$ o resultado segue do fato de τ ser fiel.

Afirmação 6. $E(x + z) = E(x) + E(z),\ \forall\ x, z \in \mathfrak{M}_+$.

Prova : Para todo $y \in \mathfrak{N}$,

$$\tau(E(x+z)y) = \tau((x+z)y) = \tau(xy) + \tau(zy) = \tau(E(x)y) + \tau(E(z)y) = \tau((E(x) + E(z))y).$$

Daí, como chegamos que $\tau((E(x+z) - E(x) - E(z))y) = 0$ para todo y em $\mathfrak{N}$, mais uma vez basta usar que τ é fiel e tomar o y adequado, $y = (E(x+z) - E(x) - E(z))^*$. Uma prova totalmente análoga mostra que $E(\alpha x) = \alpha E(x),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\ x \in \mathfrak{M}_+$.

Desta forma, vamos usar o mesmo método usado na extensão de um peso finito para um funcional linear positivo, agora para estender nossa aplicação linear E, até então, está definida apenas para os positivos de $\mathfrak{M}$. Dado $x \in \mathfrak{M}$, definimos:

$$E(x) = E(x_1) - E(x_2) + i(E(x_3) - E(x_4))$$

onde x_1, x_2, x_3 e x_4 são positivos tais que $x = (x_1 - x_2) + i(x_3 - x_4)$ com $x_1x_2 = x_3x_4 = 0$.

Da maneira que definimos $E(x)$, segue que $E(x^*) = E(x)^*$ para todo x em $\mathfrak{M}$ e, é claro que a condição $\tau(E(x)y) = \tau(xy)$ é satisfeita para quaisquer $x \in \mathfrak{M}$ e $y \in \mathfrak{N}$.

Observamos que E fica totalmente determinada se soubermos a imagem de cada positivo de $\mathfrak{M}$. Para verificar que E é linear, basta proceder da mesma forma que fizemos quando estendemos um peso finito para um funcional positivo. Os elementos principais desta construção são o teorema de Radon-Nikodym e a fidelidade de τ, que nos permitem concluir que para cada $x \in \mathfrak{M}$ existe um único elemento de $\mathfrak{N}$, denotado por $E(x)$, tal que $\tau(E(x)y) = \tau(xy),\ \forall\ y \in \mathfrak{N}$. Esse é um fato que já usamos e que usaremos repetidamente no que segue para provar as demais propriedades de E.

Afirmação 7. $E(E(x)z) = E(xE(z)) = E(x)E(z)\ \forall\ x,\ z \in \mathfrak{M}$.

Prova :

Dados x e $z \in \mathfrak{M}$, a afirmação segue das seguintes identidades válidas para todo y em $\mathfrak{N}$:

$$\begin{aligned}\tau(E(E(x)z)y) &= \tau(E(x)zy) = \tau(zyE(x)) = \tau(E(z)yE(x)) = \\ &= \tau(E(x)E(z)y) = \tau(xE(z)y) = \tau(E(xE(z))y)\end{aligned}$$

Afirmação 8. $E(wxy) = wE(x)y \ \forall\ x \in \mathfrak{M}, \forall\ w, y \in \mathfrak{N}$.

Prova :
Aplicando o item anterior e usando o fato de que $E(y) = y\ \forall y \in \mathfrak{N}$, temos:

$$E(yx) = E(E(y)x) = E(yE(x)) = E(y)E(x) = yE(x) \quad \forall x \in \mathfrak{M}, \forall y \in \mathfrak{N}.$$

e isto implica que para quaisquer $x \in \mathfrak{M}$ e $y,\ w \in \mathfrak{N}$:

$$\begin{aligned} E(yxw) &= E(E(y)xw) = E(yE(xw)) = E(y)E(xw) = \\ &= yE(xw) = yE(xE(w)) = yE(x)E(w) = yE(x)w. \end{aligned}$$

Afirmação 9. $E(x)^*E(x) \leq E(x^*x), \forall\ x \in \mathfrak{M}$.

Prova : Como $0 \leq (x - E(x))^*(x - E(x)), \forall\ x \in \mathfrak{M}$ e, $E(x) \geq 0$ quando $x \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq E((x - E(x))^*(x - E(x)) = &\quad E(x^*x - x^*E(x) - E(x)^*x + E(x)^*E(x)) \\ = &\quad E(x^*x) - E(x^*E(x)) - E(E(x)^*x) + E(E(x)^*E(x)) \\ = &\quad E(x^*x) - E(x^*)E(x) - E(x)^*E(x) + E(x)^*E(x) \\ = &\quad E(x^*x) - E(x)^*E(x) \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é garantida pelas propriedades (2) e (7) provadas acima. $\square$

Em [43] são provadas outras propriedades dessa esperança condicional, por exemplo, prova-se que E é normal. Abaixo provaremos um lema que será usado na prova de uma das propriedades da entropia de Connes-Størmer.

Lema 2.2. *Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{N}$ são sub-álgebras de von Neumann de $\mathfrak{M}$ tais que $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$, então $E_{\mathfrak{N}}E_{\mathfrak{A}} = E_{\mathfrak{A}}E_{\mathfrak{N}} = E_{\mathfrak{N}}$.*

Prova : Temos que $E_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$ e $E_{\mathfrak{A}}(y) = y, \forall\ y \in \mathfrak{A}$. Assim:

$$E_{\mathfrak{A}}(E_{\mathfrak{N}}(y)) = E_{\mathfrak{N}}(y) \qquad \forall\ y \in \mathfrak{M}.$$

Ou seja, $E_{\mathfrak{A}}E_{\mathfrak{N}} = E_{\mathfrak{N}}$.
Da definições de $E_{\mathfrak{A}}$ e $E_{\mathfrak{N}}$ segue que:

$$\begin{aligned} \tau(yz) &= \tau(E_{\mathfrak{A}}(y)z) && \forall\ z \in \mathfrak{A}, \\ \tau(E_{\mathfrak{A}}(y)z) &= \tau(E_{\mathfrak{N}}(E_{\mathfrak{A}}(y))z) && \forall\ z \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Isso implica que:

$$\tau(yz) = \tau(E_{\mathfrak{A}}(y)z) = \tau(E_{\mathfrak{N}}(E_{\mathfrak{A}}(y))z) \qquad \forall\ z \in \mathfrak{N}.$$

e portanto $E_{\mathfrak{N}}(y) = E_{\mathfrak{N}}(E_{\mathfrak{A}}(y)), \forall\ z \in \mathfrak{M}$. $\square$

Capítulo 3

A Entropia de Connes-Størmer

Neste capítulo discutiremos a definição de entropia formulada por A. Connes e E. Størmer em [10]. Falaremoas sobre as propriedades em comum com a entropia de Kolmogorov-Sinai e, no final do capítulo, citaremos referências de trabalhos subseqüentes que esclarecem o quão eficaz é a definição de Connes e Størmer a fim de ser usada como invariante numérico.

Começaremos chamando a atenção de como esta entropia pode ser vista como uma generalização de Kolmogorov-Sinai e, para definir esta entropia seguiremos de perto [44].

3.1 Entropia de Kolmogorov-Sinai

Dada uma partição mensurável $P = \{P_1, ..., P_n\}$ de um espaço de probabilidade (X, β, μ), a **Entropia da Partição** P é definida por:

$$h(P) = \sum_{i=1}^{n} \eta(\mu(P_i))$$

Esta entropia foi definida por Shanonn em 1948, antes de iniciar a listagem das propriedades vamos fixar algumas notações:

Se $P = \{P_1, ..., P_n\}$ e $Q = \{Q_1, ..., Q_m\}$ são partições mensuráveis de X, $P \leq Q$ significa que os elementos de P são uniões de elementos de Q ou, dito de outra forma, a σ-álgebra gerada por P está contida na σ-álgebra gerada por Q. Escreveremos $P \vee Q$ para a partição de X formada por todas as intersecções da forma $P_i \cap Q_j$ onde $P_i \in P$ e $Q_j \in Q$.

(**A**) $h(P) \leq h(Q)$ quando $P \leq Q$;

(**B**) $h(P \vee Q) \leq h(P) + h(Q)$;

(**C**) Se T é uma transformação mensurável μ-invariante então $h(T^{-1}(P)) = h(P)$.

Dadas duas partições de X definimos a **Entropia Condicional** de P dada Q por:

$$h(P/Q) = -\sum_{i,j} \mu(P_i \cap Q_j) \ln[\mu(P_i \cap Q_j)/\mu(Q_j)] = \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j) \left(\sum_{i=1}^{n} \eta(\mu(P_i \cap Q_j)/\mu(Q_j)) \right)$$

Se considerarmos uma uma terceira partição de $M = \{M_1, ..., M_l\}$ de X vale o seguinte:

(**D**) $h(Q) \leq h(P) + h(Q/P)$;

(**E**) $h(M/Q) \leq h(M/P) + h(P/Q)$;

(**F**) $h(M/P)$ é crescente em M e decrescente em P.

Definição 3.1. *Seja $T : (X, \beta, \mu) \to (X, \beta, \mu)$ uma transformação β-mensurável que preserva a medida μ, a* **entropia de T em relação a partição** *P é definida como:*

$$h(T, P) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} h(P \vee T^{-1}(P) \vee T^{-2}(P) \vee ... \vee T^{-(n-1)}(P))$$

O limite existe em função da propriedade (B) e do fato da entropia ser maior ou igual a zero. Ver [25] pág. 277.

Finalmente podemos definir a **entropia de** T:

$$h(T) = \sup_P h(T, P)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições mensuráveis finitas de X.

Agora citaremos um teorema que possui uma versão para Álgebra de Operadores em [10]. Esta é uma maneira de calcularmos a entropia de uma transformação sem conhecer o conjunto gerador da álgebra.

Teorema 3.1. *Seja (X, β, μ) um espaço de probabilidade e, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma família de sub-álgebras finitas de β tais que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq .. \subseteq A_l \subseteq$ com $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n = \beta$. Se $T : X \to X$ é mensurável e μ-invariante então $h(T) = \lim_{n \to \infty} h(T, A_n)$.*

Prova : Ver [44] pág 100.

3.2 A definição de Connes-Størmer

Em todo este capítulo R denotará uma álgebra de von Neumann finita de traço normal fiel finito normalizado τ e, para cada sub-álgebra M de R, E_M será a Esperança Condicional de R em M invariante para τ, cuja existência foi provada no capítulo anterior.

Denotaremos por S_k o conjunto de todas as famílias $(x_{i_1,\ldots,i_k})_{i_j \in \mathrm{N}}$ em R_+ que possuem somente um número finito de elementos não nulos e que satisfazem:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k} x_{i_1,\ldots,i_k} = 1$$

Dados $x \in S_k$, $l \in$ {1,2,...,k} e $i_l \in \mathrm{N}$ definimos:

$$x_{i_l}^l = \sum_{i_1,\ldots,i_{l-1},i_{l+1},\ldots,i_k} x_{i_1,\ldots,i_l,\ldots,i_k}$$

Agora, podemos definir a chamada **Entropia de Connes-Størmer**:

Definição 3.2. *Sejam $N_1, N_2, ..., N_k$ sub-álgebras de von Neumann em R, todas de dimensão finita, definimos :*

$$H(N_1, N_2, ..., N_k) = \sup_{x \in S_k} \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_k} \eta\tau(x_{i_1,\ldots,i_k}) - \sum_l \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x_{i_l}^l)) \right\} \text{ onde } \eta(x) = -x \ln x.$$

Observação 3.1. *Da definição é imediato que a entropia é simétrica em relação ao índices 1,2,...,k das sub-álgebras de dimensão finita, ou seja, permutando as sub-álgebras o valor da entropia continua o mesmo. Para ver que é não-negativa basta tomar a família S_k trivial, onde o único elemento não nulo é 1, fazendo $x_{1,0,\ldots,0} = 1$ e anulando os demais elementos da família S_k. Neste caso tem-se:*

$$\eta\tau(1) - \tau\eta \sum_l \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x_{i_l})) = \eta(1) - \tau\eta(E_{N_1}(1)) = -1.\ln 1 - \tau(-1.\ln 1) =$$
$$= -1.0 - \tau(0) = 0$$

donde a entropia é não-negativa. A finitude será conseqüência das propriedades (B) e (D) a seguir.

3.3 Propriedades da Entropia de Connes-Størmer

(A) $H(N_1, ..., N_k) \leq H(P_1, ..., P_k)$ quando $N_j \subseteq P_j, \forall\ j \in \{1, ..., k\}$.

Prova : Dado $y \in R_+$, pelo lema 2.2 como $N_j \subseteq P_j$ sabemos que $E_{N_j} E_{P_j} = E_{N_j}$. Agora, lembrando que E_{P_j} é uma aplicação linear positiva segue que $E_{P_j}(y)$ é um elemento auto-adjunto de P_j, pois é positivo. Tomando a restrição de E_{N_j} sobre a álgebra de von Neumann gerada por $E_{P_j}(y)$ que por ser auto-adjunto é uma álgebra comutativa temos que $\eta(E_{N_j}(E_{P_j}(y))) \geq E_{N_j}(\eta(E_{P_j}(y)))$, isto porque $\eta(0) = 0$ e porque pela proposição 2.2 η é função operador côncava em $[0, \infty)$, o que nos deixa nas hipóteses do corolário 2.2 . Assim concluímos que:

$$\eta(E_{N_j}(y)) = \eta(E_{N_j}(E_{P_j}(y))) \geq E_{N_j}(\eta(E_{P_j}(y)))$$

da positividade de τ segue,

$$\tau(\eta(E_{N_j}(y)) \geq \tau(E_{N_j}(\eta(E_{P_j}(y)))$$

e, como E_{N_j} é τ-invariante temos:

$$\tau(\eta(E_{N_j}(y)) \geq \tau(E_{N_j}(\eta(E_{P_j}(y))) = \tau(\eta(E_{P_j}(y)), \quad \forall\ y \in R_+$$

isso garante a desigualdade desejada. □

(B) $H(N_1, ..., N_k, N_{k+1}, ..., N_p) \leq H(N_1, ..., N_k) + H(N_{k+1}, ..., N_p)$

Prova : Dado x $\in S_p$, defino $x' \in S_k$ e $x'' \in S_{p-k}$ cujo os elementos são:

$$x'_{i_1,...,i_k} = \sum_{i_{k+1},...,i_p} x_{i_1,...,i_k,i_{k+1},...,i_p} \quad e \quad x''_{j_1,...,j_{p-k}} = \sum_{i_1,...,i_k} x_{i_1,...,i_k,j_1,j_2,...,j_{p-k}}$$

De forma que se tem para $l \in \{1, ..., k\}$:

$$x'^{\,l}_{i_l} = \sum_{i_1,...,i_{l-1},i_{l+1},...,i_k} x'_{i_1,...,i_k} = \sum_{i_{k+1},...,i_{l-1},i_{l+1},...,i_k} \left(\sum_{i_{k+1},...,i_p} x_{i_1,...,i_p} \right) = \sum_{i_1,...,i_{l-1},i_{l+1},...,i_k} x_{i_1,...,i_p} = x^l_{i_l}$$

e

$$x''^{\,l}_{j_l} = \sum_{j_1,...,j_{l-1},j_{l+1},...,i_{p-k}} x''_{j_1,...,j_{p-k}} = \sum_{j_1,...,j_{l-1},j_{l+1},...,j_{p-k}} \left(\sum_{i_1,...,i_k} x_{i_1,...,i_k,j_1,...,j_{p-k}} \right) =$$

$$= \sum_{i_1,...,i_k,j_l,...,j_{l-k},j_{l+k},...,j_{p-k}} x_{j_1,...,j_p} = x^{l+k}_{j_l}, \text{ para } l \in \{1, ..., p-k\}.$$

Como $\sum_{i_1,...,i_p} x_{i_1,...,i_p} = \mathbf{1}$ e, sendo o traço normalizado uma aplicação linear tal que $\tau(\mathbf{1}) = 1$, temos:

$$1 = \tau(\mathbf{1}) = \tau\left(\sum_{i_1,...,i_p} x_{i_1,...,i_p}\right) = \sum_{i_1,...,i_p} \tau(x_{i_1,...,i_p})$$

Consideramos o espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel de [0,1], λ é a medida de Lebesgue e uma partição mensurável $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_{i_1,...,i_p}\}$ de [0,1] tal que $\tau(x_{i_1,...,i_p}) = \lambda(\mathcal{P}_{i_1,...,i_p})$. É claro que estamos considerando apenas os índices $(i_1, ..., i_p)$ tais que $x_{i_1,...,i_p}$ é não nulo, e sendo τ fiel, $\tau(x_{i_1,...,i_p})$ também é diferente de zero. Tomamos agora duas novas partições $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$ cujos elementos são uniões de elementos de $\mathcal{P}$, construídos da seguinte forma:

$$\mathcal{P}'_{i_1,...,i_k} = \bigcup_{i_{k+1},...,i_p} \mathcal{P}_{i_1,...,i_k,i_{k+1},...,i_p} \quad e \quad \mathcal{P}''_{i_{k+1},...,i_p} = \bigcup_{i_1,...,i_k} \mathcal{P}_{i_1,...,i_k,i_{k+1},...,i_p}$$

Desta forma, para todo elemento $\mathcal{P}_{i_1,...,i_p}$ de $\mathcal{P}$ temos:

$$\mathcal{P}_{i_1,...,i_p} = \left[\bigcup_{i_{k+1},...,i_p} \mathcal{P}_{i_1,...,i_k,i_{k+1},...,i_p}\right] \bigcap \left[\bigcup_{i_1,...,i_k} \mathcal{P}_{i_1,...,i_k,i_{k+1},...,i_p}\right] = \mathcal{P}'_{i_1,...,i_k} \bigcap \mathcal{P}''_{i_{k+1},...,i_p}$$

donde $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \vee \mathcal{P}''$.

Agora, se h é a Entropia de Kolmogorov-Sinai, entre as propriedades citadas no início do capítulo está a sub-aditividade, donde:

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,...,i_p} \eta\tau(x_{i_1,...,i_p}) &= \sum_{i_1,...,i_p} \eta\lambda(\mathcal{P}_{i_1,...,i_p}) = h(\mathcal{P}) = h(\mathcal{P}' \vee \mathcal{P}'') \le h(\mathcal{P}') + h(\mathcal{P}'') = \\ &= \sum_{i_1,...,i_k} \eta\lambda(\mathcal{P}'_{i_1,...,i_k}) + \sum_{i_{k+1},...,i_p} \eta\lambda(\mathcal{P}''_{i_{k+1},...,i_p}) = \sum_{i_1,...,i_k} \eta\tau(x'_{i_1,...,i_k}) + \sum_{i_{k+1},...,i_p} \eta\tau(x''_{i_{k+1},...,i_p})\end{aligned}$$

obtendo:

$$\sum_{i_1,...,i_p} \eta\left(\tau(x_{i_1,...,i_p})\right) \le \sum_{i_1,...,i_k} \eta\left(\tau(x'_{i_1,...,i_k})\right) + \sum_{i_{k+1},...,i_p} \eta\left(\tau(x''_{i_{k+1},...,i_p})\right) \tag{3.1}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{p} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x^l_{i_l})) &= \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x^l_{i_l})) + \sum_{l=k+1}^{p} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x^l_{i_l})) = \\ &= \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x^l_{i_l})) + \sum_{l=1}^{p-k} \sum_{j_l} \tau\eta(E_{N_{l+k}}(x^{l+k}_{j_l})) = \\ &= \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x'^{l}_{i_l})) + \sum_{l=1}^{p-k} \sum_{j_l} \tau\eta(E_{N_{l+k}}(x''^{l}_{j_l}))\end{aligned}$$

Sendo que a última igualdade segue das igualdades $x_{i_l}^{'l} = x_{i_l}^l$ e $x_{j_l}^{''l} = x_{j_l}^{l+k}$.
Subtraímos agora esta última quantia de ambos os lados na igualdade (3.1), assim:

$$\sum_{i_1,...,i_p} \eta\tau(x_{i_1,...,i_p}) - \sum_{l=1}^{p} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x_{i_l}^l)) \leq$$

$$\leq \sum_{i_1,...,i_k} \eta\tau(x'_{i_1,...,i_k}) + \sum_{i_{k+1},...,i_p} \eta\tau(x''_{i_{k+1},...,i_p}) - \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x_{i_l}^{'l})) - \sum_{l=1}^{p-k} \sum_{j_l} \tau\eta(E_{N_{l+k}}(x_{j_l}^{''l})) =$$

$$= \sum_{i_1,...,i_k} \eta\tau(x'_{i_1,...,i_k}) - \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x_{i_l}^{'l})) + \sum_{i_{k+1},...,i_p} \eta\tau(x''_{i_{k+1},...,i_p}) - \sum_{l=1}^{p-k} \sum_{j_l} \tau\eta(E_{N_{l+k}}(x_{j_l}^{''l})) \leq$$

$$\leq \sup_{x \in S_k} \{ \sum_{i_1,...,i_k} \eta\tau(x_{i_1,...,i_k}) - \sum_{l} \sum_{i_l} \tau\eta(E_{N_l}(x_{i_l}^l)) \} + \sum_{i_{k+1},...,i_p} \eta\tau(x''_{i_{k+1},...,i_p}) - \sum_{l=1}^{p-k} \sum_{j_l} \tau\eta(E_{N_{l+k}}(x_{j_l}^{''l}))$$

$$= H(N_1, N_2, ..., N_k) + \sum_{i_{k+1},...,i_p} \eta\tau(x''_{i_{k+1},...,i_p}) - \sum_{l=1}^{p-k} \sum_{j_l} \tau\eta(E_{N_{l+k}}(x_{j_l}^{''l})) \leq (j_l = i_{k+l}, l \in \{1, ..., p-k\})$$

$$\leq H(N_1, N_2, ..., N_k) + \sup_{x \in S_{p-k}} \{ \sum_{j_1,...,j_{p-k}} \eta\tau(x''_{j_1,...,j_{p-k}}) - \sum_{l=1}^{p-k} \sum_{j_l} \tau\eta(E_{N_{l+k}}(x_{j_l}^{''l})) \} =$$

$$= H(N_1, N_2, ..., N_k) + H(N_{k+1}, N_{k+2}, ..., N_p) \qquad \square$$

(C) Se $P_1, P_2, ..., P_n \subset P$ então $H(P_1, ..., P_n, P_{n+1}, ..., P_m) \leq H(P, P_{n+1}, ..., P_m)$.

Prova: Ver [10] ou [37].

(D) Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de projeções minimais de N tal que $\sum_{\alpha \in I} e_\alpha = \mathbf{1}$ então:

$$H(N) = \sum_{\alpha \in I} \eta\tau(e_\alpha)$$

Prova : Ver [10] ou [37].

Aqui também teremos a noção de **Entropia Condicional**. Dadas duas sub-álgebras de dimensão finita N e P de uma álgebra de von Neumann R, a entropia condicional de N dada a álgebra P é definida por:

$$H(N|P) = \sup_{x \in S_1} \left\{ \sum_{i_1} (\tau\eta(E_P(x_i)) - \tau\eta(E_N(x_i)) \right\}$$

A entropia condicional goza das seguintes propriedades:

(E) $H(N_1, ..., N_k) \leq H(P_1, ..., P_k) + \sum_{j=1}^{k} H(N_j \mid P_j)$

(F) $H(N \mid Q) \leq H(N \mid P) + H(P \mid Q)$

(G) $H(N \mid P)$ é crescente em N e decrescente em P.

Diferente das duas primeiras propriedades que provamos e das duas seguintes onde apenas indicamos as provas, estas propriedades são verificadas com certa facilidade a partir da definição. Aqui não falaremos muito sobre a entropia condicional, mas esta foi relacionada ao famoso índice de Jones em [31].

Agora definiremos a entropia de uma transformação.

Definição 3.3. *Seja R uma álgebra de von Neumann finita de traço normal fiel finito τ e θ um automorfismo de R que preserva τ. Se N é uma sub-álgebra de von Neumann de dimensão finita definimos:*

$$H(N, \theta) = \lim_{k \to \infty} H(N, \theta(N), ..., \theta^{k-1}(N))$$

Note que tal limite existe pela razão do caso comutativo, ou seja, pelas propriedades **(B)** e **(D)**. Finalmente, a entropia do automorfismo θ será dada por:

$$H(\theta) = \sup_{N} H(N, \theta)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as sub-álgebras de dimensão finita.

Agora passaremos para a parte final do trabalho onde será citada a primeira aplicação do conceito de entropia no contexto não-comutativo. Aqui daremos um tratamento mais informal em relação às seções anteriores, o leitor interessado nos detalhes pode consultar o capítulo 7 de [22] para esta parte.

Definição 3.4. *Dizemos que $\gamma : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ é um **automorfismo** da álgebra de von Neumann $\mathfrak{M}$ quando γ for um *-isomorfismo bijetor, ou seja, γ é uma bijeção tal que:*
i) γ é linear
ii) $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$
iii) $\gamma(a^*) = (\gamma(a))^*$

A entropia de Connes-Stømer é invariante por conjugação no contexto das álgebras de von Neumann, isto significa que para qualquer automorfismo γ de $\mathfrak{M}$ temos que $H(\alpha) = H(\gamma\alpha\gamma^{-1})$.

A analogia entre as entropias de Kolmogorov-Sinai e de Connes-Størmer se estende à primeira aplicação do conceito, assim como em teoria ergódica, aqui a entropia será usada para mostrar que o n-shift não é conjugado ao m-shift quando m≠n, onde a conjugação é a que foi definida acima e o n-shift será descrito abaixo.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, tomamos $M_i = M_n(\mathbb{C})$ e τ_i o traço usual de matrizes, $\forall\ i \in \mathbb{Z}$. Já sabemos que um fator do tipo II_1 é um fator de dimensão infinita que admite um traço normal finito, e ainda, como se trata de um fator II_1, com a condição do traço ser normalizado e fiel sabemos que existe um único traço positivo que tem tais propriedades.

Seja agora a seguinte sequência crescente de álgebras-C^*:

$$A_0 = M_0 \subseteq A_1 = M_{-1} \otimes M_0 \otimes M_1 \subseteq A_2 = M_{-2} \otimes M_{-1} \otimes M_0 \otimes M_1 \otimes M_2 \subseteq ...$$

O mergulho de A_m em A_{m+1} é feito da seguinte forma:

$$a_m \in A_m \hookrightarrow \mathbf{1}_{M_n} \otimes a_m \otimes \mathbf{1}_{M_n}$$

O limite direto de álgebras-C^* $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} A_m = \bigotimes\limits_{i \in \mathbb{Z}} A_i = A_\infty$ admite um traço normalizado finito $\tau = \bigotimes\limits_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i$ pois os elementos de A_∞ podem ser pensados como combinações lineares de objetos da forma $...\mathbf{1}_{M_n} \otimes \mathbf{1}_{M_n} \otimes \mathbf{1}_{M_n} \otimes a_m \otimes \mathbf{1}_{M_n} \otimes \mathbf{1}_{M_n} \otimes \mathbf{1}_{M_n}....$

Definimos então:

$$\tau(...\mathbf{1}_{M_n} \otimes a_m \otimes \mathbf{1}_{M_n}...) = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i(...\mathbf{1}_{M_n} \otimes a_m \otimes \mathbf{1}_{M_n}...) =$$

$$= \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i(...\mathbf{1}_{M_n} \otimes b_{-m} \otimes b_{-m+1} \otimes ... \otimes b_{m-1} \otimes b_m \otimes \mathbf{1}_{M_n}...) = \prod_{i=-m}^{i=m} \tau_i(b_i)$$

onde os b_i(s) são elementos de M_n.

Assim conseguimos calcular o traço de qualquer elemento de A_∞. Com este traço, fazendo a construção GNS obtemos A_∞ como uma sub-álgebra de uma álgebra de von Neumann R que é um fator do tipo II_1. Pela construção podemos perceber que R é Hiperfinito, ou seja, limite de sub-álgebras de dimensão finita. Mais ainda, esta sub-álgebra é densa numa topologia que não definimos no texto, a topologia ultra-fraca, esta construção é feita no detalhe na seção 7.2 de [22].

Agora estamos prontos para esclarecer primeiro parágrafo de [10] onde os autores explicam porque que faz sentido investigar se existe a conjugação entre os shifts que definiremos a seguir.

O ponto importante é o seguinte, para cada $n \in \mathbb{N}$ construímos um tensorial infinito de álgebras de matrizes com coeficientes complexos e, identificamos esta álgebra com uma sub-álgebra densa de um fator R do tipo II_1, mas já sabemos que existe apenas um fator deste tipo, ou seja, o R é o mesmo fator para todos os $n(s)$ a menos de $*-$isomorfismo.

Mais ainda, o traço acima pode ser estendido a todo o fator R, sendo essa extensão um traço normal fiel finito normalizado, já sabemos que este tipo de fator admite um único traço normalizado com estas características, nos parágrafos abaixo o fator R e o traço τ normal fiel finito e normalizado são estes que acabamos de contruir.

Assim, no que se segue, o $n-$shift S_n é o automorfismo do fator R que é a extensão do automorfismo do tensorial infinito de matrizes complexas de ordem n que corresponde a translação de uma unidade em $\mathbb{Z}$ no tensorial, este é definido da seguinte forma, para todo j inteiro π_j é o homomorfismo de $M_n(\mathbb{C})$ em R definido por:

$$\pi_j(x) = ...\mathbf{1}_{M_n} \otimes \mathbf{1}_{M_n} \otimes x \otimes \mathbf{1}_{M_n} \otimes \mathbf{1}_{M_n}...$$

onde x ocupa a j-ésima posição do tensorial.

O automorfismo S_n será tal que $S_n\pi_j = \pi_{j+1}$.

Citaremos agora os dois principais resultados de [10], o primeiro é a versão não comutativa do teorema de Kolmogorov-Sinai e o segundo é o que garante que assim como em teoria ergódica clássica, a entropia garante que os n-shifts não são conjugados para valores distintos de n.

Teorema 3.2. ***(Kolmogorov-Sinai não-comutativo)*** *Seja (R, τ) um fator hiperfinito do tipo II_1 e τ seu traço normalizado, normal fiel e finito. Seja θ um automorfismo de R e, $(P_q)_{q\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de sub-álgebras de dimensão finita tal que o fecho da união destas na topologia fraca coincide com R. Se $H(\theta)$ denota a entropia de Connes-Størmer então:*

$$H(\theta) = \lim_{q\to\infty} H(P_q, \theta)$$

Prova: Ver no artigo original [10] ou em [37].

Teorema 3.3. *Seja $M_n(\mathbb{C})$ a álgebra de matrizes com coeficientes complexos provida do traço usual. Seja R o fator hiperfinito do tipo II_1 construído a partir do produto tensorial infinito das álgebras $M_n(\mathbb{C})$ através da construção GNS que citamos nos parágrafos anteriores e, τ seu traço normalizado, normal fiel e finito. Se S_n é o n-shift já descrito, então S_n preserva τ e:*

$$H(S_n) = H(M_n(\mathbb{C})) = \log n$$

Prova: Ver [10] ou em [37], neste último o autor dá mais de uma demonstração do fato usando resultados provados por ele próprio em [17].

Corolário 3.1. *Os n-shifts S_n não são conjugados para diferentes valores de n.*

Por fim chamamos a atenção para os trabalhos que vieram depois de [10], generalizações como [9] ou, artigos que tentam entender melhor a entropia como [28], [11] e [33]. Para os que desejam ler mais sobre esta e outras entropias no contexto não-comutativo, o texto de Erling Størmer [37], onde são tratadas outras entropias onde ele também contribuiu como a definida por Voiculescu é um bom começo e, para os que desejam aplicações destas à física sugerimos [29].

Bibliografia

[1] **Attal, S.**, *Elements of operator algebras and modular theory.* http://igd.univ-lyon1.fr/attal.

[2] **Ash, Robert B.**, *Information Theory.* New York: Interscience, (1965). New York: Dover (1990).

[3] **Antezana, J.; Massey, P. and Stojanoff, D.**, *Jensen's inequality and majorization.* arxiv:math.FA/0411442.

[4] **Barata, J. A. C.**, *Curso de Física-Matemática. Notas de aula.* Notas completas divididas em capítulos. Instituto de Física - USP (2005).

[5] **Bendat, J. and Sherman, S.**, *Monotone and Convex Operators Functions.* Transactions of the American Mathematical Society, **79** (1955), 58-71.

[6] **Bratteli, O. and Robinson, D. W.**, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York. (1979).

[7] **Connes, A.**, *Noncommutative Geometry.* Academic Press, Inc. (1994).

[8] **Chernov, N. and Markarian, R.**, *Introduction to Ergodic Theory of Chaotic Billiards.* 24° Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA Publicações Matemáticas 2003.

[9] **Connes, A., Narnhofer, H. and Thirring, W.**, *Dynamical Entropy of C^* Algebras and von Neumann Algebras.* Commun. Math. Phys. **112**, (1987) 691-719.

[10] **Connes, A. and Størmer, E.**, *Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras.* Acta Math. **134** (1975), 289-306.

[11] **Choda, M.**, *Entropy of Cuntz's canonical endomorphism.* Pacif. J. of Math. **190** n° 2, (1999).

[12] **Davis, C.**, *A Schwarz inequality for convex operator functions.* Proc. Am. Math. Soc. **8**. (1957) 42-44.

[13] **Davidson, Kenneth R.**, *C^*-Algebras by Example.* Fields Institute Monographs. (1996).

[14] **Dunford, N. and JT Schwartz**, *Linear Operators. Part 1: General Theory.* New York: John Wiley and Sons.(1958)

[15] **Dixmier, J.**, *Von Neumann algebras.* North-Holland. Amsterdam. (1981).

[16] **Gracia-Bondía, José M.; Várilly, Joseph C. and Figueroa, Héctor**, *Elements of Noncommutative Geometry.* Birkhäuser Advanced Texts. (2000).

[17] **Haagerup, U. and Størmer, E.**, *Maximality of entropy in finite von Neumann algebras.* Invent. math. **132** (1998), 433-455.

[18] **Hansen, F.**, *An Operator Inequality.* Math. Ann. **246** (1980), 249-250.

[19] **Hansen, F. and Pedersen, G. K.**, *Jensen's Inequality for Operators and Löwner's Theorem.* Math. Ann. **258** (1982), 229-241.

[20] **Hansen, F. and Pedersen, G. K.**, *Jensen's Operator Inequality* arxiv:math.OA/0204049

[21] **Halmos, P.**, *A Hilbert space problem book.* Springer-Verlag. New York. (1982).

[22] **Jones, V. R. F.**, *von Neumann Algebras.* http:// math.berkeley.edu /∽ vfr/. Math 209. (2003).

[23] **Landsman, N. P.**, *Lecture Notes on C*-Algebras and Quantum Mechanics.* http://www.math.ru.nl/ ∽ landsman/ (1998)

[24] **Lang, S.** *SL(2,R).* Graduate Text in Mathematics. Vol.**105** Springer-Verlag, New York, (1985).

[25] **Man*e* , R.**, *Introdução à Teoria Ergódica.* Projeto Euclides, IMPA. (1983).

[26] **Murphy, G. J.**, *C^*-Algebras and operator theory.* Academic Press, San Diego (1990).

[27] **Nakamura,M. and Umegaki, H.**, *A note on the entropy for operator algebras.* Proc. Japan Acad., **37** (1961), 149-154.

[28] **Narnhofer, H. and Thirring, W.**, *C^*-dynamical systems for wich the tensor product formula for entropy fails.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1995), *15*, 961-968.

[29] **Ohya, M. and Petz, D.**, *Quantum Entropy and its Use.* Springer-Verlag. (1993)

[30] **Pedersen, G. K.**, *C*- Algebras and their Automorphism Groups.* Academic Press, London.

[31] **Pimsner, M. and Popa, S**, *Entropy and index for subfactors* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 19, (1986), 57-106.

[32] **Pedersen, G. K.**, *Analysis Now*. Graduate Texts in Mathematics. **118**. Springer-Verlag, New York, (1988).

[33] **Price, G.**, *The entropy of rational powers shifts*. Proc. of the Amer. math. Soc. **126** n° 6 (1998), 1715-1720.

[34] **Reed, M. and Simon, B.**, *Methods of Modern Mathematical Physics I*. Functional Analysis. Academic Press. New York (1980).

[35] **Exel, R.**, *Uma introdução às C^*-álgebras*. Mini-curso ministrado na Primeira Bienal de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática.UFMG.(2002).

[36] **Exel, R.**, *Von Neumann e a teoria de Álgebras de Operadores*. Estudos Avançados, 26 (1996), 211-225. http://www.mtm.ufsc.br/ exel/acad/publications.html

[37] **Størmer, E.**, *A survey of noncommutative dynamical entropy*. http://arxiv.org/abs/math/0007010

[38] **Sakai, S.**. *C *-algebras and W *-algebras*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[39] **Segal, I. E.**, *A Non-Commutative extension of abstract integration*. Annals of Mathematics. Vol.**57** N° 3, (1953), 401-457.

[40] **Shiryaev, Albert N.**, *Probability*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (1996).

[41] **Stinespring, W. F.**, *Positive Functions on C^*-algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 211-216.

[42] **Takesaki, M.**, *Theory of Operator Algebras I*. Springer-Verlag, New York, (1979).

[43] **Umegaki, H.**, *Conditional expectation in an operator algebra*. Tôhoku Math. J. **6** (1954), 177-181.

[44] **Walters, P.**, *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York, (1982).