Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ações de Grupóides e Ações Parciais de Grupos: Teoria de Morita e Dualidade

Tese de Doutorado

ANDREA MORGADO

Porto Alegre, 23 de outubro de 2013.

Tese submetida por Andrea Morgado*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (PPGMat - UFRGS, Orientador)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (PPGMat - UFRGS)
Prof. Dr. Daiana A. da Silva Flôres (PPGMat - UFSM)
Prof. Dr. Dirceu Bagio (PPGMat - UFSM)
Prof. Dr. Mikhailo Dokuchaev (IME-USP)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela excelente formação. À banca examinadora por todas as correções e sugestões feitas, pois contribuíram muito para o resultado final deste trabalho.

Agradeço em especial ao professor Antonio Paques pela orientação, por dividir seu conhecimento comigo, por sempre exigir mais do que eu podia fazer e por acreditar em mim, até mesmo quando eu não acreditava. Muito obrigada por tudo! Tenho certeza que neste período de doutorado só cresci como profissional.

Agradeço também aos meus pais, por me ensinarem que na vida temos que lutar por nossos objetivos. Além disso, por me darem todo o suporte necessário para que eu pudesse apenas estudar.

Ao Márcio, pelo imenso apoio. Por entender o quanto a vida acadêmica é importante para mim. À Duda por fazer meus dias mais felizes.

A todos os familiares e amigos os quais sabem que fizeram parte dessa trajetória.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar generalizações de resultados conhecidos na literatura, nos contextos de Ações Parciais de Grupos e de Ações de Grupóides, respectivamente. Dentre estes resultados, exploramos Teoria de Morita e Dualidade para Anéis Graduados [6, Theorem 2.7]. As principais estruturas envolvidas aqui são duas versões do produto smash definido em [17] dentro destes dois novos contextos.

Abstract

In this work we intend to show generalizations of known results in the literature in the context of Partial Actions of Groups and Groupoids Actions, respectively. Among this results, we explore Morita Theory and Duality for Graded Rings [6, Theorem 2.7]. The main structures involved here are two versions of smash products defined in [17] whithin these two new contexts.

Índice

Introdução

A noção de grupóide foi originalmente definida em 1926, por H. Brandt, em [4]. Normalmente um grupóide é definido como uma categoria pequena, na qual todo morfismo é invertível. Aqui, usaremos uma definição axiomática (ver [13]), a qual é equivalente a esta, e onde podemos perceber mais claramente a generalização que este conceito dá a noção de grupo. Para nós, um grupóide será um conjunto não vazio, munido de uma operação binária definida parcialmente, na qual sempre que elementos são operáveis, então são válidos os axiomas de grupo.

Por outro lado, a noção de ação parcial de grupos nasceu nos anos noventa, nos trabalhos de R. Exel em C^*-álgebras, podendo ser encontrada em [9], [7], [1], entre outros. Quando tratamos de ações globais de um grupo G em um conjunto X, consideramos um homomorfismo de grupos entre G e o grupo das bijeções de X, que a cada elemento do grupo associa uma bijeção. No caso de ações parciais, a cada elemento do grupo G associamos, sob certas condições, uma bijeção entre subconjuntos de X. Além disso, é fácil obter exemplos de ações parciais por restrições de ações globais.

Os principais resultados deste trabalho são baseados nos resultados de B. Torrecillas, C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen, S. Dascalescu e Zhou Borong, apresentados em [17], [16] e [6], e nos resultados de A. Paques e D. Bagio, apresentados em [3].

Para especificar um pouco mais sobre o que trataremos aqui, consideremos G um grupo, A um anel G-graduado com unidade e X um G-conjunto finito. A partir disto, podemos definir um novo produto smash (ver [17]), denotado $A\#X$, como sendo o A-módulo à esquerda livre com base $\{p_x : x \in X\}$ e multiplicação dada por $(a_g p_x)(b_h p_y) = (a_g b_h)p_y$, se $h \cdot y = x$, e $(a_g p_x)(b_h p_y) = 0$, caso contrário, para quaisquer $a_g p_x$, $b_h p_y \in A\#X$. O que faremos aqui é apresentar duas generalizações desta definição, uma considerando ações de grupóides em um conjunto finito X, e outra considerando ações parciais de grupos em um conjunto finito X. Vamos explorar propriedades e resultados para estes novos conceitos. Entre os resultados mais importantes generalizados no texto, destacamos contruções de contextos de Morita, equivalências de categorias e duas versões para o Teorema de Dualidade para Anéis Graduados (ver [6]).

No Capítulo 1, faremos uma síntese de definições e resultados já conhecidos na literatura, com a finalidade de obter pré-requisitos para uma boa leitura do texto. Dividimos este capítulo em duas seções. Na Seção 1.1, trataremos basicamente de noções e resultados no contexto de grupos, abordando a construção do produto smash $A\#X$, bem como algumas propriedades desta definição, a noção de ação parcial de grupos em conjuntos, existência da envolvente e a teoria de Galois para ações parciais. Na Seção 1.2, nos situaremos no contexto de grupóides. Apresentaremos definições como ações de grupóides em conjuntos, skew anel de grupóide, álgebra graduada por grupóide e a teoria de Galois para grupóides. A partir de todos estes conceitos, tanto no caso de grupos, como no caso de grupóides, abordaremos exemplos, propriedades e resultados relevantes. Uma observação importante a fazer, é que a teoria de Galois explorada aqui, nos dá ferramentas de essencial importância para a prova dos teoremas de Dualidade desenvolvidos neste trabalho.

No Capítulo 2, consideraremos G um grupóide, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e X um G-conjunto finito. Definiremos o produto smash para grupóides

$\bar{A}\#X$, onde $\bar{A}$ é o subanel de A dado por $\bar{A} = \bigoplus_{e\in G_0}\left(\bigoplus_{g\in G_e} A_g\right)$. Vamos apresentar exemplos e propriedades desta nova definição. Na Seção 2.2, construíremos uma imersão deste novo produto smash em um certo skew anel de grupóide $\bar{A} *_\beta P$, onde P é uma união disjunta de grupóides. Por último, na Seção 2.3, estabeleceremos uma equivalência entre a categoria dos $\bar{A}\#X$-módulos à esquerda, denotada $\bar{A}\#X - mod$, e a categoria dos $\bar{A}$-módulos graduados de tipo X, denotada $(G, X, \bar{A}) - gr$. Como uma aplicação desta equivalência, contruíremos um contexto de Morita, generalizando os resultados de C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen e Zhou Borong, apresentados em [16].

No Capítulo 3, apresentaremos um Teorema de Dualidade para Anéis Graduados por Grupóides, o qual generaliza o Teorema de Dualidade para Anéis Graduados, demonstrado por S. Dascalescu, C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen e B. Torrecillas, em [6].

No Capítulo 4, consideraremos G um grupo, $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade, X um conjunto finito e $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, uma ação parcial do grupo G no conjunto X. Sob estas condições, vamos definir o produto smash parcial, denotado $A\#X$. Na Seção 4.1 apresentaremos exemplos e propriedades desta nova definição. Na Seção 4.2, vamos exibir condições necessárias e suficientes para que o produto smash parcial $A\#X$ seja Morita equivalente ao produto smash global $A\#\bar{X}$, onde $(\bar{X}, \bar{\alpha})$ é a envolvente da ação parcial α (ver Teorema 1.3.5).

Por último, no Capítulo 5, apresentaremos um Teorema de Dualidade para Anéis Graduados, agora considerando ações parciais de grupo e o produto smash parcial $A\#X$. Este resultado também nos dá uma generalização de [6, Theorem 2.7].

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo introduzimos conceitos e resultados já conhecidos na literatura que serão essenciais para uma boa leitura do texto. Alguns destes serão enunciados sem suas demonstrações, as quais podem ser encontradas nas referências citadas.

1.1 O Produto Smash $A\#X$

Consideremos G um grupo. Conhecemos na literatura a noção de produto smash, a qual vem sendo muito usada para obter resultados de dualidade e equivalências de categorias. Em [17], C. Nastasescu, S. Raianu e F. Van Oystaeyen apresentaram uma generalização desta definição, na qual são considerados anéis G-graduados e G-conjuntos finitos.

Lembremos que um anel A é dito G-graduado, se existe uma família $\{A_g : g \in G\}$ de subgrupos do grupo aditivo de A, tal que $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, quaisquer que sejam g, $h \in G$. Além disso, dizemos que um conjunto X é um G-conjunto à esquerda, se existir um homomorfismo de grupos entre o grupo G e o grupo das bijeções do conjunto X. Com base nisto, podemos então definir o produto smash de [17].

Definição 1.1.1. [17] *Sejam G um grupo, $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e X um G-conjunto à esquerda finito. Definimos o produto smash $A\#X$, como sendo o A-módulo à esquerda livre com base $\{p_x : x \in X\}$, e multiplicação dada por*

$$(a_g p_x)(b_h p_y) = \begin{cases} a_g b_h p_y, & \textit{se } h \cdot y = x, \\ 0, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

para quaisquer que sejam g, $h \in G$, $a_g \in A_g$, $b_h \in A_h$ e x, $y \in X$.

Na próxima proposição listamos algumas propriedades decorrentes desta definição.

Proposição 1.1.2. [17, Proposition 2.11] *Nas condições anteriores:*

(i) $A\#X$ é um anel associativo, com unidade dada por $1_{A\#X} = \sum_{x\in X} 1_A p_x$;

(ii) $B = \{1_A p_x : x \in X\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais;

(iii) A aplicação $\eta : A \to A\#X$, dada por $\eta(a) = \sum_{x\in X} a p_x$, para todo $a \in A$, é um homomorfismo injetor de anéis;

(iv) Para quaisquer $a_g \in A_g$ e $x \in X$, $(1_A p_x)\eta(a_g) = a_g p_{g^{-1}\cdot x}$.

Demonstração:

(i) Sejam $a_g p_x$, $b_h p_y$ e $c_l p_z \in A\#X$. Temos que

$$(a_g p_x)\big((b_h p_y)(c_l p_z)\big) = \begin{cases} a_g b_h c_l p_z, & \text{se } l \cdot z = y \text{ e } hl \cdot z = x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\big((a_g p_x)(b_h p_y)\big)(c_l p_z) = \begin{cases} a_g b_h c_l p_z, & \text{se } h \cdot y = x \text{ e } l \cdot z = y, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos observar que se $l \cdot z = y$ e $hl \cdot z = x$, então $x = hl \cdot z = h \cdot (l \cdot z) = h \cdot y$. Reciprocamente, se $h \cdot y = x$ e $l \cdot z = y$, então $x = h \cdot y = h \cdot (l \cdot z) = hl \cdot z$. Dessa maneira, a multiplicação em $A\#X$ é associativa. Além disso, se $a_g p_y \in A\#X$, então

$$(a_g p_y)\left(\sum_{x \in X} 1_A p_x\right) = \sum_{x \in X} (a_g p_y)(1_A p_x) = \sum_{\substack{x \in X \\ 1_G \cdot x = y}} a_g 1_A p_x = a_g p_y.$$

Por outro lado,

$$\left(\sum_{x \in X} 1_A p_x\right)(a_g p_y) = \sum_{x \in X} (1_A p_x)(a_g p_y) = \sum_{\substack{x \in X \\ x = g \cdot y}} 1_A a_g p_y = a_g p_y.$$

Assim, $A\#X$ é um anel associativo, com unidade dada por $1_{A\#X} = \sum\limits_{x \in X} 1_A p_x$.

(ii) Sejam $1_A p_x$ e $1_A p_y \in B$. Então,

$$\begin{aligned}(1_A p_x)(1_A p_y) &= \begin{cases} 1_A p_y, & \text{se } 1_G \cdot y = x, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1_A p_y, & \text{se } y = x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

(iii) A boa definição e injetividade da aplicação η segue diretamente da definição de $A\#X$. Agora, se considerarmos a_g, $b_h \in A$, então

$$\begin{aligned}\eta(a_g)\eta(b_h) &= \left(\sum_{x \in X} a_g p_x\right)\left(\sum_{y \in X} b_h p_y\right) = \sum_{x \in X}\sum_{y \in X} (a_g p_x)(b_h p_y) \\ &= \sum_{y \in X} \sum_{\substack{x \in X \\ x = h \cdot y}} a_g b_h p_y = \sum_{y \in X} a_g b_h p_y = \eta(a_g b_h).\end{aligned}$$

Observemos que na sequência de igualdades acima, para cada $y \in X$, existe um único $x \in X$, tal que $h \cdot y = x$. Além disso, claramente temos que $\eta(1_A) = 1_{A\#X}$.

(iv) Se $a_g \in A_g$ e $x \in X$, então

$$(1_A p_x)\eta(a_g) = (1_A p_x)\left(\sum_{y \in X} a_g p_y\right) = \sum_{y \in X} (1_A p_x)(a_g p_y) = \sum_{\substack{y \in X \\ g \cdot y = x}} a_g p_y = a_g p_{g^{-1} \cdot x}.$$

■

Sejam $finG - set$, a categoria dos G-conjuntos à esquerda finitos, e $\varphi : X \to Y$ um morfismo nesta categoria, isto é, $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$, para quaisquer $g \in G$ e $x \in X$. Definimos a aplicação $\varphi^* : A\#Y \to A\#X$, por $\varphi^*(a_g p_y) = \sum\limits_{\substack{x \in X \\ \varphi(x)=y}} a_g p_x$, para todo $a_g p_y \in A\#Y$. Se não existir $x \in X$, tal que $\varphi(x) = y$, então convencionamos que $\varphi^*(a_g p_y) = 0$. A próxima proposição nos diz que $\varphi^* : A\#Y \to A\#X$ é um homomorfismo de anéis, implicando que o funtor $F : finG - set \to Rings$, tal que $F(X) = A\#X$ e $F(\varphi) = \varphi^*$, é um funtor contravariante.

Proposição 1.1.3. [6, Proposition 2.1] *Se $\varphi : X \to Y$ é um morfismo na categoria $finG - set$, então $\varphi^* : A\#Y \to A\#X$ é um homomorfismo de anéis.*

Demonstração: Consideremos $a_g p_{y_1}$, $b_h p_{y_2} \in A\#Y$. Queremos mostrar que $\varphi^*((a_g p_{y_1})(b_h p_{y_2})) = \varphi^*(a_g p_{y_1})\varphi^*(b_h p_{y_2})$. Vamos dividir a prova em dois casos:

<u>Caso 1</u>: $h \cdot y_2 = y_1$.

Neste caso, podemos observar que existe $z_1 \in X$, tal que $\varphi(z_1) = y_1$ se, e somente se, existe $z_2 \in X$, tal que $\varphi(z_2) = y_2$. De fato, se existe $z_1 \in X$, tal que $\varphi(z_1) = y_1$, então $\varphi(z_1) = y_1 = h \cdot y_2$, ou seja, $y_2 = h^{-1} \cdot \varphi(z_1) = \varphi(h^{-1} \cdot z_1)$. Reciprocamente, se existe $z_2 \in X$, tal que $\varphi(z_2) = y_2$, então $\varphi(z_2) = y_2 = h^{-1} \cdot y_1$, ou seja, $y_1 = h \cdot \varphi(z_2) = \varphi(h \cdot z_2)$. Logo, podemos supor, sem perda de generalidade que existe $z_2 \in X$, tal que $\varphi(z_2) = y_2$. Nestas hipóteses, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi^*(a_g p_{y_1})\varphi^*(b_h p_{y_2}) &= \Bigg(\sum_{\substack{z \in X \\ \varphi(z)=y_1}} a_g p_z \Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{w \in X \\ \varphi(w)=y_2}} b_h p_w \Bigg) \\
&= \sum_{\substack{z \in X \\ \varphi(z)=y_1}} \sum_{\substack{w \in X \\ \varphi(w)=y_2}} (a_g p_z)(b_h p_w) \\
&= \sum_{\substack{w \in X \\ \varphi(w)=y_2}} \sum_{\substack{z \in X \\ \varphi(z)=y_1 \\ z=h\cdot w}} a_g b_h p_w,
\end{aligned}$$

onde, para cada $w \in X$, com $\varphi(w) = y_2$, existe único $z \in X$, tal que $z = h \cdot w$.

Além disso, $\varphi(z) = \varphi(h \cdot w) = h \cdot \varphi(w) = h \cdot y_2 = y_1$. Logo,

$$\varphi^*(a_g p_{y_1})\varphi^*(b_h p_{y_2}) = \sum_{\substack{w \in X \\ \varphi(w)=y_2}} a_g b_h p_w = \varphi^*(a_g b_h p_{y_2}) = \varphi^*((a_g p_{y_1})(b_h p_{y_2})).$$

Dessa maneira, se $h \cdot y_2 = y_1$ e existe $z_2 \in X$ tal que $\varphi(z_2) = y_2$, então $\varphi^*((a_g p_{y_1})(b_h p_{y_2})) = \varphi^*(a_g p_{y_1})\varphi^*(b_h p_{y_2})$.

Suponhamos que não existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) = y_2$. Então, pelos cálculos anteriores, temos que $\varphi^*((a_g p_{y_1})(b_h p_{y_2})) = 0 = \varphi^*(a_g p_{y_1})\varphi^*(b_h p_{y_2})$.

Caso 2: $h \cdot y_2 \neq y_1$.

Temos que $\varphi^*((a_g p_{y_1})(b_h p_{y_2})) = 0$. Suponhamos que $\varphi^*(a_g p_{y_1})\varphi^*(b_h p_{y_2}) \neq 0$, então, novamente pelos cálculos anteriores, existe $z \in X$, tal que $\varphi(z) = y_1$ e $z = h \cdot w$, para algum $w \in X$, tal que $\varphi(w) = y_2$. Assim, $y_1 = \varphi(z) = \varphi(h \cdot w) = h \cdot \varphi(w) = h \cdot y_2$, o que é um absurdo. Portanto, $\varphi^*((a_g p_{y_1})(b_h p_{y_2})) = 0 = \varphi^*(a_g p_{y_1})\varphi^*(b_h p_{y_2})$.

Dessa maneira, φ^* é multiplicativa. Claramente, $\varphi^*(1_{A\#Y}) = 1_{A\#X}$. ■

Vamos encerrar esta seção com mais um resultado envolvendo categorias. Denotaremos por $A\#X - mod$, a categoria dos $A\#X$-módulos à esquerda unitários. A outra categoria a ser considerada depende da próxima definição.

Definição 1.1.4. [16] *Sejam G um grupo, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e X um G-conjunto finito. Dizemos que um A-módulo à esquerda unitário M é A-módulo graduado de tipo X, se $M = \bigoplus_{x \in X} M_x$, tal que M_x é subgrupo do grupo aditivo de M, para cada $x \in X$, e $A_g M_x \subseteq M_{g \cdot x}$, para quaisquer $g \in G$ e $x \in X$.*

Consideremos agora a categoria dos A-módulos graduados de tipo X, denotada por $(G, X, A) - gr$. Se $\varphi : M \to N$ é um morfismo nesta categoria, então φ é A-linear e $\varphi(M_x) \subseteq N_x$, para todo $x \in X$. O próximo resultado estabelece um isomorfismo entre as categorias $A\#X - mod$ e $(G, X, A) - gr$.

Teorema 1.1.5. [16, Theorem 2.1(2)] *Nas condições anteriores, existe um isomorfismo de categorias entre $A\#X - mod$ e $(G, X, A) - gr$.*

Demonstração: Consideremos $M \in A\#X - mod$. Pela Proposição 1.1.2, temos que M é um A-módulo à esquerda unitário via $a \cdot m = \eta(a)m$, para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$. Agora, para cada $x \in X$, definimos $M_x = (1_A p_x)M$. Se $m \in M$, então $m = 1_{A\#X}m = \left(\sum_{x\in X} 1_A p_x\right)m = \sum_{x\in X}(1_A p_x)m \in \sum_{x\in X} M_x$. Além disso, se $m \in M_x \cap \left(\sum_{y\neq x} M_y\right)$, então $m = (1_A p_x)m' = \sum_{y\neq x}(1_A p_y)m^y$. Novamente, pela Proposição 1.1.2 (ii), temos que

$$m = (1_A p_x)m = (1_A p_x)\left(\sum_{y\neq x}(1_A p_y)m^y\right) = \sum_{y\neq x}(1_A p_x)(1_A p_y)m^y = 0.$$

Assim, $M = \bigoplus_{x\in X} M_x$. Por último, se $a_g \in A$ e $m \in M_x$, para $x \in X$, temos que $m = (1_A p_x)m'$. Logo,

$$\begin{aligned} a_g \cdot m = \eta(a_g)((1_A p_x)m') &= \left(\sum_{y\in X} a_g p_y\right)((1_A p_x)m') = \sum_{y\in X}(a_g p_y)(1_A p_x)m' \\ &= (a_g p_x)m' = (1_A p_{g\cdot x})((a_g p_x)m') = (1_A p_{g\cdot x})m'' \in M_{g\cdot x}. \end{aligned}$$

Portanto, M é um A-módulo graduado de tipo X. Mais ainda, se $\varphi : M \to M'$ é um morfismo em $A\#X - mod$, então $\varphi(a \cdot m) = \varphi(\eta(a)m) = \eta(a)\varphi(m) = a \cdot \varphi(m)$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $m \in M$. Se $m = (1_A p_x)m' \in M_x$, então $\varphi(m) = \varphi((1_A p_x)m') = (1_A p_x)\varphi(m') \in M'_x$. Portanto, φ é um morfismo em $(G, X, A) - gr$.

Reciprocamente, consideremos $N \in (G, X, A) - gr$. Definimos $(ap_x) \cdot n = an_x$, quaisquer que sejam $ap_x \in A\#X$ e $n \in N$. Temos que N é um $A\#X$-módulo à esquerda unitário via esta ação. De fato, sejam $a_g p_x, b_h p_y \in A\#X$ e $n \in N$. Assim,

$$\begin{aligned} \big((a_g p_x)(b_h p_y)\big) \cdot n &= \begin{cases} (a_g b_h p_y) \cdot n, & \text{se } h \cdot y = x, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_g b_h n_y, & \text{se } h \cdot y = x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado, segue que $(a_g p_x)\cdot((b_h p_y)\cdot n) = (a_g p_x)\cdot(b_h n_y) = a_g(b_h n_y)_x$. Como $N \in (G, X, A) - gr$ e $b_h n_y \in N_{h\cdot y}$, temos

$$(a_g p_x) \cdot ((b_h p_y) \cdot n) = \begin{cases} a_g b_h n_y, & \text{se } h \cdot y = x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mais ainda, se $n \in N$, então é fácil ver que $1_{A\#X} \cdot n = n$. Portanto, N é um $A\#X$-módulo à esquerda unitário. Por último, considere $\psi : N \to N'$ um morfismo em $(G, X, A)-gr$. Se $n \in N$ e $ap_x \in A\#X$, então $\psi((ap_x)\cdot n) = \psi(an_x) = a\psi(n_x) = a(\psi(n))_x = ap_x \cdot \psi(n)$. Logo, ψ é um morfismo em $A\#X - mod$. ■

1.2 Grupóides e Propriedades

1.2.1 Grupóides

A noção de grupóide é uma generalização da noção de grupo, no sentido de que um grupóide é um conjunto não-vazio, onde nem todos os elementos são operáveis, mas quando são, as condições usuais de grupo devem valer nesse contexto. Neste caso, temos que todo grupo é um grupóide. Usualmente os grupóides são apresentados como sendo uma categoria pequena, na qual cada morfismo é invertível. De fato, essas duas definições são equivalentes, mas é a primeira que nos interessa aqui.

Definição 1.2.1. [13] *Seja G um conjunto não-vazio equipado com uma operação binária definida parcialmente, que será denotada pela concatenação. Se g, $h \in G$, escrevemos $\exists gh$, sempre que o produto gh estiver definido. O conjunto G é chamado um grupóide, se*

$(G1)$ para quaisquer g, h, $l \in G$, $\exists g(hl)$ se, e somente se, $\exists (gh)l$, e neste caso são iguais;

$(G2)$ para quaisquer g, h, $l \in G$, $\exists g(hl)$ se, e somente se, $\exists gh$ e $\exists hl$;

($G3$) para cada $g \in G$, existem (únicos) elementos $r(g)$, $d(g) \in G$ tais que $\exists r(g)g$ e $\exists gd(g)$, onde $r(g)g = g = gd(g)$;

($G4$) para cada $g \in G$, existe um elemento $g^{-1} \in G$, tal que $r(g) = gg^{-1}$ e $d(g) = g^{-1}g$.

Um elemento $e \in G$ é chamado uma identidade de G, se $e = d(g) = r(g^{-1})$, para algum $g \in G$. Neste caso, e é chamado identidade domínio de g e identidade imagem de g^{-1}. Para o que segue, vamos considerar os conjuntos:

(1) $G_e = \{g \in G : d(g) = e = r(g)\}$,

(2) $S_e = \{g \in G : d(g) = e\}$,

(3) $T_e = \{g \in G : r(g) = e\}$,

para cada $e \in G_0$. É fácil ver que G_e é um grupo com unidade dada por e. Este será chamado de grupo principal associado a e. Além disso, denotaremos por G^2 o conjunto dos pares $(g, h) \in G \times G$, tais que o elemento gh existe.

O lema a seguir listará algumas propriedades as quais decorrem da definição de grupóides.

Lema 1.2.2. *Consideremos G um grupóide. Então, são válidas as seguintes propriedades:*

(1) Para todo $g \in G$, o elemento g^{-1} satisfazendo $g^{-1}g = d(g)$ e $gg^{-1} = r(g)$ é unicamente determinado;

(2) Para todo $g \in G$, $d(g^{-1}) = r(g)$ e $r(g^{-1}) = d(g)$;

(3) Para todo $g \in G$, $(g^{-1})^{-1} = g$;

(4) Para todo g, $h \in G$, $(g, h) \in G^2$ se, e somente se, $d(g) = r(h)$;

(5) Para todo g, $h \in G$, $(h^{-1}, g^{-1}) \in G^2$ se, e somente se, $(g, h) \in G^2$ e, neste caso, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$;

(6) *Para todo* $(g,h) \in G^2$, $d(gh) = d(h)$ *e* $r(gh) = r(g)$;

(7) *Para todo* $e \in G_0$, $d(e) = r(e) = e$ *e* $e^{-1} = e$;

(8) *Para todo* $(g,h) \in G^2$, $gh \in G_0$ *se, e somente se,* $g = h^{-1}$;

(9) *Para todo* g, $h \in G$, *existe* $l \in G$ *tal que* $g = hl$ *se, e somente se,* $r(g) = r(h)$;

(10) *Para todo* g, $h \in G$, *existe* $l \in G$ *tal que* $g = lh$ *se, e somente se,* $d(g) = d(h)$.

A seguir veremos alguns exemplos de grupóides.

Exemplo 1.2.3. Todo grupo G é um grupóide, onde todos seus elementos são operáveis e $r(g) = d(g) = 1_G$, para todo $g \in G$.

Exemplo 1.2.4. A união disjunta de grupos $\dot{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ é um grupóide, onde dois elementos g, $h \in \dot{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ são operáveis se, e somente se, g e h pertencem ao mesmo G_λ.

Exemplo 1.2.5. A união disjunta de grupóides $\dot{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ é um grupóide, onde dois elementos g, $h \in \dot{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ são operáveis se, e somente se, g e h pertencem a algum G_λ e são operáveis em G_λ.

Exemplo 1.2.6. Seja I um conjunto não-vazio. Considere em $I \times I$ a operação binária parcial:

$$\exists(i,j)(l,k) \text{ se, e somente se, } j = l \text{ e, neste caso, } (i,j)(l,k) = (i,k).$$

Com esta operação temos que $I \times I$ torna-se um grupóide, onde $d(i,j) = (j,j)$, $r(i,j) = (i,i)$ e $(i,j)^{-1} = (j,i)$, para todo $(i,j) \in I \times I$. Neste exemplo podemos observar que $G_0 = \{(i,j) \in I \times I : i = j\}$.

Exemplo 1.2.7. Seja G um grupo agindo por bijeções em um conjunto X. Em $X \times G$, definimos a seguinte operação parcial:

$$\exists(x,g)(y,h) \text{ se, e somente se, } h \cdot y = x \text{ e, neste caso, } (x,g)(y,h) = (y,gh).$$

O conjunto $X \times G$ com essa multiplicação parcial será denotado $P(X,G)$. Temos que $P(X,G)$ é um grupóide, onde $d(x,g) = (x, 1_G)$, $r(x,g) = (g \cdot x, 1_G)$ e $(x,g)^{-1} = (g \cdot x, g^{-1})$.

Vamos agora apresentar mais definições e propriedades conhecidas envolvendo grupóides.

Definição 1.2.8. *Sejam G um grupóide e H um subconjunto não-vazio de G. Dizemos que H é um subgrupóide de G se satisfaz as seguintes condições:*

(i) Para todo g, $h \in H$, se $\exists gh$, então $gh \in H$;

(ii) Se $g \in H$, então $g^{-1} \in H$, para todo $g \in G$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2.9. Seja G um grupóide e considere $G_0 \subseteq G$. Claramente, G_0 é um subgrupóide de G.

Exemplo 1.2.10. No Exemplo 1.2.7, considere $H \subseteq G$ um subgrupo. É fácil ver que $P(X,H)$ é um subgrupóide de $P(X,G)$.

Quando tratamos de grupóides, outra definição que nos cabe mencionar é a de subgrupóide normal. A partir da noção de subgrupóide normal, bem como no caso de grupos, vamos poder considerar o subgrupóide quociente.

Definição 1.2.11. *Consideremos G um grupóide e H um subgrupóide de G. Para todo $g \in G$, definimos o subconjunto*

$$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg : r(h) = r(g) = d(h)\}.$$

Dizemos que H é normal, se o subconjunto $g^{-1}Hg \neq \varnothing$ e $g^{-1}Hg \subseteq H$, para todo $g \in G$.

Vejamos alguns exemplos de subgrupóides normais.

Exemplo 1.2.12. Seja G um grupóide. Então G_0 é um subgrupóide normal de G.

Exemplo 1.2.13. Pelo Exemplo 1.2.4, temos que a união disjunta de grupos $\dot{\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda}} G_\lambda$ é um grupóide. Agora, para cada $\lambda \in \Lambda$, considere H_λ um subgrupo normal de G_λ. Temos que $\dot{\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda}} H_\lambda$ é um subgrupóide normal de $\dot{\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda}} G_\lambda$.

Exemplo 1.2.14. Seja $P(X, G)$ como no Exemplo 1.2.7. Se considerarmos H um subgrupo normal de G, temos que $P(X, H)$ é um subgrupóide normal de $P(X, G)$.

Nossa próxima definição nos fornecerá uma classe de exemplos de subgrupóides normais.

Definição 1.2.15. *Dizemos que um grupóide G é abeliano, se satisfaz as seguintes condições:*

(*i*) *Para cada $g \in G$, $r(g) = d(g)$;*

(*ii*) *Para cada g, $h \in G$ tal que $d(g) = r(h)$, $gh = hg$.*

Com isso, temos que todo o subgrupóide H de um grupóide abeliano G é normal, pois $g^{-1}Hg = H$, para todo $g \in G$.

Queremos agora apresentar a construção do grupóide quociente G/H, onde H é um subgrupóide normal do grupóide G. Para isso, necessitaremos das próximas definições e resultados.

Definição 1.2.16. *Seja G um grupóide e $\equiv$ uma relação de equivalência em G. Suponhamos que $\bar{g}$ denote a classe de equivalência de $g \in G$. Dizemos que $\equiv$ é uma congruência, se para quaisquer g, h, k, $l \in G$, tais que $\exists gh$ e $\exists kl$, $\bar{g} = \bar{k}$ e $\bar{h} = \bar{l}$, então $\overline{gh} = \overline{kl}$.*

Definição 1.2.17. *Consideremos G um grupóide e H um subgrupóide de G. Dizemos que H é amplo de $H_0 = G_0$.*

Observação 1.2.18. *Notemos que se H é um subgrupóide normal de G, então H é amplo.*

De fato, pela definição de subgrupóide normal, temos que $g^{-1}Hg \neq \varnothing$, para todo $g \in G$. Dessa maneira, se $g \in G$, então existe $h \in H$, tal que $r(g) = r(h) = d(h)$. Assim, $r(g) \in H$, para todo $g \in G$, o que implica $G_0 \subseteq H$. Portanto, $G_0 = H_0$.

Lema 1.2.19. *Sejam G um grupóide e H um subgrupóide amplo de G. Defina em G a seguinte relação $\equiv_H$: para todo g, $k \in G$, $g \equiv_H k$ se, e somente se, $r(k) = r(g)$ e $k^{-1}g \in H$. Então, $\equiv_H$ é uma relação de equivalência. Mais ainda, se H é um subgrupóide normal, então $\equiv_H$ é uma congruência.*

Demonstração: Provemos primeiramente que $\equiv_H$ é uma relação de equivalência:

(i) $g \equiv_H g$, para todo $g \in G$, pois $g^{-1}g = d(g) \in G_0 = H_0 \subseteq H$;

(ii) Sejam g, $k \in G$, tais que $g \equiv_H k$, logo $r(k) = r(g)$ e $k^{-1}g \in H$. Assim, existe $h \in H$ tal que $h = k^{-1}g$. Como H é um subgrupóide de G, temos que $h^{-1} = (k^{-1}g)^{-1} = g^{-1}k \in H$, ou seja, $k \equiv_H g$;

(iii) Sejam g, k, $l \in G$, tais que $g \equiv_H k$ e $k \equiv_H l$. Logo, $r(k) = r(g)$, $r(l) = r(k)$, $k^{-1}g \in H$ e $l^{-1}k \in H$. Notemos que $d(l^{-1}) = r(l) = r(k) = r(g)$, logo existe $l^{-1}g$. Além disso, $d(l^{-1}k) = d(k) = r(k^{-1}) = r(k^{-1}g)$, logo existe $l^{-1}kk^{-1}g$ e, como H é um subgrupóide de G e $l^{-1}k$, $k^{-1}g \in H$, segue então que $l^{-1}g = l^{-1}r(g)g = l^{-1}r(k)g = l^{-1}kk^{-1}g \in H$. Assim, $g \equiv_H l$.

Portanto, $\equiv_H$ define uma relação de equivalência.

Suponhamos agora que H é um subgrupóide normal de G. Consideremos g, k, l e $t \in G$, tais que $\exists gk$, $\exists lt$, $g \equiv_H l$ e $k \equiv_H t$. Logo, $r(l) = r(g)$, $r(t) = r(k)$, $l^{-1}g \in H$ e $t^{-1}k \in H$. Notemos que $r(lt) = r(l) = r(g) = r(gk)$, então existe $(lt)^{-1}gk$. Mais ainda, $l^{-1}g \in H$ e H é normal, o que implica $(lt)^{-1}gk = t^{-1}l^{-1}gk \in t^{-1}Hk \subseteq H$. Portanto, $gk \equiv_H lt$ e, sendo assim, $\equiv_H$ é uma congruência. ■

Nas condições do lema anterior, temos que a classe de equivalência de um elemento $g \in G$ é dada por $gH = \{gh : h \in H \text{ e } r(h) = d(g)\}$. Além disso, notemos que se H é normal, então H é amplo. Logo, $G_0 = H_0 \subseteq H$, implicando assim que $gH \neq \varnothing$, para todo $g \in G$. A partir da contrução feita até agora, podemos enfim considerar o grupóide G/H, através do próximo lema.

Lema 1.2.20. *Consideremos G um grupóide, H um subgrupóide normal de G e $\equiv_H$ a relação de equivalência em G, dada no lema anterior. Então, G/H é um grupóide com multiplicação definida por:*

$$gHkH = gkH, \text{ se } d(g) = r(k).$$

Chamamos G/H de grupóide quociente.

Demonstração: Como H é um subgrupóide normal, então $\equiv_H$ é uma congruência. Logo, a operação em G/H está bem definida. As demais propriedades da definição de grupóide são de fácil verificação. Notemos que $r(gH) = r(g)H$, $d(gH) = d(g)H$ e $(gH)^{-1} = g^{-1}H$, para todo $g \in G$. ■

1.2.2 G-conjuntos

Apresentaremos agora a definição de G-conjunto para um grupóide G, a qual é de suma importância neste texto. No Capítulo 2, daremos uma definição de produto smash que depende fortemente da noção de G-conjunto.

Definição 1.2.21. [20, Definição 2.2.1] *Sejam G um grupóide e X um conjunto. Uma ação de G em X é uma coleção de subconjuntos $X_g \subseteq X$ $(g \in G)$ e bijeções $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$, tais que $X_g = X_{r(g)}$, e são satisfeitas as seguintes propriedades:*

(i) $\alpha_e : X_e \to X_e$ é a aplicação identidade em X_e, para todo $e \in G_0$;

(ii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para quaisquer g, $h \in G$ tal que $d(g) = r(h)$ e para todo $x \in X_{h^{-1}} = X_{(gh)^{-1}}$.

Neste caso, dizemos que X é um G-conjunto.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2.22. Sejam G um grupóide e $H \subseteq G$ um subgrupóide. Se escrevermos $X = G$, então definimos $X_h = T_{r(h)} = \{g \in G : r(g) = r(h)\}$ e $\alpha_h : X_{h^{-1}} \to X_h$, por $\alpha_h(l) = hl$, para quaisquer $l \in X_{h^{-1}}$ e $h \in H$. Note que α_h está bem definida, pois se $l \in X_{h^{-1}} = T_{r(h^{-1})}$, então $d(h) = r(h^{-1}) = r(l)$ e $r(hl) = r(h)$. As demais propriedades são facilmente verificadas. Logo, $X = G$ é um H-conjunto via $\alpha = (\{X_h\}_{h \in H}, \{\alpha_h\}_{h \in H})$. Em particular, todo grupóide G é um G-conjunto.

Exemplo 1.2.23. Sejam novamente G um grupóide e H um subgrupóide normal de G. Consideremos também a relação de equivalência $\equiv_H$, dada no Lema 1.2.19. Então, como um caso particular do exemplo anterior, temos que se $X = G/H$, então X é um G/H-conjunto via $\alpha = (\{X_{lH}\}_{lH \in G/H}, \{\alpha_{lH}\}_{lH \in G/H})$, tal que $X_{lH} = T_{r(lH)}$ e $\alpha_{lH} : X_{(lH)^{-1}} \to X_{lH}$ é definida por $\alpha_{lH}(kH) = lHkH$, onde $kH \in X_{(lH)^{-1}}$.

Exemplo 1.2.24. [20, Exemplo 2.2.3] Sejam G um grupóide e H um subgrupóide normal de G. Consideremos também a relação de equivalência $\equiv_H$, dada no Lema 1.2.19. Então o conjunto das classes de equivalência $G/H = \{gH : g \in G\}$ é um G-conjunto. Para $X = G/H$, definimos $X_g = \{lH \in G/H : l \in T_{r(g)}\}$, para todo $g \in G$, e $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$, por $\alpha_g(lH) = glH$, para $lH \in X_{g^{-1}}$. Note que α_g está bem definida, já que $r(l) = r(g^{-1}) = d(g)$ e $r(gl) = r(g)$. As demais propriedades são facilmente verificadas.

Exemplo 1.2.25. Consideremos G um grupóide e $H \subseteq G$ um subgrupóide. Sendo assim, $X = G$ é um H-conjunto via $\alpha = (\{X_h\}_{h \in H}, \{\alpha_h\}_{h \in H})$, onde $X_h = S_{r(h)} = \{g \in G : d(g) = r(h)\}$ e $\alpha_h : X_{h^{-1}} \to X_h$, é dada por $\alpha_h(l) = lh^{-1}$, para quaisquer $l \in X_{h^{-1}}$ e $h \in H$.

Se X e Y são G-conjuntos, é natural introduzir a definição de homomorfismo de G-conjuntos e é o que faremos agora.

Definição 1.2.26. [20, Definição 2.2.7] *Consideremos X e Y dois G-conjuntos via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$, respectivamente. Dizemos que $\varphi : X \to Y$ é um homomorfismo de G-conjuntos, se satisfaz:*

(i) $\varphi(X_g) \subseteq Y_g$, para todo $g \in G$;

(ii) $\varphi(\alpha_g(x)) = \beta_g(\varphi(x))$, para todo $x \in X_{g^{-1}}$.

1.2.3 Álgebras Graduadas por Grupóides

Outro conceito de muita importância para a construção do produto smash, feita no Capítulo 2, é a de uma K-álgebra G-graduada A, onde G é um grupóide.

Definição 1.2.27. [15] *Sejam K um anel comutativo, A uma K-álgebra com unidade e G um grupóide. Dizemos que A é G-graduada, se existe um conjunto $\{A_g\}_{g\in G}$ de K-submódulos de A, tais que*

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g,$$

e para quaisquer g, $h \in G$, temos

$$A_g A_h \begin{cases} \subseteq A_{gh}, & se\ d(g) = r(h), \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Se $A_gA_h = A_{gh}$, para todo g, $h \in G$, tal que $d(g) = r(h)$, então dizemos que A é fortemente G-graduada.

Exemplo 1.2.28. Seja G um grupóide finito. Se K é um anel comutativo, então podemos definir a álgebra de grupóide, $KG = \bigoplus_{g\in G} Ku_g$, como sendo o K-módulo livre com base $\{u_g : g \in G\}$ e multiplicação definida por

$$u_g u_h = \begin{cases} u_{gh}, \text{ se } d(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

para g, $h \in G$. A unidade em KG é dada por $1_{KG} = \sum_{e\in G_0} u_e$. É fácil ver que KG é uma álgebra G-graduada.

Vejamos uma propriedade sobre K-álgebras G-graduadas.

Proposição 1.2.29. [14, Proposition 2.2] *Se G é um grupóide, tal que G_0 é finito, e A é uma K-álgebra com unidade G-graduada, então A_e é um subanel de A, para cada $e \in G_0$, e $1_A \in \bigoplus_{e\in G_0} A_e$.*

Demonstração: Pela definição de K-álgebra G-graduada, temos que $A_eA_e \subseteq A_e$, de onde segue que A_e é um subanel de A. Consideremos $1_A = \sum_{g\in G} a_g$ e $b_h \in A_h$. Então, $b_h = 1_A b_h = \sum_{g\in G} a_g b_h$. Para $g \notin S_{r(h)}$, temos que $a_g b_h = 0$. Sendo assim, $b_h \in \sum_{g\in S_{r(h)}} A_{gh}$. Entretanto, $b_h \in A_h$ e $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, logo $a_g b_h = 0$, para todo $g \in S_{r(h)}$, tal que $a_g b_h \notin A_h$, ou seja, $a_g b_h = 0$, para todo $g \in S_{r(h)}$, tal que $gh \neq h$. Assim, $a_g b_h = 0$, para todo $g \in S_{r(h)}$, tal que $g \neq r(h)$. Logo, para que se tenha $a_g b_h \neq 0$, devemos ter $g = r(h)$. Consideremos $b = \sum_{h\in G} b_h \in A$ arbitrário. Então, se $g \notin G_0$, segue que $a_g b_h = 0$, para todo $h \in G$, pois não existirá $h \in G$, tal que $g = r(h)$. Logo, $a_g b = 0$, se $g \notin G_0$, para todo $b \in A$. Portanto, $1_A \in \bigoplus_{e\in G_0} A_e$. ■

Observação 1.2.30. *Se A é uma K-álgebra G-graduada, então A_e tem unidade para cada $e \in G_0$.*

De fato, pela proposição anterior, temos que $1_A \in \bigoplus_{e\in G_0} A_e$, logo podemos escrever $1_A = \sum_{e\in G_0} 1_e$. Disto segue que, para cada $f \in G_0$, $a_f = a_f 1_A = a_f\left(\sum_{e\in G_0} 1_e\right) = \sum_{e\in G_0} a_f 1_e = a_f 1_f$. Analogamente, mostramos que $a_f = 1_f a_f$.

1.2.4 Teorias de Morita e Galois

Queremos introduzir conceitos e resultados sobre as Teoria de Morita e Galois para Grupóides. Esta seção nos fornecerá fortes ferramentas para a prova do Teorema de Dualidade no Capítulo 3.

Definição 1.2.31. [2] *Sejam G um grupóide, K um anel comutativo e R uma K-álgebra unitária. Uma ação de G sobre R é um par $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$, onde* *para cada $g \in G$, $E_g = E_{r(g)}$ é um ideal de R e $\beta_g : E_{g^{-1}} \to E_g$ é um isomorfismo de K-álgebras satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\beta_e : E_e \to E_e$ é a aplicação identidade em E_e, para todo $e \in G_0$;

(ii) $\beta_g(\beta_h(x)) = \beta_{gh}(x)$, para quaisquer g, $h \in G$ tais que $d(g) = r(h)$ e para todo $x \in E_{h^{-1}} = E_{(gh)^{-1}}$.

Exemplo 1.2.32. [2] Consideremos o grupóide $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$ e a K-álgebra R dada por $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, tal que e_1, e_2, e_3 e e_4 são idempotentes dois a dois ortogonais, cuja a soma é 1_R. Definimos $E_g = E_{r(g)} = Ke_3 \oplus Ke_4$, $E_{g^{-1}} = E_{d(g)} = Ke_1 \oplus Ke_2$, $\beta_{r(g)} = I_{E_{r(g)}}$, $\beta_{d(g)} = I_{E_{d(g)}}$, $\beta_g(xe_1 + ye_2) = xe_3 + ye_4$ e $\beta_{g^{-1}}(xe_3 + ye_4) = xe_1 + ye_2$, para quaisquer x, $y \in K$. Assim definida, é fácil ver que $\beta = (\{E_h\}_{h \in G}, \{\beta_h\}_{h \in G})$ é uma ação de G em R.

Para os próximos resultados, vamos considerar $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G, tal que G_0 é finito, sobre uma K-álgebra com unidade R, onde E_e é unitário com unidade 1_e, para todo $e \in G_0$. Suponhamos também que $R = \bigoplus\limits_{e \in G_0} E_e$.

Definição 1.2.33. [3] *Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra com unidade R, tal que E_e é unitário com unidade 1_e, para todo $e \in G_0$. A subálgebra dos elementos invariantes sobre a ação de β é definida por $R^\beta = \{x \in R : \beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g,\ \forall g \in G\}$.*

Definimos também a aplicação traço, $tr_\beta : R \to R$, por $tr_\beta(r) = \sum\limits_{g\in G} \beta_g(r1_{g^{-1}})$, para todo $r \in R$. Esta aplicação, bem como a próxima proposição, é de fundamental importância para as teorias de Morita e Galois desenvolvidas aqui.

Proposição 1.2.34. [3, Lemma 4.2] *A aplicação $tr_\beta : R \to R$ é um homomorfismo de (R^β, R^β)-bimódulos. Além disso,*

(i) $tr_\beta(R) \subseteq R^\beta$;

(ii) $tr_\beta(\beta_g(r)) = tr_\beta(r)$*, para quaisquer* $r \in E_{g^{-1}}$ *e* $g \in G$*.*

Demonstração: Um cálculo simples mostra que tr_β é um homomorfismo de (R^β, R^β)-bimódulos.

(i) Sejam $r \in R$ e $h \in G$. Assim,

$$\beta_h(tr_\beta(r)1_{h^{-1}}) = \beta_h\left(\sum_{g\in G} \beta_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}\right).$$

Notemos que $\beta_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} \in E_g \cap E_{h^{-1}} = E_{r(g)} \cap E_{d(h)}$. Logo, se $r(g) \neq d(h)$, então $\beta_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\beta_h(tr_\beta(r)1_{h^{-1}}) &= \beta_h\left(\sum_{\substack{g\in G\\ r(g)=d(h)}} \beta_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}\right) = \sum_{\substack{g\in G\\ r(g)=d(h)}} \beta_h(\beta_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}})\\ &= \sum_{\substack{g\in G\\ r(g)=d(h)}} \beta_{hg}(r1_{(hg)^{-1}})1_h.\end{aligned}$$

Podemos observar que $l = hg$ se, e somente se, $r(l) = r(h)$. Logo,

$$\beta_h(tr_\beta(r)1_{h^{-1}}) = \sum_{\substack{l\in G\\ r(l)=r(h)}} \beta_l(r1_{l^{-1}})1_h = \sum_{l\in G} \beta_l(r1_{l^{-1}})1_h = tr_\beta(r)1_h.$$

(ii) Sejam $r \in E_{g^{-1}}$ e $g \in G$. Como $\beta_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} \in E_g \cap E_{h^{-1}}$, segue que

$$\begin{aligned}tr_\beta(\beta_g(r)) &= \sum_{h\in G} \beta_h(\beta_g(r)1_{h^{-1}}) = \sum_{\substack{h\in G\\ d(h)=r(g)}} \beta_{hg}(r1_{(hg)^{-1}})1_h\\ &= \sum_{\substack{l\in G\\ d(l)=d(g)}} \beta_l(r1_{l^{-1}})1_{lg^{-1}} = \sum_{\substack{l\in G\\ d(l)=d(g)}} \beta_l(r1_{l^{-1}}) = tr_\beta(r),\end{aligned}$$

pois $E_{lg^{-1}} = E_{r(lg^{-1})} = E_{r(l)} = E_l$. ■

A partir da definição de ação de grupóide sobre um anel, podemos definir o que vem a ser o skew anel de grupóide associado a esta ação.

Definição 1.2.35. [2] *Seja* $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ *uma ação do grupóide* G *sobre uma* K*-álgebra* R*. O skew anel de grupóide,* $R *_\beta G$*, correspondente a ação* β*, é* *definido como a soma direta*

$$R *_\beta G = \bigoplus_{g \in G} E_g \varepsilon_g,$$

no qual ε_g'*s são símbolos, com a adição usual e a multiplicação definida por*

$$(a_g\varepsilon_g)(b_h\varepsilon_h) = \begin{cases} a_g\beta_g(b_h)\varepsilon_{gh}, & \text{se } d(g) = r(h) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para quaisquer $g,\ h \in G$*,* $a_g \in E_g$ *e* $b_h \in E_h$*.*

Por [2, Remark 3.2], temos que $R *_\beta G$ é uma K-álgebra associativa. Além disso, nas condições dessa seção, por [2, Proposition 3.3], se G_0 é finito, então $R *_\beta G$ é unitário, com unidade dada por $1_{R*_\beta G} = \sum\limits_{e \in G_0} 1_e\varepsilon_e$, onde 1_e denota o elemento identidade de E_e, para todo $e \in G_0$.

Claramente, R é um R^β-módulo à esquerda e à direita via multiplicação. Com isso, temos a próxima proposição.

Proposição 1.2.36. *Nas condições dessa seção,*

(i) R *é um* $R *_\beta G$*-módulo à direita unitário, via* $r \cdot a_g\varepsilon_g = \beta_{g^{-1}}(ra_g)$*, quaisquer que sejam* $r \in R$ *e* $a_g\varepsilon_g \in R *_\beta G$*. Além disso,* R *é um* $(R^\beta, R *_\beta G)$*-bimódulo;*

(ii) R *é um* $R *_\beta G$*-módulo à esquerda unitário, via* $a_g\varepsilon_g \cdot r = a_g\beta_g(r1_{g^{-1}})$*, quaisquer que sejam* $r \in R$ *e* $a_g\varepsilon_g \in R *_\beta G$*. Além disso,* R *é um* $(R *_\beta G, R^\beta)$*-bimódulo.*

Demonstração: (i) Consideremos $r \in R$ e $a_g\varepsilon_g$, $b_h\varepsilon_h \in R *_\beta G$. Logo,

$$\big(r \cdot a_g\varepsilon_g\big) \cdot b_h\varepsilon_h = \big(\beta_{g^{-1}}(ra_g)\big) \cdot b_h\varepsilon_h = \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(ra_g)b_h).$$

Notemos que $\beta_{g^{-1}}(ra_g)b_h \in E_{g^{-1}} \cap E_h = E_{d(g)} \cap E_{r(h)}$. Assim, $\beta_{g^{-1}}(ra_g)b_h \neq 0$

se, e somente se, $d(g)=r(h)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\big(r\cdot a_g\varepsilon_g\big)\cdot b_h\varepsilon_h &= \begin{cases} \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(ra_g)b_h), \text{ se } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(ra_g)\beta_{g^{-1}}(\beta_g(b_h))), \text{ se } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(ra_g\beta_g(b_h))), \text{ se } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta_{(gh)^{-1}}(ra_g\beta_g(b_h)), \text{ se } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} r\cdot\big(a_g\beta_g(b_h)\varepsilon_{gh}\big), \text{ se } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= r\cdot\big((a_g\varepsilon_g)(b_h\varepsilon_h)\big).
\end{aligned}$$

Temos que $1_{R*_\beta G}=\sum\limits_{e\in G_0}1_e\varepsilon_e$. Sendo assim, para todo $r\in R$, segue que

$$r\cdot 1_{R*_\beta G}=r\cdot\sum_{e\in G_0}1_e\varepsilon_e=\sum_{e\in G_0}\beta_e(r1_e)=\sum_{e\in G_0}r1_e=r\left(\sum_{e\in G_0}1_e\right)=r,$$

onde a última igualdade segue do fato que $R=\bigoplus\limits_{e\in G_0}E_e$.

Por último, consideremos $r\in R$, $s\in R^\beta$ e $a_g\varepsilon_g\in R*_\beta G$. Logo,

$$\begin{aligned}
s(r\cdot a_g\varepsilon_g) &= s\beta_{g^{-1}}(ra_g)=s1_{d(g)}\beta_{g^{-1}}(ra_g)=\beta_{g^{-1}}(s1_{r(g)})\beta_{g^{-1}}(ra_g) \\
&= \beta_{g^{-1}}(s1_{r(g)}ra_g)=\beta_{g^{-1}}(sra_g)=(sr)\cdot a_g\varepsilon_g.
\end{aligned}$$

Portanto, R é um $(R^\beta, R*_\beta G)$-bimódulo.

(ii) Segue por cálculos análogos ao item anterior. ■

Consideremos agora a aplicação $\varphi: R\times R\to R^\beta$, definida por $\varphi(r,s)=tr_\beta(rs)$, quaisquer que sejam r, $s\in R$. Pela Proposição 1.2.34, temos que φ está bem definida. Além disso, φ é $R*_\beta G$-balanceada. De fato, sejam $r,\ s\in R$ e $a_g\varepsilon_g\in R*_\beta G$. Logo,

$$\varphi(r\cdot(a_g\varepsilon_g),s)=\varphi(\beta_{g^{-1}}(ra_g),s)=tr_\beta(\beta_{g^{-1}}(ra_g)s)=\sum_{h\in G}\beta_h(\beta_{g^{-1}}(ra)s1_{h^{-1}}).$$

Novamente, notemos que $\beta_{g^{-1}}(ra)s1_{h^{-1}}\in E_{g^{-1}}\cap E_{h^{-1}}=E_{d(g)}\cap E_{d(h)}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(r\cdot(a_g\varepsilon_g),s) &= \sum_{\substack{h\in G\\ d(h)=d(g)}}\beta_h(\beta_{g^{-1}}(ra_g)s1_{h^{-1}})=\sum_{\substack{h\in G\\ d(h)=d(g)}}\beta_h(\beta_{g^{-1}}(ra_g)\beta_{g^{-1}}(\beta_g(s1_{g^{-1}}))1_{h^{-1}})\\
&= \sum_{\substack{h\in G\\ d(h)=d(g)}}\beta_h(\beta_{g^{-1}}(ra_g\beta_g(s1_{g^{-1}}))1_{h^{-1}})=\sum_{\substack{h\in G\\ d(h)=d(g)}}\beta_{hg^{-1}}(ra_g\beta_g(s1_{g^{-1}})1_{gh^{-1}})\\
&= \sum_{\substack{h\in G\\ d(h)=d(g)}}\beta_{hg^{-1}}(r(a_g\varepsilon_g\cdot s)1_{gh^{-1}})=\sum_{\substack{l\in G\\ d(l)=r(g)}}\beta_l(r(a_g\varepsilon_g\cdot s)1_{l^{-1}})\\
&= tr_\beta(r(a_g\varepsilon_g\cdot s))=\varphi(r,(a_g\varepsilon_g)\cdot s).
\end{aligned}$$

Portanto, pela Propriedade Universal do Produto Tensorial, está bem definida a aplicação $\tau: R\otimes_{R*_\beta G}R\to R^\beta$, dada por $\tau(r\otimes s)=tr_\beta(rs)$, quaisquer que sejam $r,\ s\in R$.

Podemos também definir $\psi: R\times R\to R*_\beta G$, por $\psi(r,s)=\sum_{g\in G}r\beta_g(s1_{g^{-1}})\varepsilon_g$, quaisquer que sejam $r,\ s\in R$. Um cálculo simples mostra que ψ é R^β-balanceada. Assim, novamente pela Propriedade Universal do Produto Tensorial, está bem definida a aplicação $\tau': R\otimes_{R^\beta}R\to R*_\beta G$, dada por $\tau'(r\otimes s)=\sum_{g\in G}r\beta_g(s1_{g^{-1}})\varepsilon_g$, quaisquer que sejam $r,\ s\in R$.

Por [12], lembremos que um contexto de Morita é uma sextupla $[B,V,W,C,\rho,\rho']$, onde B e C são anéis, V é um (C,B)-bimódulo, W é um (B,C)-bimódulo e ρ e ρ' são aplicações satisfazendo:

(i) $\rho: W\otimes_C V\to B$ é um homomorfismo de B-bimódulos;

(ii) $\rho': V\otimes_B W\to C$ é um homomorfismo de C-bimódulos;

(iii) quaisquer que sejam $v, v' \in V$ e $w, w' \in W$ temos $\rho'(v,w)v' = v\rho(w,v')$ e $w\rho'(v,w') = \rho(w,v)w'$.

Além disso, dizemos que o contexto de Morita $[B, V, W, C, \rho, \rho']$ é estrito, se as aplicações ρ e ρ' deste contexto forem sobrejetivas, implicando assim que as categorias dos B-módulos e C-módulos à esquerda são equivalentes.

A partir disto, temos condições de enunciar o próximo resultado.

Teorema 1.2.37. [3, Proposition 4.4] *Nas condições anteriores,* $[R*_\beta G, R, R, R^\beta, \tau', \tau]$ *é um contexto de Morita. Além disso,* τ *é sobrejetiva se, e somente se, existe* $r \in R$ *tal que* $tr_\beta(r) = 1_R$.

Demonstração: Resta apenas mostrar as condições de associatividade. Se r, s, $s' \in R$, então

$$\begin{aligned} r \cdot \tau'(s \otimes s') &= r \cdot \left(\sum_{g \in G} s\beta_g(s'1_{g^{-1}})\varepsilon_g \right) = \sum_{g \in G} \beta_{g^{-1}}(rs\beta_g(s'1_{g^{-1}})) \\ &= \sum_{g \in G} \beta_{g^{-1}}(rs1_g)s' = \tau(r \otimes s)s'. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \tau'(r \otimes s) \cdot s' &= \left(\sum_{g \in G} r\beta_g(s1_{g^{-1}})\varepsilon_g \right) \cdot s' = \sum_{g \in G} r\beta_g(s1_{g^{-1}})\beta_g(s'1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{g \in G} r\beta_g(ss'1_{g^{-1}}) = rtr_\beta(ss') = r\tau(s \otimes s'). \end{aligned}$$

A segunda afirmação é de fácil verificação. ■

Por [10, Lema 1.3.4], a aplicação $\varphi : R \to R *_\beta G$, dada por $\varphi(r) = \sum\limits_{e \in G_0} r1_e\varepsilon_e$, para todo $r \in R$, é um homomorfismo injetor de anéis (a injetividade de φ se dá pelo fato de que estamos supondo $R = \bigoplus\limits_{e \in G_0} E_e$). Assim, se M é um $R *_\beta G$-módulo à esquerda, então M é um R-módulo à esquerda via $r \cdot m = \varphi(r)m$, para quaisquer $r \in R$ e $m \in M$. Logo, podemos definir o conjunto dos elementos invariantes de M

sobre G como

$$M^G = \{m \in M : (1_g \varepsilon_g)m = 1_g m, \forall g \in G\}.$$

Definimos agora a aplicação $j : R *_\beta G \to End(R)_{R^\beta}$, por $j(\sum\limits_{g\in G} a_g\varepsilon_g)(r) = \sum\limits_{g\in G} a_g\beta_g(r1_{g^{-1}})$, para quaisquer $\sum\limits_{g\in G} a_g\varepsilon_g \in R *_\beta G$ e $r \in R$. Em [3], A. Paques e D. Bagio provaram que j é um homomorfismo de R-módulos à esquerda e também um homomorfismo de K-álgebras unitárias. Logo, R é um $R *_\beta G$-módulo à esquerda via $\left(\sum\limits_{g\in G} a_g\varepsilon_g\right) \cdot s = j\left(\sum\limits_{g\in G} a_g\varepsilon_g\right)(s)$, para quaisquer $\sum\limits_{g\in G} a_g\varepsilon_g \in R *_\beta G$ e $s \in R$. Em particular, $R^G = R^\beta$.

A seguir definiremos um dos principais objetos de estudo nesta seção e veremos como este se relaciona com o contexto de Morita construido anteriormente.

Definição 1.2.38. [3] *Sejam G um grupóide finito, R uma K-álgebra unitária e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de G sobre R. Dizemos que R é uma extensão de Galois de R^β, se existem elementos $\{x_i, y_i \in R : 1 \leq i \leq m\}$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \varepsilon_{g,e}1_e$, para quaisquer $g \in G$ e $e \in G_0$. O conjunto $\{x_i, y_i\}_{1\leq i\leq m}$ é chamado sistema de coordenadas de Galois de R sobre R^β.*

O próximo teorema é o mais importante desta seção. Por ser muito longa, omitiremos sua prova. Uma demonstração completa deste pode ser encontrada em [3, Theorem 5.3], para o caso de ações parciais de grupóides. A partir deste teorema, iremos estabelecer condições necessárias e suficientes para que o contexto de Morita $[R *_\beta G, R, R, R^\beta, \tau', \tau]$ seja estrito. Além disso, este é uma forte ferramenta para demonstrar o Teorema de Dualidade no Capítulo 3, por isso sua importância.

Teorema 1.2.39. [3, Theorem 5.3] *Consideremos G um grupóide finito, R uma K-álgebra unitária e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de G sobre R tal que, para todo $e \in G_0$, E_e é unitário com unidade 1_e. Suponha também que $R = \bigoplus\limits_{e\in G_0} E_e$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *R é uma extensão de Galois de R^β;*

(2) *R é um R^β-módulo à direita projetivo finitamente gerado e a aplicação $j : R{*_\beta}G \to End(R)_{R^\beta}$, definida por $j(\sum\limits_{g\in G} a_g\varepsilon_g)(r) = \sum\limits_{g\in G} a_g\beta_g(r1_{g^{-1}})$, para todo $r \in R$, é um isomorfismo de K-álgebras e de R-módulos à esquerda;*

(3) *Para todo $R *_\beta G$-módulo à esquerda M, a aplicação $\mu : R \otimes_{R^\beta} M^G \to M$, dada por $\mu(r \otimes m) = rm$, é um isomorfismo de R-módulos à esquerda;*

(4) *A aplicação $\rho : R \otimes_{R^\beta} R \to \prod\limits_{g\in G} E_g$, dada por $\rho(r \otimes s) = (r\beta_g(s1_{g^{-1}}))_{g\in G}$, é um isomorfismo de R-módulos à esquerda;*

(5) *$RtR = R *_\beta G$, onde $t = \sum\limits_{g\in G} 1_g\varepsilon_g$;*

(6) *A aplicação τ' é sobrejetiva;*

(7) *R é um gerador para a categoria dos $R *_\beta G$-módulos à esquerda.*

Além disso, sob a hipótese de que qualquer uma das afirmações anteriores vale, então as seguintes afirmações adicionais são equivalentes:

(8) *$tr_\beta(R) = R^\beta$;*

(9) *R é um gerador na categoria dos R^β-módulos à direita;*

(10) *O contexto de Morita $[R *_\beta G, R, R, R^\beta, \tau', \tau]$ é estrito.*

1.3 Conceitos e Resultados envolvendo Grupos

1.3.1 Ações Parciais de Grupos

Abordaremos aqui algumas definições e resultados referentes à noção de ação parcial de grupos. Comecemos com a própria definição de ação parcial.

Definição 1.3.1. [9, Definition 1.2] *Sejam G um grupo, com elemento identidade e, e X um conjunto. Uma ação parcial de G em X é uma coleção de subconjuntos*

$X_g \subseteq X$, $g \in G$, e bijeções $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$, tais que:

(i) $X_e = X$ e α_e é a aplicação identidade em X;

(ii) $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_g \cap X_{gh}$;

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$.

Exemplo 1.3.2. Sejam $G = \{e, g, h, gh : g^2 = h^2 = (gh)^2 = e\}$, o grupo de Klein, e R um anel qualquer. Consideremos $X = R \times R \times R$. Temos que G age parcialmente em X, via a ação $\alpha = (\{X_l\}_{l \in G}, \{\alpha_l\}_{l \in G})$, onde $X_e = X$, $X_g = X_{g^{-1}} = R \times 0 \times R$, $X_h = X_{h^{-1}} = R \times R \times 0$, $X_{gh} = X_{(gh)^{-1}} = 0 \times R \times R$, $\alpha_e = Id_X$, $\alpha_g : X_g \to X_g$ é tal que $\alpha_g((r, 0, s)) = (s, 0, r)$, $\alpha_h : X_h \to X_h$ é tal que $\alpha_h((r, s, 0)) = (s, r, 0)$, e $\alpha_{gh} : X_{gh} \to X_{gh}$, é tal que $\alpha_{gh}((0, r, s)) = (0, s, r)$, para quaisquer r e $s \in R$.

Exemplo 1.3.3. Sejam $G = \{e, g, g^2, g^3 : g^4 = e\}$, o grupo cíclico de ordem 4, e R um anel qualquer. Consideremos $X = R \times R \times R$. Temos que G age parcialmente em X, via $\alpha = (\{X_l\}_{l \in G}, \{\alpha_l\}_{l \in G})$, onde $X_e = X$, $X_g = R \times R \times 0$, $X_{g^2} = R \times 0 \times R$, $X_{g^3} = 0 \times R \times R$, $\alpha_e = Id_X$, $\alpha_g : X_{g^3} \to X_g$ é tal que $\alpha_g((0, r, s)) = (r, s, 0)$, $\alpha_{g^2} : X_{g^2} \to X_{g^2}$ é tal que $\alpha_{g^2}((r, 0, s)) = (s, 0, r)$, e $\alpha_{g^3} : X_g \to X_{g^3}$, é tal que $\alpha_{g^3}((r, s, 0)) = (0, r, s)$, para quaisquer r e $s \in R$.

A pergunta natural que nos cabe fazer é: dada uma ação global de um grupo G em um conjunto X, então podemos restringir esta ação de modo que se torne uma ação parcial? O próximo exemplo nos fornecerá uma resposta afirmativa a esta pergunta.

Exemplo 1.3.4. [1, Example 1.1] Sejam G um grupo e X um G-conjunto à esquerda. Consideremos $Y \subset X$, um subconjunto de X distinto do vazio. Definimos, para todo $g \in G$, $Y_g = Y \cap (g \cdot Y) \subset Y$ e $\alpha_g : Y_{g^{-1}} \to Y_g$, por $\alpha_g(x) = g \cdot x$, para todo $x \in Y_{g^{-1}}$. Sendo assim, o par $\alpha = (\{Y_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ define uma ação parcial de G em Y.

Dessa maneira, dada uma ação global sempre podemos restringi-la à uma ação parcial. Podemos nos perguntar se a recíproca é verdadeira, ou seja, dada uma ação parcial α, será que existe uma ação global tal que ao restringi-la, como no exemplo anterior, obtemos novamente a ação parcial α? A resposta é positiva e sua justificativa segue do próximo teorema.

Teorema 1.3.5. [1, Theorem 1.1] *Consideremos* $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial do grupo* G *no conjunto* X. *Então, existe um par* $(i, \bar{\alpha})$, *onde* $\bar{\alpha}$ *é uma ação global de* G *em um conjunto* Y *e* $i : X \to Y$ *é uma aplicação satisfazendo:*

(i) $i : X \to i(X)$ *é uma bijeção;*

(ii) $Y = \bigcup\limits_{g\in G} \bar{\alpha}_g(i(X))$;

(iii) $i(X_g) = i(X) \cap \bar{\alpha}_g(i(X))$;

(iv) $i(\alpha_g(x)) = \bar{\alpha}_g(i(x))$, *para todo* $x \in X_{g^{-1}}$.

Além disso, se existir outro par (ψ, β) *satisfazendo as hipóteses do teorema, então existe um único morfismo* $\bar{\psi} : Y \to Z$, *onde* Z *é um conjunto sobre o qual* β *age globalmente e* $\bar{\psi} \circ i = \psi$. *Mais ainda, o par* $(i, \bar{\alpha})$ *é único a menos de equivalência.*

Neste caso dizemos que $\bar{\alpha}$ *é uma ação envolvente de* α.

Demonstração: Nosso primeiro passo é encontrar o conjunto Y e a ação global $\bar{\alpha}$ de G em Y. Consideremos a aplicação $\gamma : G \times (G \times X) \to G \times X$, definida por $\gamma(g,(h,x)) = (gh,x)$, para quaisquer g, $h \in G$ e $x \in X$. Claramente, γ define uma ação global de G em $G \times X$. Agora, vamos considerar em $G \times X$ a seguinte relação de equivalência:

$$(g,x) \sim (h,y) \text{ se, e somente se, } x \in X_{g^{-1}h} \text{ e } \alpha_{h^{-1}g}(x) = y,$$

para quaisquer (g,x), $(h,y) \in G \times X$.

Vamos definir $Y = (G \times X)/\sim$ e $\bar{\alpha} : G \times Y \to Y$, aplicação induzida por γ, definida por $\bar{\alpha}(g, \overline{(h,x)}) = \overline{(gh,x)}$, para quaisquer g, $h \in G$ e $x \in X$. É fácil ver que $\bar{\alpha}$ está bem definida, pois se $(g, \overline{(h,x)})$ e $(g', \overline{(k,y)}) \in G \times Y$, então $g = g'$ e $(h,x) \sim (k,y)$, o que implica $(gh,x) \sim (gk,y)$, mostrando que $\overline{(gh,x)} = \overline{(gk,y)}$.

Agora, definimos a aplicação $i : X \to Y$, por $i(x) = \overline{(e,x)}$, para todo $x \in X$. Se x, $y \in X$ são tais que $\overline{(e,x)} = \overline{(e,y)}$, então $x \in X_e = X$ e $x = \alpha_e(x) = y$, ou seja, i é injetiva, o que prova (i).

Considere $\overline{(g,x)} \in Y$, então $\overline{(g,x)} = \bar{\alpha}_g(\overline{(e,x)}) = \bar{\alpha}_g(i(x))$, ou seja, $Y = \bigcup\limits_{g\in G} \bar{\alpha}_g(i(X))$. Para mostrar (iii), seja $x \in X_g$. Logo, $x = \alpha_g(y)$, para algum $y \in X_{g^{-1}}$. Claramente, $(e, \alpha_g(y)) \sim (g,y)$, então $\overline{(e, \alpha_g(y))} = \overline{(g,y)}$. Assim,

$$i(x) = \overline{(e,x)} = \overline{(e, \alpha_g(y))} = \overline{(g,y)} = \bar{\alpha}_g(\overline{(e,y)}) = \bar{\alpha_g}(i(y)),$$

o que implica $i(X_g) \subseteq i(X) \cap \bar{\alpha}_g(i(X))$. A inclusão contrária se faz de modo análogo.

Agora, se $x \in X_{g^{-1}}$, então $i(\alpha_g(x)) = \overline{(e, \alpha_g(x))} = \overline{(g,x)} = \bar{\alpha}_g(\overline{(e,x)}) = \bar{\alpha_g}(i(x))$, provando então (iv).

Finalmente, suponhamos que existe um par (ψ, β), onde $\beta : G \times Z \to Z$ é uma ação global de G em um conjunto Z e $\psi : X \to Z$, satisfazendo as hipóteses do teorema. Definimos $\psi' : G \times X \to Z$, dada por $\psi'\big((g,x)\big) = \beta_g(\psi(x))$, para quaisquer $g \in G$ e $x \in X$. É fácil ver que $\psi'\big(\gamma_h\big((g,x)\big)\big) = \beta_h\big(\psi'\big((g,x)\big)\big)$, para todo $h \in G$. Suponhamos agora que $(g,x) \sim (h,y)$ em $G \times X$, então $x \in X_{g^{-1}h}$ e $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$. Logo, $\beta_{h^{-1}}\big(\psi'\big((g,x)\big)\big) = \beta_{h^{-1}}(\beta_g(\psi(x))) = \beta_{h^{-1}g}(\psi(x)) = \psi(\alpha_{h^{-1}g}(x)) = \psi(y)$, ou seja, $\psi'\big((g,x)\big) = \beta_h(\psi(y)) = \psi'\big((h,y)\big)$. Dessa maneira, a aplicação $\bar{\psi} : Y \to Z$, dada por $\bar{\psi}\big(\overline{(g,x)}\big) = \psi'(g,x) = \beta_g(\psi(x))$, para quaisquer $g \in G$, $x \in X$, está bem definida. Claramente, $\bar{\psi}\big(\bar{\alpha}_g\big(\overline{(h,x)}\big)\big) = \beta_g\big(\bar{\psi}\big(\overline{(h,x)}\big)\big)$, quaisquer que sejam g, $h \in G$ e $x \in X$. Além disso, para todo $x \in X$, temos $\bar{\psi}(i(x)) = \bar{\psi}\big(\overline{(e,x)}\big) = \psi'(e,x) = \beta_e(\psi(x)) = \psi(x)$, ou seja, $\bar{\psi} \circ i = \psi$.

Resta mostrarmos que $\bar{\psi}$ é uma bijeção. Por (ii), se $z \in Z = \bigcup_{g \in G} \beta_g(\psi(X))$, então existe um $g \in G$ tal que $z = \beta_g(\psi(x))$, para algum $x \in X$. Logo, $\bar{\psi}\big(\overline{(g,x)}\big) = \beta_g(\psi(x)) = z$, o que mostra a sobrejetividade de $\bar{\psi}$. Agora, consideremos $\overline{(g,x)}$, $\overline{(h,x')} \in Y$ tais que $\bar{\psi}\big(\overline{(g,x)}\big) = \bar{\psi}\big(\overline{(h,x')}\big)$, isto é, $\beta_g(\psi(x)) = \beta_h(\psi(x'))$. Logo, $\psi(x) = \beta_{g^{-1}}(\beta_h(\psi(x'))) = \beta_{g^{-1}h}(\psi(x')) \in \psi(X) \cap \beta_{g^{-1}h}(\psi(X)) = \psi(X_{g^{-1}h})$, isto é, $x \in X_{g^{-1}h}$, pois ψ é injetiva. Assim,

$$\psi(x') = \beta_{h^{-1}}(\beta_g(\psi(x))) = \beta_{h^{-1}g}(\psi(x)) = \psi(\alpha_{h^{-1}g}(x)),$$

onde a última igualdade segue da propriedade (iv). Como ψ é injetiva, temos que $x \in X_{g^{-1}h}$ e $x' = \alpha_{h^{-1}g}(x)$, ou seja, $(g,x) \sim (h,x')$, o que implica $\overline{(g,x)} = \overline{(h,x')}$, mostrando a injetividade de $\bar{\psi}$.

Portanto, se (ψ, β) é outro par satisfazendo as hipóteses do teorema, então existe um único morfismo $\bar{\psi} : Y \to Z$, onde Z é um conjunto sobre o qual β age globalmente, e $\bar{\psi} \circ i = \psi$, ou seja, o par $(i, \bar{\alpha})$ é único a menos de equivalência. ∎

Definição 1.3.6. [1] *Sejam G um grupo, X e Y dois conjuntos finitos tais que G age parcialmente em ambos, via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$, respectivamente. Dizemos que $\varphi : X \to Y$ é um homomorfismo de ações parciais, se:*

(i) $\varphi(X_g) \subseteq Y_g$, para todo $g \in G$;

(ii) $\beta_g(\varphi(x)) = \varphi(\alpha_g(x))$, para todo $x \in X_{g^{-1}}$.

1.3.2 Teorias de Morita e Galois

Nesta seção vamos tratar de alguns resultados sobre Teoria de Morita e Teoria de Galois, envolvendo ações parciais de grupos em anéis.

Definição 1.3.7. [18] *Uma ação parcial de um grupo G sobre um anel S é um par*

$\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, *onde* S_g *é um ideal de* S, *para cada* $g \in G$, *e* $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$ *é um isomorfismo de ideais satisfazendo as seguintes condições:*

(*i*) $S_e = S$ *e* α_e *é o automorfismo identidade* I_S *em* S*;*

(*ii*) $\alpha_g(S_{g^{-1}} \cap S_h) \subseteq S_g \cap S_{gh}$, *quaisquer que sejam* $g,\ h \in G$*;*

(*iii*) $\alpha_g(\alpha_h(s)) = \alpha_{gh}(s)$, *para todo* $s \in S_{h^{-1}} \cap S_{(gh)^{-1}}$.

Exemplo 1.3.8. [7] Suponhamos que um grupo G age em uma álgebra B por automorfismos $\beta_g : B \to B$ e consideremos S um ideal de B. Sejam $S_g = S \cap \beta_g(S)$ e $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$, a restrição de β_g em $S_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$. É fácil verificar que $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G no ideal S.

Agora, para nosso propósito, consideremos G um grupo agindo parcialmente em um anel S via $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde cada ideal S_g tem elemento identidade dado por 1_g. Neste caso, $S_g = S1_g$ e $\alpha_g(1_{g^{-1}}) = 1_g$, para todo $g \in G$. Sob essas condições, vamos definir o que vem a ser subanel dos elementos invariantes pela ação de α.

Definição 1.3.9. [8] *O subanel de* S *dos elementos invariantes pela ação de* α, *denotado* S^α, *é definido como sendo* $S^\alpha = \{s \in S : \alpha_g(s1_{g^{-1}}) = s1_g,\ \forall g \in G\}$.

Nas hipóteses dessa seção, consideremos a aplicação $tr_\alpha : S \to S$, definida por $tr_\alpha(s) = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g(s1_{g^{-1}})$, para todo $s \in S$. Esta aplicação é denominada aplicação traço e é de suma importância para o que será desenvolvido aqui.

Proposição 1.3.10. [8] *A aplicação* $tr_\alpha : S \to S$ *é um homomorfismo de* (S^α, S^α)*-bimódulos. Além disso,*

(*i*) $tr_\alpha(S) \subseteq S^\alpha$

(*ii*) $tr_\alpha(\alpha_g(s)) = tr_\alpha(s)$, *para quaisquer* $s \in S_{g^{-1}}$ *e* $g \in G$.

Demonstração: É fácil ver que tr_α é um homomorfismo de (S^α, S^α)-bimódulos.

(i) Sejam $s \in S$ e $h \in G$. Lembremos que $\alpha_g(S_{g^{-1}} \cap S_h) \subseteq S_g \cap S_{gh}$, quaisquer que sejam g, $h \in G$, o que implica $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha_h(tr_\alpha(s)1_{h^{-1}}) &= \alpha_h\left(\sum_{g\in G} \alpha_g(s1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}\right) = \sum_{g\in G} \alpha_h(\alpha_g(s1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) \\
&= \sum_{g\in G} \alpha_{hg}(s1_{(hg)^{-1}})1_h = \sum_{l\in G} \alpha_l(s1_{l^{-1}})1_h = tr_\alpha(s)1_h.
\end{aligned}$$

(ii) Consideremos $g \in G$ e $s \in S_{g^{-1}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
tr_\alpha(\alpha_g(s)) &= \sum_{h\in G} \alpha_h(\alpha_g(s)1_{h^{-1}}) = \sum_{h\in G} \alpha_{hg}(s1_{(hg)^{-1}})1_h \\
&= \sum_{l\in G} \alpha_l(s1_{l^{-1}})1_l 1_{lg^{-1}} = \sum_{l\in G} \alpha_l(s1_{l^{-1}})\alpha_l(1_{l^{-1}}1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{l\in G} \alpha_l(s1_{l^{-1}}1_{g^{-1}}) = \sum_{l\in G} \alpha_l(s1_{l^{-1}}) = tr_\alpha(s).
\end{aligned}$$

■

Além da aplicação traço, outra definição de suma importância neste trabalho é a definição de skew anel de grupo parcial.

Definição 1.3.11. [8] *Nas condições dessa seção, definimos o skew anel de grupo parcial, denotado $S *_\alpha G$, como sendo a soma direta*

$$S *_\alpha G = \bigoplus_{g\in G} S_g \varepsilon_g,$$

onde ε_g's são símbolos, a soma é dada de maneira usual e a multiplicação dada pela regra

$$(a\varepsilon_g)(b\varepsilon_h) = a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\varepsilon_{gh},$$

para quaisquer g, $h \in G$, $a \in S_g$, $b \in S_h$.

Por [7], temos que $S *_\alpha G$ é um anel associativo (não-comutativo), com elemento identidade $1_S\varepsilon_e$. Notemos que S é um S^α-módulo à esquerda e à direita via multiplicação. Com base nisto, segue nossa próxima proposição.

Proposição 1.3.12. *Nas condições dessa seção,*

(i) S é um $S *_\alpha G$-módulo à direita unitário, via $s \cdot a\varepsilon_g = \alpha_{g^{-1}}(sa)$, quaisquer que sejam $s \in S$ e $a\varepsilon_g \in S *_\alpha G$. Além disso, S é um $(S^\alpha, S *_\alpha G)$-bimódulo;

(ii) S é um $S*_\alpha G$-módulo à esquerda unitário, via $a\varepsilon_g \cdot s = a\alpha_g(s1_{g^{-1}})$, quaisquer que sejam $s \in S$ e $a\varepsilon_g \in S *_\alpha G$. Além disso, S é um $(S *_\alpha G, S^\alpha)$-bimódulo.

Demonstração: (i) Consideremos $a\varepsilon_g$, $b\varepsilon_h \in S *_\alpha G$ e $s \in S$. Assim,

$$\begin{aligned}\big(s \cdot a\varepsilon_g\big) \cdot b\varepsilon_h &= \big(\alpha_{g^{-1}}(sa)\big) \cdot b\varepsilon_h = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(sa)b) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(sa)b1_{g^{-1}})\\ &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(sa)\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(b1_{g^{-1}}))) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(sa\alpha_g(b1_{g^{-1}})))\\ &= \alpha_{(gh)^{-1}}(sa\alpha_g(b1_{g^{-1}})) = s \cdot \big(a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\varepsilon_{gh}\big) = s \cdot \big((a\varepsilon_g)(b\varepsilon_h)\big).\end{aligned}$$

Claramente, $s \cdot 1_{S*_\alpha G} = s$, para todo $s \in S$. Portanto, S é um $S *_\alpha G$-módulo à direita unitário. Por último, consideremos $r \in S^\alpha$, $a\varepsilon_g \in S *_\alpha G$ e $s \in S$. Logo,

$$\begin{aligned}r\big(s \cdot a\varepsilon_g\big) &= r\big(\alpha_{g^{-1}}(sa)\big) = r1_{g^{-1}}\alpha_{g^{-1}}(sa)\\ &= \alpha_{g^{-1}}(r1_g)\alpha_{g^{-1}}(sa) = \alpha_{g^{-1}}(rsa) = (rs) \cdot a\varepsilon_g,\end{aligned}$$

mostrando assim que S é um $(S^\alpha, S *_\alpha G)$-bimódulo.

(ii) Segue por cálculos análogos aos do item anterior. ■

Consideremos agora a aplicação $\varphi : S \times S \to S^\alpha$, definida por $\varphi(r, s) = tr_\alpha(rs)$, quaisquer que sejam r, $s \in S$. Pela Proposição 1.3.10, temos que φ está bem definida. Além disso, φ é $S *_\alpha G$-balanceada. De fato, sejam r, $s \in S$ e $a\varepsilon_g \in S *_\alpha G$, assim

$$\begin{aligned}\varphi(r \cdot (a\varepsilon_g), s) &= \varphi(\alpha_{g^{-1}}(ra), s) = tr_\alpha(\alpha_{g^{-1}}(ra)s) = \sum_{h\in G} \alpha_h(\alpha_{g^{-1}}(ra)s1_{h^{-1}})\\ &= \sum_{h\in G} \alpha_h(\alpha_{g^{-1}}(ra)\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(s1_{g^{-1}}))\alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh^{-1}}))\\ &= \sum_{h\in G} \alpha_h(\alpha_{g^{-1}}(ra\alpha_g(s1_{g^{-1}})1_{gh^{-1}})) = \sum_{h\in G} \alpha_{hg^{-1}}(ra\alpha_g(s1_{g^{-1}})1_{gh^{-1}})\end{aligned}$$

$$= \sum_{h\in G} \alpha_{hg^{-1}}(r(a\varepsilon_g \cdot s)1_{gh^{-1}}) = \sum_{l\in G} \alpha_l(r(a\varepsilon_g \cdot s))1_{l^{-1}})$$
$$= tr_\alpha(r(a\varepsilon_g \cdot s)) = \varphi(r, (a\varepsilon_g) \cdot s).$$

Portanto, pela Propriedade Universal do Produto Tensorial, está bem definida a aplicação $\tau : S \otimes_{S*_\alpha G} S \to S^\alpha$, dada por $\tau(r \otimes s) = tr_\alpha(rs)$, quaisquer que sejam r, $s \in S$.

Podemos também definir $\psi : S \times S \to S *_\alpha G$, por $\psi(r,s) = \sum\limits_{g\in G} r\alpha_g(s1_{g^{-1}})\varepsilon_g$, quaisquer que sejam r, $s \in S$. Um cálculo simples mostra que ψ é S^α-balanceada. Assim, novamente pela Propriedade Universal do Produto Tensorial, está bem definida a aplicação $\tau' : S \otimes_{S^\alpha} S \to S *_\alpha G$, dada por $\tau'(r \otimes s) = \sum\limits_{g\in G} r\alpha_g(s1_{g^{-1}})\varepsilon_g$, quaisquer que sejam r, $s \in S$.

A partir disto, temos condições de enunciar o próximo resultado.

Teorema 1.3.13. [3, Proposition 4.4] *Nas condições anteriores,* $[S*_\alpha G, S, S, S^\alpha, \tau', \tau]$ *é um contexto de Morita. Além disso,* τ *é sobrejetiva se, e somente se, existe* $s \in S$ *tal que* $tr_\alpha(s) = 1_S$.

Demonstração: Resta apenas mostrar as condições de associatividade (ver pág 24). Se r, s, $s' \in S$, então

$$r \cdot \tau'(s \otimes s') = r \cdot \left(\sum_{g\in G} s\alpha_g(s'1_{g^{-1}})\varepsilon_g\right) = \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(rs\alpha_g(s'1_{g^{-1}}))$$
$$= \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(rs1_g)s' = \tau(r \otimes s)s'.$$

Mais ainda,

$$\tau'(r \otimes s) \cdot s' = \left(\sum_{g\in G} r\alpha_g(s1_{g^{-1}})\varepsilon_g\right) \cdot s' = \sum_{g\in G} r\alpha_g(s1_{g^{-1}})\alpha_g(s'1_{g^{-1}})$$
$$= \sum_{g\in G} r\alpha_g(ss'1_{g^{-1}}) = rtr_\alpha(ss') = r\tau(s \otimes s').$$

A segunda afirmação é de fácil verificação. ■

Observação 1.3.14. *De um modo geral, para todo $S *_\alpha G$-módulo à esquerda M, temos que M é um S-módulo à esquerda via a imersão $x \to x\delta_e$ de S em $S *_\alpha G$. Denotamos por M^G, o S^α-submódulo dos elementos invariantes pela correspondente ação de G sobre M, ou seja,*

$$M^G = \{x \in M : 1_g\delta_g \cdot x = 1_g x, \forall g \in G\}.$$

Em particular, S é um $S *_\alpha G$-módulo à esquerda via a ação $s\delta_g \cdot x = s\alpha_g(x1_{g^{-1}})$, para todo $g \in G$, $s \in S_g$ e $x \in S$. Neste caso, S^G coincide com S^α.

A seguir definiremos um dos principais objetos de estudo nessa seção e veremos como este se relaciona com o contexto de Morita construido anteriormente.

Definição 1.3.15. [8, Definition 3.1] *Sejam $S \supseteq R$ uma extensão de anéis e α uma ação parcial de um grupo finito G sobre S. Dizemos que S é uma extensão de Galois α-parcial de R, se*

(i) $R = S^\alpha$;

(ii) existem elementos x_i, $y_i \in S$, $1 \leq i \leq m$, tais que $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \delta_{e,g}1_S$, para todo $g \in G$.

O conjunto $\{x_i, y_i\}_{i=1}^m$, é chamado um sistema de coordenadas de Galois de S sobre R.

Enunciamos agora um resultado que será uma forte ferramenta para a prova do Teorema de Dualidade para Ações Parciais, feito no Capítulo 4. Além disso, o próximo teorema apresenta condições necessárias e suficientes para que o contexto de Morita $[S *_\alpha G, S, S, S^\alpha, \tau', \tau]$ seja estrito. Por ser muito longa, omitiremos sua prova. Uma demonstração completa pode ser encontrada em [3, Theorem 5.3], para o caso de ações parciais de grupóides.

Teorema 1.3.16. [3, Theorem 5.3] *Sejam S um anel e $\alpha = (\{S_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupo finito G sobre S. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *S é uma extensão de Galois α-parcial de S^α;*

(2) *S é um S^α-módulo à direita projetivo finitamente gerado, e a aplicação $j : S*_\alpha G \to End(S)_{S^\alpha}$, definida por $j\big(\sum\limits_{g\in G} r_g\delta_g\big)(s) = \sum\limits_{g\in G} r_g\alpha_g(s1_{g^{-1}})$, para quaiquer $\sum\limits_{g\in G} r_g\delta_g \in S *_\alpha G$ e $s \in S$, é um isomorfismo de anéis e de S-módulos à esquerda;*

(3) *Para todo $S *_\alpha G$-módulo à esquerda M, a aplicação $\mu : S \otimes_{S^\alpha} M^G \to M$, dada por $\mu(s \otimes m) = sm$, é um isomorfismo de S-módulos à esquerda;*

(4) *A aplicação $\rho : S \otimes_{S^\alpha} S \to \prod\limits_{g\in G} S_g$, dada por $\rho(r \otimes s) = (r\alpha_g(s1_{g^{-1}}))_{g\in G}$, é um isomorfismo de S-módulos à esquerda;*

(5) *$StS = S *_\alpha G$, onde $t = \sum\limits_{g\in G} 1_g\varepsilon_g$;*

(6) *A aplicação τ' é sobrejetiva;*

(7) *S é um gerador na categoria dos $S *_\alpha G$-módulos à esquerda;*

Além disso, sob a hipótese de que qualquer uma das afirmações anteriores vale, então as seguintes afirmações adicionais são equivalentes:

(8) *$tr_\alpha(S) = S^\alpha$;*

(9) *S é um gerador na categoria dos S^α-módulos à direita;*

(10) *O contexto de Morita $[S *_\alpha G, S, S, S^\alpha, \tau', \tau]$ é estrito.*

Capítulo 2

O Produto Smash para Grupóides $\bar{A}\#X$

Consideremos G um grupo, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado e X um G-conjunto à esquerda finito. De acordo com a Seção 1.1.1, podemos definir o produto smash $A\#X$, como sendo o A-módulo à esquerda livre com base $\{p_x : x \in X\}$ e multiplicação dada por $(a_g p_x)(b_h p_y) = a_g b_h p_y$, se $h \cdot y = x$, e $(a_g p_x)(b_h p_y) = 0$, caso contrário, para quaisquer $a_g p_x$, $b_h p_y \in A\#X$. Nosso objetivo neste capítulo é apresentar resultados para uma nova versão desta definição, que será denotada por $\bar{A}\#X$, na qual consideramos grupóides ao invés de grupos. Vamos generalizar algumas propriedades de [17], construir uma imersão deste novo produto smash em um certo skew anel de grupóide $\bar{A} *_\beta P$, onde P é uma união disjunta de grupóides, e estabeleber uma equivalência entre a categoria dos $\bar{A}\#X$-módulos à esquerda, denotada $\bar{A}\#X - mod$, e a categoria dos $\bar{A}$-módulos graduados de tipo X, denotada $(G, X, \bar{A}) - gr$, obtendo uma generalização dos resultados de C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen e Zhou Borong, apresentados em [16].

2.1 Definição e Propriedades

Consideremos G um grupóide, tal que G_0 é finito, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade dada por $1_A = \sum_{e \in G_0} 1_e$ (ver Observação 1.2.30) e o subanel de A definido por $\bar{A} = \bigoplus_{e \in G_0} A^e$, onde $A^e = \bigoplus_{g \in G_e} A_g$, para cada $e \in G_0$. Notemos que A^e é um subanel de A com unidade 1_e, para cada $e \in G_0$. Seja X um G-conjunto finito via $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$, tal que $X = \dot{\bigcup}_{e \in G_0} X_e$ (ver Definição 1.2.21).

Observemos que, para cada $e \in G_0$, $\alpha_{(e)} = (\{X_g\}_{g \in G_e}, \{\alpha_g\}_{g \in G_e})$ é uma ação global do grupo principal G_e em X_e, tal que $g \cdot x = \alpha_g(x)$, para quaisquer $g \in G_e$ e $x \in X_e$, ou seja, X_e é um G_e-conjunto à esquerda finito. Além disso, $A^e = \bigoplus_{g \in G_e} A_g$ é um anel G_e-graduado. Portanto, podemos considerar o produto smash $A^e \# X_e$, para cada $e \in G_0$ (ver Definição 1.1.1). A partir disto, vamos definir o produto smash para grupóides.

Definição 2.1.1. *Nestas condições, definimos o produto smash para grupóides, denotado $\bar{A} \# X$, como sendo a soma direta*

$$\bar{A} \# X = \bigoplus_{e \in G_0} A^e \# X_e,$$

com multiplicação dada através do produto dos anéis $A^e \# X_e$, para todo $e \in G_0$.

Notemos que, pela Definição 1.1.1, se $a_g p_x$, $b_h p_y \in A^e \# X_e$, para algum $e \in G_0$, então

$$(a_g p_x)(b_h p_y) = \begin{cases} a_g b_h p_y, & \text{se } \alpha_h(y) = x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $a_g p_x$, $b_h p_y \in \bar{A} \# X$, então $a_g p_x \in A^e \# X_e$ e $b_h p_y \in A^f \# X_f$, para e, $f \in G_0$. Assim, estendendo por linearidade a multiplicação em $A^e \# X_e$, temos que

$$(a_g p_x)(b_h p_y) = \begin{cases} a_g b_h p_y, & \text{se } e = f \text{ e } \alpha_h(y) = x, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que a multiplicação acima está bem definida, pois se $e = f$, então $a_g b_h \in A_{gh}$ e $gh \in G_f$. Portanto, o produto smash para grupóides, nada mais é do que a soma direta de produtos smash para o caso de grupos, indexada por G_0. Além disso, a multiplicação na soma direta será dada coordenada a coordenada. A partir de agora, vamos representar um elemento de $\bar{A}\#X$, como $a_g\delta_x$, para diferenciar do produto smash do caso de grupos. A próxima proposição caracteriza $\bar{A}\#X$ como sendo um anel associativo com unidade.

Proposição 2.1.2. *Nas condições anteriores, $\bar{A}\#X$ é um anel associativo com unidade dada por $1_{\bar{A}\#X} = \sum\limits_{e \in G_0} \sum\limits_{x_e \in X_e} 1_e \delta_{x_e}$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.1.2 (i), para cada $e \in G_0$, temos que $A^e\#X_e$ é um anel associativo, logo $\bar{A}\#X$ é associativo. Além disso, usando novamente a Proposição 1.1.2 (i), segue que $1_{\bar{A}\#X} = \sum\limits_{e \in G_0} 1_{A^e\#X_e} = \sum\limits_{e \in G_0} \sum\limits_{x_e \in X_e} 1_e \delta_{x_e}$. ∎

Vejamos alguns exemplos de produto smash.

Exemplo 2.1.3. Consideremos G um grupo, com unidade $e \in G$, $A = \bigoplus\limits_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade $1_A \in A$, e X um G-conjunto finito. Neste caso, $G_0 = \{e\}$, $G_e = G$, $X_e = X$ e $A^e = A$. Assim,

$$\bar{A}\#X = \bigoplus_{f \in G_0} A^f\#X_f = A^e\#X_e = A\#X.$$

Assim, quando consideramos G um grupo, o produto smash $\bar{A}\#X$ coincide com o produto smash $A\#X$, definido em 1.1.1.

Exemplo 2.1.4. Sejam G um grupóide finito e K um anel comutativo. Como no Exemplo 1.2.28, consideremos a álgebra de grupóide, $KG = \bigoplus\limits_{g \in G} Ku_g$, a qual é G-graduada. Agora, pelo Exemplo 1.2.22, temos que $X = G$ é um G-conjunto via $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$, onde $X_g = T_{r(g)}$ e $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$ é dada por $\alpha_g(l) = gl$, para todo $l \in X_{g^{-1}}$. Além disso, se $g \in G$, então $g \in T_{r(g)} = X_{r(g)}$. Logo,

$X = \bigcup\limits_{e \in G_0} X_e$. Mais ainda, se existir $l \in X_e \cap X_f$, com e, $f \in G_0$, então $e = r(l) = f$, ou seja, $X_e = X_f$. Portanto, $X = \dot{\bigcup\limits_{e \in G_0}} X_e$. Vejamos como fica o produto smash neste caso.

$$\overline{KG} \# X = \bigoplus_{e \in G_0} (KG)^e \# X_e = \bigoplus_{e \in G_0} \left(\bigoplus_{\substack{g \in G_e \\ h \in T_e}} K u_g \delta_h \right).$$

Sejam $u_g\delta_h$, $u_l\delta_k \in \overline{KG}\#X$, ou seja, $u_g\delta_h \in (KG)^e\#X_e$ e $u_l\delta_k \in (KG)^f\#X_f$, para e, $f \in G_0$. Assim, a multiplicação em $\overline{KG}\#X$ é dada por

$$\begin{aligned}(u_g\delta_h)(u_l\delta_k) &= \begin{cases} u_g u_l \delta_k, & \textit{se } e = f \textit{ e } \alpha_l(k) = h \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} u_{gl} \delta_k, & \textit{se } e = f \textit{ e } lk = h \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.5. Como um caso particular do exemplo anterior, podemos considerar o grupóide $G = I \times I$, onde I é um conjunto finito, como no Exemplo 1.2.6. Então,

$$\overline{KG} \# X = \bigoplus_{e \in G_0} \left(\bigoplus_{\substack{(i,j) \in G_e \\ (l,k) \in T_e}} K u_{(i,j)} \delta_{(l,k)} \right).$$

Sejam $u_{(i,j)}\delta_{(l,k)} \in (KG)^e\#X_e$, $u_{(a,b)}\delta_{(c,d)} \in (KG)^f\#X_f$. Neste caso, $(i,j) \in G_e$, então $(i,i) = r((i,j)) = e = d((i,j)) = (j,j)$, ou seja $i = j$. Da mesma maneira $a = b$. Além disso, $(l,l) = r((l,k)) = r((i,j)) = (i,i)$ e $(c,c) = r((c,d)) = r((a,b)) = (a,a)$, isto é, $l = i$ e $c = a$. Assim, a multiplicação em $\overline{KG}\#X$ é definida por

$$\begin{aligned}(u_{(i,j)}\delta_{(l,k)})(u_{(a,b)}\delta_{(c,d)}) &= (u_{(i,i)}\delta_{(i,k)})(u_{(a,a)}\delta_{(a,d)}) \\ &= \begin{cases} u_{(i,i)(a,a)}\delta_{(a,d)}, & \textit{se } e = f \textit{ e } (a,a)(a,d) = (i,k) \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} u_{(i,i)(a,a)}\delta_{(a,d)}, & \textit{se } (i,i) = (a,a) \textit{ e } (a,d) = (i,k) \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} u_{(i,i)(a,a)}\delta_{(a,d)}, & se\ i = a\ e\ k = d \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u_{(i,i)}\delta_{(i,d)}, & se\ i = a\ e\ k = d \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Vamos explorar um pouco mais do produto smash $\bar{A}\#X$ e sua relação com o subanel $\bar{A}$ de A.

Proposição 2.1.6. *Para cada $e \in G_0$, $A^e\#X_e$ é um $\bar{A}$-módulo à esquerda unitário com ação definida por*

$$a_g \cdot (b_h\delta_x) = \begin{cases} a_g b_h \delta_x, & se\ e = f \\ 0, & caso\ contrário, \end{cases}$$

onde $a_g \in A^f$, para algum $f \in G_0$, e $b_h\delta_x \in A^e\#X_e$.

Demonstração: Sejam $b_h\delta_x \in A^e\#X_e$ e $a_g \in A^f$, para algum $f \in G_0$, ou seja, $g \in G_f$. Notemos que esta ação está bem definida, pois se $e = f$, então $a_g b_h \in A_{gh}$ e $gh \in G_e$, ou seja, $a_g b_h \delta_x \in A^e\#X_e$. Claramente, as propriedades de $\bar{A}$-módulo à esquerda são verificadas. Além disso,

$$1_{\bar{A}} \cdot b_h\delta_x = \left(\sum_{f \in G_0} 1_f\right) \cdot b_h\delta_x = \sum_{\substack{f \in G_0 \\ f = r(h)}} 1_f b_h \delta_x = 1_{r(h)} b_h \delta_x = b_h\delta_x.$$

Portanto, $\bar{A}\#X$ é um $\bar{A}$-módulo à esquerda unitário. ■

Corolário 2.1.7. *O produto smash $\bar{A}\#X = \bigoplus_{e \in G_0} A^e\#X_e$ é um $\bar{A}$-módulo à esquerda unitário.*

De acordo com a Proposição 1.1.2 (iii), observemos que, para cada $e \in G_0$, a aplicação $\eta_e : A^e \to A^e\#X_e$, definida por $\eta_e(a) = \sum_{x_e \in X_e} a p_{x_e}$, para todo $a \in A^e$, é um homomorfismo injetor de anéis. A partir disso, definimos a aplicação $\eta : \bar{A} \to \bar{A}\#X$, por $\eta\left(\sum_{e \in G_0} a^e\right) = \sum_{e \in G_0} \eta_e(a^e)$, para todo $\sum_{e \in G_0} a^e \in \bar{A}$.

Proposição 2.1.8. *A aplicação* $\eta : \bar{A} \to \bar{A}\#X$, *dada por* $\eta\left(\sum\limits_{e\in G_0} a^e\right) = \sum\limits_{e\in G_0} \eta_e(a^e)$, *para todo* $\sum\limits_{e\in G_0} a^e \in \bar{A}$, *é um homomorfismo injetor de anéis.*

Demonstração: Consideremos $\sum\limits_{e\in G_0} a^e \in \bar{A}$, tal que $\eta\left(\sum\limits_{e\in G_0} a^e\right) = 0$. Assim, $0 = \sum\limits_{e\in G_0} \eta_e(a^e) \in \bar{A}\#X = \bigoplus\limits_{e\in G_0} A^e\#X_e$, o que implica $\eta_e(a_e) = 0$, para todo $e \in G_0$. Como η_e é injetiva, temos que $a^e = 0$, para todo $e \in G_0$. Logo, $\sum\limits_{e\in G_0} a^e = 0$, ou seja, η é injetiva.

Agora, consideremos a_g, $b_h \in \bar{A}$. Assim, $a_g \in A^e$ e $b_h \in A^f$, com e, $f \in G_0$. Usando novamente a Proposição 1.1.2 (iii), juntamente com a multiplicação em $\bar{A}\#X$, segue que

$$\begin{aligned}
\eta(a_g)\eta(b_h) = \eta_e(a_g)\eta_f(b_h) &= \begin{cases} \eta_e(a_g)\eta_e(b_h), \text{ se } e = f \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \eta_e(a_g b_h), \text{ se } e = f \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \eta(a_g b_h).
\end{aligned}$$

Além disso, $\eta(1_{\bar{A}}) = \eta\left(\sum\limits_{e\in G_0} 1_e\right) = \sum\limits_{e\in G_0} \eta_e(1_e) = \sum\limits_{e\in G_0} 1_{A^e\#X_e} = 1_{\bar{A}\#X}$. Portanto, η é um homomorfismo injetor de anéis. ■

Corolário 2.1.9. *Nas condições anteriores,*

(i) *se* $a_g \in \bar{A}$, *então* $a_g \cdot 1_{\bar{A}\#X} = \eta(a_g)$;

(ii) *se* $a_g \in \bar{A}$ *e* $b_h\delta_x \in \bar{A}\#X$, *então* $\eta(a_g)(b_h\delta_x) = a_g \cdot (b_h\delta_x)$;

(iii) *se* $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$, *então* $a_g\delta_x = \eta(a_g)(1_{d(g)}\delta_x)$;

(iv) *se* $a_g \in \bar{A}$ *e* $x \in X_g$, *então* $(1_{r(g)}\delta_x)\eta(a_g) = a_g\delta_{\alpha_{g^{-1}}(x)}$.

Demonstração:

(i) Se $a_g \in \bar{A}$, então $a_g \in A^e$, para algum $e \in G_0$. Lembremos da Proposição

1.1.2 (iii), que $\eta(a_g) = \eta_e(a_g) = \sum\limits_{x_e \in X_e} a_g \delta_{x_e}$. Assim,

$$\begin{aligned} a_g \cdot 1_{\bar{A}\#X} &= a_g \cdot \sum_{f \in G_0} \sum_{x_f \in X_f} 1_f \delta_{x_f} = \sum_{x_e \in X_e} a_g 1_e \delta_{x_e} \\ &= \sum_{x_e \in X_e} a_g \delta_{x_e} = \eta(a_g). \end{aligned}$$

(ii) Se $a_g \in \bar{A}$ e $b_h\delta_x \in \bar{A}\#X$, ou seja, $g \in G_e$ e $b_h\delta_x \in A^f\#X_f$, com $e,\ f \in G_0$, então $\eta(a_g)(b_h\delta_x) = \eta_e(a_g)(b_h\delta_x)$. Notemos que quando $e \neq f$, este produto é nulo. Assim, supondo que $e = f$, temos

$$\eta(a_g)(b_h\delta_x) = \eta_e(a_g)(b_h\delta_x) = \left(\sum_{y \in X_e} a_g\delta_y\right)(b_h\delta_x) = \sum_{y \in X_e} (a_g\delta_y)(b_h\delta_x).$$

Como $\alpha_h : X_{h^{-1}} \to X_h$ está bem definida, se $x \in X_f = X_{h^{-1}}$, então existe único $y \in X_e = X_f = X_h$ tal que $\alpha_h(x) = y$. Portanto,

$$\begin{aligned} \eta(a_g)(b_h\delta_x) &= \begin{cases} a_g b_h \delta_x, & \text{se } e = f \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= a_g \cdot (b_h\delta_x). \end{aligned}$$

(iii) Se $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$, então $a_g\delta_x \in A^e\#X_e$, para algum $e \in G_0$. Assim, $g \in G_e$ e $x \in X_e$. Então, usando o item anterior, segue que

$$\eta(a_g)(1_{d(g)}\delta_x) = a_g \cdot (1_{d(g)}\delta_x) = a_g 1_{d(g)}\delta_x = a_g\delta_x.$$

(iv) Se $a_g \in \bar{A}$ e $x \in X_g$, então $g \in G_e$ e $x \in X_e$, para algum $e \in G_0$. Logo, pela Proposição 1.1.2 (iv), temos que $(1_{r(g)}\delta_x)\eta(a_g) = (1_e\delta_x)\eta_e(a_g) = a_g\delta_{\alpha_{g^{-1}}(x)}$. ■

Encerramos esta seção com uma última observação.

Observação 2.1.10. *O conjunto $B = \{1_e\delta_x : e \in G_0 \text{ e } x \in X_e\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais.*

De fato, considere $1_e\delta_x$, $1_f\delta_y \in B$.

$$(1_e\delta_x)(1_f\delta_y) = \begin{cases} 1_e1_f\delta_y, & \text{se } e = f \text{ e } \alpha_f(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1_e\delta_x, & \text{se } e = f \text{ e } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.2 A Imersão de $\bar{A}\#X$ em $\bar{A} *_\beta P$

Como na seção anterior, sejam G um grupóide, onde G_0 é finito, $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e X um G-conjunto finito via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, tal que $X = \dot{\bigcup}_{e\in G_0} X_e$. Vejamos qual é a relação entre o produto smash para grupóides $\bar{A}\#X$ e o skew anel de grupóide $\bar{A} *_\beta P$, onde o grupóide P é uma união disjunta de grupóides como no Exemplo 1.2.7.

Novamente, ressaltamos que, para cada $e \in G_0$, $\alpha_{(e)} = (\{X_g\}_{g\in G_e}, \{\alpha_g\}_{g\in G_e})$ é uma ação global do grupo principal G_e em X_e, tal que $g \cdot x = \alpha_g(x)$, para todo $g \in G_e$ e $x \in X_e$. Portanto, para cada $e \in G_0$, pelo Exemplo 1.2.7, existe o grupóide $P(X_e, G_e)$, com multiplicação dada por $(x, g)(y, h) = (y, gh)$ se, e somente se, $\alpha_h(y) = x$, onde (x, g), $(y, h) \in P(X_e, G_e)$.

Lema 2.2.1. *Se $G_0 = \{e_1, ..., e_n\}$, então $P = \bigcup_{i=1}^{n} P(X_{e_i}, G_{e_i})$ é um grupóide.*

Demonstração: Pelo Exemplo 1.2.7, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, podemos considerar os grupóides dados por $P(X_{e_1}, G_{e_1}), ..., P(X_{e_n}, G_{e_n})$. Se escolhermos $(x, g) \in P(X_{e_i}, G_{e_i}) \cap P(X_{e_j}, G_{e_j})$, então $g \in G_{e_i} \cap G_{e_j}$, o que implica $e_i = r(g) = e_j$, ou seja, $i = j$. Portanto, P é uma união disjunta dos grupóides $P(X_{e_i}, G_{e_i})$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Pelo Exemplo 1.2.5, segue que P é um grupóide. ■

Se (x, g), $(y, h) \in P$, então existem únicos i, j tais que $(x, g) \in P(X_{e_i}, G_{e_i})$ e $(y, h) \in P(X_{e_j}, G_{e_j})$. Assim, pelos Exemplos 1.2.5 e 1.2.7, segue que (x, g) e (y, h)

são operáveis em P se, e somente se $i = j$ e $d((x,g)) = r((y,h))$ em $P(X_{e_i}, G_{e_i})$, ou seja, $(x, e_i) = (\alpha_h(y), e_i)$. Assim, (x,g), (y,h) são operáveis em P se, e somente se, $e_i = e_j$ e $x = \alpha_h(y)$. Feitas essas considerações, enunciemos a próxima proposição.

Proposição 2.2.2. *O grupóide P age no anel $\bar{A} = \bigoplus_{e \in G_0} A^e$, onde $A^e = \bigoplus_{g \in G_e} A_g$, para cada $e \in G_0$, via $\beta = (\{\bar{A}_{(x,g)}\}_{(x,g)\in P}, \{\beta_{(x,g)}\}_{(x,g)\in P})$, tal que $\bar{A}_{(x,g)} = \bigoplus_{h \in G_{r(g)}} A_h$ e $\beta_{(x,g)}\left(\sum_{h \in G_{r(g)}} a_h\right) = \sum_{h \in G_{r(g)}} a_h$, com $\sum_{h \in G_{r(g)}} a_h \in \bar{A}_{(x,g)^{-1}}$, para todo $(x,g) \in P$.*

Demonstração: Fixemos $(x,g) \in P$, então existe único $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $(x,g) \in P(X_{e_i}, G_{e_i})$. Logo, pelo Exemplo 1.2.7, segue que

$$\bar{A}_{(x,g)} = \bigoplus_{h \in G_{r(g)}} A_h = \bigoplus_{h \in G_{e_i}} A_h = \bigoplus_{h \in G_{d(g)}} A_h = \bigoplus_{h \in G_{r(g^{-1})}} A_h = \bar{A}_{(\alpha_g(x), g^{-1})} = \bar{A}_{(x,g)^{-1}},$$

ou seja, $\beta_{(x,g)}$ está bem definida. Por um cálculo semelhante, é fácil ver que $\bar{A}_{(x,g)} = \bar{A}_{r((x,g))}$. Provemos agora que $\bar{A}_{(x,g)}$ é um ideal bilateral de $\bar{A}$.

De fato, sejam $\sum_{h \in G_{e_i}} a_h \in \bar{A}_{(x,g)}$ e $a_k \in \bar{A}$, disto segue que $k \in G_f$, para algum $f \in G_0$. Se $f = e_i$, então $a_k\left(\sum_{h \in G_{e_i}} a_h\right) = \sum_{h \in G_{e_i}} a_k a_h \in \bar{A}_{(x,g)}$. Se $f \neq e_i$, então $a_k\left(\sum_{h \in G_{e_i}} a_h\right) = 0 \in \bar{A}_{(x,g)}$. Analogamente, $\left(\sum_{h \in G_{e_i}} a_h\right) a_k \in \bar{A}_{(x,g)}$

Claramente, $\beta_{(x,g)}$ é um isomorfismo de ideais e $\beta_{r((x,g))} : \bar{A}_{r((x,g))} \to \bar{A}_{r((x,g))}$ é a aplicação identidade para todo $(x,g) \in P$. Por último, consideramos (x,g), $(y,k) \in P$, ou seja, existem únicos i, $j \in \{1, ..., n\}$ tais que $(x,g) \in P(X_{e_i}, G_{e_i})$ e $(y,k) \in P(X_{e_j}, G_{e_j})$. Suponhamos $d((x,g)) = r((y,k))$, já vimos que isso ocorre se, e somente se, $e_i = e_j$ e $\alpha_k(y) = x$. Disto segue que, para todo $\sum_{h \in G_{e_j}} a_h \in \bar{A}_{(y,k)} = \bar{A}_{(y,k)^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}\beta_{(x,g)}\left(\beta_{(y,k)}\left(\sum_{h \in G_{e_j}} a_h\right)\right) &= \beta_{(x,g)}\left(\sum_{h \in G_{e_j}} a_h\right) = \sum_{h \in G_{e_j}} a_h \\ &= \beta_{(y,gk)}\left(\sum_{h \in G_{e_j}} a_h\right) = \beta_{(x,g)(y,k)}\left(\sum_{h \in G_{e_j}} a_h\right).\end{aligned}$$

Portanto, P age em $\bar{A} = \bigoplus\limits_{e \in G_0} \left(\bigoplus\limits_{g \in G_e} A_g \right)$ via β. ■

Observação 2.2.3. *Consideremos $(x,g) \in P$, como já vimos antes, existe único $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $(x,g) \in P(X_{e_i}, G_{e_i})$. Notemos que $\bar{A}_{(x,g)} = \sum\limits_{h \in G_{e_i}} a_h = A^{e_i}$. Nestas condições, o ideal $\bar{A}_{(x,g)}$ tem unidade dada por $1_{(x,g)} = 1_{e_i}$, onde $1_A = \sum\limits_{i=1}^{n} 1_{e_i}$.*

Pela proposição anterior e pela Definição 1.2.35, podemos considerar o skew anel de grupóide $\bar{A} *_\beta P = \bigoplus\limits_{(x,g) \in P} \bar{A}_{(x,g)} \varepsilon_{(x,g)}$. De acordo com a Definição 1.2.35, vejamos como será a multiplicação neste anel.

Sejam $a_k \varepsilon_{(x,g)}, b_l \varepsilon_{(y,h)} \in \bar{A} *_\beta P$. Disto segue que existem únicos i, $j \in \{1, ..., n\}$ tais que $(x,g) \in P(X_{e_i}, G_{e_i})$ e $(y,h) \in P(X_{e_j}, G_{e_j})$, o que implica $k \in G_{e_i}$ e $l \in G_{e_j}$. Então,

$$
\begin{aligned}
(a_k \varepsilon_{(x,g)})(b_l \varepsilon_{(y,h)}) &= \begin{cases} a_k \beta_{(x,g)}(b_l) \varepsilon_{(x,g)(y,h)}, & \text{se } d((x,g)) = r((y,h)) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_k \beta_{(x,g)}(b_l) \varepsilon_{(y,gh)}, & \text{se } e_i = e_j \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_k b_l \varepsilon_{(y,gh)}, & \text{se } e_i = e_j \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Notemos que se $e_i = e_j$, então $d(k) = r(l)$. Além disso, podemos observar que $P_0 = \{d((x,g)) : (x,g) \in P\} = \{(x,e) : e \in G_0 \text{ e } x \in X_e\}$. Como G_0 e X são finitos, então P_0 é finito. Assim, temos que $\bar{A} *_\beta P$ tem unidade dada por $1_{\bar{A} *_\beta P} = \sum\limits_{(x_e,e) \in P_0} 1_{(x_e,e)} \varepsilon_{(x_e,e)} = \sum\limits_{e \in G_0} \sum\limits_{x_e \in X_e} 1_{(x_e,e)} \varepsilon_{(x_e,e)} = \sum\limits_{e \in G_0} \sum\limits_{x_e \in X_e} 1_e \varepsilon_{(x_e,e)}$.

Para encerrarmos esta seção, mostremos que o anel $\bar{A}\#X$ pode ser "imerso"em $\bar{A} *_\beta P$.

Teorema 2.2.4. *A aplicação $\varphi : \bar{A}\#X \to \bar{A} *_\beta P$, definida por $\varphi(a_g \delta_x) = a_g \varepsilon_{(x,g)}$, para todo $a_g \delta_x \in \bar{A}\#X$, é um homomorfismo injetor de anéis.*

Demonstração: Se $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$, então $a_g\delta_x \in A^{e_i}\#X_{e_i}$, para algum $i \in \{1, ..., n\}$, ou seja, $g \in G_{e_i}$ e $x \in X_{e_i}$. Assim, $(x, g) \in P(X_{e_i}, G_{e_i})$ e $a_g \in \bar{A}_{(x,g)}$, o que prova a boa definição de φ. Agora, consideremos $a_g\delta_x$, $b_h\delta_y \in \bar{A}\#X$, ou seja, $a_g\delta_x \in A^{e_i}\#X_{e_i}$ e $b_h\delta_y \in A^{e_j}\#X_{e_j}$, para i, $j \in \{1, ..., n\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)) &= \begin{cases} \varphi(a_g b_h \delta_y), \text{ se } e_i = e_j \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_g b_h \varepsilon_{(y,gh)}, \text{ se } e_i = e_j \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= (a_g\varepsilon_{(x,g)})(b_h\varepsilon_{(y,h)}) \\
&= \varphi(a_g\delta_x)\varphi(b_h\delta_y).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi(1_{\bar{A}\#X}) &= \varphi\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{x_e\in X_e} 1_e\delta_{x_e}\right) = \sum_{e\in G_0}\sum_{x_e\in X_e} \varphi(1_e\delta_{x_e}) \\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{x_e\in X_e} 1_e\varepsilon_{(x_e,e)} = 1_{\bar{A}*_\beta P}.
\end{aligned}$$

Por último, consideremos $\sum\limits_{e\in G_0}\sum\limits_{\substack{g\in G_e\\ x\in X_e}} a_g\delta_{x_g} \in Ker\varphi$. Segue que

$$\begin{aligned}
0 = \varphi\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right) &= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} \varphi(a_g\delta_{x_g}) \\
= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\varepsilon_{(x_g,g)} &\in \bar{A} *_\beta P = \bigoplus_{(y,h)\in P} \bar{A}_{(y,h)}\varepsilon_{(y,h)},
\end{aligned}$$

o que implica que $a_g = 0$, para todo $(x_g, g) \in P$ na soma acima. Portanto, φ é injetiva. ■

2.3 A Equivalência das Categorias $\bar{A}\#X - mod$ e $(G, X, \bar{A}) - gr$

Novamente, sejam G um grupóide, tal que G_0 é finito, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado, com unidade dada por $1_A = \sum_{e \in G_0} 1_e$, e $\bar{A}$ o subanel de A definido por $\bar{A} = \bigoplus_{e \in G_0} A^e$, onde $A^e = \bigoplus_{g \in G_e} A_g$, e X um G-conjunto finito via $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$, tal que $X = \dot{\bigcup_{e \in G_0}} X_e$. O produto smash considerado será como na Definição 2.1.1.

Definição 2.3.1. *Nas condições anteriores, seja M um $\bar{A}$-módulo à esquerda unitário. Dizemos que M é X-graduado, se $M = \bigoplus_{x \in X} M_x$, tal que para cada $x \in X$, M_x é subgrupo do grupo aditivo de M, e*

$$A_g M_x \begin{cases} \subseteq M_{\alpha_g(x)}, & se\ x \in X_e \\ 0, & caso\ contrário, \end{cases}$$

para quaisquer $x \in X$ e $g \in G_e$, onde $e \in G_0$. Neste caso, dizemos que M é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X.

Observação 2.3.2. *Na definição anterior, podemos escrever $M = \bigoplus_{e \in G_0} \left(\bigoplus_{x_e \in X_e} M_{x_e} \right) = \bigoplus_{e \in G_0} M^e$. Assim, se M é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X, então M_e é um A^e-módulo graduado de tipo X_e (ver Definição 1.1.4), para cada $e \in G_0$.*

De fato, lembremos que, para cada $e \in G_0$, G_e é um grupo que age globalmente no conjunto X_e, via $g \cdot x = \alpha_g(x)$, quaisquer que sejam $g \in G_e$, $x \in X_e$. Além disso, $A^e = \bigoplus_{g \in G_e} A_g$. Para cada $e \in G_0$, temos que $M^e = \bigoplus_{x_e \in X_e} M_{x_e}$. Se $g \in G_e$ e $x \in X_e$, então $\alpha_g(x) \in X_e$. Logo, se $a_g \in A^e$ e $m_x \in M^e$, temos que $a_g m_x \in M_{\alpha_g(x)} \subseteq M^e$.

Dessa maneira, temos que se M é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X no sentido de grupóides, então M é uma soma direta de A^e-módulos graduados de tipo X_e no sentido de grupos, indexada por G_0. A partir disto, segue nossa próxima proposição, a qual estabelece uma relação entre $\bar{A}$-módulos graduados de tipo X e $\bar{A}\#X$-módulos à esquerda unitários.

Proposição 2.3.3. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) M é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X;

(ii) M é um $\bar{A}\#X$-módulo à esquerda unitário.

Demonstração: Suponhamos que M é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X, então $M = \bigoplus_{e \in G_0} M^e$, onde M^e é um A^e-módulo graduado de tipo X_e, para cada $e \in G_0$. Pelo Teorema 1.1.5, temos que M^e é um $A^e\#X_e$-módulo à esquerda unitário, para todo $e \in G_0$. Sejam $m = \sum_{e \in G_0} m^e \in M$ e $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$. Assim, existe $f \in G_0$, tal que $a_g\delta_x \in A^f\#X_f$. Pelo Teorema 1.1.5, definimos $a_g\delta_x \cdot m = (a_g\delta_x) \cdot m^f = a_g(m^f)_x = a_g m_x$. Sejam $a_g\delta_x,\ b_h\delta_y \in \bar{A}\#X$, então $a_g\delta_x \in A^{f_1}\#X_{f_1}$ e $b_h\delta_y \in A^{f_2}\#X_{f_2}$, com $f_1,\ f_2 \in G_0$. Se $f_1 \neq f_2$, então $(a_g\delta_x)(b_h\delta_y) = 0$. Suponhamos que $f_1 = f_2$, logo $(a_g\delta_x)(b_h\delta_y) \in A^{f_1}\#X_{f_1}$. Então, usando o Teorema 1.1.5, para todo $m \in M$, temos

$$\begin{aligned}
\big((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)\big) \cdot m &= \begin{cases} \big((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)\big) \cdot m^{f_1}, & \text{se } f_1 = f_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m^{f_1}\big), & \text{se } f_1 = f_2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por outro lado, $(a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m)\big) = (a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m^{f_2}\big)$. Se $f_1 \neq f_2$, então $(a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m^{f_2}\big) = 0$. Suponhamos que $f_1 = f_2$, logo

$$\begin{aligned}
(a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m\big) &= (a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m^{f_2}\big) \\
&= \begin{cases} (a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m^{f_1}\big), & \text{se } f_1 = f_2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, $\big((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)\big) \cdot m = (a_g\delta_x) \cdot \big((b_h\delta_y) \cdot m\big)$. Além disso, se $m \in M$, então

$$1_{\bar{A}\#X} \cdot m = \left(\sum_{e \in G_0} 1_{A^e\#X_e}\right) \cdot m = \sum_{e \in G_0} (1_{A^e\#X_e} \cdot m^e) = \sum_{e \in G_0} m^e = m.$$

Dessa maneira, M é um $\bar{A}\#X$-módulo à esquerda unitário.

Reciprocamente, suponhamos que M é um $\bar{A}\#X$-módulo à esquerda unitário. Pela Proposição 2.1.8, podemos definir uma ação de $\bar{A}$ em M dada por $a_g \cdot m = \eta(a_g)m$. Dessa maneira, M é um $\bar{A}$-módulo à esquerda unitário.

Agora, notemos que, para cada $x \in X = \dot{\bigcup\limits_{e \in G_0}} X_e$, existe único $e \in G_0$, tal que $x \in X_e$. Definimos $M_x = (1_e\delta_x)M$. Se considerarmos $m \in M$, então

$$m = (1_{\bar{A}\#X})m = \left(\sum_{e\in G_0}\sum_{x_e\in X_e} 1_e\delta_{x_e}\right)m = \sum_{e\in G_0}\sum_{x_e\in X_e}(1_e\delta_{x_e})m,$$

isto é, $m \in \sum\limits_{e\in G_0}\sum\limits_{x_e\in X_e}(1_e\delta_{x_e})M \subseteq \sum\limits_{x\in X} M_x$.

Usando a Observação 2.1.10, segue por um cálculo análogo ao do Teorema 1.1.5, que $M_x \cap \left(\sum\limits_{\substack{y\in X\\ y\neq x}} M_y\right) = 0$. Portanto, $M = \bigoplus\limits_{x\in X} M_x$.

Finalmente, consideremos $a_g \in \bar{A}$ e $m \in M_x$, ou seja, $g \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Suponhamos primeiro que $x \in X_e$. Assim, $m = (1_e\delta_x)n$, para algum $n \in M$. Então, usando o Corolário 2.1.9, segue que

$$a_g \cdot m = a_g \cdot ((1_e\delta_x)n) = (\eta(a_g)(1_e\delta_x))n = (a_g\delta_x)n = (1_e\delta_{\alpha_g(x)})(a_g\delta_x)n,$$

logo $a_g \cdot m = (a_g\delta_x)n = (1_e\delta_{\alpha_g(x)})(a_g\delta_x)n \in M_{\alpha_g(x)}$.

Agora, suponhamos que $x \in X_f$, tal que $f \neq e$. Assim, $m = (1_f\delta_x)n$, para algum $n \in M$. Logo,

$$\begin{aligned} a_g \cdot m &= a_g \cdot ((1_f\delta_x)n) = \eta(a_g)((1_f\delta_x)n) \\ &= \eta(a_g)(1_f\delta_x)n = \left(\sum_{y\in X_g} a_g\delta_y\right)(1_f\delta_x)n \\ &= \sum_{y\in X_g}(a_g\delta_y)(1_f\delta_x)n. \end{aligned}$$

Como $g \in G_e$ e $f \neq e$, temos que $a_g 1_f = 0$. Assim, pela multiplicação em $\bar{A}\#X$, $a_g \cdot m = 0$. Dessa maneira,

$$A_g M_x \begin{cases} \subseteq M_{\alpha_g(x)}, & \text{se } x \in X_e \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, M é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X. ■

Vamos denotar por $\bar{A}\#X - mod$, a categoria dos $\bar{A}\#X$-módulos à esquerda unitários, e por $(G, X, \bar{A}) - gr$, a categoria dos $\bar{A}$-módulos graduados de tipo X. Se M, $N \in (G, X, \bar{A}) - gr$, então um homomorfismo em $(G, X, \bar{A}) - gr$ é uma aplicação $\psi : M \to N$, tal que $\psi(am) = a\psi(m)$, para quaisquer $a \in \bar{A}$ e $m \in M$, e $\psi(M_x) \subseteq N_x$, para todo $x \in X$. Pela Proposição 2.3.3, temos que M e N são $\bar{A}\#X$-módulos à esquerda unitários. Consideremos $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$ e $m \in M$. Logo,

$$\psi((a_g\delta_x) \cdot m) = \psi(a_g m_x) = a_g\psi(m_x) = a_g(\psi(m))_x = (a_g\delta_x) \cdot \psi(m),$$

logo, se $\psi : M \to N$ é um homomorfismo em $(G, X, \bar{A}) - gr$, então ψ é um homomorfismo em $\bar{A}\#X - mod$.

Por outro lado, consideremos um homomorfismo $\varphi : M \to N$ em $\bar{A}\#X - mod$. Novamente, pela Proposição 2.3.3, temos que M e N são $\bar{A}$-módulos graduados de tipo X. Sejam $a_g \in \bar{A}$ e $m \in M$, então $\varphi(a_g \cdot m) = \varphi(\eta(a_g)m) = \eta(a_g)\varphi(m) = a_g \cdot \varphi(m)$. Além disso, se $x \in X = \dot{\bigcup\limits_{e \in G_0}} X_e$, então existe único $e \in G_0$, tal que $x \in X_e$. Logo, se $m \in M_x$, então $m = (1_e\delta_x)n$, onde $n \in M$. Assim, $\varphi(m) = \varphi((1_e\delta_x)n) = (1_e\delta_x)\varphi(n) \in N_x$. Portanto, se $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo em $\bar{A}\#X - mod$, então φ é um homomorfismo em $(G, X, \bar{A}) - gr$.

Dessa maneira, pela Proposição 2.3.3, podemos definir os funtores:

$$F : (G, X, \bar{A}) - gr \to \bar{A}\#X - mod \quad \text{e} \quad G : \bar{A}\#X - mod \to (G, X, \bar{A}) - gr$$

tais que $F(M) = M^{\#}$ e $F(\psi) = \psi^{\#}$, onde $M^{\#}$ é o $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X M, com estrutura de $\bar{A}\#X$-módulo e $\psi^{\#} = \psi$, e $G(N) = N^{gr}$ e $G(\varphi) = \varphi^{gr}$, onde N^{gr} é o $\bar{A}\#X$-módulo à esquerda N, com estrutura de $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X e $\varphi^{gr} = \varphi$.

Por toda a construção feita até agora, podemos enunciar um dos principais resultados dessa seção.

Teorema 2.3.4. *As categorias $\bar{A}\#X - mod$ e $(G, X, \bar{A}) - gr$ são equivalentes.*

Demonstração: Para cada $M \in \bar{A}\#X - mod$, definimos a transformação natural $\theta : \bar{A}\#X - mod \to \bar{A}\#X - mod$, por $\theta_M : M \to M^{gr\#}$, tal que $\theta_M(m) = m$, para todo $m \in M$. Claramente, θ_M é uma bijeção. Resta mostrar que é um homomorfismo de $\bar{A}\#X$-módulos. Sejam $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$ e $m \in M$, então

$$(a_g\delta_x) \cdot \theta_M(m) = a_g(\theta_M(m))_x = a_g m_x = (a_g\delta_x) \cdot m = \theta_M((a_g\delta_x) \cdot m).$$

Portanto, $I_{\bar{A}\#X-mod} \cong F \circ G$.

Reciprocamente, para cada $N \in (G, X, \bar{A}) - gr$, definimos a transformação natural $\gamma : (G, X, \bar{A}) - gr \to (G, X, \bar{A}) - gr$, por $\gamma_N : N \to N^{\#gr}$, tal que $\gamma(n) = n$, para todo $n \in N$. Claramente, γ_N é uma bijeção. Provemos que γ_N é um homorfismo de $\bar{A}$-módulos. De fato, sejam $n = \sum\limits_{y \in X} n_y \in N$ e $a_g \in \bar{A}$, então $g \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Logo,

$$\gamma_N(a_g n) = \gamma_N\left(a_g\left(\sum_{y \in X} n_y\right)\right) = \gamma_N\left(\sum_{y \in X} a_g n_y\right).$$

Como N é $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X, temos que $a_g n_y = 0$, para todo $y \notin X_e$. Assim,

$$\begin{aligned}\gamma_N(a_g n) &= \gamma_N\left(\sum_{y \in X} a_g n_y\right) = \gamma_N\left(\sum_{y \in X_e} a_g n_y\right) = \sum_{y \in X_e} a_g n_y \\ &= \left(\sum_{y \in X_e} a_g \delta_y\right) \cdot n = \eta(a_g)n = a_g \cdot n = a_g \cdot \gamma_N(n).\end{aligned}$$

Portanto, γ_N é um homorfismo de $\bar{A}$-módulos. Agora, se $x \in X$, então já vimos que existe único $e \in G_0$, tal que $x \in X_e$. Assim, se $n \in N_x$, então $n = 1_{\bar{A}}n = \left(\sum\limits_{f \in G_0} 1_f\right)n = \sum\limits_{f \in G_0} 1_f n = 1_e n$, pois $1_f n \in A_f N_x \subseteq N_{\alpha_f(x)}$ se, e somente se, $x \in X_f$. Logo, $(1_e\delta_x)n = 1_e n_x = n_x = n$. Logo, $\gamma_N(n) = n = (1_e\delta_x)n \in N_x$.

Portanto, $I_{(G,X,\bar{A})-gr} \cong G \circ F$. Sendo assim, as categorias $\bar{A}\#X - mod$ e $(G, X, \bar{A}) - gr$ são equivalentes. ∎

Ainda generalizando alguns resultados de [16], vamos apresentar a construção de um contexto de Morita, a qual serve como uma aplicação do teorema anterior. Para o que segue nesta seção, vamos fixar um elemento $x \in X$. Logo, existe único $e \in G_0$, tal que $x \in X_e$. A partir disto, segue nossa próxima definição.

Definição 2.3.5. *O conjunto $G_x = \{h \in G_e : \alpha_h(x) = x\}$ é definido como sendo o estabilizador de x em G.*

Notemos que se $h \in G_e$, então $X_h = X_e = X_{h^{-1}}$, o que implica na boa definição de G_x. Além disso, temos que G_x é um subgrupo de G_e. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3.6. Consideremos o grupóide $G = \{g, g^{-1}, d(g), r(g)\}$. Pelo Exemplo 1.2.22, temos que $X = G$ é um G-conjunto via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde $X_g = \{r(g), g\} = X_{r(g)}$, $X_{g^{-1}} = \{d(g), g^{-1}\} = X_{d(g)}$, $\alpha_{r(g)} = Id_{X_g}$, $\alpha_{d(g)} = Id_{X_{g^{-1}}}$, $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$ é tal que $\alpha_g(g^{-1}) = r(g)$, $\alpha_g(d(g)) = g$ e $\alpha_{g^{-1}} : X_g \to X_{g^{-1}}$ é tal que $\alpha_{g^{-1}}(g) = d(g)$ e $\alpha_{g^{-1}}(r(g)) = g^{-1}$. Temos que $G_g = G_{r(g)} = \{r(g)\}$ e $G_{g^{-1}} = G_{d(g)} = \{d(g)\}$.

Exemplo 2.3.7. Consideremos $G_1 = \{e, k : k^2 = e\}$, o grupo cíclico de ordem 2, e $G_2 = \{f, g, h, gh : g^2 = h^2 = (gh)^2 = f\}$, o grupo de Klein. Pelo Exemplo 1.2.4, podemos considerar o grupóide $G = G_1 \dot\cup G_2$. Novamente, $X = G$ é um G-conjunto via $\alpha = (\{X_l\}_{l\in G}, \{\alpha_l\}_{l\in G})$, tal que $G_1 = T_e = X_e = X_k$, $G_2 = T_f = X_f = X_g = X_h = X_{gh}$, $\alpha_e = Id_{X_e}$, $\alpha_f = Id_{X_f}$, $\alpha_k(e) = k$, $\alpha_k(k) = e$, $\alpha_g(f) = g$, $\alpha_g(h) = gh$, $\alpha_g(g) = f$, $\alpha_g(gh) = h$, $\alpha_h(f) = h$, $\alpha_h(g) = gh$, $\alpha_h(h) = f$, $\alpha_h(gh) = g$, $\alpha_{gh}(f) = gh$, $\alpha_{gh}(g) = h$, $\alpha_{gh}(h) = g$ e $\alpha_{gh}(gh) = f$. Temos que $G_x = \{e\}$, para todo $x \in G_1$ e $G_x = \{f\}$, para todo $x \in G_2$.

Como G_x é um subgrupo de G_e, podemos definir o subanel de A dado por $\bar{A}^{G_x} = \bigoplus_{h\in G_x} A_h$. Claramente, 1_e é uma unidade para $\bar{A}^{G_x}$.

Agora, consideremos $y \in X$. Portanto, existe único $f \in G_0$, tal que $y \in X_f$. Definimos

$$V_y = \bigoplus_{\substack{h \in S_f \cap T_e \\ \alpha_h(y)=x}} A_h \quad \text{e} \quad W_y = \bigoplus_{\substack{h \in T_f \cap S_e \\ \alpha_h(x)=y}} A_h.$$

No caso de V_y, observemos que $y \in X_f = X_{d(h)} = X_{h^{-1}}$ e $x \in X_e = X_{r(h)} = X_h$. Analogamente, para W_y temos que $x \in X_e = X_{d(h)} = X_{h^{-1}}$ e $y \in X_f = X_{r(h)} = X_h$. Portanto, V_y e W_y estão bem definidos, para todo $y \in X$. Além disso, podemos perceber que $V_x = \bigoplus_{\substack{h \in S_e \cap T_e \\ \alpha_h(x)=x}} A_h = \bigoplus_{h \in G_x} A_h = \bar{A}^{G_x}$. Analogamente, $W_x = \bar{A}^{G_x}$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3.8. Novamente, sejam o grupóide $G = \{g, g^{-1}, d(g), r(g)\}$ e a ação de G em $X = G$, mencionada no Exemplo 2.3.6. Consideremos a álgebra de grupóide $A = Ku_g \oplus Ku_{g^{-1}} \oplus Ku_{r(g)} \oplus Ku_{d(g)}$, onde K é um anel comutativo. Fixemos $g \in X$, então $g \in X_{r(g)}$. Já vimos que $G_g = \{r(g)\}$, o que implica $V_g = W_g = \bar{A}^{G_g} = Ku_{r(g)}$. Além disso, um cálculo simples nos mostra que $V_{g^{-1}} = \varnothing = V_{r(g)}$, $V_{d(g)} = Ku_g$, $W_{g^{-1}} = \varnothing = W_{r(g)}$ e $W_{d(g)} = Ku_{g^{-1}}$.

Exemplo 2.3.9. Consideremos $G = G_1 \dot{\cup} G_2$, onde $G_1 = \{e, k : k^2 = e\}$ é o grupo cíclico de ordem 2, e $G_2 = \{f, g, h, gh : g^2 = h^2 = (gh)^2 = f\}$ é o grupo de Klein. Dado K um anel comutativo, consideremos também a álgebra de grupóide $A = \bigoplus_{l \in G} Ku_l$. Pelo Exemplo 2.3.7, $X = G$ é um G-conjunto com ação dada por $\alpha = (\{X_l\}_{l \in G}, \{\alpha_l\}_{l \in G})$. Fixemos $g \in G$. Já vimos que $G_g = \{f\}$, o que implica que $V_g = W_g = \bar{A}^{G_g} = Ku_f$. Um cálculo simples nos mostra que $V_e = \varnothing = V_k$, $V_f = Ku_g$, $V_h = Ku_{gh}$, $V_{gh} = Ku_h$, $W_e = \varnothing = W_k$, $W_f = Ku_g$, $W_h = Ku_{gh}$ e $W_{gh} = Ku_h$.

A próxima proposição caracteriza V_y e W_y como $\bar{A}^{G_x}$-módulos, para todo $y \in X$.

Proposição 2.3.10. *Seja $y \in X_f$, tal que $V_y \neq \varnothing$. Então,* *(i)* V_y *é um* $\bar{A}^{G_x}$*-módulo à esquerda unitário, via multiplicação em* A*;*

(ii) W_y *é um* $\bar{A}^{G_x}$*-módulo à direita unitário, via multiplicação em* A*.*

Demonstração: (i) Sejam $a_h \in \bar{A}^{G_x}$ e $b_k \in V_y$. Assim, $h \in G_e$, $k \in S_f \cap T_e$, $\alpha_h(x) = x$ e $\alpha_k(y) = x$. Notemos que $d(h) = e = r(k)$, logo $a_h b_k \in A_{hk}$. Além disso, $d(hk) = d(k) = f$ e $r(hk) = r(h) = e$, ou seja, $hk \in S_f \cap T_e$. Mais ainda, $\alpha_{hk}(y) = \alpha_h(\alpha_k(y)) = \alpha_h(x) = x$. Portanto, $a_h b_k \in V_y$. Notemos que $1_e b_k = 1_{r(k)} b_k = b_k$. As demais condições de módulo seguem diretamente da associatividade do anel A. Sendo assim, V_y é um $\bar{A}^{G_x}$-módulo à esquerda unitário, via multiplicação em A.

(ii) Segue análogo ao caso anterior. ■

Definimos $V = \bigoplus_{\substack{f \in G_0 \\ y_f \in X_f}} V_{y_f}$ e $W = \bigoplus_{\substack{f \in G_0 \\ y_f \in X_f}} W_{y_f}$. Pela proposição anterior, segue que V é um $\bar{A}^{G_x}$-módulo à esquerda unitário e W é um $\bar{A}^{G_x}$-módulo à direita unitário. Antes da próxima proposição, façamos uma observação.

Observação 2.3.11. *Seja* $y \in X_f$*, tal que* $W_y \neq \varnothing$*. Para todo* $h \in S_f$*, temos que* $A_h W_y \subseteq W_{\alpha_h(y)}$*.*

De fato, sejam $a_h \in A_h$ e $b_k \in W_y$, ou seja, $k \in S_e \cap T_f$ e $\alpha_k(x) = y$. Temos que $a_h b_k \in A_{hk}$, pois $d(h) = f = r(k)$. Além disso, $d(hk) = d(k) = e$ e $r(hk) = r(h)$, isto é, $hk \in S_e \cap T_{r(h)}$. Mais ainda, $\alpha_{hk}(x) = \alpha_h(\alpha_k(x)) = \alpha_h(y)$. Dessa maneira, $a_h b_k \in W_{\alpha_h(y)}$.

Proposição 2.3.12. *Nas condições dessa seção,* W *é um* $\bar{A}\#X$*-módulo à esquerda unitário, via* $a_g \delta_y \cdot w = a_g w_y$*, para quaisquer* $a_g \delta_y \in \bar{A}\#X$ *e* $w \in W$*.*

Demonstração: Vamos mostrar que W é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X. Por definição, temos que $W = \bigoplus_{\substack{f \in G_0 \\ y_f \in X_f}} W_{y_f}$. Além disso, W é um $\bar{A}$-módulo à esquerda unitário via multiplicação. De fato, consideremos $a_h \in \bar{A} = \bigoplus_{f \in G_0} A^f$ e $b_k \in W$. Assim, existem únicos f_1, $f_2 \in G_0$, tais que $a_h \in A^{f_1}$ e $b_k \in W_y$, com $y \in X_{f_2}$, ou seja, $h \in G_{f_1}$, $k \in S_e \cap T_{f_2}$ e $\alpha_k(x) = y$. Notemos que se $d(h) \neq r(k)$, então $a_h b_k = 0$. Logo, suponhamos $f_1 = d(h) = r(k) = f_2$. Neste caso, pela observação anterior, $a_h b_k \in W_{\alpha_h(y)} \subseteq W$. Mais ainda, $1_{\bar{A}} b_k = \left(\sum_{f \in G_0} 1_f\right) b_k = 1_{r(k)} b_k = b_k$. Novamente, por cálculos já feitos, se $h \in G_{f_1}$, então $A_h W_z \subseteq W_{\alpha_h(z)}$, para todo $z \in X_{f_1}$, e $A_h W_z = 0$, para todo $z \notin X_{f_1}$. Portanto, W é um $\bar{A}$-módulo graduado de tipo X. Sendo assim, pela Proposição 2.3.3, temos que W é um $\bar{A}\#X$-módulo à esquerda unitário, via $a_g\delta_y \cdot w = a_g w_y$, para quaisquer $a_g\delta_y \in \bar{A}\#X$ e $w \in W$. ■

Vamos mostrar que V é um $\bar{A}\#X$-módulo à direita unitário. Antes disso, assim como em W, façamos uma observação.

Observação 2.3.13. *Consideremos $y \in X_f$. Para todo $h \in S_f$, tal que $V_{\alpha_h(y)} \neq \varnothing$, vale que $V_{\alpha_h(y)} A_h \subseteq V_y$.*

De fato, sejam $a_h \in A_h$ e $b_k \in V_{\alpha_h(y)}$, ou seja, $k \in S_{r(h)} \cap T_e$ e $\alpha_k(\alpha_h(y)) = x$. Notemos que $d(k) = r(h)$, então $b_k a_h \in A_{kh}$. Além disso, $d(kh) = d(h) = f$ e $r(kh) = r(k) = e$, isto é, $kh \in S_f \cap T_e$. Mais ainda, $x = \alpha_k(\alpha_h(y)) = \alpha_{kh}(y)$. Portanto, $b_k a_h \in V_y$.

Proposição 2.3.14. *Nas condições dessa seção, V é um $\bar{A}\#X$-módulo à direita unitário, via $v \cdot (a_h\delta_y) = (va_h)_y$, para quaisquer $v \in V$ e $a_h\delta_y \in \bar{A}\#X$.*

Demonstração: Provemos primeiramente que esta ação está bem definida, mostrando que V é um $\bar{A}$-módulo à direita unitário via multiplicação. De fato, sejam $a_h \in \bar{A}$ e $b_k \in V_y$, para algum $y \in X_{f_1}$, ou seja, $h \in G_{f_2}$, para algum $f_2 \in G_0$, $k \in S_{f_1} \cap T_e$ e $\alpha_k(y) = x$. Notemos que se $d(k) \neq r(h)$, então $b_k a_h = 0$. Logo, suponhamos que $f_1 = d(k) = r(h) = f_2$. Neste caso, pela observação anterior, $b_k a_h \in V_y A_h = V_{\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(y))} A_h \subseteq V_{\alpha_{h^{-1}}(y)} \subseteq V$. Além disso, $b_k 1_{\bar{A}} = b_k \left(\sum_{f \in G_0} 1_f\right) = b_k 1_{d(k)} = b_k$.

Agora, se $f \in G_0$, então consideremos $c_l \in V_y$, para algum $y \in X_f$. Sejam também $a_h\delta_{z_1}, b_k\delta_{z_2} \in \bar{A}\#X$. Logo, $l \in S_f \cap T_e$, $a_h\delta_{z_1} \in A^{f_1}\#X_{f_1}$, $b_k\delta_{z_2} \in A^{f_2}\#X_{f_2}$, para f_1, $f_2 \in G_0$, e $\alpha_l(y) = x$. Assim,

$$c_l \cdot \big((a_h\delta_{z_1})(b_k\delta_{z_2})\big) = \begin{cases} c_l \cdot (a_h b_k \delta_{z_2}), \text{ se } f_1 = f_2 \text{ e } \alpha_k(z_2) = z_1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (c_l a_h b_k)_{z_2}, \text{ se } f = f_1 = f_2 \text{ e } \alpha_k(z_2) = z_1 \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

entretanto, $c_l a_h b_k \in V_y A_{hk} = V_{\alpha_{hk}(\alpha_{(hk)^{-1}}(y))} A_{hk} \subseteq V_{\alpha_{(hk)^{-1}}(y)}$. Logo,

$$c_l \cdot \big((a_h\delta_{z_1})(b_k\delta_{z_2})\big) = \begin{cases} c_l a_h b_k, \text{ se } f = f_1 = f_2, \ \alpha_k(z_2) = z_1 \text{ e } \alpha_{hk}(z_2) = y \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, temos que

$$\big(c_l \cdot (a_h\delta_{z_1})\big) \cdot (b_k\delta_{z_2}) = \begin{cases} (c_l a_h)_{z_1} \cdot (b_k\delta_{z_2}), \text{ se } f = f_1 \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

entretanto, $c_l a_h \in V_y A_h \subseteq V_{\alpha_{h^{-1}(y)}}$. Logo,

$$\big(c_l \cdot (a_h\delta_{z_1})\big) \cdot (b_k\delta_{z_2}) = \begin{cases} c_l a_h \cdot (b_k\delta_{z_2}), \text{ se } f = f_1 \text{ e } y = \alpha_h(z_1) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (c_l a_h b_k)_{z_2}, \text{ se } f = f_1 = f_2 \text{ e } y = \alpha_h(z_1) \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} c_l a_h b_k, \text{ se } f = f_1 = f_2, \ y = \alpha_h(z_1) \text{ e } \alpha_{hk}(z_2) = y \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Provemos que se $f = f_1 = f_2$ e $\alpha_{hk}(z_2) = y$, então $\alpha_k(z_2) = z_1$ se, e somente se, $y = \alpha_h(z_1)$. Se $\alpha_k(z_2) = z_1$, então $y = \alpha_{hk}(z_2) = \alpha_h(\alpha_k(z_2)) = \alpha_h(z_1)$. Reciprocamente, se $y = \alpha_h(z_1)$, então $z_1 = \alpha_{h^{-1}}(y) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{hk}(z_2)) = \alpha_{h^{-1}hk}(z_2) = \alpha_k(z_2)$. Portanto, $c_l \cdot \big((a_h\delta_{z_1})(b_k\delta_{z_2})\big) = \big(c_l \cdot (a_h\delta_{z_1})\big) \cdot (b_k\delta_{z_2})$.

Por último, notemos que

$$c_l \cdot 1_{\bar{A}\#X} = c_l \cdot \left(\sum_{f_0 \in G_0} \sum_{z \in X_{f_0}} 1_{f_0}\delta_z \right) = \sum_{f_0 \in G_0} \sum_{z \in X_{f_0}} (c_l 1_{f_0})_z$$
$$= \sum_{z \in X_f} (c_l 1_f)_z = (c_l)_y = c_l.$$

Portanto, V é um $\bar{A}\#X$-módulo à direita unitário, via $v \cdot (a_h\delta_y) = (v \cdot a_h)_y$, para quaisquer $v \in V$ e $a_h\delta_y \in \bar{A}\#X$. ■

Já mostramos que V é um $\bar{A}^{G_x}$-módulo à esquerda unitário e um $\bar{A}\#X$-módulo à direita unitário. Também mostramos que W é um $\bar{A}^{G_x}$-módulo à direita unitário e um $\bar{A}\#X$-módulo à esquerda unitário. A próxima proposição irá associar estas estruturas.

Proposição 2.3.15. *Nas condições anteriores,*

(i) V é um $(\bar{A}^{G_x}, \bar{A}\#X)$-bimódulo;

(ii) W é um $(\bar{A}\#X, \bar{A}^{G_x})$-bimódulo.

Demonstração: (i) Sejam $y \in X_f$, para algum $f \in G_0$, $b_k \in V_y$, $a_h \in \bar{A}^{G_x}$ e $c_l\delta_z \in \bar{A}\#X$. Assim, $k \in S_f \cap T_e$, $h \in G_e$, $c_l\delta_z \in A^{f_1}\#X_{f_1}$, para $f_1 \in G_0$, $\alpha_k(y) = x$ e $\alpha_h(x) = x$. Logo,

$$a_h\big(b_k \cdot (c_l\delta_z)\big) = \begin{cases} a_h(b_kc_l)_z, \text{ se } f = f_1 \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

entretanto, se $f = f_1$, então $b_kc_l \in V_yA_l \subseteq V_{\alpha_{l^{-1}}(y)}$. Logo,

$$a_h\big(b_k \cdot (c_l\delta_z)\big) = \begin{cases} a_hb_kc_l, \text{ se } e = f = f_1 \text{ e } \alpha_l(z) = y \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, temos que

$$(a_hb_k)\cdot(c_l\delta_z) = \begin{cases} a_hb_k\cdot(c_l\delta_z), \text{ se } e=f \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (a_hb_kc_l)_z \text{ se } e=f=f_1 \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

mas se $e=f=f_1$, então $a_hb_kc_l \in \bar{A}^{G_x}V_yA_l \subseteq V_yA_l \subseteq V_{\alpha_{l^{-1}}(y)}$ (ver Proposição 2.3.10). Assim,

$$a_h\big(b_k\cdot(c_l\delta_z)\big) = \begin{cases} a_hb_kc_l, \text{ se } e=f=f_1 \text{ e } \alpha_l(z)=y \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo assim, $a_h\big(b_k\cdot(c_l\delta_z)\big) = a_h\big(b_k\cdot(c_l\delta_z)\big)$.

(ii) Sejam $y\in X_f$, para algum $f\in G_0$, $b_k\in W_y$, $a_h\in\bar{A}^{G_x}$ e $c_l\delta_z\in\bar{A}\#X$. Assim, $k\in S_e\cap T_f$, $h\in G_e$, $c_l\delta_z\in A^{f_1}\#X_{f_1}$, para $f_1\in G_0$, $\alpha_k(x)=y$ e $\alpha_h(x)=x$. Logo,

$$\big((c_l\delta_z)\cdot b_k\big)a_h = c_l(b_k)_za_h = \begin{cases} c_lb_ka_h, \text{ se } f_1=f=e \text{ e } z=y \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, seque que

$$(c_l\delta_z)\cdot(b_ka_h) = \begin{cases} (c_l\delta_z)\cdot(b_ka_h), \text{ se } f=e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} c_l(b_ka_h)_z, \text{ se } f=e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} c_lb_ka_h, \text{ se } f_1=f=e \text{ e } z=y \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

pois se $f=e$, então $b_ka_h\in W_y\bar{A}^{G_x}\subseteq W_y$ (ver Proposição 2.3.10). Sendo assim, $\big((c_l\delta_z)\cdot b_k\big)a_h = (c_l\delta_z)\cdot(b_ka_h)$. ∎

Vamos definir a aplicação $\varphi : V \times W \to \bar{A}^{G_x}$, por $\varphi(v,w) = \sum\limits_{h \in G_x} (vw)_h$, quaisquer que sejam $v \in V$ e $w \in W$. Notemos que esta aplicação é $\bar{A}\#X$-balanceada. De fato, consideremos $f_1,\ f_2 \in G_0,\ y \in X_{f_1},\ z \in X_{f_2},\ b_k \in V_y,\ c_l \in W_z$ e $a_g\delta_t \in \bar{A}\#X$, isto é, $a_g\delta_t \in A^f\#X_f$, para algum $f \in G_0$, $k \in S_{f_1} \cap T_e$, $l \in S_e \cap T_{f_2}$, $\alpha_k(y) = x$ e $\alpha_l(x) = z$. Logo,

$$\varphi(b_k \cdot (a_g\delta_t), c_l) = \begin{cases} \varphi((b_k a_g)_t, c_l), \text{ se } f_1 = f \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

entretanto, notemos que se $f_1 = f$, então $b_k a_g \in V_y A_g \subseteq V_{\alpha_{g^{-1}}(y)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(b_k \cdot (a_g\delta_t), c_l) &= \begin{cases} \varphi(b_k a_g, c_l), \text{ se } f_1 = f \text{ e } \alpha_g(t) = y \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_k a_g c_l, \text{ se } f_1 = f = f_2,\ \alpha_g(t) = y \text{ e } kgl \in G_x \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(b_k, (a_g\delta_t) \cdot c_l) = \varphi(b_k, a_g(c_l)_t) &= \begin{cases} \varphi(b_k, a_g c_l), \text{ se } f_2 = f \text{ e } t = z \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_k a_g c_l, \text{ se } f_1 = f_2 = f,\ t = z \text{ e } kgl \in G_x \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Para mostrar que $\varphi(b_k \cdot (a_g\delta_t), c_l) = \varphi(b_k, (a_g\delta_t) \cdot c_l)$, resta provar que se $f = f_1 = f_2$ e $kgl \in G_x$, então $\alpha_g(t) = y$ se, e somente se, $t = z$. Observemos que se $kgl \in G_x$, então $x = \alpha_{kgl}(x) = \alpha_{kg}(\alpha_l(x)) = \alpha_{kg}(z)$, isto é, $z = \alpha_{(kg)^{-1}}(x)$. Assim, se $\alpha_g(t) = y$, então $z = \alpha_{(kg)^{-1}}(x) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{k^{-1}}(x)) = \alpha_{g^{-1}}(y) = t$. Reciprocamente, se $t = z$, então $\alpha_g(t) = \alpha_g(z) = \alpha_g(\alpha_{(kg)^{-1}}(x)) = \alpha_{k^{-1}}(x) = y$.

Portanto, pela Propriedade Universal do Produto Tensorial, está bem definida a aplicação $(,) : V \otimes_{\bar{A}\#X} W \to \bar{A}^{G_x}$, dada por $(v,w) = \sum\limits_{h \in G_x} (vw)_h$, para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.

Proposição 2.3.16. *A aplicação* $(,) : V \otimes_{\bar{A}\#X} W \to \bar{A}^{G_x}$ *é um homomorfismo de* $\bar{A}^{G_x}$*-bimódulos.*

Demonstração: Sejam $f_1, f_2 \in G_0$, $y \in X_{f_1}$, $z \in X_{f_2}$, $b_k \in V_y$, $c_l \in W_z$ e $a_g \in \bar{A}^{G_x}$, isto é, $k \in S_{f_1} \cap T_e$, $l \in S_e \cap T_{f_2}$, $g \in G_e$, $\alpha_k(y) = x$, $\alpha_l(x) = z$ e $\alpha_g(x) = x$. Logo,

$$a_g(b_k, c_l) = \begin{cases} a_g b_k c_l, & \text{se } f_1 = f_2 \text{ e } kl \in G_x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, temos que

$$(a_g b_k, c_l) = \begin{cases} a_g b_k c_l, & \text{se } f_1 = f_2 \text{ e } gkl \in G_x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que se $f_1 = f_2$, então $kl \in G_x$ se, e somente se, $gkl \in G_x$. De fato, se $kl \in G_x$, então $d(gkl) = d(kl) = e$ e $r(gkl) = r(g) = e$. Além disso, $\alpha_{gkl}(x) = \alpha_g(\alpha_{kl}(x)) = \alpha_g(x) = x$. Reciprocamente, suponhamos $gkl \in G_x$. Assim, $d(kl) = d(l) = e$ e $r(kl) = r(k) = e$. Além disso, $x = \alpha_{g^{-1}}(x) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{gkl}(x)) = \alpha_{kl}(x)$. Assim, $a_g(b_k, c_l) = (a_g b_k, c_l)$.

Analogamente, mostramos que $(b_k, c_l)a_g = (b_k, c_l a_g)$. Portanto, $(,)$ é um homomorfismo de $\bar{A}^{G_x}$-bimódulos. ■

Por tudo o que já fizemos, podemos observar que ao considerarmos os anéis $\bar{A}^{G_x}$ e $\bar{A}\#X$, construímos o $(\bar{A}^{G_x}, \bar{A}\#X)$-bimódulo V e o $(\bar{A}\#X, \bar{A}^{G_x})$-bimódulo W. Também definimos uma aplicação $(,) : V \otimes_{\bar{A}\#X} W \to \bar{A}^{G_x}$, a qual é um homomorfismo de $\bar{A}^{G_x}$-bimódulos. A fim de que tenhamos um contexto de Morita envolvendo estas estruturas, devemos contruir uma aplicação $[,] : W \otimes_{A^{G_x}} V \to \bar{A}\#X$, a qual seja um homomorfismo bem definido de $\bar{A}\#X$-bimódulos. Entretanto, isso não é possível se não impormos uma condição para a ação α de G em X. É isto que discutiremos nos próximos resultados.

Proposição 2.3.17. *Nas condições dessa seção, suponhamos que a ação de G em X, dada por $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, é tal que $X = \dot{\bigcup\limits_{f\in G_0}} X_f$ e, para todo $g \in G$ tal que $g \notin T_e$ e $r(g) \neq d(g)$, temos $V_y = W_y = \varnothing$, para todo $y \in X_{r(g)}$. Então, a aplicação $[,] : W \otimes_{A^{G_x}} V \to \bar{A}\#X$, dada por $[w, v] = \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{y_f\in X_f} wv_{y_f}\delta_{y_f}$, para quaisquer $w \in W$ e $v = \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{y_f\in X_f} v_{y_f} \in V$, está bem definida e é um homomorfismo de $\bar{A}\#X$-bimódulos.*

Demonstração: Primeiramente, provemos que a aplicação $[,]$ está bem definida. Definimos $\psi : W \times V \to \bar{A}\#X$, por $\psi(w, v) = \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{y_f\in X_f} wv_{y_f}\delta_{y_f}$, para quaisquer que sejam $w \in W$ e $v = \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{y_f\in X_f} v_{y_f} \in V$. Consideremos $f \in G_0$, tal que $f \neq e$. Vamos mostrar que $V_y = W_y = \varnothing$, para todo $y \in X_f$. De fato, lembremos que $V_y = \bigoplus\limits_{\substack{h\in S_f\cap T_e\\ \alpha_h(y)=x}} A_h$, mas se $h \in S_f \cap T_e$, então $y \in X_f = X_{d(h)} = X_{r(h^{-1})}$ e $r(h^{-1}) = d(h) = f \neq e$. Além disso, $d(h^{-1}) = r(h) = e \neq f = d(h) = r(h^{-1})$, o que implica, por hipótese, que $V_y = \varnothing$. Analogamente, $W_y = \varnothing$. Portanto,

$$V = \bigoplus_{y\in X_e} V_y \quad \text{e} \quad W = \bigoplus_{y\in X_e} W_y.$$

Logo, se $a_h \in W_z$ e $b_k \in V_y$, com z, $y \in X_e$, então segue que $\psi(a_h, b_k) = a_h b_k \delta_y \in A^e\#X_e \subseteq \bar{A}\#X$. Sendo assim, ψ está bem definida. É fácil ver que ψ é $\bar{A}^{G_x}$-balanceada. Portanto, pela Propriedade Universal do Produto Tensorial, está bem definida a aplicação $[,] : W \otimes_{A^{G_x}} V \to \bar{A}\#X$, dada por $[w, v] = \sum\limits_{y\in X_e} wv_y\delta_y$, para quaisquer $w \in W$ e $v = \sum\limits_{y\in X_e} v_y \in V$.

Resta mostrar que $[,]$ é um homomorfismo de $\bar{A}\#X$-bimódulos. Sejam $y, z \in X_e$, $b_k \in W_y$, $c_l \in V_z$ e $a_g\delta_t \in \bar{A}\#X$, ou seja, k, $l \in G_e$, $\alpha_k(x) = y$, $\alpha_l(z) = x$ e $a_g\delta_t \in A^f\#X_f$, para algum $f \in G_0$. Assim,

$$(a_g\delta_t)[b_k, c_l] = (a_g\delta_t)(b_k c_l \delta_z) = \begin{cases} a_g b_k c_l \delta_z, \text{ se } f = e \text{ e } \alpha_{kl}(z) = t \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, segue que

$$[(a_g\delta_t)\cdot b_k, c_l] = [a_g(b_k)_t, c_l] = \begin{cases} a_gb_kc_l\delta_z, \text{ se } f=e \text{ e } t=y \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

No caso em que $e=f$, suponhamos que $\alpha_{kl}(z)=t$, então $t=\alpha_{kl}(z)=\alpha_k(\alpha_l(z))=\alpha_k(x)=y$. Reciprocamente, se $e=f$ e $t=y$, então $t=y=\alpha_k(x)=\alpha_k(\alpha_l(z))=\alpha_{kl}(z)$. Sendo assim, $(a_g\delta_t)[b_k,c_l]=[(a_g\delta_t)\cdot b_k, c_l]$. Mais ainda,

$$[b_k,c_l](a_g\delta_t) = (b_kc_l\delta_z)(a_g\delta_t) = \begin{cases} b_kc_la_g\delta_t, \text{ se } e=f \text{ e } \alpha_g(t)=z \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, segue que

$$[b_k, c_l\cdot(a_g\delta_t)] = \begin{cases} [b_k,(c_la_g)_t], \text{ se } f=e \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

entretanto, se $f=e$, temos que $c_la_g\in V_zA_g\subseteq V_{\alpha_{g^{-1}}(z)}$. Logo,

$$\begin{aligned}[b_k, c_l\cdot(a_g\delta_t)] &= \begin{cases} [b_k,c_la_g], \text{ se } f=e \text{ e } \alpha_{g^{-1}}(z)=t \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_kc_la_g\delta_t, \text{ se } f=e \text{ e } \alpha_g(t)=z \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

Assim, $[b_k,c_l](a_g\delta_t)=[b_k,c_l\cdot(a_g\delta_t)]$ e, portanto, $[,]$ é um bem definido homomorfismo de $\bar{A}\#X$-bimódulos. ■

Nas condições da proposição anterior, temos que V é um $(\bar{A}^{G_x},\bar{A}\#X)$-bimódulo, W é um $(\bar{A}\#X,\bar{A}^{G_x})$-bimódulo, a aplicação $[,]: W\otimes_{\bar{A}^{G_x}}V\to\bar{A}\#X$ é um homomorfismo de $\bar{A}\#X$-bimódulos e a aplicação $(,): V\otimes_{\bar{A}\#X}W\to\bar{A}^{G_x}$ é um homomorfismo de $\bar{A}^{G_x}$-bimódulos. A partir disso, podemos enunciar o próximo resultado, o qual nada mais é do que uma consequência de toda a construção feita até agora, juntamente com a proposição anterior.

Corolário 2.3.18. *Nas condições da Proposição 2.3.17,* $[\bar{A}\#X, V, W, \bar{A}^{G_x}, [,], (,)]$ *é um contexto de Morita associado a* V.

Demonstração: Resta apenas mostrar as condições de associatividade $v' \cdot [w, v] = (v', w)v$ e $[w, v] \cdot w' = w(v, w')$, para quaisquer que sejam $v, v' \in V$ e $w, w' \in W$ (ver pág 24). Provemos a primeira condição. Sejam y, z e $t \in X_e$, $a_g \in V_y$, $b_k \in W_z$ e $c_l \in V_t$, isto é, $\alpha_g(y) = x$, $\alpha_k(x) = z$ e $\alpha_l(t) = x$. Logo,

$$a_g \cdot [b_k, c_l] = a_g \cdot (b_k c_l \delta_t) = (a_g b_k c_l)_t = \begin{cases} a_g b_k c_l, & \text{se } \alpha_{kl}(t) = y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pois $a_g b_k c_l \in V_y A_{kl} \subseteq V_{\alpha_{(kl)^{-1}}(y)}$.

Por outro lado, temos que

$$(a_g, b_k)c_l = \begin{cases} a_g b_k c_l, & \text{se } gk \in G_x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que $\alpha_{kl}(t) = y$ se, e somente se, $gk \in G_x$. De fato, se $\alpha_{kl}(t) = y$, então $z = \alpha_k(x) = \alpha_k(\alpha_l(t)) = \alpha_{kl}(t) = y$. Assim, $\alpha_{gk}(x) = \alpha_g(\alpha_k(x)) = \alpha_g(z) = \alpha_g(y) = x$. Reciprocamente, se $gk \in G_x$, então $y = \alpha_{g^{-1}}(x) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{gk}(x)) = \alpha_k(x) = z$. Logo, $\alpha_{kl}(t) = \alpha_k(\alpha_l(t)) = \alpha_k(x) = z = y$. Portanto, $a_g \cdot [b_k, c_l] = (a_g, b_k)c_l$.

Provemos agora a segunda condição. Sejam y, z e $t \in X_e$, $a_g \in W_y$, $b_k \in V_z$ e $c_l \in W_t$, isto é, $\alpha_g(x) = y$, $\alpha_k(z) = x$ e $\alpha_l(x) = t$. Logo,

$$[a_g, b_k] \cdot c_l = (a_g b_k \delta_z) \cdot c_l = a_g b_k (c_l)_z = \begin{cases} a_g b_k c_l, & \text{se } z = t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, segue que

$$a_g(b_k, c_l) = \begin{cases} a_g b_k c_l, & \text{se } kl \in G_x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De maneira análoga a primeira condição, temos que $z = t$ se, e somente se, $kl \in G_x$. Portanto, $[a_g, b_k] \cdot c_l = a_g(b_k, c_l)$, provando que $[\bar{A}\#X, V, W, \bar{A}^{G_x}, [,], (,)]$ é um contexto de Morita associado a V. ■

Notemos que se G é um grupóide, tal que G_0 é finito e $d(g) = r(g)$, para todo $g \in G$, então qualquer G-conjunto finito X satisfaz a Proposição 2.3.17. Em geral, se não supormos na ação α que, para todo $g \in G$, tal que $g \notin T_e$ e $d(g) \neq r(g)$, temos que $V_y = W_y = \varnothing$, para todo $y \in X_{r(g)}$, então não temos necessariamente a boa definição de $[,]$, como nos mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.3.19. Consideremos o Exemplo 2.3.8. Temos que $d(g) \in X_{g^{-1}} = X_{r(g^{-1})}$, $r(g^{-1}) = d(g) \neq r(g)$ e $d(g^{-1}) = r(g) \neq d(g) = r(g^{-1})$. Além disso, $V_{d(g)} \neq \varnothing$ e $W_{d(g)} \neq \varnothing$. Já vimos que $V = Ku_{r(g)} \oplus Ku_g$ e $W = Ku_{r(g)} \oplus Ku_{g^{-1}}$. Pela Definição 2.1.1, $\bar{A}\#X = Ku_{r(g)}\delta_{r(g)} \oplus Ku_{r(g)}\delta_g \oplus Ku_{d(g)}\delta_{d(g)} \oplus Ku_{d(g)}\delta_{g^{-1}}$. Sejam $v = \lambda_1 u_{r(g)} + \lambda_2 u_g \in V$ e $w = \lambda_3 u_{r(g)} + \lambda_4 u_{g^{-1}} \in W$, então $[w, v] = \lambda_1\lambda_3 u_{r(g)}\delta_{r(g)} + \lambda_1\lambda_4 u_{g^{-1}}\delta_{r(g)} + \lambda_2\lambda_3 u_g\delta_g + \lambda_2\lambda_4 u_{d(g)}\delta_g \notin \bar{A}\#X$.

Este exemplo sugere a recíproca da Proposição 2.3.17.

Proposição 2.3.20. *Sejam G um grupóide, tal que G_0 é finito, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e X um G-conjunto finito via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$, tal que $X = \dot{\bigcup}_{e \in G_0} X_e$. Fixemos $x \in X$, então existe único $e \in G_0$, tal que $x \in X_e$. Se a aplicação $[,] : W \otimes_{A^{G_x}} V \to \bar{A}\#X$, dada por $[w, v] = \sum_{f \in G_0} \sum_{y_f \in X_f} w v_{y_f} \delta_{y_f}$, para quaisquer $w \in W$ e $v = \sum_{f \in G_0} \sum_{y_f \in X_f} v_{y_f} \in V$, está bem definida, então a ação α é tal que $V_y = W_y = \varnothing$, para todo $y \in X_{r(g)}$, onde $g \in G$ é tal que $g \notin T_e$ e $d(g) \neq r(g)$.*

Demonstração: Suponhamos que exista $g \in G$, onde $g \notin T_e$ e $d(g) \neq r(g)$, tal que $V_y \neq \varnothing$, para algum $y \in X_{r(g)}$. Notemos que se $V_y \neq \varnothing$, então $W_z \neq \varnothing$, onde $z = \alpha_{g^{-1}}(y)$. De fato, se $a_h \in V_y$, então é fácil ver que $a_{(hg)^{-1}} \in W_z$. Logo, podemos considerar $a_h \in V_y$ e $b_k \in W_z$, isto é, $h \in S_{r(g)} \cap T_e$, $k \in S_e \cap T_{d(g)}$, $\alpha_h(y) = x$ e $\alpha_k(x) = z$. Assim, $[b_k, a_h] = b_k a_h \delta_y$ e $d(kh) = d(h) = r(g) \neq d(g) = r(k) = r(kh)$, ou seja, $[b_k, a_h] \notin \bar{A}\#X$, mostrando que $[,]$ não está bem definida. Um raciocínio análogo se faz se $W_y \neq \varnothing$. Portanto, α é tal que $V_y = W_y = \varnothing$, para todo $y \in X_{r(g)}$, onde $g \in G$ é tal que $g \notin T_e$ e $d(g) \neq r(g)$. ■

Capítulo 3

Teorema de Dualidade para Ações de Grupóides

Consideremos G e H grupos, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e X um (G, H)-conjunto finito, tal que a ação de H em X é completamente fiel. Lembremos novamente que, por 1.1.1, podemos definir o produto smash $A\#X$. Sob estas condições, S. Dascalescu, C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen e B. Torrecillas demonstraram em [6, Theorem 2.7], que H é finito e age por automorfismos no anel $A\#X$, o conjunto das H-órbitas de X, denotado O^H, é um G-conjunto à esquerda e, o mais importante, existe o seguinte isomorfismo de anéis:

$$(A\#X) * H \cong M_{|H|}(A\#O^H).$$

Este resultado é chamado Teorema de Dualidade para Anéis Graduados. Nosso intuíto neste capítulo é construir uma generalização dos resultados obtidos em [6], com a finalidade de obter um análogo deste isomorfismo para o produto smash $\bar{A}\#X$, definido no capítulo anterior.

3.1 Preliminares

Vamos apresentar algumas definições e resultados que serão usados na prova do Teorema de Dualidade para Grupóides. Vamos considerar o produto smash como na Definição 2.1.1. Sejam G um grupóide, tal que G_0 é finito, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade dada por $1_A \in A$ e $\bar{A} = \bigoplus_{e \in G_0} A^e$, onde $A^e = \bigoplus_{g \in G_e} A_g$, para cada $e \in G_0$.

Suponhamos que X e Y são G-conjuntos finitos via $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ e $\beta = (\{Y_g\}_{g \in G}, \{\beta_g\}_{g \in G})$, respectivamente, tais que $X = \dot{\bigcup}_{e \in G_0} X_e$ e $Y = \dot{\bigcup}_{f \in G_0} Y_f$. Consideremos $\varphi : X \to Y$ um homomorfismo de G-conjuntos (ver Definição 1.2.26).

Para cada $e \in G_0$, podemos considerar a aplicação $\varphi_e = \varphi|_{X_e} : X_e \to Y_e$, pois $\varphi(X_e) \subseteq Y_e$. É fácil ver que φ_e é um homomorfismo de G_e-conjuntos (caso de grupos). Logo, pela Proposição 1.1.3, para cada $e \in G_0$, temos que a aplicação $\varphi_e^* : A^e \# Y_e \to A^e \# X_e$, definida por

$$\varphi_e^*(a_g p_y) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{x \in X_e \\ \varphi_e(x) = y}} a_g p_x, & \text{se existir } x \in X_e, \text{ tal que } \varphi_e(x) = y \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $a_g \delta_y \in A^e \# Y_e$, é um homomorfismo de anéis.

Observemos que $\bar{A} \# X = \bigoplus_{e \in G_0} A^e \# X_e$ e $\bar{A} \# Y = \bigoplus_{f \in G_0} A^f \# Y_f$, logo podemos definir a aplicação $\varphi^* : \bar{A} \# Y \to \bar{A} \# X$, por $\varphi^*\left(\sum\limits_{e \in G_0} a^e \delta_{y_e} \right) = \sum\limits_{e \in G_0} \varphi_e^*(a^e \delta_{y_e})$, qualquer que seja $\sum\limits_{e \in G_0} a^e \delta_{y_e} \in \bar{A} \# Y$. A partir disso, segue a próxima proposição.

Proposição 3.1.1. *Seja $\varphi : X \to Y$ um homomorfismo de G-conjuntos. Então, a aplicação $\varphi^* : \bar{A} \# Y \to \bar{A} \# X$ é um homomorfismo de anéis.*

Demonstração: Consideremos $a_g \delta_y$ e $b_h \delta_z \in \bar{A} \# Y$, logo existem $e,\ f \in G_0$, tais que $a_g \delta_y \in A^e \# Y_e$ e $b_h \delta_z \in A^f \# Y_f$. Notemos que $(a_g \delta_y)(b_h \delta_z) \neq 0$ se, e somente se, $e = f$ e, neste caso, $(a_g \delta_y)(b_h \delta_z) \in A^e \# Y_e$. Analogamente, $\varphi_e^*(a_g \delta_y) \varphi_f^*(b_h \delta_z) \neq 0$ se, e somente se, $e = f$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi^*((a_g\delta_y)(b_h\delta_z)) &= \begin{cases} \varphi_e^*((a_g\delta_y)(b_h\delta_z)), & \text{se } e = f \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \varphi_e^*(a_g\delta_y)\varphi_e^*(b_h\delta_z), & \text{se } e = f \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \varphi_e^*(a_g\delta_y)\varphi_f^*(b_h\delta_z) \\
&= \varphi^*(a_g\delta_y)\varphi^*(b_h\delta_z).
\end{aligned}$$

Além disso, usando novamente a Proposição 1.1.3, temos que $\varphi^*(1_{\bar{A}\#Y}) = \varphi^*\left(\sum_{e\in G_0} 1_{A^e\#Y_e}\right) = \sum_{e\in G_0} \varphi_e^*(1_{A^e\#Y_e}) = \sum_{e\in G_0} 1_{A^e\#X_e} = 1_{\bar{A}\#X}$. ■

Observação 3.1.2. *Consideremos a categoria dos G-conjuntos finitos, onde G é um grupóide, denotada $G-sets$, e a categoria dos anéis, denotada $Rings$. Então, pela proposição anterior, o funtor $F : G-sets \to Rings$, definido por $F(X) = \bar{A}\#X$ e $F(\varphi) = \varphi^*$, onde X é um G-conjunto e $\varphi : X \to Y$ é um homomorfismo de G-conjuntos, é um funtor contravariante.*

Lema 3.1.3. *Nas condições anteriores, se $\varphi : X \to Y$ é um homomorfismo de G-conjuntos, então $Ker\varphi^* = \bigoplus_{e\in G_0}\left(\bigoplus_{\substack{g\in G_e \\ y\notin Im\varphi}} A_g\delta_y\right)$.*

Demonstração: Claramente temos que $\bigoplus_{e\in G_0}\left(\bigoplus_{\substack{g\in G_e \\ y\notin Im\varphi}} A_g\delta_y\right) \subseteq Ker\varphi^*$.

Consideremos agora $\sum_{e\in G_0}\left(\sum_{\substack{g\in G_e \\ y\in Y_e}} a_g\delta_y\right) \in Ker\varphi^*$. Logo,

$$0 = \varphi^*\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e \\ y\in Y_e}} a_g\delta_y\right) = \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e \\ y\in Y_e}} \varphi_e^*(a_g\delta_y) = \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e \\ y\in Y_e}}\sum_{\substack{x\in X_e \\ \varphi(x)=y}} a_g\delta_x$$

Notemos que para todo $e \in G_0$, $g \in G_e$, $y \in Y_e$ tal que $y \in Im\varphi$, temos $a_g = 0$, por definição de $\bar{A}\#X$. Assim, $Ker\varphi^* \subseteq \bigoplus_{e\in G_0}\left(\bigoplus_{\substack{g\in G_e\\ y\notin Im\varphi}} A_g\delta_y\right)$. Portanto, vale a igualdade desejada. ■

Corolário 3.1.4. *Se φ é sobrejetiva, então φ^* é injetiva.*

Observação 3.1.5. *Também podemos mostrar que se φ é injetiva, então φ^* é sobrejetiva.*

De fato, consideremos $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$, ou seja, $a_g\delta_x \in A^e\#X_e$, para algum $e \in G_0$. Seja $y = \varphi(x)$, então $y \in Y_e$, já que $x \in X_e$. Logo,

$$\varphi^*(a_g\delta_y) = \sum_{\substack{z\in X_e\\ \varphi(z)=y}} a_g\delta_z = a_g\delta_x,$$

onde está última igualdade se dá pelo fato de φ ser injetiva.

Para completar os resultados dessa seção, vamos explorar um pouco mais a noção de G-conjuntos, onde G é um grupóide. As definições e resultados que seguem são generalizações do caso de grupos.

Definição 3.1.6. *Sejam G e K grupóides. Consideremos X um conjunto. Dizemos que X é um (G,K)-conjunto, se*

(i) X é um G-conjunto via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$;

(ii) X é um K-conjunto via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$;

(iii) Para quaiquer $g \in G$ e $k \in K$, é válido que

$$\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_k) \subseteq X_g \cap Y_k \quad e \quad \beta_k(X_g \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq X_g \cap Y_k;$$

Se existirem $g \in G$ e $k \in K$, tais que $X_{g^{-1}} \cap Y_k = \varnothing$, então convencionamos que $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_k) = \varnothing$. Analogamente para $X_g \cap Y_{k^{-1}}$.

(iv) Para todo $x \in X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}$, é válido que $\alpha_g(\beta_k(x)) = \beta_k(\alpha_g(x))$.

Por (iii), vale que $\beta_k(X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq X_{g^{-1}} \cap Y_k$ e $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq X_g \cap Y_{k^{-1}}$, para todo $g \in G$ e $k \in K$. Assim, faz sentido definir (iv).

Exemplo 3.1.7. Consideremos G um grupóide finito e $H \subseteq G$ um subgrupóide. Temos que $X = G$ é um (G, H)-conjunto.

Pelo Exemplo 1.2.22, $X = G$ é um G-conjunto via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde $X_g = T_{r(g)}$ e $\alpha_g(l) = gl$, para todo $l \in X_{g^{-1}}$. Além disso, pelo Exemplo 1.2.25, $X = G$ é um H-conjunto via $\beta = (\{Y_h\}_{h\in H}, \{\beta_h\}_{h\in H})$, onde $Y_h = S_{r(h)}$ e $\beta_h(l) = lh^{-1}$, para todo $l \in Y_{h^{-1}}$. Consideremos $l \in X_{g^{-1}} \cap Y_h$, quaisquer que sejam $g \in G$ e $h \in H$. Temos que $\alpha_g(l) = gl \in X_g$. Além disso, $d(gl) = d(l) = r(h)$, ou seja, $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_h) \subseteq X_g \cap Y_h$. Consideremos agora $l \in X_g \cap Y_{h^{-1}}$, quaisquer que sejam $g \in G$ e $h \in H$. Temos que $\beta_h(l) = lh^{-1} \in Y_h$. Mais ainda, $r(lh^{-1}) = r(l) = r(g)$, isto é, $\beta_h(X_g \cap Y_{h^{-1}}) \subseteq X_g \cap Y_h$. Por último, se considerarmos $l \in X_{g^{-1}} \cap Y_{h^{-1}}$, temos que $\beta_h(\alpha_g(l)) = \beta_h(gl) = (gl)h^{-1} = g(lh^{-1}) = \alpha_g(lh^{-1}) = \alpha_g(\beta_h(l))$. Portanto, $X = G$ é um (G, H)-conjunto.

No exemplo anterior, se considerarmos o grupóide $G = \{g, g^{-1}, d(g), r(g)\}$, e o subgrupóide $H = G_0$, é fácil ver que $X_g \cap Y_h \neq \varnothing$, quaisquer que sejam $g \in G$ e $h \in H$.

Exemplo 3.1.8. Consideremos G um grupóide finito e $H \subseteq G$ um subgrupóide normal. Então, $X = G/H$ é um $(G, G/H)$-conjunto.

Pelo Exemplo 1.2.24, $X = G/H$ é um G-conjunto via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde $X_g = \{lH \in G/H : l \in T_{r(g)}\}$ e $\alpha_g(lH) = glH$, para todo $lH \in G/H$. Mais ainda, $X = G/H$ é um G/H-conjunto via o par $\beta = (\{Y_{kH}\}_{kH\in G/H}, \{\beta_{kH}\}_{kH\in G/H})$, onde $Y_{kH} = S_{r(kH)}$ e $\beta_{kH}(lH) = lH(kH)^{-1} = lk^{-1}H$. Seja $lH \in X_{g^{-1}} \cap Y_{kH}$, para quaisquer que sejam $g \in G$ e $kH \in G/H$. Temos que $\alpha_g(lH) = glH \in X_g$ e $d(glH) = d(gl)H = d(l)H = d(lH) = r(kH)$. Dessa maneira, $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_{kH}) \subseteq X_g \cap Y_{kH}$. Agora, seja $lH \in X_g \cap Y_{(kH)^{-1}}$. Temos que $\alpha_{kH}(lH) = lk^{-1}H \in Y_{kH}$ e $r(lk^{-1}) = r(l) = r(g)$. Dessa maneira, $\alpha_{kH}(X_g \cap Y_{(kH)^{-1}}) \subseteq X_g \cap Y_{kH}$. Por último, consideremos $lH \in X_{g^{-1}} \cap Y_{(kH)^{-1}}$, então $\beta_{kH}(\alpha_g(lH)) = \beta_{kH}(glH) = glk^{-1}H = \alpha_g(lk^{-1}H) = \alpha_g(\beta_{kH}(lH))$. Portanto, $X = G/H$ é um $(G, G/H)$-conjunto.

No exemplo anterior, se escolhermos o grupóide $G = \{g, g^{-1}, d(g), r(g)\}$, e o subgrupóide normal $H = G_0$, é fácil ver que $X_g \cap Y_{kH} \neq \varnothing$, quaisquer que sejam $g \in G$ e $kH \in G/H$.

Proposição 3.1.9. *Consideremos G e K grupóides, X um (G, K)-conjunto, via os pares $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, respectivamente. Então, para cada $k \in K$, Y_k é um G-conjunto. Em particular, $\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é um homomorfismo de G-conjuntos, para todo $k \in K$.*

Demonstração: Fixemos $k \in K$. Para todo $g \in G$, definimos o conjunto $Y_{k,g} = Y_k \cap X_g$. Se $x \in Y_{k,g^{-1}}$, então, usando a definição de (G, K)-conjunto, segue que $\alpha_g(x) \in \alpha_g(Y_k \cap X_{g^{-1}}) \subseteq Y_k \cap X_g = Y_{k,g}$. Logo, está bem definida a aplicação $\theta_g^k = \alpha_g|_{Y_{k,g^{-1}}} : Y_{k,g^{-1}} \to Y_{k,g}$, para todo $g \in G$. Vamos mostrar que Y_k é um G-conjunto, via $\theta^k = (\{Y_{k,g}\}_{g\in G}, \{\theta_g^k\}_{g\in G})$.

Já temos que θ_g^k é injetiva, para todo $g \in G$. Seja $y \in Y_{k,g} = Y_k \cap X_g$, então existe único $x \in X_{g^{-1}}$, tal que $\alpha_g(x) = y$. Logo, usando a definição de (G, K)-conjunto, temos que $x = \alpha_{g^{-1}}(y) \in \alpha_{g^{-1}}(Y_k \cap X_g) \subseteq Y_k \cap X_{g^{-1}} = Y_{k,g^{-1}}$. Portanto, a aplicação θ_g^k é uma bijeção, para todo $g \in G$. As demais propriedades de G-conjunto são claramente satisfeitas por $\theta_g^k = \alpha_g|_{Y_{k,g^{-1}}}$. Sendo assim, $\theta^k = (\{Y_{k,g}\}_{g\in G}, \{\theta_g^k\}_{g\in G})$ define uma ação de G em Y_k, para todo $k \in K$.

Por último, consideremos $x \in Y_{k^{-1},g} = Y_{k^{-1}} \cap X_g$. Usando novamente a definição de (G, K)-conjunto, temos que $\beta_k(x) \in \beta_k(Y_{k^{-1}} \cap X_g) \subseteq Y_k \cap X_g$, implicando que $\beta_k(Y_{k^{-1},g}) \subseteq Y_{k,g}$, para todo $g \in G$. Além disso, se $x \in Y_{k^{-1},g^{-1}} = Y_{k^{-1}} \cap X_{g^{-1}}$, então $\beta_k(\theta_g^k(x)) = \beta_k(\alpha_g(x)) = \alpha_g(\beta_k(x)) = \theta_g^k(\beta_k(x))$. Assim, $\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é um homomorfismo de G-conjuntos, para todo $k \in K$. ■

Vejamos alguns exemplos, nos quais se aplica a proposição anterior.

Exemplo 3.1.10. Sejam G um grupóide finito e $H \subseteq G$ um subgrupóide. Pelo Exemplo 3.1.7, temos que $X = G$ é um (G, H)-conjunto via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde $X_g = T_{r(g)}$ e $\alpha_g(l) = gl$, para todo $l \in X_{g^{-1}}$, e $\beta = (\{Y_h\}_{h\in H}, \{\beta_h\}_{h\in H})$, onde $Y_h = S_{r(h)}$ e $\beta_h(l) = lh^{-1}$, para todo $l \in Y_{h^{-1}}$. De acordo com a Proposição 3.1.9, segue que, para todo $h \in H$, Y_h é um G-conjunto via $\theta^h = (\{Y_{h,g}\}_{g\in G}, \{\theta_g^h\}_{g\in G})$, onde $Y_{h,g} = Y_h \cap X_g = S_{r(h)} \cap T_{r(g)}$ e $\theta_g^h(l) = \alpha_g(l) = gl$, para quaisquer $l \in Y_{h,g^{-1}}$ e $g \in G$. Além disso, para todo $h \in H$, temos que $\beta_h : Y_{h^{-1}} \to Y_h$ é um homomorfismo de G-conjuntos.

Exemplo 3.1.11. Consideremos G um grupóide finito e $H \subseteq G$ um subgrupóide normal. Logo, de acordo com o Exemplo 3.1.8, temos que $X = G/H$ é um $(G, G/H)$-conjunto, via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, onde $X_g = \{lH \in G/H : l \in T_{r(g)}\}$ e $\alpha_g(lH) = glH$, para todo $lH \in G/H$, e $\beta = (\{Y_{kH}\}_{kH\in G/H}, \{\beta_{kH}\}_{kH\in G/H})$, onde $Y_{kH} = S_{r(kH)}$ e $\beta_{kH}(lH) = lk^{-1}H$. Novamente, pela Proposição 3.1.9, temos que, para todo $kH \in G/H$, Y_{kH} é um G-conjunto via $\theta^{kH} = (\{Y_{kH,g}\}_{g\in G}, \{\theta_g^{kH}\}_{g\in G})$, onde $Y_{kH,g} = Y_{kH} \cap X_g = S_{r(kH)} \cap X_g$ e $\theta_g^{kH}(lH) = \alpha_g(lH) = glH$, para quaisquer $lH \in Y_{kH,g^{-1}}$ e $g \in G$. Além disso, para todo $kH \in G/H$, temos que $\beta_{kH} : Y_{(kH)^{-1}} \to Y_{kH}$ é um homomorfismo de G-conjuntos.

Consideremos K um grupóide e X um K-conjunto via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, tal que $X = \dot{\bigcup\limits_{f\in K_0}} Y_f$. Dessa maneira, se $x \in X$, então existe único $f \in K_0$, tal que $x \in Y_f$. A partir disto, segue nossa próxima definição.

Definição 3.1.12. *Nas condições anteriores, definimos a K-órbita de x como sendo o conjunto $o(x) = \{\beta_l(x) : l \in S_f\}$.*

Podemos observar na definição acima que se $l \in S_f$, então $x \in X_f = X_{d(l)} = X_{l^{-1}}$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.13. Consideremos o grupóide $K = \{r(k), d(k), k, k^{-1}\}$. Pelo Exemplo 1.2.22, temos que $X = K$ é um K-conjunto via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, onde $Y_k = \{r(k), k\} = Y_{r(k)}$, $Y_{k^{-1}} = \{d(k), k^{-1}\} = Y_{d(k)}$, $\beta_{r(k)} = Id_{Y_k}$, $\beta_{d(k)} = Id_{Y_{k^{-1}}}$,

$\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é tal que $\beta_k(k^{-1}) = r(k)$, $\beta_k(d(k)) = k$ e $\beta_{k^{-1}} : Y_k \to Y_{k^{-1}}$ é tal que $\beta_{k^{-1}}(k) = d(k)$ e $\beta_{k^{-1}}(r(k)) = k^{-1}$. Dessa maneira, $o(k) = \{\beta_{r(k)}(k), \beta_{k^{-1}}(k)\} = \{k, d(k)\}$. As demais órbitas são calculadas de maneira análoga.

Exemplo 3.1.14. Consideremos o grupóide $K = \{r(k), d(k), k, k^{-1}\}$. Pelo Exemplo 1.2.25, $X = K$ é um K-conjunto via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, onde $Y_k = \{r(k), k^{-1}\} = Y_{r(k)}$, $Y_{k^{-1}} = \{d(k), k\} = Y_{d(k)}$, $\beta_{r(k)} = Id_{Y_k}$, $\beta_{d(k)} = Id_{Y_{k^{-1}}}$, $\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é tal que $\beta_k(k) = r(k)$, $\beta_k(d(k)) = k^{-1}$ e $\beta_{k^{-1}} : Y_k \to Y_{k^{-1}}$ é tal que $\beta_{k^{-1}}(k^{-1}) = d(k)$ e $\beta_{k^{-1}}(r(k)) = k$. Dessa maneira, $o(k^{-1}) = \{\beta_{r(k)}(k^{-1}), \beta_{k^{-1}}(k^{-1})\} = \{k^{-1}, d(k)\}$. As demais órbitas são calculadas de maneira análoga.

Observação 3.1.15. *Sejam K um grupóide e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$ uma ação de K em um conjunto X. Se $y \in Y_{k^{-1}}$, então $o(y) = o(z)$, tal que $z = \beta_k(y)$.*

De fato, como $y \in Y_{k^{-1}}$, temos que $o(y) = \{\beta_l(y) : l \in S_{d(k)}\}$ e, como $z \in Y_k$, temos que $o(z) = \{\beta_t(z) : t \in S_{r(k)}\}$. Logo, se $\beta_t(z) \in o(z)$, então $d(t) = r(k)$ e $tk \in S_{d(k)}$, logo $\beta_t(z) = \beta_t(\beta_k(y)) = \beta_{tk}(y) \in o(y)$. Reciprocamente, se $\beta_l(y) \in o(y)$, então $d(l) = d(k) = r(k^{-1})$ e $lk^{-1} \in S_{r(k)}$, logo $\beta_l(y) = \beta_l(\beta_{k^{-1}}(z)) = \beta_{lk^{-1}}(z) \in o(z)$. Portanto, $o(y) = o(z)$.

Nossa próxima proposição nos dá mais uma classe de exemplos de G-conjuntos.

Proposição 3.1.16. *Sejam G e K grupóides, X um (G, K)-conjunto via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, respectivamente, tal que $X = \dot{\bigcup}_{e\in G_0} X_e$ e $X = \dot{\bigcup}_{f\in K_0} Y_f$. Então, o conjunto O^K das K-órbitas de X é um G-conjunto.*

Demonstração: Fixemos $g \in G$. Então, definimos $O_g^K = \{o(x) : x \in X_g\}$ e $\lambda_g : O_{g^{-1}}^K \to O_g^K$, por $\lambda_g(o(x)) = o(\alpha_g(x))$, onde $o(x) \in O_{g^{-1}}^K$. Devemos mostrar que a aplicação λ_g está bem definida, ou seja, que se considerarmos $o(x) = o(y)$ em $O_{g^{-1}}^K$, então $o(\alpha_g(x)) = o(\alpha_g(y))$. Notemos que x, $y \in X = \bigoplus_{f\in K_0} Y_f$, logo existem f_1, $f_2 \in K_0$, tais que $x \in Y_{f_1}$ e $y \in Y_{f_2}$. Pela definição de (G, K)-conjunto, temos que $\alpha_g(x) \in \alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_{f_1}) \subseteq X_g \cap Y_{f_1}$ e, analogamente, $\alpha_g(y) \in X_g \cap Y_{f_2}$. Seja

$\beta_l(\alpha_g(x)) \in o(\alpha_g(x)) = \{\beta_l(\alpha_g(x)) : l \in S_{f_1}\}$. Como $x \in o(x) = o(y)$, então temos que $x = \beta_t(y)$, para algum $t \in S_{f_2}$. Notemos que, neste caso, $x \in Y_{f_1} \cap Y_t = Y_{f_1} \cap Y_{r(t)}$, logo $r(t) = f_1$, pois $X = \dot{\bigcup\limits_{f \in K_0}} Y_f$. Agora, usando mais uma vez a definição de (G, K)-conjunto e o fato de que $y \in X_{g^{-1}} \cap Y_{f_2} = X_{g^{-1}} \cap Y_{d(t)} = X_{g^{-1}} \cap Y_{t^{-1}}$, seque que $\beta_l(\alpha_g(x)) = \beta_l(\alpha_g(\beta_t(y))) = \beta_l(\beta_t(\alpha_g(y))) = \beta_{lt}(\alpha_g(y))$, onde esta última igualdade se dá pelo fato de que $d(l) = f_1 = r(t)$. Logo, $o(\alpha_g(x)) \subseteq o(\alpha_g(y))$. Por uma argumentação análoga obtemos a outra inclusão. Portanto, $o(\alpha_g(x)) = o(\alpha_g(y))$ e, sendo assim, λ_g está bem definida. Provemos que O^K é um G-conjunto via $\lambda = (\{O_g^K\}_{g \in G}, \{\lambda_g\}_{g \in G})$.

É fácil ver que $\lambda_{g^{-1}}$ é uma inversa para λ_g, sendo assim, λ_g é bijeção. Temos também que $O_g^K = O_{r(g)}^K$ e $\lambda_{r(g)} : O_{r(g)}^K \to O_{r(g)}^K$ é a aplicação identidade, para todo $g \in G$. E mais, dados g, $h \in G$ tais que $d(g) = r(h)$ e $x \in X_{h^{-1}}$, então $\lambda_g \lambda_h(o(x)) = \lambda_g(o(\alpha_h(x))) = o(\alpha_g(\alpha_h(x))) = o(\alpha_{gh}(x)) = \lambda_{gh}(x)$.

Portanto, O^K é um G-conjunto via $\lambda = (\{O_g^K\}_{g \in G}, \{\lambda_g\}_{g \in G})$. ■

3.2 Teorema de Dualidade

Finalmente, vamos nos preparar para dar uma versão do Teorema de Dualidade para Anéis Graduados, [6, Theorem 2.7], considerando grupóides ao invés de grupos. Novamente, o produto smash considerado será como na Definição 2.1.1.

Sejam G e K grupóides, tais que G_0 e K são finitos, e consideremos X um (G, K)-conjunto finito via $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k \in K}, \{\beta_k\}_{k \in K})$, respectivamente, tal que $X = \dot{\bigcup\limits_{e \in G_0}} X_e$ e $X = \dot{\bigcup\limits_{f \in K_0}} Y_f$.

Consideremos também $A = \bigoplus\limits_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e o subanel $\bar{A} = \bigoplus\limits_{e \in G_0} A^e$ de A, onde $A^e = \bigoplus\limits_{g \in G_e} A_g$, para todo $e \in G_0$. Dessa maneira, podemos formar o produto smash $\bar{A} \# X = \bigoplus\limits_{e \in G_0} A^e \# X_e$.

Na próxima proposição, construiremos o skew anel de grupóide $(\bar{A}\#X) *_\gamma K$. Antes disso, pela Proposição 3.1.9, lembremos que, para cada $k \in K$ fixado, Y_k é um G-conjunto finito. Portanto, para cada $k \in K$, podemos considerar o produto smash:

$$\bar{A}\#Y_k = \bigoplus_{e\in G_0} A^e\#Y_{k,e} = \bigoplus_{e\in G_0}\left(\bigoplus_{\substack{g\in G_e\\ x\in Y_k\cap X_e}} A_g\delta_x\right),$$

com unidade dada por $1_k = \sum\limits_{e\in G_0}\sum\limits_{x\in Y_{k,e}} 1_e\delta_x = \sum\limits_{e\in G_0}\sum\limits_{x\in Y_k\cap X_e} 1_e\delta_x$.

Notemos que este conjunto é distinto do vazio, pois se $x \in Y_k$, para algum $k \in K$, então $x \in X = \dot{\bigcup\limits_{e\in G_0}} X_e$. Assim, existe $e \in G_0$ tal que $x \in X_e$, ou seja, $x \in X_e \cap Y_k$. Logo, temos que $a_e\delta_x \in \bar{A}\#Y_k$, para todo $a_e \in A_e$.

Proposição 3.2.1. *Nas condições anteriores, temos que o grupóide K age no anel $\bar{A}\#X$. Em particular, existe o skew anel de grupóide $(\bar{A}\#X) *_\gamma K$.*

Demonstração: Provemos que $\bar{A}\#Y_k$ é um ideal bilateral de $\bar{A}\#X$, para todo $k \in K$. Sejam $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$ e $b_h\delta_y \in \bar{A}\#Y_k$, ou seja, $a_g\delta_x \in A^{e_1}\#X_{e_1}$, para algum $e_1 \in G_0$, e $b_h\delta_y \in A^{e_2}\#Y_{k,e_2}$, para algum $e_2 \in G_0$. Temos que

$$(a_g\delta_x)(b_h\delta_y) = \begin{cases} a_gb_h\delta_y, & \text{se } e_1 = e_2 \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

No caso em que $e_1 = e_2$, temos que $gh \in G_{e_2}$ e $y \in Y_{k,e_2}$. Dessa maneira, $(a_g\delta_x)(b_h\delta_y) \in \bar{A}\#Y_k$.

Por outro lado, segue que

$$(b_h\delta_y)(a_g\delta_x) = \begin{cases} b_ha_g\delta_x, & \text{se } e_2 = e_1 \text{ e } \alpha_g(x) = y \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

No caso em que $e_2 = e_1$, temos que $hg \in G_{e_1}$. Além disso, se $\alpha_g(x) = y \in Y_{k,e_2} = Y_{k,e_1} = Y_k \cap X_{e_1}$, então, usando a definição de (G,K)-conjunto, segue que $x = \alpha_{g^{-1}}(y) \in \alpha_{g^{-1}}(X_{e_1} \cap Y_k) \subseteq X_{e_1} \cap Y_k = Y_{k,e_1}$. Portanto, $(b_h\delta_y)(a_g\delta_x) \in \bar{A}\#Y_k$.

Notemos que, como X é um K-conjunto, temos $Y_k = Y_{r(k)}$, o que implica $\bar{A}\#Y_k = \bar{A}\#Y_{r(k)}$. Pela Proposição 3.1.9, lembremos que, $\beta_{k^{-1}} : Y_k \to Y_{k^{-1}}$ é um isomorfismo de G-conjuntos, para todo $k \in K$. Logo, pela Proposição 3.1.1, a aplicação $\gamma_k = \beta^*_{k^{-1}} : \bar{A}\#Y_{k^{-1}} \to \bar{A}\#Y_k$, definida por

$$\gamma_k(a_g\delta_x) = \sum_{\substack{y\in Y_k\\ \beta_{k^{-1}}(y)=x}} a_g\delta_y = a_g\delta_{\beta_k(x)},$$

para todo $a_g\delta_x \in \bar{A}\#Y_{k^{-1}}$, é um isomorfismo de anéis. Além disso, é fácil ver que $\gamma_f : \bar{A}\#Y_f \to \bar{A}\#Y_f$ é a identidade de $\bar{A}\#Y_f$, para todo $f \in K_0$, e se l, $k \in K$ são tais que $d(l) = r(k)$, então $\gamma_g\gamma_h = \gamma_{gh}$. Portanto, K age em $\bar{A}\#X$ via $\gamma = (\{\bar{A}\#Y_k\}_{k\in K}, \{\gamma_k\}_{k\in K})$. Sendo assim, podemos considerar o skew anel de grupóide $(\bar{A}\#X) *_\gamma K$. ∎

Observação 3.2.2. *Nas condições anteriores,* $\bar{A}\#X = \bigoplus_{f\in K_0} \bar{A}\#Y_f$.

De fato, consideremos $a_g\delta_x \in \bar{A}\#X$, dessa maneira $a_g\delta_x \in A^e\#X_e$, para algum $e \in G_0$. Logo, $x \in X_e \subseteq X = \dot{\bigcup}_{f\in K_0} Y_f$. Assim, existe único $f \in K_0$ tal que $x \in Y_f$, ou seja, $x \in X_e \cap Y_f$, o que implica $a_g\delta_x \in \bar{A}\#Y_f$. Portanto, $\bar{A}\#X = \sum_{f\in K_0} \bar{A}\#Y_f$. Agora, consideremos $w \in \bar{A}\#Y_f \cap \left(\sum_{\substack{f'\in K_0\\ f'\neq f}} \bar{A}\#Y_{f'}\right)$, onde $f \in K_0$. Então, $w = \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x\in X_e\cap Y_f}} a_g\delta_x = \sum_{\substack{f'\in K_0\\ f'\neq f}}\sum_{e'\in G_0}\sum_{\substack{h\in G_{e'}\\ y\in X_{e'}\cap Y_{f'}}} b_h\delta_y$. Já mostramos que 1_f é um unidade para $\bar{A}\#Y_f$, logo $w = w1_f$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
w1_f &= \left(\sum_{\substack{f'\in K_0\\ f'\neq f}}\sum_{e'\in G_0}\sum_{\substack{h\in G_{e'}\\ y\in X_{e'}\cap Y_{f'}}} b_h\delta_y\right)1_f\\
&= \left(\sum_{\substack{f'\in K_0\\ f'\neq f}}\sum_{e'\in G_0}\sum_{\substack{h\in G_{e'}\\ y\in X_{e'}\cap Y_{f'}}} b_h\delta_y\right)\left(\sum_{\substack{e''\in G_0\\ x_{e''}\in X_{e''}\cap Y_f}} 1_{e''}\delta_{x_{e''}}\right)\\
&= \sum_{\substack{f'\in K_0\\ f'\neq f}}\sum_{e'\in G_0}\sum_{\substack{h\in G_{e'}\\ y\in X_{e'}\cap Y_{f'}}}\sum_{\substack{e''\in G_0\\ x_{e''}\in X_{e''}\cap Y_f}} (b_h\delta_y)(1_{e''}\delta_{x_{e''}}).
\end{aligned}$$

Observemos que $b_h 1_{e''} \neq 0$, e somente se, $e'' = d(h) = e'$. Logo,

$$w1_f = \sum_{\substack{f' \in K_0 \\ f' \neq f}} \sum_{e' \in G_0} \sum_{\substack{h \in G_{e'} \\ y \in X_{e'} \cap Y_{f'}}} \sum_{x_{e'} \in X_{e'} \cap Y_f} (b_h \delta_y)(1_{e'} \delta_{x_{e'}}).$$

Para que a soma acima seja distinta de zero, para algum $x_{e'} \in X_{e'} \cap Y_f$, deve existir $y \in X_{e'} \cap Y_{f'}$ tal que $x_{e'} = \alpha_{e'}(x_{e'}) = y$, mas se isso ocorrer, então $y \in X_{e'} \cap Y_f$, o que é um absurdo, pois $y \in Y_{f'}$ e $f' \neq f$ (lembremos que $X = \dot{\bigcup\limits_{f \in K_o}} Y_f$). Logo, a soma acima é nula e $\bar{A}\#Y_f \cap \left(\sum\limits_{\substack{f' \in K_0 \\ f' \neq f}} \bar{A}\#Y_{f'} \right) = 0$.

Portanto, $\bar{A}\#X = \bigoplus\limits_{f \in K_0} \bar{A}\#Y_f$.

Pelo feito até aqui, temos que K age no anel $\bar{A}\#X$ via $\gamma = (\{\bar{A}\#Y_k\}_{k \in K}, \{\gamma_k\}_{k \in K})$. Da Definição 1.2.33, o subanel de $\bar{A}\#X$ dos elementos invariantes pela ação de K é dado por

$$(\bar{A}\#X)^\gamma = \{w \in \bar{A}\#X : \gamma_k(w1_{d(k)}) = w1_{r(k)}, \forall k \in K\},$$

onde denotaremos $(\bar{A}\#X)^\gamma = (\bar{A}\#X)^K$. Pelo Teorema 1.2.37, existe o contexto de Morita $[(\bar{A}\#X) *_\gamma K, \bar{A}\#X, \bar{A}\#X, (\bar{A}\#X)^K, \tau', \tau]$.

Vejamos quem serão as aplicações τ e τ' deste contexto, usando a multiplicação em $\bar{A}\#X$. Comecemos por τ e consideremos os elementos $a_g\delta_x$ e $b_h\delta_y \in \bar{A}\#X$. Assim, $a_g\delta_x \in A^{e_1}\#X_{e_1}$ e $b_h\delta_y \in A^{e_2}\#X_{e_2}$, para e_1, $e_2 \in G_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \tau(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) = tr_\gamma((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)) &= \sum_{k \in K} \gamma_k\big((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)1_{k^{-1}}\big) \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{k \in K} \gamma_k\big(a_g b_h \delta_y 1_{k^{-1}}\big), & \text{se } e_1 = e_2 \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

No caso em que $e_1 = e_2$ e $\alpha_h(y) = x$, segue que

$$\tau(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) = \sum_{k\in K}\gamma_k\big(a_gb_h\delta_y 1_{k^{-1}}\big) = \sum_{k\in K}\gamma_k\left((a_gb_h\delta_y)\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{z\in Y_{k^{-1}}\cap X_e} 1_e\delta_z\right)\right)$$
$$= \sum_{k\in K}\sum_{e\in G_0}\sum_{z\in Y_{k^{-1}}\cap X_e}\gamma_k\big((a_gb_h\delta_y)(1_e\delta_z)\big).$$

Notemos que a soma acima é distinta de zero se, e somente se, $e_1 = d(gh) = e$. Logo,

$$\tau(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) = \sum_{k\in K}\sum_{z\in Y_{k^{-1}}\cap X_{e_1}}\gamma_k\big((a_gb_h\delta_y)(1_{e_1}\delta_z)\big) = \sum_{k\in K}\sum_{z\in Y_{k^{-1}}\cap X_{e_1}}\gamma_k\big((a_gb_h\delta_y)(1_{e_1}\delta_z)\big)$$
$$= \sum_{k\in K}\sum_{\substack{z\in Y_{k^{-1}}\cap X_{e_1}\\ \alpha_{e_1}(z)=y}}\gamma_k\big(a_gb_h\delta_z\big) = \sum_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k^{-1}}}}\gamma_k\big(a_gb_h\delta_y\big) = \sum_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k^{-1}}}} a_gb_h\delta_{\beta_k(y)}.$$

Portanto,

$$\tau(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k^{-1}}}} a_gb_h\delta_{\beta_k(y)}, & \text{se } e_1 = e_2 \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Agora, por cálculos exatamente análogos feitos para τ, temos que

$$\tau'(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) = \sum_{k\in K}(a_g\delta_x)\gamma_k\big(b_h\delta_y 1_{k^{-1}}\big)\varepsilon_k$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k^{-1}}}} a_gb_h\delta_{\beta_k(y)}\varepsilon_k, & \text{se } e_1 = e_2 \text{ e } \alpha_h(\beta_k(y)) = x \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Consideremos K um grupo, com unidade $f \in K$, agindo globalmente em um conjunto finito X. Lembremos que se existir $x \in X$ tal que $k.x = x$ implicar $k = f$, então dizemos que esta ação é completamente fiel. Daremos um análogo dessa definição para o caso de ações globais de grupóide.

Definição 3.2.3. *Consideremos K um grupóide e X um K-conjunto via $\alpha = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$. Dizemos que a ação de K em X é completamente fiel se, para algum $x \in Y_k \cap Y_{k^{-1}}$, tivermos $\beta_k(x) = x$, então $k = r(k) = d(k)$.*

Exemplo 3.2.4. Seja K um grupóide e consideremos o Exemplo 1.2.22. Temos que a ação de K em $X = K$ é completamente fiel.

De fato, suponha que exista $l \in T_{r(k)} \cap T_{d(k)}$, tal que $\alpha_k(l) = l$. Temos que $r(k) = r(l) = d(k)$. Além disso, $l = \alpha_k(l) = kl$. Assim, pela unicidade de $r(l)$, segue que $k = r(l) = r(k) = d(k)$.

Exemplo 3.2.5. Sejam K um grupóide e $H \subseteq K$ um subgrupóide normal. Consideremos a ação de K em $X = K/H$ dada no Exemplo 1.2.24. Temos que a ação de K em $X = K/H$ é completamente fiel.

De fato, suponha que exista $lH \in Y_k \cap Y_{k^{-1}}$, tal que $\alpha_k(lH) = lH$. Uma conta simples mostra que $r(kH) = r(lH) = d(kH)$. Além disso, $lH = \alpha_k(lH) = klH = (kH)(lH)$. Assim, pela unicidade de $r(lH)$, segue que $kH = r(lH) = r(kH) = d(kH)$.

Vamos agora demonstrar o resultado mais importante deste capítulo. Além do isomorfismo obtido, o próximo teorema irá garantir a sobrejetividade da aplicação τ', definida anteriormente.

Teorema 3.2.6. *Sejam G e K grupóides, tais que G_0 e K são finitos. Consideremos X um (G, K)-conjunto finito via os pares $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, respectivamente, tal que $X = \dot{\bigcup\limits_{e\in G_0}} X_e$ e $X = \dot{\bigcup\limits_{f\in K_0}} Y_f$. Suponhamos que $Y_k = Y_{k^{-1}}$, para todo $k \in K$, e que a ação de K em X é completamente fiel. Consideremos também $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado, o subanel de A dado por $\bar{A} = \bigoplus\limits_{e\in G_0} A^e$, tal que $A^e = \bigoplus\limits_{g\in G_e} A_g$, para todo $e \in G_0$, e o conjunto O^K das K-órbitas de X. Então, existe o seguinte isomorfismo de anéis*

$$(\bar{A}\#X) *_\gamma K \cong End(\bar{A}\#X)_{\bar{A}\#O^K}.$$

Demonstração: Consideremos a aplicação $\varphi : X \to O^K$, dada por $\varphi(x) = o(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação φ está bem definida e é claramente sobrejetiva. Pela

Proposição 3.1.16, para cada $g \in G$, temos que

$$\varphi(X_g) = \{\varphi(x) : x \in X_g\} = \{o(x) : x \in X_g\} = O_g^K.$$

Além disso, para todo $x \in X_{g^{-1}}$, vale que $\varphi(\alpha_g(x)) = o(\alpha_g(x)) = \lambda_g(o(x)) = \lambda_g(\varphi(x))$. Logo, φ é um homomorfismo de G-conjuntos. Assim, pela Proposição 3.1.1 e Corolário 3.1.4, a aplicação $\varphi^* : \bar{A}\#O^K \to \bar{A}\#X$, dada por $\varphi^*(a_g\delta_{o(x)}) = \sum_{\substack{y \in X_e \\ \varphi(y)=o(x)}} a_g\delta_y = \sum_{\substack{y \in X_e \\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_y$, para todo $a_g\delta_{o(x)} \in \bar{A}^e\#O_e^K$, para todo $e \in G_0$, é um homomorfismo injetor de anéis. Logo, $\bar{A}\#O^K \cong \varphi^*(\bar{A}\#O^K)$.

Sabemos que o grupóide K age no anel $\bar{A}\#X$, via $\gamma = (\{\bar{A}\#Y_k\}_{k\in K}, \{\gamma_k\}_{k\in K})$, (ver Proposição 3.2.1). Da Definição 1.2.33, temos que o subanel de $\bar{A}\#X$ dos elementos invariantes pela ação de K é dado por

$$(\bar{A}\#X)^K = \{w \in \bar{A}\#X : \gamma_k(w1_{d(k)}) = w1_{r(k)},\ \forall k \in K\}.$$

Provemos que $\varphi^*(\bar{A}\#O^K) = (\bar{A}\#X)^K$.

Consideremos $a_g\delta_{o(x)} \in \bar{A}\#O^K$, ou seja $a_g\delta_{o(x)} \in A^f\#O_f^K$, para algum $f \in G_0$. Para todo $k \in K$, temos que $1_{d(k)} = 1_{k^{-1}}$, logo

$$\begin{aligned}
\gamma_k(\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_{d(k)}) &= \gamma_k\left(\left(\sum_{\substack{y \in X_f \\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_y\right)\left(\sum_{e \in G_0}\sum_{x_e \in X_e \cap Y_{k-1}} 1_e\delta_{x_e}\right)\right) \\
&= \gamma_k\left(\sum_{\substack{y \in X_f \\ o(y)=o(x)}}\sum_{e \in G_0}\sum_{x_e \in X_e \cap Y_{k-1}} (a_g\delta_y)(1_e\delta_{x_e})\right).
\end{aligned}$$

Observemos que $a_g1_e \neq 0$ se, e somente se, $e = d(g) = f$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_k(\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_{d(k)}) &= \gamma_k\left(\sum_{\substack{y \in X_f \\ o(y)=o(x)}}\sum_{x_f \in X_f \cap Y_{k-1}} (a_g\delta_y)(1_f\delta_{x_f})\right) \\
&= \gamma_k\left(\sum_{\substack{y \in X_f \\ o(y)=o(x)}}\sum_{\substack{x_f \in X_f \cap Y_{k-1} \\ x_f=\alpha_f(x_f)=y}} a_g\delta_{x_f}\right)
\end{aligned}$$

$$= \gamma_k\left(\sum_{\substack{y\in X_f\cap Y_{k-1}\\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_y\right) = \sum_{\substack{y\in X_f\cap Y_{k-1}\\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_{\beta_k(y)}.$$

Por outro lado, temos que $1_{r(k)} = 1_k$, logo

$$\begin{aligned}\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_{r(k)} &= \left(\sum_{\substack{z\in X_f\\ o(z)=o(x)}} a_g\delta_z\right)\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{x_e\in X_e\cap Y_k} 1_e\delta_{x_e}\right)\\ &= \sum_{\substack{z\in X_f\\ o(z)=o(x)}}\sum_{e\in G_0}\sum_{x_e\in X_e\cap Y_k}(a_g\delta_z)(1_e\delta_{x_e}).\end{aligned}$$

Novamente, observemos que $a_g1_e \neq 0$ se, e somente se, $e = d(g) = f$. Logo,

$$\begin{aligned}\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_{r(k)} &= \sum_{\substack{z\in X_f\\ o(z)=o(x)}}\sum_{x_f\in X_f\cap Y_k}(a_g\delta_z)(1_f\delta_{x_f})\\ &= \sum_{\substack{z\in X_f\\ o(z)=o(x)}}\sum_{\substack{x_f\in X_f\cap Y_k\\ x_f=\alpha_f(x_f)=z}} a_g\delta_{x_f}\\ &= \sum_{\substack{z\in X_f\cap Y_k\\ o(z)=o(x)}} a_g\delta_z.\end{aligned}$$

Observemos que dado $z \in X_f \cap Y_k$, como $\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é uma bijeção, então existe único $y \in Y_{k^{-1}}$ tal que $\beta_k(y) = z$. Além disso, pela definição de (G, K)-conjunto, temos que $y = \beta_{k^{-1}}(z) \in \beta_{k^{-1}}(X_f \cap Y_k) \subseteq X_f \cap Y_{k^{-1}}$. Mais ainda, já vimos que se $z = \beta_k(y)$, então $o(z) = o(y)$. Portanto,

$$\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_{r(k)} = \sum_{\substack{z\in X_f\cap Y_k\\ o(z)=o(x)}} a_g\delta_z = \sum_{\substack{y\in X_f\cap Y_{k-1}\\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_{\beta_k(y)} = \gamma_k(\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_{d(k)}),$$

para todo $k \in K$. Assim, $\varphi^*(\bar{A}\#O^K) \subseteq (\bar{A}\#X)^K$.

Consideremos agora $\sum\limits_{e\in G_0}\sum\limits_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g} \in (\bar{A}\#X)^K$. Logo,

$$\gamma_k\left(\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right)1_{d(k)}\right) = \left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right)1_{r(k)},$$

para todo $k \in K$.

Vejamos o que isso significa. Seja $k \in K$, temos que

$$\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right)1_{d(k)} = \left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right)\left(\sum_{\substack{f\in G_0\\ x_f\in X_f\cap Y_{k^{-1}}}} 1_f\delta_{x_f}\right)$$
$$= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}}\sum_{\substack{f\in G_0\\ x_f\in X_f\cap Y_{k^{-1}}}} (a_g\delta_{x_g})(1_f\delta_{x_f}).$$

Notemos que $a_g 1_f \neq 0$ se, e somente se, $f = d(g) = e$. Neste caso,

$$\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right)1_{d(k)} = \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}}\sum_{x_e\in X_e\cap Y_{k^{-1}}} (a_g\delta_{x_g})(1_e\delta_{x_e})$$
$$= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}}\sum_{\substack{x_e\in X_e\cap Y_{k^{-1}}\\ x_e=\alpha_e(x_e)=x_g}} a_g 1_{d(g)}\delta_{x_e}$$
$$= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e\cap Y_{k^{-1}}}} a_g\delta_{x_g},$$

o que implica que

$$\gamma_k\left(\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right)1_{d(k)}\right) = \gamma_k\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e\cap Y_{k^{-1}}}} a_g\delta_{x_g}\right)$$
$$= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e\cap Y_{k^{-1}}}} a_g\delta_{\beta_k(x_g)},$$

para todo $k \in K$. Analogamente,

$$\left(\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}\right)1_{r(k)} = \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e\cap Y_k}} a_g\delta_{x_g},$$

para todo $k \in K$. Por hipótese, $Y_{k^{-1}} = Y_k$, logo temos válida a igualdade

$$\sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e\cap Y_{k^{-1}}}} a_g\delta_{\beta_k(x_g)} = \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{g\in G_e\\ x_g\in X_e\cap Y_{k^{-1}}}} a_g\delta_{x_g}, \tag{3.1}$$

para todo $k \in K$.

Para cada $e \in G_0$, fixemos $g \in G_e$ na soma $\sum\limits_{e\in G_0} \sum\limits_{\substack{g\in G_e \\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g} \in (\bar{A}\#X)^K$. Consideremos $\{z_g\} \subseteq X_e$ como sendo os representantes das K-órbitas de $\{x_g\} \subseteq X_e$. Agora, seja $\sum\limits_{e\in G_0} \sum\limits_{\substack{g\in G_e \\ o(z_g)\in O_e^K}} a_g\delta_{o(z_g)} \in \bar{A}\#O^K$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi^*\left(\sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ o(z_g)\in O_e^K}} a_g\delta_{o(z_g)}\right) &= \sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ z_g\in X_e}} \varphi^*(a_g\delta_{o(z_g)}) \\
&= \sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ z_g\in X_e}} \sum_{\substack{y_{z_g}\in X_e \\ o(y_{z_g})=o(z_g)}} a_g\delta_{y_{z_g}}.
\end{aligned}$$

Na igualdade acima, como $X = \dot{\bigcup\limits_{f\in K_0}} Y_f$, para cada $g \in G_e$, temos que existe $f_g \in K_0$, tal que $z_g \in Y_{f_g}$. Além disso, $y_{z_g} \in o(y_{z_g}) = o(z_g)$. Logo, $y_{z_g} = \beta_{l_{z_g}}(z_g)$, com $l_{z_g} \in S_{f_g}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\varphi^*\left(\sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ o(z_g)\in O_e^K}} a_g\delta_{o(z_g)}\right) &= \sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ z_g\in X_e}} \sum_{l_{z_g}\in S_{f_g}} a_g\delta_{\beta_{l_{z_g}}(z_g)} \\
&= \sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ x_g\in X_e\cap Y_{l_g^{-1}}}} a_g\delta_{\beta_{l_g}(x_g)}
\end{aligned}$$

Assim, usando (3.1) e o fato de que $l_g^{-1} \in K$ depende de $x_g \in X_g$,

$$\begin{aligned}
\varphi^*\left(\sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{o(x_g)}\right) &= \sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ x_g\in X_e\cap Y_{l_g-1}}} a_g\delta_{\beta_{l_g}(x_g)} \\
&= \sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ x_g\in X_e\cap Y_{l_g-1}}} a_g\delta_{x_g} = \sum_{e\in G_0} \sum_{\substack{g\in G_e \\ x_g\in X_e}} a_g\delta_{x_g}.
\end{aligned}$$

Assim, $(\bar{A}\#X)^K \subseteq \varphi^*(\bar{A}\#O^K)$ e, portanto, segue a igualdade desejada. Dessa maneira, temos que $\bar{A}\#O^K \cong \varphi^*(\bar{A}\#O^K) = (\bar{A}\#X)^K$.

Provemos agora que a extensão $(\bar{A}\#X)^K \subseteq \bar{A}\#X$ é uma extensão de Galois. Por 1.2.38, precisamos encontrar um sistema de coordenadas $\{p_i, q_i\}_{1\leq i\leq m}$, para $\bar{A}\#X$.

Lembremos que G_0 é finito e fixemos $e \in G_0$. Como X é finito, segue que X_e é finito. Definimos $p_e = q_e = \sum\limits_{x \in X_e} 1_e\delta_x$. Consideremos $k \in K$ tal que $k \notin K_0$. Assim, usando a Observação 2.1.10, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e}(1_e\delta_x)\gamma_k((1_e\delta_x)1_{k^{-1}}) &= \sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e}(1_e\delta_x)\gamma_k\Bigg((1_e\delta_x)\Bigg(\sum_{\substack{f\in G_0\\ x_f\in X_f\cap Y_{k-1}}} 1_f\delta_{x_f}\Bigg)\Bigg)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e}(1_e\delta_x)\gamma_k\Bigg(\sum_{\substack{f\in G_0\\ x_f\in X_f\cap Y_{k-1}}}(1_e\delta_x)(1_f\delta_{x_f})\Bigg)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e\cap Y_{k-1}}(1_e\delta_x)\gamma_k(1_e\delta_x)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e\cap Y_{k-1}}(1_e\delta_x)(1_e\delta_{\beta_k(x)}).
\end{aligned}$$

Novamente, pela Observação 2.1.10, a soma acima é distinta de zero apenas se existir algum $x \in X_e \cap Y_{k^{-1}}$, tal que $x = \beta_k(x)$. Se isto ocorrer, como a ação de K em X é completamente fiel, segue que $k = r(k) = d(k)$, o que é um absurdo, já que $k \notin K_0$. Logo, $\sum\limits_{x\in X_e}(1_e\delta_x)\gamma_k((1_e\delta_x)1_{k^{-1}}) = 0$, para todo $k \in K \setminus K_0$.

Por outro lado, se $f \in K_0$, procedendo de modo análogo ao cálculo anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e}(1_e\delta_x)\gamma_f((1_e\delta_x)1_f) &= \sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e\cap Y_f}(1_e\delta_x)(1_e\delta_{\beta_f(x)})\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e\cap Y_f}(1_e\delta_x)(1_e\delta_x)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{x\in X_e\cap Y_f}1_e\delta_x = 1_f.
\end{aligned}$$

Assim, $\{p_e, q_e\}_{e\in G_0}$ é um sistema de coordenadas de Galois e, portanto, a extensão $(\bar{A}\#X)^K \subseteq \bar{A}\#X$ é uma extensão de Galois. Dessa maneira, pelo Teorema 1.2.39, segue que

$$(\bar{A}\#X) *_\gamma K \cong End(\bar{A}\#X)_{(\bar{A}\#X)^K} \cong End(\bar{A}\#X)_{\bar{A}\#O^K}.$$

■

Corolário 3.2.7. *A aplicação* $\tau' : \bar{A}\#X \otimes_{(\bar{A}\#X)^K} \bar{A}\#X \to (\bar{A}\#X)*_\gamma K$*, do contexto de Morita* $[(\bar{A}\#X)*_\gamma, \bar{A}\#X, \bar{A}\#X, (\bar{A}\#X)^K, \tau', \tau]$*, é sobrejetiva.*

Demonstração: Pelo Teorema anterior, a extensão $(\bar{A}\#X)^K \subseteq \bar{A}\#X$ é Galois, o que implica pelo Teorema 1.2.39 que a aplicação τ' é sobrejetiva. ■

Façamos mais algumas considerações importantes.

(**1**) Fixemos $e \in G_0$, então $Y_{k,e} = Y_k \cap X_e$ é um G_e-conjunto finito, para todo $k \in K$, via $g \cdot x = \alpha_g(x)$, para quaisquer $g \in G_e$ e $x \in Y_{k,e}$. Logo, podemos considerar o produto smash no caso de grupos dado por $A^e\#Y_{k,e} = \bigoplus\limits_{x \in Y_{k,e}} A^e\delta_x$, com unidade dada por $1_{k,e} = \sum\limits_{x \in Y_{k,e}} 1_e\delta_x$.

(**2**) Por uma construção exatamente análoga a Proposição 3.2.1, temos que o grupóide K age no produto smash de grupo $A^e\#X_e$, para cada $e \in G_0$, via a ação $\gamma^e = (\{A^e\#Y_{k,e}\}_{k\in K}, \{\gamma_k^e\}_{k\in K})$, onde $\gamma_k^e : A^e\#Y_{k^{-1},e} \to A^e\#Y_{k,e}$, é dada por $\gamma_k^e(a_g\delta_x) = a_g\delta_{\beta_k(x)}$, para todo $a_g\delta_x \in A^e\#Y_{k^{-1},e}$. Logo, podemos considerar o skew anel de grupóide $(A^e\#X_e) *_{\gamma^e} K$, para cada $e \in G_0$. Além disso, $A^e\#X_e = \bigoplus\limits_{f \in K_0} A^e\#Y_{f,e}$.

(**3**) Por uma construção análoga ao Teorema 3.2.6, temos que

$$(A^e\#X_e)^K = \varphi_e^*(A^e\#O_e^K),$$

onde $\varphi_e^* : A^e\#O_e^K \to A^e\#X_e$, é dada por $\varphi_e^*(a_g\delta_{o(x)}) = \sum\limits_{\substack{y \in X_e \\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_y$, para todo $a_g\delta_{o(x)} \in A^e\#O_e^K$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}(\bar{A}\#X)^K = \varphi^*\left(\bigoplus_{e\in G_0} A^e\#O_e^K\right) &= \bigoplus_{e\in G_0} \varphi^*(A^e\#O_e^K) \\ = \bigoplus_{e\in G_0} \varphi_e^*(A^e\#O_e^K) &= \bigoplus_{e\in G_0} (A^e\#X_e)^K.\end{aligned}$$

(**4**) Para finalizar, por uma construção análoga ao Teorema 3.2.6, temos que

$$(A^e\#X_e) *_{\gamma^e} K \cong End(A^e\#X_e)_{A^e\#O_e^K},$$

para cada $e \in G_0$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned}(\bar{A}\#X) *_{\gamma} K &= \bigoplus_{k\in K}(\bar{A}\#Y_k)\varepsilon_k = \bigoplus_{k\in K}\left(\bigoplus_{e\in G_0}\left(\bigoplus_{\substack{g\in G_e\\ x\in Y_{k,e}}} A_g\delta_x\right)\right)\varepsilon_k \\ &= \bigoplus_{k\in K}\left(\bigoplus_{e\in G_0} A^e\#Y_{k,e}\right)\varepsilon_k = \bigoplus_{e\in G_0}\left(\bigoplus_{k\in K}(A^e\#Y_{k,e})\varepsilon_k\right) \\ &= \bigoplus_{e\in G_0}(A^e\#X_e) *_{\gamma^e} K \cong \bigoplus_{e\in G_0} End(A^e\#X_e)_{A^e\#O_e^K}.\end{aligned}$$

Capítulo 4

O Produto Smash Parcial $A\#X$

Neste capítulo, vamos definir uma nova versão do produto smash apresentado na Seção 1.1.1. Para isso, vamos considerar ações parciais de grupos em conjuntos, e não mais ações globais. Na Seção 4.1, apresentamos esta nova definição, juntamente com algumas propriedades. Na Seção 4.2, vamos exibir condições necessárias e suficientes para que o produto smash parcial $A\#X$ seja Morita equivalente ao produto smash global $A\#\bar{X}$, onde $(\bar{X}, \bar{\alpha})$ é a envolvente da ação parcial α (ver Teorema 1.3.5). Esta última seção foi baseada nos resultados de A. Paques e D. Bagio, apresentados em [3].

4.1 Definição e Propriedades

Consideremos G um grupo, com unidade $e \in G$, tal que G age parcialmente em um conjunto finito X, via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, e $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade dada por $1_A \in A$.

Definição 4.1.1. *Nestas condições, definimos o produto smash parcial, denotado*

$A\#X$, como sendo

$$A\#X = \bigoplus_{\substack{g \in G \\ x \in X_{g^{-1}}}} A_g\delta_x,$$

onde δ_x's são símbolos, dois elementos são iguais se coincidem em cada coordenada $x \in X_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$, a soma é dada de maneira usual e a multiplicação é definida por:

$$(a_g\delta_x)(b_h\delta_y) = \begin{cases} a_g b_h \delta_y, & \text{se } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde, g e $h \in G$, $a_g \in A_g$, $b_h \in A_h$, $x \in X_{g^{-1}}$ e $y \in X_{h^{-1}}$.

Observemos que a multiplicação acima está bem definida, pois se $x \in X_{g^{-1}}$ é tal que $x = \alpha_h(y)$, então $y = \alpha_{h^{-1}}(x) \in \alpha_{h^{-1}}(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_{h^{-1}g^{-1}} \cap X_{h^{-1}} \subseteq X_{(gh)^{-1}}$, pela definição de ação parcial.

Exemplo 4.1.2. Seja $G = \{e, g, h, gh : g^2 = h^2 = (gh)^2 = e\}$, o grupo de Klein. Consideremos o subconjunto de G dado por $X = \{e, g, gh\}$. Pelo Exemplo 1.3.4, existe uma ação parcial de G em X dada por $\alpha = (\{X_l\}_{l\in G}, \{\alpha_l\}_{l\in G})$, onde $X_e = X$, $X_g = X_{g^{-1}} = \{e, g\}$, $X_h = X_{h^{-1}} = \{g, gh\}$, $X_{gh} = X_{(gh)^{-1}} = \{e, gh\}$, $\alpha_e = Id_X$, $\alpha_g : X_g \to X_g$ é tal que $\alpha_g(e) = g$, $\alpha_g(g) = e$, $\alpha_h : X_h \to X_h$ é tal que $\alpha_h(g) = gh$, $\alpha_h(gh) = g$, e $\alpha_{gh} : X_{gh} \to X_{gh}$ é tal que $\alpha_{gh}(e) = gh$ e $\alpha_{gh}(gh) = e$. Consideremos a álgebra de grupo $A = Ku_e \oplus Ku_g \oplus Ku_h \oplus Ku_{gh}$, onde K é um anel comutativo. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} A\#X = {} & Ku_e\delta_e \oplus Ku_e\delta_g \oplus Ku_e\delta_{gh} \\ & \oplus Ku_g\delta_e \oplus Ku_g\delta_g \oplus Ku_h\delta_g \\ & \oplus Ku_h\delta_{gh} \oplus Ku_{gh}\delta_e \oplus Ku_{gh}\delta_{gh}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.3. Sejam $G = \{e, g, h, gh : g^2 = h^2 = (gh)^2 = e\}$, o grupo de Klein, e R um anel finito qualquer. Consideremos $X = R \times R \times R$. Pelo Exemplo 1.3.2, temos que existe uma ação parcial de G em X dada por $\alpha = (\{X_l\}_{l\in G}, \{\alpha_l\}_{l\in G})$, onde $X_e = X$, $X_g = X_{g^{-1}} = R \times 0 \times R$, $X_h = X_{h^{-1}} = R \times R \times 0$, $X_{gh} = X_{(gh)^{-1}} = 0 \times R \times R$, $\alpha_e = Id_X$, $\alpha_g : X_g \to X_g$ é tal que $\alpha_g((r,0,s)) = (s,0,r)$, $\alpha_h : X_h \to X_h$ é tal que $\alpha_h((r,s,0)) = (s,r,0)$, e $\alpha_{gh} : X_{gh} \to X_{gh}$, é tal que $\alpha_{gh}((0,r,s)) = (0,s,r)$, para quaisquer r e $s \in R$. Consideremos novamente a álgebra de grupo $A = Ku_e \oplus Ku_g \oplus Ku_h \oplus Ku_{gh}$, onde K é um anel comutativo. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} A\#X = &\left(\bigoplus_{r,s,t\in R} Ku_e\delta_{(r,s,t)}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{r,s\in R} Ku_g\delta_{(r,0,s)}\right) \\ &\bigoplus \left(\bigoplus_{r,s\in R} Ku_h\delta_{(r,s,0)}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{r,s\in R} Ku_{gh}\delta_{(0,r,s)}\right). \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.4. Seja $G = \{e, g, g^2, g^3 : g^4 = e\}$, o grupo cíclico de ordem 4. Consideremos o subconjunto de G dado por $X = \{g, g^2, g^3\}$. Pelo Exemplo 1.3.4, existe uma ação parcial de G em X dada por $\alpha = (\{X_l\}_{l\in G}, \{\alpha_l\}_{l\in G})$, onde $X_e = X$, $X_g = \{g^2, g^3\}$, $X_{g^2} = \{g, g^3\}$, $X_{g^3} = \{g, g^2\}$, $\alpha_e = Id_X$, $\alpha_g : X_{g^3} \to X_g$ é tal que $\alpha_g(g) = g^2$, $\alpha_g(g^2) = g^3$, $\alpha_{g^2} : X_{g^2} \to X_{g^2}$ é tal que $\alpha_{g^2}(g) = g^3$, $\alpha_{g^2}(g^3) = g$, e $\alpha_{g^3} : X_g \to X_{g^3}$ é tal que $\alpha_{g^3}(g^2) = g$ e $\alpha_{g^3}(g^3) = g^2$. Consideremos a álgebra de grupo $A = Ku_e \oplus Ku_g \oplus Ku_{g^2} \oplus Ku_{g^3}$, onde K é um anel comutativo. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} A\#X &= Ku_e\delta_g \oplus Ku_e\delta_{g^2} \oplus Ku_e\delta_{g^3} \\ &\oplus Ku_g\delta_g \oplus Ku_g\delta_{g^2} \oplus Ku_{g^2}\delta_g \\ &\oplus Ku_{g^2}\delta_{g^3} \oplus Ku_{g^3}\delta_{g^2} \oplus Ku_{g^3}\delta_{g^3}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.5. Sejam $G = \{e, g, g^2, g^3 : g^4 = e\}$, o grupo cíclico de ordem 4, e R um anel finito qualquer. Consideremos $X = R \times R \times R$. Pelo Exemplo 1.3.3, existe uma ação parcial de G em X dada por $\alpha = (\{X_l\}_{l\in G}, \{\alpha_l\}_{l\in G})$, onde $X_e = X$, $X_g = R \times R \times 0$, $X_{g^2} = R \times 0 \times R$, $X_{g^3} = 0 \times R \times R$, $\alpha_e = Id_X$, $\alpha_g : X_{g^3} \to X_g$ é tal que $\alpha_g((0,r,s)) = (r,s,0)$, $\alpha_{g^2} : X_{g^2} \to X_{g^2}$ é tal que $\alpha_{g^2}((r,0,s)) = (s,0,r)$, e $\alpha_{g^3} : X_g \to X_{g^3}$, é tal que $\alpha_{g^3}((r,s,0)) = (0,r,s)$, para quaisquer r e $s \in R$.

Consideremos novamente a álgebra de grupo $A = Ku_e \oplus Ku_g \oplus Ku_{g^2} \oplus Ku_{g^3}$, onde K é um anel comutativo. Dessa maneira,

$$A\#X = \left(\bigoplus_{r,s,t\in R} Ku_e\delta_{(r,s,t)} \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{r,s\in R} Ku_g\delta_{(0,r,s)} \right)$$
$$\bigoplus \left(\bigoplus_{r,s\in R} Ku_{g^2}\delta_{(r,0,s)} \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{r,s\in R} Ku_{g^3}\delta_{(r,s,0)} \right).$$

A próxima proposição caracteriza $A\#X$ como um anel associativo com unidade.

Proposição 4.1.6. *Seja X um conjunto finito tal que G age parcialmente em X via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade. Então, $A\#X$ é um anel associativo com unidade dada por $1_{A\#X} = \sum_{x\in X} 1_A\delta_x$.*

Demonstração: Sejam $a_g\delta_x$, $b_h\delta_y$ e $c_k\delta_z \in A\#X$, ou seja, $x \in X_{g^{-1}}$, $y \in X_{h^{-1}}$ e $z \in X_{k^{-1}}$. Temos que

$$((a_g\delta_x)(b_h\delta_y))(c_k\delta_z) = \begin{cases} (a_gb_h\delta_y)(c_k\delta_z), \text{ se } \alpha_h(y) = x \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (a_gb_h)c_k\delta_z, \text{ se } \alpha_k(z) = y \text{ e } \alpha_h(y) = x \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$(a_g\delta_x)((b_h\delta_y)(c_k\delta_z)) = \begin{cases} (a_g\delta_x)(b_hc_k\delta_z), \text{ se } \alpha_k(z) = y \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} a_g(b_hc_k)\delta_z, \text{ se } \alpha_{hk}(z) = x \text{ e } \alpha_k(z) = y \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Para que o produto em $A\#X$ seja associativo, devemos mostrar que $\alpha_k(z) = y$ e $\alpha_h(y) = x$ se, e somente se, $\alpha_{hk}(z) = x$ e $\alpha_k(z) = y$. De fato, se $\alpha_k(z) = y$ e $\alpha_h(y) = x$, então $z = \alpha_{k^{-1}}(y) \in \alpha_{k^{-1}}(X_{h^{-1}} \cap X_k) \subseteq X_{k^{-1}h^{-1}} \cap X_{k^{-1}} \subseteq X_{(hk)^{-1}}$, isto é, $z \in X_{(hk)^{-1}} \cap X_{k^{-1}}$. Assim, $x = \alpha_h(y) = \alpha_h(\alpha_k(z)) = \alpha_{hk}(z)$. Reciprocamente, suponhamos que $\alpha_{hk}(z) = x$ e $\alpha_k(z) = y$, então $\alpha_k(z) \in X_{h^{-1}}$. Assim, $x = \alpha_{hk}(z) = \alpha_h(\alpha_k(z)) = \alpha_h(y) \in X_h$. Portanto, $A\#X$ é um anel associativo.

Provemos agora que $A\#X$ tem unidade. Consideremos $a_g\delta_y \in A\#X$, logo $y \in X_{g^{-1}}$. Assim,

$$(a_g\delta_y)\left(\sum_{x\in X} 1_A\delta_x\right) = \sum_{x\in X}(a_g\delta_y)(1_A\delta_x) = \sum_{\substack{x\in X=X_e\\ x=\alpha_e(x)=y}} a_g 1_A\delta_x = a_g\delta_y,$$

pois $1_A \in A_e$.

Por outro lado temos

$$\left(\sum_{x\in X} 1_A\delta_x\right)(a_g\delta_y) = \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)(a_g\delta_y).$$

Como $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$ está bem definida, existe único $x \in X_{g^{-1}} \subseteq X$ tal que $\alpha_g(y) = x$. Logo,

$$\left(\sum_{x\in X} 1_A\delta_x\right)(a_g\delta_y) = 1_A a_g\delta_y = a_g\delta_y.$$

Dessa maneira, $A\#X$ tem unidade $1_{A\#X} = \sum\limits_{x\in X} 1_A\delta_x$. ■

Observação 4.1.7. *O conjunto $B = \{1_A\delta_x : x \in X\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais.*

De fato, consideremos $1_A\delta_x$, $1_A\delta_y \in B$. Então,

$$\begin{aligned}(1_A\delta_x)(1_A\delta_y) &= \begin{cases} 1_A 1_A\delta_y, & \text{se } \alpha_e(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}\\ &= \begin{cases} 1_A\delta_x, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

4.2 Morita Equivalência entre o Smash Parcial $A\#X$ e o Smash Global $A\#\bar{X}$

Sejam G um grupo com unidade $e \in G$, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade $1_A \in A$, e X um conjunto finito, tal que G age parcialmente via $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$. Assim, pela Definição 4.1.1, podemos considerar o produto smash parcial $A\#X$.

Seja $(\bar{X}, \bar{\alpha})$ a envolvente da ação parcial α, cuja a existência é assegurada pelo Teorema 1.3.5. Portanto, $\bar{X} = (G \times X)/\sim$, onde $(g,x) \sim (h,y)$ se, e somente se, $x \in X_{g^{-1}h}$ e $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$, e $\bar{\alpha}(g, \overline{(h,x)}) = \overline{(gh,x)}$, para quaisquer g, $h \in G$ e x, $y \in X$. Dessa maneira, pela Definição 1.1.1, podemos considerar o produto smash global $A\#\bar{X}$, como sendo o A-módulo à esquerda livre com base indexada pelos elementos de $\bar{X}$, ou seja,

$$A\#\bar{X} = \bigoplus_{\overline{(h,y)} \in \bar{X}} A\delta_{\overline{(h,y)}} = \bigoplus_{\substack{g \in G \\ \overline{(h,y)} \in \bar{X}}} A_g\delta_{\overline{(h,y)}}.$$

Se $a_g\delta_{\overline{(h,x)}}$, $b_k\delta_{\overline{(l,y)}} \in A\#\bar{X}$, então

$$\begin{aligned}\left(a_g\delta_{\overline{(h,x)}}\right)\left(b_k\delta_{\overline{(l,y)}}\right) &= \begin{cases} a_g b_k \delta_{\overline{(l,y)}}, & \text{se } \bar{\alpha}_k(\overline{(l,y)}) = \overline{(h,x)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_g b_k \delta_{\overline{(l,y)}}, & \text{se } \overline{(kl,y)} = \overline{(h,x)} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

Vamos denotar por $R = A\#X$ e $S = A\#\bar{X}$. Já vimos que $1_R = \sum_{x \in X} 1_A\delta_x$ e, de acordo com a Proposição 1.1.2, $1_S = \sum_{\overline{(h,y)} \in \bar{X}} 1_A\delta_{\overline{(h,y)}}$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.2.1. Consideremos o produto smash $R = A\#X$ do Exemplo 4.1.2. Nestas condições, é fácil ver que $\bar{X} = \{\overline{(e,e)}, \overline{(e,g)}, \overline{(e,gh)}, \overline{(g,gh)}\}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
S = A\#\bar{X} &= Ku_e\delta_{\overline{(e,e)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(e,e)}} \oplus Ku_h\delta_{\overline{(e,e)}} \oplus Ku_{gh}\delta_{\overline{(e,e)}} \\
&\oplus Ku_e\delta_{\overline{(e,g)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(e,g)}} \oplus Ku_h\delta_{\overline{(e,g)}} \oplus Ku_{gh}\delta_{\overline{(e,g)}} \\
&\oplus Ku_e\delta_{\overline{(e,gh)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(e,gh)}} \oplus Ku_h\delta_{\overline{(e,gh)}} \oplus Ku_{gh}\delta_{\overline{(e,gh)}} \\
&\oplus Ku_e\delta_{\overline{(g,gh)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(g,gh)}} \oplus Ku_h\delta_{\overline{(g,gh)}} \oplus Ku_{gh}\delta_{\overline{(g,gh)}}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.2.2. Consideremos o produto smash $R = A\#X$ do Exemplo 4.1.4. Nestas condições, é fácil ver que $\bar{X} = \{\overline{(e,g)}, \overline{(e,g^2)}, \overline{(e,g^3)}, \overline{(g,g^3)}\}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
S = A\#\bar{X} &= Ku_e\delta_{\overline{(e,g)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(e,g)}} \oplus Ku_{g^2}\delta_{\overline{(e,g)}} \oplus Ku_{g^3}\delta_{\overline{(e,g)}} \\
&\oplus Ku_e\delta_{\overline{(e,g^2)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(e,g^2)}} \oplus Ku_{g^2}\delta_{\overline{(e,g^2)}} \oplus Ku_{g^3}\delta_{\overline{(e,g^2)}} \\
&\oplus Ku_e\delta_{\overline{(e,g^3)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(e,g^3)}} \oplus Ku_{g^2}\delta_{\overline{(e,g^3)}} \oplus Ku_{g^3}\delta_{\overline{(e,g^3)}} \\
&\oplus Ku_e\delta_{\overline{(g,g^3)}} \oplus Ku_g\delta_{\overline{(g,g^3)}} \oplus Ku_{g^2}\delta_{\overline{(g,g^3)}} \oplus Ku_{g^3}\delta_{\overline{(g,g^3)}}.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 1.3.5, existe uma aplicação injetiva $i : X \to \bar{X}$, definida por $i(x) = \overline{(e,x)}$, para todo $x \in X$. Com base nisto, segue nossa próxima proposição.

Proposição 4.2.3. *A aplicação $\varphi : R \to S$, definida por $\varphi(a_g\delta_x) = a_g\delta_{i(x)}$, para todo $a_g\delta_x \in R$, é um homomorfismo injetor de anéis.*

Demonstração: Claramente, φ está bem definida. Consideremos $a_g\delta_x$, $b_h\delta_y \in R$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\varphi\big((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)\big) &= \begin{cases} \varphi(a_gb_h\delta_y), & \text{se } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_gb_h\delta_{\overline{(e,y)}}, & \text{se } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\varphi\big(a_g\delta_x\big)\varphi\big(b_h\delta_y\big) = \big(a_g\delta_{\overline{(e,x)}}\big)\big(b_h\delta_{\overline{(e,y)}}\big) = \begin{cases} a_gb_h\delta_{\overline{(e,y)}}, & \text{se } \overline{(h,y)} = \overline{(e,x)} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Notemos que $b_h\delta_y \in R$, ou seja, $y \in X_{h^{-1}}$, então $\overline{(h,y)} = \overline{(e,x)}$ se, e somente se, $\alpha_h(y) = x$. Portanto, $\varphi\big((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)\big) = \varphi\big(a_g\delta_x\big)\varphi\big(b_h\delta_y\big)$, provando que φ é multiplicativa. A injetividade de φ é óbvia. ■

Observemos que, pela proposição anterior, podemos considerar $1_R = \sum\limits_{x\in X} 1_A\delta_{\overline{(e,x)}}$.

Proposição 4.2.4. *Nas condições desta seção,*

(i) $S1_R = \bigoplus\limits_{\substack{g,h\in G\\ y\in X_{h^{-1}}}} A_g\delta_{\overline{(h,y)}}$;

(ii) $1_RS = \bigoplus\limits_{\substack{g,h\in G\\ y\in X_{(gh)^{-1}}}} A_g\delta_{\overline{(h,y)}}$;

(iii) $1_RS1_R = R$.

Demonstração: (i) Consideremos $a_g\delta_{\overline{(h,y)}} \in S$. Logo,

$$(a_g\delta_{\overline{(h,y)}})1_R = \left(a_g\delta_{\overline{(h,y)}}\right)\left(\sum_{x\in X} 1_A\delta_{\overline{(e,x)}}\right) = \sum_{x\in X}\big(a_g\delta_{\overline{(h,y)}}\big)\big(1_A\delta_{\overline{(e,x)}}\big) = \sum_{\substack{x\in X\\ \overline{(e,x)}=\overline{(h,y)}}} a_g\delta_{\overline{(e,x)}}.$$

Podemos observar que se existir x, $z \in X$ tais que $\overline{(e,x)} = \overline{(h,y)} = \overline{(e,z)}$, então $x = z$, pois $(e,x) \sim (e,z)$, ou seja, $x \in X_e = X$ e $x = \alpha_e(x) = z$. Logo,

$$\big(a_g\delta_{\overline{(h,y)}}\big)1_R = \begin{cases} a_g\delta_{\overline{(h,y)}}, \text{ se existir } x \in X \text{ tal que } \overline{(h,y)} = \overline{(e,x)} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que se $y \in X_{h^{-1}}$, então $\overline{(h,y)} = \overline{(e,\alpha_h(y))}$. Reciprocamente, se existir $x \in X$, tal que $\overline{(h,y)} = \overline{(e,x)}$, então $y \in X_{h^{-1}}$ e $\alpha_h(y) = x$. Portanto,

$$(a_g\delta_{\overline{(h,y)}})1_R = \begin{cases} a_g\delta_{\overline{(h,y)}}, \text{ se } y \in X_{h^{-1}} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Para a outra inclusão, notemos que se $a_g\delta_{\overline{(h,y)}}$ é tal que $y \in X_{h^{-1}}$, então $a_g\delta_{\overline{(h,y)}} = a_g\delta_{\overline{(e,\alpha_h(y))}} = \big(a_g\delta_{\overline{(e,\alpha_h(y))}}\big)1_R$, mostrando assim a igualdade desejada.

(ii) Segue exatamente análogo ao item anterior, observando que

$$1_R\big(a_g\delta_{\overline{(h,y)}}\big) = \begin{cases} a_g\delta_{\overline{(h,y)}}, & \text{se existir } x \in X \text{ tal que } \overline{(gh,y)} = \overline{(e,x)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_g\delta_{\overline{(h,y)}}, & \text{se } y \in X_{(gh)^{-1}} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(iii) Claramente, $R \subseteq 1_R S 1_R$. Consideremos $a_g\delta_{\overline{(h,y)}} \in S$. Assim, pelos cálculos anteriores,

$$1_R\big(a_g\delta_{\overline{(h,y)}}\big)1_R = \begin{cases} a_g\delta_{\overline{(h,y)}}, & \text{se } y \in X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $y \in X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}}$, então $y \in X_{h^{-1}}$, logo $a_g\delta_{\overline{(h,y)}} = a_g\delta_{\overline{(e,\alpha_h(y))}}$. Além disso, $\alpha_h(y) \in \alpha_h(X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}}) \subseteq X_{g^{-1}}$, ou seja, $1_R\big(a_g\delta_{\overline{(h,y)}}\big)1_R \in R$. ■

Consideremos $M = 1_R S$ e $N = S 1_R$. Assim, M é um (R,S)-bimódulo, via $r \cdot 1_R s = r 1_R s$ e $1_R s \cdot t = 1_R st$, e N é um (S,R)-bimódulo, via $s1_R \cdot r = s1_R r$ e $t \cdot s1_R = ts1_R$, para quaisquer $r \in R$ e s, $t \in S$. Além disso, usando a Propriedade Universal do Produto Tensoral, juntamente com a proposição anterior, é fácil ver que estão bem definidas as aplicações $\tau : M \otimes_S N \to R$, dada por $\tau(m \otimes n) = mn$, e $\tau' : N \otimes_R M \to S$, dada por $\tau'(n \otimes m) = nm$, quaisquer que sejam $m \in M$ e $n \in N$. Notemos também que, pela proposição anterior, a aplicação τ é sobrejetiva. Com isso, segue nossa próxima proposição.

Proposição 4.2.5. *Nas condições dessa seção, $[R, N, M, S, \tau, \tau']$ é um contexto de Morita. Além disso, se A é fortemente G-graduado, então este contexto é estrito.*

Demonstração: É fácil ver que $[R, N, M, S, \tau, \tau']$ é um contexto de Morita (ver página 24). Provemos a segunda afirmação. Suponhamos que A é fortemente G-graduado e consideremos $a_g\delta_{\overline{(h,y)}} \in S$. Temos que $a_g \in A_g = A_{gh}A_{h^{-1}}$, pois A é fortemente G-graduado, então existem finitos elementos $b_i \in A_{gh}$ e $c_j \in A_{h^{-1}}$, tais que $a_g = \sum_{i,j} b_i c_j$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_i b_i \delta_{\overline{(e,y)}}\right)\left(\sum_j c_j \delta_{\overline{(h,y)}}\right) &= \begin{cases} \sum_{i,j} b_i c_j \delta_{\overline{(h,y)}}, & \text{se } \overline{(h^{-1}h, y)} = \overline{(e,y)} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \sum_{i,j} b_i c_j \delta_{\overline{(h,y)}} \\
&= a_g \delta_{\overline{(h,y)}},
\end{aligned}
$$

onde $\sum_i b_i \delta_{\overline{(e,y)}} \in N$ e $\sum_j c_j \delta_{\overline{(h,y)}} \in M$. Portanto, temos que τ' é sobrejetiva. ■

Capítulo 5

Teorema de Dualidade para Ações Parciais de Grupo

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar mais uma versão do Teorema de Dualidade [6, Theorem 2.7], agora para ações parciais de um grupo G em um conjunto finito X. Vamos generalizar alguns resultados de S. Dascalescu, C. Nastasescu, F. Van Oystaeyen e B. Torrecillas, demonstrados em [6], e também apresentar mais algumas propriedades e definições relativas a ações parciais de grupos em conjuntos, com a finalidade de que nos auxiliem na demonstração do Teorema de Dualidade. O produto smash considerado neste capítulo será como na Definição 4.1.1.

5.1 Preliminares

Consideremos G um grupo, com unidade $e \in G$, e $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ um anel G-graduado, com unidade $1_A \in A$. Sejam X e Y conjuntos finitos, tais que G age parcialmente em ambos, via $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ e $\beta = (\{Y_g\}_{g \in G}, \{\beta_g\}_{g \in G})$, respectivamente. Consideremos $\varphi : X \to Y$ um homomorfismo de ações parciais (ver Definição 1.3.6), tal que $\varphi^{-1}(Y_g) \subseteq X_g$, para todo $g \in G$. Definimos $\varphi^* : A\#Y \to A\#X$, por $\varphi^*(a_g\delta_y) = \sum\limits_{\substack{x \in X_{g^{-1}} \\ \varphi(x)=y}} a_g\delta_x$, para todo $a_g\delta_y \in A\#Y$, e estendemos por linearidade. Se não existir $x \in X_{g^{-1}}$ tal que $\varphi(x) = y$, então definimos $\varphi^*(a_g\delta_y) = 0$. A partir disto, segue nossa próxima proposição.

Proposição 5.1.1. *Nas condições anteriores, a aplicação $\varphi^* : A\#Y \to A\#X$ é um homomorfismo de anéis.*

Demonstração: Sejam $a_g\delta_{y_1}$, $b_h\delta_{y_2} \in A\#Y$, ou seja, $y_1 \in Y_{g^{-1}}$ e $y_2 \in Y_{h^{-1}}$. Queremos mostrar que $\varphi^*\big((a_g\delta_{y_1})(b_h\delta_{y_2})\big) = \varphi^*(a_g\delta_{y_1})\varphi^*(b_h\delta_{y_2})$. Vamos dividir a prova em dois casos:

<u>Caso 1</u>: $\beta_h(y_2) = y_1$.

Se $\beta_h(y_2) = y_1$, então podemos observar que existe $z_1 \in X_{g^{-1}}$, tal que $\varphi(z_1) = y_1$ se, e somente se, existe $z_2 \in X_{h^{-1}}$, tal que $\varphi(z_2) = y_2$. De fato, suponhamos que existe $z_1 \in X_{g^{-1}}$, tal que $\varphi(z_1) = y_1 = \beta_h(y_2)$. Segue que $z_1 \in \varphi^{-1}(y_1) \subseteq \varphi^{-1}(Y_h) \subseteq X_h$. Logo, $y_2 = \beta_{h^{-1}}(\varphi(z_1)) = \varphi(\alpha_{h^{-1}}(z_1))$. Reciprocamente, suponhamos que existe $z_2 \in X_{h^{-1}}$, tal que $\varphi(z_2) = y_2$. Assim, $y_1 = \beta_h(y_2) = \beta_h(\varphi(z_2)) = \varphi(\alpha_h(z_2))$, pois $z_2 \in X_{h^{-1}}$. Notemos que $y_2 = \beta_{h^{-1}}(y_1) \in \beta_{h^{-1}}(Y_h \cap Y_{g^{-1}}) \subseteq Y_{(gh)^{-1}}$. Logo, $z_2 \in \varphi^{-1}(y_2) \subseteq \varphi^{-1}(Y_{(gh)^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$. Sendo assim, $\alpha_h(z_2) \in \alpha_h(X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}) \subseteq X_{g^{-1}}$.

Então, suponhamos que existe $z_1 \in X_{g^{-1}}$, tal que $\varphi(z_1) = y_1$. Pela multiplicação em $A\#Y$, segue que

$$\varphi^*\big((a_g\delta_{y_1})(b_h\delta_{y_2})\big) = \varphi^*(a_g b_h\delta_{y_2}) = \sum_{\substack{z \in X_{(gh)^{-1}} \\ \varphi(z)=y_2}} a_g b_h \delta_z$$

Pelos cálculos feitos anteriormente, temos que $\alpha_{h^{-1}}(z_1) \in \alpha_{h^{-1}}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$ e $\varphi(\alpha_{h^{-1}}(z_1)) = y_2$. Isso mostra que $\varphi^*\big((a_g\delta_{y_1})(b_h\delta_{y_2})\big) \neq 0$. Além disso, por cálculos já feitos, $z \in X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}}$. Logo,

$$\varphi^*\big((a_g\delta_{y_1})(b_h\delta_{y_2})\big) = \sum_{\substack{z \in X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}} \\ \varphi(z)=y_2}} a_g b_h \delta_z.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi^*(a_g\delta_{y_1})\varphi^*(b_h\delta_{y_2}) &= \left(\sum_{\substack{t \in X_{g^{-1}} \\ \varphi(t)=y_1}} a_g\delta_t\right)\left(\sum_{\substack{w \in X_{h^{-1}} \\ \varphi(w)=y_2}} b_h\delta_w\right) \\
&= \sum_{\substack{t \in X_{g^{-1}} \\ \varphi(t)=y_1}} \sum_{\substack{w \in X_{h^{-1}} \\ \varphi(w)=y_2}} (a_g\delta_t)(b_h\delta_w) \\
&= \sum_{\substack{w \in X_{h^{-1}} \\ \varphi(w)=y_2}} \sum_{\substack{t \in X_{g^{-1}} \\ \varphi(t)=y_1 \\ t=\alpha_h(w)}} a_g b_h \delta_w.
\end{aligned}$$

Observemos que para cada $w \in X_{h^{-1}}$ tal que $\varphi(w) = y_2$, existe $t \in X_h$ tal que $\alpha_h(w) = t$. Entretanto, não é necessário que $t \in X_{g^{-1}} \cap X_h$ e $\varphi(t) = y_1$. Quando isso ocorrer, podemos observar que $w = \alpha_{h^{-1}}(t) \in \alpha_{h^{-1}}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$. Assim,

$$\varphi^*(a_g\delta_{y_1})\varphi^*(b_h\delta_{y_2}) = \sum_{\substack{w \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}} \\ \varphi(w)=y_2}} a_g b_h \delta_w.$$

Para que φ^* seja multiplicativa, devemos mostrar que a soma acima é distinta de zero, ou seja, existe $w \in X_{h^{-1}}$ com $\varphi(w) = y_2$, tal que existe $t \in X_{g^{-1}} \cap X_h$ com $\alpha_h(w) = t$ e $\varphi(t) = y_1$. Lembremos que estamos supondo $\beta_h(y_2) = y_1$ e que existe $z_1 \in X_{g^{-1}}$, tal que $\varphi(z_1) = y_1$. Neste caso, mostramos que existe $z_2 \in X_{h^{-1}}$, tal que $\varphi(z_2) = y_2$. Escolhemos $w = z_2$ e $t = \alpha_h(z_2)$. Pela definição de homomorfismo de ações parciais, temos que $\varphi(t) = \varphi(\alpha_h(z_2)) = \beta_h(\varphi(z_2)) = \beta_h(y_2) = y_1 \in Y_{g^{-1}}$, o que implica $t \in \varphi^{-1}(y_1) \subseteq \varphi^{-1}(Y_{g^{-1}}) \subseteq X_{g^{-1}}$.

Portanto, se existe $z_1 \in X_{g^{-1}}$, tal que $\varphi(z_1) = y_1$, então φ^* é multiplicativa.

Suponhamos agora que não existe $t \in X_{g^{-1}}$, tal que $\varphi(t) = y_1$. Então, não existe $z \in X_{h^{-1}}$ tal que $\varphi(z) = y_2$. Pela definição de φ^* e pelos cálculos feitos até agora, segue que $\varphi^*(a_g\delta_{y_1})\varphi^*(b_h\delta_{y_2}) = 0 = \varphi^*\big((a_g\delta_{y_1})(b_h\delta_{y_2})\big)$.

Caso 2: $\beta_h(y_2) \neq y_1$.

Claramente, $\varphi^*\big((a_g\delta_{y_1})(b_h\delta_{y_2})\big) = 0$. Suponhamos que $\varphi^*(a_g\delta_{y_1})\varphi^*(b_h\delta_{y_2}) \neq 0$. Então, por cálculos já feitos, temos que existe $w \in X_{h^{-1}}$ com $\varphi(w) = y_2$, tal que existe $t \in X_{g^{-1}} \cap X_h$ com $\alpha_h(w) = t$ e $\varphi(t) = y_1$. Logo, $y_1 = \varphi(t) = \varphi(\alpha_h(w)) = \beta_h(\varphi(w)) = \beta_h(y_2)$, o que é um absurdo. Assim, $\varphi^*(a_g\delta_{y_1})\varphi^*(b_h\delta_{y_2}) = 0 = \varphi^*\big((a_g\delta_{y_1})(b_h\delta_{y_2})\big)$.

Por último, provemos agora que $\varphi^*(1_{A\#Y}) = 1_{A\#X}$. Temos que

$$\varphi^*(1_{A\#Y}) = \varphi^*\left(\sum_{y\in Y} 1_A\delta_y\right) = \sum_{y\in Y}\varphi^*(1_A\delta_y) = \sum_{y\in Y}\sum_{\substack{x\in X\\ \varphi(x)=y}} 1_A\delta_x = \sum_{y\in Im\varphi}\sum_{\substack{x\in X\\ \varphi(x)=y}} 1_A\delta_x,$$

pois, para todo $y \in Y$, tal que não existe $x \in X$ com $\varphi(x) = y$, então $\varphi^*(1_A\delta_y) = 0$. Por outro lado,

$$1_{A\#X} = \sum_{x\in X} 1_A\delta_x = \sum_{\substack{y\in Y\\ y=\varphi(x)}}\sum_{x\in X} 1_A\delta_x = \sum_{y\in Im\varphi}\sum_{\substack{x\in X\\ \varphi(x)=y}} 1_A\delta_x.$$

Portanto, $\varphi^*(1_{A\#Y}) = 1_{A\#X}$ e φ^* é um homomorfismo de anéis. ■

Lema 5.1.2. *Nas condições anteriores, se $\varphi : X \to Y$ é um homomorfismo de ações parciais, tal que $\varphi^{-1}(Y_g) \subseteq X_g$, para todo $g \in G$, então $Ker\varphi^* = \bigoplus_{g\in G}\left(\bigoplus_{\substack{y\in Y_{g^{-1}}\\ y\notin Im\varphi}} A_g\delta_y\right)$.*

Demonstração: Claramente, $\bigoplus_{g\in G}\left(\bigoplus_{\substack{y\in Y_{g^{-1}}\\ y\notin Im\varphi}} A_g\delta_y\right) \subseteq Ker\varphi^*$.

Consideremos agora $\sum_{\substack{g\in G\\ y\in Y_{g^{-1}}}} a_g\delta_y \in Ker\varphi^*$. Logo,

$$0 = \varphi^*\left(\sum_{\substack{g\in G\\ y\in Y_{g^{-1}}}} a_g\delta_y\right) = \sum_{\substack{g\in G\\ y\in Y_{g^{-1}}}}\varphi^*(a_g\delta_y) = \sum_{\substack{g\in G\\ y\in Y_{g^{-1}}}}\sum_{\substack{x\in X_{g^{-1}}\\ \varphi(x)=y}} a_g\delta_x.$$

Notemos que para todo $g \in G$, onde $y \in Y_{g^{-1}}$ é tal que $y \in Im\varphi$, temos $a_g = 0$, por definição de $A\#X$. Assim, $Ker\varphi^* \subseteq \bigoplus_{g\in G}\left(\bigoplus_{\substack{y\in Y_{g-1}\\ y\notin Im\varphi}} A_g\delta_y\right)$. Portanto, vale a igualdade. ■

Corolário 5.1.3. *Se φ é sobrejetiva, então φ^* é injetiva.*

Observação 5.1.4. *Também podemos mostrar que se φ é injetiva, então φ^* é sobrejetiva.*

De fato, basta mostrar para cada $a_g\delta_x \in A\#X$, quaisquer que sejam $x \in X_{g^{-1}}$ e $g \in G$. Consideremos $y = \varphi(x)$, então

$$\varphi^*(a_g\delta_y) = \sum_{\substack{z\in X_{g-1}\\ \varphi(z)=y}} a_g\delta_z = a_g\delta_x,$$

onde está última igualdade se dá pelo fato de φ ser injetiva.

Vamos agora tratar um pouco mais sobre ações parciais de grupos. No que segue, faremos algumas generalizações de definições e resultados de ações globais de grupos.

Definição 5.1.5. *Sejam G e K grupos, com unidades $e \in G$ e $f \in K$, respectivamente. Consideremos X um conjunto. Dizemos que X é um (G,K)-conjunto parcial, se*

(i) G age parcialmente em X via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$;

(ii) K age parcialmente em X via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$;

(iii) Para quaisquer $g \in G$ e $k \in K$, é válido que

$$\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_k) \subseteq X_g \cap Y_k \quad e \quad \beta_k(X_g \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq X_g \cap Y_k.$$

Se existirem $g \in G$ e $k \in K$, tais que $X_{g^{-1}} \cap Y_k = \varnothing$, então convencionamos que $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_k) = \varnothing$. Analogamente para $X_g \cap Y_{k^{-1}}$.

(iv) Para todo $x \in X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}$, é válido que $\alpha_g(\beta_k(x)) = \beta_k(\alpha_g(x))$.

Por (iii) temos que $\beta_k(X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq X_{g^{-1}} \cap Y_k$ e $\alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq X_g \cap Y_{k^{-1}}$, para quaisquer $g \in G$ e $k \in K$. Logo, faz sentido definir (iv). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1.6. Consideremos $G = \{e, g, h, gh : g^2 = h^2 = (gh)^2 = e\}$, o grupo de Klein, e o subconjunto de G dado por $X = \{e, g, gh\}$. Sejam $K = \{e, g\}$ e $H = \{e, h\}$ subgrupos de G. Pelo Exemplo 1.3.4, temos que K age parciamente em X, via $\alpha = (\{X_k\}_{k \in K}, \{\alpha_k\}_{k \in K})$, onde $X_e = X$, $X_g = \{e, g\}$, $\alpha_e = Id_X$ e $\alpha_g : X_g \to X_g$, é tal que $\alpha_g(e) = g$ e $\alpha_g(g) = e$. É fácil ver que H age parcialmente em X, via $\beta = (\{Y_h\}_{h \in H}, \{\beta_h\}_{h \in H})$, onde $Y_e = X$, $Y_h = \{e, g\}$, $\beta_e = Id_X$ e $\beta_h : Y_h \to Y_h$, é tal que $\beta_h = Id_{X_h}$. Um cálculo simples nos mostra que X é um (K, H)-conjunto parcial, via estas ações.

Exemplo 5.1.7. Nas mesmas hipóteses do exemplo anterior, consideremos a ação parcial de K em X, dada por $\alpha = (\{X_k\}_{k \in K}, \{\alpha_k\}_{k \in K})$. Agora, vamos definir uma ação parcial de H em X, dada por $\beta = (\{Y_h\}_{h \in H}, \{\beta_h\}_{h \in H})$, onde $Y_e = X$, $Y_h = \{e, g\}$, $\beta_e = Id_X$ e $\beta_h : Y_h \to Y_h$, é tal que $\beta_h(e) = g$ e $\beta_h(g) = e$. Novamente, um cálculo simples nos mostra que X é um (K, H)-conjunto parcial, via estas ações.

Exemplo 5.1.8. Sejam $G = \{e, g, h, gh : g^2 = h^2 = (gh)^2\}$, o grupo de Klein, e $K = \{f, k, k^2, k^3 : k^4 = f\}$, o grupo cíclico de ordem 4. Consideremos R um anel qualquer e definimos o conjunto $X = R \times R \times R$. Consideremos os subgrupos de G e K dados por $H = \{e, g\}$ e $L = \{f, k^2\}$, respectivamente. Temos que H age parcialmente em X, via $\alpha = (\{X_h\}_{h \in H}, \{\alpha_h\}_{h \in H})$, onde $X_e = X$, $X_g = R \times 0 \times R$, $\alpha_e = Id_X$ e $\alpha_g : X_g \to X_g$, é definida por $\alpha_g((r, 0, s)) = (s, 0, r)$, quaisquer que sejam r, $s \in R$. Também podemos definir uma ação parcial de L em X dada por $\beta = (\{Y_l\}_{l \in L}, \{\beta_l\}_{l \in L})$, onde $Y_f = X$, $Y_{k^2} = R \times 0 \times R$, $\beta_f = Id_X$ e $\beta_{k^2} : Y_{k^2} \to Y_{k^2}$, é definida por $\beta_{k^2}((r, 0, s)) = (s, 0, r)$, quaisquer que sejam r, $s \in R$. Um cálculo fácil mostra que X é um (H, L)-conjunto parcial, via estas ações.

Exemplo 5.1.9. Sejam $G = Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ e, o subgrupo de G, $H = \{1, -1, i, -i\}$. Consideremos apenas a estrutura de conjunto em $X = Q_8$. Temos que H age parcialmente em X, via $\alpha = (\{X_h\}_{h\in H}, \{\alpha_h\}_{h\in H})$, onde $X_1 = X$, $X_{-1} = \{1, -1, i, -i\}$, $X_i = \{1, -1, i, -i, j\}$, $X_{-i} = \{1, -1, i, -i, -j\}$, $\alpha_1 = Id_X$, $\alpha_{-1} : X_{-1} \to X_{-1}$, é dada por $\alpha_{-1}(1) = -1$, $\alpha_{-1}(-1) = 1$, $\alpha_{-1}(i) = -i$, $\alpha_{-1}(-i) = i$, $\alpha_{-i} : X_i \to X_{-i}$, é dada por $\alpha_{-i}(1) = -i$, $\alpha_{-i}(-1) = i$, $\alpha_{-i}(i) = 1$, $\alpha_{-i}(-i) = -1$, $\alpha_{-i}(j) = -j$ e $\alpha_i : X_{-i} \to X_i$, é dada por $\alpha_i(1) = i$, $\alpha_i(-1) = -i$, $\alpha_i(i) = -1$, $\alpha_i(-i) = 1$ e $\alpha_i(-j) = j$. De modo análogo, podemos definir outra ação de H em X, dada por $\beta = (\{Y_h\}_{h\in H}, \{\beta_h\}_{h\in H})$, onde $Y_1 = X$, $Y_{-1} = X_{-1}$, $Y_i = \{1, -1, i, -i, k\}$, $Y_{-i} = \{1, -1, i, -i, -k\}$, $\beta_1 = Id_X$, $\beta_{-1} = \alpha_{-1}$, $\beta_{-i} : Y_i \to Y_{-i}$, tal que $\beta_{-i}(1) = -i$, $\beta_{-i}(-1) = i$, $\beta_{-i}(i) = 1$, $\beta_{-i}(-i) = -1$, $\beta_{-i}(k) = -k$ e $\beta_i : Y_{-i} \to Y_i$, tal que $\beta_i(1) = i$, $\beta_i(-1) = -i$, $\beta_i(i) = -1$, $\beta_i(-i) = 1$ e $\beta_i(-k) = k$. Um cálculo fácil mostra que X é um (H, H)-conjunto parcial, via estas ações.

Exemplo 5.1.10. Seja $G = A_4$, o grupo das permutações pares de ordem 4. Denotemos seus elementos por e, $\sigma_1 = (12)(34)$, $\sigma_2 = (13)(24)$, $\sigma_3 = (14)(23)$, $\sigma_4 = (123)$, $\sigma_5 = (132)$, $\sigma_6 = (124)$, $\sigma_7 = (142)$, $\sigma_8 = (134)$, $\sigma_9 = (143)$, $\sigma_{10} = (234)$ e $\sigma_{11} = (243)$. Consideremos apenas a estrutura de conjunto em $X = A_4$ e os subgrupos de G dados por $H = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e $L = \{e, \sigma_1\}$. Temos que H age parcialmente em X, via $\alpha = (\{X_h\}_{h\in H}, \{\alpha_h\}_{h\in H})$, onde os subconjuntos são $X_e = X$, $X_{\sigma_1} = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, $X_{\sigma_2} = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_6, \sigma_7\}$ e $X_{\sigma_3} = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_8, \sigma_9\}$, e as aplicações são $\alpha_e = Id_X$, $\alpha_{\sigma_1} : X_{\sigma_1} \to X_{\sigma_1}$, tal que $\alpha_{\sigma_1}(e) = \sigma_1$, $\alpha_{\sigma_1}(\sigma_1) = e$, $\alpha_{\sigma_1}(\sigma_2) = \sigma_3$, $\alpha_{\sigma_1}(\sigma_3) = \sigma_2$, $\alpha_{\sigma_1}(\sigma_4) = \sigma_5$, $\alpha_{\sigma_1}(\sigma_5) = \sigma_4$, $\alpha_{\sigma_2} : X_{\sigma_2} \to X_{\sigma_2}$, tal que $\alpha_{\sigma_2}(e) = \sigma_2$, $\alpha_{\sigma_2}(\sigma_1) = \sigma_3$, $\alpha_{\sigma_2}(\sigma_2) = e$, $\alpha_{\sigma_2}(\sigma_3) = \sigma_1$, $\alpha_{\sigma_2}(\sigma_6) = \sigma_7$, $\alpha_{\sigma_2}(\sigma_7) = \sigma_6$ e, finalmente, $\alpha_{\sigma_3} : X_{\sigma_3} \to X_{\sigma_3}$, tal que $\alpha_{\sigma_3}(e) = \sigma_3$, $\alpha_{\sigma_3}(\sigma_1) = \sigma_2$, $\alpha_{\sigma_3}(\sigma_2) = \sigma_1$, $\alpha_{\sigma_3}(\sigma_3) = e$, $\alpha_{\sigma_3}(\sigma_8) = \sigma_9$, $\alpha_{\sigma_3}(\sigma_9) = \sigma_8$. Também temos que L age parcialmente em X, via $\beta = (\{Y_l\}_{l\in L}, \{\beta_l\}_{l\in L})$, onde os subconjuntos são dados por $Y_e = X$, $Y_{\sigma_1} = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{10}, \sigma_{11}\}$, e as aplicações são $\beta_e = Id_X$, $\beta_{\sigma_1} : Y_{\sigma_1} \to Y_{\sigma_1}$, tal que $\beta_{\sigma_1}(e) = \sigma_1$, $\beta_{\sigma_1}(\sigma_1) = e$, $\beta_{\sigma_1}(\sigma_2) = \sigma_3$, $\beta_{\sigma_1}(\sigma_3) = \sigma_2$, $\beta_{\sigma_1}(\sigma_{10}) = \sigma_{11}$, $\alpha_{\sigma_1}(\sigma_{11}) = \sigma_{10}$. De um cálculo fácil, segue que X é um (H, L)-conjunto parcial, via estas ações.

Proposição 5.1.11. *Consideremos G e K grupos, X um (G, K)-conjunto parcial, via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, respectivamente. Então, para cada $k \in K$, temos que G age parcialmente no conjunto Y_k. Em particular, a aplicação $\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é um isomorfismo de ações parciais, para todo $k \in K$.*

Demonstração: Fixemos $k \in K$. Para todo $g \in G$, definimos $Y_{k,g} = Y_k \cap X_g$. Definimos também a aplicação $\theta_g^k = \alpha_g|_{Y_{k,g^{-1}}} : Y_{k,g^{-1}} \to Y_{k,g}$, para todo $g \in G$. Notemos que, pela definição de (G, K)-conjunto parcial, se $x \in Y_{k,g^{-1}} = Y_k \cap X_{g^{-1}}$, então $\alpha_g(x) \in \alpha_g(Y_k \cap X_{g^{-1}}) \subseteq Y_k \cap X_g = Y_{k,g}$, ou seja, θ_g^k está bem definida. Além disso, θ_g^k é claramente injetiva, para todo $g \in G$. Para a sobrejetividade, consideremos $y \in Y_{k,g} = Y_k \cap X_g$, logo existe único $x \in X_{g^{-1}}$, tal que $\alpha_g(x) = y$. Assim, usando a definição de (G, K)-conjunto parcial, temos que $x = \alpha_{g^{-1}}(y) \in \alpha_{g^{-1}}(X_g \cap Y_k) \subseteq X_{g^{-1}} \cap Y_k = Y_{k,g^{-1}}$. Além disso, as propriedades de ação parcial são claramente satisfeitas por θ_g^k. Portanto, Y_k é um G-conjunto, via o par $\theta^k = (\{Y_{k,g}\}_{g\in G}, \{\theta_g^k\}_{g\in G})$.

Por último, usando a definição de (G, K)-conjunto, temos que $\beta_k(Y_{k^{-1},g}) \subseteq Y_{k,g}$, para todo $g \in G$. Mais ainda, para todo $x \in Y_{k^{-1},g^{-1}}$, $\beta_k(\theta_g^k(x)) = \theta_g^k(\beta_k(x))$. Assim, $\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é um homomorfismo de ações parciais, para todo $k \in K$. ■

Definição 5.1.12. *Sejam K um grupo e X um conjunto tal que K age parcialmente via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$. Definimos a K-órbita de x como sendo o conjunto $o(x) = \{\beta_k(x) : k \in K$ é tal que $x \in Y_{k^{-1}}\}$.*

Observemos que na definição acima, necessariamente $x \in X = X_f$, então pelo menos $x \in o(x)$, implicando que $o(x) \neq \varnothing$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1.13. Consideremos a ação parcial do Exemplo 4.1.2. Então, $o(g) = \{e, g, gh\} = X$.

Exemplo 5.1.14. Consideremos a ação parcial do Exemplo 4.1.4. Então, $o(g) = \{g, g^2, g^3\} = X$.

Observação 5.1.15. *Sejam K um grupo e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$ uma ação parcial de K em um conjunto X. Se $z \in Y_{k^{-1}}$, então $o(z) = o(w)$, tal que $w = \beta_k(z)$.*

De fato, por definição segue que $o(w) = \{\beta_l(w) : l \in K$ é tal que $w \in Y_{l^{-1}}\}$ e $o(z) = \{\beta_t(z) : t \in K$ é tal que $z \in Y_{t^{-1}}\}$. Seja $\beta_l(w) \in o(w)$, então $w \in Y_{l^{-1}} \cap Y_k$. Dessa maneira,

$$\beta_l(w) = \beta_l(\beta_k(z)) = \beta_{lk}(z),$$

pois $z = \beta_{k^{-1}}(w) \subseteq \beta_{k^{-1}}(Y_{l^{-1}} \cap Y_k) \subseteq Y_{(lk)^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}$. Logo, $\beta_l(w) \in o(z)$. Analogamente, se $\beta_t(z) \in o(z)$, então $z \in Y_{t^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}$. Dessa maneira,

$$\beta_t(z) = \beta_t(\beta_{k^{-1}}(w)) = \beta_{tk^{-1}}(w),$$

pois $w = \beta_k(z) \subseteq \beta_k(Y_{t^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq Y_{kt^{-1}} \cap Y_k = Y_{(tk^{-1})^{-1}} \cap Y_k$. Logo, $\beta_t(z) \in o(w)$ e, portanto, $o(z) = o(w)$.

A próxima proposição nos dará mais uma classe de exemplos de conjuntos onde um grupo G age parcialmente.

Proposição 5.1.16. *Sejam G e K grupos, com unidades $e \in G$ e $f \in K$, respectivamente, X um (G, K)-conjunto parcial finito via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, respectivamente. Então, G age parcialmente no conjunto $O^K = \{o(x) : x \in X\}$ das K-órbitas de X.*

Demonstração: Para cada $g \in G$, definimos $O_g^K = \{o(x) : x \in X_g\}$. Consideremos também $\lambda_g : O_{g^{-1}}^K \to O_g^K$, onde $\lambda_g(o(x)) = o(\alpha_g(x))$, para todo $o(x) \in O_{g^{-1}}^K$. Para que a aplicação λ_g esteja bem definida, devemos mostrar que se $o(x) = o(y)$ em

$O^K_{g^{-1}}$, então $o(\alpha_g(x)) = o(\alpha_g(y))$ em O^K_g. Consideremos $\beta_k(\alpha_g(x)) \in o(\alpha_g(x))$, então $k \in K$ é tal que $\alpha_g(x) \in Y_{k^{-1}}$. Logo, usando mais uma vez a definição de (G, K)-conjunto, temos que $x \in \alpha_{g^{-1}}(X_g \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}$. Notemos que $x \in o(x) = o(y)$, então $x = \beta_l(y)$, para algum $l \in K$, tal que $y \in Y_{l^{-1}}$. Disto segue que $y \in X_{g^{-1}} \cap Y_{l^{-1}}$ e $y = \beta_{l^{-1}}(x) \in \beta_{l^{-1}}(Y_l \cap Y_{k^{-1}}) \subseteq Y_{(kl)^{-1}}$. Assim, temos que $\alpha_g(y) \in \alpha_g(X_{g^{-1}} \cap Y_{(kl)^{-1}}) \subseteq X_g \cap Y_{(kl)^{-1}}$. Logo, $\beta_k(\alpha_g(x)) = \beta_k(\alpha_g(\beta_l(y))) = \beta_k(\beta_l(\alpha_g(y))) = \beta_{kl}(\alpha_g(y))$. Logo, $o(\alpha_g(x)) \subseteq o(\alpha_g(y))$. A outra inclusão se faz de modo análogo, mostrando assim a boa definição de λ_g, para todo $g \in G$.

É fácil ver que $\lambda_{g^{-1}}$ é uma inversa para λ_g, sendo assim, λ_g é bijeção. Temos também que $O^K_e = O^K$ e λ_e é a aplicação identidade em O^K. Suponhamos agora que $o(x) \in O^K_{g^{-1}} \cap O^K_h$, para g, $h \in G$. Assim, $x \in X_{g^{-1}} \cap X_h$, o que implica $\alpha_g(x) \in \alpha_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_g \cap X_{gh}$. Logo, $\lambda_g(o(x)) = o(\alpha_g(x)) \in O^K_g \cap O^K_{gh}$. Por último seja $o(x) \in O^K_{h^{-1}} \cap O^K_{(gh)^{-1}}$, para g, $h \in G$, então $x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$. Logo, $\lambda_g(\lambda_h((o(x))) = o(\alpha_g(\alpha_h(x))) = o(\alpha_{gh}(x)) = \lambda_{gh}(o(x))$. Portanto, G age parcialmente em O^K via $\lambda = (\{O^K_g\}_{g\in G}, \{\lambda_g\}_{g\in G})$. ■

5.2 Teorema de Dualidade

Enfim, vamos apresentar mais uma generalização do Teorema de Dualidade para Anéis Graduados, [6, Theorem 2.7], considerando ações parciais de grupo ao invés de ações globais. Sejam G e K grupos com unidades $e \in G$ e $f \in K$, respectivamente. Consideremos X um (G, K)-conjunto parcial finito, via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, respectivamente. Consideremos também $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade. Dessa maneira, podemos formar o produto smash $A\#X = \bigoplus_{\substack{g\in G\\ x\in X_{g^{-1}}}} A_g\delta_x$.

Na próxima proposição, construiremos o skew anel de grupóide $(A\#X) *_\gamma K$.

Antes disso, pela Proposição 5.1.11, lembremos que, para cada $k \in K$ fixado, Y_k é um G-conjunto finito. Portanto, para cada $k \in K$, podemos considerar o produto smash:

$$A\#Y_k = \bigoplus_{\substack{g\in G \\ x\in Y_{k,g^{-1}}}} A_g\delta_x = \bigoplus_{\substack{g\in G \\ x\in Y_k\cap X_{g^{-1}}}} A_g\delta_x,$$

com unidade dada por $1_k = \sum\limits_{x\in Y_k} 1_A\delta_x$. Podemos observar que se $x \in Y_k$, então $x \in X = X_e$. Assim, $1_A\delta_x \in A\#Y_k$, logo $A\#Y_k \neq \varnothing$.

Proposição 5.2.1. *Nas condições anteriores, temos que K age parcialmente no anel $A\#X$. Em particular, existe o skew anel de grupo parcial $(A\#X) *_\gamma K$.*

Demonstração: Para cada $k \in K$, provemos que $A\#Y_k$ é um ideal bilateral de $A\#X$. Sejam $a_g\delta_x \in A\#X$ e $b_h\delta_y \in A\#Y_k$, ou seja, $x \in X_{g^{-1}}$, $y \in X_{h^{-1}} \cap Y_k$. Logo,

$$(a_g\delta_x)(b_h\delta_y) = \begin{cases} a_gb_h\delta_y, & \text{se } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como a multiplicação em $A\#X$ está bem definida, segue que $y \in X_{(gh)^{-1}} \cap Y_k$. Assim, $(a_g\delta_x)(b_h\delta_y) \in A\#Y_k$.

Por outro lado,

$$(b_h\delta_y)(a_g\delta_x) = \begin{cases} b_ha_g\delta_x, & \text{se } \alpha_g(x) = y \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente, como a multiplicação está bem definida, temos $x \in X_{(hg)^{-1}}$. Além disso, usando a definição de (G, K)-conjunto parcial, temos que $x = \alpha_{g^{-1}}(y) \in \alpha_{g^{-1}}(X_g \cap Y_k) \subseteq X_{g^{-1}} \cap Y_k \subseteq Y_k$. Logo, $x \in X_{(hg)^{-1}} \cap Y_k$ e $(b_h\delta_y)(a_g\delta_x) \in A\#Y_k$. Portanto, $A\#Y_k$ é um ideal de $A\#X$, para todo $k \in K$.

Notemos que, como K age parcialmente em X, temos $X = Y_f$, o que implica $A\#X = A\#Y_f$. Pela Proposição 5.1.11, lembremos que, $\beta_{k^{-1}} : Y_k \to Y_{k^{-1}}$ é um isomorfismo de ações parciais, para todo $k \in K$. Logo, pela Proposição 5.1.1, a aplicação $\gamma_k = \beta^*_{k^{-1}} : A\#Y_{k^{-1}} \to A\#Y_k$, definida por

$$\gamma_k(a_g\delta_x) = \sum_{\substack{y\in Y_{k,g^{-1}} \\ \beta_{k^{-1}}(y)=x}} a_g\delta_y = a_g\delta_{\beta_k(x)},$$

para todo $a_g\delta_x \in A\#Y_{k^{-1}}$, é um isomorfismo de anéis. Claramente, temos que $\gamma_f : A\#X \to A\#X$ é a aplicação identidade de $A\#X$. Além disso, é fácil ver que $\gamma_k((A\#Y_{k^{-1}}) \cap (A\#Y_l)) \subseteq (A\#Y_k) \cap (A\#Y_{kl})$, para quaisquer k, $l \in K$, e que se $a_g\delta_x \in (A\#Y_{k^{-1}}) \cap (A\#Y_{(lk)^{-1}})$, então $\gamma_l(\gamma_k(a_g\delta_x)) = \gamma_{lk}(a_g\delta_x)$. Portanto, K age parcialmente em $A\#X$ via $\gamma = (\{A\#Y_k\}_{k\in K}, \{\gamma_k\}_{k\in K})$. Sendo assim, podemos considerar o skew anel de grupo $(A\#X) *_\gamma K$. ■

Da Definição 1.3.9, o subanel de $A\#X$ dos elementos invariantes pela ação parcial de K é dado por

$$(A\#X)^\gamma = \{w \in A\#X : \gamma_k(w1_{k^{-1}}) = w1_k, \forall k \in K\},$$

onde denotaremos $(A\#X)^\gamma = (A\#X)^K$. Pelo Teorema 1.3.13, existe o contexto de Morita $[(A\#X) *_\gamma K, A\#X, A\#X, (A\#X)^K, \tau', \tau]$.

Vejamos quem serão as aplicações $\tau : A\#X \otimes_{(A\#X)*_\gamma K} A\#X \to (A\#X)^K$ e $\tau' : A\#X \otimes_{(A\#X)^K} A\#X \to (A\#X) *_\gamma K$ deste contexto, usando a multiplicação em $A\#X$. Comecemos por τ e consideremos $a_g\delta_x$ e $b_h\delta_y \in A\#X$. Logo,

$$\begin{aligned}\tau(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) = tr_\gamma((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)) &= \sum_{k\in K} \gamma_k\big((a_g\delta_x)(b_h\delta_y)1_{k^{-1}}\big) \\ &= \begin{cases} \sum_{k\in K} \gamma_k\big(a_gb_h\delta_y1_{k^{-1}}\big), & \text{se } \alpha_h(y) = x \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}\end{aligned}$$

No caso em que $\alpha_h(y) = x$, temos

$$
\begin{aligned}
\tau(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) &= \sum_{k\in K}\gamma_k\big(a_gb_h\delta_y 1_{k^{-1}}\big) = \sum_{k\in K}\gamma_k\left((a_gb_h\delta_y)\left(\sum_{z\in Y_{k-1}} 1_A\delta_z\right)\right)\\
&= \sum_{k\in K}\sum_{z\in Y_{k-1}}\gamma_k\big((a_gb_h\delta_y)(1_A\delta_z)\big) = \sum_{k\in K}\sum_{\substack{z\in Y_{k-1}\\ \alpha_e(z)=y}}\gamma_k\big(a_gb_h\delta_z\big)\\
&= \sum_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k-1}}}\gamma_k\big(a_gb_h\delta_y\big) = \sum_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k-1}}} a_gb_h\delta_{\beta_k(y)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\tau(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k-1}}} a_gb_h\delta_{\beta_k(y)}, & \text{se } \alpha_h(y) = x\\[2ex] 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}
$$

Agora, por cálculos exatamente análogos feitos para τ, temos que

$$
\begin{aligned}
\tau'(a_g\delta_x \otimes b_h\delta_y) &= \sum_{k\in K}(a_g\delta_x)\gamma_k\big(b_h\delta_y 1_{k^{-1}}\big)\varepsilon_k\\
&= \begin{cases} \sum\limits_{\substack{k\in K\\ y\in Y_{k-1}}} a_gb_h\delta_{\beta_k(y)}\varepsilon_k, & \text{se } \alpha_h(\beta_k(y)) = x\\[2ex] 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Consideremos K um grupo, com unidade $f \in K$, agindo globalmente em um conjunto finito X. Novamente, lembremos que essa ação é dita completamente fiel, se existir $x \in X$ tal que $k.x = x$, então $k = f$. Daremos um análogo dessa definição para o caso de ações parciais.

Definição 5.2.2. *Consideremos um grupo K, com unidade $f \in K$, agindo parcialmente em um conjunto finito X via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$. Dizemos que a ação parcial de K em X é completamente fiel, se, para algum $x \in Y_k \cap Y_{k^{-1}}$, ocorrer $\beta_k(x) = x$, então $k = f$.*

Exemplo 5.2.3. As ações dos Exemplos 4.1.2 e 4.1.4 são completamente fiéis. Entretanto, as dos Exemplos 4.1.3 e 4.1.5 não são. De fato, no caso do Exemplo

4.1.3, se considerarmos $(r,0,r) \in X_g = X_{g^{-1}}$, para $r \in R$, temos que $\alpha_g((r,0,r)) = (r,0,r)$ e $g \neq e$. Analogamente, no caso do Exemplo 4.1.5, se considerarmos também $(r,0,r) \in X_{g^2} = X_{(g^2)^{-1}}$, para $r \in R$, temos que $\alpha_{g^2}((r,0,r)) = (r,0,r)$ e $g^2 \neq e$.

No caso de uma ação global completamente fiel de um grupo K em um conjunto X, é fácil ver que se X é finito, então K também é finito. Queremos um análogo desse resultado para ações parciais. Para isso, necessitamos da próxima proposição.

Proposição 5.2.4. *Sejam K um grupo, com unidade $f \in K$, e X um conjunto finito tal que K age parcialmente via $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$. Consideremos a ação envolvente $\bar{\beta}$ de β (ver Teorema 1.3.5). São equivalentes:*

(1) *A ação parcial β é completamente fiel;*

(2) *A ação envolvente $\bar{\beta}$ é completamente fiel.*

Demonstração: Façamos (1) implica (2). Pelo Teorema 1.3.5 (ii), consideremos $y \in Y = \bigcup_{t\in K} \bar{\beta}_t(i(X))$, tal que existe $k \in K$ com $\bar{\beta}_k(y) = y$. Podemos escrever $y = \bar{\beta}_t(i(x))$, para algum $t \in K$ e $x \in X$. Como $y = \bar{\beta}_k(y)$, temos $\bar{\beta}_t(i(x)) = \bar{\beta}_k(\bar{\beta}_t(i(x)))$, o que implica $i(x) = \bar{\beta}_{t^{-1}kt}(i(x))$. Então, $i(x) \in i(X) \cap \bar{\beta}_{t^{-1}kt}(i(X))$ e, pela condição (iii) do Teorema 1.3.5 e pelo fato de que $i : X \to l(X)$ é injetiva, temos que $x \in Y_{t^{-1}kt}$. Analogamente, mostramos que $x \in Y_{(t^{-1}kt)^{-1}}$. Logo, usando (iv) do Teorema 1.3.5, $i(x) = \bar{\beta}_{t^{-1}kt}(i(x)) = i(\beta_{t^{-1}kt}(x))$. Como $i : X \to i(X)$ é injetiva, segue que $x = \beta_{t^{-1}kt}(x)$. Por hipótese, temos que a ação parcial β é completamente fiel, então $t^{-1}kt = f$, ou seja, $k = f$.

Provemos a recíproca (2) implica (1). Seja $x \in Y_{k^{-1}} \cap Y_k$ tal que $\beta_k(x) = x$. Aplicando i em ambos lados da igualdade temos $i(x) = i(\beta_k(x)) = \bar{\beta}_k(i(x))$, onde esta última igualdade se dá pela condição (iv) do Teorema 1.3.5. Como a ação global $\bar{\beta}$ é completamente fiel, temos $k = f$. ■

Disto decorre o próximo corolário.

Corolário 5.2.5. *Sejam K um grupo e X um conjunto finito tal que K age parcialmente via $\beta = (\{X_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$. Se a ação parcial β é completamente fiel, então K é finito.*

Demonstração: Basta considerar a ação envolvente $\bar{\beta}$ de β, pois o resultado é válido para o caso global. ■

Vamos agora demonstrar o resultado mais importante deste capítulo. Além do isomorfismo obtido, o próximo teorema irá garantir a sobrejetividade da aplicação τ', definida anteriormente.

Teorema 5.2.6. *Sejam G e K grupos com unidades $e \in G$ e $f \in K$, respectivamente. Consideremos X um (G,K)-conjunto parcial finito via $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $\beta = (\{Y_k\}_{k\in K}, \{\beta_k\}_{k\in K})$, respectivamente. Suponhamos que a ação de K em X é completamente fiel e $Y_{k^{-1}} = Y_k$, para todo $k \in K$. Consideremos também $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A_g$ um anel G-graduado com unidade e O^K o conjunto das K-órbitas de X. Então, K é finito e existe o seguinte isomorfismo de anéis*

$$(A\#X) *_{\gamma} K \cong End(A\#X)_{A\#O^K}.$$

Demonstração: Já mostramos no Corolário 5.2.5 que o grupo K é finito. Consideremos a aplicação $\varphi : X \to O^K$, dada por $\varphi(x) = o(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação φ está bem definida e é claramente sobrejetiva. Mais ainda, usando a ação parcial de G em O^K, dada na Proposição 5.1.16, temos que φ é um homomorfismo de ações parciais. De fato, pois $\varphi(X_g) = \{o(x) : x \in X_g\} = O^K_g$, para todo $g \in G$. Além disso, se $x \in X_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$, então $o(x) \in O^K_{g^{-1}}$ e $\varphi(\alpha_g(x)) = o(\alpha_g(x)) = \lambda_g(o(x)) = \lambda_g(\varphi(x))$. Mais ainda, podemos observar que, para todo $g \in G$, é válido que

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(O^K_g) &= \{x \in X : \varphi(x) \in O^K_g\}\\ &= \{x \in X : o(x) \in O^K_g\}\end{aligned}$$

$$= \{x \in X : \exists y \in X_g \text{ com } o(x) = o(y)\}.$$

Suponhamos que existe $y \in X_g$ tal que $o(x) = o(y)$. Entretanto, como $x \in o(x) = o(y)$, então $x = \beta_k(y)$, para algum $k \in K$, tal que $y \in Y_{k^{-1}}$. Usando a definição de (G, K)-conjunto, temos que $x = \beta_k(y) \in \beta_k(Y_{k^{-1}} \cap X_g) \subseteq Y_k \cap X_g \subseteq X_g$. Assim, $\varphi^{-1}(O_g^K) \subseteq X_g$.

Assim, pela Proposição 5.1.1 e Corolário 5.1.3, a aplicação $\varphi^* : A\#O^K \to A\#X$, dada por $\varphi^*(a_g\delta_{o(x)}) = \sum\limits_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ \varphi(y)=o(x)}} a_g\delta_y = \sum\limits_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_y$, é um homomorfismo injetor de anéis. Portanto, $\varphi^*(A\#O^K) \cong A\#O^K$.

Pela Proposição 5.2.1, K age no anel $A\#X$ via $\gamma = (\{A\#Y_k\}_{k\in K}, \{\gamma_k\}_{k\in K})$. Novamente, da Definição 1.3.9, o subanel de $A\#X$ dos elementos invariantes pela ação de K é dado por

$$(A\#X)^K = \{w \in A\#X : \gamma_k(w1_{k^{-1}}) = w1_k, \forall k \in K\}.$$

Provemos que $\varphi^*(A\#O^K) = (A\#X)^K$.

Consideremos $a_g\delta_{o(x)} \in A\#O^K$. Para todo $k \in K$, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_k(\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_{k^{-1}}) &= \gamma_k\left(\left(\sum_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_y\right)\left(\sum_{z \in Y_{k^{-1}}} (1_A\delta_z)\right)\right) \\
&= \gamma_k\left(\sum_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ o(y)=o(x)}} \sum_{z \in Y_{k^{-1}}} (a_g\delta_y)(1_A\delta_z)\right) = \gamma_k\left(\sum_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ o(y)=o(x)}} \sum_{\substack{z \in Y_{k^{-1}} \\ z=\alpha_e(z)=y}} a_g 1_A\delta_z\right) \\
&= \gamma_k\left(\sum_{\substack{z \in X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}} \\ o(z)=o(x)}} a_g\delta_z\right) = \sum_{\substack{z \in X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}} \\ o(z)=o(x)}} a_g\delta_{\beta_k(z)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\varphi^*(a_g\delta_{o(x)})1_k = \left(\sum_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ o(y)=o(x)}} a_g\delta_y\right)\left(\sum_{w \in Y_k} 1_A\delta_w\right) = \sum_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ o(y)=o(x)}} \sum_{w \in Y_k} (a_g\delta_y)(1_A\delta_w)$$

$$= \sum_{\substack{y \in X_{g^{-1}} \\ o(y)=o(x)}} \sum_{\substack{w \in Y_k \\ w=\alpha_e(w)=y}} a_g 1_A \delta_w = \sum_{\substack{w \in X_{g^{-1}} \cap Y_k \\ o(w)=o(x)}} a_g \delta_w.$$

Na soma acima, notemos que $w \in X_{g^{-1}} \cap Y_k$ e $\beta_k : Y_{k^{-1}} \to Y_k$ é uma bijeção, logo existe único $z \in Y_{k^{-1}}$ tal que $\beta_k(z) = w$. Além disso, usando a definição de (G, K)-conjunto parcial, $z = \beta_{k^{-1}}(w) \in \beta_{k^{-1}}(X_{g^{-1}} \cap Y_k) \subseteq X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}$. Mais ainda, já vimos que se $w = \beta_k(z)$, então $o(z) = o(w)$.

Dessa maneira, para todo $k \in K$,

$$\varphi^*(a_g \delta_{o(x)}) 1_k = \sum_{\substack{w \in X_{g^{-1}} \cap Y_k \\ o(w)=o(x)}} a_g \delta_w = \sum_{\substack{z \in X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}} \\ o(z)=o(x)}} a_g \delta_{\beta_k(z)} = \gamma_k(\varphi^*(a_g \delta_{o(x)}) 1_{k^{-1}}).$$

Portanto, $\varphi^*(A \# O^K) \subseteq (A \# X)^K$.

Consideremos agora $\sum\limits_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} a_g \delta_{x_g} \in (A \# X)^K$. Logo,

$$\gamma_k\left(\left(\sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} a_g \delta_{x_g}\right) 1_{k^{-1}}\right) = \left(\sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} a_g \delta_{x_g}\right) 1_k,$$

para todo $k \in K$.

Vejamos o que isso significa. Seja $k \in K$, temos

$$\left(\sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} a_g \delta_{x_g}\right) 1_{k^{-1}} = \left(\sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} a_g \delta_{x_g}\right)\left(\sum_{y_g \in Y_{k^{-1}}} 1_A \delta_{y_g}\right) = \sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} \sum_{y_g \in Y_{k^{-1}}} (a_g \delta_{x_g})(1_A \delta_{y_g})$$

$$= \sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} \sum_{\substack{y_g \in Y_{k^{-1}} \\ y_g = \alpha_e(y_g) = x_g}} a_g 1_A \delta_{y_g} = \sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}}} a_g \delta_{x_g},$$

o que implica

$$\gamma_k\left(\left(\sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}}}} a_g \delta_{x_g}\right) 1_{k^{-1}}\right) = \sum_{\substack{g \in G \\ x_g \in X_{g^{-1}} \cap Y_{k^{-1}}}} a_g \delta_{\beta_k(x_g)},$$

para todo $k \in K$.

Analogamente,

$$\left(\sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}}} a_g\delta_{x_g}\right)1_k = \sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}\cap Y_k}} a_g\delta_{x_g},$$

para todo $k \in K$. Por hipótese, $Y_{k^{-1}} = Y_k$, logo temos válida a seguinte igualdade

$$\sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}\cap Y_{k^{-1}}}} a_g\delta_{\beta_k(x_g)} = \sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}\cap Y_{k^{-1}}}} a_g\delta_{x_g}, \tag{5.1}$$

para todo $k \in K$.

Para cada $g \in G$ na soma $\sum\limits_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}}} a_g\delta_{x_g} \in (A\#X)^K$, considere o conjunto $\{z_g\} \subseteq X_{g^{-1}}$ dos representantes das K-órbitas dos $\{x_g\} \subseteq X_{g^{-1}}$. Agora, seja $\sum\limits_{\substack{g\in G\\ z_g\in X_{g^{-1}}}} a_g\delta_{o(z_g)} \in A\#O^K$. Logo,

$$\varphi^*\left(\sum_{\substack{g\in G\\ z_g\in X_{g^{-1}}}} a_g\delta_{o(z_g)}\right) = \sum_{\substack{g\in G\\ z_g\in X_{g^{-1}}}} \varphi^*(a_g\delta_{o(z_g)}) = \sum_{\substack{g\in G\\ z_g\in X_{g^{-1}}}} \sum_{\substack{y_{z_g}\in X_{g^{-1}}\\ o(y_{z_g})=o(z_g)}} a_g\delta_{y_{z_g}}.$$

Na igualdade acima, para cada $g \in G$, como $y_{z_g} \in o(y_{z_g})$, temos que $y_{z_g} \in o(z_g)$. Dessa maneira, para cada $g \in G$, $y_{z_g} = \beta_{k_{z_g}}(z_g)$, para $k_{z_g} \in K$ e $z_g \in X_{g^{-1}} \cap Y_{(k_{z_g})^{-1}}$. Logo,

$$\varphi^*\left(\sum_{\substack{g\in G\\ z_g\in X_{g^{-1}}}} a_g\delta_{o(z_g)}\right) = \sum_{\substack{g\in G\\ z_g\in X_{g^{-1}}}} \sum_{\substack{k_{z_g}\in K\\ z_g\in Y_{(k_{z_g})^{-1}}}} a_g\delta_{\beta_{k_{z_g}}(z_g)} = \sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}\cap Y_{(k_g)^{-1}}}} a_g\delta_{\beta_{k_g}(x_g)}.$$

Pela igualdade (5.1) e pelo fato de que $k_g^{-1} \in K$ depende de $x_g \in X_g$, ou seja, a soma percorrendo $X_g \cap Y_{k_g^{-1}}$ é a mesma soma que percorre X_g, temos que

$$\varphi^*\left(\sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}}} a_g\delta_{o(x_g)}\right) = \sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}\cap Y_{(k_g)^{-1}}}} a_g\delta_{\beta_{k_g}(x_g)} =$$

$$= \sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}\cap Y_{(k_g)^{-1}}}} a_g\delta_{x_g} = \sum_{\substack{g\in G\\ x_g\in X_{g^{-1}}}} a_g\delta_{x_g}.$$

Assim, $(A\#X)^K \subseteq \varphi^*(A\#O^K)$ e, portanto, segue a igualdade desejada. Dessa maneira, $(A\#X)^K = \varphi^*(A\#O^K) \cong A\#O^K$.

Provemos agora que a extensão $(A\#X)^K \subseteq A\#X$ é Galois. Por 1.3.15, precisamos encontrar $\{p_i, q_i\}_{1\leq i\leq m}$, sistema de coordenadas de Galois. Como X é finito, consideremos $p_x = q_x = 1_A\delta_x$, tal que $x \in X$. Seja $k \in K$, tal que $k \neq f$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_k((1_A\delta_x)1_{k^{-1}}) &= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_k\left((1_A\delta_x)\left(\sum_{y\in Y_{k-1}} 1_A\delta_y\right)\right)\\
&= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_k\left(\sum_{y\in Y_{k-1}}(1_A\delta_x)(1_A\delta_y)\right)\\
&= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_k\left(\sum_{\substack{y\in Y_{k-1}\\ y=\alpha_e(y)=x}}(1_A\delta_y)\right)\\
&= \sum_{x\in Y_{k-1}}(1_A\delta_x)(1_A\delta_{\beta_k(x)}).
\end{aligned}$$

Pela Observação 4.1.7, a soma acima é distinta de zero se existe $x \in Y_{k^{-1}} = Y_k$, tal que $x = \beta_k(x)$. Entretanto, a ação de K em X é completamente fiel, logo $k = f$, o que é um absurdo. Portanto, se $k \neq f$, então $\sum\limits_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_k((1_A\delta_x)1_{k^{-1}}) = 0$.

Para $k = f$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_f((1_A\delta_x)1_f) &= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_f\left((1_A\delta_x)\left(\sum_{y\in Y_f=X} 1_A\delta_y\right)\right)\\
&= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_f\left(\sum_{y\in Y_f=X}(1_A\delta_x)(1_A\delta_y)\right)\\
&= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)\gamma_f(1_A\delta_x)\\
&= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)(1_A\delta_{\beta_f(x)})\\
&= \sum_{x\in X}(1_A\delta_x)(1_A\delta_x) = 1_{A\#X}.
\end{aligned}$$

Portanto, a extensão $(A\#X)^K \subseteq A\#X$ é Galois.

Dessa maneira, pelo Teorema 1.3.16, temos o seguinte isomorfismo de anéis

$$(A\#X) *_\gamma K \cong End(A\#X)_{(A\#X)^K} \cong End(A\#X)_{A\#O^K}.$$

■

Corolário 5.2.7. *A aplicação* $\tau' : A\#X \otimes_{(A\#X)^K} A\#X \to (A\#X)*_\gamma K$*, do contexto de Morita* $[(A\#X)*_\gamma, A\#X, A\#X, (A\#X)^K, \tau', \tau]$*, é sobrejetiva.*

Demonstração: Pelo Teorema anterior, a extensão $(A\#X)^K \subseteq A\#X$ é Galois, o que implica pelo Teorema 1.3.16 que a aplicação τ' é sobrejetiva. ■

Referências Bibliográficas

[1] Abadie F., *Enveloping Actions and Takai Duality for Partial Actions*, Journal of Functional Analysis, 197, 2003, 14-67.

[2] Bagio D., Flôres D., Paques A., *Partial Actions of Ordered Groupoids on Rings*, Journal of Algebra and Its Applications, 9, 2010, 501-517.

[3] Bagio D., Paques A., *Partial Groupoid Action: globalization, Morita Theory and Galois Theory*, Comm. Algebra, 40, 2012, 3658-3678.

[4] Brandt H., *Uber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes*, Math. Ann., 96, 1926, 360-366.

[5] Cohen, M.; Montgomery, S., *Group-Graded Rings, Smash Products and Group Actions*, Transactions of the American Mathematical Society, 288(1), 1984, 237-258.

[6] Dascalescu, S.; Nastasescu, C., Oystaeyen F. Van, Torrecillas B., *Duality Theorems for Graded Algebras and Coalgebras*, Journal of Algebra, 192, 1997, 261-276.

[7] Dokuchaev, M.; Exel, R., *Associativity of Crossed Products by Parcial Actions, Enveloping Actions and Parcial Representations*, Transactions of the American Mathematical Society, 357, 2004, 1931-1952.

[8] Dokuchaev, M., Ferreiro M., Paques, A., *Parcial Actions and Galois Theory*, Journal of Pure and Applied Algebra, 208, 2007, 77-87.

[9] Exel, R., *Partial Actions of Groups and Actions of Inverse Semigroups*, Proceedings of the American Mathematical Society, 126, 1998, 3481-3494.

[10] Flôres, D., *Ações de Grupóides sobre Álgebras: Teoremas de Estrutura*, tese de doutorado, UFRGS-PPGMat, Porto Alegre, 2011.

[11] Flôres, D., Paques, A. *Duality for Groupoid (Co)Actions*, to appear in Comm. Algebra, 2013.

[12] Lam T. Y., *Lectures on Modulos and Rings*, Springer, New York, 1999.

[13] Lawson M. V., *Inverse Semigroups*, World Scientific, New Jersey, 1998.

[14] Li F., Liu G. *On Strongly Groupoid Graded Rings and Corresponding Clifford Theorem*, Algebra Colloquium, 13:2, 2006, 181-196.

[15] Lundstrom P., *Separable Groupoid Ring*, Communications in Algebra, 34, 2006, 3029-3041.

[16] Nastasescu C., Oystaeyen F. Van, Borong Z., *Smash Products for G-sets, Clifford Theory and Duality Theorems*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, 5, 1998, 389-398.

[17] Nastasescu C., Raianu S., Oystaeyen F. Van, *Graded Modules over G-Sets*, Math. Z., 203, 1990, 605-627.

[18] Paques, A., *Teorias de Galois*, XXII Escola de Álgebra, notas de minicurso, Salvador-Bahia, 2012.

[19] Passman D. S., *The Algebraic Structure of Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1977.

[20] Tamusiunas, T.R., *Teorias de Galois para Ações de Grupóides*, tese de doutorado, UFRGS-PPGMat, Porto Alegre, 2012.