Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

# ALGUMAS CONGRUÊNCIAS EM CLASSES ESPECIAIS DE PARTIÇÕES DE FROBENIUS GENERALIZADAS

Dissertação de Mestrado

MARÍLIA LUIZA MATTE

Porto Alegre

2014

**Dissertação submetida por Marília Luiza Matte[*] junto ao curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência Matemática.**

**Data: 7 de abril de 2014.**

**Orientador:**
**Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke**

**Banca examinadora:**
**Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS)**
**Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (UNICAMP)**
**Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRGS)**

[*]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

# Agradecimentos

À minha família, minha razão de ser, pelo incentivo e paciência. Em especial, meus pais Carlos e Beatriz e minha irmã Marine.

Ao meu orientador, exemplar como professor e ser humano, sempre prestativo e alentador.

Aos meus colegas e amigos, pelo auxílio e companhia nos estudos e nos momentos de ócio.

Aos membros da banca examinadora, pelas valiosas contribuições para este trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul e à CAPES, pelo apoio técnico e financeiro.

“Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive.”

*Fernando Pessoa*

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos as *partições de Frobenius generalizadas coloridas com k cores*, uma classe de partições de inteiros definida por George Andrews. Mais especificamente, apresentamos uma expressão para a função geradora para esse tipo de partições e, em alguns casos particulares, uma expressão em termos das funções $\varphi$ e $\psi$ de Ramanujan. Nosso objetivo principal é apresentar alguns resultados recentes a respeito de congruências nos coeficientes da função geradora.

# Abstract

In this work, we present the *generalized Frobenius partitions colored with $k$ colors*, a class of integer partitions defined by George Andrews. More specifically, we present an expression for the generating function for this kind of partitions and, in some particular cases, an expression in therms of Ramanujan's $\varphi$ and $\psi$ functions. Our main goal is to present some recent results about congruences in the generating function.

# Sumário

# Introdução

O estudo de propriedades dos números inteiros há muito tem interessado estudiosos de diferentes áreas da Matemática. Leonhard Euler, no século XVIII, tornou-se responsável por grandes resultados conhecidos hoje a respeito de partições de inteiros. No entanto, foi o matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) quem recebeu o mais notável reconhecimento por seus resultados em Teoria de Números, particularmente em Teoria das Partições.

Apesar de seu curto tempo de vida, Ramanujan produziu um grande número de importantes resultados, inicialmente um amontoado de papéis com anotações e enunciados, a maioria sem demonstrações. Com o tempo, embora alguns poucos desses resultados tenham se revelado falsos, a imensa maioria foi comprovada. Após a morte de Ramanujan, seu trabalho foi recolhido e doado por sua esposa à University of Madras, na Índia, e em 1957 organizado nos que ficaram conhecidos como os Cadernos de Ramanujan (*Ramanujan's Notebooks*), resultando do trabalho árduo de muitos matemáticos uma obra em 5 volumes, ainda em andamento e editada por Bruce Berndt.

O quarto caderno, chamado de Caderno Perdido de Ramanujan (*Ramanujan's Lost Notebook*), foi publicado em 1987, após ter sido descoberto na biblioteca da University of Cambridge em 1976, por George Andrews. O caderno consiste em 87 páginas desordenadas de descobertas de Ramanujan, ocorridas durante seu último ano de vida. Andrews e Berndt seguem com o trabalho de edição e o quinto e último volume da obra deve ter sua publicação em breve.

George Andrews, professor da Pennsylvania State University, é atualmente considerado o maior especialista em partições de números inteiros. Seu livro *The Theory of Partitions* [2] é referência tanto para o estudo da Teoria de Partições em si quanto para as tantas outras áreas da Matemática em que essa teoria possui aplicações.

Na dissertação aqui introduzida, focamos nossa atenção em uma classe de partições de inteiros definida por Andrews em sua publicação *Generalized Frobenius Partitions* [1]. Fazendo certas exigências nas partições de Frobenius generalizadas, Andrews definiu o que chamou de Partições-F de $n$ com $k$ cores. No primeiro capítulo desta dissertação, apresentamos as definições básicas e usuais do estudo de partições, bem como os pré-requisitos para o entendimento das demonstrações que estão por vir.

No Capítulo 2, definimos duas classes especiais de partições de inteiros, tomando por referência o trabalho desenvolvido por Andrews: as partições com partes repetidas até $k$ vezes e as partições com partes distintas coloridas com até $k$ cores, onde por *distintas* entende-se *tamanho ou cor diferentes*. Para esta última classe, apresentamos também sua função geradora, denotada por $C\Phi_k(q)$, empregando um importante resultado apresentado no capítulo anterior: a fórmula do Produto Triplo de Jacobi.

O Capítulo 3 é o que concentra a parte mais densa deste trabalho. Nele são demonstrados resultados, obtidos por Baruah e Sarmah [4], que relacionam a função $C\Phi_k(q)$ às importantes funções $\varphi$ e $\psi$ de Ramanujan, particularmente para $k = 4$ e $k = 5$. Em seu artigo, os autores apresentam uma demonstração apenas para o caso de $k = 4$, deixando o outro a cargo do leitor. Surpreendentemente, ao tentarmos reproduzir a mesma demonstração para o caso de $k = 5$, o método revelou-se bastante extenso, embora eficaz.

Por fim, no quarto capítulo estão colocados teoremas recentemente publicados a respeito de regularidades no comportamento dos coeficientes da função $C\Phi_k(q)$. Na primeira seção desse capítulo estão dois resultados válidos para $k = 4$ especificamente, o primeiro devido a James Sellers [9] e o segundo mais uma vez a Baruah e Sarmah. Na segunda seção, um resultado ainda mais atual abrange um conjunto muito maior de valores de $k$. Exigindo determinada congruência módulo um primo $p$ qualquer, Garvan e Sellers [8] obtiveram congruências nos coeficientes de $C\Phi_t(q)$, quando $t \equiv k \pmod{p}$.

Todos os resultados apresentados nesse último capítulo são bastante recentes (2013, 2011 e 2014, respectivamente), o que nos leva a acreditar que outras regularidades ainda podem ser encontradas, para uma quantidade maior de valores de $k$ e com hipóteses menos restritivas.

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 Notações

**Definição 1.1.1.** *Dado $n$ um número inteiro positivo, chamamos de* partição *de $n$ uma decomposição de $n$ como soma de inteiros positivos. Ou seja, uma escrita de $n$ na forma $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$, com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}_+^*$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1$ . Cada um dos $\lambda_i$'s, para $i = 1, 2, \ldots, k$, é chamado de* parte *da partição.*

Vamos denotar por $p(n)$ a *função partição*, isto é, o número de partições do inteiro $n$.

**Exemplo 1.1.2.** As partições de 4 são 4; 3+1; 2+2; 2+1+1 e 1+1+1+1. Portanto, $p(4) = 5$.

Alguns resultados interessantes a respeito de partições são devidos a Euler. Por exemplo, a chamada *Identidade de Euler*, que afirma que o número de partições de $n$ em partes ímpares é igual ao número de partições de $n$ em partes distintas. Essa identidade pode ser expressa da seguinte forma:

$$p(n|\text{partes ímpares}) = p(n|\text{partes distintas}).$$

**Exemplo 1.1.3.** As partições de 6 são 6; 5+1; 4+2; 4+1+1; 3+3; 3+2+1; 3+1+1+1; 2+2+2; 2+2+1+1; 2+1+1+1+1 e 1+1+1+1+1+1. As que possuem apenas partes ímpares são 5+1; 3+3; 3+1+1+1 e 1+1+1+1+1+1, ou seja,

$$p(6|\text{partes ímpares}) = 4.$$

As partições que possuem apenas partes distintas são 6; 5+1; 4+2 e 3+2+1. Portanto, também temos

$$p(6|\text{partes distintas}) = 4.$$

Mais geralmente, vamos expressar por $p(n|A)$ o número de partições de $n$ tais que as partes estão sujeitas à condição $A$.

Outros importantes resultados são as chamadas Identidades de Rogers-Ramanujan, sendo a primeira a que afirma o seguinte:

$$p(n|\text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4 \pmod 5) = p(n|\text{partes que diferem por duas unidades ou mais}).$$

**Exemplo 1.1.4.** Consideremos novamente $n = 6$. Dentre as partições listadas no exemplo anterior, aquelas em que as partes são congruentes a 1 ou a 4 $\pmod 5$ são 6; 4+1+1 e 1+1+1+1+1+1. Então,

$$p(6|\text{partes} \equiv 1 \text{ ou } 4 \pmod 5) = 3.$$

Já as partições em partes que diferem por duas unidades ou mais são 6; 5+1 e 4+2. Neste caso, temos também

$$p(6|\text{partes que diferem por duas unidades ou mais}) = 3.$$

Além destas duas identidades apresentadas, muitas outras podem ser encontradas no livro *Integer Partitions* [3], de George Andrews e Kimmo Eriksson. As demonstrações apresentadas nesse livro utilizam artifícios diferentes daqueles utilizados originalmente por Euler. O tratamento dado por ele ao estudo de partições envolveu o que chamamos de *Funções Geradoras*.

A ideia central reside no princípio algébrico de produto de potências de mesma base:

$$q^a \cdot q^b = q^{a+b}.$$

Supondo que queremos exibir as possíveis partições de inteiros com uma parte par $< 5$ e uma parte ímpar $< 7$, então efetuamos o seguinte produto:

$$\begin{aligned}
(q^2 + q^4)(q^1 + q^3 + q^5) &= q^2 \cdot q^1 + q^2 \cdot q^3 + q^2 \cdot q^5 + q^4 \cdot q^1 + q^4 \cdot q^3 + q^4 \cdot q^5 \\
&= q^{2+1} + q^{2+3} + q^{2+5} + q^{4+1} + q^{4+3} + q^{4+5} \qquad (1.1)\\
&= q^3 + q^5 + q^7 + q^5 + q^7 + q^9 \\
&= q^3 + 2q^5 + 2q^7 + q^9, \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

já que 2 e 4 são os pares menores do que 5 e 1, 3 e 5 são os ímpares menores do que 7.

A expressão (1.1) exibe, nos expoentes, todas as partições com uma parte par $< 5$ e uma parte ímpar $< 7$. Já na expressão (1.2), os coeficientes informam-nos a quantidade de partições possíveis dos expoentes das potências de $q$ correspondentes, e que satisfazem as condições exigidas. Ou seja, os coeficientes fornecem-nos

$$p(n|\text{uma parte par} < 5 \text{ e uma parte ímpar} < 7).$$

De maneira mais geral, suponhamos $A_r = \{n_1, n_2, \cdots, n_r\}$ um conjunto de $r$ inteiros positivos. Por simplicidade, digamos que $r = 3$. Nesse caso, o produto

$$\begin{aligned}
(1 + q^{n_1})(1 + q^{n_2})(1 + q^{n_3}) &= 1 + q^{n_1} + q^{n_2} + q^{n_3} \\
&\quad + q^{n_1+n_2} + q^{n_1+n_3} + q^{n_2+n_3} + q^{n_1+n_2+n_3} \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

exibe nos expoentes todas as possíveis partições com elementos distintos de $A_3$ . Após juntarmos os termos de mesmo expoente do polinômio (1.3), o novo polinômio será chamado de *função geradora para partições com partes distintas em* $A_3$. Então, teremos

$$\sum_{n\geq 0} p(n|\text{partes distintas em } A_3)q^n = \prod_{i=1}^{3}(1+q^{n_i}).$$

E no caso geral,

$$\sum_{n\geq 0} p(n|\text{partes distintas em } A_r)q^n = \prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}) = \prod_{n\in A_r}(1+q^n). \tag{1.4}$$

Ainda com $r = 3$, se quisermos permitir até 4 repetições das partes de $A_3$, devemos efetuar o seguinte produto:

$$\prod_{i=1}^{3}(1+q^{n_i}+q^{n_i+n_i}+q^{n_i+n_i+n_i}+q^{n_i+n_i+n_i+n_i})$$

e teremos, então,

$$\sum_{n\geq 0} p(n|\text{partes em } A_3\text{, repetidas até 4 vezes})q^n = \prod_{i=1}^{3}(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+q^{3n_i}+q^{4n_i}).$$

Para o caso geral,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} p(n|\text{partes em } A_r\text{, repetidas até } d \text{ vezes})q^n &= \prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+\cdots+q^{dn_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{r}\frac{(1-q^{(d+1)n_i})}{(1-q^{n_i})} \\
&= \prod_{n\in A_r}\frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^n}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Podemos ainda permitir que o número de partes repetidas seja arbitrário, isto é, podemos fazer $d \to \infty$. Para que possamos manter o mesmo argumento utilizado no caso finito, vamos exigir $|q| < 1$ para garantir a convergência da soma, o que é de fato possível, uma vez que $q$ é apenas um acessório marcador de posição. Assim, para $|q| < 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} p(n|\text{partes em } A_r)q^n &= \prod_{i=1}^{r}(1+q^{n_i}+q^{2n_i}+q^{3n_i}+\cdots) \\
&= \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-q^{n_i}} = \prod_{n\in A_r}\frac{1}{1-q^n}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Como não é feita referência alguma à finitude de $A_r$, é possível estender a fórmula (1.6) para um conjunto qualquer de inteiros positivos, e em particular para o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Assim, a função geradora para o número de partições de um inteiro positivo qualquer (ou não-negativo, uma vez que convencionamos $p(0) = 1$) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}. \tag{1.7}$$

Podemos estar interessados não apenas em qual número $n$ está sendo particionado, mas também na quantidade de partes envolvidas nessa partição. Voltemos, então, à equação (1.3). Além da variável $q$, vamos acrescentar uma segunda variável, digamos $z$, que fará o papel de contador do número de partes envolvidas na partição. Assim:

$$\begin{aligned}(1+zq^{n_1})(1+zq^{n_2})(1+zq^{n_3}) &= 1 + zq^{n_1} + zq^{n_2} + zq^{n_3} \\ &\quad + z^2q^{n_1+n_2} + z^2q^{n_1+n_3} + z^2q^{n_2+n_3} \\ &\quad + z^3q^{n_1+n_2+n_3}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos construir as versões a duas variáveis das equações (1.4) e (1.6), podendo ainda substituir $A_r$ por $\mathbb{N}$:

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p(n|m \text{ partes distintas em } A_r) z^m q^n = \prod_{n\in A_r} (1+zq^n) \tag{1.9}$$

e

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p(n|m \text{ partes em } A_r) z^m q^n = \prod_{n\in A_r} \frac{1}{1-zq^n}.$$

Para evitar uma escrita muito carregada, a partir de agora vamos utilizar uma notação um pouco mais simples para produtos como o escrito acima:

**Definição 1.1.5.** *Sejam $a, q \neq 0$. Definimos*

$$(a;q)_n = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) \tag{1.10}$$

*e*

$$(a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(a;q)_n = \prod_{n\geq 0}(1-aq^n), \qquad |q|<1. \tag{1.11}$$

**Exemplo 1.1.6.** Uma expressão do tipo acima que aparecerá com certa frequência no decorrer deste texto é $(q;q)_\infty = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\ldots$. Podemos separar esse produto como $\big((1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots\big)\cdot\big((1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots\big)$ e obter uma nova representação para ela: $(q;q)_\infty = (q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty$.

**Exemplo 1.1.7.** De forma análoga, $(q^2;q^2)_\infty = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots = \big((1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})\ldots\big)\cdot\big((1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots\big)$, e assim, $(q^2;q^2)_\infty = (q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty$.

Obter resultados sobre partições pode tornar-se mais simples utilizando uma representação gráfica chamada de *gráfico de Ferrers.*

**Definição 1.1.8.** *Dada uma partição de um inteiro $n$ da forma $n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$, o gráfico de Ferrers da partição considerada é um conjunto de $n$ pontos dispostos em $k$ linhas, de modo que a $i$-ésima linha possui $\lambda_i$ pontos, com $i=1,2,\ldots,k$.*

**Exemplo 1.1.9.** Para $n=13$, o gráfico de Ferrers da partição $5+4+2+1+1$ é

$$\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

**Definição 1.1.10.** *Dada uma partição $P$ de um inteiro $n$, denotamos por $\overline{P}$ a partição conjugada a $P$. Ela é obtida a partir do gráfico de Ferrers de $P$, tornando as linhas de $P$ colunas de $\overline{P}$ e vice-versa.*

**Exemplo 1.1.11.** Para $n = 13$, considerando o gráfico de Ferrers da partição $P = 5 + 4 + 2 + 1 + 1$ e trocando linhas por colunas, obtemos

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & & & & \end{array}$$

Portanto, $\overline{P}$ é a partição $5 + 3 + 2 + 2 + 1$.

Observemos que é possível identificar uma pequena diagonal no gráfico de Ferrers da partição, formada pelo primeiro ponto da primeira linha e o segundo ponto da segunda linha, identificada com $\star$ na figura a seguir:

$$\begin{array}{lllll} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \star & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & & & & \\ \bullet & & & & \end{array}$$

Atentando para a observação acima, é a partir do gráfico de Ferrers de uma partição que obtemos uma outra representação dessa partição, chamada de *Símbolo de Frobenius*, e que será útil para o que segue neste trabalho.

Dentre outros motivos, Frobenius criou esta nova representação para que fosse possível, a partir de uma partição $P$ dada, visualizar imediatamente sua conjugada $\overline{P}$.

**Definição 1.1.12.** *Dada uma partição de um inteiro $n$ da forma $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$, o Símbolo de Frobenius da partição considerada é uma matriz de duas linhas e $D$ colunas, onde $D$ é o tamanho da diagonal que pode ser visualizada no* *gráfico de Ferrers da partição. As entradas da primeira linha são a quantidade de pontos restantes em cada uma das linhas à direita da diagonal, e as entradas da segunda linha são a quantidade de pontos restantes em cada uma das colunas abaixo da diagonal.*

**Exemplo 1.1.13.** Considerando novamente a partição $13 = 5+4+2+1+1$, temos $D = 2$ e, portanto, o símbolo de Frobenius da partição é a matriz de duas colunas a seguir:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir de um símbolo de Frobenius podemos recuperar o número $n$ que foi particionado. Basta, para isto, somar os valores das entradas da matriz do símbolo e sua quantidade $D$ de colunas. Assim, para o caso deste exemplo, temos

$$n = 4 + 2 + 4 + 1 + 2 = 13.$$

De modo geral, podemos dizer que uma matriz de duas linhas e $r$ colunas da forma

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

com $a_1 > a_2 > \cdots > a_r \geq 0$ e $b_1 > b_2 > \cdots > b_r \geq 0$, é o símbolo de Frobenius de uma partição de $n$ se

$$n = r + \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=1}^{r} b_i.$$

**Observação 1.1.14.** *A construção do símbolo de Frobenius a partir do gráfico de Ferrers evidencia a existência de uma bijeção entre as partições irrestritas, escritas* *como soma de partes e enumeradas por $p(n)$, e as partições escritas na forma de símbolo de Frobenius. Este fato nos será útil para a demonstração de um importante resultado, o Produto Triplo de Jacobi.*

Com algumas exigências a mais na construção de $P$, obtemos uma nova definição:

**Definição 1.1.15.** *Uma matriz de duas linhas e $r$ colunas da forma*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

*tal que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_r \geq 0$ e ainda*

$$n = r + \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=1}^{r} b_i$$

*é chamada de* partição de Frobenius generalizada *de $n$. Por simplicidade, chamaremos uma partição de Frobenius generalizada apenas de* partição-F.

## 1.2 Resultados necessários

**Teorema 1.2.1. (Produto Triplo de Jacobi)** *Para $z \neq 0$ e $|q| < 1$,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})(1-q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

*Prova:* Equivalentemente, podemos mostrar que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Então, seja $\delta(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})$. Logo,

$$\begin{aligned}
\delta(zq) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n+1})(1+z^{-1}q^{n-2}) \\
&= (1+z^{-1}q^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n+1})(1+z^{-1}q^{n-1}) \\
&= \Big(1+\frac{1}{zq}\Big)\Big(\frac{1}{1+zq}\Big)\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n})(1+z^{-1}q^{n-1}) \\
&= \Big(\frac{zq+1}{zq}\Big)\Big(\frac{1}{1+zq}\Big)\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{n})(1+z^{-1}q^{n-1}) \\
&= \frac{1}{zq}\delta(z). \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Agora, expandindo $\delta(z)$ próximo de zero na forma de Série de Laurent $\delta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(q)z^n$ e utilizando o resultado (1.13), temos que

$$\begin{aligned}
\delta(z) = zq\delta(zq) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(q)z^n = zq\sum_{-\infty}^{\infty} A_n(q)z^nq^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(q)z^{n+1}q^{n+1} \\
&\Rightarrow \quad A_n(q) = A_{n-1}(q)q^n, \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$A_{n-1}(q) = A_n(q)q^{-n}, \qquad (1.15)$$

o que nos será útil para $n < 0$.

Usando a igualdade (1.14) se $n > 0$, por indução obtemos

$$\begin{aligned}
A_n(q) &= A_0(q)q\cdot q^2\cdots q^n \\
&= A_0(q)q^{\frac{(1+n)n}{2}} \\
&= A_0(q)q^{\frac{n^2+n}{2}}.
\end{aligned}$$

Se $n < 0$, então $-n > 0$, e o mesmo argumento por indução é válido se considerarmos a igualdade (1.15).

$$\begin{aligned}
A_{n-1}(q) &= A_n(q)q^{-n} \\
&= A_{n+1}(q)q^{-n-1}q^{-n} \\
&= \cdots \\
&= A_0(q)q \cdot q^2 \cdots q^{-n-1}q^{-n} \\
&= A_0(q)q^{\frac{(1-n)\cdot(-n)}{2}} \\
&= A_0(q)q^{\frac{n^2-n}{2}}.
\end{aligned}$$

Substituindo $A_{n-1}(q)$ por $A_n(q)q^{-n}$ e multiplicando ambos os lados da igualdade por $q^n$, ficamos com

$$\begin{aligned}
A_n(q) &= A_0(q)q^{\frac{n^2-n}{2}}q^n = A_0(q)q^{\frac{n^2-n+2n}{2}} \\
\Longrightarrow A_n(q) &= A_0(q)q^{\frac{n^2+n}{2}},
\end{aligned}$$

e assim,

$$\delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_0(q)z^n q^{\frac{n^2+n}{2}} = A_0(q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n^2+n}{2}} .$$

Resta mostrarmos que $A_0(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$. Mas, notemos que já é conhecido o fato que $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n$, a função geradora para o número de partições de $n$. Então, se conseguirmos mostrar que $A_0(q) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n$, o teorema estará demonstrado.

$A_0(q)$ é o termo constante de $\delta(z)$, isto é, o coeficiente de $z^0$ na expressão $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + zq^n)(1 + z^{-1}q^{n-1})$. Cada termo da forma $q^N z^0$ aparece tantas vezes quantas for possível encontrarmos pares de termos $q^{a_1+a_2+\cdots a_m}z^m$ vindo do produto de fatores $(1 + zq^n)$, com $a_1 > a_2 > \cdots > a_m \geq 1$, e $q^{b_1+b_2+\cdots b_m}z^{-m}$ vindo do produto de fatores $(1 + z^{-1}q^{n-1})$, com $b_1 > b_2 > \cdots > b_m \geq 0$, de forma que $a_1 + a_2 + \cdots a_m + b_1 + b_2 + \cdots b_m = N$.

Em outras palavras, cada contribuição para $q^N z^0$ pode ser associada a um símbolo de Frobenius de $N$ da forma

$$\begin{pmatrix} (a_1-1) & (a_2-1) & \cdots & (a_m-1) \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

onde $N = m + \sum_{i=1}^{m}(a_i-1) + \sum_{i=1}^{m} b_i$.

Como existe uma bijeção entre os símbolos de Frobenius da forma descrita acima e as partições usualmente enumeradas por $p(n)$, então $A_0(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$ e, portanto, a afirmação do teorema é válida.

$\square$

Além da fórmula do Produto Triplo de Jacobi, utilizaremos as chamadas funções theta de Ramanujan, uma importante classe de funções no estudo de partições.

**Definição 1.2.2.** *A função theta de Ramanujan é definida por*

$$f(a,b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}, \qquad |ab| < 1. \tag{1.17}$$

**Exemplo 1.2.3.** Se fizermos $a = zq$ e $b = z^{-1}$, teremos a série dada pela fórmula do Produto Triplo de Jacobi.

$$\begin{aligned} f(zq, z^{-1}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (zq)^{\frac{n(n+1)}{2}} (z^{-1})^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{\frac{n^2+n-n^2+n}{2}} q^{\frac{n^2+n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n^2+n}{2}}. \end{aligned}$$

**Observação 1.2.4.** *A série que define a função theta é absolutamente convergente (para verificar este fato, basta aplicar o Teste da Razão), o que nos permite mudar a ordem dos termos da soma* (1.17). *Então, avaliando os termos em* $n = 0, 1, -1, 2, -2$ *e assim por diante, podemos escrever*

$$\begin{aligned} f(a,b) &= 1 + (a+b) + (a^3b + ab^3) + (a^6b^3 + a^3b^6) + \cdots \\ &\quad + (a^{\frac{m(m+1)}{2}} b^{\frac{m(m-1)}{2}} + a^{\frac{m(m-1)}{2}} b^{\frac{m(m+1)}{2}}) + \cdots \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (a^{\frac{m(m+1)}{2}} b^{\frac{m(m-1)}{2}} + a^{\frac{m(m-1)}{2}} b^{\frac{m(m+1)}{2}}). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Em particular, duas funções theta têm especial importância para este trabalho. São as chamadas funções $\varphi$ *(phi)* e $\psi$ *(psi)* de Ramanujan, definidas por

$$\varphi(q) = f(q,q), \tag{1.19}$$

$$\psi(q) = f(q,q^3). \tag{1.20}$$

A seguir provamos uma outra forma de expressar essas funções.

**Proposição 1.2.5.** *As funções* $\varphi$ *e* $\psi$ *podem ser expressas por*

$$\textit{(i)} \quad \varphi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}; \tag{1.21}$$

$$\textit{(ii)} \quad \psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}. \tag{1.22}$$

*Prova:* *(i)* A primeira identidade segue diretamente da Definição 1.2.2. Substituímos $a$ e $b$ por $q$, obtendo

$$\begin{aligned}
\varphi(q) &= f(q,q) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2+n+n^2-n}{2}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}.
\end{aligned}$$

*(ii)* Para provar este item, utilizamos a expressão (1.18) da observação acima.

$$\begin{aligned}
\psi(q) &= f(q,q^3) \\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}(q^{\frac{m(m+1)}{2}} q^{\frac{3m(m-1)}{2}} + q^{\frac{m(m-1)}{2}} q^{\frac{3m(m+1)}{2}}) \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(q^{\frac{2m(2m-1)}{2}} + q^{\frac{2m(2m+1)}{2}}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}.
\end{aligned}$$

□

É possível obter várias identidades com as funções $\varphi$ e $\psi$ e algumas delas seguem nas proposições abaixo.

**Proposição 1.2.6. (Funções $\varphi$ e $\psi$ de Ramanujan)** *As funções $\varphi$ e $\psi$ de Ramanujan, definidas por (1.21) e (1.22), satisfazem*

$$(i) \quad \varphi(q) = \frac{(q^2;q^2)_\infty^5}{(q;q)_\infty^2 (q^4;q^4)_\infty^2}; \tag{1.23}$$

$$(ii) \quad \psi(q) = \frac{(q^2;q^2)_\infty^2}{(q;q)_\infty}. \tag{1.24}$$

*Prova:* *(i)* Vamos utilizar a definição de $\varphi(q)$ dada em (1.21) e reescrevê-la de modo a podermos utilizar a fórmula do Produto Triplo de Jacobi (Teorema 1.2.1):

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2\frac{n^2+n}{2}} q^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{-1})^n (q^2)^{\frac{n^2+n}{2}}.\end{aligned}$$

Pelo Produto Triplo de Jacobi (Teorema 1.2.1), substituindo $z$ por $q^{-1}$ e $q$ por $q^2$, a expressão acima torna-se

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{-1}q^{2n})(1+q\ q^{2n-2})(1-q^{2n}) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n}) \\ &= (-q;q^2)^2_\infty (q^2;q^2)_\infty \qquad (1.25) \\ &= \frac{(-q;q^2)^2_\infty (q^2;q^2)^5_\infty}{(q^2;q^2)^4_\infty} \\ &= \frac{(-q;q^2)^2_\infty (q^2;q^2)^5_\infty}{(q^2;q^4)^4_\infty (q^4;q^4)^4_\infty} \\ &= \frac{(q^2;q^2)^5_\infty}{(q;q^2)^2_\infty (q^2;q^4)^2_\infty (q^4;q^4)^4_\infty} \\ &= \frac{(q^2;q^2)^5_\infty}{(q;q^2)^2_\infty (q^2;q^2)^2_\infty (q^4;q^4)^2_\infty} \\ &= \frac{(q^2;q^2)^5_\infty}{(q;q)^2_\infty (q^4;q^4)^2_\infty}\end{aligned}$$

e, portanto, $\varphi(q) = \dfrac{(q^2;q^2)^5_\infty}{(q;q)^2_\infty (q^4;q^4)^2_\infty}$.

*(ii)* Conforme a equação (1.22), $\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}$. Observemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\frac{n^2+n}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}$$

e, além disso,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\frac{n^2+n}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Portanto,

$$\psi(q) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}. \tag{1.26}$$

Vamos então trabalhar com a expressão (1.26) e, mais uma vez, utilizar o Produto Triplo de Jacobi (1.2.1), com $z = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1^n q^{\frac{n^2+n}{2}} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)(1+q^{n-1})(1-q^n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n-1})(1-q^{2n}) \ . \end{aligned} \tag{1.27}$$

Separando o termo $(1+q^{n-1})$ com $n = 1$, (1.27) torna-se

$$\begin{aligned} (1+q^{1-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)(1-q^{2n}) &= 2(-q;q)_\infty (q^2;q^2)_\infty \\ &= 2\frac{(-q;q)_\infty (q;q)_\infty (q^2;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty} \\ &= 2\frac{(q^2;q^2)^2_\infty}{(q;q)_\infty}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Por (1.26), $\psi(q) = \dfrac{(q^2;q^2)^2_\infty}{(q;q)_\infty}$.

□

**Proposição 1.2.7.** *A função $\psi$ pode ser expressa por*

$$\psi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2+n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n}.$$

*Prova:* Notemos que a expressão (1.22) para a função $\psi$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{2n(2n+1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{2n(2n-1)}{2}} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(2n+1)} + \sum_{n=-\infty}^{0} q^{n(2n+1)} - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(2n+1)} + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n(2n+1)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(2n+1)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2+n}.
\end{aligned}$$

A segunda igualdade do enunciado da proposição pode ser obtida apenas observando que, como o somatório percorre os inteiros de $-\infty$ a $\infty$, podemos substituir $n$ por $-n$ e então $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(2n+1)}$ torna-se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{-n(2(-n)+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n}$.

□

**Proposição 1.2.8. ([6], p. 40, Entry 25)** *As funções* $\varphi$ *e* $\psi$ *relacionam-se segundo as identidades a seguir:*

$$\begin{aligned}
&\textit{(i)} \quad \varphi^2(q) - \varphi^2(-q) = 8q\psi^2(q^4) \\
&\textit{(ii)} \quad \varphi^2(q) + \varphi^2(-q) = 2\varphi^2(q^2) \\
&\textit{(iii)} \quad \varphi^4(q) - \varphi^4(-q) = 16q\psi^4(q^2)
\end{aligned}$$

*Prova:* Antes de iniciarmos a demonstração de cada um dos itens, façamos a seguinte observação:

**Obs.:** É válida a seguinte igualdade: $\varphi(q)\psi(q^2) = \psi^2(q)$. De fato, conforme a

Proposição 1.2.6,

$$\begin{aligned}
\varphi(q)\psi(q^2) &= \frac{(q^2;q^2)_\infty^5}{(q;q)_\infty^2(q^4;q^4)_\infty^2}\cdot\frac{(q^4;q^4)_\infty^2}{(q^2;q^2)_\infty} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^2} \\
&= \psi^2(q).
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o que acabamos de mostrar, podemos seguir com a demonstração da proposição.

$$\begin{aligned}
\textit{(i)}\ \varphi^2(q)-\varphi^2(-q) &= \big(\varphi(q)+\varphi(-q)\big)\big(\varphi(q)-\varphi(-q)\big) \\
&= \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-q)^{n^2}\Big)\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-q)^{n^2}\Big) \\
&= \Big(2+2\sum_{n=1}^{\infty}\big(q^{n^2}+(-q)^{n^2}\big)\Big)\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(q^{n^2}-(-q)^{n^2}\big) \\
&= \Big(2+4\sum_{n=1}^{\infty}q^{(2n)^2}\Big)\cdot 4\sum_{n=1}^{\infty}q^{(2n-1)^2} \\
&= 2\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{4n^2}\Big)\cdot 4q\sum_{n=1}^{\infty}q^{4n^2-4n} \\
&= 2\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{4n^2}\Big)\cdot 4q\sum_{n=1}^{\infty}q^{8\frac{n^2-n}{2}} \\
&= 8q\varphi(q^4)\psi(q^8) \\
&= 8q\psi^2(q^4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{(ii)}\ \varphi^2(q)+\varphi^2(-q) &= \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\Big)^2+\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-q)^{n^2}\Big)^2 \\
&= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q^{n^2+m^2}+\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-q)^{n^2+m^2} \\
&= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} q^{n^2+m^2}+\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+m}q^{n^2+m^2} \\
&= 2\sum_{\substack{n,m=-\infty \\ n+m\ par}}^{\infty} q^{n^2+m^2}.
\end{aligned}$$

Notemos que, se $n+m$ é par, então $n-m$ também o é. Ou seja, $n+m=2k$ e $n-m=2j$. Dessa forma, como $(n+m)^2+(n-m)^2=2n^2+2m^2$, temos $2n^2+2m^2=4k^2+4j^2$ e assim, $n^2+m^2=2k^2+2j^2$. Então,

$$\begin{aligned}
2\sum_{\substack{n,m=-\infty \\ n+m\ par}}^{\infty} q^{n^2+m^2} &= 2\sum_{k,j=-\infty}^{\infty} q^{2k^2+2j^2} \\
&= 2\sum_{k,j=-\infty}^{\infty} (q^2)^{k^2+j^2} \\
&= 2\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (q^2)^{k^2}\Big)^2 \\
&= 2\varphi^2(q^2).
\end{aligned}$$

*(iii)* Para a demonstração deste item, basta utilizar os itens e a observação anteriores:

$$\begin{aligned}
\varphi^4(q)-\varphi^4(-q) &= \big(\varphi^2(q)-\varphi^2(-q)\big)\big(\varphi^2(q)+\varphi^2(-q)\big) \\
&= 8q\psi^2(q^4)\cdot 2\varphi^2(q^2) \\
&= 16q\varphi^2(q^2)\psi^2(q^4) \\
&= 16q\psi^4(q^2).
\end{aligned}$$

$\square$

Da proposição acima, segue um corolário cujo resultado será útil nas demonstrações dos teoremas do último capítulo deste trabalho, que tratam de congruências de coeficientes de certas funções geradoras.

**Corolário 1.2.9.**

$$\begin{aligned}
&\textit{(i)} \quad (-q;q^2)_\infty^4 - (q;q^2)_\infty^4 = \frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\\
&\textit{(ii)} \quad (-q;q^2)_\infty^4 + (q;q^2)_\infty^4 = \frac{2\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\\
&\textit{(iii)} \quad (-q;q^2)_\infty^8 - (q;q^2)_\infty^8 = \frac{16q\psi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4}
\end{aligned}$$

*Prova:* Observando a demonstração da Proposição 1.2.6, segue da aplicação da fórmula do Produto Triplo de Jacobi que $\varphi(q) = (-q;q^2)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty$ (igualdade (1.25)). Com isso podemos provar as três afirmações do corolário.

$$\begin{aligned}
\textit{(i)}\ 8q\psi^2(q^4) &= \varphi^2(q) - \varphi^2(-q)\\
&= (-q;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^2 - (q;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^2\\
&= \{(-q;q^2)_\infty^4 - (q;q^2)_\infty^4\}(q^2;q^2)_\infty^2\\
\Longrightarrow \frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2} &= (-q;q^2)_\infty^4 - (q;q^2)_\infty^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{(ii)}\ 2\varphi^2(q^2) &= \varphi^2(q) + \varphi^2(-q)\\
&= (-q;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^2 + (q;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^2\\
&= \{(-q;q^2)_\infty^4 + (q;q^2)_\infty^4\}(q^2;q^2)_\infty^2\\
\Longrightarrow \frac{2\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2} &= (-q;q^2)_\infty^4 + (q;q^2)_\infty^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{(iii)}\ 16q\psi^4(q^2) &= \varphi^4(q) - \varphi^4(-q) \\
&= \{\varphi^2(q) + \varphi^2(-q)\}\{\varphi^2(q) - \varphi^2(-q)\} \\
&= \{(-q;q^2)^4_\infty + (q;q^2)^4_\infty\}(q^2;q^2)^2_\infty\{(-q;q^2)^4_\infty - (q;q^2)^4_\infty\}(q^2;q^2)^2_\infty \\
&= \{(-q;q^2)^8_\infty - (q;q^2)^8_\infty\}(q^2;q^2)^4_\infty \\
\Longrightarrow \frac{16q\psi^4(q^2)}{(q^2;q^2)^4_\infty} &= (-q;q^2)^8_\infty - (q;q^2)^8_\infty.
\end{aligned}$$

□

Voltando às funções theta, podemos expressá-las de uma maneira diferente e que nos permitirá provar as duas últimas proposições deste capítulo.

**Proposição 1.2.10.** *A função theta de Ramanujan admite a formulação*

$$f(a,b) = (-a;ab)_\infty(-b;ab)_\infty(ab;ab)_\infty.$$

*Prova:* Consideremos a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}$. Reescrevendo-a de modo a podermos utilizar a fórmula do Produto Triplo de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n (q^2)^{\frac{n^2+n}{2}} q^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (zq^{-1})^n (q^2)^{\frac{n^2+n}{2}} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{-1}q^{2n})(1+z^{-1}q\cdot q^{2n-2})(1-q^{2n}) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{2n-1})(1+z^{-1}q^{2n-1})(1-q^{2n}) \\
&= (-zq;q^2)_\infty(-z^{-1}q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Fazendo $a = zq$ e $b = z^{-1}q$, a igualdade (1.29) torna-se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = (-a;ab)_\infty(-b;ab)_\infty(ab;ab)_\infty,$$

e conforme a expressão (1.17),

$$\begin{aligned} f(a,b) &= f(zq, z^{-1}q) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (zq)^{\frac{n(n+1)}{2}} (z^{-1}q)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{\frac{n^2+n-n^2+n}{2}} q^{\frac{n^2+n+n^2-n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(a,b) = (-a;ab)_\infty(-b;ab)_\infty(ab;ab)_\infty. \tag{1.30}$$

□

Agora, utilizando a Definição 1.2.2 e a Proposição 1.2.10, vamos demonstrar um resultado bastante importante, conhecido como *Teorema Pentagonal de Euler*. Atualmente, em geral, os livros demonstram esse resultado através da bijeção de Franklin, como é o caso das provas apresentadas por Andrews em [2] e [3]. A prova que faremos aqui baseia-se naquela de Bruce Berndt, em sua obra *Number Theory in the Spirit of Ramanujan* [5], que segue uma abordagem mais na linha do que fazemos neste trabalho.

**Proposição 1.2.11. ([5], p. 12, Corollary 1.3.5)**

$$(q;q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}.$$

*Prova:* Primeiramente, na expressão (1.17) façamos $a = -q$ e $b = -q^2$. Então,

$$\begin{aligned} f(-q,-q^2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-q)^{\frac{n(n+1)}{2}} (-q^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n+n^2-n}{2}} q^{\frac{n^2+n+2n^2-2n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n^2} q^{\frac{3n^2-n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} q^{\frac{n(3n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, da Proposição 1.2.10 segue que

$$f(-q,-q^2) = (q;q^3)_\infty (q^2;q^3)_\infty (q^3;q^3)_\infty = (q;q)_\infty.$$

Desse modo, temos

$$(q;q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}.$$

□

Como último pré-requisito para o entendimento do que está por vir, segue um resultado devido a Jacobi. A prova aqui apresentada mais uma vez utiliza como referência a obra de Berndt [5], porém a versão de Andrews para essa prova pode ser encontrada em [2].

**Proposição 1.2.12. ([5], p. 14, Theorem 1.3.9)**

$$(q;q)_\infty^3 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) q^{\frac{1}{2}k(k+1)}.$$

*Prova:* Consideremos a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n} q^{n^2+n}$, isto é, escrevamos $z^2q$ no lugar de $z$ na série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2}$ e, conforme (1.29),

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n} q^{n^2+n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z^2 q)^n q^{n^2} \\ &= (-z^2q^2;q^2)_\infty (-z^{-2};q^2)_\infty (q^2;q^2)_\infty. \qquad (1.31) \end{aligned}$$

Dividindo (1.31) por $1+\frac{1}{z^2}$ e observando que $1+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z}\big(z+\frac{1}{z}\big)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n}q^{n^2+n}}{1+\frac{1}{z^2}} &= \frac{(-z^2q^2;q^2)_\infty(-z^{-2};q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty}{1+\frac{1}{z^2}} \\
\Longrightarrow \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n+1}q^{n^2+n}}{z+\frac{1}{z}} &= (-z^2q^2;q^2)_\infty(-z^{-2}q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty,
\end{aligned}$$

onde o fator $(-z^{-2}q^2;q^2)_\infty$ deve-se ao quociente $\dfrac{(-z^{-2};q^2)_\infty}{1+\frac{1}{z^2}}$, já que $(-z^{-2};q^2)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{-2}(q^2)^n)$.

Agora, fazendo $z\to i$, obtemos

$$\lim_{z\to i}(-z^2q^2;q^2)_\infty(-z^{-2}q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty = (q^2;q^2)_\infty^3. \tag{1.32}$$

Por outro lado, observemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n q^{n^2+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n},$$

e, substituindo $n$ por $-n-1$ no primeiro somatório,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{-n-1}q^{(-n-1)^2+(-n-1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{-n}q^{n^2+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, ao fazermos

$$\lim_{z\to i}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n+1}q^{n^2+n}}{z+\frac{1}{z}},$$

obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Nesse caso, utilizamos a regra de L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to i}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{2n+1}q^{n^2+n}}{z+\frac{1}{z}} &= \lim_{z\to i}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2n+1)z^{2n}q^{n^2+n}}{1-\frac{1}{z^2}}\\
&= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Mais uma vez substituindo $n$ por $-n-1$ na primeira parcela de (1.33), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2(-n-1)+1)(-1)^{-n-1}q^{(-n-1)^2+(-n-1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}\\
=\ &\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2n-1)(-1)^{-n-1}q^{n^2+n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}\\
=\ &\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^{-n}q^{n^2+n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}\\
=\ &2\cdot\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}\\
=\ &\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Juntando (1.32) e (1.34),

$$(q^2;q^2)_\infty^3=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{n^2+n},$$

e escrevendo $q$ no lugar de $q^2$,

$$(q;q)_\infty^3=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n q^{\frac{1}{2}(n^2+n)}.$$

$\square$

# Capítulo 2

# Classes especiais de partições-F

## 2.1 O Princípio Geral

Chamemos de $f_A(z,q) = f_A(z) = \sum p(n,m|A)z^m q^n$ a função geradora para o número de partições de $n$ em $m$ partes, sujeitas à condição $A$. Então, o produto

$$f_A(zq,q)f_B(z^{-1},q)$$

tem termo constante (isto é, coeficiente do termo em $z^0$) igual a

$$\Phi_{A,B}(q) = \sum_{n\geq 0} \phi_{A,B}(n)q^n, \tag{2.1}$$

onde $\phi_{A,B}$ é o número de partições-F de $n$ da forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

em que as partes da primeira linha estão sujeitas à condição $A$ e as partes da segunda linha, à condição $B$.

Chamaremos a construção acima de *Princípio Geral*.

**Exemplo 2.1.1.** Se denotarmos por $X$ a condição *partes não-negativas distintas*, então o coeficiente $\phi_{X,X}(n)$ da função $\Phi_{X,X}(q) = \sum_{n\geq 0} \phi_{X,X}(n)q^n$ é simplesmente $p(n)$.

## 2.2 Algumas partições-F especiais

G. E. Andrews, em sua publicação *Generalized Frobenius Partitions* [1], dá especial atenção a duas classes de partições-F.

A primeira delas permite que haja repetições de partes em qualquer uma das linhas da matriz que representa a partição. Vamos denotar por $A_k$ a condição *cada parte repetida no máximo k vezes.* Fazendo $\Phi_{A_k,A_k}(q) = \Phi_k(q)$ e $\sum_{n\geq 0} \phi_{A_k,A_k}(n)q^n = \sum_{n\geq 0} \phi_k(n)q^n$, a expressão (2.1) torna-se

$$\Phi_k(q) = \sum_{n\geq 0} \phi_k(n)q^n.$$

Notemos que $\phi_1(n) = p(n)$.

**Exemplo 2.2.1.** As partições enumeradas por $\phi_2(3)$ são

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e

$$\Phi_2(q) = 1 + q + 3q^2 + 5q^3 + 9q^4 + 14q^5 + 24q^6 + 35q^7 + \cdots .$$

Já as partições enumeradas por $\phi_3(4)$ são

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e

$$\Phi_3(q) = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 11q^4 + 18q^5 + 31q^6 + 49q^7 + \cdots .$$

O segunda classe de partições, a respeito da qual veremos alguns resultados interessantes, pode até parecer pouco natural, mas possui uma função geradora com propriedades bastante elegantes.

Para essa classe de partições, consideremos $k$ cópias dos inteiros não-negativos, escrevendo $j_i$, com $1 \leq i \leq k$. Diremos que $j_i < l_t$ quando $j < l$ ou quando $j = l$ e $i < t$, e diremos que $j_i \neq l_t$ exceto quando $j = l$ e $i = t$. Agora vamos denotar por $A_k$ a condição *partes distintas (segundo a definição acima)* e, neste caso, fazendo $\Phi_{A_k,A_k}(q) = C\Phi_k(q)$ e $\sum_{n\geq 0} \phi_{A_k,A_k}(n)q^n = \sum_{n\geq 0} c\phi_k(n)q^n$, a expressão (2.1) torna-se

$$C\Phi_k(q) = \sum_{n\geq 0} c\phi_k(n)q^n.$$

Eventualmente os índices das partes são vistos como diferentes cores de cada inteiro. Por isso $c\phi_k(n)$ também é chamado de *número de partições-F de n com k cores.*

**Exemplo 2.2.2.** As partições enumeradas por $c\phi_2(2)$ são

$$\begin{pmatrix} 1_1 \\ 0_1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_2 \\ 0_1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_1 \\ 0_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_2 \\ 0_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0_1 \\ 1_1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0_1 \\ 1_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0_2 & 0_1 \\ 0_2 & 0_1 \end{pmatrix},$$

e

$$C\Phi_2(q) = 1 + 4q + 9q^2 + 20q^3 + 42q^4 + 80q^5 + 147q^6 + 260q^7 + 445q^8 + \cdots .$$

Já as partições enumeradas por $c\phi_3(2)$ são

$$\begin{pmatrix} 1_1 \\ 0_1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_2 \\ 0_1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_3 \\ 0_1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_1 \\ 0_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_2 \\ 0_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_3 \\ 0_2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_1 \\ 0_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_2 \\ 0_3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1_3 \\ 0_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0_1 \\ 1_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_1 \\ 1_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_1 \\ 1_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_2 \\ 1_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 \\ 1_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 \\ 1_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 \\ 1_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0_2 & 0_1 \\ 0_2 & 0_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 & 0_1 \\ 0_2 & 0_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 & 0_2 \\ 0_2 & 0_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_2 & 0_1 \\ 0_3 & 0_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 & 0_1 \\ 0_3 & 0_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 & 0_2 \\ 0_3 & 0_1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0_2 & 0_1 \\ 0_3 & 0_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 & 0_1 \\ 0_3 & 0_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0_3 & 0_2 \\ 0_3 & 0_2 \end{pmatrix},$$

e

$$C\Phi_3(q) = 1 + 9q + 27q^2 + 82q^3 + 207q^4 + 486q^5 + 1055q^6 + 2205q^7 + \cdots .$$

## 2.3 A função geradora para $C\Phi_k(q)$

As expressões para $C\Phi_2(q)$ e $C\Phi_3(q)$ vistas no exemplo anterior podem ser generalizadas para um índice $k$ qualquer, como veremos no teorema a seguir.

**Teorema 2.3.1. ([1], Theorem 5.2)** *Para* $|q| < 1$,

$$C\Phi_k(q) = \frac{1}{(q;q)_\infty^k} \sum_{m_1,\cdots,m_{k-1}=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)},$$

*onde* $Q(m) = m_1^2 + \cdots + m_{k-1}^2 + \sum_{1\leq i<j\leq k-1} m_i m_j$.

*Prova:* Relembrando a fórmula (1.9) da função geradora para partições em partes distintas repetidas até $k$ vezes, temos

$$f_k(z,q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n)^k.$$

Pelo princípio geral, $C\Phi_k(q)$ é o termo constante de

$$FC_k(z) = f_k(zq,q) f_k(z^{-1},q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{n+1})^k (1 + z^{-1}q^n)^k. \tag{2.2}$$

Fazendo o produtório iniciar em $n = 1$ e utilizando a fórmula do Produto de Jacobi (1.2.1), podemos escrever

$$\begin{aligned} FC_k(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)^k(1+z^{-1}q^{n-1})^k \\ &= \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^k}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n^2+n}{2}}\Big)^k \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty^k}\prod_{j=1}^{k}\sum_{n_j=-\infty}^{\infty} z^{n_j} q^{\frac{n_j^2+n_j}{2}}. \end{aligned}$$

Para termos $C\Phi_k(q)$, isto é, o coeficiente de $z^0$, devemos ter $n_1+n_2+\ldots+n_k = 0$, ou seja, $n_k = -n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} C\Phi_k(q) &= \frac{1}{(q;q)_\infty^k}\sum_{n_1,\ldots,n_k=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n_1^2+n_1}{2}+\ldots+\frac{n_k^2+n_k}{2}} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty^k}\sum_{n_1,\ldots,n_{k-1}=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n_1^2+n_1}{2}+\ldots+\frac{n_{k-1}^2+n_{k-1}}{2}+\frac{(-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})^2-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{2}} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty^k}\sum_{n_1,\ldots,n_{k-1}=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n_1^2}{2}+\ldots+\frac{n_{k-1}^2}{2}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{n_j^2}{2}+\sum_{1\le 1<j\le k-1}\frac{2n_in_j}{2}} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty^k}\sum_{n_1,\ldots,n_{k-1}=-\infty}^{\infty} q^{n_1^2+\ldots+n_{k-1}^2+\sum_{1\le 1<j\le k-1}n_in_j} \\ &= \frac{1}{(q;q)_\infty^k}\sum_{m_1,\ldots,m_{k-1}=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)}. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

$\square$

# Capítulo 3

# Partições-F de $n$ com 4 e 5 cores

Baruah e Sarmah, em seu artigo *Congruences for generalized Frobenius partitions with 4 colors* ([4]), obtiveram alguns resultados a respeito da função $C\Phi_k(q)$, particularmente para $k = 4$ e $k = 5$. A demonstração do segundo resultado, cujos detalhes foram omitidos pelos autores, pode ser encontrada na segunda seção deste capítulo.

## 3.1 Uma expressão para $C\Phi_4(q)$ em função de $\varphi(q)$ e $\psi(q)$

**Teorema 3.1.1. ([4], Theorem 2.1)** *A função geradora para o número de partições-F com 4 cores satisfaz*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty^4}\{\varphi^3(q^2) + 12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)\}. \tag{3.1}$$

*Prova:* Vamos utilizar o resultado do Teorema 2.3.1, com $k = 4$. Ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty^4} \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)}, \tag{3.2}$$

onde $Q(m) = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3$.

Para expressarmos o somatório $\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} q^{m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$ como uma soma de diferentes somatórios infinitos, vamos fazer a seguinte mudança de variáveis: considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}^3 &\rightarrow \mathbb{Z}^3 \\ y &\mapsto m, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $y = (y_1, y_2, y_3)$ e $m = (m_1, m_2, m_3)$, com

$$\begin{aligned} m_1 &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ m_2 &= y_1 - y_2 + y_3, \\ m_3 &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Somando as equações de (3.4) duas a duas, obtemos

$$m_1 + m_2 = 2y_3\,, \qquad m_1 + m_3 = 2y_2\,, \qquad m_2 + m_3 = 2y_1\,,$$

e, portanto, $m_1, m_2, m_3$ têm todos a mesma paridade.

Por outro lado, dados $m_1, m_2, m_3$ com mesma paridade, $m_i + m_j$ é par $\forall\, i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$. Definindo

$$y_1 = \frac{m_2 + m_3}{2}\,, \qquad y_2 = \frac{m_1 + m_3}{2}\,, \qquad y_3 = \frac{m_1 + m_2}{2}\,,$$

temos $f(y) = m$. Desse modo,

$$f(\mathbb{Z}^3) = \{m = (m_1, m_2, m_3) \mid m_1, m_2, m_3 \text{ têm todos a mesma paridade}\}.$$

**Obs.:** $f$ é injetiva, pois é restrição de uma transformação linear invertível de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

Agora, precisamos garantir que a mudança de variáveis acima cubra todo o conjunto $\mathbb{Z}^3$, assim como o fazem as ternas $(m_1, m_2, m_3)$ no somatório (3.2). Para tanto, seja $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$. Então, dois casos podem ocorrer: ou as três coordenadas têm a mesma paridade ou duas delas têm uma mesma paridade e a terceira tem paridade oposta. No primeiro caso, temos $m \in f(\mathbb{Z}^3)$. O segundo caso subdivide-se em três:

*(i)* $m_2$ e $m_3$ têm mesma paridade, oposta à de $m_1$.

Neste caso, $m_1 - 1, m_2, m_3$ têm mesma paridade, ou seja, $(m_1 - 1, m_2, m_3) \in f(\mathbb{Z}^3)$ e, portanto, $\exists y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid f(y_1, y_2, y_3) = (m_1 - 1, m_2, m_3)$, isto é,

$$\begin{aligned} m_1 &= -y_1 + y_2 + y_3 + 1, \\ m_2 &= y_1 - y_2 + y_3, \\ m_3 &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

*(ii)* $m_1$ e $m_3$ têm mesma paridade, oposta à de $m_2$.

Neste caso, $m_1, m_2 - 1, m_3$ têm mesma paridade, ou seja, $(m_1, m_2 - 1, m_3) \in f(\mathbb{Z}^3)$ e, portanto, $\exists y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid f(y_1, y_2, y_3) = (m_1, m_2 - 1, m_3)$, isto é,

$$\begin{aligned} m_1 &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ m_2 &= y_1 - y_2 + y_3 + 1, \\ m_3 &= y_1 + y_2 - y_3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

*(iii)* $m_1$ e $m_2$ têm mesma paridade, oposta à de $m_3$.

Neste caso, $m_1, m_2, m_3 - 1$ têm mesma paridade, ou seja, $(m_1, m_2, m_3 - 1) \in f(\mathbb{Z}^3)$ e, portanto, $\exists y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid f(y_1, y_2, y_3) = (m_1, m_2, m_3 - 1)$, isto é,

$$\begin{aligned} m_1 &= -y_1 + y_2 + y_3, \\ m_2 &= y_1 - y_2 + y_3, \\ m_3 &= y_1 + y_2 - y_3 + 1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, podemos concluir que, dado $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$, é possível escrever $m$ de maneira única de uma dentre as formas (3.4), (3.5), (3.6) ou (3.7), com $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{Z}^3$. Agora, para cada uma dessas formas substituímos $m$ por suas expressões em função de $y$ no expoente $Q(m) = m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3$ de (3.2). Estas contas podem ser feitas com o auxílio do software *Maple**. Assim:

1. $m$ da forma do sistema 3.4:

$$\begin{aligned} Q(m) &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3 \\ &= (-y_1 + y_2 + y_3)^2 + (y_1 - y_2 + y_3)^2 + (y_1 + y_2 - y_3)^2 \\ &\quad + (-y_1 + y_2 + y_3)(y_1 - y_2 + y_3) + (-y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + y_2 - y_3) \\ &\quad + (y_1 - y_2 + y_3)(y_1 + y_2 - y_3) \\ &= 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2. \end{aligned}$$

2.$(i)$ $m$ da forma do sistema 3.5:

$$\begin{aligned} Q(m) &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3 \\ &= (-y_1 + y_2 + y_3 + 1)^2 + (y_1 - y_2 + y_3)^2 + (y_1 + y_2 - y_3)^2 \\ &\quad + (-y_1 + y_2 + y_3 + 1)(y_1 - y_2 + y_3) + (-y_1 + y_2 + y_3 + 1)(y_1 + y_2 - y_3) \\ &\quad + (y_1 - y_2 + y_3)(y_1 + y_2 - y_3) \\ &= 1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2. \end{aligned}$$

*Software desenvolvido na Universidade de Waterloo em Ontário, no Canadá, como ferramenta para cálculos algébricos. Atualmente o *Maple* é desenvolvido e comercializado pela empresa *Maplesoft*.

2.$(ii)$ $m$ da forma do sistema 3.6:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3\\
&= (-y_1+y_2+y_3)^2+(y_1-y_2+y_3+1)^2+(y_1+y_2-y_3)^2\\
&\quad +(-y_1+y_2+y_3)(y_1-y_2+y_3+1)+(-y_1+y_2+y_3)(y_1+y_2-y_3)\\
&\quad +(y_1-y_2+y_3+1)(y_1+y_2-y_3)\\
&= 1+2y_1+2y_3+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2.
\end{aligned}$$

2.$(iii)$ $m$ da forma do sistema 3.7:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3\\
&= (-y_1+y_2+y_3)^2+(y_1-y_2+y_3)^2+(y_1+y_2-y_3+1)^2\\
&\quad +(-y_1+y_2+y_3)(y_1-y_2+y_3)+(-y_1+y_2+y_3)(y_1+y_2-y_3+1)\\
&\quad +(y_1-y_2+y_3)(y_1+y_2-y_3+1)\\
&= 1+2y_1+2y_2+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a substituição de $m_1, m_2, m_3$ pelas expressões em $y_1, y_2, y_3$ acima no somatório (3.2), ficamos com:

$$\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} q^{m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \sum_{y_1,y_2,y_3=-\infty}^{\infty} q^{2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2} + \sum_{y_1,y_2,y_3=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_2+2y_3+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2}\\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_1+2y_3+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2} + \sum_{y_1,y_2,y_3=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_1+2y_2+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

A menos de nome das variáveis, as três últimas parcelas acima expressam o mesmo somatório. Por isso, podemos reescrever a expressão (3.8) da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2} + 3q\left(\sum_{y_1,y_2,y_3=-\infty}^{\infty} q^{2y_1+2y_2+2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2}\right) \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2}\right)^3 + 3q\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2+2n} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2+2n} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2}\right)^3 + 3q\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{4n^2+4n}{2}}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^2)^{n^2}\right)^3 + 3q\sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^2)^{n^2}\left(2\sum_{n=-0}^{\infty} (q^4)^{\frac{n^2+n}{2}}\right)^2 \\
&= \varphi^3(q^2) + 12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4). \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Para concluirmos a demonstração do teorema, basta substituirmos o somatório em (3.2) pela expressão (3.9).

□

## 3.2 Uma expressão para $C\Phi_5(q)$ em função de $\varphi(q)$ e $\psi(q)$

**Teorema 3.2.1. ([4], Theorem 2.2)** *A função geradora para o número de partições-F com 5 cores satisfaz*

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_5(n)q^n &= \frac{1}{(q;q)_\infty^5}\{\varphi(q^{10})\varphi^3(q^2) + 12q\varphi(q^{10})\varphi(q^2)\psi^2(q^4) + 8q\psi(q^5)\psi^3(q) \\
&\quad + 12q^3\psi(q^{20})\psi(q^4)\varphi^2(q) + 16q^4\psi(q^{20})\psi^3(q^4)\}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

*Prova:* A demonstração deste teorema é semelhante à demonstração do Teorema

3.1.1. Aqui vamos utilizar o resultado do Teorema 2.3.1, com $k = 5$. Isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_5(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty^5} \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)}, \tag{3.11}$$

onde $Q(m) = m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_4+m_3m_4$.

Mais uma vez, faremos uma mudança de variáveis a fim de expressar o somatório da expressão (3.11) acima como soma de diferentes somatórios infinitos. Consideremos a seguinte função:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}^4 &\to \mathbb{Z}^4 \\ y &\mapsto m, \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ e $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, com

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Somando algumas das equações de (3.13) duas a duas, obtemos

$$m_1 + m_2 = 2(y_1 + y_2)\,, \qquad m_2 + m_3 = 2(y_1 - y_3)\,, \qquad m_3 + m_4 = 2(y_1 - y_2)\,,$$

e, portanto, $m_1, m_2, m_3, m_4$ têm todos a mesma paridade.

Além disso, dados $m_1, m_2, m_3, m_4$ com mesma paridade e tais que $\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4} \in \mathbb{Z}$, definindo $y_1 = \frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4}$ e fazendo as devidas substituições em (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4}\,, \qquad & y_2 &= \frac{m_1+m_2-m_3-m_4}{4}\,, \\ y_3 &= \frac{m_1-m_2-m_3+m_4}{4}\,, \qquad & y_4 &= \frac{m_1-m_2+m_3-m_4}{4}\,. \end{aligned}$$

Desse modo, $g(y) = m$ e temos

$$\begin{aligned} g(\mathbb{Z}^4) \;\; = \;\; & \{m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \text{ tais que } m_1, m_2, m_3, m_4 \\ & \quad \text{têm todos a mesma paridade e } 4 \mid (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\}. \end{aligned}$$

**Obs.:** $g$ também é injetiva, pois é restrição de uma transformação linear invertível de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$.

Agora, assim como fizemos na demonstração do Teorema (3.1.1), precisamos garantir que a mudança de variáveis acima cubra todo o conjunto $\mathbb{Z}^4$, assim como o fazem as 4-uplas $(m_1, m_2, m_3, m_4)$ no somatório (3.11). Para tanto, consideremos $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{Z}^4$. Então, três casos podem ocorrer: ou as quatro coordenadas têm a mesma paridade ou três coordenadas têm uma mesma paridade e a outra tem paridade oposta ou duas delas têm uma mesma paridade e as outras duas têm paridade oposta. Ainda, cada um dos três casos subdivide-se em alguns outros, totalizando 16 casos diferentes. Vamos a eles:

1. $m_1, m_2, m_3, m_4$ têm mesma paridade.

   *a)* Se $4 \mid (m_1+m_2+m_3+m_4)$, então $m \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\, y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que $m$ é da forma do sistema (3.13).

   *b)* Se $4 \nmid (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$, então $4 \mid (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - 2)$ e $m_1 - 2,\ m_2,\ m_3,\ m_4$ também têm mesma paridade. Portanto, $(m_1 - 2, m_2, m_3, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 2, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.14}$$

2.$(i)$ $m_2, m_3, m_4$ têm mesma paridade, oposta à de $m_1$. Então as 4-uplas $(m_1 - 1, m_2, m_3, m_4)$ e $(m_1 + 1, m_2, m_3, m_4)$ têm coordenadas de mesma paridade.

$a)$ Se $4 \mid (m_1 - 1 + m_2 + m_3 + m_4)$, então $(m_1 - 1, m_2, m_3, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.15}$$

$b)$ Se $4 \nmid (m_1 - 1 + m_2 + m_3 + m_4)$, então $4 \mid (m_1 + 1 + m_2 + m_3 + m_4) = (m_1 - 1 + 2 + m_2 + m_3 + m_4)$. Portanto, $(m_1 + 1, m_2, m_3, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.16}$$

2.$(ii)$ $m_1, m_3, m_4$ têm mesma paridade, oposta à de $m_2$. Então as 4-uplas $(m_1, m_2 - 1, m_3, m_4)$ e $(m_1, m_2 + 1, m_3, m_4)$ têm coordenadas de mesma paridade.

$a)$ Se $4 \mid (m_1 + m_2 - 1 + m_3 + m_4)$, então $(m_1, m_2 - 1, m_3, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + 1, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.17}$$

*b*) Se $4 \nmid (m_1 + m_2 - 1 + m_3 + m_4)$, então $4 \mid (m_1 + m_2 + 1 + m_3 + m_4) = (m_1 + m_2 - 1 + 2 + m_3 + m_4)$. Portanto, $(m_1, m_2 + 1, m_3, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - 1, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.18}$$

2.(*iii*) $m_1, m_2, m_4$ têm mesma paridade, oposta à de $m_3$. Então as 4-uplas $(m_1, m_2, m_3 - 1, m_4)$ e $(m_1, m_2, m_3 + 1, m_4)$ têm coordenadas de mesma paridade.

*a*) Se $4 \mid (m_1 + m_2 + m_3 - 1 + m_4)$, então $(m_1, m_2, m_3 - 1, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 1, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.19}$$

*b*) Se $4 \nmid (m_1 + m_2 + m_3 - 1 + m_4)$, então $4 \mid (m_1 + m_2 + m_3 + 1 + m_4) = (m_1 + m_2 + m_3 - 1 + 2 + m_4)$. Portanto, $(m_1, m_2, m_3 + 1, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - 1, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.20}$$

2.$(iv)$ $m_1, m_2, m_3$ têm mesma paridade, oposta à de $m_4$. Então as 4-uplas $(m_1, m_2, m_3, m_4 - 1)$ e $(m_1, m_2, m_3, m_4 + 1)$ têm coordenadas de mesma paridade.

*a)* Se $4 \mid (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - 1)$, então $(m_1, m_2, m_3, m_4 - 1) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

*b)* Se $4 \nmid (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - 1)$, então $4 \mid (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + 1) = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - 1 + 2)$. Portanto, $(m_1, m_2, m_3, m_4 + 1) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 1. \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.$(i)$ $m_1, m_2$ têm mesma paridade, oposta à de $m_3, m_4$. Então as 4-uplas $(m_1 - 1, m_2 - 1, m_3, m_4)$ e $(m_1 - 1, m_2 + 1, m_3, m_4)$ têm coordenadas de mesma paridade.

*a)* Se $4 \mid (m_1 - 1 + m_2 - 1 + m_3 + m_4)$, então $(m_1 - 1, m_2 - 1, m_3, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + 1, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.23}$$

*b*) Se $4 \nmid (m_1-1+m_2-1+m_3+m_4)$, então $4 \mid (m_1-1+m_2+1+m_3+m_4) = (m_1-1+m_2-1+2+m_3+m_4)$. Portanto, $(m_1-1, m_2+1, m_3, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - 1, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.(*ii*) $m_1, m_3$ têm mesma paridade, oposta à de $m_2, m_4$. Então as 4-uplas $(m_1-1, m_2, m_3-1, m_4)$ e $(m_1-1, m_2, m_3+1, m_4)$ têm coordenadas de mesma paridade.

*a*) Se $4 \mid (m_1-1+m_2+m_3-1+m_4)$, então $(m_1-1, m_2, m_3-1, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 1, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.25}$$

*b*) Se $4 \nmid (m_1-1+m_2+m_3-1+m_4)$, então $4 \mid (m_1-1+m_2+m_3+1+m_4) = (m_1-1+m_2+m_3-1+2+m_4)$. Portanto, $(m_1-1, m_2, m_3+1, m_4) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - 1, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4. \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.$(iii)$ $m_1, m_4$ têm mesma paridade, oposta à de $m_2, m_3$. Então as 4-uplas $(m_1-1, m_2, m_3, m_4-1)$ e $(m_1-1, m_2, m_3, m_4+1)$ têm coordenadas de mesma paridade.

$a)$ Se $4 \mid (m_1-1+m_2+m_3+m_4-1)$, então $(m_1-1, m_2, m_3, m_4-1) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + 1. \end{aligned} \tag{3.27}$$

$b)$ Se $4 \nmid (m_1-1+m_2+m_3+m_4-1)$, então $4 \mid (m_1-1+m_2+m_3+m_4+1) = (m_1-1+m_2+m_3+m_4-1+2)$. Portanto, $(m_1-1, m_2, m_3, m_4+1) \in g(\mathbb{Z}^4)$, ou seja, $\exists\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1, \\ m_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \\ m_3 &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ m_4 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 1. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Portanto, podemos concluir que, dado $m = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{Z}^4$, é possível escrever $m$ de maneira única de uma dentre as 16 formas, de (3.13) a (3.28), com $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$. Agora, para cada uma dessas formas substituímos $m$ por suas expressões em função de $y$ no expoente $Q(m) = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_1m_2 + m_1m_3 + m_1m_4 + m_2m_3 + m_2m_4 + m_3m_4$ de (3.11). Novamente com o auxílio do software *Maple* (desta vez quase imprescindível para a precisão nos cálculos), obtemos os seguintes resultados:

$(1.a)$ $m$ da forma do sistema 3.13:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4\\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&= 10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

$(1.b)$ $m$ da forma do sistema 3.14:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4\\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4+2)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+2)(y_1+y_2-y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+2)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+2)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&= 4+10y_1+2y_2+2y_3+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

$(2.i.a)$ $m$ da forma do sistema 3.15:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4+1)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1+y_2-y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&= 1+5y_1+y_2+y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

$(2.i.b)$ $m$ da forma do sistema 3.16:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4-1)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4-1)(y_1+y_2-y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4-1)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4-1)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&= 1-5y_1-y_2-y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

$(2.ii.a)$ $m$ da forma do sistema 3.17:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4+1)^2 \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4+1) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4+1)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&= 1+5y_1+y_2-y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

$(2.ii.b)$ $m$ da forma do sistema 3.18:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4-1)^2 \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4-1) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4-1)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4-1)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\
&= 1-5y_1-y_2+y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

$(2.iii.a)$ $m$ da forma do sistema 3.19:

$$\begin{aligned} Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\ &= (y_1+y_2+y_3+y_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2 \\ &\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4+1)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2 \\ &\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4) \\ &\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4+1) \\ &\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\ &\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4+1) \\ &\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\ &\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\ &= 1+5y_1-y_2-y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \end{aligned} \tag{3.35}$$

$(2.iii.b)$ $m$ da forma do sistema 3.20:

$$\begin{aligned} Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\ &= (y_1+y_2+y_3+y_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2 \\ &\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4-1)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2 \\ &\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4) \\ &\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4-1) \\ &\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\ &\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4-1) \\ &\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\ &\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4-1)(y_1-y_2+y_3-y_4) \\ &= 1-5y_1+y_2+y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \end{aligned} \tag{3.36}$$

$(2.iv.a)$ $m$ da forma do sistema 3.21:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4\\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4+1)^2\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4+1)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4+1)\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4+1)\\
&= 1+5y_1-y_2+y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

$(2.iv.b)$ $m$ da forma do sistema 3.22:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4\\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4-1)^2\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1+y_2-y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4-1)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4-1)\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4-1)\\
&= 1-5y_1+y_2-y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

$(3.i.a)$ $m$ da forma do sistema 3.23:

$$
\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_1m_2 + m_1m_3 + m_1m_4 + m_2m_3 + m_2m_3 + m_3m_4 \\
&= (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)^2 + (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + 1)^2 \\
&\quad + (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2 + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2 \\
&\quad + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)(y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + 1) \\
&\quad + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \\
&\quad + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\
&\quad + (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + 1)(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \\
&\quad + (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + 1)(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\
&\quad + (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\
&= 3 + 10y_1 + 2y_2 + 10y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + 2y_4^2. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

$(3.i.b)$ $m$ da forma do sistema 3.24:

$$
\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_1m_2 + m_1m_3 + m_1m_4 + m_2m_3 + m_2m_3 + m_3m_4 \\
&= (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)^2 + (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - 1)^2 \\
&\quad + (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)^2 + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)^2 \\
&\quad + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)(y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - 1) \\
&\quad + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \\
&\quad + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1)(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\
&\quad + (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - 1)(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \\
&\quad + (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - 1)(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\
&\quad + (y_1 - y_2 - y_3 + y_4)(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\
&= 1 + 2y_3 + 2y_4 + 10y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + 2y_4^2. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

$(3.ii.a)$ $m$ da forma do sistema 3.25:

$$
\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4\\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4+1)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4+1)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1+y_2-y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2-y_3+y_4+1)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4+1)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&= 3+10y_1+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

$(3.ii.b)$ $m$ da forma do sistema 3.26:

$$
\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4\\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4+1)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4-1)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1+y_2-y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2-y_3+y_4-1)\\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4-1)\\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4-1)(y_1-y_2+y_3-y_4)\\
&= 1+2y_2+2y_3+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

(3.$iii.a$) $m$ da forma do sistema 3.27:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4+1)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4+1)^2 \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1+y_2-y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4+1) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4+1) \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4+1) \\
&= 3+10y_1+2y_3+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

(3.$iii.b$) $m$ da forma do sistema 3.28:

$$\begin{aligned}
Q(m) &= m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3+m_2m_3+m_3m_4 \\
&= (y_1+y_2+y_3+y_4+1)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2 \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4-1)^2 \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1+y_2-y_3-y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2+y_3+y_4+1)(y_1-y_2+y_3-y_4-1) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2-y_3+y_4) \\
&\quad +(y_1+y_2-y_3-y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4-1) \\
&\quad +(y_1-y_2-y_3+y_4)(y_1-y_2+y_3-y_4-1) \\
&= 1+2y_2+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a substituição de $m_1, m_2m_{,3}, m_4$ pelas expressões em $y_1, y_2, y_3, y_4$ acima no somatório (3.11), ficamos com

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)} \quad = \quad & \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{4+10y_1+2y_2+2y_3+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1+y_2+y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1-y_2-y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1+y_2-y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1-y_2+y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1-y_2-y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1+y_2+y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1-y_2+y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1+y_2-y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{3+10y_1+2y_2+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_3+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{3+10y_1+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_2+2y_3+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{3+10y_1+2y_3+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
& + \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_2+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2}.
\end{aligned}$$

Notemos que há parcelas na equação acima que se repetem, a menos de nome das variáveis. Os somatórios

$$\sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{3+10y_1+2y_2+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \quad \text{e} \quad \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_3+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2}$$

aparecem cada um três vezes e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)} &= \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{4+10y_1+2y_2+2y_3+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1+y_2+y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1-y_2-y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1+y_2-y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1-y_2+y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1-y_2-y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1+y_2+y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+5y_1-y_2+y_3-y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ \sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1-5y_1+y_2-y_3+y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ 3\sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{3+10y_1+2y_2+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2} \\
&+ 3\sum_{y_1,y_2,y_3,y_4=-\infty}^{\infty} q^{1+2y_3+2y_4+10y_1^2+2y_2^2+2y_3^2+2y_4^2}.
\end{aligned}$$

Ainda, reordenando os termos nos expoentes de cada uma das parcelas,

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)} &= \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2} \right)^3 \\
&+ q^4 \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2+10y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+2y} \right)^3 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2+5y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \right)^3 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2-5y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2-y} \right)^3 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2+5y} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2-y} \right)^2 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2-5y} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2-y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \right)^2 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2+5y} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2-y} \right)^2 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2-5y} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2-y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \right)^2 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2+5y} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2-y} \right)^2 \\
&+ q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2-5y} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+y} \right)^2 \\
&+ 3q^3 \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2+10y} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+2y} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2} \right)^2 \\
&+ 3q \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{10y^2} \cdot \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2} \cdot \left( \sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{2y^2+2y} \right)^2 .
\end{aligned}$$

Para seguirmos com a demonstração, vamos utilizar as expressões (1.21) e (1.26) e o resultado da Proposição 1.2.7. Cada um dos somatórios das formas $\sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{ky^2}$, $\sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{ky^2+ky}$, $\sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{ky^2+\frac{k}{2}y}$ e $\sum_{y=-\infty}^{\infty} q^{ky^2-\frac{k}{2}y}$, com $k \in \mathbb{Z}$, pode ser substituido, respectivamente, pelas expressões $\varphi(q^k)$, $2\psi(q^{2k})$, $\psi(q^{\frac{k}{2}})$ e $\psi(q^{\frac{k}{2}})$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)} &= \varphi(q^{10})\Big(\varphi(q^2)\Big)^3 + q^4\cdot 2\psi(q^{20})\Big(2\psi(q^4)\Big)^3 + q\psi(q^5)\Big(\psi(q)\Big)^3 \\
&+ q\psi(q^5)\Big(\psi(q)\Big)^3 + q\psi(q^5)\psi(q)\Big(\psi(q)\Big)^2 + q\psi(q^5)\psi(q)\Big(\psi(q)\Big)^2 \\
&+ q\psi(q^5)\psi(q)\Big(\psi(q)\Big)^2 + q\psi(q^5)\psi(q)\Big(\psi(q)\Big)^2 + q\psi(q^5)\psi(q)\Big(\psi(q)\Big)^2 \\
&+ q\psi(q^5)\psi(q)\Big(\psi(q)\Big)^2 + 3q^3\cdot 2\psi(q^{20})\cdot 2\psi(q^4)\Big(\varphi(q^2)\Big)^2 \\
&+ 3q\varphi(q^{10})\varphi(q^2)\Big(2\psi(q^4)\Big)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(q^{10})\varphi^3(q^2) + 16q^4\psi(q^{20})\psi^3(q^4) + q\psi(q^5)\psi^3(q) + q\psi(q^5)\psi^3(q) \\
&+ q\psi(q^5)\psi^3(q) + q\psi(q^5)\psi^3(q) + q\psi(q^5)\psi^3(q) + q\psi(q^5)\psi^3(q) \\
&+ q\psi(q^5)\psi^3(q) + q\psi(q^5)\psi^3(q) + 12q^3\psi(q^{20})\psi(q^4)\varphi^2(q^2) \\
&+ 12q\varphi(q^{10})\varphi(q^2)\psi^2(q^4) \\
&= \varphi(q^{10})\varphi^3(q^2) + 16q^4\psi(q^{20})\psi^3(q^4) + 8q\psi(q^5)\psi^3(q) \\
&+ 12q^3\psi(q^{20})\psi(q^4)\varphi^2(q^2) + 12q\varphi(q^{10})\varphi(q^2)\psi^2(q^4).
\end{aligned}
$$

Basta agora observar que

$$
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_5(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty^5}\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=-\infty}^{\infty} q^{Q(m)}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_5(n)q^n &= \frac{1}{(q;q)_\infty^5}\Big\{\varphi(q^{10})\varphi^3(q^2) + 16q^4\psi(q^{20})\psi^3(q^4) + 8q\psi(q^5)\psi^3(q) \\
&+ 12q^3\psi(q^{20})\psi(q^4)\varphi^2(q^2) + 12q\varphi(q^{10})\varphi(q^2)\psi^2(q^4)\Big\},
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

# Capítulo 4

# Congruências envolvendo $c\phi_k$

## 4.1 Congruências módulo alguns inteiros em particular

O resultado da última seção do capítulo anterior permite a dedução de algumas congruências satisfeitas pelos coeficientes da função $C\Phi_4(q)$. Alguns deles, devidos a Sellers ([9]) e a Baruah e Sarmah ([4]), seguem nos próximos teoremas.

**Teorema 4.1.1. ([9], Theorem 1.1)** $\forall n \geq 0$, *temos*

$$c\phi_4(10n+6) \equiv 0 \pmod{5}.$$

*Prova:* Conforme o Teorema 3.1.1,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n &= \frac{\varphi^3(q^2)+12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q;q)_\infty^4} \\ &= \frac{\varphi^3(q^2)+12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^4}\end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)(-q)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varphi^3(q^2)+12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q;q^2)^4_\infty(q^2;q^2)^4_\infty}+\frac{\varphi^3(q^2)-12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(-q;q^2)^4_\infty(q^2;q^2)^4_\infty}\\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)^4_\infty}\left\{\frac{1}{(q;q^2)^4_\infty}+\frac{1}{(-q;q^2)^4_\infty}\right\}\\
&\quad+\frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)^4_\infty}\left\{\frac{1}{(q;q^2)^4_\infty}-\frac{1}{(-q;q^2)^4_\infty}\right\}\\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)^4_\infty}\left\{\frac{(-q;q^2)^4_\infty+(q;q^2)^4_\infty}{(q;q^2)^4_\infty(-q;q^2)^4_\infty}\right\}\\
&\quad+\frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)^4_\infty}\left\{\frac{(-q;q^2)^4_\infty-(q;q^2)^4_\infty}{(q;q^2)^4_\infty(-q;q^2)^4_\infty}\right\}\\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)^4_\infty(q^2;q^4)^4_\infty}\{(-q;q^2)^4_\infty+(q;q^2)^4_\infty\}\\
&\quad+\frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)^4_\infty(q^2;q^4)^4_\infty}\{(-q;q^2)^4_\infty-(q;q^2)^4_\infty\}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Substituindo em (4.1) as expressões $(i)$ e $(ii)$ do Corolário 1.2.9, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}c\phi_4(n)q^n+\sum_{n=0}^{\infty}c\phi_4(n)(-q)^n &= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)^4_\infty(q^2;q^4)^4_\infty}\cdot\frac{2\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)^2_\infty}\\
&\quad+\frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)^4_\infty(q^2;q^4)^4_\infty}\cdot\frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)^2_\infty}\\
&= \frac{2\varphi^5(q^2)}{(q^2;q^2)^6_\infty(q^2;q^4)^4_\infty}+\frac{96q^2\varphi(q^2)\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)^6_\infty(q^2;q^4)^4_\infty}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Agora, observemos que, quando $n$ é par, digamos $2n$, temos

$$c\phi_4(2n)(-q)^{2n}=c\phi_4(2n)q^{2n},$$

e quando $n$ é ímpar, digamos $2n+1$, temos

$$c\phi_4(2n+1)(-q)^{2n+1}=-c\phi_4(2n+1)q^{2n+1}.$$

Assim, na expressão $\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)(-q)^n$, os termos referentes aos valores ímpares de $n$ cancelam-se e restam duas vezes os termos referentes aos valores pares de $n$. Ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)(-q)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^{2n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^{2n} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{2\varphi^5(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^6(q^2;q^4)_\infty^4} + \frac{96q^2\varphi(q^2)\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^6(q^2;q^4)_\infty^4}\right\} \\ &= \frac{\varphi^5(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^6(q^2;q^4)_\infty^4} + \frac{48q^2\varphi(q^2)\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^6(q^2;q^4)_\infty^4}. \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Ou ainda, substituindo $q^2$ por $q$ em (4.3),

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n = \frac{\varphi^5(q)}{(q;q)_\infty^6(q;q^2)_\infty^4} + \frac{48q\varphi(q)\psi^4(q^2)}{(q;q)_\infty^6(q;q^2)_\infty^4}. \qquad (4.4)$$

Finalmente, escrevendo as expressões (1.23) e (1.24) no lugar de $\varphi(q)$ e $\psi(q)$, ficamos com

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n &= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{25}}{(q;q)_\infty^{10}(q^4;q^4)_\infty^{10}(q;q)_\infty^6(q;q^2)_\infty^4} \\ &\quad + \frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^8}{(q;q)_\infty^2(q^4;q^4)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty^4(q;q)_\infty^6(q;q^2)_\infty^4} \\ &= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{29}}{(q;q)_\infty^{16}(q^4;q^4)_\infty^{10}(q;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^4} + \frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^6}{(q;q)_\infty^8(q;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^4} \\ &= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{29}}{(q;q)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} + \frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^6}{(q;q)_\infty^{12}}. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

O que buscamos é o valor de $c\phi_4(10n+6)$ que, na equação acima, corresponde ao coeficiente do termo em $q^{5n+3}$. Se conseguirmos mostrar que em cada uma das parcelas de (4.5) o coeficiente de $q^{5n+3}$ é divisível por 5, teremos concluído a demonstração do teorema. Ainda, como estamos interessados em congruências $\pmod 5$, podemos simplificar cada uma dessas parcelas. Para tanto, vamos adotar uma definição para congruência entre séries semelhante à definição usual de congruência entre números inteiros.

**Definição 4.1.2.** *Diremos que duas séries são congruentes módulo $k$, com $k \in \mathbb{N}$, se a diferença entre elas é uma série cujos coeficientes são divisíveis por $k$.*

**Obs.:** Na expressão $(q^\alpha; q^\alpha)_\infty^5$, isto é, no produto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{n\alpha})^5$, cada um dos termos $(1 - q^{n\alpha})^5$ é da forma $1 - \lambda_1 q^{n\alpha} + \lambda_2 q^{2n\alpha} - \lambda_3 q^{3n\alpha} + \lambda_4 q^{4n\alpha} - q^{5n\alpha}$, onde $\lambda_1, \ldots \lambda_4$ são números inteiros divisíveis por 5. Ou seja, olhando módulo 5, temos $(1-q^{n\alpha})^5 \equiv (1-q^{5n\alpha}) \pmod 5$. Assim, $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n\alpha})^5 \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{5n\alpha}) \pmod 5$ e então $(q^\alpha; q^\alpha)_\infty^5 \equiv (q^{5\alpha}; q^{5\alpha})_\infty$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{(q^2;q^2)_\infty^{29}}{(q;q)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} &= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{25}(q^2;q^2)_\infty^4}{((q;q)_\infty^5)^4((q^4;q^4)_\infty^5)^2} \\
&= \frac{((q^2;q^2)_\infty^5)^5(q^2;q^2)_\infty^4}{((q;q)_\infty^5)^4((q^4;q^4)_\infty^5)^2} \\
&\equiv \frac{(q^{10};q^{10})_\infty^5(q^2;q^2)_\infty^4}{(q^5;q^5)_\infty^4(q^{20};q^{20})_\infty^2} \pmod 5 \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^6}{(q;q)_\infty^{12}} &= \frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty(q;q)_\infty^3}{(q;q)_\infty^{15}} \\
&= \frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty(q;q)_\infty^3}{((q;q)_\infty^5)^3} \\
&\equiv \frac{48q(q^{10};q^{10})_\infty(q^{20};q^{20})_\infty(q^4;q^4)_\infty(q;q)_\infty^3}{(q^5;q^5)_\infty^3} \pmod 5. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Dessa forma, notemos que, se os coeficientes de $q^{5n+3}$ em $(q^2;q^2)_\infty^4$ na expressão (4.6) e em $q(q^4;q_\infty^4)(q;q)_\infty^3$ na expressão (4.7) forem congruentes a zero $\pmod 5$, os termos restantes nas expressões (4.6) e (4.7) não alteram essas congruências. Portanto, podemos nos restringir ao cálculo dos coeficientes de $q^{5n+3}$ em $(q^2;q^2)_\infty^4$ e $q(q^4;q^4)_\infty(q;q)_\infty^3$. Começemos com $(q^2;q^2)_\infty^4$.

Substituindo $q$ por $q^2$ nas identidades das Proposições 1.2.11 e 1.2.12 , temos:

$$\begin{aligned}
(q^2;q^2)_\infty^4 &= (q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty^3 \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m(3m-1)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)q^{k(k+1)} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m+k}(2k+1)q^{k(k+1)+m(3m-1)} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Procuramos expoentes de $q$ do tipo $5n+3$, i.e., soluções inteiras $k,m,n$ para $5n+3 = k(k+1)+m(3m-1)$. Olhando para essa equação $\pmod 5$, o que buscamos é resolver a seguinte congruência: $3 \equiv k(k+1)+m(3m-1) \pmod 5$. Agora, observemos que $3 \equiv k(k+1)+m(3m-1) \pmod 5$ é equivalente a

$$\begin{aligned}
3 &\equiv k^2+k+3m^2-m \pmod 5 \\
\Longleftrightarrow 4 &\equiv 3k^2+3k+9m^2-3m \pmod 5 \\
\Longleftrightarrow 0 &\equiv 3k^2+3k+9m^2-3m+1 \pmod 5 \\
\Longleftrightarrow 0 &\equiv 12k^2+12k+36m^2-12m+3+1 \pmod 5 \\
\Longleftrightarrow 0 &\equiv 3(2k+1)^2+(6m-1)^2 \pmod 5 \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Vamos definir $\alpha = 2k+1$ e $\beta = 6m-1$. Então, módulo 5, $\alpha$ e $\beta$ podem assumir os valores 0, 1, 2, 3 ou 4; consequentemente, $\alpha^2$ e $\beta^2$ podem assumir apenas os valoes 0, 1 ou 4. Fazendo todas as combinaçõs de valores para $3\alpha^2+\beta^2$, vemos que a única forma de termos $3\alpha^2+\beta^2 \equiv 0 \pmod 5$ ocorre quando $\alpha \equiv 0 \pmod 5$ e $\beta \equiv 0 \pmod 5$. Ou seja, $2k+1 \equiv 0 \pmod 5$ e $m \equiv 1 \pmod 5$. De fato, o que irá nos interessar é a congruência de 2k+1.

Então, pela expressão (4.8), como $2k+1$ é o próprio coeficiente de $q^{5n+3}$, já temos que o coeficiente de $q^{5n+3}$ na primeira parcela de $\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n$ é divisível por 5.

Passemos agora para $q(q^4;q^4)_\infty(q;q)_\infty^3$, o termo que nos interessa na segunda parcela da expressão (4.5) para a função geradora de $c\phi_4(2n)$. No entanto, ao invés de procurarmos os coeficientes de $q^{5n+3}$ em $q(q^4;q^4)_\infty(q;q)_\infty^3$, vamos procurar os coeficientes de $q^{5n+2}$ em $(q^4;q^4)_\infty(q;q)_\infty^3$.

Mais uma vez, conforme as proposições 1.2.11 e 1.2.12, apenas trocando $q$ por $q^4$ na Proposição 1.2.11, temos

$$\begin{aligned}(q;q)_\infty^3(q^4;q^4)_\infty &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)q^{\frac{1}{2}k(k+1)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{2m(3m-1)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{m+k}(2k+1)q^{\frac{1}{2}k(k+1)+2m(3m-1)}. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Procuramos expoentes de $q$ do tipo $5n+2$, i.e., soluções inteiras $k,m,n$ para $5n+2=\frac{k(k+1)}{2}+2m(3m-1)$. De modo semelhante ao que foi feito para chegarmos à expressão (4.9), olhemos a equação (4.10) $\pmod 5$. O que buscamos é resolver a congruência $2\equiv\frac{k(k+1)}{2}+2m(3m-1) \pmod 5$. Mas, $2\equiv\frac{k(k+1)}{2}+2m(3m-1) \pmod 5$ é equivalente a

$$\begin{aligned} 2 &\equiv \frac{k^2+k}{2}+6m^2-2m \pmod 5 \\ \Longleftrightarrow 4 &\equiv k^2+k+12m^2-4m \pmod 5 \\ \Longleftrightarrow 1 &\equiv 4k^2+4k+8m^2-16m \pmod 5 \\ \Longleftrightarrow 0 &\equiv 4k^2+4k+8m^2-16m+1+8 \pmod 5 \\ \Longleftrightarrow 0 &\equiv (2k+1)^2+3(m-1)^2 \pmod 5 \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Agora com $\beta=2k+1$ e $\alpha=m-1$, para que haja uma solução tal que $\beta^2+3\alpha^2\equiv 0 \pmod 5$, devemos ter $\alpha\equiv 0 \pmod 5$ e $\beta\equiv 0 \pmod 5$. Ou seja,

$2k+1 \equiv 0 \pmod 5$. Neste caso também $2k+1$ é o coeficiente dos termos da forma $q^{5n+3}$ na segunda parcela de $\sum c\phi_4(2n)q^n$.

Então, como o coeficiente de $q^{5n+3}$ nas duas parcelas de (4.5) é divisível por 5, concluímos que $c\phi_4(10n+6)$ é divisível por 5, ou seja, $c\phi_4(10n+6) \equiv 0 \pmod 5$, $\forall n \geq 0$.

$\square$

**Teorema 4.1.3. ([4], Theorem 3.1)** $\forall n \geq 0$, *temos que*

$$
\begin{aligned}
\textit{(i)}\ c\phi_4(2n+1) &\equiv 0 \pmod{4^2},\\
\textit{(ii)}\ c\phi_4(4n+3) &\equiv 0 \pmod{4^4},\\
\textit{(iii)}\ c\phi_4(4n+2) &\equiv 0 \pmod{4}.
\end{aligned}
$$

*Prova:* As demonstrações das congruências acima são bastante semelhantes e utilizam o mesmo artifício utilizado na demonstração do teorema anterior, isto é, avaliar a função $C\Phi_4(n)$ em $q$ e $-q$, somá-las ou subtraí-las e considerar os coeficientes restantes.

*(i)* Conforme o Teorema 3.1.1,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n &= \frac{\varphi^3(q^2) + 12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q;q)_\infty^4}\\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q;q^2)_\infty^4} + \frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q;q^2)_\infty^4}.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)(-q)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^{2n+1}
$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^{2n+1} &= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q;q^2)_\infty^4} + \frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q;q^2)_\infty^4} \\
&\quad - \left( \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (-q;q^2)_\infty^4} + \frac{-12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (-q;q^2)_\infty^4} \right) \\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4} \left\{ \frac{1}{(q;q^2)_\infty^4} - \frac{1}{(-q;q^2)_\infty^4} \right\} \\
&\quad + \frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4} \left\{ \frac{1}{(q;q^2)_\infty^4} + \frac{1}{(-q;q^2)_\infty^4} \right\} \\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4} \{(-q;q^2)_\infty^4 - (q;q^2)_\infty^4\} \\
&\quad + \frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4} \{(-q;q^2)_\infty^4 + (q;q^2)_\infty^4\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Mais uma vez utilizando os itens $(i)$ e $(ii)$ do Corolário 1.2.9, a expressão (4.12) torna-se

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4} \cdot \frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2} + \frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4} \cdot \frac{2\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2} \\
&= \frac{8q\varphi^3(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^4)_\infty^4} + \frac{24q\varphi^3(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^4)_\infty^4} \\
&= \frac{32q\varphi^3(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^4)_\infty^4} \cdot \frac{(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^4;q^4)_\infty^4} \\
&= \frac{32q\varphi^3(q^2)\psi^2(q^4)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^2)_\infty^4} \\
&= \frac{32q\varphi^3(q^2)\psi^2(q^4)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^{10}}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Então,

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^{2n+1} &= \frac{32q\varphi^3(q^2)\psi^2(q^4)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^{10}} \\
\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^{2n+1} &= \frac{16q\varphi^3(q^2)\psi^2(q^4)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^{10}}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Agora, dividindo por $q$ a expressão (4.14) e substituindo $q^2$ por $q$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^n = \frac{16\varphi^3(q)\psi^2(q^2)(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^{10}}. \tag{4.15}$$

Dessa forma, $c\phi_4(2n+1)q^n \equiv 0 \pmod{16}$.

*(ii)* Para a demonstração deste item, vamos utilizar a expressão (4.15) obtida acima, avaliando-na em $q$ e $-q$, e substituir nela as expressões *(i)* e *(ii)* da Proposição 1.2.6. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^n &= \frac{16\varphi^3(q)\psi^2(q^2)(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^{10}} \\
&= \frac{16(q^2;q^2)_\infty^{15}(q^4;q^4)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^{10}(q;q)_\infty^6(q^4;q^4)_\infty^6(q^2;q^2)_\infty^2} \\
&= \frac{16(q^2;q^2)_\infty^{17}}{(q^4;q^4)_\infty^2(q;q)_\infty^{16}} \\
&= \frac{16(q^2;q^2)_\infty^{17}}{(q^4;q^4)_\infty^2(q;q^2)_\infty^{16}(q^2;q^2)_\infty^{16}} \\
&= \frac{16(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2(q;q^2)_\infty^{16}}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n+1)(-q)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+3)q^{2n+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+3)q^{2n+1} &= \frac{16(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2(q;q^2)_\infty^{16}} - \frac{16(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2(-q;q^2)_\infty^{16}} \\
&= \frac{16(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2}\left\{\frac{1}{(q;q^2)_\infty^{16}} - \frac{1}{(-q;q^2)_\infty^{16}}\right\} \\
&= \frac{16(q^2;q^2)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2}\left\{\frac{(-q;q^2)_\infty^{16} - (q;q^2)_\infty^{16}}{(q^2;q^4)_\infty^{16}}\right\} \\
&= \frac{16(q^2;q^4)_\infty(q^4;q^4)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2(q^2;q^4)_\infty^{16}}\left\{(-q;q^2)_\infty^{16} - (q;q^2)_\infty^{16}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Notemos ainda que $(-q;q^2)_\infty^{16} - (q;q^2)_\infty^{16}$ é diferença de dois quadrados, isto é, $\Big\{(-q;q^2)_\infty^{8} - (q;q^2)_\infty^{8}\Big\}\Big\{(-q;q^2)_\infty^{8} + (q;q^2)_\infty^{8}\Big\}$. A expressão $(-q;q^2)_\infty^{8} + (q;q^2)_\infty^{8}$, por sua vez, pode ser reescrita como $\{(-q;q^2)_\infty^{4} - (q;q^2)_\infty^{4}\}^2 + 2(q^2;q^4)_\infty^4$. Assim, conforme o Corolário 1.2.9, temos

$$(-q;q^2)_\infty^{8} - (q;q^2)_\infty^{8} = \frac{16q\psi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4}$$

e

$$\{(-q;q^2)_\infty^{4} - (q;q^2)_\infty^{4}\}^2 + 2(q^2;q^4)_\infty^4 = \frac{64q^2\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4} + \frac{2(q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^4}.$$

Substituindo em (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{16(q^4;q^4)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty^2(q^2;q^4)_\infty^{15}} \cdot \frac{16q\psi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4}\left\{\frac{64q^2\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4} + \frac{2(q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^4}\right\} \\
=\;& \frac{16(q^4;q^4)_\infty^{14}}{(q^4;q^4)_\infty^{15}(q^2;q^4)_\infty^{15}} \cdot \frac{16q\psi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4}\left\{\frac{64q^2\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4} + \frac{2(q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^4}\right\} \\
=\;& \frac{16(q^4;q^4)_\infty^{14}}{(q^2;q^2)_\infty^{15}} \cdot \frac{16q(q^4;q^4)_\infty^{8}}{(q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^2)_\infty^4} \cdot \frac{64q^2\psi^4(q^4) + 2(q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^4} \\
=\;& \frac{256q(q^4;q^4)_\infty^{22}}{(q^2;q^2)_\infty^{27}} \cdot (64q^2\psi^4(q^4) + 2(q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^4)_\infty^4).
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
& 2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+3)q^{2n+1} = \frac{256q(q^4;q^4)_\infty^{22}}{(q^2;q^2)_\infty^{27}} \cdot (64q^2\psi^4(q^4) + 2(q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^4)_\infty^4) \\
\Longrightarrow\;& \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+3)q^{2n+1} = \frac{256q(q^4;q^4)_\infty^{22}}{(q^2;q^2)_\infty^{27}} \cdot (32q^2\psi^4(q^4) + (q^2;q^2)_\infty^4(q^2;q^4)_\infty^4).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dividindo a equação (4.17) por $q$ e substituindo $q^2$ por $q$, ficamos com

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+3)q^{n} = \frac{256(q^2;q^2)_\infty^{22}}{(q;q)_\infty^{27}} \cdot (32q\psi^4(q^2) + (q;q)_\infty^4(q;q^2)_\infty^4)$$

e, portanto,

$$c\phi_4(4n+3) \equiv 0 \pmod{4^4}.$$

*(iii)* Para esta demonstração, o processo será um pouco mais longo. Começamos fazendo $\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)(-q)^n$. Observemos que nesta soma os termos referentes a valores ímpares de $n$ cancelam-se e restam duas vezes os termos referentes a valores pares de $n$. Por isso, mais uma vez utilizando o resultado do Teorema (3.1.1), de modo análogo a como obtivemos a expressão (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)q^n + \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(n)(-q)^n \\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4}\{(-q;q^2)_\infty^4 + (q;q^2)_\infty^4\} \\
&\quad + \frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4}\{(-q;q^2)_\infty^4 - (q;q^2)_\infty^4\} \\
&= \frac{\varphi^3(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4} \cdot \frac{2\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2} + \frac{12q\varphi(q^2)\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4 (q^2;q^4)_\infty^4} \cdot \frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2} \\
&= \frac{2\varphi^5(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^4)_\infty^4} + \frac{96q^2\varphi(q^2)\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^4)_\infty^4} \\
&= \frac{2\varphi^5(q^2)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^2)_\infty^4} + \frac{96q^2\varphi(q^2)\psi^4(q^4)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^6 (q^2;q^2)_\infty^4} \\
&= \frac{2\varphi^5(q^2)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^{10}} + \frac{96q^2\varphi(q^2)\psi^4(q^4)(q^4;q^4)_\infty^4}{(q^2;q^2)_\infty^{10}}.
\end{aligned}$$

Dividindo a equação por 2 e substituindo $q^2$ por $q$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n = \frac{\varphi^5(q)(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^{10}} + \frac{48q\varphi(q)\psi^4(q^2)(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^{10}},$$

e no lugar de $\varphi(q)$ e $\psi(q)$ escrevendo as expressões da Proposição 1.2.6,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n &= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{25}(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^{10}(q^4;q^4)_\infty^{10}(q;q)_\infty^{10}} + \frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^8(q^2;q^2)_\infty^4}{(q;q)_\infty^2(q^4;q^4)_\infty^2(q^2;q^2)_\infty^4(q;q)_\infty^{10}} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{29}}{(q;q)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} + \frac{48q(q^2;q^2)_\infty^5(q^4;q^4)_\infty^6}{(q;q)_\infty^{12}} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(q;q^2)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^6}{(q;q^2)_\infty^{12}(q^2;q^2)_\infty^7}.
\end{aligned}$$

No entanto, os coeficientes da expressão acima ainda não são os que procuramos. Fazemos agora $\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)(-q)^n$. Nesse caso, restam os termos referentes a $n$ ímpar, isto é,

$$2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(2n)(-q)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(q;q^2)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^6}{(q;q^2)_\infty^{12}(q^2;q^2)_\infty^7} \\
&\quad - \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(-q;q^2)_\infty^{20}(q^4;q^4)_\infty^{10}} - \frac{-48q(q^4;q^4)_\infty^6}{(-q;q^2)_\infty^{12}(q^2;q^2)_\infty^7} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(q^4;q^4)_\infty^{10}}\left\{\frac{1}{(q;q^2)_\infty^{20}} - \frac{1}{(-q;q^2)_\infty^{20}}\right\} \\
&\quad + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^6}{(q^2;q^2)_\infty^7}\left\{\frac{1}{(q;q^2)_\infty^{12}} + \frac{1}{(-q;q^2)_\infty^{12}}\right\} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^9}{(q^4;q^4)_\infty^{10}(q^2;q^4)_\infty^{20}}\{(-q;q^2)_\infty^{20} - (q;q^2)_\infty^{20}\} \\
&\quad + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^6}{(q^2;q^2)_\infty^7(q^2;q^4)_\infty^{12}}\{(-q;q^2)_\infty^{12} + (q;q^2)_\infty^{12}\} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{10}}{(q^4;q^4)_\infty^{10}(q^2;q^4)_\infty^{20}(q^2;q^2)_\infty}\{(-q;q^2)_\infty^{20} - (q;q^2)_\infty^{20}\} \\
&\quad + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^{18}}{(q^2;q^2)_\infty^7(q^2;q^4)_\infty^{12}(q^4;q^4)_\infty^{12}}\{(-q;q^2)_\infty^{12} + (q;q^2)_\infty^{12}\} \\
&= \frac{(q^2;q^2)_\infty^{10}}{(q^2;q^4)_\infty^{10}(q^2;q^2)_\infty^{11}}\{(-q;q^2)_\infty^{20} - (q;q^2)_\infty^{20}\} \\
&\quad + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^{18}}{(q^2;q^2)_\infty^{19}}\{(-q;q^2)_\infty^{12} + (q;q^2)_\infty^{12}\} \\
&= \frac{(q^4;q^4)_\infty^{10}}{(q^2;q^2)_\infty^{11}}\{(-q;q^2)_\infty^{20} - (q;q^2)_\infty^{20}\} + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^{18}}{(q^2;q^2)_\infty^{19}}\{(-q;q^2)_\infty^{12} + (q;q^2)_\infty^{12}\}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

A fim de evitar uma escrita muito carregada, por um momento vamos denotar

$(-q;q^2)_\infty^4$ por $A$ e $(q;q^2)_\infty^4$ por $B$. Dessa forma,

$$(-q;q^2)_\infty^{20} - (q;q^2)_\infty^{20} = A^5 - B^5$$

e

$$(-q;q^2)_\infty^{12} + (q;q^2)_\infty^{12} = A^3 + B^3,$$

e a expressão (4.18) torna-se

$$\frac{(q^4;q^4)_\infty^{10}}{(q^2;q^2)_\infty^{11}}\{A^5 - B^5\} + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^{18}}{(q^2;q^2)_\infty^{19}}\{A^3 + B^3\}.$$

Observemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
(A-B)^5 &= A^5 - 5A^4B + 10A^3B^2 - 10A^2B^3 + 5AB^4 - B^5 \\
&= A^5 - B^5 - 5AB(A^3 - B^3) + 10A^2B^2(A-B) \\
\Longrightarrow A^5 - B^5 &= (A-B)^5 + 5AB(A^3 - B^3) - 10A^2B^2(A-B) \\
&= (A-B)\{(A-B)^4 + 5AB(A^2 + AB + B^2) - 10A^2B^2\} \\
&= (A-B)\{(A-B)^4 + 5AB(A-B)^2 + 5A^2B^2\}. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$A^3 + B^3 = (A+B)\{(A+B)^2 - 3AB\}. \qquad (4.20)$$

Substituindo $A - B$ e $A + B$ pelas expressões *(i)* e *(ii)* do Corolário 1.2.9 em (4.19) e (4.20), ficamos com

$$\begin{aligned}
A^5 - B^5 &= \frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\left\{\frac{4096q^4\psi^8(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^8} + \frac{5(q^2;q^4)_\infty^4 \cdot 64q^2\psi^4(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^4} + 5(q^2;q^4)_\infty^8\right\} \\
&= \frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\left\{\frac{4096q^4\psi^8(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^8} + \frac{320q^2\psi^4(q^4)}{(q^4;q^4)_\infty^4} + 5(q^2;q^4)_\infty^8\right\}
\end{aligned}$$

e

$$A^3 + B^3 = \frac{2\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\left\{\frac{4\varphi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4} - 3(q^2;q^4)_\infty^4\right\}.$$

Com isso, $2\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^{2n+1}$ torna-se

$$\begin{aligned}
&= \frac{(q^4;q^4)_\infty^{10}}{(q^2;q^2)_\infty^{11}}\cdot\frac{8q\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\left\{\frac{4096q^4\psi^8(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^8} + \frac{320q^2\psi^4(q^4)}{(q^4;q^4)_\infty^4} + 5(q^2;q^4)_\infty^8\right\}\\
&\quad + \frac{48q(q^4;q^4)_\infty^{18}}{(q^2;q^2)_\infty^{19}}\cdot\frac{2\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^2}\cdot\left\{\frac{4\varphi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4} - 3(q^2;q^4)_\infty^4\right\}\\
&= \frac{8q(q^4;q^4)_\infty^{10}\psi^2(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^{13}}\left\{\frac{4096q^4\psi^8(q^4)}{(q^2;q^2)_\infty^8} + \frac{320q^2\psi^4(q^4)}{(q^4;q^4)_\infty^4} + 5(q^2;q^4)_\infty^8\right\}\\
&\quad + \frac{96q(q^4;q^4)_\infty^{18}\varphi^2(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^{21}}\cdot\left\{\frac{4\varphi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4} - 3(q^2;q^4)_\infty^4\right\}.
\end{aligned}$$

Dividindo a equação acima por 2, obtemos $\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^{2n+1}$ e, finalmente, assim como nas demonstrações dos itens anteriores, dividindo por $q$ e substituindo $q^2$ por $q$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c\phi_4(4n+2)q^n &= \frac{4(q^2;q^2)_\infty^{10}\psi^2(q^2)}{(q;q)_\infty^{13}}\left\{\frac{4096q^2\psi^8(q^2)}{(q;q)_\infty^8} + \frac{320q\psi^4(q^2)}{(q^2;q^2)_\infty^4} + 5(q;q^2)_\infty^8\right\}\\
&\quad + \frac{48(q^2;q^2)_\infty^{18}\varphi^2(q)}{(q;q)_\infty^{21}}\cdot\left\{\frac{4\varphi^4(q)}{(q;q)_\infty^4} - 3(q;q^2)_\infty^4\right\}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, fica fácil perceber que $c\phi_4(4n+2) \equiv 0 \pmod 4$, concluíndo a demonstração do teorema.

□

## 4.2 Congruências módulo um primo $p$ qualquer

No artigo [1], em que Andrews define a classe de partições-F com $k$ cores, o autor prova, dentre outros resultados, que $\forall n \geq 0$, $c\phi_2(5n+3) \equiv 0 \pmod 5$.

Muitos outros autores também provaram congruências acerca de partições-F com $k$ cores, frequentemente para valores pequenos de $k$, como é o caso dos teoremas da seção anterior. O teorema a seguir remedia essa situação, permitindo-nos deduzir do resultado de Andrews uma família infinita de congruências para módulos arbitrariamente grandes. A prova desse resultado é bastante elementar e toma por referência o Princípio Geral, apresentado no Capítulo 2.

**Teorema 4.2.1. ([8], Theorem 2.2)** *Sejam $p$ primo e $r \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < r < p$. Se*

$$c\phi_k(pn + r) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \forall n \geq 0,$$

*então*

$$c\phi_{pN+k}(pn + r) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \forall N \geq 0, \quad \forall n \geq 0.$$

*Prova:* Considerando $p$ primo e $r \in \mathbb{Z}$, com $0 < r < p$, relembremos a identidade (2.2), de acordo com a qual a função geradora para $c\phi_{pN+k}(n)$ é o termo constante em $z$ de

$$\begin{aligned} &\prod_{n=0}^{\infty}(1 + zq^{n+1})^{pN+k}(1 + z^{-1}q^n)^{pN+k} \\ = \; &\prod_{n=0}^{\infty}(1 + zq^{n+1})^{pN}(1 + z^{-1}q^n)^{pN}\prod_{n=0}^{\infty}(1 + zq^{n+1})^{k}(1 + z^{-1}q^n)^{k}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pela expansão binomial e conforme a Definição 4.1.2, a expressão (4.21) é congruente, módulo $p$, a

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + (zq^{n+1})^p)^{N}(1 + (z^{-1}q^n)^p)^{N}\prod_{n=0}^{\infty}(1 + zq^{n+1})^{k}(1 + z^{-1}q^n)^{k}. \tag{4.22}$$

O primeiro produtório de (4.22) é uma função de $q^p$ e o segundo produtório é aquele de onde obtemos a função geradora para $c\phi_k(n)$, tomando seu termo em $z^0$.

Dessa forma, ao tomarmos o termo em $z^0$ de (4.21) para obtermos a função geradora de $c\phi_{pN+k}(n)$, se já tivermos $c\phi_k(pn+r) \equiv 0 \pmod{p}, \quad \forall n \geq 0$, proveniente do segundo produtório de (4.22), teremos também

$$c\phi_{pN+k}(pn+r) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \forall n \geq 0, \quad \forall N \geq 0.$$

□

Notemos que, para obter o resultado acima, foi preciso exigir hipóteses fortes, restringindo a validade do teorema a um fato cuja ocorrência não é conhecida para a maioria dos valores de $k$ e $p$, a saber, quando podemos garantir que $c\phi_k(pn+r) \equiv 0 \pmod{p}$. No entanto, como comentado no início desta seção, Andrews ([1], Corollary 10.1) provou que $\forall n \geq 0$, $c\phi_2(5n+3) \equiv 0 \pmod{5}$. Portanto, esse resultado permite-nos enunciar um corolário que segue imediatamente do Teorema 4.2.1.

**Corolário 4.2.2. ([8], Corollary 2.4)** $\forall N \geq 0, \quad \forall n \geq 0,$

$$c\phi_{5N+2}(5n+3) \equiv 0 \pmod{5}.$$

□

Outro corolário que segue do Teorema 4.2.1 depende de um importante resultado devido a Ramanujan. São as chamadas congruências clássicas de Ramanujan, que podem ser encontradas tanto no livro de Berndt [5] como nos livros de Andrews [2] e [3]. Observando uma listagem dos valores de $p(n)$ para os primeiros valores de $n$ (que pode ser encontrada à página 51 de [3]), Ramanujan percebeu alguns padrões no seu comportamento e conjecturou que

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}. \tag{4.23}$$

Algum tempo depois, além de comprovar a congruência acima, Ramanujan demonstrou ainda as seguintes congruências:

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7, \tag{4.24}$$

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}. \tag{4.25}$$

Relembrando o Exemplo 2.1.1, observemos que as partições enumeradas por $p(n)$ são as mesmas enumeradas por $\phi_1(n)$, e que por sua vez são as mesmas enumeradas por $c\phi_1(n)$. Portanto, podemos reescrever as congruências (4.23), (4.24) e (4.25) como

$$\begin{aligned} c\phi_1(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5, \\ c\phi_1(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7, \\ c\phi_1(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Agora, como resultado do Teorema 4.2.1, obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 4.2.3. ([8], Corollary 2.3)** $\forall N \geq 0, \quad \forall n \geq 0,$

$$\begin{aligned} c\phi_{5N+1}(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5, \\ c\phi_{7N+1}(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7, \\ c\phi_{11N+1}(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

□

# Referências Bibliográficas


[1] Andrews, G. E., *Generalized Frobenius Partitions*, Memoirs of the American Mathematical Society, 49(301) (1984).

[2] Andrews, G. E., *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

[3] Andrews, G. E.; Eriksson, K., *Integer Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[4] Baruah, N. D.; Sarmah, B. K., *Congruences for generalized Frobenius partitions with 4 colors*, Elsevier B.V., Discrete Mathematics 311, p.1892-1902 (2011).

[5] Berndt, B. C., *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, Student Mathematical Library, 34, American Mathematical Society (2006).

[6] Berndt, B. C., *Ramanujan's Notebooks Part III*, Springer-Verlag, New York (1991).

[7] Cao, Z., *Integer Matrix Exact Covering Systems and Product Identities for Theta Functions*, arXiv:1005.5116v1 [math.NT], 27 May 2010.

[8] Garvan, F. G.; Sellers, J. A., *Congruences for Generalized Frobenius Partitions with an Arbitrarily Large Number of Colors*, INTEGERS Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 14 (2014)

[9] Sellers, J. A., *An Unexpected Congruence Modulo 5 for 4-Colored Generalized Frobenius Partitions*, Journal of Indian Mathematical Society, Special Volume to Commemorate the 125th Birth Anniversary of Srinivasa Ramanujan, p.97-103 (2013).