

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Órbitas Quirais, Classes de Conjugação e Dinâmica Holomórfica sem Pontos Críticos[†]

Antônio Endler

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de *Doutor em Ciências*.

Porto Alegre, 14 de dezembro de 2006

[†]Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*aos meus pais: Luiz Carlos Endler e Gerta Endler,
e à memória de meu avô, Vendelino Endler, und seine "ewiges werk" . . .*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- *Aos meus pais pelo apoio de sempre.*
- *Ao meu orientador Dr. Jason Gallas, pela paciência, por tudo que me ensinou e por nunca perder a confiança em mim.*
- *À TODOS os professores que tive em minha vida, um pouco de cada um deles está neste trabalho.*
- *Aos colegas da sala M207.*
- *Aos meus amigos de Imigrante/RS, minha cidade natal.*
- *Aos amigos lusitanos Pedro Lind e Joana Freire, pela amizade e a ajuda neste trabalho.*
- *À todos os alunos que tive na cadeira de Física IC.*
- *Aos colegas professores da cadeira de Física IC: Jeferson Arenzon, Janaina Borges, Mauro Rickes que me ajudaram corrigindo provas na semana da minha apresentação de doutorado.*
- *À Casa do Estudante da UFRGS pelo alojamento durante o período de graduação e o meu primeiro ano de mestrado.*
- *À sociedade brasileira que custeia essa Universidade.*

Resumo

Nesta Tese discutimos três problemas chave que estabelecem um número de conexões entre aspectos fundamentais e aplicações práticas em Dinâmica Não-Linear.

No primeiro capítulo revisamos conceitos básicos e como simplificar e resolver de modo exato as equações de movimento de um difeomorfismo polinomial que exibe um cenário rico em complexidade, da integrabilidade ao caos dissipativo: o mapa de Hénon. Apresentamos resultados exatos definindo todas as órbitas periódicas de períodos até 6 no limite Hamiltoniano do modelo para uma de não-linearidade representativa onde existe uma ferradura completa de Smale, quando todas órbitas possíveis são reais. Mostramos que é possível classificar as órbitas segundo as irracionalidades algébricas envolvidas nas soluções exatas, re-ordenando e mostrando inter-dependências dos rótulos normalmente derivados através da dinâmica simbólica. Nossas soluções exatas permitem-nos resolver de uma vez por todas o enigma do centro de massa orbital, que consiste na observação empírica, apresentada na literatura, da simplificação freqüente da soma das coordenadas dos pontos orbitais em simples números racionais.

No segundo capítulo mostramos que, ainda no limite Hamiltoniano mas para valores arbitrários do parâmetro de não-linearidade, o conjunto das órbitas periódicas é formado por três classes de conjugação algébrica bem definidas. Mostramos que a classe das órbitas assimétricas é composto por pares de órbitas que exibem simetria quiral. Apesar de ser comum na literatura estudar-se preferencialmente apenas as órbitas simétricas, mostramos que as órbitas assimétricas são as que dominam por completo a estatística orbital à medida que o período cresce. Por exemplo, para período 20, computamos que 97.2% das 52377 órbitas existentes, consideradas até aqui como meramente assimétricas são, na verdade, pares de órbitas com simetria quiral.

A Tese é concluída no terceiro capítulo, onde apresentamos um estudo numérico para verificar alguns aspectos dinâmicos que, devido à extensão dos cálculos, não podem ser decididos analiticamente como nos dois capítulos precedentes. Mais especificamente, estudamos a conexão entre os espaços de fase real e complexo de mapa de Hénon dissipativos, quando se mantém os parâmetros de controle no domínio real. Tal cenário nos permite encontrar dois resultados novos: (i) a existência de uma infinidade de órbitas periódicas que, apesar de existirem no plano complexo, são estáveis para valores reais dos parâmetros de controle, e (ii) que os pontos críticos, atores centrais hoje em dia da dinâmica holomórfica (i.e. analítica complexa), na verdade são totalmente não-essenciais. Isto porque, como demonstramos, a mesma fenomenologia da dinâmica holomórfica pode ser obtida num regime realístico onde sequer é possível definir-se pontos críticos. Em particular, mostramos como obter conjuntos mais gerais que o famoso conjunto de Mandelbrot sem envolver considerações de pontos críticos.

Abstract

In this Thesis we discuss three key problems that establish a number of connections between fundamental aspects and practical applications in Nonlinear Dynamics.

In the first chapter we review basic concepts and how to simplify and exactly solve the equations of motion of a polynomial diffeomorphism which exhibits a full range of complexity, from integrability to dissipative chaos: the Hénon map. We report exact results defining all periodic orbits with periods up to 6 in the Hamiltonian limit of the model for a representative nonlinearity supporting a full Smale horseshoe, when all possible orbits are real. We show that it is possible to classify the orbits according the algebraic irrationality involved in the exact solutions, re-ordering and making visible interdependencies of the labels normally derived via symbolic dynamics. Our exact solution allow us to solve for good the puzzle of the orbital center-of-mass.

In the second chapter we show that, still in the Hamiltonian limit but for arbitrary values of the nonlinearity parameter, the set of periodic orbits is composed by three well-defined algebraic conjugacy classes. We show that the class of asymmetrical orbits is composed by pairs of orbits exhibiting a chiral symmetry. Although in the literature it is common to study mainly symmetrical orbits, we show that it is the asymmetric orbits that completely dominate the orbital statistics when the period grows. For instance, for period 20 we computed that 97.2% of the 52377 existing orbits, considered thus far as being merely asymmetric orbits, are in fact pairs of orbits with chiral symmetry.

The Thesis concludes in the third chapter, where we present a numerical study to verify some dynamical aspects that, due to the extension of the calculations, cannot be decided analytically as in the two preceding chapters. More specifically, we study the connection between the real and the complex phase-spaces of the dissipative Hénon map when maintaining the control parameters in the real domain. This scenario allows us to find two new results which are extremely surprising: (i) The existence of an infinity of periodic orbits which, albeit living in the complex plane, are stable for real values of the control parameters, and (ii) That the critical point, key players nowadays in holomorphic (i.e. analytic complex) dynamics, in fact are totally non-essential. This because, as we show, the same phenomenology of holomorphic dynamics may be obtained in a realistic regime where it is not even possible to define critical points. In particular, we show how to obtain sets more general than the famous Mandelbrot set without considering critical points.

Sumário

Introdução	1
1 Solução do Enigma do “Centro de Massa” Orbital	5
1.1 Introdução	5
1.2 As equações orbitais exatas	8
1.2.1 Órbitas exatas de períodos 1, 2 e 3	8
1.2.2 Órbitas exatas de período 4	10
1.2.3 Órbitas exatas de período 5	12
1.2.4 Órbitas exatas de período 6	14
1.3 A solução do enigma	18
2 Quiralidade e Classes de Conjugação no Limite Hamiltoniano	19
2.1 Simetrias	19
2.2 Classes de conjugação	21
2.3 Amalgamamentos e ordenamentos algébricos gerais	26
3 Mandelbrot sem Pontos Críticos	31
3.1 Dinâmica no plano complexo: O conjunto de Mandelbrot	31
3.2 Hénon com variáveis complexas e parâmetros reais	33
3.3 Conjuntos tipo Mandelbrot e mais gerais	39
Conclusões	47
A Expressões gerais de S_k para $k=7$ e 8	48
B Fatores das decomposição de S_k para $k=7, 8, 9, 10$	57
C Amalgamamentos para $k=7, 8, 9$ e 10	61
D Artigos Publicados	72
Referências	72

Introdução

A presente Tese consiste basicamente de três capítulos, cada um deles apresentando resultados novos, obtidos ao estudar-se um sistema dinâmico paradigmático muito popular na literatura, conhecido pelo nome de “mapa de Hénon”[1]. As surpresas que encontramos são resultado de olharmos um sistema dinâmico bem conhecido com novos olhos, sob pontos de vistas radicalmente diferentes daqueles cristalizados nos últimos 20 anos no estudo de Sistemas Dinâmicos, onde o espaço de fase e as investigações numéricas dominam a cena. Assim, além dos resultados novos, cada capítulo pode ser considerado como introduzindo uma nova perspectiva para analisar sistemas dinâmicos. Apesar de focarmos aqui o mapa de Hénon explicitamente, a metodologia utilizada é válida genericamente, conforme discutimos mais adiante. Desde a introdução do mapa de Hénon há 30 anos, ele vem sendo continuamente estudado por apresentar uma não-linearidade quadrática, a menor possível, e ter dimensão maior do que 1, o que faz com que seja bem mais realístico do que situações unidimensionais tão populares e eficientes em muitos casos. Por isto, o mapa de Hénon é provavelmente o protótipo mais bem estudado e conhecido de sistemas dinâmicos multidimensionais, tanto com dissipação quanto sem.

Sucintamente, o mapa de Hénon é um sistema dinâmico formado por um par de equações de movimento regidas por uma variável temporal t discreta. O par de equações define a evolução temporal das variáveis (x_t, y_t) , sendo tal evolução regulada através de dois parâmetros (a, b) de controle. Ambas equações de movimento são contínuas com inversa também contínua (difeomorfismo), sendo definidas assim:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a - x_t^2 + b y_t, \\y_{t+1} &= x_t.\end{aligned}\tag{1}$$

Na literatura encontram-se expressões distintas para o mapa de Hénon, todas sendo entretanto equivalentes, após efetuarem-se transformações simples das equações. A forma que escolhemos, uma das mais populares na literatura, tem a grande vantagem de produzir *polinômios mônicos* como equações de movimento, isto é, polinômios cujo coeficiente do termo de maior grau é a unidade. A importância de tal fato será explicada e explorada nos dois primeiros capítulos.

O mapa de Hénon foi introduzido em 1976 como uma simplificação da secção de Poincaré para o modelo de Lorenz da convecção em fluidos. O grande problema então era descobrir sem sombra de dúvidas se o “caos determinístico” do modelo de Lorenz era fato real ou erro numérico. Desde sua introdução, o mapa de Hénon vem sendo investigado ininterruptamente e num crescendo por ser considerado um modelo excelente dos fenômenos matemáticos vistos apenas após arduas computações em sistemas de equações diferenciais não-lineares. O uso de mapas discretos no tempo é muito popular devido a imensa facilidade e precisão computacional de se iterar mapas numericamente, em contraste com as bem conhecidas dificuldades e tempo necessários para integrar sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares.

Dependendo dos valores dos parâmetros (a, b) , certas regiões do chamado “espaço de fase” (i.e. do espaço $x \times y$) dão origem a trajetórias cujas coordenadas crescem sem limites, convergindo para um atrator localizado a uma distância infinita da origem $(0, 0)$ das coordenadas. Outras tra-

jetórias, quase sempre as de maior interesse, permanecem limitadas a distâncias finitas, podendo ser periódicas ou não. Tradicionalmente, um dos problemas básicos da dinâmica é discriminar periodicidade de não-periodicidade, determinar tamanhos e natureza (estrutura topológica) das regiões de convergência bem como de suas fronteiras, caracterizando-as e classificando-as de acordo com o comportamento das trajetórias que elas contém. O estudo do *espaço de fase* dos sistemas dinâmicos não-lineares determinísticos tem mantido ocupada uma parte considerável da comunidade nestes últimos 25 anos. Tais estudos revelaram fatos surpreendentes sobre o comportamento da natureza, sendo uma das descobertas de maior impacto a chamada “natureza fractal” associada com a existência de auto-similaridades no espaço de fase, onde as estruturas apresentam sempre o mesmo tipo de sub-estruturas, independentemente do nível de detalhe com que são observadas.

Entretanto, uma limitação muito característica desta fase da dinâmica não-linear é o estudo eminentemente *numérico* e, adicionalmente, restrito quase predominantemente ao espaço de fase. Existe ainda uma dicotomia entre “teoria” e “aplicações” que faz com que o estudo da dinâmica ainda avance, infelizmente, por dois caminhos distintos que dificilmente se cruzam. Enquanto um tipo de pesquisadores restringe seus estudos à dinâmica no domínio complexo, outro tipo de pesquisadores tende a considerar quase que exclusivamente a dinâmica no domínio real.

Os dois primeiros capítulos apresentam novidades obtidas graças ao fato de resolvermos analiticamente as equações de movimento, sem aproximações numéricas usuais. Em outras palavras, exploramos a dinâmica deste PONTO DE VISTA ALGÉBRICO o que, como mostramos, revela muitos aspectos e regularidades inesperadas e nada usuais.

No terceiro capítulo exploramos um regime dinâmico muito frutífero e que foi até aqui ignorado na literatura. Em vez da dicotomia real \times complexo acima mencionada, nós mostramos haver um mundo novo amplo e rico ao permitir-se uma “dinâmica mista”, no sentido de, mantendo-se os parâmetros de controle no domínio real, permitir que as variáveis físicas possam assumir valores no plano complexo. Tal perspectiva nos permite ver claramente que fatos isolados e aparentemente desconexos na literatura atual, na verdade não são nada mais do que pedaços isolados de uma situação bem mais geral que os inclui todos como casos particulares, mostrando como e em que ordem podem ser todos obtidos.

Como mencionado, no mapa de Hénon as variáveis x, y definem um espaço de fases bidimensional enquanto que o par (a, b) define o chamado espaço de parâmetros do sistema, no qual a é o parâmetro de não-linearidade do sistema e b o parâmetro de dissipação. No intervalo $|b| < 1$ o mapa é dissipativo, sendo completamente dissipativo quando $b = 0$, valor no qual as variáveis desacoplam-se, com a dinâmica da variável x coincidindo com o mapa quadrático $x_{t+1} = a - x_t^2$, já amplamente estudado na literatura. Para $|b| = 1$ o mapa é não -dissipativo. Mais especificamente, para $b = 1$ o mapa reverte áreas enquanto que preserva áreas para $b = -1$. Portanto, neste último limite o mapa é Hamiltoniano, para $|b| > 1$ não existe nenhuma trajetória estável no espaço de fase.

Uma órbita de período k deste mapa é dita ser *genuinamente* de período k quando contiver k pontos (x_i, y_i) *todos distintos*. Para uma órbita genuína de período $k = 4$ temos a seguinte seqüência de pontos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \dots, \quad (2)$$

onde $x_i \neq x_j$.

Da seqüência acima ve-se claramente a existência de uma total redundância entre os valores na linha superior com os da linha inferior. Tal redundância provém da equação $y_{t+1} = x_t$ na Eq. (1) acima, que mostra y_t ser a coordenada x_t meramente atrasada de um passo temporal. Portanto, apesar do *ordenamento* orbital exigir o correto *pareamento* das coordenadas que definem os pontos

orbitais, vemos que para efeitos de cálculo de tais coordenadas basta considerarmos apenas uma equação (e não as duas na Eq. (1)). Sem perda de generalidade podemos determinar as coordenadas usando a representação a dois índices do mapa, dada por

$$x_{t+2} = a - x_{t+1}^2 + bx_t. \quad (3)$$

Note que a bidimensionalidade manifesta-se agora através da necessidade de se fornecer duas condições iniciais para poder iniciar o processo iterativo.

Os inúmeros resultados analíticos exatos apresentados neste trabalho apenas puderam ser obtidos graças a um eficiente método desenvolvido durante meu Mestrado [4, 5, 6, 7, 8]. De certo modo, quase todos os resultados aqui apresentados podem ser considerados como sendo basicamente aplicações do método que foi desenvolvido anteriormente no Mestrado. Nosso método permite obter as equações de movimento exatas para sistemas dinâmicos algébricos de dimensões arbitrárias, onde o adjetivo “algébrico” refere-se a sistemas envolvendo apenas funções racionais nas suas equações de movimento, em particular, envolvendo polinômios. Como já explicamos nas referências originais [4, 5, 6, 7, 8], nosso método é válido genericamente para qualquer sistema dinâmico algébrico com tempo discreto, contendo um número arbitrário indefinido de parâmetros físicos de controle. Aqui, para simplificar, nos restringiremos a apresentar o método já aplicado ao mapa de Hénon, um sistema bidimensional com dois parâmetros.

O método envolve três passos bem definidos:

1. redução do sistema de equações multidimensionais que define o problema físico a um sistema unidimensional equivalente;
2. parametrização da equação unidimensional equivalente através de eliminações sucessivas que visam expressar os coeficientes algébricos do sistema unidimensional equivalente em termos de uma qualquer de suas raízes. Este passo gera também um polinômio auxiliar de vínculo, que define os valores numéricos possíveis do parâmetro.
3. solução da equação parametrizada juntamente com a equação auxiliar, fornecendo as coordenadas dos pontos orbitais.

Este procedimento sera demonstrado explicitamente no capítulo a seguir.

Para cada órbita periódica de período k , a equação parametrizada acima mencionada é obtida após k iterações sucessivas do mapa (3), com uma subsequente eliminação de todas menos uma variável. Isto produz um polinômio em uma única variável x , digamos, polinômio que quando igualado a zero dá origem a uma equação que chamaremos de *equação orbital*. Para o mapa de Hénon, o polinômio depende dos dois parâmetros a, b do mapa. Ele será denotado aqui genericamente assim:

$$\begin{aligned} P_k &\equiv P_k(x, a, b; \sigma) = \prod_{i=1}^k (x - x_i) \\ &= x^k - \sigma x^{k-1} + \theta_{k-2} x^{k-2} + \dots - (-1)^{k-2} \theta_2 x^2 + (-1)^{k-1} \theta_1 x - (-1)^k \theta_0 \end{aligned} \quad (4)$$

onde o grau k é o período orbital, e os coeficientes $\theta_i = \theta_i(a, b, \sigma)$ são as conhecidas *funções simétricas elementares* da Álgebra Elementar, parametrizados aqui através de σ , a soma das coordenadas dos k pontos periódicos x_i , $i = 1, \dots, k$. Os valores de σ por sua vez são determinados pela solução da importante equação auxiliar de vínculo mencionada, denotada genericamente assim:

$$S_k(\sigma, a, b) = \prod_{i=1}^{M_k} V_i(a, b) \sigma^i = 0, \quad (5)$$

de grau M_k , o número total de órbitas de período k , e $V_i(a, b)$ indicam os coeficientes que definem a equação de vínculo. Exemplos explícitos são dados no capítulo seguinte.

A estabilidade de uma órbita de período k para o mapa em questão é definida pelos autovalores da matriz Jacobiana

$$J_k = J(x_k)J(x_{k-1})J(x_{k-2}) \dots J(x_2)J(x_1), \quad (6)$$

onde cada matriz individual, contendo um ponto orbital, é dada por

$$J(x_i) = \begin{pmatrix} -2x_i & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Como bem sabido, os autovalores são obtidos resolvendo-se o determinante $|J_k - \lambda I| = 0$, que conduz à equação secular

$$\Lambda_k = \lambda^2 + \mathcal{S}\lambda + (-b)^k = 0. \quad (8)$$

Para $\lambda = 1$ esta equação fornece uma relação que define as bifurcações de dobra (também conhecida como tangente) e, analogamente, para $\lambda = -1$ obtemos uma outra relação que define as bifurcações de dobramento de período. Como acima para a equação orbital, a equação de autovalores Eq. (8) pode ser igualmente escrita em termos do parâmetro auxiliar σ , de modo a ter-se, após cálculos simples porém muito longos, uma expressão para \mathcal{S} envolvendo apenas a, b, σ , e não mais os pontos orbitais x_i :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(a, b, \sigma). \quad (9)$$

No primeiro capítulo desta Tese usamos técnicas algébricas gerais desenvolvidas para estudar o limite Hamiltoniano, $b = -1$, do mapa de Hénon. Apresentamos uma explicação analítica para o enigma do “centro de massa” observado por Gabor Vattay quando do estudo numérico do fenômeno conhecido como *dínamo cinético* [2].

No segundo capítulo mostramos que as equações algébricas definindo órbitas periódicas aparecem naturalmente segregadas em três classes de conjugação algébrica. Tais classes implicam numa série de propriedades nunca vistas antes, que são discutidas ao longo do capítulo todo.

No terceiro e último capítulo estudamos o mapa de Hénon supondo um espaço de fase complexo porém mantendo os parâmetros reais. Mostramos que as regiões de estabilidade das órbitas complexas permitem-nos obter uma imensa variedade de conjuntos que tem semelhanças estruturais e métricas com o muito conhecido conjunto de Mandelbrot, porém envolvendo muito mais riqueza e contendo o conjunto de Mandelbrot num limite específico muito particular. Discutimos ainda aspectos da conexão da dinâmica das órbitas complexas com a das órbitas reais.

Capítulo 1

Solução do Enigma do “Centro de Massa” Orbital

Neste capítulo abordamos o problema do centro de massa orbital de maneira exata, anteriormente tratado na literatura apenas de maneira empírica, via as equações algébricas que definem os movimentos periódicos do mapa de Hénon no seu limite Hamiltoniano e para um parâmetro de não-linearidade, onde todas as órbitas existem e são instáveis (ferradura de Smale). Alguns dos resultados principais deste capítulo foram publicados na Ref. [73].

1.1 Introdução

Durante um estudo numérico de um efeito chamado de *dinamo cinético*, Cvitanovič e colaboradores [2] observaram o que ficou conhecido como o problema do *centro de massa orbital*. Tal problema consiste em determinar-se a “natureza aritmética” da soma das coordenadas dos pontos periódicos de trajetórias. Como enfatizado originalmente, com o uso do mapa de Hénon como modelo, verificou-se [2] que para algumas órbitas de períodos particulares, a soma σ das coordenadas dos pontos orbitais, i.e. o centro de massa, por vezes assumia valores numéricos particularmente simples, a saber, por números racionais.

Tal descoberta foi feita para um ponto particular no espaço de parâmetros: $(a, b) = (6, -1)$. Para $b = -1$ o mapa de Hénon, definido pela equação

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + b x_{t-1}, \quad (1.1)$$

preserva áreas e é uma transformação simplética automórfica: automórfica pois o mapa é transformado em si próprio enquanto sua estrutura é preservada, e simplética uma vez que preserva áreas.

O valor $a = 6$ foi escolhido por um motivo simples. Sabe-se que à medida que aumentamos o valor de a a dinâmica se torna cada vez mais caótica até um valor crítico [3], $a_c \approx 5.69931078670\dots$, de maneira que para valores de a maiores que este, todas as órbitas existem no plano real e são instáveis, sendo possível associar um nome binário unívoco para cada órbita. Tecnicamente, dizemos que para $a > a_c$ temos o que se chama de uma *ferradura de Smale* completa. A escolha de $a = 6$ deve-se ao fato que este valor é o menor número inteiro para o qual temos uma ferradura completa.

A Tabela 1.1 apresenta uma coleção de resultados para o mapa de Hénon, obtidos para $a = 6$. Nosso objetivo inicial será rever o conhecido processo derivado através da *dinâmica simbólica* para atribuir “nomes”, isto é rótulos, para as órbitas descritas na Tabela 1.1 bem como em tabelas e figuras subsequentes. Para discussões mais detalhadas do processo de rotulamentos veja, por exemplo, as referências [9, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

Tabela 1.1: A soma σ dos pontos orbitais para todas as órbitas até $k = 6$ quando $a = 6$. σ é um número inteiro sempre que seu grau algébrico é 1. Pares conjugados de irracionalidades quadráticas tem partes decimais idênticas e são mostrados em negrito. As somas orbitais das referências originais [2, 9] são obtidas dividindo σ por $a = 6$. As classes D, N, C são definidas em seções posteriores.

Período	Rótulo		σ	Grau de σ	Classe
	Binário	Decimal			
1	0	1,0	-3.6457513	2	D($\sqrt{7}$)
	1	1,1	1.6457513	2	D($\sqrt{7}$)
2	01	2,1	2	1	N($\sqrt{3}$)
3	001	3,1	-1.2360679	2	D($\sqrt{5}$)
	011	3,3	3.2360679	2	D($\sqrt{5}$)
4	0001	4,1	-4.8989794	2	N(α)
	0011	4,3	0	1	D($\sqrt{6}$)
	0111	4,7	4.8989794	2	N(β)
5	00001	5,1	-8.5561932	6	D(χ)
	00011	5,3	-3.6399244	6	D(χ)
	00101	5,5	0.9082530	6	D(χ)
	00111	5,7	1.4907793	6	D(χ)
	01011	5,11	5.2241728	6	D(χ)
	01111	5,15	6.5729124	6	D(χ)
6	000001	6,1	-12.204805	3	N(ξ)
	000011	6,3	-7.2915026	2	D($\sqrt{7}$)
	000101	6,5	-2.7039746	3	N(ξ)
	000111	6,7	-2.1961524	2	N($\sqrt{3}$)
	001011	6,11	2	1	C(φ)
	001101	6,13	2	1	C(φ)
	001111	6,15	3.2915026	2	D($\sqrt{7}$)
	010111	6,23	6.908780	3	N(ξ)
	011111	6,31	8.1961524	2	N($\sqrt{3}$)

Como já mencionado, para $a = 6$ o mapa exibe uma ferradura de Smale completa [24] e, portanto, é possível associar a cada ciclo periódico um único rótulo obtido iterando-se a Eq. (1.1) e armazenando os sinais s_j dos sucessivos pontos orbitais de acordo com a seguinte regra:

$$s_j = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j < 0, \\ 1 & \text{se } x_j > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Chamamos de *ciclo* $s_1 s_2 \cdots s_k$ ao conjunto de pontos periódicos que pertencem a uma dada órbita periódica de comprimento k , ou seja, ao conjunto

$$\{x_{s_1 s_2 \cdots s_k}, x_{s_2 \cdots s_k s_1}, \cdots, x_{s_k s_1 \cdots s_{k-1}}\}.$$

Um ciclo p de comprimento k_p corresponde a uma única seqüência de pontos da órbita; seu rótulo é um bloco de k_p símbolos que não podem ser escritos como uma repetição de um bloco menor. Um ciclo é invariante frente a permutações cíclicas dos símbolos. Aqui nós rotulamos os ciclos usando a menor representação binária possível obtida quando permutamos todos os códigos constituintes do rótulo.

Cada permutação cíclica dos códigos existentes em um rótulo de ciclo é necessariamente um rótulo de algum *ponto* no ciclo.

Os pontos orbitais podem ser rotulados usando estas permutações como segue. O primeiro símbolo em um rótulo, isto é o símbolo mais a esquerda, será “0” ou “1”, dependendo do sinal de sua coordenada x_j , seguindo a regra especificada pela regra (1.2). Os símbolos subseqüentes no rótulo são definidos pelos sinais das coordenadas x_j dos pontos subseqüentes, na ordem que eles são visitados no ciclo.

Em outras palavra, na linguagem da referência [9], cada *ponto do ciclo* é rotulado pelos primeiros k_p passos de seu “itinerário futuro”. Por exemplo, os 3 pontos consecutivos do triângulo menor na Fig. 1.1, são

$$\{x_{011}, x_{110}, x_{101}\}.$$

Este 3-ciclo, i.e. esta órbita de período 3 é rotulada pela seqüência 011.

No limite em que todas as possíveis órbitas existem os rótulos binários da ferradura de Smale são úteis, porque eles atribuem um único nome para cada ponto periódico e facilitam a contagem dos ciclos [24, 22, 25, 26, 27, 28]. O número M_k de ciclos de período k (veja Tabela 1.1) está relacionado com os 2^k pontos orbitais através da fórmula de inversão de Möbius

$$M_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(k/d) 2^d. \quad (1.3)$$

onde $\mu(n)$ é a função de Möbius e, como indicado, a soma é feita sobre todos os divisores d de k .

Como os rótulos binários crescem muito rápido em tamanho para períodos altos, achamos conveniente rotular as órbitas não do modo usual através dos rótulos binários mas através de um par de inteiros decimais k, m , onde k denota o período da órbita e m é o número decimal equivalente ao código binário.

A nossa proposta a seguir é analisar o problema do centro de massa da órbita a partir de um ponto de vista algébrico, isto é, em termos das equações de movimento exatas. Em outras palavras, desejamos determinar o valor numérico exato da soma das coordenadas dos pontos orbitais, de modo a entender a origem dos “valores mais simples” observados empiricamente por Cvitanovič e colaboradores [2]. A primeira tarefa é obter e resolver as equações exatas de movimento, para assim obter os coordenadas orbitais e poder somá-las.

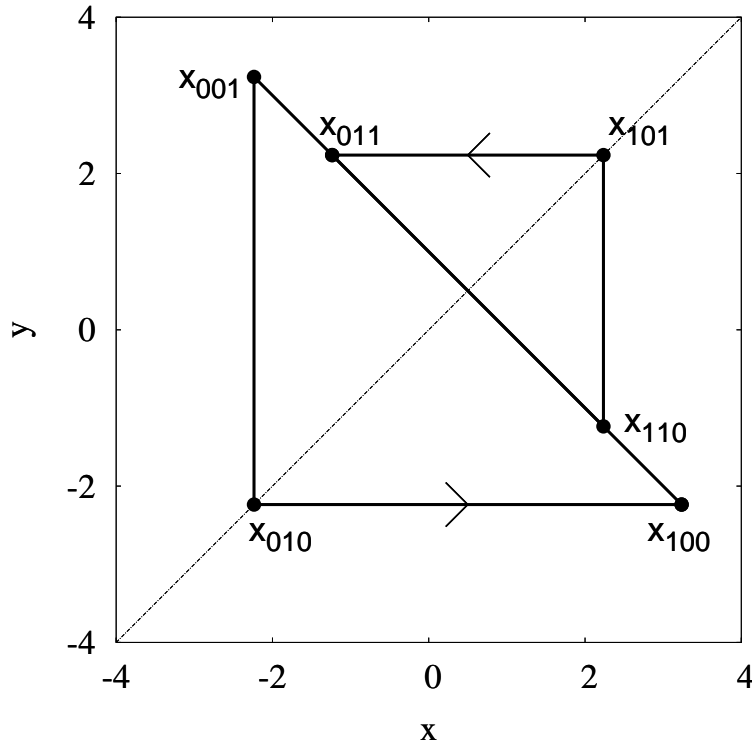


Figura 1.1: O par de ciclos de período 3 do mapa de Hénon: Ambos ciclos possuem um ponto na diagonal. Frente a uma reflexão em relação à diagonal, ambos triângulos são mapeados sobre si próprios.

1.2 As equações orbitais exatas

1.2.1 Órbitas exatas de períodos 1, 2 e 3

Como mostramos anos atrás [4, 5, 6], para uma dada órbita de período k , o problema de se obter a informação orbital clássica máxima pode ser sempre reduzido à obtenção dum par de polinômios, $P_k(x)$ e $S_k(\sigma)$, algebricamente determináveis.

Os pares $P_k(x)$ e $S_k(\sigma)$ que fornecem a informação máxima sobre todas as possíveis órbitas periódicas dos 3 menores períodos $k = 1, 2, 3$ são os seguintes:

$$P_1(x) = x^2 + 2x - a, \quad (1.4a)$$

$$S_1(\sigma) = \sigma^2 + 2\sigma - a. \quad (1.4b)$$

$$P_2(x) = x^2 - \sigma x + \sigma^2/2 + \sigma - a, \quad (1.5a)$$

$$S_2(\sigma) = \sigma - 2. \quad (1.5b)$$

$$P_3(x) = x^3 - \sigma x^2 + (\sigma - 1)(3 - \sigma)x + (\sigma - 2)(\sigma - 1)^2, \quad (1.6a)$$

$$S_3(\sigma) = \sigma^2 - 2\sigma + 2 - a. \quad (1.6b)$$

O grau do polinômio $S_k(\sigma)$ informa-nos o número de ciclos de período k , como definido pela Eq. (1.3). Por exemplo, das fórmulas acima vemos que, independentemente do valor de a , existem dois ciclos de período 1, um ciclo de período 2 e dois ciclos de período 3.

Para o caso particular $a = 6$ estudado por Cvitanović e colaboradores [2], encontramos da Eq. (1.4b) que as soluções para o período $k = 1$ são

$$\sigma_{1,0} = -1 - \sqrt{7} \approx -3.64, \quad \sigma_{1,1} = -1 + \sqrt{7} \approx 1.64, \quad (1.7)$$

representando um par de pontos fixos sobre a diagonal.

Como o grau da eq. (1.5b) indica, independente do parâmetro a , a única solução σ possível para período $k = 2$ é $\sigma_{2,1} = 2$, o que explica o primeiro inteiro na Tabela 1.1. A órbita correspondente está localizada fora da diagonal, simétrica a ela.

Para o período $k = 3$ as soluções da Eq. (1.6b) são

$$\sigma_{3,3} = 1 + \sqrt{5} \approx 3.23, \quad \sigma_{3,1} = 1 - \sqrt{5} \approx -1.23. \quad (1.8)$$

O ciclo correspondente a $\sigma_{3,3} = 1 + \sqrt{5}$ envolve $\theta = \sqrt{5}$ e $u = 1 - \theta = 1 - \sqrt{5}$, raízes de

$$P_{3,3}(x) = (x - 1 + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})^2. \quad (1.9)$$

Além da forma envolvendo dois instantes de tempo dada pela Eq. (1.1), o mapa de Hénon pode igualmente ser escrito como um mapa bidimensional da seguinte forma:

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + b y_t, \quad (1.10)$$

$$y_{t+1} = x_t. \quad (1.11)$$

Esta forma bidimensional pode ser utilizada para produzir um ordenamento $2D$ muito conveniente, como veremos mais adiante, dado por

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \theta \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (1.12)$$

que pode se escrito compactamente, aqui e subsequentemente, como

$$\begin{pmatrix} \theta & u & \theta \\ \theta & \theta & u \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Esta notação é invariante frente a permutações cíclicas.

Similarmente, para $\sigma_{3,1} = 1 - \sqrt{5}$ a órbita é construída com $\bar{\theta} = -\sqrt{5}$ e $\bar{u} = 1 - \bar{\theta} = 1 + \sqrt{5}$, raízes de

$$P_{3,1}(x) = (x - 1 - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})^2, \quad (1.14)$$

cujo correspondente ordenamento $2D$ é

$$\begin{pmatrix} \bar{\theta} & \bar{u} & \bar{\theta} \\ \bar{\theta} & \bar{\theta} & \bar{u} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

As órbitas nas Eqs. (1.13) e (1.15) definem triângulos tendo um vértice na diagonal, como ilustrado na Fig. 1.1. Elas formam um par *conjugado*, como podemos ver dos números algébricos envolvidos em ambos os ciclos. Note que enquanto todo trabalho analítico aqui feito reduziu-se ao cálculo das raízes x_ℓ de polinômios [sistemas UNIDIMENSIONAIS equivalentes], as simetrias do problema BIDIMENSIONAL que estamos considerando emergem somente estudando-se o *conjunto completo de coordenadas* que definem pontos orbitais individuais.

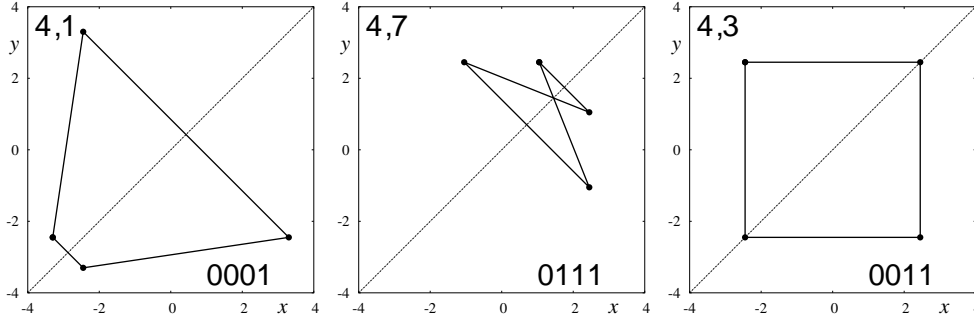


Figura 1.2: Para período 4 existem três ciclos, todos eles auto-simétricos frente a reflexões com relação à diagonal indicada. O primeiro número no canto superior esquerdo se refere ao período enquanto o segundo informa o número decimal equivalente ao rótulo binário mostrado no canto inferior direito. Os ciclos 4,1 e 4,7 não possuem pontos na diagonal enquanto o ciclo 4,3 possui dois pontos na diagonal.

1.2.2 Órbitas exatas de período 4

Para valores arbitrários do parâmetro a , todas as órbitas de período 4 são obtidas dos polinômios

$$P_4(x) = x^4 - \sigma x^3 + (\sigma^2 + 2\sigma - 4a)x^2/2 - (\sigma^2 + 6\sigma - 10a)\sigma x/6 + \sigma^4/24 + \sigma^3/2 - 2a\sigma^2/3 + a^2 - a\sigma, \quad (1.16a)$$

$$S_4(\sigma) = \sigma(\sigma^2 - 4a). \quad (1.16b)$$

Cada raiz σ_i , $i = 1, 2, 3$ de $S_4(\sigma) = 0$ substituída em $P_4(x)$ produz a órbita correspondente, ao resolvermos a equação $P_4(x) = 0$.

Para $a = 6$, os três ciclos de período 4 são mostrados na Fig. 1.2. Seus valores de σ são

$$\sigma_{4,1} = -2\sqrt{6} \approx -4.89, \quad (1.17a)$$

$$\sigma_{4,3} = 0, \quad (1.17b)$$

$$\sigma_{4,7} = +2\sqrt{6} \approx +4.89, \quad (1.17c)$$

incluídas na Tabela 1.1, para comparação. As três órbitas de período 4 são definidas pelas raízes dos seguintes polinômios:

$$P_{4,1}(x) = (x^2 - 6 - 2\sqrt{6})(x + \sqrt{6})^2, \quad (1.18a)$$

$$P_{4,3}(x) = x^4 - 12x^2 + 36 = (x^2 - 6)^2, \quad (1.18b)$$

$$P_{4,7}(x) = (x^2 - 6 + 2\sqrt{6})(x - \sqrt{6})^2. \quad (1.18c)$$

Estes polinômios definem três números básicos que formam as órbitas de período 4. Tomando os ramos positivos, um destes números é definido pela quantidade quadrática que emerge como raiz da Eq. (1.18b), a saber, $\theta = \sqrt{6} \approx 2.4494$. As outras duas grandezas algébricas, raízes dos fatores quadráticos nas Eqs. (1.18a) e (1.18c), são números quárticos:

$$\alpha = \sqrt{6 + 2\sqrt{6}} \approx 3.301, \quad \beta = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}} \approx 1.049. \quad (1.19)$$

Usando estas quantidades, podemos compactar as equações orbitais correspondentes:

$$P_{4,1}(x) = (x^2 - \alpha^2)(x + \sqrt{6})^2, \quad (1.20a)$$

$$P_{4,3}(x) = (x^2 - 6)^2, \quad (1.20b)$$

$$P_{4,7}(x) = (x^2 - \beta^2)(x - \sqrt{6})^2. \quad (1.20c)$$

Estas equações manifestam mais claramente os corpos de decomposição. Novamente, as expressões algébricas exatas de α e β nos permitem reconhecer imediatamente a natureza conjugada das órbitas em questão.

Cada um dos polinômios nas Eqs. (1.20a)-(1.20c) representa um “estado puro” no sentido que suas raízes definem órbitas individuais. Entretanto simplificações úteis aparecem como “amalgamamentos” de polinômios, obtidos ao multiplicarmos entre si todas órbitas contendo grandezas algébricas do mesmo grau e, subsequentemente, fatorá-las novamente. Tal operação gera um rearranjo e simplificação dos fatores polinomiais que entrelaçam mais que uma órbita, mas fatorando sobre corpos numéricos mais simples. Por exemplo, o amalgamamento mais simples das órbitas de período 4 é dado pelos dois fatores que entrelaçam pontos das duas órbitas indicadas:

$$P_{4,1}(x)P_{4,7}(x) = (x^4 - 12x^2 + 12)(x^2 - 6)^2. \quad (1.21)$$

Analogamente, o amalgamamento para as órbitas de período 3 é

$$P_{3,1}(x)P_{3,3}(x) = (x^2 - 2x - 4)(x^2 - 5)^2. \quad (1.22)$$

Comparando Eqs. (1.21) e (1.20b) vemos que, notavelmente, $P_{4,3}(x)$ já está contido automaticamente no amalgamamento de $P_{4,1}(x)$ e $P_{4,7}(x)$. Este fato mostra que todas as três órbitas estão intimamente interconectadas, manifestando “macroscopicamente” sua conjugação implicada pela Eq. (1.16b).

A Eq. (1.21) pode também ser obtida diretamente, através da eliminação de σ entre Eq. (1.16a) e a quadrática $\sigma^2 - 24$ na Eq. (1.16b). Em outras palavras, não é necessário determinar os pontos orbitais explicitamente para se obter os amalgamamentos.

Uma vez que as Eqs. (1.18a)-(1.18c) contém raízes múltiplas, é natural indagar se elas de fato produzem órbitas de período 4. Esta aparente contradição é facilmente esclarecida lembrando-se que como o mapa de Hénon é bidimensional, as trajetórias são de fato definidos por *pares* de coordenadas orbitais. O ordenamento 2D correspondente a $\sigma = \sigma_{4,3} = 0$ é

$$O_{4,3} \equiv \begin{pmatrix} -\theta & \theta & \theta & -\theta \\ -\theta & -\theta & \theta & \theta \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

para $\sigma = \sigma_{4,1} = -2\sqrt{6}$ é

$$O_{4,1} \equiv \begin{pmatrix} -\theta & \alpha & -\theta & -\alpha \\ -\alpha & -\theta & \alpha & -\theta \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

enquanto que para $\sigma = \sigma_{4,7} = +2\sqrt{6}$ é

$$O_{4,7} \equiv \begin{pmatrix} \theta & \beta & \theta & -\beta \\ -\beta & \theta & \beta & \theta \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Esta notação manifesta a conjugação do trio, particularmente entre Eqs. (1.24) e (1.25), na conjugação das irracionalidades envolvidas. Como indicado pelas multiplicidades dos fatores nas Eqs. (1.21) e (1.22), lidamos aqui com uma situação bem mais complicada, envolvendo órbitas com mais pontos diagonais, do que aquela por nós investigada anteriormente [6].

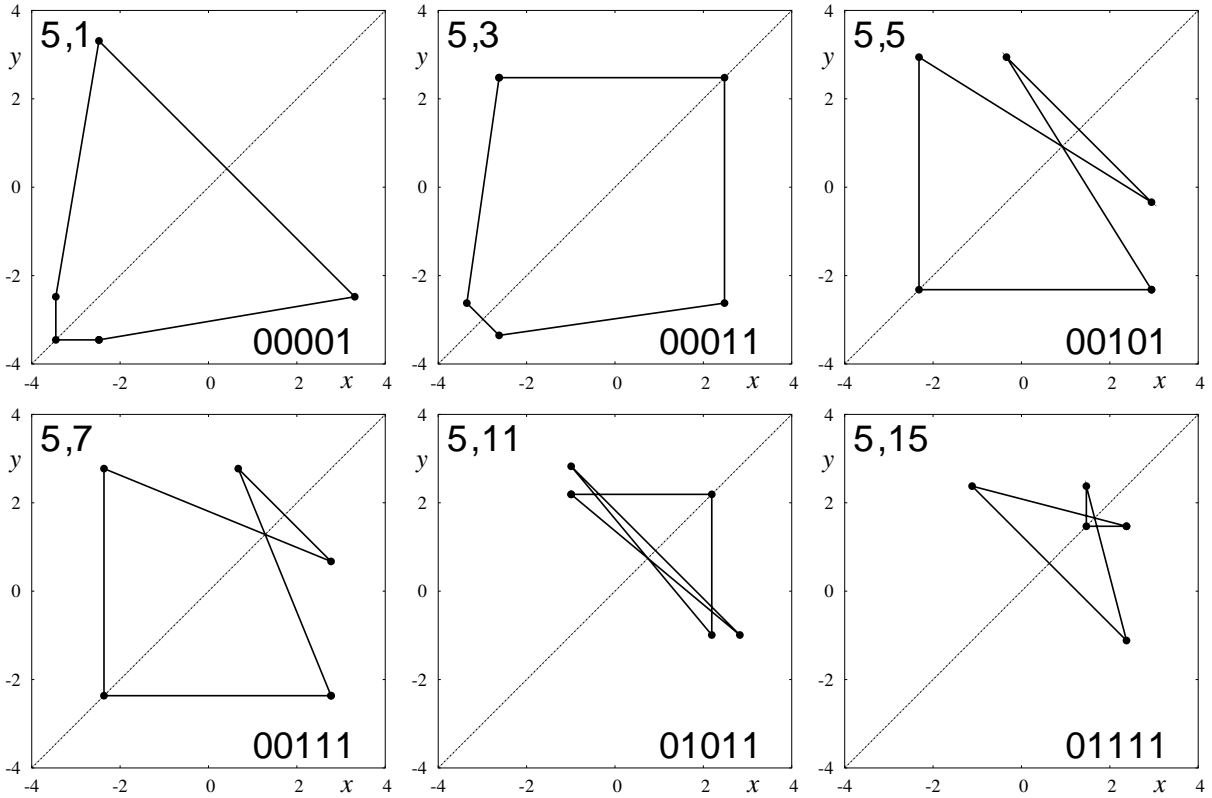


Figura 1.3: Todas os seis ciclos de período 5, contendo sempre um ponto na diagonal. Eles são auto-simétricos frente a reflexão em relação a diagonal mostrada. Os pares 5,1 & 5,3 e 5,5 & 5,7 tem uma simetria adicional frente a um esticamento e uma reflexão em relação a outra diagonal.

1.2.3 Órbitas exatas de período 5

O par de polinômios que dá a máxima informação sobre todas as órbitas de período 5 para valores arbitrários dos parâmetros a e b é dado explicitamente na Ref. [4], em conexão com uma detalhada discussão do protótipo *camarão* de estabilidade [14, 29, 30]. Aqui, como nos demais casos anteriores, estudaremos somente o limite Hamiltoniano $b = -1$, limite este onde todas as órbitas de período 5 para valores arbitrários de a podem ser extraídas do par seguinte de polinômios

$$\begin{aligned}
 P_5(x) = & x^5 - \sigma x^4 + (\sigma^2/2 + \sigma - 5a/2)x^3 - (\sigma^3/6 + \sigma^2 - 13a\sigma/6 + U/(6V))x^2 \\
 & + [\sigma^4/24 + \sigma^3/2 - (11a/12 - 1/4)\sigma^2 + (1/2 + U/(6V) - 3a/2)\sigma - U/(8V) \\
 & + 15a^2/8 - 5a/4]x - \sigma^4/6 + (47a/60 + 7U/(120V) + 2/5 - 149a^2/120)\sigma \\
 & + (a/4 - 11/60)\sigma^3 - \sigma^5/120 - U/(30V) - a + (7a/6 - U/(12V) - 3/10)\sigma^2 \\
 & + 13Ua/(60V), \tag{1.26a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_5(\sigma) = & \sigma^6 - 2\sigma^5 - (11a + 12)\sigma^4 + 12(2 + 3a)\sigma^3 + (20a + 36 + 19a^2)\sigma^2 \\
 & - 2(a + 6)(17a + 2)\sigma - 9a^3 + 88a^2 + 28a + 56, \tag{1.26b}
 \end{aligned}$$

onde $V = -3\sigma^2 + 6\sigma - 7 + 3a$, e

$$U = 3\sigma^4 + 4\sigma^3 - 6(3a - 5)\sigma^2 - 4(19a + 9)\sigma + 15a(6 + a), \tag{1.27}$$

Tabela 1.2: Os seis membros da família de órbitas conjugadas de período 5, governadas todas pelos valores sêxticos σ , raízes de Eq. (1.28). Em negrito mostramos os pontos que aparecem sobre a diagonal na Fig. 1.2.3. Tais pontos são raízes de $Z(x)$, definido na Eq. (1.32).

	$O_{5,1}$	$O_{5,3}$	$O_{5,5}$	$O_{5,7}$	$O_{5,11}$	$O_{5,15}$
x_1	-3.454	2.478	-2.318	-2.364	2.191	1.468
x_2	-2.478	-2.621	2.942	2.773	-0.9916	2.376
x_3	3.310	-3.353	-0.3392	0.6733	2.825	-1.116
x_4	-2.478	-2.621	2.942	2.773	-0.9916	2.376
x_5	-3.454	2.478	-2.318	-2.364	2.191	1.468
σ	-8.556	-3.639	0.9082	1.490	5.224	6.572

Para $a = 6$, existem seis ciclos reais, mostrados na Fig. 1.2.3. Para este parâmetro a Eq. (1.26b) reduz-se para

$$S_5(\sigma) = \sigma^6 - 2\sigma^5 - 78\sigma^4 + 240\sigma^3 + 840\sigma^2 - 2496\sigma + 1448, \quad (1.28)$$

polinômio que não fatora-se sobre os racionais. Seu discriminante é dado por $\delta = (2^{18})(13^2)(17^2)(31)(241)(389^3)$. Portanto, para o período 5 todas as somas de órbitas periódicas são dadas em termos de números algébricos sêxticos, um corpo numérico de grau comparativamente alto, e somente se decompõe sobre o corpo algébrico irracional $\mathbb{Q}(\chi)$, onde χ é qualquer uma das raízes de Eq. (1.26a), o mesmo χ indicado na Tabela 1.1.

Uma vez que as coordenadas das órbitas de período 5 envolvem sempre 5 números e o grau de $S_5(\sigma)$ é 6, seria de esperar que tais órbitas fossem definidas por números algébricos de grau $5 \times 6 = 30$. Entretanto, como demonstramos, todas 30 coordenadas das seis órbitas, listadas na Tabela 1.2, são nada mais do que simples números sêxticos amalgamados em três fatores a saber

$$A_5(x) = X(x) Y^2(x) Z^2(x), \quad (1.29)$$

onde

$$X(x) = x^6 - 2x^5 - 14x^4 + 24x^3 + 32x^2 - 16x - 8, \quad (1.30)$$

$$Y(x) = x^6 - 2x^5 - 16x^4 + 26x^3 + 81x^2 - 84x - 125, \quad (1.31)$$

$$Z(x) = x^6 + 2x^5 - 16x^4 - 22x^3 + 85x^2 + 60x - 151. \quad (1.32)$$

O grupo de Galois destes três polinômios e da Eq. (1.28) é o grupo simétrico de ordem 6, \mathfrak{S}_6 . De acordo com a teoria de Galois, isto significa que não há maneira de obter as raízes dos polinômios através um número FINITO de radicais, isto é, tais polinômios não podem ser solucionados por meio de radicais. À parte de um fator 2^{12} para $X(x)$, os discriminantes do trio de sêxticas acima coincidem, sendo dados por $\Delta = (2^6)(31)(241)(389)$. Obviamente, cada membro do trio irredutível gera precisamente o mesmo corpo numérico.

Um fato curioso é que os pontos diagonais para todas as seis órbitas de período 5 listadas na Tabela 1.2 são raízes de um mesmo fator sêxtico: $Z(x)$, definido na Eq. (1.32). E que os pontos fora da diagonal apresentam uma segregação similar. Este amalgamamento simétrico de pontos orbitais reflete o seu perfeito entrelaçamento e a sua natureza conjugada.

Para o período 5, o ordenamento 2D pode ser escrito de maneira bem compacta, a saber,

$$\begin{pmatrix} z & y & x & y & z \\ z & z & y & x & y \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

onde z denota uma raiz de $Z(x)$, y uma raiz de $Y(x)$, e x uma raiz de $X(x)$.

A fatoração em tripletes de polinômios, como a da Eq. (1.29), permanece válida para escolhas arbitrárias de a , conforme mostram as Eqs. (2.32)-(2.34) mais adiante. Interdependências não-lineares desta espécie já foram vistas anteriormente [31].

1.2.4 Órbitas exatas de período 6

O par de polinômios que define todas as órbitas possíveis de período 6, para valores arbitrários de parâmetros a e b , já foi publicado na literatura por nós [7] e não será repetido aqui pela sua extensão. Para $S_6(\sigma)$ tem-se uma equação de grau nove que define as somas orbitais. Para valores arbitrários de a , e $b = -1$ ela fatora-se surpreendentemente, em contraste com os casos anteriores, sobre os números racionais em três fatores, a saber:

$$S_6(\sigma) = C_6^2(\sigma) D_6(\sigma) N_6(\sigma), \quad (1.34)$$

onde

$$C_6(\sigma) = \sigma - 2, \quad (1.35a)$$

$$D_6(\sigma) = \sigma^2 + 4\sigma - 4a, \quad (1.35b)$$

$$N_6(\sigma) = \sigma^5 + 2\sigma^4 - 4(5a + 4)\sigma^3 + 8\sigma^2 a + 4(16a^2 + 12a + 9)\sigma + 128a^2 - 96a + 72. \quad (1.35c)$$

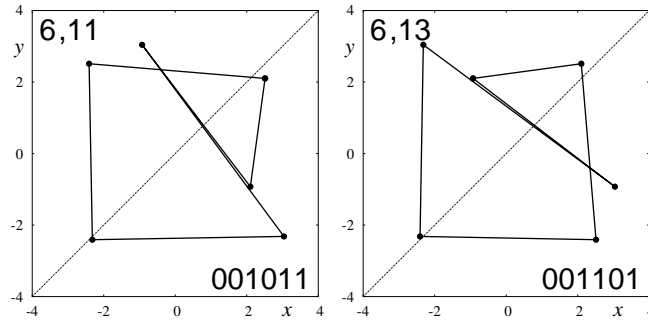


Figura 1.4: O par de órbitas quirais de período 6: Frente à reflexão em relação à diagonal o ciclo 6,13 é mapeado em seu par 6,11, e vice-versa. Para esses pares, σ é definido por um número algébrico de grau 1, isto é, por um número INTEIRO, $\sigma = 2$, raiz da Eq. (1.35a).

Fator $C_6(\sigma)$: as duas órbitas correspondentes a $\sigma = 2$ explicam os dois inteiros restantes na Tabela 1.1. A soma dos pontos orbitais destas duas órbitas é *sempre* 2, independente de a . Estas órbitas são rotuladas 6,11 e 6,13. Sua simetria quiral é ilustrada na Fig. 1.4, seus pontos são definidos por um polinômio que se fatora sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$:

$$\begin{aligned} O(x) &= x^6 - 2x^5 - 14x^4 + 22x^3 + 62x^2 - 60x - 83, \\ &= (x^3 - (1 + \sqrt{3})x^2 - 6x + 5 + 6\sqrt{3}) \times \\ &\quad (x^3 - (1 - \sqrt{3})x^2 - 6x + 5 - 6\sqrt{3}), \end{aligned} \quad (1.36)$$

A irracionalidade básica que define esses pontos orbitais, soluções de (1.36) é

$$\varphi = \sqrt[3]{61 + 96\sqrt{3} - 3\sqrt{-1599}}. \quad (1.37)$$

Tabela 1.3: Comparação entre as órbitas de período 6 que tem σ não maior que números quadráticos. Em negrito são mostradas as raízes oriundas dos fatores mais simples em cada caso.

	$O_{6,11}$ & $O_{6,13}$	$O_{6,15}$	$O_{6,3}$	$O_{6,31}$	$O_{6,7}$
x_1	-2.40946	2.64575	-2.64575	1.8268	0.6001
x_2	2.51163	-2.39848	-3.48257	1.3313	2.8198
x_3	2.10116	-2.39848	-3.48257	2.4007	-2.5519
x_4	-0.926546	2.64575	-2.64575	-1.0947	-3.3322
x_5	3.04034	1.39848	2.48257	2.4007	-2.5519
x_6	-2.31713	1.39848	2.48257	1.3313	2.8198
σ	2	$-2 + 2\sqrt{7}$	$-2 - 2\sqrt{7}$	$3 + 3\sqrt{3}$	$3 - 3\sqrt{3}$
σ	2	3.29150	-7.29150	8.19615	-2.19615

Todas as raízes da Eq. (1.36) são dadas na Tabela 1.3 e podem ser usadas para construir os ciclos 6, 11 e 6, 13 depois de se ajustar a *fase* das condições iniciais.

Fator $D_6(\sigma)$: Para $a = 6$ as raízes de $D_6(\sigma)$ são

$$\sigma_{6,15} = -2 + 2\sqrt{7} \approx 3.2915, \quad (1.38a)$$

$$\sigma_{6,3} = -2 - 2\sqrt{7} \approx -7.2915, \quad (1.38b)$$

sendo as órbitas correspondentes dadas por:

$$O_{6,15}(x) = (x^2 + x - 6 + \sqrt{7})^2(x - \sqrt{7})^2, \quad (1.39)$$

$$O_{6,3}(x) = (x^2 + x - 6 - \sqrt{7})^2(x + \sqrt{7})^2. \quad (1.40)$$

Chamando $\theta = \sqrt{7}$, $\bar{\theta} \equiv -\theta$, e

$$2u = -1 + \sqrt{25 - 4\sqrt{7}}, \quad 2\bar{u} = -1 - \sqrt{25 - 4\sqrt{7}},$$

$$2v = -1 + \sqrt{25 + 4\sqrt{7}}, \quad 2\bar{v} = -1 - \sqrt{25 + 4\sqrt{7}},$$

o ordenamento 2D para $\sigma_{6,15}$ é

$$O_{6,15} \equiv \begin{pmatrix} \theta & \bar{u} & \bar{u} & \theta & u & u \\ u & \theta & \bar{u} & \bar{u} & \theta & u \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

enquanto o ordenamento 2D *conjugado*, para $\sigma_{6,3}$, é

$$O_{6,3} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\theta} & \bar{v} & \bar{v} & \bar{\theta} & v & v \\ v & \bar{\theta} & \bar{v} & \bar{v} & \bar{\theta} & v \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Este par de órbitas é mostrado na Fig. 1.5.

Fator $N_6(\sigma)$: Para $a = 6$, o polinômio quártico fatora-se assim:

$$N_6(\sigma) = (\sigma^2 - 6\sigma - 18)(\sigma^3 + 8\sigma^2 - 70\sigma - 228). \quad (1.43)$$

Do fator quadrático temos

$$\sigma_{6,31} = 3 + 3\sqrt{3} \approx 8.1961, \quad e \quad \sigma_{6,7} = 3 - 3\sqrt{3} \approx -2.1961. \quad (1.44)$$

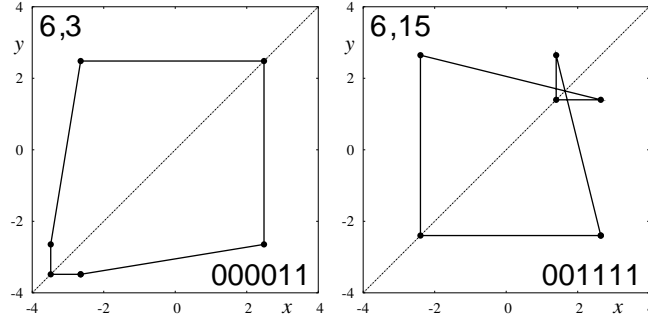


Figura 1.5: O par de órbitas de período 6 definidas pelas raízes de $D_6(\sigma) = 0$, conforme a Eq. (1.35b). Frente a reflexão em relação a diagonal cada ciclo é mapeado nele mesmo, possuindo ainda dois pontos sobre a diagonal.

A equação orbital correspondente a $\sigma_{6,31}$ é

$$O_{6,31} = (x^2 + x - x\sqrt{3} - 2)(x^2 - 2x - x\sqrt{3} - 2 + 3\sqrt{3})^2 \quad (1.45)$$

conduzindo aos pontos orbitais seguintes:

$$2\theta = -1 + \sqrt{3} + \sqrt{12 - 2\sqrt{3}}, \quad \theta = 1.826, \quad (1.46a)$$

$$2\bar{\theta} = -1 + \sqrt{3} - \sqrt{12 - 2\sqrt{3}}, \quad \bar{\theta} = -1.094, \quad (1.46b)$$

$$2u = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{15 - 8\sqrt{3}}, \quad u = 2.400, \quad (1.46c)$$

$$2\bar{u} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{15 - 8\sqrt{3}}, \quad \bar{u} = 1.331. \quad (1.46d)$$

e o ordenamento 2D

$$O_{6,31} \equiv \begin{pmatrix} \theta & \bar{u} & u & \bar{\theta} & u & \bar{u} \\ \bar{u} & \theta & \bar{u} & u & \bar{\theta} & u \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Comparando as representações analíticas e numéricas de θ , $\bar{\theta}$, u , \bar{u} nas Eqs. (1.46a)-(1.46d) reconhecemos facilmente que enquanto as “projeções” numéricas não dão a menor indicação da presença de simetrias, os números algébricos manifestam inequivocamente a conjugação dos pontos orbitais.

Similarmente, a órbita conjugada a $O_{6,31}$ é

$$O_{6,7} = (x^2 + x + x\sqrt{3} - 2)(x^2 - 2x + x\sqrt{3} - 2 - 3\sqrt{3})^2, \quad (1.48)$$

com pontos orbitais

$$2v = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}, \quad v = 0.600, \quad (1.49a)$$

$$2\bar{v} = -1 - \sqrt{3} - \sqrt{12 + 2\sqrt{3}}, \quad \bar{v} = -3.332, \quad (1.49b)$$

$$2w = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{15 + 8\sqrt{3}}, \quad w = 2.819, \quad (1.49c)$$

$$2\bar{w} = 2 - \sqrt{3} - \sqrt{15 + 8\sqrt{3}}, \quad \bar{w} = -2.551. \quad (1.49d)$$

e ordenamento 2D

$$O_{6,7} \equiv \begin{pmatrix} v & w & \bar{w} & \bar{v} & \bar{w} & w \\ w & v & w & \bar{w} & \bar{v} & w \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

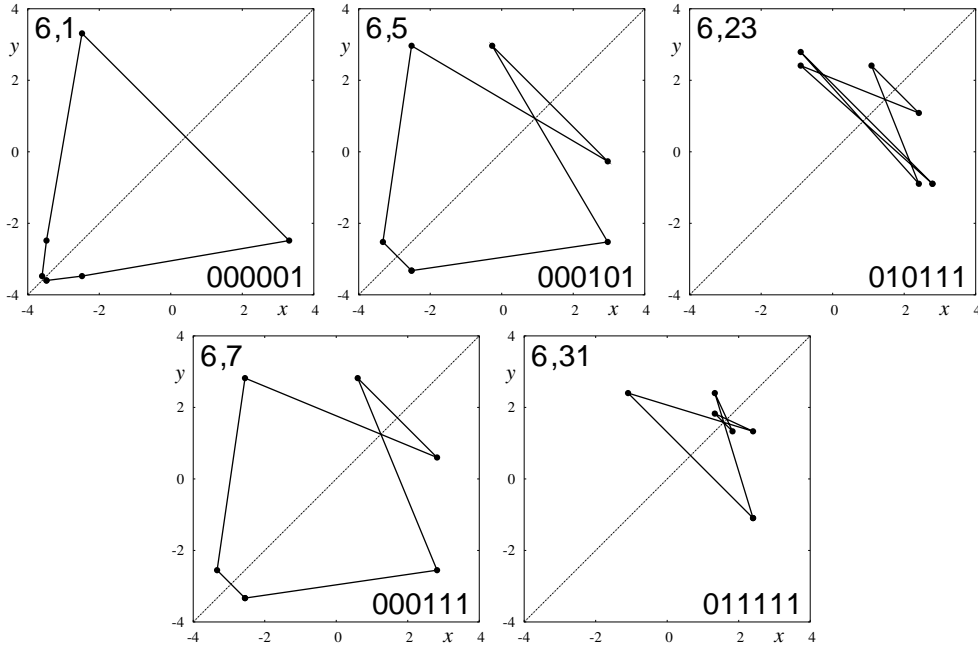


Figura 1.6: Os cinco ciclos de período 6 definidos por $N_6(\sigma)$ na Eq. (1.35b). Frente a uma reflexão com relação à diagonal, cada ciclo é mapeado em si próprio não tendo nenhum ponto na diagonal. Os três ciclos no topo, vem do fator cúbico em Eq. (1.43), enquanto os outros dois vem do fator quadrático.

O par de órbitas conjugadas $O_{6,31}$ e $O_{6,7}$ é mostrado na Fig. 1.6.

As raízes da cúbica na Eq. (1.43) podem ser determinadas analiticamente sem problemas. Aqui, contentar-nos-emos em mencionar seus valores numéricos aproximados, a saber,

$$\sigma_{6,1} \simeq -12.2048, \quad \sigma_{6,5} \simeq -2.7039, \quad \sigma_{6,23} \simeq 6.9087. \quad (1.51)$$

As órbitas correspondentes são também mostradas na Fig. 1.6. Uma vez mais, a comparação das representações algébricas nas Eqs. (1.46a)-(1.46d) e Eqs. (1.49a)-(1.49d) mostra que todas estas órbitas são obviamente conjugadas.

Os amalgamamentos resultantes dos fatores quadráticos produzem os polinômios

$$O_{6,13} O_{6,15} = (x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 29)^2 (x^2 - 7)^2, \quad (1.52a)$$

$$O_{6,7} O_{6,31} = (x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 26x - 23)^2 (x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 4x + 4)^2, \quad (1.52b)$$

enquanto que os amalgamamentos dos fatores cúbicos na Eq. (1.43) produzem os polinômios

$$O_{6,1}(x) O_{6,5}(x) O_{6,23}(x) = h_1(x) h_2^2(x), \quad (1.53)$$

onde

$$h_1(x) = x^6 - 22x^4 + 8x^3 + 124x^2 - 88x - 32, \quad (1.54a)$$

$$h_2(x) = x^6 + 4x^5 - 12x^4 - 58x^3 + 12x^2 + 202x + 139. \quad (1.54b)$$

Os discriminantes deste par de sêxticas são quadrados: $(2^{18})(3^4)(659)^2$ e $(2^6)(3^4)(659)^2$, respectivamente. Os pontos orbitais da Eq. (1.53) são dados na Tabela 1.4.

Estes amalgamamentos peculiares são diferentes dos que temos para as órbitas instáveis do caso puramente caótico, envolvendo “heranças” [31] para $a = 2$, o parâmetro sabidamente útil para emular portas lógicas, para codificar números, e para realizar operações aritméticas específicas tais como adição e multiplicação [33].

Os polinômios $h_1(x)$ e $h_2(x)$ decompõe-se em cúbicas no corpo sêxtico $\mathbb{Q}(\xi)$, definido por $\xi = (46 + 102s)^{1/3}$ onde $s \equiv \sqrt{-1977}$.

À parte de uma constante multiplicativa trivial, a decomposição de $h_1(x) = h_a h_b$ é

$$h_a = 112614x^4 + \alpha x^3 - 1126140x^2 - \beta x + \gamma \quad (1.55a)$$

$$h_b = 112614x^2 - \alpha x - \delta, \quad (1.55b)$$

onde

$$\alpha = (741 - 11s)\xi^2 + (8220 - 274s)\xi, \quad (1.56a)$$

$$\beta = (8892 - 132s)\xi^2 + (98640 - 3288s)\xi - 450456, \quad (1.56b)$$

$$\gamma = (4400 + 36s)\xi^2 - (25756 + 1644s)\xi - 1651672, \quad (1.56c)$$

$$\delta = (718 + 40s)\xi^2 - (29318 + 274s)\xi + 300304. \quad (1.56d)$$

Similarmente ao que acontece no *casus irreducibilis* de equações cúbicas, aqui as raízes reais são expressas por radicais de números complexos, não por radicais reais. Em outras palavras, as raízes estão contidas em uma extensão radical de corpo base real, contudo não em uma extensão real do corpo base. Obviamente, todas as quantidades derivadas de ξ são reais, como pode ser facilmente verificado. As raízes de h_b , Eq. (1.55b), são 2.7907 e 1.0863. A decomposição de $h_2(x)$ é análoga.

Tabela 1.4: Comparação das três órbitas de período 6 provenientes de valores cúbicos em $N_6(\sigma)$, Eq. (1.43). Os pontos periódicos são raízes de Eqs. (1.54a) e (1.54b). As raízes com multiplicidade 1, Eq. (1.54a), são mostradas em negrito.

	$O_{6,1}$	$O_{6,5}$	$O_{6,23}$
x_1	-3.598852	-3.323142	1.086351
x_2	-3.475871	-2.521638	2.409920
x_3	-2.482826	2.964483	-0.894067
x_4	3.311442	-0.266521	2.790723
x_5	-2.482826	2.964483	-0.894067
x_6	-3.475871	-2.521638	2.409920
σ	-12.204805	-2.703974	6.908780

1.3 A solução do enigma

A razão pela qual a soma dos pontos orbitais (σ) muitas vezes assume valores racionais (chamado de enigma do centro de massa orbital) para os parâmetros $(a, b) = (6, -1)$ vem do fato que para $b = -1$, a equação S_k , que fornece os valores de σ , já se decompõe (fatora) sobre o corpo dos números inteiros mesmo para valores genéricos do parâmetro a , decomposições estas que permitem ainda relacionar órbitas que possuem como somas orbitais, números algébricos irracionais, tornando possível verificar interconexões, entre órbitas, que não são facilmente perceptíveis abordando o problema de maneira tradicional, ou seja numericamente.

Capítulo 2

Quiralidade e Classes de Conjugação no Limite Hamiltoniano

Neste capítulo abordamos o problema de classificação das órbitas no limite Hamiltoniano do mapa de Hénon, considerando neste estudo o caso para parâmetro a geral. Mostramos que além das órbitas simétricas, bem estudadas, as órbitas assimétricas aparecem em pares quirais. Este fato revela a existência de três classes distintas de órbitas e revela também que a soma dos pontos das órbitas periódicas pode ser usada para distinguir uma classe de outra. Apresentamos também resultados exatos novos que mostram como as órbitas de um mesmo período e de uma mesma classe estão relacionadas entre si em subfamílias algébricas bem definidas. Alguns dos resultados principais deste capítulo foram publicados na Ref. [74].

2.1 Simetrias

Como vimos no capítulo anterior, quando do tratamento algébrico do problema do centro de massa orbital, as órbitas apresentam uma simetria frente à reflexão com relação à diagonal. Algumas destas órbitas possuem pontos sobre a diagonal e outras não. Apresentaremos aqui uma breve discussão destas simetrias.

É bem sabido que para parâmetros (a, b) arbitrários, o mapa de Hénon

$$H \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x_t^2 + by_t \\ x_t \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

é inversível para $b \neq 0$ sendo sua inversa dada por

$$H^{-1} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ -\frac{1}{b}(a - y_{t+1}^2 - x_{t+1}) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

O mapa de Hénon pode também ser escrito como uma composição de duas transformações R e S

$$H = R \circ S, \quad (2.3)$$

onde

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - y^2 + bx \\ y \end{pmatrix}, \quad S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Além disto, temos $S \circ S = I$ e $R \circ R = I$, onde I é a transformação identidade e, por isto, S e R são chamadas de *involuções*.

Para $b = -1$ (caso Hamiltoniano) as transformações acima simplificam-se bastante, sendo o mapa direto dado por

$$H \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x_t^2 - y_t \\ x_t \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

e o mapa inverso por

$$H^{-1} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ a - y_{t+1}^2 - x_{t+1} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Neste limite o mapa de Hénon é reversível [20], isto é, o mapa direto é conjugado ao seu mapa inverso:

$$H \circ S = S \circ H^{-1}. \quad (2.7)$$

Se fizermos a transformação

$$y_t \equiv X_{t+1}, \quad y_{t+1} \equiv X_t, \quad (2.8)$$

$$x_t \equiv Y_{t+1}, \quad x_{t+1} \equiv Y_t, \quad (2.9)$$

teremos para o mapa inverso (2.6):

$$\begin{pmatrix} Y_{t+1} \\ X_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t \\ a - X_t^2 - Y_t \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Comparando agora (2.10) com (2.5) percebemos ter o mesmo mapa se intercambiarmos a primeira com a segunda linha.

A transformação que fizemos é uma reversão temporal que implica numa simetria espacial em relação à diagonal $y = x$.

As transformações S e R são chamadas de reversores, e de maneira mais geral é sabido [56] que qualquer imagem de um reversor também é um reversor, de maneira que temos então toda uma família de reversores dada por $\{H^j R, H^j S, j \in \mathbb{Z}\}$. Desta maneira podemos definir:

$$T = H^{-1} \circ S = \begin{pmatrix} a - x^2 - y \\ x \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

As órbitas simétricas apresentadas nas seções anteriores são invariantes frente ao reversor S , isto é $S\mathcal{O} = \mathcal{O}$, onde \mathcal{O} é o conjunto de pontos de uma órbita. Dentre as órbitas simétricas algumas possuem pontos sobre a diagonal $y = x$ de simetria. Outras curvas relacionadas com a simetria podem ser obtidas usando o mapa direto e o inverso.

Se impusermos agora a simetria $y = x$ no mapa direto e inverso teremos que

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x_t^2 - y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

se e somente se valer a relação

$$2y_t = a - x_t^2. \quad (2.13)$$

De modo análogo, para o mapa inverso temos que

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ a - y_{t+1}^2 - x_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{t+1} \\ x_{t+1} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

se e somente se

$$2x_{t+1} = a - y_{t+1}^2. \quad (2.15)$$

Em resumo, temos então o seguinte conjunto de linhas de simetria:

$$\mathcal{S} = \{(x, y) : y = x\} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) : 2x = -y^2 + a\} \quad (2.17)$$

$$\mathcal{T} = \{(x, y) : 2y = -x^2 + a\} \quad (2.18)$$

Estas simetrias são conhecidas na literatura, por exemplo, veja a Eq. (3.11), pg. 529, do artigo de Dullin et al. [56].

Nas próximas seções veremos como as órbitas simétricas e não-simétricas separam-se algebricamente.

2.2 Classes de conjugação

Durante a abordagem do problema do centro de massa feita na seção 1.1 vimos a existência de uma simetria em relação à diagonal nas órbitas, a natureza desta simetria é mostrada na seção anterior. Vimos que para as órbitas de períodos $k \leq 5$ ocorria uma fatoração dos polinômios $S_k(\sigma)$ em no máximo dois fatores: um relacionado com órbitas simétricas contendo pontos na diagonal, e outro com órbitas simétricas sem pontos na diagonal. Esta fatoração é válida para valores arbitrários do parâmetro a , como mostrado na Tabela (2.1).

Tabela 2.1: Os fatores que compõem $S_k(\sigma)$ e definem as duas classes de órbitas auto-simétricas, as únicas classes que existem para os períodos $k \leq 5$. Os fatores são válidos para valores arbitrários de a .

k	$S_k(\sigma)$
1	$D_1(\sigma) = \sigma^2 + 2\sigma - a$
2	$N_2(\sigma) = \sigma - 2$
3	$D_3(\sigma) = \sigma^2 - 2\sigma + 2 - a$
4	$D_4(\sigma) = \sigma, \quad N_4(\sigma) = \sigma^2 - 4a$
5	$D_5(\sigma) = \sigma^6 - 2\sigma^5 - (11a + 12)\sigma^4 + 12(2 + 3a)\sigma^3 + (20a + 36 + 19a^2)\sigma^2 - 2(a + 6)(17a + 2)\sigma - 9a^3 + 88a^2 + 56 + 28a$

Entretanto para o período $k = 6$, temos que $S_6(\sigma)$ se fatora, para valor de parâmetro a arbitrário, em três fatores a saber

$$S_6(\sigma) = C_6^2(\sigma)D_6(\sigma)N_6(\sigma), \quad (2.19)$$

onde

$$C_6(\sigma) = \sigma - 2, \quad (2.20a)$$

$$D_6(\sigma) = \sigma^2 + 4\sigma - 4a, \quad (2.20b)$$

$$N_6(\sigma) = \sigma^5 + 2\sigma^4 - 4(5a + 4)\sigma^3 + 8\sigma^2 a + 4(16a^2 + 12a + 9)\sigma + 128a^2 - 96a + 72. \quad (2.20c)$$

Na Tabela 2.2 mostramos alguns resultados adicionais para a decomposição de S_k . O resultado notável é a regularidade das decomposições bem como a recorrência do fator C_k , que surge pela primeira vez no período 6, para períodos superiores. As equações explícitas para cada fator da tabela 2.2 são dadas no apêndice B, por serem muito extensas.

Tabela 2.2: Decomposições de S_k para $k \leq 11$, válidas para valores de arbitrários de a .

k	S_k
7	$C_7^2(\sigma)D_7(\sigma)$
8	$C_8^2(\sigma)D_8(\sigma)N_8(\sigma)$
9	$C_9^2(\sigma)D_9$
10	$C_{10}^2(\sigma)D_{10}(\sigma)N_{10}(\sigma)$
11	$C_{11}^2(\sigma)D_{11}(\sigma)$

A notação N_k , D_k e C_k para os fatores de S_k de um período k , está relacionada com a simetria e a disposição dos pontos, com respeito à diagonal, de cada conjunto de órbitas obtidas pelas soluções de cada fator, em conjunto com a equação orbital $P_k(x, \sigma) = 0$. Desta maneira temos três classes de ciclos, a saber,

\mathcal{D} : *Ciclos diagonais*: ciclos auto-conjugados com pontos na diagonal.

\mathcal{N} : *Ciclos não diagonais*: ciclos auto-conjugados sem pontos na diagonal.

\mathcal{C} : *Pares quirais*: pares de ciclos conjugados que são mapeados um no outro por meio de uma reflexão em relação à diagonal.

As soluções de $D_k = 0$, $N_k = 0$ e $C_k = 0$ dão origem a órbitas de classe \mathcal{D} , \mathcal{N} e \mathcal{C} , respectivamente. Sendo que a decomposição

$$S_k(\sigma) = C_k^2(\sigma)D_k(\sigma)N_k(\sigma), \quad (2.21)$$

até onde vimos, é geral para o mapa de Hénon quando $b = -1$.

Mostramos na 2.1 órbitas de classe \mathcal{N} e \mathcal{D} para período par, usamos como exemplo o período 4, mostrando que elas possuem dois pontos sobre cada parábola de simetria no caso das órbitas de classe \mathcal{N} ou dois pontos sobre a diagonal no caso da classe \mathcal{D} .

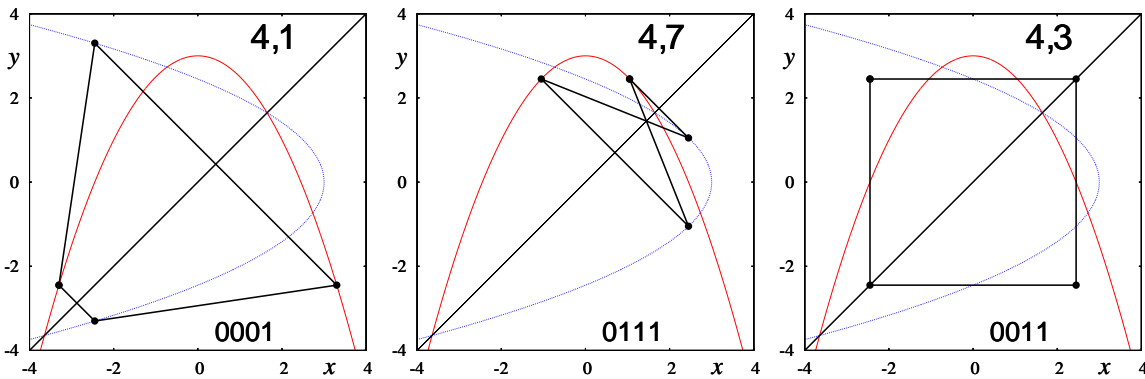


Figura 2.1: As duas classes de órbitas auto-simétricas frente à reflexão com respeito à diagonal $y = x$, aqui para órbitas de período 4 e para $a = 6$ (ferradura de Smalle completa). Órbitas 4,1 e 4,7 são de classe \mathcal{N} : sem pontos na diagonal, e com dois pontos sobre cada parábola de simetria. A órbita 4,3 é de classe \mathcal{D} : possui dois pontos sobre a diagonal.

Para ilustrar a disposição dos pontos em relação às parábolas, para períodos ímpares, usamos as órbitas de período 5 como mostrado na figura 2.2, neste caso vemos que existem apenas um ponto sobre a diagonal e um ponto sobre cada parábola.

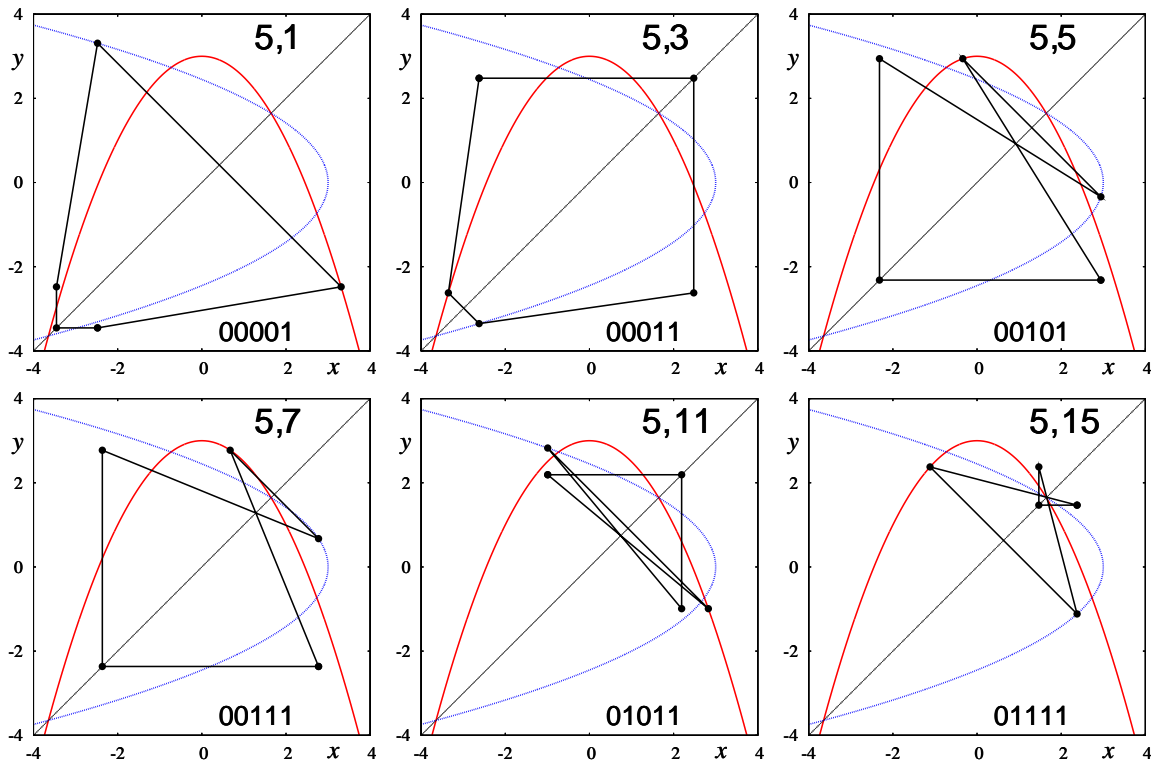


Figura 2.2: Órbitas auto simétricas para o período 5 frente à reflexão em relação à diagonal $y = x$, para $a = 6$. Aqui todas as órbitas são de classe \mathcal{D} .

As órbitas classe \mathcal{C} , por sua vez, não possuem nem um ponto orbital na linha $y = x$ nem nas parábolas, contudo uma reflexão em relação a esta linha mapeia uma órbita em outra, como é mostrado na figura 2.3 para as órbitas de período 6 nesta classe.

A tabela 2.2 mostra o resultado final da classificação das órbitas.

Tabela 2.3: Resumo da classificação das órbitas.

Órbitas		
Simétricas		Assimétricas
Classe \mathcal{D}	Classe \mathcal{N}	Classe \mathcal{C}
\forall período k tal que $k \neq 2$	períodos k pares	períodos $k \geq 6$

Embora a diferença entre cada classe seja bem determinada, podemos ter cenários onde órbitas de uma classe podem estar relacionadas com órbitas de outra classe. Podemos ver este fato, por exemplo, através das órbitas de período 6. Para qualquer valor de a as órbitas de classe \mathcal{C} são dadas pelas soluções de

$$\mathbf{P}_6(x) = x^6 - 2x^5 - (3a - 4)x^4 + 2(2a - 1)x^3$$

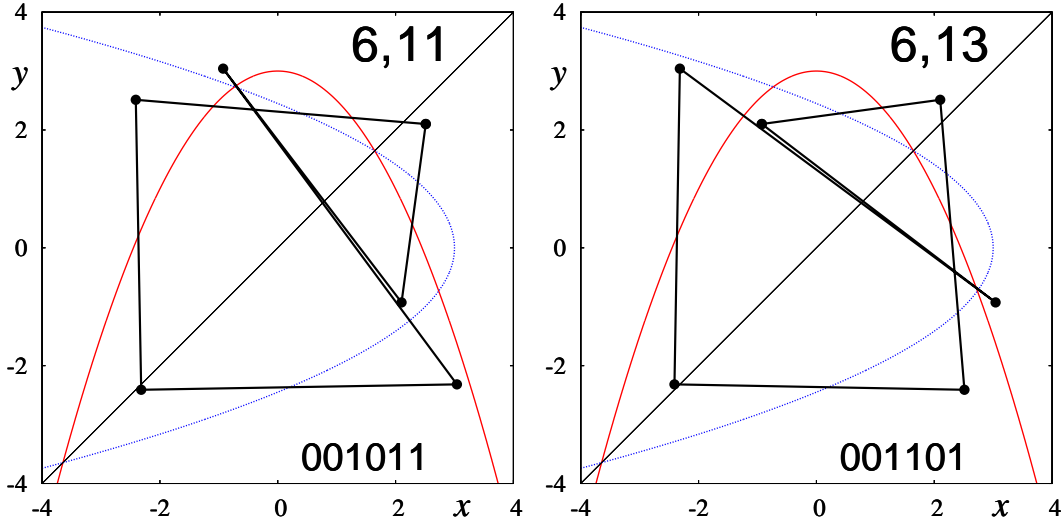


Figura 2.3: O par quiral de período 6 para $a = 6$. Estas órbitas não são auto-simétricas frente à reflexão em relação à diagonal.

$$\begin{aligned}
 & + (3a^2 - 8a + 2)x^2 - 2a(a-1)x - a^3 + 4a^2 - 2a + 1 \\
 = & [x^3 - (1 + \tau)x^2 - ax + a(1 + \tau) - 1][x^3 - (1 - \tau)x^2 - ax + a(1 - \tau) - 1] \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

onde $\tau = \sqrt{a-3}$. Se calcularmos o discriminante deste polinômio com respeito a x obteremos

$$\Delta = 64 (16a^2 - 8a + 5)^2 (a-3)^3. \quad (2.23)$$

A condição $\Delta = 0$ marca o ponto no espaço de parâmetros onde as órbitas em questão passam do complexo para o real no espaço de fase. Este ponto é $a = 3$, a única raiz real de $\Delta = 0$. Neste ponto a Eq. 2.22 torna-se

$$\mathbf{P}_6(x) = (x-2)^2 (x^2 + x - 1)^2 \quad (2.24)$$

Já as duas órbitas de classe \mathcal{D} , são dadas, para a arbitrário, pelas soluções de:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_6^{(1)}(x) &= (x - \sqrt{a+1})^2 (x^2 + x - a + \sqrt{a+1})^2, \\
 \mathbf{P}_6^{(2)}(x) &= (x + \sqrt{a+1})^2 (x^2 + x - a - \sqrt{a+1})^2,
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

que para $a = 3$ ficam

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_6^{(1)}(x) &= (x-2)^2 (x^2 + x - 1)^2, \\
 \mathbf{P}_6^{(2)}(x) &= (x+2)^2 (x^2 + x - 5)^2.
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comparando com o que temos para a equação orbital para a classe \mathcal{C} neste valor particular de parâmetro vemos que as órbitas definidas pelas soluções de $\mathbf{P}_6(x) = 0$ e $\mathbf{P}_6^{(1)}(x) = 0$ coincidem. De fato o que acontece em $a = 3$ é o nascimento de duas órbitas estáveis no momento da desestabilização de uma órbita classe \mathcal{D} . É o que conhecemos como bifurcação de forquilha. Na Fig. 2.4(a) mostramos as curvas de bifurcação de período 6 na vizinhança do ponto $(a, b) = (6, -1)$, a curva em linha cheia, nesta figura, representa a curva de bifurcação de dobra, associada ao autovalor $\lambda = 1$, enquanto a curva em linha tracejada representa a bifurcação associada com o autovalor $\lambda = -1$ (bifurcação de dobramento de período 6 para 12). Esta figura nos mostra que no ponto $a = 3$, rotulado de β , a curva de bifurcação de dobra possui uma cúspide.

Na figura 2.4(b) mostramos o caminho das três órbitas envolvidas na bifurcação (soluções de $\mathbf{P}_6(x) = 0$ e $\mathbf{P}_6^{(1)}(x) = 0$), à medida que variamos o parâmetro a sobre a linha $b = -1$ desde o ponto β , onde as três órbitas coincidem, até o ponto $a = 6$, onde os pontos de uma mesma órbita tem o mesmo símbolo.

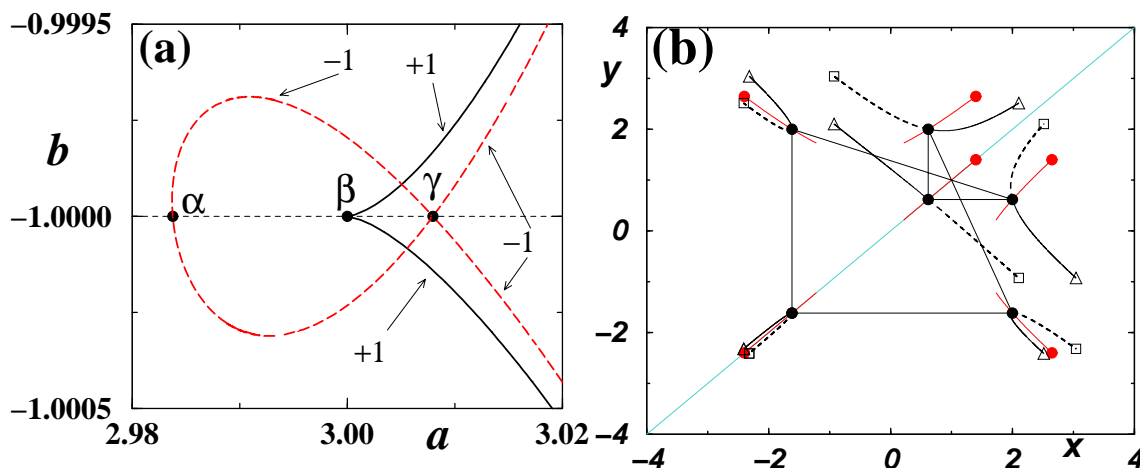


Figura 2.4: Nascimento do par quiral de período 6. Em (a) é mostrado o espaço de parâmetros na vizinhança do ponto de nascimento β . Os pontos α , β e γ são dados respectivamente por $a = 2.98377\dots$ (número sêxtico), $a = 3$ e $a = 3.00795\dots$ (número cúbico). Em (b) mostramos o “caminho” das soluções das órbitas envolvidas na bifurcação. Os pontos orbitais para o par de órbitas quirais em $a = 6$, são indicados pelos símbolos \square (para a órbita 6, 11) e \triangle (para a órbita 6, 13).

A órbita de classe \mathcal{D} é estável no intervalo $\alpha \leq a \leq \beta$, perdendo sua estabilidade no ponto β neste ponto as duas órbitas de classe \mathcal{C} nascem e ambas permanecem estáveis até o ponto γ onde sofrem uma bifurcação de dobramento de período. Este compartilhamento de estabilidade de um par quiral sempre acontece, para qualquer outro período superior, pois uma das características destes pares é o de terem um mesmo valor para σ , e uma vez que a equação que define a estabilidade de um ciclo (em $b = -1$) é dada pelas raízes (λ_1, λ_2) de $\lambda^2 + \mathcal{S}(\sigma, a) + 1 = 0$ teremos a mesma estabilidade, ou seja se um membro do par quiral é instável o outro também será.

O cenário de nascimento de órbitas quirais que mostramos não é o único. Para período 8, por exemplo, alguns pares quirais nascem de bifurcações de dobra. Neste caso há o nascimento de quatro órbitas quirais simultaneamente, sendo um par estável e o outro instável.

Na Tabela (2.4) mostramos o número de órbitas em cada classe, para períodos até $k = 20$. A partir da última coluna desta tabela vemos que, à medida que o período cresce, as órbitas de classe \mathcal{C} são cada vez mais freqüentes, passando a dominar a estatística para períodos maiores que $k = 9$. Isto mostra a importância das órbitas quirais em estudos como os do caos quântico, onde a soma das infinitas órbitas periódicas desempenha um papel fundamental na obtenção da estatística dos níveis de energia. Originalmente, determinamos explicitamente todas as órbitas em cada classe para todos os períodos $k \leq 20$, um trabalho computacionalmente bastante extenso [74]. Posteriormente o número de órbitas em cada classe pode ser determinado de maneira geral analiticamente [81], em termos da função de inversão de Möbius:

$$D_k = \begin{cases} A_k & \text{se } k \bmod 2 = 1, \\ A_k/2 & \text{para os demais } k, \end{cases} \quad (2.27)$$

Tabela 2.4: Partição do número total M_k de órbitas de período k no número de órbitas em cada classe. A última coluna mostra a porcentagem das órbitas quirais.

k	M_k	C_k	D_k	N_k	%
1	2	0	2	0	0
2	1	0	0	1	0
3	2	0	2	0	0
4	3	0	1	2	0
5	6	0	6	0	0
6	9	2×1	2	5	22.2
7	18	2×2	14	0	22.2
8	30	2×6	6	12	40.0
9	56	2×14	28	0	50.0
10	99	2×30	12	27	60.6
11	186	2×62	62	0	66.7
12	335	2×127	27	54	75.8
13	630	2×252	126	0	80.0
14	1161	2×500	56	119	84.9
15	2182	2×968	246	0	88.7
16	4080	2×1860	120	240	91.2
17	7710	2×3600	510	0	93.4
18	14532	2×6902	238	490	95.0
19	27594	2×13286	1022	0	96.3
20	52377	2×25446	495	990	97.2

$$N_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \bmod 2 = 1, \\ Q_k/2 & \text{para os demais } k, \end{cases} \quad (2.28)$$

onde

$$A_k = \sum_{d|k} \mu(k/d) 2^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}, \quad Q_k = \sum_{d|k} \mu(k/d) 2^{\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor}, \quad (2.29)$$

com o símbolo $\lfloor \alpha \rfloor$ denotando a parte inteira de α , e a soma sendo feita sobre os divisores d de k . A quantidade de órbitas quirais pode então ser obtida subtraindo-se o número de órbitas auto-simétricas (usando as expressões 2.28 e 2.27) do número total de órbitas para cada período k (dadas por M_k definido na Eq. (1.3)), ou seja, $C_k = M_k - D_k - N_k$.

2.3 Amalgamamentos e ordenamentos algébricos gerais

Tal como, na seção anterior, tratamos do caso da fatoração de $\mathbf{S}_k(\sigma)$ para parâmetro a geral, estando cada fator relacionado com uma classe de órbitas (classe \mathcal{D} , \mathcal{N} ou \mathcal{C}), apresentamos nesta seção dois outros resultados genéricos a respeito dos amalgamamentos e dos ordenamentos orbitais.

Mostramos anteriormente que para $a = 6$ todas as seis órbitas de período 5 possuíam um ordenamento $2D$ dado por:

$$O_5^D = \begin{pmatrix} z & y & x & y & z \\ z & z & y & x & y \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde $x, y, e z$ são raízes dos polinômios X, Y, Z definidos no amalgamamento na Eq. (1.29). Este mesmo ordenamento continua válido para valores *arbitrários* do parâmetro a , sendo agora fatores do amalgamamento dados por

$$A_5(x) = \prod_{i=1}^6 P_5(a, b, x; \sigma_i) = X_5(x) Y_5^2(x) Z_5^2(x), \quad (2.31)$$

onde

$$X_5 \equiv X_5(x, a) = x^6 - 2x^5 - (3a - 4)x^4 + 4ax^3 + (3a^2 - 12a - 4)x^2 - 2(a^2 - 4a - 4)x - a^3 + 8a^2 - 12a - 8, \quad (2.32)$$

$$Y_5 \equiv Y_5(x, a) = x^6 - 2x^5 - (3a - 2)x^4 + 2(2a + 1)x^3 + (3a^2 - 4a - 3)x^2 - 2a(a + 1)x - a^3 + 2a^2 + 3a + 1, \quad (2.33)$$

$$Z_5 \equiv Z_5(x, a) = x^6 + 2x^5 - (3a - 2)x^4 - 2(2a - 1)x^3 + (3a - 1)(a - 1)x^2 + 2a(a - 1)x - a^3 + 2a^2 - a - 1. \quad (2.34)$$

Para $a = 6$ estes polinômios coincidem com os das Eqs. (1.30)-(1.32), como era de se esperar.

Os discriminantes em relação a x dos polinômios X_5, Y_5, Z_5 estão relacionados entre si, de maneira que o discriminante de Y_5 e Z_5 é o mesmo, sendo dado por:

$$\Delta_{5,1} = 64(16a^2 - 28a - 19)(16a^5 - 108a^4 + 105a^3 + 27a^2 - 97a - 47), \quad (2.35)$$

enquanto que para X_5 temos, como antes, $\Delta_{5,2} = 2^{12}\Delta_{5,1}$. As três soluções reais de $\Delta_{5,1} = 0$ são os pontos de bifurcação de dobra onde as seis órbitas de período 6 nascem aos pares, dois destes pontos ($a = -0.522542\dots, a = 2.27254\dots$) raízes do fator quadrático, e o terceiro ponto ($a = 5.5517014\dots$) raiz do fator quártico.

Uma maneira fácil e rápida de fazermos a verificação do ordenamento (2.30) acima é encontrando transformações algébricas $T(x)$ que transformem um polinômio do conjunto $\{X_5, Y_5, Z_5\}$ em outro existente nesse mesmo conjunto, isto é, por exemplo, uma transformação $T(x)$ aplicada a cada uma das raízes de $X_5 = 0$ nos resulta cada uma das raízes de $Y_5 = 0$, tais transformações são chamadas de transformações de Tschirnhaus.

As transformações que levam Z_5 em X_5 e Y_5 são dadas respectivamente pela primeira e segunda iterada do par $(x, y) = (x, x)$ (ponto sobre a diagonal), enquanto que as transformações que levam X_5 em Y_5 e Z_5 são dadas respectivamente pela primeira e segunda iterada do par $(x, y) = (x, (a - x^2)/2)$ (ponto sobre a parábola de simetria). Note que a primeira iterada de $(x, (a - x^2)/2)$ resulta em $((a - x^2)/2, x)$ (que é a segunda parábola de simetria). O resumo completo das transformações de Tschirnhaus é dado na tabela 2.5.

Assim como mostrado na seção anterior para o período 5 para o período 6 também é possível considerarmos os amalgamamentos para parâmetro a geral, sendo que para a classe \mathcal{N} temos:

$$A_6^{\mathcal{N}}(x) = \prod_{i=1}^5 P_6(a, x; \sigma_i) = X(x) Y(x)^2 \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} X_6 &= x^{10} + 2x^9 + (-5a + 2)x^8 - 8(a - 1)x^7 + 2(5a^2 - 8a + 6)x^6 + 4(3a^2 - 10a + 2)x^5 \\ &\quad - 2(a - 2)(5a^2 - 8a + 2)x^4 - 8a(a - 1)(a - 6)x^3 \\ &\quad + (5a^4 - 32a^3 + 52a^2 - 64a - 16)x^2 \\ &\quad + 2(a^4 - 12a^3 + 36a^2 - 16a - 16)x - 32 + 24a^2 - 16a - a^5 + 10a^4 - 28a^3 \\ Y_6 &= x^{10} - (5a + 1)x^8 + 4x^7 + (10a^2 + 1)x^6 - 4(3a + 1)x^5 - (10a^3 - 6a^2 - a - 1)x^4 \end{aligned}$$

Tabela 2.5: Transformações T de Tschirnhaus que transformam o polinômio p_1 em p_2 .

p_1	p_2	T
Z_5	Y_5	$T_1 = a - x^2 - x$
	X_5	$T_2 = a - (a - x^2 - x)^2 - x$
	Y_5	$T_3 = a - T_2^2 - T_1$
	Z_5	$T_4 = a - T_3^2 - T_2$
X_5	Y_5	$t_1 = a - x^2 - ((a - x^2)/2)$
	Z_5	$t_2 = a - [a - x^2 - ((a - x^2)/2)]^2 - x$
	Y_5	$t_3 = a - t_2^2 - t_1$
	Y_5	$t_4 = a - t_3^2 - t_2$
	X_5	$t_5 = a - t_4^2 - t_3$

 Tabela 2.6: Transformações T de Tschirnhaus que transformam o polinômio p_1 em p_2 , para o caso das equações que definem as órbitas na classe \mathcal{N} .

p_1	p_2	T
X_6	Y_6	$t_1 = a - x^2 - ((a - x^2)/2)$
	Y_6	$t_2 = a - [a - x^2 - ((a - x^2)/2)]^2 - x$
	X_6	$t_3 = a - t_2^2 - t_1$
	Y_6	$t_4 = a - t_3^2 - t_2$
	Y_6	$t_5 = a - t_4^2 - t_3$

$$\begin{aligned}
 &+4(3a^2 + 2a + 1)x^3 + (5a^4 - 8a^3 - 5a^2 - 2a - 1)x^2 - 4(a^2 + a + 1)ax \\
 &+ a + 1 + 3a^3 + a^2 - a^5 + 3a^4.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

As transformações de Tschirnhaus que relacionam estes polinômios são dadas na tabela 2.6.

A partir do conjunto de polinômios que define o amalgamamento A_6^N podemos então determinar o ordenamento algébrico geral, O_6^N , para qualquer valor de parâmetro a para órbitas classe \mathcal{N} , sendo este dado por

$$O_6^N = \begin{pmatrix} x_i & y_i & y_j & x_j & y_j & y_i \\ y_i & x_i & y_i & y_j & x_j & y_j \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

onde $\{x_i, x_j\}$ e $\{y_i, y_j\}$ representam raízes diferentes de X_6 e Y_6 respectivamente.

Um mesmo ordenamento geral pode ser feito para as órbitas de classe \mathcal{D} , neste caso o amalgamamento geral é dado por:

$$A_6^D(x) = \prod_{i=1}^2 P_6(a, x; \sigma_i) = Z_6(x)^2 U_6(x)^2,$$

$$\begin{aligned}
 Z_6 &= x^2 - a - 1, \\
 U_6 &= x^4 + 2x^3 - (2a - 1)x^2 - 2xa + a^2 - 1 - a.
 \end{aligned}$$

A tabela 2.7 mostra as transformações que conectam as raízes destes polinômios.

O ordenamento algébrico geral para esta classe é então dado por:

$$O_6^D = \begin{pmatrix} u_i & z_i & u_j & u_j & z_j & u_i \\ u_i & u_i & z_i & u_j & u_j & z_j \end{pmatrix},$$

Tabela 2.7: Transformações de Tschirnhaus ($T(x)$) que transformam o polinômio p_1 em p_2 , para o caso das equações que definem as órbitas de período 6 na classe \mathcal{D}

p_1	p_2	T
U_6	Z_6^2	$T_1 = a - x^2 - x$
	U_6	$T_2 = a - (a - x^2 - x)^2 - x$
	U_6	$T_3 = a - T_2^2 - T_1$
	Z_6^2	$T_4 = a - T_3^2 - T_2$
	U_6	$T_5 = a - T_4^2 - T_3$

onde a notação é análoga ao caso anterior.

Um fato marcante que podemos notar das tabelas de transformações para a classe N e D para o caso do período 6, é que em cada caso somente é possível considerar uma transformação por classe, isto é os polinômios referentes aos amalgamamentos das órbitas de classe N são obtidos **somente** pela iteração do ponto sobre a parábola $(x, y) = (x, (a - x^2)/2)$, já para os polinômios referentes aos amalgamamentos das órbitas de classe D **somente** podemos gerar um polinômio a partir de outro pela iteração do ponto sobre a diagonal $(x, y) = (x, x)$.

Verificamos aqui um contraste interessante entre as órbitas de classe D de período ímpar e as órbitas de classe D de período par. No primeiro caso existem **duas** maneiras diferentes de obter os polinômios: pelas transformações oriundas das iterações de um ponto na diagonal, e pelas transformações oriundas de pontos sobre a parábola. Já no caso de órbitas classe D de período par, a obtenção dos polinômios não pode ser feita considerando as iterações do ponto sobre a parábola.

Mostramos na tabela 2.8 os resultados para os amalgamamentos até o período 11 que obtivemos, nesta tabela indicamos o grau algébrico dos polinômios constituintes de cada amalgamação como índice. Os polinômios, por serem muito extensos, são dados no apêndice C.

Tabela 2.8: Resumo dos amalgamamentos. Os subíndices em X, Y, Z, U, V e W indicam o grau em x do polinômio.

k	N	D
1	-	Z_2
2	X_2	-
3	-	$Y_2 Z_2^2$
4	$X_4 Y_2^2$	Z_2^2
5	-	$X_6 Y_6^2 Z_6^2$
6	$X_{10} Y_{10}^2$	$Z_2^2 U_4^2$
7	-	$X_{14} Y_{14}^2 Z_{14}^2 U_{14}^2$
8	$X_{24} Y_{24}^2 Z_{12}^2$	$U_{12}^2 V_{12}^2$
9	-	$X_{28} Y_{28}^2 Z_{28}^2 U_{28}^2 V_{28}^2$
10	$X_{54} Y_{54}^2 Z_{54}^2$	$U_{12}^2 V_{24}^2 W_{24}^2$
11	-	$X_{62} Y_{62}^2 Z_{62}^2 U_{62}^2 V_{62}^2 W_{62}^2$

A tabela 2.9 mostra um resumo dos ordenamentos algébricos conseguidos via os amalgamamentos gerais apresentados na tabela 2.8.

O resumo dos ordenamentos orbitais algébricos, apresentados na tabela 2.9, ilustra a *relação* estrutural que existe entre o ordenamento de órbitas de períodos diferentes pertencentes à uma

Tabela 2.9: Ordenamentos orbitais e classes auto-simétricas para períodos $3 \leq k \leq 11$. Índices diferentes de uma mesma variável denotam diferentes raízes de um mesmo polinômio

k	N	D
1		$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$	
3		$\begin{pmatrix} z & y & z \\ z & z & y \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} x_i & y_i & x_j & y_i \\ y_i & x_i & y_i & x_j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} z_i & z_j & z_j & z_i \\ z_i & z_i & z_j & z_j \end{pmatrix}$
5		$\begin{pmatrix} z & y & x & y & z \\ z & z & y & x & y \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} x_i & y_i & y_j & x_j & y_j & y_i \\ y_i & x_i & y_i & y_j & x_j & y_j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_i & z_i & u_j & u_j & z_i & u_i \\ u_i & u_i & z_i & u_j & u_j & z_i \end{pmatrix}$
7		$\begin{pmatrix} z & y & u & x & u & y & z \\ z & z & y & u & x & u & y \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & y_j & x_j & y_j & z_i & y_i \\ y_i & x_i & y_i & z_i & y_j & x_j & y_j & z_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_i & v_i & v_j & u_j & u_j & v_j & v_i & u_i \\ u_i & u_i & v_i & v_j & u_j & u_j & v_j & v_i \end{pmatrix}$
9		$\begin{pmatrix} z & y & u & v & x & v & u & y & z \\ z & z & y & u & v & x & v & u & y \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & z_j & y_j & x_j & y_j & z_j & z_i & y_i \\ y_i & x_i & y_i & z_i & z_j & y_j & x_j & y_j & z_j & z_i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_i & w_i & u_i & w_j & v_j & v_j & w_j & u_i & w_i & v_i \\ v_i & v_i & w_i & u_i & w_j & v_j & v_j & w_j & u_i & w_i \end{pmatrix}$
11		$\begin{pmatrix} z & y & u & v & w & x & w & v & u & y & z \\ z & z & y & u & v & w & x & w & v & u & y \end{pmatrix}$

mesma classe, como por exemplo as órbitas na classe \mathcal{D} para períodos ímpares, todos estes ordenamentos tem características similares às encontradas para o período 5 a saber: (1) os pontos na diagonal são raízes de um unico polinômio $Z(x)$ e (2) os demais pontos da órbita são constituídos de uma única raiz por polinômio, o que não acontece com os períodos pares onde as órbitas, de classe \mathcal{D} ou de classe \mathcal{N} são constituídas de mais de uma raiz por polinômio, o que podemos ver na tabela 2.9 pela presença de índices diferentes.

Capítulo 3

Mandelbrot sem Pontos Críticos

Neste capítulo, após rever conceitos básicos associados ao famoso conjunto de Mandelbrot, mostramos que tal conjunto corresponde a uma situação limite de um caso bem mais geral descoberto por nós. Tal caso geral é de muita importância em física e mostra que, por exemplo, os diagramas de fase, além das fases usuais obtidas classificando-se as soluções no plano real, podem conter infinitas fases adicionais totalmente novas, advindas de soluções estáveis no plano complexo. Enquanto o ponto chave da dinâmica no domínio complexo nos últimos 25 anos tem sido o estudo dos pontos críticos, mostramos que a situação mais geral apresenta os fenômenos conhecidos e muito mais, na ausência total de pontos críticos. Alguns dos resultados principais deste capítulo foram publicados na Ref. [75].

3.1 Dinâmica no plano complexo: O conjunto de Mandelbrot

Um aspecto de grande impacto gerado pelo estudo moderno da dinâmica não-linear foi a percepção da presença quase que universal de características que estão direta ou indiretamente relacionadas com o conceito de *dimensão fractal* que caracteriza a estrutura de conjuntos de pontos no espaço de fase dos sistemas físicos. Por exemplo, o conjunto das condições iniciais que dão origem a trajetórias que convergem assintoticamente para um mesmo atrator constituem um conjunto bem determinado, conhecido pelo nome de *bacia de atração* do atrator em questão. Como um fato que sedimentou-se na década de 1980, foi a observação empírica que, com muita frequência, as *fronteiras* de tais bacias de atração podem ser objetos extremamente complicados, caracterizados por dimensões cujos valores são números não inteiros, que deram origem ao conceito de dimensão fractal. Como é bem sabido, tal fato tem muito impacto em todos fenômenos naturais que envolvem modelos matemáticos não-lineares na sua descrição teórica. A literatura produzida nos últimos 25 anos sobre este assunto é extremamente volumosa em todos os campos da ciência [57].

Grande parte do conhecimento adquirido sobre fractalidade, dimensões, entropias, dinâmica simbólica, etc, provém, grosso modo, do estudo da dinâmica da versão para o plano complexo do mapa quadrático ou, no dialeto matemático, da família quadrática seguinte

$$z_{t+1} = Q_c(z) \equiv c - z_t^2, \quad (3.1)$$

onde $c = a + ib$ é o parâmetro complexo e $z_t = x_t + i \xi_t$ é a variável complexa.

Como é fácil verificar, a dinâmica discreta em uma variável complexa é equivalente a uma classe restrita de mapas bidimensionais envolvendo duas variáveis reais e duas funções que precisam obedecer as condições de Cauchy-Riemann. Mas estas condições não são requeridas para sistemas dinâmicos bidimensionais genéricos usualmente usados como modelos de fenômenos naturais [58]. No caso do mapa 3.1, o sistema bidimensional equivalente é dado por,

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + \xi_t^2,$$

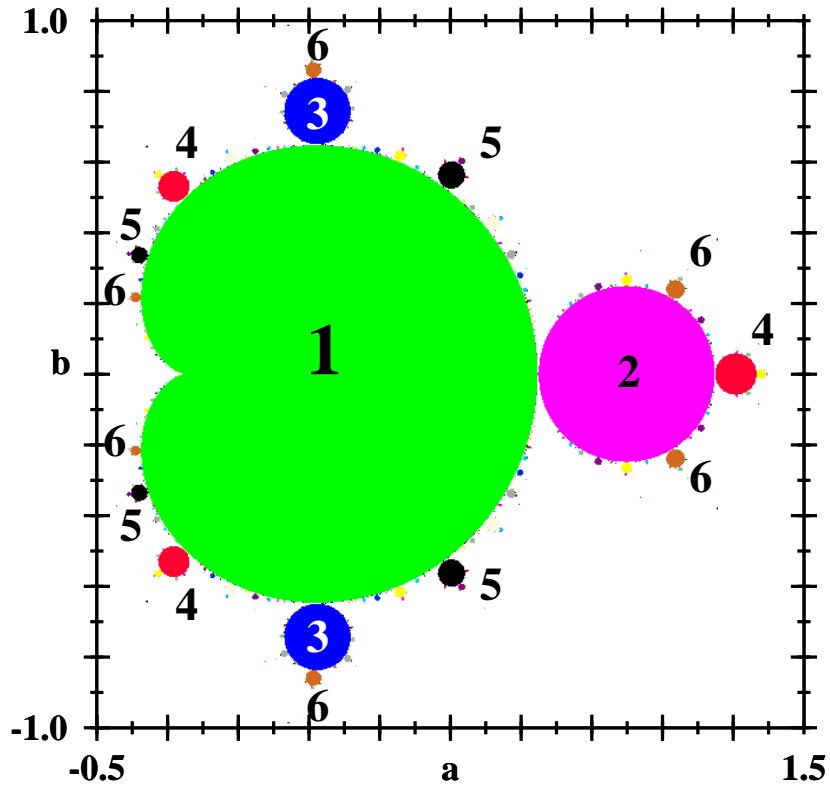


Figura 3.1: O conjunto de Mandelbrot. Cores diferentes denotam regiões do espaço de parâmetros onde órbitas de períodos diferentes são estáveis. Indicamos com números algumas das regiões maiores, correspondentes a períodos mais baixos

$$\xi_{t+1} = b - 2x_t\xi_t. \tag{3.2}$$

O subconjunto do espaço de parâmetros c do mapa 3.1, ou equivalentemente para o mapa 3.2, para os quais não há divergência após um número infinito de iterações do ponto crítico $z = 0$ do mapa, é chamado de conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} . Define-se matematicamente tal conjunto como $\mathcal{M} = \{c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(0) \nrightarrow \infty\}$ onde $z = 0$ é o ponto crítico do mapa de $Q_c(z)$ e $Q_c^n(z)$ denota a n -ésima composição do mapa com ele próprio [76, 77]. Mostramos o conjunto de Mandelbrot na figura 3.1.

Devido ao seu formato, o conjunto de Mandelbrot é muitas vezes chamado de *cactus*, sendo seu corpo principal, que compreende a região de estabilidade de movimentos de período 1, limitado pela superfície algébrica dada por:

$$256b^4 + 32(-3 + 16a^2)b^2 + 256a^4 - 3 - 32a - 96a^2 = 0. \tag{3.3}$$

Embora, como já mencionado, esta dinâmica complexa ser própria de uma classe particular de sistemas multidimensionais, é possível ver sua dinâmica em experimentos de laboratório, como o feito por Isaeva et al.[80], que construíram um sistema eletrônico baseado em uma redefinição do mapa 3.2, redefinição esta que se constitui na mudança de variáveis dada por

$$X = x + \beta y; \quad Y = x - \beta y, \tag{3.4a}$$

$$A = a + \beta b; \quad B = a - \beta b, \tag{3.4b}$$

onde β é uma constante arbitrária diferente de zero. Esta simples mudança de variáveis transforma o mapa da Eq. (3.2) em

$$X_{t+1} = A - X_t^2 + \epsilon(X_t - Y_t)^2 \quad (3.5)$$

$$Y_{t+1} = B - Y_t^2 + \epsilon(X_t - Y_t)^2, \quad (3.6)$$

onde

$$\epsilon = \frac{1 + \beta^2}{4\beta^2}. \quad (3.7)$$

O mapa da Eq. (3.6), pode ser interpretado como dois mapas quadráticos distintos acoplados, sendo ϵ o parâmetro de acoplamento. Note que apesar de ser possível uma interessante representação bidimensional da família quadrática Eq. (3.2), os parâmetros A, B, ϵ da representação não podem ser escolhidos simultaneamente de modo arbitrário, devido às relações que os interconectam.

O que faremos neste capítulo é analisar a dinâmica complexa para um caso mais rico, e com uma sobreposição maior com a dinâmica real. Até aqui, a imensa literatura sobre o mapa quadrático estuda sua dinâmica sob dois pontos de vista extremos. Os cientistas que usam o mapa para explicar fenômenos naturais costumam considerar situações envolvendo variáveis e parâmetros no domínio real. Já os trabalhos de cunho matemático são baseados, quase invariavelmente, apenas no domínio de variáveis e parâmetros complexos. Neste capítulo estudaremos uma situação intermediária que serve de ponte entre os dois casos extremos mencionados. Consideraremos os parâmetros de controle como sendo reais, porém permitiremos que o espaço de fase seja complexo.

3.2 Hénon com variáveis complexas e parâmetros reais

O mapa de Hénon em sua versão tradicional, com variáveis reais e parâmetros reais pode servir como modelo para diversos sistemas físicos tais como aproximações para fenômenos físicos estudados em aceleradores de partículas, uma vez que pode ser deduzido do Hamiltoniano do movimento betatrônico bidimensional, para uma rede de células periódicas, com uma única não-linearidade de sextupólo concentrada, na aproximação de um *chute*[44]. Analogamente, o mesmo mapa com parâmetros reais e variáveis de espaço de fase complexas é usado para o mesmo modelamento, contudo para uma não-linearidade octupolar [45].

O mapa de Hénon com espaço de fase complexo $(x + i\xi) \times (y + i\eta)$ pode ser escrito como,

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + b y_t + \xi_t^2, \quad y_{t+1} = x_t, \quad (3.8a)$$

$$\xi_{t+1} = -2x_t\xi_t + b\eta_t, \quad \eta_{t+1} = \xi_t, \quad (3.8b)$$

onde ξ e η são as componentes complexas de x e y respectivamente. Como é fácil ver, se ambas componentes complexas forem nulas, as equações acima desacoplam-se e recaem na situação bem conhecida, estudada nos capítulos anteriores.

Um fato marcante é que a versão complexificada do mapa de Hénon NÃO POSSUI PONTO CRÍTICO. Isto ocorre em nítido contraste como o caso bem conhecido do mapa quadrático complexificado cuja dinâmica, como vimos na seção anterior, é regida pelo ponto crítico.

Como anteriormente para o caso do mapa quadrático, o mapa de Hénon complexificado da Eq. (3.8) pode ser escrito como dois mapas de Hénon reais acoplados:

$$X_{t+1} = a - X_t^2 + bX_{t-1} + \epsilon(X_t - Y_t)^2, \quad (3.9a)$$

$$Y_{t+1} = a - Y_t^2 + bY_{t-1} + \epsilon(X_t - Y_t)^2, \quad (3.9b)$$

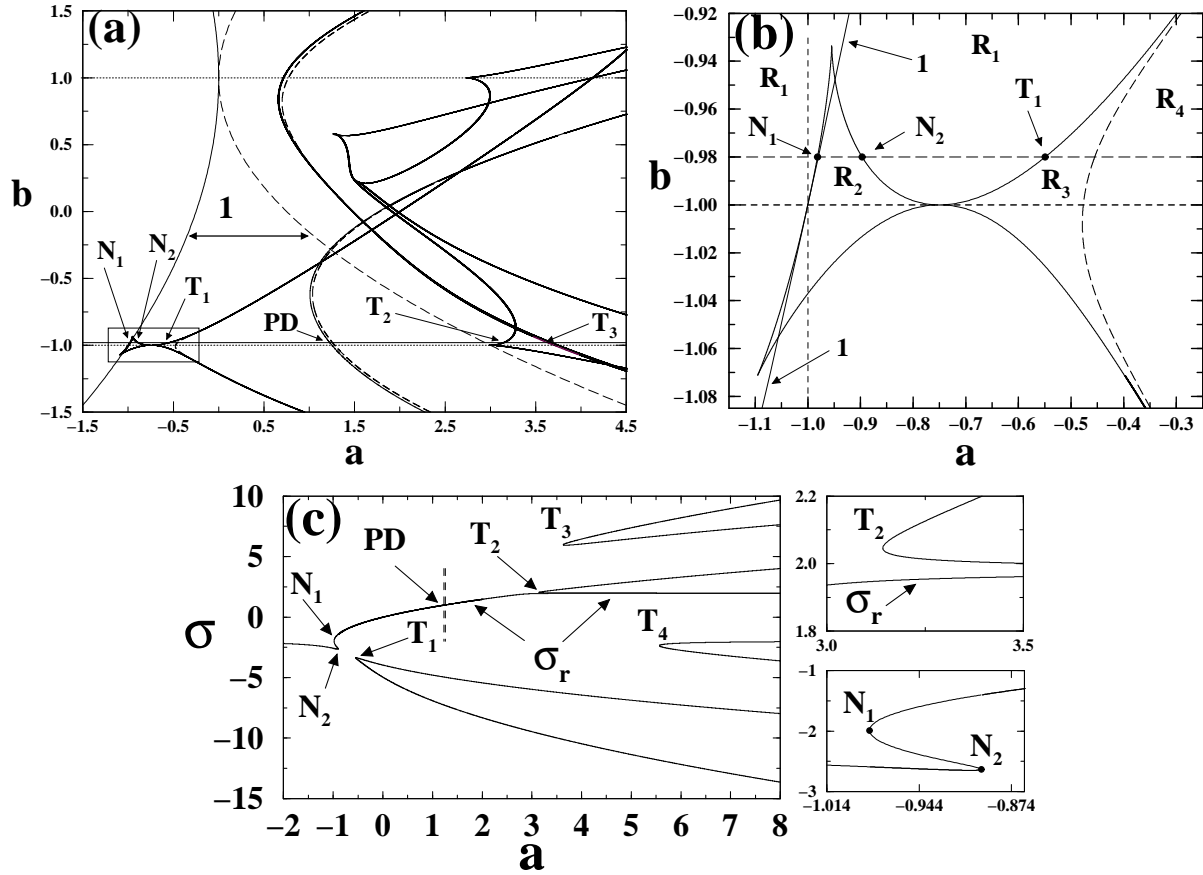


Figura 3.2: Os domínios de estabilidade de período 1 e 6 no espaço de parâmetros. Em (a): Visão geral das curvas de bifurcação de dobra e de dobramento de período para os períodos 1 e 6. Em (b) magnificamos a região marcada com a uma caixa em (a). Em (c) mostramos o comportamento de σ ao longo da linha $b = -0.98$ mostrada em (b).

onde

$$X_t = x_t + \beta \xi_t, \quad (3.10)$$

$$Y_t = x_t - \beta \xi_t, \quad (3.11)$$

$$\epsilon \equiv \frac{1 + \beta^2}{4\beta^2}. \quad (3.12)$$

Novamente, os parâmetros não permitem variações totalmente independentes, apesar da redução formal ser novamente possível.

Outro ponto interessante é que a dinâmica complexa pode emergir mesmo do mapa na sua versão completamente real, quando tratamos a dinâmica exatamente, isto é pelas soluções das equações algébricas exatas, que descrevem os movimentos periódicos, uma vez que ao obtermos as equações de movimento exatas não fazemos nenhuma restrição acerca da natureza dos pontos que compõem uma órbita, salvo, é claro, dela ser periódica. O primeiro caso onde vemos esta interconexão é o do caso dos movimentos de período 6 publicadas por nós em [7].

Na figura 3.2(a) mostramos os resultados exatos para as curvas de bifurcação de período 1 e 6. Destacamos, por uma caixa nesta figura, a presença de uma região de estabilidade nova, que

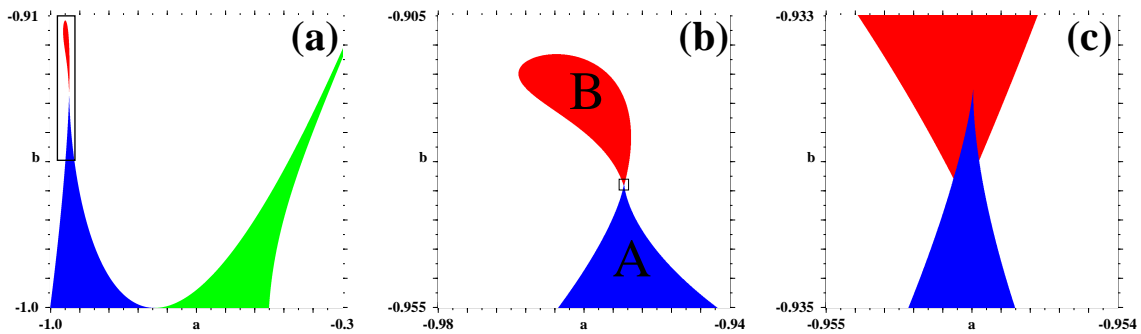


Figura 3.3: Regiões estáveis de período 6 imersa na região branca instável (para período 6) . Em (a): a metade estável da região mostrada na figura 3.2(b), juntamente com uma nova região de estabilidade, indicada por uma caixa. Em (b): ampliação da caixa mostrada em (a), Em (c): ampliação da região destacada na caixa em (b), mostrando detalhes da conexão entre as regiões distintas.

encontra-se magnificada na figura 3.2(b). Embora as regiões R_2 e R_3 sejam limitadas por uma mesma curva algébrica (em linha cheia) que define o nascimento de órbitas de período 6 com autovalor $\lambda = 1$, elas se distinguem drasticamente em termos da natureza das órbitas. Na região R_3 temos um par de órbitas de período 6 reais sendo uma instável e outra estável, estabilidade esta que é perdida em um dobramento de período $6 \rightarrow 12$ quando passamos da região R_3 para a região R_4 . Já na região R_2 temos uma situação diferente embora termos ainda uma região de estabilidade esta é devida a uma órbita complexa de período 6, isto é uma órbita de período 6 constituída de pontos orbitais no plano complexo.

A figura 3.2(c) mostra o comportamento dos valores de σ , a soma dos pontos orbitais, soluções de $S_6(\sigma, a) = 0$, para um valor fixo do parâmetro de dissipação $b = -0.98$. Esta linha é mostrada também na figura 3.2(b) sendo as intersecções desta linha com as bifurcações de dobra, de órbitas reais de período 6, chamados de T_i , as intersecções com a bifurcação de dobra que dá origem à órbita complexa estável são por sua vez chamadas de N_i e o ponto de dobramento de período de $3 \rightarrow 6$ por sua vez é chamado de PD . O que a figura 3.2(c) revela é que embora a órbita estável entre os pontos N_1 e N_2 seja complexa, ela possui um valor de σ real, havendo ainda duas outras órbitas complexas, no referido intervalo, com essa mesma característica contudo instáveis. Um dos fatos principais que podemos concluir deste estudo é que as bifurcações com autovalor $\lambda = 1$, usualmente chamadas de bifurcação de dobra, não necessariamente representam uma estabilização de uma órbita real antes complexa e instável, como vimos ela pode significar uma estabilização de uma órbita complexa que antes da bifurcação também era complexa, porém instável.

Contudo este ainda não é o cenário completo, em termos de órbitas de período 6 estáveis. Uma vez que obtivemos os resultados exatos para o período em discussão, podemos analisar uma terceira condição de estabilidade: movimentos que possuem autovalores complexos com módulo menor ou igual à unidade. A figura 3.3 mostra o resultado desta consideração na vizinhança da região de estabilidade da órbita complexa considerada anteriormente.

A região destacada na figura 3.3(a), e ampliada na figura 3.3(b) (rotulada por B), também define a estabilidade de órbitas complexas, contudo estas órbitas tem características diferentes das órbitas complexas estáveis apresentadas quando do estudo da figura 3.2. A primeira diferença está na quantidade das órbitas. Enquanto anteriormente tínhamos apenas uma única órbita complexa estável, temos agora nessa nova região duas órbitas complexas, O_1 e O_2 , ambas simultaneamente

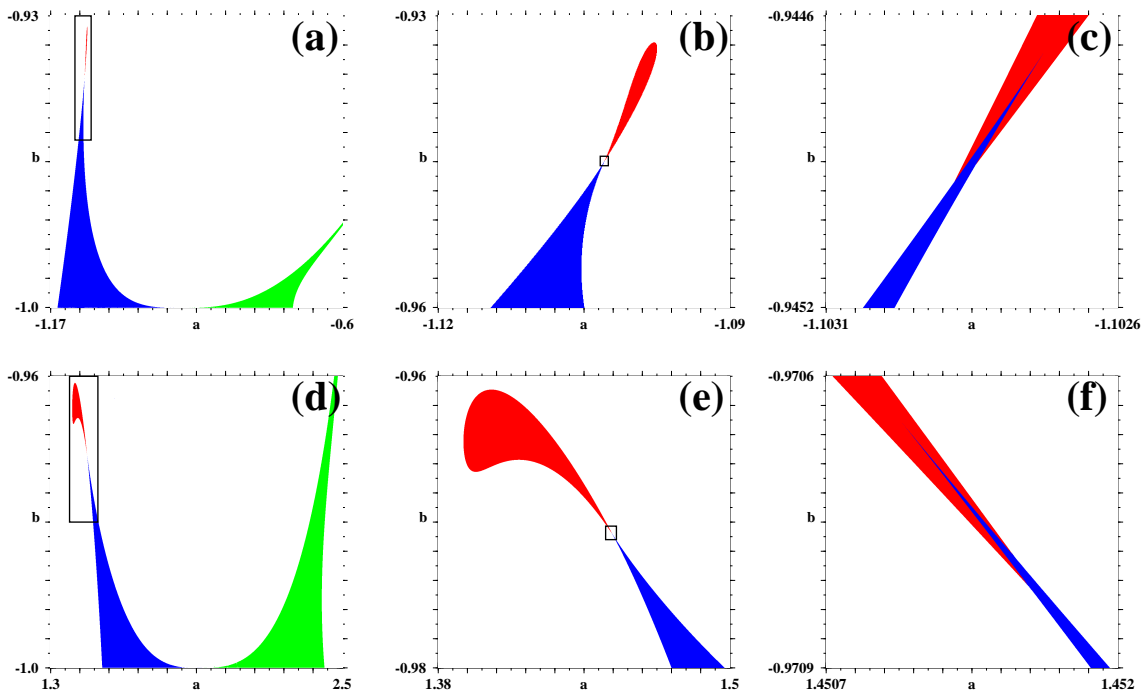


Figura 3.4: Regiões de estabilidade de período 8 análogas às que existem para período 6.

estáveis, de maneira que a soma dos pontos de cada órbita, σ_1 e σ_2 , são números complexos. Em contraste, no caso anterior tínhamos uma soma de pontos σ real, embora a natureza complexa da órbita. As órbitas complexas estáveis O_1 e O_2 são tais que a soma de seus pontos orbitais estão relacionados, de maneira que $\sigma_1 = \sigma_2^*$, isto é a soma dos pontos de uma órbita é o complexo conjugado da soma da segunda órbita, e este fato traz um mesmo tipo entrelaçamento nos pontos orbitais, uma vez que os pontos orbitais são soluções do que chamamos de equação orbital parametrizada $P_k(x, a, b; \sigma) = 0$, ou seja os pontos de cada uma das órbitas são tais que $O_1 = O_2^*$.

A figura 3.3(c) mostra em detalhe que a conexão das duas regiões onde existem dois tipos de órbitas complexas estáveis ocorre ao longo de uma curva e que *não há nenhuma superposição das duas regiões*, isto é, não existe nenhuma sub-região onde coexistam de maneira estável os dois tipos distintos de órbitas complexas, com σ real e σ complexo.

O cenário descrito para o período 6 existe também para período 8. Através do cálculo das variedades exatas, isto é, as equações algébricas que definem os limites de estabilidade, mostramos na figura 3.4, as regiões do espaço de parâmetro onde encontramos uma situação similar com a anterior. Como mostrado nas figuras 3.4(a) e 3.4(d), para o período 8 temos duas estruturas semelhantes a aquelas que existem para o período 6. As ampliações sucessivas da conexão entre as regiões, mostradas em 3.4(b)-(c) e 3.4(e)-(f), mostram novamente que não há superposição das regiões.

Uma situação diferente surge quando estudamos a possibilidade de órbitas estáveis complexas de período 7 próximos ao limite Hamiltoniano. Na figura 3.5(a) mostramos parte da região onde existem órbitas de período 7 estáveis, em particular na região verde o número ‘1’ assinala a região onde existe um par de órbitas reais, sendo uma delas estável. A região vermelha marcada com um ‘2’ indica o domínio de estabilidade de duas órbitas complexas simultaneamente estáveis sendo este domínio definido pela condição $|\lambda| \leq 1$. Contudo, na presente situação há um grande

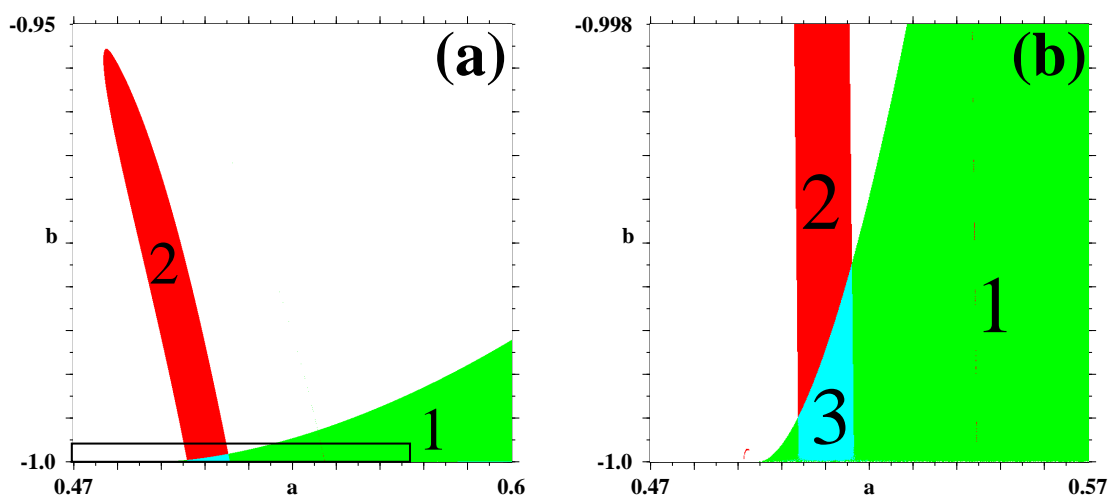


Figura 3.5: Região do espaço de parâmetro onde órbitas complexas de período 7 são estáveis. Na região 1 existe uma par de órbitas reais, uma delas estável. Na região 2 temos coexistência de duas órbitas complexas estáveis. Na região 3 temos uma *sobreposição* dos dois casos anteriores, ou seja, coexistência das três órbitas de período 7.

diferencial dos casos anteriores, e este está em como estes dois domínios de estabilidade estão relacionados. Da figura 3.5(b), que mostra a ampliação da caixa marcada na figura 3.5(a), vemos que *existe uma região de superposição* de domínios de estabilidade, que indicamos com um ‘3’, onde três órbitas de período 7, duas complexas e uma real, são simultaneamente estáveis. Tal região contrasta radicalmente com o encontrado nos casos de período 6 e 8 apresentados anteriormente. Outro fato marcante está na conexão da região ‘2’ com o limite Hamiltoniano, que para os casos anteriores não existe.

As regiões de estabilidade de órbitas complexas até aqui apresentadas não são as únicas existentes para os períodos considerados.

Para o período 8 existe uma situação diferente, onde o domínio de estabilidade das órbitas complexas está *conectado* com os domínios de órbitas reais, o que difere dos cenários que mostramos haver próximo da linha $b = -1$ onde estes domínios de multiestabilidade estavam conectados com outros domínios de estabilidade através de uma única órbita complexa, ou então, conectados diretamente com a linha $b = -1$.

Na figura 3.6(a) mostramos uma visão geral da estrutura de cúspides que existem para o período 8. As regiões em vermelho fora da caixa marcada destacam as regiões de multiestabilidade (coexistência) de duas órbitas reais estáveis. Já na região em vermelho dentro da caixa temos a coexistência de duas órbitas complexas simultaneamente estáveis. Temos na figura 3.6(b) uma situação similar à do período 6 (figura 3.3(b)) e do período 8 (figuras 3.4(b) e 3.4(e)), no que se refere a presença de uma cúspide e uma região de multiestabilidade conectada a ela. Contudo na presente situação temos uma conexão entre a região definida pela estabilidade de duas órbitas complexas de período 8 com a cúspide existente na curva de bifurcação de dobra, que marca o nascimento de duas órbitas reais de período 8, uma estável e outra instável. E neste fato está grande diferença dos casos anteriores, pois temos agora uma conexão entre a dinâmica de órbitas reais com órbitas complexas estáveis. A conexão entre regiões de estabilidade de órbitas complexas e órbitas reais não ocorre somente na região mostrada na figura 3.6. Uma região ainda mais rica é mostrada no intervalo de parâmetros da figura (3.7).

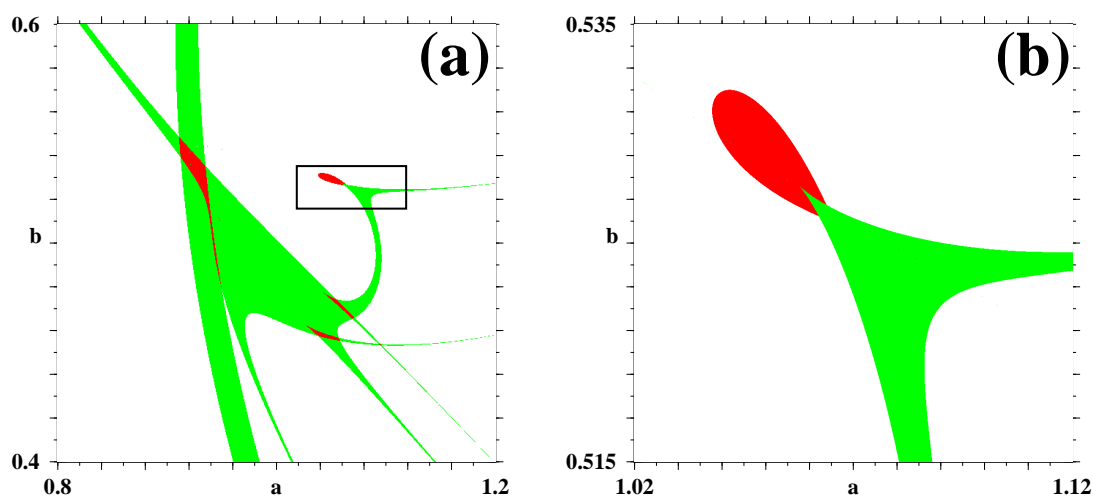


Figura 3.6: Domínios de estabilidade de órbitas complexas de período 8. (a) nas regiões vermelhas fora da caixa existem coexistência de duas órbitas distintas de período 8 reais. Na região vermelha dentro da caixa existem duas órbitas de período 8, complexas. (b) vista magnificada da região dentro da caixa. Estas regiões fornecem a estrutura exata e em escala das regiões discutidas anteriormente por El Hamouly e Mira [62], ampliando-a de modo a conter também o domínio das órbitas estáveis complexas.

Na figura 3.7 mostramos a região de estabilidade de órbitas complexas e reais de período 8 que circundam o domínio de estabilidade de órbitas de período 4 (o que contém $k = 4$ na figura 3.7). Embora a região em verde seja limitada por uma única curva algébrica, ela é constituída por duas sub-regiões diferentes: uma região que define a estabilidade de uma órbita real de período 8 (indicada pelo rótulo R) e uma região definida pela existência de uma órbita complexa estável de mesmo período (indicada pelo rótulo C), com a soma σ de seus pontos real, num cenário semelhante ao que tínhamos para as órbitas complexas de período 6 (ver figura 3.3). Para uma órbita genuinamente complexa ter a soma dos seus pontos dada por um número real, ela deve obviamente ser formada por pontos complexos conjugados. Nesta situação novamente surge uma região de multiestabilidade de duas órbitas complexas de período 8. Contudo agora esta região aparece conectada às duas regiões R e C , diferindo dos casos previamente apresentados.

Existem mais três regiões de multiestabilidade de órbitas complexas, uma região para cada período (6, 7 e 8) considerados até aqui, estas regiões são mostradas na figura 3.8.

As regiões de estabilidade restantes aparecem conectadas à linha $b = 1$ que define o limite superior de estabilidade dos movimentos de períodos quaisquer para o mapa de Hénon. A diferença destas regiões, além da periodicidade dos movimentos que as definem e da sua forma, está no modo que elas estão conectadas à linha $b = 1$ em questão. Enquanto as regiões relacionadas aos períodos 6 e 8 mostradas nas figuras 3.8(a) e 3.8(c), respectivamente, estão conectadas à linha $b = 1$ em um único ponto ($a = 0.75$ para o período 6 e $a = 0.5$ para o período 8), a região correspondente ao período 7 está conectada ao longo de uma linha (não de um ponto), como também estava no caso da figura 3.5.

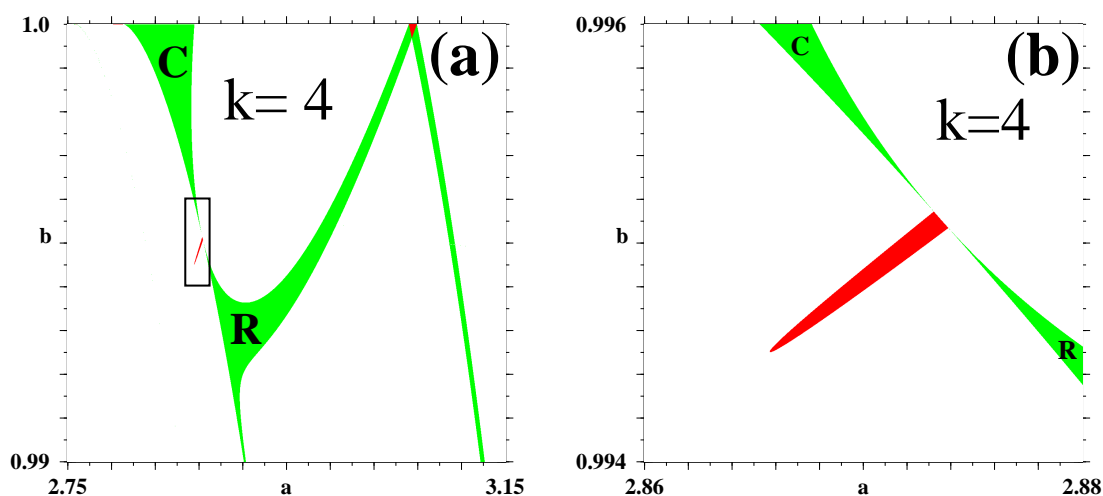


Figura 3.7: Domínios de estabilidade de órbitas complexas de período 8, em conexão com bifurcações de período 8 que vem de dobramento de período $4 \rightarrow 8$. C indica o domínio de uma órbita complexa estável de período 8, enquanto que R indica o domínio de uma órbita real estável de período 8. Veja na figura 3.13 abaixo, na página 44, o que existe adicionalmente em torno desta região aparentemente árida, ao considerarem-se também os domínios provenientes de órbitas complexas estáveis de períodos maiores que 8.

3.3 Conjuntos tipo Mandelbrot e mais gerais

Os resultados apresentados até aqui, obtidos através de expressões analíticas exatas, nos mostram a existência de regiões onde pares de órbitas complexas são simultaneamente estáveis. Tais regiões resultam de considerarmos os valores de a e b tais $|\lambda| = 1$ nas equações algébricas exatas. Esta condição é a mesma que define o corpo principal (cardióide) do conjunto de Mandelbrot.

Notamos haver uma relação entre a presença de cúspides nas curvas de bifurcação no espaço de parâmetros e a existência de regiões de estabilidade de órbitas complexas conectadas a estas cúspides. A presença de tais tipos novos de singularidades no espaço de parâmetros do mapa de Hénon é muito freqüente, como se pode ver na figura 3.9.

A figura 3.9(a) mostra uma janela do espaço de parâmetros contendo domínios de estabilidade orbital obtidos numericamente, considerando somente a estabilidade de órbitas reais, como é feito tradicionalmente na literatura. Os domínios de estabilidade no espaço de parâmetros são gerados numericamente estudando-se para cada ponto (a, b) o comportamento das iteradas em (x, y) e pintando tal ponto com uma cor específica codificando a periodicidade da órbita encontrada.

A grande região rosa de fundo indica os parâmetros para os quais temos somente órbitas não-limitadas, isto é, divergências para o atrator localizado no infinito. As várias estruturas coloridas correspondem a orbitas periódicas, com os períodos de alguns dos domínios maiores indicados próximo deles. A cor branca é usada para indicar “caos”, isto é órbitas aperiódicas ou órbitas que possuem um período maior que 512, limite superior de procura definido nas rotinas numéricas utilizadas.

Para melhor contraste, o corpo principal de cada ilha de estabilidade é mostrado em preto.

Sempre que houver coexistência de órbitas nós mostramos a órbita não-divergente com menor volume de bacia de atração no retângulo $x \in [-2.5, 2.5]$ e $y \in [-10, 10]$, discretizado em uma rede de 1024×1024 valores.

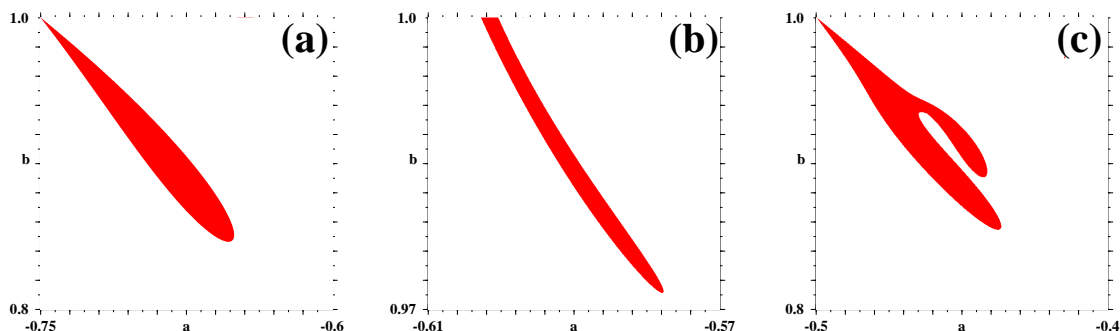


Figura 3.8: Domínios de estabilidade de órbitas complexas que emergem ao longo da linha $b = 1$. (a) de período 6 (b) de período 7 (c) de período 8. Note que enquanto os domínios de períodos 6 e 8 emergem a partir de um ponto, o de período 7 emerge a partir de um segmento de reta.

A caixa B na figura 3.9(a) é magnificada na figura 3.9(b). Ela mostra dois diferentes tipos de estruturas singulares que se originam de um corpo central de período 10: uma estrutura cúspidal e uma estrutura arredondada. Estas singularidades podem ser descritas usando duas formas normais de um polinômio cúbico definido pelo sinal de termo cúbico [78]. A figura 3.9(c) mostra um par semelhante de singularidades surgindo desta vez de um corpo central de período 14 (não mostrado). Ambas estruturas vistas em Figs. 3.9(b) e 3.9(c) aparecem frequentemente em experimentos [60].

Analogamente à seção anterior, analisaremos as regiões de estabilidade de órbitas complexas, porém agora numericamente, para poder ter acesso às órbitas de períodos elevados, inacessíveis ao cálculo analítico, devido à extensão dos cálculos. Em outras palavras, a investigação numérica nos fornecerá acesso ao espaço de parâmetros completo, incluindo estabilidade de órbitas periódicas de periodicidade superior a aquelas consideradas anteriormente.

As estruturas nas caixas A e C da figura Fig. 3.9(a) aparecem magnificadas nas figuras 3.10 e 3.11, onde incluímos agora as novas regiões de estabilidade devido a órbitas complexas. Cada figura individual mostra o resultado do estudo do espaço de fase para 600×600 valores de parâmetros.

A canto superior esquerdo na figura 3.10(a) mostra um exemplo do novo domínio tipicamente encontrado perto de singularidades cuspidais quando órbitas complexas estáveis são levadas em conta : o aparecimento de domínios semelhantes a “flores de cactus”, isto é formas semelhantes a conjuntos de Mandelbrot distorcidos. A cúspide preta na figura 3.10(a) tem período 8, o mesmo período do corpo central amarelo da flor de cactus magnificada na figura 3.10(b).

Como já comentado quando da análise feita via as expressões exatas de período 8, os parâmetros deste corpo produzem pares de órbitas *complexas conjugadas* estáveis, possuindo analogamente a soma σ de suas coordenadas x números complexos conjugados. Quando mudamos os parâmetros para baixo ao longo da linha de simetria da figura 3.10a encontramos uma conversão contínua de uma cascata 8×2^n de órbitas *complexas* em uma cascata 8×2^n de órbitas *reais*. Estas cascatas estão conectadas pelos dois domínios de período 8: o domínio de período 8 do cactus de órbitas complexas e a cúspide de período 8 de órbitas reais. Os números denotam períodos. A figura 3.10c ilustra o novo fenômeno encontrado:

- (i) a *existência* de flores de cactus autosimilares ao longo do domínio caracterizado pelas órbitas reais,
- (ii) a *acumulação* destas flores de cactus, implicando séries de propriedades métricas até aqui totalmente desconhecidas,

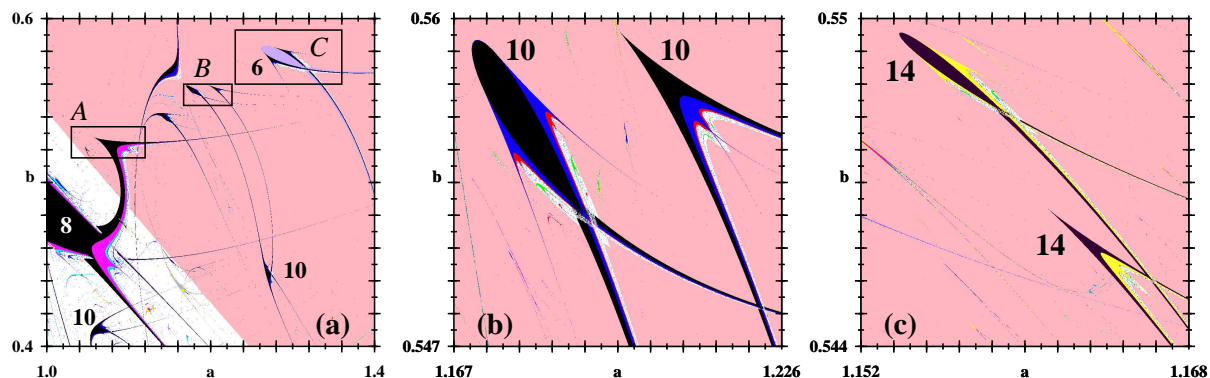


Figura 3.9: (a) região do espaço de parâmetros do mapa de Hénon ilustrando regiões de estabilidade caracterizadas por órbitas reais apenas. As caixas A, B e C são magnificadas nas figuras seguintes. (b) magnificação da caixa B, exemplificando duas famílias bastante típicas de ilhas de estabilidade, cuspidal e não-cuspidal, aqui para órbitas de período 10. (c) os mesmos dois tipos de ilhas, porém para período 14. Estas figuras exemplificam diagramas de fase como usualmente gerados durante os últimos 25 anos: considerando-se a estabilidade das órbitas *reais*, apenas. As figuras 3.10 e 3.11 mostram as estruturas surpreendentes que descobrimos ao analisar também a estabilidade das fases no domínio complexo.

(iii) estruturas tipo Mandelbrot ordenadamente “empacotadas” ao longo de *segmentos de linhas*, não curvas fechadas como as encontradas no conjunto de Mandelbrot.

Para dar uma pequena idéia da velocidade da convergência na direção do ponto de acumulação, os pontos pretos na figura 3.10c marcam os corpos principais de período 72, 120 e 168, do topo para a base. Uma análise detalhada das inúmeras propriedades métricas facilmente perceptíveis destas figuras ainda está por ser feita.

A figura 3.11(a) ilustra as novas e surpreendentes estruturas, com formato que lembra um “peixe espada”, encontradas genericamente no topo de singularidades não-cuspidais. Como anteriormente, os novos domínios vistos são também devidos a órbitas complexas esáveis. Eles complementam aqui a estrutura não-cuspidal no interior da caixa C na figura 3.9, devida a órbitas reais de período 6 cujas expressões analíticas já publicamos na literatura [6, 7].

A estrutura não-cuspidal de período 6 que forma o núcleo central é circundada por cinco domínios de período 12. Existe um par trivial de estruturas cuspidais simetricamente localizadas nos lados do núcleo central. Eles correspondem a dobramentos do período das órbitas originais de período 6. As ilhas verdes dentro da caixa B na figura 3.11(b) mostram os corpos centrais de estruturas não-triviais altamente estruturadas devido a órbitas complexas. O “nariz” ao longo do eixo de simetria aparece de uma única órbita complexa tendo um valor real para a soma σ das coordenadas x das órbitas [73], isto é, formada por pontos orbitais *complexos conjugados*. O estruturamento encontrado no topo cuspidal do nariz dentro da caixa A (singularidade do locus de estabilidade [76]) é análogo ao da figura 3.10(a), aqui com o diferencial da natureza das órbitas.

Estruturas idênticas existem ao redor do topo da cúspide que é encontrada na estrutura “gravata borboleta” de período 6 reportada analiticamente em [7], para o caso do período 6.

O par de pontos pretos marca pontos de bifurcação de codimensão dois, onde *quatro* regiões de estabilidade se encontram. A situação ao redor destes pontos é mostrada em detalhe na figura 3.11(c). Parâmetros do domínio em cor verde fraco de período 12 conectado acima da curva contendo o ponto preto na figura 3.11(c) estão relacionados a pares de órbitas complexas *conjugadas* esáveis.

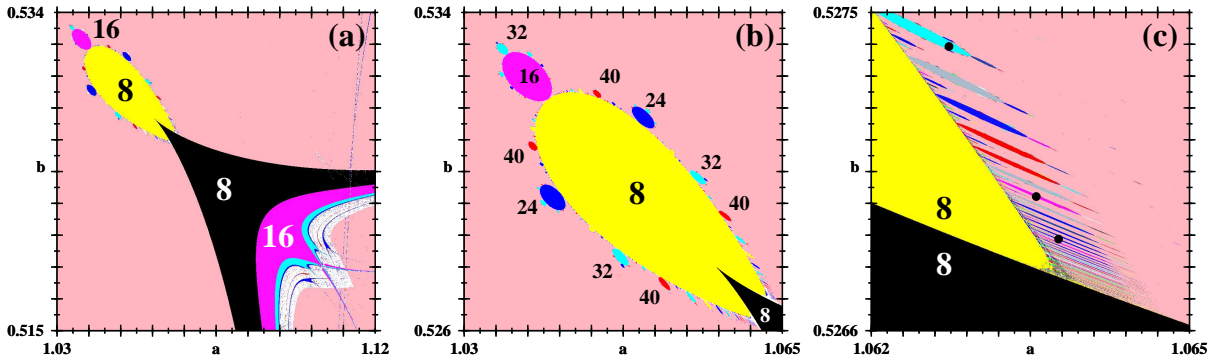


Figura 3.10: As infinitas ilhas adicionais, indicando regiões de estabilidade de órbitas *complexas* em torno da singularidade cuspídal de período 8. Estas infinitas flores de cactus (fases estáveis de soluções complexas) são um complemento surpreendente das ilhas “nuas” na figura 3.9, e que não foram antecipadas durante os últimos 25 anos.

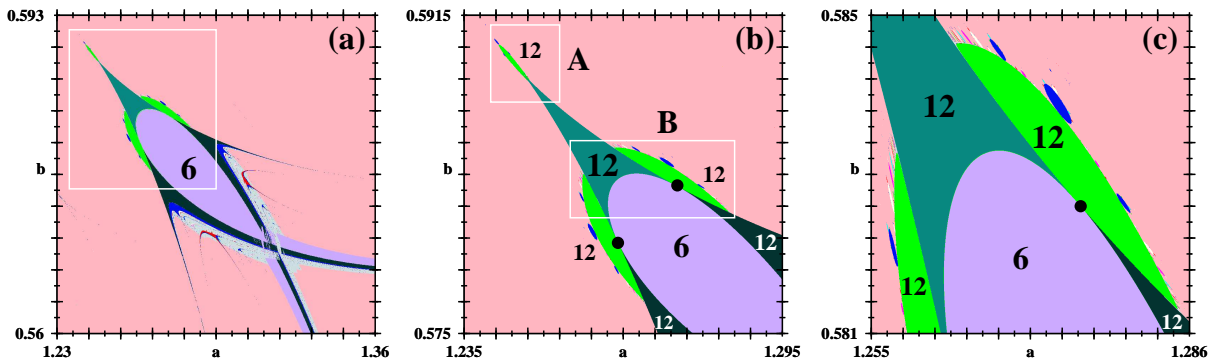


Figura 3.11: As infinitas ilhas adicionais, indicando regiões de estabilidade de órbitas *complexas* em torno da singularidade não-cuspídal de período 6 contida dentro da caixa C na figura 3.9. Estas infinitas flores de cactus (fases estáveis de soluções complexas) são um complemento surpreendente das ilhas “nuas” na figura 3.9, e que não foram antecipadas durante os últimos 25 anos.

Mostramos na figura 3.12(a), o conjunto tipo Mandelbrot para o caso da cúspide de período 6 obtido analiticamente e mostrado na figura 3.3.

Apresentamos também na figura 3.12(b) e (c) as regiões de estabilidade de períodos $8 \times n$ que existem perto das duas cúspides mostradas na figura 3.7.

Uma situação similar à mostrada na figura 3.11(a) já ocorre perto da cúspide de período 4, quando analisamos numericamente a região de estabilidade de período 8 encontrada analiticamente, mostrada na figura 3.7(b).

A figura 3.14 na página 45 mostra o conjunto completo dos domínios de estabilidade na vizinhança das regiões estáveis de período 6 (figura 3.14 (a)) e período 8 (figura 3.14 (b)) obtidas analiticamente e mostradas respectivamente nas figuras 3.8(a) e 3.8(b).

Desta figura 3.14 vemos que existe uma diferença marcante entre os domínios em questão. Enquanto que da região de período 6 emerge uma única região de dobramento de período (região de período 12), para o caso do período 8 temos duas regiões (regiões de período 16) com essa característica. Este fato também ocorre para as demais regiões de estabilidade que emergem dos corpos de períodos 6 e 8 como por exemplo as regiões de triplicação de período, que para o caso do período 6 são duas (período 18) e para o caso do período 8 são 4 (período 24). Outro fato que

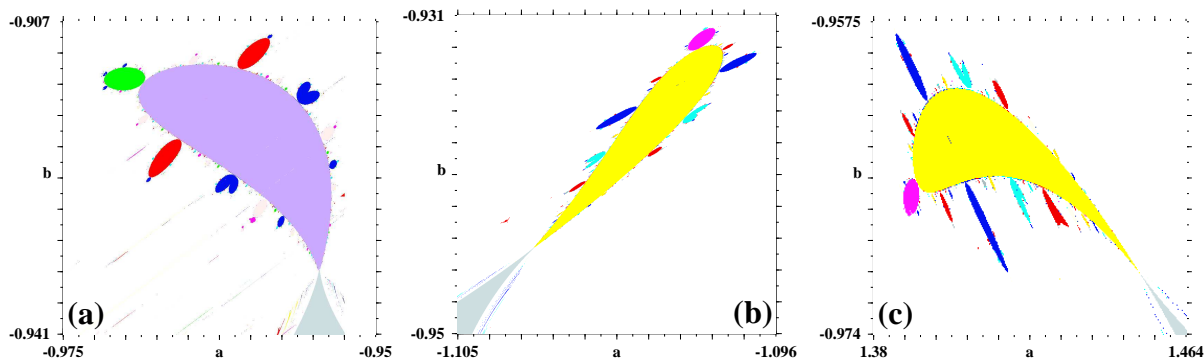


Figura 3.12: Exemplos de conjuntos tipo Mandelbrot em diferentes regiões do espaço de parâmetros. Em (a) para período 6 , (b) e (c) para período 8.

surge pela inspeção da figura 3.14 é a existência de outras regiões de estabilidade que emergem da linha $b = 1$.

Uma visão geral do espaço de parâmetros ao longo da linha $b = 1$ é mostrado na figura 3.15(a), página 45. Nesta figura mostramos as regiões de estabilidade de período 6 e 8 analisadas anteriormente, em conjunto com as demais regiões de estabilidade de órbitas complexas, bem como as regiões de estabilidade de órbitas reais de período 1 e 2. Da figura 3.15(b) vemos a acumulação das regiões periódicas que ocorre perto da bifurcação de período 1. Esta situação é análoga ao caso observado na figura 3.13, que envolve regiões estáveis de período 4 e 8, e ao caso da figura 3.11(c) que por sua vez está relacionada com as órbitas de período 6 e 12. A semelhança entre estes casos com o presente caso se dá pela presença de um ponto de tangência entre bifurcações, aqui entre a bifurcação de obra de período 1 e a bifurcação de dobramento de período $1 \rightarrow 2$, que ocorre ao longo da linha $b = 1$ no ponto $a = 0$. Podemos ver este ponto de tangência na figura 3.2(a), página 34.

Podemos obter exatamente a localização das regiões estáveis que emergem de pontos sobre a linha $b = 1$, usando a equação orbital para o período 1, a saber $x^2 + (1 - b)x - a = 0$, que para $b = 1$ simplifica-se significativamente:

$$x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0. \tag{3.13}$$

Temos portanto os dois pontos fixos dados por $x_+ = +\sqrt{a}$ e $x_- = -\sqrt{a}$. Os autovalores associados a cada uma destas órbitas são conseguidos pela solução da equação de autovalores (definida na equação 8 para período k geral) na linha $b = 1$:

$$\lambda^2 + 2\lambda x - 1 = 0. \tag{3.14}$$

Tabela 3.1: Pontos fixos para $b = 1$, $a = -3/4$ e seus respectivos autovalores.

x	λ_+	λ_-
$x_1 = \frac{-\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$
$x_2 = \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$

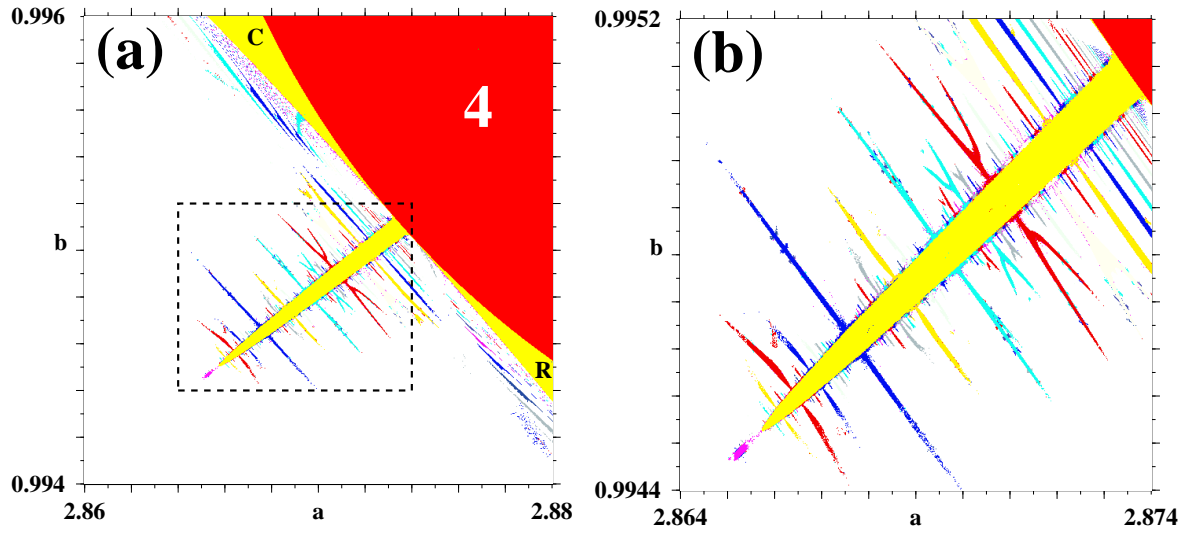


Figura 3.13: Região de órbitas complexas estáveis que emergem simetricamente ao redor do núcleo central de órbitas complexas estáveis de período 8 (em amarelo). Esta figura completa a situação mostrada na figura 3.7, página 39, mostrando claramente a existência de um número muito elevado (infinito?) de fases devidas a trajetórias complexas estáveis.

Para $x_{\pm} = \pm\sqrt{a}$ temos os autovalores dados por $\lambda_{\pm} = \sqrt{a} \pm \sqrt{a+1}$ para x_{-} e $\lambda_{\pm} = -\sqrt{a} \pm \sqrt{a+1}$ para x_{+} . Se considerarmos o ponto $a = -3/4$, onde as órbitas de período 6 complexas nascem, teremos os autovalores dados na tabela 3.1. Desta tabela vemos que cada órbita de período 1 tem pares de autovalores sendo raízes sêxticas da unidade, o que explica a existência de biestabilidade para o período 6 emergindo do ponto $a = -3/4$. O mesmo se aplica para a região de período 8, que emerge de $a = -1/2$ sobre a mesma linha $b = 1$. Nesta situação os autovalores das órbitas serão raízes oitavas da unidade. E, em geral, para qualquer período par, a localização do ponto onde a região de estabilidade emerge pode ser obtida observando que os autovalores para as órbitas de período 1 na região onde estas são complexas ($a < 0$) podem ser escritos como

$$\lambda_{\pm} = -i\sqrt{|a|} \pm \sqrt{-|a|+1} \quad \text{para a órbita } x_{+} = +i\sqrt{a}, \quad (3.15a)$$

$$\lambda_{\pm} = +i\sqrt{|a|} \pm \sqrt{-|a|+1} \quad \text{para a órbita } x_{-} = -i\sqrt{a}. \quad (3.15b)$$

Obviamente o módulo destes autovalores é idêntico e igual à unidade e, se compararmos a expressão anterior em coordenadas polares com as raízes da unidade, nesta mesma forma, teremos

$$\exp \left[i \arctan \left(\pm \frac{a}{-a+1} \right) \right] = \exp \left[i \frac{2\pi n}{k} \right]. \quad (3.16)$$

Assim, a localização das regiões periódicas complexas de período k par é dada por

$$a = -\sin^2 \left(\frac{2\pi n}{k} \right) \quad (3.17)$$

onde n trata da multiplicidade de período. Salientamos que esta expressão não fornece as regiões de período ímpar por não estarem elas conectadas em apenas um único ponto mas sim, ao longo de uma linha, como exemplificado anteriormente para período 7 na figura 3.8, página 40.

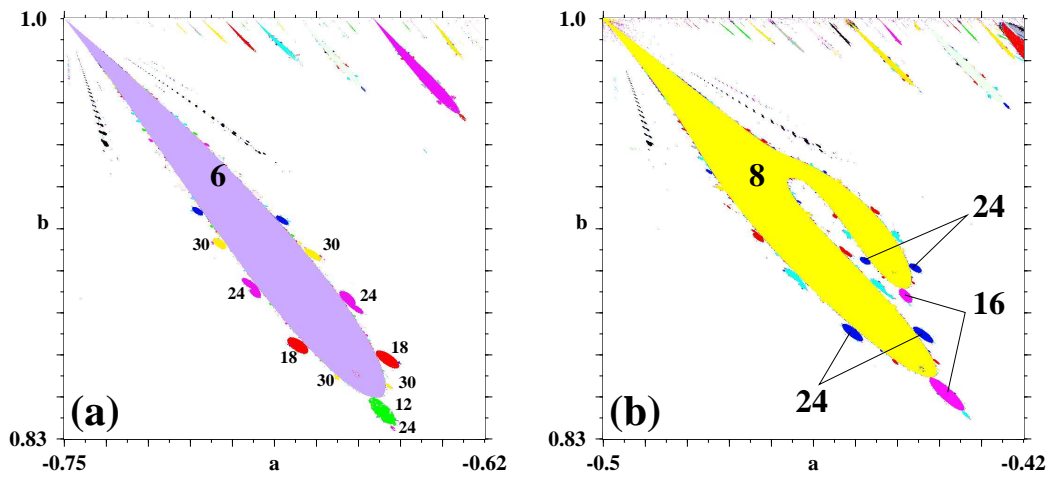


Figura 3.14: Espaço de parâmetros completo ao redor dos domínios de estabilidade de órbitas complexas de período 6 (a) e período 8 (b).

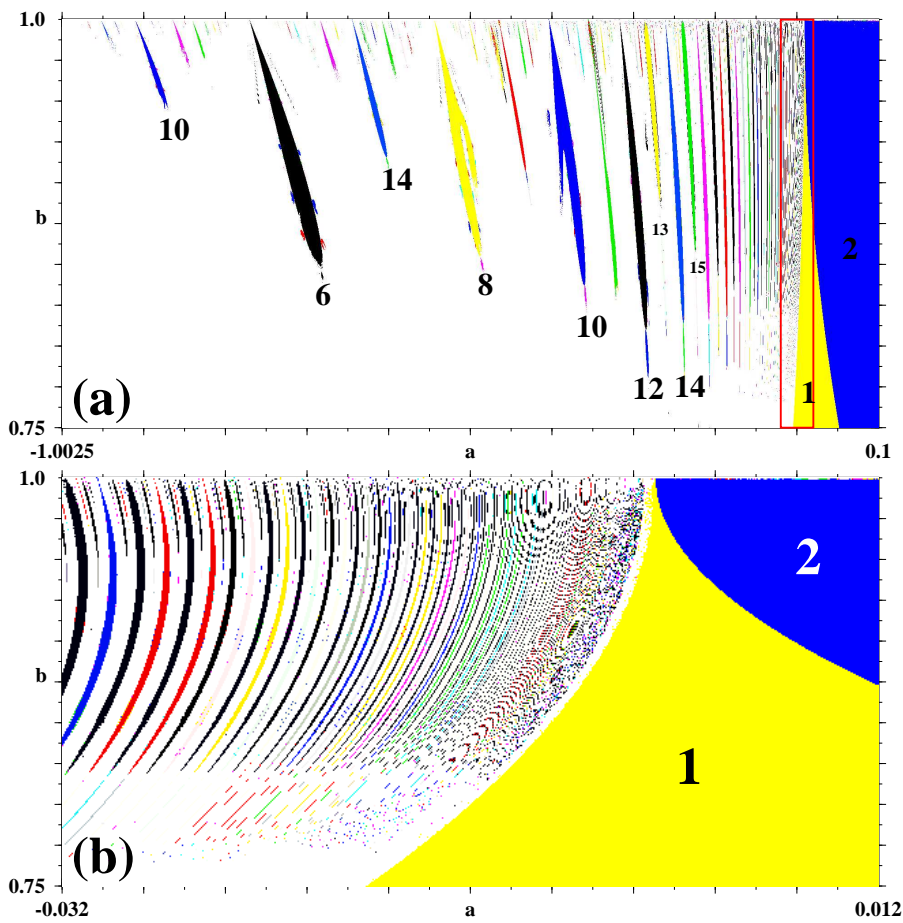


Figura 3.15: Domínios de estabilidade de órbitas complexas surgindo do limite $b = 1$ e acumulando na parábola $a = -\frac{1}{4}(b^2 - 2b + 1)$, a bifurcação de dobra onde a cascata de dobramento 1×2^n de órbitas periódicas se origina.

Conclusões

Nesta tese apresentamos em detalhes três resultados, em sistemas dinâmicos que evoluem a tempo discreto. As conclusões centrais envolvendo tais resultados serão pormenorizadas a seguir.

A metodologia por nós desenvolvida e aplicada é válida não apenas para o mapa de Hénon, usado meramente como exemplo com dinâmica bem estudada na literatura, mas pode ser aplicada igualmente para sistemas dinâmicos com equações de movimento regidas por funções racionais, polinômios em particular.

Nosso trabalho jogou luz nova em vários tópicos que pareciam já bem explorados na literatura. Resolvemos o enigma do centro de massa orbital, fornecendo uma nova maneira, algébrica, de rotular as órbitas existentes no limite da ferradura de Smale. Colocamos o foco da dinâmica orbital nas órbitas majoritárias, i.e. nas órbitas assimétricas. Mostramos a existência de classes de conjugação algébrica bem definidas e facilmente detectáveis a partir dos pontos e simetrias orbitais. Em particular, mostramos a existência de uma decomposição e segregação orbital sistemática em fatores bem característicos:

$$S_k(\sigma) = C_k(\sigma)^2 D_k(\sigma) N_k(\sigma),$$

onde as soluções de cada fator acima formam classes de órbitas específicas a saber:

- Classe \mathcal{C} : órbitas assimétricas que possuem a soma de seus pontos orbitais(σ) como soluções de $C_k = 0$, órbitas assimétricas, que aparecem sempre em pares onde os membros destes pares possuem uma simetria quiral entre si.
- Classe \mathcal{D} : órbitas auto-simétricas que possuem pontos orbitais sobre a diagonal e e cuja soma σ são soluções de $D_k = 0$.
- Classe \mathcal{N} : órbitas auto-simétricas sem pontos orbitais na diagonal e cuja soma σ são soluções de $N_k = 0$.

Através da análise algébrica exata mostramos uma organização *microscópica* dos pontos orbitais de todas as órbitas de uma mesma classe, resultando nos chamados *amalgamamentos*, o que nos possibilitou fazer ordenamentos algébricos gerais. E o estudo destas expressões ainda pode ser grandemente ampliado, principalmente no que tange os ordenamentos orbitais discutidos.

Obtivemos ainda resultados exatos novos para as equações que definem a dinâmica algébrica exata para parâmetros (a, b) gerais até o período 8. A partir destes resultados foi possível obter analiticamente as regiões de estabilidade tanto de órbitas reais quanto de órbitas complexas (isto é órbitas cujos pontos orbitais estão no plano complexo), sendo o período 6 o período mais baixo onde as regiões de estabilidade de órbitas complexas ocorrem.

Em geral verificamos a existência de dois tipos de regiões de estabilidade envolvendo órbitas complexas. Um tipo de região tem por característica ser limitada por uma curva de bifurcação tangente e delimitar a estabilidade de uma única órbita estável complexa que possui a soma dos seus pontos orbitais (σ) real, a estrutura *Bowtie* encontrada para o período 6, é um exemplo

deste tipo de região. O outro tipo de região de estabilidade de órbitas complexas, é limitado pela condição de autovalores complexos de módulo unitário, nesta região por sua vez temos por característica a estabilidade simultânea de duas órbitas complexas de mesmo período e que estão relacionadas entre si de maneira que os pontos orbitais de uma órbita são os complexos conjugados da outra órbita. Este tipo de região tem conectadas a si regiões estáveis de periodicidades superiores, mais especificamente múltiplos inteiros, formando conjuntos similares ao conjunto de Mandelbrot. Notamos que, no caso do mapa de Hénon, sempre existe um conjunto tipo Mandelbrot conectado a pontos de tangência entre bifurcações de dobra e de dobramento de período de órbitas reais, ou em conexão com cúspides presentes nas bifurcações de dobra tanto de órbitas reais quanto de órbitas complexas. Em particular notamos a existência de uma infinidade de conjuntos tipo Mandelbrot emergindo não de um corpo central, mas sim da linha $b = 1$, onde o mapa de Hénon não é dissipativo. A existência destes conjuntos está relacionada com a tangência que existe entre a bifurcação de dobra, que dá origem à órbitas de período 1, e a bifurcação de dobramento de período de 1 para 2 que ocorre no ponto $(a, b) = (0, 1)$.

O estudo e os resultados apresentados na presente tese, usando como modelo o mapa de Hénon, podem ser ampliados para outros mapas e também aplicados em problemas novos, como por exemplo o estudo da contribuição das três classes de órbitas, encontradas no limite Hamiltoniano do mapa, em formulas de soma de órbitas que compõe os estudos de caos quântico, assim como a influência das órbitas complexas estáveis no mesmo estudo.

Apêndice A

Expressões gerais de S_k para $k=7$ e 8

Apresentamos aqui as expressões gerais para S_k referentes ao período 7 e 8. Estas expressões permitem calcular as expressões exatas para as curvas de bifurcação de dobra para estes períodos, no caso de parâmetros (a, b) gerais, por meio da solução do discriminante de S_k .

As expressões coletadas nestes apêndices, obtidas após cálculos simples porém bastantes extensos, feitos usando rotinas algébricas *ad-hoc* bem como várias semanas de computações, servem vários propósitos. Tais propósitos vão desde coletar as expressões obtidas e necessárias para obter os resultados analíticos discutidos no texto principal, quanto mostrar o crescimento e complexidade das expressões à medida que o período orbital cresce.

Estas expressões tem inúmeras propriedades número-teóricas fortemente ligadas às variedades algébricas onde a dinâmica orbital vive. Algumas propriedades foram já exploradas no trabalho de Tese. Mas vários fatos novos podem ainda ser delas extraídas, o que pretendemos fazer em breve.

Salientamos que antes do nosso trabalho, os resultados exatos conhecidos na literatura não excediam períodos maiores do que 6, mesmo assim, apresentando apenas resultados isolados, para casos não gerais.

Estes resultados foram obtidos com o uso do software de manipulação algébrica **Maple** versão 9.0.

Período 7

$$S_7(a, b; \sigma) = \sum_{i=0}^{18} \Theta_i(a, b) \sigma^i, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta_{18} &= 1, \\ \Theta_{17} &= b - 1, \\ \Theta_{16} &= -57a + 88b + 4b^2 + 4, \\ \Theta_{15} &= -4(b-1)(34a - 5b^2 - 46b - 5), \\ \Theta_{14} &= 1188a^2 - 4(95b^2 + 866b + 95)a + 2516b^2 + 504b + 110b^4 + 504b^3 + 110, \\ \Theta_{13} &= 2(b-1)(1870a^2 - 4(131b^2 + 1342b + 131)a + 319b^4 + 1116b^3 + 4090b^2 + 1116b + 319), \\ \Theta_{12} &= -11924a^3 + 4(2413b^2 + 11686b + 2413)a^2 - 2(1027b^4 + 13228b^3 + 30674b^2 + 13228b + 1027)a \\ &\quad + 5096b^5 + 3828b^6 + 5096b + 16236b^4 + 29024b^3 + 16236b^2 + 3828, \\ \Theta_{11} &= -4(b-1)(10542a^3 - (5915b^2 + 45154b + 5915)a^2 + 2(103b^4 + 8972b^3 + 32658b^2 + 8972b + 103)a \\ &\quad - 38036b^3 - 2613b^6 - 7070b^5 - 17451b^4 - 2613 - 17451b^2 - 7070b), \\ \Theta_{10} &= 61950a^4 - 4(25147b^2 + 67882b + 25147)a^3 + 4(13351b^4 + 91216b^3 + 118682b^2 + 91216b + 13351)a^2 \\ &\quad - 4(10699b^6 + 37258b^5 + 118957b^4 + 91764b^3 + 118957b^2 + 37258b + 10699)a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +27225b^8 + 103544b^7 + 113708b^6 + 194440b^5 + 115334b^4 + 194440b^3 + 113708b^2 + 103544b + 27225, \\
 \Theta_9 = & (b-1)(220870a^4 - 16(11719b^2 + 78492b + 11719)a^3 \\
 & -4(5663b^4 - 196664b^3 - 657750b^2 - 196664b + 5663)a^2 \\
 & -8(14169b^6 + 22142b^5 + 155363b^4 + 335068b^3 + 155363b^2 + 22142b + 14169)a \\
 & +60665b^8 + 316744b^7 + 500204b^6 + 847816b^5 + 1326054b^4 + 847816b^3 + 500204b^2 + 316744b + 60665), \\
 \Theta_8 = & -168606a^5 + 4(122747b^2 + 169850b + 122747)a^4 \\
 & -4(117175b^4 + 552928b^3 + 265610b^2 + 552928b + 117175)a^3 \\
 & +4(46651b^6 + 463402b^5 + 992933b^4 + 169984b^3 + 992933b^2 + 463402b + 46651)a^2 \\
 & -(272825b^8 + 713864b^7 + 2630828b^6 + 3279176b^5 + 12902b^4 + 3279176b^3 + 2630828b^2 \\
 & +713864b + 272825)a - 51616b^5 + 1201824b^4 + 1032496b^7 + 1201824b^6 + 514176b + 120032 + 1032496b^3 \\
 & +946784b^2 + 120032b^{10} + 514176b^9 + 946784b^8, \\
 \Theta_7 = & -4(b-1)(132974a^5 - (134443b^2 + 928082b + 134443)a^4 \\
 & -2(18521b^4 - 412164b^3 - 1206010b^2 - 412164b + 18521)a^3 \\
 & - (109761b^6 + 249962b^5 + 1691695b^4 + 3435564b^3 + 1691695b^2 + 249962b + 109761)a^2 \\
 & +16(9411b^8 + 36252b^7 + 56171b^6 + 118759b^5 + 175251b^4 + 118759b^3 + 56171b^2 + 36252b + 9411)a \\
 & -1415096b^5 - 820964b^8 - 1006168b^7 - 1226232b^6 - 269988b - 1226232b^4 - 1006168b^3 - 820964b^2 \\
 & -48908b^{10} - 269988b^9 - 48908), \\
 \Theta_6 = & 254932a^6 - 4(302941b^2 + 168358b + 302941)a^5 \\
 & +2(701411b^4 + 3112380b^3 + 1970b^2 + 3112380b + 701411)a^4 \\
 & +4(95411b^6 - 2089898b^5 - 3330579b^4 + 506052b^3 - 3330579b^2 - 2089898b + 95411)a^3 \\
 & +16(19491b^8 + 118697b^7 + 958626b^6 + 1108227b^5 - 348904b^4 + 1108227b^3 + 958626b^2 \\
 & +118697b + 19491)a^2 - 16(78435b^{10} + 176923b^9 + 186499b^8 + 845824b^7 + 782248b^6 - 152066b^5 \\
 & +782248b^4 + 845824b^3 + 186499b^2 + 176923b + 78435)a + 1590656b^6 + 5090496b^5 + 3832240b^4 + 2490544b^3 \\
 & +3310512b^2 + 1523984b + 494368 + 494368b^{12} + 1523984b^{11} + 3310512b^{10} + 2490544b^9 \\
 & +3832240b^8 + 5090496b^7, \\
 \Theta_5 = & 2(b-1)(319438a^6 - 4(147067b^2 + 539606b + 147067)a^5 \\
 & + (322351b^4 + 2825228b^3 + 6854106b^2 + 2825228b + 322351)a^4 \\
 & +16(14925b^6 - 132877b^5 - 429747b^4 - 675946b^3 - 429747b^2 - 132877b + 14925)a^3 \\
 & -8(91375b^8 - 180031b^7 - 761370b^6 - 1246375b^5 - 1316332b^4 - 1246375b^3 - 761370b^2 \\
 & -180031b + 91375)a^2 - 16(12165b^{10} + 93218b^9 + 315818b^8 + 590232b^7 + 645391b^6 + 578888b^5 \\
 & +645391b^4 + 590232b^3 + 315818b^2 + 93218b + 12165)a + 7903608b^7 + 8427328b^6 + 7903608b^5 \\
 & +5200616b^3 + 2531208b^2 + 1155104b + 6429568b^4 + 443192b^{12} + 1155104b^{11} + 2531208b^{10} \\
 & +5200616b^9 + 6429568b^8 + 443192), \\
 \Theta_4 = & -217188a^7 + 108(14429b^2 + 262b + 14429)a^6 \\
 & -2(1624183b^4 + 2229900b^3 + 1618570b^2 + 2229900b + 1624183)a^5 \\
 & +16(170068b^6 + 502264b^5 + 1242646b^4 + 3765b^3 + 1242646b^2 + 502264b + 170068)a^4 \\
 & -16(163533b^8 + 255155b^7 + 1435694b^6 + 2105683b^5 - 2920b^4 + 2105683b^3 + 1435694b^2 \\
 & +255155b + 163533)a^3 + 16(6903b^{10} + 575659b^9 + 431437b^8 + 1740415b^7 + 2524702b^6 \\
 & +294472b^5 + 2524702b^4 + 1740415b^3 + 431437b^2 + 575659b + 6903)a^2 + 16(73789b^{12} - 405868b^{11} \\
 & -900789b^{10} - 355641b^9 - 1231736b^8 - 1872459b^7 - 700712b^6 - 1872459b^5 - 1231736b^4 - 355641b^3 \\
 & -900789b^2 - 405868b + 73789)a + 9962240b^7 + 698944b^{14} + 8756096b^5 + 4174976b^4 + 8600448b^3 \\
 & +3874944b^2 + 1515456b + 1515456b^{13} + 3874944b^{12} + 8600448b^{11} + 4174976b^{10} + 8756096b^9 + 13634112b^8 \\
 & +698944 + 13634112b^6, \\
 \Theta_3 = & -4(b-1)(94050a^7 - (344405b^2 + 420062b + 344405)a^6 \\
 & +16(49192b^4 + 13175b^3 + 179097b^2 + 13175b + 49192)a^5 \\
 & -4(272563b^6 - 17493b^5 + 646193b^4 + 950502b^3 + 646193b^2 - 17493b + 272563)a^4 \\
 & +16(54688b^8 - 7370b^7 + 90058b^6 + 259497b^5 + 223443b^4 + 259497b^3 + 90058b^2 - 7370b + 54688)a^3 \\
 & -8(73355b^{10} + 92926b^9 + 12938b^8 + 325059b^7 + 627000b^6 + 212804b^5 + 627000b^4 + 325059b^3 \\
 & +12938b^2 + 92926b + 73355)a^2 - 32(7632b^{12} - 34833b^{11} - 66163b^{10} - 37365b^9 - 135997b^8 - 211441b^7 \\
 & -170376b^6 - 211441b^5 - 135997b^4 - 37365b^3 - 66163b^2 - 34833b + 7632)a + 106176b^{14} - 4964640b^6 \\
 & -2860912b^5 - 2518544b^4 - 2052880b^3 - 1190512b^2 - 349440b - 349440b^{13} - 1190512b^{12} - 2052880b^{11} \\
 & -2518544b^{10} - 2860912b^9 - 4964640b^8 - 6215936b^7 + 106176), \\
 \Theta_2 = & 97929a^8 - 36(27713b^2 - 9634b + 27713)a^7 + 16(211201b^4 - 28963b^3 + 344922b^2 - 28963b + 211201)a^6 \\
 & -16(404151b^6 - 52667b^5 + 990275b^4 + 49584b^3 + 990275b^2 - 52667b + 404151)a^5 \\
 & +16(611924b^8 - 196677b^7 + 1177667b^6 + 1573277b^5 + 459711b^4 + 1573277b^3 + 1177667b^2 \\
 & -196677b + 611924)a^4 - 32(290931b^{10} + 42114b^9 + 171938b^8 + 1044535b^7 + 1224092b^6 + 271172b^5 \\
 & +1224092b^4 + 1044535b^3 + 171938b^2 + 42114b + 290931)a^3 + 64(96230b^{12} + 50264b^{11} + 140437b^{10} \\
 & +202241b^9 + 497636b^8 + 562576b^7 + 424570b^6 + 562576b^5 + 497636b^4 + 202241b^3 + 140437b^2 \\
 & +50264b + 96230)a^2 - 64(44444b^{14} + 58168b^{13} + 54857b^{12} + 134379b^{11} + 164455b^{10} + 467589b^9 \\
 & +560162b^8 + 201584b^7 + 560162b^6 + 467589b^5 + 164455b^4 + 134379b^3 + 54857b^2 + 58168b + 44444)a \\
 & -566272b^{16} + 8154112b^8 + 2287616b^{15} + 2538240b^{14} + 4698496b^4 + 370176b^3 + 2538240b^2 + 2287616b \\
 & +370176b^{13} + 4698496b^{12} + 8318080b^{11} + 19647488b^{10} + 17602304b^9 - 566272 + 17602304b^7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +19647488 b^6 + 8318080 b^5, \\
 \Theta_1 = & (b-1)(86913 a^8 - 288(1993 b^2 - 35b + 1993) a^7 + 48(45707 b^4 - 31037 b^3 + 81630 b^2 - 31037 b + 45707) a^6 \\
 & - 32(147143 b^6 - 67942 b^5 + 52384 b^4 + 116234 b^3 + 52384 b^2 - 67942 b + 147143) a^5 \\
 & + 16(420355 b^8 - 35384 b^7 - 166465 b^6 + 107493 b^5 + 74815 b^4 + 107493 b^3 - 166465 b^2 - 35384 b + 420355) a^4 \\
 & - 128(61160 b^{10} + 14591 b^9 - 58796 b^8 - 5303 b^7 - 9455 b^6 - 103700 b^5 - 9455 b^4 - 5303 b^3 - 58796 b^2 \\
 & + 14591 b + 61160) a^3 + 64(82652 b^{12} + 65752 b^{11} + 8921 b^{10} - 124275 b^9 - 6544 b^8 - 44348 b^7 - 324118 b^6 \\
 & - 44348 b^5 - 6544 b^4 - 124275 b^3 + 8921 b^2 + 65752 b + 82652) a^2 - 256(13192 b^{14} + 14512 b^{13} + 18490 b^{12} \\
 & + 8108 b^{11} - 30631 b^{10} + 8299 b^9 - 4967 b^8 - 76767 b^7 - 4967 b^6 + 8299 b^5 - 30631 b^4 + 8108 b^3 + 18490 b^2 \\
 & + 14512 b + 13192) a + 512(1120 b^{14} + 1144 b^{13} + 292 b^{12} - 5262 b^{11} + 1785 b^{10} - 5862 b^9 - 2582 b^8 \\
 & - 9215 b^7 - 2582 b^6 - 5862 b^5 + 1785 b^4 - 5262 b^3 + 292 b^2 + 1144 b + 1120)(b+1)^2), \\
 \Theta_0 = & -18225 a^9 + 2592(97 b^2 - 59 b + 97) a^8 - 144(7753 b^4 - 3967 b^3 + 11382 b^2 - 3967 b + 7753) a^7 \\
 & + 144(18259 b^6 - 247 b^5 + 15829 b^4 + 14857 b^3 + 15829 b^2 - 247 b + 18259) a^6 \\
 & - 48(95261 b^8 + 28792 b^7 + 58721 b^6 + 133523 b^5 + 79153 b^4 + 133523 b^3 + 58721 b^2 + 28792 b + 95261) a^5 \\
 & + 64(94609 b^{10} + 54457 b^9 + 13359 b^8 + 187523 b^7 + 179660 b^6 + 15330 b^5 + 179660 b^4 + 187523 b^3 + 13359 b^2 \\
 & + 54457 b + 94609) a^4 - 64(90772 b^{12} + 82080 b^{11} + 23359 b^{10} + 123911 b^9 + 243352 b^8 + 174892 b^7 + 73122 b^6 \\
 & + 174892 b^5 + 243352 b^4 + 123911 b^3 + 23359 b^2 + 82080 b + 90772) a^3 + 128(37080 b^{14} + 32768 b^{13} + 8902 b^{12} \\
 & + 42104 b^{11} + 172513 b^{10} + 1107 b^9 - 1119 b^8 + 275697 b^7 - 1119 b^6 + 1107 b^5 + 172513 b^4 + 42104 b^3 + 8902 b^2 \\
 & + 32768 b + 37080) a^2 - 512(4448 b^{14} - 3432 b^{13} + 6820 b^{12} - 1542 b^{11} + 13601 b^{10} - 16390 b^9 + 34618 b^8 \\
 & - 30319 b^7 + 34618 b^6 - 16390 b^5 + 13601 b^4 - 1542 b^3 + 6820 b^2 - 3432 b + 4448)(b+1)^2 a \\
 & + 2048(b^6 + b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)(512 b^{10} - 1120 b^9 + 1872 b^8 - 2300 b^7 + 2980 b^6 - 3159 b^5 + 2980 b^4 \\
 & - 2300 b^3 + 1872 b^2 - 1120 b + 512)(b+1)^2.
 \end{aligned}$$

Período 8

$$S_8(a, b; \sigma) = \sum_{i=0}^{30} \Theta_i(a, b) \sigma^i, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\begin{aligned}
 \Theta_{30} &= 1, \\
 \Theta_{29} &= 0, \\
 \Theta_{28} &= -112 a + 168 b, \\
 \Theta_{27} &= -192 (b-1) (a-b), \\
 \Theta_{26} &= 5184 a^2 - 32 (13 b^2 + 13 + 478 b) a + 180 b^4 + 11304 b^2 + 432 b^3 + 432 b + 180, \\
 \Theta_{25} &= 192 (b-1) (80 a^2 - 200 ba + 5 b^4 + 8 b^3 + 8 b + 5 + 124 b^2), \\
 \Theta_{24} &= -132096 a^3 + 256 (157 b^2 + 2170 b + 157) a^2 - 64 (135 b^4 + 1532 b^3 + 12470 b^2 + 1532 b + 135) a \\
 & + 388992 b^3 + 5600 b^6 + 17824 b^5 + 56256 b^4 + 5600 + 56256 b^2 + 17824 b, \\
 \Theta_{23} &= -64 (b-1) (7968 a^3 - 48 (13 b^2 + 656 b + 13) a^2 + 4 (128 b^4 + 616 b^3 + 10311 b^2 + 616 b + 128) a \\
 & - 1872 b^5 - 540 b^6 - 1872 b - 3168 b^4 - 18999 b^3 - 3168 b^2 - 540), \\
 \Theta_{22} &= 2072064 a^4 - 512 (2923 b^2 + 20866 b + 2923) a^3 + 64 (4361 b^4 + 87740 b^3 + 338158 b^2 + 87740 b + 4361) a^2 \\
 & - 32 (3585 b^6 + 31262 b^5 + 216275 b^4 + 634060 b^3 + 216275 b^2 + 31262 b + 3585) a + 116190 b^8 + 407664 b^7 \\
 & + 805896 b^6 + 2827920 b^5 + 7316148 b^4 + 2827920 b^3 + 805896 b^2 + 407664 b + 116190, \\
 \Theta_{21} &= 64 (b-1) (144384 a^4 - 384 (89 b^2 + 2004 b + 89) a^3 + 384 (37 b^4 + 373 b^3 + 4019 b^2 + 373 b + 37) a^2 \\
 & - 4 (4851 b^6 + 18382 b^5 + 60423 b^4 + 351430 b^3 + 60423 b^2 + 18382 b + 4851) a + 5285 b^8 + 45308 b^7 \\
 & + 99078 b^6 + 167498 b^5 + 530334 b^4 + 167498 b^3 + 99078 b^2 + 45308 b + 5285), \\
 \Theta_{20} &= -21159936 a^5 + 4096 (7060 b^2 + 7060 + 29593 b) a^4 \\
 & - 1024 (5977 + 285518 b^2 + 5977 b^4 + 142720 b^3 + 142720 b) a^3 \\
 & - 256 (1647 - 1066689 b^2 - 116506 b^5 + 1647 b^6 - 1482496 b^3 - 1066689 b^4 - 116506 b) a^2 \\
 & - 32 (183000 b + 1434508 b^2 + 7074472 b^3 + 153931 + 183000 b^8 + 153931 b^8 + 8213490 b^4 + 1434508 b^6 \\
 & + 7074472 b^5) a + 865296 + 20552832 b^3 + 8524944 b + 20552832 b^7 + 73882080 b^5 + 8524944 b^9 + 11773296 b^2 \\
 & + 72922752 b^6 + 865296 b^{10} + 11773296 b^8 + 72922752 b^4, \\
 \Theta_{19} &= -64 (b-1) (1588224 a^5 - 3072 (256 b^2 + 3407 b + 256) a^4 \\
 & + 32 (10157 b^4 + 128644 b^3 + 875856 b^2 + 128644 b + 10157) a^3 \\
 & - 16 (12413 b^6 + 112824 b^5 + 542821 b^4 + 2391765 b^3 + 542821 b^2 + 112824 b + 12413) a^2 \\
 & + 2 (117895 b^8 + 628696 b^7 + 1878606 b^6 + 4784908 b^5 + 13795038 b^4 + 4784908 b^3 + 1878606 b^2 + 628696 b \\
 & + 117895) a - 9158202 b^5 - 1556454 b^8 - 2849685 b^7 - 4758720 b^6 - 407730 b - 4758720 b^4 - 2849685 b^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -1556454b^2 - 42750b^{10} - 407730b^9 - 42750), \\
 \Theta_{18} = & 144850944a^6 - 40960(7943b^2 + 20834b + 7943)a^5 \\
 & + 1024(85299b^4 + 1997668b^3 + 2075026b^2 + 1997668b + 85299)a^4 \\
 & + 2048(10623b^6 - 249005b^5 - 2491010b^4 - 1490944b^3 - 2491010b^2 - 249005b + 10623)a^3 \\
 & + 64(1044883b^8 + 131152b^7 + 17040284b^6 + 98961360b^5 + 44473858b^4 + 98961360b^3 \\
 & + 17040284b^2 + 131152b + 1044883)a^2 - 32(1008561b^{10} + 8019226b^9 + 5197841b^8 + 31609728b^7 \\
 & + 123878942b^6 + 50465228b^5 + 123878942b^4 + 31609728b^3 + 5197841b^2 + 8019226b + 1008561)a \\
 & + 357491120b^6 + 1040951776b^5 + 321943996b^4 + 183428528b^3 + 242191976b^2 + 49805936b + 8155140 \\
 & + 8155140b^{12} + 49805936b^{11} + 242191976b^{10} + 183428528b^9 + 321943996b^8 + 1040951776b^7, \\
 \Theta_{17} = & 64(b-1)(11194368a^6 - 3072(3209b^2 + 28030b + 3209)a^5 \\
 & + 256(17401b^4 + 246500b^3 + 1112016b^2 + 246500b + 17401)a^4 \\
 & + 128(1913b^6 - 220026b^5 - 1298721b^4 - 4033960b^3 - 1298721b^2 - 220026b + 1913)a^3 \\
 & + 16(233337b^8 + 692256b^7 + 4537736b^6 + 15061036b^5 + 34408926b^4 + 15061036b^3 + 4537736b^2 \\
 & + 692256b + 233337)a^2 - 4(330327b^{10} + 3372166b^9 + 8628131b^8 + 23059300b^7 + 50494774b^6 + 85981676b^5 \\
 & + 50494774b^4 + 23059300b^3 + 8628131b^2 + 3372166b + 330327)a + 80323704b^7 + 106561656b^6 + 80323704b^5 \\
 & + 28902384b^3 + 12498156b^2 + 2252232b + 49081311b^4 + 322065b^{12} + 2252232b^{11} + 12498156b^{10} \\
 & + 28902384b^9 + 49081311b^8 + 322065), \\
 \Theta_{16} = & -670826496a^7 + 65536(34369b^2 + 57694b + 34369)a^6 \\
 & - 16384(53551b^4 + 1009324b^3 + 496094b^2 + 1009324b + 53551)a^5 \\
 & - 8192(5539b^6 - 651697b^5 - 6261856b^4 - 954340b^3 - 6261856b^2 - 651697b + 5539)a^4 \\
 & - 1024(174965b^8 + 484848b^7 + 13356764b^6 + 82353152b^5 + 4289694b^4 + 82353152b^3 + 13356764b^2 \\
 & + 484848b + 174965)a^3 + 256(1446805b^{10} + 9298498b^9 + 8400717b^8 + 71201504b^7 + 302182670b^6 \\
 & + 18363708b^5 + 302182670b^4 + 71201504b^3 + 8400717b^2 + 9298498b + 1446805)a^2 \\
 & - 64(3750949b^{12} + 22696932b^{11} + 75962726b^{10} + 55062772b^9 + 189238523b^8 + 596391176b^7 \\
 & + 62506100b^6 + 596391176b^5 + 189238523b^4 + 55062772b^3 + 75962726b^2 + 22696932b + 3750949)a \\
 & + 558716160b^7 + 64329600b^{14} + 3265986336b^5 + 1981846944b^4 + 3290518656b^3 + 1221795360b^2 \\
 & + 327795168b + 327795168b^{13} + 1221795360b^{12} + 3290518656b^{11} + 1981846944b^{10} + 3265986336b^9 \\
 & + 8041906368b^8 + 64329600 + 8041906368b^6, \\
 \Theta_{15} = & -64(b-1)(51732480a^7 - 61440(1177b^2 + 7284b + 1177)a^6 \\
 & + 3072(12369b^4 + 179012b^3 + 566213b^2 + 179012b + 12369)a^5 \\
 & + 256(23940b^6 - 997892b^5 - 6969564b^4 - 15252185b^3 - 6969564b^2 - 997892b + 23940)a^4 \\
 & + 32(871139b^8 + 1067880b^7 + 24889888b^6 + 100616704b^5 + 173453194b^4 + 100616704b^3 + 24889888b^2 \\
 & + 1067880b + 871139)a^3 - 16(328257b^{10} + 9700624b^9 + 18113121b^8 + 83589926b^7 + 226225638b^6 \\
 & + 319497108b^5 + 226225638b^4 + 83589926b^3 + 18113121b^2 + 9700624b + 328257)a^2 \\
 & + 4(1362514b^{12} + 11894960b^{11} + 72780473b^{10} + 133867732b^9 + 312248722b^8 + 621051724b^7 \\
 & + 740867366b^6 + 621051724b^5 + 312248722b^4 + 133867732b^3 + 72780473b^2 + 11894960b + 1362514)a \\
 & - 2848624b^{14} - 833200288b^6 - 530751916b^5 - 327038516b^4 - 189536017b^3 - 46822844b^2 - 13121680b \\
 & - 13121680b^{13} - 46822844b^{12} - 189536017b^{11} - 327038516b^{10} - 530751916b^9 - 833200288b^8 \\
 & - 878555238b^7 - 2848624), \\
 \Theta_{14} = & 2076770304a^8 - 131072(74389b^2 + 78670b + 74389)a^7 \\
 & + 16384(342755b^4 + 4913588b^3 + 659770b^2 + 4913588b + 342755)a^6 \\
 & - 8192(151661b^6 + 4534366b^5 + 35634879b^4 - 4258020b^3 + 35634879b^2 + 4534366b + 151661)a^5 \\
 & - 1536(707975b^8 - 6201064b^7 - 70012540b^6 - 383741720b^5 + 69700522b^4 - 383741720b^3 \\
 & - 70012540b^2 - 6201064b + 707975)a^4 - 512(8242135b^{10} + 3160618b^9 + 67909187b^8 + 334807880b^7 \\
 & + 1378910438b^6 - 197352292b^5 + 1378910438b^4 + 334807880b^3 + 67909187b^2 + 3160618b + 8242135)a^3 \\
 & + 64(24021043b^{12} + 267925036b^{11} + 410491406b^{10} + 824381692b^9 + 2611166973b^8 + 7697670360b^7 \\
 & - 240732028b^6 + 7697670360b^5 + 2611166973b^4 + 824381692b^3 + 410491406b^2 + 267925036b + 24021043)a^2 \\
 & - 32(9690583b^{14} + 227333834b^{13} + 907834329b^{12} + 1291838012b^{11} + 1408420459b^{10} + 2758408822b^9 \\
 & + 5819880677b^8 + 510162696b^7 + 5819880677b^6 + 2758408822b^5 + 1408420459b^4 + 1291838012b^3 \\
 & + 907834329b^2 + 227333834b + 9690583)a + 451794825b^{16} + 1537734672b^{15} + 4885599096b^{14} \\
 & + 16389812880b^5 + 23077147644b^4 + 16478125488b^3 + 4885599096b^2 + 1537734672b + 16478125488b^{13} \\
 & + 23077147644b^{12} + 16389812880b^{11} + 21326791752b^{10} + 26687670192b^9 + 1213450614b^8 \\
 & + 26687670192b^7 + 21326791752b^6 + 451794825, \\
 \Theta_{13} = & 64(b-1)(156106752a^8 - 196608(1595b^2 + 7603b + 1595)a^7 \\
 & + 16384(11324b^4 + 173530b^3 + 401187b^2 + 173530b + 11324)a^6 \\
 & + 1024(5507b^6 - 1394466b^5 - 10771133b^4 - 17145750b^3 - 10771133b^2 - 1394466b + 5507)a^5 \\
 & + 256(378621b^8 + 391884b^7 + 19963554b^6 + 94483586b^5 + 122851286b^4 + 94483586b^3 + 19963554b^2 \\
 & + 391884b + 378621)a^4 - 128(361083b^{10} + 5668220b^9 + 10830817b^8 + 82773342b^7 + 263171212b^6 \\
 & + 306247708b^5 + 263171212b^4 + 82773342b^3 + 10830817b^2 + 5668220b + 361083)a^3 \\
 & + 32(1695041b^{12} + 8161416b^{11} + 68021398b^{10} + 126773962b^9 + 417350851b^8 + 974038942b^7 \\
 & + 1046950044b^6 + 974038942b^5 + 417350851b^4 + 126773962b^3 + 68021398b^2 + 8161416b + 1695041)a^2 \\
 & + 4(1619351b^{14} - 44054578b^{13} - 188623301b^{12} - 733572702b^{11} - 1249537355b^{10} - 2520422150b^9 \\
 & - 4543244743b^8 - 4602252372b^7 - 4543244743b^6 - 2520422150b^5 - 1249537355b^4 - 733572702b^3 \\
 & - 188623301b^2 - 44054578b + 1619351)a + 8844195b^{16} + 5102512818b^8 + 60856140b^{15} + 191378238b^{14} \\
 & + 1523118612b^4 + 519626322b^3 + 191378238b^2 + 60856140b + 519626322b^{13} + 1523118612b^{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2320480386 b^{11} + 3607271730 b^{10} + 5256194400 b^9 + 8844195 + 5256194400 b^7 + 3607271730 b^6 + 2320480386 b^5), \\
 \Theta_{12} = & -4121952256 a^9 + 524288 (49148 b^2 + 30521 b + 49148) a^8 \\
 & -262144 (75033 b^4 + 918704 b^3 - 151114 b^2 + 918704 b + 75033) a^7 \\
 & +65536 (73727 b^6 + 2704322 b^5 + 14257151 b^4 - 4379112 b^3 + 14257151 b^2 + 2704322 b + 73727) a^6 \\
 & +8192 (1268299 b^8 - 8332248 b^7 - 68604756 b^6 - 264852712 b^5 + 85336434 b^4 - 264852712 b^3 - 68604756 b^2 \\
 & -8332248 b + 1268299) a^5 + 4096 (7100521 b^{10} - 13842109 b^9 + 67232927 b^8 + 241084784 b^7 + 775121368 b^6 \\
 & -202158118 b^5 + 775121368 b^4 + 241084784 b^3 + 67232927 b^2 - 13842109 b + 7100521) a^4 \\
 & -1024 (10572917 b^{12} + 116133480 b^{11} - 20129438 b^{10} + 482409288 b^9 + 1126900795 b^8 + 2753618704 b^7 \\
 & -301731364 b^6 + 2753618704 b^5 + 1126900795 b^4 + 482409288 b^3 - 20129438 b^2 + 116133480 b + 10572917) a^3 \\
 & +256 (42018377 b^{14} + 131476050 b^{13} + 1032196277 b^{12} + 521438600 b^{11} + 1924130123 b^{10} + 3495490814 b^9 \\
 & +5469446455 b^8 + 801841232 b^7 + 5469446455 b^6 + 3495490814 b^5 + 1924130123 b^4 + 521438600 b^3 \\
 & +1032196277 b^2 + 131476050 b + 42018377) a^2 - 16 (122096899 b^{16} + 1100302576 b^{15} + 4715872760 b^{14} \\
 & +17886790352 b^{13} + 12621395764 b^{12} + 18778947312 b^{11} + 23891138888 b^{10} + 17935263056 b^9 \\
 & +10836410642 b^8 + 17935263056 b^7 + 23891138888 b^6 + 18778947312 b^5 + 12621395764 b^4 \\
 & +17886790352 b^3 + 4715872760 b^2 + 1100302576 b + 122096899) a - 399741680 b^{18} + 16909867760 b^{16} \\
 & +35078716672 b^{15} + 121894582624 b^{14} + 91265644128 b^{13} + 8580224200 b^{17} + 35078716672 b^3 \\
 & +16909867760 b^2 + 8580224200 b + 91265644128 b^{13} + 90503608224 b^{12} + 75226977536 b^{11} - 31768205568 b^{10} \\
 & +14278034864 b^9 - 31768205568 b^8 + 75226977536 b^7 + 90503608224 b^6 - 399741680 + 121894582624 b^4, \\
 \Theta_{11} = & -64 (b - 1) (296288256 a^9 - 196608 (3886 b^2 + 16247 b + 3886) a^8 \\
 & +8192 (44053 b^4 + 1078052 b^3 + 1840620 b^2 + 1078052 b + 44053) a^7 \\
 & +4096 (68873 b^6 - 1250100 b^5 - 9543099 b^4 - 11675083 b^3 - 9543099 b^2 - 1250100 b + 68873) a^6 \\
 & -1024 (364462 b^8 - 630048 b^7 - 19288613 b^6 - 99977210 b^5 - 102610086 b^4 - 99977210 b^3 - 19288613 b^2 \\
 & -630048 b + 364462) a^5 - 256 (792522 b^{10} + 1887020 b^9 + 20789446 b^8 + 185354517 b^7 + 671252980 b^6 \\
 & +660841126 b^5 + 671252980 b^4 + 185354517 b^3 + 20789446 b^2 + 1887020 b + 792522) a^4 + 32 (6165847 b^{12} \\
 & +32325348 b^{11} + 167704368 b^{10} + 547138348 b^9 + 2320319457 b^8 + 6146249904 b^7 + 6132114992 b^6 \\
 & +6146249904 b^5 + 2320319457 b^4 + 547138348 b^3 + 167704368 b^2 + 32325348 b + 6165847) a^3 - 16 (9612111 b^{14} \\
 & +51202448 b^{13} + 245814551 b^{12} + 841606365 b^{11} + 1854400201 b^{10} + 4745769340 b^9 + 9669278289 b^8 \\
 & +9767956014 b^7 + 9669278289 b^6 + 4745769340 b^5 + 1854400201 b^4 + 841606365 b^3 + 245814551 b^2 + 51202448 b \\
 & +9612111) a^2 + (203091959 b^{16} + 191307376 b^{15} + 1619462964 b^{14} + 6250383672 b^{13} + 15401830220 b^{12} \\
 & +27091650232 b^{11} + 48265769356 b^{10} + 77392829856 b^9 + 78845830138 b^8 + 77392829856 b^7 + 48265769356 b^6 \\
 & +27091650232 b^5 + 15401830220 b^4 + 6250383672 b^3 + 1619462964 b^2 + 191307376 b + 203091959) a \\
 & +42401610 b^{18} - 551155230 b^{16} - 1192671891 b^{15} - 3224995380 b^{14} - 6576731370 b^{13} - 184370859 b^{17} \\
 & -1192671891 b^3 - 551155230 b^2 - 184370859 b - 6576731370 b^{13} - 9796754772 b^{12} - 14332841469 b^{11} \\
 & -18932418468 b^{10} - 19403054262 b^9 - 18932418468 b^8 - 14332841469 b^7 - 9796754772 b^6 \\
 & +42401610 - 3224995380 b^4), \\
 \Theta_{10} = & 4747952128 a^{10} - 16777216 (2270 b^2 + 677 b + 2270) a^9 \\
 & +1048576 (25373 b^4 + 426896 b^3 - 220961 b^2 + 426896 b + 25373) a^8 \\
 & +262144 (116373 b^6 - 2180704 b^5 - 5805631 b^4 + 2818948 b^3 - 5805631 b^2 - 2180704 b + 116373) a^7 \\
 & -65536 (1304375 b^8 - 4390726 b^7 - 28540390 b^6 - 56393410 b^5 + 22934966 b^4 - 56393410 b^3 - 28540390 b^2 \\
 & -4390726 b + 1304375) a^6 - 16384 (2121863 b^{10} - 9421932 b^9 + 65269301 b^8 + 219754532 b^7 + 377701556 b^6 \\
 & -115329520 b^5 + 377701556 b^4 + 219754532 b^3 + 65269301 b^2 - 9421932 b + 2121863) a^5 + 4096 (4066545 b^{12} \\
 & +120372506 b^{11} - 72092154 b^{10} + 540957314 b^9 + 1110136007 b^8 + 1631008388 b^7 - 246691036 b^6 \\
 & +1631008388 b^5 + 1110136007 b^4 + 540957314 b^3 - 72092154 b^2 + 120372506 b + 4066545) a^4 \\
 & -1024 (52065505 b^{14} + 124764776 b^{13} + 1214241913 b^{12} + 133380020 b^{11} + 2489491599 b^{10} + 4207765832 b^9 \\
 & +35344228823 b^8 + 862310456 b^7 + 3534428823 b^6 + 4207765832 b^5 + 2489491599 b^4 + 133380020 b^3 \\
 & +1214241913 b^2 + 124764776 b + 52065505) a^3 + 512 (12071500 b^{16} + 332744717 b^{15} + 690325515 b^{14} \\
 & +3563606227 b^{13} + 1386176138 b^{12} + 3750261721 b^{11} + 5119782997 b^{10} + 407992007 b^9 + 2280338068 b^8 \\
 & +407992007 b^7 + 5119782997 b^6 + 3750261721 b^5 + 1386176138 b^4 + 3563606227 b^3 + 690325515 b^2 \\
 & +332744717 b + 12071500) a^2 - 64 (449806581 b^{18} + 96844112 b^{17} + 2842344315 b^{16} + 7345456876 b^{15} \\
 & +22008065422 b^{14} + 12729547640 b^{13} + 14353986914 b^{12} + 12332567508 b^{11} - 14903244128 b^{10} \\
 & +3667031280 b^9 - 14903244128 b^8 + 12332567508 b^7 + 14353986914 b^6 + 12729547640 b^5 + 22008065422 b^4 \\
 & +7345456876 b^3 + 2842344315 b^2 + 96844112 b + 449806581) a + 466971894144 b^{15} + 227176622400 b^{14} \\
 & -459338342592 b^9 - 4457778336 b^{20} + 9344158560 b^{19} + 45424473072 b^{18} + 86606853216 b^{17} \\
 & +172667120352 b^{16} + 45424473072 b^2 + 9344158560 b + 243912900480 b^{13} + 100076697024 b^{12} \\
 & -459338342592 b^{11} - 139613889120 b^{10} - 4457778336 + 100076697024 b^8 + 243912900480 b^7 \\
 & +227176622400 b^6 + 466971894144 b^5 + 172667120352 b^4 + 86606853216 b^3, \\
 \Theta_9 = & 256 (b - 1) (80216064 a^{10} - 196608 (1081 + 1081 b^2 + 5404 b) a^9 \\
 & -196608 (827 + 827 b^4 - 20535 b - 24064 b^2 - 20535 b^3) a^8 \\
 & +8192 (106155 - 345710 b - 345710 b^5 - 2351738 b^3 - 2280921 b^4 - 2280921 b^2 + 106155 b^6) a^7 \\
 & -4096 (348586 b^8 - 12871532 b^4 + 45716 b^7 - 2797319 b^6 - 2797319 b^2 - 13966956 b^5 + 348586 \\
 & -13966956 b^3 + 45716 b) a^6 + 1024 (-27890892 b^7 + 636026 - 3143075 b^2 + 2720408 b + 2720408 b^9 \\
 & -27890892 b^3 + 636026 b^{10} - 3143075 b^8 - 113721343 b^4 - 102013808 b^5 - 113721343 b^6) a^5 \\
 & -256 (-603374202 b^6 + 7989207 b^{10} - 49627 b + 2050585 - 206232265 b^8 - 628593997 b^7 \\
 & -628593997 b^5 + 7989207 b^2 - 39398740 b^9 + 2050585 b^{12} - 49627 b^{11} - 206232265 b^4 - 39398740 b^3) a^4 \\
 & -32 (5371755 + 4900412221 b^8 + 2118607746 b^9 + 5371755 b^{14} + 2118607746 b^5 + 5057585580 b^7 \\
 & +85371682 b^3 + 85371682 b^{11} - 11883034 b + 618768637 b^{10} + 4900412221 b^6 + 73963387 b^{12} \\
 & -11883034 b^{13} + 618768637 b^4 + 73963387 b^2) a^3 + 8 (807814744 b^{13} + 7326126846 b^{10} + 13258338444 b^9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+3133502080 b^5 + 7326126846 b^6 + 1315850436 b^4 + 3133502080 b^{11} + 121740674 b^2 + 67763548 b^{15} \\
 &+807814744 b^3 + 1315850436 b^{12} + 18625555 b^{16} + 121740674 b^{14} + 67763548 b + 18625555 \\
 &+13258338444 b^7 + 14255664978 b^8 a^2 - (2102876728 b^3 + 966497281 b^2 + 6954544616 b^{14} \\
 &+44566294522 b^8 + 966497281 b^{16} + 168660605 + 31471755336 b^{11} + 18794405792 b^{12} + 568769124 b^{17} \\
 &+49357159736 b^9 + 2102876728 b^{15} + 6954544616 b^4 + 568769124 b + 11186555264 b^5 \\
 &+11186555264 b^{13} + 18794405792 b^6 + 168660605 b^{18} + 44566294522 b^{10} + 31471755336 b^7) a \\
 &+5137398413 b^7 + 8324409735 b^9 + 15353550 - 23657946 b + 7236401132 b^8 + 294892775 b^2 \\
 &+3536043808 b^6 + 2881210159 b^5 + 3536043808 b^{14} + 1128747414 b^{16} + 682031127 b^{17} \\
 &+8324409735 b^{11} + 9809299538 b^{10} + 294892775 b^{18} + 7236401132 b^{12} + 682031127 b^3 \\
 &+1128747414 b^4 - 23657946 b^{19} + 2881210159 b^{15} + 15353550 b^{20} + 5137398413 b^{13}), \\
 \Theta_8 = &-2415919104 a^{11} + 1207959552 (20 b^2 + b + 20) a^{10} \\
 &+33554432 (775 b^4 - 15797 b^3 + 15959 b^2 - 15797 b + 775) a^9 \\
 &-4194304 (54569 b^6 - 286432 b^5 - 170640 b^4 + 168418 b^3 - 170640 b^2 - 286432 b + 54569) a^8 \\
 &+1048576 (455987 b^8 - 865068 b^7 - 3291760 b^6 - 1141888 b^5 + 663570 b^4 - 1141888 b^3 - 3291760 b^2 \\
 &-865068 b + 455987) a^7 - 262144 (1826501 b^{10} - 1149690 b^9 - 8957203 b^8 - 28601884 b^7 - 5203486 b^6 \\
 &+502412 b^5 - 5203486 b^4 - 28601884 b^3 - 8957203 b^2 - 1149690 b + 1826501) a^6 + 65536 (6623173 b^{12} \\
 &-14806632 b^{11} - 13843118 b^{10} - 65706368 b^9 - 163057157 b^8 - 19436144 b^7 + 5825276 b^6 \\
 &-19436144 b^5 - 163057157 b^4 - 65706368 b^3 - 13843118 b^2 - 14806632 b + 6623173) a^5 \\
 &-16384 (21015407 b^{14} - 28451302 b^{13} - 213367189 b^{12} - 109195808 b^{11} - 333119599 b^{10} \\
 &-680306786 b^9 + 132240741 b^8 - 31246640 b^7 + 132240741 b^6 - 680306786 b^5 - 333119599 b^4 \\
 &-109195808 b^3 - 213367189 b^2 - 28451302 b + 21015407) a^4 + 8192 (24494505 b^{16} - 38111482 b^{15} \\
 &-181538126 b^{14} - 718286348 b^{13} - 334758420 b^{12} - 657142008 b^{11} - 955751938 b^{10} + 880572478 b^9 \\
 &-163814282 b^8 + 880572478 b^7 - 955751938 b^6 - 657142008 b^5 - 334758420 b^4 - 718286348 b^3 - 181538126 b^2 \\
 &-38111482 b + 24494505) a^3 + 1024 (21478777 b^{18} - 168918692 b^{17} + 810102021 b^{16} + 2520199876 b^{15} \\
 &+6054111524 b^{14} + 2772385800 b^{13} + 3568774108 b^{12} + 2695700540 b^{11} - 8020127486 b^{10} - 79923144 b^9 \\
 &-8020127486 b^8 + 2695700540 b^7 + 3568774108 b^6 + 2772385800 b^5 + 6054111524 b^4 + 2520199876 b^3 \\
 &+810102021 b^2 - 168918692 b + 21478777) a^2 + 256 (6118929 b^{20} - 776587918 b^{19} - 96659380 b^{18} \\
 &-2859014174 b^{17} - 7663642707 b^{16} - 13406224912 b^{15} - 8101367408 b^{14} - 6059180688 b^{13} + 919670594 b^{12} \\
 &+18147635020 b^{11} + 6918497864 b^{10} + 18147635020 b^9 + 919670594 b^8 - 6059180688 b^7 - 8101367408 b^6 \\
 &-13406224912 b^5 - 7663642707 b^4 - 2859014174 b^3 - 96659380 b^2 - 776587918 b + 6118929) a \\
 &-1017519420672 b^{21} + 253386114048 b^{14} + 24421881600 b^{22} - 44519140224 b^{21} + 75682604736 b^{20} \\
 &+125282885760 b^{19} + 257129924544 b^{18} + 575656871040 b^{17} + 686337497856 b^{16} + 423189232128 b^{15} \\
 &-44519140224 b - 224466557184 b^{13} - 1007398675584 b^{12} + 24421881600 - 1007398675584 b^{10} \\
 &-224466557184 b^9 + 253386114048 b^8 + 423189232128 b^7 + 686337497856 b^6 + 575656871040 b^5 \\
 &+257129924544 b^4 + 125282885760 b^3 + 75682604736 b^2, \\
 \Theta_7 = &-1024 (b - 1) (9437184 a^{11} + 1572864 (b^2 - 131 b + 1) a^{10} \\
 &-65536 (3830 b^4 - 15530 b^3 - 7893 b^2 - 15530 b + 3830) a^9 \\
 &+16384 (49201 b^6 - 50424 b^5 - 242719 b^4 - 252636 b^3 - 242719 b^2 - 50424 b + 49201) a^8 \\
 &-4096 (336689 b^8 + 262682 b^7 - 896628 b^6 - 3295194 b^5 - 3832178 b^4 - 3295194 b^3 - 896628 b^2 \\
 &+262682 b + 336689) a^7 + 1024 (1166739 b^{10} + 3294464 b^9 + 120985 b^8 - 7370448 b^7 - 35085272 b^6 \\
 &-34525364 b^5 - 35085272 b^4 - 7370448 b^3 + 120985 b^2 + 3294464 b + 1166739) a^6 \\
 &-256 (4282485 b^{12} + 6875698 b^{11} + 16990332 b^{10} - 569274 b^9 - 60081449 b^8 - 243423500 b^7 - 236237112 b^6 \\
 &-243423500 b^5 - 60081449 b^4 - 569274 b^3 + 16990332 b^2 + 6875698 b + 4282485) a^5 \\
 &+64 (7355279 b^{14} + 29208240 b^{13} - 325269 b^{12} + 67751952 b^{11} - 26964667 b^{10} - 387148896 b^9 - 1147420607 b^8 \\
 &-1222397248 b^7 - 1147420607 b^6 - 387148896 b^5 - 26964667 b^4 + 67751952 b^3 - 325269 b^2 + 29208240 b \\
 &+7355279) a^4 - 32 (11244544 b^{16} - 1951565 b^{15} + 19522432 b^{14} - 93676555 b^{13} + 45798472 b^{12} - 167768581 b^{11} \\
 &-861484312 b^{10} - 1882462915 b^9 - 2236874880 b^8 - 1882462915 b^7 - 861484312 b^6 - 167768581 b^5 \\
 &+45798472 b^4 - 93676555 b^3 + 19522432 b^2 - 1951565 b + 11244544) a^3 - 4 (13665265 b^{18} - 16981978 b^{17} \\
 &+196405923 b^{16} + 399066816 b^{15} + 1426210110 b^{14} + 942333436 b^{13} + 2075346634 b^{12} + 4963122352 b^{11} \\
 &+8241615332 b^{10} + 10685828636 b^9 + 8241615332 b^8 + 4963122352 b^7 + 2075346634 b^6 + 942333436 b^5 \\
 &+1426210110 b^4 + 399066816 b^3 + 196405923 b^2 - 16981978 b + 13665265) a^2 \\
 &-(70788845 b^{20} - 237965416 b^{19} - 533183011 b^{18} - 1488420044 b^{17} - 2553105227 b^{16} - 4469027824 b^{15} \\
 &-4094693492 b^{14} - 5694606040 b^{13} - 8391583810 b^{12} - 10150008964 b^{11} - 13849817746 b^{10} - 10150008964 b^9 \\
 &-8391583810 b^8 - 5694606040 b^7 - 4094693492 b^6 - 4469027824 b^5 - 2553105227 b^4 - 1488420044 b^3 \\
 &-533183011 b^2 - 237965416 b + 70788845) a - 828586062 b^{14} - 967669674 b^{10} - 45795930 b^{22} - 22294872 b^{21} \\
 &-86512062 b^{20} - 360058353 b^{19} - 727367184 b^{18} - 1003040850 b^{17} - 1542589728 b^{16} - 927405168 b^{15} \\
 &-22294872 b - 1077047430 b^{13} - 967669674 b^{12} - 1684930398 b^{11} - 45795930 - 1077047430 b^9 - 828586062 b^8 \\
 &-927405168 b^7 - 1542589728 b^6 - 1003040850 b^5 - 727367184 b^4 - 360058353 b^3 - 86512062 b^2), \\
 \Theta_6 = &-805306368 (116 b^4 - 506 b^3 + 753 b^2 - 506 b + 116) a^{10} \\
 &+67108864 (7202 b^6 - 22970 b^5 + 15425 b^4 - 4174 b^3 + 15425 b^2 - 22970 b + 7202) a^9 \\
 &-16777216 (73413 b^8 - 123296 b^7 + 140713 b^6 + 137944 b^5 - 9392 b^4 + 137944 b^3 - 140713 b^2 - 123296 b + 73413) a^8 \\
 &+4194304 (481178 b^{10} - 380880 b^9 - 857083 b^8 - 1471904 b^7 + 1446975 b^6 + 97004 b^5 + 1446975 b^4 - 1471904 b^3 \\
 &-857083 b^2 - 380880 b + 481178) a^7 - 1048576 (2212549 b^{12} - 172594 b^{11} - 5810186 b^{10} - 2843722 b^9 \\
 &-13095804 b^8 + 13232760 b^7 + 985434 b^6 + 13232760 b^5 - 13095804 b^4 - 2843722 b^3 - 5810186 b^2 \\
 &-172594 b + 2212549) a^6 + 262144 (10011363 b^{14} + 927062 b^{13} - 22816260 b^{12} - 31705372 b^{11} - 15262198 b^{10} \\
 &-65565550 b^9 + 89581271 b^8 + 608488 b^7 + 89581271 b^6 - 65565550 b^5 - 15262198 b^4 - 31705372 b^3 - 22816260 b^2 \\
 &+927062 b + 10011363) a^5 - 65536 (26476546 b^{16} + 41137906 b^{15} - 81261294 b^{14} - 155014750 b^{13} - 148422621 b^{12} \\
 &-93341970 b^{11} - 171889166 b^{10} + 421907614 b^9 + 27617502 b^8 + 421907614 b^7 - 171889166 b^6 - 93341970 b^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -148422621 b^4 - 155014750 b^3 - 81261294 b^2 + 41137906 b + 26476546 a^4 + 16384 (66555000 b^{18} + 95780348 b^{17} \\
 & - 14372659 b^{16} - 529640184 b^{15} - 677304467 b^{14} - 560324324 b^{13} - 378527893 b^{12} - 93050616 b^{11} + 1393419075 b^{10} \\
 & + 436430576 b^9 + 1393419075 b^8 - 93050616 b^7 - 378527893 b^6 - 560324324 b^5 - 677304467 b^4 - 529640184 b^3 \\
 & - 14372659 b^2 + 95780348 b + 66555000) a^3 - 4096 (62265953 b^{20} + 168764304 b^{19} + 144434659 b^{18} - 447827800 b^{17} \\
 & - 2002602820 b^{16} - 2273942460 b^{15} - 1689625182 b^{14} - 187811132 b^{13} + 703966003 b^{12} + 3058040256 b^{11} \\
 & + 2564616918 b^{10} + 3058040256 b^9 + 703966003 b^8 - 187811132 b^7 - 1689625182 b^6 - 2273942460 b^5 \\
 & - 2002602820 b^4 - 447827800 b^3 + 144434659 b^2 + 168764304 b + 62265953) a^2 \\
 & + 1024 (162118425 b^{22} + 86583848 b^{21} - 147866567 b^{20} - 726190750 b^{19} - 1907869071 b^{18} - 3387598456 b^{17} \\
 & - 3132833991 b^{16} - 2367109800 b^{15} - 557555426 b^{14} + 2672213520 b^{13} + 4804529894 b^{12} + 5304642316 b^{11} \\
 & + 4804529894 b^{10} + 2672213520 b^9 - 557555426 b^8 - 2367109800 b^7 - 3132833991 b^6 - 3387598456 b^5 \\
 & - 1907869071 b^4 - 726190750 b^3 - 147866567 b^2 + 86583848 b + 162118425) a - 94948721664 b^{15} \\
 & - 550975385088 b^{14} - 382038609408 b^{17} + 38247020800 b^{24} + 34146267648 b^{23} - 35276956416 b^{22} \\
 & + 365653035520 b^{21} + 346060822272 b^{20} + 412610001408 b^{19} + 945245704448 b^{18} + 346060822272 b^{17} \\
 & + 231472263936 b^{16} - 35276956416 b^2 + 34146267648 b - 15761875968 b^{13} - 1470484743680 b^{12} \\
 & - 15761875968 b^{11} - 550975385088 b^{10} - 94948721664 b^9 + 231472263936 b^8 - 382038609408 b^7 \\
 & + 945245704448 b^6 + 412610001408 b^5 + 38247020800 + 365653035520 b^3, \\
 \Theta_5 = & 4096 (b-1) (9437184 (b-1)^2 a^{11} - 786432 (97 b^4 - 148 b^3 + 75 b^2 - 148 b + 97) a^{10} \\
 & + 131072 (1889 b^6 - 627 b^5 - 1209 b^4 - 2536 b^3 - 1209 b^2 - 627 b + 1889) a^9 \\
 & - 16384 (28423 b^8 + 32628 b^7 - 28086 b^6 - 18676 b^5 - 145218 b^4 - 18676 b^3 - 28086 b^2 + 32628 b + 28423) a^8 \\
 & + 4096 (132669 b^{10} + 323294 b^9 + 202189 b^8 - 58112 b^7 - 714162 b^6 - 1345100 b^5 - 714162 b^4 - 58112 b^3 \\
 & + 202189 b^2 + 323294 b + 132669) a^7 - 1024 (563795 b^{12} + 1214368 b^{11} + 1829162 b^{10} + 2245140 b^9 \\
 & - 294339 b^8 - 8049804 b^7 - 9193588 b^6 - 8049804 b^5 - 294339 b^4 + 2245140 b^3 + 1829162 b^2 + 1214368 b \\
 & + 563795) a^6 + 256 (2167441 b^{14} + 4772710 b^{13} + 2796727 b^{12} + 10099360 b^{11} + 13768821 b^{10} - 4057066 b^9 \\
 & - 47451389 b^8 - 56875352 b^7 - 47451389 b^6 - 4057066 b^5 + 13768821 b^4 + 10099360 b^3 + 2796727 b^2 \\
 & + 4772710 b + 2167441) a^5 - 64 (7499725 b^{16} + 12312712 b^{15} + 11351262 b^{14} - 10987640 b^{13} + 43951280 b^{12} \\
 & + 49087204 b^{11} - 29236774 b^{10} - 171323092 b^9 - 274874906 b^8 - 171323092 b^7 - 29236774 b^6 + 49087204 b^5 \\
 & + 43951280 b^4 - 10987640 b^3 + 11351262 b^2 + 12312712 b + 7499725) a^4 + 32 (9605363 b^{18} + 24499556 b^{17} \\
 & + 3451021 b^{16} - 27987276 b^{15} - 66129962 b^{14} + 35120076 b^{13} + 55674898 b^{12} - 49444500 b^{11} - 215432392 b^{10} \\
 & - 391118688 b^9 - 215432392 b^8 - 49444500 b^7 + 55674898 b^6 + 35120076 b^5 - 66129962 b^4 - 27987276 b^3 \\
 & + 3451021 b^2 + 24499556 b + 9605363) a^3 - 4 (45505774 b^{20} + 65146216 b^{19} + 75439489 b^{18} - 151364892 b^{17} \\
 & - 405523738 b^{16} - 709119132 b^{15} - 321765748 b^{14} + 121160028 b^{13} - 156080980 b^{12} - 498899724 b^{11} \\
 & - 1011358362 b^{10} - 498899724 b^9 - 156080980 b^8 + 121160028 b^7 - 321765748 b^6 - 709119132 b^5 - 405523738 b^4 \\
 & - 151364892 b^3 + 75439489 b^2 + 65146216 b + 45505774) a^2 + (60247937 b^{22} + 219269532 b^{21} + 136081171 b^{20} \\
 & - 188960992 b^{19} - 1039465457 b^{18} - 1744725912 b^{17} - 1792985707 b^{16} - 652310024 b^{15} - 105988902 b^{14} \\
 & + 420066300 b^{13} + 637871854 b^{12} - 299638832 b^{11} + 637871854 b^{10} + 420066300 b^9 - 105988902 b^8 \\
 & - 652310024 b^7 - 1792985707 b^6 - 1744725912 b^5 - 1039465457 b^4 - 188960992 b^3 + 136081171 b^2 \\
 & + 219269532 b + 60247937) a - 270422136 b^{14} - 8790642 b^{24} - 72746073 b^{11} + 6212286 b^{23} - 13969305 b^{22} \\
 & + 115932690 b^{21} + 277228566 b^{20} + 507499371 b^{19} + 662012001 b^{18} + 468691965 b^{17} + 117690282 b^{16} \\
 & - 237191967 b^{15} + 6212286 b - 72746073 b^{13} - 9181692 b^{12} - 8790642 - 270422136 b^{10} - 237191967 b^9 \\
 & + 117690282 b^8 + 468691965 b^7 + 662012001 b^6 + 507499371 b^5 + 277228566 b^4 + 115932690 b^3 - 13969305 b^2), \\
 \Theta_4 = & 1024 (b-1)^2 (37748736 (b-1)^2 a^{11} - 2097152 (143 b^2 + 119 b + 143) (b-1)^2 a^{10} \\
 & + 524288 (2126 b^6 - 37 b^5 - 725 b^4 - 2404 b^3 - 725 b^2 - 37 b + 2126) a^9 \\
 & - 131072 (17857 b^8 + 22219 b^7 + 1128 b^6 - 10621 b^5 - 46019 b^4 - 10621 b^3 + 1128 b^2 + 22219 b + 17857) a^8 \\
 & + 16384 (198475 b^{10} + 479436 b^9 + 340429 b^8 + 98284 b^7 - 504233 b^6 - 818486 b^5 - 504233 b^4 \\
 & + 98284 b^3 + 340429 b^2 + 479436 b + 198475) a^7 - 4096 (1015407 b^{12} + 2793572 b^{11} + 3474553 b^{10} + 2048364 b^9 \\
 & - 419945 b^8 - 6128866 b^7 - 5148858 b^6 - 6128866 b^5 - 419945 b^4 + 2048364 b^3 + 3474553 b^2 \\
 & + 2793572 b + 1015407) a^6 + 1024 (3348692 b^{14} + 14393872 b^{13} + 20246896 b^{12} + 18662440 b^{11} + 2890769 b^{10} \\
 & - 14987654 b^9 + 41068925 b^8 - 38093676 b^7 - 41068925 b^6 - 14987654 b^5 + 2890769 b^4 + 18662440 b^3 \\
 & + 20246896 b^2 + 14393872 b + 3348692) a^5 - 256 (11010920 b^{16} + 41428062 b^{15} + 92046041 b^{14} + 91091582 b^{13} \\
 & + 61283358 b^{12} - 41913540 b^{11} - 122412901 b^{10} - 194447160 b^9 - 237594724 b^8 - 194447160 b^7 - 122412901 b^6 \\
 & - 41913540 b^5 + 61283358 b^4 + 91091582 b^3 + 92046041 b^2 + 41428062 b + 11010920) a^4 \\
 & + 64 (20223854 b^{18} + 113957258 b^{17} + 231571312 b^{16} + 342912580 b^{15} + 232018443 b^{14} + 923886 b^{13} \\
 & - 306108469 b^{12} - 616230172 b^{11} - 803507348 b^{10} - 855193024 b^9 - 803507348 b^8 - 616230172 b^7 \\
 & - 306108469 b^6 + 923886 b^5 + 232018443 b^4 + 342912580 b^3 + 231571312 b^2 + 113957258 b + 20223854) a^3 \\
 & - 16 (66140513 b^{20} + 185407994 b^{19} + 429519043 b^{18} + 597874426 b^{17} + 672053243 b^{16} + 142811858 b^{15} \\
 & - 659964604 b^{14} - 1395316534 b^{13} - 1980103788 b^{12} - 2088232592 b^{11} - 2131449198 b^{10} - 2088232592 b^9 \\
 & - 1980103788 b^8 - 1395316534 b^7 - 659964604 b^6 + 142811858 b^5 + 672053243 b^4 + 597874426 b^3 \\
 & + 429519043 b^2 + 185407994 b + 66140513) a^2 + 4 (57394894 b^{22} + 370365078 b^{21} + 734243852 b^{20} \\
 & + 1059715576 b^{19} + 722380191 b^{18} - 507444420 b^{17} - 1936346121 b^{16} - 2688820812 b^{15} - 3043969929 b^{14} \\
 & - 2522226130 b^{13} - 1842677863 b^{12} - 2034735064 b^{11} - 1842677863 b^{10} - 2522226130 b^9 - 3043969929 b^8 \\
 & - 2688820812 b^7 - 1936346121 b^6 - 507444420 b^5 + 722380191 b^4 + 1059715576 b^3 + 734243852 b^2 \\
 & + 370365078 b + 57394894) a + 1635684366 b^{14} - 1015688160 b^{12} - 139809000 b^{24} - 268781916 b^{23} \\
 & - 515556387 b^{22} - 354969276 b^{21} + 601165512 b^{20} + 2479560342 b^{19} + 4611602325 b^{18} + 6310532106 b^{17} \\
 & + 5972151696 b^{16} + 4119066330 b^{15} - 268781916 b - 531474402 b^{13} - 139809000 - 531474402 b^{11} \\
 & + 1635684366 b^{10} + 4119066330 b^9 + 5972151696 b^8 + 6310532106 b^7 + 4611602325 b^6 + 2479560342 b^5 \\
 & + 601165512 b^4 - 354969276 b^3 - 515556387 b^2), \\
 \Theta_3 = & -16384 (b-1)^3 (2359296 (b^2 + b + 1)^2 a^{10} - 196608 (79 b^6 + 174 b^5 + 375 b^4 + 472 b^3 + 375 b^2 + 174 b + 79) a^9 \\
 & + 16384 (1727 b^8 + 5944 b^7 + 15580 b^6 + 28290 b^5 + 32107 b^4 + 28290 b^3 + 15580 b^2 + 5944 b + 1727) a^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4096 (12076 b^{10} + 41768 b^9 + 93195 b^8 + 237566 b^7 + 373045 b^6 + 446520 b^5 + 373045 b^4 + 237566 b^3 \\
 & + 93195 b^2 + 41768 b + 12076) a^7 + 1024 (125640 b^{12} + 320520 b^{11} + 572952 b^{10} + 1082098 b^9 + 1990561 b^8 \\
 & + 3058826 b^7 + 3884926 b^6 + 3058826 b^5 + 1990561 b^4 + 1082098 b^3 + 572952 b^2 + 320520 b + 125640) a^6 \\
 & -256 (553509 b^{14} + 2371538 b^{13} + 4252878 b^{12} + 5724738 b^{11} + 7031370 b^{10} + 11206658 b^9 + 17124355 b^8 \\
 & + 20802944 b^7 + 17124355 b^6 + 11206658 b^5 + 7031370 b^4 + 5724738 b^3 + 4252878 b^2 + 2371538 b + 553509) a^5 \\
 & + 64 (2670701 b^{16} + 10695452 b^{15} + 24148560 b^{14} + 33061318 b^{13} + 32707143 b^{12} + 25320526 b^{11} + 37784484 b^{10} \\
 & + 59420716 b^9 + 64746184 b^8 + 59420716 b^7 + 37784484 b^6 + 25320526 b^5 + 32707143 b^4 + 33061318 b^3 \\
 & + 24148560 b^2 + 10695452 b + 2670701) a^4 - 16 (5820508 b^{18} + 34886112 b^{17} + 87792261 b^{16} + 151135678 b^{15} \\
 & + 161972291 b^{14} + 107230960 b^{13} + 58836593 b^{12} + 31004466 b^{11} + 53782971 b^{10} + 90512704 b^9 + 53782971 b^8 \\
 & + 31004466 b^7 + 58836593 b^6 + 107230960 b^5 + 161972291 b^4 + 151135678 b^3 + 87792261 b^2 \\
 & + 34886112 b + 5820508) a^3 + 4 (19551211 b^{20} + 86631518 b^{19} + 229771693 b^{18} + 406202952 b^{17} \\
 & + 532851978 b^{16} + 491985202 b^{15} + 269193002 b^{14} - 26245730 b^{13} - 242460885 b^{12} - 322333334 b^{11} \\
 & - 346890030 b^{10} - 322333334 b^9 - 242460885 b^8 - 26245730 b^7 + 269193002 b^6 + 491985202 b^5 + 532851978 b^4 \\
 & + 406202952 b^3 + 229771693 b^2 + 86631518 b + 19551211) a^2 - (14551134 b^{22} + 118529492 b^{21} + 359160993 b^{20} \\
 & + 763973602 b^{19} + 1149674659 b^{18} + 1180308832 b^{17} + 746727288 b^{16} - 29501676 b^{15} - 726754870 b^{14} \\
 & - 1082172484 b^{13} - 1142958756 b^{12} - 1117378956 b^{11} - 1142958756 b^{10} - 1082172484 b^9 - 726754870 b^8 \\
 & - 29501676 b^7 + 746727288 b^6 + 1180308832 b^5 + 1149674659 b^4 + 763973602 b^3 + 359160993 b^2 \\
 & + 118529492 b + 14551134) a + 45628115 b^{23} - 604701663 b^{15} - 511132572 b^{14} + 12655160 b^{24} - 511132572 b^{10} \\
 & + 113910796 b^{22} + 209839165 b^{21} + 274792290 b^{20} + 243988095 b^{19} + 70403592 b^{18} - 226975126 b^{17} \\
 & - 489268410 b^{16} + 113910796 b^{15} + 45628115 b - 320141930 b^{13} - 242799504 b^{12} - 320141930 b^{11} + 12655160 \\
 & - 604701663 b^9 - 489268410 b^8 - 226975126 b^7 + 70403592 b^6 + 243988095 b^5 + 274792290 b^4 + 209839165 b^3), \\
 \Theta_2 = & -4096 (b-1)^4 (9437184 (b^2 + b + 1)^2 a^{10} - 262144 (151 b^6 + 396 b^5 + 990 b^4 + 1138 b^3 + 990 b^2 + 396 b + 151) a^9 \\
 & + 65536 (413 b^8 + 2844 b^7 + 10908 b^6 + 18664 b^5 + 23280 b^4 + 18664 b^3 + 10908 b^2 + 2844 b + 413) a^8 \\
 & - 16384 (627 b^{10} + 15512 b^9 + 68334 b^8 + 165654 b^7 + 243967 b^6 + 275736 b^5 + 243967 b^4 + 165654 b^3 + 68334 b^2 \\
 & + 15512 b + 627) a^7 + 4096 (19158 b^{12} + 98380 b^{11} + 488696 b^{10} + 1244246 b^9 + 1898308 b^8 + 2363444 b^7 \\
 & + 2558927 b^6 + 2363444 b^5 + 1898308 b^4 + 1244246 b^3 + 488696 b^2 + 98380 b + 19158) a^6 \\
 & - 1024 (29725 b^{14} + 492224 b^{13} + 2660410 b^{12} + 7262652 b^{11} + 12371395 b^{10} + 15717730 b^9 + 17063640 b^8 \\
 & + 17356632 b^7 + 17063640 b^6 + 15717730 b^5 + 12371395 b^4 + 7262652 b^3 + 2660410 b^2 + 492224 b + 29725) a^5 \\
 & + 256 (765713 b^{16} + 3761452 b^{15} + 13840132 b^{14} + 35772828 b^{13} + 62777015 b^{12} + 79370902 b^{11} + 86460037 b^{10} \\
 & + 83130510 b^9 + 76518494 b^8 + 83130510 b^7 + 86460037 b^6 + 79370902 b^5 + 62777015 b^4 + 35772828 b^3 \\
 & + 13840132 b^2 + 3761452 b + 765713) a^4 - 64 (2537713 b^{18} + 16298304 b^{17} + 56584970 b^{16} + 143570670 b^{15} \\
 & + 249778729 b^{14} + 327370676 b^{13} + 359512995 b^{12} + 308408722 b^{11} + 237832137 b^{10} + 218864536 b^9 \\
 & + 237832137 b^8 + 308408722 b^7 + 359512995 b^6 + 327370676 b^5 + 249778729 b^4 + 143570670 b^3 + 56584970 b^2 \\
 & + 16298304 b + 2537713) a^3 + 16 (12807491 b^{20} + 70949850 b^{19} + 228296581 b^{18} + 509058372 b^{17} + 851233451 b^{16} \\
 & + 1149355672 b^{15} + 1268559225 b^{14} + 1114851836 b^{13} + 783128734 b^{12} + 440198062 b^{11} + 278577820 b^{10} \\
 & + 440198062 b^9 + 783128734 b^8 + 1114851836 b^7 + 1268559225 b^6 + 1149355672 b^5 + 851233451 b^4 \\
 & + 509058372 b^3 + 228296581 b^2 + 70949850 b + 12807491) a^2 - 4 (13437560 b^{22} + 105846412 b^{21} \\
 & + 381236432 b^{20} + 958716702 b^{19} + 1805272055 b^{18} + 2645633502 b^{17} + 3049113087 b^{16} + 2623441496 b^{15} \\
 & + 1467983201 b^{14} - 33911642 b^{13} - 1261805183 b^{12} - 1699553612 b^{11} - 1261805183 b^{10} - 33911642 b^9 \\
 & + 1467983201 b^8 + 2623441496 b^7 + 3049113087 b^6 + 2645633502 b^5 + 1805272055 b^4 + 958716702 b^3 \\
 & + 381236432 b^2 + 105846412 b + 13437560) a + 9 (5053040 b^{20} + 25829680 b^{19} + 70342568 b^{18} + 134433408 b^{17} \\
 & + 188883901 b^{16} + 195254278 b^{15} + 136973737 b^{14} + 35889722 b^{13} - 55508101 b^{12} - 107474528 b^{11} \\
 & - 123515090 b^{10} - 107474528 b^9 - 55508101 b^8 + 35889722 b^7 + 136973737 b^6 + 195254278 b^5 + 188883901 b^4 \\
 & + 134433408 b^3 + 70342568 b^2 + 25829680 b + 5053040) (b^2 + 1)^2), \\
 \Theta_1 = & -65536 (b-1)^5 (589824 (b+1)^2 (b^2 + b + 1)^2 a^9 \\
 & - 16384 (b^2 + b + 1) (151 b^6 + 547 b^5 + 1154 b^4 + 1507 b^3 + 1154 b^2 + 547 b + 151) a^8 \\
 & + 4096 (482 b^{10} + 3838 b^9 + 14057 b^8 + 31290 b^7 + 50277 b^6 + 58988 b^5 + 50277 b^4 + 31290 b^3 + 14057 b^2 \\
 & + 3838 b + 482) a^7 - 1024 (182 b^{12} + 11662 b^{11} + 43034 b^{10} + 114564 b^9 + 246787 b^8 + 380606 b^7 + 438134 b^6 \\
 & + 380606 b^5 + 246787 b^4 + 114564 b^3 + 43034 b^2 + 11662 b + 182) a^6 + 256 (12855 b^{14} + 60476 b^{13} + 99494 b^{12} \\
 & + 129258 b^{11} + 322870 b^{10} + 851080 b^9 + 1484997 b^8 + 1752528 b^7 + 1484997 b^6 + 851080 b^5 + 322870 b^4 \\
 & + 129258 b^3 + 99494 b^2 + 60476 b + 12855) a^5 - 64 (14605 b^{16} + 76386 b^{15} - 240872 b^{14} - 1915940 b^{13} \\
 & - 4552869 b^{12} - 5954932 b^{11} - 5359052 b^{10} - 3098910 b^9 - 1529088 b^8 - 3098910 b^7 - 5359052 b^6 \\
 & - 5954932 b^5 - 4552869 b^4 - 1915940 b^3 - 240872 b^2 + 76386 b + 14605) a^4 + 16 (65918 b^{18} + 231022 b^{17} \\
 & - 1502397 b^{16} - 10409214 b^{15} - 27254653 b^{14} - 46505036 b^{13} - 60611411 b^{12} - 60408958 b^{11} - 52441257 b^{10} \\
 & - 49063644 b^9 - 52441257 b^8 - 60408958 b^7 - 60611411 b^6 - 46505036 b^5 - 27254653 b^4 - 10409214 b^3 \\
 & - 1502397 b^2 + 231022 b + 65918) a^3 + 4 (484762 b^{20} + 3911398 b^{19} + 20154538 b^{18} + 64296584 b^{17} \\
 & + 140409495 b^{16} + 236686702 b^{15} + 322367154 b^{14} + 364644598 b^{13} + 363955151 b^{12} + 341218046 b^{11} \\
 & + 326983208 b^{10} + 341218046 b^9 + 363955151 b^8 + 364644598 b^7 + 322367154 b^6 + 236686702 b^5 \\
 & + 140409495 b^4 + 64296584 b^3 + 20154538 b^2 + 3911398 b + 484762) a^2 - 2 (b^2 + 1) (553308 b^{20} + 4872196 b^{19} \\
 & + 21288243 b^{18} + 61477112 b^{17} + 127961827 b^{16} + 203576180 b^{15} + 250637692 b^{14} + 230189956 b^{13} \\
 & + 145170157 b^{12} + 45776604 b^{11} + 767706 b^{10} + 45776604 b^9 + 145170157 b^8 + 230189956 b^7 + 250637692 b^6 \\
 & + 203576180 b^5 + 127961827 b^4 + 61477112 b^3 + 21288243 b^2 + 4872196 b + 553308) a \\
 & + 3 (480000 b^{20} + 3081276 b^{19} + 10527196 b^{18} + 25077311 b^{17} + 45261216 b^{16} + 64406858 b^{15} + 72468519 b^{14} \\
 & + 62141452 b^{13} + 36433266 b^{12} + 9237991 b^{11} - 2436026 b^{10} + 9237991 b^9 + 36433266 b^8 + 62141452 b^7 \\
 & + 72468519 b^6 + 64406858 b^5 + 45261216 b^4 + 25077311 b^3 + 10527196 b^2 + 3081276 b + 480000) (b^2 + 1)^2), \\
 \Theta_0 = & -16384 (b-1)^6 (589824 (b^2 + b + 1)^2 (b+1)^4 a^8 \\
 & - 16384 (124 b^8 + 554 b^7 + 1654 b^6 + 2848 b^5 + 3491 b^4 + 2848 b^3 + 1654 b^2 + 554 b + 124) (b+1)^2 a^7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4096(2b^{12} - 1192b^{11} - 11423b^{10} - 41298b^9 - 93925b^8 - 149822b^7 - 173941b^6 - 149822b^5 \\
& - 93925b^4 - 41298b^3 - 11423b^2 - 1192b + 2)a^6 + 2048(1200b^{14} + 4224b^{13} - 1702b^{12} - 54688b^{11} \\
& - 211190b^{10} - 466670b^9 - 726503b^8 - 841910b^7 - 726503b^6 - 466670b^5 - 211190b^4 - 54688b^3 \\
& - 1702b^2 + 4224b + 1200)a^5 + 256(8801b^{16} + 40482b^{15} + 190071b^{14} + 920230b^{13} + 2951984b^{12} \\
& + 6736406b^{11} + 11930420b^{10} + 16624262b^9 + 18486380b^8 + 16624262b^7 + 11930420b^6 + 6736406b^5 \\
& + 2951984b^4 + 920230b^3 + 190071b^2 + 40482b + 8801)a^4 + 64(8476b^{18} + 61794b^{17} - 359966b^{16} \\
& - 3370734b^{15} - 11898805b^{14} - 28558434b^{13} - 53525177b^{12} - 81452074b^{11} - 103991408b^{10} \\
& - 112863952b^9 - 103991408b^8 - 81452074b^7 - 53525177b^6 - 28558434b^5 - 11898805b^4 - 3370734b^3 \\
& - 359966b^2 + 61794b + 8476)a^3 - 16(b^2 + 1)(119172b^{18} + 311776b^{17} - 2553893b^{16} - 17278570b^{15} \\
& - 52930534b^{14} - 110074452b^{13} - 176233007b^{12} - 231921830b^{11} - 265769798b^{10} - 276759288b^9 \\
& - 265769798b^8 - 231921830b^7 - 176233007b^6 - 110074452b^5 - 52930534b^4 - 17278570b^3 - 2553893b^2 \\
& + 311776b + 119172)a^2 + 8(512b^{18} - 487976b^{17} - 4492908b^{16} - 18661398b^{15} - 47875861b^{14} \\
& - 87313560b^{13} - 122009700b^{12} - 138328816b^{11} - 138181367b^{10} - 135520540b^9 - 138181367b^8 \\
& - 138328816b^7 - 122009700b^6 - 87313560b^5 - 47875861b^4 - 18661398b^3 - 4492908b^2 \\
& - 487976b + 512)(b^2 + 1)^2a + (1344512b^{18} + 10816512b^{17} + 44620912b^{16} + 121991664b^{15} + 241185552b^{14} \\
& + 359573332b^{13} + 412417513b^{12} + 370649532b^{11} + 282347251b^{10} + 237730992b^9 + 282347251b^8 \\
& + 370649532b^7 + 412417513b^6 + 359573332b^5 + 241185552b^4 + 121991664b^3 + 44620912b^2 \\
& + 10816512b + 1344512)(b^2 + 1)^3).
\end{aligned}$$

Apêndice B

Fatores das decomposição de S_k para $k=7, 8, 9, 10$

Apresentamos neste apêndice as expressões exatas para os fatores que compoem fatoraço em classe $S_k = C_k^2 D_k N_k$ mostrada no capítulo 2.

Período 7

$$S_7 = C_7^2 D_7$$

$$\begin{aligned} C_7 &= \sigma^2 - 2\sigma - a, \\ D_7 &= \sigma^{14} + 2\sigma^{13} - (55a + 76)\sigma^{12} + 4(13a - 6)\sigma^{11} \\ &\quad + (1077a^2 + 2972a + 1936)\sigma^{10} \\ &\quad - 2(1425a^2 + 2672a + 1072)\sigma^9 \\ &\quad - (9715a^3 + 37336a^2 + 41840a + 15408)\sigma^8 \\ &\quad + 8(4427a^3 + 13262a^2 + 10088a + 5416)\sigma^7 \\ &\quad + (41443a^4 + 184632a^3 + 361296a^2 \\ &\quad + 95808a + 36176)\sigma^6 - 2(81713a^4 + 398992a^3 \\ &\quad + 336528a^2 + 217952a + 132976)\sigma^5 \\ &\quad - (76005a^5 + 251964a^4 + 1166832a^3 \\ &\quad + 323680a^2 + 61936a - 287040)\sigma^4 \\ &\quad + 4(57933a^5 + 619706a^4 + 291712a^3 \\ &\quad + 689936a^2 + 89392a + 103392)\sigma^3 \\ &\quad + (61479a^6 - 554004a^5 + 1780192a^4 \\ &\quad + 97408a^3 + 372976a^2 + 100928a - 839040)\sigma^2 \\ &\quad - 2(50463a^6 + 153504a^5 + 1256928a^4 \\ &\quad + 2099616a^3 + 1015280a^2 + 643072a - 61568)\sigma \\ &\quad + 7749072a^4 + 655776a^6 - 5014368a^5 \\ &\quad - 18225a^7 + 4861824a^2 - 1684608a \\ &\quad + 908416 - 2999376a^3. \end{aligned}$$

Período 8

$$S_8 = C_8^2 D_8 N_8$$

$$\begin{aligned} C_8 &= \sigma^6 - 4\sigma^5 - 4(2a + 1)\sigma^4 + 16(2a + 1)\sigma^3 + 16a(a + 1)\sigma^2 - 64a(a + 1)\sigma - 16, \\ D_8 &= \sigma^6 + 8\sigma^5 - 16(2a + 1)\sigma^4 - 128(a + 1)\sigma^3 + 256a(a + 2)\sigma^2 + 2048a\sigma - 4096a^2 - 1024, \\ N_8 &= \sigma^{12} - 32(2a + 3)\sigma^{10} + 256(a + 1)\sigma^9 + 32(39a^2 + 89a + 81)\sigma^8 - 768(8a^2 + 24a + 15)\sigma^7 \\ &\quad - 32(296a^3 + 524a^2 + 204a + 451)\sigma^6 + 512(72a^3 + 376a^2 + 507a + 288)\sigma^5 \\ &\quad + 256(121a^4 - 298a^3 - 1737a^2 - 1997a - 951)\sigma^4 - 512(128a^4 - 576a^3 - 224a^2 + 464a + 39)\sigma^3 \\ &\quad - 512(72a^5 - 812a^4 + 2808a^3 - 2385a^2 - 1763a - 1935)\sigma^2 \\ &\quad + (-8192a^3 + 245760a^2 - 780288a - 1400832)\sigma \\ &\quad - 1869824a + 36864a^4 + 1229056 - 434176a^3 + 1570816a^2. \end{aligned}$$

Período 9

$$S_9 = C_9^2 D_9$$

$$\begin{aligned}
 C_9 = & \sigma^{14} - 10\sigma^{13} + (-31a + 10)\sigma^{12} + 4(71a + 56)\sigma^{11} + (357a^2 - 488a - 812)\sigma^{10} \\
 & - 2(1467a^2 + 1588a + 372)\sigma^9 - (1867a^3 - 5842a^2 - 14468a - 7352)\sigma^8 \\
 & + 8(1649a^3 + 1468a^2 - 1388a - 656)\sigma^7 + (4483a^4 - 25344a^3 - 55080a^2 - 44736a - 19792)\sigma^6 \\
 & - 2(12331a^4 + 9720a^3 - 26840a^2 - 45472a - 14864)\sigma^5 \\
 & - (5373a^5 - 49806a^4 - 96152a^3 + 2352a^2 - 1328a + 32480)\sigma^4 \\
 & + 4(5031a^5 - 8480a^4 - 7656a^3 - 17600a^2 - 16144a + 22784)\sigma^3 \\
 & + (3159a^6 - 44568a^5 - 40940a^4 + 43392a^3 + 140240a^2 - 76288a - 97408)\sigma^2 \\
 & - 2(2997a^6 - 22284a^5 - 58908a^4 + 157856a^3 - 43984a^2 - 24768a - 17408)\sigma \\
 & - 87516a^5 + 14742a^6 - 4736 - 729a^7 - 76704a^2 + 6144a + 132024a^4 - 13360a^3, \\
 D_9 = & \sigma^{28} + 20\sigma^{27} - 2(91a + 43)\sigma^{26} - 4(677a + 893)\sigma^{25} + (13987a^2 + 24186a - 2332)\sigma^{24} \\
 & + 8(18075a^2 + 57298a + 33436)\sigma^{23} - 4(149223a^3 + 537713a^2 + 300760a - 133622)\sigma^{22} \\
 & - 8(468399a^3 + 2770105a^2 + 4027848a + 1375046)\sigma^{21} \\
 & + (15610137a^4 + 92563980a^3 + 141739112a^2 + 27075736a - 25305680)\sigma^{20} \\
 & + 4(10437351a^4 + 121511332a^3 + 346572360a^2 + 304237592a + 69303520)\sigma^{19} \\
 & - 2(130203141a^5 + 1105081857a^4 + 3021435376a^3 + 2624839548a^2 + 182421024a - 295407312)\sigma^{18} \\
 & + 4(28845441a^5 - 931244987a^4 - 6276535056a^3 - 11202796012a^2 - 6847234864a - 1094931536)\sigma^{17} \\
 & + (2801756307a^6 + 30643232190a^5 + 126631867036a^4 + 209873608072a^3 \\
 & + 127375774480a^2 + 5966025376a - 7527891136)\sigma^{16} \\
 & - 16(526274247a^6 + 2138761118a^5 - 7581438444a^4 - 38464116520a^3 \\
 & - 51543462720a^2 - 23326157600a - 2582837152)\sigma^{15} \\
 & - 8(2414113329a^7 + 30787986099a^6 + 175393233976a^5 + 449740452258a^4 + 544986821248a^3 \\
 & + 256157706768a^2 + 14278061632a - 6122376368)\sigma^{14} \\
 & + 16(5919718755a^7 + 54625630249a^6 + 116087423064a^5 - 43874530790a^4 - 471103552912a^3 \\
 & - 543253601424a^2 - 181542266976a - 12110896112)\sigma^{13} \\
 & + (83754045147a^8 + 1100118792456a^7 + 8175034241968a^6 + 29222588980592a^5 + 56083750153184a^4 \\
 & + 54563905824128a^3 + 20342931677440a^2 + 1213748546944a - 100794693632)\sigma^{12} \\
 & - 4(125037943677a^8 + 1677469813976a^7 + 6763107442416a^6 + 12294647390704a^5 + 7083682030656a^4 \\
 & - 10034870897792a^3 - 12136807967872a^2 - 2606394099840a - 29881455872)\sigma^{11} \\
 & - 2(112354614581a^9 + 1204595739453a^8 + 11282947345888a^7 + 56006171017656a^6 + 147851161685056a^5 \\
 & + 238620184431648a^4 + 194375004415744a^3 + 53668089647168a^2 + 2372672378112a + 178142396928)\sigma^{10} \\
 & + 4(340535830189a^9 + 5921945392189a^8 + 34616150858208a^7 + 96957797630792a^6 + 158206625245408a^5 \\
 & + 130604350146720a^4 - 3396405005696a^3 - 27414008582208a^2 - 213765820416a + 365892820480)\sigma^9 \\
 & + (376787501921a^{10} + 1333693095638a^9 + 17977134963676a^8 + 153755501832848a^7 + 644570132978464a^6 \\
 & + 1290941501460416a^5 + 2032447835233664a^4 + 1384032951181184a^3 + 198056801808896a^2 \\
 & + 610017270784a + 404214786048)\sigma^8 \\
 & - 8(257024236733a^{10} + 4198577797590a^9 + 40956458448948a^8 + 169498096214832a^7 + 319583801779456a^6 \\
 & + 477115092223808a^5 + 406971800591936a^4 + 59119718489216a^3 + 7406503333120a^2 \\
 & + 6734472810496a - 35598908416)\sigma^7 \\
 & - 4(98997216775a^{11} - 958569332775a^{10} + 2465074064056a^9 - 93486097527982a^8 - 3531767845248a^7 \\
 & + 262722111721760a^6 + 219376027368320a^5 + 934890590952416a^4 + 418517336817920a^3 \\
 & - 46298326081536a^2 - 2141489410048a - 2124196081664)\sigma^6 \\
 & + 8(218595291225a^{11} + 1679277104215a^{10} + 36289378515224a^9 + 220613933714002a^8 \\
 & + 767763718380768a^7 + 774615105130336a^6 + 1303540338486208a^5 + 971633197687776a^4 \\
 & + 103501761723904a^3 + 57357176744960a^2 - 8626344180736a + 1065291139072)\sigma^5 \\
 & + (253849156875a^{12} - 7524969279700a^{11} + 58058394452840a^{10} - 615229805353608a^9 \\
 & - 4596028092973712a^8 - 2702246933408384a^7 - 1840405737728768a^6 - 7225244284970880a^5 \\
 & + 2168537159072768a^4 - 1688672519929856a^3 - 72055862784000a^2 - 127781869961216a \\
 & + 11052483809280)\sigma^4 \\
 & - 4(196842639375a^{12} - 1929206565300a^{11} + 35589694391256a^{10} + 74247974842472a^9 \\
 & + 249664319808416a^8 + 2805511931599488a^7 - 159627027997056a^6 + 3361152928731008a^5 \\
 & + 609533608637184a^4 + 295015094151168a^3 - 165750093305856a^2 \\
 & + 24634230702080a - 1452510793728)\sigma^3 \\
 & - 2(45444796875a^{13} - 2577774695625a^{12} + 42901612055600a^{11} - 179654069811828a^{10} \\
 & - 911988595276128a^9 - 8165957062526928a^8 + 1444864410761472a^7 - 5714722150688064a^6 \\
 & - 2266625804781312a^5 - 2566580874158592a^4 + 147183057432576a^3 - 285846173483008a^2 \\
 & - 24883834073088a - 23435500867584)\sigma^2 \\
 & + 4(36590484375a^{13} - 1344213073125a^{12} + 16582073348400a^{11} + 166683456405540a^{10} \\
 & - 2059133176570160a^9 - 507540336619728a^8 - 986297090381952a^7 + 931154111326272a^6 \\
 & - 1103984460432384a^5 + 358602230874624a^4 - 473679173068800a^3 + 12857015193600a^2 \\
 & - 83728234401792a - 10382411141120)\sigma \\
 & + 1111447502301696a^6 + 1232032155312800a^9 - 2270653645888512a^5 + 1313168387722560a^8 \\
 & - 1501273513829760a^7 + 524146334896128a^2 - 349974336917400a^{11} + 35301267742500a^{12} \\
 & + 964467075451600a^{10} - 475049074262016a^3 - 1271697468750a^{13} + 13953515625a^{14}
 \end{aligned}$$

$$+69341499342848 + 1308396521072640 a^4 + 68117810028544 a.$$

Período 10

$$S_{10} = C_{10}^2 D_{10} N_{10}$$

$$\begin{aligned}
 C_{10} = & \sigma^{30} - 12\sigma^{29} - 4(22a + 15)\sigma^{28} + 128(9a + 10)\sigma^{27} + 16(207a^2 + 158a - 72)\sigma^{26} \\
 & - 64(723a^2 + 1474a + 800)\sigma^{25} - 32(2184a^3 + 178a^2 - 7104a - 5475)\sigma^{24} \\
 & + 128(7968a^3 + 21952a^2 + 20554a + 7057)\sigma^{23} \\
 & + 32(28536a^4 - 43744a^3 - 314928a^2 - 409440a - 174517)\sigma^{22} \\
 & - 128(106440a^4 + 346016a^3 + 398128a^2 + 184992a + 32961)\sigma^{21} \\
 & - 128(60336a^5 - 254456a^4 - 1574528a^3 - 2691000a^2 - 2063268a - 656613)\sigma^{20} \\
 & + 512(225408a^5 + 798400a^4 + 922112a^3 + 180272a^2 - 363889a - 168580)\sigma^{19} \\
 & + 128(335904a^6 - 2709568a^5 - 17160576a^4 - 35458496a^3 - 35819336a^2 - 19289624a - 5144461)\sigma^{18} \\
 & - 512(1234464a^6 + 4569152a^5 + 4036544a^4 - 5120224a^3 - 12946516a^2 - 10311996a - 2917443)\sigma^{17} \\
 & - 512(305664a^7 - 4057376a^6 - 27528960a^5 - 65972016a^4 - 80555136a^3 \\
 & - 53565392a^2 - 20203237a - 5050151)\sigma^{16} \\
 & + 8192(272064a^7 + 1073728a^6 + 444632a^5 - 4325268a^4 - 9733103a^3 \\
 & - 9543608a^2 - 5295595a - 1306311)\sigma^{15} \\
 & + 256(1400832a^8 - 28590080a^7 - 220149248a^6 - 602300928a^5 - 821599008a^4 - 614756928a^3 \\
 & - 216441240a^2 - 1860992a - 6053631)\sigma^{14} \\
 & - 1024(4767744a^8 + 23123968a^7 + 1154048a^6 - 179319040a^5 - 458155008a^4 - 561272416a^3 \\
 & - 379690296a^2 - 162746336a - 37452061)\sigma^{13} \\
 & - 1024(458752a^9 - 14393344a^8 - 144599040a^7 - 460679680a^6 - 675302528a^5 - 438641120a^4 \\
 & - 39729112a^3 + 160690920a^2 + 140818666a + 14153429)\sigma^{12} \\
 & + 8192(737280a^9 + 6012928a^8 + 471040a^7 - 67155968a^6 - 183917248a^5 - 249810592a^4 \\
 & - 225788248a^3 - 112166496a^2 - 37038731a - 11479803)\sigma^{11} \\
 & + 2048(131072a^{10} - 7340032a^9 - 128188416a^8 - 484679680a^7 - 732406272a^6 - 472760832a^5 \\
 & + 251227648a^4 + 712940256a^3 + 482138786a^2 + 219698160a + 29962407)\sigma^{10} \\
 & - 8192(393216a^{10} + 8847360a^9 + 5570560a^8 - 117153792a^7 - 374482432a^6 - 548337920a^5 \\
 & - 433128320a^4 - 294932288a^3 - 104196818a^2 - 40953452a - 21481587)\sigma^9 \\
 & + 8192(655360a^{10} + 34930688a^9 + 177143808a^8 + 310415360a^7 + 81688064a^6 - 171585536a^5 \\
 & - 342216704a^4 - 443569040a^3 - 157098574a^2 - 89467309a - 21350596)\sigma^8 \\
 & + 32768(1572864a^{10} + 6094848a^9 - 32112640a^8 - 137637888a^7 - 145354752a^6 - 151675648a^5 \\
 & - 48484224a^4 - 21987552a^3 - 26098544a^2 - 11225409a - 4890503)\sigma^7 \\
 & - 4096(31457280a^{10} + 390070272a^9 + 660144128a^8 + 114884608a^7 - 842440704a^6 - 880279552a^5 \\
 & - 303834368a^4 - 665453056a^3 - 314665728a^2 - 259189488a - 57002217)\sigma^6 \\
 & - 16384(18874368a^{10} - 45613056a^9 - 210829312a^8 - 381714432a^7 + 144130048a^6 - 156710912a^5 \\
 & + 8978688a^4 - 71012608a^3 - 12142336a^2 - 897016a - 695773)\sigma^5 \\
 & + 16384(52428800a^{10} + 180355072a^9 - 68091904a^8 - 286359552a^7 + 34988032a^6 - 125974528a^5 \\
 & + 149008128a^4 - 186574720a^3 - 9078848a^2 - 46323456a - 4021569)\sigma^4 \\
 & + 131072(6291456a^{10} - 36175872a^9 + 11468800a^8 - 21889024a^7 + 51732480a^6 - 40345600a^5 \\
 & + 5040384a^4 - 433152a^3 + 253216a^2 + 720260a - 156897)\sigma^3 \\
 & - 65536(36700160a^{10} - 29360128a^9 - 36896768a^8 - 13238272a^7 + 98189312a^6 - 104910848a^5 \\
 & + 63759104a^4 - 26714880a^3 + 11679888a^2 - 4872208a + 60481)\sigma^2 \\
 & - 262144(3145728a^{10} - 25165824a^9 + 48431104a^8 - 41549824a^7 + 16637952a^6 - 3215360a^5 \\
 & + 3835136a^4 - 2656000a^3 + 255440a^2 - 303368a + 3051)\sigma \\
 & + 2820669440a - 8658654068736a^9 + 12317966204928a^8 + 2473901162496a^{10} + 1399823794176a^4 \\
 & + 4110283702272a^6 - 9148280340480a^7 - 213775286272a^3 + 43432017920a^2 \\
 & - 1953136377856a^5 - 33292288, \\
 D_{10} = & \sigma^{12} + 24\sigma^{11} - 8(11a - 18)\sigma^{10} - 32(47a + 10)\sigma^9 + 16(159a^2 - 296a - 240)\sigma^8 \\
 & + 256(111a^2 + 104a + 16)\sigma^7 - 256(109a^3 - 110a^2 - 304a - 172)\sigma^6 \\
 & - 1024(207a^3 + 282a^2 + 304a + 64)\sigma^5 + 256(559a^4 - 928a^3 + 208a^2 - 656a - 1296)\sigma^4 \\
 & + 2048(335a^4 + 288a^3 + 400a^2 + 1152a + 96)\sigma^3 \\
 & - 2048(171a^5 - 770a^4 - 368a^3 + 1688a^2 + 336a - 800)\sigma^2 \\
 & - 8192(99a^4 - 78a^3 + 336a^2 - 160a + 736)a\sigma \\
 & + 331776a^6 - 3244032a^5 + 4718592a^4 - 1769472a^3 + 4915200a^2 + 262144, \\
 N_{10} = & \sigma^{27} + 2\sigma^{26} - 12(18a + 25)\sigma^{25} + 8(70a + 57)\sigma^{24} + 16(1215a^2 + 3194a + 2211)\sigma^{23} \\
 & - 32(3629a^2 + 8542a + 4857)\sigma^{22} - 64(15060a^3 + 52617a^2 + 65386a + 29002)\sigma^{21} \\
 & + 128(63076a^3 + 229235a^2 + 274210a + 110874)\sigma^{20} \\
 & + 32(914040a^4 + 3468128a^3 + 4973960a^2 + 3314792a + 897987)\sigma^{19} \\
 & - 64(4541512a^4 + 21150240a^3 + 36599704a^2 + 28666232a + 8589581)\sigma^{18} \\
 & - 128(4451760a^5 + 15122408a^4 + 12738016a^3 - 10620760a^2 - 20762996a - 7516387)\sigma^{17} \\
 & + 256(23922608a^5 + 129416440a^4 + 274722848a^3 + 284011864a^2 + 149520064a + 33591447)\sigma^{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+128(56677920 a^6 + 126414144 a^5 - 302036064 a^4 - 1446332864 a^3 - 2072135720 a^2 \\
&-1345541928 a - 311511913)\sigma^{15} \\
&-256(307501408 a^6 + 1846147520 a^5 + 4357062624 a^4 + 4820736064 a^3 + 2375698424 a^2 \\
&+410110376 a + 53846065)\sigma^{14} \\
&-512(117550080 a^7 + 35645920 a^6 - 2691828160 a^5 - 9403549824 a^4 - 14068454784 a^3 \\
&-11175519536 a^2 - 4776789485 a - 870804090)\sigma^{13} \\
&+1024(602611712 a^7 + 4015805088 a^6 + 8768934464 a^5 + 7748931712 a^4 - 1743946960 a^3 \\
&-8132437264 a^2 - 4849992837 a - 656754916)\sigma^{12} \\
&+256(1244160000 a^8 - 2765197312 a^7 - 73232437504 a^6 - 233389412096 a^5 - 358695382560 a^4 \\
&-289918671040 a^3 - 116991282584 a^2 - 32438983792 a - 8473578135)\sigma^{11} \\
&-512(5576597504 a^8 + 43175366656 a^7 + 39964628224 a^6 - 70135603456 a^5 - 288245955168 a^4 \\
&-367823187776 a^3 - 241976487816 a^2 - 90692398064 a - 13287729321)\sigma^{10} \\
&-1024(1004339200 a^9 - 4819869696 a^8 - 132068939776 a^7 - 383912667904 a^6 - 524297534080 a^5 \\
&-330830109728 a^4 - 37889561240 a^3 + 101619404944 a^2 + 31541256034 a - 2083479821)\sigma^9 \\
&+2048(3554082816 a^9 + 35961331712 a^8 - 98216138752 a^7 - 463283091712 a^6 - 721050934400 a^5 \\
&-679645574240 a^4 - 419635490232 a^3 - 132018999680 a^2 - 75149876662 a - 10196254743)\sigma^8 \\
&+2048(897712128 a^{10} - 5046403072 a^9 - 257281769472 a^8 - 546800451584 a^7 - 245234695168 a^6 \\
&+308308857856 a^5 + 627097065152 a^4 + 640384574496 a^3 + 395159168498 a^2 \\
&+155467872956 a - 8754200331)\sigma^7 \\
&-4096(2117468160 a^{10} + 41433563136 a^9 - 399634448384 a^8 - 1340859793408 a^7 - 1347533784064 a^6 \\
&-394465291264 a^5 - 205098866368 a^4 + 165275954784 a^3 + 234710495334 a^2 \\
&-11646239404 a - 28119757541)\sigma^6 \\
&-8192(169869312 a^{11} + 763232256 a^{10} - 141628342272 a^9 + 168644001792 a^8 + 969765527552 a^7 \\
&+1140006382592 a^6 - 40389234432 a^5 + 432510410560 a^4 - 152108183936 a^3 + 15320592302 a^2 \\
&+76087874141 a + 18663321850)\sigma^5 \\
&+16384(169869312 a^{11} + 16483221504 a^{10} - 243482296320 a^9 - 544971374592 a^8 + 178259877888 a^7 \\
&+545166033920 a^6 - 30093091584 a^5 + 627026480832 a^4 - 225854675648 a^3 + 255536249418 a^2 \\
&+4204597889 a + 19378489776)\sigma^4 \\
&+4096(8153726976 a^{11} - 378629259264 a^{10} + 2658134917120 a^9 + 7892211400704 a^8 - 2393515753472 a^7 \\
&-2094658617344 a^6 - 5124662554624 a^5 - 4639066140928 a^4 - 113526021888 a^3 - 2059627773936 a^2 \\
&+200036010800 a - 166596103167)\sigma^3 \\
&-8192(19025362944 a^{11} - 510391222272 a^{10} + 2836078264320 a^9 + 4547302064128 a^8 - 4019512147968 a^7 \\
&-1190248841216 a^6 - 6027134611456 a^5 - 1177090467584 a^4 - 1848101213440 a^3 - 513290188496 a^2 \\
&-65610807760 a - 58221305505)\sigma^2 \\
&+16384(14948499456 a^{11} - 330461872128 a^{10} + 1785163415552 a^9 + 203631820800 a^8 - 1285055807488 a^7 \\
&-1300581842944 a^6 - 1816461459456 a^5 - 36213016320 a^4 - 794592074624 a^3 - 26268426544 a^2 \\
&-49337275144 a - 15023547645)\sigma \\
&+10566002949488640 a^4 + 24536408353931264 a^6 + 560034917220352 - 9305228377587712 a^5 \\
&+2709849485869056 a^{10} - 1133703986937856 a - 133590662774784 a^{11} - 7538403117629440 a^7 \\
&-5378512219275264 a^3 + 4143235153264640 a^2 + 14364842391502848 a^8 - 15117339989114880 a^9.
\end{aligned}$$

Apêndice C

Amalgamamentos para k=7, 8, 9 e 10

Apresentamos aqui as expressões gerais exatas para os fatores que compoem os amalgamamentos, para os períodos 7 até 10, bem como seus ordenamentos orbitais correspondentes. Obtivemos todas as amalgamações para períodos até 20 contudo não as apresentamos aqui por serem extremamente extensas.

Período 7

$$A_7(x) = \prod_{i=1}^7 P_7(a, x; \sigma_i) = X(x) Y^2(x) Z^2(x) U^2(x)$$

$$\begin{aligned}
 X &= x^{14} - 2x^{13} - (7a - 4)x^{12} + 4(3a + 2)x^{11} + (21a^2 - 36a - 16)x^{10} - 2(3a + 4)(5a - 4)x^9 \\
 &\quad - (35a^3 - 120a^2 - 16a - 16)x^8 + 8(5a^3 - 2a^2 - 24a - 4)x^7 + (35a^4 - 200a^3 + 144a^2 + 64a + 48)x^6 \\
 &\quad - 2(15a^4 - 32a^3 - 144a^2 + 80a - 16)x^5 - (21a^5 - 180a^4 + 368a^3 - 32a^2 + 208a + 64)x^4 \\
 &\quad + 4a(3a^4 - 14a^3 - 32a^2 + 136a + 16)x^3 + a(a - 4)(7a^4 - 56a^3 + 96a^2 + 16)x^2 \\
 &\quad - 2a(a - 2)(a - 4)(a^3 - 2a^2 - 20a + 8)x + 16a^6 - 128 - 96a^5 - a^7 + 128a^2 + 256a + 272a^4 - 368a^3 \\
 Y &= x^{14} - 2x^{13} - 7ax^{12} + 4(3a + 2)x^{11} + (21a^2 - 4a - 10)x^{10} - 2(15a^2 + 16a + 2)x^9 \\
 &\quad - (35a^3 - 20a^2 - 42a - 16)x^8 + 2(20a^3 + 24a^2 - 3)x^7 + (35a^4 - 40a^3 - 68a^2 - 36a - 9)x^6 \\
 &\quad - 2(15a^4 + 16a^3 - 12a^2 - 13a - 3)x^5 - a(21a^4 - 40a^3 - 52a^2 - 12a - 7)x^4 \\
 &\quad + 2(6a^5 + 4a^4 - 16a^3 - 17a^2 - 6a + 1)x^3 + a(7a^5 - 20a^4 - 18a^3 + 20a^2 + 13a + 4)x^2 \\
 &\quad - 2(a + 1)(a^5 - a^4 - 5a^3 - 2a^2 - a + 2)x + 4a^6 - a^7 + 3 - 11a^3 - 4a^2 + 2a^5 - 12a^4 \\
 Z &= x^{14} + 6x^{13} - (7a - 16)x^{12} - 4(9a - 7)x^{11} + (21a^2 - 84a + 38)x^{10} + 2(45a^2 - 66a + 20)x^9 \\
 &\quad - (35a^3 - 180a^2 + 158a - 32)x^8 - 2(60a^3 - 124a^2 + 72a - 9)x^7 + (35a^4 - 200a^3 + 252a^2 - 100a + 5)x^6 \\
 &\quad + 2(45a^4 - 116a^3 + 96a^2 - 23a - 1)x^5 - (21a^5 - 120a^4 + 188a^3 - 108a^2 + 11a + 4)x^4 \\
 &\quad - 2(a - 1)(18a^4 - 36a^3 + 20a^2 + a - 1)x^3 + (7a^6 - 36a^5 + 62a^4 - 44a^3 + 7a^2 + 4a - 2)x^2 \\
 &\quad + 2a(3a^3 - 4a^2 + a + 1)(a - 1)^2x + 4a^6 - a^7 - 1 - a^3 + 2a - 6a^5 + 4a^4 \\
 U &= x^{14} - 2x^{13} - (7a - 4)x^{12} + 4(3a + 1)x^{11} + (21a^2 - 28a - 10)x^{10} - 2(15a^2 + 6a - 10)x^9 \\
 &\quad - (35a^3 - 80a^2 - 26a + 4)x^8 + 2(20a^3 + 4a^2 - 40a - 1)x^7 + (35a^4 - 120a^3 - 4a^2 + 20a + 5)x^6 \\
 &\quad - 2(15a^4 - 4a^3 - 60a^2 + a - 3)x^5 - a(21a^4 - 100a^3 + 44a^2 + 36a + 3)x^4 \\
 &\quad + 2(6a^5 - 6a^4 - 40a^3 + 5a^2 - 6a + 3)x^3 + (7a^6 - 44a^5 + 46a^4 + 28a^3 - 9a^2 - 4a + 4)x^2 \\
 &\quad - 2a(a^5 - 2a^4 - 10a^3 + 3a^2 - 3a + 3)x + 8a^6 + 1 - 14a^5 - a^7 + 4a^2 - 4a - 8a^4 + 7a^3
 \end{aligned}$$

$$O_D^7 = \begin{pmatrix} z & y & u & x & u & y & z \\ z & z & y & u & x & u & y \end{pmatrix}$$

Período 8

Para a classe N: $A_8 = XY^2Z^2$

$$\begin{aligned}
 X &= x^{24} - 12ax^{22} + 24x^{21} + 6a(11a - 4)x^{20} - 240ax^{19} - 4(55a^3 - 60a^2 - 56)x^{18} + 120a(9a - 4)x^{17} \\
 &\quad + 3a(165a^3 - 360a^2 + 80a - 608)x^{16} - 64(45a^3 - 60a^2 - 16)x^{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8a(99a^4 - 360a^3 + 240a^2 - 816a + 448)x^{14} + 16a(315a^3 - 840a^2 + 240a - 416)x^{13} \\
 & + 4(231a^6 - 1260a^5 + 1680a^4 - 3680a^3 + 5504a^2 + 576)x^{12} \\
 & - 96a(63a^4 - 280a^3 + 240a^2 - 192a + 128)x^{11} \\
 & - 8a(99a^6 - 756a^5 + 1680a^4 - 3144a^3 + 7104a^2 - 2688a + 1472)x^{10} \\
 & + 16(315a^6 - 2100a^5 + 3600a^4 - 2720a^3 + 3456a^2 + 96)x^9 \\
 & + a(495a^7 - 5040a^6 + 16800a^5 - 33984a^4 + 83200a^3 - 89088a^2 + 24320a - 18432)x^8 \\
 & - 64a(45a^6 - 420a^5 + 1200a^4 - 1360a^3 + 1536a^2 - 768a + 96)x^7 \\
 & - 4(55a^9 - 720a^8 + 3360a^7 - 8416a^6 + 19840a^5 - 35328a^4 + 20736a^3 - 14336a^2 + 1024)x^6 \\
 & + 8a(135a^7 - 1680a^6 + 7200a^5 - 13248a^4 + 14592a^3 - 15360a^2 + 1152a - 512)x^5 \\
 & + 2a(33a^9 - 540a^8 + 3360a^7 - 10944a^6 + 26112a^5 - 55296a^4 + 68480a^3 - 30720a^2 + 18432a + 4096)x^4 \\
 & - 16(15a^9 - 240a^8 + 1440a^7 - 4096a^6 + 6144a^5 - 6144a^4 + 4480a^3 - 512a^2 + 512)x^3 \\
 & - 4a(a-4)(3a^9 - 48a^8 + 288a^7 - 888a^6 + 1952a^5 - 3712a^4 + 4480a^3 - 2560a^2 + 1024)x^2 \\
 & + 8a(3a^6 - 36a^5 + 144a^4 - 208a^3 + 64a^2 - 64)(a^3 - 8a^2 + 16a - 16)x \\
 & - 9216a^7 + 240a^{10} + 4096a^4 - 24a^{11} - 8192 - 10240a^5 + 4352a^8 - 1312a^9 + 12544a^6 + a^{12} \\
 Y = & x^{24} - 12ax^{22} + 16x^{21} + 6a(11a-2)x^{20} - 160ax^{19} - 4(55a^3 - 30a^2 - 22)x^{18} + 16a(45a-8)x^{17} \\
 & + a(495a^3 - 540a^2 + 48a - 704)x^{16} - 64(30a^3 - 16a^2 - 3)x^{15} \\
 & - 8a(99a^4 - 180a^3 + 48a^2 - 308a + 46)x^{14} + 32a(105a^3 - 112a^2 + 8a - 35)x^{13} \\
 & + 4(231a^6 - 630a^5 + 336a^4 - 1248a^3 + 548a^2 + 43)x^{12} - 16a(252a^4 - 448a^3 + 96a^2 - 168a + 13)x^{11} \\
 & - 8a(99a^6 - 378a^5 + 336a^4 - 818a^3 + 678a^2 - 8a + 73)x^{10} \\
 & + 8(420a^6 - 1120a^5 + 480a^4 - 420a^3 + 82a^2 + 31)x^9 \\
 & + a(495a^7 - 2520a^6 + 3360a^5 - 5888a^4 + 7120a^3 - 192a^2 + 612a - 244)x^8 \\
 & - 32a(60a^6 - 224a^5 + 160a^4 - 70a^3 + 17a^2 - 2a + 23)x^7 \\
 & - 4(55a^9 - 360a^8 + 672a^7 - 936a^6 + 1300a^5 - 32a^4 + 12a^3 - 180a^2 - 4)x^6 \\
 & + 16a(45a^7 - 224a^6 + 240a^5 - 42a^4 - 14a^3 - 12a^2 + 53a - 3)x^5 \\
 & + 2a(33a^9 - 270a^8 + 672a^7 - 832a^6 + 984a^5 + 64a^4 - 134a^3 - 380a^2 + 8a + 48)x^4 \\
 & - 16a^2(10a^7 - 64a^6 + 96a^5 - 31a^3 - 12a^2 + 30a - 2)x^3 \\
 & - 4a^2(3a^9 - 30a^8 + 96a^7 - 118a^6 + 68a^5 + 48a^4 - 30a^3 - 84a^2 + 8a + 28)x^2 \\
 & + 8a(2a^9 - 16a^8 + 32a^7 + 4a^6 - 22a^5 - 8a^4 + 15a^3 + 2a^2 + 4)x \\
 & - 4a^6 + 48a^{10} - 12a^{11} + 4 - 52a^5 + 64a^7 - 16a^8 - 64a^9 - 16a^2 + 16a^4 + a^{12} \\
 Z = & x^{12} - 6ax^{10} + 4x^9 + a(15a-4)x^8 - 16ax^7 - 4a^2(5a-4)x^6 + 24a^2x^5 + a(15a^3 - 24a^2 + 4)x^4 \\
 & - 16a^3x^3 - 2a^2(3a^3 - 8a^2 + 4)x^2 + 4a^4x + 4a^3 - 4 + a^6 - 4a^5
 \end{aligned}$$

Ordenamento: (Onde índices diferentes de uma mesma variável denotam diferentes raízes de um mesmo polinômio)

$$O_N^8 = \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & y_j & x_j & y_j & z_i & y_i \\ y_i & x_i & y_i & z_i & y_j & x_j & y_j & z_i \end{pmatrix}$$

Para a classe D: $A_8 = U^2V^2$

$$\begin{aligned}
 U = & x^{12} + 6x^{11} - 2(3a-8)x^{10} - 2(15a-14)x^9 + (15a^2 - 68a + 38)x^8 + 4(15a^2 - 26a + 10)x^7 \\
 & - 4(5a^3 - 28a^2 + 30a - 8)x^6 - 2(30a^3 - 72a^2 + 52a - 9)x^5 + (15a^4 - 88a^3 + 132a^2 - 68a + 4)x^4 \\
 & + 2(15a^4 - 44a^3 + 44a^2 - 14a - 2)x^3 - 2(a-1)(3a^4 - 13a^3 + 15a^2 - 5a - 3)x^2 \\
 & - 2(a-1)(3a^4 - 7a^3 + 5a^2 - 2)x - 2 + a^6 - 4a^5 + 6a^4 - 4a^3 + 2a \\
 V = & x^{12} - 2x^{11} - 6ax^{10} + 2(5a+4)x^9 + (15a^2 - 4a - 12)x^8 - 4a(5a+6)x^7 - 4(a-2)(5a^2 + 6a + 2)x^6 \\
 & + 2(10a^3 + 12a^2 - 8a - 7)x^5 + (15a^4 - 24a^3 - 48a^2 - 20a - 4)x^4 - 2(5a^4 + 4a^3 - 16a^2 - 18a - 6)x^3 \\
 & - 2(a+1)(3a^4 - 11a^3 - a^2 + 5a + 1)x^2 + 2(a+1)(a^4 - a^3 - 7a^2 - 4a - 2)x \\
 & + 12a^3 + a^6 + 6a - 4a^4 + 2 + 16a^2 - 4a^5
 \end{aligned}$$

Ordenamento:

$$O_D^8 = \begin{pmatrix} u_i & v_i & v_j & u_j & u_j & v_j & v_i & u_i \\ u_i & u_i & v_i & v_j & u_j & u_j & v_j & v_i \end{pmatrix}$$

Período 9

Para a classe D: $A_9 = XY^2Z^2U^2V^2$

$$\begin{aligned}
 X = & x^{28} - 2(7a-1)x^{26} + 28x^{25} + (91a^2 - 54a + 4)x^{24} - 48(7a-1)x^{23} - 4(91a^3 - 123a^2 + 24a - 78)x^{22} \\
 & + 8(231a^2 - 150a + 10)x^{21} + (1001a^4 - 2420a^3 + 1128a^2 - 3240a + 432)x^{20} \\
 & - 16(385a^3 - 585a^2 + 110a - 108)x^{19} - 2(1001a^5 - 3795a^4 + 3440a^3 - 7860a^2 + 5088a - 272)x^{18} \\
 & + 4(3465a^4 - 9540a^3 + 4740a^2 - 3968a + 432)x^{17} \\
 & + (3003a^6 - 16434a^5 + 25020a^4 - 49400a^3 + 67344a^2 - 11360a + 4672)x^{16} \\
 & - 32(693a^5 - 3015a^4 + 3060a^3 - 2264a^2 + 1264a - 40)x^{15} \\
 & - 8(429a^7 - 3201a^6 + 7416a^5 - 14390a^4 + 28352a^3 - 14384a^2 + 4928a - 304)x^{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+16(1617a^6 - 10206a^5 + 17850a^4 - 15232a^3 + 14192a^2 - 1840a + 240)x^{13} \\
 &+ (3003a^8 - 29304a^7 + 96432a^6 - 206864a^5 + 475104a^4 - 492160a^3 + 181504a^2 - 70784a - 512)x^{12} \\
 &-32(693a^7 - 5985a^6 + 16170a^5 - 19124a^4 + 20016a^3 - 9480a^2 + 1072a + 64)x^{11} \\
 &-2(1001a^9 - 12375a^8 + 55008a^7 - 140840a^6 + 342720a^5 - 555872a^4 \\
 &+342784a^3 - 172992a^2 + 8960a + 4096)x^{10} \\
 &+4(3465a^8 - 39240a^7 + 152040a^6 - 261632a^5 + 299680a^4 - 262080a^3 + 48448a^2 - 4864a - 1536)x^9 \\
 &+(1001a^{10} - 15290a^9 + 88380a^8 - 279920a^7 + 716576a^6 - 1498688a^5 \\
 &+1589120a^4 - 845440a^3 + 302080a^2 + 38912a - 8192)x^8 \\
 &-16(385a^9 - 5535a^8 + 29160a^7 - 71792a^6 + 100768a^5 - 110320a^4 + 56384a^3 - 7936a^2 - 2560a + 1280)x^7 \\
 &-4(91a^{11} - 1683a^{10} + 12280a^9 - 48550a^8 + 135936a^7 - 320864a^6 + 506240a^5 \\
 &-388384a^4 + 209664a^3 + 5632a^2 - 22528a + 3072)x^6 \\
 &+8(231a^{10} - 4110a^9 + 28290a^8 - 96256a^7 + 180576a^6 - 224544a^5 + 200480a^4 \\
 &-42752a^3 - 4096a^2 + 11776a - 1024)x^5 \\
 &+(91a^{12} - 2004a^{11} + 18024a^{10} - 88520a^9 + 284016a^8 - 711296a^7 + 1399040a^6 - 1693056a^5 \\
 &+984576a^4 - 337920a^3 - 180224a^2 + 61440a - 12288)x^4 \\
 &-16(21a^{10} - 453a^9 + 3950a^8 - 17932a^7 + 46112a^6 - 71344a^5 \\
 &+73568a^4 - 48000a^3 + 3072a^2 + 9984a - 6144)ax^3 \\
 &-2(7a^{13} - 181a^{12} + 1968a^{11} - 11876a^{10} + 45152a^9 - 120848a^8 + 251136a^7 - 396608a^6 + 395008a^5 \\
 &-171008a^4 - 49152a^3 + 92160a^2 - 36864a - 4096)x^2 \\
 &+4(a^2 - 6a + 4)(7a^{10} - 138a^9 + 1084a^8 - 4336a^7 + 9376a^6 - 10688a^5 \\
 &+5056a^4 + 1664a^3 - 2560a^2 + 3584a + 1024)x \\
 &-28672a^2 + a^{14} - 2840a^{11} - 102272a^7 + 13008a^{10} + 40960a - 16384a^4 \\
 &+36864a^3 + 77888a^8 - 39008a^9 + 388a^{12} + 81920a^6 - 30a^{13} + 16384 - 28672a^5 \\
 Y = &x^{28} - 2x^{27} - (14a - 3)x^{26} + 2(13a + 9)x^{25} + (91a^2 - 51a - 35)x^{24} - 2(78a^2 + 96a - 23)x^{23} \\
 &- (364a^3 - 378a^2 - 352a - 123)x^{22} + 2(286a^3 + 462a^2 - 329a - 111)x^{21} \\
 &+ (1001a^4 - 1650a^3 - 1514a^2 - 941a + 227)x^{20} - 2(715a^4 + 1320a^3 - 1977a^2 - 842a - 209)x^{19} \\
 &- (2002a^5 - 4785a^4 - 3480a^3 - 3045a^2 + 2698a + 619)x^{18} \\
 &+ 2(1287a^5 + 2475a^4 - 6783a^3 - 2407a^2 - 1133a + 181)x^{17} \\
 &+ (3003a^6 - 9801a^5 - 3945a^4 - 5419a^3 + 12771a^2 + 3695a + 769)x^{16} \\
 &- 2(1716a^6 + 3168a^5 - 14982a^4 - 2328a^3 - 2260a^2 + 1852a + 331)x^{15} \\
 &- (3432a^7 - 14652a^6 + 480a^5 - 6062a^4 + 32984a^3 + 7900a^2 + 3436a + 1)x^{14} \\
 &+ 2(1716a^7 + 2772a^6 - 22554a^5 + 3682a^4 - 1716a^3 + 6920a^2 + 1801a + 354)x^{13} \\
 &+ (3003a^8 - 16236a^7 + 9156a^6 - 5698a^5 + 52262a^4 + 4668a^3 + 4888a^2 - 841a - 90)x^{12} \\
 &- 2(1287a^8 + 1584a^7 - 23730a^6 + 14308a^5 + 50a^4 + 12828a^3 + 3919a^2 + 1556a - 81)x^{11} \\
 &- (2002a^9 - 13365a^8 + 15792a^7 - 6986a^6 + 53340a^5 - 8966a^4 - 212a^3 - 3755a^2 + 144a - 78)x^{10} \\
 &+ 2(715a^9 + 495a^8 - 17502a^7 + 20538a^6 - 134a^5 + 12490a^4 + 4229a^3 + 2982a^2 - 441a - 63)x^9 \\
 &+(1001a^{10} - 8085a^9 + 15195a^8 - 8950a^7 + 35518a^6 - 19006a^5 \\
 &-7950a^4 - 6765a^3 + 1574a^2 + 322a + 140)x^8 \\
 &- 2(286a^{10} - 8883a^8 + 16808a^7 - 2148a^6 + 5396a^5 + 2161a^4 + 3448a^3 - 682a^2 - 124a - 41)x^7 \\
 &- (364a^{11} - 3498a^{10} + 9280a^9 - 8039a^8 + 15256a^7 - 14580a^6 - 9116a^5 \\
 &-6365a^4 + 2928a^3 + 1396a^2 + 536a + 16)x^6 \\
 &+ 2(78a^{11} - 66a^{10} - 2957a^9 + 8237a^8 - 2660a^7 - 448a^6 + 235a^5 + 2702a^4 - 210a^3 + 22a^2 - 39a - 2)x^5 \\
 &+(91a^{12} - 1026a^{11} + 3590a^{10} - 4417a^9 + 4119a^8 - 4660a^7 - 4464a^6 - 3419a^5 \\
 &+2130a^4 + 1476a^3 + 624a^2 + 32a + 21)x^4 \\
 &-2(13a^{12} - 24a^{11} - 581a^{10} + 2262a^9 - 1321a^8 - 1260a^7 - 203a^6 \\
 &+1332a^5 + 267a^4 + 164a^3 + 45a^2 - 5)x^3 \\
 &- (14a^{13} - 183a^{12} + 808a^{11} - 1345a^{10} + 682a^9 - 77a^8 - 892a^7 - 1081a^6 + 512a^5 \\
 &+442a^4 + 200a^3 + 16a^2 + 30a + 5)x^2 \\
 &+ 2(a^{12} - 3a^{11} - 51a^{10} + 269a^9 - 245a^8 - 327a^7 - 57a^6 + 298a^5 + 155a^4 + 81a^3 + 43a^2 + 2a - 5)ax \\
 &-175a^{11} + 5a + 9a^2 + 81a^{12} - 28a^4 - 30a^6 - 175a^7 + 63a^{10} + a^{14} - 27a^8 + 199a^9 - 15a^{13} + 1 - 38a^5 \\
 Z = &x^{28} - 2x^{27} - (14a - 3)x^{26} + 2(13a + 5)x^{25} + (91a^2 - 51a - 23)x^{24} - 6(26a^2 + 16a - 5)x^{23} \\
 &- (364a^3 - 378a^2 - 224a - 27)x^{22} + 2(286a^3 + 198a^2 - 209a - 43)x^{21} \\
 &+ (1001a^4 - 1650a^3 - 898a^2 - 61a + 91)x^{20} - 2(715a^4 + 440a^3 - 1217a^2 - 290a - 5)x^{19} \\
 &- (2002a^5 - 4785a^4 - 1720a^3 + 603a^2 + 970a + 111)x^{18} \\
 &+ 2(1287a^5 + 495a^4 - 4023a^3 - 563a^2 + 223a + 43)x^{17} \\
 &+ (3003a^6 - 9801a^5 - 645a^4 + 3653a^3 + 3915a^2 + 459a - 19)x^{16} \\
 &- 2(1716a^6 - 8502a^4 + 712a^3 + 1628a^2 + 332a + 13)x^{15} \\
 &- (3432a^7 - 14652a^6 + 4704a^5 + 9106a^4 + 7768a^3 - 84a^2 - 444a - 35)x^{14} \\
 &+ 2(1716a^7 - 924a^6 - 12138a^5 + 5418a^4 + 4668a^3 + 720a^2 + 7a - 34)x^{13} \\
 &+ (3003a^8 - 16236a^7 + 12852a^6 + 12446a^5 + 7126a^4 - 3540a^3 - 1936a^2 - 173a + 56)x^{12} \\
 &- 2(1287a^8 - 1584a^7 - 11970a^6 + 11732a^5 + 6938a^4 - 180a^3 - 231a^2 - 116a - 7)x^{11} \\
 &- (2002a^9 - 13365a^8 + 17904a^7 + 9142a^6 - 420a^5 - 7758a^4 - 3548a^3 - 271a^2 + 268a + 100)x^{10} \\
 &+ 2(715a^9 - 1485a^8 - 8142a^7 + 14210a^6 + 5410a^5 - 3090a^4 - 741a^3 - 38a^2 + 177a + 31)x^9 \\
 &+(1001a^{10} - 8085a^9 + 15855a^8 + 1898a^7 - 8050a^6 - 6774a^5 - 2910a^4 - 241a^3 + 228a^2 + 116a + 82)x^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2(286a^{10} - 880a^9 - 3723a^8 + 10632a^7 + 1548a^6 - 5372a^5 - 969a^4 + 328a^3 + 698a^2 + 148a + 23)x^7 \\
 & - (364a^{11} - 3498a^{10} + 9280a^9 - 2567a^8 - 8680a^7 - 996a^6 - 404a^5 \\
 & - 489a^4 - 648a^3 - 312a^2 + 176a + 66)x^6 \\
 & + 2(78a^{11} - 330a^{10} - 1077a^9 + 4897a^8 - 692a^7 - 4408a^6 - 603a^5 + 562a^4 + 962a^3 + 178a^2 + 81a + 48)x^5 \\
 & + (91a^{12} - 1026a^{11} + 3502a^{10} - 2449a^9 - 4497a^8 + 2556a^7 + 1016a^6 - 871a^5 \\
 & - 1472a^4 - 632a^3 + 340a^2 + 78a - 1)x^4 \\
 & - 2(13a^{12} - 72a^{11} - 173a^{10} + 1278a^9 - 637a^8 - 1820a^7 - 157a^6 + 364a^5 \\
 & + 573a^4 + 36a^3 + 93a^2 + 124a + 35)x^3 \\
 & - (14a^{13} - 183a^{12} + 776a^{11} - 897a^{10} - 1174a^9 + 1815a^8 + 684a^7 - 677a^6 - 1092a^5 \\
 & - 364a^4 + 480a^3 - 42a^2 - 142a - 41)x^2 \\
 & + 2(a^{13} - 7a^{12} - 11a^{11} + 145a^{10} - 137a^9 - 305a^8 - 7a^7 + 86a^6 \\
 & + 125a^5 - 25a^4 + 35a^3 + 76a^2 + 51a + 14)x \\
 & + 77a^{12} - 54a^3 - 187a^7 - 121a^{10} - 284a^6 + 234a^4 - 141a^2 - 127a^{11} + 387a^9 \\
 & - 15a^{13} + a^{14} + 137a^8 - 25 - 60a^5 - 113a \\
 U = & x^{28} - 2(7a + 3)x^{26} + 12x^{25} + (91a^2 + 66a + 16)x^{24} - 16(9a + 4)x^{23} - 4(91a^3 + 81a^2 + 32a - 5)x^{22} \\
 & + 4(198a^2 + 152a + 37)x^{21} + (1001a^4 + 924a^3 + 400a^2 - 324a - 184)x^{20} \\
 & - 8(330a^3 + 320a^2 + 129a + 18)x^{19} - 2(1001a^5 + 825a^4 + 240a^3 - 958a^2 - 824a - 198)x^{18} \\
 & + 4(1485a^4 + 1560a^3 + 705a^2 + 116a - 9)x^{17} \\
 & + (3003a^6 + 1782a^5 - 480a^4 - 6028a^3 - 6296a^2 - 2604a - 438)x^{16} \\
 & - 4(2376a^5 + 2400a^4 + 792a^3 - 176a^2 - 260a - 59)x^{15} \\
 & - 2(1716a^7 + 396a^6 - 1344a^5 - 5764a^4 - 6688a^3 - 3416a^2 - 1000a - 145)x^{14} \\
 & + 4(2772a^6 + 2352a^5 - 294a^4 - 1456a^3 - 1264a^2 - 485a - 51)x^{13} \\
 & + (3003a^8 - 792a^7 - 4704a^6 - 14056a^5 - 17136a^4 - 8560a^3 - 2616a^2 - 858a - 166)x^{12} \\
 & - 4(2376a^7 + 1344a^6 - 2100a^5 - 3080a^4 - 2628a^3 - 1431a^2 - 310a + 2)x^{11} \\
 & - 2(1001a^9 - 891a^8 - 2400a^7 - 5404a^6 - 6608a^5 - 1908a^4 + 760a^3 + 39a^2 - 290a - 82)x^{10} \\
 & + 4(1485a^8 + 240a^7 - 2982a^6 - 3304a^5 - 2650a^4 - 1945a^3 - 689a^2 - 10a + 35)x^9 \\
 & + (1001a^{10} - 1650a^9 - 3120a^8 - 4696a^7 - 5488a^6 + 2584a^5 + 7500a^4 + 3046a^3 - 778a^2 - 828a - 172)x^8 \\
 & - 4(660a^9 - 240a^8 - 2280a^7 - 1904a^6 - 1004a^5 - 1105a^4 - 676a^3 - 44a^2 + 104a + 33)x^7 \\
 & - 2(182a^{11} - 462a^{10} - 640a^9 - 274a^8 - 288a^7 + 1928a^6 + 3976a^5 \\
 & + 2197a^4 - 316a^3 - 852a^2 - 376a - 60)x^6 \\
 & + 4(198a^{10} - 200a^9 - 1023a^8 - 496a^7 + 360a^6 + 81a^5 - 229a^4 - 52a^3 + 102a^2 + 79a + 18)x^5 \\
 & + (91a^{12} - 324a^{11} - 304a^{10} + 492a^9 + 424a^8 + 1488a^7 + 3560a^6 + 2466a^5 \\
 & - 538a^4 - 1784a^3 - 1208a^2 - 392a - 51)x^4 \\
 & - 4(36a^{11} - 64a^{10} - 254a^9 + 4a^8 + 436a^7 + 355a^6 + 58a^5 - 22a^4 + 32a^3 + 59a^2 + 32a + 6)x^3 \\
 & - 2(7a^{13} - 33a^{12} - 16a^{11} + 122a^{10} + 72a^9 + 10a^8 + 232a^7 + 213a^6 - 194a^5 \\
 & - 474a^4 - 424a^3 - 212a^2 - 55a - 6)x^2 \\
 & + 4(a + 1)(3a^{11} - 11a^{10} - 16a^9 + 36a^8 + 71a^7 + 38a^6 + 3a^5 - 5a^4 + 4a^3 + 9a^2 + 5a + 1)x \\
 & - 12a - 6a^{13} + a^{14} - 46a^7 - 204a^5 + 8a^{10} + 36a^{11} - 220a^4 - 118a^6 - 152a^3 - 59a^2 - 70a^8 - 76a^9 - 1 \\
 V = & x^{28} + 14x^{27} - 7(2a - 13)x^{26} - 2(91a - 185)x^{25} + (91a^2 - 1099a + 1073)x^{24} \\
 & + 2(546a^2 - 2080a + 1199)x^{23} - (364a^3 - 6090a^2 + 11264a - 4335)x^{22} \\
 & - 2(2002a^3 - 10670a^2 + 11777a - 3259)x^{21} + (1001a^4 - 20482a^3 + 53646a^2 - 39849a + 8255)x^{20} \\
 & + 2(5005a^4 - 33000a^3 + 52161a^2 - 27994a + 4407)x^{19} \\
 & - (2002a^5 - 46585a^4 + 153000a^3 - 164049a^2 + 66090a - 7841)x^{18} \\
 & - 2(9009a^5 - 68475a^4 + 137319a^3 - 106875a^2 + 32771a - 2807)x^{17} \\
 & + (3003a^6 - 75537a^5 + 290355a^4 - 398063a^3 + 233175a^2 - 53901a + 2921)x^{16} \\
 & + 2(12012a^6 - 100320a^5 + 238326a^4 - 238232a^3 + 106348a^2 - 17716a + 321)x^{15} \\
 & - (3432a^7 - 89628a^6 + 385056a^5 - 630070a^4 + 475160a^3 - 159892a^2 + 16708a + 685)x^{14} \\
 & - 2(12012a^7 - 106260a^6 + 285642a^5 - 342230a^4 + 196844a^3 - 47608a^2 + 1539a + 524)x^{13} \\
 & + (3003a^8 - 78540a^7 + 364308a^6 - 679322a^5 + 615230a^4 - 266548a^3 + 40000a^2 + 3603a - 818)x^{12} \\
 & + 2(9009a^8 - 81840a^7 + 240450a^6 - 329532a^5 + 227650a^4 - 70612a^3 + 2941a^2 + 2392a - 217)x^{11} \\
 & - (2002a^9 - 50589a^8 + 246192a^7 - 504994a^6 + 523740a^5 \\
 & - 272046a^4 + 51620a^3 + 7745a^2 - 3344a + 154)x^{10} \\
 & - 2(5005a^9 - 45375a^8 + 141486a^7 - 213934a^6 + 169082a^5 - 62510a^4 + 2791a^3 + 4356a^2 - 809a + 13)x^9 \\
 & + (1001a^{10} - 23485a^9 + 116775a^8 - 255614a^7 + 292390a^6 - 173126a^5 \\
 & + 38410a^4 + 8655a^3 - 5330a^2 + 554a + 8)x^8 \\
 & + 2(2002a^{10} - 17600a^9 + 56619a^8 - 91480a^7 + 79516a^6 - 33212a^5 \\
 & + 1299a^4 + 3984a^3 - 1146a^2 + 60a + 5)x^7 \\
 & - (364a^{11} - 7546a^{10} + 37280a^9 - 84523a^8 + 103000a^7 - 66596a^6 + 16236a^5 \\
 & + 5255a^4 - 4112a^3 + 740a^2 + 8a - 8)x^6 \\
 & - 2(546a^{11} - 4510a^{10} + 14501a^9 - 24207a^8 + 22268a^7 - 10016a^6 + 217a^5 \\
 & + 1876a^4 - 754a^3 + 86a^2 + 11a - 4)x^5 \\
 & + (91a^{12} - 1554a^{11} + 7358a^{10} - 16685a^9 + 20835a^8 - 14052a^7 + 3528a^6 + 1625a^5 \\
 & - 1526a^4 + 436a^3 - 8a^2 - 16a + 3)x^4 \\
 & + 2(91a^{12} - 680a^{11} + 2093a^{10} - 3450a^9 + 3199a^8 - 1468a^7 - 17a^6 + 408a^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -221a^4 + 44a^3 + 7a^2 - 4a - 1)x^3 \\
 & -(14a^{13} - 175a^{12} + 744a^{11} - 1597a^{10} + 1930a^9 - 1273a^8 + 300a^7 + 203a^6 \\
 & -224a^5 + 98a^4 - 8a^3 - 8a^2 + 2a + 3)x^2 \\
 & -2(7a^{12} - 45a^{11} + 123a^{10} - 183a^9 + 155a^8 - 67a^7 - 3a^6 + 28a^5 - 21a^4 + 5a^3 + a^2 - 1)ax \\
 & +35a^{10} - a^2 + 21a^{12} + 2a^5 + 3a + 5a^7 + 5a^8 - 21a^9 - 35a^{11} - 6a^6 - 7a^{13} + a^{14} + 1
 \end{aligned}$$

Período 10

Para a classe N: $A_{10} = XY^2Z^2$

$$\begin{aligned}
 X_{10} = & x^{54} + 2x^{53} - 27ax^{52} - 4(13a - 12)x^{51} + (351a^2 - 52a + 100)x^{50} + 2(325a - 2)(a - 2)x^{49} \\
 & -(2925a^3 - 1300a^2 + 2404a - 1016)x^{48} - 16(325a^3 - 1056a^2 + 156a - 138)x^{47} \\
 & +2(8775a^4 - 7800a^3 + 14472a^2 - 14112a + 184)x^{46} \\
 & +4(7475a^4 - 34776a^3 + 14424a^2 - 12312a + 3128)x^{45} \\
 & -2(40365a^5 - 59800a^4 + 116104a^3 - 182064a^2 + 26408a - 14176)x^{44} \\
 & -8(16445a^5 - 102212a^4 + 81752a^3 - 71940a^2 + 45272a - 928)x^{43} \\
 & +2(148005a^6 - 328900a^5 + 693220a^4 - 1472416a^3 + 566104a^2 - 295648a + 49856)x^{42} \\
 & +4(115115a^6 - 913836a^5 + 1185492a^4 - 1164152a^3 + 1159848a^2 - 162528a + 58624)x^{41} \\
 & -2(444015a^7 - 1381380a^6 + 3251556a^5 - 8458296a^4 + 6063112a^3 - 3383488a^2 \\
 & +1534016a - 43200)x^{40} \\
 & -16(82225a^7 - 807576a^6 + 1536612a^5 - 1785190a^4 + 2292200a^3 - 811040a^2 + 289920a - 33856)x^{39} \\
 & +(2220075a^8 - 9209200a^7 + 24680656a^6 - 73934784a^5 + 83021840a^4 \\
 & -55392640a^3 + 38860800a^2 - 5175808a + 1304064)x^{38} \\
 & +2(1562275a^8 - 18535792a^7 + 48431152a^6 - 68715856a^5 + 102939600a^4 \\
 & -65665920a^3 + 26231040a^2 - 9016832a + 320512)x^{37} \\
 & -(4686825a^9 - 24996400a^8 + 77142736a^7 - 256598496a^6 + 405302832a^5 - 344411840a^4 \\
 & +299284480a^3 - 96634112a^2 + 25062912a - 2058752)x^{36} \\
 & -4(1562275a^9 - 21977604a^8 + 75270096a^7 - 131885688a^6 + 221285232a^5 - 211936320a^4 \\
 & +108591360a^3 - 56246016a^2 + 7006208a - 1226240)x^{35} \\
 & +3(2812095a^{10} - 18747300a^9 + 66971124a^8 - 242493504a^7 + 500018288a^6 - 550219072a^5 \\
 & +548412800a^4 - 307974656a^3 + 94127616a^2 - 24966144a + 1049600)x^{34} \\
 & +2(5311735a^{10} - 87275892a^9 + 378479772a^8 - 817758480a^7 + 1522327152a^6 - 1948088256a^5 \\
 & +1348519680a^4 - 843240960a^3 + 245623808a^2 - 47647744a + 2753536)x^{33} \\
 & -(13037895a^{11} - 106234700a^{10} + 439648220a^9 - 1717292808a^8 + 4374965232a^7 - 6172485120a^6 \\
 & +6986901888a^5 - 5615298432a^4 + 2356738560a^3 - 919763456a^2 + 105292800a - 11958272)x^{32} \\
 & -32(482885a^{11} - 9152528a^{10} + 48931916a^9 - 129336306a^8 + 268422384a^7 - 424727232a^6 \\
 & +393214464a^5 - 284675712a^4 + 138575872a^3 - 33672704a^2 + 6797312a - 317696)x^{31} \\
 & +4(4345965a^{12} - 42493880a^{11} + 203316872a^{10} - 854652832a^9 + 2580074904a^8 \\
 & -4568235648a^7 + 5948176896a^6 - 6080666112a^5 + 3598364160a^4 - 1681352704a^3 \\
 & +433690624a^2 - 63164416a + 2523136)x^{30} \\
 & +8(2414425a^{12} - 52240728a^{11} + 337080216a^{10} - 1078264440a^9 + 2517370200a^8 - 4684567680a^7 \\
 & +5599597824a^6 - 4776973824a^5 + 3169664000a^4 - 1127127040a^3 + 331360256a^2 \\
 & -33983488a + 1949696)x^{29} \\
 & -4(5014575a^{13} - 57946200a^{12} + 319328136a^{11} - 1446383664a^{10} + 5012430280a^9 - 10862502240a^8 \\
 & +16491240960a^7 - 20082411264a^6 + 16048227840a^5 - 8956150272a^4 + 3696289792a^3 - 725254144a^2 \\
 & +104148992a - 4947968)x^{28} \\
 & -16(1300075a^{13} - 31825836a^{12} + 243591096a^{11} - 932150868a^{10} + 2468056600a^9 - 5241758880a^8 \\
 & +7770133248a^7 - 7967205120a^6 + 6485835776a^5 - 3337818624a^4 + 1190002688a^3 - 262312448a^2 \\
 & +27310080a - 675840)x^{27} \\
 & +4(5014575a^{14} - 67603900a^{13} + 427048636a^{12} - 2090466336a^{11} + 8120822072a^{10} - 21008047840a^9 \\
 & +37428626880a^8 - 52655058432a^7 + 53592924672a^6 - 36928611328a^5 + 19904324608a^4 - 6057086976a^3 \\
 & +1300373504a^2 - 112574464a - 708608)x^{26} \\
 & +8(2414425a^{14} - 66355828a^{13} + 593856172a^{12} - 2687796696a^{11} + 8113657864a^{10} - 19358225120a^9 \\
 & +34301889024a^8 - 42474831360a^7 + 40721515520a^6 - 28057322496a^5 + 12548164608a^4 - 4240100352a^3 \\
 & +660729856a^2 - 52125696a + 1757184)x^{25} \\
 & -4(4345965a^{15} - 67603900a^{14} + 486956092a^{13} - 2584937992a^{12} + 11063424424a^{11} - 33373347904a^{10} \\
 & +69690470720a^9 - 112068795072a^8 + 138124687872a^7 - 118612863488a^6 + 77256510464a^5 \\
 & -34383607808a^4 + 9347895296a^3 - 1618542592a^2 + 90861568a + 475136)x^{24} \\
 & -32(482885a^{15} - 14798568a^{14} + 152997348a^{13} - 810281030a^{12} + 2795086008a^{11} - 7441620576a^{10} \\
 & +15299150464a^9 - 22672987584a^8 + 25373968384a^7 - 21761198592a^6 + 12592498688a^5 - 5402762496a^4 \\
 & +1378895872a^3 - 191479808a^2 + 10678272a + 1572864)x^{23} \\
 & +(13037895a^{16} - 231784800a^{15} + 1893503520a^{14} - 10933544832a^{13} + 50940386848a^{12} - 175425712384a^{11} \\
 & +426317944832a^{10} - 782216088576a^9 + 1126730535936a^8 - 1187242205184a^7 + 923086495744a^6 \\
 & -539000848384a^5 + 196408180736a^4 - 50718703616a^3 + 5623152640a^2 + 157417472a - 32571392)x^{22} \\
 & +2(5311735a^{16} - 180435552a^{15} + 2132823264a^{14} - 13087432864a^{13} + 51575197856a^{12} \\
 & -152989441280a^{11} + 356997189120a^{10} - 622684361728a^9 + 813506828288a^8 - 829024182272a^7 \\
 & +610624659456a^6 - 320069758976a^5 + 119392403456a^4 - 23570939904a^3 + 2321973248a^2 + 149028864a \\
 & -18284544)x^{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &-(8436285 a^{17} - 169975520 a^{16} + 1566389792 a^{15} - 9862218432 a^{14} + 49628190304 a^{13} - 191508487040 a^{12} \\
 &+ 535745832960 a^{11} - 1121404444160 a^{10} + 1848653300736 a^9 - 2328009018368 a^8 + 2166492553216 a^7 \\
 &- 1544246689792 a^6 + 758728802304 a^5 - 249358581760 a^4 + 48620011520 a^3 - 1796472832 a^2 \\
 &- 347275264 a + 85590016)x^{20} \\
 &-4(1562275 a^{17} - 58510804 a^{16} + 783706528 a^{15} - 5521930480 a^{14} + 24807746400 a^{13} - 82048487040 a^{12} \\
 &+ 214163129856 a^{11} - 431300739584 a^{10} + 656160215040 a^9 - 777140249600 a^8 + 701343432704 a^7 \\
 &- 453160200192 a^6 + 217058222080 a^5 - 63098142720 a^4 + 10095656960 a^3 - 215613440 a^2 \\
 &- 293273600 a + 24641536)x^{19} \\
 &+(4686825 a^{18} - 106234700 a^{17} + 1098630236 a^{16} - 7554417024 a^{15} + 40867458720 a^{14} - 173920009600 a^{13} \\
 &+ 552807706880 a^{12} - 1317399835648 a^{11} + 2459726404608 a^{10} - 3607027623936 a^9 + 3997987342336 a^8 \\
 &- 3379891290112 a^7 + 2125202423808 a^6 - 891659550720 a^5 + 255878512640 a^4 - 27988197376 a^3 \\
 &- 3391291392 a^2 + 1291321344 a - 79953920)x^{18} \\
 &+2(1562275 a^{18} - 64202292 a^{17} + 966856572 a^{16} - 7758728736 a^{15} + 39604600800 a^{14} - 146225704320 a^{13} \\
 &+ 423341787648 a^{12} - 966766654464 a^{11} + 1699123824640 a^{10} - 2319154939904 a^9 + 2476223551488 a^8 \\
 &- 1964437598208 a^7 + 1146067959808 a^6 - 466177589248 a^5 + 105040363520 a^4 - 8795324416 a^3 \\
 &- 3520004096 a^2 + 656146432 a - 27000832)x^{17} \\
 &-(2220075 a^{19} - 56241900 a^{18} + 649464156 a^{17} - 4881225096 a^{16} + 28320195552 a^{15} - 131178201600 a^{14} \\
 &+ 467109139200 a^{13} - 1261000815360 a^{12} + 2654115056640 a^{11} - 4442907921408 a^{10} + 5780243748864 a^9 \\
 &- 5752296542208 a^8 + 4391685734400 a^7 - 2373830574080 a^6 + 874490445824 a^5 - 175935258624 a^4 \\
 &- 4539875328 a^3 + 7224033280 a^2 - 1672216576 a + 98566144)x^{16} \\
 &-16(82225 a^{19} - 3691776 a^{18} + 62080524 a^{17} - 563200242 a^{16} + 3253145568 a^{15} - 13418935680 a^{14} \\
 &+ 42917935104 a^{13} - 109502984448 a^{12} + 219615944704 a^{11} - 343823901696 a^{10} + 424725352448 a^9 \\
 &- 404631393792 a^8 + 285619412992 a^7 - 148230078464 a^6 + 47404662784 a^5 - 7428898816 a^4 \\
 &- 945094656 a^3 + 734265344 a^2 - 100925440 a + 4980736)x^{15} \\
 &+2(444015 a^{20} - 12498200 a^{19} + 160399976 a^{18} - 1317783456 a^{17} + 8193019032 a^{16} - 40875607296 a^{15} \\
 &+ 160742292480 a^{14} - 487589078016 a^{13} + 1153322044416 a^{12} - 2175993032704 a^{11} + 3261695381504 a^{10} \\
 &- 3797829476352 a^9 + 3420812083200 a^8 - 2308553703424 a^7 + 1071561015296 a^6 - 322907275264 a^5 \\
 &+ 24074452992 a^4 + 15546187776 a^3 - 6295126016 a^2 + 794820608 a + 9437184)x^{14} \\
 &+4(115115 a^{20} - 5624696 a^{19} + 104973176 a^{18} - 1069436280 a^{17} + 6958887576 a^{16} - 32068505856 a^{15} \\
 &+ 113171157504 a^{14} - 319178947584 a^{13} + 720189274112 a^{12} - 1284511420416 a^{11} + 1814624120832 a^{10} \\
 &- 2022642763776 a^9 + 1716908982272 a^8 - 1082115620864 a^7 + 472684789760 a^6 - 110222508032 a^5 \\
 &- 15138816 a^4 + 11713118208 a^3 - 2836922368 a^2 + 246415360 a - 2097152)x^{13} \\
 &-2(148005 a^{21} - 4604600 a^{20} + 65385320 a^{19} - 586908784 a^{18} + 3910729416 a^{17} - 20850518496 a^{16} \\
 &+ 89293722624 a^{15} - 301057371648 a^{14} + 796833709056 a^{13} - 1682156672000 a^{12} + 2856015769600 a^{11} \\
 &- 3844148002816 a^{10} + 4037614510080 a^9 - 3267925180416 a^8 + 1913512230912 a^7 - 749464453120 a^6 \\
 &+ 137243459584 a^5 + 31796101120 a^4 - 21873819648 a^3 + 5821693952 a^2 - 399507456 a + 3145728)x^{12} \\
 &-8(16445 a^{21} - 871332 a^{20} + 17949624 a^{19} - 204108564 a^{18} + 1489313016 a^{17} - 7660583712 a^{16} \\
 &+ 29837514240 a^{15} - 92409853440 a^{14} + 231398236160 a^{13} - 465215751168 a^{12} + 746137223168 a^{11} \\
 &- 954134490112 a^{10} + 955626557440 a^9 - 722531508224 a^8 + 397886455808 a^7 - 133567217664 a^6 \\
 &+ 14216003584 a^5 + 11147411456 a^4 - 6185025536 a^3 + 1138229248 a^2 - 96468992 a - 7340032)x^{11} \\
 &+2(40365 a^{22} - 1381380 a^{21} + 21613284 a^{20} - 211758624 a^{19} + 1513158328 a^{18} - 8574167904 a^{17} \\
 &+ 39465651648 a^{16} - 145944480768 a^{15} + 429118288896 a^{14} - 1008553641984 a^{13} + 1915191756800 a^{12} \\
 &- 2931033300992 a^{11} + 3555923574784 a^{10} - 3366654607360 a^9 + 2411286536192 a^8 - 1194435674112 a^7 \\
 &+ 351740952576 a^6 + 12813074432 a^5 - 53486551040 a^4 + 23066574848 a^3 - 3832545280 a^2 - 60817408 a \\
 &+ 33554432)x^{10} \\
 &+4(7475 a^{22} - 428076 a^{21} + 9686292 a^{20} - 122262360 a^{19} + 995769800 a^{18} - 5707647840 a^{17} \\
 &+ 24552837888 a^{16} - 83247836160 a^{15} + 228726179840 a^{14} - 511274731520 a^{13} + 922677696512 a^{12} \\
 &- 1337048287232 a^{11} + 1543687577600 a^{10} - 1382523617280 a^9 + 919383859200 a^8 - 418947923968 a^7 \\
 &+ 85893382144 a^6 + 24863047680 a^5 - 29253435392 a^4 + 8697937920 a^3 - 1121976320 a^2 - 48234496 a \\
 &+ 12582912)x^9 \\
 &-2(8775 a^{23} - 328900 a^{22} + 5647972 a^{21} - 60320568 a^{20} + 462599720 a^{19} - 2776296640 a^{18} \\
 &+ 13571737920 a^{17} - 54205387200 a^{16} + 175043552256 a^{15} - 455208141824 a^{14} + 958458353664 a^{13} \\
 &- 1640448667648 a^{12} + 2263578468352 a^{11} - 2472430927872 a^{10} + 2087354638336 a^9 - 1291314561024 a^8 \\
 &+ 503842799616 a^7 - 54242443264 a^6 - 74388340736 a^5 + 45757759488 a^4 - 14022606848 a^3 \\
 &+ 1007681536 a^2 + 104857600 a - 12582912)x^8 \\
 &-16(325 a^{23} - 20056 a^{22} + 496276 a^{21} - 6918318 a^{20} + 62612200 a^{19} - 399034400 a^{18} + 1896809088 a^{17} \\
 &- 7036502592 a^{16} + 21046202368 a^{15} - 51534244864 a^{14} + 103195045888 a^{13} - 167610187264 a^{12} \\
 &+ 218899156992 a^{11} - 226403876864 a^{10} + 178977529856 a^9 - 100560011264 a^8 + 32340377600 a^7 \\
 &+ 2311847936 a^6 - 8582332416 a^5 + 4702076928 a^4 - 1111490560 a^3 + 110100480 a^2 \\
 &+ 33554432 a - 4194304)x^7 \\
 &+(2925 a^{24} - 119600 a^{23} + 2245904 a^{22} - 26105024 a^{21} + 215019728 a^{20} - 1364382080 a^{19} + 7010652160 a^{18} \\
 &- 29717727744 a^{17} + 103628158464 a^{16} - 294886350848 a^{15} + 682819182592 a^{14} - 1288955674624 a^{13} \\
 &+ 1981182312448 a^{12} - 2450853593088 a^{11} + 2382321057792 a^{10} - 1745597366272 a^9 + 876491767808 a^8 \\
 &- 202190618624 a^7 - 94781833216 a^6 + 116035420160 a^5 - 54670655488 a^4 + 11215568896 a^3 \\
 &+ 536870912 a^2 - 369098752 a + 33554432)x^6 \\
 &+2(325 a^{24} - 21552 a^{23} + 580848 a^{22} - 8901904 a^{21} + 89137296 a^{20} - 629961600 a^{19} + 3309107456 a^{18} \\
 &- 13442827776 a^{17} + 43590919168 a^{16} - 115331620864 a^{15} + 251250286592 a^{14} - 449269616640 a^{13} \\
 &+ 652359598080 a^{12} - 757547139072 a^{11} + 686531444736 a^{10} - 461085474816 a^9 + 197325553664 a^8 \\
 &- 14297333760 a^7 - 51010076672 a^6 + 42649780224 a^5 - 15716057088 a^4 + 2592079872 a^3 + 452984832 a^2 \\
 &- 167772160 a - 33554432)x^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(351 a^{25} - 15600 a^{24} + 319248 a^{23} - 4031328 a^{22} + 35682416 a^{21} - 239291840 a^{20} + 1281556480 a^{19} \\
 & - 5654291712 a^{18} + 20768865792 a^{17} - 63289317888 a^{16} + 158761295872 a^{15} - 325916065792 a^{14} \\
 & + 545511194624 a^{13} - 740057284608 a^{12} + 801580679168 a^{11} - 669382344704 a^{10} + 396048269312 a^9 \\
 & - 121494175744 a^8 - 39276511232 a^7 + 74172071936 a^6 - 45380272128 a^5 + 16250830848 a^4 \\
 & - 1258291200 a^3 - 520093696 a^2 + 167772160 a + 33554432)x^4 \\
 & - 4(13 a^{24} - 924 a^{23} + 27024 a^{22} - 453400 a^{21} + 5002544 a^{20} - 39091520 a^{19} + 226789632 a^{18} \\
 & - 1010382592 a^{17} + 3549497344 a^{16} - 10042660352 a^{15} + 23230119936 a^{14} - 44223035392 a^{13} \\
 & + 69023784960 a^{12} - 86980280320 a^{11} + 85893939200 a^{10} - 62795153408 a^9 + 29319561216 a^8 \\
 & - 2711093248 a^7 - 8597274624 a^6 + 8624537600 a^5 - 4974444544 a^4 + 1688207360 a^3 \\
 & - 234881024 a^2 - 218103808 a + 33554432)ax^3 \\
 & + (27 a^{26} - 1300 a^{25} + 28900 a^{24} - 395712 a^{23} + 3765008 a^{22} - 26698432 a^{21} + 148094592 a^{20} \\
 & - 665585152 a^{19} + 2480103936 a^{18} - 7739497472 a^{17} + 20195757056 a^{16} - 43653447680 a^{15} \\
 & + 77095010304 a^{14} - 109374537728 a^{13} + 121874268160 a^{12} - 102912622592 a^{11} + 61075947520 a^{10} \\
 & - 19363528704 a^9 - 5557714944 a^8 + 13677625344 a^7 - 12308185088 a^6 + 7092568064 a^5 \\
 & - 2080374784 a^4 - 167772160 a^3 + 234881024 a^2 - 67108864 a - 67108864)x^2 \\
 & + 2(a^{26} - 76 a^{25} + 2404 a^{24} - 43984 a^{23} + 532656 a^{22} - 4588224 a^{21} + 29366016 a^{20} - 143681024 a^{19} \\
 & + 547810304 a^{18} - 1648446464 a^{17} + 3944956928 a^{16} - 7529451520 a^{15} + 11435819008 a^{14} \\
 & - 13708066816 a^{13} + 12755877888 a^{12} - 8921677824 a^{11} + 4293197824 a^{10} - 757334016 a^9 \\
 & - 1216086016 a^8 + 1872756736 a^7 - 1463812096 a^6 + 591396864 a^5 - 75497472 a^4 - 33554432 a^3 \\
 & - 33554432 a^2 + 134217728 a - 67108864)x \\
 & + 25165824 a^5 + 1424384 a^{22} - 855925760 a^{17} + 33554432 a^3 - 8388608 a^4 - 182452224 a^6 \\
 & - 1435172864 a^{11} + 574750720 a^{10} + 65798144 a^9 - 33554432 a^2 + 400556032 a^7 - 129501696 a^{19} \\
 & + 2354905088 a^{12} - a^{27} + 3020685312 a^{14} - 2990325760 a^{13} + 18552 a^{24} - 8149888 a^{21} \\
 & + 1607776256 a^{16} - 189744 a^{23} + 370018816 a^{18} - 1252 a^{25} + 52 a^{26} - 2450964480 a^{15} - 408944640 a^8 \\
 & + 36439424 a^{20} - 134217728 + 201326592 a \\
 Y_{10} = & x^{54} + 2x^{53} - (27a - 2)x^{52} - 2(26a - 19)x^{51} + (351a^2 - 76a + 71)x^{50} + 2(325a^2 - 499a + 34)x^{49} \\
 & - (2925a^3 - 1250a^2 + 1751a - 611)x^{48} - 8(650a^3 - 1569a^2 + 300a - 132)x^{47} \\
 & + (17550a^4 - 12400a^3 + 20964a^2 - 15476a + 965)x^{46} \\
 & + 2(14950a^4 - 50324a^3 + 18456a^2 - 12284a + 2709)x^{45} \\
 & - (80730a^5 - 85100a^4 + 162196a^3 - 186352a^2 + 31315a - 8556)x^{44} \\
 & - 2(65780a^5 - 288926a^4 + 171248a^3 - 139784a^2 + 65394a - 3723)x^{43} \\
 & + (296010a^6 - 435160a^5 + 910294a^4 - 1422260a^3 + 446097a^2 - 186352a + 29064)x^{42} \\
 & + 2(230230a^6 - 1264494a^5 + 1096788a^4 - 1034228a^3 + 744247a^2 - 109467a + 20661)x^{41} \\
 & - (888030a^7 - 1735580a^6 + 3942246a^5 - 7735658a^4 + 3834327a^3 - 1993836a^2 + 657140a - 34327)x^{40} \\
 & - 2(657800a^7 - 4384996a^6 + 5215056a^5 - 5571840a^4 + 5336860a^3 - 1423782a^2 + 416576a - 49215)x^{39} \\
 & + (2220075a^8 - 5566000a^7 + 13679204a^6 - 31950604a^5 + 22690035a^4 - 13900992a^3 \\
 & + 6948192a^2 - 895484a + 124198)x^{38} \\
 & + 2(1562275a^8 - 12363604a^7 + 19253080a^6 - 23183572a^5 + 27154935a^4 - 11173870a^3 \\
 & + 4124922a^2 - 1015761a + 49701)x^{37} \\
 & - (4686825a^9 - 14661350a^8 + 38975156a^7 - 104241144a^6 + 99299605a^5 - 70512628a^4 + 46014872a^3 \\
 & - 10402482a^2 + 2279206a - 219369)x^{36} \\
 & - 2(3124550a^9 - 28856421a^8 + 56851344a^7 - 77119176a^6 + 104583066a^5 - 60200043a^4 + 26544216a^3 \\
 & - 9736461a^2 + 1119966a - 122753)x^{35} \\
 & + (8436285a^{10} - 32206900a^9 + 92712609a^8 - 275818668a^7 + 335874495a^6 - 275133840a^5 \\
 & + 215222936a^4 - 72888988a^3 + 20401178a^2 - 3996806a + 191737)x^{34} \\
 & + 2(53111735a^{10} - 56467829a^9 + 137053422a^8 - 209579196a^7 + 317323581a^6 - 238841235a^5 \\
 & + 123598877a^4 - 58087659a^3 + 11266273a^2 - 2003497a + 174870)x^{33} \\
 & - (13037895a^{11} - 59654870a^{10} + 186237601a^9 - 602858505a^8 + 904054713a^7 - 852457044a^6 \\
 & + 758812708a^5 - 349381259a^4 + 117559770a^3 - 33616661a^2 + 3658749a - 358903)x^{32} \\
 & - 8(1931540a^{11} - 23371634a^{10} + 68416568a^9 - 117977688a^8 + 194726772a^7 - 182176074a^6 \\
 & + 109802288a^5 - 60796551a^4 + 17045572a^3 - 3931562a^2 + 688352a - 33996)x^{31} \\
 & + 2(8691930a^{12} - 46951280a^{11} + 159188612a^{10} - 551377796a^9 + 987838329a^8 - 1069286400a^7 \\
 & + 1049400576a^6 - 613384024a^5 + 242310988a^4 - 87269192a^3 + 15535148a^2 - 2557878a + 218623)x^{30} \\
 & + 4(4828850a^{12} - 65880372a^{11} + 228614232a^{10} - 444325260a^9 + 787456065a^8 - 879654948a^7 \\
 & + 613603532a^6 - 380997554a^5 + 140313714a^4 - 39076228a^3 + 9937232a^2 - 1106758a + 104116)x^{29} \\
 & - 2(10029150a^{13} - 63146500a^{12} + 232765428a^{11} - 851872448a^{10} + 1777406015a^9 - 2199413148a^8 \\
 & + 2336486288a^7 - 1645397228a^6 + 752639180a^5 - 314566074a^4 + 78838780a^3 - 17301254a^2 \\
 & + 2996469a - 149736)x^{28} \\
 & - 4(5200300a^{13} - 79356578a^{12} + 321785520a^{11} - 703910024a^{10} + 1327672290a^9 - 1713665115a^8 \\
 & + 1372753680a^7 - 928717458a^6 + 419450308a^5 - 136417398a^4 + 43830224a^3 - 8034772a^2 \\
 & + 1289222a - 101071)x^{27} \\
 & + (20058300a^{14} - 145608400a^{13} + 583889684a^{12} - 2237069576a^{11} + 5317080650a^{10} - 7478635104a^9 \\
 & + 8516361296a^8 - 6931413872a^7 + 3625672072a^6 - 1674397096a^5 + 538775804a^4 - 146415532a^3 \\
 & + 37450222a^2 - 4106736a + 329531)x^{26} \\
 & + 2(9657700a^{14} - 163705444a^{13} + 766334296a^{12} - 1882730824a^{11} + 3762483894a^{10} - 5459913654a^9 \\
 & + 4974282794a^8 - 3607761404a^7 + 1894624196a^6 - 703874924a^5 + 265033816a^4 - 69630676a^3 \\
 & + 15010372a^2 - 2288970a + 114487)x^{25} \\
 & - (17383860a^{15} - 144122600a^{14} + 628820276a^{13} - 2505576892a^{12} + 6652601670a^{11} - 10561047224a^{10} \\
 & + 12835386408a^9 - 11674512798a^8 + 6887021960a^7 - 3408815828a^6 + 1319188524a^5 - 430713192a^4 \\
 & + 142106266a^3 - 24837424a^2 + 3401155a - 265334)x^{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2(7726160 a^{15} - 144598056 a^{14} + 773370528 a^{13} - 2128120384 a^{12} + 4499476904 a^{11} - 7175289732 a^{10} \\
 & + 7349467840 a^9 - 5664527362 a^8 + 3312868848 a^7 - 1378621944 a^6 + 582868672 a^5 - 202506464 a^4 \\
 & + 54124584 a^3 - 11661428 a^2 + 1260360 a - 105023)x^{23} \\
 & + (13037895 a^{16} - 122429920 a^{15} + 581066664 a^{14} - 2397293080 a^{13} + 6986371782 a^{12} - 12416027520 a^{11} \\
 & + 16082688960 a^{10} - 15909570248 a^9 + 10416582644 a^8 - 5416327408 a^7 + 2398086120 a^6 - 927814428 a^5 \\
 & + 367195670 a^4 - 88351520 a^3 + 16123754 a^2 - 2482160 a + 120597)x^{22} \\
 & + 2(5311735 a^{10} - 109176584 a^{15} + 661199088 a^{14} - 2031558888 a^{13} + 4546487582 a^{12} - 7818359796 a^{11} \\
 & + 8886382076 a^{10} - 7242435486 a^9 + 4551260230 a^8 - 2078458712 a^7 + 964010752 a^6 - 420282188 a^5 \\
 & + 134151664 a^4 - 35397100 a^3 + 6043434 a^2 - 883297 a + 68648)x^{21} \\
 & - (8436285 a^{17} - 89073710 a^{16} + 459587656 a^{15} - 1958005328 a^{14} + 6163516362 a^{13} - 12150461544 a^{12} \\
 & + 16773302416 a^{11} - 17660004076 a^{10} + 12600466164 a^9 - 6781326398 a^8 + 3300885192 a^7 - 1504988172 a^6 \\
 & + 685712306 a^5 - 206949840 a^4 + 46046450 a^3 - 10273188 a^2 + 1119835 a - 79777)x^{20} \\
 & - 2(3124550 a^{17} - 70196621 a^{16} + 477636896 a^{15} - 1633165520 a^{14} + 3874734180 a^{13} - 7075847246 a^{12} \\
 & + 8797011600 a^{11} - 7553517686 a^{10} + 4948210036 a^9 - 2423210262 a^8 + 1220932448 a^7 - 644862520 a^6 \\
 & + 240151300 a^5 - 71320986 a^4 + 16689392 a^3 - 3354881 a^2 + 518124 a - 22466)x^{19} \\
 & + (4686825 a^{18} - 55280500 a^{17} + 309796729 a^{16} - 1361150424 a^{15} + 4560504830 a^{14} - 9872016416 a^{13} \\
 & + 14524400176 a^{12} - 16003516360 a^{11} + 12189167276 a^{10} - 6696732196 a^9 + 3469496470 a^8 \\
 & - 1865597596 a^7 + 957145574 a^6 - 337427152 a^5 + 87279993 a^4 - 24755072 a^3 + 4455563 a^2 \\
 & - 548338 a + 30627)x^{18} \\
 & + 2(1562275 a^{18} - 38201229 a^{17} + 290031390 a^{16} - 1099783992 a^{15} + 2772014730 a^{14} - 5310988350 a^{13} \\
 & + 7111161954 a^{12} - 6405126234 a^{11} + 4260136254 a^{10} - 2176865702 a^9 + 1193084916 a^8 - 746817780 a^7 \\
 & + 318091676 a^6 - 100372974 a^5 + 29407261 a^4 - 7544791 a^3 + 1713060 a^2 - 166494 a + 6839)x^{17} \\
 & - (2220075 a^{19} - 29082350 a^{18} + 176815881 a^{17} - 800995749 a^{16} + 2817977970 a^{15} - 6623514024 a^{14} \\
 & + 10377963176 a^{13} - 11813997598 a^{12} + 9385285676 a^{11} - 5177590550 a^{10} + 2780653678 a^9 \\
 & - 1778527614 a^8 + 1017261186 a^7 - 393693744 a^6 + 113992601 a^5 - 38356274 a^4 + 10051821 a^3 \\
 & - 1702997 a^2 + 159495 a + 5028)x^{16} \\
 & - 2(657800 a^{19} - 17439796 a^{18} + 146838384 a^{17} - 615338256 a^{16} + 1651348176 a^{15} - 3289302504 a^{14} \\
 & + 4665400640 a^{13} - 4379164140 a^{12} + 2886001264 a^{11} - 1487118424 a^{10} + 898685952 a^9 - 660108720 a^8 \\
 & + 314630512 a^7 - 100793528 a^6 + 34399792 a^5 - 11048150 a^4 + 3280624 a^3 - 513736 a^2 + 26284 a - 287)x^{15} \\
 & + (888030 a^{20} - 12852400 a^{19} + 84660884 a^{18} - 395653188 a^{17} + 1443407865 a^{16} - 3637949952 a^{15} \\
 & + 6056190208 a^{14} - 7054347632 a^{13} + 5693985336 a^{12} - 3079156208 a^{11} + 1678409832 a^{10} - 1304089924 a^9 \\
 & + 829421370 a^8 - 332020416 a^7 + 102864476 a^6 - 39641632 a^5 + 14284146 a^4 - 3169368 a^3 + 335372 a^2 \\
 & + 38368 a - 4048)x^{14} \\
 & + 2(230230 a^{20} - 6595204 a^{19} + 61247032 a^{18} - 282662316 a^{17} + 809323641 a^{16} - 1665290376 a^{15} \\
 & + 2458548824 a^{14} - 2379891732 a^{13} + 1515217012 a^{12} - 751573112 a^{11} + 517333664 a^{10} - 447046020 a^9 \\
 & + 231969704 a^8 - 72130376 a^7 + 26683356 a^6 - 10891466 a^5 + 4076864 a^4 - 877400 a^3 + 29872 a^2 \\
 & + 7603 a - 1543)x^{13} \\
 & - (296010 a^{21} - 4710860 a^{20} + 33571076 a^{19} - 162036560 a^{18} + 605976063 a^{17} - 1614543516 a^{16} \\
 & + 2842366752 a^{15} - 3362256344 a^{14} + 2675196728 a^{13} - 1362028228 a^{12} + 742043848 a^{11} - 731799492 a^{10} \\
 & + 517694462 a^9 - 201599472 a^8 + 62005740 a^7 - 27149336 a^6 + 13420302 a^5 - 3945074 a^4 + 371276 a^3 \\
 & + 133424 a^2 - 29588 a + 1731)x^{12} \\
 & - 2(65780 a^{21} - 2029566 a^{20} + 20686512 a^{19} - 104787432 a^{18} + 320664138 a^{17} - 678862047 a^{16} \\
 & + 1024087840 a^{15} - 1005618100 a^{14} + 599150856 a^{13} - 265726220 a^{12} + 224057440 a^{11} - 231327512 a^{10} \\
 & + 125946708 a^9 - 35757426 a^8 + 12980480 a^7 - 7201154 a^6 + 3518184 a^5 - 939196 a^4 - 8308 a^3 + 37661 a^2 \\
 & - 8990 a + 575)x^{11} \\
 & + (80730 a^{22} - 1406680 a^{21} + 10827894 a^{20} - 54059012 a^{19} + 205070933 a^{18} - 568070832 a^{17} \\
 & + 1049018536 a^{16} - 1251415216 a^{15} + 946268200 a^{14} - 419452584 a^{13} + 227162876 a^{12} - 311263876 a^{11} \\
 & + 244242762 a^{10} - 86567568 a^9 + 22326397 a^8 - 11464000 a^7 + 8538390 a^6 - 3458924 a^5 + 263706 a^4 \\
 & + 248672 a^3 - 81672 a^2 + 10310 a + 218)x^{10} \\
 & + 2(14950 a^{22} - 495374 a^{21} + 5517204 a^{20} - 30574340 a^{19} + 100132035 a^{18} - 217685007 a^{17} \\
 & + 329068737 a^{16} - 319330668 a^{15} + 169089908 a^{14} - 57284556 a^{13} + 71520184 a^{12} - 90487004 a^{11} \\
 & + 49178748 a^{10} - 11312646 a^9 + 3126497 a^8 - 3063886 a^7 + 2213144 a^6 - 691876 a^5 - 44314 a^4 + 69271 a^3 \\
 & - 21837 a^2 + 2491 a - 147)x^9 \\
 & - (17550 a^{23} - 333500 a^{22} + 2768326 a^{21} - 14321146 a^{20} + 54582835 a^{19} - 154083612 a^{18} + 294424292 a^{17} \\
 & - 351058763 a^{16} + 240397864 a^{15} - 76234948 a^{14} + 42335660 a^{13} - 98851888 a^{12} + 84807886 a^{11} \\
 & - 25374480 a^{10} + 2726853 a^9 - 2139962 a^8 + 3737658 a^7 - 2174018 a^6 + 182786 a^5 + 251864 a^4 \\
 & - 112364 a^3 + 21873 a^2 + 486 a - 131)x^8 \\
 & - 2(2600 a^{23} - 92276 a^{22} + 1118480 a^{21} - 6759488 a^{20} + 23714460 a^{19} - 52929990 a^{18} + 78550016 a^{17} \\
 & - 72145079 a^{16} + 30283664 a^{15} - 3704456 a^{14} + 16543168 a^{13} - 26134336 a^{12} + 13285352 a^{11} \\
 & - 1711252 a^{10} - 286904 a^9 - 753211 a^8 + 1032880 a^7 - 379304 a^6 - 33692 a^5 + 62579 a^4 - 27220 a^3 \\
 & + 4086 a^2 - 476 a - 25)x^7 \\
 & + (2925 a^{24} - 60400 a^{23} + 539764 a^{22} - 2898716 a^{21} + 11005335 a^{20} - 30874048 a^{19} + 59638752 a^{18} \\
 & - 69927708 a^{17} + 40204310 a^{16} - 2780048 a^{15} + 2923224 a^{14} - 22849332 a^{13} + 20632114 a^{12} \\
 & - 4760608 a^{11} - 1269350 a^{10} + 425616 a^9 + 1144041 a^8 - 961112 a^7 + 140636 a^6 + 127904 a^5 - 82304 a^4 \\
 & + 21124 a^3 + 84 a^2 - 412 a + 60)x^6 \\
 & + 2(325 a^{24} - 12324 a^{23} + 161976 a^{22} - 1064324 a^{21} + 4002139 a^{20} - 9181518 a^{19} + 13089562 a^{18} \\
 & - 10524697 a^{17} + 2267709 a^{16} + 1520472 a^{15} + 2796736 a^{14} - 5307044 a^{13} + 2337920 a^{12} + 143092 a^{11} \\
 & - 445670 a^{10} - 76485 a^9 + 339384 a^8 - 153016 a^7 - 5880 a^6 + 28649 a^5 - 17393 a^4 + 3062 a^3 - 482 a^2 \\
 & - 83 a + 13)x^5 \\
 & - (351 a^{25} - 7850 a^{24} + 75396 a^{23} - 421112 a^{22} + 1580625 a^{21} - 4263012 a^{20} + 7971736 a^{19} - 8838322 a^{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+3596054 a^{17} + 1907039 a^{16} - 374280 a^{15} - 3636132 a^{14} + 3201254 a^{13} - 494192 a^{12} - 606974 a^{11} \\
 &+322172 a^{10} + 242151 a^9 - 275373 a^8 + 72636 a^7 + 22832 a^6 - 30636 a^5 + 9269 a^4 - 420 a^3 - 450 a^2 \\
 &+132 a - 7)x^4 \\
 &-2(26 a^{25} - 1051 a^{24} + 14928 a^{23} - 106344 a^{22} + 428674 a^{21} - 1013031 a^{20} + 1355736 a^{19} - 805029 a^{18} \\
 &-224738 a^{17} + 401935 a^{16} + 356512 a^{15} - 680456 a^{14} + 243740 a^{13} + 98922 a^{12} - 127664 a^{11} + 3027 a^{10} \\
 &+66444 a^9 - 37650 a^8 + 3556 a^7 + 5967 a^6 - 4782 a^5 + 955 a^4 - 124 a^3 - 91 a^2 + 26 a - 5)x^3 \\
 &+(27 a^{26} - 652 a^{25} + 6719 a^{24} - 39100 a^{23} + 144147 a^{22} - 356688 a^{21} + 586936 a^{20} - 537980 a^{19} \\
 &+41354 a^{18} + 332794 a^{17} - 41223 a^{16} - 343092 a^{15} + 255842 a^{14} - 11952 a^{13} - 93329 a^{12} + 56384 a^{11} \\
 &+29935 a^{10} - 40434 a^9 + 16347 a^8 - 1760 a^7 - 4648 a^6 + 1494 a^5 - 238 a^4 - 188 a^3 + 84 a^2 - 14 a + 3)x^2 \\
 &+2(a^{25} - 43 a^{24} + 658 a^{23} - 5068 a^{22} + 21897 a^{21} - 53455 a^{20} + 65505 a^{19} - 15443 a^{18} - 45911 a^{17} \\
 &+29319 a^{16} + 28646 a^{15} - 41308 a^{14} + 12324 a^{13} + 11134 a^{12} - 13909 a^{11} + 533 a^{10} + 5156 a^9 - 3566 a^8 \\
 &+1323 a^7 + 397 a^6 - 219 a^5 + 63 a^4 + 29 a^3 - 33 a^2 + 13 a - 5)ax \\
 &+19 a^4 + 13252 a^{22} + 2 a^5 - 12 a^3 - 495 a^9 - 55 a^6 - 905 a^{11} + 937 a^{10} - 1058 a^{12} + 7 a^2 \\
 &+84 a^7 + 13238 a^{19} + 1111 a^{20} - 2672 a^{14} + 4353 a^{13} - 6205 a^{17} + 1743 a^{24} - 14132 a^{21} + 11635 a^{16} \\
 &-6277 a^{23} - 9155 a^{18} - 287 a^{25} + 26 a^{26} - 4502 a^{15} - 36 a^8 - a^{27} + 1 - 3a \\
 Z_{10} = &x^{54} - 2x^{53} - (27a - 2)x^{52} + 2(26a + 11)x^{51} + (351a^2 - 76a - 45)x^{50} - 2(325a^2 + 251a - 22)x^{49} \\
 &- (2925a^3 - 1250a^2 - 1037a - 189)x^{48} + 8(650a^3 + 681a^2 - 188a - 50)x^{47} \\
 &+ (17550a^4 - 12400a^3 - 11148a^2 - 3428a + 381)x^{46} \\
 &- 2(14950a^4 + 18676a^3 - 10984a^2 - 4004a - 395)x^{45} \\
 &- (80730a^5 - 85100a^4 - 73692a^3 - 27960a^2 + 11563a + 1776)x^{44} \\
 &+ 2(65780a^5 + 90574a^4 - 95920a^3 - 35648a^2 - 4886a + 827)x^{43} \\
 &+ (296010a^6 - 435160a^5 - 330418a^4 - 131652a^3 + 147209a^2 + 29864a + 1556)x^{42} \\
 &- 2(230230a^6 + 329406a^5 - 575036a^4 - 179164a^3 - 17425a^2 + 21811a + 2029)x^{41} \\
 &- (888030a^7 - 1735580a^6 - 1030722a^5 - 368606a^4 + 1104047a^3 + 203688a^2 + 4872a - 3853)x^{40} \\
 &+ 2(657800a^7 + 928004a^6 - 2549008a^5 - 492360a^4 + 61580a^3 + 234534a^2 + 26472a + 315)x^{39} \\
 &+ (2220075a^8 - 5566000a^7 - 2103948a^6 - 461916a^5 + 5604155a^4 + 590224a^3 - 148584a^2 \\
 &- 84260a - 4182)x^{38} \\
 &- 2(1562275a^8 + 2057396a^7 - 8742888a^6 - 166060a^5 + 875655a^4 + 1441790a^3 + 104290a^2 \\
 &- 17299a - 2555)x^{37} \\
 &- (4686825a^9 - 14661350a^8 - 1711292a^7 + 778848a^6 + 20734909a^5 - 792064a^4 - 1670592a^3 \\
 &- 713590a^2 - 26998a + 3325)x^{36} \\
 &+ 2(3124550a^9 + 3590829a^8 - 23906256a^7 + 5058864a^6 + 4207890a^5 + 5778491a^4 - 237232a^3 \\
 &- 277583a^2 - 40106a + 53)x^{35} \\
 &+ (8436285a^{10} - 32206900a^9 + 6013557a^8 + 5067300a^7 + 58524807a^6 - 14954136a^5 - 8556796a^4 \\
 &- 3157540a^3 + 180278a^2 + 89894a + 4253)x^{34} \\
 &- 2(5311735a^{10} + 4821421a^9 - 53188410a^8 + 26678508a^7 + 11700981a^6 + 16052107a^5 - 4241155a^4 \\
 &- 1780881a^3 - 201735a^2 + 27645a + 3646)x^{33} \\
 &- (13037895a^{11} - 59654870a^{10} + 31625253a^9 + 11078577a^8 + 130009761a^7 - 72785976a^6 - 25721160a^5 \\
 &- 7382553a^4 + 2787990a^3 + 763393a^2 + 22553a - 5009)x^{32} \\
 &+ 8(1931540a^{11} + 1144066a^{10} - 24416216a^9 + 20895516a^8 + 4601220a^7 + 7921802a^6 - 5414632a^5 \\
 &- 1561789a^4 - 26188a^3 + 91394a^2 + 12892a + 133)x^{31} \\
 &+ 2(8691930a^{12} - 46951280a^{11} + 42820756a^{10} + 4197708a^9 + 116474769a^8 - 112260384a^7 \\
 &- 22000496a^6 - 1982568a^5 + 7452116a^4 + 1533512a^3 - 122948a^2 - 56862a - 1777)x^{30} \\
 &- 4(4828850a^{12} + 980628a^{11} - 74726696a^{10} + 95743660a^9 + 1713345a^8 + 22241156a^7 \\
 &- 33604004a^6 - 6042774a^5 + 1647762a^4 + 1043060a^3 + 117272a^2 - 10600a - 590)x^{29} \\
 &- 2(10029150a^{13} - 63146500a^{12} + 84066564a^{11} - 11687432a^{10} + 172341495a^9 - 252869424a^8 \\
 &- 7863616a^7 + 16202684a^6 + 22672916a^5 + 2788962a^4 - 1477460a^3 - 426502a^2 - 5971a + 248)x^{28} \\
 &+ 4(5200300a^{13} - 1352078a^{12} - 95902576a^{11} + 171422560a^{10} - 33979430a^9 + 22174795a^8 \\
 &- 72297408a^7 - 3326214a^6 + 8917652a^5 + 3246734a^4 + 67592a^3 - 147538a^2 - 9954a + 1235)x^{27} \\
 &+ (20058300a^{14} - 145608400a^{13} + 260223012a^{12} - 101310888a^{11} + 432995066a^{10} - 879041712a^9 \\
 &+ 140043624a^8 + 124148592a^7 + 84191672a^6 - 2419672a^5 - 13789012a^4 - 3010620a^3 + 264622a^2 \\
 &+ 26288a - 5045)x^{26} \\
 &- 2(9657700a^{14} - 7696444a^{13} - 207161864a^{12} + 494575016a^{11} - 216891610a^{10} + 36659558a^9 \\
 &- 225285190a^8 + 31377996a^7 + 50704612a^6 + 10809500a^5 - 2761464a^4 - 1515416a^3 - 54240a^2 \\
 &+ 39802a + 47)x^{25} \\
 &- (17383860a^{15} - 144122600a^{14} + 328450948a^{13} - 216920340a^{12} + 478190518a^{11} - 1212985904a^{10} \\
 &+ 463999952a^9 + 245049558a^8 + 81333304a^7 - 38268604a^6 - 36812292a^5 - 4616080a^4 + 2406634a^3 \\
 &+ 107088a^2 - 64405a - 10126)x^{24} \\
 &+ 2(7726160a^{15} - 10876056a^{14} - 188476960a^{13} + 584030512a^{12} - 413689016a^{11} + 48823684a^{10} \\
 &- 255323536a^9 + 105801098a^8 + 93721904a^7 + 3645080a^6 - 12949648a^5 - 3881356a^4 + 291240a^3 \\
 &+ 260164a^2 - 8144a - 6277)x^{23} \\
 &+ (13037895a^{16} - 122429920a^{15} + 343576392a^{14} - 328098232a^{13} + 481818454a^{12} - 1351607712a^{11} \\
 &+ 864949904a^{10} + 307793928a^9 - 25625236a^8 - 98824976a^7 - 60123576a^6 + 2847828a^5 + 9239542a^4 \\
 &- 414176a^3 - 443926a^2 - 89952a + 9593)x^{22} \\
 &- 2(5311735a^{16} - 11113784a^{15} - 144223376a^{14} + 569097576a^{13} - 575486210a^{12} + 104141908a^{11} \\
 &- 202677332a^{10} + 176623590a^9 + 119257798a^8 - 26931080a^7 - 30631600a^6 - 4201248a^5 + 2239228a^4 \\
 &+ 834156a^3 - 140366a^2 - 60387a - 568)x^{21} \\
 &- (8436285a^{17} - 89073710a^{16} + 300072168a^{15} - 382235616a^{14} + 452953882a^{13} - 1230428992a^{12} \\
 &+ 1137956352a^{11} + 238895228a^{10} - 229950292a^9 - 137089898a^8 - 53848344a^7 + 27319956a^6 \\
 &+ 19789986a^5 - 4317712a^4 - 1675134a^3 - 291204a^2 + 121119a + 11521)x^{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+2(3124550 a^{17} - 8907371 a^{16} - 92434848 a^{15} + 458866720 a^{14} - 619642860 a^{13} + 185706222 a^{12} \\
 &-96689632 a^{11} + 183156974 a^{10} + 105472708 a^9 - 72855090 a^8 - 45094512 a^7 + 3957148 a^6 \\
 &+6421684 a^5 + 1221586 a^4 - 841080 a^3 - 257995 a^2 + 18404 a + 7022)x^{19} \\
 &+(4686825 a^{18} - 55280500 a^{17} + 219252077 a^{16} - 354599736 a^{15} + 394037390 a^{14} - 924125168 a^{13} \\
 &+1123459688 a^{12} + 71263816 a^{11} - 421429580 a^{10} - 98449692 a^9 - 1671890 a^8 + 57796372 a^7 \\
 &+23744998 a^6 - 14955376 a^5 - 3272631 a^4 - 201424 a^3 + 664503 a^2 + 74802 a - 5381)x^{18} \\
 &-2(1562275 a^{18} - 5753979 a^{17} - 49265898 a^{16} + 305700120 a^{15} - 528554310 a^{14} + 241075310 a^{13} \\
 &-4202302 a^{12} + 108875026 a^{11} + 64637518 a^{10} - 102607714 a^9 - 42633612 a^8 + 21701880 a^7 \\
 &+9851144 a^6 - 137762 a^5 - 2616179 a^4 - 568373 a^3 + 206268 a^2 + 60498 a + 3987)x^{17} \\
 &-(2220075 a^{19} - 29082350 a^{18} + 133725933 a^{17} - 265508907 a^{16} + 306655554 a^{15} - 578688432 a^{14} \\
 &+848509424 a^{13} - 76422346 a^{12} - 476949772 a^{11} + 6471806 a^{10} + 67781846 a^9 + 65175510 a^8 \\
 &+9956562 a^7 - 29293488 a^6 - 1934927 a^5 + 1283990 a^4 + 1920889 a^3 + 137397 a^2 - 68761 a - 19736)x^{16} \\
 &+2(657800 a^{19} - 3018796 a^{18} - 21598896 a^{17} + 167342424 a^{16} - 359892720 a^{15} + 231438568 a^{14} \\
 &+33490016 a^{13} + 6364956 a^{12} + 30601392 a^{11} - 92041224 a^{10} - 24304688 a^9 + 37814556 a^8 \\
 &+7380976 a^7 - 3554024 a^6 - 4803520 a^5 - 556562 a^4 + 884560 a^3 + 211576 a^2 + 13828 a - 6921)x^{15} \\
 &+(888030 a^{20} - 12852400 a^{19} + 67663332 a^{18} - 160914420 a^{17} + 205033617 a^{16} - 305964096 a^{15} \\
 &+489621792 a^{14} - 121154064 a^{13} - 380513016 a^{12} + 98748400 a^{11} + 104380232 a^{10} + 36635980 a^9 \\
 &-15570150 a^8 - 35995968 a^7 + 5491932 a^6 + 4419200 a^5 + 2979482 a^4 - 224040 a^3 - 312532 a^2 \\
 &-127840 a - 1980)x^{14} \\
 &-2(230230 a^{20} - 1282204 a^{19} - 7666120 a^{18} + 74512908 a^{17} - 195180519 a^{16} + 167383880 a^{15} \\
 &+27198968 a^{14} - 56943676 a^{13} + 19599668 a^{12} - 52369000 a^{11} - 6298544 a^{10} + 38745520 a^9 - 929572 a^8 \\
 &-5923128 a^7 - 5351444 a^6 + 129250 a^5 + 2055520 a^4 + 349928 a^3 - 16824 a^2 - 52083 a - 7095)x^{13} \\
 &-(296010 a^{21} - 4710860 a^{20} + 28102228 a^{19} - 78551928 a^{18} + 113670711 a^{17} - 138324240 a^{16} \\
 &+211766912 a^{15} - 82874760 a^{14} - 222674552 a^{13} + 117527764 a^{12} + 90950504 a^{11} - 3532932 a^{10} \\
 &-31988018 a^9 - 27964080 a^8 + 15257804 a^7 + 7018600 a^6 + 1879542 a^5 - 1439822 a^4 - 666356 a^3 \\
 &-311488 a^2 + 5616 a + 9993)x^{12} \\
 &+2(65780 a^{21} - 435666 a^{20} - 2152304 a^{19} + 26562304 a^{18} - 83412510 a^{17} + 91621711 a^{16} + 9863936 a^{15} \\
 &-62161212 a^{14} + 19885992 a^{13} - 15254468 a^{12} + 170416 a^{11} + 25057396 a^{10} - 8012316 a^9 - 4182934 a^8 \\
 &-3337168 a^7 + 824234 a^6 + 2855544 a^5 + 187236 a^4 - 136188 a^3 - 162965 a^2 - 32326 a + 717)x^{11} \\
 &+(80730 a^{22} - 1406680 a^{21} + 9425262 a^{20} - 30504404 a^{19} + 50679213 a^{18} - 53716728 a^{17} + 65576068 a^{16} \\
 &-30375248 a^{15} - 97017320 a^{14} + 77856552 a^{13} + 53462060 a^{12} - 23482676 a^{11} - 28598774 a^{10} \\
 &-12667184 a^9 + 18656045 a^8 + 6745888 a^7 - 1359442 a^6 - 2819988 a^5 - 653654 a^4 - 323616 a^3 \\
 &+85740 a^2 + 38826 a + 10454)x^{10} \\
 &-2(14950 a^{22} - 115874 a^{21} - 461692 a^{20} + 7399540 a^{19} - 27519845 a^{18} + 37573319 a^{17} + 364473 a^{16} \\
 &-37558788 a^{15} + 16686484 a^{14} + 1766140 a^{13} - 1080056 a^{12} + 9596248 a^{11} - 8564656 a^{10} - 149994 a^9 \\
 &-614855 a^8 + 591350 a^7 + 2403944 a^6 - 257668 a^5 - 214474 a^4 - 264359 a^3 - 48965 a^2 + 5169 a + 4669)x^9 \\
 &-(17550 a^{23} - 333500 a^{22} + 2491038 a^{21} - 9220974 a^{20} + 17608555 a^{19} - 17631096 a^{18} + 12999336 a^{17} \\
 &-2852937 a^{16} - 31850344 a^{15} + 31786484 a^{14} + 22589180 a^{13} - 19404024 a^{12} - 15043010 a^{11} \\
 &-2234512 a^{10} + 13280029 a^9 + 4344766 a^8 - 3712622 a^7 - 2956158 a^6 - 85502 a^5 - 46320 a^4 + 230616 a^3 \\
 &+44555 a^2 + 30922 a - 2913)x^8 \\
 &+2(2600 a^{23} - 23276 a^{22} - 71632 a^{21} + 1551640 a^{20} - 6770420 a^{19} + 11229510 a^{18} - 1324696 a^{17} \\
 &-14692845 a^{16} + 9211984 a^{15} + 3713768 a^{14} - 2206896 a^{13} + 1432156 a^{12} - 4834328 a^{11} + 2051428 a^{10} \\
 &+661456 a^9 - 180313 a^8 + 1148048 a^7 - 511592 a^6 - 93204 a^5 - 233355 a^4 - 22756 a^3 + 13826 a^2 \\
 &+13748 a + 2349)x^7 \\
 &+(2925 a^{24} - 60400 a^{23} + 499652 a^{22} - 2093868 a^{21} + 4579391 a^{20} - 4668784 a^{19} + 1037208 a^{18} \\
 &+2814972 a^{17} - 8063942 a^{16} + 7357328 a^{15} + 7231608 a^{14} - 8325220 a^{13} - 4680110 a^{12} + 562464 a^{11} \\
 &+5548698 a^{10} + 2113120 a^9 - 3244131 a^8 - 1786408 a^7 + 407420 a^6 + 190304 a^5 + 282012 a^4 - 24452 a^3 \\
 &+29132 a^2 - 10836 a - 3008)x^6 \\
 &-2(325 a^{24} - 3324 a^{23} - 7304 a^{22} + 230276 a^{21} - 1170325 a^{20} + 2316126 a^{19} - 622526 a^{18} - 3718123 a^{17} \\
 &+3184349 a^{16} + 1581704 a^{15} - 1391824 a^{14} - 411328 a^{13} - 1558204 a^{12} + 1609484 a^{11} + 539138 a^{10} \\
 &-474447 a^9 + 231480 a^8 - 363384 a^7 + 76464 a^6 - 107657 a^5 + 8687 a^4 + 10210 a^3 + 13934 a^2 \\
 &+2895 a - 783)x^5 \\
 &-(351 a^{25} - 7850 a^{24} + 71508 a^{23} - 336320 a^{22} + 837593 a^{21} - 919104 a^{20} - 187456 a^{19} + 1475338 a^{18} \\
 &-1613542 a^{17} + 540373 a^{16} + 1825752 a^{15} - 1924740 a^{14} - 745034 a^{13} + 247504 a^{12} + 1175442 a^{11} \\
 &+875996 a^{10} - 1460613 a^9 - 602355 a^8 + 362492 a^7 + 152960 a^6 + 193920 a^5 - 96177 a^4 + 11204 a^3 \\
 &-8950 a^2 - 3312 a - 1029)x^4 \\
 &+2(26 a^{25} - 301 a^{24} - 400 a^{23} + 21552 a^{22} - 126886 a^{21} + 295351 a^{20} - 129776 a^{19} - 557655 a^{18} \\
 &+632854 a^{17} + 323365 a^{16} - 408400 a^{15} - 220524 a^{14} - 260692 a^{13} + 547678 a^{12} + 163080 a^{11} \\
 &-252143 a^{10} - 23100 a^9 - 119522 a^8 + 89740 a^7 - 21911 a^6 + 8842 a^5 - 3967 a^4 + 6324 a^3 + 279 a^2 \\
 &-1630 a + 97)x^3 \\
 &+(27 a^{26} - 652 a^{25} + 6507 a^{24} - 34092 a^{23} + 96059 a^{22} - 117368 a^{21} - 57708 a^{20} + 317884 a^{19} \\
 &-240826 a^{18} - 138842 a^{17} + 339933 a^{16} - 187044 a^{15} - 26910 a^{14} - 27664 a^{13} + 46815 a^{12} + 280112 a^{11} \\
 &-328981 a^{10} - 99662 a^9 + 116915 a^8 + 35872 a^7 + 83124 a^6 - 74950 a^5 + 6430 a^4 - 2676 a^3 + 2464 a^2 \\
 &-298 a + 343)x^2 \\
 &-2(a^{25} - 13 a^{24} - 6 a^{23} + 956 a^{22} - 6495 a^{21} + 17575 a^{20} - 11039 a^{19} - 37833 a^{18} + 55617 a^{17} \\
 &+27213 a^{16} - 48066 a^{15} - 29624 a^{14} - 15864 a^{13} + 73810 a^{12} + 18283 a^{11} - 46449 a^{10} - 13188 a^9 \\
 &-14654 a^8 + 25023 a^7 - 1053 a^6 + 1133 a^5 - 4803 a^4 + 1469 a^3 - 267 a^2 + 433 a + 161)ax \\
 &-18744 a^7 + 19546 a^{19} - 27491 a^{20} + 1649 a^4 + 7192 a^{22} - 3890 a^5 - 1744 a^3 - 10895 a^9 \\
 &+18947 a^6 + 27291 a^{11} + 5879 a^{10} - 44922 a^{12} + 357 a^2 - 4486 a^{15} + 696 a^8 - a^{27} + 16912 a^{14} \\
 &+16921 a^{13} - 33433 a^{17} + 1641 a^{24} + 4648 a^{21} - 1219 a^{16} - 5197 a^{23} + 26551 a^{18} - 283 a^{25}
 \end{aligned}$$

$$+26 a^{26} + 343 - 343 a$$

Para a classe D: $A = U_{10}^2 V_{10}^2 W_{10}^2$

$$\begin{aligned}
 U_{10} &= x^{12} - 6ax^{10} + 4x^9 + (15a^2 - 4a - 2)x^8 - 16ax^7 - 4(5a^2 - 4a - 2)ax^6 + 24a^2x^5 \\
 &\quad + (15a^4 - 24a^3 - 12a^2 + 4a + 1)x^4 - 16a^3x^3 - 2(3a^4 - 8a^3 - 4a^2 + 4a + 1)ax^2 + 4a^4x \\
 &\quad + a^6 - 4a^5 - 2a^4 + 4a^3 + a^2 - 1 \\
 V_{10} &= x^{24} - 6(2a + 1)x^{22} + 10x^{21} + 3(22a^2 + 18a + 5)x^{20} - 50(2a + 1)x^{19} \\
 &\quad - (220a^3 + 210a^2 + 90a - 11)x^{18} + 2(225a^2 + 185a + 51)x^{17} \\
 &\quad + (495a^4 + 450a^3 + 183a^2 - 191a - 109)x^{16} - 8(150a^3 + 145a^2 + 62a + 10)x^{15} \\
 &\quad - 4(198a^5 + 135a^4 + 6a^3 - 235a^2 - 190a - 48)x^{14} + 2(1050a^4 + 980a^3 + 388a^2 + 44a - 7)x^{13} \\
 &\quad + 2(462a^6 + 126a^5 - 273a^4 - 1110a^3 - 1046a^2 - 438a - 82)x^{12} \\
 &\quad - 2(1260a^5 + 910a^4 - 24a^3 - 336a^2 - 198a - 27)x^{11} \\
 &\quad - (792a^7 - 252a^6 - 1092a^5 - 2890a^4 - 2888a^3 - 1352a^2 - 480a - 99)x^{10} \\
 &\quad + 2(1050a^6 + 350a^5 - 830a^4 - 940a^3 - 629a^2 - 199a - 1)x^9 \\
 &\quad + (495a^8 - 540a^7 - 1050a^6 - 2066a^5 - 2030a^4 - 532a^3 - 196a^2 - 263a - 76)x^8 \\
 &\quad - 2(600a^7 - 140a^6 - 1144a^5 - 920a^4 - 676a^3 - 414a^2 - 64a + 19)x^7 \\
 &\quad - (220a^9 - 450a^8 - 552a^7 - 636a^6 - 584a^5 + 592a^4 + 672a^3 - 126a^2 - 248a - 57)x^6 \\
 &\quad + 2(225a^8 - 220a^7 - 732a^6 - 300a^5 - 129a^4 - 318a^3 - 170a^2 + a + 15)x^5 \\
 &\quad + (66a^{10} - 210a^9 - 141a^8 + 100a^7 + 20a^6 + 556a^5 + 852a^4 + 210a^3 - 224a^2 - 147a - 23)x^4 \\
 &\quad - 2(50a^9 - 95a^8 - 232a^7 + 64a^6 + 202a^5 - 55a^4 - 152a^3 - 55a^2 + 10a + 10)x^3 \\
 &\quad - (12a^{11} - 54a^{10} - 6a^9 + 125a^8 + 8a^7 + 56a^6 + 320a^5 + 241a^4 - 8a^3 - 91a^2 - 46a - 5)x^2 \\
 &\quad + 2(a + 1)(5a^9 - 20a^8 - 9a^7 + 53a^6 + 40a^5 - 19a^4 - 26a^3 - 11a^2 + 6a + 4)x \\
 &\quad - 1 - 13a - 44a^7 + 44a^4 - 13a^8 + 69a^5 - a^3 + 25a^9 + 20a^6 - 6a^{11} + 3a^{10} + a^{12} - 23a^2 \\
 W_{10} &= x^{24} + 12x^{23} - 6(2a - 11)x^{22} - 2(66a - 113)x^{21} + 3(22a^2 - 222a + 185)x^{20} \\
 &\quad + 6(110a^2 - 350a + 177)x^{19} - (220a^3 - 3030a^2 + 4770a - 1657)x^{18} \\
 &\quad - 6(330a^3 - 1455a^2 + 1409a - 359)x^{17} + 3(165a^4 - 2730a^3 + 6065a^2 - 4063a + 785)x^{16} \\
 &\quad + 4(990a^4 - 5340a^3 + 7398a^2 - 3648a + 541)x^{15} \\
 &\quad - 4(198a^5 - 3645a^4 + 10110a^3 - 9753a^2 + 3658a - 412)x^{14} \\
 &\quad - 2(2772a^5 - 17010a^4 + 29820a^3 - 21252a^2 + 6130a - 501)x^{13} \\
 &\quad + 2(462a^6 - 8946a^5 + 28875a^4 - 35458a^3 + 19274a^2 - 4230a + 218)x^{12} \\
 &\quad + 2(2772a^6 - 18396a^5 + 38010a^4 - 34608a^3 + 14490a^2 - 2314a + 37)x^{11} \\
 &\quad - 3(264a^7 - 5124a^6 + 18340a^5 - 26682a^4 + 18568a^3 - 5928a^2 + 600a + 27)x^{10} \\
 &\quad - 2(1980a^7 - 13650a^6 + 31626a^5 - 34230a^4 + 18370a^3 - 4279a^2 + 137a + 51)x^9 \\
 &\quad + (495a^8 - 9180a^7 + 35070a^6 - 57462a^5 + 47570a^4 - 19508a^3 + 2908a^2 + 261a - 74)x^8 \\
 &\quad + 2(990a^8 - 6840a^7 + 17052a^6 - 20832a^5 + 13310a^4 - 3996a^3 + 194a^2 + 144a - 23)x^7 \\
 &\quad - (220a^9 - 3690a^8 + 14520a^7 - 25684a^6 + 23960a^5 - 11712a^4 + 2288a^3 + 298a^2 - 192a + 27)x^6 \\
 &\quad - 2(330a^9 - 2205a^8 + 5676a^7 - 7476a^6 + 5382a^5 - 1939a^4 + 130a^3 + 142a^2 - 53a + 9)x^5 \\
 &\quad + (66a^{10} - 930a^9 + 3615a^8 - 6612a^7 + 6612a^6 - 3636a^5 + 876a^4 + 138a^3 - 164a^2 + 57a - 9)x^4 \\
 &\quad + 2(66a^{10} - 410a^9 + 1035a^8 - 1392a^7 + 1070a^6 - 442a^5 + 41a^4 + 56a^3 - 37a^2 + 14a - 2)x^3 \\
 &\quad - (12a^{11} - 126a^{10} + 450a^9 - 801a^8 + 808a^7 - 472a^6 + 136a^5 + 21a^4 - 48a^3 + 33a^2 - 10a + 1)x^2 \\
 &\quad - 2(a - 1)(6a^9 - 27a^8 + 48a^7 - 45a^6 + 25a^5 - 8a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 3a + 2)ax \\
 &\quad + a - 1 - 12a^7 - 2a^4 - a^2 + 19a^8 + a^5 + 3a^3 - 21a^9 + 4a^6 - 6a^{11} + 15a^{10} + a^{12}
 \end{aligned}$$

Apêndice D

Artigos Publicados

- ENDLER,A.; GALLAS J.A.C. Existence and characterization of stable ghost orbits in the Hénon map. *Physica A*, Amsterdam, v. 344, n. 3-4, p. 491-497, Dec. 2004.
- ENDLER,A.; GALLAS J.A.C. Reductions and simplifications of orbital sums in a Hamiltonian repeller, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 352, n. 1-2, p. 124-128, Mar. 2006.
- ENDLER,A.; GALLAS J.A.C. Conjugacy classes and chiral doublets in the Henon Hamiltonian repeller, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 356, n. 1, p. 1-7, Jul 2006.
- ENDLER,A.; GALLAS J.A.C. Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Paris, v. 342, n. 9, p. 681-684, May 2006.

Referências

- [1] HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, Berlin, v. 50, n. 1, p. 69-77, Sept. 1976.
- [2] BALMSFORTH, N.J.; CVITANOVIĆ, P.; IERLEY, G.R.; SPIEGEL, E.A.; VATTAY, G. *Annals of the New York Academy of Sciences* **706**, 148 (1993); [chao-dyn/9307011](#).
- [3] DEVANEY, R.; NITECKI, Z. Shift automorphisms in the Hénon mapping. *Comm. Math. Phys.*, New York, v. 67, n. 2, p. 137-146, June 1979.
- [4] ENDLER, A. *Aspectos Algébricos de Sistemas Dinâmicos*, 2002, 123 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.
- [5] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Period four stability and multistability domains for the Hénon map. *Physica A*, Amsterdam, v. 295, n. 1-2, p. 285-290, Jun. 2001.
- [6] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Arithmetical signatures of the dynamics of the Henon map. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 65, n. 3, 036231, Mar. 2002.
- [7] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Existence and characterization of stable ghost orbits in the Hénon map. *Physica A*, Amsterdam, v. 344, n. 3-4, p. 491-497, Dec. 2004.
- [8] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Structure of the prototype period-5 stability island in the Hénon map. preprint.
- [9] CVITANOVIĆ, P.; ARTUSO, R.; MAINIERI, R.; TANNER, G.; VATTAY, G. *Chaos: Classical and Quantum*, [ChaosBook.org](#), (Niels Bohr Institute, Copenhagen, 2005).
- [10] veja [ChaosBook.org/version11](#), Tabela 17.2 e exercício 17.12.
- [11] STEWART, I.N.; TALL, D.O., *Algebraic Number Theory*, 2nd edition (Chapman and Hall, London, 1994).
- [12] COHEN, H. *A Course in Computational Algebraic Number Theory* Graduate Texts in Mathematics, vol. **138**, (Springer, Berlin, 1993).
- [13] NARKIEWICZ, W. *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Springer Monographs in Mathematics, 3rd ed., (Springer, New York, 2004).
- [14] GALLAS, J.A.C. Structure of the parameter space of a ring cavity. *Appl. Phys. B*, New York, v. 60, n. 2-3, p. S203-S213, 1995.
- [15] BEIMS, M.W. ; GALLAS, J.A.C. Accumulation points in nonlinear parameter-lattices. *Physica A*, Amsterdam, v. 238, n. 1-4, p. 225-224, Apr. 1997.

-
- [16] KAWAKAMI, H. Table of rotation sequences of $x_{n+1} = x_n^2 - \lambda$. in G. Ikegami, ed., *Dynamical Systems and Nonlinear Oscillations*, pp. 73-92, (World Scientific, Singapore, 1986).
- [17] MIRA, C *Chaotic Dynamics - From one dimensional endomorphism to two dimensional diffeomorphism*, (World Scientific, Singapore, 1987).
- [18] SANNAMI, A. A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family, *Japan J. Appl. Math.*, v. 6, p. 291-300, 1989.
- [19] GRASSBERGER, P; KANTZ,H; MÖNIG, U On the symbolic dynamics of the Henon map, *J. Phys. A*, Bristol, v. 22, n. 24, p. 5217-5230, Dec. 1989.
- [20] LAMB, J.S.W.; ROBERTS, J.A.G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey, *Physica D*, Amsterdam, v. 112, n. 1-2, p. 1-39, Jan. 1998.
- [21] STERLING, D.G.; DULLIN, H.R.; MEISS, J.D., Homoclinic Bifurcations for the Hénon Map, *Physica D*, Amsterdam, v. 134, n. 2, p. 153-184, Oct. 1999.
- [22] EISELE, M; *J. Phys. A* **32**, 1533 (1999); *Vereinfachung generierender Partitionen von chaotischen Attraktoren*, Berichte des Forschungszentrum Jülich, report Jül-3021, p. 1-204, January 1995.
- [23] COLLINS, P.; KRAUSKOPF, B. Entropy and bifurcations in a chaotic laser, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 66, n. 5, 056201, Nov. 2002.
- [24] STERLING, D.G.; MEISS, J.D. Computing periodic orbits using the anti-integrable limit, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 241, n. 1-2, p. 46-42, Apr. 1999.
- [25] DAVIDCHACK R.L.; LAI, Y.-C.; BOLLT, E. M.; DHAMALA, M. Estimating generating partitions of chaotic systems by unstable periodic orbits, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 61, n. 2, p. 1353-1356, Feb. 2000.
- [26] KENNEL,M.B.; BUHL, B. Estimating good discrete partitions from observed data: Symbolic false nearest neighbors, *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 91, n. 8, 84102, Aug. 2003.
- [27] DAW, C.S.; FINNEY,C.E.A. ; TRACY, E.R. A review of symbolic analysis of experimental data, *Rev. Sci. Instrum.*, Melville, v. 74, n. 2, p. 915-930, Feb. 2003.
- [28] HIRATA, Y.; JUDD,K.; KILMINSTER, D. Estimating a generating partition from observed time series: Symbolic shadowing, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 77, n. 1, 016215 part 2, Jul. 2004.
- [29] GALLAS, J.A.C. Structure of the parameter space of the Henon map, *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 70, n. 18, p. 2714-2717, May 1993.
- [30] HUNT, B.R.; GALLAS, J.A.C.; GREBOGI, C.; YORKE, J.A.; KOÇAK, H. Bifurcation rigidity, *Physica D*, Amsterdam, v. 129, n. 1-2, p. 35-56, May 1999.
- [31] GALLAS, J.A.C. Infinite hierarchies of nonlinearly dependent periodic orbits, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 63, n. 1, p. 016216, Jan. 2001. Nonlinear dependencies between sets of periodic orbits, *Europhys. Lett.*, Les Ulis, v. 47, n. 6, p. 649-655, Sep. 1999.
- [32] GALLAS, J.A.C. On the origin of periodicity in dynamical systems, *Physica A*, Amsterdam, v. 283, n. 1-2, p. 17-23, Aug. 2000.

- [33] SINHA, S.; DITTO, W.L. Dynamics based computation, *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 81, n. 10, p. 2156-2159, Sept. 1999;
- [34] CROFTS, J.J.; DAVIDCHACK, R.L. Efficient detection of periodic orbits in chaotic systems by stabilising transformations, *Siam Journal on Scientific Computing*, Philadelphia, v. 28, n. 4, p. 1275-1288, 2006.
- [35] FRIEDLAND, S.; MILNOR, J. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory and Dynam. Syst.*, New York, v. 9, Part 1, p. 67-99, Mar. 1989.
- [36] DEVANEY, R.L. Reversible diffeomorphisms and flows, *Trans. Am. Math. Soc.*, Providence, v. 218, p. 89-316, Apr. 1976.
- [37] M.B. SEVRYUK, Reversible Systems, in: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1211 (Springer, New York, 1986).
- [38] GÓMEZ, A.; MEISS, J.D. Reversible polynomial automorphisms of the plane: the involutory case, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 312, n. 49, p. 49-58, Jun. 2003. Reversors and symmetries for polynomial automorphisms of the complex plane, *Nonlinearity*, Bristol, v. 17, n. 3, p. 975-1000, May 2004.
- [39] BAAKE, M. ; ROBERTS, J.A.G Symmetries and reversing symmetries of polynomial automorphisms of the plane, *Nonlinearity*, Bristol, v. 18, n. 2, p. 791-816, Mar. 2005.
- [40] GILMORE, R. Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Rev. Mod. Phys.*, Woodbury, v. 70, n. 4, p. 1455-1529 part. 2, Oct. 1998.
- [41] R. BLÜMEL and W.P. REINHARDT, *Chaos in Atomic Physics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [42] *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, edited by V. I. LERNER, J. P. KEATING, and D. E. KHMELNITSKII, NATO ASI Series 370 (Kluwer, New York, 1999);
- [43] BRAUN, D. Spectral properties of dissipative chaotic quantum maps, *Chaos*, Woodbury, v. 9, n. 3, p. 730-737, Sep. 1999.
- [44] BAZZANI, A.; SERVIZI, G.; TODESCO, E.; TURCHETTI, G. Normal form approach to the theory of nonlinear betatronic motion, CERN Yellow Report 94/02 (1994).
- [45] TODESCO, E. Analysis of resonant structures of four-dimensional symplectic mappings, using normal forms. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 50, n. 6, p. R4298-R4301, Dec. 1994.
- [46] PALLA, G.; VATTAY, G.; VOROS, A. Trace formula for noise corrections to trace formulas, *Phys. Rev.*, Woodbury, v. 64, n. 1, 012104 part 1, Jul. 2001.
- [47] DE ALMEIDA, A.M.O; LEWENKOPF, C.H.; TOMSOVIC, S. On resumming periodic orbits in the spectra of integrable systems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Bristol, v. 35, n. 49, p. 10629-10642, Dec. 2002.
- [48] DEMBOWSKI, C; DIETZ, B.; GRÄF, H.-D.; HEINE, A. PAPPENBROCK, T; RICHTER, A. ; RICHTER, C. Experimental test of a trace formula for a chaotic three-dimensional microwave cavity, *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 89, n. 6, 064101, Aug. 2002.
- [49] SONDERGAARD, N. ; TANNER, G. Wave chaos in the elastic disk, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 66, n. 6, 066211 part 2, Dec. 2002.

- [50] SAKHR, J.; WHELAN, N.D. Semiclassical trace formulas for noninteracting identical particles, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 67, n. 6, 066213 part 2, Jun. 2003.
- [51] KAIDEL, J. ; BRACK, M. Semiclassical trace formulas for pitchfork bifurcation sequences, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 70, n. 1, p. 016206 part 2, Jul. 2004.
- [52] KAIDEL, J.; WINKLER, P.; BRACK, M. Periodic orbit theory for the Henon-Heiles system in the continuum region, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 70, n. 6, 066208 part 2, Dec. 2004.
- [53] GARCÍA - MATA, I.; SARACENO, M. Spectral properties and classical decays in quantum open systems, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 69, n. 5, 056211 part 2, May 2004.
- [54] BOLLT, E.M., STANFORD, T; Lai, Y.C.; ZYCZCZKOWSKI, K. Validity of threshold-crossing analysis of symbolic dynamics from chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 85, n. 16, p. 3524-3527, Oct. (2000).
- [55] CATS Cyclist Team. Webbok. Disponível em: <http://www.nbi.dk/ChaosBook/> Acesso em: 25/12/2006
- [56] DULLIN, H.R.; MEISS, J.D.; STERLING, D.G. Symbolic codes for rotational orbits, *SIADS (SIAM Journal on Applied Dynamical Systems)*, Philadelphia, v. 4, n. 3, p. 515-562, 2005.
- [57] MANDELBROT, B.B. *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W.H. Freeman and Co., 1983, 495 p. (Oxford University Press, Oxford, 2000).
- [58] HILBORN, R.C. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2nd edition, (Oxford University Press, Oxford, 2000).
- [59] BONOOT, S. Modèle topologique pour les applications de Hénon complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Paris, v. 340, n. 4, p. 291-294, Feb. 2005.
- [60] BONATTO, C; GARREAU, J.C.; GALLAS, J.A.C. Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser, *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 95, n. 14, p. 143905, Sep 2005.
- [61] EL HAMOULY, H.; MIRA, C. Lien entre les propriétés d'un endomorphisme de dimension un et celle d'un difféomorphisme de dimension deux, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Paris, v. 293, n. 10, p. 525-528, 1981.
- [62] EL HAMOULY, H.; MIRA, C. Singularités dues au feuilletage du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bi-dimensionnel, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Paris, v. 294, n. 12, p. 387-390, 1982.
- [63] WHITLEY, D.C. Discrete dynamical systems in dimensions one and two, *Bull. London Math. Soc.*, London, v. 15, p. 177-217, May 1983.
- [64] HOLMES, P. ; WHITLEY, D.C. Bifurcations in 1D and 2D maps. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, London, v. 311, n. 1515, p. 43-102, 1984.
- [65] MIRA, C.; CARCASSES, J.P., BOSHH, M.; SIMÓ, C.; TATJER, J.C. "Crossroad area - spring area" transition (I) parameter plane representation, *Internat. J. Bifurc. Chaos* 1, Singapore, v. 1, n. 1, p. 183-196, Mar. 1991.
- [66] BENEDICKS, M; CARLESON, L. The dynamics of the Hénon map, *Ann. Math.*, Princeton, v. 133, n. 1, p. 73-169, Jan. 1991.

- [67] GALLAS, J.A.C. Structure of the parameter space of the Hénon map, *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 70, n. 18, p. 2714-2717, May 1993.
- [68] HUBBARD, J.H.; OBERSTE-VORTH, R.W. Hénon mappings in the complex domain I: the global topology of dynamical space, *Pub. Math. IHÉS*, Bures-sur-Yvette, v. 79, p. 5-46, 1994.
- [69] EPSTEIN, A.; YAMPOLSKY, M. Geography of the cubic connectedness locus: intertwining surgery, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, Paris, v. 32, n. 2, p. 151-185, Mar.-Apr. 1999.
- [70] BEDFORD, E.; SMILLIE, J. Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . VII. Hyperbolicity and external rays, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, Paris, v. 32, n. 4, p. 455-497, Jul.-Aug.1999.
- [71] SIBONY, N. Dynamiques des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , in *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, Panor. Synthèses, v. 8, p. 97-185, Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [72] MAEGAWA, K. On a normality condition for iterates of birational maps of \mathbb{P}^k , *Erg. Th. & Dyn. Sys.*, New York, v. 25, Part 3, p. 913-920, Jun. 2005.
- [73] ENDLER, A.; GALLAS J.A.C., Reductions and simplifications of orbital sums in a Hamiltonian repeller, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 352, n. 1-2, p. 124-128, Mar. 2006.
- [74] ENDLER, A.; GALLAS J.A.C., Conjugacy classes and chiral doublets in the Henon Hamiltonian repeller, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 356, n. 1, p. 1-7, Jul 2006.
- [75] ENDLER, A.; GALLAS J.A.C., Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, Paris, v. 342, n. 9, p. 681-684, May 2006.
- [76] DEVANEY, R.L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, (Addison-Wesley, Redwood, 1989).
- [77] TAN LEI, editor, *The Mandelbrot Set: Themes and Variations*, London Math. Soc. Lecture Notes Series (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [78] BRISKORN, E.; KNÖRRER, H. *Plane Algebraic Curves*, (Birkhäuser, Basel, 1986).
- [79] KUŚ, M.; HAAKE F.; DELANDE, D. Prebifurcation of Periodic Ghost Orbits in Semiclassical Quantization. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 71, n. 14, p. 2167-2171, Oct. 1993.
- [80] ISAEVA, O.B.; KUZNETSOV, S.P.; PONOMARENKO, V.I. Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 64, n. 5, 055201 Part 2, Nov. 2001.
- [81] GALLAS, J.A.C. Counting orbits in conjugacy classes of the Hénon Hamiltonian repeller, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 360, n. 4-5, p. 512-514, Jan. 2007.