UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MICHELSCH JOÃO DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Porto Alegre, RS

2014

MICHELSCH JOÃO DA SILVA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em cumprimento a requisito obrigatório para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Professor Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2014

Michelsch João da Silva

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, março de 2014.

____

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dra. Marcia Rodrigues Notare Meneghetti (IM-DMPA-UFRGS)

____

Prof. Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin (IM/UFRGS)

____

Prof. Dra. Kelen Berra de Mello (IFRS)

Dedico esse trabalho aos meus pais, João e Arlete, que na simplicidade de suas formações, foram meus maiores orientadores, dedicadamente ensinando-me a ter esperança e a superar as dificuldades com dignidade, caráter e fé.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, João e Arlete, e aos meus irmãos, Maurício e Maria, pelo apoio e encorajamento para seguir em busca desse sonho.

Aos meus queridos amigos de turma, Cláudia, Betânia, Daner e Eduardo Pomper, pelos inúmeros momentos de apoio e incentivo e pelo carinho destinado, que certamente, serão eternos.

Ao meu querido amigo Rodrigo Schroer, pela amizade, compreensão, apoio e paciência.

Ao David, pelo que representa, pela compreensão, incentivo constante e por me ajudar na construção e formatação desse trabalho.

Aos ex-colegas do Curso e Colégio Energia, especialmente à Thaís, André Pinto, André Gil e Betina, pelo apoio nesse processo.

Aos meus amigos do Instituto Federal, especialmente à Tatiana, Daiane e Sabrina, pelo incentivo constante para conclusão deste trabalho.

Aos alunos do Curso e Colégio Energia, pela importante participação nesta pesquisa.

À Direção do Curso Colégio Energia, Janete Becker, e à coordenação, Lorena Xavier, pelo espaço proporcionado para a aplicação da proposta desse trabalho.

Aos docentes do PPGEMat, pela dedicação assentada nos alunos que compõe nosso grupo de mestrado.

Ao professor Marcus, pelas inúmeras contribuições em minha profissional nos 18 meses de disciplina e pela oportunidade de dividir com ele momentos tão gratificantes na produção desse trabalho. Sou grato principalmente, pela confiança em mim depositada para a elaboração deste.

RESUMO

Este estudo descreve momentos da investigação de um trabalho aplicado em uma turma de uma escola da rede privada de ensino de Florianópolis. Aborda o estudo dos Sistemas de Equações Lineares de Duas Variáveis no Ensino Fundamental. Apresenta uma revisão do conteúdo na forma como se encontra nos livros didáticos, seguido da aplicação de uma sequência didática que inverte a forma de se trabalhar o conteúdo, dando enfoque geométrico para a solução dos sistemas de equações. A fundamentação teórica foi baseada nas Representações Semióticas e no uso de Tecnologias na Educação, acreditando, por meio da teoria de Duval, que a chave para o aprendizado do objeto matemático está nas conversões. Para o desenvolvimento dessa sequência, fez-se uso do software livre Geogebra. Finaliza com as considerações sobre os resultados obtidos com a aplicação da sequência didática proposta nesse trabalho. Apresenta Apêndice com o produto final, sugerindo que outros professores façam uso da mesma para o ensino desse conteúdo.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Ensino Fundamental. Representações Semióticas. Tecnologias. Geogebra.

ABSTRACT

This study describes the stages of the research work applied to a class in a private school education in Florianopolis. Approaches the study of Systems of Linear Equations in Two Variables in Elementary Education. Presents a review of the content in the way it is in textbooks, followed by the application of an instructional sequence that reverses the way to work content, giving geometric approach to solving systems of equations. The theoretical framework was based on representations Semiotics and the use of technology in education, believing, through the theory of Duval, the key to learning the mathematical object is in conversions. For the development of this sequence, made use of free software Geogebra. Concludes with considerations about the results obtained from the application of instructional sequence proposed in this work. Appendix presents with the final product, suggesting that other teachers make use of it for teaching that content.

Key-words: Linear Systems. Elementary Education. Representations Semiotics. Technologies. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação geométrica de um sistema de duas equações na escala A..............18
Figura 2 – Representação geométrica de um sistema de duas equações na escala B...............19
Figura 3 – Representação gráfica de um sistema linear de duas equações..............................19
Figura 4 – Representação algébrica de um sistema linear de duas equações. 20
Figura 5 – Problematização de Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 1. 3737
Figura 6 – Resolução pelo método da substituição no livro 1. 38
Figura 7 – Resolução pelo método da adição no livro 1. 39
Figura 8 – Problematização de Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 2. 40
Figura 9 – Resolução pelo método da substituição no livro 2. 41
Figura 10 – Resolução pelo método da comparação no livro 2...42
Figura 11 – Lista de exercícios do livro 2. 43
Figura 12 – Problematização de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3...........45
Figura 13 – Problematização de Par Ordenado no livro 3...46
Figura 14 – Conceito de Par Ordenado no livro 3. 47
Figura 15 – Representação geométrica de Par Ordenado no livro 3. 47
Figura 16 – Exercício 5 do livro 3. 48
Figura 17 – Definição de Equação do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3. 48
Figura 18 – Exercício 10 do livro 3. 49
Figura 19 – Problematização de Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3...50
Figura 20 – Variação dos registros do Sistema de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3...51
Figura 21 – Exercício 19 do livro 3. 52
Figura 22 – Apresentação do Geogebra feita pelo autor do trabalho. 900
Figura 23 – Resposta do exercício aula 01 (dupla D). 911
Figura 24 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 02 (dupla A). 922
Figura 25 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 02 (dupla A)................933
Figura 26 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 02 (dupla B). 933
Figura 27 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 02 (dupla A)................944
Figura 28 – Resposta manuscrita do exercício 02 aula 02 (dupla B). 95

Figura 29 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 03 (dupla A). 966
Figura 30 – Enunciado parcial do exercício 02 aula 03. 977
Figura 31 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 03 (dupla E)..........................977
Figura 32 – Resposta completa manuscrita do exercício 02 aula 03 (dupla A). 988
Figura 33 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 03 (dupla A)..............9999
Figura 34 – Resposta manuscrita do exercício 03 aula 03 (dupla F).......................................99
Figura 35 – Enunciado do exercício 01 aula 04. 101
Figura 36 – Resposta completa manuscrita do exercício 01 aula 04 (dupla D). 1022
Figura 37 – Resposta parcial manuscrita do exercício 01 aula 04 (dupla B). 1033
Figura 38 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 04 (dupla B)..............1033
Figura 39 – Enunciado do exercício 02 aula 04. 1044
Figura 40 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 04 (dupla G). 1055
Figura 41 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 04 (dupla A). 1066
Figura 42 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 04 (dupla A)..............1066
Figura 43 – Resposta manuscrita do exercício 04 aula 05 (dupla F)...................................1088
Figura 44 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 04 aula 05 (dupla F). 10808
Figura 45 – Observação realizada pela dupla A. 10808
Figura 46 – Observação realizada pela dupla C. 10909
Figura 47 – Observação realizada pela dupla G. 1099
Figura 48 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 06 (dupla D). 1100
Figura 49 – Resposta manuscrita do exercício 02 aula 06 (dupla E). 1111
Figura 50 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 06 (dupla E). 1111
Figura 51 – Resposta manuscrita do exercício 03 e 04 aula 06 (dupla A). 1122
Figura 52 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 07 (dupla A). 1143
Figura 53 – Enunciado parcial do exercício 02 aula 07. 1154
Figura 54 – Resposta manuscrita do exercício 03 aula 07 (dupla I)...................................1155
Figura 55 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 03 aula 07 (dupla I). 1165
Figura 56 – Resposta manuscrita do exercício 04 aula 07 (dupla E). 1166
Figura 57 – Enunciado do exercício 01 aula 08. 1187
Figura 58 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 08 (dupla I). 11918
Figura 59 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 08 (dupla I)..................................11918
Figura 60 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 08 (dupla A). 1209
Figura 61 – Enunciado do exercício 03 aula 08. 1210
Figura 62 – Resposta manuscrita do exercício 03 aula 08 (dupla E). 1210

Figura 63 – Observação realizada pela dupla A. 1221
Figura 64 – Resposta manuscrita dos exercícios 01, 02 e 03 aula 09 (dupla D). 1232
Figura 65 – Enunciado dos exercícios 04, 05 e 06 aula 09. 1243
Figura 66 – Enunciado do exercício aula 10. 1265
Figura 67 – Resposta manuscrita dos itens c) e d) do exercício aula 10 (dupla D)............. 1276
Figura 68 – Construção realizada para resposta do item c) do exercício aula 10 (dupla D).1276
Figura 69 – Construção realizada para resposta do item d) do exercício aula 10 (dupla D).1287
Figura 70 – Observação realizada pela dupla A. 1298
Figura 71 – Observação realizada pela dupla C. 12928
Figura 72 – Observação realizada pela dupla C. 12928

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - LIVROS DIDÁTICOS UTILIZADOS PARA ANÁLISE.................................36
TABELA 2 – DESCRIÇÃO DAS INSTALAÇÕES DO CAMPO DE PESQUISA. 588
TABELA 3 – DESCRIÇÃO DO QUADRO FUNCIONAL DO CAMPO DE PESQUISA. 599

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 144

1.1 OBJETIVOS..15

2 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS..17

3 TECNOLOGIAS NO ENSINO 2727

3.1 ERA TECNOLÓGICA E CONHECIMENTO 27

3.2 ESPAÇO E TEMPO DOCENTE 28

3.3 O PROFESSOR DIANTE DAS NOVAS TECNOLOGIAS 30

3.4 O USO DE TECNOLOGIA NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA 33

4 SISTEMAS LINEARES NOS LIVROS DIDÁTICOS 35

4.1 MATEMÁTICA: PROJETO RADIX – 7ª SÉRIE – JACKSON E ELIZABETH – 2005 36

4.2 A CONQUISTA DA MATEMÁTICA – 7º ANO – JOSÉ RUY GIOVANNI JR E BENEDICTO CASTRUCCI – 2009 40

4.3 MATEMÁTICA: BIANCHINI – 7º ANO – EDWALDO BIANCHINI – 2011 44

4.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS NESTE ESTUDO 53

5 PROCEDIMENTOS E MATERIAIS...54

5.1 PROCEDIMENTOS...54

5.1.1 Estudo de caso..544

5.1.1.1 O que é um estudo de caso?..544

5.1.1.2 Características de um estudo de caso 566

5.1.2 Coleta de dados 577

5.1.3 Caracterização da escola: campo de pesquisa 577

5.1.3.1 Descrição das instalações da unidade escolar 588

5.1.3.2 Descrição do quadro funcional...599

5.1.3.3 Pressupostos teóricos e metodológicos de concepção de ensino e aprendizagem 599

5.1.3.4 Perfil do aluno 60

5.1.3.5 Perfil do professor 60

5.1.3.6 Organização curricular 61

5.1.3.7 Grade Curricular...61

5.1.3.8 Avaliação...62

5.2 MATERIAIS 62

5.2.1 A sequência didática...633

6 ANÁLISE DE DADOS...899
6.1 1º ENCONTRO: FAMILIARIZAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA E ALGUNS RECURSOS BÁSICOS...899
6.2 2º ENCONTRO: DETERMINANDO SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS...92
6.3 3º ENCONTRO: VERIFICANDO SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS...966
6.4 4º ENCONTRO: RESOLVENDO SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES E DUAS VARIÁVEIS POR MEIO DE PROBLEMAS 100
6.5 5º ENCONTRO: RESOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS 1077
6.6 6º ENCONTRO: UTILIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES PARA RESOLVER PROBLEMAS 1099
6.7 7º ENCONTRO: MAS SEMPRE EXISTE UM PONTO DE INTERSECÇÃO ENTRE DUAS RETAS?...1122
6.8 8º ENCONTRO: E SE AS RETAS FOREM AS MESMAS?.......................................1176
6.9 9º ENCONTRO: RESOLVENDO PROBLEMAS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES..12221
6.10 10º ENCONTRO: CLASSIFICANDO SISTEMAS 1243
7 CONCLUSÃO...13130
REFERÊNCIAS 1342
APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO 1364
APÊNDICE B – CONTRATO DE PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS EDUCACIONAIS 1375
APÊNDICE C – PRODUTO FINAL...1408

1 INTRODUÇÃO

Enquanto professores de matemática, vivemos na incessante busca de despertar e estimular nos alunos o prazer de aprender essa disciplina. Sabendo que a matemática desempenha tradicionalmente um papel de exclusão na vida estudantil e é considerada uma disciplina difícil para os alunos (em sua maioria), estamos à procura de uma proposta inovadora para abordar Sistemas de Equações de Duas Variáveis com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Retomando minha vida profissional como docente, que se inicia em 2002, percebo que o ensino de Sistema de Equações neste nível de ensino sempre esteve voltado para a resolução algébrica. Relembrando os livros que foram adotados nas escolas que trabalhei ao longo desses 12 anos, é possível perceber que a visão geométrica para solucionar esses problemas torna-se secundária. Ao conversar com alguns colegas professores da disciplina de maneira informal, verifico que apresentam a mesma angústia em relação ao efetivo aprendizado do conteúdo.

Reconhecendo o ensino de Sistemas Lineares como um conteúdo de fundamental importância para alunos de 7º ano, Ensino Médio e Ensino Superior, buscamos por meio desse trabalho analisar a viabilidade do ensino de Sistemas de Duas Equações Lineares e Duas Variáveis a partir de uma visão geométrica.

Essa pesquisa busca, por meio da análise de livros didáticos, verificar como o conteúdo de Sistemas Lineares é abordado no Ensino Fundamental e propõe uma alternativa na forma de trabalhar tal objeto matemático nas turmas de 7º ano. Para isso, é elaborada uma sequência didática que se encontra voltada para a interpretação de problemas e compreensão das soluções dos sistemas na forma geométrica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais recomendam, entre outros objetivos para o Ensino Fundamental, que os alunos sejam capazes de "saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos." (BRASIL, 1997, p. 69)

Seguindo tal orientação em relação ao uso dos recursos tecnológicos, utilizamos, para elaborar a sequência, o software Geogebra. Fizemos esta escolha também porque as leituras realizadas durante as disciplinas do curso de mestrado nos colocou diante do inquestionável fato que a tecnologia contribui efetivamente para o aprendizado de nossos alunos.

Buscaremos na Teoria das Representações Semióticas os alicerces para embasar e fundamentar a pesquisa, uma vez que acreditamos que os alunos efetivamente compreendem o conteúdo quando conseguem modificar os registros em que os mesmos se apresentam.

Considerando a importância dada às conversões dos registros de representações de um objeto matemático e com base na análise de livros didáticos, será desenvolvida uma sequência didática com enfoque na aprendizagem de sistemas lineares no ensino fundamental. A partir da aplicação dessa sequência de atividades, buscaremos responder a seguinte questão de investigação: uma proposta de aprendizagem, ancorada no uso do software Geogebra, que contempla a conversão dos registros de representações de sistemas lineares para a linguagem geométrica, contribui para o entendimento do objeto matemático? Como?

1.1 OBJETIVOS

Para responder esse questionamento, propomos os seguintes objetivos:

a) analisar o ensino de Sistemas de Equações Lineares de Duas Variáveis no 8º ano do Ensino Fundamental;
b) elaborar uma proposta pedagógica que favoreça a aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares nesse nível de ensino;
c) utilizar as tecnologias digitais como instrumento para favorecer a realização das conversões;
d) fazer o aluno compreender que uma equação linear de duas variáveis pode ser representada graficamente, através de diagramas/tabelas, por uma expressão matemática ou ainda pela linguagem natural;
e) compreender a resolução geométrica de sistemas de equações do 1º grau.

A presente pesquisa trata de um estudo de caso que foi realizado com uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental do Sistema de Ensino Energia, escola privada localizada na região da grande Florianópolis – SC. Por meio da sequência didática proposta, fizemos recortes dos dados – que foram gravados por meio de filmagens e fotos – e analisamos a validade da proposta na aprendizagem de Sistemas Lineares para alunos do 7º ano.

O presente trabalho está delineado em sete seções, sendo a atual introdutória e as demais descrevendo as diversas etapas da pesquisa.

A seção dois apresenta uma discussão das representações semióticas no contexto da Educação Matemática. Discute a importância das conversões dos registros para obter diferentes formas de representações de um objeto matemático e levanta a questão de não tratar o objeto como um todo quando se encontra em apenas uma ou outra forma de representação.

Na sequência, a terceira seção busca realizar uma reflexão sobre o uso de tecnologias na educação. Para tal, esse espaço se subdivide trazendo uma discussão sobre os avanços da tecnologia, a mudança que a mesma provoca em nossa vida, o papel do professor frente a essa ferramenta e a adequação do uso do Geogebra na implementação da sequência didática.

A quarta seção faz um estudo da forma como os Sistemas Lineares de Duas Equações e Duas Variáveis são apresentados nos livros didáticos. Para tal, analisamos como o conteúdo é abordado pelos autores, quais as maneiras de resolução apresentada por eles, os exercícios propostos para fixação do conteúdo e a relevância dada pelos autores em relação à variação dos registros em que pode se encontrar um Sistema Linear. Para facilitar a ordenação das ideias, foram realizados recortes justificando as colocações realizadas.

A seção de número cinco nos coloca diante da justificativa do nosso estudo encontrar-se pautado no estudo de caso. Apresentamos a definição e as características desse tipo de pesquisa associando a ela nosso trabalho. Ainda nessa seção, explicamos como foram coletados os dados de nossa pesquisa e caracterizamos a escola, nosso campo de trabalho. Apresentamos, ao fim desse espaço, a sequência didática que foi aplicada aos alunos.

Na sexta seção realizamos a análise de dados. Nela você encontrará recortes da sequência aplicada, acrescentados de conclusões que extraímos à luz das representações semióticas e do uso de tecnologias na educação.

Na última seção colocamos as considerações finais, nossas reflexões sobre esta experiência.

Apresentamos ainda, apêndice com documentos de autorização para realização desse trabalho e a sequência didática como um produto que pode ser utilizado por outros professores para o ensino dos Sistemas de Equações do 1º Grau e Duas Variáveis.

2 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Buscando compreender não somente aspectos ligados ao ensino e à aprendizagem, mas também relacionar a forma como o saber pode ser estruturado para ser ensinado e aprendido, tomamos a teoria dos registros de representação semiótica como premissa para nossa investigação. É importante salientar que o termo semiótica é utilizado por Raymond Duval para referir-se aos diferentes signos utilizados em matemática, tais como linguagem natural, gráfico, linguagem algébrica, tabela, etc.

Procurar entender como o conhecimento é elaborado e construído, indo buscar nas mais diversas formas como isso se realiza é o papel que as representações semióticas ocupam dentro do processo ensino aprendizagem. Um dos desafios desse referencial busca compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que alguns alunos têm na compreensão de matemática. A especificidade da aprendizagem e do ensino de matemática está vinculada diretamente aos aspectos semióticos das representações de seus objetos.

Essa tendência em educação matemática serve de subsídio para uma reflexão mais profunda do que vem a ser matemática e de como ela se constitui. Compreender essas relações entre representação semiótica e matemática dentro desses diferentes contextos, que na verdade se completam, pode auxiliar em reflexões mais profundas, levadas à formação de professores que ensinam matemática, para se trabalhar as relações que se tem com o conhecimento. Acreditamos encontrar nesse referencial, respostas para questões acerca de problemas que envolvem o ensino e a aprendizagem de matemática, uma vez que este possibilita enxergar uma alternativa de trabalho teórico/metodológico que propicia apreciar o funcionamento cognitivo do pensamento do aluno e sua interação com o objeto matemático em estudo.

Recentemente, a ideia de que as representações semióticas têm fundamental importância no ensino e na aprendizagem, mais particularmente no ensino e na aprendizagem da matemática, tem estado bastante em foco, principalmente depois dos trabalhos de Raymond Duval sobre registros de representação semiótica. Em seus trabalhos, Duval destaca a importância que as representações semióticas desempenham nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, sendo estas representações a maneira com a qual temos para nos referirmos aos objetos matemáticos.

De acordo com Duval (2003, p.21) “o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas”. Isso nos faz acreditar que a compreensão do objeto matemático Sistemas de Equações de 1º Grau de Duas Variáveis passa necessariamente pela articulação de seus registros de representação. Para representar o objeto matemático discutido nessa dissertação, usamos principalmente as representações gráfica e algébrica, buscando relacionar as conversões possíveis entre essas diferentes formas de registro.

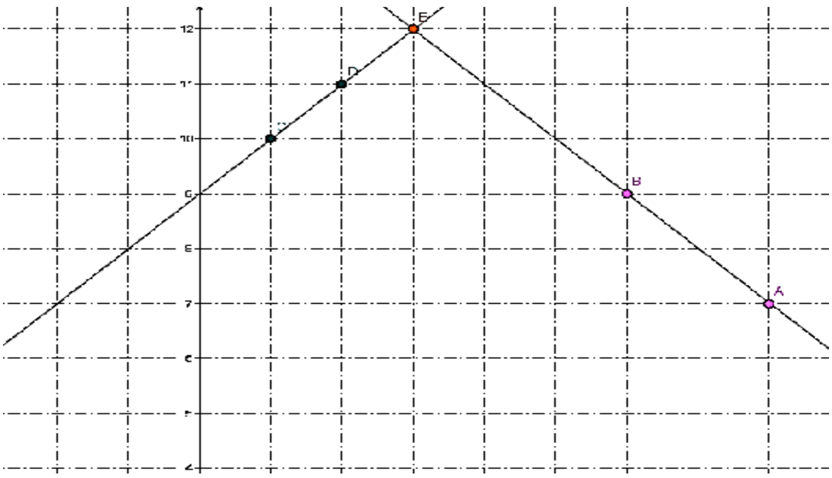
Segundo as noções concernentes aos registros de representações semióticas, tratadas por Duval (2003), os registros de representação além de serem a única maneira de que dispomos para nos referirmos aos objetos matemáticos, são indispensáveis para as atividades cognitivas do pensamento, ou seja, “(...) sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que aprende” (DAMM, 2002, p. 143).

Concordando com Damm (2002), entendemos que o sujeito do conhecimento é aquele que, a partir das diversas representações, constituídas no interior de um sistema de representação semiótica, consegue acessar os objetos do conhecimento, interpretá-los e aprender esses objetos.

De acordo com Duval (2003, p. 15 e 16), “existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões”.

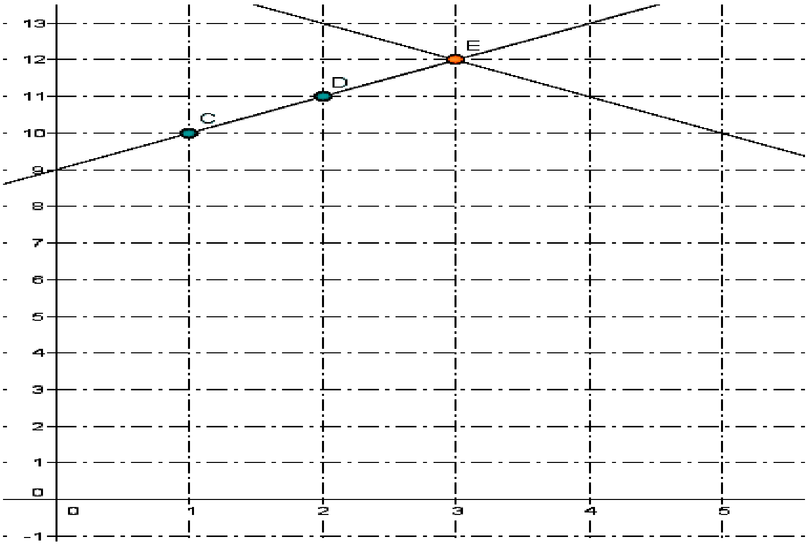
Os tratamentos são transformações de representação semiótica em que não se altera o registro, ou seja, mantém-se o sistema de representação, por isso a representação é dita “interna a um registro”. Um exemplo claro disso ocorre quando é resolvido uma equação ou um sistema de equações se apropriando apenas da sua forma algébrica. Ou ainda, a mudança na escala de um eixo de uma representação gráfica, conforme pode ser visto na Figura 1 e na Figura 2.

Figura 1 – Representação geométrica de um sistema de duas equações na escala A.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 2 – Representação geométrica de um sistema de duas equações na escala B.

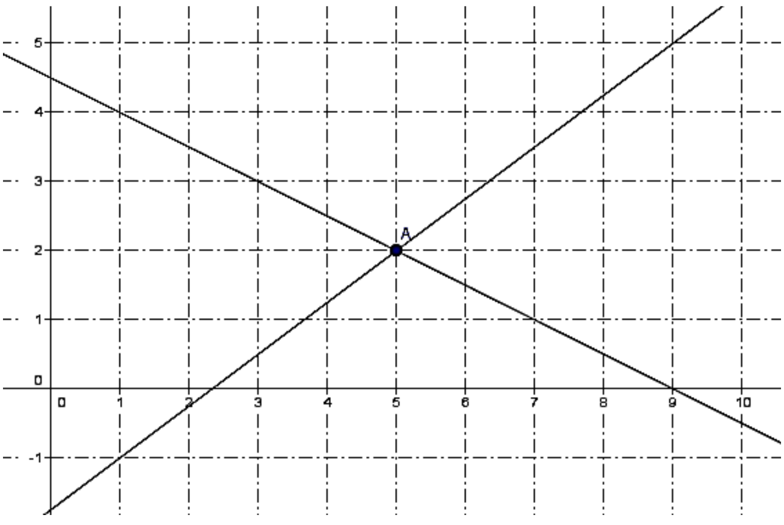


Fonte: Arquivo pessoal.

Conforme observamos acima, não houve mudança no registro, embora tenha se modificado o objeto de transformação. Muitas vezes, esse tipo de transformação é necessária e aplicada para uma melhor visualização da solução do sistema.

Por outro lado, as conversões são transformações que exigem que um objeto, embora conserve suas referências, mude o sistema de representação, por isso a representação é dita "externa a um registro". Usando o mesmo exemplo anterior, podemos ilustrar com um sistema de equações de duas variáveis que pode ser escrita na forma gráfica (Figura 3), algébrica (Figura 4), tabular, etc.

Figura 3 – Representação gráfica de um sistema linear de duas equações.



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 4 – Representação algébrica de um sistema linear de duas equações.

$$a: x + 2y = 9$$
$$b: 3x - 4y = 7$$

Fonte: Arquivo pessoal.

Esse exemplo, por sua vez, nos trouxe uma variação na representação, ou seja, embora mantido o mesmo objeto matemático, este está representado em dois registros diferentes.

Salienta-se e entende-se ser muito importante para o aprendizado dos alunos que um mesmo conceito matemático possa ser tratado de diferentes pontos de vista. Além disso, podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos, como a linguagem simbólica, a linguagem natural e textual, a linguagem de gráficos, etc.

Para Duval (2003), os objetos matemáticos precisam de diferentes representações para ficarem acessíveis, pois eles, em geral, não são diretamente perceptíveis ou observáveis. Concordamos que os objetos matemáticos somente são acessíveis por meio de sua representação. Em nosso trabalho, por exemplo, exploramos a escrita de um Sistema de Equações de 1º Grau de Duas Variáveis nas diversas formas de representação: linguagem natural, linguagem algébrica, linguagem gráfica, entre outras formas.

Apostamos nas conversões para a compreensão do conteúdo. Acreditamos que só é possível conhecer, compreender e aprender determinados objetos por meio das variações de representação do mesmo. Ainda, o aluno precisa mobilizar as diferentes representações para conhecer o objeto, ou seja, converter uma representação de um sistema semiótico para outra representação de outro sistema, que seja mais fácil de compreender cognitivamente.

Para Flores (2006), a conceitualização acontece quando o sujeito mobiliza os registros de representação semiótica do objeto matemático, escolhendo entre os muitos que se apresentam, de forma que favorece a resolução de um problema da forma mais econômica[1] possível.

[1] Trabalhamos esse termo como a forma mais simples de operar uma dada representação de um objeto matemático.

"A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo ou na possibilidade de trocas a todo o momento de registro de representação". (DUVAL, 2003, p.14)

Faz-se importante mencionar, no entanto, que as conversões são fundamentais porque cada registro apresenta limitações representativas. Para que um sistema semiótico seja um registro de representações é necessário que ele permita a transformação de uma representação em outra representação de outro registro que conserva a totalidade ou parte do conteúdo da representação inicial. Surge daí a necessidade da utilização de outras formas de expressão, além da linguagem natural ou algébrica e gráfica.

Duval (2003, p.16) afirma que:

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro.

A representação em matemática adquire diferentes níveis de importância se levada em conta a matemática no âmbito da ciência e a matemática no âmbito escolar, sem desconsiderar, ainda, o seu papel no desenvolvimento da matemática como um todo.

No primeiro caso, a representação não tem uma importância real, não fazendo diferença se um objeto é representado de uma maneira ou de outra, o que é importante para o matemático é o objeto matemático com o qual ele está trabalhando. Se para atingir este objeto ele trabalha com a representação A ou B isto é irrelevante, desde que a representação cumpra seu papel.

Já no contexto da educação matemática, o aluno que, pela primeira vez, está tendo contato com determinada ideia matemática, a importância da representação para a compreensão desta ideia é tão importante que, muitas vezes, chega ao ponto da representação do objeto ser confundida com o próprio objeto pelo aluno. É com a representação do objeto que o aluno tem seu primeiro contato em matemática, e será através de representações semióticas que ele trilhará pelos caminhos de sua aprendizagem da disciplina.

A escola, portanto, não pode ser reduzida a uma matemática que simplesmente repassa fórmulas para resolver problemas. O professor tem que estar ciente que sua prática é muito complexa e não pode estar vinculada a uma simples transmissão de conteúdos previamente definidos. É preciso explorar as formas de aprender do aluno. Segundo Duval (2003), as representações semióticas são plenamente aplicáveis e auxiliam o professor no contexto da didática da matemática, pois ancora o processo de ensino/aprendizagem em diferentes níveis e conteúdos.

O professor, muitas vezes ao sair do ambiente acadêmico despreparado para a sala de aula, acaba por não separar essa matemática científica da matemática escolar.

Para Moreira e David (2005, p. 50):

> Uma das questões recorrentes nos debates sobre a formação de professores através da licenciatura é a falta de uma articulação adequada entre a formação específica e a formação pedagógica, tendo em vista a futura prática profissional na educação básica.

Para Shulman (2001, p. 11 apud FREITAS 2010 p. 49), não há limites para os saberes docentes e que se pudessem ser organizados em um manual, abrangeriam alguns itens:

> - conhecimento do conteúdo;
> - conhecimento didático geral, levando em conta especialmente aqueles princípios e estratégias gerais de manejo e organização da classe;
> - conhecimento do currículo, com especial domínio dos materiais e dos programas que servem como “ferramenta para o ofício” do docente;
> - conhecimento didático do conteúdo: em especial a interrelação entre a matemática e a pedagogia que constituem uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma da compreensão profissional;
> - conhecimento dos alunos e de suas características;
> - conhecimento dos contextos educativos, que abrangem desde o funcionamento do grupo ou da classe, a gestão e o financeiro da escola, as características da comunidade e a cultura; e
> - conhecimento dos objetivos, as finalidades e os valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos.

Torna-se então fundamental que o professor procure explorar as mais diversas representações de um objeto matemático. Em geral, os professores discutem o tratamento em diferentes representações (algébrica, tabular, gráfica) e não promovem todas as possíveis conversões. Sabemos que muitas vezes os alunos apresentam dificuldades em reconhecer graficamente uma Equação de 1º Grau de Duas Variáveis como uma reta no plano cartesiano, o que faz com que eles trabalhem o objeto matemático em diferentes registros sem perceber que se trata efetivamente do mesmo objeto.

É importante lembrar que o professor deve sempre ter em mente que a chave da aprendizagem está nas conversões. As dificuldades dos alunos surgem com mais frequência quando as variações são de representações de registros diferentes. Por exemplo, é o caso que surge na resolução de um sistema linear, quando o aluno necessita passar da linguagem natural para a linguagem algébrica ou gráfica.

Por isso nossa proposta de trabalho focaliza a inversão na forma de apresentar os Sistemas formados por Equações do 1º Grau com Duas Variáveis. Ou seja, trabalharemos a equação na forma geométrica e, a partir desta, buscaremos encontrar suas soluções. Lembramos também, que durante toda a aplicação das atividades, focamos na variação dos registros, acreditando que isso facilita a compreensão dos alunos. O uso do computador centra-se como um motivador para as aulas, sem falar que agiliza o processo de mudança de representação, que torna-se imediata por meio do uso do software Geogebra.

O ensino de sistemas lineares surge nas escolas no final do 7º e 8º ano. Muitas vezes, são abordados de forma algébrica, sem ao menos ser mencionadas sua solução geométrica ou a representação de uma equação de duas variáveis no plano.

Tendo isto em mente, as atividades propostas para a sequência didática que apresentamos nesse trabalho estão orientadas no sentido de propiciar o entendimento do aluno desses conhecimentos, uma vez que estamos priorizando as conversões dos registros para determinar a solução de um Sistema Linear de Equações de 1º Grau de Duas Variáveis. O Geogebra apresenta-se como um facilitador, visto que, com seu uso, a conversão dos registros acontece de forma rápida e dinâmica.

Podemos perceber também a importância que a representação, enquanto registro semiótico desempenha no próprio funcionamento do pensamento humano, influenciando assim, de maneira decisiva, as formas com que a aprendizagem em matemática se realiza. Somente através das representações de um determinado objeto matemático podemos nos referir a este objeto. Representações estas que, por mais que tenham a mesma referência, não possuem sempre o mesmo significado.

Para que possamos determinar o conjunto que define a solução de uma Equação de Duas Variáveis, por exemplo, é necessário ter o domínio das regras de tratamento do registro em questão. A capacidade de resolução que determinado aluno possa ter não garante que tenha havido compreensão por parte dele dos conceitos e conteúdos matemáticos relativos às equações de duas variáveis, por exemplo. É possível que essa capacidade de resolução repouse apenas no nível da manipulação algorítmica. Ou seja, que ele tenha sido capaz de compreender as regras de tratamento dentro de um registro específico, no caso, as regras relativas às equações, sem que tenha compreendido o objeto matemático que está por trás desse mecanismo de resolução.

É relevante que para que haja compreensão em matemática, é necessário que haja uma coordenação de ao menos dois registros de representação diferentes, e essa coordenação se dá através da conversão entre diferentes registros. Segundo Duval (2003, p. 16) “as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados”, isto equivale a dizer que, a conversão é uma transformação onde há troca de registro, porém “conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão” (DAMM, 2002, p.146).

Para Duval (1993, p. 51 apud MORETTI 2012, p. 471):

> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. (Duval, 2004, p.64)

Alicerçado nas ideias de Duval, defendemos que esse argumento torna-se essencial para se entender e perceber a dependência existente entre a matemática e as representações utilizadas para acessá-la e ao mesmo tempo propicia estratégias que permitem ao professor uma análise pedagógica da disciplina.

Como já mencionamos nesse texto, as conversões não são levadas muito em conta do ponto de vista matemático, já que estas "(...) não tem um papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo." (DUVAL, 2003, p. 16) Muitas vezes, por não ter um papel de destaque do ponto de vista matemático, sendo mesmo considerada como uma atividade secundária, a conversão dos registros não recebe a devida atenção sob o ponto de vista cognitivo. Essa maneira de encarar a conversão pode ser a responsável pelo descaso de muitos educadores por esta atividade, fazendo com que abram mão do uso de conversões nos processos de ensino de matemática, priorizando o trabalho com tratamentos dentro de um determinado registro.

A própria maneira como muitas vezes os conteúdos matemáticos são apresentados, dando a impressão de não haver muita ligação entre eles, contribui para a valorização dos tratamentos em detrimento das conversões. Com os conteúdos trabalhados de forma isolada uns dos outros, o que se prioriza são os tratamentos dentro de cada conteúdo, já que com a conversão corre-se o risco de misturar assuntos quando o registro de chegada pertence a um conteúdo que só será trabalhado no futuro ou que já foi visto e, que por isso, não merece atenção.

Se para o matemático a conversão ocupa um lugar secundário, para o educador esta deve ser destacada. Segundo Duval (2003, p. 16) "(...) do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão."

É, portanto, a conversão que desempenha um papel de fundamental importância nos processos cognitivos. Somente através da coordenação entre diferentes registros de representação semiótica é que pode haver compreensão em matemática e, é por meio da atividade de conversão que esta coordenação entre diferentes registros pode ser feita.

> Converter significa transitar entre diferentes registros de um mesmo objeto matemático, possibilitando assim a apreensão do objeto matemático em questão. Essa necessidade de mudança de registros, para que haja compreensão em matemática, está ligada ao fato de o acesso aos objetos matemáticos passarem necessariamente por representação semióticas (DUVAL, 2003 p. 21).

Somente através do trânsito entre diferentes registros é que é possível evitar que se confunda um objeto matemático com sua representação, uma vez que trabalhando com diferentes sistemas de representação, é possível perceber nitidamente que nenhum desses registros de representação “é” o objeto matemático, mas apenas o representa, permitindo o acesso a esses objetos.

Tomando nosso objeto como exemplo, torna-se perceptível que o desenho de uma reta, a equação que a representa, a própria palavra reta, são todas representações do mesmo objeto “reta”, mas nenhuma delas é a reta de fato, apenas a representam.

Um estudante de matemática que disponha de apenas uma forma de representar determinado objeto certamente confundirá o conteúdo da representação com o conteúdo do objeto, ou seja, vai achar que o objeto está dado de todo em sua representação, que representação e objeto do conhecimento é a mesma coisa. Porém, isso não é verdade. Um objeto matemático não está por completo em uma de suas representações, mas no complemento entre umas e outras. Portanto, a mudança de registro serve também para “explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto” (DUVAL, 2003, p. 22).

Se tomarmos como exemplo o objeto matemático Equações de 1º Grau de Duas Variáveis, cada um de seus registros deixa entrever um aspecto do objeto matemático, ora seu gráfico, ora sua forma simbólica, etc. Cada forma de representar o objeto em questão guarda em si uma especificidade do objeto. Quanto mais registros de um mesmo objeto o aluno for capaz de mobilizar, mais facetas do objeto ele será capaz de perceber. Com isso, ele passa a ser capaz de evitar que se tome a representação como sendo o objeto, já que ele é capaz de perceber que o objeto em questão apresenta propriedades que não podem ser vistas numa determinada representação. É somente através do uso das diversas representações que ele tem à sua disposição que é possível abarcar o objeto como um todo.

Esta possibilidade de trânsito entre diferentes registros de um mesmo objeto tem também outra função, a de possibilitar uma economia de tratamento. Segundo Duval (2003), a existência de muitos registros permite a modificação desses signos e, a mudança de registro tem por objetivo a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais eficaz.

Uma vez se tratando do objeto matemático equações de duas variáveis, o qual é nosso foco de estudo neste trabalho, podemos fazer algumas considerações relacionando-os com as representações semióticas.

Os livros didáticos apresentam e discutem o tratamento em diferentes representações (algébrica, tabular e gráfica) e não promovem todas as possíveis conversões. Cabe ao professor fazê-lo, uma vez que essas conversões colocam os alunos diante do objeto matemático nas mais variadas formas de escrevê-lo e favorece sua compreensão.

Podemos observar que o ensino de equações aparece já nas séries iniciais, embora não seja tratado com esse nome. Porém, o estudante só tem acesso à representação gráfica das equações de duas variáveis nas séries finais do ensino fundamental, daí a dificuldade dos alunos, do ponto de vista das representações semióticas, de converter a linguagem das equações de um registro para outro.

Realizando uma busca nos PCN's sobre os objetivos do ensino de matemática nas séries iniciais, encontramos que o trabalho com tabelas e gráficos devem facilitar a leitura e interpretação das informações e construir formas pessoais para comunicar informações coletadas. Os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem ainda que os conteúdos matemáticos não precisam ser apresentados formalmente, mas identificados nas várias situações de uso social que os alunos vivenciam e para as quais os professores devem lhe chamar a atenção.

Como perspectiva, sugerimos que seria interessante que, já nas séries iniciais, o aluno seja capaz de construir e interpretar tabelas e gráficos, sendo que as situações apresentadas nesse contexto devem sempre se reportar ao universo mais próximo do aluno. O trabalho com gráficos, quando introduzido nas primeiras séries escolares, se presta como instrumentos complementares das atividades de classificação, comparação e visualização.

A matemática está muito além de um conjunto de técnicas e regras que nos levam a um determinado resultado. Muito mais que isso, ela é algo vivo e em construção que leva o aluno a buscar respostas, criar e recriar métodos e desenvolver suas habilidades onde ele possa ser um agente ativo no processo da construção de sua aprendizagem.

3 TECNOLOGIAS NO ENSINO

O uso da tecnologia pode ser um forte aliado ao professor no ensino de matemática. Apresentamos a seguir uma discussão sobre os avanços da tecnologia, as mudanças que a mesma provoca em nossa vida, o papel do professor diante desta potente ferramenta e a adequação do seu uso na sequência didática que foi elaborada nesse estudo.

3.1 ERA TECNOLÓGICA E CONHECIMENTO

Vivemos hoje o que chamamos de “era tecnológica”. Na verdade, ao levarmos em consideração todo o tempo da existência da civilização, podemos facilmente compreender que todas as eras existentes correspondem ao predomínio de um determinado tipo de tecnologia. (KENSKI, 2006, p. 19), afirma que “todas as eras foram, portanto, cada uma à sua maneira, “eras tecnológicas.”

A evolução da sociedade confunde-se com as tecnologias desenvolvidas e empregadas em cada época. Cada época é reconhecida pelo avanço tecnológico correspondente: a idade da pedra, do ferro e do ouro caracteriza-se pela criação de tecnologias com o intuito de aproveitar esses recursos visando a garantia de uma melhor qualidade de vida, a descoberta da roda muda e transforma as formas de deslocamento entre os grupos; e assim o avanço científico da humanidade amplia o conhecimento sobre esses recursos e cria novas tecnologias que mudam o comportamento individual das pessoas e de grupos que compõem a sociedade.

Kenski (2006, p. 21) afirma que:

> A economia, a política e a divisão social do trabalho refletem os usos que os homens fazem das tecnologias que estão na base do sistema produtivo, em diferentes épocas. O homem transita culturalmente mediado pelas tecnologias que lhes são contemporâneas. Elas transformam sua maneira de pensar, sentir, agir. Mudam também suas formas de se comunicar e de adquirir conhecimentos.

Minha experiência enquanto aluno do ensino básico da década de 90 me permite entender que o papel de repassar informações e conceitos era exclusivo da escola. Os conhecimentos teóricos eram apresentados gradativamente pelo professor, que era considerado o detentor do conhecimento, enquanto os alunos eram agentes passivos que estavam na sala de aula apenas para receber essas informações sem questioná-las. Os conhecimentos eram apresentados em blocos e linearmente. Após um determinado grau de escolarização, a pessoa podia considerar-se formada e já possuía conhecimento suficiente para iniciar alguma profissão.

A autora Vani Kenski (2006, p. 22) afirma que "o espaço e o tempo de ensinar eram determinados. "Ir à escola" representava um movimento, um deslocamento até a instituição designada para a tarefa de ensinar aprender. O "tempo da escola", também determinado, era considerado como o tempo diário que, tradicionalmente, o homem dedicava à sua aprendizagem sistematizada. Correspondia, também, na sua história de vida à época que o homem dedicava à formação escolar".

Porém, as rápidas transformações tecnológicas da atualidade impõem novas dimensões à tarefa de ensinar e aprender. Com tais transformações, é fundamental estar em constante estado de aprendizagem e adaptação ao novo. A pessoa jamais atinge uma formação completa, ao contrário, é necessário estar em formação continuada permanentemente. A escola já não é mais o único espaço de formação. Muitas são as maneiras de ter acesso à informação e transformá-la em conhecimento, além das inúmeras possibilidades de estar informado por meio das interações com todos os tipos de tecnologias. Dizemos, com isso, que o aluno pode ter acesso, além do oportunizado no espaço escolar, a tecnologias que permitem continuar sua formação fora desse espaço pré-determinado. Em nossa aplicação da sequência didática, por exemplo, uma dupla de alunos fez download do software (Geogebra) em seu computador pessoal e ficou fazendo testes e aprofundando as discussões feitas em sala.

3.2 ESPAÇO E TEMPO DOCENTE

Impossível pensar na prática docente sem lembrar a pessoa do professor e sua formação. Formação esta que deve ser continuada, não apenas nos quatro anos que correspondem ao seu tempo de licenciatura. É necessário que haja sim um processo contínuo de aprendizado, visando novas oportunidades de conhecimento e de reflexão sobre sua prática docente.

Nossa vivência como profissional atuante em escolas de ensino básico (ou até mesmo instituições de ensino superior) nos admite afirmar que durante muito tempo – pode-se dizer que até hoje – a educação escolar não usa adequadamente a tecnologia visando tornar o processo ensino-aprendizagem mais eficiente ou eficaz.

Pesquisas (BITTAR, 2006; BRANDÃO, 2005) evidenciam a fragilidade na formação dos professores referente ao uso de tecnologias aplicadas à educação. Cabe também mencionar a situação em que os professores que têm a intenção de realizar a integração entre tecnologia e sala de aula e não possuem os recursos didáticos apropriados (GUIN & TROUCHE, 2002 apud QUEIROZ; RAMOS; SIPLE, 2011). As pesquisas realizadas por BITTAR (2006) e BRANDÃO (2005) deixam evidente a fragilidade da inserção da tecnologia na sala de aula em todos os níveis de ensino no Brasil. Estas pesquisas apontam que os professores, seja ele do ensino fundamental, médio ou superior, não têm utilizado a tecnologia de forma correta em sala de aula. Contribuem ainda defendendo que os alunos de licenciatura terminam seu curso com conhecimento insuficiente sobre as potencialidades dos softwares disponíveis para o ensino e suas respectivas áreas.

> Ora, como exigir então que o licenciado saia apto a utilizar a tecnologia com seus próprios alunos uma vez que ele mesmo desconhece ou pouco conhece sobre o uso de software para a aprendizagem matemática?[...]os alunos de licenciatura passam por todo o seu curso sem terem estudado auxiliado pela informática[...] O paradoxo aparece ao final de seu curso, quando ele deverá compreender que é importante utilizar tecnologia com seu aluno, pois essa contribui com a aprendizagem matemática. Nos parece que esse é um dos desafios a serem vencidos pela formação de professores (BITTAR, 2006, p.13).

Entretanto, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação dos professores, defende que a concepção do professor, em sua base, deve estar voltada para o “o uso de tecnologias da informação e da comunicação e de metodologias, estratégias e materiais de apoios inovadores”.

> Desde o início do curso o licenciado deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para o ensino de matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também que a familiarização do licenciado, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir com o ensino de matemática (BRASIL, 2001, p. 6)

Mesmo diante dessa contribuição frente ao uso de tecnologias na formação do professor e embora seja visível a evolução da tecnologia nos últimos anos, minha vivência ao longo de doze anos como docente em algumas escolas me permitiu perceber que a mesma ainda está distante do dia-a-dia da escola, que muitas vezes ainda encontra-se limitada à quadro, giz e meras aulas expositivas, onde o professor é o detentor do conhecimento e o aluno é um ente passivo que apenas recebe informações.

É lamentável que o uso de tecnologias ainda seja visto com muito receio por parte dos professores, pois vemos corriqueiramente alguns educadores falarem na insegurança de usar esta ferramenta. Partindo da necessidade de inovar suas aulas, o uso da mesma pode ser uma alternativa viável para auxiliar no processo ensino aprendizagem, tornando suas aulas mais interessantes, criativas e dinâmicas, despertando o interesse dos alunos e motivando-os para o processo educacional.

Matematicamente, o uso te tecnologias não se destina apenas a facilitar os cálculos ou torná-los mais rápidos. O uso das mesmas permite transformar os processos de pensamento e construção do conhecimento.

Seja qual for a tecnologia utilizada, esta pode ser aproveitada como recurso didático-pedagógico, buscando, dentro do planejamento do professor, uma adaptação a sua proposta de ensino, visando atingir os objetivos educacionais e a formação dos alunos.

A existência da tecnologia no processo educacional exige das instituições de ensino e do professor um novo posicionamento frente ao processo de ensino e de aprendizagem. Levy (1995, p. 52) afirma que a informática é um campo de novas tecnologias intelectuais, de espaço aberto, porém conflituoso. Assim sendo, o uso desses recursos ocupa uma posição central no processo educacional, tornando-se necessário refletir e analisar as mudanças provocadas por essa prática e fazendo-se imprescindível a busca por proporcionar experiências de aprendizagem significativas para os alunos.

Faz-se necessário que o professor esteja atento aos potenciais da tecnologia, sendo capaz de alternar corretamente atividades não informatizadas de ensino-aprendizagem com outras passíveis de tal realização. Para isso, é fundamental o professor ter em mente os objetivos que devem ser efetivamente alcançados. Quando utilizada corretamente, a mesma pode resultar na satisfação e motivação dos alunos, bem como desenvolver sua autonomia e persistência.

KENSKI (2006, p. 48) contribui:

> ... é preciso que esse profissional tenha tempo e oportunidades de familiarização com as novas tecnologias educativas, suas possibilidades e seus limites, para que, na prática, faça escolhas conscientes sobre o uso das formas mais adequadas ao ensino de um determinado tipo de conhecimento, em um determinado nível de complexidade, para um grupo específico de alunos e no tempo disponível.

3.3 O PROFESSOR DIANTE DAS NOVAS TECNOLOGIAS

Na atualidade, lidamos com tecnologias muito sofisticadas a todo instante e, muitas vezes, nem percebemos. Nossas obrigações cotidianas nos modificam, nos transformam, nos fazem assimilar inovações e com isso não nos damos conta de como éramos tecnologicamente inocentes há pouco tempo atrás.

Estamos ainda passando por um processo de modificação e transformação na educação. Com todo esse processo de mudança, estamos aprendendo muito, desafiando preconceitos diante da tecnologia e aceitando que estas podem nos auxiliar muito. Enquanto professores, estamos aprendendo a não temer as máquinas, a perceber que elas não nos substituem. Estamos aprendendo a saber fazer, a saber utilizar as novas tecnologias disponíveis como parceiras em nossas atividades profissionais.

Kenski (2006, p. 84) nos diz:

> Chegamos então a um outro momento. Ainda não sabemos muito sobre as novas tecnologias. Elas se alteram velozmente. Sempre há inovações, sempre há o que aprender. Ainda sentimos insegurança, mas aprendemos a ousar, a ir além, a “aprender fazendo” ou “aprender pelo erro”, como diziam nossos antigos e queridos teóricos educacionais. Curiosidade, ousadia, parceria, tentativas mil até acertar... e nos orgulhamos quando conseguimos alcançar nossos intentos com o auxilio das ferramentas tecnológicas. Pequenos desafios e vitórias cotidianas que nos habilitam a novas ousadias, novos saltos.

A disponibilidade do uso de tecnologia em sala de aula, seja ela uma calculadora, um software ou qualquer objeto de aprendizagem, pode mudar radicalmente a orientação do ensino de matemática. As potencialidades do Geogebra, por exemplo, nos coloca diante de um vasto campo de possibilidades para a realização de experimentos e práticas pedagógicas que seriam inimagináveis sem o uso dessa ferramenta.

> O uso de computadores força, não somente apenas a reconhecer na área de experimentos uma fonte de ideias matemática e um campo para ilustração de resultados, mas também um lugar onde permanentemente ocorrerá confrontação entre teoria e prática. Isso coloca um problema, que ocorrerá no treinamento de professores tanto quanto de estudantes, de estimular a atitude experimental (observação, teste, controle de variáveis...) ao lado, e no mesmo nível, da atitude matemática (hipótese, prova, verificação...) (D’AMBRÓSIO, 1986, p. 110)

Usando ainda as palavras de Ubiratan D’Ambrósio (1997, p. 12): “Não sabemos o que deve ser feito, estamos à procura de um mundo melhor”. Trazemos no início dessa discussão que o mundo está em transformação, a escola, por sua vez, também deve estar. Muitos são os desafios que devemos enfrentar para superar nossos medos e nossas dificuldades, e sabemos que esse enfrentamento não depende apenas de nós, professores, mas de ações dos governantes que nos dariam suportes para superar essas dificuldades. Porém, o que vemos atualmente no interior das escolas são as dificuldades que os professores apresentam para encontrar tempo para se dedicar à pesquisa, ao estudo e a sua formação continuada, devido ao desgaste causado pela carga excessiva de atividades que a função exige.

Devemos considerar, no entanto, que apenas a inserção das tecnologias no ambiente escolar não garante qualidade de ensino. Os efeitos do uso do software Geogebra, por exemplo, para ensinar o objeto matemático sistema de equações de duas variáveis, não são determinados apenas pela potencialidade técnica dessa ferramenta, mas sim pela forma como esta será utilizada em sala de aula. Mais que uma simples ferramenta, esse software pode ser considerado um vetor de novas práticas pedagógicas inspiradas pela pesquisa por parte do professor, “entretanto, sem uma adaptação ao ensino... a sua utilização escurece as bases matemáticas dessa prática” (LAGRANGE, 2002, p.91 apud QUEIROZ; RAMOS; SIPLE, 2011).

Embora a utilização de recursos digitais não seja garantia de ensino por parte do professor e tampouco garante a aprendizagem dos alunos, pode ser vista como uma ferramenta educacional importante que auxilia na elaboração e na execução de atividades didáticas.

O processo de aprender usando as novas tecnologias nos coloca, então, diante de novos desafios e questionamentos. O processo de manipular as máquinas e os softwares são apenas detalhes frente às novas angústias que surgem. Precisamos refletir de maneira mais profunda sobre nossas práticas docentes e identificar as fragilidades técnicas e operacionais de nossos ambientes de trabalho. Afirmamos, dessa forma, que a utilização de softwares como o Geogebra, que usamos no desenvolvimento de nossa pesquisa, bem como de qualquer outro objeto digital de aprendizagem, necessita de maior disponibilidade e preparação por parte dos professores.

Com o acesso às novas tecnologias, o professor tem a oportunidade de deixar de ser o centro do saber, podendo se tornar um orientador do processo de aprendizagem, integrando de forma equilibrada tecnologias, sala de aula e conhecimento. Conforme já citado anteriormente, temos o exemplo dos alunos que fizeram uso do software Geogebra em casa, tendo, portanto, outras formas de ter acesso aos objetos matemáticos apresentados no espaço da sala de aula. Cabe ao professor, orientá-los de forma que transformem tais informações em conhecimento.

Moran, Masetto e Behrens (2001, p. 30) afirmam que “o professor é um pesquisador em serviço. Aprende com a prática e a pesquisa e ensina a partir do que aprende. Realiza-se aprendendo-pesquisando-ensinando-aprendendo. O seu papel é fundamentalmente de um orientador/mediador”.

Não basta inserir tecnologias, é preciso integrá-la por meio de novas metodologias, atividades. É preciso aproximar um software, por exemplo, a novas atividades, para que os alunos transitem facilmente de um meio para outro, usando diferentes formas de representação. Experimentar diferentes atividades em diversas formas.

> ...obviamente, a metodologia expositiva é a mais fácil de ser colocada em prática; seu uso constante, portanto, não deixa de revelar o comodismo do professor (da escola, da família). Alia-se a isto a falta de fundamentação científica por parte dos professores com relação à atividade pedagógica. (VASCONCELOS, 1993, p.26)

É preciso também variar a forma de ministrar aula, dinamizar as técnicas usadas em sala de aula e fora dela, variar as atividades solicitadas, as dinâmicas propostas, o processo de avaliação.

Torna-se fundamental planejar e replanejar, mas também aprender a improvisar, prever e ajustar-se à presença do novo. Adaptar-se continuamente. É preciso valorizar a tecnologia no que ela tem de melhor.

3.4 O USO DE TECNOLOGIA NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O uso do ambiente computacional em nossa pesquisa justifica-se pelo fato de pesquisas recentes terem apresentado que o computador está cada vez mais frequente em nossas vidas, como também já discutimos nesse capítulo, e que essa ferramenta pode auxiliar muito na aprendizagem dos alunos.

> Nos dias atuais, a utilização de computadores é uma realidade em praticamente todas as áreas de atividade humana e, no cenário educacional, a importância desta utilização está sendo cada vez mais reconhecida por profissionais da área. Diversas pesquisas indicam que tanto calculadoras como computadores podem auxiliar os alunos na aprendizagem de diversos conceitos matemáticos. (SANTOS, 2003, p.19)

A mesma autora afirma ainda em seu trabalho que o uso do ambiente computacional pode auxiliar na interpretação de gráficos, que é nosso foco de trabalho, e é uma ferramenta que fornece diferentes formas para representar um mesmo conjunto de dados matemáticos.

A pesquisa de Santos (2003) apresenta relação direta com nosso trabalho e colabora com o embasamento teórico do mesmo, uma vez que também ocorre em um ambiente computacional. É importante salientar que o computador, em sua pesquisa, desempenhou um importante papel na formação dos conceitos estudados.

A autora registra que:

> O computador desempenhou um importante papel na formação dos conceitos estudados. Primeiramente vale ressaltar que o software trabalhado oferecia várias possibilidades de se explorar um mesmo conjunto de dados e a medida que Maria ia se apropriando dos vários recursos que o software disponibiliza ela acaba apropriando-se da matemática que estava por trás desses recursos ou então estes lhe ajudavam a tirar conclusões sobre o conjuntos de dados estudados". (SANTOS, 2003, p.228)

Por isso acreditamos também ser interessante o trabalho em ambiente computacional. Em nosso caso, o Geogebra trabalha de maneira rápida a variação das formas de representação de um mesmo objeto matemático e permite que o mesmo seja representado de diversas formas a ser visualizada no próprio software.

Gravina (2002, p. 36) defende que “o suporte dos ambientes informatizados à pesquisa em matemática favorece a exploração, a elaboração de conjeturas e o refinamento destas, e a gradativa construção de uma teoria matemática”.

Em nossa pesquisa fizemos uso do software Geogebra acreditando que o mesmo é um facilitador no ensino dos sistemas lineares, visto que realiza as conversões dos registros de forma imediata. Cabe ressaltar também que buscamos trabalhar a solução do sistema representando-o na forma geométrica, precisando portanto da conversão, uma vez que muitas vezes o objeto encontra-se na forma algébrica ou na linguagem natural.

O software Geogebra é uma ferramenta que auxilia no instante de construir ou mobilizar os registros de representação do objeto matemático em discussão nesse trabalho, bem como no momento de analisa-los de forma conjunta, visto que a conversão dos signos matemáticos ocorre de forma rápida, dinâmica, sem provocar dificuldades operatórias que podem gerar obstáculos na construção dos significados.

Basso e Gravina (2012), em seu artigo “Mídias digitais na educação matemática”, denotam o uso de tecnologias no espaço da sala de aula fazendo uso do adjetivo *“ferramenta para pensamentos”.* Acreditamos ser esse o termo preciso que usamos para o Geogebra em nosso trabalho, uma vez que utilizamos essa mídia buscando promover o espaço da sala de aula para um ambiente que prenda a atenção dos alunos e que eles sintam-se motivados e desafiados a compreender o significado dos conceitos que estão além das conversões realizadas pelo software. Os autores consideram que “[...] as mídias digitais se tornam realmente interessantes quando elas nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática.” (BASSO; GRAVINA, 2012, p. 34)

4 SISTEMAS LINEARES NOS LIVROS DIDÁTICOS

Primeiramente, devemos mencionar que entendemos o livro didático como uma ferramenta de fundamental importância para o aprendizado dos alunos. Muitas vezes, é ancorado nesse material que o aluno constrói conceitos e minimiza as dificuldades que não foram totalmente superadas em sala de aula com o professor.

Buscamos também nesse trabalho discutir a importância que as representações desempenham no aprendizado dos estudantes. O livro didático, por sua vez, deve ser um facilitador e incentivador dessas conversões. É preciso que o livro aborde um objeto matemático sob diferentes pontos de vista e trabalhe as conversões entre os registros de representações desse objeto. O conteúdo Sistemas de Equações de 1º Grau com Duas Variáveis, por exemplo, pode ser representado nas mais diferentes linguagens: linguagem natural, linguagem algébrica, linguagem gráfica, entre outras.

Sabemos que os livros se encontram nas instituições de ensino com o propósito de promover educação de qualidade. Para isto, porém, ele deve oportunizar articulações entre os conteúdos trabalhados, evitandos tratá-los de maneira isolada e desconectada dos demais conteúdos.

Nessa seção, buscamos: a) averiguar a forma como o conteúdo é abordado; b) constatar os métodos de resolução abordados pelo autor; c) analisar a quantidade e o tipo de exercícios propostos no capítulo; d) verificar a relevância dada pelos autores às conversões dos registros do conteúdo Sistemas de Equações do 1º Grau; e também e) diagnosticar se promovem essas conversões para a forma geométrica e se discutem a solução do sistema por meio desse tipo de resolução.

Cabe ressaltar que no cotidiano da unidade escolar em que aplicamos a sequência, os alunos não estão habituados ao uso dos livros didáticos, uma vez que a escola trabalha com apostilas.

Usamos como critério para a seleção dos livros a disponibilidade dos mesmos em acervo na biblioteca da unidade escolar que realizamos a pesquisa. Faz-se importante destacar também que alguns exercícios propostos na sequência didática foram adaptados desses livros didáticos. A Tabela 1 apresenta os livros selecionados para análise:

Tabela 1 - Livros didáticos utilizados para análise.

Nº do livro	**Autor**	**Título**	**Editora**	**Ano**
Livro 1	Jackson e Elizabeth	Matemática – 7ª série	Scipione	2005
Livro 2	José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci	A conquista da Matemática – 7º ano	FTD	2009
Livro 3	Edwaldo Bianchini	Matemática: Bianchini – 7º ano	Moderna	2011

Fonte: Arquivo pessoal.

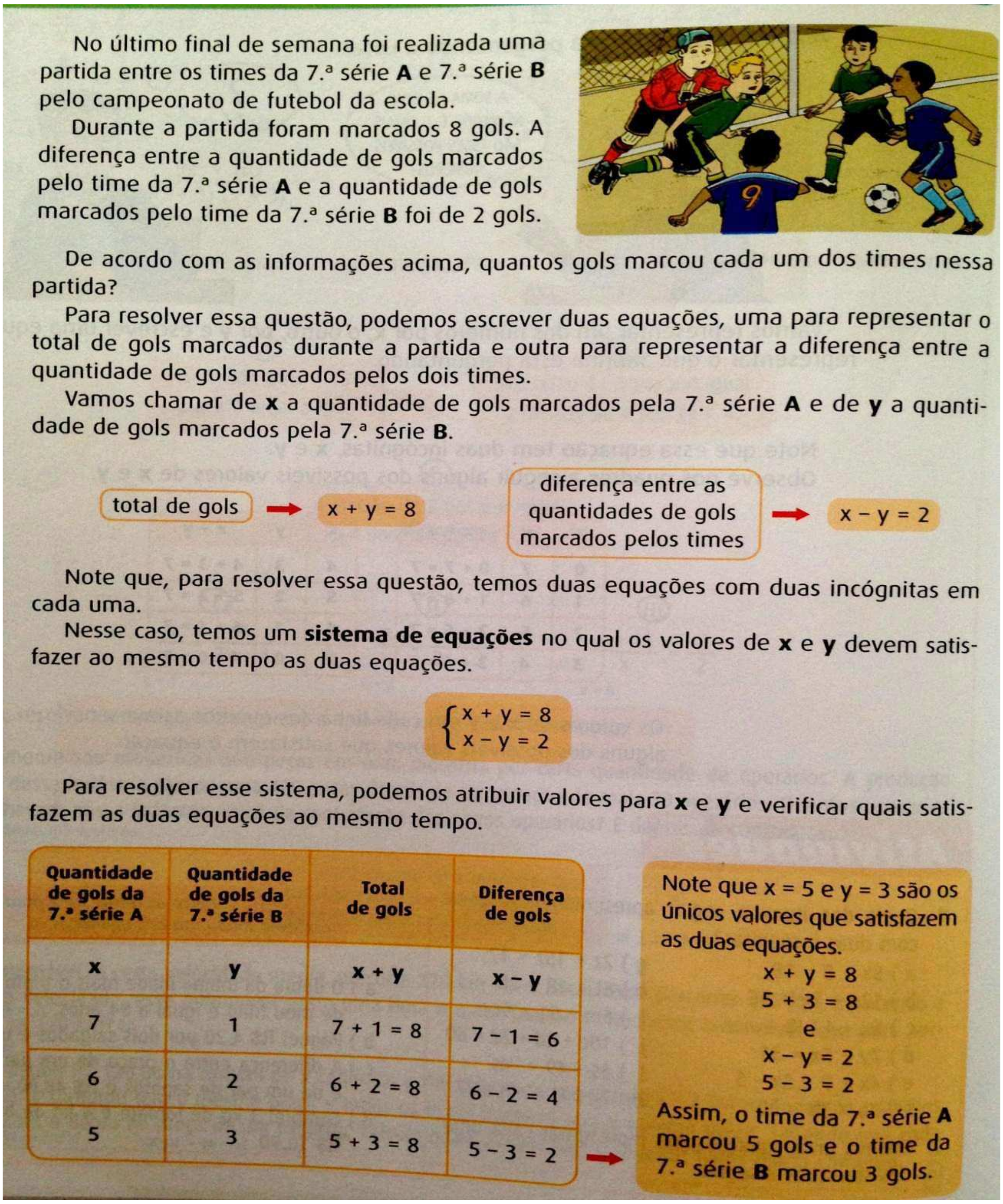
Para facilitar a leitura, faremos a análise dos três livros separadamente e, ao final, emitimos nossas considerações sobre a apreciação realizada.

4.1 MATEMÁTICA: PROJETO RADIX – 7ª SÉRIE – JACKSON E ELIZABETH – 2005

Após destinar uma página para determinar soluções de Equações do 1º grau com Duas Variáveis, os autores dedicam 9 páginas de um total de 368 para discutir o conteúdo Sistemas de Equações do 1º grau com Duas Variáveis.

O conteúdo é abordado por meio de uma situação problema e resolvido por tentativa, conforme pode ser verificado na Figura 5.

Figura 5 – Problematização de Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 1.



No último final de semana foi realizada uma partida entre os times da 7.ª série **A** e 7.ª série **B** pelo campeonato de futebol da escola.

Durante a partida foram marcados 8 gols. A diferença entre a quantidade de gols marcados pelo time da 7.ª série **A** e a quantidade de gols marcados pelo time da 7.ª série **B** foi de 2 gols.

De acordo com as informações acima, quantos gols marcou cada um dos times nessa partida?

Para resolver essa questão, podemos escrever duas equações, uma para representar o total de gols marcados durante a partida e outra para representar a diferença entre a quantidade de gols marcados pelos dois times.

Vamos chamar de **x** a quantidade de gols marcados pela 7.ª série **A** e de **y** a quantidade de gols marcados pela 7.ª série **B**.

total de gols → $x + y = 8$

diferença entre as quantidades de gols marcados pelos times → $x - y = 2$

Note que, para resolver essa questão, temos duas equações com duas incógnitas em cada uma.

Nesse caso, temos um **sistema de equações** no qual os valores de **x** e **y** devem satisfazer ao mesmo tempo as duas equações.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, podemos atribuir valores para **x** e **y** e verificar quais satisfazem as duas equações ao mesmo tempo.

Quantidade de gols da 7.ª série A	Quantidade de gols da 7.ª série B	Total de gols	Diferença de gols
x	**y**	**x + y**	**x − y**
7	1	7 + 1 = 8	7 − 1 = 6
6	2	6 + 2 = 8	6 − 2 = 4
5	3	5 + 3 = 8	5 − 3 = 2

Note que $x = 5$ e $y = 3$ são os únicos valores que satisfazem as duas equações.

$x + y = 8$
$5 + 3 = 8$
e
$x - y = 2$
$5 - 3 = 2$

Assim, o time da 7.ª série **A** marcou 5 gols e o time da 7.ª série **B** marcou 3 gols.

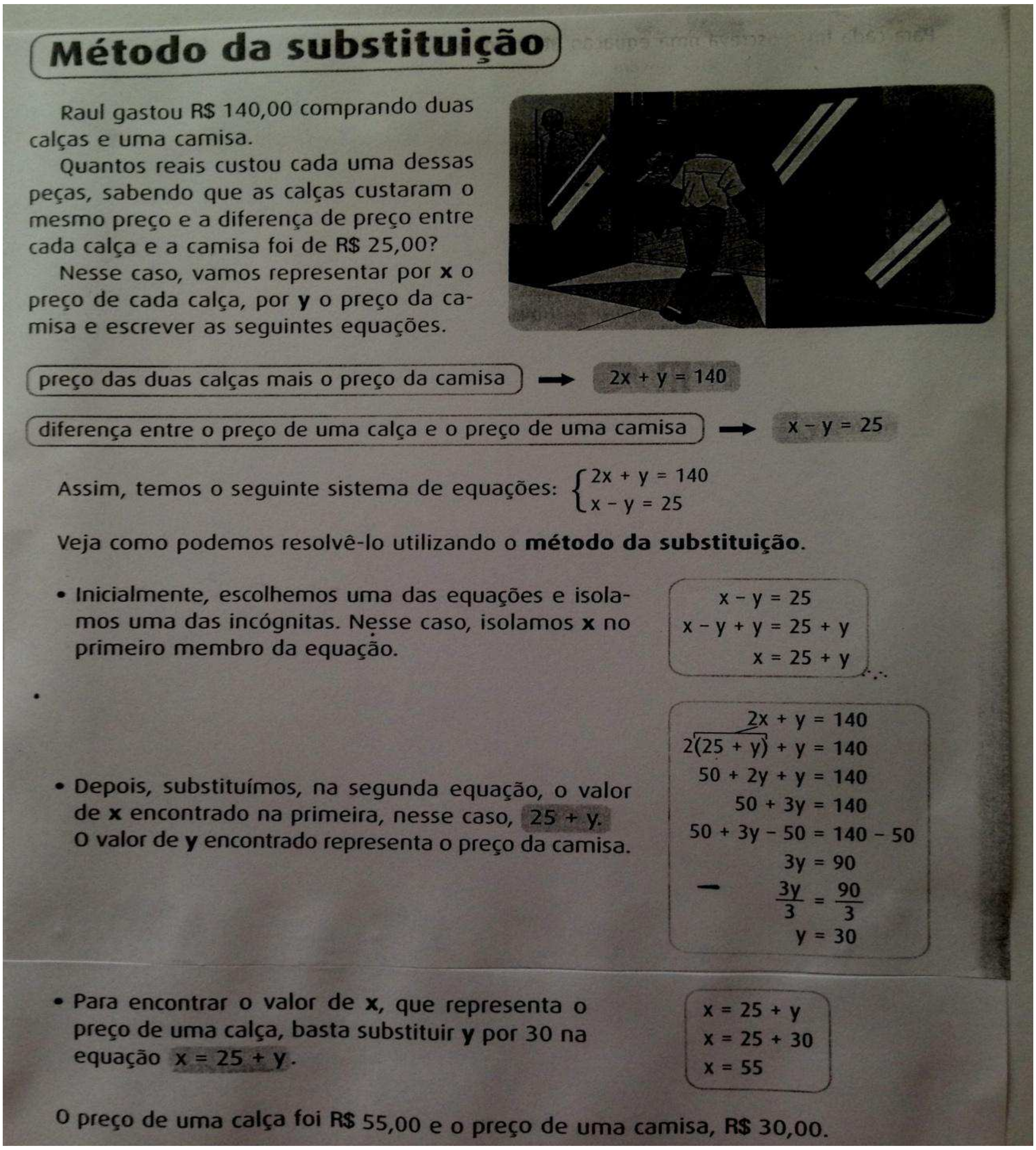
Fonte: Livro 1, p. 206.

Na sequência os alunos são convidados a resolver uma lista de exercícios seguindo o mesmo padrão apresentado na abordagem do conteúdo. Desses, 12 problemas já continham o sistema representado algebricamente e apenas um necessitava da conversão da linguagem natural para linguagem algébrica.

Referente ao método de resolução, os autores explicam também por meio de um problema duas maneiras de resolver os Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas

Variáveis: método da substituição (Figura 6) e método da adição (Figura 7). Seguido desses métodos, é colocado uma lista com 46 exercícios, onde o aluno deve recorrer a um dos métodos para solucionar os problemas.

Figura 6 – Resolução pelo método da substituição no livro 1.



Método da substituição

Raul gastou R$ 140,00 comprando duas calças e uma camisa.

Quantos reais custou cada uma dessas peças, sabendo que as calças custaram o mesmo preço e a diferença de preço entre cada calça e a camisa foi de R$ 25,00?

Nesse caso, vamos representar por **x** o preço de cada calça, por **y** o preço da camisa e escrever as seguintes equações.

preço das duas calças mais o preço da camisa → $2x + y = 140$

diferença entre o preço de uma calça e o preço de uma camisa → $x - y = 25$

Assim, temos o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} 2x + y = 140 \\ x - y = 25 \end{cases}$

Veja como podemos resolvê-lo utilizando o **método da substituição**.

- Inicialmente, escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas. Nesse caso, isolamos **x** no primeiro membro da equação.

$$x - y = 25$$
$$x - y + y = 25 + y$$
$$x = 25 + y$$

- Depois, substituímos, na segunda equação, o valor de **x** encontrado na primeira, nesse caso, $25 + y$. O valor de **y** encontrado representa o preço da camisa.

$$2x + y = 140$$
$$2(25 + y) + y = 140$$
$$50 + 2y + y = 140$$
$$50 + 3y = 140$$
$$50 + 3y - 50 = 140 - 50$$
$$3y = 90$$
$$\frac{3y}{3} = \frac{90}{3}$$
$$y = 30$$

- Para encontrar o valor de **x**, que representa o preço de uma calça, basta substituir **y** por 30 na equação $x = 25 + y$.

$$x = 25 + y$$
$$x = 25 + 30$$
$$x = 55$$

O preço de uma calça foi R$ 55,00 e o preço de uma camisa, R$ 30,00.

Fonte: Livro 1, p. 208.

Figura 7 – Resolução pelo método da adição no livro 1.

Método da adição

Em uma sala de aula há um total de 36 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre a quantidade de meninos e a quantidade de meninas é de 6 alunos. Quantos meninos e quantas meninas há nessa sala, sabendo que há mais meninos do que meninas?

Para resolver esse problema, vamos chamar de **x** a quantidade de meninos, de **y** a quantidade de meninas e escrever as seguintes equações.

quantidade de meninos mais a quantidade de meninas → $x + y = 36$

diferença entre a quantidade de meninos e a quantidade de meninas → $x - y = 6$

Assim, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Veja como podemos resolvê-lo utilizando o **método da adição**.

- Note que as duas equações apresentam termos opostos (**y** na primeira e **−y** na segunda). Desse modo, é possível encontrar a solução do sistema adicionando as duas equações.

$$\begin{array}{r} x + y = 36 \\ x - y = 6 \\ \hline 2x + 0y = 42 \\ 2x = 42 \end{array}$$

Cancelamos **−y** com **+y** e assim eliminamos a incógnita **y**.

- Depois, resolvemos a equação $2x = 42$ e encontramos o valor de **x**, que representa a quantidade de meninos da sala de aula.

$$2x = 42$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{42}{2}$$
$$x = 21$$

- Para encontrar o valor de **y**, que representa a quantidade de meninas, basta substituir **x** por 21 em uma das equações do sistema.

$$\underset{21}{\cancel{x}} + y = 36$$
$$21 + y = 36$$
$$21 + y - 21 = 36 - 21$$
$$y = 15$$

Nessa sala de aula há 21 meninos e 15 meninas.

Fonte: Livro 1, p. 211.

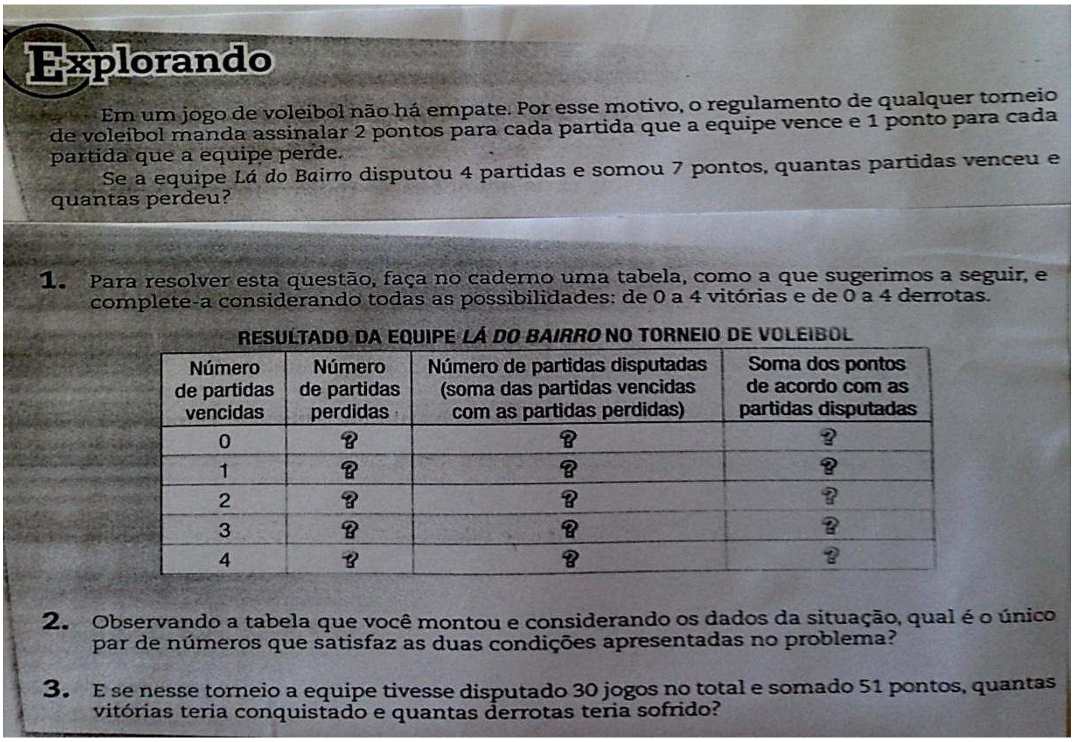
Os exercícios, em sua maioria, são sistemas já apresentados na forma algébrica e os alunos precisam apenas de operações elementares para resolvê-los. Quando mais elaboradas, as atividades são apresentadas na linguagem natural, necessitando primeiramente a conversão para a linguagem algébrica e, a partir dessa construção, seguem o mesmo tipo dos anteriores.

Chamamos atenção para a irrelevância à interpretação geométrica dada pelos autores. Em nenhum momento eles mencionam a representação da reta a partir de sua expressão analítica no plano cartesiano e consequentemente, não é feita qualquer discussão da solução geométrica do sistema.

4.2 A CONQUISTA DA MATEMÁTICA – 7º ANO – JOSÉ RUY GIOVANNI JR E BENEDICTO CASTRUCCI – 2009

O capítulo destinado aos Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis é introduzido por meio de um problema, conforme a Figura 8.

Figura 8 – Problematização de Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 2.



Explorando

Em um jogo de voleibol não há empate. Por esse motivo, o regulamento de qualquer torneio de voleibol manda assinalar 2 pontos para cada partida que a equipe vence e 1 ponto para cada partida que a equipe perde.

Se a equipe *Lá do Bairro* disputou 4 partidas e somou 7 pontos, quantas partidas venceu e quantas perdeu?

1. Para resolver esta questão, faça no caderno uma tabela, como a que sugerimos a seguir, e complete-a considerando todas as possibilidades: de 0 a 4 vitórias e de 0 a 4 derrotas.

RESULTADO DA EQUIPE *LÁ DO BAIRRO* NO TORNEIO DE VOLEIBOL

Número de partidas vencidas	Número de partidas perdidas	Número de partidas disputadas (soma das partidas vencidas com as partidas perdidas)	Soma dos pontos de acordo com as partidas disputadas
0	?	?	?
1	?	?	?
2	?	?	?
3	?	?	?
4	?	?	?

2. Observando a tabela que você montou e considerando os dados da situação, qual é o único par de números que satisfaz as duas condições apresentadas no problema?

3. E se nesse torneio a equipe tivesse disputado 30 jogos no total e somado 51 pontos, quantas vitórias teria conquistado e quantas derrotas teria sofrido?

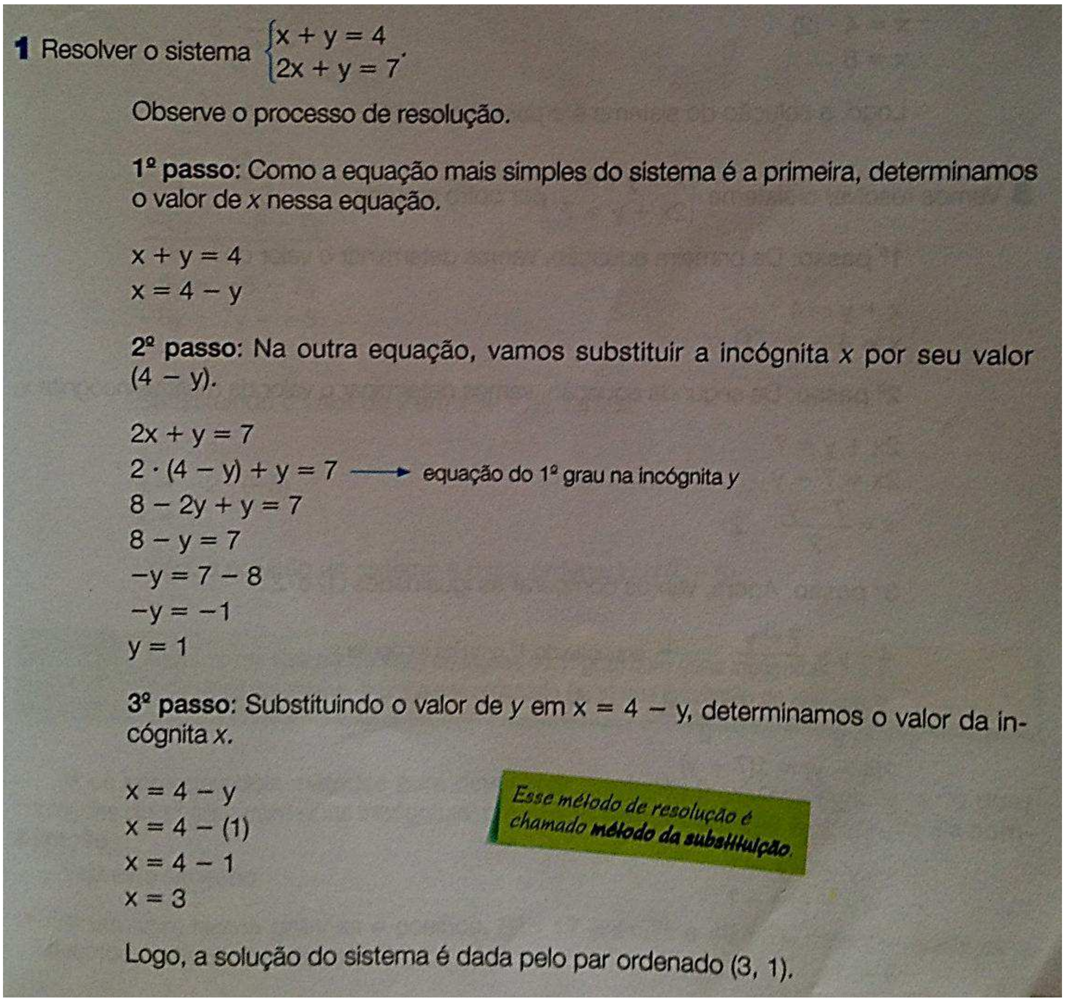
Fonte: Livro 2, p. 159.

Esse capítulo surge como sequência daquele destinado às Equações do 1º Grau com Duas Variáveis. Cabe ressaltar, porém, que embora os autores mencionem que cada solução de uma equação do 1º grau com duas variáveis trata-se de um par ordenado, em momento algum fez qualquer tipo de representação geométrica desses pares.

A seguir encontram-se 8 páginas dirigidas ao estudo dos Sistemas Lineares de um total de 336 páginas.

Na sequência os autores usam exemplos para explicar como determinar a solução para esse tipo de sistema. Conforme podemos ver abaixo, eles determinam um modelo para resolver os problemas usando o método da substituição (Figura 9) e o método da comparação (Figura 10).

Figura 9 – Resolução pelo método da substituição no livro 2.



1 Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$.

Observe o processo de resolução.

1º passo: Como a equação mais simples do sistema é a primeira, determinamos o valor de *x* nessa equação.

$x + y = 4$
$x = 4 - y$

2º passo: Na outra equação, vamos substituir a incógnita *x* por seu valor $(4 - y)$.

$2x + y = 7$
$2 \cdot (4 - y) + y = 7$ → equação do 1º grau na incógnita *y*
$8 - 2y + y = 7$
$8 - y = 7$
$-y = 7 - 8$
$-y = -1$
$y = 1$

3º passo: Substituindo o valor de *y* em $x = 4 - y$, determinamos o valor da incógnita *x*.

$x = 4 - y$
$x = 4 - (1)$
$x = 4 - 1$
$x = 3$

*Esse método de resolução é chamado **método da substituição**.*

Logo, a solução do sistema é dada pelo par ordenado (3, 1).

Fonte: Livro 2, p. 161

Figura 10 – Resolução pelo método da comparação no livro 2.

4 Usando o método da comparação, resolver o sistema $\begin{cases} x = -2y \\ 3x + 7y = -5 \end{cases}$.

Da primeira equação, temos que $x = -2y$.
Da segunda equação, vamos determinar o valor de x:

$$3x + 7y = -5$$
$$3x = -5 - 7y$$
$$x = \frac{-5 - 7y}{3}$$

Comparando as duas igualdades, temos:

$$-2y = \frac{-5 - 7y}{3}$$
$$\frac{-6y}{3} = \frac{-5 - 7y}{3}$$
$$-6y = -5 - 7y$$
$$-6y + 7y = -5$$
$$y = -5$$

Substituindo o valor de y em $x = -2y$, temos:

$$x = -2y$$
$$x = -2 \cdot (-5)$$
$$x = 10$$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado $(10, -5)$.

Fonte: Livro 2, p. 163.

Para finalizar o capítulo, os autores disponibilizam uma lista com 13 exercícios (Figura 11) propostos.

Figura 11 – Lista de exercícios do livro 2.

EXERCÍCIOS

1. Monte um sistema de duas equações para representar as seguintes condições:

a) Carlos e Celso têm, juntos, 201 figurinhas. Carlos tem o dobro de figurinhas de Celso.

b) Com 15 livros, alguns com 3 cm de espessura e outros com 5 cm de espessura, posso formar uma pilha de livros com 50 cm de altura.

2. Verifique se o par ordenado (8, 1) é a solução do sistema $\begin{cases} x - 8y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$. Justifique.

3. O par (−3, 5) é solução do sistema $\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ 3x + 8y = 31 \end{cases}$.

Essa afirmação é correta? Por quê?

4. Usando o método da substituição, resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 3y = -12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2y \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

5. Usando o método da comparação, resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = 6x \\ 3x - 2y = 54 \end{cases}$

6. Usando qualquer um dos métodos estudados, determine a solução dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x = y + 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 8x - y = 5 \end{cases}$

7. Em uma revendedora há x carros e y motos, totalizando 22 veículos e 74 rodas. Monte um sistema de duas equações e determine quantos carros e quantas motos há nessa revendedora.

8. Um sorvete custa x reais, e um doce custa y reais. A diferença entre o preço de um sorvete e o preço de um doce é 4 reais. Raquel tomou um sorvete e comprou dois doces, gastando ao todo 13 reais. Qual é o preço do sorvete?

9. Uma lapiseira custa o triplo de uma caneta. Se as duas juntas custam 24 reais, qual é o preço de cada uma?

10. Certo dia, um professor de Matemática desafiou seus alunos a descobrirem as idades x e y de seus dois filhos, em anos. Para isso, ele deu três informações:

- O mais velho tinha x anos.
- A diferença entre as idades era de 4 anos.
- A soma das idades era 20 anos.

Qual a idade de cada filho do professor?

11. Uma tábua com 2,85 m de comprimento foi dividida em duas partes. O comprimento x da primeira parte tem 0,93 m a mais que o comprimento y da segunda. Qual é o comprimento de cada parte?

12. Um livro tem 160 páginas, e eu já li uma parte dele. O número x de páginas que já li corresponde a $\frac{5}{3}$ do número y de páginas que faltam para eu terminar de ler esse livro. Quantas páginas eu já li?

13. Um colégio tem 30 professores. O número x de professores que ensinam outras matérias é igual a quatro vezes o número y de professores que ensinam Matemática. Quantos professores ensinam Matemática nesse colégio?

Fonte: Livro 2, p. 164.

Conforme podemos observar, não há no livro espaço destinado à representação geométrica das equações. A importância dada às conversões dos registros limita-se, mais uma vez, a converter problemas da linguagem natural para a representação algébrica e resolvê-los por meio de um modelo fornecido.

4.3 MATEMÁTICA: BIANCHINI – 7º ANO – EDWALDO BIANCHINI – 2011

Antecedendo o capítulo de Sistemas de Equações, o autor realiza, em cinco páginas, uma discussão sobre as Equações do 1º Grau de Duas Variáveis.

Para iniciar essa discussão, apresenta um problema de um jogo de futebol, e através desse problema, converte a linguagem para a representação algébrica. Conforme pode ser observado na Figura 12, o autor aproveita o problema para exibir os pares ordenados que representam as soluções das equações. Esse é um fator relevante, uma vez que esperamos que ele faça também os estudos geométricos da solução das equações.

Figura 12 – Problematização de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3.

Considere a seguinte manchete de jornal:

Na rodada desta semana do Campeonato Mineiro de Futebol, o jogo entre Cruzeiro e Galo terminou com 7 gols marcados

JOSÉ LUÍS JUHAS

Estádio Arena do Jacaré em Sete Lagoas (MG). (Foto de 2011.)

Com a informação da manchete, não é possível saber quantos gols cada equipe marcou. Desse modo, representando por *x* a quantidade de gols marcados pelo Atlético Mineiro (Galo) e por *y* a quantidade de gols marcados pelo Cruzeiro, podemos escrever a equação:

$x + y = 7$ (equação com duas incógnitas: *x* e *y*)

Observe no quadro a seguir os possíveis resultados desse jogo, com o número de gols de acordo com a manchete:

Gols marcados pelo Atlético Mineiro	Gols marcados pelo Cruzeiro
7	0
6	1
5	2
4	3
3	4
2	5
1	6
0	7

Nesse caso, dizemos que os pares de números (7, 0), (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6) e (0, 7) são soluções da equação $x + y = 7$, em que *x* e *y* são números naturais.

Os pares de números considerados soluções da equação do problema são chamados de **pares ordenados.**

Fonte: Livro 3, p. 144.

Na sequência, é feita uma discussão de pares ordenados por meio de uma situação lúdica (Figura 13).

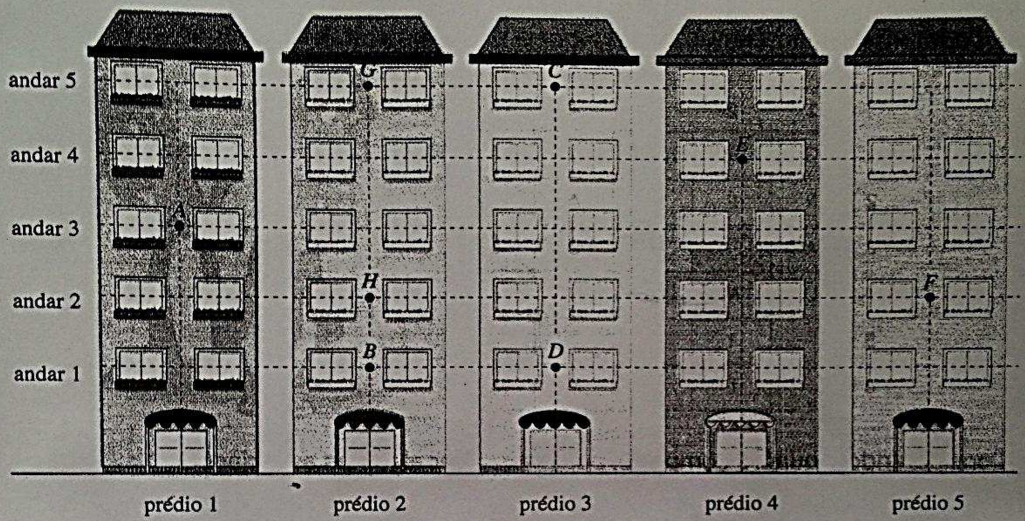
Figura 13 – Problematização de Par Ordenado no livro 3.

• O conceito de par ordenado

Considere as situações a seguir.

Situação 1

A figura abaixo representa um condomínio residencial formado por cinco prédios de apartamentos, cada um com cinco andares, sendo um apartamento por andar.



Veja como podemos localizar um apartamento desse conjunto:

- O apartamento *A* está situado no prédio 1, no andar 3.
  Esse fato pode ser indicado pelo par de números (1, 3).
- O apartamento *B* está situado no prédio 2, no andar 1.
  Esse fato pode ser indicado pelo par de números (2, 1).
- O apartamento *C* está situado no prédio 3, no andar 5.
  Esse fato pode ser indicado pelo par de números (3, 5).
- O apartamento *D* está situado no prédio 3, no andar 1.
  Esse fato pode ser indicado pelo par de números (3, 1).
- O apartamento *H* está situado no prédio 2, no andar 2.
  Esse fato pode ser indicado pelo par de números (2, 2).

Observe que os pares (1, 3) e (3, 1) indicam apartamentos diferentes. O primeiro corresponde ao apartamento *A*, enquanto o segundo corresponde ao apartamento *D*. Isso nos leva a concluir quanto é importante a ordem dos números em pares assim considerados.

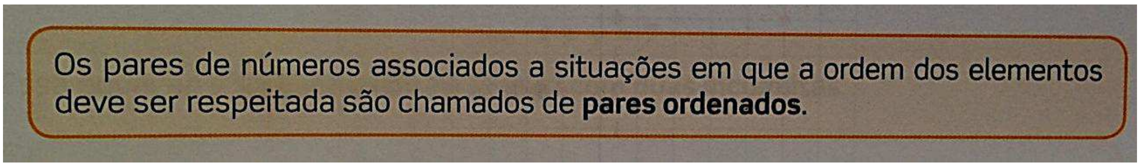
Podemos notar também que, por pertencerem ao mesmo prédio, os apartamentos *B* e *H* estão associados a pares de números em que o primeiro número é o mesmo; no caso, o número 2.

Analogamente, vemos que para os apartamentos *B* e *D*, situados no mesmo andar, associamos pares de números em que o segundo número é o mesmo; no caso, o número 1.

Fonte: Livro 3, p.145.

O autor retoma então o problema que utilizou para iniciar o capítulo e define par ordenado, como mostra a Figura 14.

Figura 14 – Conceito de Par Ordenado no livro 3.

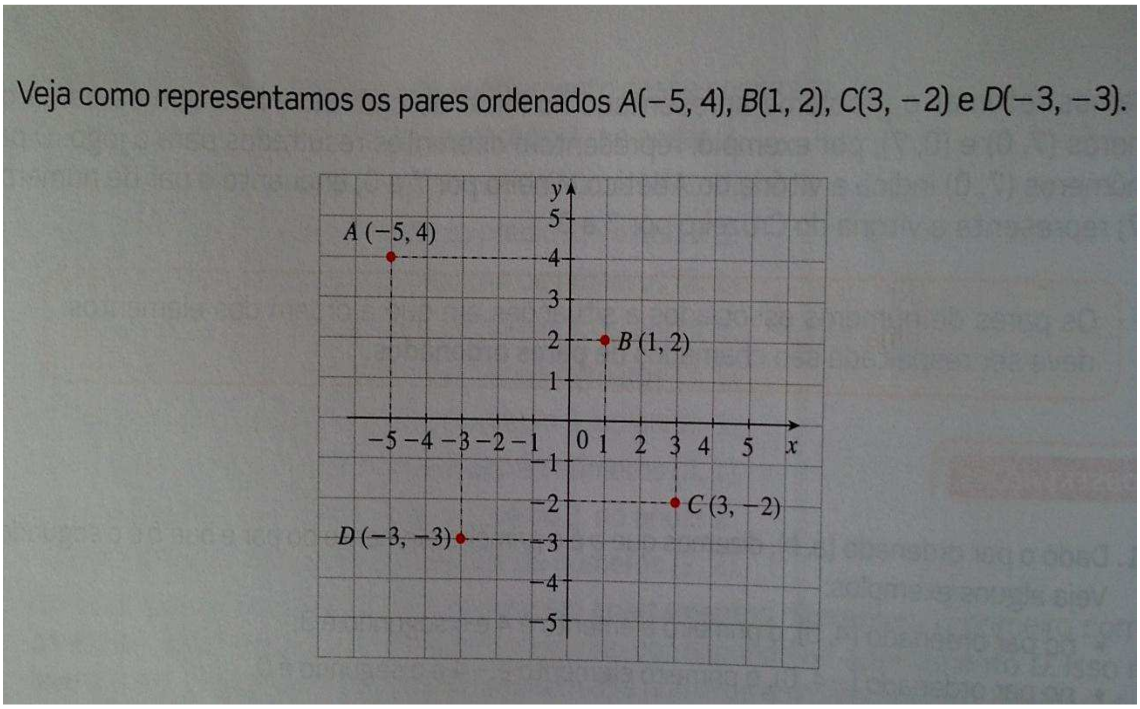


Os pares de números associados a situações em que a ordem dos elementos deve ser respeitada são chamados de **pares ordenados**.

Fonte: Livro 10, p. 147.

Logo após essa definição, inicia-se a representação geométrica dos pares ordenados. Para esse assunto, é explicado como se constrói o plano cartesiano e, por meio de um exemplo, atribui pontos no plano (Figura 15).

Figura 15 – Representação geométrica de Par Ordenado no livro 3.



Fonte: Livro 3, p. 148.

Sentimos falta nesse tópico da representação geométrica da equação no plano cartesiano. Acreditamos que o autor poderia ter retomado o exemplo utilizado para abordar o assunto e verificar o alinhamento dos pontos que são soluções de uma Equação do 1º Grau de Duas Variáveis.

Esse assunto é finalizado por meio de uma lista com seis exercícios. Importante ressaltar que um dos exercícios (Figura 16) aborda justamente a discussão que propomos acima.

Figura 16 – Exercício 5 do livro 3.

5 Considere o problema apresentado no início deste capítulo. Represente em um sistema de coordenadas os pares ordenados que são soluções desse problema. Se unirmos esses pontos por segmentos, o que poderemos observar?
Que eles estão alinhados.

Fonte: Livro 3, p. 148.

O autor destina mais um tópico para definir e resolver Equações do 1º Grau de Duas Variáveis. É interessante observar (Figura 17), porém, que o enfoque dado é totalmente algébrico, sem ao menos mencionar a representação geométrica dos pontos que são soluções da equação.

Figura 17 – Definição de Equação do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3.

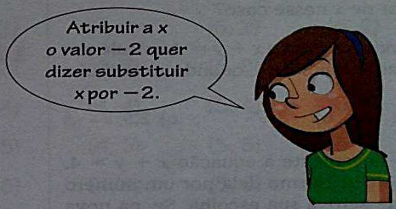
Uma equação que pode ser escrita na forma $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é chamada de **equação do 1º grau com duas incógnitas**.

Consideremos agora a equação $5x + 2y = 7$, em que x e y são números racionais.

Trata-se de uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Vamos ver um modo de encontrar uma das soluções dessa equação. Para isso, escolhemos um valor qualquer para x e, em seguida, substituímos esse valor na equação para determinar o valor de y. O par (x, y) será uma das soluções da equação.

Como exemplo, atribuiremos a x o valor -2:

$$5x + 2y = 7$$
$$5 \cdot (-2) + 2y = 7$$
$$-10 + 2y = 7$$
$$2y = 7 + 10$$
$$2y = 17$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{17}{2}$$
$$y = \frac{17}{2}$$



Portanto, o par $\left(-2, \frac{17}{2}\right)$ é uma solução da equação $5x + 2y = 7$.

A solução acima não é única. Podemos atribuir a x outro valor. Por exemplo, atribuindo a x o valor 1, temos:

$$5x + 2y = 7$$
$$5 \cdot (1) + 2y = 7$$
$$5 + 2y = 7$$
$$2y = 7 - 5$$
$$2y = 2$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{2}{2}$$
$$y = 1$$

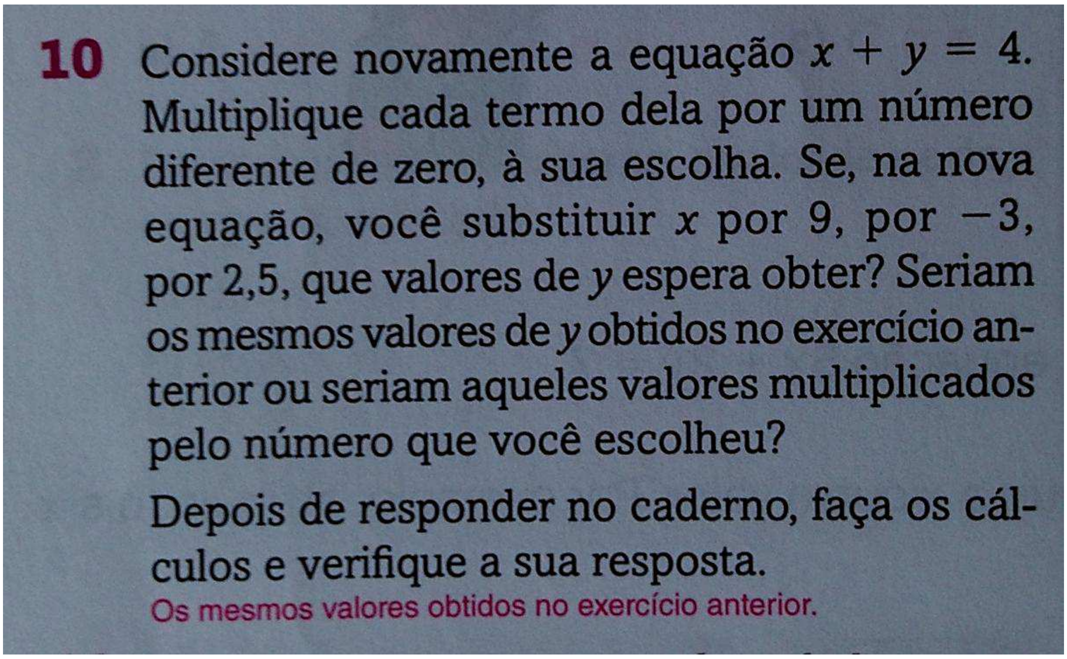
O par (1, 1) é outra solução da equação $5x + 2y = 7$.

Como x e y são números racionais, a equação $5x + 2y = 7$ tem **infinitas soluções**.

Fonte: Livro 3, p. 149.

Os exercícios propostos para o estudo desse item também não fazem relação com a geometria, deixando essa parte desconectada das representações do par ordenado no plano cartesiano. Cabe ressaltar, no entanto, que em um exercício (Figura 18) o autor aborda duas equações equivalentes, mas também não solicita a conversão para a representação geométrica. Dessa forma, supõe-se que o aluno não consiga visualizar que as duas equações representam retas coincidentes no plano.

Figura 18 – Exercício 10 do livro 3.



10 Considere novamente a equação $x + y = 4$. Multiplique cada termo dela por um número diferente de zero, à sua escolha. Se, na nova equação, você substituir x por 9, por -3, por 2,5, que valores de y espera obter? Seriam os mesmos valores de y obtidos no exercício anterior ou seriam aqueles valores multiplicados pelo número que você escolheu?

Depois de responder no caderno, faça os cálculos e verifique a sua resposta.

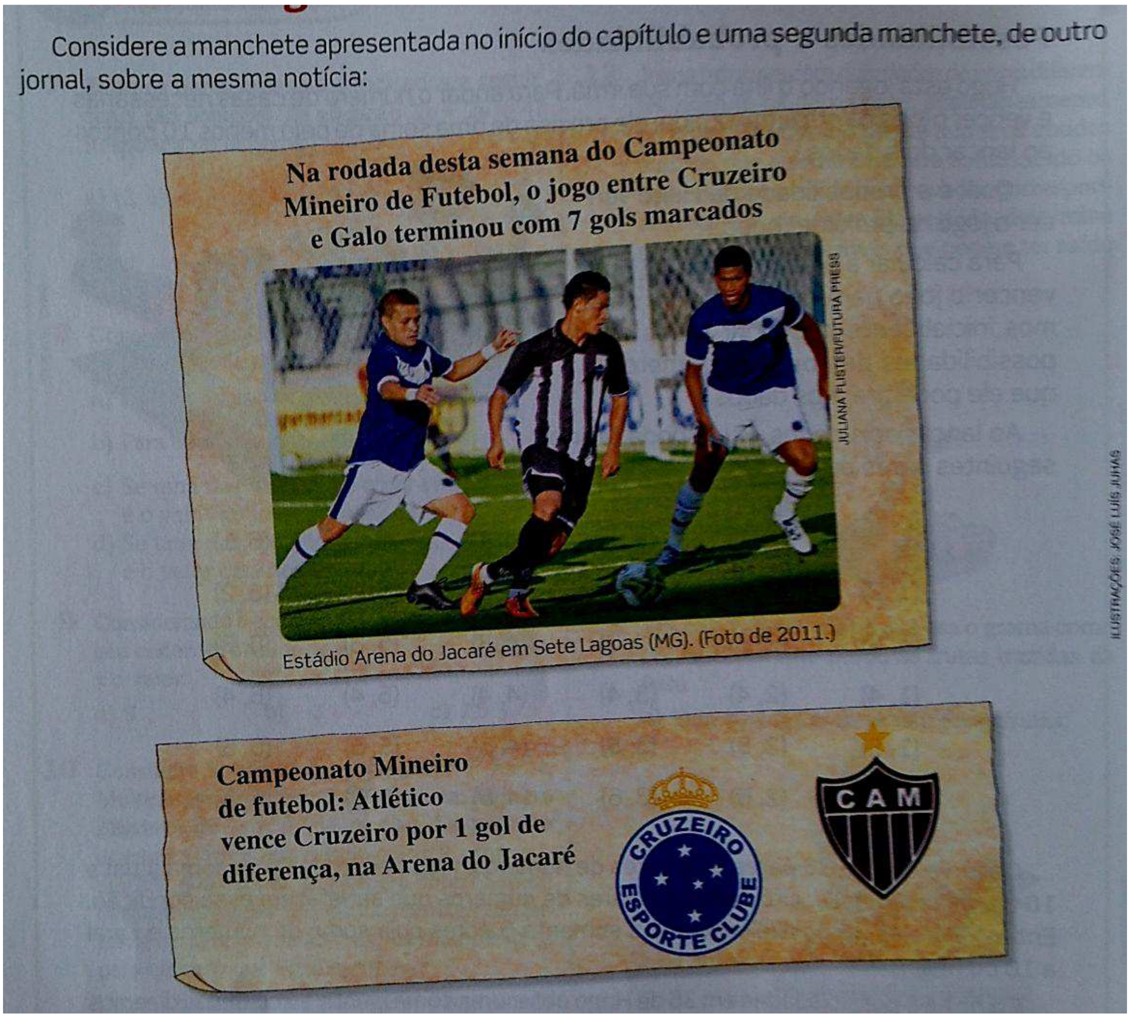
Os mesmos valores obtidos no exercício anterior.

Fonte: Livro 3, p. 150.

Para discutir o assunto Sistema de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis, o autor utiliza 12 de 336 páginas do livro.

O problema utilizado para abordar as Equações do 1º Grau com Duas Variáveis é retomado nesse momento e acrescentado mais uma informação (Figura 19) para que se possa trabalhar com um sistema de equações.

Figura 19 – Problematização de Sistemas de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3.



Considere a manchete apresentada no início do capítulo e uma segunda manchete, de outro jornal, sobre a mesma notícia:

Na rodada desta semana do Campeonato Mineiro de Futebol, o jogo entre Cruzeiro e Galo terminou com 7 gols marcados

JULIANA FLISTER/FUTURA PRESS

Estádio Arena do Jacaré em Sete Lagoas (MG). (Foto de 2011.)

ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS

Campeonato Mineiro de futebol: Atlético vence Cruzeiro por 1 gol de diferença, na Arena do Jacaré

CRUZEIRO ESPORTE CLUBE

C A M

Fonte: Livro 3, p. 152.

Logo em seguida é possível visualizar as transformações na linguagem de representação feitas pelo autor. Primeiramente o autor escreve os dados – que estavam na linguagem natural – na linguagem algébrica, passando pela representação de tabela e finalizando com a forma geométrica, conforme Figura 20.

Figura 20 – Variação dos registros do Sistema de Equações do 1º Grau com Duas Variáveis no livro 3.

Observe, no quadro abaixo, alguns dos possíveis resultados desse jogo, de acordo com a segunda manchete:

Gols marcados pelo Atlético Mineiro	1	2	3	4	5	6	7
Gols marcados pelo Cruzeiro	0	1	2	3	4	5	6
Pares ordenados	(1, 0)	(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	(7, 6)

Os pares ordenados (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5) e (7, 6) são, portanto, algumas das soluções da equação $x = y + 1$.

Nesse caso, se continuássemos a construção do quadro, sempre acrescentando um gol ao time do Atlético Mineiro, encontraríamos infinitas soluções para essa equação.

Note que o único par ordenado comum às duas situações é o par (4, 3), pois é o único em que a soma dos gols é igual a 7 e que representa a vitória do Atlético Mineiro por um gol de diferença. Logo, de acordo com essas informações, podemos afirmar que o Atlético Mineiro venceu o jogo por 4 a 3.

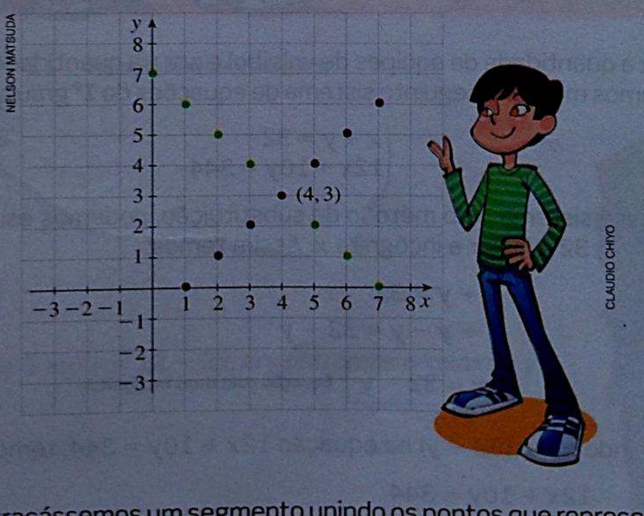
As equações $x + y = 7$ e $x = y + 1$ também podem ser indicadas por:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Elas constituem um exemplo de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

O par ordenado (4, 3), que verifica as duas equações, é a solução do sistema.

Veja o que acontece quando representamos, em um mesmo sistema de coordenadas, os pares ordenados que destacamos como soluções das duas equações:



Observe que, se traçássemos um segmento unindo os pontos que representam as soluções de uma mesma equação, obteríamos dois segmentos que se cruzariam no ponto de coordenadas (4, 3), que é a **solução do sistema**.

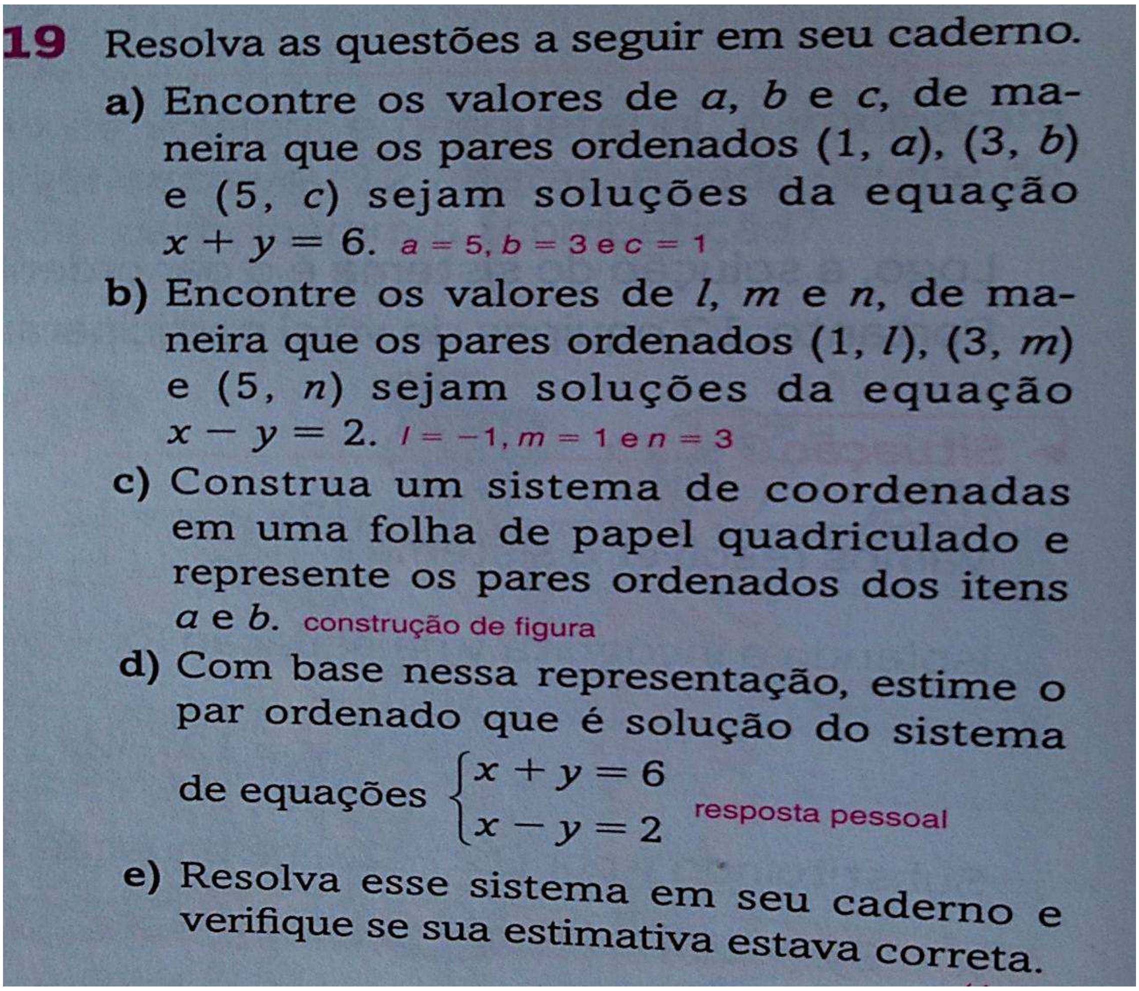
Fonte: Livro 3, p. 153.

Tal forma de abordar o conteúdo nos faz pensar que o autor preocupa-se com as conversões de representação de um objeto matemático, não contentando-se apenas com uma ou outra forma de representá-lo.

Na sequência o autor mostra, por meio de exemplos, duas formas algébricas de resolução do sistema: método da substituição e adição e termina o capítulo com 37 exercícios propostos.

Importante ressaltar que em apenas um exercício (Figura 21) o autor busca a representação geométrica de um determinado sistema. Porém, é possível verificar, por meio da alternativa e), que a solução é procurada utilizando apenas a forma algébrica. Não é feita e nem questionada a relação entre a solução do sistema e a posição relativa das retas no plano cartesiano.

Figura 21 – Exercício 19 do livro 3.



19 Resolva as questões a seguir em seu caderno.

a) Encontre os valores de a, b e c, de maneira que os pares ordenados $(1, a)$, $(3, b)$ e $(5, c)$ sejam soluções da equação $x + y = 6$. $a = 5$, $b = 3$ e $c = 1$

b) Encontre os valores de l, m e n, de maneira que os pares ordenados $(1, l)$, $(3, m)$ e $(5, n)$ sejam soluções da equação $x - y = 2$. $l = -1$, $m = 1$ e $n = 3$

c) Construa um sistema de coordenadas em uma folha de papel quadriculado e represente os pares ordenados dos itens a e b. construção de figura

d) Com base nessa representação, estime o par ordenado que é solução do sistema de equações $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ resposta pessoal

e) Resolva esse sistema em seu caderno e verifique se sua estimativa estava correta.

Fonte: Livro 3, p. 156.

4.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS NESTE ESTUDO

Após a análise destes três livros didáticos destinados ao ensino de matemática no Ensino Fundamental, podemos tecer algumas considerações sobre a forma de abordagem do conteúdo de Sistema de Equações de 1º grau com Duas Variáveis, os métodos utilizados para resolução dos mesmos, os exercícios propostos pelos autores e a sua preocupação quanto à variação dos registros do objeto matemático.

Quanto à forma de introduzir o conteúdo, percebemos bastante semelhança entre os livros analisados. Todos os autores abordam o conteúdo por meio de situação problema e convertem para a linguagem algébrica, buscando sua solução por meio de tentativas.

Em relação à forma de solucionar os sistemas, o método de trabalho também é o mesmo. É perceptível que os autores mostram alguns métodos algébricos de resolvê-los e, seguindo os exemplos propostos por eles, os alunos devem resolver os exercícios que são colocados na sequência dos exemplos.

Os exercícios propostos, em sua maioria, buscam apenas a solução na forma algébrica. Devemos ressaltar, porém, que em poucos momentos o livro de Bianchini se difere dos demais nos exercícios, ao solicitar que os pares ordenados que representam soluções das equações sejam representadas também geometricamente. Nos demais livros, os sistemas eram apresentados na forma algébrica, ou quando mais diferenciados, eram expostos na linguagem natural solicitando a conversão para a forma algébrica.

Quanto à preocupação em relação às conversões dos registros de representação, não a observamos nos autores abordados para esta análise. Exceto Bianchini, que parece mostrar tal preocupação no momento de abordagem do conteúdo – mudando a forma de representação para tabela e gráfico – e em dois exercícios, os demais autores não a realizam. Para os demais autores, o conteúdo Sistema de Equações de 1º grau com Duas Variáveis é trabalhado apenas na forma algébrica e na linguagem natural, fato que nos faz pensar que os alunos podem observar o objeto matemático como se existissem somente nessas formas de representação. Isso nos leva a refletir, também, a pertinência e relevância da proposta de trabalho que trazemos nessa dissertação.

5 PROCEDIMENTOS E MATERIAIS

Apresentamos nesse capítulo alguns pontos importantes que definem os métodos utilizados na realização desta pesquisa. Para melhor organização, dividimos o mesmo em duas partes: a primeira parte discute os procedimentos utilizados na realização desta pesquisa e a segunda apresenta o material produzido e a posterior análise.

5.1 PROCEDIMENTOS

Para iniciar os procedimentos, definimos estudo de caso e justificamos a apresentação deste em nossa pesquisa. Trazemos ainda algumas características peculiares desse tipo de estudo, bem como a importância que esse apresenta no contexto da Educação Matemática.

Apresentamos também a forma como os dados foram coletados e, em seguida, caracterizamos o campo de pesquisa.

5.1.1 Estudo de caso

Justificando nossa pesquisa como um estudo de caso, buscaremos a seguir definir tal estudo e apresentar características desse tipo de estudo, fazendo analogia de nosso trabalho com essas características.

5.1.1.1 O que é um estudo de caso?

Visando responder nossa questão norteadora, fundamentamos nosso trabalho no uso de tecnologias no ensino matemática e também nas representações semióticas. Buscamos, por meio da aplicação de uma sequência didática, uma alternativa para o ensino de Sistemas Lineares de forma diferenciada das apresentadas tradicionalmente em sala de aula e nos livros didáticos. Os princípios de um Estudo de Caso embasam os procedimentos que utilizamos à obter tais respostas.

Para Ponte (2006, p. 2): “O estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social.”

Justificamos com essa fala de Ponte a relação com a pesquisa que nos propomos a realizar, sendo que apresentamos uma sequência didática com uma turma de alunos do 7º ano do ensino fundamental, procurando, por meio de um estudo, analisar o aprendizado dos alunos ao inverter a apresentação do objeto matemático sistemas lineares: apresentando primeiramente a visão geométrica da solução do sistema para, só então, discutir suas possíveis soluções por meio da álgebra.

Analisando outras dissertações dos programas de mestrado profissional em ensino oferecidos pela PUC-SP e pela própria UFRGS, percebemos que o estudo de caso é um tipo comum de investigação em Educação Matemática, uma vez que este possibilita um estudo minucioso e descritivo de uma unidade escolar, de uma proposta apresentada por um professor, do espaço de uma sala de aula, de um grupo de alunos, entre outros.

André (2005 p. 17-18) defende que os estudos de caso apresentam quatro característica principais e essenciais em um estudo qualitativo:

> Particularidade significa que o estudo de caso focaliza uma situação, um programa, um fenômeno particular. O caso em si tem importância, seja pelo que representa. É, pois, um tipo de estudo adequado para investigar problemas práticos, questões que emergem do dia-a-dia.
> Descrição significa que o produto final de um estudo de caso é uma descrição "densa" do fenômeno em estudo. Por descrição densa entende-se uma descrição completa e literal da situação investigada. [...]. O estudo de caso engloba [...] variáveis e retrata suas interações ao longo do tempo.
> Heurística significa que os estudos de caso iluminam a compreensão do leitor sobre o fenômeno estudado. Podem revelar a descoberta de novos significados, estender a experiência do leitor ou confirmar o já conhecido.
> Indução significa que em grande parte, os estudos de caso se baseiam na lógica indutiva. "Descoberta de novas relações, conceitos, compreensão, mais do que verificação ou hipótese caracteriza o estudo de caso qualitativo".

Os estudos de caso têm tido fundamental importância para investigação da aprendizagem dos alunos no contexto da educação matemática. Ainda, esse tipo de estudo tem estado em destaque para analisar as práticas profissionais dos professores de matemática, desde sua formação inicial, passando por sua formação continuada e chegando ao âmbito de análise de projetos propostos por professores visando inovações curriculares, novos currículos, etc.

Para Ponte (2006), um caso funciona, sobretudo, como um exemplo. Ele afirma ainda que um dado caso pode fazer parte de um caso maior e incluir subcasos. É o que acontece, por exemplo, ao estudar uma experiência inovadora e, dentro desta, analisar a aprendizagem de um ou mais alunos. Cremos que esta afirmação também defende o uso do estudo de caso em nossa pesquisa, que busca avaliar o aprendizado dos alunos por meio de uma proposta diferenciada de abordagem dos Sistemas Lineares de Duas Equações e Duas Variáveis.

É importante salientar que este estudo pode ser realizado pela "negativa", que busca mostrar com uma situação constitui um fracasso em relação aos objetivos propostos, evidenciando, sobretudo, o porquê dessa falha. Pode também ser feito pela "positiva", mostrando o sucesso de um determinado estudo ou situação, ressaltando os motivos dessa atividade bem sucedida. Ou ainda, pode ser usado o estudo de caso apenas para nos mostrar algo novo e surpreendente, sem pretensão de mostrar o sucesso ou fracasso de determinada atividade ou situação. Este, por sua vez, trata-se de um estudo de caso "neutro".

Ponte (2006) defende ainda que o estudo de caso apresenta diversos desígnios. Cabe ressaltar que em Educação Matemática podem ser realizados estudos em qualquer uma das linhas apresentadas a seguir.

a) exploratórios, buscando informações acerca de determinado objeto de estudo.
b) descritivo, propondo-se essencialmente a descrever um determinado caso ou situação.
c) analítico, procurando problematizar seu estudo, confrontando suas teorias com outras já existentes.

André (2005, p. 51), ancorado nas ideias de Bassey (2003, p. 81-83), "considera que há três grandes métodos de coleta de dados nos estudos de caso: fazer perguntas (e ouvir atentamente), observar eventos (e prestar atenção no que acontece) e ler documentos".

5.1.1.2 Características de um estudo de caso

Um estudo de caso encontra-se diretamente relacionado a um trabalho de campo ou em análise documental, sendo, portanto, uma investigação baseada na observação dos fatos.

Por ser realizado em um determinado contexto real, Ponte (2006) defende que este tipo de estudo busca explorar todas as informações obtidas por meio de entrevistas, documentos e observações feitas detalhadamente de uma dada situação. Possui, portanto, caráter descritivo, apoiando-se na análise sistemática dos dados e, nunca está completa, sendo sempre possível acrescentar-lhe mais análises.

Outra característica bastante interessante é que o estudo busca compreender as situações na forma como ela está definida, não apresentando interesse em modificá-la, uma vez que ao optar por este tipo de pesquisa, não temos controle sobre os objetos de estudo. Portanto, essa investigação não apresenta, de forma alguma, caráter experimental, não permitindo, por sua vez, que o investigador faça qualquer tipo de intervenção nos dados.

Assim, como propósito desse trabalho, o estudo de caso apresenta a particularidade de proporcionar ao pesquisador a possibilidade de apresentar os resultados na forma narrativa, destacando pontos significativos na questão estudada.

5.1.2 Coleta de dados

As atividades foram aplicadas com uma turma de 7º ano de uma escola particular de Florianópolis, no laboratório de informática, em horário regular de aula. A turma continha 18 alunos, que foram separados em duplas para desenvolver os exercícios propostos na sequência. A sequência foi colocada aos alunos por meio de roteiro de aula, onde eles deviam, com o auxílio do Geogebra 4.4.29.0, responder os exercícios e entregar para o pesquisador no final do período para que fossem feitas as análises. Os arquivos construídos no Geogebra que serviam como bases para solucionar muitos problemas, por sua vez, nos eram encaminhados por e-mail, nomeados e enumerados, facilitando a análise dos dados. Ressaltamos aqui que a escolha pelo software Geogebra vincula-se ao fato de ser este um software livre e de fácil compreensão.

Para realizar essa pesquisa na unidade escolar encaminhamos um documento (Apêndice A) à diretora do colégio solicitando autorização para fazer testagem do material.

As aulas contavam ainda, com a gravação de vídeo com áudio e voz, permitindo-nos recorrer a esse recurso para realizar a análise, fato que facilitou bastante, uma vez que por meio dessa ferramenta podemos verificar as falas dos sujeitos e mantê-las na sua forma original.

Para nos reservar o direito de publicar imagens e as falas dos alunos, informamos no documento que encaminhamos à escola os procedimentos que utilizaríamos para coletar os dados. A unidade escolar, por sua vez, nos forneceu uma cópia do contrato de prestação de serviços educacionais (Apêndice B) que exige dos pais assinatura no ato da matrícula. Tal documento fornece autonomia para que sejam publicadas imagens dos alunos, conforme pode ser verificada na cláusula 10.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, foram feitos registros fotográficos, para caracterizar o ambiente no qual foi desenvolvido o estudo.

5.1.3 Caracterização da escola: campo de pesquisa

A escola na qual a pesquisa foi realizada está situada em um bairro nobre de Florianópolis e começou suas atividades em fevereiro de 2006.

Atualmente, a escola atende 260 alunos, divididos nos turnos matutino e vespertino, em Educação Infantil, Ensino Fundamental I e II. Conta também, com 49 funcionários nas funções de direção, secretaria, coordenação e auxiliar de coordenação, professores, serventes e vigias.

5.1.3.1 Descrição das instalações da unidade escolar

Para organização da leitura, resolvemos descrever as instalações da escola por meio da Tabela 2, constando a seguir.

Tabela 2 – Descrição das instalações do campo de pesquisa.

Salas	**Quantidade**
Coordenação	01
Secretaria	01
Biblioteca	01
Cantina	01
Sala de aula	14
Banheiros	32
Laboratórios	02
Salas de vídeos	02
Cozinha	01
Sala de Música	01
Sala de Bem Estar (Enfermaria)	01
Sala de Artes	01
Brinquedoteca	01
Sala de Xadrez	01
Sala de Estudos	01
Sala de Grupos	01
Sala de Estimulação	01
Sala Multiuso	01

Sala de Dança	01
Sala Psicologia	01

Fonte: Plano Político Pedagógico do Colégio Energia – Ensino Fundamental.

5.1.3.2 Descrição do quadro funcional

Assim como no tópico anterior, a Tabela 3 apresenta a descrição do quadro funcional da escola na qual aplicamos nossa sequência.

Tabela 3 – Descrição do quadro funcional do campo de pesquisa.

Função	**Quantidade**
Coordenação Pedagógica	1
Auxiliar de Coordenação	1
Coordenação Administrativa	1
Secretaria	1
Psicóloga	1
Docentes	32
Serventes	7
Vigilantes	2
Enfermeira	1
Laboratorista de Informática	1
Laboratorista de Ciências	1

Fonte: Plano Político Pedagógico do Colégio Energia – Ensino Fundamental.

5.1.3.3 Pressupostos teóricos e metodológicos de concepção de ensino e aprendizagem

A escola optou pela teoria sociocultural, escolha que se deu pelo entendimento de que a proposta do grupo encontra no arcabouço dos estudos realizados por Vygotsky (1898-1934) diretrizes que alicerçam um trabalho que possa contribuir de forma crítica e significativa para além dos cuidados com as crianças pequenas e adolescentes, contemplando seu contexto.

De acordo com essa teoria, a criança ao nascer se integra a uma cultura, dando início à sua própria história, na qual seu entorno e principalmente o grupo familiar terá grande influência na formação de hábitos, atitudes, valores éticos e morais. As características humanas não estão presentes desde o nascimento do homem, nem são meros resultados das pressões do meio. Elas resultam da interação dialética do homem e o seu meio sócio cultural. Quando o homem modifica o ambiente através do seu próprio comportamento, essa mesma modificação vai influenciar seu comportamento futuro.

Dessa maneira, na concepção vygotskyana, é através das interações que deixamos a condição de ser biológico e passamos a ser dotados de funções psicológicas superiores, as quais nos permitem raciocinar e discernir.

Cabe ainda ressaltar que a linguagem tem destaque nesse processo, considerada excelente veículo de comunicação, porque é por meio dela que o homem expressa seu modo de agir no mundo e demonstra seu nível de desenvolvimento.

A partir dessas diretrizes, é possível delinear ações pedagógicas nas quais os indivíduos, desde a mais tenra idade, são concebidos como protagonistas do conhecimento, aprendendo e reaprendendo pela experimentação, evidenciando-se assim um ser ativo e interativo. Na prática, isso significa que no trabalho desenvolvido na Educação Básica, os alunos são instigados a interagir com as pessoas e com os objetos presentes no seu entorno. Ainda neste contexto, o professor se apresenta como um mediador cuja função é articular os conteúdos escolares com as vivências e as indagações sobre a realidade em que vive.

Entende-se como metodologia os passos percorridos pelos professores e especialistas que definem o fazer pedagógico.

5.1.3.4 Perfil do aluno

Os alunos desta instituição são, na sua maioria, moradores de área nobre da grande Florianópolis. Pertencem a famílias que vieram de outros estados/países em busca de melhores condições de vida e também de oportunidades de trabalhos relacionados com o turismo. Os pais são de alto poder aquisitivo e exigem da escola uma educação de qualidade. Os alunos, em sua maioria, são estudiosos e determinados.

5.1.3.5 Perfil do professor

A escola definiu o perfil profissional dos docentes que atuam no Ensino Fundamental da seguinte forma:

- Possuir formação específica na área;
- Ter caráter polivalente;
- Ser flexível e responsável;

A escola entende como ter caráter polivalente que ao professor cabe trabalhar com conteúdo de naturezas diversas que abrangem desde cuidados básicos essenciais até conhecimentos específicos provenientes das diversas áreas de conhecimento. Esse caráter polivalente demanda, por sua vez, uma formação bastante ampla do profissional, que deve tornar-se, ele também, um aprendiz, refletindo constantemente sobre sua prática, debatendo com seus pares, dialogando com as famílias e a comunidade e buscando informações necessárias para o trabalho que desenvolve.

A instituição de ensino tem como compromisso em sua gestão viabilizar condições para que sua equipe de funcionários esteja sempre desenvolvendo suas potencialidades e competências de modo qualificado e responsável. Para isso, procura promover anualmente um ciclo de palestras com vários especialistas.

5.1.3.6 Organização curricular

O Ensino Fundamental visa desenvolver o espírito de cidadania, oferecer ferramentas essenciais que desenvolvam o senso crítico, aliando novas tecnologias da informação. Tem também como princípio envolver medidas que assegurem o acesso ao saber, buscando desta forma abordar metodologias que auxiliem os jovens na busca do êxito no processo de ensino aprendizagem.

As turmas do Ensino Fundamental estão assim constituídas: 1º ano, 2º ano, 3º ano, 4º ano, 5º ano, 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano.

5.1.3.7 Grade Curricular

Na concepção de educação utilizada por essa instituição de ensino o currículo vai além do fazer pedagógico e nele constam elementos que norteiam as ações educativas utilizadas, enfocando a grade curricular, disciplinas, conteúdos e conhecimentos.

- **Disciplinas do Ensino Fundamental**

  - História
  - Geografia
  - Português
  - Matemática
  - Artes/Música
  - Ciências

- Inglês
- Espanhol
- Educação Física
- Filosofia
- Matemática Financeira
- Xadrez

5.1.3.8 Avaliação

O desempenho dos alunos é avaliado trimestralmente por meio de pareceres descritivos no 1º ano do Ensino Fundamental e as demais atividades avaliativas são marcadas com antecedência pelo professor e em calendário escolar, trabalhos desenvolvidos individualmente ou em grupo, redações, pesquisas, avaliações realizadas nos laboratórios, aulas práticas, relatórios de atividades extra-classe e outras atividades que o professor considerar, juntamente com a coordenação/supervisão, de caráter fundamental.

Do 6º ao 9º ano a avaliação é quantitativa e realizada utilizando diferentes instrumentos, por meio de provas, exercícios, trabalhos. Os alunos que por algum motivo, perderam alguma prova terão direito a realizar a segunda chamada, que deverá ser previamente marcada.

Será aprovado o aluno que ao término do ano letivo, obtiver 21 pontos ou mais em cada disciplina. Se o rendimento for inferior a esse número, realizará a prova de recuperação.

A média anual é ponderante sobre a prova de recuperação, ou seja, a soma da média dos três trimestres será multiplicada por três e somada à nota da prova de recuperação multiplicada por dois, e tudo isso será dividido por cinco. Estará aprovado o aluno que tiver como resultado um valor maior ou igual a 5,0.

Terá direito à 2ª época de provas os alunos do 8º ao 9º ano que não atingirem a média necessária na prova final em até três disciplinas. A nota que o aluno precisará alcançar é a mesma nota da prova final.

5.2 MATERIAIS

Apresentamos neste item a sequência didática produzida, tal qual ela foi proposta aos alunos, na forma de roteiro de aula. Após, realizamos as análises dos dados, fazendo recortes de falas e escritas significativas feitas pelos sujeitos pesquisados.

4.2.1 A sequência didática

Verificando nos livros didáticos a pouca relevância dada à representação geométrica dos sistemas lineares de duas equações e duas variáveis e entendendo essa representação como de fundamental importância para a compreensão dos alunos, desenvolvemos a sequência didática proposta a seguir, no intuito de verificar se nossa proposta oportuniza o aprendizado dos alunos do 7º ano em relação a esse objeto matemático.

A sequência encontra-se separada por meio de roteiro, conforme já mencionado nesse trabalho. Entendemos ainda, a existência de quatro grandes grupos na sequência construída: o primeiro contém apenas o primeiro encontro e busca familiarizar os sujeitos da pesquisa com o software Geogebra, ferramenta utilizada no desenvolvimento da sequência. O segundo bloco, contém os dois encontros seguintes e refere-se ao estudo da solução de uma equação do 1º grau de duas variáveis, bem como sua representação geométrica. O terceiro bloco engloba do quarto ao oitavo encontro com os alunos e apresentam os sistemas de equações nas mais variadas formas: geométrica, algébrica e na linguagem natural (por meio de problemas), buscando verificar a compreensão dos alunos acerca da sua representação geométrica e realizando as conversões entre seus registros. Ainda nesse bloco, é possível perceber que apresentamos sistemas com apenas uma solução, com infinitas soluções e também sistemas que não possuem soluções. Finalizando, apresentamos os últimos dois encontros, que colocam os sujeitos pesquisados diante dos três tipos (possível e determinado, possível e indeterminado e impossível) de sistemas, desafiando-os a resolvê-los e classifica-los quanto ao número de soluções.

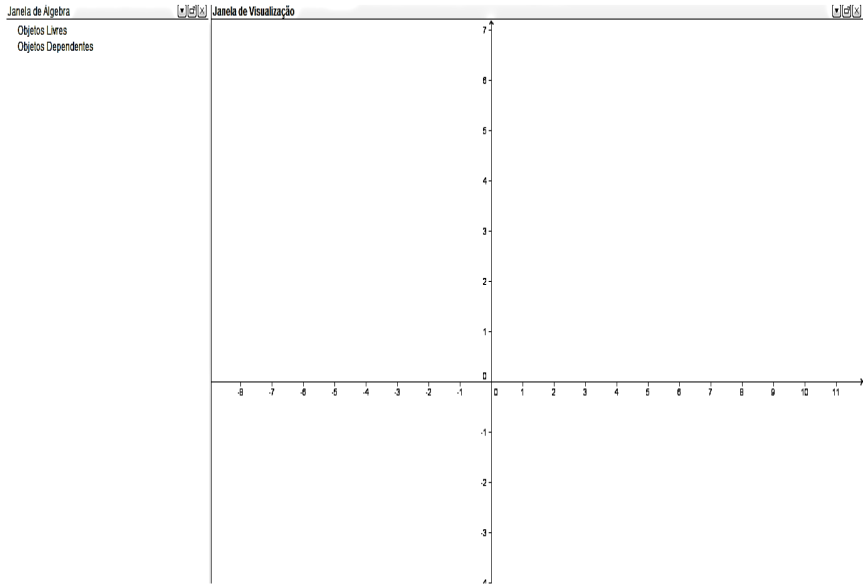
Apresentamos a seguir a sequência construída que apresentamos aos alunos e a retomaremos na forma de recortes no capítulo seguinte, realizando análise de dados.

1ª aula – Familiarização com o software Geogebra e alguns recursos básicos

a) <u>Barra de menus</u>

• clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho;

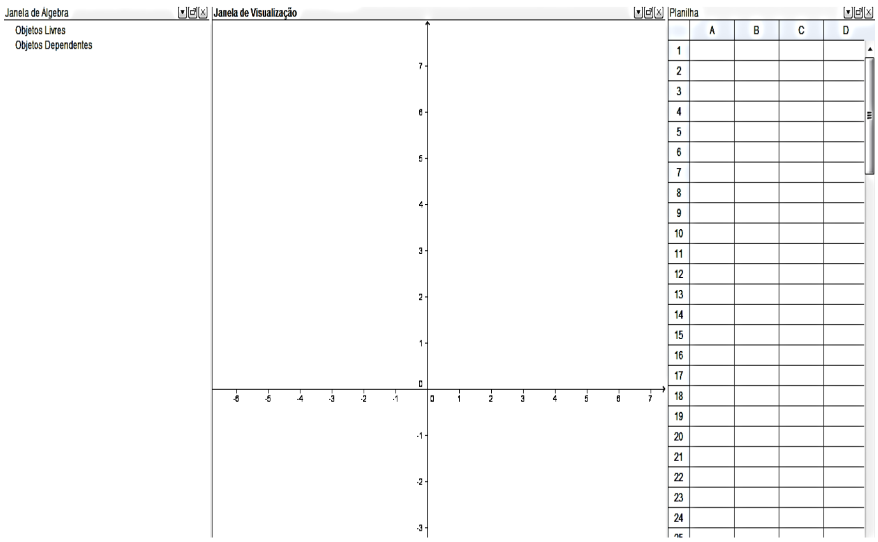
→ aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica



• clicar no menu:

***exibir - planilhas**

→ aparecerá, juntamente com a janela algébrica e gráfica, a planilha de cálculo;



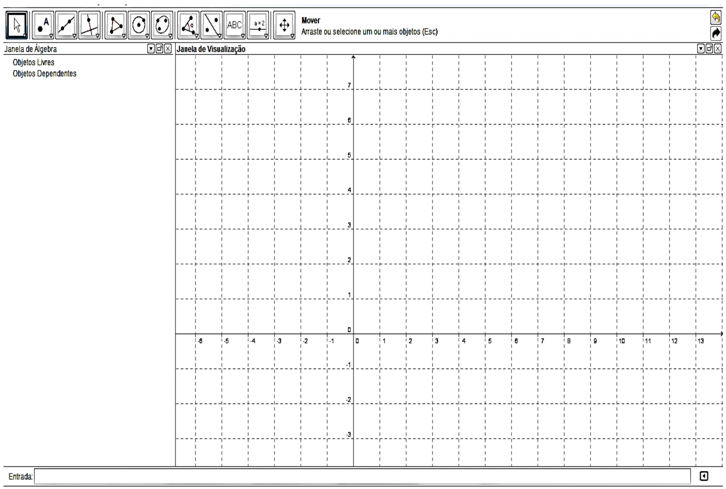
A **janela de álgebra** exibe as informações algébricas dos objetos que estão na área de visualização (janela gráfica);

A **janela de visualização gráfica** nos permite realizar construções geométricas (pontos, retas, segmentos, etc) por meio dos ícones disponíveis na barra de ferramentas ou pela digitação que pode ser realizada na janela de álgebra;

A **planilha de cálculo** nos permite a inserção de vários objetos matemáticos suportados pelo geogebra (coordenadas de pontos, equações, etc). Cada célula dessa planilha tem um nome especial que permite identificá-la. Assim como no excel, por exemplo, a célula localizada na *coluna B* e *linha 2*, é nomeada *B2*.

• Na janela de visualização, clicar no menu:

***exibir - malha**

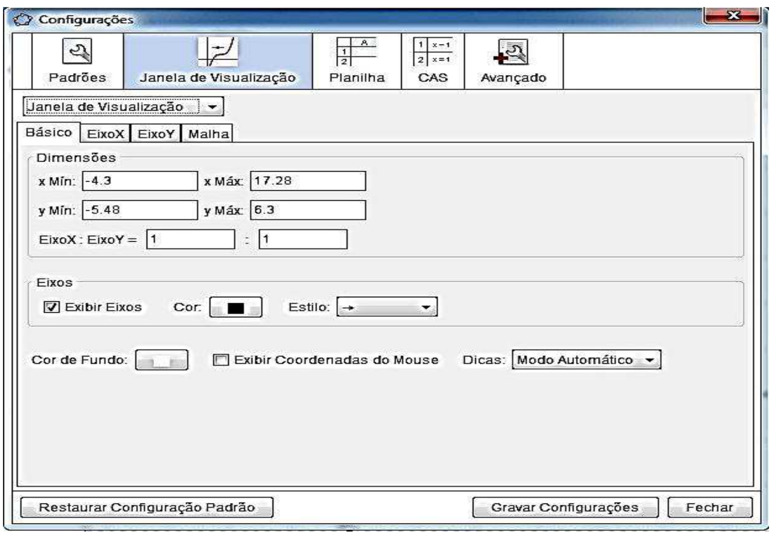


Para melhor visualizar, você pode fechar a planilha de cálculo.

• ainda na janela de visualização, clicar no menu:

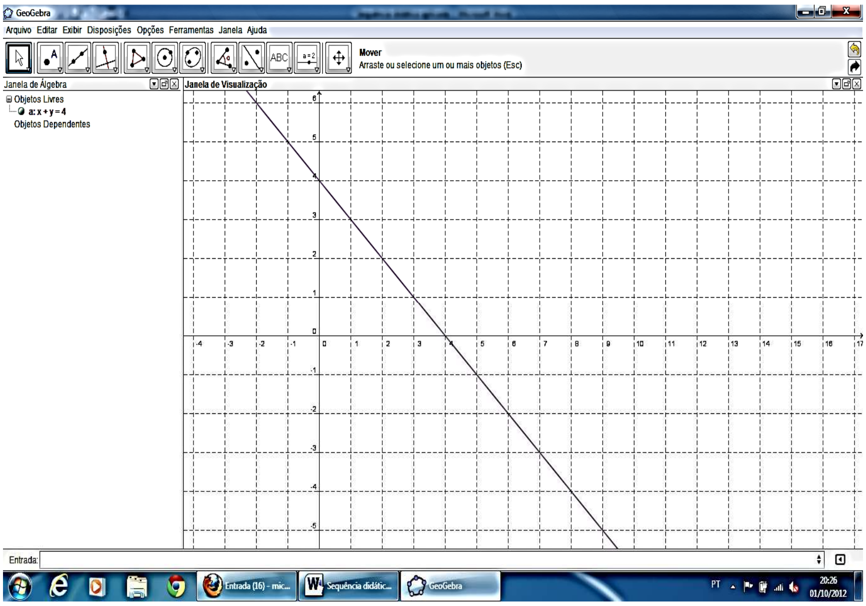
***opções - configurações**

→aparecerá a janela seguinte:

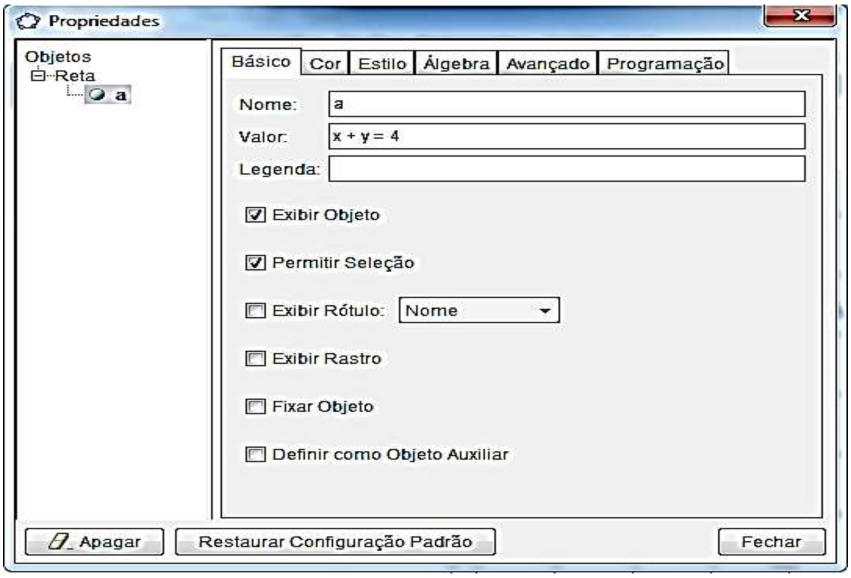


Nesse espaço você pode personalizar individualmente os eixos coordenados, suas unidades, cor de fundo e a distância entre as graduações. Ainda nesse espaço, você pode alterar cor e estilo das linhas.

• Na janela de entrada: digitar a seguinte equação: $x + y = 4$



Clicando duas vezes sobre a reta, você terá a janela abaixo:



Essa janela permite que você altere a cor da linha que apareceu no gráfico, sua espessura entre outras funções.

Feche a janela de propriedades.

• Em seguida clique em:

***editar – desfazer (Ctrl + z)**

O que aconteceu? ____

• Em seguida clique em:

***editar – refazer (Ctrl + y)**

O que aconteceu? ____

• Ir na pasta meus documentos e abrir uma pasta com seu nome.

• Vamos salvar a atividade realizada clicando em:

***arquivo – salvar – pasta com seu nome**

Salvar com o nome *atividade 01*

b) Barra de ferramentas

→ A barra de ferramentas apresenta ícones que, por sua vez, representa uma caixa de ferramentas que possibilita a criação de um conjunto de atividades.

• clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho;

• clicar em:

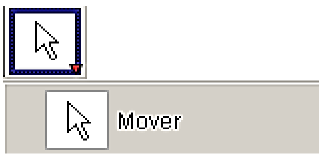
*** novo ponto**

→ E clique com o dentro da janela de visualização (perceba que cada ponto colocado está sendo registrado na janela algébrica com as coordenadas do tipo $(x\,,y)$.

→ Caso queira deletar algum ponto, basta clicar uma vez sobre as coordenadas desse ponto na janela algébrica e em seguida apertar **delete**.

→ Caso queira movimentar qualquer ponto colocado na janela de visualização, clique:

***mover**



→ Em seguida, clique com o mouse sobre o ponto e arraste-o para onde desejar.

• Se deseja mover a janela de visualização ou deslocar os eixos (x e y) dos gráficos, clique em:

***mover janela de visualização**

→ Perceba que essa ferramenta permite:

*deslocar eixos;

*ampliar ou reduzir o gráfico;

*entre outras funções.

• Esse tempo final de aula está disponível para que vocês possam explorar ainda mais o software e satisfazer sua curiosidade. O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao software.

2ª aula – Determinando soluções de equações de duas variáveis

01 – Considere a equação $x + y = 6$.

• Escreva na janela de entrada (algébrica) a equação e verifique a figura formada na janela gráfica.

Qual figura formou?

____

Agora descubra dois números reais cuja soma seja 6 (conforme equação acima) e preencha a tabela.

x						
y						

• Usando o comando inserir novo ponto, coloque esses pontos na janela gráfica.

Qual a relação entre esses pontos e a figura formada pela equação?

____

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “2ª aula_seunome_1.

02 – Dada a equação $x - y = 4$, calcule o par ordenado que satisfaz a equação e complete a lacuna:

a) $(5, \_\_)$ d) $(\_\_, 4)$

b) $(3, \_\_)$ e) $(\_\_, 0)$

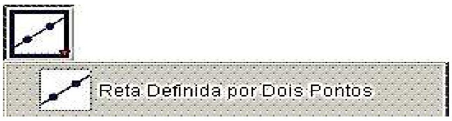
c) $(-1, \_\_)$ f) $(\_\_, 2)$

• Abrindo o software Geogebra, na janela da planilha de pontos, inserir na coluna A e B os pontos acima, sendo que a coluna A utilizada para a primeira coordenada e B para a segunda coordenada.

• Selecione a área na planilha onde foram colocados os valores que satisfazem a equação e clique com o botão direito do mouse, selecione a opção “criar lista de pontos”.

O que você observa sobre os pontos que apareceram?

• Com o mouse, selecione a função



.

Escolha dois pontos quaisquer da janela de visualização gráfica, clicando sobre eles.
O que é possível observar?

Olhando apenas a janela gráfica, você consegue identificar mais dois pontos (diferentes dos anteriores) que satisfazem a equação? Se sim, quais pontos?

Baseado no que verificamos nesta aula, quantas soluções podemos determinar para uma equação de duas variáveis?

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “2ª aula_seunome_2.

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

3ª aula – Verificando soluções de equações de duas variáveis

01 – Considere a equação $2x-3y=1$.

• Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação e verifique a figura formada na janela gráfica.

Qual figura formou?

____

Em seguida, insira os pontos abaixo no mesmo plano cartesiano utilizado acima:

$(5,1)$	$(5,3)$	$(5,-3)$
$(8,5)$	$(-4,-3)$	$\left(\frac{1}{2},0\right)$
$(-2,1)$	$\left(1,\frac{1}{3}\right)$	$(0,5)$

Quais dos pontos plotados acima satisfazem a equação?

____

____

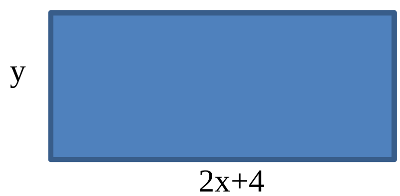
Como você consegue identificar os pontos que não satisfazem a equação?

____

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “3ª aula_seunome_1”.

02 – O perímetro do retângulo a seguir é 50 unidades de comprimento.



Qual equação que representa o perímetro dessa figura?

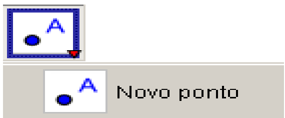
____

• Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação e verifique a figura formada na janela gráfica.

Qual figura formou?

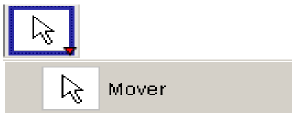
Com base na visualização gráfica, determine pelo menos dois pares ordenados[2] que satisfazem essa igualdade.

Coloque um ponto sobre a reta usando a função



.

Em seguida clique sobre o botão



e sobre o ponto novamente. Agora, mova o ponto sobre a reta.

Observe que os valores das coordenadas na janela de álgebra variam conforme o ponto se move.

Escolha três posições aleatórias desse ponto e escreva suas coordenadas no espaço abaixo:

O que você conclui sobre em relação a esses pontos?

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “3ª aula_seunome_2”.

03 – Utilizando o mesmo plano cartesiano:

a) Determine se o par ordenado $(4,-2)$ é uma solução correta para a equação $2x+3y=2$

( ) SIM ( ) NÃO

[2] O professor deve atentar-se ao fato de que esses pares ordenados devem ter coordenadas positivas, pois trata-se da solução de um problema de geometria. Caso necessário, o professor deve intervir para a compreensão do aluno.

Como você chegou a essa conclusão?

b) Verifique se o par ordenado $(3,1)$ é uma solução correta para a equação $4x - y = 12$

( ) SIM ( ) NÃO

Como você chegou a essa conclusão?

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “3ª aula_seunome_3”.

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

4ª aula – Resolvendo sistemas de equações de duas variáveis por meio de problemas

01 – Observe o retângulo abaixo:

y

x

a) Sabendo que o perímetro do retângulo abaixo vale 10 unidades de comprimento, monte uma equação que represente essa situação.

Executando o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação acima.

Em seguida, verifique dois pontos que satisfazem essa equação e escreva-os abaixo.

---

b) Sabe-se ainda que a diferença entre seu **comprimento x** e sua **largura y** é de 1 unidade de comprimento. Escreva abaixo a equação que representa essa situação.

Na mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, escreva a equação acima.

No espaço destinado abaixo, escreva dois pontos que satisfazem a equação acima.

Você consegue verificar algum ponto que satisfaça simultaneamente as duas equações? Quantos pontos? Qual (is)?

Qual a relação existente entre o (s) ponto (s) acima e as retas que representam as equações?

As retas construídas por meio das equações se cruzam? Em qual (is) ponto (s)?

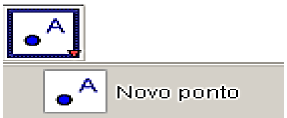
• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “4ª aula_seunome_1”.

02 – Numa garagem há **x motos** e **y carros** estacionados num total de 7 veículos e 20 rodas (desconsidere o estepe do carro).

a) Considerando apenas o total de veículos, escreva abaixo a quantidade de motos e carros que pode haver na garagem.

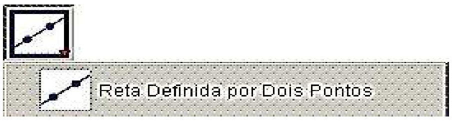
   OBS: Escreva 3 pares do tipo (x, y)**.**

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, use a função



para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função



, escolha dois pontos aleatórios e construa a reta que passa por esses pontos.

Pensando apenas na quantidade de veículos **(x motos e y carros)** existentes na garagem, monte uma equação que represente essa situação.

____

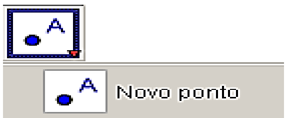
Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

____

b) Agora considere apenas o total de rodas existentes. Escreva abaixo a quantidade de motos e carros que pode haver na garagem.
   OBS: Escreva 5 pares do tipo (x, y).

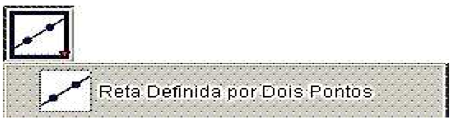
____

Usando a mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, use a função



para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função



, escolha dois pontos aleatórios e construa a reta que passa por esses pontos.

Pensando apenas na totalidade de rodas existentes na garagem, escreva uma equação que represente essa situação para x motos e y carros.

____

Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

____

Agora observe as duas equações que você escreveu e os pontos que satisfazem cada uma delas isoladamente.
Existe algum ponto que satisfaça as duas simultaneamente? Qual?

____

Qual a relação entre esse ponto e as duas retas construídas?

____

As duas retas se cruzam? Em que qual (is) ponto (s)?

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “4ª aula_seunome_2”.
• Mande os dois arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____
____
____
____
____

5ª aula – Resolvendo sistemas de equações de duas variáveis

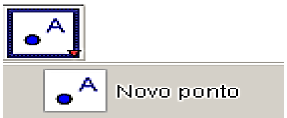
01 – Considere as duas equações abaixo:

$x+y=15$ e $x-y=9$.

a) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam soluções da primeira equação ($x+y=15$)

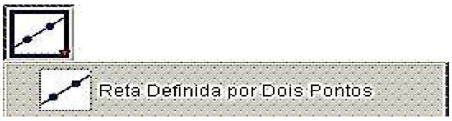
____

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, use a função



para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função

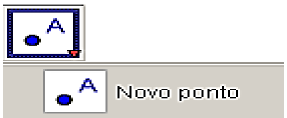


, construa a reta que passa por esses pontos.

b) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam soluções da segunda equação $(x - y = 9)$

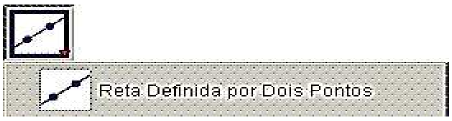
____

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, use a função



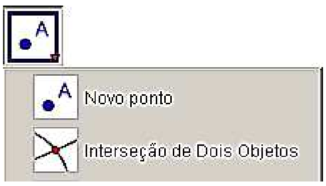
para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função



, construa a reta que passa por esses pontos.

Observe agora as retas construídas. Determine o ponto onde as retas se interceptam usando a função



(__ , __)

Substituindo o ponto acima nas duas equações, você pode verificar que este satisfaz a igualdade em ambas as equações.

Dizemos então que o ponto (__ , __) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 9 \end{cases}$.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "5ª aula_seunome_1".

02 – Por meio da solução geométrica (construção das retas), determine a solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \qquad (\_\_,\_\_)$$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “5ª aula_seunome_2”.

03 – Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 13 \end{cases} \qquad (\_\_,\_\_)$$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “5ª aula_seunome_3”.

04 – Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases} \qquad (\_\_,\_\_)$$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “5ª aula_seunome_4”.

Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e as retas construídas em cada equação?

____

____

____

____

• Mande os dois arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

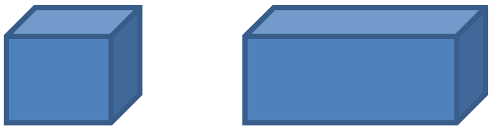
____

____

____

6ª aula – Utilizando sistemas de equações para resolver problemas

01 – Aqui temos duas caixas e cada uma possui um peso diferente. Sabe-se que, se colocadas juntas numa balança, o peso será de 25 kg. Mas, se colocarmos 5 caixas pequenas e mais duas caixas grandes, teremos 74 kg. Quanto pesa cada caixa?



Caixa pequena: _________

Caixa grande: _________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “6ª aula_seunome_1”.

02 – Leonardo comprou uma caneta e um lápis e gastou R$ 8,00. Comprando quatro canetas e três lápis irá gastar R$ 29,00. Qual o preço de cada caneta e de cada lápis?

Caneta: _________ Lápis: _________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “6ª aula_seunome_2”.

03 – A soma de dois números é 5 e a diferença entre o maior e o menor é 1. Quais são esses números?

Maior: _________

Menor: _________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “6ª aula_seunome_3”.

04 – Aqui temos dois tipos de pinguins: espécie A e espécie B.

Espécie A Espécie B

Por causa das circunstâncias climáticas, muitos pinguins se perderam do bando.

No ano passado foram encontrados na costa brasileira 32 pinguins dessas duas espécies. Da espécie A foram encontrados 14 a mais que da espécie B. Quantos pinguins de cada espécie foram encontrados?

Espécie A: __________

Espécie B: __________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “6ª aula_seunome_4”.

• Mande os quatro arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

7ª aula – Mas sempre existe um ponto de intersecção entre duas retas?

01 – Observe as duas equações que formam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Usando o software Geogebra, construa as retas que são determinadas por meio dessas equações e responda as questões abaixo:

a) Determine dois pares ordenados (x, y) que seja solução da 1ª equação $(x + y = 5)$.

____

b) Determine dois pares ordenados (x, y) que seja solução da 2ª equação $(x + y = 6)$.

____

c) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual?

____

d) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como essas retas são classificadas?

____

e) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “7ª aula_seunome_1”.

02 – Observe a equação $x + y = 3$.

a) Usando o software Geogebra, construa a reta que é determinada por meio dessa equação. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa equação?

____

Em seguida multiplique o 1º membro (lado esquerdo da igualdade) da equação por 2 e o 2º membro (lado direito da igualdade) por 3.

Qual equação você obteve?

____

b) Usando o software Geogebra (mesmo arquivo da equação anterior), construa a reta que é determinada por meio dessa nova equação que você obteve. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa nova equação?

____

c) Agora escrevendo um sistema com as duas equações anteriores, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \underline{\hspace{3cm}} \end{cases}$$

d) Existe solução para esse sistema de equações? Se sim, qual?

____

e) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como são classificadas?

____

f) O que você pode falar sobre a solução desse sistema?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "7ª aula_seunome_2".

03 – Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "7ª aula_seunome_3".

04 – Apenas preencha as lacunas para que os sistemas de equações abaixo não tenham solução:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = \_\_\_ \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ \_\_\_\_\_\_\_ = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = \_\_\_ \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

____

____

8ª aula – E se as retas forem as mesmas?

01 – Observe as duas equações que formam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Usando o software Geogebra, construa as retas que são determinadas por meio dessas equações e responda as questões abaixo:

a) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam solução da 1ª equação $(x + y = 3)$.

____

b) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam solução da 2ª equação $(3x + 3y = 9)$.

____

c) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, quantos e qual (is)?

____

d) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Como essas retas são classificadas?

____

e) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "8ª aula_seunome_1".

02 – Observe a equação $x + y = 4$.

a) Usando o software geogebra, construa a reta que é determinada por meio dessa equação. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa equação?

____

Em seguida multiplique os dois membros (todos os termos) da equação por 2.
Qual equação você obteve?

____

b) Usando o software Geogebra (mesmo arquivo da equação anterior), construa a reta que é determinada por meio dessa nova equação que você obteve. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa nova equação?

____

c) Agora montando um sistema com as duas equações anteriores, temos:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

d) Existe solução para esse sistema de equações? Se sim, quantas e qual (is)? Dê ao menos dois pares que sejam soluções dessas equações.

____

e) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Como são classificadas essas retas?

____

f) O que você pode falar sobre a solução desse sistema?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “8ª aula_seunome_2”.

03 – Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “8ª aula_seunome_3”.

04 – Apenas preencha as lacunas para que os sistemas de equações abaixo não tenham solução:

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = \_\_\_ \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 1 \\ 5x + 10y = 2 \end{cases}$

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

____

____

9ª aula – Resolvendo problemas e sistema de equações

Resolva os problemas abaixo utilizando o software Geogebra:

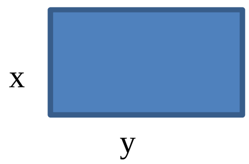
01 – Carlos e Joana tem juntos 12 anos. O dobro da idade de Carlos adicionado ao dobro da idade de Joana resulta em 24 anos. Quantos anos tem cada pessoa?

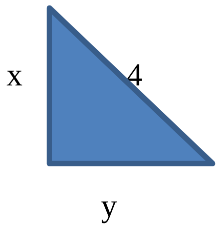
Carlos: ________________

Joana: ________________

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_1”.

02 – O perímetro do retângulo abaixo é de 18 cm e o perímetro do triângulo abaixo é de 12 cm. Determine o valor de **x** e de **y**.





x: _____ e y: _____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_2”.

03 – Existem 18 pessoas, entre homens e mulheres, assistindo uma palestra sobre hábitos alimentares. Cada homem pagou R$ 20,00 e cada mulher pagou R$ 10,00 para assistir a esta palestra. Ao todo foram arrecadados R$ 280,00. Quantos homens e quantas mulheres tinham nesse evento?

Homens: ______

Mulheres: ______

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_3”.

Resolva os sistemas abaixo:

04 – $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $(\_\_ , \_\_)$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_4”.

05 – $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ $(\_\_ , \_\_)$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_5”.

06 – $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$ $(\_\_ , \_\_)$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_6”.

• Mande os seis arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

____

10ª aula – Classificando sistemas

Os sistemas de equações do 1º grau que estudamos até o momento podem ser classificados quanto ao tipo de sua solução:

a) SPD (Sistema possível e determinado) – se possuir apenas uma solução;

b) SPI (Sistema possível e indeterminado) – se possuir infinitas soluções;

c) SI (Sistema impossível) – se não possuir solução;

Utilizando as discussões realizadas ao longo dessas 10 aulas, classifique os sistemas sem usar a ferramenta computacional, justificando sua classificação:

a) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$

____

____

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$

____

____

c) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

____

____

d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 6x + 9y = 30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x + 12y = 10 \end{cases}$

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

6 ANÁLISE DE DADOS

Com a aplicação da proposta apresentada, recorremos ao preenchimento do roteiro de aula, aos arquivos encaminhados via e-mail e também aos vídeos gravados das aulas e fizemos análise dos dados. Destacamos também que mantivemos as falas originais dos alunos em alguns trechos da análise a seguir e usamos nomes fictícios para os mesmos.

Buscamos, nesse momento de estudo dos dados coletados, relacionar as falas dos alunos e as experiências vivenciadas por eles com nosso referencial teórico, justificando a importância das representações semióticas e do uso de tecnologias na sala de aula para a aprendizagem em matemática.

Para uma melhor leitura, separamos a análise em 10 (dez) encontros, idêntica a aplicação da sequência didática. As duplas foram nomeadas de A até I (dupla A, dupla B, ... , dupla I), sendo identificadas nas figuras e nas falas dos alunos, conforme pode ser observado a seguir.

6.1 1º ENCONTRO: FAMILIARIZAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA E ALGUNS RECURSOS BÁSICOS

Nosso primeiro contato com a turma para o desenvolvimento da pesquisa nos colocou diante da situação de apresentar aos 18 alunos presentes na sala o software Geogebra e algumas de suas funções básicas, que serviriam de subsídios para continuarmos nossas atividades nas aulas seguintes.

Abaixo seguem os objetivos que nos propomos para esse primeiro contato:

a) verificar a familiaridade dos alunos com a tecnologia, bem como o prazer em utilizá-la;
b) incentivar o uso de tecnologias como ferramenta para aprender matemática;
c) apresentar o software Geogebra aos alunos;
d) apresentar as potencialidades do software e as possíveis conversões dos objetos matemáticos por meio das janelas de álgebra, gráfica e planilhas;
e) discutir funções básicas (refazer, desfazer, mover, salvar, etc) oferecidas pelo software que serão alicerces para dar continuidade à atividade nas aulas seguintes;
f) mostrar as diversas formas de representação de um objeto matemático.

Iniciamos com uma discussão sobre o uso de tecnologia como um fator relevante para aprendizagem dos alunos. É importante salientar que tal discussão não abordou apenas a aprendizagem de matemática, mas também as outras disciplinas que compõe o currículo escolar. Aproveitamos o espaço para sabermos dos alunos sobre sua familiaridade com o uso da internet (e-mail, redes sociais, etc) e de software específicos (como Geogebra, por exemplo).

Ao começarmos a aula com a discussão sobre esse assunto, ficou perceptível o envolvimento dos alunos no debate, pois levantavam a mão ansiosamente querendo opinar.

Em seguida, fizemos a leitura, acompanhado dos alunos, do roteiro da aula 01 e disponibilizamos tempo para que os mesmos pudessem realizar as atividades do roteiro e explorar ainda mais o software, satisfazendo sua curiosidade. A Figura 22 mostra a apresentação do Geogebra feita pelo autor do trabalho.

Figura 22 – Apresentação do Geogebra feita pelo autor do trabalho.

Fonte: Arquivo Pessoal.

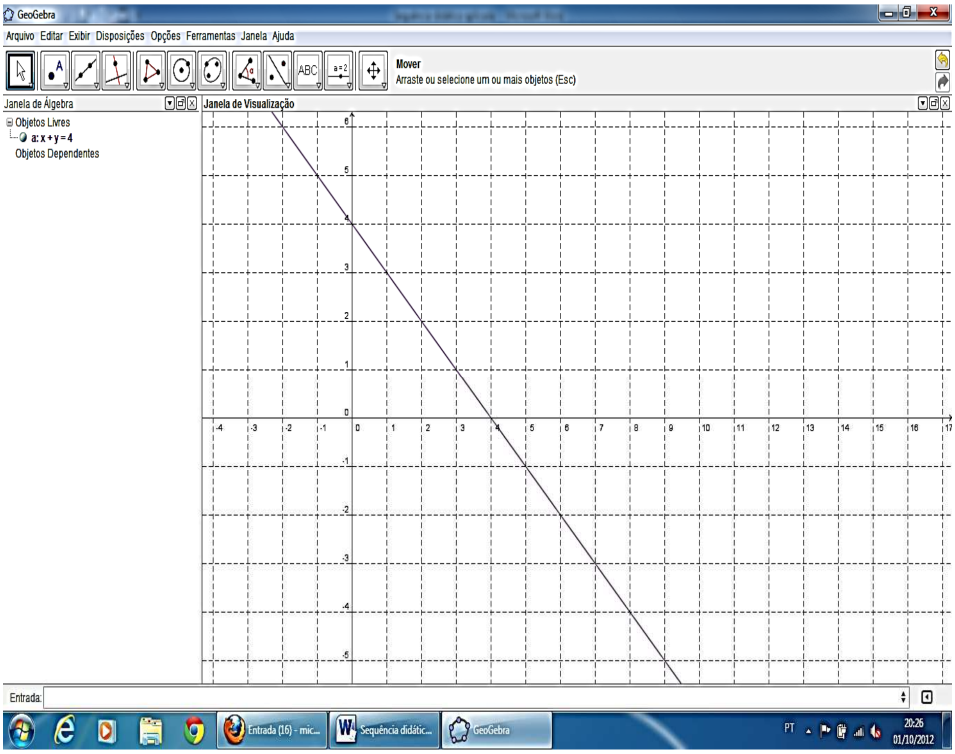
Como estávamos prevendo, respaldados nas ideias de Kenski (2006) referente ao momento de ascensão das tecnologias que vivemos, não nos surpreendemos ao verificar a facilidade que os alunos apresentaram frente ao uso dessa ferramenta. Mesmo não conhecendo o software Geogebra, apresentaram grande desenvoltura ao utilizá-lo.

Todos os alunos já possuíam e-mail (utilizado para enviar atividades propostas pelo professor), redes sociais e usavam internet diariamente. Mostraram-se muito envolvidos na aula e empolgados com o software apresentado, buscando explorar coisas diferentes daquelas apresentadas no roteiro.

Com essa aula, buscamos familiarizar os alunos com o software Geogebra e também motivá-los ao uso de tecnologia, procurando deixar a aula mais atrativa para os mesmos.

Dentre as atividades que propusemos para esse encontro, estava a seguinte: *"Na janela de entrada: digitar a seguinte equação:* $x + y = 4$.*"*. Tal atividade colocava os alunos diante da primeira variação de um objeto matemático, fazendo com que percebessem que a representação de uma equação de 1º grau de duas variáveis na forma geométrica trata-se de uma reta no plano cartesiano. A Figura 23 mostra o arquivo apresentado por uma dupla de alunos.

Figura 23 – Resposta do exercício aula 01 (dupla D).



Fonte: Arquivo Geogebra.

Nesse primeiro contato com os alunos apresentando a atividade proposta, ficou perceptível o envolvimento deles com as atividades devido ao uso da tecnologia. Tal fato nos faz acreditar que o uso de um software para ensinar matemática pode ser um caminho viável e que pode auxiliar muito no aprendizado dos alunos.

Os objetivos propostos para o primeiro encontro foram alcançados, uma vez que os alunos mostraram-se interessados no desenvolvimento das atividades propostas e também percebemos bastante facilidade no uso do software e envolvimento na aula com o uso da tecnologia.

6.2 2º ENCONTRO: DETERMINANDO SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Nesse encontro nos propomos a iniciar o assunto de Equações do 1º grau de Duas Variáveis e sua representação gráfica com os alunos, bem como outras formas de registros destas equações.

Com essa aula de 50 minutos, temos os seguintes objetivos:

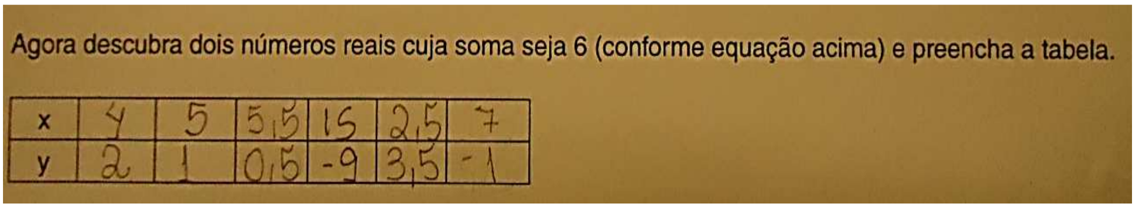
a) utilizar o software Geogebra para construir retas por meio de equações;
b) observar que uma equação de duas variáveis representa uma reta no plano cartesiano;
c) determinar soluções de equações de duas variáveis;
d) representar uma equação de duas variáveis e suas soluções por meio de registros diferentes;
e) verificar a relação existente entre um par ordenado (solução de uma equação de duas variáveis) e a reta que representam essa equação;
f) traçar uma reta por meio de dois pontos (usando o software);
g) mostrar que uma equação de duas variáveis possui infinitas soluções.

Visando atingir os objetivos acima descritos, fizemos uma leitura do roteiro de aula, dando assim início às duas atividades que os alunos deviam responder até o fim do período.

Buscamos com essa aula, fundamentalmente, apresentar as diversas maneiras de registrar uma equação de duas variáveis e acreditamos que, por meio das observações feitas e dos exercícios propostos, os alunos conseguiram transitar entre os diferentes registros de representação da equação (algébrica, tabular, gráfica, etc).

A primeira atividade consistia em escrever uma equação $(x + y = 6)$ na entrada e visualizar a conversão do registro para a forma gráfica. Em seguida, os alunos foram solicitados a encontrar pares ordenados cuja soma fosse seis $(x + y = 6)$ e representá-los por meio de uma tabela (Figura 24). Essa construção foi facilmente feita pelas duplas de trabalho.

Figura 24 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 02 (dupla A).

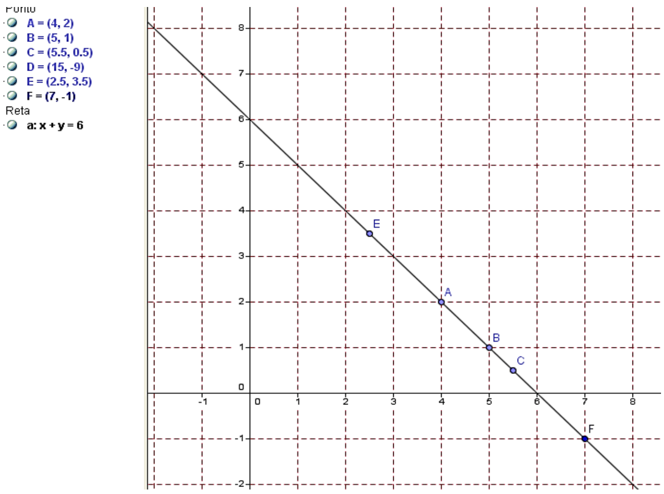

Agora descubra dois números reais cuja soma seja 6 (conforme equação acima) e preencha a tabela.

x	4	5	5,5	15	2,5	7
y	2	1	0,5	-9	3,5	-1

Fonte: Roteiro de aula.

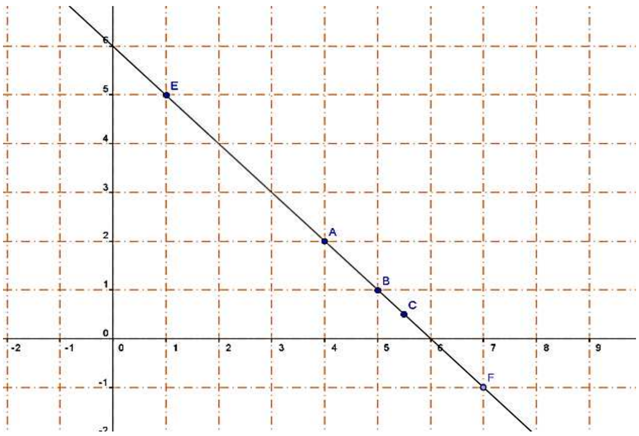
Curiosamente, destacamos que duas duplas (dupla A e dupla B) de alunos trabalharam com números decimais, enquanto todas as outras atribuíram apenas números inteiros como solução da equação. Quando solicitados a explicar o motivo de usarem tais valores, responderam: “*Ah fessô, vimos que a soma dava certo* (se referindo a soma resultar em 6) *e depois também testamos vendo se dava na reta* (desta vez se referindo que o ponto deveria estar sobre a reta)”. Tal fala evidencia que perceberam o alinhamento dos pontos que são soluções de uma equação de 1º grau de duas variáveis e que são capazes de determinar soluções para a equação quando esta estiver escrita tanto na forma algébrica quanto representada na forma geométrica. Abaixo, a Figura 25 e Figura 26 trazem uma ilustração das atividades respondidas pelo alunos.

Figura 25 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 02 (dupla A).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

Figura 26 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 02 (dupla B).

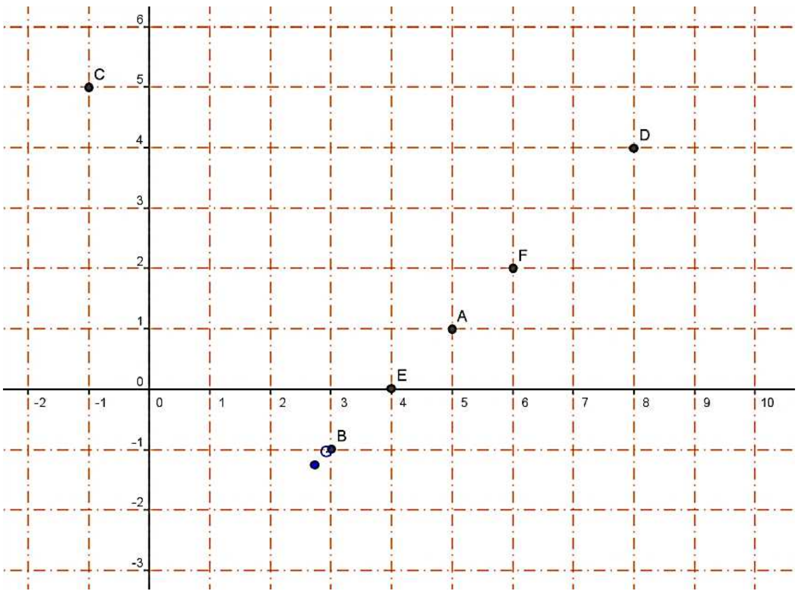


Fonte: Arquivo do Geogebra

Tendo em vista que ao final dessa aula, o aluno deveria observar (por meio do gráfico) que uma equação de duas variáveis possui infinitas soluções e também determinar algumas destas soluções algébrica e graficamente, acreditamos estar caminhando de forma correta, uma vez que na primeira atividade eles já perceberam a relação entre as soluções da equação e a reta formada por estas.

No segundo exercício, foi solicitado aos alunos que determinassem as soluções por meio do processo algébrico inicialmente e, a partir daí, inserissem esses pontos na planilha do Geogebra para, só então, plotá-los na janela gráfica (utilizando a função reta definida por dois pontos). Merece destaque as observações feitas por vários alunos ao mencionar que houve um ou outro ponto da sua atividade que deviam estar errados, pois estavam desalinhados em relação aos outros. Maria (dupla A) disse: *"Professor, eu acho que meu ponto C está errado, pois não tá na linha dos outros"*. Ao final da atividade, observando o arquivo (Figura 27) das alunas, constatamos que realmente o par ordenado $C(-1,5)$ não satisfazia a equação $x-y=4$.

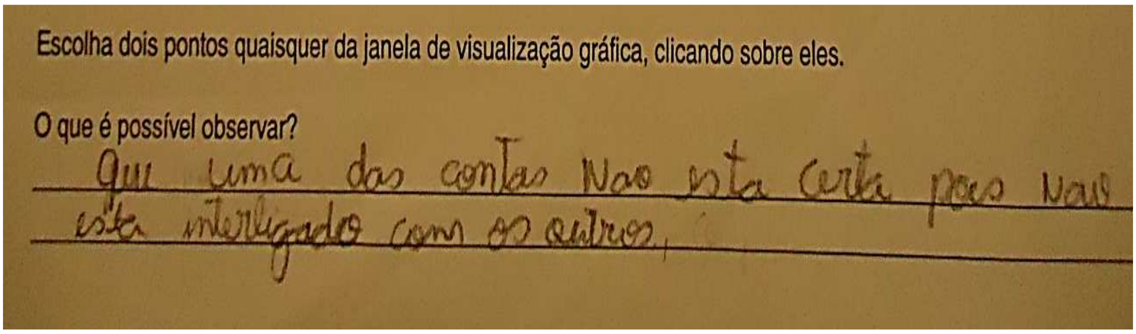
Figura 27 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 02 (dupla A).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

Enquanto isso, Sônia (dupla B) fez o comentário (Figura 28) abaixo:

Figura 28 – Resposta manuscrita do exercício 02 aula 02 (dupla B).



Escolha dois pontos quaisquer da janela de visualização gráfica, clicando sobre eles.

O que é possível observar?

Qui uma das contas Nao esta certa pois Nao esta interligado com os outros,

Fonte: Arquivo pessoal.

Cabe salientar que o comentário acima foi feito após a construção da reta que passa pelos pontos plotados na janela gráfica, o que nos remete a Duval (2003) e nos faz reafirmar a importância das conversões dos registros, que facilita na visualização de determinados problemas, tendo em vista as limitações representativas de um objeto em apenas uma forma de representação.

Todos os alunos identificaram mais soluções quando solicitados e concluíram que uma equação de duas variáveis possui infinitas soluções.

Com o desenvolvimento dos alunos em sala de aula e após analisar os exercícios que eles entregaram via e-mail e preenchidos no roteiro, podemos concluir que os objetivos da aula foram alcançados. Isso se deve ao fato de todos os alunos terem entregue as atividades devidamente preenchidas e os erros cometidos, terem sidos constatados pelos próprios alunos. Ao fazer a análise dos registros feitos no Geogebra e compará-los com os preenchidos no roteiro de aula, percebemos também que os alunos efetivaram a transição entre os registros (tabelas, gráficos, linguagem algébrica) corretamente, nos fazendo crer, respaldados por Duval (1993, p. 51 apud MORETTI 2012, p. 471), que houve a compreensão efetiva do conteúdo, uma vez que para o autor "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação[...]."

Finalmente, ficou perceptível que compreenderam a quantidade de soluções existentes para uma equação de duas variáveis, embora algumas duplas responderam "muitas" e "várias" quando solicitado. Isso fica evidente também porque sempre conseguiam identificar mais uma solução quando requisitávamos oralmente.

6.3 3º ENCONTRO: VERIFICANDO SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

No terceiro momento estivemos focados em determinar soluções de equações de duas variáveis e em verificar se determinados pontos satisfaziam as igualdades, sendo assim, soluções para as equações dadas.

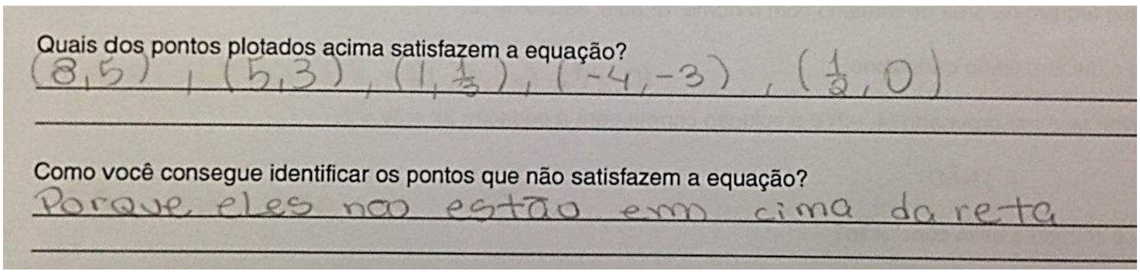
Para esse encontro com duração de 50 minutos, tínhamos proposto os seguintes objetivos:

a) inserir pontos no plano cartesiano;
b) construir retas (utilizando o Geogebra) no plano cartesiano;
c) verificar os pontos que satisfazem uma equação através do Geogebra;
d) determinar soluções de uma equação de duas variáveis usando o software;
e) resolver problemas que devem ser modelados por equações;
f) transitar entre diferentes registros para representar e resolver equações de duas variáveis.

Inicialmente, fizemos uma leitura do roteiro de aula e destinamos 15 minutos para resolverem cada atividade proposta no roteiro.

Para iniciar a discussão dos problemas, foi dada uma equação ($2x-3y=1$) de duas variáveis e solicitado que construíssem a reta que representa essa equação. Disponibilizamos no roteiro de aula nove pontos (pares ordenados) e solicitamos que indicassem quais desses não satisfaziam a equação, acompanhado da justificativa. Os alunos construíram a reta usando o software e inseriram os pontos que constava no roteiro por meio da função inserir pontos. Dessa forma, responderam a atividade de forma rápida e correta, conforme ilustra a Figura 29 a seguir.

Figura 29 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 03 (dupla A).



Quais dos pontos plotados acima satisfazem a equação?

$(8,5)$, $(5,3)$, $(1,\frac{1}{3})$, $(-4,-3)$, $(\frac{1}{2},0)$

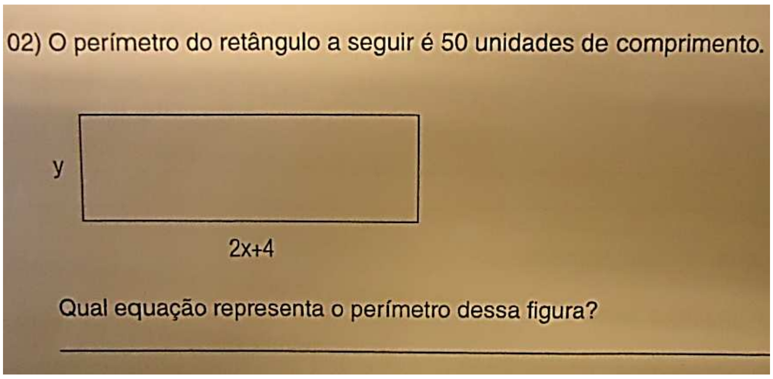
Como você consegue identificar os pontos que não satisfazem a equação?

Porque eles nao estão em cima da reta

Fonte: Roteiro de aula.

Para a resolução da segunda atividade proposta, consideramos que o estudo da geometria plana (ao menos noções de perímetros) seja conhecimento prévio dos alunos, uma vez que a atividade proposta sugere a construção de uma equação que determine o perímetro do retângulo, conforme Figura 30 a seguir.

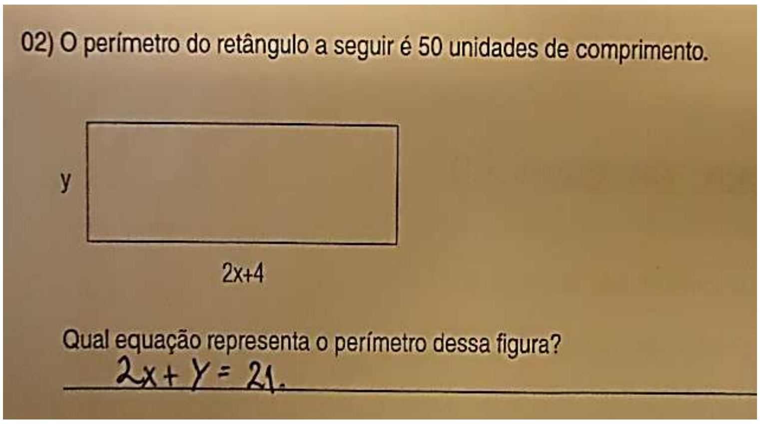
Figura 30 – Enunciado parcial do exercício 02 aula 03.



Fonte: Arquivo pessoal.

O fato interessante é que houve divergências na resposta do 1º item desta questão: enquanto sete duplas escreveram a equação $(4x + 2y + 8 = 50)$ tradicionalmente trabalhada, somando-se todos os lados das figuras, duas subtraíram 8 de ambos os membros da equação e, em seguida, dividiram esses membros da equação por dois (Figura 31), encontrando uma equação equivalente.

Figura 31 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 03 (dupla E).



Fonte: Roteiro de aula.

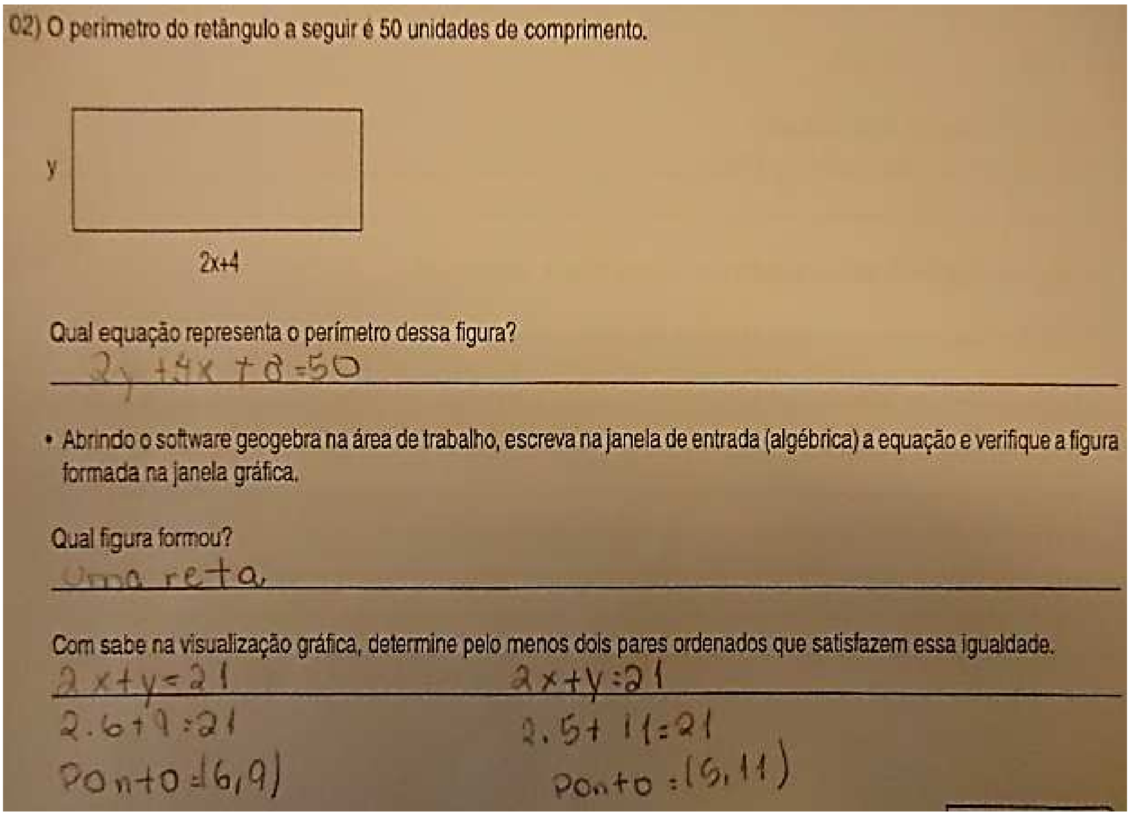
Quando nos dirigimos a eles perguntando como criaram tal equação, um aluno rapidamente respondeu: *“Apareceu esta quando digitamos a outra no Geogebra, fessô”*. E o outro complementou: *“É, e tá certo fessô, dá pá vê que é a mesma, porque a solução da primeira também dá na segunda”*.

Nesse momento, intervimos para explicar que as equações eram equivalentes e que o fato de um par ordenado solucionar duas equações não assegura que as duas equações sejam iguais. Explicamos também, que embora houve mudança no tratamento algébrico da equação, as duas equações eram equivalentes.

Solicitamos também nesta atividade que os alunos elencassem alguns pares ordenados que solucionassem a equação que representava o perímetro do retângulo. A dupla A levantou uma questão relevante: *“Professor, tem que ser x e y positivo, né? Porque não existe lado do retângulo negativo”*. É importante lembrar que ao apresentar a sequência o professor deve estar atento ao tipo de solução que deve ser encontrada. Na sequência, mencionamos esse fato com uma nota de rodapé.

Ao verificar as soluções (Figura 32 e Figura 33) dadas pela dupla, o professor percebe que elas encontraram os pontos por meio do gráfico, mas fizeram também o teste algébrico para mostrar a veracidade da solução.

Figura 32 – Resposta completa manuscrita do exercício 02 aula 03 (dupla A).



02) O perímetro do retângulo a seguir é 50 unidades de comprimento.

y

2x+4

Qual equação representa o perímetro dessa figura?

$2y + 4x + 8 = 50$

- Abrindo o software geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação e verifique a figura formada na janela gráfica.

Qual figura formou?

Uma reta

Com sabe na visualização gráfica, determine pelo menos dois pares ordenados que satisfazem essa igualdade.

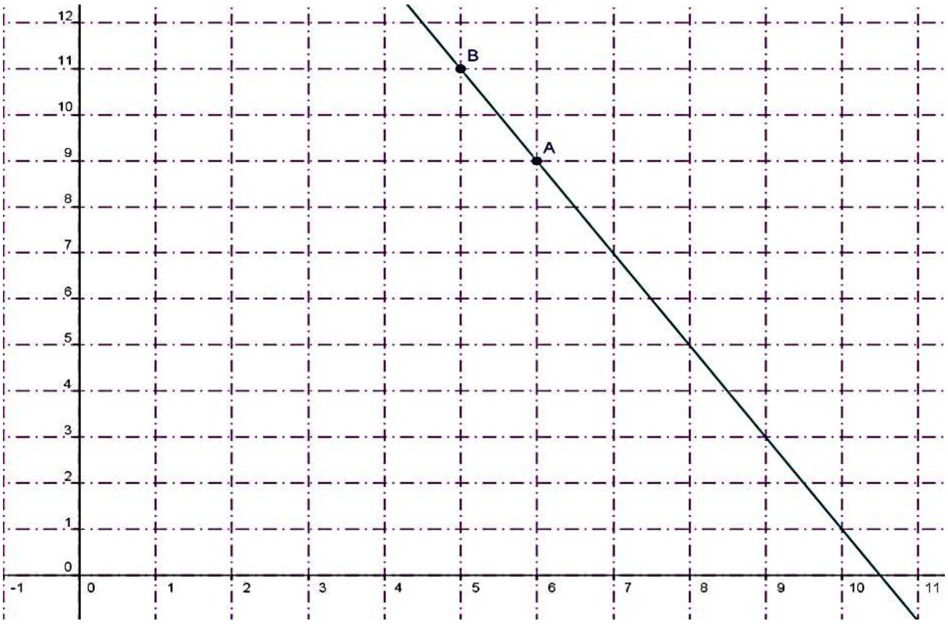
$2x+y=21$ $\quad$ $2x+y=21$

$2.6+9=21$ $\quad$ $2.5+11=21$

Ponto $=(6,9)$ $\quad$ Ponto $=(5,11)$

Fonte: Roteiro de aula.

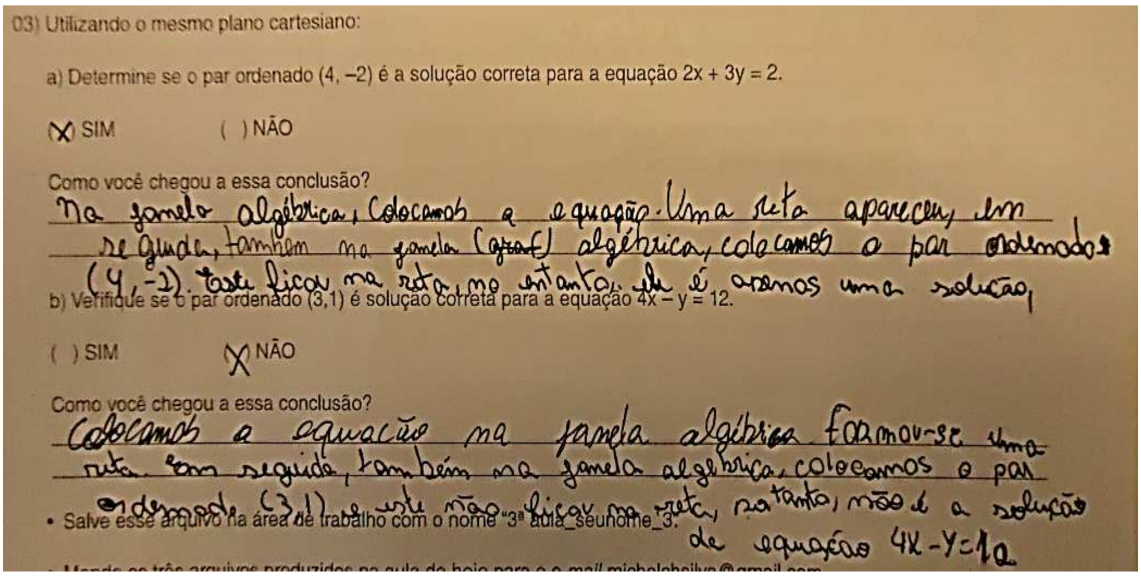
Figura 33 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 03 (dupla A).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

A terceira atividade solicitava que eles usassem o Geogebra para verificar se um determinado ponto satisfazia ou não uma equação dada. Todas as duplas responderam corretamente a atividade, mas destacamos a resposta (Figura 34) dada pela dupla F, que respondeu precisamente, com uma explicação bem clara de seu entendimento.

Figura 34 – Resposta manuscrita do exercício 03 aula 03 (dupla F).



03) Utilizando o mesmo plano cartesiano:

a) Determine se o par ordenado (4, –2) é a solução correta para a equação 2x + 3y = 2.

(X) SIM ( ) NÃO

Como você chegou a essa conclusão?

Na janela algébrica, colocamos a equação. Uma reta apareceu, em seguida, também na janela (graf) algébrica, colocamos o par ordenado (4, -2). Este ficou na reta, no entanto ele é apenas uma solução,

b) Verifique se o par ordenado (3,1) é solução correta para a equação 4x – y = 12.

( ) SIM (X) NÃO

Como você chegou a essa conclusão?

Colocamos a equação na janela algébrica formou-se uma reta. Em seguida, também na janela algébrica, colocamos o par ordenado (3,1) e este não ficou na reta, no entanto, não é a solução da equação 4x - y = 12

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "3ª aula_seunome_3".

Fonte: Roteiro de aula.

Revendo a proposta para essa aula e analisando os resultados obtidos e as observações feitas pelos alunos, percebemos ter atingido nosso objetivo, uma vez que os alunos usaram a tecnologia para converter os registros de representação do objeto matemático e, por meio dessas conversões, identificaram os pontos que são (ou não) soluções de uma equação de duas variáveis.

Embora ainda não seja o objetivo da aula, é relevante mencionar a importância das observações feitas por algumas duplas a respeito das equações equivalentes, pois isso facilitará significativamente o trabalho dos sistemas lineares possíveis e indeterminados feitos posteriormente.

6.4 4º ENCONTRO: RESOLVENDO SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES E DUAS VARIÁVEIS POR MEIO DE PROBLEMAS

Nosso quarto encontro voltou-se para a construção de equações de duas variáveis que foram apresentadas em problemas por meio da linguagem natural. Mais do que isso, os alunos foram desafiados a converter esses registros em linguagem algébrica, resolver cada equação separadamente e, enfim, determinar a solução de um sistema formado por duas equações dessa natureza.

Para essa aula, determinamos os seguintes objetivos:

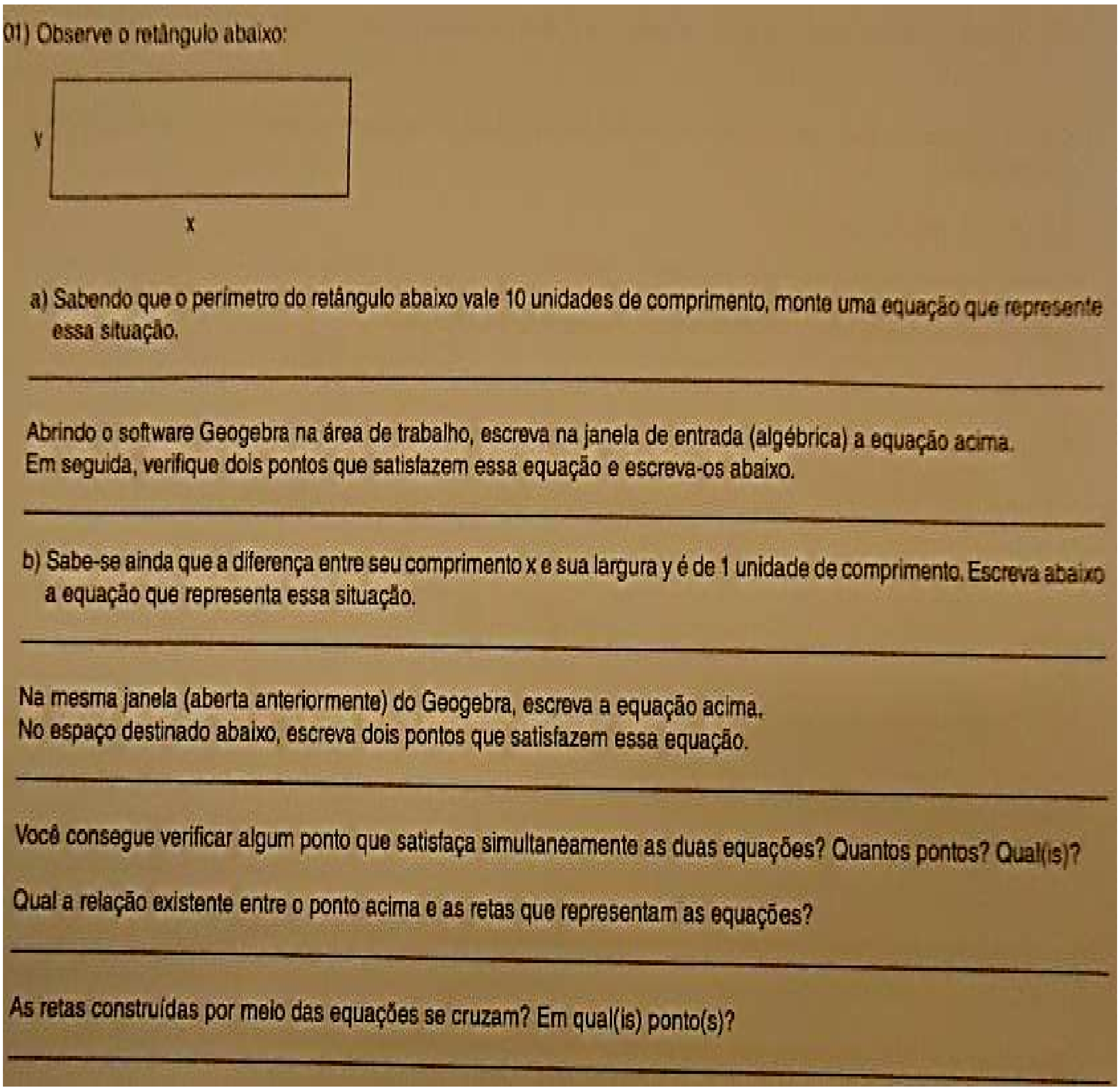
a) representar situações problemas por meio de equações de duas variáveis;
b) determinar soluções para problemas de equações usando o software Geogebra;
c) introduzir sistemas lineares de duas equações e duas variáveis por meio de problemas;
d) resolver problemas matemáticos através de sistemas de equações;
e) relacionar a solução de um sistema de equações de duas variáveis e o ponto de intersecção das retas formadas por essas equações.

Inicialmente, fizemos a entrega do roteiro de aula, fazendo a leitura das atividades e explicando o que desejávamos em cada uma delas. O roteiro dessa aula contava com dois exercícios problemas que seriam resolvidos com sistemas de equações de duas variáveis. Cada atividade solicitava a construção de um arquivo (no Geogebra) que deveria ser entregue via e-mail para posterior análise. Ainda, respaldados nessa construção, os alunos deveriam realizar algumas atividades contidas no roteiro de aula.

Com essa aula, buscamos conduzir o aluno a uma reflexão acerca de problemas que necessitam ser resolvidos com o uso de sistemas de equações de duas variáveis, mas sem conceituá-lo ou mostrar qualquer método de resolução. Acreditamos que os alunos estabeleceriam relações entre os pontos de intersecção das retas construídas por meio das equações e a solução do sistema linear formado por essas equações.

O exercício 01 (Figura 35) encaminhava o aluno a construir e resolver um sistema linear de duas equações e duas variáveis.

Figura 35 – Enunciado do exercício 01 aula 04.



01) Observe o retângulo abaixo:

y

x

a) Sabendo que o perímetro do retângulo abaixo vale 10 unidades de comprimento, monte uma equação que represente essa situação.

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação acima. Em seguida, verifique dois pontos que satisfazem essa equação e escreva-os abaixo.

b) Sabe-se ainda que a diferença entre seu comprimento x e sua largura y é de 1 unidade de comprimento. Escreva abaixo a equação que representa essa situação.

Na mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, escreva a equação acima. No espaço destinado abaixo, escreva dois pontos que satisfazem essa equação.

Você consegue verificar algum ponto que satisfaça simultaneamente as duas equações? Quantos pontos? Qual(is)?

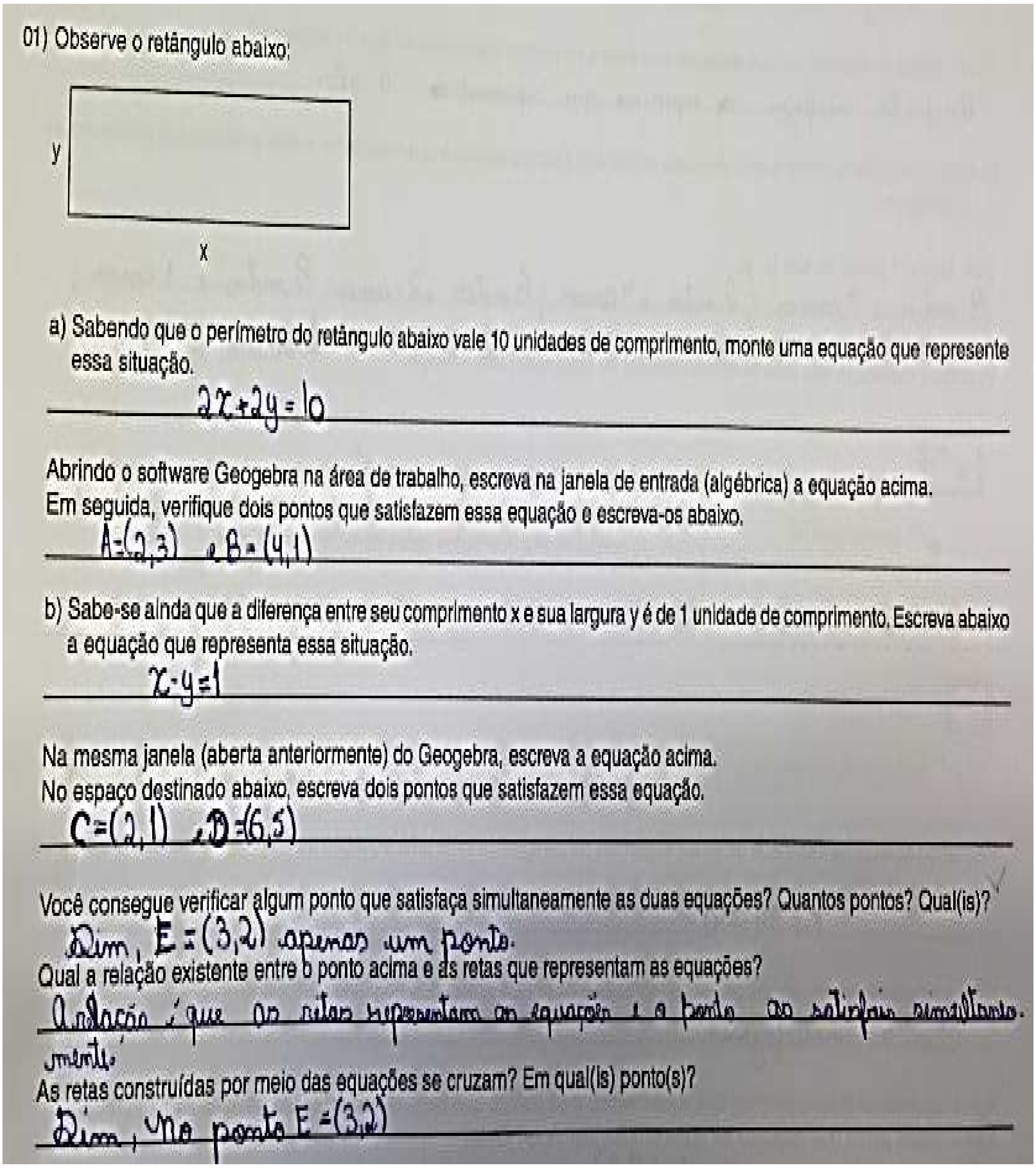
Qual a relação existente entre o ponto acima e as retas que representam as equações?

As retas construídas por meio das equações se cruzam? Em qual(is) ponto(s)?

Fonte: Arquivo pessoal.

Das nove duplas de trabalho formadas, sete resolveram corretamente o exercício e estabeleceram as relações esperadas pelo professor, conforme Figura 36 abaixo:

Figura 36 – Resposta completa manuscrita do exercício 01 aula 04 (dupla D).



01) Observe o retângulo abaixo:

y

x

a) Sabendo que o perímetro do retângulo abaixo vale 10 unidades de comprimento, monte uma equação que represente essa situação.

$2x+2y=10$

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação acima. Em seguida, verifique dois pontos que satisfazem essa equação e escreva-os abaixo.

$A=(2,3)$ e $B=(4,1)$

b) Sabe-se ainda que a diferença entre seu comprimento x e sua largura y é de 1 unidade de comprimento. Escreva abaixo a equação que representa essa situação.

$x-y=1$

Na mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, escreva a equação acima. No espaço destinado abaixo, escreva dois pontos que satisfazem essa equação.

$C=(2,1)$, $D=(6,5)$

Você consegue verificar algum ponto que satisfaça simultaneamente as duas equações? Quantos pontos? Qual(is)?

Sim, $E=(3,2)$ apenas um ponto.

Qual a relação existente entre o ponto acima e as retas que representam as equações?

A relação é que as retas representam as equações e o ponto as satisfaz simultaneamente.

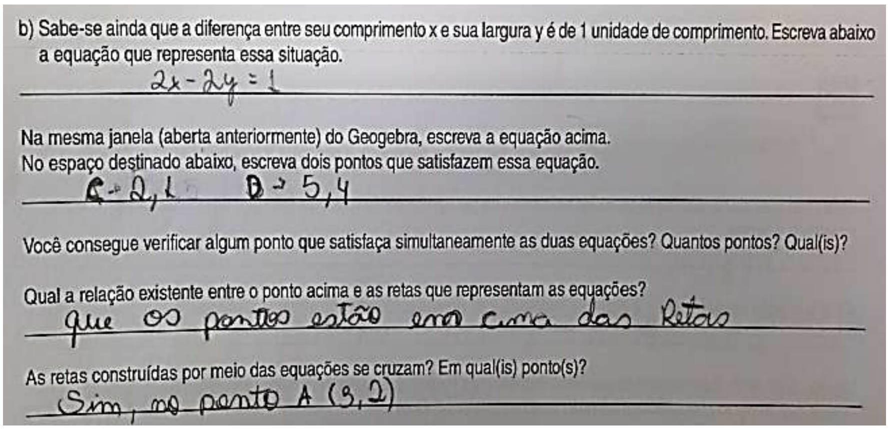
As retas construídas por meio das equações se cruzam? Em qual(is) ponto(s)?

Sim, no ponto $E=(3,2)$

Fonte: Roteiro de aula.

Curiosamente, duas duplas (B e C) responderam igualmente e erroneamente o exercício 01. Segue abaixo (Figura 37) a resposta dos alunos (item b)).

Figura 37 – Resposta parcial manuscrita do exercício 01 aula 04 (dupla B).



b) Sabe-se ainda que a diferença entre seu comprimento x e sua largura y é de 1 unidade de comprimento. Escreva abaixo a equação que representa essa situação.

2x - 2y = 1

Na mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, escreva a equação acima.
No espaço destinado abaixo, escreva dois pontos que satisfazem essa equação.

C → 2,1   D → 5,4

Você consegue verificar algum ponto que satisfaça simultaneamente as duas equações? Quantos pontos? Qual(is)?

Qual a relação existente entre o ponto acima e as retas que representam as equações?

que os pontos estão em cima das Retas

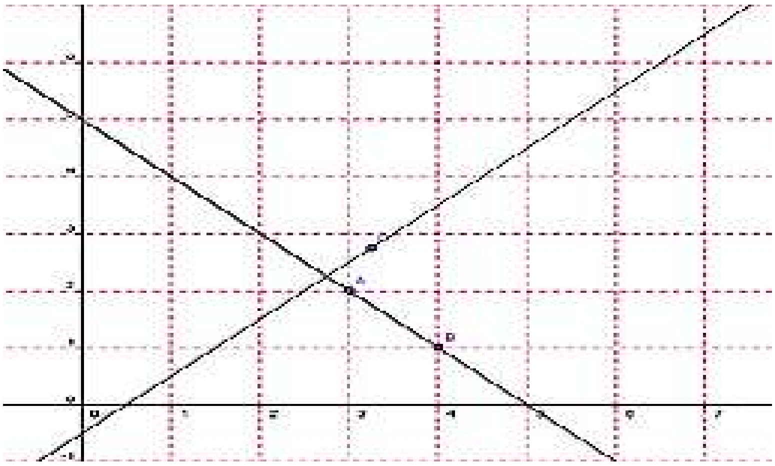
As retas construídas por meio das equações se cruzam? Em qual(is) ponto(s)?

Sim, no ponto A (3,2)

Fonte: Roteiro de aula.

Percebemos que houve, nesse caso, dificuldades para converter os registros da linguagem natural para a forma algébrica. Nos dirigimos então aos arquivos produzidos pelas duplas usando o Geogebra (Figura 38), buscando entender o erro dos alunos.

Figura 38 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 04 (dupla B).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

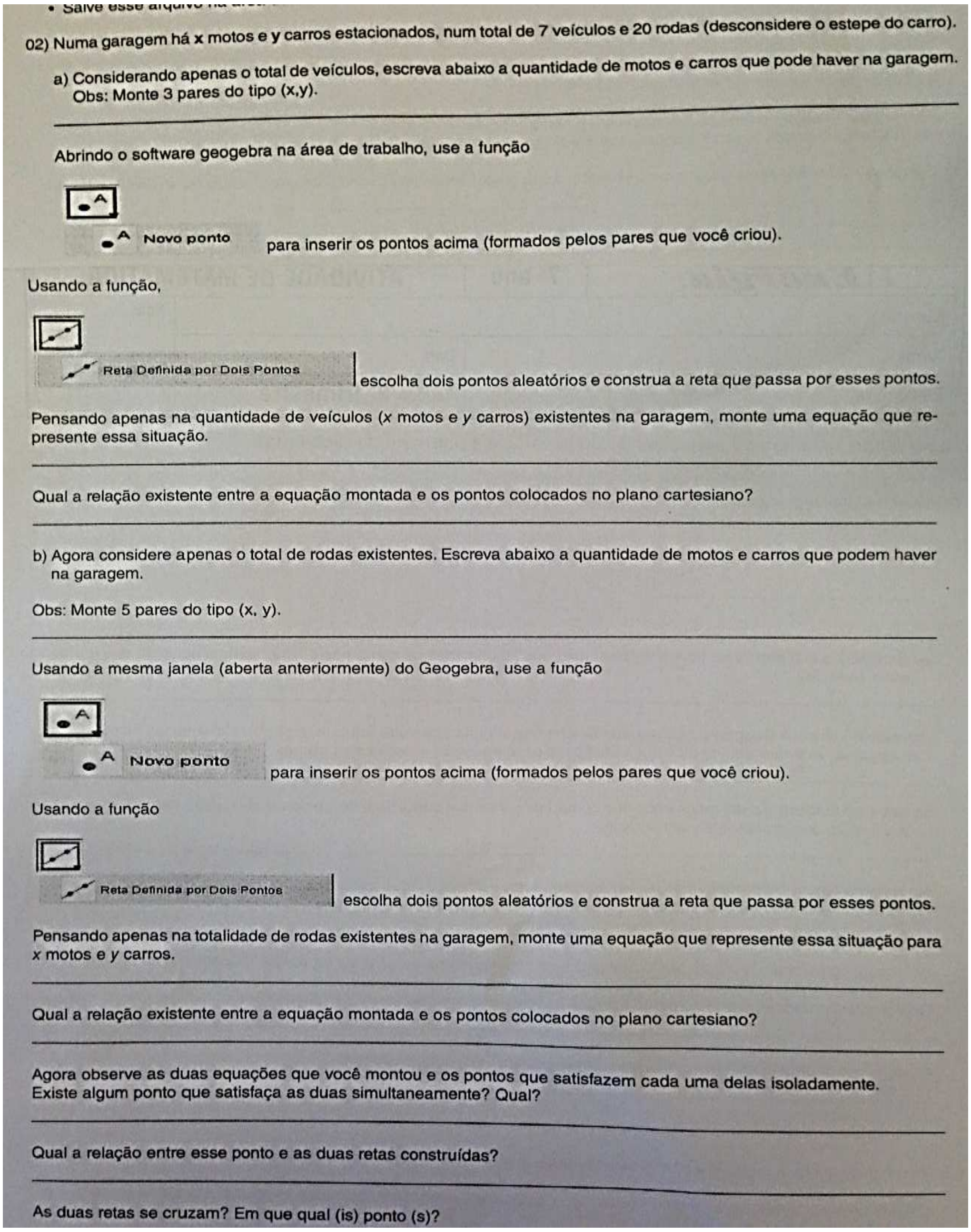
Quando solicitadas para explicar seu raciocínio, as alunas sorriram percebendo e admitindo seu erro imediatamente e comentaram: *"a gente sabe que errô fessô, fizemos a conta de cabeça porque sabíamos o resultado"*. Tal fato evidencia que as alunas usaram do raciocínio lógico e o pensamento algébrico para resolver o problema.

Através da conversa com as alunas e apoiados nas representações semióticas, defendemos que não houve compreensão efetiva do objeto matemático, uma vez que só é possível conhecer e aprender o objeto em questão por meio das variações de representações do mesmo.

Fizemos uma explicação particular do exercício para as alunas e nos propomos a observar atentamente o desenvolvimento do próximo exercício, que segue a mesma linha deste em que apresentaram dificuldades.

Analogamente a atividade 01, o segundo exercício exigia a solução de um sistema linear para responder a questão. Observe a informação dada no exercício (Figura 39):

Figura 39 – Enunciado do exercício 02 aula 04.



• Salve esse arquivo

02) Numa garagem há **x** motos e **y** carros estacionados, num total de 7 veículos e 20 rodas (desconsidere o estepe do carro).

a) Considerando apenas o total de veículos, escreva abaixo a quantidade de motos e carros que pode haver na garagem.
Obs: Monte 3 pares do tipo (x,y).

Abrindo o software geogebra na área de trabalho, use a função

Novo ponto para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função,

Reta Definida por Dois Pontos escolha dois pontos aleatórios e construa a reta que passa por esses pontos.

Pensando apenas na quantidade de veículos (*x* motos e *y* carros) existentes na garagem, monte uma equação que represente essa situação.

Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

b) Agora considere apenas o total de rodas existentes. Escreva abaixo a quantidade de motos e carros que podem haver na garagem.

Obs: Monte 5 pares do tipo (x, y).

Usando a mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, use a função

Novo ponto para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função

Reta Definida por Dois Pontos escolha dois pontos aleatórios e construa a reta que passa por esses pontos.

Pensando apenas na totalidade de rodas existentes na garagem, monte uma equação que represente essa situação para *x* motos e *y* carros.

Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

Agora observe as duas equações que você montou e os pontos que satisfazem cada uma delas isoladamente.
Existe algum ponto que satisfaça as duas simultaneamente? Qual?

Qual a relação entre esse ponto e as duas retas construídas?

As duas retas se cruzam? Em que qual (is) ponto (s)?

Fonte: Arquivo pessoal.

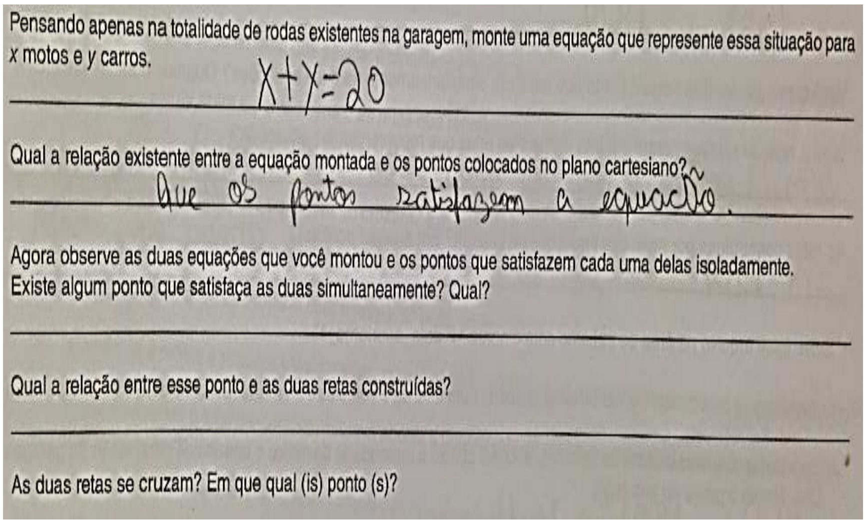
O item b dessa questão solicitava que fosse escrita uma equação $(2x+4y=20)$ para representar o número de rodas existentes no estacionamento. Apenas três duplas (D, F e I) responderam corretamente o exercício. As demais montaram a equação errada e, consequentemente, não chegaram à resposta correta. Mais uma vez, torna-se perceptível a dificuldade encontrada pelos alunos de transitar entre a linguagem natural e a linguagem algébrica.

Porém, considerando que a aula tinha como principal objetivo fazer o aluno compreender que a solução de um sistema linear de duas equações e duas variáveis dá-se pelo ponto de intersecção das retas que representam essas equações, podemos concluir que atingimos o objetivo proposto.

Tal conclusão deve-se ao fato dos alunos justificarem seus erros e, antes mesmo de entregarem a atividade ao professor, comentavam que suas respostas não estavam corretas, pois haviam feito a verificação e a resposta não era compatível com a que encontravam no arquivo do Geogebra.

Duas alunas (dupla G), entregaram o exercício (Figura 40) sem a resposta final e comentaram: *"Fessô, a gente não colocou a resposta porque viu que tá errado, acho que montamos uma equação errada, pois o número não fecha a solução"*.

Figura 40 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 04 (dupla G).



Pensando apenas na totalidade de rodas existentes na garagem, monte uma equação que represente essa situação para *x* motos e *y* carros.

X+Y=20

Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

Que os pontos satisfazem a equação.

Agora observe as duas equações que você montou e os pontos que satisfazem cada uma delas isoladamente. Existe algum ponto que satisfaça as duas simultaneamente? Qual?

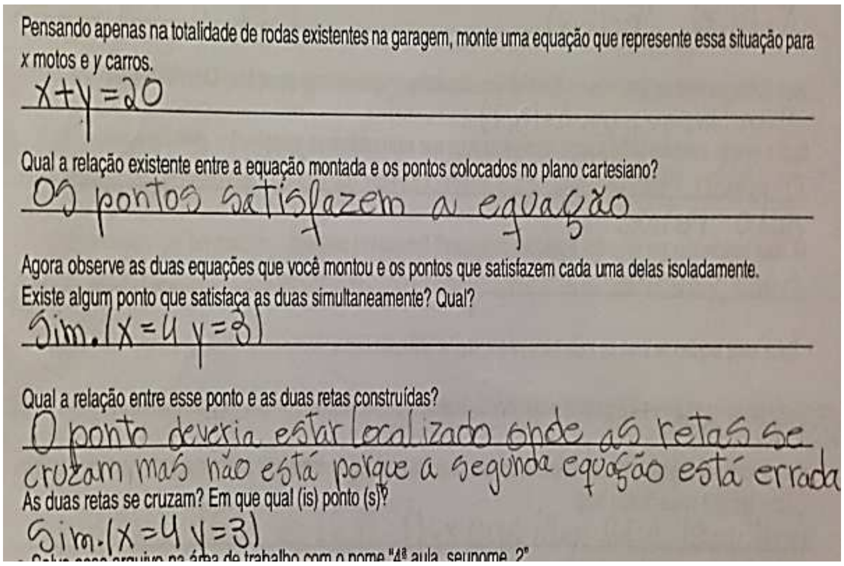
Qual a relação entre esse ponto e as duas retas construídas?

As duas retas se cruzam? Em que qual (is) ponto (s)?

Fonte: Roteiro de aula.

Outras duplas, mesmo escrevendo a equação incorreta, usaram o raciocínio algébrico e encontraram a resposta certa. Mas o interessante foi a justificativa usada pela dupla A, que pode ser vista abaixo (Figura 41) e sua comparação com o arquivo do Geogebra (Figura 42).

Figura 41 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 04 (dupla A).



Pensando apenas na totalidade de rodas existentes na garagem, monte uma equação que represente essa situação para x motos e y carros.

x+y=20

Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

Os pontos satisfazem a equação

Agora observe as duas equações que você montou e os pontos que satisfazem cada uma delas isoladamente. Existe algum ponto que satisfaça as duas simultaneamente? Qual?

Sim. (x=4 y=3)

Qual a relação entre esse ponto e as duas retas construídas?

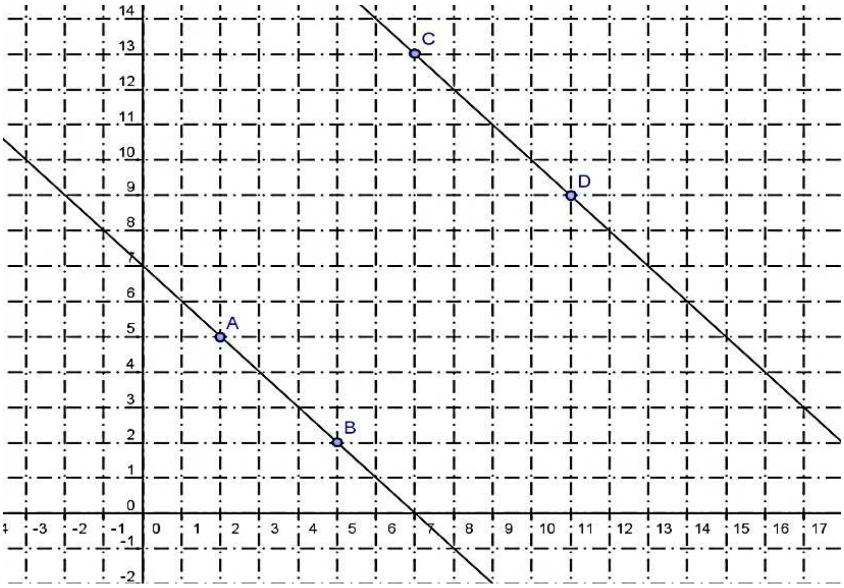
O ponto deveria estar localizado onde as retas se cruzam mas não está porque a segunda equação está errada

As duas retas se cruzam? Em que qual (is) ponto (s)?

Sim. (x=4 y=3)

Fonte: Roteiro de aula.

Figura 42 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 04 (dupla A).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

Finalizando, salientamos a dificuldade apresentada pelos alunos para interpretar problemas e fazer a mudança de registro da linguagem natural para a linguagem algébrica. Todas as duplas que erraram o segundo exercício, justificaram que sentiram dificuldade em interpretar as questões, atribuindo a elas a linguagem matemática necessária para resolver o problema.

6.5 5º ENCONTRO: RESOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

O roteiro do quinto encontro contava com quatro exercícios que buscavam trabalhar a resolução de sistema linear de equações e duas variáveis, sendo que no primeiro as equações eram apresentadas separadamente e, a partir das soluções encontradas para cada uma, solicitávamos que determinassem a solução de um sistema formado por essas equações. Os outros três exercícios, por sua vez, eram diretos e objetivos, sendo apresentado um sistema linear para cada exercício e solicitado a solução desse sistema por meio da construção gráfica, usando a ferramenta tecnológica para fazer a conversão de forma rápida e dinâmica.

Como o conteúdo já havia sido abordado na aula anterior, acreditávamos que os alunos apresentassem facilidade para resolver os sistemas usando o software.

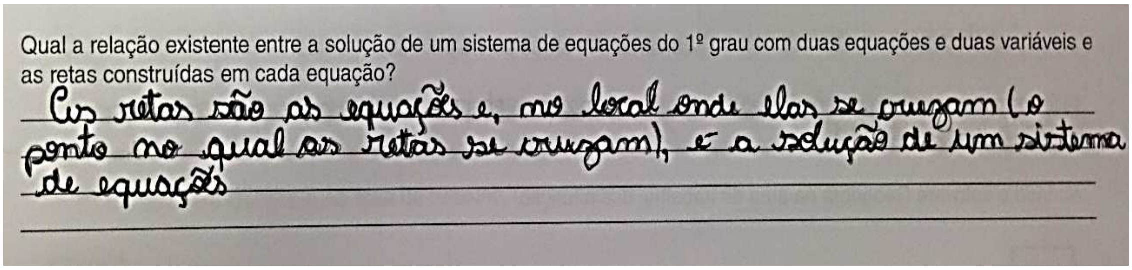
Estabelecemos como objetivos para esse momento:

a) determinar soluções para equações do 1º grau com duas variáveis;
b) usar ferramentas (inserção de pontos, retas definidas por dois pontos) do Geogebra para representar retas (mudança de registro da equação na forma algébrica) no plano;
c) encontrar a solução de um sistema linear de duas equações e duas variáveis;
d) fixar o objeto matemático sistemas de equações lineares de duas equações e duas variáveis.

Todas as duplas resolveram os exercícios corretamente e de forma muito rápida, demostrando facilidade para encontrar a resposta com o uso do Geogebra, nos certificando que compreenderam a relação existente entre o ponto de intersecção das retas e o sistema de equações formado por estas. Observamos também, que à medida que algumas duplas terminavam as atividades, se propunham em ajudar os colegas a resolver seus exercícios.

Cabe ressaltar a resposta da primeira questão (Figura 43) dada pela dupla F quando perguntamos a respeito da solução de um sistema linear (formado pelas equações $x + y = 15$ e $x - y = 9$) de duas equações e duas variáveis e sua relação com as retas construídas por meio destas equações.

Figura 43 – Resposta manuscrita do exercício 04 aula 05 (dupla F).

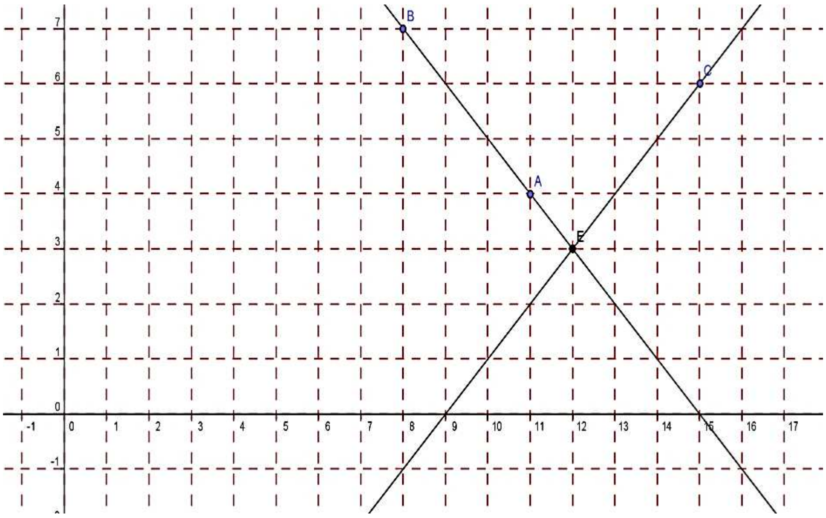

Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e as retas construídas em cada equação?

As retas são as equações e, no local onde elas se cruzam (o ponto no qual as retas se cruzam), é a solução de um sistema de equações

Fonte: Roteiro de aula.

Observando o arquivo do Geogebra (Figura 44), verificamos a exatidão da solução.

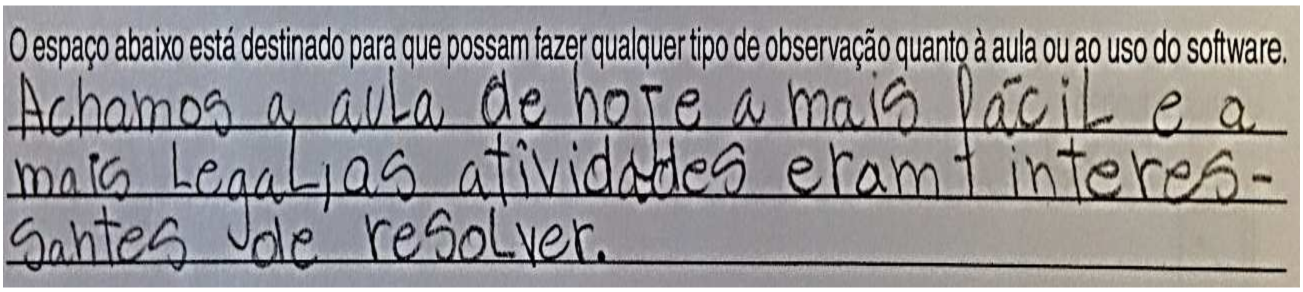
Figura 44 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 04 aula 05 (dupla F).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

No final de cada roteiro, disponibilizamos um espaço para que os alunos, caso desejassem, fizessem observações e sugestões sobre a aula. Salientamos aqui algumas observações feitas pelas duplas A (Figura 45), C (Figura 46) e G (Figura 47).

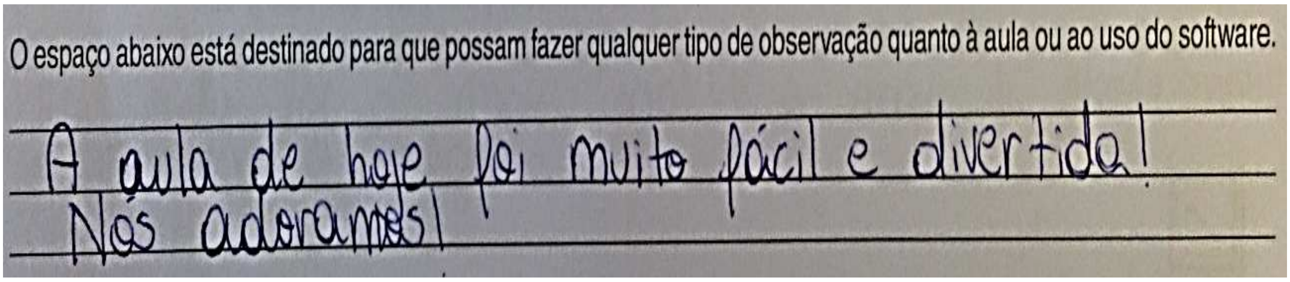
Figura 45 – Observação realizada pela dupla A.


O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

Achamos a auLa de hoje a mais fácil e a mais LegaL; as atividades eram interes-santes de resolver.

Fonte: Roteiro de aula.

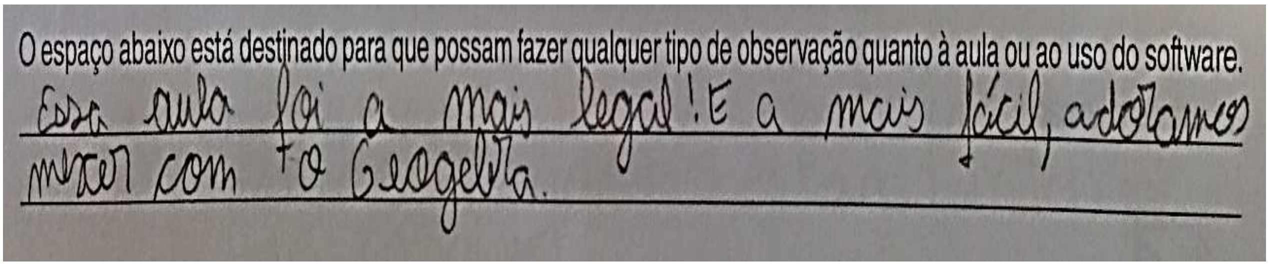
Figura 46 – Observação realizada pela dupla C.


O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

A aula de hoje foi muito fácil e divertida! Nós adoramos!

Fonte: Roteiro de aula.

Figura 47 – Observação realizada pela dupla G.


O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

Essa aula foi a mais legal! E a mais fácil, adoramos mexer com o Geogebra.

Fonte: Roteiro de aula.

Finalizando, destacamos nessa aula a euforia dos alunos em realizar atividades que se afastava do tradicional espaço da sala de aula. Concluímos que a informática além de ser uma ferramenta facilitadora que promove o espaço de ensino/aprendizagem, ainda serve como um estímulo para o aluno, que se sente motivado por trabalhar com uma ferramenta que ele apresenta familiaridade.

6.6 6º ENCONTRO: UTILIZANDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES PARA RESOLVER PROBLEMAS

Identificando as dificuldades encontradas pelos alunos em converter os registros da linguagem natural para a linguagem algébrica, fizemos adaptações na sequência didática, acrescentando mais uma aula com esse tipo de atividades.

Nesse encontro, colocamos no roteiro quatro atividades que exigiam a variação do registro acima mencionado. Antes, porém, conversamos com o grupo, solicitando que prestassem atenção na conversão dos registros e, caso chegassem à solução e identificassem que a mesma não estava correta, orientamos a retornar ao exercício e refazê-lo.

Os objetivos para essa aula de 50 minutos eram:

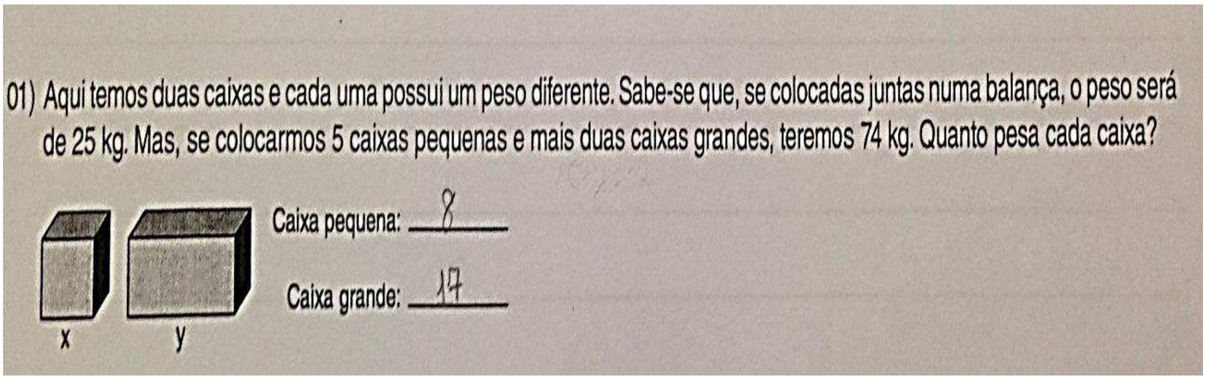
a) variar registros matemáticos, convertendo problemas da linguagem natural para linguagem algébrica;
b) resolver problemas utilizando sistemas lineares de duas equações e duas variáveis;
c) determinar soluções de sistemas lineares de duas equações e duas variáveis por meio do software Geogebra;
d) analisar, por meio de exercícios, os acertos e erros dos alunos e justificá-los.

Com base nas atividades da sequência que foram realizadas nas aulas anteriores, acreditávamos que os alunos resolveriam os problemas propostos. Mas, caso o objetivo não fosse atingido, retornaríamos aos problemas, buscando direcionar melhor a atividade e garantir efetivamente a compreensão dos alunos na variação do registro da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Os quatro exercícios solicitavam que os alunos convertessem os problemas que se encontravam na linguagem natural para a linguagem algébrica e, por meio do Geogebra, determinassem a solução dos problemas.

O primeiro exercício foi resolvido corretamente por todas as duplas. Segue abaixo (Figura 48) a resolução apresentada por um grupo de trabalho.

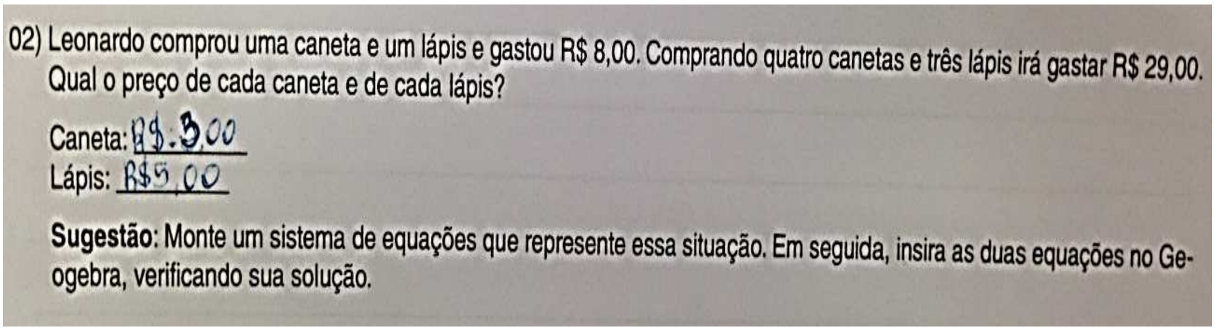
Figura 48 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 06 (dupla D).



Fonte: Roteiro de aula.

Exceto a dupla E, que trocou a ordem da solução da segunda atividade, as demais duplas responderam corretamente. Segue abaixo Figura 49 ilustrando:

Figura 49 – Resposta manuscrita do exercício 02 aula 06 (dupla E).


02) Leonardo comprou uma caneta e um lápis e gastou R$ 8,00. Comprando quatro canetas e três lápis irá gastar R$ 29,00. Qual o preço de cada caneta e de cada lápis?

Caneta: R$.3,00

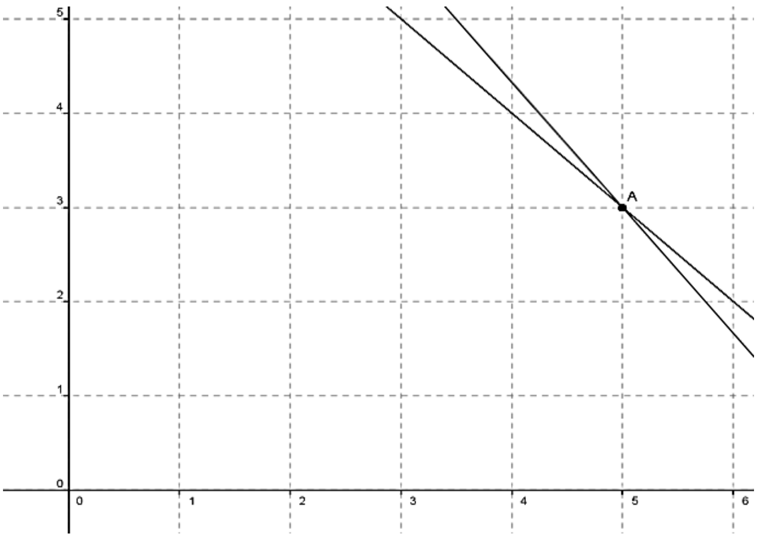
Lápis: R$5,00

Sugestão: Monte um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

Fonte: Roteiro de aula.

Para melhor compreender seu erro, nos dirigimos ao arquivo do Geogebra (Figura 50) buscando verificar e justificar o erro da dupla.

Figura 50 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 02 aula 06 (dupla E).



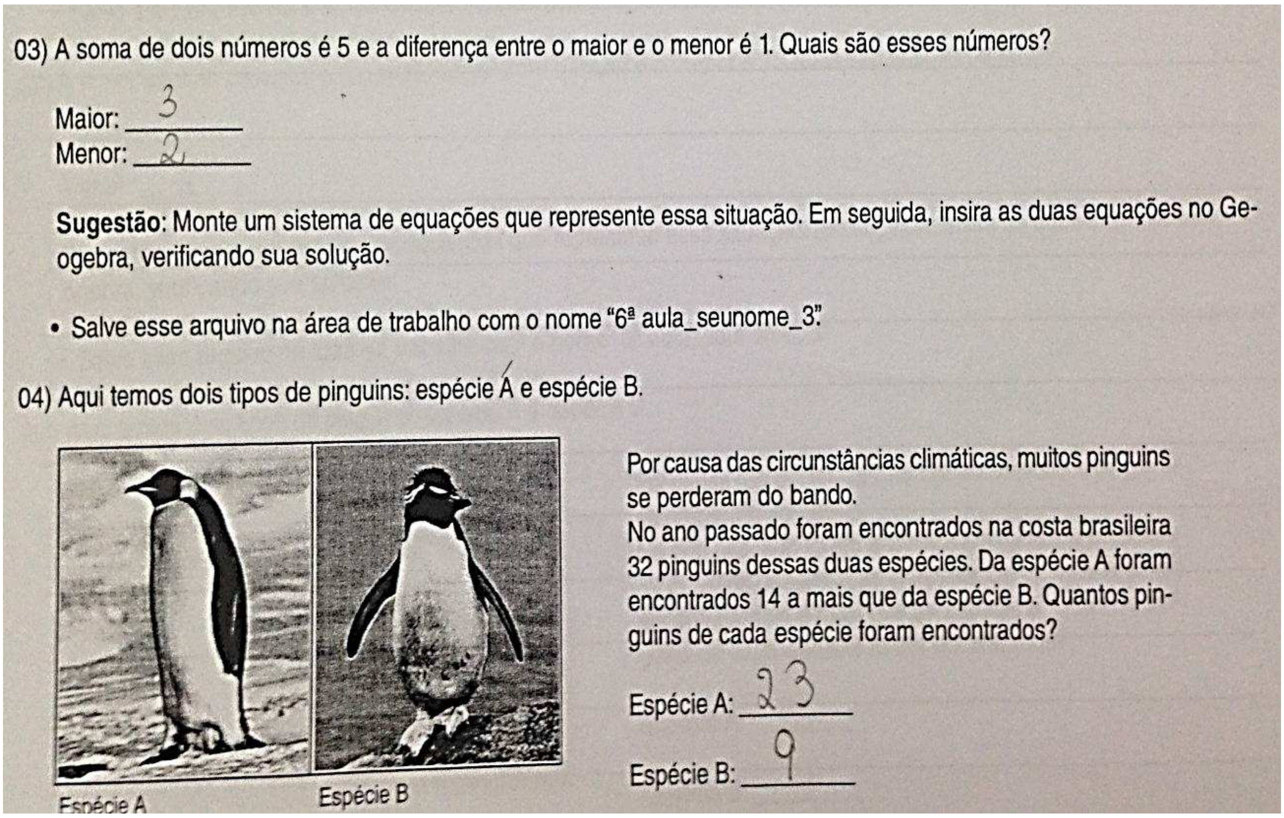
Fonte: Arquivo do Geogebra.

Perguntamos aos alunos como denotaram os elementos do problema. Eles nos responderam que chamaram a caneta de *x* e o lápis de *y*.

Conforme pode ser verificado acima, o arquivo referente ao exercício está construído corretamente. Pedimos que explicassem como chegaram ao resultado. Carlos observou sua resposta, comparou com o arquivo do Geogebra e justificou: *“Troquei os valores, né fessô? A caneta era pra ser R$5,00 e o lápis R$3,00”*.

Os dois últimos exercícios também foram solucionados corretamente por todos os alunos, conforme pode ser visto na Figura 51.

Figura 51 – Resposta manuscrita do exercício 03 e 04 aula 06 (dupla A).



03) A soma de dois números é 5 e a diferença entre o maior e o menor é 1. Quais são esses números?

Maior: 3

Menor: 2

Sugestão: Monte um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

- Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "6ª aula_seunome_3".

04) Aqui temos dois tipos de pinguins: espécie A e espécie B.

Espécie A　Espécie B

Por causa das circunstâncias climáticas, muitos pinguins se perderam do bando.
No ano passado foram encontrados na costa brasileira 32 pinguins dessas duas espécies. Da espécie A foram encontrados 14 a mais que da espécie B. Quantos pinguins de cada espécie foram encontrados?

Espécie A: 23

Espécie B: 9

Fonte: Roteiro de aula.

Embora o roteiro apresentasse apenas espaço para a solução do problema, ressaltamos que o aluno só poderia respondê-lo se efetivassem as conversões do registro da linguagem natural para a forma algébrica, uma vez que usariam o Geogebra para visualizar a resposta. Tendo em vista que essas atividades estavam justamente centradas nesse tipo de conversão e analisando as respostas dos alunos, entendemos que o objetivo da aula foi alcançado. Cabe salientar também que ouvimos alguns comentários de alunos que merecem ser destacados: *"Se fosse sempre assim eu aprendia"* e *"Porquê o sinhô não faz sempre no computador? Daí fica fácil"*.

6.7 7º ENCONTRO: MAS SEMPRE EXISTE UM PONTO DE INTERSECÇÃO ENTRE DUAS RETAS?

Nosso sétimo encontro propõe apresentar as retas paralelas no plano cartesiano e a impossibilidade de resolver um sistema linear formado por equações que determinam essas retas.

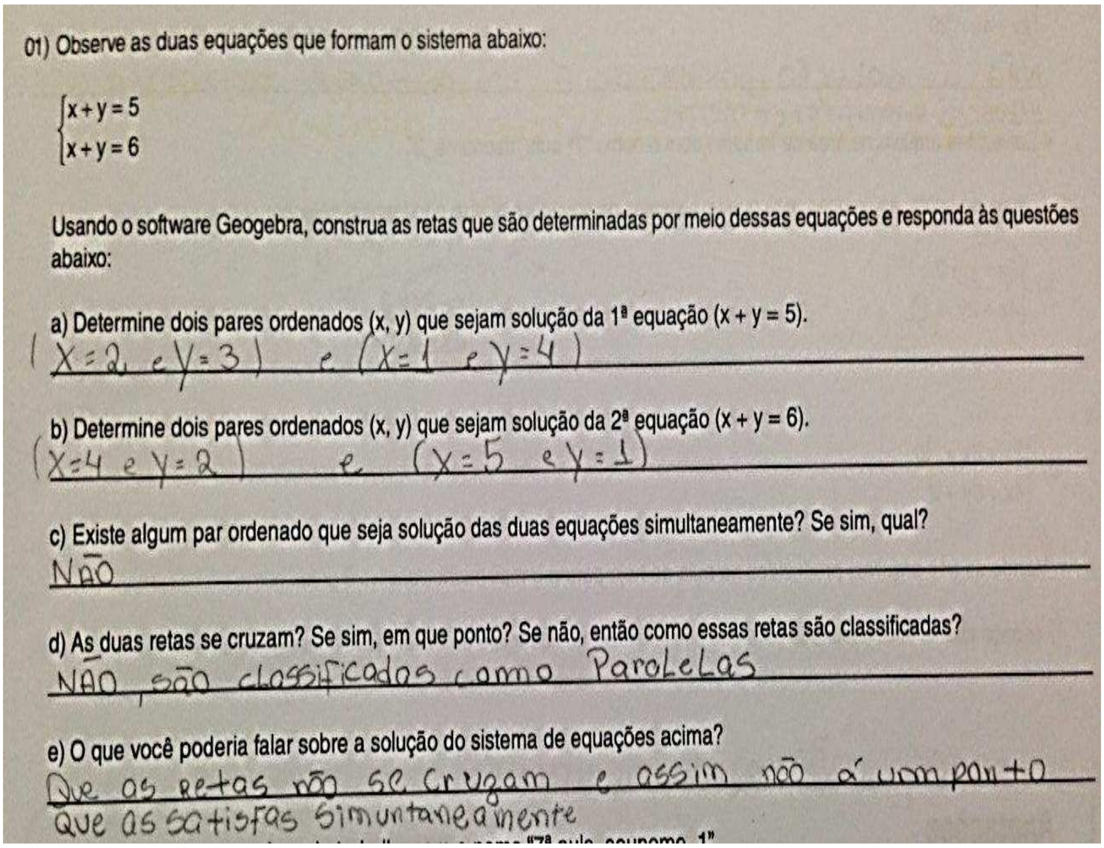
O roteiro da aula dispõe de quatro exercícios que buscava atingir os seguintes objetivos:

a) determinar soluções para equações de duas variáveis por meio do processo geométrico;
b) verificar se todo sistema linear de duas equações e duas variáveis possui solução;
c) discutir a formação de retas paralelas no plano cartesiano e sua relação com a impossibilidade de resolver o sistema formado pelas equações representadas por estas retas;
d) relacionar o processo geométrico da ausência de solução de um sistema de duas equações e duas variáveis e a forma algébrica dessas equações;
e) formar, a partir de uma equação, sistemas lineares de duas equações e duas variáveis que não possuem soluções.

Buscamos, com essa aula, fazer com que o aluno perceba que um sistema formado por duas equações de duas variáveis não precisa, necessariamente, possuir solução. Mais do que isso, acreditamos que os alunos sejam capazes de concluir tal fato usando apenas a representação geométrica das equações e relacionando a posição relativa (paralelas) dessas retas e a impossibilidade de resolver o sistema.

O exercício 01 (Figura 52) buscava apresentar retas paralelas no plano cartesiano e relacionar a sua falta de intersecção com a falta de solução para o sistema. Todas as nove duplas de trabalho resolveram o exercício corretamente.

Figura 52 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 07 (dupla A).



01) Observe as duas equações que formam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=6 \end{cases}$$

Usando o software Geogebra, construa as retas que são determinadas por meio dessas equações e responda às questões abaixo:

a) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam solução da 1ª equação (x + y = 5).

(X=2 e Y=3) e (X=1 e Y=4)

b) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam solução da 2ª equação (x + y = 6).

(X=4 e Y=2) e (X=5 e Y=1)

c) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual?

NÃO

d) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como essas retas são classificadas?

NÃO, são classificados como ParaLeLas

e) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Que os retas não se cruzam e assim não á um ponto Que as satisfas simuntaneamente

Fonte: Roteiro deaula.

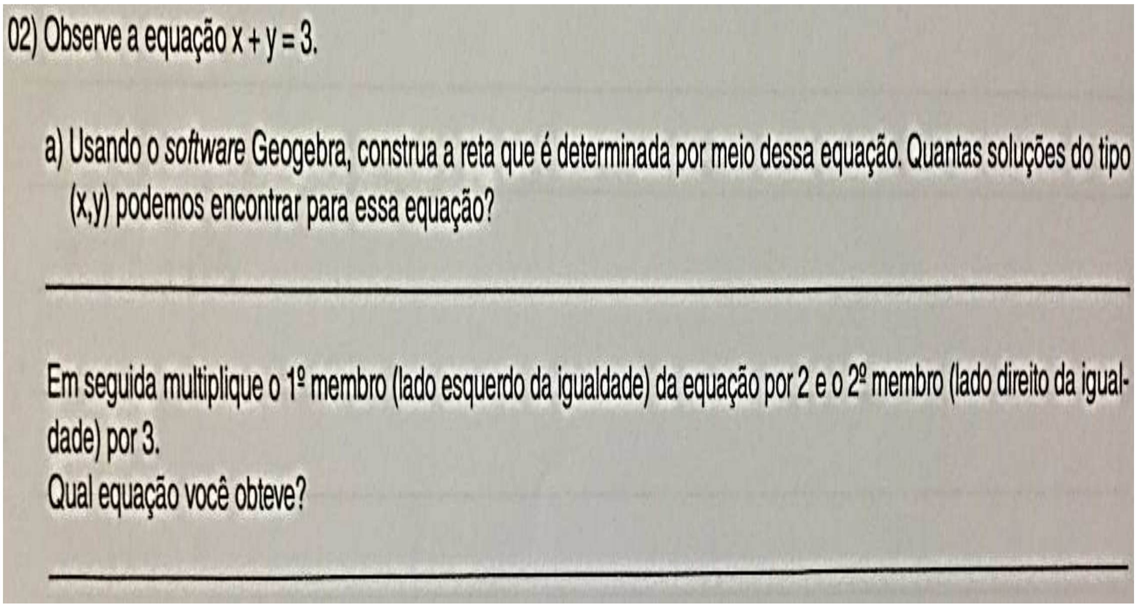
O aluno Márcio (dupla D) fez uma importante observação ao verificar que as retas não se cruzavam: *“É claro, né fessô, como que eu posso somar dois números iguais e dá 5 e 6 ao mesmo tempo? Nunca vai dá”*.

Essa colocação nos faz perceber que houve compreensão da relação entre o sistema formado pelas equações e as retas construídas pelas mesmas.

A atividade 02 apresentava a relação entre o paralelismo das retas e a sua representação algébrica. Todas as duplas responderam o exercício corretamente. Paula (dupla C) questionou o fato do exercício solicitar que cada membro da equação dada fosse multiplicado por valores diferentes (Figura 53): *“Mas fessô, a gente pode multiplicar um lado da equação por um número e o outro por outro?”*. Questionamos: *“E porque não poderia?”*. E a aluna*: “Porque lá na outra equação* (referindo-se a equação do 1º grau com uma variável) *a gente só podia fazer se fosse com o mesmo número dos dois lados”*. Foi então que o aluno Márcio contribuiu novamente: *“Mas lá era outro caso, né fessô? Porque lá a gente queria a mesma equação escrita de outra forma. Aqui a gente quer outra equação”*.

Intervimos apenas para dizer que a equação na qual eles se referiam (ao falar "mesma equação") chamava-se equivalente e confirmamos o raciocínio do aluno Márcio.

Figura 53 – Enunciado parcial do exercício 02 aula 07.



02) Observe a equação $x + y = 3$.

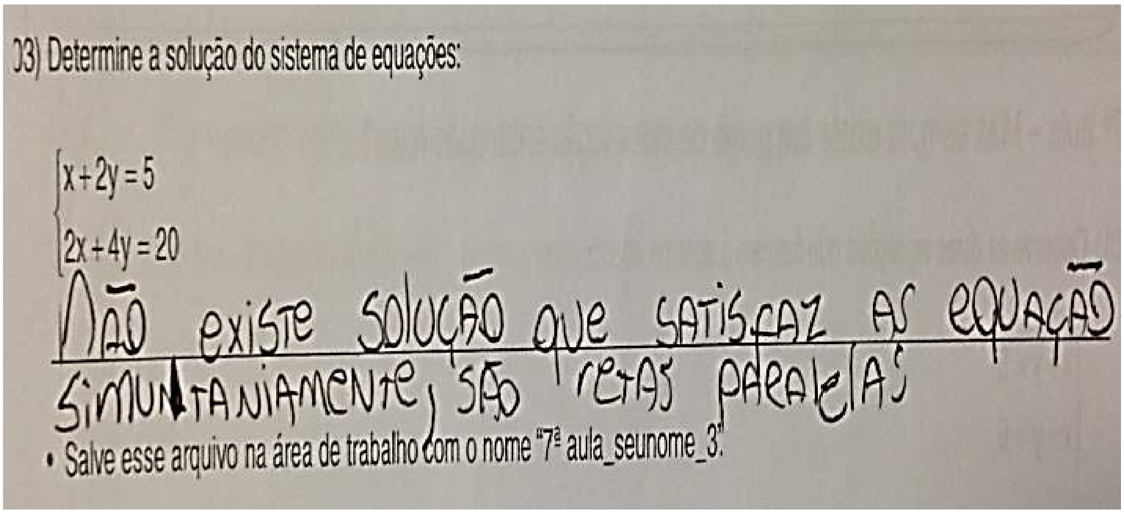
a) Usando o *software* Geogebra, construa a reta que é determinada por meio dessa equação. Quantas soluções do tipo (x,y) podemos encontrar para essa equação?

Em seguida multiplique o 1º membro (lado esquerdo da igualdade) da equação por 2 e o 2º membro (lado direito da igualdade) por 3.
Qual equação você obteve?

Fonte: Arquivo pessoal.

A terceira atividade solicitava apenas que solucionassem um sistema (impossível). Mais uma vez todas as duplas acertaram a atividade. Para ilustração veja a resposta (Figura 54) dada pela dupla I e o arquivo construído no Geogebra (Figura 55) para fundamentar sua resposta.

Figura 54 – Resposta manuscrita do exercício 03 aula 07 (dupla I).



03) Determine a solução do sistema de equações:

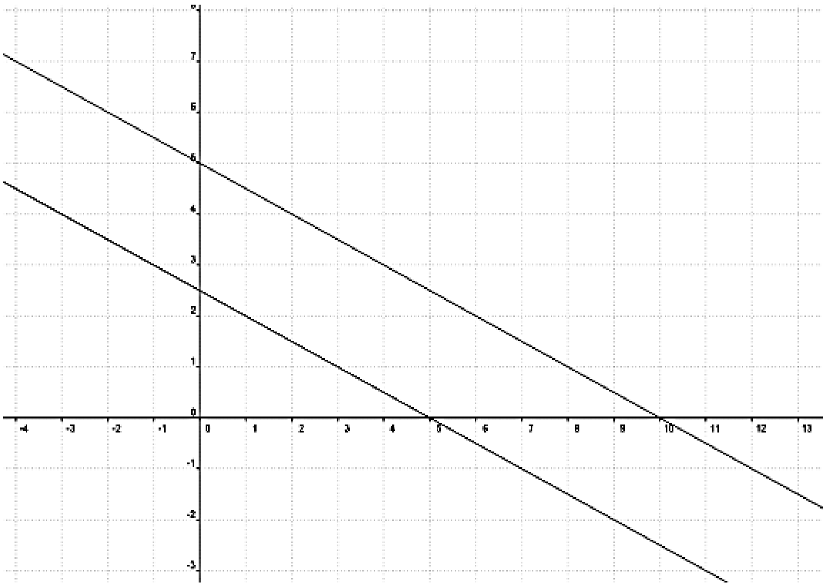
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

NÃO EXISTE SOLUÇÃO QUE SATISFAZ AS EQUAÇÃO SIMUNTANIAMENTE, SÃO RETAS PARALELAS

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "7ª aula_seunome_3".

Fonte: Roteiro de aula.

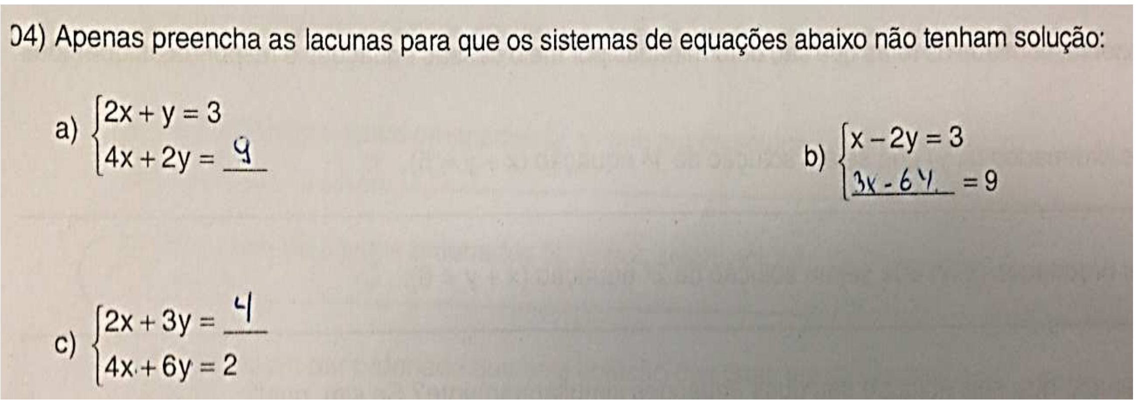
Figura 55 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 03 aula 07 (dupla I).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

A última atividade dessa aula continha três itens com o intuito de verificar se os alunos identificavam, apenas pelo método algébrico, um sistema que não possuía solução. Duas duplas cometeram os mesmo erros (Figura 56) e quando solicitados para explicar seu método de resolução, a dupla justificou que se enganou e que, mesmo tendo respondido de forma errônea, compreendeu a ideia.

Figura 56 – Resposta manuscrita do exercício 04 aula 07 (dupla E).



04) Apenas preencha as lacunas para que os sistemas de equações abaixo não tenham solução:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = \underline{9} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ \underline{3x - 6y} = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = \underline{4} \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$

Fonte: Roteiro de aula.

Concebendo que o objetivo principal da aula era apresentar sistemas de equações de duas variáveis que formavam retas paralelas no plano e analisando as respostas dos exercícios elaboradas pelos alunos e as intervenções feitas em sala por eles, entendemos que os objetivos para esse encontro foram atingidos.

6.8 8º ENCONTRO: E SE AS RETAS FOREM AS MESMAS?

Começamos o oitavo encontro disponibilizando o roteiro de aula e colocando o objetivo de cada atividade. Este roteiro continha quatro exercícios, sendo que os três primeiros utilizavam o Geogebra para variar a representação dos registros das equações.

Com esse encontro tínhamos os seguintes objetivos:

a) determinar soluções para equações de duas variáveis por meio do processo geométrico;
b) discutir a construção de retas coincidentes no plano cartesiano e sua relação com a quantidade de soluções que pode ser encontrada para um sistema formado pelas equações que determinam essas retas;
c) estabelecer relações entre a linguagem algébrica de equações equivalentes e sua representação no plano cartesiano;
d) construir sistemas lineares de duas equações e duas variáveis que possuem infinitas soluções.

Nessa aula pretendíamos, prioritariamente, discutir a quantidade de soluções que pode ser encontrada quando formado um sistema de duas equações equivalentes. Ainda, buscávamos fazer o aluno construir essas relações por meio da visualização gráfica, convertendo o registro da representação algébrica para a geométrica por meio do Geogebra. O aluno, usando a ferramenta disponível, devia também estabelecer relações entre as posições (coincidentes) das retas no plano e o fato do sistema possuir infinitas soluções.

Em função das colocações feitas por alguns alunos na aula anterior, esperávamos também que os alunos percebessem as equações como equivalentes e relacionassem isto com a solução das equações equivalentes do 1º grau com apenas uma variável.

Logo na primeira atividade (Figura 57), o aluno Paulo (dupla I) levantou a questão: *“O fessô, as duas equações são a mesma, né?”*. Questionamos como o aluno concluiu isso e ele acrescenta: *“Claro, o sinhô só pegou a segunda e dividiu por 3, daí deu a primeira”*.

Figura 57 – Enunciado do exercício 01 aula 08.

01) Observe as duas equações que formam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Usando o *software* geogebra, construa as retas que são determinadas por meio dessas equações e responda às questões abaixo:

a) Determine dois pares ordenados (x,y) que sejam solução da 1ª equação ($x + y = 3$).

____

b) Determine dois pares ordenados (x,y) que sejam solução da 2ª equação ($3x + 3y = 9$).

____

c) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, quantos e qual(is)?

____

d) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Como essas retas são classificadas?

____

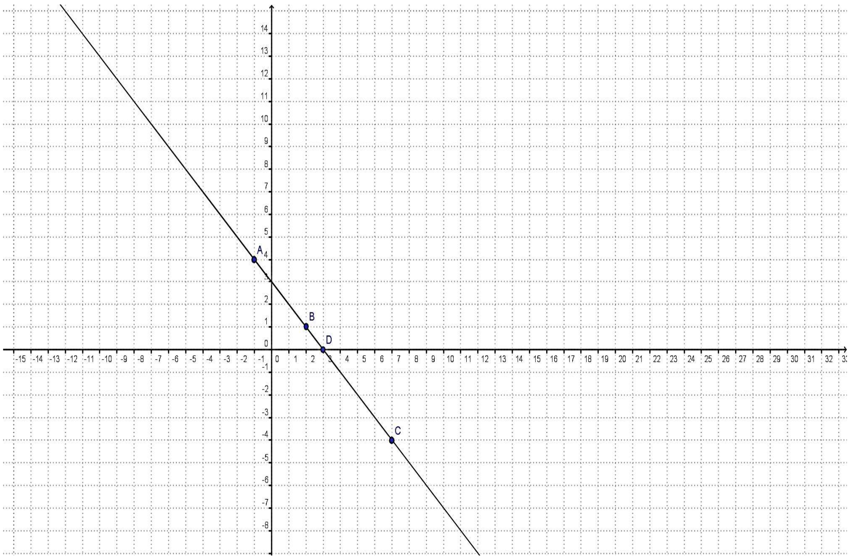
e) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

____

Fonte: Arquivo pessoal.

Após resolver o exercício, o aluno coloca novamente: *"Olha só fessô, por isso que a equação gerou a mesma reta"*. O aluno busca com isso justificar o fato das retas serem coincidentes (Figura 58).

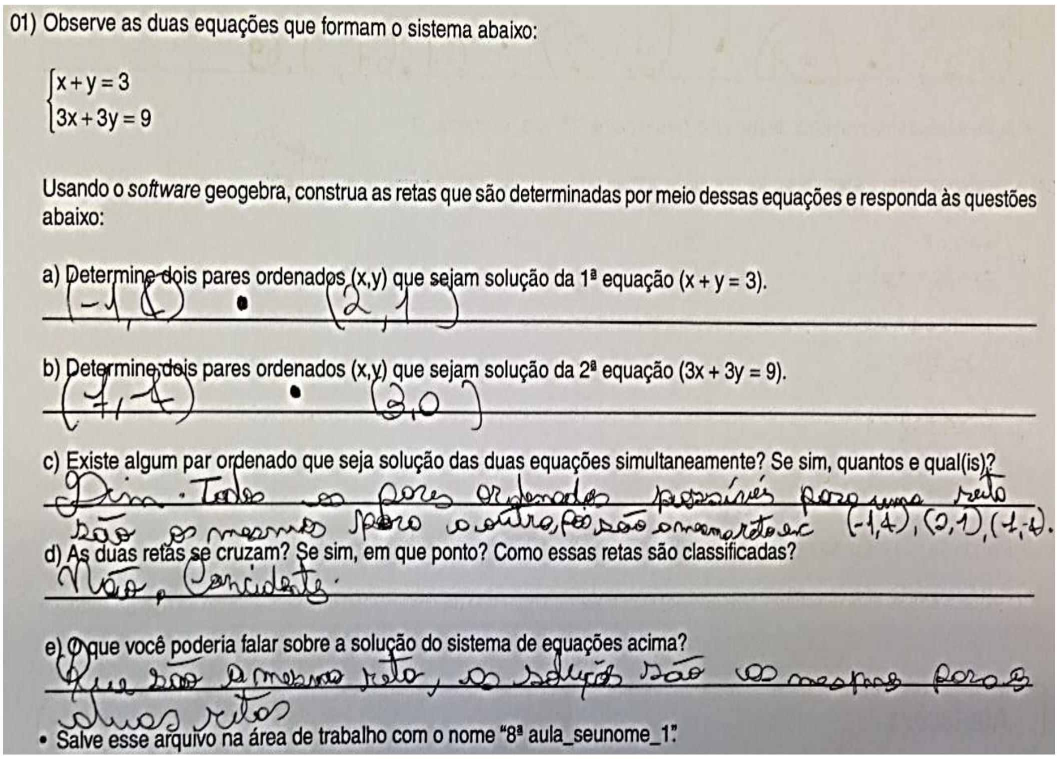
Figura 58 – Resposta com o uso do Geogebra do exercício 01 aula 08 (dupla I).



Fonte: Arquivo do Geogebra.

Vendo as respostas (Figura 59) colocadas pela dupla I, o professor percebe que os alunos realmente entenderam a proposta da atividade, mas cabe ressaltar que nenhuma das nove duplas sabia classificar as retas que ocupavam o mesmo lugar no plano cartesiano. Foi preciso uma intervenção do professor para classificar essas retas.

Figura 59 – Resposta manuscrita do exercício 01 aula 08 (dupla I).



01) Observe as duas equações que formam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Usando o *software* geogebra, construa as retas que são determinadas por meio dessas equações e responda às questões abaixo:

a) Determine dois pares ordenados (x,y) que sejam solução da 1ª equação (x + y = 3).

(-1,4) • (2,1)

b) Determine dois pares ordenados (x,y) que sejam solução da 2ª equação (3x + 3y = 9).

(7,-4) • (3,0)

c) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, quantos e qual(is)?

Sim. Todos os pares ordenados possíveis para uma reta são os mesmos para a outra, pois são as mesmas retas ex: (-1,4), (2,1), (7,-4).

d) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Como essas retas são classificadas?

Não, Coincidente.

e) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Que são a mesma reta, as soluções são as mesmas para as duas retas

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "8ª aula_seunome_1".

Fonte: Roteiro de aula.

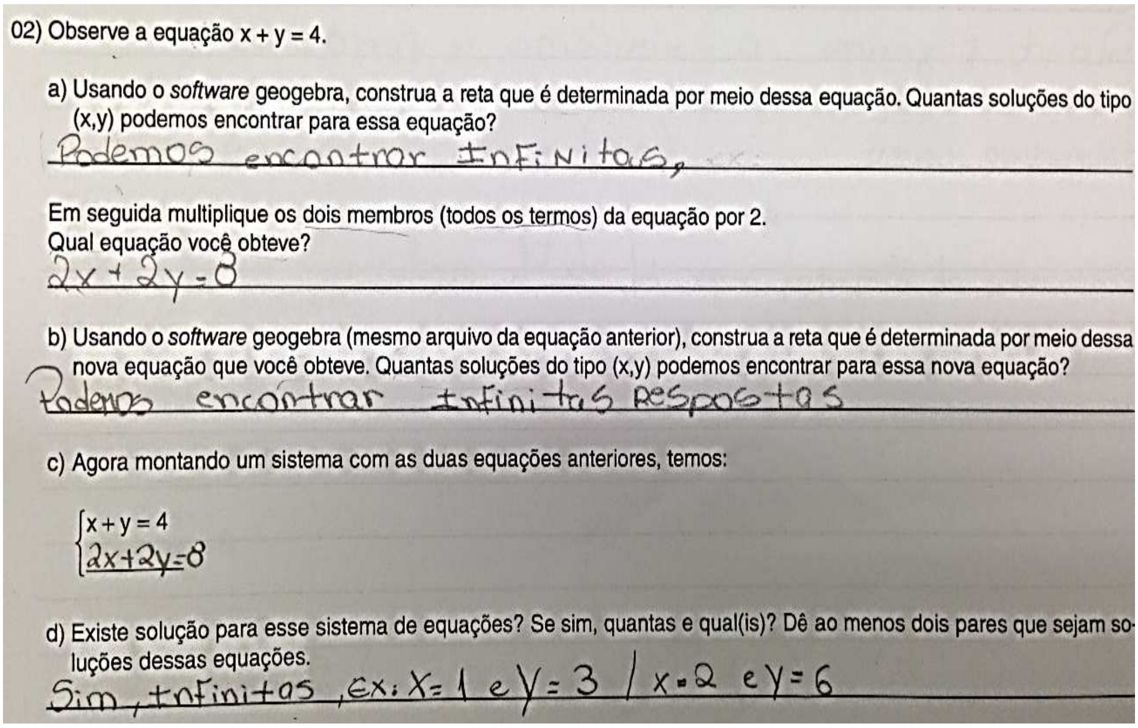
A aluna Maria (dupla A) questionou: *"Professor, sempre que as equações forem desse tipo* (equivalentes), *as retas serão assim?"*. Mesmo entendendo que a aluna buscava uma generalização para resolver os sistemas possíveis e indeterminados, optamos por não responder e deixamos com que a aluna concluísse isso com as próximas atividades.

A segunda atividade buscava justamente relacionar o fato das equações equivalentes gerarem retas coincidentes e o sistema construído por meio dessas equações possuírem infinitas soluções. Apostamos que isso ficaria evidente com esse exercício porque o sistema seria gerado por meio de uma equação dada e de outra equação equivalente criada pelo aluno. Mas não houve necessidade desse exercício para concluírem tal fato, pois no primeiro exercício já conseguiram visualizar isso, como vimos anteriormente.

Cabe ressaltar que, assim como na atividade 01, todas as duplas responderam corretamente essa atividade.

Para ilustrar segue resposta colocada pela dupla A (Figura 60):

Figura 60 – Resposta parcial manuscrita do exercício 02 aula 08 (dupla A).



02) Observe a equação $x + y = 4$.

a) Usando o *software* geogebra, construa a reta que é determinada por meio dessa equação. Quantas soluções do tipo (x,y) podemos encontrar para essa equação?

Podemos encontrar Infinitas,

Em seguida multiplique os dois membros (todos os termos) da equação por 2.
Qual equação você obteve?

$2x + 2y = 8$

b) Usando o *software* geogebra (mesmo arquivo da equação anterior), construa a reta que é determinada por meio dessa nova equação que você obteve. Quantas soluções do tipo (x,y) podemos encontrar para essa nova equação?

Podemos encontrar infinitas respostas

c) Agora montando um sistema com as duas equações anteriores, temos:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

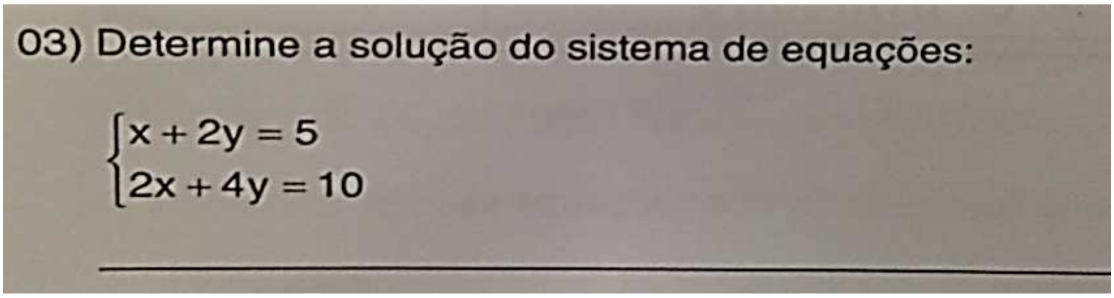
d) Existe solução para esse sistema de equações? Se sim, quantas e qual(is)? Dê ao menos dois pares que sejam soluções dessas equações.

Sim, infinitas, ex: $x = 1$ e $y = 3$ / $x = 2$ e $y = 6$

Fonte: Roteiro de aula.

O terceiro exercício (Figura 61) buscava fazer o aluno visualizar que o sistema possuía infinitas soluções.

Figura 61 – Enunciado do exercício 03 aula 08.



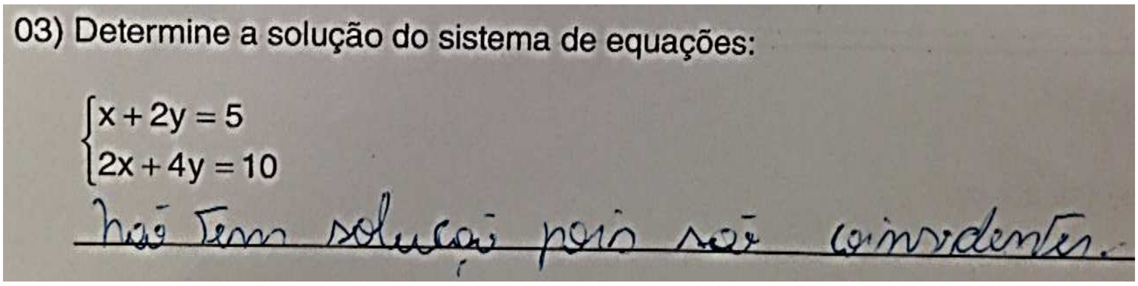
03) Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

Fonte: Arquivo pessoal.

Ao analisar a atividade, percebemos que houve algumas divergências nas respostas: algumas duplas responderam que o sistema possuía infinitas soluções, outras colocaram alguns pares ordenados representando a solução e houve uma dupla que respondeu que não possuía solução por formarem retas coincidentes (Figura 62).

Figura 62 – Resposta manuscrita do exercício 03 aula 08 (dupla E).



03) Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

não Tem solução pois são coincidentes.

Fonte: Roteiro de aula.

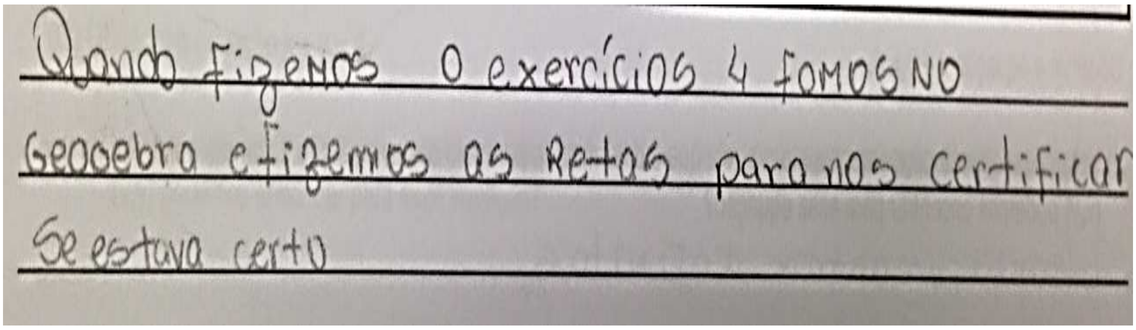
Ao serem solicitados para explicar suas respostas, os alunos que exemplificaram com pares ordenados justificaram que a pergunta não estava clara e que tinham conhecimento que o sistema possuía infinitas soluções. Já a dupla E que respondeu conforme a Figura 62 acima, afirmou que se equivocaram com a escrita, mas que entenderam as infinitas soluções do sistema.

O último exercício tinha o objetivo de fazer o aluno construir sistemas com equações equivalentes e identificar posteriormente este tipo de sistema visualizando apenas algebricamente. Todas as duplas responderam o exercício corretamente.

Entendendo que o principal objetivo da aula era relacionar a quantidade de soluções do sistema formado por equações equivalentes com sua representação gráfica (retas coincidentes), avaliamos que houve êxito na aprendizagem dos alunos. Tal avaliação justifica-se pelo diagnóstico feito nas atividades respondidas pelos alunos e nas colocações feitas por eles durante a aula.

Faz-se necessário mencionar também a importância das conversões dos registros como um facilitador na aprendizagem dos alunos. Segue abaixo (Figura 63) uma observação feita pela dupla A ao final de um exercício.

Figura 63 – Observação realizada pela dupla A.



Fonte: Roteiro de aula.

6.9 9º ENCONTRO: RESOLVENDO PROBLEMAS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Começamos o nono encontro com a entrega do roteiro da aula, seguida de uma rápida discussão da proposta de cada exercício. Essa aula foi preparada com seis exercícios, sendo que a metade dos problemas deviam ser modelados por meio de sistemas de equações e a outra metade eram exercícios que já se encontravam na forma algébrica e precisavam apenas ser resolvidos (determinar soluções).

Juntamos, nas atividades, exercícios que abordavam os três tipos de sistemas trabalhados com os seguintes objetivos:

a) utilizar o software Geogebra para solucionar problemas modelados por sistemas de duas equações e duas variáveis;
b) variar os registros e representações dos problemas matemáticos;
c) resolver sistemas lineares de duas equações e duas variáveis transformando registros de representações entre linguagem natural, algébrica e gráfica.

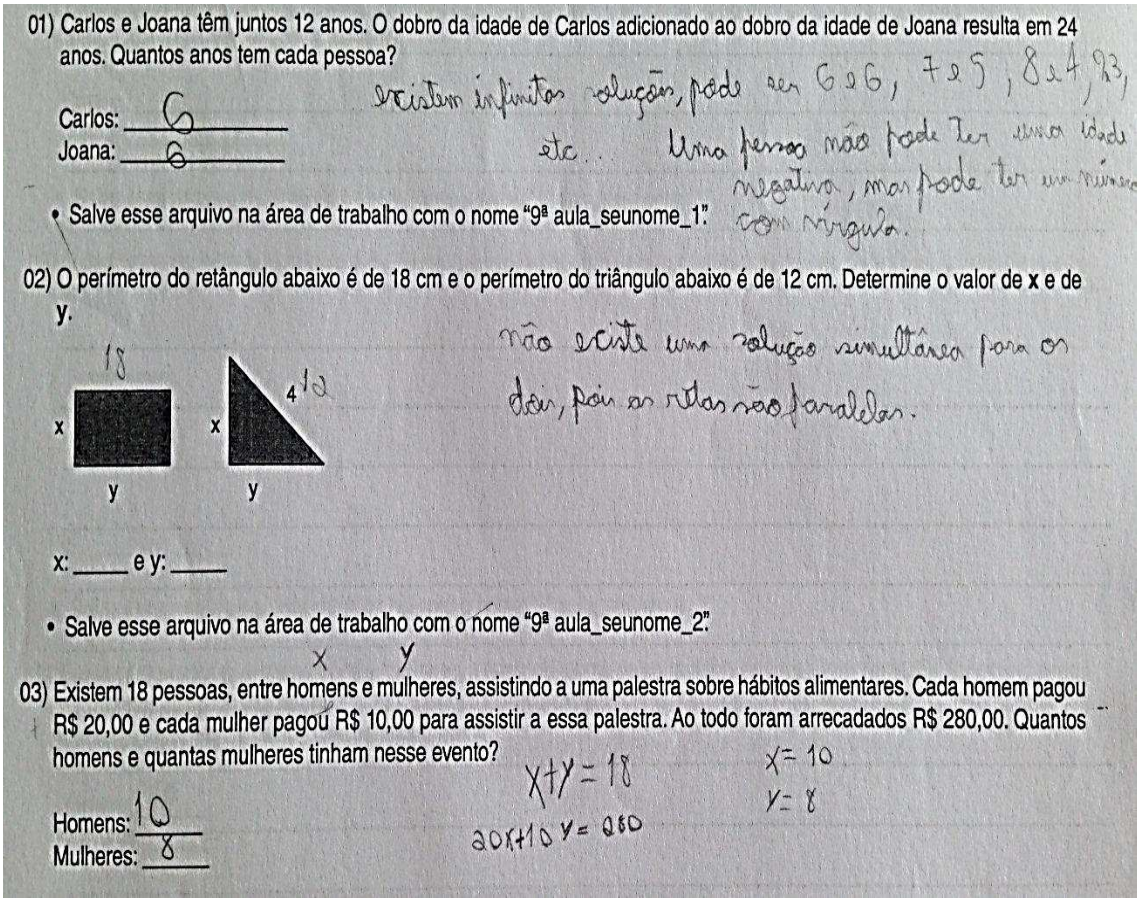
Com essa aula, fizemos uma reflexão acerca das atividades e propusemos a conversão de problemas que se encontravam na linguagem natural para a linguagem algébrica. Ainda, abordamos situações cujas soluções variam entre solução única, infinitas soluções e solução impossível. O Geogebra foi utilizado como ferramenta para auxiliar na identificação das soluções, embora acreditássemos que os alunos seriam capazes de fazer isso sem o auxílio do software.

Os três primeiros exercícios propostos buscavam trabalhar, inicialmente, a interpretação dos problemas e a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Todas as duplas responderam os exercícios corretamente e de maneira muito rápida. Comentavam que os exercícios eram fáceis e que o software ajudava muito na resolução dos sistemas.

Para ilustração, segue abaixo os exercícios resolvidos pela dupla D, conforme Figura 64.

Figura 64 – Resposta manuscrita dos exercícios 01, 02 e 03 aula 09 (dupla D).



01) Carlos e Joana têm juntos 12 anos. O dobro da idade de Carlos adicionado ao dobro da idade de Joana resulta em 24 anos. Quantos anos tem cada pessoa?

Carlos: 6

Joana: 6

existem infinitos soluções, pode ser 6 e 6, 7 e 5, 8 e 4, 9 e 3, etc.. Uma pessoa não pode ter uma idade negativa, mas pode ter um número com vírgula.

- Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "9ª aula_seunome_1".

02) O perímetro do retângulo abaixo é de 18 cm e o perímetro do triângulo abaixo é de 12 cm. Determine o valor de **x** e de **y**.

18

4 12

x y x y

não existe uma solução simultânea para os dois, pois as retas são paralelas.

x: ____ e y: ____

- Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "9ª aula_seunome_2".

03) Existem 18 pessoas, entre homens e mulheres, assistindo a uma palestra sobre hábitos alimentares. Cada homem pagou R$ 20,00 e cada mulher pagou R$ 10,00 para assistir a essa palestra. Ao todo foram arrecadados R$ 280,00. Quantos homens e quantas mulheres tinham nesse evento?

X Y

$X+Y=18$

$20X+10Y=280$

$X=10$

$Y=8$

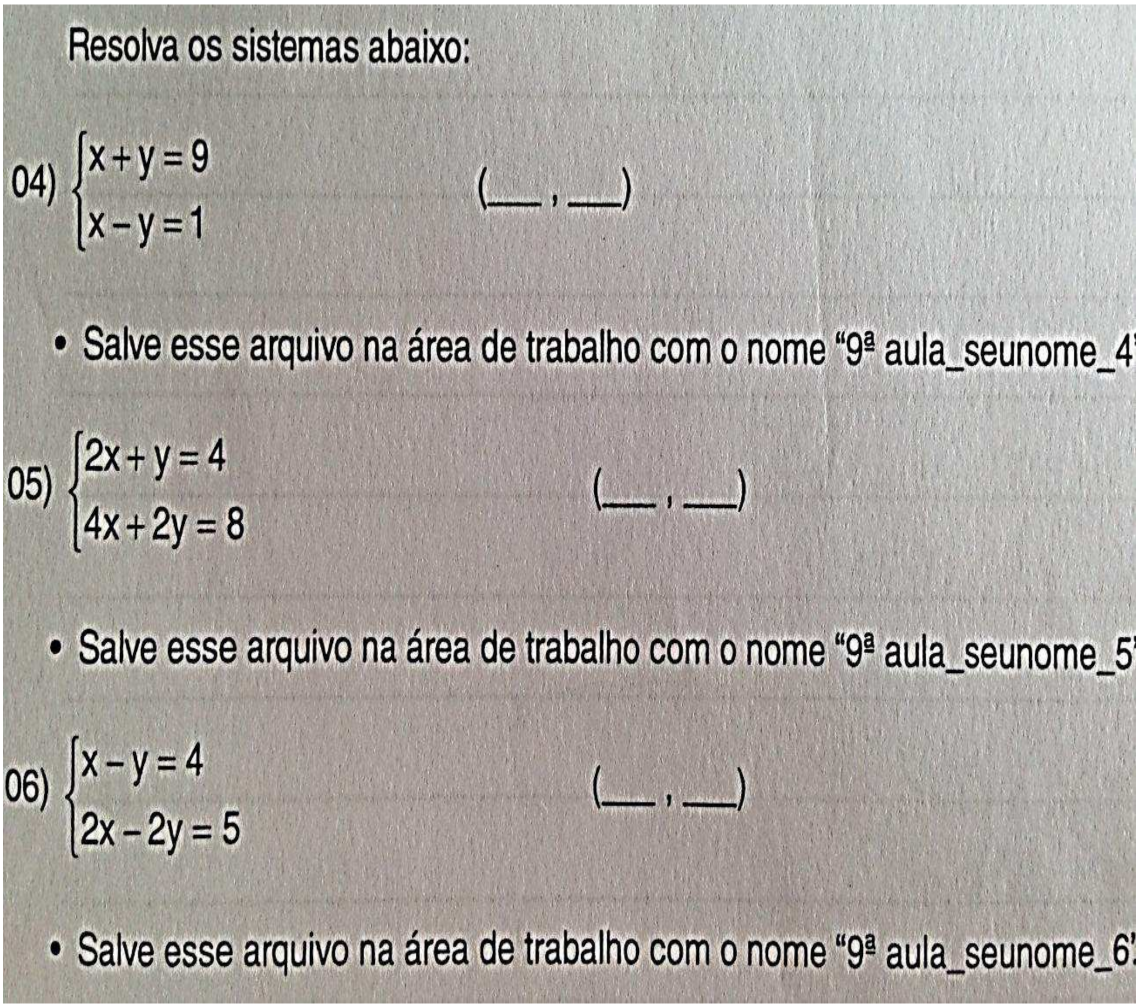
Homens: 10

Mulheres: 8

Fonte: Roteiro de aula.

Os três últimos problemas (Figura 65) apresentavam apenas sistemas de duas equações e duas variáveis e solicitavam suas soluções.

Figura 65 – Enunciado dos exercícios 04, 05 e 06 aula 09.



Resolva os sistemas abaixo:

04) $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$ (___ , ___)

- Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "9ª aula_seunome_4

05) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 4x+2y=8 \end{cases}$ (___ , ___)

- Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "9ª aula_seunome_5

06) $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x-2y=5 \end{cases}$ (___ , ___)

- Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "9ª aula_seunome_6

Fonte: Arquivo pessoal.

Assim como os três primeiros, todas as duplas usaram o Geogebra e responderam com facilidade os exercícios propostos.

Atribuímos a velocidade com que resolveram os exercícios à compreensão e manuseio do software e concluímos que o objetivo da aula foi alcançado devido ao desenvolvimento correto dos exercícios.

6.10 10º ENCONTRO: CLASSIFICANDO SISTEMAS

Iniciamos nosso décimo e último encontro fazendo o uso da lousa para discutir com os alunos a classificação dos sistemas lineares de duas equações e duas variáveis quanto ao número de soluções existentes para o sistema:

- SPD (Sistema possível e determinado) – se possuir apenas uma solução;

- SPI (Sistema possível e indeterminado) – se possuir infinitas soluções;
- SI (Sistema impossível) – se não possuir solução;

Para nosso último encontro, tínhamos os objetivos:

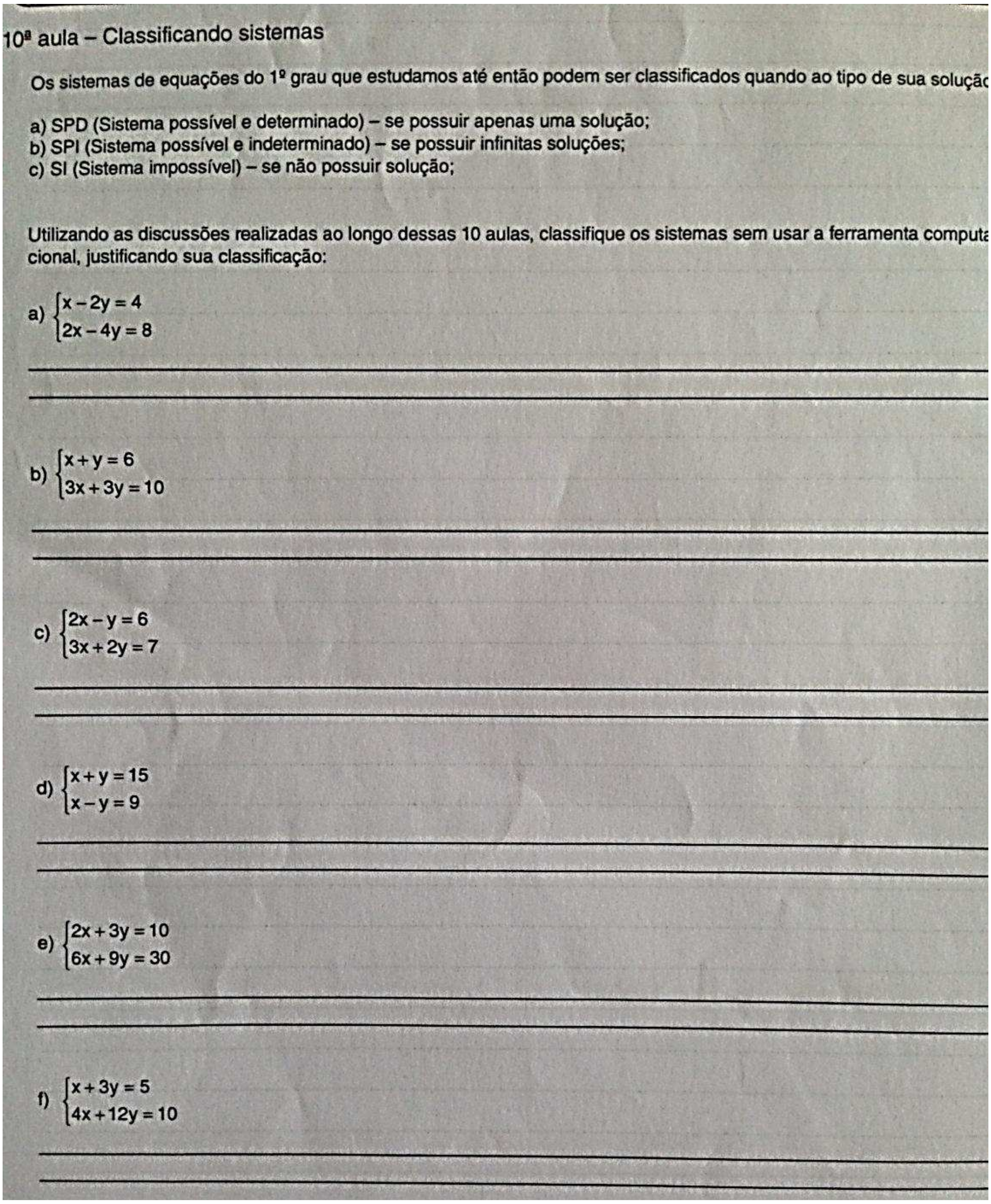
a) avaliar a sequência aplicada nas nove aulas anteriores;
b) apresentar a classificação de sistemas de duas equações e duas variáveis;
c) classificar sistemas de suas equações e duas variáveis sem resolvê-los algébrica ou geometricamente;
d) verificar as posições relativas das retas formadas pelas equações de duas variáveis sem a utilização do Geogebra;
e) determinar a quantidade de soluções de um sistema de duas equações e duas variáveis;

Na sequência, entregamos o roteiro que continha seis exercícios, solicitando apenas a classificação de determinados sistemas lineares de duas equações e duas variáveis. Para isto, porém, os alunos não podiam usar a ferramenta computacional e deveriam também justificar a classificação dada. Para resolvê-los, os alunos precisavam retomar as discussões promovidas nas aulas anteriores e associar as posições relativas das retas com a classificação do sistema.

Os exercícios, por sua vez, deveriam ser preenchidos no roteiro e entregues ao término da aula para que fizéssemos posterior análise.

A Figura 66 mostra os exercícios programados para essa aula.

Figura 66 – Enunciado do exercício aula 10.



10ª aula – Classificando sistemas

Os sistemas de equações do 1º grau que estudamos até então podem ser classificados quando ao tipo de sua soluçã

a) SPD (Sistema possível e determinado) – se possuir apenas uma solução;
b) SPI (Sistema possível e indeterminado) – se possuir infinitas soluções;
c) SI (Sistema impossível) – se não possuir solução;

Utilizando as discussões realizadas ao longo dessas 10 aulas, classifique os sistemas sem usar a ferramenta computa cional, justificando sua classificação:

a) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 6x + 9y = 30 \end{cases}$

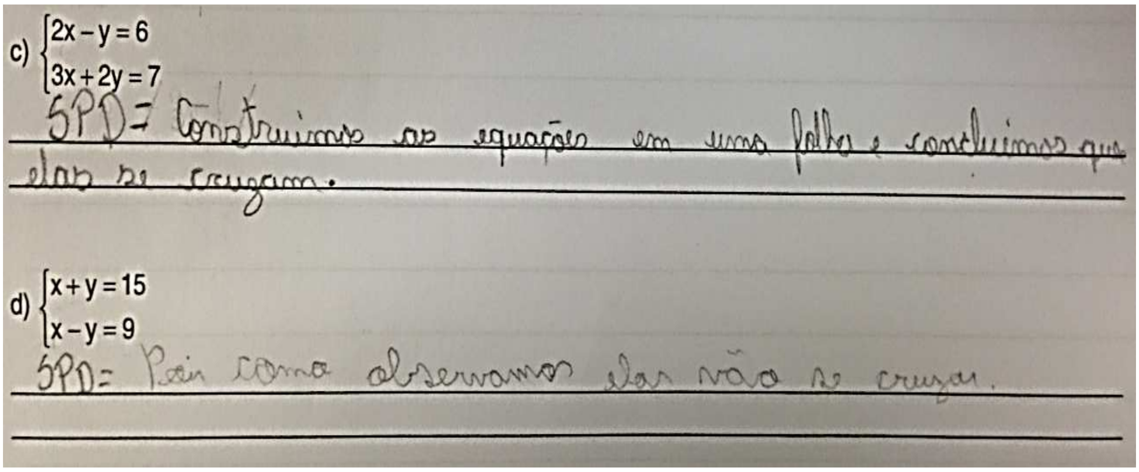
f) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x + 12y = 10 \end{cases}$

Fonte: Arquivo pessoal.

É interessante observar o empenho e dedicação com que realizaram a atividade: muitas duplas discutindo os exercícios e os alunos explicando um ao outro como resolvê-los e justificando suas colocações respaldados nas aulas trabalhadas com o auxílio do Geogebra.

Cabe salientar a resposta (Figura 67) colocada pela dupla D, referente aos itens c) e d) dos exercícios propostos.

Figura 67 – Resposta manuscrita dos itens c) e d) do exercício aula 10 (dupla D).

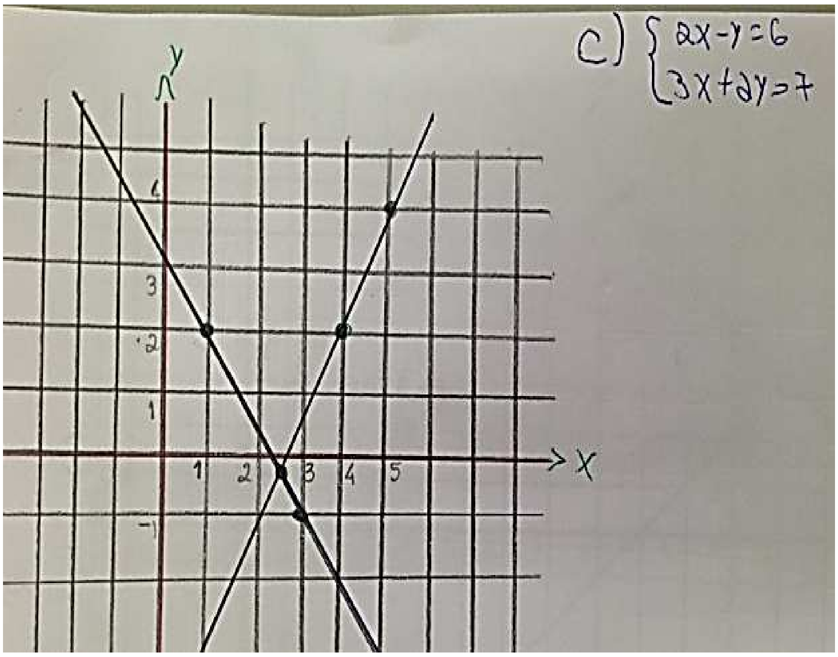


Fonte: Roteiro de aula.

Durante o tempo que destinaram para resolver as atividades, a dupla solicitou uma folha de rascunho. Disponibilizamos o material solicitado e imaginando que os alunos fariam cálculos, pedimos que entregassem as folhas de rascunho juntamente com os exercícios contidos no roteiro.

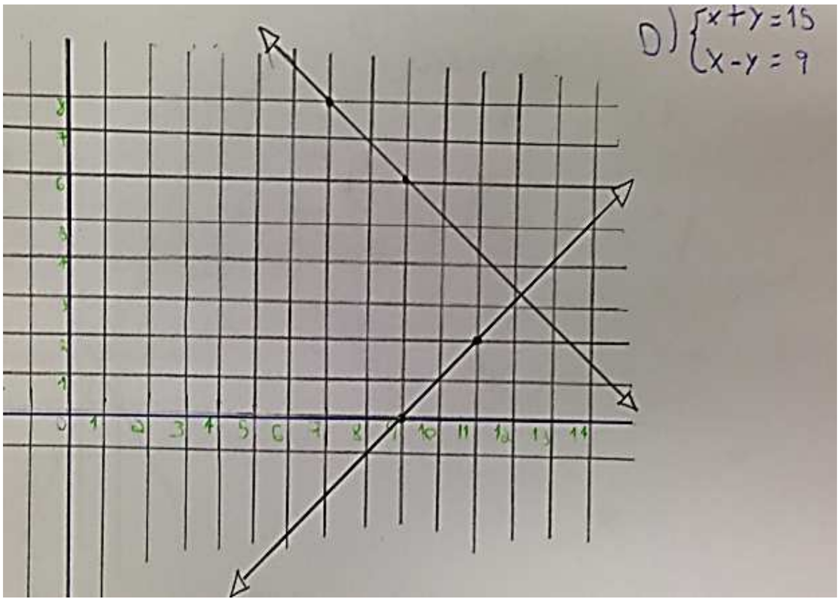
Ao receber a folha (Figura 68 e Figura 69), verificamos que os alunos construíram gráficos para auxiliar nas suas repostas.

Figura 68 – Construção realizada para resposta do item c) do exercício aula 10 (dupla D).



Fonte: Construção dos alunos.

Figura 69 – Construção realizada para resposta do item d) do exercício aula 10 (dupla D).



Fonte: Construção dos alunos.

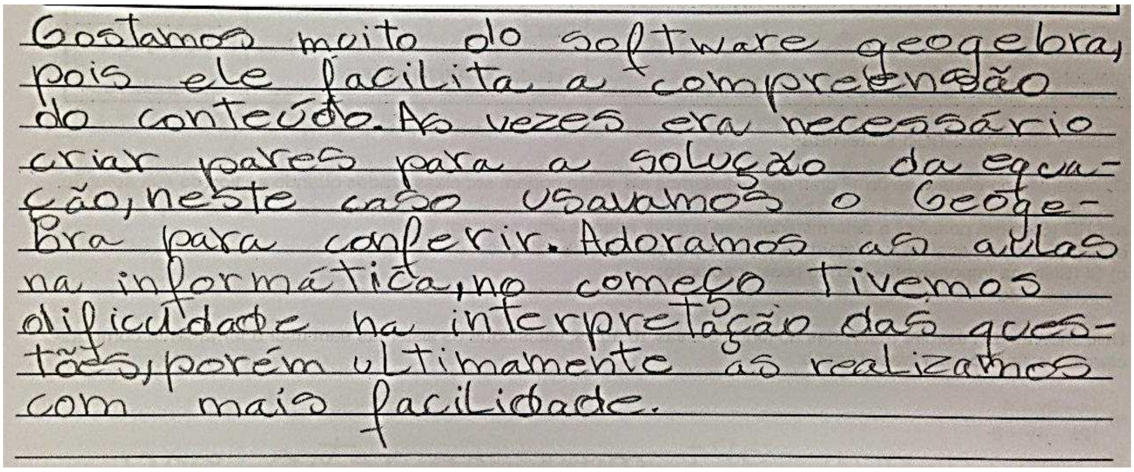
A construção do gráfico realizado pela dupla D nos faz refletir que alguns alunos necessitam da visualização geométrica para sentir-se mais seguros na classificação dos sistemas. Ao construir a representação gráfica, o aluno demonstra domínio do conteúdo trabalhado, uma vez que consegue converter os registros de representação de um objeto matemático.

Apresentamos como principal objetivo dessa aula verificar a contribuição da sequência didática aplicada.

A análise dos exercícios resolvidos pelos alunos e suas justificativas para solucionar os problemas reafirmam o sucesso da sequência aplicada.

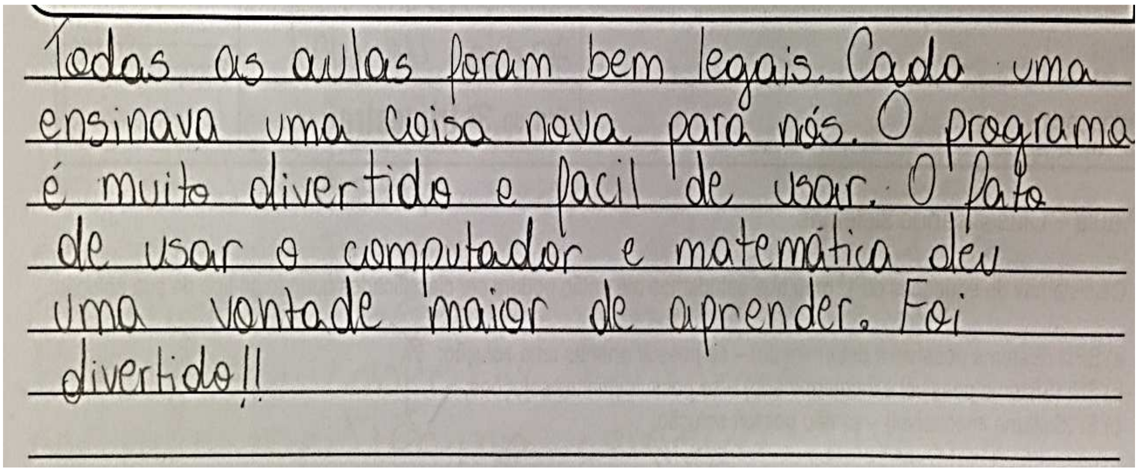
Além disso, alguns depoimentos sobre as aulas foram colocados pelos alunos no campo destinado para observações. Segue abaixo colocações feitas por três duplas (Figura 70, Figura 71 e Figura 72):

Figura 70 – Observação realizada pela dupla A.


Gostamos muito do software geogebra, pois ele facilita a compreensão do conteúdo. As vezes era necessário criar pares para a solução da equação, neste caso usavamos o Geogebra para conferir. Adoramos as aulas na informática, no começo tivemos dificuldade na interpretação das questões, porém ultimamente as realizamos com mais facilidade.

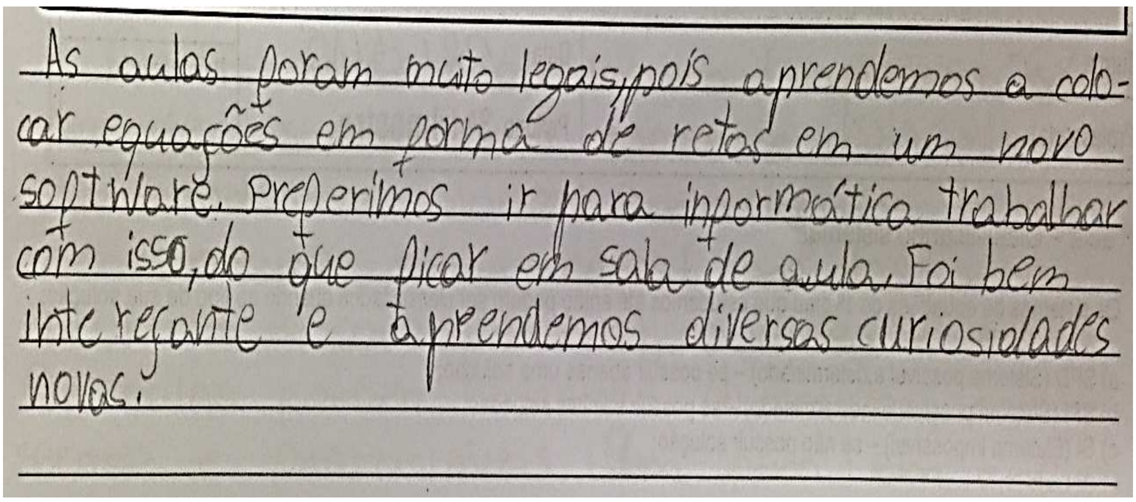
Fonte: Roteiro de aula.

Figura 71 – Observação realizada pela dupla C.


Todas as aulas foram bem legais. Cada uma ensinava uma coisa nova para nós. O programa é muito divertido e facil de usar. O fato de usar o computador e matemática deu uma vontade maior de aprender. Foi divertido!!

Fonte: Roteiro de aula.

Figura 72 – Observação realizada pela dupla C.


As aulas foram muito legais, pois aprendemos a colocar equações em forma de retas em um novo software. Preferimos ir para informático trabalhar com isso, do que ficar em sala de aula. Foi bem interesante e aprendemos diversas curiosidades novas.

Fonte: Roteiro de aula.

Isso reforça a aposta que fizemos no potencial do uso de tecnologia em sala de aula e mostra como os alunos sentem-se motivados quando desafiados a resolver problemas diferentes daqueles tradicionalmente abordados em sala de aula.

7 CONCLUSÃO

Ao iniciar esse trabalho apresentamos uma proposta para o ensino de sistemas lineares por meio de uma sequência didática com enfoque nas variações dos registros de representações do objeto matemático. Propusemos a seguinte questão norteadora para nossa pesquisa: **uma proposta de aprendizagem, ancorada no uso do software Geogebra, que contempla a conversão dos registros de representações de sistemas lineares para a linguagem geométrica, contribui para o entendimento do objeto matemático? Como?**

Caminhando em busca de uma resposta para esse questionamento, sugerimos a elaboração e aplicação de uma sequência didática. Baseado nos arquivos do Geogebra produzidos pelos alunos, nas respostas atribuídas aos exercícios encontradas no roteiro de aula e nas colocações feitas pelos sujeitos pesquisados, validamos a proposta e sugerimos a aplicação da mesma para o ensino de Sistemas Lineares no Ensino Fundamental. Com a análise dos dados, pensamos que a metodologia apresentada auxiliou de maneira efetiva no aprendizado dos alunos. Tal análise nos mostra que os mesmos compreenderam a solução de um Sistema Linear quando resolvido pelo método geométrico e promoveram as conversões entre os registros de representações do Sistema quando solicitados.

Os ricos momentos que vivenciamos como pesquisadores para elaboração desse trabalho têm um considerável valor na construção do nosso conhecimento. Priorizar o olhar de pesquisador e deixar como secundária nossa visão de mestrandos para criar essa metodologia de trabalho, nos colocou diante do desafio de mergulhar profundamente no estudo dos Sistemas Lineares e nos questionar de que forma o aluno aprende e, principalmente, se as ferramentas que tínhamos disponíveis para ensinar eram suficientes para garantir o aprendizado efetivo de nossos alunos.

A matemática, enquanto ciência possui uma linguagem própria, e isso pode ser um fator que prejudica o aprendizado dos estudantes. Os autores dos livros didáticos, por sua vez, deveriam estar preocupados com essa questão e procurar abordar os conteúdos nas mais diversas linguagens, apresentando aos alunos os objetos matemáticos nas mais variadas representações e promovendo as conversões entre elas. Os livros que analisamos apresentam o conteúdo de Sistemas Lineares para o Ensino Fundamental com um olhar puramente algébrico. Enquanto professores, não podemos nos limitar ao uso desses livros. Há muito mais para ser feito.

Tradicionalmente, a matemática é tratada nas escolas como sendo domínio dos alunos considerados superiores. Os conteúdos não podem, segundo essa visão, ser por todos compreendido. Dessa forma, os alunos que não conseguem aprendê-la estão destinados ao fracasso. Somos professores e não podemos corroborar com esse ponto de vista. Devemos promover o ensino de matemática de forma que se torne atrativo, garantindo aos alunos aprendizado para que se sintam estimulados a aprender cada vez mais. Propor novas metodologias de trabalho pode ser um fator relevante para o sucesso de seu ensino. Pensamos que a sequência didática que aplicamos e apresentamos em apêndice neste trabalho, muito contribui para o aprendizado dessa disciplina.

Houve diversos momentos de enriquecimento na produção desse trabalho. Destacamos o estudo do referencial teórico. Compreender, respaldados no uso das representações semióticas, que o aprendizado se efetiva nas modificações dos registros, nos possibilita rever nossa prática enquanto professores.

As tecnologias apresentam hoje um papel central no desenvolvimento da sociedade, em particular, da educação. Utilizar o software Geogebra no desenvolvimento de nossa pesquisa foi, sem dúvida, primordial para garantir o sucesso de sua aplicação. Pensamos que o uso da mesma como uma ferramenta auxilia, e muito, o professor. Pensar nas conversões dos registros de forma imediata e dinâmica seria impossível sem nos apossarmos do software. Deixamos como sugestão para os professores uma imersão no mundo das mídias, os resultados podem ser surpreendentes. Inclusive, entre esses surpreendentes resultados, tivemos sujeitos da pesquisa que fizeram download do software em sua casa, estendendo seu espaço de estudo para além da sala de aula.

Pensamos ser importante fazer uma reflexão de nossa prática diária enquanto professores. Centrar nossa visão para o espaço da sala como docentes, significa, muitas vezes, direcionar nosso trabalho para um ensino voltado ao uso apenas dos livros didáticos e de resumos de aula, que em sua maioria apresentam uma matemática limitada e desconectada da realidade, que não aborda o conteúdo como um todo e não promove as transformações necessárias para garantir a aprendizagem dos alunos. Precisamos investigar, criar, experimentar novas propostas de trabalho. Sabemos que a sociedade está em constante transformação e necessitamos promover mudanças significativas no ensino da matemática, de forma que acompanhe a sociedade.

Ressaltamos que este foi o primeiro momento que os alunos tiveram contato com os Sistemas Lineares e o trabalho esteve voltado para a sua solução por meio das conversões e da visualização geométrica. Porém, a aprendizagem desse objeto matemático não se esgota com o trabalho geométrico, sendo necessárias também as discussões do conteúdo na sua forma algébrica, procurando variar a forma de representação das equações tanto nas conversões quanto nos tratamentos.

Finalizamos reforçando a sucesso de nossa proposta. Ressaltamos, porém, que esta foi aplicada em uma rede particular de ensino de referência de Florianópolis. Como o software utilizado é gratuito, sugerimos a aplicação da mesma na rede pública, de forma que se possa fazer uma comparação dos resultados.

Criamos nesse espaço de formação uma possibilidade. Que sejam criadas outras.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em Pesquisa e Avaliação Educacional.** Brasília: Líber Livro Editora, 2005, vol. 13. (Pesquisa)

BASSO, M. V. A.; GRAVINA, M. A. Mídias digitais na educação matemática. In: GRAVINA, M. A. et al (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** Tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012, p. 11-34.

BIANCHINI, E. **Matemática:** Bianchini 7º ano. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BITTAR, M. possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de softwares na aprendizagem da matemática. Um estudo de caso: o software Aplusix. **III Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática.** São Paulo: 2006.

BRANDÃO, P. C. R. **O uso de software educacional na formação inicial do professor de matemática:** uma análise dos cursos de licenciatura em matemática do Estado de Mato Grosso do Sul. 2005. 81f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Brasília: MEC/SEF, 2001

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre a educação e matemática. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMBROSIO, U. **A era da consciência:** aula inaugural do primeiro curso de pós graduação em ciências e valores humanos no Brasil. São Paulo: Editora Fundação Peirópolis, 1997.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (org) **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2002, p. 135-153.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática:** registros de representações semióticas. 2. ed. São Paulo: Papirus, 2003, p. 11-33. (Papirus Educação).

FLORES, C. R. **Registros de representação semiótica em matemática:** história, epistemologia, aprendizagem. Bolema, Rio Claro, v. 19, n. 26, p. 77-102, 2006.

FREITAS, E. M. B. **Relações entre mobilização dos registros de representação semiótica e os níveis de letramento estatístico com duas professoras.** 2010. 217 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de pós graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

GIOVANNI JUNIOR, J. R.; CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da Matemática.** 7º ano. Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2002. Tese (Doutorado) – Programa de pós graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 4ª. ed. Campinas: Papirus, 2006.

LEVY, P. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1995.

MORAN, J. M.; MASETTO, M.; BEHRENS, M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 3 ed. Campinas: Papirus, 2001.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **O conhecimento matemático do professor:** formação e prática docente na escola básica. Revista Brasileira de Educação, n. 28, p. 50-61, 2005.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F.; FRANCO, P. L.. **Estudo das formas de negação no processo de ensino da matemática: ponto de encontro com os registros de representação semiótica.** Ciênc. educ. (Bauru), Bauru, v. 18, n. 2, 2012. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1590/S1516-73132012000200015>. acesso em 15 Set. 2013.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em Educação Matemática.** Bolema, Rio Claro, v. 19, n. 25, 2006.

PROJETO POLÍTICO PEDAGÓGICO – **Colégio Energia:Unidade Jurerê**. Ensino Fundamental. Florianópolis: 2006.

QUEIROZ, C. A.; RAMOS, E. E. L.; SIPLE, I. Z. **Tópicos especiais em Ciências I:** representação semiótica, tecnologias educacionais e atividades experimentais. Florianópolis: Publicações do IF-SC, 2011.

RIBEIRO, J.; SOARES, E. **Projeto Radix:** Matemática 7ª série. São Paulo: Scipione, 2005. (Projeto Radix).

SANTOS, S. S. **O desenvolvimento de conceitos elementares do bloco tratamento de informação com auxílio do ambiente computacional:** um estudo de caso com uma professora do 1º e 2º ciclo do Ensino Fundamental. 2003. Dissertação (Mestrado) – Programa de pós graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

VASCONCELOS, C. S. **Construção do Conhecimento em Sala de Aula.** São Paulo: Libertad, 1993.

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem

INSTITUTO DE ppgensimat MATEMÁTICA UFRGS

Ilma Professora **Janete Becker**

Diretora do **Colégio Energia – Ensino Fundamental II**

O professor **Michelsch João da Silva**, trabalhando nesta Unidade Escolar, é mestrando no Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do programa o professor está desenvolvendo sua dissertação de mestrado **"Contribuições dos Registros de Representações Semióticas no Ensino de Sistema de Equações".**

Esta dissertação deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante testar o material e assim sendo estamos solicitando a sua autorização para que os alunos do **7º ano do Sistema de Ensino Energia** participem, da pesquisa, a qual envolve a testagem do material. Informamos que em alguns momentos da pesquisa serão feitas filmagens e entrevistas com os alunos participantes, tendo como propósito coletar dados para analisar a adequação didática do material que está sendo proposto.

Para manifestação de sua concordância, por favor, preencha assine no campo 'De acordo." no final desse documento, o qual deve ser entregue ao professor **Michelsch João da Silva** no início das atividades. A experiência de ensino inicia no dia **18 de setembro de 2012**, num total de **10 (dez)** encontros.

Enquanto pesquisadores reiteramos nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição os seguintes telefones de contato: (51)3308.6212 (orientador) e (48)3246.0958 (mestrando).

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Professora/orientador do PPGEMat

Michelsch João da Silva
Mestrando do PPGEMat

De acordo.
Nome e assinatura

Ma. Janete Becker
Diretora de Educ. Infantil
e Ens. Fundamental
Coord. Assessoria Pedagógica
Sistema de Ensino Energia
Florianópolis (SC)

Florianópolis, 10 de setembro de 2012.

APÊNDICE B – CONTRATO DE PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS EDUCACIONAIS

Sistema de Ensino **Energia**®

Contrato de **Prestação de Serviços** Educacionais

CONTRATO DE PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS EDUCACIONAIS - ENSINO FUNDAMENTAL 2 – 2O___

Aluno(a)____,
RG_____________________, CPF/MF___________________________, beneficiário exclusivo da prestação do serviço educacional, e____,
RG_____________________, CPF/MF___________________________, na qualidade de CONTRATANTE(S), e SISTEMA DE ENSINO ENERGIA LTDA., pessoa jurídica de direito privado, devidamente inscrita no CNPJ sob nº O6.233.257/OOO1-7O, com sede na rua Santos Dumont, 36, em Florianópolis (SC), na qualidade de CONTRATADA, celebram o presente contrato de prestação de serviços educacionais em Ensino Fundamental 2, regido pelas seguintes cláusulas e condições:

Cláusula 1. O contrato objetiva a prestação de serviços educacionais durante o ano letivo em curso, através de aulas e demais atividades propostas, observado o critério de funcionamento da CONTRATADA.
Parágrafo único. O serviço educacional prestado pela CONTRATADA se limita ao ensino regular, inexistindo a obrigação de qualquer serviço aos educandos portadores de necessidades especiais.

Cláusula 2. A CONTRATADA se responsabiliza pelo planejamento da prestação dos serviços, em particular no que se refere ao local onde as aulas serão ministradas, tendo em vista a natureza do conteúdo e da técnica pedagógica que se fizerem necessárias, inclusive pela aplicação curricular em eventos relevantes, pelas datas de provas de aproveitamento, pela fixação de carga horária, designação de professores, orientação didático-pedagógica e educacional, além de outras providências que a atividade docente exigir, obedecendo ao seu exclusivo critério e às determinações legais atinentes à espécie, Vedada a ingerência do(a) CONTRATANTE.
Parágrafo primeiro. Fica deliberado que uso diário do uniforme, especificado pela CONTRATADA, será obrigatório.
Parágrafo segundo. O descumprimento das obrigações descritas no caput, caracterizado pelo órgão competente, autoriza o(s) CONTRATANTE(S) a rescindir(em) o contrato e a pleitear(em) o equivalente ao percentual de 2O% (vinte por cento) sobre o total (soma) dos valores atribuídos a contrato, a título de perdas e danos.

Cláusula 3. O ato de matrícula se processa apenas através do preenchimento e da entrega do requerimento de matrícula e dos demais documentos exigidos pela Secretaria Pedagógica da CONTRATADA.
Parágrafo primeiro. A quitação de quaisquer obrigações financeiras por parte do(s) CONTRATANTE(S), inclusive a satisfação da primeira parcela referente ao ano letivo, certificada pela Tesouraria da CONTRATADA, constitui-se condição para o deferimento da matrícula pelo Diretor Geral e para a consequente validade do contrato.
Parágrafo segundo. A critério da Secretaria Pedagógica, expressamente certificado, o prazo para entrega dos documentos escolares poderá ser prorrogado para 3O (trinta) dias após o pagamento da primeira parcela do contrato.

Cláusula 4. A fim de se efetuar a rematrícula para o próximo ano letivo, deverão ser agendados cheques pré-datados para as mensalidades vincendas do corrente ano.
Parágrafo único. A validação da matrícula para o ano letivo seguinte está condicionada à quitação do Contrato de Prestação de Serviços do ano em curso, que se dará através da compensação dos cheques pré-datados emitidos no momento da rematrícula.

Cláusula 5. O(s) CONTRATANTE(S) pagará(ão) pela prestação do serviço o valor estipulado no plano vigente na data da matrícula, observado o quadro abaixo:

Curso:	**Turno:** ☐ Matutino / ☐ Vespertino
☐ 6º do Ensino Fundamental 2	**Valor total:** R$ ______________________
☐ 7º do Ensino Fundamental 2	**Nº de parcelas:** ______
☐ 8º do Ensino Fundamental 2	**Valor das parcelas:** R$ __________________
☐ 9º do Ensino Fundamental 2	**Meses a pagar:** de ____/______ a ____/2O___

Parágrafo primeiro. A opção por um dos planos de pagamento será definida pelo valor da primeira parcela.
Parágrafo segundo. No caso de matrícula fora do prazo, os pagamentos das prestações vencidas se realizarão de acordo com o plano vigente na data da matrícula, sem prejuízo dos acréscimos descritos no § quarto *infra*.

1

Parágrafo terceiro. As prestações mensais vencem **no primeiro dia útil de cada mês**, sendo que os pagamentos poderão ser efetuados na Tesouraria da CONTRATADA ou nas instituições financeiras autorizadas.

Parágrafo quarto. O(s) CONTRATANTE(S) gozará(ão) de uma bonificação, vinculada diretamente a data da matrícula e ao plano de pagamento escolhido, caso a prestação se efetive até o dia 5 (cinco) do mês, especificamente na Tesouraria localizada na sede da CONTRATADA.

Parágrafo quinto. Na hipótese de inadimplemento de qualquer prestação contratada será permitida a sua cobrança extrajudicial e/ou judicialmente, acrescida de 2% (dois por cento) a título de multa contratual, bem como 1% (um por cento) ao mês a título de juros mora, somados à correção monetária indexada pelo INPC – TJSC, até o seu efetivo pagamento.

Parágrafo sexto. Em caso de inadimplemento por 90 (noventa) dias, ou mais, fica a CONTRATADA, desde já, autorizada a promover inscrição da(os) CONTRATANTE(S) nos órgãos de proteção ao crédito (SPC – SERASA), banco de dados previsto na Seção VI, do Capítulo V, da Lei nº 8.078/90, do Código de Defesa do Consumidor, bem como delegar a terceiros a cobrança do débito, estes anteriores aos noventa dias, arcando a(os) CONTRATANTE(S) com os honorários advocatícios a serem arbitrados em cobrança judicial, além das despesas com notificações (AR's), protestos e demais atos necessários ao exercício do direito de crédito facultado à CONTRATADA, reservado o mesmo direito em favor da(os) CONTRATANTE(S).

Parágrafo sétimo. Fica vedado à(ao) CONTRATANTE o pagamento a menor de qualquer das parcelas descritas nesta cláusula (4), sob pena de cobrança administrativa ou judicial do saldo devido, sem prejuízo das demais medidas constantes do § sexto do presente acordo.

Parágrafo oitavo. O(s) CONTRATANTE(S) se responsabiliza(m) pelos dados ora declarados, comprometendo-se a informar à CONTRATADA qualquer alteração ou mudança de endereço capaz de prejudicar sua localização e fica(m) ciente(s), desde já, de que a omissão no fornecimento de tais dados importará no envio de correspondência para o endereço anteriormente fornecido e, consequentemente, na inclusão de seu(s) nome(s) no SPC sem seu prévio conhecimento.

Parágrafo nono. A ausência do aluno CONTRATANTE aos locais onde a CONTRATADA presta os serviços de educação não o exime do pagamento, tendo em vista a disponibilidade do serviço.

Parágrafo décimo. As atividades extraordinárias (provas ou exames de segunda chamada e outras) e as extracurriculares (cursos de qualquer natureza, viagens e outros) não se encontram incluídas no valor especificado nas tabelas delineadas no *caput* da presente cláusula, sendo valoradas a critério da CONTRATADA e remuneradas com antecedência à prestação do serviço.

Cláusula 6. A CONTRATADA, no caso de pagamento a menor, de inadimplemento ou de exigência de serviço diverso do estipulado na cláusula primeira e seu parágrafo único, reserva-se, mesmo de maneira cumulada, sem prejuízo dos índices previstos na cláusula 4 supra, no direito de optar:

I - pela suspensão da prestação do serviço, observado o período mínimo de 90 (noventa) dias de atraso, seguindo os critérios da lei 9.870/90;

II - pela rescisão do contrato de prestação de serviço educacional.

Parágrafo primeiro. Finalizado o período letivo sem o efetivo e completo adimplemento do(a) CONTRATANTE das mensalidades contratadas, a CONTRATADA se reserva no direito de não renovar sua matrícula, bem como promover todas as medidas elencadas na Cláusula Quarta e seus parágrafos acima, nos termos do art. 5º da Lei 9.870/1999.

Parágrafo segundo. As partes ajustam, para efeito de cálculo do valor da obrigação pecuniária, que a fração igual ou maior do que 15 (quinze) dias de serviço prestado será computada como período mensal completo.

Cláusula 7. A opção por um dos planos de pagamento obriga o(s) CONTRATANTE(S) ao seu cumprimento e, por consequência, a antecipação das prestações depende da prévia e expressa concordância da CONTRATADA.

Cláusula 8. O valor de quaisquer das parcelas ajustadas poderá ser alterado por força de lei, medida provisória, decisão judicial ou sentença normativa de trabalho que implique em comprovada variação de custos ou receitas, de modo a manter o equilíbrio de equação econômico-financeira resultante do presente contrato.

Cláusula 9. O valor da contraprestação previsto na cláusula 4 supra inclui, exclusivamente, a prestação de serviços educacionais, na modalidade do ensino regular, observada a carga horária constante do plano escolar e a carteira de identificação do aluno.

Parágrafo primeiro. O material didático a ser utilizado durante o curso selecionado neste contrato não está incluso no valor da mensalidade devendo, portanto, ser adquirido à parte pelo(s) CONTRATANTE(S) no ato da matrícula.

Parágrafo segundo. O(s) CONTRATANTE(S) se declara(m) ciente(s) de que o material didático-pedagógico utilizado está salvaguardado pela titularidade de registro de direitos autorais no órgão competente, de acordo com o estabelecido na Lei nº 5.988, de 14 de dezembro de 1973, com as alterações introduzidas pela Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, ficando PROIBIDA A SUA REPRODUÇÃO (FOTOCÓPIA), TOTAL OU PARCIAL, SEM EXPRESSA AUTORIZAÇÃO DA CONTRATADA, sob pena de instauração de procedimento criminal e de processo cível competente, além da justa rescisão do contrato.

Parágrafo terceiro. É condição principal deste contrato que o educando frequente regularmente as aulas diárias, que esteja pontualmente presente no estabelecimento de ensino no horário de início das aulas, trajando uniforme oficial adotado pela CONTRATADA.

Cláusula 10. O(s) CONTRATANTE(S), desde já, autoriza(m) a CONTRATADA a se utilizar de sua(s) imagem(ns) para fins de divulgação das atividades, podendo, para tanto, reproduzi-la(s) e/ou divulgá-la(s) na rede de computadores (internet), em jornais, televisão, materiais institucionais e promocionais impressos em quaisquer meios de comunicação, públicos ou privados, renunciando o(s) CONTRATANTE(S) ao direito de indenização ou participação nos resultados,

Parágrafo único. A autorização para uso da imagem será por prazo indeterminado.

Cláusula 11. A CONTRATADA não se responsabiliza por dano ou furto ocorrido a pertences do aluno, tais como celulares, calculadoras, joias, *laptop's*, *tablet's*, etc., sendo incabível qualquer indenização em caso da não comprovação da ocorrência nas dependências do estabelecimento sede da CONTRATADA.

Cláusula 12. No propósito de resguardar a plena integridade física, bem como dos pertences de todo o corpo discente, docente e funcionários, o estabelecimento de ensino CONTRATADO disporá do uso de câmeras de segurança utilizadas com este único fim.

Cláusula 13. Ao firmar o contrato, o(s) CONTRATANTE(S) se submete(m) ao regimento escolar, ao Manual do Aluno e às demais obrigações constantes na legislação aplicável à espécie e, ainda, às emanadas de outras fontes legais que regulem supletivamente a matéria, inclusive o plano escolar aprovado pelo órgão específico.

Parágrafo único. O(s) CONTRATANTE(S) responsabiliza(m)-se por todos os danos que o(a) aluno(a) venha eventualmente causar ao patrimônio da Instituição.

Cláusula 14. O(s) CONTRATANTE(S) poderá(ão) solicitar a rescisão do contrato, ficando a seu encargo comunicar expressamente à CONTRATADA no prazo de 30 (trinta) dias de antecedência e, ainda, obrigado(s) a satisfazer a prestação vencida no período de aviso, bem como no pagamento de penalidade contratual de 20% (vinte por cento) sobre o valor da(s) mensalidades vincenda(s) devidamente contratadas.

Parágrafo primeiro. O(s) CONTRATANTE(S), poderá(ão) rescindir o contrato no prazo de 10 (dez) dias contados da data de sua formalização, obrigando-se a CONTRATADA, no prazo de 30 (trinta) dias, a restituir a quantia paga descontado o percentual de 20% (vinte por cento) a título de despesas administrativas.

Parágrafo segundo. A rescisão do contrato por decisão unilateral do(s) CONTRATANTE(S) somente se perfectibilizará com o protocolo de expressa declaração na Secretaria da CONTRATADA.

Parágrafo terceiro. Tendo o CONTRATANTE desrespeitado as normas contidas no Manual do Aluno, bem como no Projeto Pedagógico da CONTRATADA, que se encontram disponíveis na Secretaria, a CONTRATADA poderá, a qualquer momento, rescindir o contrato com o CONTRATANTE, ficando o CONTRATANTE obrigado a satisfazer o pagamento integral do valor da mensalidade do mês em curso e mais 20% referente à multa de rescisão contratual.

Cláusula 15. O(A) CONTRATANTE declara que recebe sua via do contrato em fonte *Myriad Pro Light* em corpo tamanho 12, sendo a via da contratada em fonte com corpo menor, a fim de permitir a otimização de seus arquivos.

Cláusula 16. Para dirimir questões oriundas deste contrato, fica eleito o Foro da cidade de Florianópolis, Santa Catarina.

E, por estarem justos e contratados, assinam o presente instrumento em duas vias de igual teor e forma, na presença das testemunhas abaixo, para que se produzam todos os efeitos legais.

Florianópolis, ________ de ____________________________________ de 20_____.

____
Aluno (Contratante)

______________________________ Responsável Financeiro

______________________________ Sistema de Ensino Energia

______________________________ Testemunha 1

______________________________ Testemunha 2

APÊNDICE C – PRODUTO FINAL

Apresentamos a seguir, a proposta sugerida nessa dissertação para o ensino de Sistemas Lineares de Duas Equações e Duas Variáveis por meio de uma sequência didática.

Buscamos, com esse material, resolver Equações e Sistemas Lineares ancorados na geometria. Para isso, é fundamental a utilização do mesmo com o auxílio de alguma ferramenta computacional. Utilizamos e recomendamos a utilização do software livre Geogebra, mas colocamos também que a sequência pode ser adaptada para o uso de outro software.

Gostaríamos de direcionar esse material à professores de matemática que buscam subsídios diferenciados para abordar os conteúdos com os alunos.

Destacamos que o material aqui proposto pode sofrer alterações conforme necessidade do professor que deseja utilizá-lo. Desejamos, acima de tudo, que este seja uma referência para auxiliar professores em sua prática docente.

Dividimos a sequência em 10 encontros e, para facilitar sua utilização por outros profissionais, apresentamos juntamente com cada encontro os objetivos propostos para o presente momento.

Sugerimos que o trabalho seja realizado em duplas, uma vez que acreditamos que a troca entre os alunos pode ser um fator contribuinte para seu aprendizado.

Para finalizar, orientamos que os professores evite fornecer respostas durante a aplicação da sequência. Acreditamos que por meio do questionamento, os alunos sejam capazes de responder suas próprias dúvidas e se tornam sujeitos ativos na construção do seu conhecimento.

Segue a sequência para apreciação.

1ª aula – Familiarização com o software Geogebra e alguns recursos básicos

Objetivos:

• verificar a familiaridade dos alunos com a tecnologia, bem como o prazer em utilizá-la;

• incentivar o uso de tecnologias como ferramenta para aprender matemática;

• apresentar o software Geogebra aos alunos;

• apresentar as potencialidades do software e as possíveis conversões dos objetos matemáticos por meio das janelas de álgebra, gráfica e planilhas;

• discutir funções básicas (refazer, desfazer, mover, salvar, etc) oferecidas pelo software que serão alicerces para dar continuidade a atividade nas aulas seguintes;

• mostrar as diversas formas de representação de um objeto matemático.

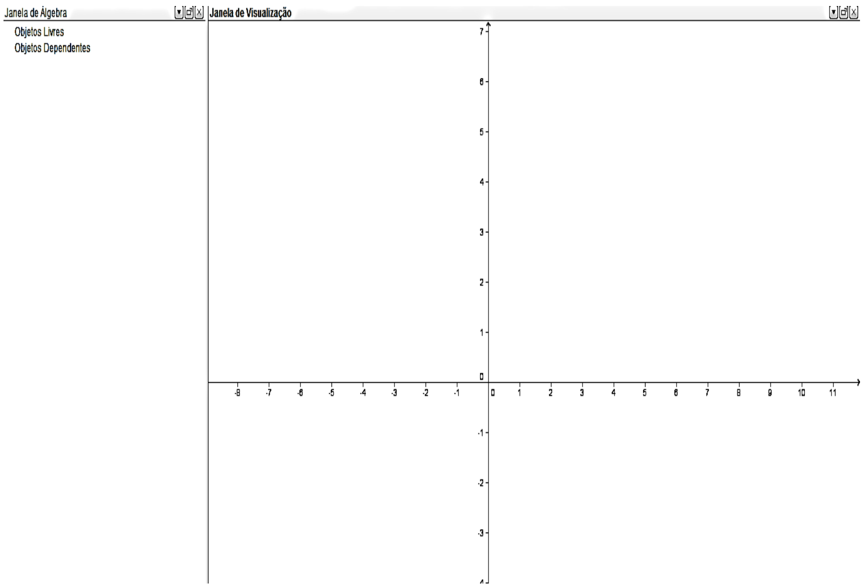
Alunos (a): ____ Data: __/__/__

____

a) <u>Barra de menus</u>

• clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho;

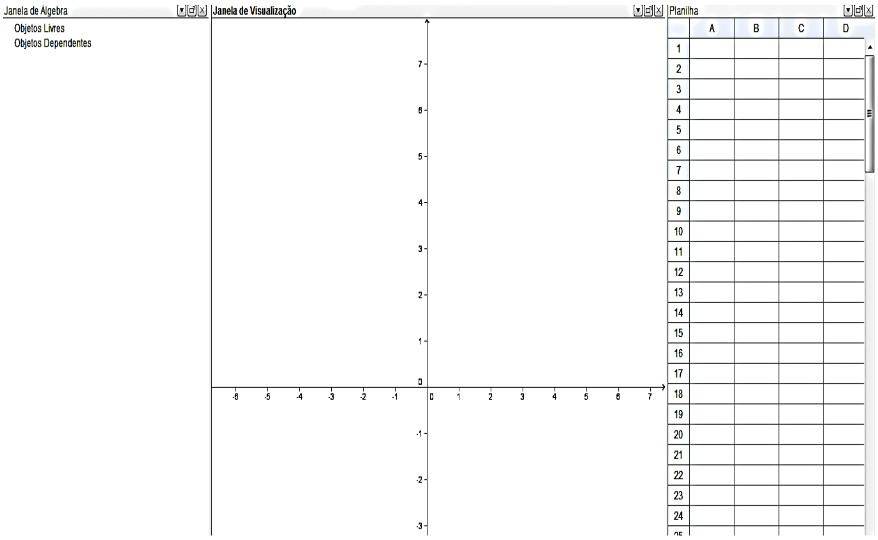
→ aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica



• clicar no menu:

***exibir - planilhas**

→ aparecerá, juntamente com a janela algébrica e gráfica, a planilha de cálculo;



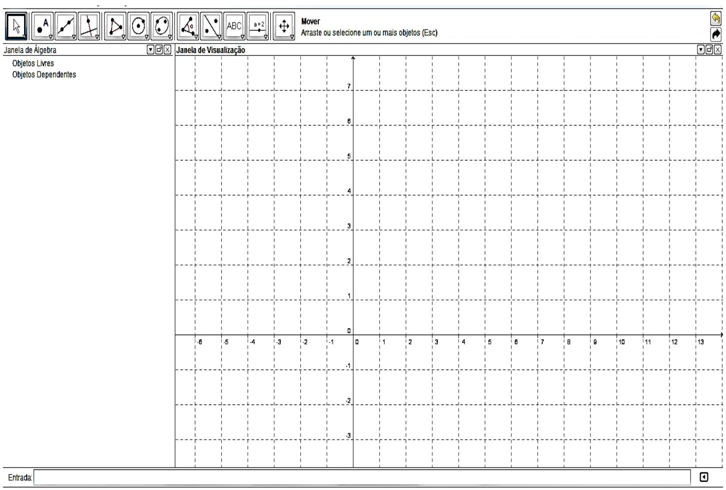
A **janela de álgebra** exibe as informações algébricas dos objetos que estão na área de visualização (janela gráfica);

A **janela de visualização gráfica** nos permite realizar construções geométricas (pontos, retas, segmentos, etc) por meio dos ícones disponíveis na barra de ferramentas ou pela digitação que pode ser realizada na janela de álgebra;

A **planilha de cálculo** nos permite a inserção de vários objetos matemáticos suportados pelo geogebra (coordenadas de pontos, equações, etc). Cada célula dessa planilha tem um nome especial que permite identificá-la. Assim como no excel, por exemplo, a célula localizada na *coluna B* e *linha 2*, é nomeada *B2*.

• Na janela de visualização, clicar no menu:

***exibir - malha**

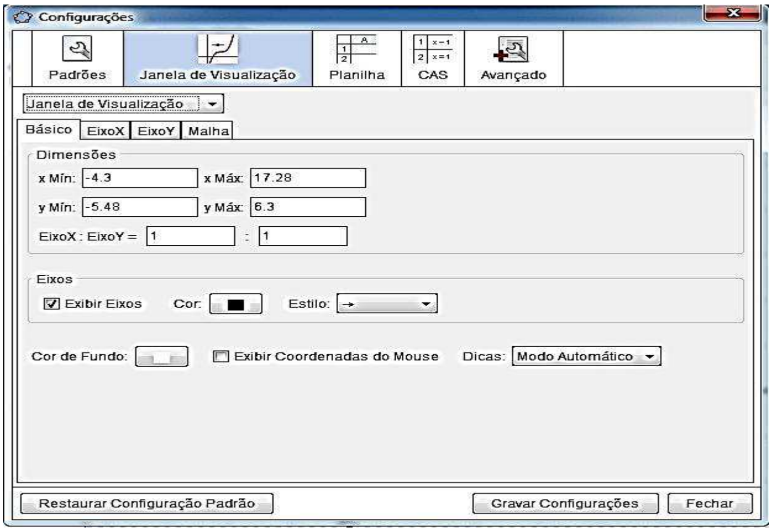


Para melhor visualizar, você pode fechar a planilha de cálculo.

• ainda na janela de visualização, clicar no menu:

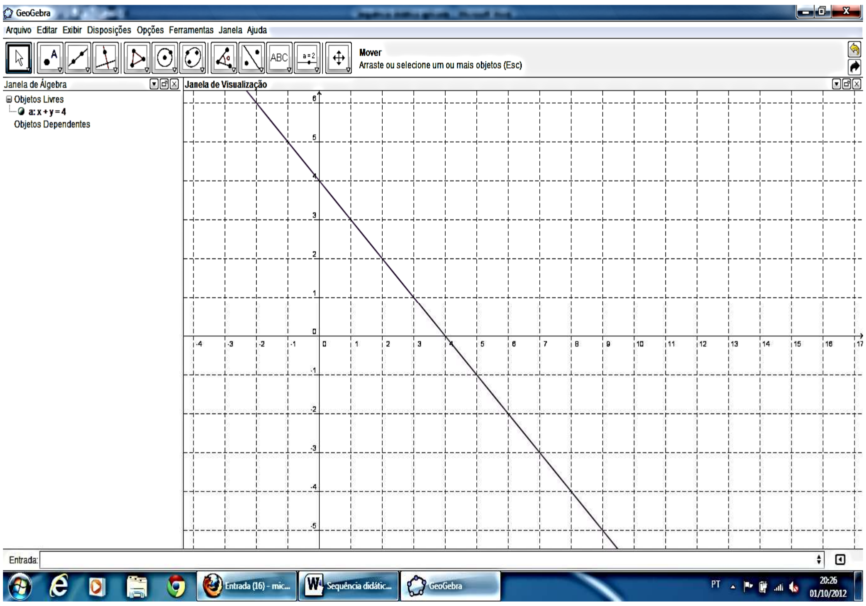
***opções - configurações**

→aparecerá a janela seguinte:

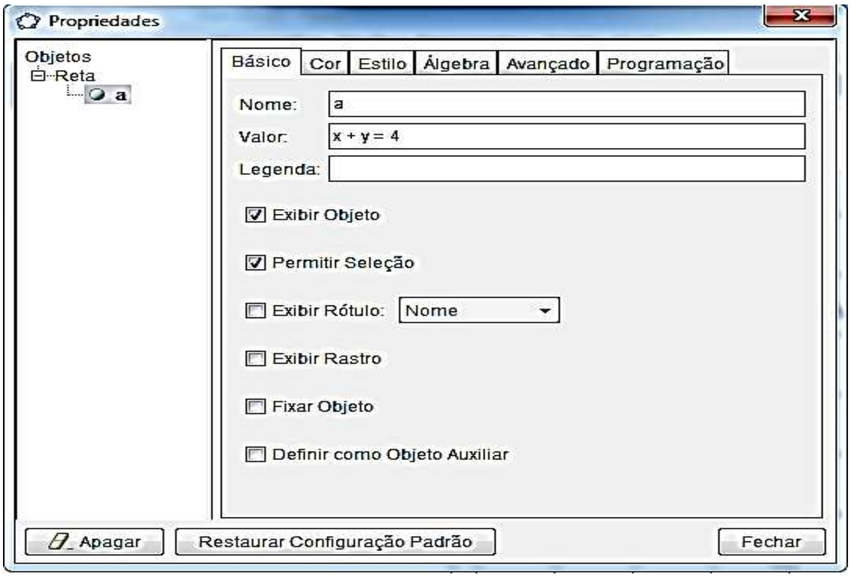


Nesse espaço você pode personalizar individualmente os eixos coordenados, suas unidades, cor de fundo e a distância entre as graduações. Ainda nesse espaço, você pode alterar cor e estilo das linhas.

• Na janela de entrada: digitar a seguinte equação: $x + y = 4$



Clicando duas vezes sobre a reta, você terá a janela abaixo:



Essa janela permite que você altere a cor da linha que apareceu no gráfico, sua espessura entre outras funções.

Feche a janela de propriedades.

• Em seguida clique em:

***editar – desfazer (Ctrl + z)**

O que aconteceu? ____

• Em seguida clique em:

***editar – refazer (Ctrl + y)**

O que aconteceu? ____

• Ir na pasta meus documentos e abrir uma pasta com seu nome.

• Vamos salvar a atividade realizada clicando em:

***arquivo – salvar – pasta com seu nome**

Salvar com o nome *atividade 01*

b) Barra de ferramentas

→ A barra de ferramentas apresenta ícones que, por sua vez, representa uma caixa de ferramentas que possibilita a criação de um conjunto de atividades.

• clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho;

• clicar em:

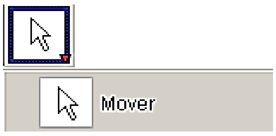
*** novo ponto**

→ E clique com o dentro da janela de visualização (perceba que cada ponto colocado está sendo registrado na janela algébrica com as coordenadas do tipo $(x\,,y)$.

→ Caso queira deletar algum ponto, basta clicar uma vez sobre as coordenadas desse ponto na janela algébrica e em seguida apertar **delete**.

→ Caso queira movimentar qualquer ponto colocado na janela de visualização, clique:

***mover**



→ Em seguida, clique com o mouse sobre o ponto e arraste-o para onde desejar.

• Se deseja mover a janela de visualização ou deslocar os eixos (x e y) dos gráficos, clique em:

***mover janela de visualização**

→ Perceba que essa ferramenta permite:

*deslocar eixos;

*ampliar ou reduzir o gráfico;

*entre outras funções.

• Esse tempo final de aula está disponível para que vocês possam explorar ainda mais o software e satisfazer sua curiosidade. O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao software.

____

____

____

____

____

____

____

____

2ª aula – Determinando soluções de equações de duas variáveis

Objetivos:

• utilizar o software Geogebra para construir retas por meio de equações;
• observar que uma equação de duas variáveis representa uma reta no plano cartesiano;
• determinar soluções de equações de duas variáveis;
• representar uma equação de duas variáveis e suas soluções por meio de registros diferentes;
• verificar a relação existente entre um par ordenado (solução de uma equação de duas variáveis) e a reta que representam essa equação;
• traçar uma reta por meio de dois pontos (usando o software);
• mostrar que uma equação de duas variáveis possui infinitas soluções.

Alunos (a): ____ Data: __/__/__

____

01 – Considere a equação $x + y = 6$.

• Escreva na janela de entrada (algébrica) a equação e verifique a figura formada na janela gráfica.

Qual figura formou?

____

Agora descubra dois números reais cuja soma seja 6 (conforme equação acima) e preencha a tabela.

x						
y						

• Usando o comando inserir novo ponto, coloque esses pontos na janela gráfica.
Qual a relação entre esses pontos e a figura formada pela equação?

____

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “2ª aula_seunome_1.

02 – Dada a equação $x - y = 4$, calcule o par ordenado que satisfaz a equação e complete a lacuna:

a) $(5, \_\_)$ d) $(\_\_, 4)$

b) $(3, \_\_)$ e) $(\_\_, 0)$

c) $(-1, \_\_)$ f) $(\_\_, 2)$

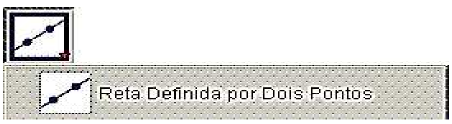
• Abrindo o software Geogebra, na janela da planilha de pontos, inserir na coluna A e B os pontos acima, sendo que a coluna A utilizada para a primeira coordenada e B para a segunda coordenada.

• Selecione a área na planilha onde foram colocados os valores que satisfazem a equação e clique com o botão direito do mouse, selecione a opção “criar lista de pontos”.

O que você observa sobre os pontos que apareceram?

____

• Com o mouse, selecione a função



.

Escolha dois pontos quaisquer da janela de visualização gráfica, clicando sobre eles.
O que é possível observar?

____

____

Olhando apenas a janela gráfica, você consegue identificar mais dois pontos (diferentes dos anteriores) que satisfazem a equação? Se sim, quais pontos?

____

____

Baseado no que verificamos nesta aula, quantas soluções podemos determinar para uma equação de duas variáveis?

____

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “2ª aula_seunome_2.

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

3ª aula – Verificando soluções de equações de duas variáveis

Objetivos:

• inserir pontos no plano cartesiano;
• construir retas (utilizando o Geogebra) no plano cartesiano;
• verificar os pontos que satisfazem uma equação através do Geogebra;
• determinar soluções de uma equação de duas variáveis usando o software;

• resolver problemas que devem ser modelados por equações;

• transitar entre diferentes registros para representar e resolver equações de duas variáveis.

Alunos (a): ____ **Data:** __/__/__

____

01 – Considere a equação $2x-3y=1$.

• Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação e verifique a figura formada na janela gráfica.

Qual figura formou?

____

Em seguida, insira os pontos abaixo no mesmo plano cartesiano utilizado acima:

$(5,1)$	$(5,3)$	$(5,-3)$
$(8,5)$	$(-4,-3)$	$\left(\frac{1}{2},0\right)$
$(-2,1)$	$\left(1,\frac{1}{3}\right)$	$(0,5)$

Quais dos pontos plotados acima satisfazem a equação?

____

____

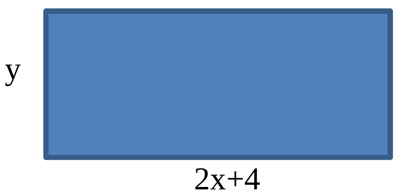
Como você consegue identificar os pontos que não satisfazem a equação?

____

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “3ª aula_seunome_1”.

02 – O perímetro do retângulo a seguir é 50 unidades de comprimento.



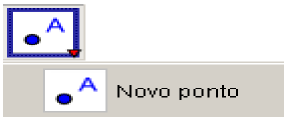
Qual equação que representa o perímetro dessa figura?

• Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação e verifique a figura formada na janela gráfica.

Qual figura formou?

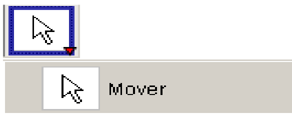
Com base na visualização gráfica, determine pelo menos dois pares ordenados[3] que satisfazem essa igualdade.

Coloque um ponto sobre a reta usando a função



.

Em seguida clique sobre o botão



e sobre o ponto novamente. Agora, mova o ponto sobre a reta.

Observe que os valores das coordenadas na janela de álgebra variam conforme o ponto se move.

Escolha três posições aleatórias desse ponto e escreva suas coordenadas no espaço abaixo:

O que você conclui sobre em relação a esses pontos?

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "3ª aula_seunome_2".

[3] O professor deve atentar-se ao fato de que esses pares ordenados devem ter coordenadas positivas, pois trata-se da solução de um problema de geometria. Caso necessário, o professor deve intervir para a compreensão do aluno.

03 – Utilizando o mesmo plano cartesiano:

a) Determine se o par ordenado $(4,-2)$ é uma solução correta para a equação $2x+3y=2$

( ) SIM ( ) NÃO

Como você chegou a essa conclusão?

____

____

b) Verifique se o par ordenado $(3,1)$ é uma solução correta para a equação $4x-y=12$

( ) SIM ( ) NÃO

Como você chegou a essa conclusão?

____

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "3ª aula_seunome_3".

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

____

____

4ª aula – Resolvendo sistemas de equações de duas variáveis por meio de problemas

Objetivos:

• representar situações problemas por meio de equações de duas variáveis;

• determinar soluções para problemas de equações usando o software Geogebra;

• introduzir sistemas lineares de duas equações e duas variáveis por meio de problemas;

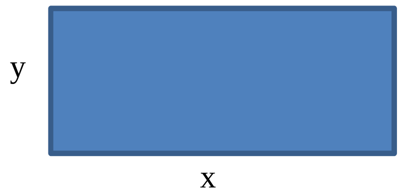
• resolver problemas matemáticos através de sistemas de equações;

• relacionar a solução de um sistema de equações de duas variáveis e o ponto de intersecção das retas formadas por essas equações.

Alunos (a): ____ **Data: __/__/__**

____

01 – Observe o retângulo abaixo:



c) Sabendo que o perímetro do retângulo abaixo vale 10 unidades de comprimento, monte uma equação que represente essa situação.

____

Executando o software Geogebra na área de trabalho, escreva na janela de entrada (algébrica) a equação acima.

Em seguida, verifique dois pontos que satisfazem essa equação e escreva-os abaixo.

____

d) Sabe-se ainda que a diferença entre seu **comprimento x** e sua **largura y** é de 1 unidade de comprimento. Escreva abaixo a equação que representa essa situação.

____

Na mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, escreva a equação acima.

No espaço destinado abaixo, escreva dois pontos que satisfazem a equação acima.

____

Você consegue verificar algum ponto que satisfaça simultaneamente as duas equações? Quantos pontos? Qual (is)?

____

Qual a relação existente entre o (s) ponto (s) acima e as retas que representam as equações?

____

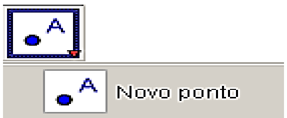
As retas construídas por meio das equações se cruzam? Em qual (is) ponto (s)?

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “4ª aula_seunome_1”.

02 – Numa garagem há **x motos** e **y carros** estacionados num total de 7 veículos e 20 rodas (desconsidere o estepe do carro).

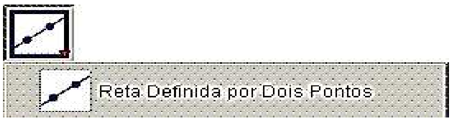
c) Considerando apenas o total de veículos, escreva abaixo a quantidade de motos e carros que pode haver na garagem.
   OBS: Escreva 3 pares do tipo (x, y).

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, use a função



para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função



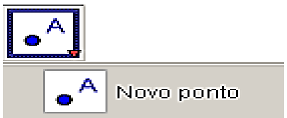
, escolha dois pontos aleatórios e construa a reta que passa por esses pontos.

Pensando apenas na quantidade de veículos **(x motos e y carros)** existentes na garagem, monte uma equação que represente essa situação.

Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

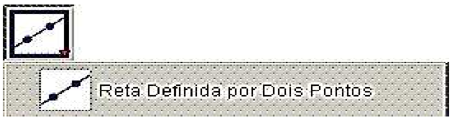
d) Agora considere apenas o total de rodas existentes. Escreva abaixo a quantidade de motos e carros que pode haver na garagem.
   OBS: Escreva 5 pares do tipo (x, y).

Usando a mesma janela (aberta anteriormente) do Geogebra, use a função



para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função



, escolha dois pontos aleatórios e construa a reta que passa por esses pontos.

Pensando apenas na totalidade de rodas existentes na garagem, escreva uma equação que represente essa situação para x motos e y carros.

____

Qual a relação existente entre a equação montada e os pontos colocados no plano cartesiano?

____

Agora observe as duas equações que você escreveu e os pontos que satisfazem cada uma delas isoladamente.

Existe algum ponto que satisfaça as duas simultaneamente? Qual?

____

Qual a relação entre esse ponto e as duas retas construídas?

____

As duas retas se cruzam? Em que qual (is) ponto (s)?

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “4ª aula_seunome_2”.

• Mande os dois arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

5ª aula – Resolvendo sistemas de equações de duas variáveis

Objetivos:

• determinar soluções para equações do 1º grau com duas variáveis;

• usar ferramentas (inserção de pontos, retas definidas por dois pontos) do Geogebra para representar retas (mudança de registro da equação na forma algébrica) no plano;

• encontrar a solução de um sistema linear de duas equações e duas variáveis;

• fixar o objeto matemático sistemas de equações lineares de duas equações e duas variáveis.

Alunos (a): ____ Data: __/__/__

____

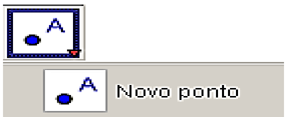
01 – Considere as duas equações abaixo:

$x + y = 15$ e $x - y = 9$.

a) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam soluções da primeira equação $(x + y = 15)$

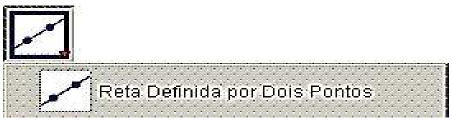
____

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, use a função



para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função

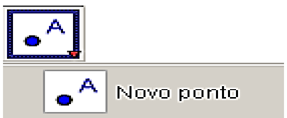


, construa a reta que passa por esses pontos.

b) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam soluções da segunda equação $(x - y = 9)$

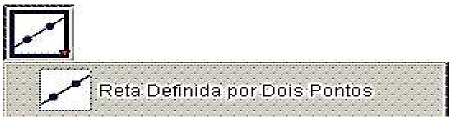
____

Abrindo o software Geogebra na área de trabalho, use a função



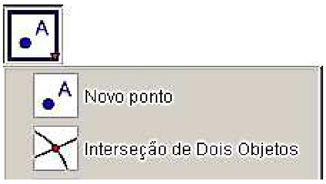
para inserir os pontos acima (formados pelos pares que você criou).

Usando a função



, construa a reta que passa por esses pontos.

Observe agora as retas construídas. Determine o ponto onde as retas se interceptam usando a função



$(\_\_ , \_\_)$

Substituindo o ponto acima nas duas equações, você pode verificar que este satisfaz a igualdade em ambas as equações.

Dizemos então que o ponto $(\_\_ , \_\_)$ é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 9 \end{cases}$.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "5ª aula_seunome_1".

02 – Por meio da solução geométrica (construção das retas), determine a solução do sistema abaixo:

$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$ $(\_\_ , \_\_)$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "5ª aula_seunome_2".

03 – Determine a solução do sistema de equações:

$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$ $(\_\_ , \_\_)$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "5ª aula_seunome_3".

04 – Determine a solução do sistema de equações:

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $(\_\_ , \_\_)$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "5ª aula_seunome_4".

Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e as retas construídas em cada equação?

____
____
____
____

• Mande os dois arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____
____
____
____
____
____

6ª aula – Utilizando sistemas de equações para resolver problemas

Objetivos:

• variar registros matemáticos, convertendo problemas da linguagem natural para linguagem algébrica;

• resolver problemas utilizando sistemas lineares de duas equações e duas variáveis;

• determinar soluções de sistemas lineares de duas equações e duas variáveis por meio do software geogebra;

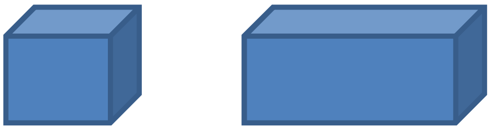
• fixar conteúdos anteriormente trabalhados;

• verificar, por meio de exercícios, a eficácia do método de trabalho, buscando analisar os acertos e erros dos alunos e justificá-los.

Alunos (a): ____ Data: __/__/__

____

01 – Aqui temos duas caixas e cada uma possui um peso diferente. Sabe-se que, se colocadas juntas numa balança, o peso será de 25 kg. Mas, se colocarmos 5 caixas pequenas e mais duas caixas grandes, teremos 74 kg. Quanto pesa cada caixa?



Caixa pequena: _________

Caixa grande: _________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “6ª aula_seunome_1”.

02 – Leonardo comprou uma caneta e um lápis e gastou R$ 8,00. Comprando quatro canetas e três lápis irá gastar R$ 29,00. Qual o preço de cada caneta e de cada lápis?

Caneta: _________ Lápis: _________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “6ª aula_seunome_2”.

03 – A soma de dois números é 5 e a diferença entre o maior e o menor é 1. Quais são esses números?

Maior: _________

Menor: _________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “6ª aula_seunome_3”.

04 – Aqui temos dois tipos de pinguins: espécie A e espécie B.

Espécie A

Espécie B

Por causa das circunstâncias climáticas, muitos pinguins se perderam do bando.

No ano passado foram encontrados na costa brasileira 32 pinguins dessas duas espécies. Da espécie A foram encontrados 14 a mais que da espécie B. Quantos pinguins de cada espécie foram encontrados?

Espécie A: _________

Espécie B: _________

Sugestão: Escreva um sistema de equações que represente essa situação. Em seguida, insira as duas equações no Geogebra, verificando sua solução.

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "6ª aula_seunome_4".

• Mande os quatro arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

7ª aula – Mas sempre existe um ponto de intersecção entre duas retas?

Objetivos:

• determinar soluções para equações de duas variáveis por meio do processo geométrico;

• verificar se todo sistema linear de duas equações e duas variáveis possui solução;

• discutir a formação de retas paralelas no plano cartesiano e sua relação com a impossibilidade de resolver o sistema formado pelas equações representadas por estas retas;

• relacionar o processo geométrico da ausência de solução de um sistema de duas equações e duas variáveis e a forma algébrica dessas equações;

• formar, a partir de uma equação, sistemas lineares de duas equações e duas variáveis que não possuem soluções.

Alunos (a): ____ **Data:** __/__/__

____

01 – Observe as duas equações que formam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Usando o software Geogebra, construa as retas que são determinadas por meio dessas equações e responda as questões abaixo:

a) Determine dois pares ordenados (x, y) que seja solução da 1ª equação $(x + y = 5)$.

____

b) Determine dois pares ordenados (x, y) que seja solução da 2ª equação $(x + y = 6)$.

____

c) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual?

____

d) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como essas retas são classificadas?

____

e) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “7ª aula_seunome_1”.

02 – Observe a equação $x + y = 3$.

a) Usando o software Geogebra, construa a reta que é determinada por meio dessa equação. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa equação?

____

Em seguida multiplique o 1º membro (lado esquerdo da igualdade) da equação por 2 e o 2º membro (lado direito da igualdade) por 3.
Qual equação você obteve?

____

b) Usando o software Geogebra (mesmo arquivo da equação anterior), construa a reta que é determinada por meio dessa nova equação que você obteve. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa nova equação?

____

c) Agora escrevendo um sistema com as duas equações anteriores, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

d) Existe solução para esse sistema de equações? Se sim, qual?

____

e) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como são classificadas?

____

f) O que você pode falar sobre a solução desse sistema?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “7ª aula_seunome_2”.

03 – Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “7ª aula_seunome_3”.

04 – Apenas preencha as lacunas para que os sistemas de equações abaixo não tenham solução:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = \_\_\_ \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ \_\_\_\_\_\_\_ = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y = \_\_\_ \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

____

____

8ª aula – E se as retas forem as mesmas?

Objetivos:

• determinar soluções para equações de duas variáveis por meio do processo geométrico;

• discutir a construção de retas coincidentes no plano cartesiano e sua relação com a quantidade de soluções que pode ser encontrada para um sistema formado pelas equações que determinam essas retas;

• estabelecer relações entre a linguagem algébrica de equações equivalentes e sua representação no plano cartesiano;

• construir sistemas lineares de duas equações e duas variáveis que possuem infinitas soluções.

Alunos (a): _______________________________________ **Data: __/__/__**

____

01 – Observe as duas equações que formam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Usando o software Geogebra, construa as retas que são determinadas por meio dessas equações e responda as questões abaixo:

a) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam solução da 1ª equação $(x + y = 3)$.

____

b) Determine dois pares ordenados (x, y) que sejam solução da 2ª equação $(3x + 3y = 9)$.

____

c) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, quantos e qual (is)?

____

d) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Como essas retas são classificadas?

____

e) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome "8ª aula_seunome_1".

03 – Observe a equação $x + y = 4$.

a) Usando o software geogebra, construa a reta que é determinada por meio dessa equação. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa equação?

____

Em seguida multiplique os dois membros (todos os termos) da equação por 2.
Qual equação você obteve?

____

b) Usando o software Geogebra (mesmo arquivo da equação anterior), construa a reta que é determinada por meio dessa nova equação que você obteve. Quantas soluções do tipo (x, y) podemos encontrar para essa nova equação?

____

c) Agora montando um sistema com as duas equações anteriores, temos:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

d) Existe solução para esse sistema de equações? Se sim, quantas e qual (is)? Dê ao menos dois pares que sejam soluções dessas equações.

____

e) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Como são classificadas essas retas?

____

f) O que você pode falar sobre a solução desse sistema?

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “8ª aula_seunome_2”.

03 – Determine a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

____

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “8ª aula_seunome_3”.

04 – Apenas preencha as lacunas para que os sistemas de equações abaixo não tenham solução:

a) $$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = \_\_\_ \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 1 \\ 5x + 10y = 2 \end{cases}$

• Mande os três arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

9ª aula – Resolvendo problemas e sistema de equações

Objetivos:

• utilizar o software Geogebra para solucionar problemas modelados por sistemas de duas equações e duas variáveis;

• variar os registros e representações dos problemas matemáticos;

• resolver sistemas lineares de duas equações e duas variáveis variando registros de representações entre linguagem natural, algébrica e gráfica.

Alunos (a): ____ **Data: __/__/__**

____

Resolva os problemas abaixo utilizando o software Geogebra:

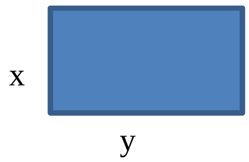
01 – Carlos e Joana tem juntos 12 anos. O dobro da idade de Carlos adicionado ao dobro da idade de Joana resulta em 24 anos. Quantos anos tem cada pessoa?

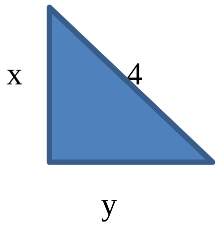
Carlos: ________________

Joana: ________________

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_1”.

02 – O perímetro do retângulo abaixo é de 18 cm e o perímetro do triângulo abaixo é de 12 cm. Determine o valor de **x** e de **y**.





x: ______   e   y: ______

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_2”.

03 – Existem 18 pessoas, entre homens e mulheres, assistindo uma palestra sobre hábitos alimentares. Cada homem pagou R$ 20,00 e cada mulher pagou R$ 10,00 para assistir a esta palestra. Ao todo foram arrecadados R$ 280,00. Quantos homens e quantas mulheres tinham nesse evento?

Homens: _______

Mulheres: _______

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_3”.

Resolva os sistemas abaixo:

$$04 - \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad (\_\_,\_\_)$$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_4”.

$$05 - \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \qquad (\_\_,\_\_)$$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_5”.

$$06 - \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases} \qquad (\_\_,\_\_)$$

• Salve esse arquivo na área de trabalho com o nome “9ª aula_seunome_6”.

• Mande os seis arquivos produzidos na aula de hoje por e-mail para o professor.

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

____

____

____

____

____

10ª aula – Classificando sistemas

Objetivos:

• avaliar a sequência aplicada nas nove aulas anteriores;

• apresentar a classificação de sistemas de duas equações e duas variáveis;

• classificar sistemas de suas equações e duas variáveis sem resolvê-los algébrica ou geometricamente;

• verificar as posições relativas das retas formadas pelas equações de duas variáveis sem a utilização do Geogebra;

• determinar a quantidade de soluções de um sistema de duas equações e duas variáveis;

Alunos (a): ____ **Data: __/__/__**

____

Os sistemas de equações do 1º grau que estudamos até então podem ser classificados quando ao tipo de sua solução:

03 **SPD (Sistema possível e determinado) – se possuir apenas uma solução;**

04 **SPI (Sistema possível e indeterminado) – se possuir infinitas soluções;**

05 **SI (Sistema impossível) – se não possuir solução;**

Utilizando as discussões realizadas ao longo dessas 10 aulas, classifique os sistemas sem usar a ferramenta computacional, justificando sua classificação:

a) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=6 \\ 3x+3y=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 6x+9y=30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 4x+12y=10 \end{cases}$

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.