

**ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA COM NÃO-LINEARIDADE  
GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE  
ELEMENTOS HEXAÉDRICOS TRI-LINEARES  
COM UM PONTO DE INTEGRAÇÃO**

**Dilnei Schmidt**

Porto Alegre

2006

**DILNEI SCHMIDT**

**ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA COM NÃO-LINEARIDADE  
GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE  
ELEMENTOS HEXAÉDRICOS TRI-LINEARES  
COM UM PONTO DE INTEGRAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico.

Porto Alegre  
Novembro de 2006

**DILNEI SCHMIDT**

**ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA COM NÃO-LINEARIDADE  
GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE  
ELEMENTOS HEXAÉDRICOS TRI-LINEARES  
COM UM PONTO DE INTEGRAÇÃO**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 01 de novembro de 2006.

**Prof. Armando Miguel Awruch**

DSc. pela COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Orientador

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch**

DSc. pelo PPGEC/Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Co-Orientador

**Prof. Fernando Schnaid**

Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Profa. Denise Bernaud Maghous**

DSc. pela ENPC/ Ecole Nationale Des Ponts Chaussees

**Prof. Eduardo Bittencourt**

DSc. pelo PPGEC/Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Herbert Martins Gomes**

DSc. pelo PPGEC/Universidade Federal do Rio Grande do Sul

S349a Schmidt, Dilnei

Análise elastoplástica com não-linearidade geométrica de estruturas através de elementos hexaédricos tri-lineares com um ponto de integração / Dilnei Schmidt. – 2006.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2006.

Orientador : Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Co-orientador : Prof. Dr. Inácio Benvegno Morsch

1. Elementos finitos. 2. Métodos numéricos. 3. Estruturas. I. Awruch, Armando Miguel, orient. II. Morsch, Inácio Benvegno, co-orient. III. Título.

CDU-624.04(043)

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Armando Miguel Awruch, orientador deste trabalho, pela confiança depositada, pelas longas horas dedicadas a este trabalho, pelo apoio e paciência durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. Inácio Benvegnu Morsch, co-orientador deste trabalho, pelas sugestões para enriquecimento do trabalho, pelo tempo dispendido com as correções.

Aos colegas da turma de 2004, pela agradável convivência ao longo destes anos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, pela oportunidade para realização deste trabalho.

A minha família e à Rosiane, por terem sempre me apoiado e me incentivado.

## RESUMO

SCHMIDT, D. **Análise Elastoplástica com Não-Linearidade Geométrica de Estruturas Através de Elementos Hexaédricos Tri-Lineares com Um Ponto de Integração**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

As principais motivações para este trabalho são a formulação e aplicação de um algoritmo computacional para análise elastoplástica estática de estruturas, incluindo deslocamentos e rotações finitas. Um elemento finito isoparamétrico hexaédrico com oito nós e um ponto de integração é utilizado. São apresentados mecanismos para evitar os modos espúrios assim como travamento volumétrico e de cisalhamento. É empregada uma formulação co-rotacional para tratar da não-linearidade geométrica, enquanto que um algoritmo explícito (baseado no método de Euler) é implementado para a análise elastoplástica. Os critérios de escoamento aplicados incluem tanto o modelo de Mohr-Coulomb como o de von Mises com encruamento isotrópico. São apresentados exemplos numéricos com comportamento altamente não-linear para demonstrar a aplicabilidade da formulação.

## ABSTRACT

SCHMIDT, D. **Análise Elastoplástica com Não-Linearidade Geométrica de Estruturas Através de Elementos Hexaédricos Tri-Lineares com Um Ponto de Integração**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The main purposes of this work are the formulation and application of a computational algorithm for the elastoplastic static analysis of structures, including finite displacements and rotations. An hexahedral isoparametric finite element with eight nodes and one-point quadrature is used. Mechanisms to avoid hourglass modes as well as volumetric and shear locking are introduced. A corotational formulation is employed to deal with the geometrically nonlinear analysis, whereas an explicit algorithm (based in Euler's scheme) is implemented for the elastoplastic analysis. The applied constitutive models include the Mohr-Coulomb as well as the von Mises yield criterion with isotropic hardening. Numerical examples with highly nonlinear behavior are presented to demonstrate the range of applicability of the formulation.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 GENERALIDADES .....	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	2
1.3 OBJETIVOS .....	4
<b>2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO EMPREGADO .....</b>	<b>5</b>
2.1 O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (ANÁLISE LINEAR).....	5
2.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO HEXAÉDRICO DE 8 NÓS .....	6
2.3 CONTROLE DOS MODOS ESPÚRIOS .....	7
2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ESTABILIZAÇÃO.....	11
2.5 A MATRIZ DE ESTABILIZAÇÃO “E” .....	14
2.6 A MATRIZ DE ROTAÇÃO .....	15
<b>3. ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA .....</b>	<b>16</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	16
3.2 ABORDAGEM CO-ROTACIONAL .....	17
3.3 INCREMENTO DE DEFORMAÇÕES E TENSÕES CO-ROTACIONAIS	18
3.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	21
3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE E VETOR DE FORÇAS INTERNAS..	24
.....	24
3.6 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES .	24
<b>4. ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA .....</b>	<b>29</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	29
4.2 CONCEITOS BÁSICOS .....	29
4.3 COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO UNIDIMENSIONAL. ....	31
4.3.1 <i>Comportamento elastoplástico perfeito</i> .....	31
4.3.2 <i>Comportamento elastoplástico com encruamento</i> .....	33
4.4 CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO .....	35
4.4.1 <i>Critério de plastificação de Von Mises</i> .....	35
4.4.2 <i>Critério de plastificação de Mohr-Coulomb</i> .....	37
4.4.3 <i>Crítérios de plastificação para aplicações computacionais</i> .....	39
4.5 ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS.....	40



4.6	INTEGRAÇÃO DAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTOPLÁSTICAS .....	42
4.7	MÉTODO DE INTEGRAÇÃO EXPLÍCITO .....	42
4.7.1	<i>Intersecção com a Superfície de Escoamento</i> .....	43
4.7.2	<i>Descarregamento elastoplástico</i> .....	45
4.7.3	<i>Correção das tensões para a superfície de escoamento</i> .....	47
4.7.4	<i>Método de Euler modificado</i> .....	49
<b>5.</b>	<b>APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>54</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	54
5.2	APLICAÇÕES COM O CRITÉRIO DE VON MISES .....	54
5.2.1	<i>Cubo sob tração</i> .....	54
5.2.2	<i>Viga elastoplástica engastada</i> .....	56
5.2.3	<i>Placa em balanço com carga no extremo</i> .....	63
5.2.4	<i>Placa quadrada sujeita à carga concentrada</i> .....	66
5.2.5	<i>Casca cilíndrica com bordos livres</i> .....	68
5.3	APLICAÇÕES COM O CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB .....	70
5.3.1	<i>Estabilidade de taludes com modelo de Mohr-Coulomb</i> .....	70
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....</b>	<b>74</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	sub-índice variando de 1 a 8, correspondente ao nó do elemento
$\mathbf{a}$	vetor de fluxo
$\mathbf{B}$	matriz gradiente (matriz deformação-deslocamento)
$\mathbf{B}_a(\mathbf{0})$	sub-matriz gradiente avaliada no ponto central do elemento
$\tilde{\mathbf{B}}_a(\mathbf{0})$	sub-matriz gradiente formada por vetores gradientes uniformes
$\bar{\mathbf{B}}$	matriz gradiente
$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{0})$	matriz gradiente correspondente à parte dilatacional (esférica) do vetor de deformações, avaliada no ponto central
$\hat{\mathbf{B}}(\xi, \zeta, \eta)$	matriz gradiente correspondente à parte desviadora do vetor de deformações
$\tilde{\mathbf{b}}_i$	vetores gradientes uniforme ( $i=1,2,3$ )
$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$	vetores gradientes no ponto central
$\mathbf{b}$	vetor de forças de volume
$c$	coesão
$\mathbf{C}$	matriz constitutiva
$\mathbf{C}_e$	matriz constitutiva elástica
$\mathbf{C}_{ep}$	matriz constitutiva elastoplástica
C3D8I	elemento hexaédrico com 8 nós com modos de flexão extra
C3D8R	elemento hexaédrico com 8 nós e integração reduzida
$\mathbf{D}$	matriz que contém a inversa de $\mathbf{J}(\mathbf{0})$ ; matriz com termos da diagonal da matriz de rigidez
$\hat{\mathbf{d}}$	taxa de deformação ou velocidade de deformação
$\det \mathbf{J}$	determinante da matriz Jacobiana
$E$	módulo de elasticidade longitudinal do material
$\mathbf{E}$	matriz de estabilização
$E_T$	módulo de elasticidade tangente
$f$	função de plastificação
$\mathbf{f}^c$	vetor de forças internas avaliado apenas no ponto central do elemento
$\mathbf{f}^{hg}$	vetor de forças de estabilização
$\mathbf{f}^{int}$	vetor de forças internas
$\hat{\mathbf{f}}$	vetor de forças internas no sistema co-rotacional

$H$	módulo plástico de encruamento
GSP	parâmetro de rigidez do MCDG ( <i>General Stiffness Parameter</i> )
$\mathbf{h}_\alpha$	vetores que contém as coordenadas dos modos espúrios
$i$	sub-índice que denota o eixo coordenado global, variando de 1 a 3
$I_1$	primeiro invariante do tensor de tensões
$J_0$	determinante da matriz Jacobiana
$J_2$	segundo invariante do tensor desviador
$J_3$	terceiro invariante do tensor desviador
$\mathbf{J}(\mathbf{0})$	matriz Jacobiana calculada no ponto central do elemento
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$\mathbf{K}^c$	matriz de rigidez avaliada apenas no ponto central do elemento
$\mathbf{K}^{\text{stab}}$	matriz de rigidez de estabilização dos modos espúrios
$\hat{\mathbf{K}}$	matriz de rigidez no sistema co-rotacional
$\mathbf{L}$	gradiente espacial de velocidade
$\mathbf{N}$	funções de interpolação
$N_a$	a-ésima função de forma do elemento
$\mathbf{P}$	vetor de cargas externas
$\hat{\mathbf{p}}$	vetor de cargas externas no sistema co-rotacional
$\bar{\mathbf{p}}$	vetor de cargas aplicadas sobre superfície
$\mathbf{R}$	matriz de rotação para o sistema co-rotacional
$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_c$	vetores auxiliares para montagem da matriz de rotação $\mathbf{R}$
$R_{1i}, R_{2i}, R_{3i}$	termos da matriz de rotação $\mathbf{R}$
$S$	contorno do domínio $V$
$\mathbf{s}$	vetor de forças desequilibradas
$\mathbf{s}_{ij}$	tensor desviador
$\hat{\mathbf{s}}$	vetor de forças desequilibradas no sistema co-rotacional
$t$	super-índice que indica transposição; variável temporal
$u_{ia}$	deslocamento do nó $a$ do elemento
$u_i$	componente de $\mathbf{u}$ na direção $x_i$
$\mathbf{U}$	vetor de deslocamentos nodais
$V$	volume do elemento
$x_i$	eixo na direção $i$ do sistema de referência global; coordenada na direção $i$
$x_{ia}$	coordenada na direção $i$ do nó $a$ do elemento

$\hat{\mathbf{x}}$	coordenadas dos nós do elemento no sistema co-rotacional
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	vetor que contém as coordenadas globais do elemento
$x, y, z$	eixos coordenados globais
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	eixos coordenados co-rotacionais
$\mathbf{W}_e^{\text{int}}$	trabalho virtual interno do elemento
$\alpha$	sub-índice variando de 1 a 4, correspondente a um padrão de modos espúrios; proporção entre deformações elásticas e plásticas
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$	vetor com as componentes do tensor de deformações virtuais devido a $\delta\mathbf{u}$
$\delta\mathbf{u}$	vetor que contém as componentes de deslocamento virtual em um ponto qualquer do elemento “e”
$\Delta t$	intervalo de tempo
$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	incremento de deformação no sistema co-rotacional
$\Delta\mathbf{u}$	incremento de deslocamento no sistema global
$\Delta\hat{\mathbf{u}}$	Incremento de deslocamento no sistema co-rotacional
$\Delta\hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}$	parcela de deformação do incremento de deslocamento no sistema co-rotacional
$\Delta\hat{\mathbf{u}}^{\text{rot}}$	parcela de rotação do incremento de deslocamento no sistema co-rotacional
$\Delta\mathbf{u}^{\text{def}}$	parcela de deformação do incremento de deslocamento no sistema global
$\Delta\mathbf{u}^{\text{rot}}$	parcela de rotação do incremento de deslocamento no sistema global
$\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	incremento de tensão no sistema co-rotacional
$\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$	incremento de tensões elásticas teste
$\Delta\lambda$	incremento no fator de carga no MCDG
$\boldsymbol{\varepsilon}$	deformação interpolada no elemento
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	parcela de deformação elástica
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	parcela de deformação plástica
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vetor com as componentes do tensor de deformações
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	taxa de deformação ou velocidade de deformação
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	deformação no sistema co-rotacional
$\xi, \eta, \zeta$	eixos coordenados referenciais
$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$	vetor que contém as coordenadas naturais do elemento

$\xi_a, \eta_a, \zeta_a$	coordenadas referenciais do nó $a$
$\phi$	ângulo de atrito interno do material
$\gamma$	vetor de estabilização
$\kappa$	parâmetro de encruamento
$\dot{\kappa}$	taxa do parâmetro de encruamento
$\lambda$	fator de carga no MCDG
$\mu$	coeficiente de Lamè
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\Omega$	domínio em estudo
$\hat{\omega}$	tensor velocidade de rotação ou <i>spin</i>
$\rho$	massa específica
$\nabla^{\text{TR}}$	tensor taxa de tensões de Truesdell
$\sigma$	
$\nabla^{\text{L}}$	tensor taxa de tensões de Lie
$\sigma$	vetor com as componentes do tensor de tensões do elemento
$\sigma_e$	estado de tensões elásticas teste
$\sigma_{ij}$	tensor de tensões
$\sigma_{\text{int}}$	estado de tensão na interseção com a superfície de escoamento
$\sigma_y$	tensão de escoamento virgem do material
$\hat{\sigma}$	vetor de tensões no sistema co-rotacional

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Elemento hexaédrico de 8 nós .....	6
FIGURA 2.2 – Modos espúrios em 3D. (a) seis modos de flexão; (b) três modos de torção; (c) três modos não-físicos .....	8
FIGURA 3.1 – Configurações no tempo $t = t_n$ , $t = t_{n+1/2}$ e $t = t_{n+1}$ .....	19
FIGURA 3.2 – Decomposição do incremento de deslocamento .....	20
FIGURA 3.3 – Características de um sistema não-linear .....	25
FIGURA 3.4 – Sinal do co-seno entre vetores tangentes de incrementos consecutivos .....	27
FIGURA 4.1 – Relação constitutiva elastoplástica perfeita .....	30
FIGURA 4.2 – Relação constitutiva elastoplástica com encruamento .....	30
FIGURA 4.3 – Comportamento elastoplástico perfeito .....	32
FIGURA 4.4 – Encruamento isotrópico linear .....	33
FIGURA 4.5 – Representação geométrica da superfície de von Mises no espaço das tensões principais .....	36
FIGURA 4.6 – Representação do critério de Von Mises .....	37
FIGURA 4.7 – Critério de Mohr-Coulomb .....	38
FIGURA 4.8 – Representação da superfície de plastificação de Mohr-Coulomb .....	39
FIGURA 4.9 – Intersecção com a superfície de escoamento: transição de estado elástico para o plástico .....	44
FIGURA 4.10 – Intersecção com a superfície de escoamento: descarregamento elastoplástico .....	45
FIGURA 4.11 – Valores iniciais para a intersecção com a superfície de escoamento: descarregamento elastoplástico.....	46
FIGURA 5.1 – Cubo sob tração .....	55
FIGURA 5.2 – Carga vs deslocamento .....	55
FIGURA 5.3 – Geometria da viga engastada .....	56
FIGURA 5.4 – Carga vs deslocamento: sensibilidade .....	57
FIGURA 5.5 – Distribuição de tensões obtidas pelo ABAQUS .....	58
FIGURA 5.6 – Distribuição de tensões obtidas pelo GiD .....	58
FIGURA 5.7 – Tensões na fibra superior ao longo da viga .....	59
FIGURA 5.8 – Geometria inicial e malha deformada .....	60

FIGURA 5.9 – Deslocamentos na superfície média da viga .....	60
FIGURA 5.10 – Deformação plástica equivalente na fibra superior .....	61
FIGURA 5.12 – Deslocamento comparativo entre malhas .....	62
FIGURA 5.13 – Deslocamento comparativo entre matrizes de estabilização .....	63
FIGURA 5.14 – Geometria inicial e malha deformada .....	63
FIGURA 5.15 – Carga vs deslocamento no ponto de aplicação da carga .....	64
FIGURA 5.16 – Tensão nos elementos da face superior .....	65
FIGURA 5.17 – Deformação plástica equivalente na fibra superior .....	65
FIGURA 5.18 – Placa quadrada sujeita à carga concentrada .....	66
FIGURA 5.19 – Caso (a): carga concentrada vs deflexão central .....	67
FIGURA 5.20 – Caso (b): carga concentrada vs deslocamento central .....	67
FIGURA 5.21 – Alongamento da casca cilíndrica .....	68
FIGURA 5.22 – Carga aplicada vs deslocamentos .....	69
FIGURA 5.23 – Malha deformada para a carga de 40 kN .....	69
FIGURA 5.24 – Distribuição da deformação plástica equivalente .....	70
FIGURA 5.25 – Geometria e propriedades do material .....	71
FIGURA 5.26 – Deslocamento máximo vs fator de segurança .....	72
FIGURA 5.27 – Deslocamentos normalizados .....	72
FIGURA 5.28 – Deformação plástica equivalente .....	73

## ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 3.1 – Algoritmo de solução das equações não-lineares (Duarte Filho, 2002).....	28
TABELA 4.1 – Constantes definindo a superfície de plastificação.....	40
TABELA 4.2 – Parâmetros de controle da solução.....	53
TABELA 5.1 – Parâmetros de controle para análise da sensibilidade.....	56
TABELA A.1 – Algoritmo para encontrar a intersecção com a superfície de escoamento (Pegasus).....	75
TABELA A.2 – Algoritmo para encontrar a intersecção com a superfície de escoamento no caso de descarregamento elastoplástico (Pegasus-unloading).....	76
TABELA A.3 – Algoritmo do método de Euler modificado .....	52
TABELA A.4 – Algoritmo do método de Euler modificado .....	57



# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

Elementos finitos 3D de baixa ordem de integração têm provado sua robustez e eficiência em muitos problemas da mecânica dos sólidos. Entretanto, apresentam travamento volumétrico (*volumetric locking*) para materiais incompressíveis, ou aproximadamente incompressíveis, e travamento de cisalhamento (*shear locking*) em estruturas onde o esforço de flexão é dominante (placas e cascas) caso nenhum procedimento especial do elemento for implementada para superar esta deficiência.

Entre as idéias para eliminar o travamento de cisalhamento pode-se destacar o uso de integração reduzida (IR). Entretanto, os resultados obtidos através destes elementos podem ser insatisfatórios ou sem significado físico, quando modos espúrios (hourglass) são excitados. Estes modos correspondem a deformações não constantes no interior do elemento e são conhecidos como instabilidades de malha, modos cinemáticos ou modos de energia nula, os quais conduzem à singularidade da matriz de rigidez global. Desta forma, o uso de elementos com integração reduzida requer um eficiente esquema de estabilização numérica para suprimir tais modos espúrios.

Elementos finitos de baixa ordem, com IR e estabilização dos modos espúrios são especialmente atrativos devido a sua eficiência computacional. A eficiência numérica alcançada por se trabalhar com um número menor de pontos de Gauss é, em particular, notada quando o custo numérico de uma análise por elementos finitos está fortemente ligado ao esforço numérico a nível de elemento. Este é, por exemplo, o caso quando algoritmos explícitos são executados. Também servem de exemplo códigos de elementos finitos baseados em relações constitutivas altamente complexas.

Na análise não-linear física por elementos finitos é necessário integrar as relações constitutivas para se obter os incrementos de tensão. Essas relações definem um conjunto de equações diferenciais ordinárias e os métodos para integrá-las são usualmente classificados como explícitos ou implícitos. Por serem mais diretos de se implementar, uma vez que utilizam as relações constitutivas padrão e necessitam apenas a primeira derivada da função de escoamento e potencial plástico, será utilizado no presente trabalho, um procedimento explícito para a integração das relações constitutivas.

Tais métodos são melhor empregados em conjunto com uma correção para restaurar as tensões para a superfície de escoamento durante o processo de integração. Ao contrário dos métodos implícitos, nos métodos explícitos é necessário encontrar o ponto de escoamento intermediário caso as tensões passem de um estado elástico para um estado plástico.

Neste trabalho será utilizado um elemento finito hexaédrico linear, com 1 ponto de integração com estabilização dos modos espúrios para a análise não-linear de estruturas. No decorrer do trabalho, serão apresentadas as teorias referentes ao elemento utilizado e às análises não-linear geométrica e física.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Liu *et al.* (1994) desenvolveu uma formulação utilizando 4 pontos de integração para o hexaedro de 8 nós. Este método não requer parâmetros definidos pelo usuário e a matriz  $\mathbf{B}$ , a qual independe do material, é dada de forma explícita. Para evitar o travamento de cisalhamento, o vetor de deformações generalizado é desenvolvido em um sistema co-rotacional e certos termos não constantes nas componentes de deformação de cisalhamento são omitidos. O travamento volumétrico é resolvido fazendo-se com que a parte dilatacional (esférica) da matriz gradiente seja sub-integrada e avaliada apenas no ponto central do elemento  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Justifica-se o emprego de 4 pontos de integração para melhorar a precisão com relação aos elementos, que adotam apenas um ponto de integração e para poder capturar frentes plásticas na malha durante carga e descarga na análise elastoplástica. Por outro lado, a vantagem computacional é parcialmente perdida. Demonstra-se que estes elementos fornecem bons resultados em cascas finas fletidas.

Recentemente, Hu e Nagy (1997) propuseram um elemento hexaédrico com um ponto de integração baseado na formulação de Liu *et al.* (1994). Os vetores de deformações e tensões são primeiramente expandidos em uma série de Taylor no centro do elemento até termos bi-lineares. Os termos constantes são usados para computar o vetor de forças internas do elemento e os termos lineares e bi-lineares são usados para formar o vetor de forças de estabilização dos modos espúrios. Um tratamento especial é também aplicado para a matriz gradiente (deformação-deslocamento), removendo-se de forma seletiva aqueles modos associados com o travamento volumétrico e de cisalhamento, sem afetar a estabilidade do elemento (mesmo procedimento utilizado por

Liu *et al.*, 1994). Além disso, adotam-se os vetores gradientes uniformes propostos por Belytschko e Bindeman (1991) ao invés dos avaliados no ponto central do elemento, garantindo-se desta forma que o elemento resultante passe no *patch test*, ou seja, garantindo que a aproximação no campo dos deslocamentos seja completa.

Conceitos alternativos mais recentes de integração reduzida para sólidos e cascas são propostos por Liu *et al.* (1998), Puso (2000) e Reese (2005). Na formulação de Liu *et al.* (1998), o elemento proposto por Liu *et al.* (1994) é implementado para análise elastoplástica com grandes deformações. Os autores trabalham com 4 pontos de integração.

Para a integração das relações constitutivas no caso de não-linearidade física, Sloan (1987) propôs um método explícito com subincrementação, para modelos elastoplásticos convencionais, onde toda a deformação dentro da superfície de escoamento é elástica linear e o endurecimento é descrito por uma única variável. Tal método foi estendido por Sloan *et al.* (2001) para cobrir os casos de modelos de estado crítico generalizado, os quais apresentam comportamento não-linear elástico dentro da superfície de escoamento. Foram descritos também algoritmos para o cálculo da intersecção com a superfície de escoamento e correção das tensões, que são de uso geral, robustos e eficientes. O algoritmo de integração utiliza o método de Euler modificado para estimar o erro local nas tensões computadas e controlar a subincrementação do incremento de deformações aplicado. Mostra-se que o método de Euler modificado é capaz de controlar o erro de integração de forma que não ultrapasse os limites aceitáveis. Esta característica é muito atrativa, pois permite que seja controlada a magnitude do erro de integração das tensões no processo global de solução.

Foi mostrado por Duarte Filho e Awruch (2004) que o elemento hexaédrico de 8 nós proposto por Hu e Nagy (1997) tem um bom desempenho para análise de placas e cascas com não-linearidade geométrica. Neste trabalho, este elemento é utilizado para análise elastoplástica de estruturas com não-linearidade geométrica. A formulação apresentada por Hu e Nagy (1997) foi inicialmente implementada por Duarte Filho (2002), onde foi aplicada tanto em análise linear como não-linear geométrica, estática e dinâmica de estruturas. Esta formulação foi estendida por Andrade (2005) a materiais compósitos. No presente trabalho, à formulação implementada por Duarte Filho (2002) é adicionado o método proposto por Sloan *et al.* (2001) estendendo assim as aplicações a problemas com não-linearidade física.

### 1.3 OBJETIVOS

Este trabalho tem como ponto de partida um código de elementos finitos voltado para a simulação de estruturas com não-linearidade geométrica. Tal código foi desenvolvido por Duarte Filho (2002) no Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM) da UFRGS e tem sido aprimorado desde então.

O principal objetivo deste trabalho é a elaboração de rotinas computacionais para análise não-linear, tanto física quanto geométrica, de estruturas através do Método dos Elementos Finitos, utilizando-se elementos hexaédricos com um ponto de integração. Utilizando-se o elemento para análise não linear geométrica desenvolvido por Duarte Filho (2002), neste trabalho são adicionadas rotinas referentes à análise não-linear física.

Para se atingir este objetivo, implementa-se um integrador das relações constitutivas de uso geral, permitindo a implementação de diferentes modelos constitutivos de forma mais simples. São implementados modelos para plasticidade de metais (von Mises) e também um modelo para solos (Morh-Coulomb). Posteriormente demonstra-se a aplicabilidade da formulação apresentada através de simulações numéricas de estruturas em geral.

## 2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO EMPREGADO

### 2.1 O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (ANÁLISE LINEAR)

O princípio dos trabalhos virtuais, em uma representação em elementos finitos, é dado por:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{b} \, dV + \int_{S_e} \delta \mathbf{u}^t \bar{\mathbf{p}} \, dS, \quad (2.1)$$

na qual o super-índice  $t$  indica transposição;  $\delta \mathbf{u}$  é o vetor que contém as componentes de deslocamento virtual em um ponto qualquer do elemento “ $e$ ”;  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de volume atuantes no elemento;  $\bar{\mathbf{p}}$  é vetor de cargas aplicadas sobre  $S_e$ ;  $\mathbf{W}_e^{\text{int}}$  é o trabalho virtual interno do elemento dado por:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \int_{V_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} \, dV, \quad (2.2)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}$  é um vetor com as componentes do tensor de tensões do elemento e  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  é um vetor com as componentes do tensor de deformações virtuais devido a  $\delta \mathbf{u}$ .

Interpolando-se as componentes de deformações em termos do vetor de deslocamentos nodais do elemento, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{U}^{(e)}, \quad (2.3)$$

e então, a Eq. 2.2 pode ser escrita como:

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \delta \mathbf{U}^{(e)t} \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^t \boldsymbol{\sigma} \, dV, \quad (2.4)$$

em que  $\bar{\mathbf{B}}$  é a matriz gradiente, que contém as derivadas das funções de forma ( $\mathbf{N}$ ) do elemento. Retornando à Eq. 2.1 e empregando-se as expressões:

$$\delta \mathbf{u}^t = \delta \mathbf{U}^{(e)t} \mathbf{N}^t, \quad (2.5)$$

e a relação constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

(sendo neste caso  $\mathbf{C}$  a matriz constitutiva), tem-se a seguinte expressão matricial:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (2.7)$$

na qual:

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} \, dV, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{P} = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{N}' \mathbf{b} dV + \sum_e \int_{S_e} \mathbf{N}' \bar{\mathbf{p}} dS, \quad (2.9)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez e  $\mathbf{P}$  o vetor de cargas externas.

## 2.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO HEXAÉDRICO DE 8 NÓS

Considerando-se o elemento hexaédrico tri-linear isoparamétrico indicado na Fig. 2.1, as coordenadas espaciais  $x_i$  e as componentes de deslocamentos  $u_i$  são aproximados pela combinação linear entre os valores nodais  $x_{ia}$  e  $u_{ia}$ , utilizando-se as mesmas funções de interpolação  $N_a(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$x_i = \sum_{a=1}^8 N_a x_{ia}, \quad (2.10)$$

$$u_i = \sum_{a=1}^8 N_a u_{ia}, \quad (2.11)$$

sendo

$$N_a(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta), \quad (2.12)$$

onde o sub-índice  $i$  denota o eixo do sistema coordenado global,  $x, y, z$ , variando portanto de 1 a 3, e o sub-índice  $a$  refere-se ao nó do elemento, variando de 1 a 8. As coordenadas referenciais  $\xi, \eta$  e  $\zeta$  do nó  $a$  são denotadas por  $\xi_a, \eta_a$  e  $\zeta_a$ , respectivamente.

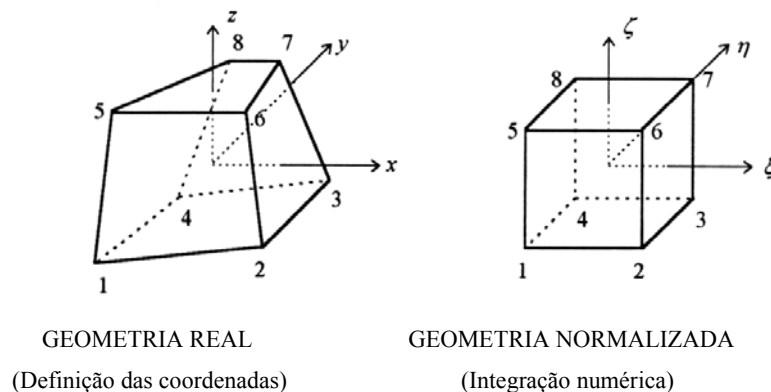


FIGURA 2.1 – Elemento hexaédrico de 8 nós.

Para apresentação da formulação empregada para o controle dos modos espúrios deste elemento quando se utiliza integração reduzida, define-se os seguintes vetores para as coordenadas nodais no sistema global e no sistema referencial:

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}' = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8], \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x}'_2 = \mathbf{y}' = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8], \quad (2.14)$$

$$\mathbf{x}'_3 = \mathbf{z}' = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8], \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\xi}' = [-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1], \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\eta}' = [-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1], \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\zeta}' = [-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1]. \quad (2.18)$$

### 2.3 CONTROLE DOS MODOS ESPÚRIOS

Com o objetivo de identificar os padrões dos modos espúrios, resultantes de deformações não constantes devido ao emprego de integração reduzida, define-se as sub-matrizes gradiente,  $\mathbf{B}_a(\mathbf{0})$ , avaliadas no ponto central ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ ), e os vetores  $\mathbf{h}_\alpha$ , onde  $\alpha$  varia de 1 a 4:

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a(0)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a(0)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_a(0)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1a} \\ b_{2a} \\ b_{3a} \end{bmatrix}, \quad (a = 1, 2, \dots, 8), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{h}'_1 = [+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1], \quad (2.20)$$

$$\mathbf{h}'_2 = [+1, -1, -1, +1, -1, +1, +1, -1], \quad (2.21)$$

$$\mathbf{h}'_3 = [+1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, +1], \quad (2.22)$$

$$\mathbf{h}'_4 = [-1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, -1]. \quad (2.23)$$

A Fig. 2.2 mostra os 12 modos de energia nula associados ao elemento com apenas um ponto de integração e caracterizados por  $\{\mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$ ,  $\{\mathbf{0}, \mathbf{h}'_\alpha, \mathbf{0}\}$  e  $\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{h}'_\alpha\}$ , com  $\alpha$  de 1 a 3.

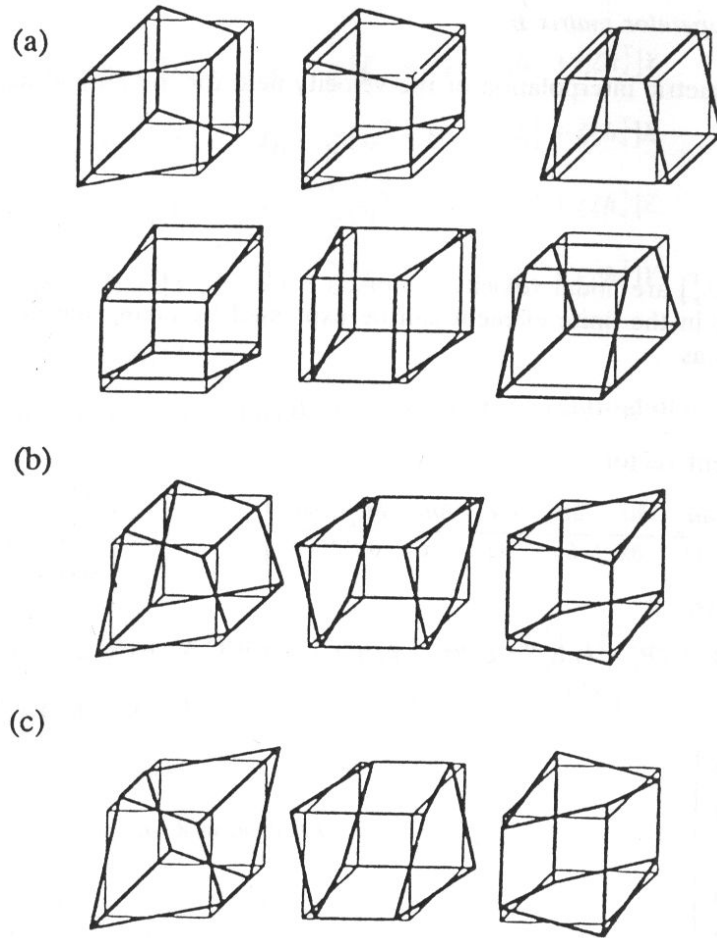


FIGURA 2.2 – Modos espúrios em 3D. (a) seis modos de flexão; (b) três modos de torção; (c) três modos não-físicos. FONTE: Zhu e Cescotto, 1996.

A matriz Jacobiana avaliada no ponto central ( $\xi = \eta = \zeta = 0$ ) é dada por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{0}) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \xi'x & \xi'y & \xi'z \\ \eta'x & \eta'y & \eta'z \\ \zeta'x & \zeta'y & \zeta'z \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

e o determinante (Jacobiano) é dado por:

$$j_o = j(0) = \det|\mathbf{J}(\mathbf{0})| = \frac{1}{512} \begin{vmatrix} \xi'x & \xi'y & \xi'z \\ \eta'x & \eta'y & \eta'z \\ \zeta'x & \zeta'y & \zeta'z \end{vmatrix}. \quad (2.25)$$

O determinante da matriz Jacobiana pode também ser escrito como sendo a oitava parte do volume do elemento:

$$j_o = \frac{1}{8}V, \quad (2.26)$$

em que  $V$  é o volume do elemento.



Os vetores gradientes no ponto central ficam definidos por:

$$\mathbf{b}_1 = \{b_{1a}\} = \frac{1}{8}[D_{11}\boldsymbol{\xi} + D_{12}\boldsymbol{\eta} + D_{13}\boldsymbol{\zeta}], \quad (2.27)$$

$$\mathbf{b}_2 = \{b_{2a}\} = \frac{1}{8}[D_{21}\boldsymbol{\xi} + D_{22}\boldsymbol{\eta} + D_{23}\boldsymbol{\zeta}], \quad (2.28)$$

$$\mathbf{b}_3 = \{b_{3a}\} = \frac{1}{8}[D_{31}\boldsymbol{\xi} + D_{32}\boldsymbol{\eta} + D_{33}\boldsymbol{\zeta}], \quad (2.29)$$

em que  $D_{ij}$  são os termos da matriz inversa do Jacobiano.

O uso da quadratura de Gauss ( $2 \times 2 \times 2$ ) para a integração do trabalho virtual interno resulta em travamento volumétrico. Para evitar este fenômeno, utiliza-se integração reduzida seletiva. Então, a matriz gradiente  $\bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$  é decomposta na forma,

$$\bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{0}) + \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}), \quad (2.30)$$

sendo  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{0})$  a matriz gradiente correspondente à parte dilatacional do vetor de deformações, avaliada apenas no centro do elemento, e  $\hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$  a matriz gradiente correspondente à parte desviadora do vetor de deformações.

Então a expressão para o trabalho virtual interno (Eq. 2.4) pode ser escrita como,

$$\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = \delta \mathcal{U}^{(e)t} \int_{V_e} [\tilde{\mathbf{B}}'(\mathbf{0}) + \hat{\mathbf{B}}'(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})] \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) dV. \quad (2.31)$$

Expandindo-se o vetor de deformações em uma série de Taylor no centro do elemento até termos bi-lineares, tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\zeta} + \\ & 2\boldsymbol{\varepsilon}_{,\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}_{,\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\zeta} + 2\boldsymbol{\varepsilon}_{,\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\zeta}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

em que o primeiro termo é o vetor de deformações constante avaliado no centro do elemento e os demais são termos lineares e bi-lineares. Na Eq. 2.32, as notações  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha}(\mathbf{0})$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha\beta}(\mathbf{0})$  representam:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha}(\mathbf{0}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0})}{\partial \alpha} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{,\alpha\beta}(\mathbf{0}) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0})}{\partial \alpha \partial \beta}. \quad (2.33)$$

Como a parte volumétrica do vetor de deformações é avaliada no centro do elemento (Eq. 2.30), os termos lineares e bi-lineares correspondem apenas à parte desviadora. Então, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta, \zeta) = & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\xi}(\mathbf{0})\xi + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\eta}(\mathbf{0})\eta + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\zeta}(\mathbf{0})\zeta + \\ & 2\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\xi\eta}(\mathbf{0})\xi\eta + 2\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\eta\zeta}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\xi\zeta}(\mathbf{0})\xi\zeta,\end{aligned}\quad (2.34)$$

ou

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta, \zeta) = & \mathbf{B}(\mathbf{0}) + \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}(\mathbf{0})\xi + \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}(\mathbf{0})\eta + \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}(\mathbf{0})\zeta + \\ & 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}(\mathbf{0})\xi\eta + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}(\mathbf{0})\xi\zeta,\end{aligned}\quad (2.35)$$

em que, nas primeiras e segundas derivadas da matriz gradiente  $\bar{\mathbf{B}}$  no centro do elemento, os vetores  $\gamma_\alpha$  são os vetores de estabilização, obtidos por Flanagan e Belytschko (1981). A retenção destes vetores de estabilização é requerida para suprimir os modos espúrios mostrados na Fig. 2.2. Estes são ortogonais ao campo de deslocamento linear e providenciam uma consistente estabilização do elemento e são dados por:

$$\gamma_\alpha = \mathbf{h}_\alpha - (\mathbf{h}_\alpha^t \mathbf{x}_i) \mathbf{b}_i, \quad \alpha=1,3. \quad (2.36)$$

O vetor de tensões é também aproximado através de uma expansão em série de Taylor, como feito para o vetor de deformações:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta, \zeta) = & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(\mathbf{0})\xi + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(\mathbf{0})\eta + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(\mathbf{0})\zeta + \\ & 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(\mathbf{0})\xi\eta + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(\mathbf{0})\eta\zeta + 2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(\mathbf{0})\xi\zeta,\end{aligned}\quad (2.37)$$

Substituindo-se as equações (2.35) e (2.37) na (2.31) e integrando-se, tem-se a expressão para o trabalho interno virtual do elemento:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{W}_e^{\text{int}} = & \delta \mathbf{U}^{(e)t} \left[ \mathbf{B}^t(\mathbf{0}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}^t(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}^t(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}^t(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(\mathbf{0}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}^t(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}^t(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}^t(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(\mathbf{0}) \right] V_e,\end{aligned}\quad (2.38)$$

em que  $V_e$  é o volume do elemento.

O primeiro termo da Eq. 2.38 é o trabalho interno virtual utilizando-se apenas 1 ponto de integração. Os outros termos são também avaliados no centro do elemento para providenciar a estabilização do mesmo.

## 2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DE ESTABILIZAÇÃO

Como a avaliação das tensões e deformações é feita apenas no ponto central, o vetor de forças internas do elemento pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}^c = \bar{\mathbf{B}}^t(\mathbf{0}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0}) V_e, \quad (2.39)$$

e a equação constitutiva como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{0}) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}). \quad (2.40)$$

O vetor de forças internas do elemento pode ser também ser escrito como:

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{K}^c \mathbf{U}, \quad (2.41)$$

sendo  $\mathbf{K}^c$  é a matriz de rigidez do elemento, dada por:

$$\mathbf{K}^c = \bar{\mathbf{B}}^t(\mathbf{0}) \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{0}) V_e. \quad (2.42)$$

O posto (*rank*) da matriz  $\mathbf{K}^c$  é apenas seis, devido às seis componentes do tensor de deformações avaliado no centro do elemento. Existem seis modos de corpo rígido possíveis: três modos de translação e três de rotação. Esses modos correspondem a um campo de deformações constante e, por isso, são necessários para um elemento ser considerado completo. Subtraindo-se o posto da matriz  $\mathbf{K}^c$  (6), assim como o número de modos de corpo rígido (6), do número de graus de liberdade do hexaedro de 8 nós (24), obtém-se o valor 12 ( $24 - 6 - 6 = 12$ ). Este é o número de modos espúrios correspondentes à força interna zero no elemento, avaliado com apenas 1 ponto de integração (conforme indicado na Fig. 2.2).

Para eliminar esses modos espúrios, adiciona-se forças resistentes aos mesmos ( $\mathbf{f}^{hg}$ ) no vetor de forças internas do elemento (Hu e Nagy, 1997), então:

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^c + \mathbf{f}^{hg}. \quad (2.43)$$

Observando-se as equações (2.38), (2.39) e (2.43), pode-se definir  $\mathbf{f}^{hg}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^{hg} = \left[ \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}^t_{,\xi}(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}^t_{,\eta}(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}^t_{,\zeta}(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}(\mathbf{0}) + \right. \\ \left. \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}^t_{,\xi\eta}(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}^t_{,\eta\zeta}(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}^t_{,\xi\zeta}(\mathbf{0}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}(\mathbf{0}) \right] V_e. \quad (2.44)$$

Quando a primeira e segunda derivada do vetor de tensões podem ser obtidas a partir da equação constitutiva do material, pode-se também definir a matriz rigidez de estabilização do elemento como:

$$\mathbf{f}^{hg} = \mathbf{K}^{stab} \mathbf{U}, \quad (2.45)$$

Esta matriz é adicionada à matriz de rigidez do elemento,  $\mathbf{K}^c$ , para compensar a instabilidade gerada pela adoção de integração reduzida. Então, a matriz de rigidez resultante apresenta posto suficiente e vem dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^c + \mathbf{K}^{stab}. \quad (2.46)$$

Até aqui, considerou-se que os termos das derivadas de tensões na Eq. 2.44 provém das leis constitutivas do material. Isto providencia uma estabilização apropriada para o elemento, pois todos os vetores de estabilização estão embutidos na primeira e segunda derivada da matriz de gradientes. Entretanto, derivar as relações entre a primeira e segunda derivada do vetor de tensões e o vetor de deslocamentos nodais pode ser uma tarefa tediosa para alguns materiais. Para aliviar este problema, Hu e Nagy (1997) propuseram uma outra técnica sistemática para derivar a matriz de estabilização.

Considera-se uma “matriz de estabilização”  $\mathbf{E}$ , que satisfaz às seguintes relações constitutivas:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\xi}, & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\eta}, & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\zeta}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\xi\eta}, & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\eta\zeta}, & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta} &= \mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\xi\zeta}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Com o propósito de controlar os modos espúrios do elemento,  $\mathbf{E}$  não é necessariamente a matriz de elasticidade do material e pode ser escolhida a partir de matrizes mais simples. Desta forma, prefere-se denominar  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\zeta}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\eta}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\eta\zeta}$  e  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{,\xi\zeta}$  como “vetores tensão de estabilização” ao invés de derivadas do vetor de tensão, pois estes são apenas usados para computar o vetor de forças resistentes aos modos espúrios.

Substituindo-se as equações da expressão 2.47 na Eq. 2.44, obtém-se a matriz rigidez de estabilização na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{stab} &= \left[ \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}^t(\mathbf{0}) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi}(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}^t(\mathbf{0}) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}^t(\mathbf{0}) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\zeta}(\mathbf{0}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}^t(\mathbf{0}) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\eta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}^t(\mathbf{0}) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\eta\zeta}(\mathbf{0}) + \frac{1}{9} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}^t(\mathbf{0}) \mathbf{E} \hat{\mathbf{B}}_{,\xi\zeta}(\mathbf{0}) \right] V_e. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Portanto, precisa-se escolher uma matriz  $\mathbf{E}$  apropriada para que todos os modos espúrios de  $\mathbf{K}^c$  sejam suprimidos, conforme será discutido na próxima seção.

Segundo Hu e Nagy (1997), o vetor de forças internas do elemento desenvolvido até então, utilizando-se apenas 1 ponto de integração, não é adequadamente avaliado se os elementos são bastante distorcidos. Além disso, aqueles modos associados com o

travamento de cisalhamento em flexão não foram removidos. Para solucionar estes problemas, Hu e Nagy (1997) utilizaram os mesmos procedimentos apresentados por Liu *et al.* (1994), que consiste em adotar um sistema de coordenadas co-rotacional. Para tal são necessárias as seguintes modificações:

- (a) substituir os vetores gradientes  $\mathbf{b}_i$ , avaliados no centro do elemento (Eq. 2.26-2.28), por vetores gradientes uniformes  $\tilde{\mathbf{b}}_i$ , definidos por Flanagan e Belytschko (1981):

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \mathbf{N}_{,i}(\xi, \eta, \zeta) dV, \quad (2.49)$$

então, a matriz gradiente passa a ser:

$$\tilde{\mathbf{B}}_a(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{a,x}(\mathbf{0}) \\ \mathbf{N}_{a,y}(\mathbf{0}) \\ \mathbf{N}_{a,z}(\mathbf{0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 \\ \tilde{\mathbf{b}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{1a} \\ \tilde{b}_{2a} \\ \tilde{b}_{3a} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

- (b) Cada componente de deformação de cisalhamento é interpolada linearmente em apenas uma direção no sistema de coordenadas referencial; desta forma, remove-se os modos responsáveis pelo travamento de cisalhamento:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}(\mathbf{0}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy,\zeta}(\mathbf{0}) \zeta, \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{yz}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\varepsilon}_{yz}(\mathbf{0}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yz,\xi}(\mathbf{0}) \xi, \quad (2.52)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xz}(\xi, \eta, \zeta) = \boldsymbol{\varepsilon}_{xz}(\mathbf{0}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xz,\eta}(\mathbf{0}) \eta, \quad (2.53)$$

o que implica em:

$$\hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\eta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi\eta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\eta\zeta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xy,\xi\zeta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (2.54)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{yz,\eta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\zeta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi\eta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\eta\zeta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{yz,\xi\zeta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\zeta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi\eta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\eta\zeta}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{B}}_{xz,\xi\zeta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (2.56)$$

em que  $\hat{\mathbf{B}}_{xy}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_{yz}$  e  $\hat{\mathbf{B}}_{xz}$  são as matrizes gradientes correspondentes às componentes de deformação desviadoras  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xy}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yz}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xz}$ , respectivamente.

Nas Eq. 2.51 a 2.53, cada componente de deformação de cisalhamento consiste em um termo constante e apenas um termo não constante. Os modos de deformação associados com o travamento de cisalhamento, os quais estão embutidos nos termos linear e bi-linear, são removidos. Os termos constantes e todos os não constantes são mantidos para as componentes de deformação normal. Como é sabido que os vetores de

estabilização requeridos para suprimir os modos espúrios estão incluídos nestas matrizes gradiente, a matriz de rigidez do elemento resultante terá posto suficiente.

## 2.5 A MATRIZ DE ESTABILIZAÇÃO “E”

A performance do elemento, obtido até aqui, depende da matriz de estabilização  $\mathbf{E}$ , a qual é utilizada para calcular as tensões resistentes aos modos espúrios. A matriz  $\mathbf{E}$  desejada, é aquela que preenche os seguintes requerimentos: (a) a matriz de rigidez do elemento resultante deve ter posto suficiente; (b) o travamento volumétrico e o travamento de cisalhamento devem ser evitados; (c) não devem ser necessários parâmetros especificados pelo usuário.

Então, adotando-se  $\mathbf{E}$  como uma matriz diagonal, dependente apenas da constante de Lamé  $\mu$  do material, estes requisitos são cumpridos e obtém-se a forma mais simples possível para a matriz (Hu e Nagy, 1997):

$$\mathbf{E}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

sendo

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Como a matriz de estabilização  $\mathbf{E}$  não depende da outra constante de Lamé,  $\lambda$ , o elemento desenvolvido não apresentará travamento volumétrico quando o material torna-se incompressível.

Entretanto, o comportamento de materiais elastoplásticos ou com dano é caracterizado por uma súbita diminuição da rigidez quando um certo limite de tensão é atingido. Para prevenir rigidez excessiva e melhorar o comportamento de materiais elastoplásticos, Reese (2005) propôs o uso de um parâmetro otimizado  $\mu^{opt}$  na matriz de estabilização. O fator  $\mu^{opt}$  pode ser visto como o menor parâmetro que proporciona força resistente suficiente para inibir os modos espúrios. O parâmetro otimizado pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\mu^{opt} = \mu \frac{H}{E + H}, \quad (2.59)$$

sendo  $E$  é o módulo de elasticidade e  $H$  é o módulo plástico no início do escoamento.

## 2.6 A MATRIZ DE ROTAÇÃO

Conforme já foi mencionado, para cada elemento deve ser definido um sistema de coordenadas co-rotacional. Para tanto, utiliza-se um tensor  $\mathbf{R}$  que transforma uma matriz do sistema global  $(x, y, z)$ , ao sistema co-rotacional,  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , sendo que os vetores co-rotacionais de base devem estar alinhados com os eixos de referência do elemento,  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Segundo Belytschko e Bindeman (1993), quando os lados do elemento não permanecem paralelos após a deformação, a rotação pode ser feita apenas de forma aproximada.

Definem-se vetores no sistema de coordenadas global,  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , que coincidam com os eixos de referência  $\xi$  e  $\eta$  do elemento:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_{1i} \equiv \xi^t \mathbf{x}_i \\ \mathbf{r}_{2i} \equiv \eta^t \mathbf{x}_i \end{array} \right\} i = 1, 2, 3. \quad (2.60)$$

Adiciona-se um termo de correção  $\mathbf{r}_c$  a  $\mathbf{r}_2$ , de forma que:

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c) = 0, \quad (2.61)$$

o que se consegue quando:

$$\mathbf{r}_c = -\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1} \mathbf{r}_1. \quad (2.62)$$

Obtém-se uma base ortogonal fazendo-se o seguinte produto vetorial:

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c). \quad (2.63)$$

Normalizando-se os vetores de base, encontra-se os elementos da matriz de rotação  $\mathbf{R}$ :

$$R_{1i} = \frac{r_{1i}}{\|\mathbf{r}_1\|}, \quad R_{2i} = \frac{r_{2i} + r_{ci}}{\|\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_c\|}, \quad R_{3i} = \frac{r_{3i}}{\|\mathbf{r}_3\|}. \quad (2.64)$$

### 3. ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

#### 3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anteriores, considerou-se deslocamentos infinitesimais. Com esta hipótese, os deslocamentos  $\mathbf{U}$  são função linear do vetor de cargas aplicadas  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}. \quad (3.1)$$

Considerando-se pequenos deslocamentos, as integrais para a avaliação da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e o vetor de cargas  $\mathbf{P}$  são desenvolvidas sobre o volume original dos elementos, e a matriz de gradientes  $\mathbf{B}$  de cada elemento é assumida ser constante e independente dos deslocamentos. Desta forma, a simples resolução do sistema de equações (3.1) fornece a resposta estática linear para um determinado carregamento.

Entretanto, quando a análise envolve não-linearidade geométrica, a Eq. 3.1 deve ser satisfeita para todo o intervalo de tempo através de procedimentos incrementais do tipo passo-a-passo.

Cabe a observação de que, em análises estáticas onde não existem efeitos que variam com o tempo (como a fluência), além da definição do nível de carga, o tempo é considerado como uma variável conveniente para denotar diferentes intensidades de aplicação de carga e, conseqüentemente, diferentes configurações.

Então, o problema básico da análise não-linear é encontrar o estado de equilíbrio de um corpo submetido a determinado incremento de carregamento. Para esta análise incremental, considera-se que a solução para um tempo discreto  $t$  é conhecida e que a solução para o tempo discreto  $t + \Delta t$  é requerida. Desta forma, a condição de equilíbrio em elementos finitos é dada por (Bathe, 1996):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

em que  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{P}$  é o vetor das forças externas aplicadas em  $t + \Delta t$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas em  $t + \Delta t$ , que pode ser escrito como:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{int}} = {}^t\mathbf{f}_{\text{int}} + \Delta\mathbf{f}_{\text{int}}, \quad (3.3)$$

sendo  $\Delta\mathbf{f}_{\text{int}}$  é o incremento no vetor de forças nodais correspondente ao incremento de deslocamentos e tensões entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . Este vetor pode ser aproximado utilizando-se a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , a qual corresponde às condições geométricas no tempo  $t$ ,

$$\Delta\mathbf{f}_{\text{int}} = {}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}, \quad (3.4)$$



em que  $\Delta\mathbf{U}$  é o vetor incremento de deslocamentos nodais e  ${}^t\mathbf{K}$  é a derivada do vetor de forças internas  ${}^t\mathbf{f}_{\text{int}}$  em relação ao deslocamentos nodais  ${}^t\mathbf{U}$ :

$${}^t\mathbf{K} = \frac{\partial {}^t\mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial {}^t\mathbf{U}}. \quad (3.5)$$

Substituindo-se a Eq. 3.4 e 3.3 em 3.2, obtém-se:

$${}^t\mathbf{K} \Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P} - {}^t\mathbf{f}_{\text{int}}, \quad (3.6)$$

e calculando  $\Delta\mathbf{U}$ , tem-se uma aproximação para os deslocamentos em  $t + \Delta t$ ,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}. \quad (3.7)$$

Entretanto esse procedimento é apenas uma aproximação para os deslocamentos em  $t + \Delta t$ . Tal solução está sujeita a erros significativos e, dependendo do tamanho do passo de carga, pode até tornar-se instável. Na prática, é necessário iterar até que a solução da Eq. 3.2 seja obtida com suficiente precisão.

No presente trabalho, o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados, proposto por Yang e Shieh (1990) e descrito na seção 3.6, foi empregado como algoritmo para o processo de solução incremental/iterativo.

### 3.2 ABORDAGEM CO-ROTACIONAL

Para a eliminação do travamento de cisalhamento é necessário trabalhar no sistema de coordenadas locais do elemento para remover alguns termos não-constantes responsáveis pelo travamento. Segundo Liu *et al.* (1998), o uso de sistema co-rotacional é também eficiente para a análise não-linear. Embora a descrição Lagrangeana total ou atualizada forneçam duas formulações cinemáticas bastante conhecidas para análise estrutural com não-linearidade geométrica, para problemas com pequenas deformações e grandes deslocamentos, a formulação co-rotacional pode ser mais precisa e apresentar melhor convergência.

Teoricamente, o movimento de um meio contínuo pode sempre ser decomposto num movimento de corpo rígido seguido por uma deformação pura. Sendo a discretização em elementos finitos adequada para a aproximação do contínuo, esta decomposição pode ser realizada a nível do elemento. Quando o movimento de corpo rígido é eliminado do campo de deslocamento total, que corresponde a grandes deslocamentos e rotações e pequenas deformações, a deformação pura será sempre uma pequena quantidade em relação às dimensões do elemento.

O sistema co-rotacional é definido como um sistema de coordenadas cartesianas que giram com o elemento, logo as tensões definidas no sistema co-rotacional não mudam com a rotação ou translação do corpo e, por isso, são consideradas objetivas. Por esta razão, utilizam-se as tensões de Cauchy no sistema co-rotacional, denominada tensões de Cauchy co-rotacionais, como medida de tensão.

A taxa de deformação (ou velocidade de deformação), também definida no sistema co-rotacional, é usada como medida da taxa de deformação (Liu *et al.* 1998),

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right)^t \right], \quad (3.8)$$

em que  $\hat{\mathbf{v}}^{\text{def}}$  é a parcela do vetor de velocidades referente à deformação (descontada a rotação de corpo rígido) no sistema co-rotacional  $\hat{x}$ . Quando a deformação inicial  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}, 0)$  é dada, o tensor de deformação pode ser expresso como (Liu *et al.* 1998):

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}, t) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}, 0) + \int \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, \tau) d\tau. \quad (3.9)$$

O incremento de deformação é dado por:

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{\mathbf{d}} d\tau \doteq \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}} + \left( \frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}} \right)^t \right], \quad (3.10)$$

em que  $\Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}}$  é a parcela de deformação do incremento dos deslocamentos no sistema co-rotacional  $\hat{x}_{n+1/2}$ , referenciado à configuração no ponto médio do intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ .

O incremento de deformação em (3.10) é uma aproximação de segunda ordem da integração exata do tensor velocidade de deformação, dado em (3.8), de  $t_n$  até  $t_{n+1}$ , o que significa assumir que a velocidade é constante dentro do intervalo de tempo.

### 3.3 INCREMENTO DE DEFORMAÇÕES E TENSÕES CO-ROTACIONAIS

Para a formulação de tensões e deformações atualizadas, assume-se que todas as variáveis no passo de tempo anterior  $t_n$  são conhecidas. Como as medidas de tensões e deformações definidas anteriormente são objetivas no sistema co-rotacional, necessita-se calcular apenas o incremento de deformação correspondente ao incremento de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ .

Todas as variáveis cinemáticas devem ser referenciadas na configuração do último passo de tempo,  $\Omega_n$ , em  $t = t_n$  e na configuração atual,  $\Omega_{n+1}$ , em  $t = t_{n+1}$ .

Denotando as coordenadas espaciais destas duas configurações como  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{x}_{n+1}$  no sistema de coordenadas cartesiano fixo  $Ox$ , como mostrado na Fig. 3.1, pode-se obter as coordenadas nos correspondentes sistemas co-rotacionais,  $O\hat{\mathbf{x}}_n$  e  $O\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$ , através das transformações:

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{R}_n \mathbf{x}_n, \quad (3.13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}, \quad (3.14)$$

em que  $\mathbf{R}_n$  e  $\mathbf{R}_{n+1}$  são matrizes ortogonais que rotacionam as coordenadas globais para os correspondentes sistemas de coordenadas co-rotacionais.

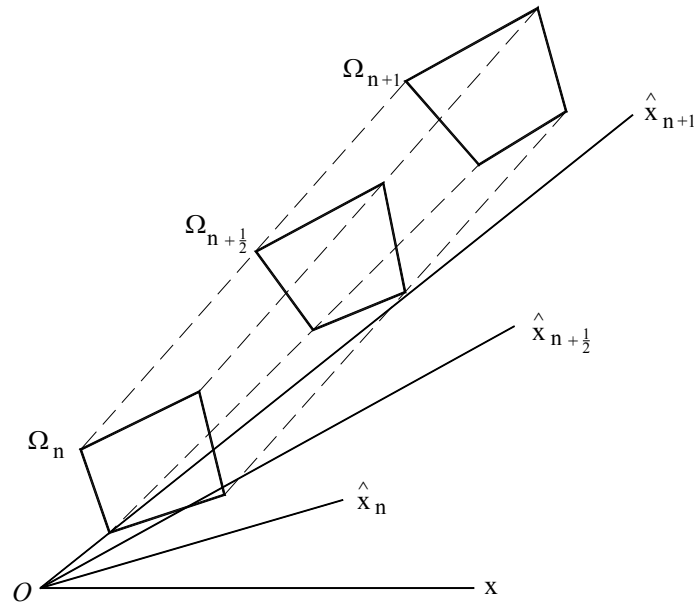


FIGURA 3.1 – Configurações no tempo  $t = t_n$ ,  $t = t_{n+1/2}$  e  $t = t_{n+1}$ .

Como o incremento de deformação está referenciado à configuração em  $t = t_{n+1/2}$ , tem-se:

$$\mathbf{x}_{n+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1}), \quad (3.13)$$

e a transformação para o sistema co-rotacional associado com esta configuração,  $\Omega_{n+1/2}$ , é dado por:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1/2} = \mathbf{R}_{n+1/2} \mathbf{x}_{n+1/2}, \quad (3.14)$$

Segundo Liu *et al.* (1998), de forma similar à decomposição polar, uma deformação incremental pode ser separada em uma parcela de deformação e uma

parcela de rotação pura. Sendo  $\Delta \mathbf{u}$  o incremento de deslocamentos dentro do incremento de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , pode-se escrever:

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{\text{def}} + \Delta \mathbf{u}^{\text{rot}}, \quad (3.15)$$

em que  $\Delta \mathbf{u}^{\text{def}}$  e  $\Delta \mathbf{u}^{\text{rot}}$  são, respectivamente, a parcela de deformação e a parcela de rotação pura do incremento de deslocamentos no sistema de coordenadas global. A parcela de deformação também inclui os deslocamentos que não causam deformação (translação de corpo rígido).

Para obter a parcela de deformação referente à configuração no tempo  $t = t_{n+1/2}$ , necessita-se encontrar a rotação de corpo rígido de  $\Omega_n$  para  $\Omega_{n+1}$ . Definindo duas configurações virtuais,  $\Omega'_n$  e  $\Omega'_{n+1}$ , pela rotação da configuração  $\Omega_n$  e  $\Omega_{n+1}$  ao sistema co-rotacional  $O\hat{x}_{n+1/2}$  (ver Fig. 3.2), e denotando como  $\hat{\mathbf{x}}'_n$  e  $\hat{\mathbf{x}}'_{n+1}$  as coordenadas de  $\Omega'_n$  e  $\Omega'_{n+1}$  no sistema co-rotacional  $O\hat{x}_{n+1/2}$ , tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}'_n = \hat{\mathbf{x}}_n, \quad \hat{\mathbf{x}}'_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1}. \quad (3.16)$$

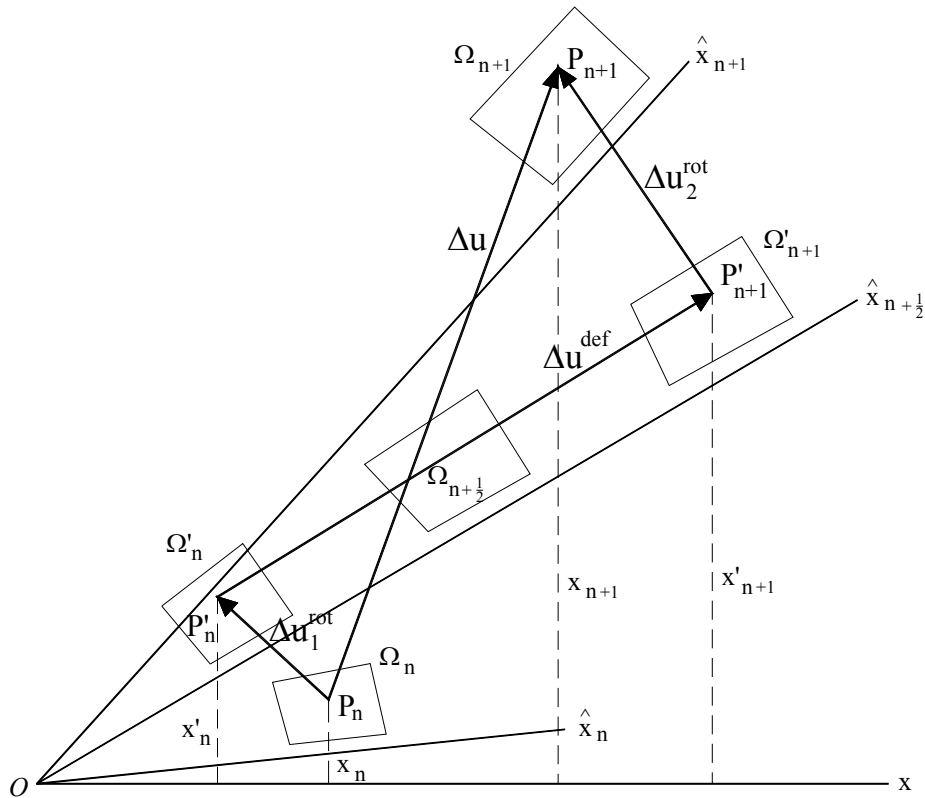


FIGURA 3.2 – Decomposição do incremento de deslocamento.

Percebe-se que de  $\Omega_n$  para  $\Omega'_n$  e de  $\Omega'_{n+1}$  para  $\Omega_{n+1}$  o corpo sofre duas rotações de corpo rígido e os deslocamentos de rotação são dados por:

$$\Delta \mathbf{u}_1^{\text{rot}} = \mathbf{x}'_n - \mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{n+1/2}^t \hat{\mathbf{x}}'_n - \mathbf{x}_n = \mathbf{R}_{n+1/2}^t \hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n, \quad (3.17)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^{\text{rot}} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}'_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1/2}^t \hat{\mathbf{x}}'_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1/2}^t \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \quad (3.18)$$

Então, o incremento de deslocamentos de rotação total pode ser expresso como:

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{rot}} = \Delta \mathbf{u}_1^{\text{rot}} + \Delta \mathbf{u}_2^{\text{rot}} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n - \mathbf{R}_{n+1/2}^t (\hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n) = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{R}_{n+1/2}^t (\hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n). \quad (3.19)$$

Logo, a parcela de deformação referente à configuração  $\Omega_{n+1/2}$  é:

$$\Delta \mathbf{u}^{\text{def}} = \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}^{\text{rot}} = \mathbf{R}_{n+1/2}^t (\hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n), \quad (3.20)$$

e o incremento de deslocamentos de deformação no sistema de coordenadas co-rotacional  $O\hat{\mathbf{x}}_{n+1/2}$  é determinado por:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^{\text{def}} = \mathbf{R}_{n+1/2} \Delta \mathbf{u}^{\text{def}} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n. \quad (3.21)$$

Calculado o incremento de deformação (3.10), o incremento de tensão, também referenciado à configuração intermediária  $\Omega_{n+1/2}$ , pode ser determinado por

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.22)$$

sendo que a deformação e tensão total podem ser atualizadas por

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n + \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.23)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n + \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.24)$$

Observa-se que os tensores de tensões e deformações estão referenciados à configuração atual e definidos no sistema de coordenadas co-rotacional. As componentes de tensão e deformação no sistema global podem ser determinadas por simples transformação de tensores.

### 3.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

O tensor taxa de tensões de Truesdell ( $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{TR}}$ ) é dado por:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{TR}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^t + \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.25)$$

sendo  $\mathbf{L}$  o gradiente espacial de velocidade, que pode ser decomposto em:

$$\mathbf{L} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (3.26)$$

em que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é o tensor velocidade de deformação (parte simétrica de  $\mathbf{L}$ ) e  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  é o tensor velocidade de rotação ou *spin* (parte anti-simétrica de  $\mathbf{L}$ ). Em forma indicial, a Eq. 3.25 pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + \sigma_{ip} \dot{\omega}_{jp} + \sigma_{jp} \dot{\omega}_{ip} + \sigma_{ik} \dot{\varepsilon}_{jk} + \sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{ik} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk}, \quad (3.27)$$

na qual  $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$ ,  $C_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem contendo as constantes elásticas do material e

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ e } \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.28)$$

sendo que em (3.27) e (3.28) o ponto indica derivação em relação ao tempo.

Segundo Hughes e Winget (1980), a expressão (3.27) também pode ser escrita na forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (C_{ijkl} + \hat{C}_{ijkl}) \dot{\varepsilon}_{kl} + W_{ijkl} \dot{\omega}_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (3.29)$$

com

$$\hat{C}_{ijkl} = -\sigma_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} + \sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{jk} \delta_{il}), \quad (3.30)$$

e

$$W_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik} - \sigma_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{jk} \delta_{il}), \quad (3.31)$$

em que os  $\delta_{jk}$  são deltas de Kroenecker.

Em forma matricial as equações constitutivas vêm dadas por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{C}}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{W} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \left[ (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{C}}); \mathbf{W} \right] \left\{ \begin{matrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{matrix} \right\}. \quad (3.32)$$

Deslocando-se o termo  $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{kk}$  da Eq. 3.27, o que significa eliminar o primeiro termo da Eq. 3.30, a matriz  $\hat{\mathbf{C}}$  torna-se simétrica e é expressa por:

$$\hat{\mathbf{C}} = \left[ \begin{array}{cccccc} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} \\ & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ & & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} \\ & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} \\ & & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \end{array} \right], \quad (3.33)$$

simétrica

e a matriz  $\mathbf{W}$  é dada por:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & -\sigma_{23} & \sigma_{13} \\ \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ -\frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} \\ \frac{\sigma_{23}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

sendo que estas correspondem ao seguinte ordenamento dos vetores de taxas de deformações e rotações:

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t, \dot{\boldsymbol{\omega}}^t\} = \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{12}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}, 2\dot{\omega}_{12}, 2\dot{\omega}_{23}, 2\dot{\omega}_{31}\}. \quad (3.35)$$

Neste caso, a Eq. 3.32, com  $\hat{\mathbf{C}}$  e  $\mathbf{W}$  dados pelas Eqs. 3.33 e 3.34, representa o tensor de taxas de tensões de Lie ( $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ ), ou a derivada de Lie do tensor de tensões de Kirchhoff. Então, o trabalho interno específico vem dado por:

$$\left\{ \begin{matrix} \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t & \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}^t \end{matrix} \right\}_{1 \times 9} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{C}})_{6 \times 6} & \frac{1}{2} \mathbf{W}_{6 \times 3} \\ \frac{1}{2} \mathbf{W}^t_{3 \times 6} & \bar{\mathbf{C}}_{3 \times 3} \end{matrix} \right]_{9 \times 9} \left\{ \begin{matrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \Delta \boldsymbol{\omega} \end{matrix} \right\}_{9 \times 1} = \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^t \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}) \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.36)$$

com

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{2} & -\frac{\sigma_{23}}{2} \\ & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & -\frac{\sigma_{12}}{2} \\ \text{simétrica} & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

A matriz  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma})$ , que relaciona incrementos de tensões com incrementos de deformações específicas e rotações, pode também ser escrita como:

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.38)$$

em que  $\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma})$  é a matriz de tensões iniciais e é dada por:

$$\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{12}/2 & 0 & -\sigma_{13}/2 \\ & 2\sigma_{22} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{23} & 0 & -\sigma_{12}/2 & \sigma_{23}/2 & 0 \\ & & 2\sigma_{33} & 0 & \sigma_{23} & \sigma_{13} & 0 & -\sigma_{23}/2 & \sigma_{13}/2 \\ & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} & \frac{\sigma_{13}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{2} & \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{4} & \frac{\sigma_{13}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} \\ & & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} & \frac{\sigma_{12}}{2} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{4} & \frac{\sigma_{12}}{4} \\ & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{2} & \frac{\sigma_{23}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{4} \\ & & & & & & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{4} & -\frac{\sigma_{13}}{4} & -\frac{\sigma_{23}}{4} \\ & & & & & & & \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{4} & -\frac{\sigma_{12}}{4} \\ & & & & & & & & \frac{\sigma_{33} + \sigma_{11}}{4} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

simétrica

### 3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE E VETOR DE FORÇAS INTERNAS

Retornando à Eq. 3.6, pode-se escrever as equações de equilíbrio no sistema co-rotacional e na iteração  $j$  como:

$$\hat{\mathbf{K}}_{j-1} \Delta \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{s}}_j = \hat{\mathbf{P}}_j - \hat{\mathbf{f}}_{j-1}, \quad (3.40)$$

sendo a matriz de rigidez  $\hat{\mathbf{K}}_{j-1}$  e o vetor de forças nodais  $\hat{\mathbf{f}}_{j-1}$  são dados por:

$$\hat{\mathbf{K}}_{j-1} = \int_{V_{j-1}} \bar{\mathbf{B}}^t (\mathbf{C} + \hat{\mathbf{T}}_{j-1}) \bar{\mathbf{B}} dV, \quad (3.41)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{j-1} = \int_{V_{j-1}} \bar{\mathbf{B}}^t \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{j-1} dV. \quad (3.42)$$

A matriz de rigidez tangente e o vetor de forças desequilibradas na iteração  $j$ ,  $\hat{\mathbf{s}}_j$ , são transformados para o sistema de coordenadas globais por:

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{R}_j^t \hat{\mathbf{K}}_j \mathbf{R}_j, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{s}_j = \mathbf{R}_j^t \hat{\mathbf{s}}_j, \quad (3.44)$$

sendo a matriz  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação correspondente.

### 3.6 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Entre os métodos mais empregados na literatura técnica para solução de equações não-lineares pode-se citar o Método de Newton-Raphson (Bathe, 1996) e o Método do Comprimento de Arco (Crisfield, 1991). Entretanto, o Método do Controle



por Deslocamentos Generalizados (MCDG), proposto por Yang e Shieh (1990), tem se mostrado bastante eficiente é utilizado na presente formulação.

O comportamento da estrutura pode ser de amolecimento (*softening*) ou enrijecimento (*stiffning*), o caminho de equilíbrio pode ser estável ou instável, e a estrutura pode estar em carga ou descarga. Todos estes fenômenos são identificados pela ocorrência de pontos críticos (ver Fig. 3.3), tais como pontos limites e pontos na curva carga-deflexão onde a reta tangente é  $90^\circ$  (*snap-back*).

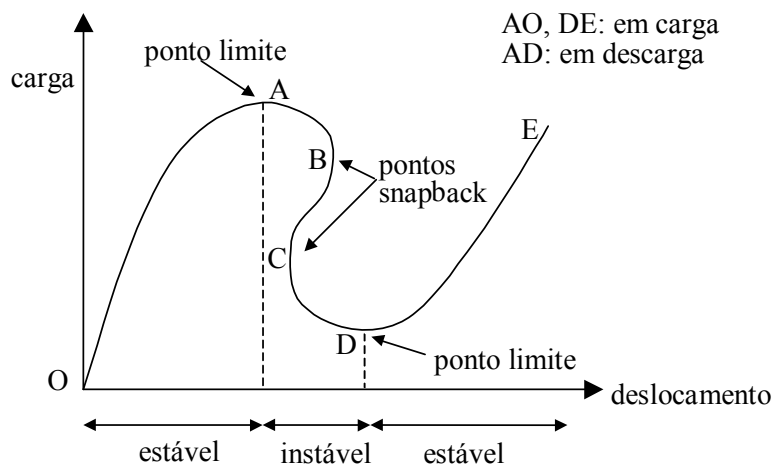


FIGURA 3.3 - Características de um sistema não-linear.

FONTE: Yang e Shieh, 1990

Um método de solução não-linear deve satisfazer a três critérios para transpor os problemas numéricos associados com cada tipo de comportamento:

- Deve se auto-adaptar às mudanças da direção do carregamento nos pontos limites.
- Deve manter estabilidade numérica para as iterações em todas as regiões, incluindo aquelas próximas aos pontos críticos.
- Ajustes no tamanho dos passos de carga devem ser feitos automaticamente para refletir o comportamento de enrijecimento ou amolecimento da estrutura.

Em geral, na solução incremental/iterativa de problemas estruturais não-lineares, o fator de incremento de carga de cada passo iterativo pode ser considerado como uma incógnita adicional. Assim, assumindo-se que o carregamento seja proporcional, ou seja,

$$\mathbf{P}(\lambda) = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \vdots \\ P_N^* \end{Bmatrix} = \lambda \mathbf{P}^*, \quad (3.45)$$

pode-se escrever a equação de equilíbrio, no incremento  $i$ , na forma:

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \Delta \mathbf{U}_j^i = \Delta \lambda_j^i \mathbf{P}^* + \mathbf{s}_{j-1}^i, \quad (3.46)$$

em que  $\Delta \lambda_j^i$  define o incremento do fator de carga na iteração  $j$ ,  $\mathbf{P}^*$  é o vetor de cargas nodais de referência e  $\mathbf{s}_{j-1}^i$  representa um vetor de forças desequilibradas na iteração  $j-1$ , dado por:

$$\mathbf{s}_{j-1}^i = \lambda_{j-1}^i \mathbf{P}^* - \mathbf{f}_{j-1}^i, \quad (3.47)$$

em que  $\lambda_{j-1}^i$  representa o fator de carga na iteração  $j$ , e  $\mathbf{f}_{j-1}^i$  é o vetor de forças internas na mesma iteração.

Então, o vetor de incremento de deslocamentos pode ser expresso pela soma de vetores:

$$\Delta \mathbf{U}_j^i = \Delta \lambda_j^i \mathbf{u}_{1j}^i + \mathbf{u}_{2j}^i, \quad (3.48)$$

na qual os vetores  $\mathbf{u}_{1j}^i$  e  $\mathbf{u}_{2j}^i$  são obtidos como solução dos sistemas de equações seguintes:

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \mathbf{u}_{1j}^i = \mathbf{P}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{K}_{j-1}^i \mathbf{u}_{2j}^i = \mathbf{s}_{j-1}^i. \quad (3.50)$$

Adicionalmente a estas, equações específicas são estabelecidas pelos diferentes métodos existentes para o cálculo da incógnita adicional  $\Delta \lambda_j^i$ .

No MCDG, usa-se um parâmetro referido como “*General Stiffness Parameter*” (GSP) para obter o incremento do fator de carga da primeira iteração do  $i$ -ésimo passo incremental, o qual é definido por:

$$\text{GSP} = \frac{\{\mathbf{u}_1\}_1^i \{\mathbf{u}_1\}_1^i}{\{\mathbf{u}_1\}_1^{i-1} \{\mathbf{u}_1\}_1^i}, \quad (3.51)$$

sendo que a operação  $\{\cdot\} \{\cdot\}$  significa produto interno de vetores.

Assim, na primeira iteração do passo  $i$ , o incremento do fator de carga é dado por:

$$\Delta\lambda_1^i = \pm\Delta\lambda_1^1 (|\text{GSP}|)^{1/2}, \quad (3.52)$$

na qual  $\Delta\lambda_1^1$  representa o incremento inicial do fator de carga (primeiro passo e primeira iteração de cálculo). Para as iterações subsequentes ( $j > 1$ ) do mesmo passo, tem-se:

$$\Delta\lambda_j^i = -\frac{\{\mathbf{u}_1\}_1^{i-1} \{\mathbf{u}_2\}_j^i}{\{\mathbf{u}_1\}_1^{i-1} \{\mathbf{u}_1\}_j^i}, \quad (3.53)$$

sendo que para  $i=1$ ,  $\{\mathbf{u}_1\}_1^0$  é feito igual a  $\{\mathbf{u}_1\}_1^1$ .

O sinal da Eq. 3.52 é definido de forma simples e automática pela variação do próprio parâmetro GSP, uma vez que este apresenta a peculiaridade de passar de sinal positivo para negativo em todo ponto limite, permitindo assim que tais pontos sejam identificados. Cada vez que isto acontece, o sentido do crescimento do carregamento da estrutura deve ser revertido.

A explicação física para este comportamento do parâmetro GSP é que, como este considera o produto interno entre dois vetores tangentes de incrementos consecutivos, o seu sinal representará o sinal do cosseno entre os dois vetores. E, como pode ser visto na Fig. 3.4, o ângulo entre os vetores será obtuso apenas quando passar por pontos limites.

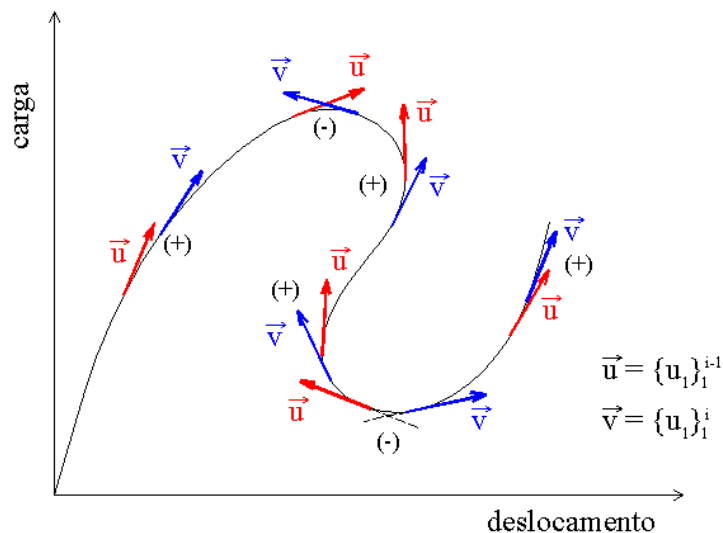


FIGURA 3.4 - Sinal do cosseno entre vetores tangentes de incrementos consecutivos.

Na tabela 3.1 é apresentado o algoritmo usado para resolver sistemas de equações não-lineares neste trabalho.

TABELA 3.1 – Algoritmo de solução das equações não-lineares (Duarte Filho, 2002).

---

*Cálculos iniciais:*

1. Leitura de dados referentes ao MCDG ( $\Delta\lambda$ ,  $\lambda_{\max}$ ,  $tol$ );

2. Inicializar variáveis:  $\lambda_0^1 = 0$  ;  $\Delta\lambda_1^1 = \Delta\lambda$  e  $i = 0$ .

---

*Análise incremental / iterativa:*

ENQUANTO ( $\lambda < \lambda_{\max}$ ) FAÇA:

$i = i + 1$  (contador do número de passos de carga);

$j = 0$  (contador do número de iterações);

ENQUANTO ( $tol\_res > tol$ ) FAÇA:

$j = j + 1$  (contador do número de iterações);

Montar a matriz de rigidez global  $\mathbf{K}_{j-1}^i$ ;

SE ( $j = 1$ ) ENTÃO: (primeira iteração)

Calcular:  $\mathbf{K}_{j-1}^i \mathbf{u}_{1j}^i = \mathbf{P}$  e  $\mathbf{u}_{2j}^i = \mathbf{0}$ ;

SE ( $i \neq 1$ ) ENTÃO :

$$\Delta\lambda_1^i = \pm \Delta\lambda_1^1 \left( |\text{GSP}| \right)^{1/2}$$

SE ( $\text{GSP}^i < 0$  e  $\text{GSP}^{i-1} > 0$ ) ENTÃO:

$$\Delta\lambda_j^i = -\Delta\lambda_j^i \text{ (mudar direção do carregamento);}$$

FIM DO SE

FIM DO SE;

SENÃO: (caso de  $j \neq 1$ )

$$\text{Calcular: } \mathbf{K}_{j-1}^i \mathbf{u}_{1j}^i = \mathbf{P} \text{ ; } \mathbf{K}_{j-1}^i \mathbf{u}_{2j}^i = \mathbf{r}_{j-1}^i \text{ e } \Delta\lambda_j^i = -\frac{\{\mathbf{u}_1\}_1^{i-1} \{\mathbf{u}_2\}_j^i}{\{\mathbf{u}_1\}_1^{i-1} \{\mathbf{u}_1\}_j^i}$$

FIM DO SE

Calcular o incremento de deslocamentos:  $\Delta\mathbf{U}_j^i = \Delta\lambda_j^i \mathbf{u}_{1j}^i + \mathbf{u}_{2j}^i$ ;

Calcular o incremento de deformações  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^i$ ;

Atualizar as coordenadas;

Calcular o incremento do vetor de forças internas  $\Delta\mathbf{f}_j^i$ ;

Atualizar o fator de carga  $\lambda_j^i = \lambda_{j-1}^i + \Delta\lambda_j^i$ ;

Calcular o vetor residuo:  $\mathbf{s}_j^i = \lambda_j^i \mathbf{P}^* - \mathbf{f}_j^i$ ;

Calcular:  $tol\_res = \|\mathbf{s}_j^i\| / \|\lambda_j^i \mathbf{P}^*\|$ .

FIM DO ENQUANTO (continua-se o laço caso  $tol\_res > tol$ );

FIM DO ENQUANTO (continua-se o laço caso  $\lambda < \lambda_{\max}$ ).

Fim do processo incremental / iterativo.

---

## 4. ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA

### 4.1 INTRODUÇÃO

De acordo com Liu *et al.* (1998), com o uso de um sistema co-rotacional, a integração das relações constitutivas elastoplásticas com deformações finitas assume uma forma mais simples, tal qual na teoria das pequenas deformações. A integração das relações constitutivas é realizada a nível de elemento no sistema co-rotacional. O esquema de integração proposto por Sloan *et al.* (2001) é usado neste trabalho para tratar da não-linearidade física. Pode-se resumir o esquema de integração utilizado em computar um estado teste de tensões elásticas, encontrar a intersecção com a superfície de escoamento (considerando também o caso de descarregamento elastoplástico), atualização das tensões e correção das tensões para a superfície de escoamento.

Neste capítulo são apresentados os conceitos relacionados com a plasticidade. Inicialmente, são apresentados conceitos básicos sobre o comportamento de materiais elastoplásticos. É também apresentada a formulação do comportamento elastoplástico para o caso unidimensional, tanto para o modelo elastoplástico perfeito como para o modelo elastoplástico com encruamento isotrópico linear. Faz-se uma revisão sobre os critérios de plastificação utilizados e a formulação implementada. Na seqüência é feita a generalização da formulação para o caso de análise tridimensional via elementos finitos quando então são dados detalhes do esquema de integração acima citado.

### 4.2 CONCEITOS BÁSICOS

O comportamento plástico de um material pode ser caracterizado, a nível macroscópico, pela ocorrência de deformações irreversíveis, ou seja, não recuperáveis, observadas em um ciclo de carregamento e descarregamento. Usualmente, o material apresenta um nível de tensão, denominado tensão de escoamento, que uma vez atingido pode levar à ocorrência de deformações plásticas.

Materiais elastoplásticos perfeitos são aqueles nos quais a tensão jamais excede a tensão de escoamento e uma vez que esta seja atingida e mantida arbitrariamente, toda a deformação adicional que passa a ocorrer é exclusivamente de natureza plástica. É o que se mostra na Fig. 4.1, no caso de tração uniaxial.

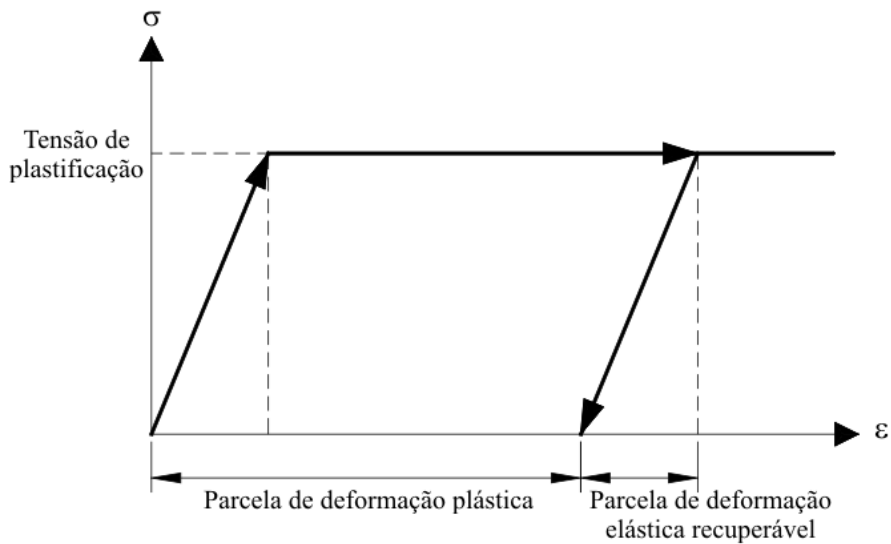


FIGURA 4.1 – Relação constitutiva elastoplástica perfeita

Materiais cuja tensão pode aumentar além da tensão de escoamento (usualmente denominada nesse caso de limite elástico) apresentam o fenômeno do encruamento positivo ou endurecimento, como mostrado na Fig. 4.2.

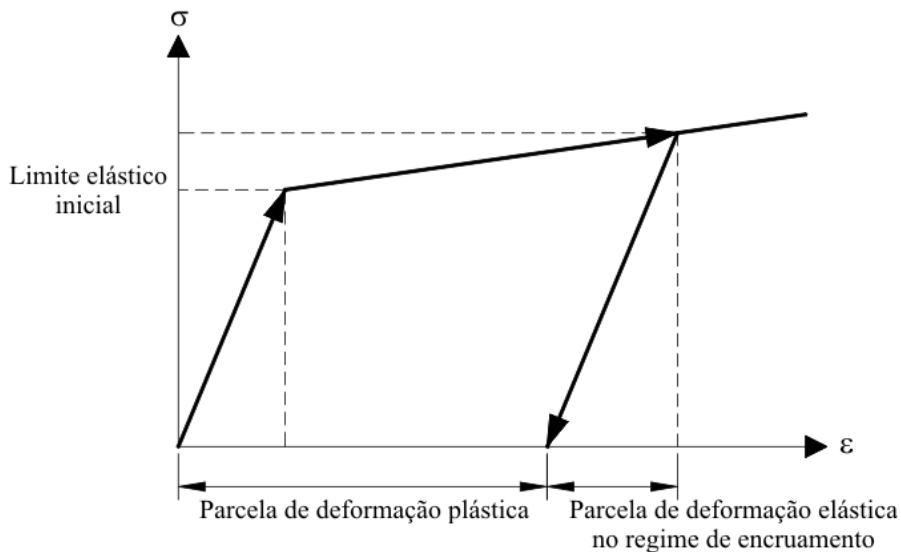


FIGURA 4.2 – Relação constitutiva elastoplástica com encruamento

Nos materiais em regime elastoplástico, a deformação total é composta por parcelas elástica e plástica. No regime elastoplástico não há uma correspondência unívoca entre tensão e deformação, sendo necessário o conhecimento da história de carregamento, caracterizada pelo nível de deformação plástica acumulada.

### 4.3 COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO UNIDIMENSIONAL.

Admite-se que a deformação total ( $\varepsilon$ ) possa ser desmembrada em duas parcelas, elástica ( $\varepsilon^e$ ) e plástica ( $\varepsilon^p$ ), de tal forma que:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (4.1)$$

A relação constitutiva para o comportamento elastoplástico unidimensional pode ser escrita como:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad (4.2)$$

na qual  $\sigma$  é a tensão, e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Pode-se escrever a relação constitutiva em termos de taxas, admitindo-se que a tensão e as deformações plástica e elástica sejam funções contínuas no tempo:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p), \quad (4.3)$$

sendo  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ ,  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$  e  $\dot{\varepsilon}^p = \frac{d\varepsilon^p}{dt}$ .

#### 4.3.1 Comportamento elastoplástico perfeito

Em um modelo elastoplástico perfeito, a tensão não pode exceder, em valor absoluto, a tensão de plastificação  $\sigma_y$ . Pode-se expressar tal condição através do seguinte critério de plastificação, o qual define o intervalo de tensões admissíveis:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0. \quad (4.4)$$

A evolução da plastificação ( $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ ) ocorre apenas se  $f(\sigma) = 0$ , ou seja, quando  $|\sigma| = \sigma_y$ . Para  $f(\sigma) < 0$ , ou seja para  $|\sigma| < \sigma_y$  a resposta do material é exclusivamente elástica ( $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e$ ,  $\dot{\varepsilon}^p = 0$ ). Usualmente, denomina-se  $\dot{\lambda} \geq 0$  ao valor do módulo da taxa de deformação plástica. Portanto, valem as relações:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}, \text{ caso } \sigma = \sigma_y, \quad (4.5)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda}, \text{ caso } \sigma = -\sigma_y. \quad (4.6)$$

De modo compacto, pode-se escrever:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma), \quad (4.7)$$

sendo  $\text{sign}(\sigma) = +1$ , para  $\sigma > 0$  e  $\text{sign}(\sigma) = -1$ , para  $\sigma < 0$ .

Pode-se notar claramente uma condição de complementariedade, entre  $\dot{\lambda}$  e  $f$ , expressa na seguinte forma:

$$\dot{\lambda} f = 0. \quad (4.8)$$

Um estado de tensão tal que  $f(\sigma) = 0$  não implica obrigatoriamente em evolução da plastificação. Se faz necessário verificar a variação da função  $f$  no tempo ( $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$ ). Caso  $f = 0$  e  $\dot{f} = 0$ , haverá evolução da plastificação pois o novo estado de tensão se manterá sobre o limite  $\sigma_y$ , logo  $\dot{\lambda} > 0$ . Caso  $f = 0$  e  $\dot{f} < 0$ , configura-se uma situação de descarregamento e, portanto  $\dot{\lambda} = 0$  (não havendo variação da deformação plástica). Pode-se visualizar as possibilidades descritas na Fig. 4.3. Desta maneira a chamada condição de consistência é estabelecida:

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0. \quad (4.9)$$

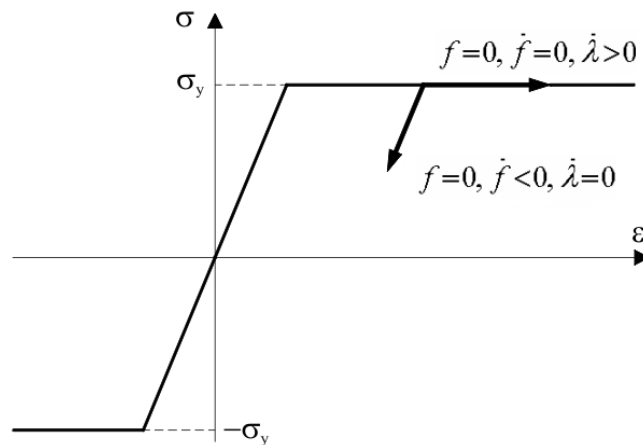


FIGURA 4.3 – Comportamento elastoplástico perfeito

A condição de consistência possibilita a obtenção de uma expressão para  $\dot{\lambda}$  impondo-se  $\dot{f} = 0$ :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial |\sigma|}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \text{sign}(\sigma) E (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = \text{sign}(\sigma) E \dot{\epsilon} - \text{sign}(\sigma)^2 E \dot{\lambda} = 0. \quad (4.10)$$

Uma vez que  $\text{sign}(\sigma)^2 = 1$ , chega-se a:

$$\dot{\lambda} = \text{sign}(\sigma) \dot{\epsilon}. \quad (4.11)$$

Substituindo-se a Eq. 4.11 na Eq. 4.7, chega-se à expressão da deformação plástica:



$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}, \quad (4.12)$$

indicando assim que no escoamento, todo acréscimo de deformação é de origem plástica.

#### 4.3.2 Comportamento elastoplástico com encruamento

Neste caso, o intervalo elástico inicial é alterado com a evolução da superfície de plastificação, seja em tamanho (isotrópico), posição (cinemático) ou numa combinação de ambos (misto).

O encruamento é chamado isotrópico quando ocorre uma expansão do intervalo elástico de modo simétrico ao seu centro, ou seja, uma dilatação uniforme da superfície de plastificação. Normalmente, postula-se que o encruamento seja função da deformação plástica acumulada (encruamento por deformação). Caso seja diretamente proporcional ao módulo de deformação plástica, o encruamento isotrópico é dito linear, como ilustrado na Fig. 4.4. Para este caso, a função de plastificação é expressa da seguinte maneira:

$$f(\sigma, \kappa) = |\sigma| - (\sigma_y + H\kappa) \leq 0, \quad (4.13)$$

sendo  $H$  o módulo plástico de encruamento isotrópico e  $\kappa$  o parâmetro do encruamento, neste caso, a deformação plástica acumulada, definida por:

$$\kappa = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt. \quad (4.14)$$

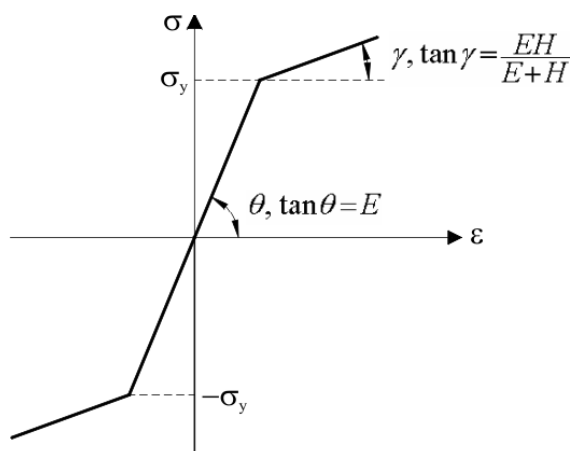


FIGURA 4.4 – Encruamento isotrópico linear

O módulo utilizado na Eq. 4.13 implica que a evolução da plastificação tanto na compressão como na tração produz encruamento, ou seja, um aumento do intervalo elástico inicial.

De modo análogo às Eq. 4.5 e 4.6, as condições sobre  $\dot{\varepsilon}^p$  são agora expressas por:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}, \text{ caso } \sigma = (\sigma_y + H\kappa), \quad (4.15)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda}, \text{ caso } \sigma = -(\sigma_y + H\kappa). \quad (4.16)$$

Pode-se concluir das Eq. 4.15 e 4.16 que  $\dot{\lambda} = |\dot{\varepsilon}^p|$  e da Eq. 4.14 que  $\dot{\kappa} = |\dot{\varepsilon}^p|$  chegando-se a seguinte igualdade:

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda}. \quad (4.17)$$

Utilizando-se agora a condição de consistência ( $\dot{\lambda} > 0$  se  $f = 0$  e  $\dot{f} = 0$ : carga plástica; ou  $\dot{\lambda} = 0$  se  $f < 0$  ou  $f = 0$ : regime elástico ou descarga elástica) e as Eq. 4.3, 4.7, 4.13 e 4.17, é possível obter uma expressão para  $\dot{\lambda}$ :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\kappa} = \text{sign}(\sigma)E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\text{sign}(\sigma)) - H\dot{\lambda} = 0, \quad (4.18)$$

de onde, isolando-se  $\dot{\lambda}$ , obtém-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma)E}{E+H} \dot{\varepsilon}. \quad (4.19)$$

Combinando-se as Eq. 4.3, 4.7 e 4.19, calcula-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E+H} \dot{\varepsilon}, \quad (4.20)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{EH}{E+H} \dot{\varepsilon}, \quad (4.21)$$

A relação  $\frac{EH}{E+H}$  define o módulo elastoplástico tangente,  $E_T$ , no trecho de encruamento, como se vê na Fig. 4.4. Além disso, utilizando-se as Eq. 4.20 e 4.21 chega-se à expressão que dá o significado físico do módulo plástico  $H$ :

$$H = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\varepsilon}^p} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^p}. \quad (4.54)$$

Portanto,  $H$  é a variação da tensão em relação à deformação plástica.

#### 4.4 CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

O critério de escoamento define os limites elásticos de um material sob combinados estados de tensões. Sabe-se que o limite elástico em um ensaio de tração é a tensão de escoamento  $\sigma_y$ , enquanto que para um ensaio de cisalhamento é a tensão de escoamento  $\tau_y$ . Em geral, o limite elástico ou tensão de escoamento é uma função do estado de tensões  $\sigma_{ij}$ . Conseqüentemente, a condição de escoamento pode ser expressa usualmente como:

$$f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0, \quad (4.23)$$

onde,  $k_1, k_2, \dots$  são constantes do material, as quais, assim como  $\sigma_y$  e  $\tau_y$ , necessitam ser determinadas experimentalmente. Para materiais isotrópicos, os valores das três tensões principais são suficientes para descrever o estado de tensão de forma única. Portanto pode-se escrever o critério de escoamento em função das tensões principais. É possível expressar as tensões principais  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ , como combinação dos três invariantes de tensão  $I_1, J_2$  e  $J_3$ , onde  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões  $\sigma_{ij}$ , e  $J_2$  e  $J_3$  são o segundo e o terceiro invariantes do tensor desviador  $s_{ij}$ . Qualquer critério de escoamento deve ser independente da orientação do sistema de coordenadas utilizado, portanto deve ser função dos três invariantes de tensões:

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0, \quad (4.24)$$

O critério de escoamento dos materiais deve ser determinado experimentalmente (Chen e Han, 1988). Um importante fato experimental para metais dúcteis é que o escoamento é independente da pressão hidrostática. No entanto, o comportamento de muitos materiais não metálicos, tais como solos, rochas e concreto, é caracterizado pela dependência da pressão hidrostática. A seguir são apresentados os critérios de plastificação de Von Mises e de Mohr-Coulomb.

##### 4.4.1 Critério de plastificação de Von Mises

De acordo com Owen e Hinton (1980), a utilização da lei de escoamento de von Mises, implica em considerar o início do escoamento quando a energia de distorção elástica (recuperável) atinge um valor crítico. Outra interpretação sugere que o

escoamento ocorre quando a tensão octaédrica de cisalhamento,  $\tau_{oct}$ , alcança um determinado valor crítico  $k$ , de tal forma que:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}k, \quad (4.25)$$

podendo ser escrita da seguinte forma:

$$f(J_2) = \sqrt{J_2} - k = 0, \quad (4.26)$$

na qual  $k$  é a tensão de escoamento para o caso de cisalhamento puro. O limite elástico será atingido quando, num teste de tração uniaxial,  $\sigma_1 = \sigma_y$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Substituindo-se estes valores na Eq. 4.26, chega-se a:

$$k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}. \quad (4.27)$$

Reescrevendo a Eq. 4.26 em função de  $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$  e da Eq. 4.27, chega-se ao conceito de tensão efetiva, ou tensão equivalente de von Mises ( $\bar{\sigma}$ ):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sigma_y. \quad (4.28)$$

A superfície de escoamento de von Mises pode ser interpretada geometricamente como sendo um cilindro centrado no eixo hidrostático (Fig. 4.5), cuja projeção no plano  $\pi$ , plano perpendicular ao eixo hidrostático, é um círculo de raio  $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$ , como pode ser visto na Fig. 4.6.

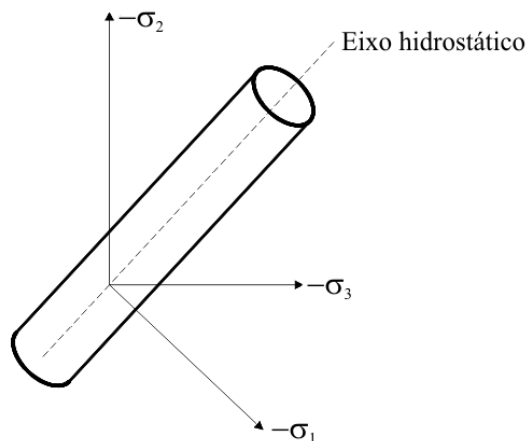


FIGURA 4.5 – Representação geométrica da superfície de von Mises no espaço das tensões principais.

Na Fig. 4.6 é mostrada a representação bidimensional da superfície de escoamento de von Mises para o plano  $\pi$  e para o plano  $\sigma_1 \times \sigma_2$ .

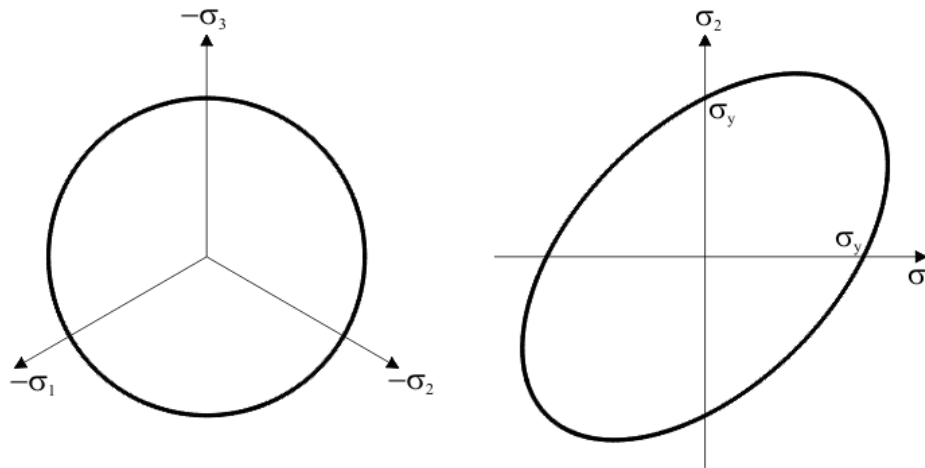


FIGURA 4.6 – Representação do critério de Von Mises

O critério de von Mises é amplamente utilizado para modelagem de metais dúcteis pela sua capacidade de reproduzir dados experimentais.

#### 4.4.2 Critério de plastificação de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb, e também o critério de Tresca, tem como base o pressuposto que o único parâmetro determinante da falha do material é a máxima tensão de cisalhamento. Diferentemente do critério de Tresca, no qual o valor crítico para a tensão de cisalhamento é considerado constante, o critério de Mohr-Coulomb considera a tensão de cisalhamento limitante ( $\tau$ ) em um plano como sendo função da tensão normal ( $\sigma$ ) neste mesmo plano, de tal forma que:

$$|\tau| = f(\sigma), \quad (4.29)$$

em que  $f(\sigma)$  é uma função envoltória determinada experimentalmente. A forma mais simples para a função envoltória de Mohr  $f(\sigma)$  é uma linha reta, conforme ilustrado na Fig. 4.7. A equação para a linha reta envoltória é conhecida com equação de Coulomb e tem a seguinte forma:

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi, \quad (4.30)$$

na qual  $c$  é a coesão e  $\phi$  é o ângulo de atrito interno, ambos constantes do material e determinados experimentalmente. O critério de falha associado à Eq. 4.30 é referenciado como critério de Mohr-Coulomb. Para o caso especial de materiais sem atrito interno, para os quais  $\phi = 0$ , a Eq. 4.30 se reduz ao critério da máxima tensão cisalhante de Tresca,  $\tau = c$ , e a coesão se torna igual à tensão de escoamento em cisalhamento puro  $c = k$ .

Da Eq. 4.30 e para  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , o critério de Mohr-Coulomb pode ser escrito como:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \phi = c - \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \sin \phi \right] \tan \phi. \quad (4.31)$$

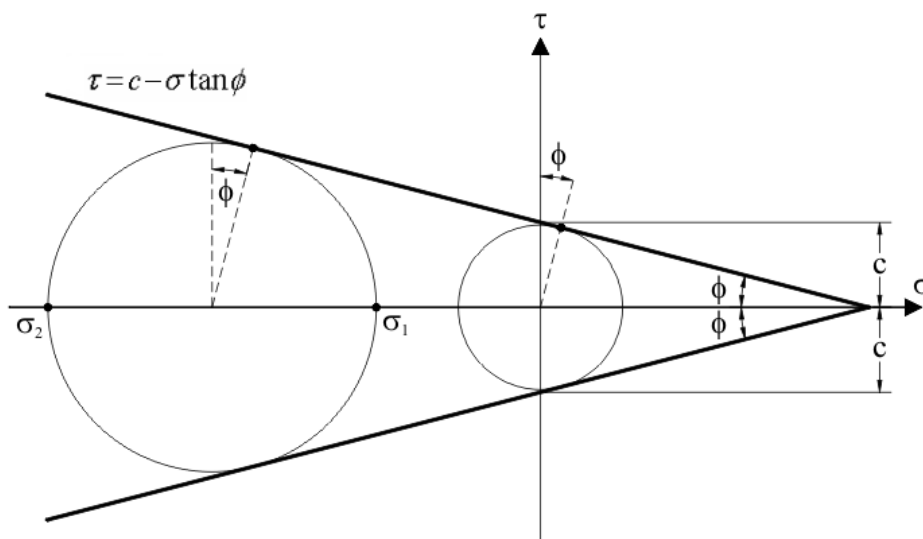


FIGURA 4.7 – Critério de Mohr-Coulomb

Em termos da representação gráfica de Mohr do estado de tensões, a Eq. 4.29 significa que a falha do material irá ocorrer se o raio do maior círculo principal for tangente à curva envoltória, como mostrado na Fig. 4.7.

No espaço das tensões principais, a superfície de Mohr-Coulomb assume a forma de um cone hexagonal irregular, conforme Fig. 4.8. Esta irregularidade se deve ao fato que a tensão  $\sigma_2$  não é considerada, como pode ser visto na Eq. 4.31. A forma cônica, ao invés de cilíndrica, se deve ao fato que a tensão hidrostática influencia no escoamento. O critério de Mohr-Coulomb é aplicável a concreto, rochas e solos.

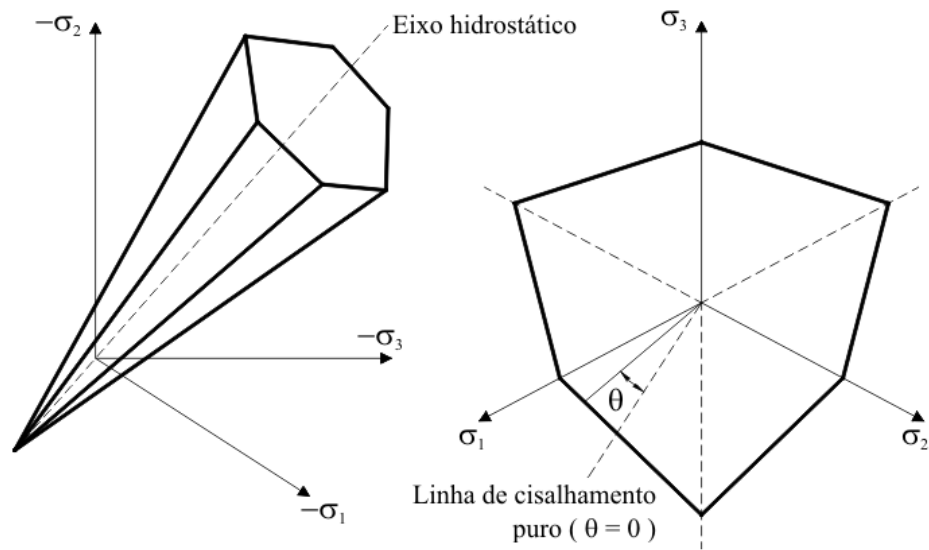


FIGURA 4.8 – Representação da superfície de plastificação de Mohr-Coulomb

#### 4.4.3 Critérios de plastificação para aplicações computacionais

Owen e Hinton (1980) apresentam uma forma muito conveniente, do ponto de vista computacional, para reescrever as funções de escoamento em termos dos invariantes de tensão. Essa formulação permite a construção de um código computacional generalizado para a função de escoamento e regra de fluxo, necessitando apenas a especificação dos valores de três constantes para cada critério em particular.

Deve-se reescrever as leis de escoamento em função dos invariantes de tensão  $I_1$  e  $J_2$ , e também do parâmetro  $\theta$ . O significado físico de  $\theta$  pode ser visto na Fig. 4.8. Para o critério de von Mises, não há necessidade de mudanças, já que neste caso a função de escoamento depende unicamente de  $J_2$ . Substituindo a Eq. 4.27 em 4.26 tem-se:

$$\sqrt{3}\sqrt{J_2} - \sigma_e = 0. \quad (4.32)$$

Já para o critério de Mohr-Coulomb, a Eq. 4.31 deve ser reescrita, resultando em (Owen e Hinton, 1980):

$$\frac{1}{3}I_1 \sin \phi - \sqrt{J_2} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) = c \cos \phi. \quad (4.33)$$

Para o cálculo da matriz elastoplástica, se faz necessário expressar o vetor de fluxo  $\mathbf{a}$  de forma apropriada para aplicações computacionais. Podemos escrever:

$$\mathbf{a}^t = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.34)$$

sendo  $\boldsymbol{\sigma}^t = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ .

Após algumas operações algébricas chega-se a:

$$\mathbf{a} = C_1 \mathbf{a}_1 + C_2 \mathbf{a}_2 + C_3 \mathbf{a}_3, \quad (4.35)$$

sendo:

$$\mathbf{a}_1^t = \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{a}_2^t = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}\},$$

$$\mathbf{a}_3^t = \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \left( s_y s_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left( s_x s_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left( s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ \left. 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}), 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{yz}), 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}) \right\},$$

em que  $s$  são as tensões desviadoras. As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são encontradas na tabela 4.1.

TABELA 4.1 – Constantes definindo a superfície de plastificação.

<i>Critério de Escoamento</i>	$C_1$	$C_2$	$C_3$
von Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\frac{1}{3} \text{sen } \phi$	$\cos \theta \left[ (1 + \tan \theta \tan 3\theta) + \text{sen } \phi (\tan 3\theta - \tan \theta) / \sqrt{3} \right]$	$\frac{(\sqrt{3} \text{sen } \theta + \cos \theta \text{sen } \phi)}{2J_2 \cos 3\theta}$

#### 4.5 ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS

Durante um passo ou iteração de uma análise elastoplástica por elementos finitos, as forças são aplicadas em incrementos e os correspondentes incrementos dos deslocamentos nodais são encontrados a partir das equações globais de rigidez. Uma vez conhecidos os deslocamentos, os incrementos de deformação nos pontos de integração dentro de cada elemento são determinados utilizando as relações deformação-deslocamento. Quando as tensões associadas com o incremento de



deformação imposto causar escoamento plástico, se faz necessário a resolução de um pequeno sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser escrito como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4.37)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} B, \quad (4.38)$$

em que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \{\dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_y, \dot{\sigma}_z, \dot{\tau}_{xy}, \dot{\tau}_{yz}, \dot{\tau}_{zx}\}^t$  é o vetor taxa de tensão,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}\}^t$  é o vetor taxa de deformação,  $\dot{\kappa}$  é a taxa do parâmetro de encruamento, e:

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e \mathbf{b} \mathbf{a}^t \mathbf{C}_e}{A + \mathbf{a}^t \mathbf{C}_e \mathbf{b}}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

*simétrica*

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^t \mathbf{C}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{A + \mathbf{a}^t \mathbf{C}_e \mathbf{b}}, \quad (4.41)$$

$$A = -\frac{\partial f}{\partial \kappa} \dot{\kappa}, \quad (4.42)$$

$$B = -\frac{A}{\partial f / \partial \kappa}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.45)$$

Nas Eq. 4.37 a 4.45,  $\mathbf{C}_{ep}$  é a matriz tensão-deformação elastoplástica,  $\mathbf{C}_e$  é a matriz tensão-deformação elástica,  $K$  é o módulo de compressibilidade do material,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $f$  é a função de escoamento e  $g$  é a função potencial plástica. Quando  $f = g$ , temos a chamada a regra de fluxo associada, que é observada na maioria dos materiais. Em leis constitutivas elastoplásticas convencionais os módulos  $K$  e  $G$ , e conseqüentemente a matriz constitutiva elástica  $\mathbf{C}_e$ , são independentes das tensões e necessitam ser computados uma única vez.

#### 4.6 INTEGRAÇÃO DAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTOPLÁSTICAS

Para integrar numericamente as Eq. 4.37 e 4.38, é conveniente introduzir um tempo  $T$ , definido por:

$$T = (t - t_0)/\Delta t, \quad (4.46)$$

em que  $t_0$  é o tempo no início do incremento de carga,  $t_0 + \Delta t$  é o tempo no final do incremento de carga, e  $0 \leq T \leq 1$ . Desde que  $dT/dt = 1/\Delta t$ , aplicando-se a regra da diferenciação em cadeia, em  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $\dot{\kappa}$  nas Eq. 4.37 e 4.38 tem-se:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dT} = \mathbf{C}_{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left( \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e \mathbf{b} \mathbf{a}' \mathbf{C}_e}{A + \mathbf{a}' \mathbf{C}_e \mathbf{b}} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\sigma}_e - \Delta \lambda \mathbf{C}_e \mathbf{b}, \quad (4.47)$$

$$\frac{d\kappa}{dT} = \dot{\lambda} \Delta t B = \Delta \lambda B, \quad (4.48)$$

sendo,

$$\Delta \lambda = \frac{\mathbf{a}' \mathbf{C}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{A + \mathbf{a}' \mathbf{C}_e \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}' \Delta \boldsymbol{\sigma}_e}{A + \mathbf{a}' \mathbf{C}_e \mathbf{b}}. \quad (4.49)$$

Assume-se que a taxa de deformação é constante e igual a  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}/\Delta t$ . As equações 4.47 e 4.48 definem um problema clássico de valor inicial a ser integrado sobre o pseudo-intervalo de tempo  $T = 0$  até  $T = 1$ . Os valores conhecidos nestas relações são os incrementos de deformação impostos,  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , juntamente com as tensões e o parâmetro de encruamento no início de cada incremento de tempo.

#### 4.7 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO EXPLÍCITO

Os algoritmos de subincrementação utilizados para integração das leis constitutivas neste trabalho, foi proposto por Sloan *et al.* (2001). A integração é feita dividindo-se automaticamente o incremento de deformação em um número de subpassos. O tamanho apropriado para cada subpasso é encontrado através do uso do método de Euler modificado, elaborado para fornecer uma estimativa do erro local. O procedimento de integração utilizado neste trabalho pode ser utilizado nos casos de comportamento elástico não-linear. No algoritmo de integração há subrotinas para o controle dos casos de descarregamento elastoplástico, para computar a intersecção e

restaurar as tensões para a superfície de escoamento. Tais procedimentos serão vistos com mais detalhe a seguir.

#### 4.7.1 Intersecção com a Superfície de Escoamento

Dado um vetor de incrementos de deformações impostos  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , pode-se encontrar um incremento teste de tensões elásticas  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$  utilizando a lei de Hooke conforme:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C}_e \Delta\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.50)$$

Caso a parte elástica da relação constitutiva seja linear, a matriz tensão-deformação  $\mathbf{C}_e$  é independente das tensões e se torna trivial computar o estado teste de tensões elásticas  $\boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_e$ , sendo que  $\boldsymbol{\sigma}_0$  é o estado de tensões inicial. Para o comportamento não-linear elástico, entretanto, a Eq. 4.50 deve ser integrada para encontrar o valor adequado de  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$ . Ao contrário do comportamento linear elástico, no qual o incremento teste de tensões elásticas  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$  é usado mais adiante no processo de integração, quando tem-se comportamento não-linear elástico,  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$  é usado unicamente para verificar se houve transição do estado de tensões, de elástico para plástico. Esta transição ocorre quando ambas as condições são satisfeitas:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0, \kappa_0) < 0, \quad (4.51)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_e, \kappa_0) > 0, \quad (4.52)$$

Quando a transição acontece, se faz necessário determinar a fração de  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  que move o estado de tensões de  $\boldsymbol{\sigma}_0$  para o estado de tensões  $\boldsymbol{\sigma}_{int}$  na superfície de escoamento. Esta situação, mostrada na Fig. 4.9, pode aparecer muitas vezes durante o andamento de uma análise elastoplástica por elementos finitos, portanto necessita ser manejada de forma eficiente e precisa. Na análise numérica, a condição exata de escoamento  $f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$  é substituída pela condição aproximada  $|f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)| \leq FTOL$ , sendo que  $FTOL$  é uma pequena tolerância positiva. Isto admite os efeitos de precisão aritmética finita e modifica as condições de escoamento para:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0, \kappa_0) < -FTOL, \quad (4.53)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_e, \kappa_0) > +FTOL. \quad (4.54)$$

Sloan *et al.* (2001) recomendam como adequados para a tolerância da superfície de escoamento, valores na faixa de  $10^{-6}$  a  $10^{-9}$ .

Então o problema de se encontrar as tensões na intersecção da superfície de escoamento  $\sigma_{int}$  se torna equivalente a encontrar a quantidade escalar  $\alpha$ , que satisfaz a seguinte equação não linear:

$$f(\sigma_0 + \alpha C_e \Delta \epsilon, \kappa_0) = f(\sigma_{int}, \kappa_0) = 0, \quad (4.55)$$

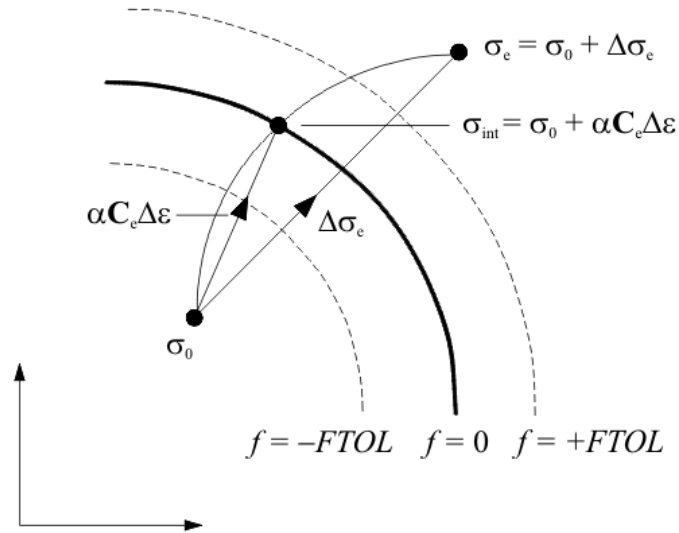


FIGURA 4.9 – Intersecção com a superfície de escoamento: transição de estado elástico para o plástico

Um valor de  $\alpha = 0$  indica que  $\Delta \epsilon$  causa unicamente deformação plástica, enquanto um valor de  $\alpha = 1$  indica deformação unicamente elástica. Deste modo, tem-se para a transição de estado elástico para plástico,  $0 < \alpha < 1$  e a parte elástica do incremento de tensões é dada por  $\alpha C_e \Delta \epsilon$ .

A Eq. 4.55 define uma única equação não-linear na variável  $\alpha$  e pode ser resolvida por vários métodos numéricos. Dowell e Jarratt (1972) propuseram o procedimento *Pegasus*, que é perfeitamente adaptado para resolver o problema da intersecção com a superfície de escoamento definido na Eq. 4.55. Tal procedimento é incondicionalmente convergente, não requer o uso de derivadas e converge tipicamente em 4 ou 5 iterações (mesmo quando usado com valores rigorosos de *FTOL*).

O algoritmo *Pegasus* tem como dados de entrada a tensão  $\sigma_0$ , o parâmetro de encruamento  $\kappa_0$ , o incremento de deformação  $\Delta \epsilon$ , os valores limites para a intersecção com a superfície de escoamento  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ , o número máximo de iterações *MAXITS* e a tolerância para a função de escoamento *FTOL*. O algoritmo para modelos elastoplásticos convencionais pode ser visto na tabela A.1, localizada no Anexo I.

#### 4.7.2 Descarregamento elastoplástico

Uma transição do estado elástico para o plástico pode ocorrer também se um ponto de tensões, que está inicialmente sobre a superfície de escoamento, for sujeito a um incremento de tensão elastoplástico conforme a Fig. 4.10. Esta situação aparece quando o ângulo  $\theta$  entre o gradiente da superfície de escoamento  $\mathbf{a}_0$  e o incremento de tensão  $\Delta\sigma_e$  é maior que  $90^\circ$  e  $f(\sigma_e, \kappa_0) > +FTOL$ . A primeira condição pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a}_0' \Delta\sigma_e}{\|\mathbf{a}_0\|_2 \|\Delta\sigma_e\|_2} > -LTOL, \quad (4.56)$$

em que  $\mathbf{a}_0$  é avaliado no estado de tensão inicial  $\sigma_0$ ,  $\Delta\sigma_e$  é computado utilizando o módulo de elasticidade tangente, e  $LTOL$  é uma tolerância apropriada. Este tipo de trajetória de tensões ocorre próximo à extremidade de uma superfície de falha se  $\Delta\sigma_e$  é grande devido ao uso de incrementos de carga discretos. Devido à parcela da trajetória das tensões dentro da superfície de escoamento ser elástica, podendo então ser integrada de forma exata, as leis constitutivas elastoplásticas necessitam somente ser integradas numericamente além do último ponto de intersecção com a superfície de escoamento.

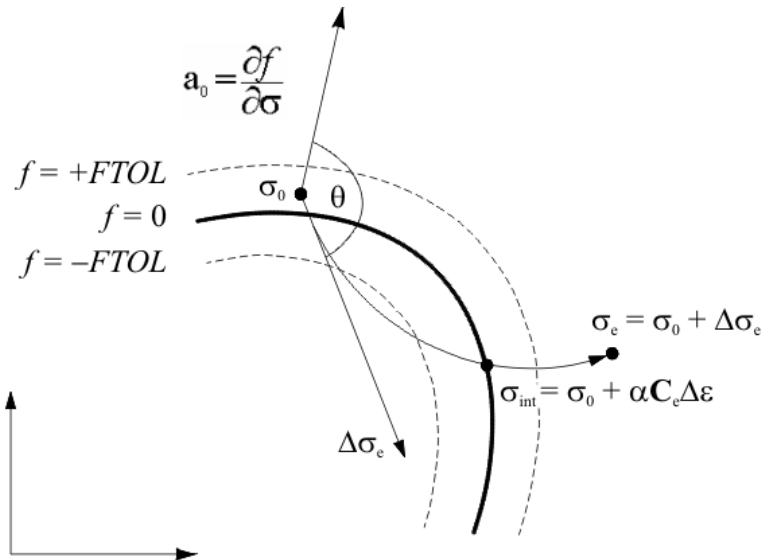


FIGURA 4.10 – Intersecção com a superfície de escoamento: descarregamento elastoplástico

O procedimento para encontrar a intersecção com a superfície de escoamento para descarregamento elastoplástico é o mesmo mostrado na seção 4.7.1, embora

diferentes valores iniciais de  $\alpha$  devem ser usados. A situação é complicada pelo fato que o incremento de tensão pode cruzar a superfície de escoamento duas vezes, como mostrado na Fig. 4.11. Esta possibilidade é causada pelo uso da tolerância  $FTOL$ , que permite que as tensões fiquem, por pouco, fora da superfície de escoamento e devem ser consideradas apropriadamente. Para assegurar que o algoritmo *Pegasus* encontre a intersecção correta, é suficiente determinar valores iniciais de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  que satisfaçam as seguintes condições:

$$f(\sigma_0 + \alpha_0 \mathbf{C}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \kappa_0) < -FTOL, \quad (4.57)$$

$$f(\sigma_0 + \alpha_1 \mathbf{C}_e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \kappa_0) > FTOL, \quad (4.58)$$

Essas condições garantem que o valor de  $\alpha$  encontrado seja o correspondente à segunda intersecção com a superfície de escoamento. Novamente,  $0 < \alpha < 1$ , pois é assumido que  $f(\sigma_e, \kappa) > FTOL$ .

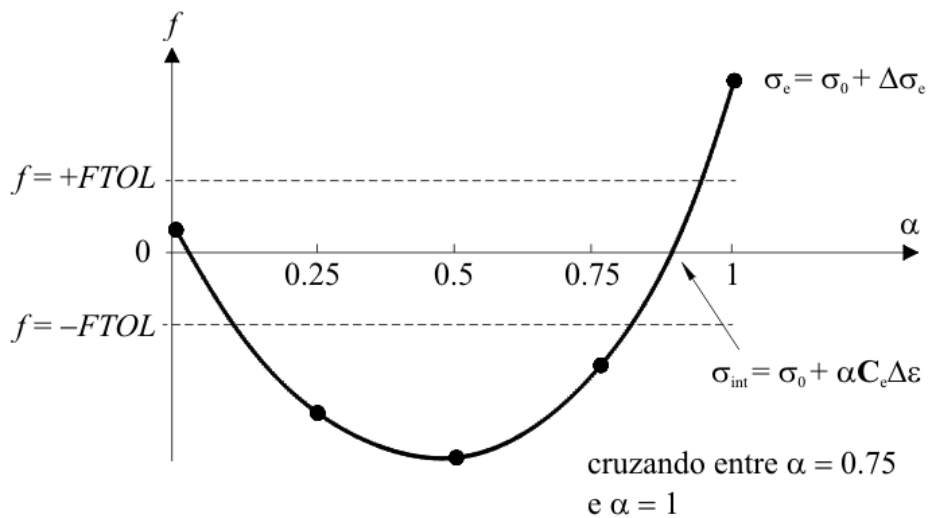


FIGURA 4.11 – Valores iniciais para a intersecção com a superfície de escoamento: descarregamento elastoplástico

Uma estratégia não refinada, porém de êxito para encontrar os valores de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  que envolvam a intersecção desejada, é a de se dividir o incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  em um número menor de subincrementos. O número de subincrementos utilizado na busca,  $NSUB$ , é tipicamente fixado em 10. Na primeira iteração do algoritmo o tamanho do subincremento é fixado em  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} / NSUB$  (o que corresponde a subincrementos em  $\Delta \alpha = 1 / NSUB$ ). É feita então uma verificação se a intersecção está

contida nos intervalos definidos pelos pares  $(\alpha_{n-1}, \alpha_1)$ , sendo  $\alpha_n = \alpha_{n-1} + n\Delta\alpha$ ,  $\alpha_0 = 0$  e  $n = 1, 2, \dots, NSUB$ . A intersecção está contida no intervalo caso sejam verdadeiras as seguintes condições:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0 + \alpha_{n-1}\mathbf{C}_e\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa_0) < -FTOL, \quad (4.59)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0 + \alpha_n\mathbf{C}_e\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa_0) > FTOL, \quad (4.60)$$

Pode-se visualizar uma ilustração da procura da intersecção com 4 subincrementos na Fig. 4.11. Neste exemplo a intersecção com a superfície de escoamento está entre os valores  $\alpha_0 = 0.75$  e  $\alpha_1 = 1$ , portanto esses valores limítrofes serão utilizados como valores iniciais para o cálculo da intersecção com a superfície de escoamento pelo algoritmo *Pegasus* (Dowell e Jarratt, 1972).

Quando o incremento de deslocamento  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  é muito grande, ou se o incremento de tensões  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$  é aproximadamente tangente à superfície de escoamento o tamanho do subincremento inicial pode não ser pequeno suficiente para detectar a intersecção requerida. Essa situação pode ser verificada testando-se para cada intervalo  $(\alpha_{n-1}, \alpha_1)$  as seguintes condições:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0 + \alpha_{n-1}\mathbf{C}_e\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa_0) \geq -FTOL, \quad (4.61)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0 + \alpha_n\mathbf{C}_e\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa_0) > FTOL, \quad (4.62)$$

Caso sejam verdadeiras as duas condições, sabe-se que a intersecção está contida no intervalo  $(0, \alpha_n)$  e a busca deve ser reiniciada utilizando-se um subincremento de menor tamanho,  $\Delta\alpha = \alpha_n/NSUB$ . A estratégia descrita acima, para modelos elastoplásticos convencionais, pode ser encontrada na tabela A.2.

### 4.7.3 Correção das tensões para a superfície de escoamento

No final de cada subincremento no processo de integração explícito, as tensões podem diferir da condição de escoamento tal que  $|f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)| > FTOL$ . A amplitude dessa violação, que é conhecida como desvio da superfície de escoamento, depende da precisão do método de integração e da não-linearidade das relações constitutivas. A correção das tensões para a superfície de escoamento é de fato recomendada, principalmente para modelos constitutivos mais complexos (Crisfield, 1991). A seguir

será descrito o método utilizado neste trabalho para restaurar as tensões para a superfície de escoamento, referenciado como Método do Retorno Radial.

Considerando um ponto onde as tensões não-corrigidas e o parâmetro de encruamento, definidos por  $\boldsymbol{\sigma}_0$  e  $\kappa_0$ , violam a condição de escoamento tal que  $|f(\boldsymbol{\sigma}_0, \kappa_0)| > FTOL$ . Ignorando termos de segunda ordem e superiores,  $f$  pode ser expandida em uma série de Taylor neste ponto de tensão fornecendo:

$$f = f_0 + \mathbf{a}'_0 \delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial H} \delta H, \quad (4.63)$$

em que  $\delta \boldsymbol{\sigma}$  é uma pequena correção nas tensões,  $\delta \kappa$  é uma pequena correção no parâmetro de encruamento,  $f_0 = f(\boldsymbol{\sigma}_0, \kappa_0)$ , e  $\mathbf{a}_0$  é avaliado em  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . Ao retornar o estado de tensões para a superfície de escoamento é desejável que o incremento de deformação total  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  permaneça inalterado. Da Eq. 4.47, temos que o incremento de deformação permanece inalterado para a correção de tensões que obedeça a seguinte relação:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = -\delta \lambda \mathbf{C}_e \mathbf{b}_0, \quad (4.64)$$

na qual  $\delta \lambda$  é um multiplicador desconhecido e  $\mathbf{b}_0$  é avaliado em  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . Utilizando a Eq. 4.38, a correção correspondente ao parâmetro de encruamento é dada por:

$$\delta \kappa = \delta \lambda B_0 = -\delta \lambda \frac{A_0}{df/d\kappa}, \quad (4.65)$$

na qual  $A_0$  e  $B_0$  são avaliados em  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . Combinando as equações 4.26 a 4.28 e fixando  $f = 0$  obtêm-se o valor do multiplicador  $\delta \lambda$ :

$$\delta \lambda = \frac{f_0}{A_0 + \mathbf{a}'_0 \mathbf{C}_e \mathbf{b}_0}, \quad (4.66)$$

As correções para as tensões e para o parâmetro do encruamento são, deste modo, dados por:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = -\frac{f_0 \mathbf{C}_e \mathbf{b}_0}{A_0 + \mathbf{a}'_0 \mathbf{C}_e \mathbf{b}_0}, \quad (4.67)$$

$$\delta \kappa = \frac{f_0 B_0}{A_0 + \mathbf{a}'_0 \mathbf{C}_e \mathbf{b}_0}, \quad (4.68)$$

e o estado de tensões aprimorado, que é mais próximo da superfície de escoamento é obtido por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \delta \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.69)$$

$$\kappa = \kappa_0 + \delta \kappa, \quad (4.70)$$



Este tipo de procedimento, conhecido como correção consistente, pode ser aplicado repetidamente até que a condição  $|f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)| \leq FTOL$  seja atingida. Em certas condições, como as que ocorrem próximo ao extremo da superfície de escoamento de Mohr-Coulomb para materiais com uma regra de fluxo não-associada, esta técnica pode não convergir. O comportamento não-convergente é usualmente verificado quando o estado de tensões corrigidas se distancia da superfície de escoamento. Nestas circunstâncias o procedimento de correção consistente pode ser abandonado por uma iteração e substituído por uma correção que é normal à superfície de escoamento. Este último método, chamado de correção normal não preserva o incremento de deformação total aplicado, mas é robusto e tem sido usado com sucesso por Owen e Hinton (1980). Com a correção normal, a Eq. 4.64 é substituída por:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = -\delta\lambda\mathbf{a}_0, \quad (4.71)$$

e assume-se que o parâmetro de encruamento  $\kappa_0$  permanece inalterado. A correção do estado de tensões então é dada por:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = -\frac{f_0\mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_0^T\mathbf{a}_0}, \quad (4.72)$$

Este tipo de correção também pode ser aplicado iterativamente até que a condição  $|f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_0)| \leq FTOL$  seja atingida.

O algoritmo para o retorno das tensões à superfície de escoamento para um modelo elastoplástico genérico pode ser encontrado na tabela A.3.

#### 4.7.4 Método de Euler modificado

Para um dado incremento de deformação  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , as relações constitutivas a serem integradas em cada ponto de Gauss são descritas pelas equações 4.47 e 4.48. Estas equações descrevem um sistema de equações diferenciais ordinárias com as condições  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$  e  $\kappa = \kappa_0$  no início do incremento onde  $T = 0$  e  $t = t_0$ . Vários métodos de integração explícitos podem ser usados para encontrar as tensões no final do incremento, onde  $T = 1$ . O método utilizado neste trabalho foi proposto por Sloan (2002). Este método é atrativo para aplicações de elementos finitos, pois procura controlar os erros nas tensões e no parâmetro de encruamento originados da integração aproximada das relações constitutivas. Seguindo uma prática utilizada largamente para

resolução de equações diferenciais ordinárias, o controle de erro é alcançado utilizando-se uma estimativa do erro local para automaticamente subincrementar o incremento de deformação imposto  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ . Para cada subincremento, a estimativa do erro local é encontrada como a diferença entre a solução de Euler modificada com precisão de segunda ordem e a solução de Euler com precisão de primeira ordem. Uma vez computado o erro local para um dado passo, o tamanho do próximo passo é determinado utilizando uma expressão para o termo de erro dominante. Este tipo de controle de erro permite que o tamanho de cada subincremento varie ao longo do processo de integração, dependendo da não-linearidade das relações constitutivas.

Considerando um subincremento de tempo nos limites  $0 \leq \Delta T_n \leq 1$ , onde o índice  $n-1$  e  $n$  denotam quantidades avaliadas nos pseudo-tempos  $T_{n-1}$  e  $T_n = T_{n-1} + \Delta T_n$ . Com o Método Explícito de Euler, os valores para  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\kappa$  no final do subincremento do  $\Delta T_n$  são encontrados com:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1, \quad (4.73)$$

$$\kappa_n = \kappa_{n-1} + \Delta\kappa_1, \quad (4.74)$$

sendo:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{C}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}_{n-1}, \kappa_{n-1})\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (4.75)$$

$$\Delta\kappa_1 = \Delta\lambda(\boldsymbol{\sigma}_{n-1}, \kappa_{n-1}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)B(\boldsymbol{\sigma}_{n-1}), \quad (4.76)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n = \Delta T_n \Delta\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.77)$$

Pode-se encontrar uma estimativa mais precisa das tensões e do parâmetro de encruamento no final do subincremento  $\Delta T_n$  utilizando o Método de Euler Modificado, o que fornece:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2), \quad (4.78)$$

$$\hat{\kappa}_n = \kappa_{n-1} + \frac{1}{2}(\Delta\kappa_1 + \Delta\kappa_2), \quad (4.79)$$

em que  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_1$  e  $\Delta\kappa_1$  são computados como no método de Euler, e:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{C}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1, \kappa_{n-1} + \Delta\kappa_1)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (4.80)$$

$$\Delta\kappa_2 = \Delta\lambda(\boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1, \kappa_{n-1} + \Delta\kappa_1, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)B(\boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1). \quad (4.81)$$

Sendo o erro local no método de Euler e no método de Euler modificado  $O(\Delta T^2)$  e  $O(\Delta T^3)$  respectivamente, o erro em  $\boldsymbol{\sigma}_n$  e  $\kappa_n$  pode ser estimado com:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_n \\ \hat{\kappa}_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \kappa_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1) \\ \frac{1}{2}(\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1) \end{Bmatrix}. \quad (4.82)$$

Utilizando alguma norma conveniente, esta quantidade pode ser usada para encontrar a medida de erro relativo:

$$R_n = \frac{1}{2} MAX \left\{ \frac{\|\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1\|}{\|\hat{\sigma}_n\|}, \frac{|\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1|}{\hat{\kappa}_n} \right\}, \quad (4.83)$$

nas quais as tensões são tratadas separadamente do parâmetro de encruamento para permitir diferenças de escala. Uma vez computado o erro, o incremento de deformação atual é aceito se  $R_n$  não for maior do que alguma tolerância prescrita  $STOL$ , ou rejeitado caso contrário. Indiferentemente se o subincremento for aceito ou não, o próximo passo de tempo é encontrado com a seguinte relação:

$$\Delta T_{n+1} = q \Delta T_n, \quad (4.84)$$

na qual  $q$  é escolhido para que  $R_{n+1}$  satisfaça a restrição

$$R_{n+1} \leq STOL. \quad (4.85)$$

Já que o erro local de truncamento no método de Euler é  $O(\Delta T^2)$ , segue da Eq. 4.84 que:

$$R_{n+1} \approx q^2 R_n, \quad (4.86)$$

que combinada com a 4.48 fornece:

$$q \leq \sqrt{STOL/R_n}. \quad (4.87)$$

O procedimento para determinação de  $q$  é baseado na expressão para o termo de erro dominante. Devido a essa aproximação poder se tornar imprecisa para comportamento altamente não-linear, é recomendado escolher  $q$  de forma conservadora, para minimizar o número de subincrementos de deformação rejeitados. Experimentos numéricos em uma grande variedade de problemas da platicidade sugerem que uma estratégia apropriada para determinação de  $q$  é fixar:

$$q \leq 0.9 \sqrt{STOL/R_n}, \quad (4.88)$$

e também limitar o valor de  $q$  no intervalo:

$$0.1 \leq q \leq 1.1, \quad (4.89)$$

de onde tem-se que:

$$0.1\Delta T_{n-1} \leq \Delta T_n \leq 1.1\Delta T_{n-1}. \quad (4.90)$$

O coeficiente 0.9 age como um coeficiente de segurança, prevenindo a escolha, pelo mecanismo de controle de erro, de um subincremento de deformação que irá falhar em atingir a tolerância para o erro local. Restringir o crescimento dos subincrementos consecutivos em 10% também tem o mesmo efeito. Dois outros controles adicionais consistem em atribuir um valor mínimo absoluto para o subincremento,  $\Delta T_{\min}$ , e não permitir que o tamanho do passo cresça imediatamente após a falha de um subincremento. A primeira condição é adicionada meramente por robustez e só é utilizada em casos em que as leis constitutivas contiverem singularidades nos gradientes. A segunda condição garante que haja pelo menos dois subincrementos de deformação com o mesmo tamanho após uma falha e é útil no caso onde o caminho da tensão-deformação apresenta mudanças repentinas na curvatura.

O procedimento de integração é iniciado aplicando-se as equações 4.73 a 4.76 com o incremento de deformação  $\Delta \epsilon$  conhecido, as tensões iniciais  $\sigma_0$ , o parâmetro de encruamento inicial  $\kappa_0$  e o pseudo-incremento do tempo inicial  $\Delta T_1$ . Para permitir os casos onde não são necessários subincrementos, fixa-se  $\Delta T_1 = 1$ . Caso o erro relativo da solução resultante, como definido na Eq. 4.83, não for maior que uma tolerância especificada  $STOL$ , então o subincremento atual é aceito e as tensões e parâmetro de encruamento são atualizados utilizando as Eq. 4.73 e 4.74 ou 4.78 e 4.79. Na prática, é melhor empregar a atualização de mais alta ordem em relação à de baixa ordem, considerando que é a mais precisa das duas e já foi calculada. Após um subincremento bem sucedido, as novas tensões e o parâmetro de encruamento são corrigidos para a superfície de escoamento utilizando o procedimento descrito na seção 4.7.3. Se  $R_n > STOL$ , tal que a tolerância especificada não é atingida, então a solução é rejeitada e um tamanho de passo menor é computado utilizando as Eq. 4.88 e 4.89. Este estágio é repetido, e se necessário, o tamanho do passo é reduzido mais ainda até que o tamanho do subincremento bem sucedido seja encontrado. Independentemente de o subincremento atual ser aceito ou não, o tamanho do próximo subincremento de deformação é encontrado utilizando-se as Eq. 4.88 e 4.89. Nos passos sucessivos, os subincrementos podem se tornar maiores, menores ou permanecerem iguais, dependendo do erro que é calculado com a Eq. 4.83. O final do procedimento de integração é alcançado quando todo o incremento de deformação é aplicado, ou seja:

$$\sum \Delta T = T = 1, \quad (4.91)$$

Na tabela A.4 pode-se encontrar o algoritmo do método explícito de Euler modificado, com todos os refinamentos comentados, para modelos elastoplásticos convencionais.

Os valores típicos para  $\Delta T_{\min}$  são da ordem de  $10^{-4}$ , o que implica em no máximo 10.000 subincrementos usados em cada ponto de Gauss durante o passo de carga ou iteração. Caso se deseje utilizar o método de Euler modificado com um único passo, isto pode ser feito utilizando o algoritmo apresentado, unicamente mudando a tolerância *STOL* para um valor alto.

Na tabela 4.2 tem-se um resumo de todos os parâmetros de controle do método de integração das relações constitutivas elastoplásticas com os valores mais indicados para os mesmos.

TABELA 4.2 – Parâmetros de controle da solução.

Nome	Significado		Valor recomendado
<i>FTOL</i>	Tolerância para a superfície de escoamento		$10^{-6}$ a $10^{-9}$
<i>STOL</i>	Tolerância das tensões		$10^{-1}$ a $10^{-9}$
		<i>Pegasus</i>	10
<i>MAXITS</i>	Número máximo de iterações	<i>Pegasus-Unloading</i>	3
		<i>Correction</i>	5 a 10
<i>NSUB</i>	Número de subincrementos para o cálculo da intersecção com a superfície de escoamento		10
<i>EPS</i>	Constante da máquina		$10^{-16}$
$\Delta T_{\min}$	Incremento de tempo mínimo		$10^{-4}$
<i>LTOL</i>	Tolerância para o cálculo do ângulo entre o gradiente da superfície de escoamento e o incremento de tensões elásticas		$10^{-6}$

## 5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas aplicações numéricas envolvendo estruturas exibindo comportamento altamente não-linear para testar e verificar o desempenho do elemento desenvolvido para análise elastoplástica de estruturas. Para demonstrar a validade do elemento estudado no campo não-linear físico e geométrico, os resultados obtidos neste trabalho foram comparados com resultados publicados por outros autores, que empregam diferentes tipos de elementos, e também com os resultados encontrados utilizando-se o *software* comercial ABAQUS (2004).

O pré e pós-processamento dos exemplos analisados foram realizados através do *software* GiD. Para a descrição da malha adotada, utilizam-se três parâmetros ( $P1 \times P2 \times P3$ ), sendo que os dois primeiros representam o número de elementos no plano e o terceiro indica o número de elementos na direção da espessura da estrutura.

Foi utilizado o método do controle dos deslocamentos generalizados para resolução dos exemplos deste capítulo. Portanto, fazem parte dos dados dos problemas o incremento inicial do fator de carga ( $\Delta\lambda$ ) e o fator de carga máximo ( $\lambda_{\text{máx}}$ ).

### 5.2 APLICAÇÕES COM O CRITÉRIO DE VON MISES

#### 5.2.1 *Cubo sob tração*

Neste exemplo, procura-se resolver um caso bastante simples, onde um cubo com 1 m de aresta é discretizado com um único elemento e tracionado axialmente por uma carga de 26 kN. Na Fig. 5.1 são apresentados os dados do material, a configuração geométrica inicial e também as condições de contorno utilizadas na análise. Os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com a solução analítica, para o caso de análise linear geométrica, e também com os resultados encontrados utilizando-se o elemento C3D8I do ABAQUS tanto para análise linear quanto não-linear geométrica.

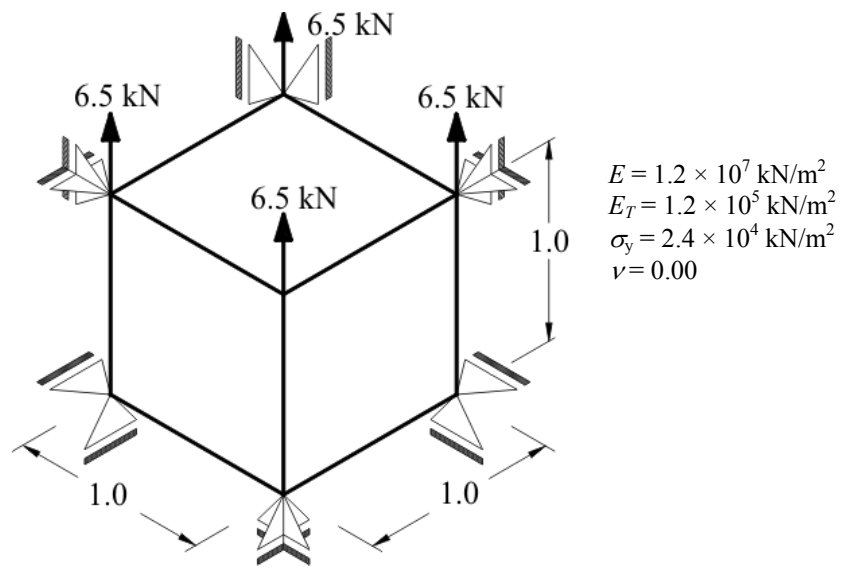


FIGURA 5.1 – Cubo sob tração

Na Fig. 5.2 são plotados os resultados de carga vs deslocamento obtidos. Pode-se perceber que os resultados obtidos no presente trabalho coincidem com os resultados obtidos analiticamente e com o elemento C3D8I do ABAQUS. Para o caso de se considerar a não-linearidade geométrica, também há coincidência entre os resultados.

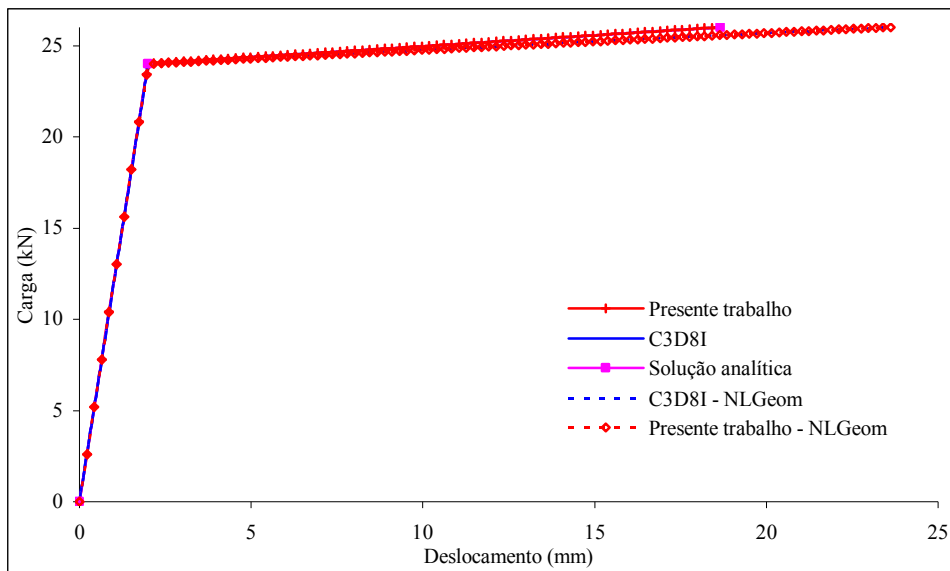


FIGURA 5.2 – Carga vs deslocamento

### 5.2.2 Viga elastoplástica engastada

Neste exemplo é mostrado o comportamento de uma viga engastada sujeita a uma carga transversal de 80 kN aplicada nos nós da extremidade livre de forma distribuída, de acordo com a área de influência de cada nó. Todos os graus de liberdade da extremidade engastada são prescritos. O comprimento da viga é de  $L = 24.0$  m, enquanto que a largura é  $B = 1.0$  m e a altura é  $H = 4.0$  m. O material apresenta endurecimento isotrópico linear e os parâmetros do material podem ser vistos na Fig. 5.3.

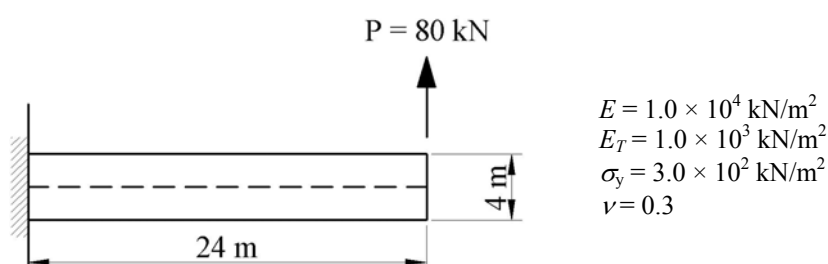


FIGURA 5.3 – Geometria da viga engastada

Com o objetivo de se determinar a sensibilidade do algoritmo implementado para a não-linearidade física quanto à variação dos parâmetros de controle utilizados na análise e também para a calibração do modelo, optou-se pela realização de uma série de análises, com valores fixos de  $\Delta\lambda = 0.1$  e  $\lambda_{\text{máx}} = 1.0$ , variando os principais parâmetros de controle de acordo com a tabela 5.1.

TABELA 5.1 – Parâmetros de controle para análise da sensibilidade.

Nome	Caso (a)	Caso (b)	Caso (c)	Caso (d)
$FTOL$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
$STOL$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$
$\Delta T_{\text{min}}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$

Os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com os resultados fornecidos pelo elemento hexaédrico de 8 nós com modos extras de flexão (chamado C3D8I) e também com os do elemento hexaédrico de 8 nós com integração reduzida e



controle de modos espúrios (chamado C3D8R) no ABAQUS. A malha utilizada em todas as análises tem  $48 \times 8 \times 1$  (comprimento  $\times$  altura  $\times$  largura) elementos.

Pode-se verificar o gráfico da carga vs deslocamento para os casos da tabela 5.1 na Fig. 5.4. Os resultados não apresentam grandes variações e estão muito próximos do resultado obtido pelo *software* ABAQUS. Para o Caso (c), onde é utilizada uma tolerância *STOL* (erro nas tensões encontradas pelo integrador das relações constitutivas) mais restritiva que nos Casos (a) e (b) observa-se uma aproximação ainda maior nos deslocamentos para a carga final. Para se utilizar uma tolerância ainda mais restritiva como no Caso (d), se faz necessário diminuir incremento mínimo do tempo de integração ( $\Delta T_{\min}$ ) para que haja convergência. Uma vez que o valor de  $\Delta T_{\min}$  não influenciou os resultados para o Caso (c), optou-se por se trabalhar com um valor elevado de *STOL* ( $10^{-1}$ ). Um valor elevado de *STOL* implica na conclusão da integração das relações constitutivas em um único passo, o que é aceitável ao se trabalhar com um procedimento incremental/iterativo, portanto o parâmetro  $\Delta T_{\min}$  e a subincrementação não são mais utilizados.

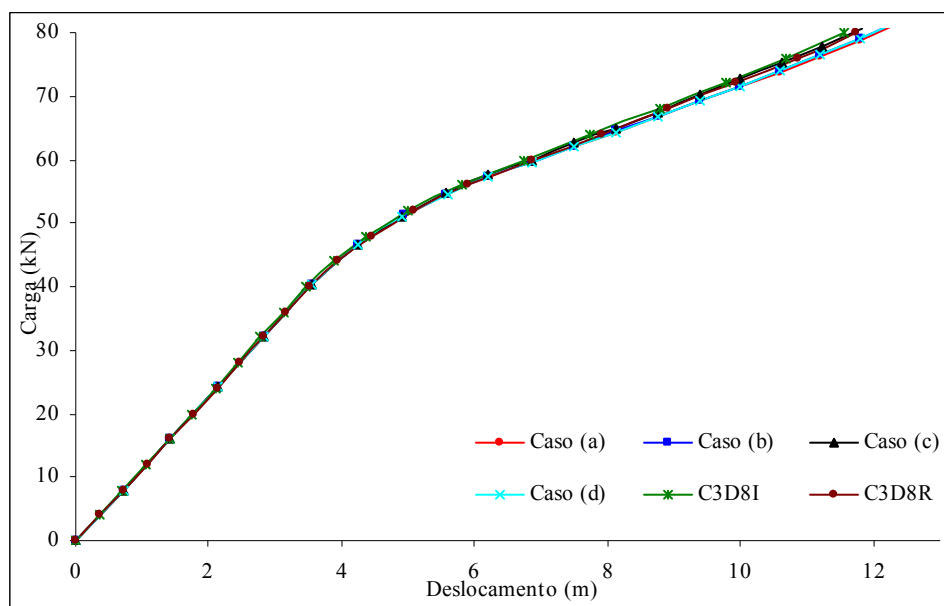


FIGURA 5.4 – Carga vs deslocamento: sensibilidade

Verificou-se também que os resultados não são alterados ao se diminuir a tolerância *FTOL* para valores inferiores a  $10^{-6}$ , o que justifica a escolha do valor de *FTOL* como  $10^{-6}$ . Os demais parâmetros de controle estão ligados à eficiência computacional do algoritmo e não alteram significativamente os resultados.

Nas Fig. 5.5 e 5.6 encontram-se as distribuições das tensões nos pontos de integrações na direção  $x$ ,  $S_{xx}$ , obtidas com o uso do software ABAQUS e obtidas no presente trabalho, plotadas com o auxílio do *software* GiD, respectivamente.

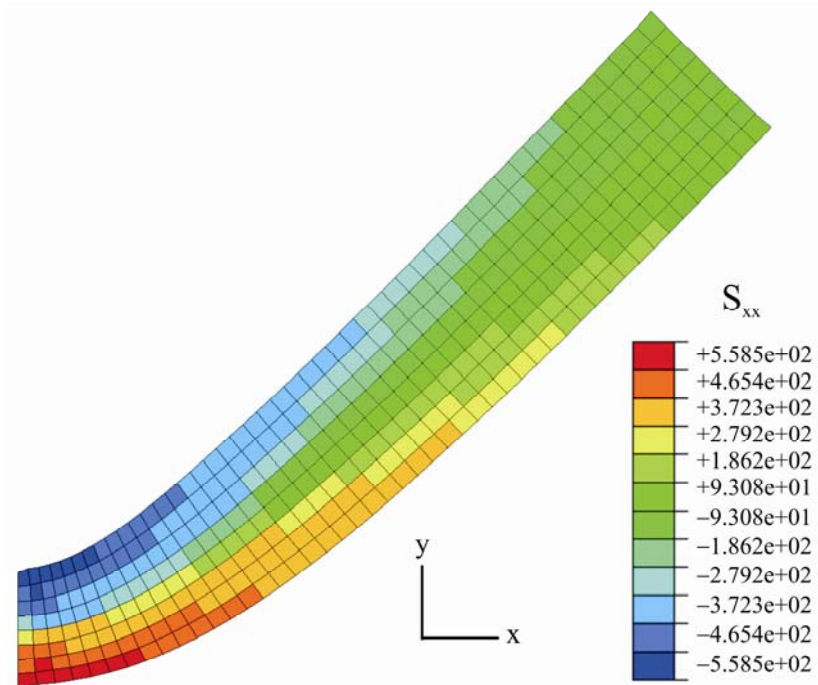


FIGURA 5.5 – Distribuição de tensões obtidas pelo ABAQUS

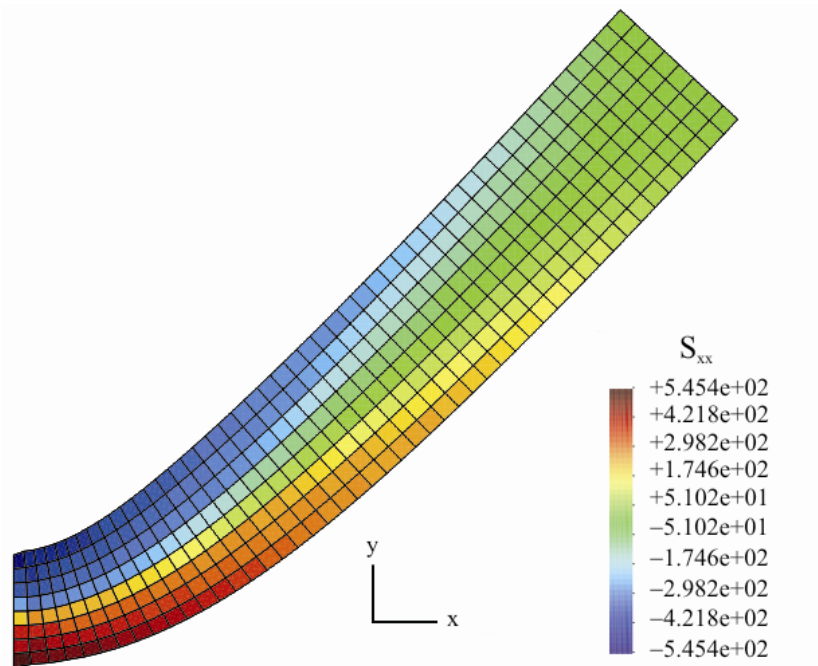


FIGURA 5.6 – Distribuição de tensões obtidas pelo GiD

O elemento C3D8R foi utilizado no cálculo das tensões no ABAQUS, uma vez que este também possui somente 1 ponto de integração e fornece resultados muito próximos ao C3D8I. Pode-se visualizar a concordância entre os resultados mostrados nas Fig. 5.5 e 5.6.

Na Fig. 5.7 é plotada a tensão  $S_{xx}$  no ponto de integração dos elementos localizados na fibra superior ao longo da viga, desde o engaste até o extremo livre. Pode-se perceber uma boa concordância entre os resultados, porém no extremo livre devido à diferença da forma de aplicação da carga entre o modelo do ABAQUS e o do presente trabalho surge uma pequena diferença nos resultados.

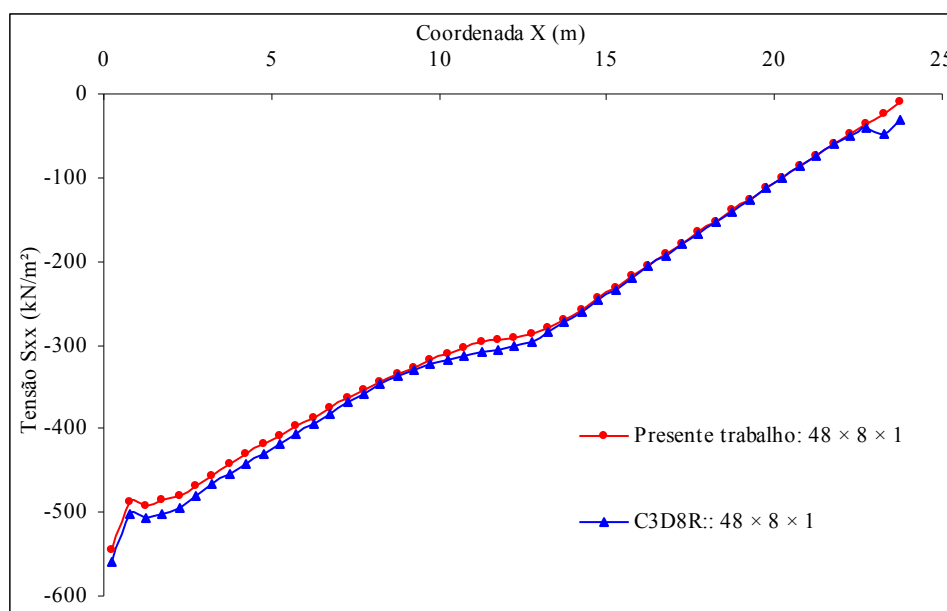


FIGURA 5.7 – Tensões na fibra superior ao longo da viga

Em seguida, na Fig. 5.8, podem ser vistos a configuração geométrica inicial e a malha deformada no final da análise, com a consideração da não-linearidade geométrica.

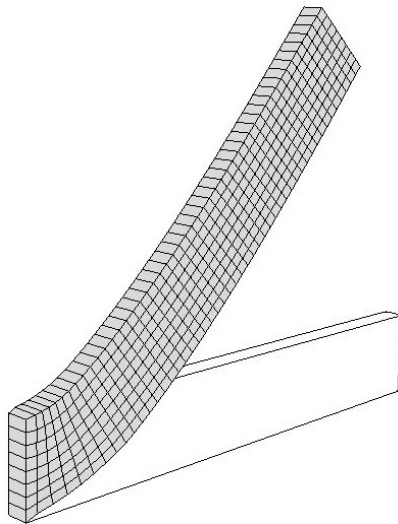


FIGURA 5.8 – Geometria inicial e malha deformada

Os deslocamentos na superfície média da viga são mostrados na Fig. 5.9. Pode-se observar que os resultados obtidos no presente trabalho estão muito próximos daqueles obtidos com o elemento C3D8I no ABAQUS.

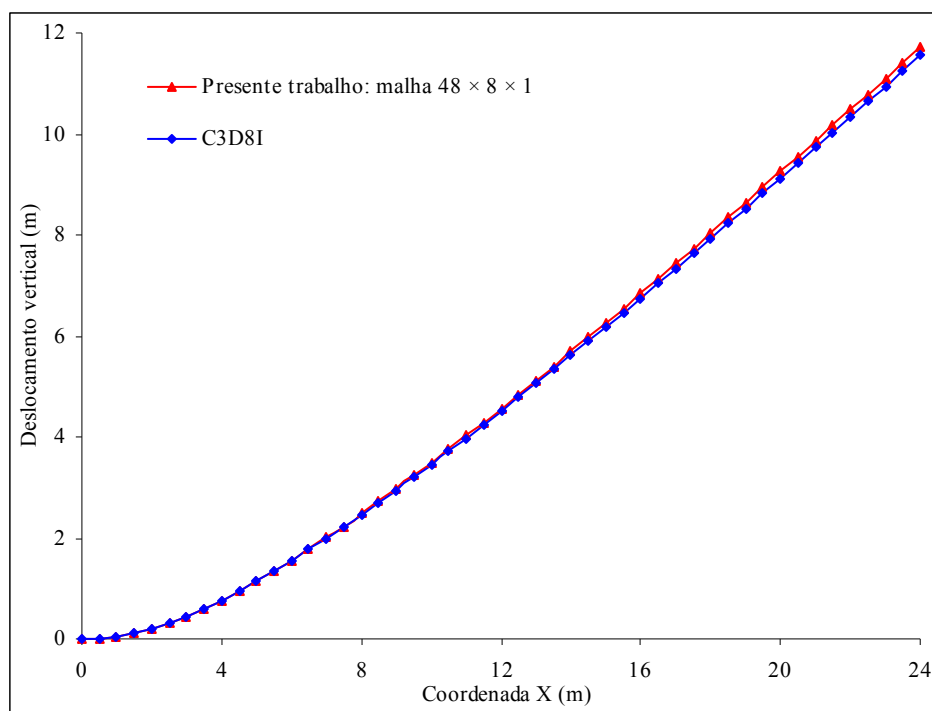


FIGURA 5.9 – Deslocamentos na superfície média da viga

Na Fig. 5.10 é apresentada a comparação da deformação plástica equivalente dos elementos ao longo da fibra superior da viga obtida no presente trabalho e no *software*

ABAQUS. Pode-se notar uma grande coincidência nos resultados. Em termos de deformações totais observou-se um valor máximo de 0,19 estando assim o exemplo na faixa de transição entre pequenas e grandes deformações.

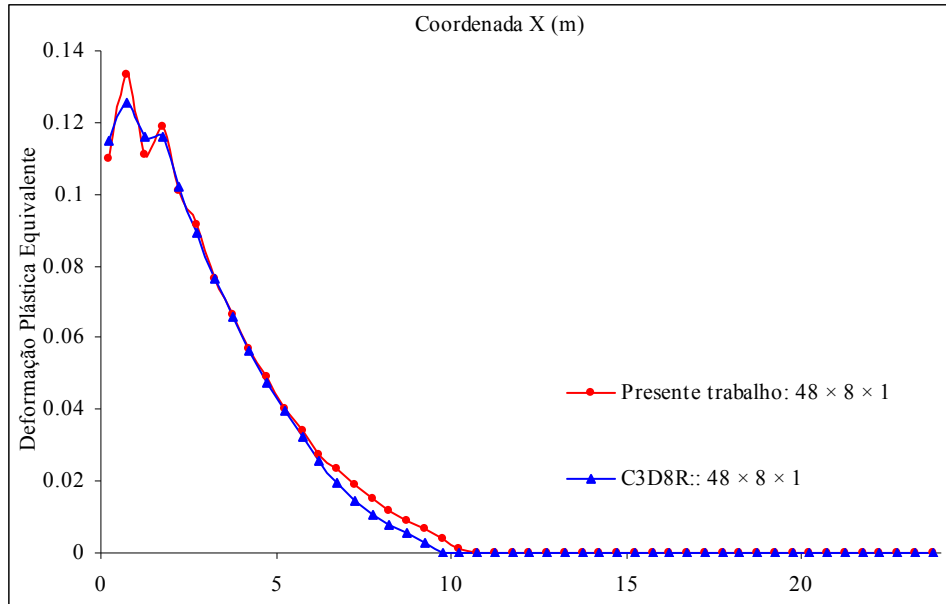


FIGURA 5.10 – Deformação plástica equivalente na fibra superior

Na Fig. 5.11 mostra-se a distribuição das deformações plásticas equivalentes obtidas no presente trabalho.

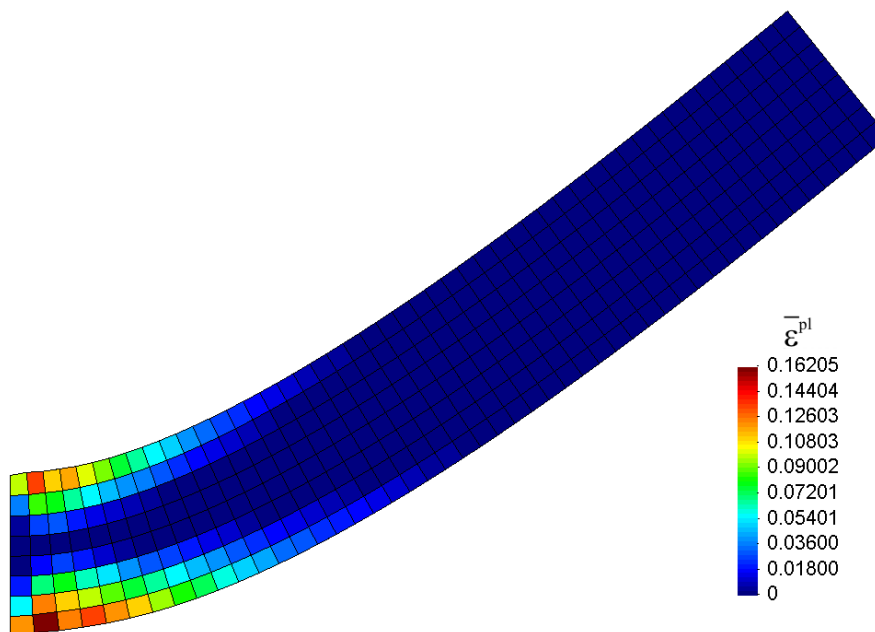


FIGURA 5.11 – Distribuição da deformação plástica equivalente

Na Fig. 5.12 é plotado o gráfico da carga pelo deslocamento no extremo livre da viga. Os resultados da Fig. 5.12 referem-se às análises com duas discretizações de malhas diferentes, sendo a primeira com  $24 \times 4 \times 1$  e a segunda  $48 \times 8 \times 1$  elementos. Neste exemplo pode-se ver claramente que os resultados fornecidos pelo *software* ABAQUS para ambas as malhas coincidem entre si e com os resultados obtidos no presente trabalho para a malha com  $48 \times 8 \times 1$  elementos. No entanto os resultados obtidos com o elemento desenvolvido no presente trabalho, para a malha com  $24 \times 4 \times 1$  elementos, não apresentam uma boa concordância.

A partir deste fato pode-se concluir que para se realizar uma análise com o elemento desenvolvido neste trabalho se faz necessária uma discretização mais refinada da malha de elementos finitos para poder capturar as frentes plásticas com maior precisão. Isto não se mostra necessário para o elemento C3D8I, visto que este possui 8 pontos de integração.

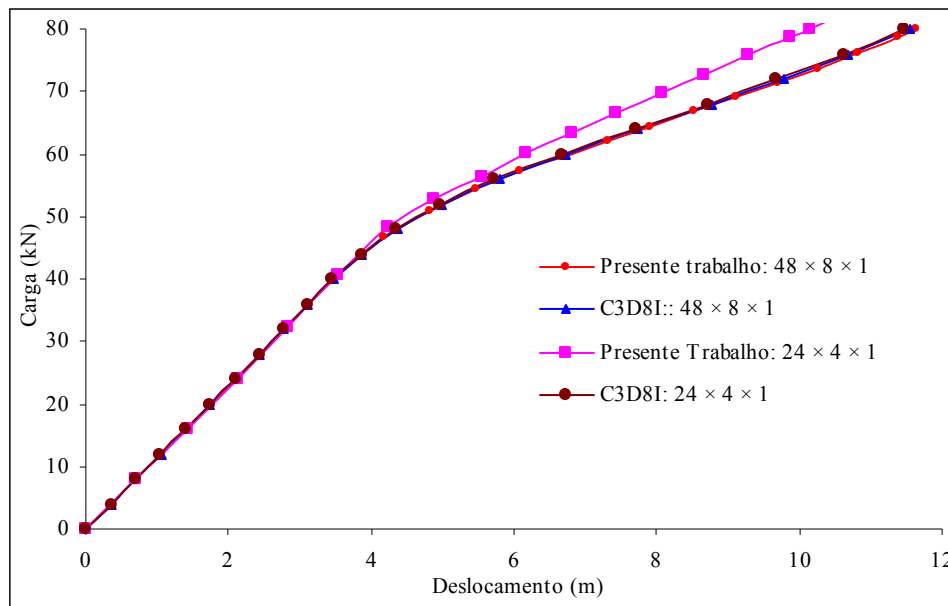


FIGURA 5.12 – Deslocamento comparativo entre malhas

Os resultados da carga *vs* deslocamento plotados na Fig. 5.13 demonstram a influência da matriz de estabilização descrita no item 2.5. Pode-se perceber que com a utilização da matriz de estabilização completa, ou seja, sem o parâmetro otimizado  $\mu^{opt}$ , a resposta da estrutura é mais rígida se comparada com os resultados obtidos com o elemento C3D8I. Ao se utilizar na matriz de estabilização o fator  $\mu^{opt}$  proposto por

Reese (2005), os resultados obtidos não apresentam mais rigidez excessiva sendo então muito próximos ao resultado do ABAQUS.

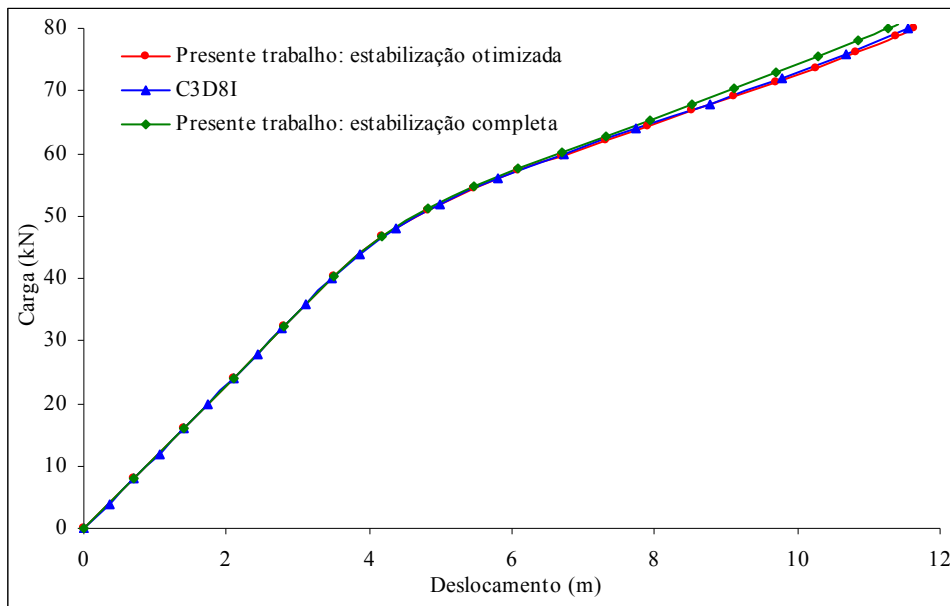


FIGURA 5.13 – Deslocamento comparativo entre matrizes de estabilização

### 5.2.3 Placa em balanço com carga no extremo

Este exemplo apresenta a resposta elastoplástica de uma placa fina engastada em uma de suas extremidades sujeita a uma carga concentrada de 6.27 kN de intensidade aplicada de forma distribuída nos nós do extremo livre, de acordo com a área de influência de cada nó. O comprimento da placa é de  $L = 10.0$  m, a largura é  $B = 1.0$  m e a espessura é  $t = 0.1$  m. O material apresenta endurecimento isotrópico linear e os parâmetros do material estão descritos na Fig. 5.14. Todos os graus de liberdade dos nós da extremidade fixa são prescritos. O método de solução das equações não-lineares é iniciado com valores de  $\Delta\lambda = 0.01$  e  $\lambda_{\text{máx}} = 1.0$ . A configuração geométrica inicial e a malha deformada podem ser vistas na Fig. 5.14.

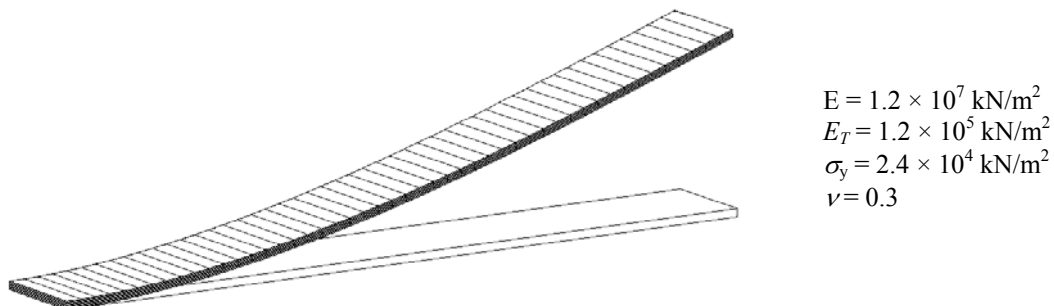


FIGURA 5.14 – Geometria inicial e malha deformada

Os deslocamentos computados na extremidade livre são comparados com os resultados publicados por Masud e Tham (2000), que utilizou elementos hexaédricos com 8 nós com formulação híbrida (*Enhanced Assumed Strain*), e com os resultados obtidos através do elemento C3D8I do ABAQUS. A malha usada nas aplicações com o presente elemento e com o elemento C3D8I tem  $48 \times 8 \times 1$  (comprimento  $\times$  espessura  $\times$  largura) elementos.

Observa-se que o elemento estudado apresenta resultados muito próximos daqueles obtidos com o elemento C3D8I do ABAQUS e daqueles encontrados por Masud e Tham (2000). O diagrama carga deslocamento na extremidade onde a carga é aplicada é mostrado na Fig. 5.15.

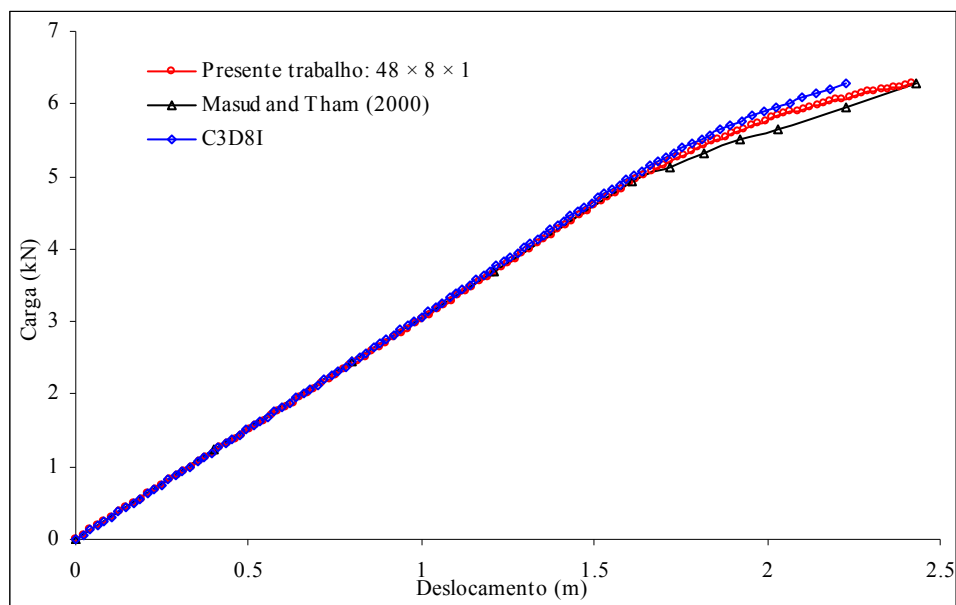


FIGURA 5.15 – Carga vs deslocamento no ponto de aplicação da carga

Na Fig. 5.16 as tensões ( $S_{xx}$ ) no ponto de integração dos elementos localizados na fibra superior da placa são plotados em função da coordenada do ponto de integração do engaste até o extremo livre. As tensões obtidas com o elemento desenvolvido neste trabalho podem ser comparadas com as tensões fornecidas pelo *software* ABAQUS, com o uso dos elementos C3D8R, onde as tensões correspondem às tensões no ponto de integração, e C3D8I, onde as tensões plotadas são interpoladas até o centróide do elemento finito em questão.



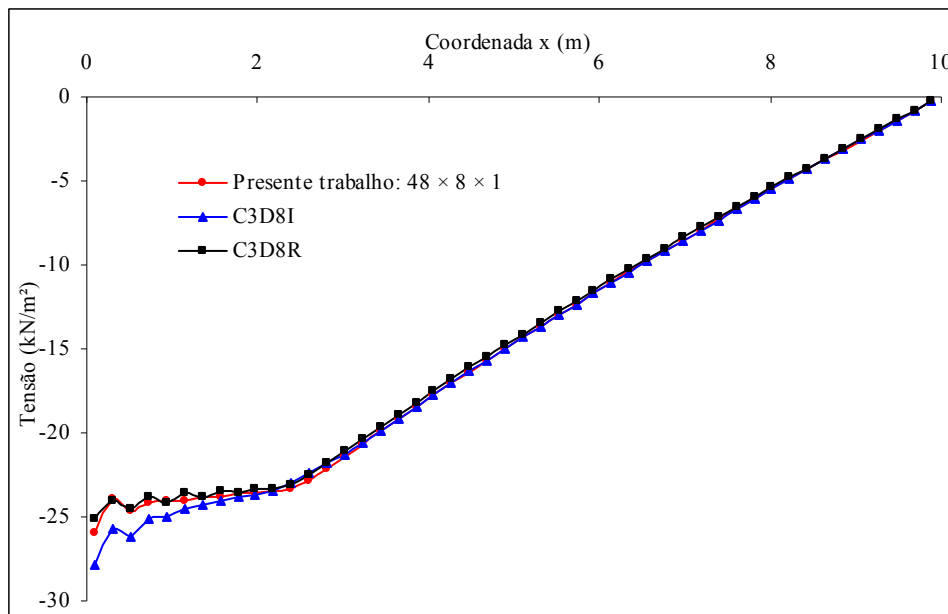


FIGURA 5.16 – Tensão nos elementos da face superior

Na Fig. 5.17 é plotado o gráfico comparativo da deformação plástica equivalente dos elementos situados na fibra superior da placa desde a extremidade engastada até a coordenada 4 m, sendo que já a partir de 3 m a deformação plástica equivalente é nula.

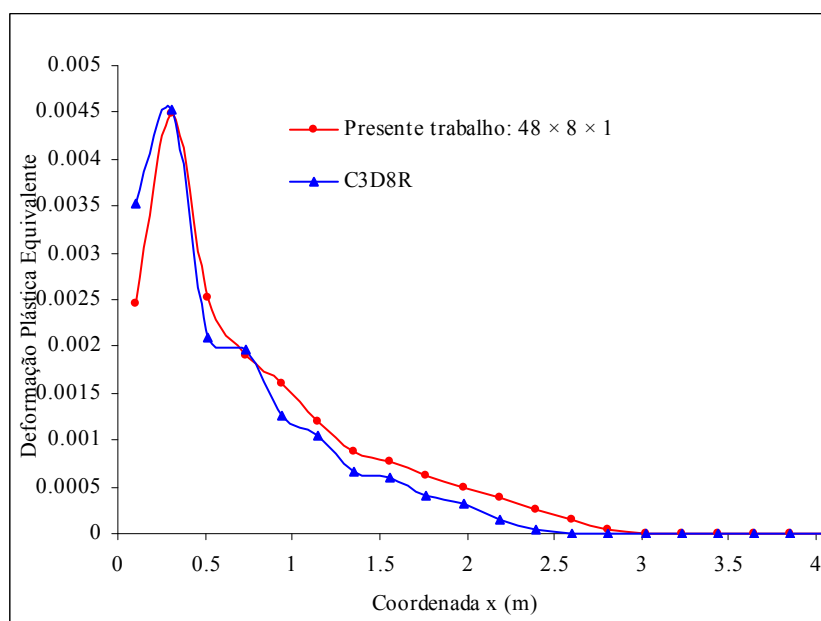
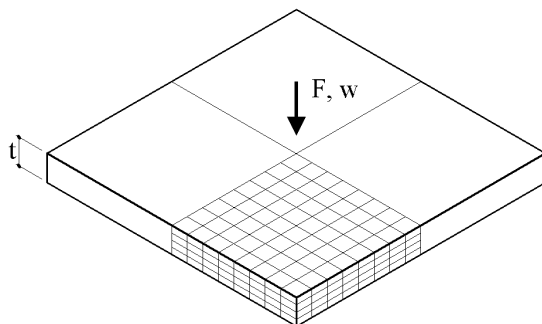


FIGURA 5.17 – Deformação plástica equivalente na fibra superior

Pode-se verificar uma grande coincidência entre os resultados do presente trabalho e os resultados encontrados com o elemento de 1 ponto de integração C3D8R, que tendem a seguir os resultados obtidos com o uso do elemento C3D8I.

#### 5.2.4 Placa quadrada sujeita à carga concentrada

Uma carga concentrada  $F$  é aplicada no centro de uma placa quadrada com lado  $L = 40$  m e espessura  $t = 0.4$  m. A solução é apresentada para dois materiais diferentes: caso (a): material elastoplástico perfeito; caso (b): material com endurecimento isotrópico linear. Os dados dos materiais são apresentados juntamente com uma representação esquemática do exemplo na Fig. 5.18. A placa possui lados simplesmente apoiados e devido à simetria somente um quarto da placa é modelada. Para ambos os casos, a placa é modelada com  $10 \times 10 \times 6$  elementos (6 elementos são usados na espessura), enquanto que para o caso (b) também são usados  $24 \times 24 \times 6$  elementos. Adota-se como incremento do fator de carga inicial o valor  $\Delta\lambda = 0.001$ , limitando-se o fator de carga até  $\lambda_{\text{máx}} = 1.0$ .



Caso (a):  
 $E = 3.0 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>  
 $\sigma_y = 4.0 \times 10^4$  kN/m<sup>2</sup>  
 $\nu = 0.3$   
 Caso (b):  
 $E = 3.0 \times 10^7$  kN/m<sup>2</sup>  
 $E_T = 3.0 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>  
 $\sigma_y = 4.0 \times 10^4$  kN/m<sup>2</sup>  
 $\nu = 0.3$

FIGURA 5.18 – Placa quadrada sujeita à carga concentrada

No caso (a), o cálculo é efetuado até que os elementos encontrados diretamente abaixo da carga concentrada estiverem todos plastificados e a solução diverge. O gráfico da carga aplicada pelo deslocamento no ponto central da placa ( $w$ ) para o caso (a) está demonstrado na Fig. 5.19. Analisando os resultados pode-se perceber que a solução encontrada está próxima da solução obtida através do elemento C3D8I do ABAQUS.

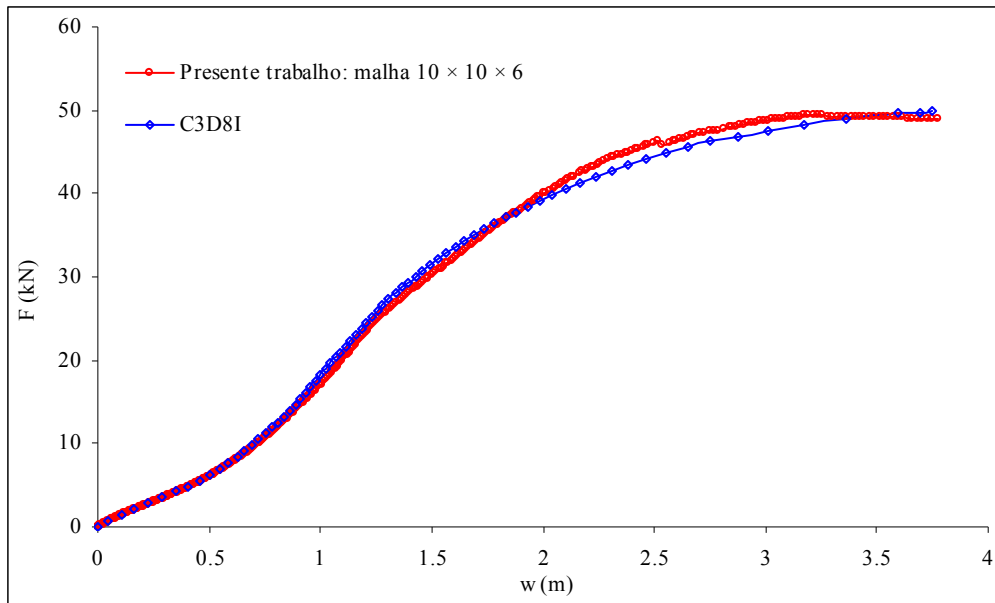


FIGURA 5.19 – Caso (a): carga concentrada vs deflexão central

Os resultados para o material com encruamento, caso (b), são mostrados na Fig. 5.20. Pode-se perceber uma boa concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e daqueles obtidos com o uso do software ABAQUS. Percebe-se também que com o refinamento da malha, ambos os resultados tornam-se ainda mais próximos.

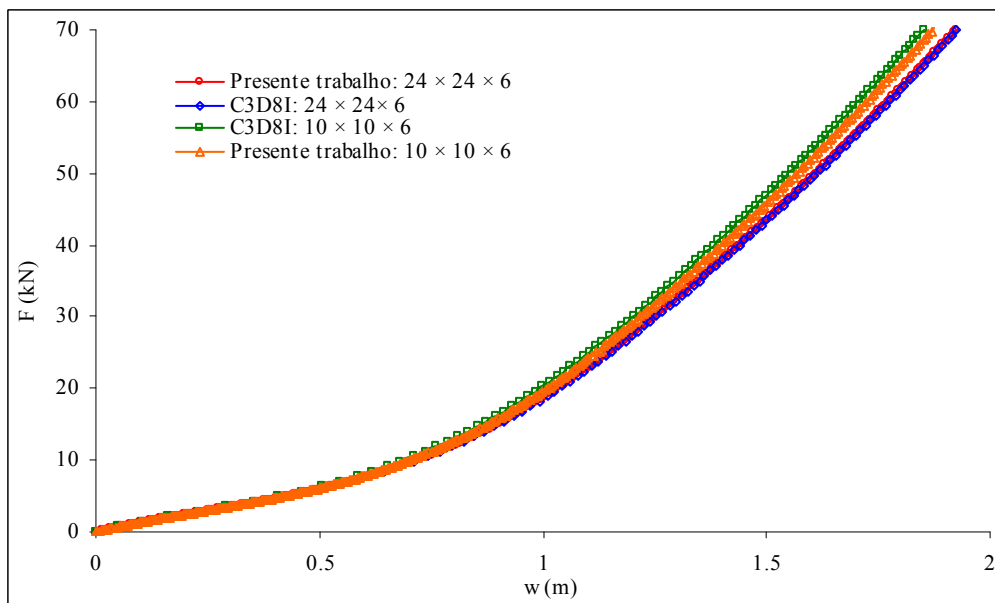


FIGURA 5.20 – Caso (b): carga concentrada vs deslocamento central

### 5.2.5 Casca cilíndrica com bordos livres

Neste exemplo, uma casca cilíndrica é submetida a um par de cargas concentradas, induzindo grandes deslocamentos e rotações. Geometricamente, o cilindro é caracterizado por um comprimento de  $L = 10.35$  m, raio  $R = 4.953$  m e uma espessura constante  $t = 0.094$  m. O material possui endurecimento isotrópico linear e suas características são mostradas juntamente com a representação esquemática do problema da na Fig. 5.21. Não são aplicadas condições de contorno aos bordos livres da casca, sendo unicamente responsável pelo equilíbrio do cilindro o par de cargas aplicado. Devido à simetria, somente um oitavo do cilindro é discretizado com uma malha contendo  $16 \times 8 \times 6$  elementos (circunferência  $\times$  comprimento  $\times$  espessura) sendo aplicadas somente as condições de contorno devido à simetria.

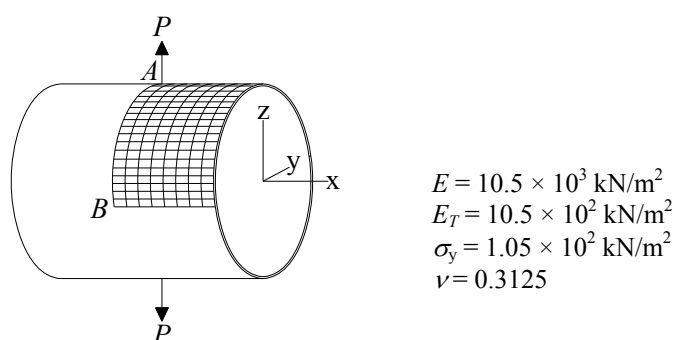


FIGURA 5.21 – Alongamento da casca cilíndrica

São computados os deslocamentos em dois pontos distintos da estrutura, ponto  $A$  e ponto  $B$  (ver Fig. 5.21). Na Fig. 5.22, são plotados os deslocamentos, para ambos os pontos em função da intensidade da carga aplicada. A solução é comparada com os resultados publicados na literatura por Masud e Tham (2000) e por Valente *et al.* (2004), ambos utilizando elementos hexaédricos com 8 nós com formulação híbrida (*Enhanced Assumed Strain*) com parâmetros internos de deformação. Pode-se observar uma boa concordância entre a solução obtida com o elemento desenvolvido no presente trabalho e a solução obtida por Valente *et al.* (2004), estando também muito próxima dos resultados publicados por Masud e Tham (2000).

Pode-se dividir a resposta da estrutura em duas fases: fase inicial caracterizada por grandes deslocamentos e grandes rotações associados com a rigidez à flexão; fase

final caracterizada por uma resposta extremamente rígida associada com a rigidez de membrana da casca. Na transição entre as duas fases ocorre uma flambagem localizada, representada pela descontinuidade da curva. O processo de solução do sistema de equações não-lineares foi iniciado com o incremento do fator de carga fixado em  $\Delta\lambda = 0.001$ . Para melhor captar o comportamento da estrutura durante a flambagem, o incremento do fator de carga é alterado durante o processo (para carga a partir de 12 kN) para  $\Delta\lambda = 0.0001$ . O fator de carga máximo é mantido em  $\lambda_{\text{máx}} = 1.0$ .

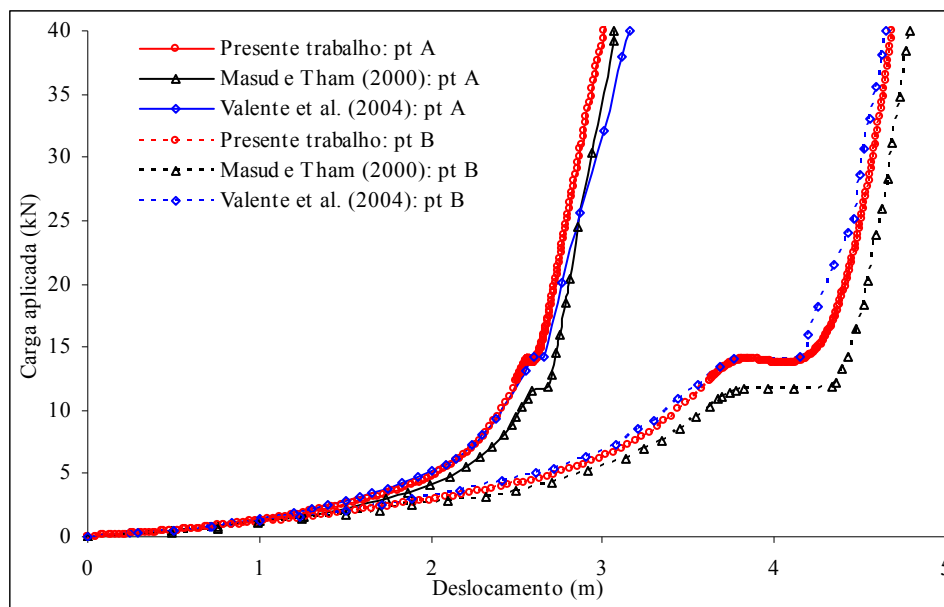


FIGURA 5.22 – Carga aplicada vs deslocamentos

A configuração deformada final pode ser vista na Fig. 5.23.

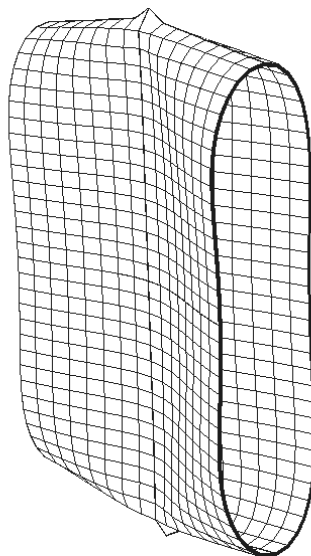


FIGURA 5.23 – Malha deformada para a carga de 40 kN

Na Fig. 5.24 é plotada a distribuição da deformação plástica equivalente. Pode-se perceber que nos elementos diretamente sobre os quais foi aplicada a carga surgem grandes deformações plásticas, porém o restante do modelo encontra-se no regime de pequenas deformações. Pode-se então caracterizar o modelo pela presença de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Tal fato também foi observado por Masud e Tham (2000).

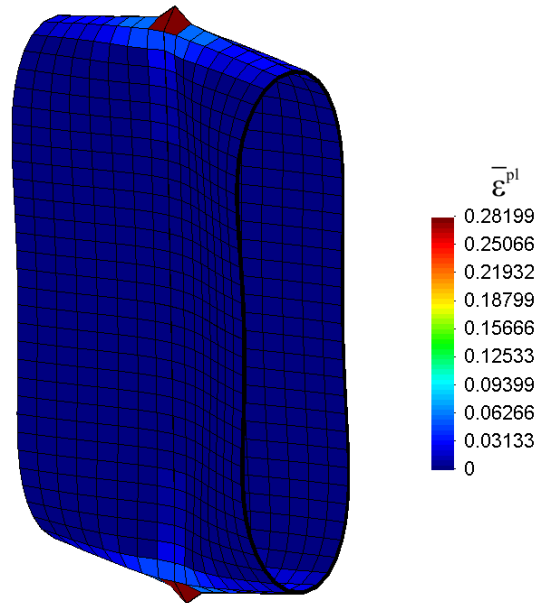
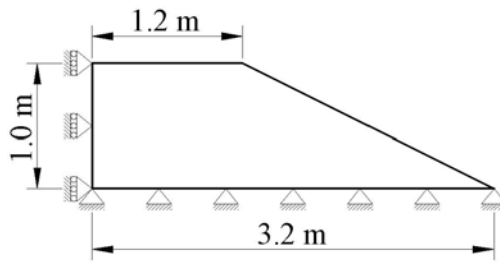


FIGURA 5.24 – Distribuição da deformação plástica equivalente

### 5.3 APLICAÇÕES COM O CRITÉRIO DE MOHR-COULOMB

#### 5.3.1 Estabilidade de taludes com modelo de Mohr-Coulomb

Neste exemplo é realizada uma análise de estabilidade de taludes utilizando-se o critério de plastificação de Mohr-Coulomb. A geometria do talude, as condições de contorno e as propriedades do material são apresentadas na Fig. 5.25. Os graus de liberdade correspondentes aos deslocamentos fora do plano da Fig. 5.25 são prescritos em todos os nós, de modo que somente são permitidos deslocamentos no plano.



$$\begin{aligned}
 E &= 10.5 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 \\
 \nu &= 0.3 \\
 \gamma &= 20.0 \text{ kN/m}^3 \\
 c &= 1.0 \text{ kN/m}^2 \\
 \phi &= 40^\circ
 \end{aligned}$$

FIGURA 5.25 – Geometria e propriedades do material

O talude é discretizado com uma malha contendo  $10 \times 10 \times 1$  elementos (1 elemento foi usado na direção do comprimento) e adota-se  $\Delta\lambda = 0.001$  e  $\lambda_{\text{máx}} = 1.0$ . Para se encontrar o fator de segurança do talude, a análise é realizada para diferentes fatores de segurança ( $FS$ ) dos parâmetros do solo variando de 1.00 até 2.65 de tal forma que o ângulo de atrito e a coesão utilizada na análise elastoplástica seja:

$$\phi_f = \arctan\left(\frac{\tan \phi}{FS}\right), \quad (5.1)$$

$$c_f = \frac{c}{FS}. \quad (5.2)$$

O deslocamento máximo encontrado na malha vs o fator de segurança de cada análise é plotado na Fig. 5.26. Os resultados plotados sugerem que o fator de segurança do talude é em torno de 2.62. Observa-se que os resultados obtidos com o uso da formulação proposta no presente trabalho estão próximos dos resultados obtidos por Smith e Griffiths (1997). Bishop e Morgenstern (1960) produziram gráficos para análises de estabilidade de taludes usando técnicas de círculos de deslizamento, e estes fornecem o fator de segurança de 2.505 para o talude considerado neste exemplo. Sugere-se que o afastamento entre os gráficos se deve ao fato de se tratar de um problema de falha estrutural, onde um pequeno aumento no coeficiente de segurança causa grandes deslocamentos em situações de falha iminente. Deve-se considerar o fato de que tanto a formulação clássica apresentada por Bishop e Morgenstern (1960) como a apresentada por Smith e Griffiths (1997) consideram apenas pequenos deslocamentos.

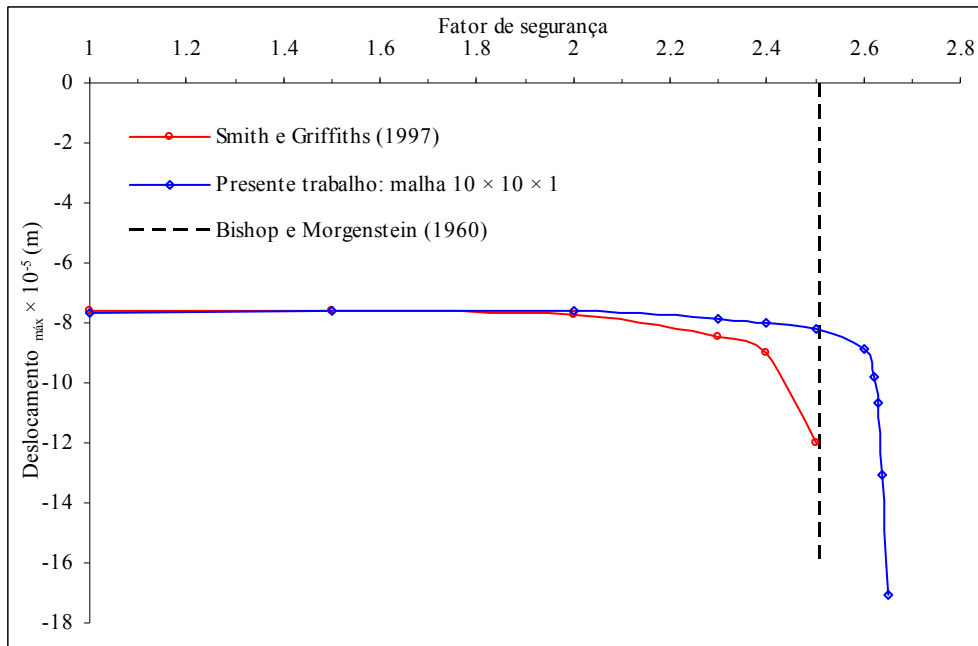


FIGURA 5.26 – Deslocamento máximo vs fator de segurança

Os deslocamentos normalizados são mostrados na Fig. 5.27. Também podem ser vistos na Fig. 5.27, a malha deformada e a natureza do mecanismo de falha para o talude estudado.

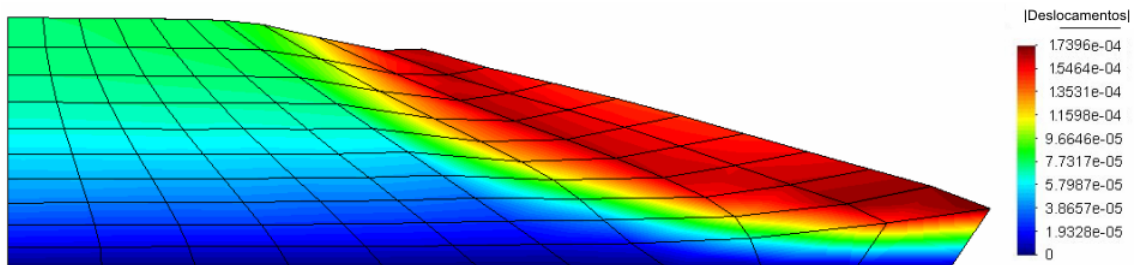


FIGURA 5.27 – Deslocamentos normalizados

Na Fig. 5.28 pode-se visualizar a distribuição da deformação plástica equivalente, onde é caracterizada a presença de pequenas deformações plásticas.



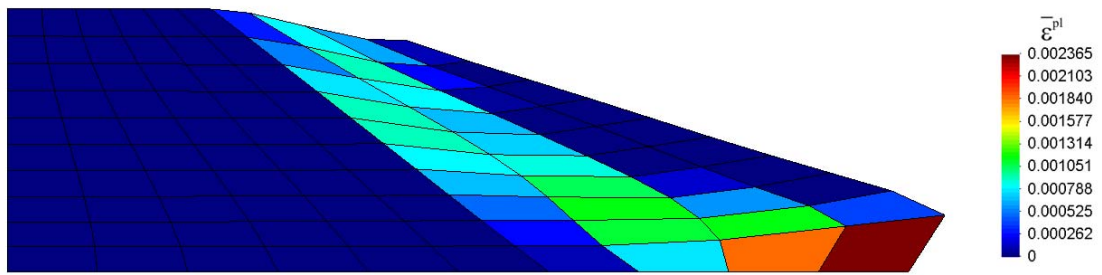


FIGURA 5.28 – Deformação plástica equivalente

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho teve como objetivo a elaboração de um código computacional para análise elastoplástica de estruturas envolvendo também não-linearidade geométrica. Tomou-se como ponto de partida o trabalho realizado por Duarte Filho (2002), onde foi implementado um elemento hexaédrico de oito nós com um ponto de integração e controle dos modos espúrios. Foi mostrado por Duarte Filho (2002), e também por Andrade (2005), que o elemento em questão apresenta bom desempenho para análise de estruturas com não-linearidade geométrica.

A esta formulação foram introduzidas rotinas computacionais para o tratamento do problema da não-linearidade física, que consistem em computar um estado teste de tensões elásticas, encontrar a intersecção com a superfície de escoamento, atualização das tensões e correção das tensões para a superfície de escoamento. Tal procedimento foi testado através de exemplos e aplicações numéricas envolvendo os critérios de von Mises e Mohr-Coulomb.

Nas análises foram testados problemas que envolviam grandes deslocamentos e grandes rotações e reproduziram-se resultados obtidos por outros autores e também utilizando-se um *software* comercial, o que demonstra a aplicabilidade do elemento tridimensional estudado, inclusive para cascas finas com alta não-linearidade. A concordância entre os resultados sugere que o esquema para análise com não-linearidade física foi adequadamente implementado.

Pode-se verificar a necessidade de modificação da matriz de estabilização para os elementos que se encontrem plastificados devido à rápida perda de rigidez associada à plasticidade, uma vez que a matriz de estabilização original induz uma resposta mais rígida da estrutura.

Uma vez que o elemento desenvolvido tem somente um ponto de integração, e conseqüentemente ao plastificar o ponto de integração o elemento inteiro estará em regime plástico, se faz necessário o uso de mais elementos do que seria necessário ao utilizar elementos com mais pontos de integração, para que as frentes de plastificação sejam computadas de forma adequada.

Assim, é possível afirmar que os objetivos do trabalho foram alcançados, deixando as seguintes sugestões para a continuação da pesquisa:

- Implementação de um modelo constitutivo para solos generalizado (*Cam Clay*) para estudos ligados à iteração solo-estrutura;
- Implementação de um novo procedimento, unicamente incremental, para solução do sistema de equações, para utilização em conjunto com o procedimento de subincrementação e avaliação da eficiência computacional de ambos métodos de solução;
- Implementação e elaboração de análise dinâmica de estruturas com materiais elastoplásticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS, v 6.5-1, 2004. “**ABAQUS Analysis User's Manual**”. ABAQUS Inc.

Andrade, L. G., 2005. “**Análise estática e dinâmica de placas e cascas de materiais compósitos laminados usando elementos finitos hexaédricos de oito nós com integração reduzida**”. 95p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Bathe, K. J., 1996. “**Finite Element Procedures**”. New Jersey: Prentice Hall.

Belytschko, T. e Bindeman, L. P., 1991. “Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 88, pp 311-340.

Belytschko, T. e Bindeman, L. P., 1993. “Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 105, pp 225-260.

Bishop, A. W. e Morgenstern, N., 1960. “Stability coefficients for earth slopes”. **Géotechnique**, vol. 10, pp. 129-150.

Chen, W. F. e Han, D. J., 1988. “**Plasticity for Structural Engineers**”. Springer-Verlag New York Inc.

Crisfield, M.A., 1991. “**Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**”. Essentials, John Wiley & Sons, vol. 1.

Dowell, M. e Jarrat, P., 1972. “The Pegasus method for computing the root of na equation”. **BIT**, vol. 12, pp. 503-508.

Duarte Filho, L. A., 2002. “**Análise estática e dinâmica, linear e não-linear geométrica, através de elementos hexaédricos de oito nós com um ponto de integração**”. 111p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Duarte Filho, L. A. e Awruch, A. M., 2004. “Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of shells and plates using the eight-node hexahedral element with one-point quadrature”. **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 40, n. 11, pp. 1297-1315.

Flanagan, D. P. e Belytschko, T., 1981. “A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 17, pp. 679-706.

Hu, Y.-K., e Nagy, L. I., 1997. “A one-point quadrature eight-node brick element with hourglass control”. **Computers & Structures**, vol. 65, n. 6, pp. 893-902.

Hughes J. R. e Winget, J. M., 1980. “Finite rotations effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, pp. 1862-1867.

Liu, W. K., Guo, Y., Tang, S. e Belytschko, T., 1998. “A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 154, pp 69-132.

Liu, W. K., Hu, Y.-K. e Belytschko, T., 1994. “Multiple quadrature underintegrated finite elements”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 37, pp. 3263-3289.

Masud, A. e Tham, C. L., 2000. “Three-dimensional corotational framework for elasto-plastic analysis of multilayered composite shells”. **AIAA Journal**, vol. 38, n. 12, pp. 2320-2327.

Owen, D. R. J. e Hinton, E., 1980. “**Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**”. Pineridge Press Limited.

Puso, M. A., 2000. “A highly efficient enhanced assumed strain physically stabilized hexahedral element”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 49, n. 8, pp. 1029–1064.

Reese, S., 2005. “On a physically stabilized one point finite element formulation for three-dimensional finite elasto-plasticity”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, n. 45-47, pp. 4685-4715.

Smith, I. M., e Griffiths, D. V., 1997. “**Programming the finite element method**”. John Wiley & Sons.

Sloan, S. W., 1987. “Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, n. 5, pp. 893-911.

Sloan, S. W., Abbo, A. J. e Sheng, D., 2001. “Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control”. **Engineering Computations**, vol. 18, n. 1/2, pp. 121-154.

Valente, R. A. F., Souza, R. J. A. e Jorge, R. M. N., 2004. “An enhanced strain 3D element for large deformation elastoplastic thin-shell applications”. **Computational Mechanics**, v. 34, pp. 38-52.

Yang, Y. B. and Shieh, M. S., 1990. “Solution method for nonlinear problems with multiple critical points”. **AIAA Journal**., vol. 28, pp 2110-2116.

Zhu, Y. e Cescotto, S., 1996. “Unified and mixed formulation of the 8-node hexahedral elements by assumed strain method”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 129, pp 177-209.

## ANEXO I

TABELA A.1 – Algoritmo para encontrar a intersecção com a superfície de escoamento (*Pegasus*).

---

*Inicialização:*

1. Entrada de dados ( $\sigma_0, \kappa_0, \Delta \epsilon, \alpha_0, \alpha_1, MAXITS, FTOL$ );
  2. Inicializar variáveis:  $i = 0$
- 

$$\Delta \sigma_e = C_e \Delta \epsilon$$

$$F_0 = f(\sigma_0 + \alpha_0 \Delta \sigma_e, \kappa_0) \text{ e } F_1 = f(\sigma_0 + \alpha_1 \Delta \sigma_e, \kappa_0)$$

ENQUANTO ( $i \leq MAXITS$ ) FAÇA:

$i = i + 1$  (contador do número de iterações);

$$\alpha = \alpha_1 - F_1(\alpha_1 - \alpha_0)/(F_1 - F_0)$$

$$F_{new} = f(\sigma_0 + \alpha \Delta \sigma_e, \kappa_0)$$

SE ( $|F_{new}| \leq FTOL$ ) ENTÃO: (convergência alcançada)

$$i = MAXITS + 1$$

FIM DO SE

SE ( $F_{new} = -F_0$ ) ENTÃO

$$\alpha_1 = \alpha, F_1 = F_{new}$$

SENÃO

$$F_1 = F_1 F_0 / (F_0 F_{new})$$

FIM DO SE

$$\alpha_0 = \alpha, F_0 = F_{new}$$

FIM DO ENQUANTO

SE ( $i = MAXITS$ ) ENTÃO:

Convergência não atingida depois de *MAXITS* iterações, parar execução do programa.

FIM DO SE

Saída com o valor de  $\alpha$  encontrado.

---

Na ausência de informações melhores inicia-se o algoritmo com valores de  $\alpha_0 = 0$  e  $\alpha_1 = 1$ . O número máximo de iterações permitido, *MAXITS*, é usualmente fixado em 10 e o procedimento é encerrado quando as tensões satisfazem a condição  $|f(\sigma_{int}, \kappa_0)| \leq FTOL$ .

TABELA A.2 – Algoritmo para encontrar a intersecção com a superfície de escoamento no caso de descarregamento elastoplástico (*Pegasus-unloading*).

---

*Inicialização:*

1. Entrada de dados ( $\sigma_0, \kappa_0, \Delta \epsilon, MAXITS, NSUB, FTOL$ );

2. Inicializar variáveis:  $i = 0; j = 0; \alpha_0 = 0; \alpha_1 = 1$

---

$$\Delta \sigma_e = C_e \Delta \epsilon$$

$$F_0 = f(\sigma_0, \kappa_0), F_{save} = F_0$$

ENQUANTO ( $i \leq MAXITS$ ) FAÇA:

$i = i + 1$  (contador do número de reinícios de iterações)

$$\Delta \alpha = (\alpha_1 - \alpha_0) / NSUB$$

ENQUANTO ( $j \leq NSUB$ ) FAÇA:

$j = j + 1$  (contador do número de subincrementos)

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \alpha \Delta \sigma_e$$

SE ( $f(\sigma_1, \kappa_0) > FTOL$ ) ENTÃO:

$$\alpha_1 = \alpha$$

SE ( $F_0 < -FTOL$ ) ENTÃO:

$$F_1 = f(\sigma_1, \kappa_0)$$

$i = MAXITS + 1; j = NSUB + 1$  (valores de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  encontrados)

SENÃO:

$$\alpha_0 = 0; F_0 = F_{save}$$

$j = NSUB + 1$  (reiniciar a busca com os novos valores de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ )

FIM DO SE

SENÃO:

$$\alpha_0 = \alpha; F_0 = f(\sigma_1, \kappa_0)$$

FIM DO SE

FIM DO ENQUANTO

FIM DO ENQUANTO

SE ( $i = MAXITS$ ) ENTÃO:

Convergência não atingida depois de *MAXITS* iterações, parar execução do programa.

FIM DO SE

Chamada da rotina *Pegasus* com os valores de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  encontrados.

Saída com o valor de  $\alpha$  encontrado.

---

O número de subincrementos *NSUB* é fixado em 10 enquanto que o número máximo de reinícios da interação *MAXITS* é fixado em 3.



TABELA A.3 – Algoritmo para correção das tensões para a superfície de escoamento.

---

*Inicialização:*

1. Entrada de dados ( $\sigma_0, \kappa_0, MAXITS, FTOL$ );

2. Inicializar variáveis:  $i = 0$ ;

---

$$\delta\lambda = f_0 / (A_0 + \mathbf{a}_0^t \mathbf{C}_e \mathbf{b}_0) \quad (\text{Método do Retorno Radial})$$

$$\sigma = \sigma_0 - \delta\lambda \mathbf{C}_e \mathbf{b}_0$$

$$\kappa = \kappa_0 + \delta\lambda B_0$$

ENQUANTO ( $i \leq MAXITS$ ) FAÇA:

$i = i + 1$  (contador do número de iterações)

SE ( $|f(\sigma, \kappa)| > |f(\sigma_0, \kappa_0)|$ ) ENTÃO: abandonar a correção anterior

$$\delta\lambda = f_0 / (\mathbf{a}_0^t \mathbf{a}_0)$$

$$\sigma = \sigma_0 - \delta\lambda \mathbf{a}_0$$

$$\kappa = \kappa_0$$

FIM DO SE

SE ( $|f(\sigma, \kappa)| \leq FTOL$ ) ENTÃO:

$$i = MAXITS + 1$$

FIM DO SE

$$\sigma_0 = \sigma; \kappa_0 = \kappa$$

FIM DO ENQUANTO

SE ( $i = MAXITS$ ) ENTÃO:

Convergência não atingida depois de  $MAXITS$  iterações, parar execução do programa.

FIM DO SE

Saída com as tensões  $\sigma$  e o parâmetro de encruamento  $H$  na superfície de escoamento.

---

O número máximo de iterações de correção é usualmente fixado entre 5 e 10. A tolerância da função de escoamento  $FTOL$  pode ser escolhida entre  $10^{-6}$  –  $10^{-12}$ .

TABELA A.4 – Algoritmo do método de Euler modificado.

*Inicialização:*

1. Entrada de dados ( $\sigma_0, \kappa_0, \Delta \varepsilon, STOL$ );

2. Inicializar variáveis:  $i = 0$ ;

---


$$\Delta \sigma_e = \mathbf{C}_e \Delta \varepsilon \quad (\text{cálculo do incremento de tensão})$$

$$\sigma_e = \sigma_0 + \Delta \sigma_e \quad (\text{cálculo do estado teste de tensão elástico})$$

SE ( $f(\sigma_e, \kappa_0) \leq FTOL$ ) ENTÃO: incremento de tensão puramente elástico

$$\sigma_1 = \sigma_e; \kappa_1 = \kappa_0;$$

SENÃO

SE ( $f(\sigma_0, \kappa_0) < -FTOL$  e  $f(\sigma_e, \kappa_0) > FTOL$ ) ENTÃO: transição de elástico para plástico

CHAMA *Pegasus*: cálculo de  $\alpha$

SENÃO

SE ( $|f(\sigma_0, \kappa_0)| \leq FTOL$  e  $f(\sigma_e, \kappa_0) > FTOL$ ) ENTÃO:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a}_0^t \Delta \sigma_e}{\|\mathbf{a}_0\|_2 \|\Delta \sigma_e\|_2}$$

SE ( $\cos \theta \geq -LTOL$ ) ENTÃO: incremento de tensão puramente plástico

$$\alpha = 0$$

SENÃO: Descarregamento elástico seguido de fluxo plástico

CHAMA *Pegasus\_unloading*: cálculo de  $\alpha$

FIM DO SE

SENÃO:

Estado de tensão ilegal, uma vez que está fora da superfície de escoamento

FIM DO SE

$$\Delta \sigma_e = (1 - \alpha) \Delta \sigma_e$$

$$\sigma_0 = \sigma_0 + \alpha \Delta \sigma_e \quad (\text{atualização das tensões})$$

$$T = 0; \Delta T = 1$$

ENQUANTO ( $T < 1$ ) FAÇA:

PARA ( $i = 1, 2$ ) FAÇA:

$$\Delta \sigma_i = \Delta T \Delta \sigma_e - \Delta \lambda_i \mathbf{C}_e \mathbf{b}_i$$

$$\Delta \kappa_i = \Delta \lambda_i B_i$$

Onde as grandezas são avaliadas em  $(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\kappa}_i)$

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_T; \tilde{\kappa}_1 = \kappa_T;$$

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_T; \tilde{\kappa}_2 = \kappa_T + \Delta\kappa_1;$$

FIM DO PARA

$$\tilde{\sigma}_{T+\Delta T} = \sigma_T + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2)$$

$$\tilde{\kappa}_{T+\Delta T} = \kappa_T + \frac{1}{2}(\Delta\kappa_1 + \Delta\kappa_2)$$

$$R_{T+\Delta T} = MAX \left\{ \frac{\|\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1\|}{2\|\tilde{\sigma}_{T+\Delta T}\|} \quad \frac{|\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1|}{2\tilde{\kappa}_{T+\Delta T}} \quad EPS \right\}, EPS = \text{constante da máquina}$$

SE ( $R_{T+\Delta T} > STOL$ ) ENTÃO: (subpasso falhou, encontrar tamanho menor do passo)

$$q = MAX \{0.9\sqrt{STOL/R_{T+\Delta T}} \quad 0.1\}$$

$$\Delta T = MAX \{q\Delta T \quad \Delta T_{\min}\}$$

SENÃO (subpasso foi bem sucedido)

$$\sigma_{T+\Delta T} = \tilde{\sigma}_{T+\Delta T}; \kappa_{T+\Delta T} = \tilde{\kappa}_{T+\Delta T} \text{ (atualização das tensões e parâmetro de encruamento)}$$

SE ( $|f(\sigma_{T+\Delta T}, \kappa_{T+\Delta T})| > FTOL$ ) ENTÃO:

CHAMA *Correction* (corrigir as tensões para a superfície de escoamento)

FIM DO SE

$$q = MIN \{0.9\sqrt{STOL/R_{T+\Delta T}} \quad 1.1\}$$

SE( passo anterior falhou ) ENTÃO:

$$q = MIN \{q \quad 1\} \text{ (limitar o crescimento do tamanho do passo)}$$

FIM DO SE

$$\Delta T = q\Delta T$$

$$\Delta T = MAX \{\Delta T \quad \Delta T_{\min}\} \text{ (tamanho mínimo do passo não menor que } \Delta T_{\min} \text{)}$$

$$\Delta T = MIN \{\Delta T \quad 1 - T\} \text{ (limitar a integração até } T=1 \text{)}$$

FIM DO SE

$$T = T + \Delta T$$

FIM DO ENQUANTO

Saída com as tensões e com o parâmetro de encruamento no final do incremento com  $T=1$

---

Para aritmética de dupla precisão em máquinas de 32-bit, Sloan *et al.* (2001) recomendam como apropriados, valores de tolerância  $LTOL \approx 10^{-6}$  e  $EPS \approx 10^{-16}$ .