

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**MÉTODO LTS_N PARA N
INTEIRO**

por

Niva Helena Bonenberger

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Cynthia Feijó Segatto
Orientador

Porto Alegre, Dezembro de 2005.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Bonenberger, Niva Helena

MÉTODO LTS_N PARA N INTEIRO / Niva Helena Bonenberger.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2005.

60 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.

Orientador: Segatto, Cynthia Feijó

Dissertação: Matemática Aplicada

MÉTODO LTS_N PARA N INTEIRO

por

Niva Helena Bonenberger

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria de Transporte e Transformadas Integrais

Orientador: Prof. Dr. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo de Carvalho Barros
UERJ

Prof. Dr. Rubem Vargas
PUCRS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
09/12/ 2005.

Prof. Maria Cristina Varriale, Ph.D.
Coordenador

*Ao meu querido filho Matheus,
pelo carinho e incentivo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela saúde e por todas as virtudes a mim concedidas para concluir este trabalho.

À Doutora Cyntia Feijó Segatto pela orientação, apoio, compreensão e paciência que tornaram possível a realização deste trabalho.

À colega “Flavinha” pela amizade e apoio nas disciplinas e com o LATEX.

Ao professor Jacques A. L. da Silva pela oportunidade de recuperação na disciplina Introdução à Análise Real.

Aos colegas Edson, Ricardo e Simone pela amizade, apoio e os momentos de estudo.

À minha querida sobrinha Cintia, pelo apoio e auxílio na organização da apresentação do trabalho.

Ao Cleber pela ajuda com o LATEX.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma estiveram presentes nesta jornada.

A todos o meu *MUITO OBRIGADA*.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1 INTRODUÇÃO	1
2 O MÉTODO LTS_N PARA N INTEIRO.	7
2.1 Formulação LTS_N clássico	7
2.1.1 Método dos coeficientes a determinar	14
2.2 Formulação LTS_N com N ímpar	16
2.2.1 Resolução da equação de transporte pelo método LTS_3	20
3 O MÉTODO LTS_N COM DEPENDÊNCIA ANGULAR CONTÍNUA 25	
3.1 O Método LTS_N, N par, com dependência angular contínua .	25
3.2 O Método LTS_N, N ímpar, com dependência angular contínua	27
4 RESULTADOS NUMÉRICOS	32
5 CONCLUSÕES	48
REFERÊNCIAS	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Intensidade de Radiação Escalar - N ímpar, $L = 0$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$ - 1^a tabela coeficientes a determinar e 2^a convolução	34
Tabela 4.2	Intensidade de Radiação Escalar - N Par, $L = 0$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$ - coeficientes a determinar	35
Tabela 4.3	Coeficientes β_ℓ considerando $L=299$	36
Tabela 4.4	Densidade de Radiação - N ímpar, $L = 299$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$ - Coeficientes a determinar	37
Tabela 4.5	Densidade de Radiação - N par, $L = 299$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$	37
Tabela 4.6	Intensidade de Radiação Escalar - N Ímpar, $L = 0$, $\omega = 0.5$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura unitária	38
Tabela 4.7	Intensidade de Radiação Escalar - N Par, $L = 0$, $\omega = 0.5$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura unitária	39
Tabela 4.8	Intensidade de Radiação Escalar - N Ímpar, $L = 0$, $\omega = 0.2$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura unitária	40
Tabela 4.9	Intensidade de Radiação Escalar - N Par, $L = 0$, $\omega = 0.2$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura unitária	41
Tabela 4.10	Intensidade de Radiação Escalar - N Ímpar, $L = 0$, $\omega = 0.9$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura 100 livres caminhos médios	42
Tabela 4.11	Intensidade de Radiação Escalar - N Par, $L = 0$, $\omega = 0.5$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura 100 livres caminhos médios	43
Tabela 4.12	Fluxo escalar $\omega = 0.9$, $x_0 = 1$ núcleo de espalhamento Gaussiano ($k = 0.1$)	46
Tabela 4.13	Fluxo escalar $\omega = 0.9$, $x_0 = 1$ núcleo de espalhamento Gaussiano($k = 0.0001$)	47

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz dependente da aproximação considerada, independente do parâmetro s
A^{-1}	Matriz inversa da matriz A
a_{ij}	Elementos da matriz A
$B(x)$	Matriz transformada inversa de Laplace $[M_N]^{-1}$
$B^+(x)$	Decomposição da matriz $B(x)$ nos autovalores positivos
$B^-(x)$	Decomposição da matriz $B(x)$ nos autovalores negativos
$b_{ij}^+(x)$	Elementos da matriz $B^+(x)$
$b_{ij}^-(x)$	Elementos da matriz $B^-(x)$
β_l	Coefficientes da expansão em polinômios de Legendre da função de espalhamento
D	Matriz diagonal dos autovalores de A
$f(\mu)$	Fluxo angular de partículas incidentes na fronteira $x = 0$ da placa na direção μ
$g(\mu)$	Fluxo angular de partículas incidentes na fronteira $x = x_0$ da placa na direção μ
$H(x)$	Vetor convolução da matriz $B(x)$ com o vetor fonte
I	Matriz identidade
L	Grau de anisotropia
\mathcal{L}	Operador da transformada de Laplace
\mathcal{L}^-	Operador da transformada inversa de Laplace
$M_N(s)$	Matriz simbólica associada à solução genérica quadrada de ordem N
$p(\cos \theta)$	Função de fase probabilidade de transferência $f(\mu' \rightarrow \mu)$
$P_l(\mu)$	Polinômios de Legendre
$P_l^m(\mu)$	Funções associadas de Legendre
$Q(x, \mu)$	Termo fonte na posição x e na direção de μ
$Q_m(x)$	Termo fonte na posição x e na direção discreta μ_m

s	Parâmetro complexo proveniente da Transformada de Laplace
x	Espessura ótica
X	Matriz dos autovetores de A
X^{-1}	Matriz inversa de X
x_0	Comprimento da placa
μ	Variável angular; direção de propagação da partícula
μ_i	Raízes do Polinômio de Legendre: direções discretas
ω	Albedo de espalhamento simples do meio
w_i	Pesos da Quadratura de Gauss-Legendre
$\psi(x, \mu)$	Fluxo angular de partículas em x na direção μ
$\psi_m(x)$	Fluxo angular de partículas em x na direção discreta μ_m
$\Psi(x)$	Vetor fluxo angular de partículas em x
$\Psi(s)$	Vetor fluxo angular de partículas transformado
φ	Ângulo azimutal
$*$	Operação convolução
δ	função teste “Delta de Dirac”
D^+	matriz dos autovalores positivos
D^-	matriz dos autovalores negativos
d_{ii}	elementos da matriz D

RESUMO

O método LTS_N é um método de solução analítica para o conjunto de equações diferenciais ordinárias resultantes da aproximação de ordenadas discretas S_N da equação unidimensional de transporte de partículas neutras, isto é, a solução para o sistema de equações S_N é obtida sem aproximações ao longo de sua derivação. Classicamente, devido à existência de uma singularidade na direção $\mu = 0$, N é considerado par. Neste trabalho, com o objetivo de estudar a influência desta singularidade no comportamento da solução, é apresentada uma solução analítica para o conjunto de equações S_N , considerando N ímpar. Simulações numéricas e comparação com os resultados obtidos pelo método LTS_N com N par são apresentadas.

ABSTRACT

The LTS_N method is an analytical method to solve the system of differential equations resulting from the discrete ordinates (S_N) approximation to the neutral particle transport equation, i.e., the solution of the system S_N equations is obtained without approximations in its derivation. Classically, due to the existence of a singularity in the direction $\mu = 0$, N is taken even numbers. In this work, in order to study the influence of this singularity in the solution behavior, an analytical solution is presented for the system of the S_N equations with odd N . Numerical simulations and comparisons with the results obtained by the LTS_N method with even N are presented.

1 INTRODUÇÃO

A equação de transporte é uma equação integro-diferencial que descreve a distribuição de partículas que fluem num meio, considerando o movimento das mesmas e suas interações com os átomos constituintes do meio [29], [33], [34]. Essa equação é uma versão linearizada da equação inicialmente desenvolvida por Boltzmann, [14], [42], [12] em 1872, para a teoria cinética dos gases, a qual representa um balanço de partículas num elemento de volume do espaço de fase.

Soluções exatas da equação de transporte podem ser obtidas, para problemas específicos, pelo método de Case [28], [27]. A partir da vasta aplicação da teoria de transporte em algumas áreas da Engenharia e da Física, são desenvolvidos métodos numéricos e semi-numéricos de solução dessa equação. Dentre os métodos determinísticos aplicáveis na solução da equação de transporte, pode-se citar métodos de ordenadas discretas (S_N) [29], harmônicos esféricos (P_N) [31], “invariant imbedding” [1],[13], LTP_N [69], [66], $SGFS_N$ [7], e (F_N) [35], entre outros.

Na aproximação S_N , a equação de transporte é aproximada por um sistema de N equações diferenciais lineares ordinárias. Esse método é focado no tratamento discreto da variável angular e consiste, essencialmente, em aproximar o termo integral por uma fórmula de Quadratura Gaussiana de ordem N e aplicação do método da colocação, considerando como função teste $\delta(\mu - \mu_n)$, onde os μ_n , $n = 1 : N$ são as raízes da Quadratura Gaussiana considerada. Esse procedimento gera um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável espacial. A precisão dos resultados, que é da forma exponencial, está intrinsecamente relacionada com o nível de discretização da variável angular.

O método LTS_N [75], [80], desenvolvido no início da década de 90, resolve de forma analítica a aproximação S_N do problema de transporte em uma placa

plana. Deve-se observar que o método é dito analítico, pois a solução do sistema de equações diferenciais S_N é obtida sem aproximação ao longo de sua derivação. O método consiste na aplicação da Transformada de Laplace na variável espacial do sistema S_N de equações diferenciais lineares de 1.^a ordem. O sistema transformado, que é um sistema linear e algébrico dependente do parâmetro complexo “s”, é resolvido para o fluxo transformado e, posteriormente, a inversão da Transformada de Laplace é feita de forma analítica, encontrando-se assim uma expressão fechada para o cálculo do fluxo de partículas nas direções discretas. Aqui, é importante salientar que, para proceder à inversão da Transformada de Laplace, é necessário inverter uma matriz da forma $sI + A$, onde I é a matriz identidade de ordem N e A é uma matriz cheia de ordem N que contém os parâmetros da equação de Transporte.

Com o objetivo de encontrar uma fórmula analítica para a inversão da matriz $(sI + A)$ e posterior inversão da Transformada de Laplace associada ao método S_N , vários métodos foram desenvolvidos. Primeiramente, Barichello [2] propôs um algoritmo que usa a estrutura da matriz $LT S_N$, linearmente anisotrópica, e a definição de matriz inversa. Para aumentar o grau de anisotropia dos problemas, foi empregado um procedimento alternativo para a inversão da matriz com o uso do algoritmo de Trzaska [71], [76], [69]. A seguir, Oliveira [44], [45] estendeu a fórmula de inversão proposta inicialmente por Barichello para o caso anisotrópico. Oliveira baseou-se na idéia da decomposição da matriz em sub-colunas, como havia sido anteriormente proposto por Barichello. A partir da obtenção do determinante e dos cofatores da matriz A , a matriz adjunta pôde ser construída e a matriz inversa A^{-1} foi calculada. Brancher constatou que os métodos utilizados para a inversão da matriz eram computacionalmente inviáveis para inverter problemas de ordem grande ($N > 22$), devido à aritmética finita [17]. Isso se deve ao uso, no primeiro caso, da definição de matriz inversa, e, no caso do algoritmo de Trzaska, pelo uso do teorema de Caley-Hamilton, em que potências da matriz considerada são usadas para o cálculo de sua inversa. Para melhorar o desempenho computacional dos métodos de inversão com posterior inversão da Transformada de Laplace da matriz simbólica $(sI + A)$, primeiramente Cardona e Vilhena, [24] desen-

volveram um algoritmo para inversão da matriz LTS_N associada ao caso isotrópico. Esse algoritmo triangulariza a matriz LTS_N através de operações elementares, e utiliza o método do particionamento [32] para inversão da matriz triangular simbólica e a técnica de inversão de Heaviside para inversão da Transformada de Laplace. A triangularização da matriz simbólica por operações elementares não foi possível ser estendida para problemas anisotrópicos. A seguir, surgiu a idéia de um método recursivo para inverter uma matriz simbólica do tipo $(sI + A)$ para problemas com anisotropia qualquer, o qual combina a decomposição de Schur para triangularização da matriz simbólica, o método do particionamento para inversão da matriz triangular e a técnica de Heaviside para inversão da Transformada de Laplace. Esse método foi implementado considerando a quadratura de N até 400 em um computador Cray [61]. Ainda com o objetivo de incrementar a ordem de quadratura nos problemas resolvidos, foi desenvolvido um método que diagonaliza a matriz A , considerando que ela possui autovetores não degenerados [62]. Esse procedimento, como envolve apenas o cálculo de autovalores e autovetores, propicia a inversão da matriz para N grande ($N \approx 2000$), dependendo somente de algoritmos eficientes para o cálculo de autovalores e autovetores da matriz A , associada ao problema. Deve-se observar que, com esse procedimento, o tempo computacional cai drasticamente.

Para resolver o problema de “overflow”, que pode ocorrer devido ao caráter exponencial da solução LTS_N , em uma placa de espessura grande ou elevadas ordens de quadratura Barichello [5] propôs uma mudança de variável na solução, trocando x por $x - x_0$ para os termos exponenciais positivos em que x_0 é a espessura da placa, na solução homogênea associada ao problema. Esse procedimento funciona para problemas sem fonte, mas pode carregar o problema de overflow para o termo de convolução. Para resolver o problema criado no termo de convolução Gonçalves [37] propôs uma nova formulação para a solução LTS_N que leva em conta a propriedade de invariância das direções discretas, podendo assim lidar com problemas de transporte com alto grau de anisotropia, grandes espessuras e fonte arbitrária.

Aqui ainda deve ser observado que, a partir do método LTS_N , foi desenvolvido um método genérico [20], [78], em que o mais importante é o caráter analítico da solução para as aproximações que transformam a equação de transporte num conjunto de equações diferenciais ordinárias. Esses métodos são conhecidos como LTP_N [79], [69], [66], LTW_N [21],[22], $LTC h_N$ [23], [20], LTA_N [25], [26] e $LTL D_N$ [6].

Cabe ressaltar ainda a grande importância que foi a prova da convergência do método LTS_N , usando o Teorema da aproximação da Teoria de semigrupo fortemente contínuo [47], [49], [48], [51], que dá confiabilidade aos resultados, com precisão controlada. Com o uso desse teorema, na medida em que a ordem de quadratura cresce, é possível afirmar se o resultado encontrado se aproxima da solução exata, a menos do erro inerente ao problema de arredondamento. Também foi provada a existência de um isomorfismo entre os espaços funcionais P_N e S_{N+1} , confirmando a convergência do método dos harmônicos esféricos (P_N) à solução [63].

O método LTS_N já foi usado na resolução de problemas de transporte: unidimensionais, em meio homogêneo [3] e heterogêneo [70], espalhamento anisotrópico [44], [76], [61], para modelos de um grupo [2] e para modelo de multigrupo de energia [75], [76], [8], problemas de transferência radiativa em núvens com ou sem simetria azimutal, [59], [58], [77], [16]. Também já foram realizados estudos para a equação de transporte que depende do tempo [82], [64], [53], [45] e para modelos com variável angular contínua [60], [39]. Problemas lineares e não lineares já foram resolvidos [72], [73], [81], além de problemas inversos [5], [74], com aplicação em ótica hidrológica [54], [56], [55]. Outros trabalhos também comprovam a eficácia do método na resolução de problemas de engenharia nuclear [30], [40], [15], na determinação de criticalidade [43], [10], [9], [11], e no cálculo de parâmetros radiantes [83], [68], [70], [65]. Esse método também foi usado, tanto na solução da equação adjunta de transporte de nêutrons [36], com a determinação da função importância e o cálculo de fluxo adjunto, como na solução

da equação de transferência radiativa condutiva [41]. A formulação LTS_N também foi estendida a problemas de transporte estacionário em duas e três dimensões [85], [84], [80], [86], [52], [38], [50] e em domínios convexos bidimensionais [87]. Orengo [46] construiu um código computacional para cálculo de transporte unidimensional usando a formulação LTS_N . Esse código reúne todas as vantagens proporcionadas pelo método, inclusive o caráter semi-analítico, fazendo assim controle de erro. Além do método da diagonalização, para inversão da matriz simbólica associada à solução LTS_N , foi usado um algoritmo iterativo para o cálculo das constantes de integração, o que reduziu em aproximadamente 30% o tempo computacional quando a ordem de quadratura é alta. Deve-se notar que, quando ocorrer de a matriz não ser diagonalizável, pode ser usado o método desenvolvido anteriormente, que associa o método do particionamento com o método de Schur, em que a inversão da Transformada de Laplace será feita pelo método de Heaviside [17].

O método LTS_N também foi generalizado para resolver o problema de transporte com autovalores complexos. Essa formulação foi aplicada na resolução de um problema de transferência radiativa com polarização [67]. O método LTS_N ainda foi usado para resolução da equação de transporte de partículas com dependência angular contínua, considerando qualquer grau de anisotropia e fonte arbitrária [39]e, após, Santos [57] desenvolveu um método “multigrid” para a aproximação angular da solução da equação de transporte de partículas em uma placa plana, baseado na formulação LTS_N com dependência contínua na variável angular.

Classicamente, o método de ordenadas discretas é desenvolvido considerando N par por causa da singularidade existente na equação unidimensional de transporte em $\mu = 0$. No presente trabalho, para uma melhor compreensão da influência da singularidade $\mu = 0$ no comportamento da solução, uma nova solução analítica para as equações S_N é apresentada, considerando N ímpar e usando a técnica da diagonalização para inversão da matriz simbólica $sI + A$. A solução LTS_N para N ímpar é obtida, resolvendo para o fluxo angular a equação integral resultante para a variável discreta $\mu = 0$ e substituindo esta expressão nas $N - 1$

equações obtidas para as direções discretas não nulas. O sistema resultante deste procedimento é então resolvido usando a mesma idéia do método LTS_N clássico. A formulação proposta é testada computacionalmente através da resolução de problemas de transferência radiativa em geometria plana isotrópico e também com alto grau de anisotropia. Também é resolvido um problema idealizado com função de fase Gaussiana centrada em $\mu = 0$, com o objetivo de estudar a influência da singularidade na solução.

Para atingir esse objetivo, o trabalho organiza-se da seguinte maneira: no capítulo 2, apresenta-se a formulação LTS_N para N inteiro. Esse capítulo divide-se em duas subseções: a subseção 2.1 descreve a formulação LTS_N clássica, isto é, considerando N par; a subseção 2.2 desenvolve uma formulação do método LTS_N , considerando N ímpar. No item 2.2.1 cita-se um exemplo para LTS_N com $N = 3$. No capítulo 3, mostram-se os resultados numéricos para os vários problemas na literatura. Resolvem-se problemas isotrópicos bem como com anisotropia 299, usando os métodos LTS_N com N ímpar e com N par. Também se soluciona um problema idealizado, em que a função de fase é uma Gaussiana, além de se proceder à comparação entre os métodos para os vários problemas já citados.

2 O MÉTODO LTS_N PARA N INTEIRO.

Neste capítulo, desenvolve-se uma formulação LTS_N para N inteiro. Na subseção 2.1, explica-se a formulação LTS_N clássica, isto é, considerando N par; na seção 2.2, desenvolve-se uma formulação do método LTS_N considerando N ímpar.

2.1 Formulação LTS_N clássico

Nesta seção, desenvolve-se a aproximação S_N da equação de transporte linear unidimensional com um grupo de energia com simetria azimutal. Assim, primeiramente, considera-se a equação de transporte monoenergética descrita por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 p(\cos\theta) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (2.1)$$

em que $\psi(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas na direção de μ ; $x \in [0, x_0]$ é a espessura ótica; $\omega \in [0, 1]$ é o termo de espalhamento do meio (albedo); $\mu \in [-1, 1]$ é o cosseno do ângulo polar; $Q(x, \mu)$ é o termo fonte e $p(\cos\theta)$ é a função de espalhamento.

Neste trabalho, também se considera a condição de contorno incidente, isto é

$$\psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0 \quad \text{e} \quad \psi(x_0, \mu) = g(\mu), \quad \mu < 0,$$

em que $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são os fluxos incidentes na fronteira do domínio (nas direções positivas e negativas, respectivamente) e x_0 é o comprimento da placa em unidades de livres caminhos médios.

Aqui, considera-se que a função de espalhamento $p(\cos\theta)$ pode ser representada pela expansão em Polinômios de Legendre em termos do ângulo de espalhamento θ , isto é,

$$p(\cos \theta) = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\cos \theta),$$

em que os coeficientes β_l são tabelados, com $\beta_0 = 1$ e θ é o ângulo de espalhamento. Aplicando o teorema da adição para Polinômios de Legendre[29], a equação acima pode ser reescrita como:

$$p(\cos \theta) = \sum_{m=0}^M \sum_{l=m}^L \beta_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (2.2)$$

em que φ é o ângulo azimutal, μ o cosseno do ângulo polar, $P_l^m(\mu)$ são as funções associadas de Legendre e os coeficientes β_l^m são determinados por,

$$\beta_l^m = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \beta_l.$$

Para um problema com simetria azimutal, na equação (2.2), M é igual a zero. Desta forma, para o caso considerado com simetria azimutal

$$p(\cos \theta) = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) P_l(\mu'). \quad (2.3)$$

O método de ordenadas discretas desenvolvido por Chandrasekhar [29] aproxima o termo integral da equação por quadratura de Gauss, resultando então:

$$\int_{-1}^1 p(\cos \theta) \psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{k=1}^N w_k \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_k) P_l(\mu) \psi(x, \mu_k), \quad (2.4)$$

em que μ_k são as raízes do Polinômio de Legendre, usualmente ordenadas de forma decrescente e N é considerado par. Desta forma:

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 1,$$

e os w_k são os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre dados por:

$$w_k = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{(\mu - \mu_j)}{(\mu_k - \mu_j)} d\mu. \quad (2.5)$$

A seguir, é aplicado o método da colocação na equação (2.1), considerando $\delta(\mu - \mu_m)$ para $m = 1, 2, \dots, N$ como função teste (Delta de Dirac). Deste procedimento, resulta o sistema S_N de equações de ordenadas discretas:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_m(x) + \psi_m(x) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \sum_{k=1}^N w_k P_l(\mu_k) P_l(\mu_m) \psi_k(x) + Q_m(x), \quad (2.6)$$

com $m = 1, 2, \dots, N$. Aqui, por facilidade de notação na equação (2.6), o fluxo de partículas na direção discreta μ_m , $\psi(x, \mu_m)$ é representado por $\psi_m(x)$.

O conjunto de equações S_N descrito pelas equações (2.6) pode ser re-escrito na forma matricial como

$$\frac{d}{dx} \mathbf{\Psi}(x) - \mathbf{A} \mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{Q}(x), \quad (2.7)$$

onde o vetor $\mathbf{\Psi}(x)$ é definido por

$$\mathbf{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi}_1(x) \\ \mathbf{\Psi}_2(x) \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{\Psi}_1(x)$ e $\mathbf{\Psi}_2(x)$ são sub-vetores de ordem $\frac{N}{2}$, cujos componentes são os fluxos de partículas nas direções discretas positivas e negativas, respectivamente, isto é:

$$\mathbf{\Psi}_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_{\frac{N}{2}}(x) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{\Psi}_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\frac{N}{2}+1}(x) \\ \psi_{\frac{N}{2}+2}(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}.$$

A matriz A de ordem $N \times N$ é definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\mu_i} + \frac{\omega}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L w_j \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j), & i = j \\ \frac{\omega}{2\mu_i} \sum_{l=0}^L w_j \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j), & i \neq j \end{cases}, \quad (2.8)$$

para $i, j = 1 : N$, e o vetor fonte $\mathbf{Q}(x)$ é representado por

$$\mathbf{Q}(x) = \begin{pmatrix} \frac{Q_1(x)}{\mu_1} \\ \frac{Q_2(x)}{\mu_2} \\ \vdots \\ \frac{Q_N(x)}{\mu_N} \end{pmatrix};$$

usando esta notação, as condições de contorno são escritas como:

$$\Psi_1(0) = \mathbf{f} \quad \text{e} \quad \Psi_2(x_0) = \mathbf{g}. \quad (2.9)$$

O método LTS_N aplica a Transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ao conjunto de equações S_N descrito por (2.7), obtendo-se o seguinte sistema transformado dependente do parâmetro complexo s ,

$$M_N(s)\Psi(s) = \Psi(0) + Q(s), \quad (2.10)$$

em que a matriz $M_N(s)$ é quadrada de ordem N da forma

$$M_N(s) = sI - A;$$

I é a matriz identidade de ordem N ; A , a matriz definida em (2.8); e $Q(s)$ é o vetor fonte transformado. Resolvendo, a equação (2.10) para $\Psi(s)$, obtém-se:

$$\Psi(s) = B(s)\Psi(0) + B(s)Q(s), \quad (2.11)$$

em que

$$B(s) = [M_N]^{-1}.$$

A seguir, procedendo à inversão da Transformada de Laplace do sistema (2.11), obtém-se:

$$\Psi(x) = B(x)\Psi(0) + B(x) * Q(x), \quad (2.12)$$

em que $*$ representa convolução, e

$$B(x) = \mathcal{L}^{-1}[B(s)] = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}. \quad (2.13)$$

O vetor convolução, que aparece na equação (2.12), é definido por:

$$H(x) = B(x) * Q(x) = \int_0^x B(x - \xi)Q(\xi)d\xi. \quad (2.14)$$

Desta forma, o vetor fluxo angular de partículas é escrito como:

$$\Psi(x) = \mathbf{B}(x)\Psi(0) + \mathbf{H}(x) \quad (2.15)$$

A fórmula (2.15) é uma solução analítica do sistema de equações S_N (2.7). A matriz $B(x)$ é obtida a partir da inversão da matriz simbólica $sI - A$, conforme mostrado em (2.13). Essa inversão é feita observando-se que os autovalores da matriz LTS_N são todos simétricos e diferentes quando $\omega \neq 1$; logo, a matriz A pode ser decomposta em uma matriz diagonal através da relação:

$$A = XDX^{-1},$$

em que D é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de A , e X é a matriz coluna dos autovetores associados. Assim,

$$B(x) = \mathcal{L}^{-1}\{(sXX^{-1} - XDX^{-1})^{-1}\}. \quad (2.16)$$

Colocando em evidência a matriz dos autovetores X à esquerda e X^{-1} à direita, tem-se que

$$B(x) = \mathcal{L}^{-1}[(X(sI - D)X^{-1})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[X(sI - D)^{-1}X^{-1}]$$

e como X é uma matriz constante, então

$$B(x) = X\mathcal{L}^{-1}[(sI - D)^{-1}]X^{-1}. \quad (2.17)$$

Agora, a matriz simbólica $sI - D$ é uma matriz diagonal

$$sI - D = \begin{pmatrix} s - d_1 & 0 & \dots & 0 \\ & s - d_2 & & \\ & & s - d_3 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s - d_N \end{pmatrix},$$

em que d_i são os autovalores de A ; logo, sua inversa é dada por:

$$(sI - D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ & \frac{1}{s-d_2} & \dots & \\ & & \frac{1}{s-d_3} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & \frac{1}{s-d_N} \end{pmatrix}.$$

Então, a inversa da Transformada de Laplace é:

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI - D)^{-1}] = \begin{pmatrix} e^{xd_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{xd_2} & & \vdots \\ & & e^{xd_3} & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & e^{xd_N} \end{pmatrix} = e^{Dx}. \quad (2.18)$$

Desta forma, a função $B(x)$ descrita pela equação (2.13), pode ser escrita

$$B(x) = X e^{Dx} X^{-1}. \quad (2.19)$$

Ainda deve ser observado que, na solução descrita pela equação (2.15), conhece-se apenas $N/2$ componentes do vetor $\Psi(0)$, correspondentes ao fluxo angular incidente na fronteira $x = 0$. As outras $N/2$ componentes do vetor $\Psi(0)$ são calculadas pela aplicação da condição de contorno (2.9) em $x = x_0$. Logo, fazendo $x = x_0$ na equação (2.15), tem-se:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(x_0) \\ \Psi_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}(x_0) & B_{12}(x_0) \\ B_{21}(x_0) & B_{22}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1(x_0) \\ H_2(x_0) \end{pmatrix},$$

em que $\Psi_1(0)$ e $\Psi_2(x_0)$ são conhecidos. Então, a partir da segunda equação do sistema de blocos de matrizes da equação acima, tem-se

$$\Psi_2(x_0) = B_{21}(x_0)\Psi_1(0) + B_{22}(x_0)\Psi_2(0) + H_2(x_0)$$

Para calcular $B_{21}(x_0)$ e $B_{22}(x_0)$, usa-se a equação (2.19), e para encontrar $H_2(x_0)$, usa-se a equação (2.14). Isolando $\Psi_2(0)$ na equação acima, tem-se:

$$\Psi_2(0) = [B_{22}(x_0)]^{-1}[\Psi_2(x_0) - B_{21}(x_0)\Psi_1(0) - H_2(x_0)].$$

Assim, determina-se o vetor $\Psi_2(0)$ e, em conseqüência, encontra-se o vetor fluxo angular dado pela equação (2.12). Pode-se observar que, para resolver problemas de transporte de grandes espessuras ou grandes valores de N , essa solução não é adequada devido ao comportamento exponencial da solução mais o fato de que os autovalores d_k aumentam em magnitude com N (a equação tende ao infinito). Para solucionar esse problema Barichello [4] sugere uma mudança de base na solução do problema homogêneo:

$$\Psi_h(x) = B^*(x)\Psi^*,$$

em que

$$B^*(x) = X[e^{D^+(x-x_0)} + e^{D^-x}]X^{-1}$$

em que D^+ é a matriz dos autovalores positivos de D e D^- é a matriz dos autovalores negativos com $D^+ + D^- = D$. Essa mudança de base não elimina a possibilidade de “overflow” na solução particular, ou melhor, no termo convolução. O problema de “overflow” foi abordado por Gonçalves, Segatto e Vilhena [37]. Para tanto, foi usada a propriedade de invariância na solução da equação de transporte, isto é, como as direções discretas são simétricas em torno de $\mu = 0$, fisicamente falando, corresponde considerar as partículas deslocando-se da direita para a esquerda com $\mu_m < 0$ identicamente, considerando as partículas deslocando-se da esquerda para a direita com $\mu_m > 0$. Com esta propriedade, decompõe-se a solução homogênea em componentes que apresentam apenas direções positivas ($\mu_m > 0$) e negativas ($\mu_m < 0$). Assim, fica

$$B^*(x) = Xe^{D^+x}X^{-1} + Xe^{D^-x}X^{-1}$$

$$B^*(x) = B^+(x) + B^-(x).$$

Levando-se em conta a propriedade de invariância e a decomposição da matriz $B(x)$, reescreve-se a solução LTS_N como:

$$\Psi(x) = B^+(x - x_0)\Psi(x_0) + B^-(x)\Psi(0) + H(x), \quad (2.20)$$

em que o vetor $H(x)$ é dado por:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{x_0}^x B^+(x-\xi)Q(\xi)d\xi + \int_0^x B^-(x-\xi)Q(\xi)d\xi \\ &= X\left(\int_{x_0}^x e^{D^+(x-\xi)}X^{-1}Q(\xi)d\xi + \int_0^x e^{D^-(x-\xi)}X^{-1}Q(\xi)d\xi\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para encontrar as componentes desconhecidas $\psi_2(0)$ e $\psi_1(x_0)$, dos vetores $\Psi(0)$ e $\Psi(x_0)$ respectivamente, aplica-se a condição de contorno (2.9) na equação (2.20), ficando:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(x_0) \\ \Psi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^+(-x_0) & B_{12}^-(0) \\ B_{21}^+(0) & B_{22}^-(x_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (I - B_{11}^-(0))\psi_1(0) - B_{12}^+(-x_0)\psi_2(x_0) - H_1(0) \\ (I - B_{22}^+(0))\psi_2(x_0) - B_{21}^-(x_0)\psi_1(0) - H_2(x_0) \end{pmatrix}.$$

Com essa solução, todas as exponenciais que aparecem na solução possuem expoentes negativos, logo o fluxo angular pode ser determinado sem ocorrer “overflow” para grandes espessuras ou para elevadas ordens de quadratura. Ainda deve ser observado que, com o tratamento dado pela equação (2.20), essa formulação pode ser aplicada a problemas de transporte de partículas com qualquer tipo de fonte.

2.1.1 Método dos coeficientes a determinar

Deve-se observar que sempre que uma equação diferencial ordinária possuir uma fonte do tipo

$$p(x)e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \text{sen} \\ \text{cos} \end{pmatrix} \beta x,$$

em que $p(x)$ é um polinômio, ou soma de funções deste tipo, o método dos coeficientes a determinar pode ser usado para encontrar a solução particular do problema no lugar da convolução descrita anteriormente. No caso da equação do método LTS_N , este método, sempre que possível, tem preferência sobre o método de convolução por possuir uma melhor eficiência computacional. Para exemplificar seu uso, aqui é examinado o seguinte problema matricial de ordem N com uma fonte exponencial:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A\Psi(x) = Fe^{\alpha x}, \quad (2.22)$$

considerando as condições de contorno:

$$\Psi_1(0) = f \quad \Psi_2(x_0) = g,$$

em que

$$\Psi(x) = [\Psi_1(x), \Psi_2(x)]^T,$$

em que $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ são sub-vetores de ordem $\frac{N}{2}$, respectivamente nas direções positivas e negativas, A é a matriz LTS_N e F um vetor contendo a parte constante da fonte. A solução deste problema será dividida em duas partes. Primeiramente, o problema homogêneo é resolvido pelo método LTS_N , isto é:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - A\Psi(x) = 0,$$

que possui solução:

$$\Psi_h(x) = X e^{Dx} X^{-1} \Psi(0),$$

em que $A = X D X^{-1}$.

Usando a mudança de variáveis explicada na seção (2.1) tem-se:

$$\Psi_h(x) = X e^{D^*x} \tau.$$

A função D^*x é descrita por

$$D^*x = \begin{cases} d_{ii}x & \text{se } d_{ii} < 0 \\ d_{ii}(x - x_0) & \text{se } d_{ii} > 0 \end{cases}$$

e τ é um vetor a ser determinado pelas condições de contorno. Agora, através do método dos coeficientes a determinar, supõe-se que a solução particular de (2.22) é do tipo

$$y_p = C e^{ax}, \tag{2.23}$$

em que C é um vetor a ser determinado. Substituindo a equação (2.23) em (2.22), tem-se que:

$$aC e^{ax} - AC e^{ax} = F e^{ax}$$

ou

$$(aI - A)C = F. \quad (2.24)$$

Desta forma resolvendo o sistema linear obtido na equação (2.24), o vetor C fica determinado e a solução da equação (2.22) é dada por:

$$\Psi(x) = Xe^{D^*x}\tau + Ce^{ax}.$$

Para determinar o vetor τ , as condições de contorno são aplicadas, e assim, definindo

$$B(x) = Xe^{D^*x}$$

tem-se

$$\Psi_1(0) = B_{11}(0)\tau_1 + B_{12}(0)\tau_2 + C_1$$

$$\Psi_2(x_0) = B_{21}(x_0)\tau_1 + B_{22}(x_0)\tau_2 + C_2e^{ax_0}$$

ou

$$\begin{pmatrix} B_{11}(0) & B_{12}(0) \\ B_{21}(x_0) & B_{22}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1(0) - C_1 \\ \Psi_2(x_0) - C_2e^{ax_0} \end{pmatrix}$$

Deve-se notar que este método evita a inversão da matriz dos autovetores, o que é necessário no método da convolução (2.12). Em contrapartida, o método da convolução sempre pode ser empregado, independentemente do termo de fonte considerado.

2.2 Formulação LTS_N com N ímpar

Com o objetivo de desenvolver a formulação LTS_N para N ímpar, primeiramente se desenvolve a aproximação S_N para N ímpar. Por facilidade de notação, considera-se $N = M + 1$, em que M é par e as raízes do Polinômio de Legendre de grau N são ordenadas de forma decrescente e notados como:

$$-1 < \mu_M < \mu_{M-1} < \dots < \mu_{\frac{M-1}{2}} < \mu_{M+1} < \mu_{\frac{M+1}{2}} \dots < \mu_1 < 1,$$

em que a direção $\mu_{M+1} = 0$. Exatamente como no caso de N par, o termo integral da equação unidimensional de transporte de partículas (2.1) é aproximado por

quadratura gaussiana, resultando

$$\int_{-1}^1 p(\cos \theta) \psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{k=1}^N w_k \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_k) P_l(\mu) \psi(x, \mu_k), \quad (2.25)$$

em que os pesos da quadratura, w_K são calculados pela fórmula (2.5). Novamente o método da colocação é aplicado, considerando como função teste a Delta de Dirac $\delta(\mu - \mu_m)$, $m = 1, 2, \dots, N$. Deste procedimento, resulta um sistema de M equações diferenciais.

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_m(x) + \psi_m(x) = \frac{\omega}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l \sum_{k=1}^{M+1} w_k P_l(\mu_k) P_l(\mu_m) \psi_k(x) + Q_m(x), \quad (2.26)$$

e na direção $\mu_{M+1} = 0$ resulta uma restrição

$$\psi_{M+1}(x) = \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^{M+1} \psi_i(x) \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_{M+1}) w_i + Q_{M+1}(x) \quad (2.27)$$

Nesse caso resultam as mesmas condições de contorno da seção anterior, isto é, de fluxo incidente descritas por:

$$\begin{aligned} \psi_m(0) &= f_m \quad \text{se } 1 \leq m \leq M/2 \\ \psi_m(x_0) &= g_m \quad \text{se } M/2 < m \leq M. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Deve-se observar que a equação (2.27) não necessita de condição de contorno. Desta forma, quando N é ímpar, a aproximação S_N da equação unidimensional de transporte é descrita por um sistema de $N - 1 = M$ equações diferenciais ordinárias descritas por (2.26), uma restrição na direção nula descrita por (2.27) e M condições de contorno descritas pelas equações (2.28).

Para facilitar a notação, no restante desta seção será usada a seguinte notação:

$$p(\mu_i, \mu_j) = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_i) P_l(\mu_j).$$

Para desenvolver o método LTS_N de solução do sistema descrito acima, isola-se o fluxo angular de partículas na direção nula ($M+1$) em função dos fluxos angulares de partículas nas outras direções. Assim, a partir da equação (2.27) pode-se escrever:

$$\psi_{M+1}(x) = \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^M \psi_i(x) p(\mu_{M+1}, \mu_i) w_i + \frac{\omega}{2} \psi_{M+1}(x) p(\mu_{M+1}, \mu_{M+1}) w_{M+1} + Q_{M+1}(x)$$

ou, resolvendo a equação acima para o fluxo de partículas na direção μ_{M+1} , tem-se

$$\psi_{M+1}(x) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega}{2} p(\mu_{M+1}, \mu_{M+1}) w_{M+1})} \left[\frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^M \psi_i(x) p(\mu_{M+1}, \mu_i) w_i + Q_{M+1}(x) \right];$$

agora notando

$$R = 1 - \frac{\omega}{2} p(\mu_{M+1}, \mu_{M+1}) w_{M+1},$$

tem-se

$$\psi_{M+1}(x) = \frac{\omega}{2R} \sum_{i=1}^M \psi_i(x) p(\mu_{M+1}, \mu_i) w_i + \frac{Q_{M+1}(x)}{R}. \quad (2.29)$$

A seguir, o valor do fluxo de partículas na direção μ_{M+1} , obtido acima, é então substituído nas equações (2.26) para $m = 1, 2, \dots, M$ obtendo-se, desta forma, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_m(x)}{dx} + \frac{1}{\mu_m} \psi_m(x) &= \frac{\omega}{2\mu_m} \sum_{i=1}^M \psi_i(x) p(\mu_m, \mu_i) w_i + \frac{\omega}{2\mu_m} p(\mu_{M+1}, \mu_m) w_{M+1} \times \\ &\quad \left[\frac{\omega}{2R} \sum_{i=1}^M \psi_i(x) p(\mu_{M+1}, \mu_i) w_i + \frac{Q_{M+1}(x)}{R} \right] + \frac{Q_m(x)}{\mu_m} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por conseguinte, tem-se um sistema de M equações diferenciais ordinárias dadas pelas equações (2.30) com M condições de contorno descritas pelas equações (2.28). A partir deste ponto, o sistema de equações diferenciais ordinárias acima pode ser reescrito na forma matricial como:

$$\frac{d}{dx} \Psi(x) - A \Psi(x) = Q(x), \quad (2.31)$$

em que os elementos da matriz A são definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\omega}{2\mu_i} [p(\mu_i, \mu_j) w_j + \frac{\omega}{2R} p(\mu_{M+1}, \mu_i) w_{M+1} p(\mu_{M+1}, \mu_j) w_j], & i \neq j \\ \frac{\omega}{2\mu_i} [p(\mu_i, \mu_j) w_j + \frac{\omega}{2R} p(\mu_{M+1}, \mu_i) w_{M+1} p(\mu_{M+1}, \mu_j) w_j] - \frac{1}{\mu_i}, & i = j \end{cases},$$

para $i, j = 1 : M$ e a matriz $Q(x)$ é dada por:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2\mu_1} p(\mu_{M+1}, \mu_1) w_{M+1} \frac{Q_{M+1}(x)}{R} + \frac{Q_1(x)}{\mu_1} \\ \frac{\omega}{2\mu_2} p(\mu_{M+1}, \mu_2) w_{M+1} \frac{Q_{M+1}(x)}{R} + \frac{Q_2(x)}{\mu_2} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\omega}{2\mu_M} p(\mu_{M+1}, \mu_M) w_{M+1} \frac{Q_{M+1}(x)}{R} + \frac{Q_M(x)}{\mu_m} \end{pmatrix}.$$

A partir deste ponto, a equação diferencial matricial descrita pela equação (2.31) é então resolvida por procedimento análogo ao método LTS_N com N par descrito na seção anterior. Deve ainda ser observado que o fluxo angular na direção $M + 1$ pode ser restaurado através do uso da equação (2.29).

Resumindo, a solução do problema (2.31) é dada pela fórmula

$$\Psi(x) = B(x)\tau + H(x),$$

em que

$$B(x) = X e^{D^*x}$$

e X é a matriz dos autovetores de A , e D é a matriz diagonal de seus respectivos autovalores, e τ é um vetor determinado a partir da aplicação das condições de contorno (2.28). $H(x)$ é a solução particular de (2.31), que pode ser calculada através da convolução $B(x) * Q(x)$ para qualquer tipo de fonte $Q(x)$ considerada. E, finalmente, a função D^*x está definida por

$$D^*x = \begin{cases} d_i x & \text{se } d_i < 0 \\ d_i(x - x_0) & \text{se } d_i > 0. \end{cases}$$

Assim, para as M direções não nulas, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= \sum_{j=1}^M b_{ij}(x)\tau_j + h_i(x) = \sum_{j=1}^M x_{ij} e^{d_j^*(x)} \tau_j + \sum_{j=1}^M b_{ij}(x) * q_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^M x_{ij} e^{d_j^*(x)} \tau_j + \sum_{j=1}^M x_{ij} e^{d_j(x)} * q_j(x), \end{aligned}$$

em que

$$e^{d_j x} * q_j(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{d_j(\eta)} q_j(\eta) d\eta, & \text{se } d_j < 0 \\ \int_{x_0}^x e^{d_j(\eta-x_0)} q_j(\eta) d\eta, & \text{se } d_j > 0 \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \dots, M$ e finalmente na direção μ_{M+1}

$$\psi_{M+1}(x) = \frac{\omega}{2R} \sum_{i=1}^M \psi_i(x) p(\mu_{M+1}, \mu_i) w_i + \frac{Q_{M+1}(x)}{R}$$

2.2.1 Resolução da equação de transporte pelo método LTS_3

Para melhor compreensão do método LTS_N com N ímpar, nesta seção se resolve um problema isotrópico sem fonte em uma placa plana de espessura unitária, considerando $N = 3$ e $\omega = 0,9$. Para isto, vai-se analisar o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \psi(x, \mu) &= \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' \\ \psi(0, \mu) &= 1, \quad \text{para } \mu > 0 \\ \psi(1, \mu) &= 0, \quad \text{para } \mu < 0. \end{aligned}$$

Para mostrar o procedimento usado para resolução das equações S_{M+1} com M par, nesta seção adota-se que $M + 1 = 3$. A respectiva aproximação S_3 é dada pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \mu_1 \frac{d}{dx} \psi_1(x) + \psi_1(x) = \frac{\omega}{2} [w_1 \psi_1(x) + w_2 \psi_2(x) + w_3 \psi_3(x)] \\ \mu_2 \frac{d}{dx} \psi_2(x) + \psi_2(x) = \frac{\omega}{2} [w_1 \psi_1(x) + w_2 \psi_2(x) + w_3 \psi_3(x)] \\ \psi_3(x) = \frac{\omega}{2} [w_1 \psi_1(x) + w_2 \psi_2(x) + w_3 \psi_3(x)] \end{cases} \quad (2.32)$$

Com as condições de contorno

$$\psi_1(0) = 1 \quad \psi_2(1) = 0.$$

Isolando na 3.^a equação ψ_3 , tem-se:

$$\psi_3(x) = \frac{\omega}{2(1 - \frac{\omega}{2} w_3)} [w_1 \psi_1(x) + w_2 \psi_2(x)]$$

ou

$$\psi_3(x) = \frac{\omega}{2R} [w_1 \psi_1(x) + w_2 \psi_2(x)], \quad (2.33)$$

em que o símbolo R é dado por:

$$R = 1 - \frac{\omega}{2}w_3.$$

A seguir, substituindo o valor obtido pela equação (2.33) nas equações (2.32), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \mu_1 \frac{d\psi_1(x)}{dx} + \psi_1(x) = \frac{\omega}{2}[w_1\psi_1(x) + w_2\psi_2(x) + w_3\frac{\omega}{2R}(w_1\psi_1(x) + w_2\psi_2(x))] \\ \mu_2 \frac{d\psi_2(x)}{dx} + \psi_2(x) = \frac{\omega}{2}[w_1\psi_1(x) + w_2\psi_2(x) + w_3\frac{\omega}{2R}(w_1\psi_1(x) + w_2\psi_2(x))] \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1(x)}{dx} - \left[\frac{\omega}{2\mu_1}[(w_1\psi_1(x) + w_2\psi_2(x))(1 + \frac{w_3\omega}{2R})] - \frac{\psi_1(x)}{\mu_1} \right] = 0 \\ \frac{d\psi_2(x)}{dx} - \left[\frac{\omega}{2\mu_2}[(w_1\psi_1(x) + w_2\psi_2(x))(1 + \frac{w_3\omega}{2R})] - \frac{\psi_2(x)}{\mu_2} \right] = 0. \end{cases}$$

Fazendo agora

$$C = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{w_3\omega}{2R}\right)$$

e escrevendo na forma matricial

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C}{\mu_1}w_1 - \frac{1}{\mu_1} & \frac{C}{\mu_1}w_2 \\ \frac{C}{\mu_2}w_1 & \frac{C}{\mu_2}w_2 - \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Considerando $N = 3$, as raízes do Polinômio de Legendre de grau 3 são dadas por:

$\mu_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0,774507$; $\mu_2 = -\mu_1$; $\mu_3 = 0$, e os respectivos pesos são

$$\begin{cases} w_1 = w_2 = \int_{-1}^1 \frac{(\mu-\mu_2)(\mu-\mu_3)}{(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} d\mu = 0,555556 \\ w_3 = \int_{-1}^1 \frac{(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)} d\mu = 0,888889. \end{cases}$$

Logo, substituindo estes valores na matriz A , tem-se

$$A = \begin{pmatrix} -0,7532 & 0,5379 \\ -0,5379 & 0,7532 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são então encontrados resolvendo-se a equação:

$$|A - \lambda.I| = 0.$$

obtendo-se os valores de λ são $\pm 0,5272$ e seus respectivos autovetores são dados pela matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2,3803 & 0,4201 \end{pmatrix}.$$

Agora, aplicando a Transformada de Laplace à equação (2.34), tem-se:

$$(sI - A) \begin{pmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix}.$$

E lembrando que $A = X.D.X^{-1}$ e resolvendo para fluxo transformado, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) \end{pmatrix} = \left([X(sI - D)X^{-1}]^{-1} \right) \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix}$$

Procedendo a inversão da Transformada de Laplace, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = X \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{pmatrix} s - d_1 & 0 \\ 0 & s - d_2 \end{pmatrix}^{-1} \right) X^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix}.$$

Ou, ainda:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = X \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} \end{pmatrix} \right) X^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix}.$$

E, finalmente:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} e^{d_1 x} & 0 \\ 0 & e^{d_2 x} \end{pmatrix} X^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix}.$$

Devido ao caráter exponencial da solução, procede-se a uma mudança de variáveis, isto é:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2,3803 & 0,4201 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{0,5272(x-x_0)} & 0 \\ 0 & e^{-0,5272x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0,5272(x_0)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1}\psi(0).$$

O vetor τ não é calculado por este procedimento, pois para grandes espessuras ou N grande causaria “overflow”.

Efetuando-se a multiplicação, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0,5272(x-x_0)} & e^{-0,52712x} \\ 2,3803e^{0,5271(x-x_0)} & 0,4201e^{-0,5271x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

então, a partir das condições de contorno sabe-se que $\psi_1(0) = 1$ e $\psi_2(1) = 0$ e $x_0 = 1$, logo pode-se montar o sistema para cálculo das constantes τ_1 e τ_2 . Então, substituindo $x=0$, tem-se:

$$\psi_1(0) = e^{-0,5272}\tau_1 + \tau_2 \quad (2.36)$$

$$\psi_2(0) = 2,3803e^{-0,5272}\tau_1 + 0,4201\tau_2. \quad (2.37)$$

Substituindo $x=1$, tem-se:

$$\psi_1(1) = \tau_1 + e^{-0,5272}\tau_2 \quad (2.38)$$

$$\psi_2(1) = 2,3803 + 0,4201e^{-0,5272}\tau_2. \quad (2.39)$$

Para determinar τ_1 e τ_2 usam-se as equações (2.36) e (2.39), pois somente $\psi_1(0)$ e $\psi_2(1)$ são conhecidos. Substituindo $\psi_1(0) = 1$ e $\psi_2(1) = 0$, fica

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-0,5272} & 1 \\ 2,3803 & 0,4201e^{-0,5271} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

Resolvendo este sistema linear, encontram-se os valores $\tau_1 = -0,1109$ e $\tau_2 = 1,0654$.

Substituindo esses valores no sistema (2.35), tem-se uma solução de forma fechada para o cálculo de $\psi(x)$, isto é:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = e^{0,5272(x-x_0)} \times \tau_1 + e^{-0,52712x} \times \tau_2 \\ \psi_2(x) = 2,3803e^{0,5271(x-x_0)} \times \tau_1 + 0,4201e^{-0,5271x} \times \tau_2, \end{cases}$$

o que permite o cálculo do fluxo angular de partículas nas direções discretas para $x \in [0, 1]$. Aqui, vai-se calcular o fluxo de partículas nas extremidades da placa, assim;

$$\psi_1(1) = e^0 \times (-0,1109) + e^{-0,527} \times 1,0654$$

$$\psi_2(0) = 2,3803 \times e^{-0,5271} \times (-0,1109) + 0,4201 \times 1,0654.$$

A solução final do problema é $\psi_1(1) = 0,5179$, $\psi_2(0) = 0,2917$. Calculando agora $\psi_3(0)$ e $\psi_3(1)$ da equação (2.33), tem-se: $\psi_3(0) = 0,6110$ e $\psi_3(1) = 0,2157$.

Logo:

$$\Psi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,2917 \\ 0,6110 \end{pmatrix}$$

e

$$\Psi_2(1) = \begin{pmatrix} 0,5179 \\ 0 \\ 0,2157 \end{pmatrix}.$$

3 O MÉTODO LTS_N COM DEPENDÊNCIA ANGULAR CONTÍNUA

Para completar o desenvolvimento do método LTS_N para N inteiro, nesta seção desenvolve-se o método LTS_N com dependência angular contínua. Para alcançar este objetivo, numa primeira seção descreve-se o desenvolvimento feito para o caso de N par; na segunda este procedimento é estendido para o caso de N ímpar. Para isto, considera-se a equação de transporte em uma placa:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, \mu) + \frac{1}{\mu}\psi(x, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{-1}^1 \mathcal{P}(\mu, \mu')\psi(x, \mu')d\mu' + \frac{1}{\mu}Q(x, \mu), \quad (3.1)$$

com condição de contorno incidente na fronteira, isto é:

$$\begin{aligned} \psi(0, \mu) &= f(\mu), & \mu > 0 \\ \psi(x_0, \mu) &= g(\mu), & \mu < 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que

$$\mathcal{P}(\mu_i, \mu_j) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j). \quad (3.3)$$

Como no restante deste trabalho, aqui $\psi(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas na variável espacial $x \in [0, x_0]$ na direção $\mu \in [-1, 1]$; $\omega \in [0, 1]$ é o albedo de espalhamento simples; $Q(x, \mu)$ é o termo de fonte e β_ℓ são os coeficientes da expansão da função espalhamento de partículas em Polinômios de Legendre $P_\ell(\mu)$.

3.1 O Método LTS_N , N par, com dependência angular contínua

Nesta seção procede-se um breve resumo da versão do método LTS_N em uma placa com dependência angular contínua [39, 57]. Conforme demonstrado nas seções precedentes deste trabalho, a aproximação S_N da equação de transporte, para N par, é escrita na forma matricial como:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - \mathbf{A}\Psi(x) = \mathbf{Q}(x) \quad (3.4)$$

em que $\Psi(x)$ é o vetor fluxo angular de partículas, cujas componentes são os fluxos angulares de partículas nas direções discretas, $\psi_i(x) = \psi(x, \mu_i)$ para $i = 1, \dots, N$; $\mathbf{Q}(x)$ é o termo de fonte com componentes $Q_i(x)/\mu_i$ e \mathbf{A} é a matriz S_N , cujos componentes são

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{w_j}{\mu_i} \mathcal{P}(\mu_i, \mu_j) & , \quad \text{se } i \neq j \\ \frac{w_i}{\mu_i} \mathcal{P}(\mu_i, \mu_i) - \frac{1}{\mu_i} & , \quad \text{se } i = j, \end{cases}$$

em que $\mathcal{P}(\mu_i, \mu_j)$ é definido como (3.3) e μ_i e w_i são as ordenadas discretas e seus respectivos pesos da quadratura de Gauss usados para aproximar o termo integral da equação de transporte. Aplicando o método LTS_N , isto é, aplicando a Transformada de Laplace e diagonalizando a matriz \mathbf{A} , obtém-se, de forma analítica, um sistema linear algébrico transformado (3.4). Esse sistema é resolvido para o fluxo angular de partículas transformado, e o fluxo angular de partículas é encontrado através da aplicação de resultados conhecidos da teoria de Laplace, também de forma analítica. Desse procedimento, resulta:

$$\Psi(x) = \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{V} + \mathbf{H}(x), \quad (3.5)$$

em que a função matricial e^{Dx} está definida como:

$$e^{Dx} = \begin{cases} \text{se } i = j & d_{ii}x = \begin{cases} e^{d_i(x-x_0)} & \text{se } d_i > 0 \\ e^{d_ix} & \text{se } d_i < 0 \end{cases} \\ \text{se } i \neq j & d_{ij}(x) = 0 \end{cases}, \quad (3.6)$$

em que d_i são os autovalores da matriz \mathbf{A} , \mathbf{X} é a matriz dos autovetores, \mathbf{V} é um vetor a ser determinado através da condição de contorno e $\mathbf{H}(x)$ é o vetor convolução.

Para construir a solução LTS_N com dependência angular contínua, aproxima-se o termo integral da equação (3.1) por quadratura de Gauss-Legendre e substitui-se o fluxo angular de partículas nas direções discretas pela solução LTS_N , dada pela equação (3.5). Através desse procedimento, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\frac{d}{dx}\psi(x, \mu) + \frac{1}{\mu}\psi(x, \mu) = F(x, \mu), \quad (3.7)$$

em que o termo de fonte $F(x, \mu)$ é dado por:

$$F(x, \mu) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N (\mathcal{P}(\mu, \mu_i) w_i) (\psi_i(x)) + \frac{1}{\mu} Q(x, \mu), \quad (3.8)$$

que pode ser reescrito em notação matricial como:

$$F(x, \mu) = \frac{\mathbf{P}^T(\mu) \cdot \Psi(x)}{\mu} + \frac{1}{\mu} Q(x, \mu), \quad (3.9)$$

em que a seguinte notação foi usada:

$$\mathbf{P}(\mu) = [\mathcal{P}(\mu, \mu_1) w_1, \mathcal{P}(\mu, \mu_2) w_2, \dots, \mathcal{P}(\mu, \mu_N) w_N]^T \quad (3.10)$$

e

$$\Psi(x) = [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_N(x)]^T \quad (3.11)$$

Como a equação (3.7) possui solução conhecida tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ [39], para estimar o valor do fluxo angular de partículas em qualquer direção $\mu \in [-1, 1]$, é usada a seguinte fórmula:

$$\psi(x, \mu) = \begin{cases} e^{\frac{-x}{\mu}} \left[f(\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_0^x \Psi(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], & \text{para } \mu > 0, \\ e^{\frac{-x}{\mu}} \left[g(\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \int_{x_0}^x \Psi(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x Q(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], & \text{para } \mu < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Aqui, ainda deve-se observar, que, devido ao caráter analítico da solução LTS_N , os termos integrais que aparecem em (3.12) podem ser avaliados de forma analítica [57].

3.2 O Método LTS_N , N ímpar, com dependência angular contínua

Nesta subseção, desenvolve-se a formulação da versão do método LTS_N em uma placa com dependência angular contínua, quando é considerado $N = M + 1$ ímpar. Novamente, conforme se explicitou nas seções precedentes deste trabalho,

a aproximação S_N da equação de transporte, para N ímpar, é descrita através de um sistema de M equações diferenciais ordinárias e uma restrição. Essas equações podem ser escritas matricialmente como:

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) - \mathbf{A}\Psi(x) = \mathbf{Q}(x), \quad (3.13)$$

em que os elementos da matriz \mathbf{A} são definidos como:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{w_j}{\mu_i}\mathcal{P}(\mu_i, \mu_j) + \frac{w_{M+1}}{\mathcal{R}}\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_i)\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_j), & \text{para } i \neq j \\ \frac{w_j}{\mu_i}\mathcal{P}(\mu_i, \mu_j) + \frac{w_{M+1}}{\mathcal{R}}\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_i)\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_j) - \frac{1}{\mu_i}, & \text{para } i = j \end{cases},$$

$$\Psi(x) = [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)]^T$$

$$\mathbf{Q}(x) = \begin{bmatrix} \frac{w_{M+1}}{\mu_1\mathcal{R}}\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_1)q_{M+1}(x) + \frac{q_1(x)}{\mu_1}, \\ \frac{w_{M+1}}{\mu_2\mathcal{R}}\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_2)q_{M+1}(x) + \frac{q_2(x)}{\mu_2}, \dots, \\ \frac{w_{M+1}}{\mu_M\mathcal{R}}\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_M)q_{M+1}(x) + \frac{q_M(x)}{\mu_M} \end{bmatrix}^T$$

com $\mathcal{P}(\mu_i, \mu_j)$ definido pela equação (3.3),

$$\mathcal{R} = 1 - \mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_{M+1})w_{M+1}. \quad (3.14)$$

e o fluxo de partículas na direção $N = M + 1$ é dado por:

$$\psi_{M+1} = \frac{1}{\mathcal{R}} \sum_{i=1}^M \psi_i(x)\mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_i)w_i + \frac{Q_{M+1}(x)}{\mathcal{R}}. \quad (3.15)$$

Aplicando o método LTS_N , isto é, aplicando a Transformada de Laplace, diagonalizando a matriz \mathbf{A} , resolve-se a equação (3.13) analiticamente, resultando em um sistema linear algébrico que é resolvido para o fluxo angular de partículas transformado de forma similar ao caso de N par. Ainda em conformidade com o caso par, o fluxo angular de partículas, nas M direções discretas não nulas, é então encontrado através da aplicação de resultados conhecidos da teoria de Laplace, também de forma analítica. Desse procedimento, resulta:

$$\Psi(x) = \mathbf{X}e^{D(x)}\mathbf{V} + \mathbf{H}(x), \quad (3.16)$$

em que a função matricial $e^{D(x)}$ é definida como (3.6), \mathbf{V} é um vetor a ser determinado através da condição de contorno e $\mathbf{H}(x) = e^{D(x)} * \mathbf{Q}(x)$ é o vetor convolução.

Novamente, para construir a solução LTS_N com dependência angular contínua para N ímpar, considera-se a equação (3.1) e aproxima-se seu termo integral por quadratura de Gauss-Legendre, e substitui-se o fluxo angular de partículas nas direções discretas pela solução LTS_N com N ímpar, dada pela equação (3.16) e (3.15), ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \mathcal{P}(\mu, \mu') \psi(x, \mu') d\mu' &= \\
&= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\mu, \mu_i) \psi_i(x) w_i \\
&= \sum_{i=1}^M \mathcal{P}(\mu, \mu_i) \psi_i(x) w_i + \mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) \psi_{M+1} w_{M+1} \\
&= \sum_{i=1}^M \mathcal{P}(\mu, \mu_i) \psi_i(x) w_i + \frac{\mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) w_{M+1}}{\mathcal{R}} \\
&\quad [\sum_{i=1}^M \mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_i) \psi_i(x) w_i + q_{M+1}(x)] \\
&= \sum_{i=1}^M \psi_i(x) w_i \left[\mathcal{P}(\mu, \mu_i) + \frac{\mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) \mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_i) w_{M+1}}{\mathcal{R}} \right] + q_{M+1}(x) \frac{\mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) w_{M+1}}{\mathcal{R}}.
\end{aligned}$$

Desta forma, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\frac{d}{dx} \psi(x, \mu) + \frac{1}{\mu} \psi(x, \mu) = F(x, \mu), \quad (3.17)$$

em que o termo de fonte $F(x, \mu)$ é totalmente conhecido e dado por:

$$\begin{aligned}
F(x, \mu) &= \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^M \psi_i(x) w_i \left(\mathcal{P}(\mu, \mu_i) + \frac{\mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) \mathcal{P}(\mu_{M+1}, \mu_i) w_{M+1}}{\mathcal{R}} \right) + \\
&+ \frac{R \cdot q(x) + \mu \cdot q_{M+1}(x) \mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) w_{M+1}}{\mu \cdot R} \\
&= \frac{\mathbf{P}^T(\mu) \cdot \Psi(x)}{\mu} + \frac{\mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) \mathbf{P}^T(\mu_{M+1}) \cdot \Psi(x) w_{M+1}}{\mu \mathcal{R}} + \\
&+ \frac{R \cdot q(x) + \mu \cdot q_{M+1}(x) \mathcal{P}(\mu, \mu_{M+1}) w_{M+1}}{\mu \cdot R}.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

em que $\mathbf{P}(\mu)$ e $\Psi(x)$ são vetores definidos por:

$$\mathbf{P}(\mu) = [\mathcal{P}(\mu, \mu_1) w_1, \mathcal{P}(\mu, \mu_2) w_2, \dots, \mathcal{P}(\mu, \mu_M) w_M]^T \quad (3.19)$$

e

$$\Psi(x) = [\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_M(x)]^T \quad (3.20)$$

A equação (3.17) é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, com solução conhecida dada por,

$$\psi(x, \mu) = \psi(0, \mu) e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{x}{\mu}} \int_0^x F(\eta, \mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta. \quad (3.21)$$

Aqui se deve observar que $\psi(0, \mu)$ só é conhecido para $\mu > 0$, assim, usando a condição de contorno do problema dada por (3.2) e fazendo $x = x_0$ em (3.21), tem-se:

$$\psi(x_0, \mu) = \psi(0, \mu)e^{-\frac{x_0}{\mu}} + e^{-\frac{x_0}{\mu}} \int_0^{x_0} F(\eta, \mu)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \quad (3.22)$$

Agora, resolvendo a equação (3.22) para $\psi(0, \mu)$,

$$\psi(0, \mu) = \psi(x_0, \mu)e^{\frac{x_0}{\mu}} - \int_0^{x_0} F(\eta, \mu)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta$$

Substituindo este valor na equação (3.21), tem-se:

$$\psi(x, \mu) = \left[\psi(x_0, \mu)e^{\frac{x_0}{\mu}} - \int_0^{x_0} F(\eta, \mu)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right] e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{x}{\mu}} \int_0^x F(\eta, \mu)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta.$$

Simplificando a equação anterior, tem-se que:

$$\psi(x, \mu) = \psi(x_0, \mu)e^{-\frac{x-x_0}{\mu}} - e^{-\frac{x}{\mu}} \int_x^{x_0} F(\eta, \mu)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta. \quad (3.23)$$

Usando a condição de contorno (3.2) e as expressões para $\psi(x, \mu)$ definidas pelas equações (3.21) e (3.23), tem-se:

$$\psi(x, \mu) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{\mu}} \left[f(\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_0^x \Psi(\eta)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_0^x F(\eta, \mu)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], & \text{for } \mu > 0, \\ e^{-\frac{x}{\mu}} \left[g(\mu)e^{\frac{x_0}{\mu}} + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \int_{x_0}^x \Psi(\eta)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x F(\eta, \mu)e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], & \text{for } \mu < 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

onde a função $F(x, \mu)$ é dado pela equação (3.18).

Exatamente como no caso par, deve-se observar que, devido ao caráter analítico da solução LTS_N , os termos integrais que aparecem nas equações definidas em (3.24) podem ser avaliadas de forma analítica. Para exemplificar este procedimento, calcula-se aqui o primeiro desses termos. Usando a definição de $\Psi(x)$ dado pela equação (3.16), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi(\eta)e^{\eta/\mu} d\eta &= \mathbf{X} \int_0^x e^{\mathbf{D}(\eta)} e^{\eta/\mu} d\eta \mathbf{V} + \mathbf{X} \int_0^x e^{\mathbf{D}(\eta)} \mathbf{X}^{-1} * \mathbf{Q}(\eta) e^{\eta/\mu} d\eta \\ &= \mathbf{X} \left(\mathbf{E}(x) \mathbf{V} + \mathbf{G}(x) \right) \end{aligned}$$

em que a função $\mathbf{E}(x)$ é uma matriz diagonal, cujos elementos são dados por:

$$e_i(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{d_i \eta} e^{\eta/\mu} d\eta = \frac{(e^{d_i x} e^{x/\mu} - 1)\mu}{1 + d_i \mu} & \text{se } d_i < 0 \\ \int_0^x e^{d_i(\eta-x_0)} e^{\eta/\mu} d\eta = \frac{(e^{d_i(x-x_0)} e^{x/\mu} - e^{-d_i x_0})\mu}{1 + d_i \mu} & \text{se } d_i > 0 \end{cases}$$

e notando $\mathbf{Z} = \mathbf{X}^{-1}$, os elementos do vetor função $\mathbf{G}(x)$ são dados por:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^M e^{d_i x} z_{i,j} * q_j(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^M z_{i,j} \int_0^x e^{d_i \eta} q_j(\eta) & \text{se } d_i < 0 \\ \sum_{j=1}^M z_{i,j} \int_0^x e^{d_i(\eta-x_0)} q_j(\eta) & \text{se } d_i > 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Deve-se notar que as integrais que aparecem em (3.25) não foram calculadas, pois dependem da fonte considerada.

Finalmente, devido à similaridade da fórmula obtida para N ímpar com aquela obtida para N par, que já foi devidamente testada [39, 57], neste trabalho não será feita simulação numérica para este caso.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta resultados numéricos obtidos pelo uso do método LTS_N com N ímpar na resolução de problemas de transferência radiativa unidimensionais, em que se considera tanto o caso isotrópico quanto o caso de forte anisotropia. Também se resolve um problema idealizado, no qual a função de fase é considerada como uma Gaussiana. Os resultados obtidos são comparados com aqueles obtidos pela aplicação do método LTS_N com N par. Esta escolha é feita, pois o método LTS_N , N par, possui convergência provada através da Teoria de Semigrupo fortemente contínuo, podendo, assim, sob o ponto de vista matemático, gerar solução "benchmark". A implementação dos algoritmos foi feita em Fortran 90, usando precisão dupla, em um Pentium III 1GHZ e 256 Mbytes de memória RAM. Sub-rotinas do pacote IMSL foram usadas.

Para testar a formulação desenvolvida neste trabalho, considera-se o problema de transferência radiativa em uma placa descrito por:

$$\mu_n \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu_n) \left[\sum_{i=1}^{N+1} P_\ell(\mu_i) \psi_i(x) w_i + e^{-x/\mu_0} \right], \quad (4.1)$$

considerando a condição de contorno homogênea. Consideram-se os seguintes problemas:

- Problema isotrópico em uma placa unitária com meio espalhador com coeficiente de espalhamento simples $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$.
- Problema anisotrópico em uma placa unitária com coeficiente de espalhamento simples $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$.
- Problema isotrópico em uma placa unitária com coeficiente de espalhamento simples $\omega = 0.5$ e $\mu_0 = 0.5$.
- Problema isotrópico em uma placa unitária com coeficiente de espalhamento simples $\omega = 0,2$ e $\mu_0 = 0,5$.

- Problema isotrópico em uma placa de grande espessura, isto é, espessura de 100 livres caminhos médios, coeficiente de espalhamento simples $\omega = 0.9$ e $\mu_0 = 0,5$.

Os resultados numéricos obtidos para a intensidade de radiação escalar destes problemas, definida por:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu,$$

são apresentados nas tabelas abaixo. Os tempos apresentados nas tabelas correspondem a todos os N que aparecem na mesma.

1. Placa unitária com $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$, $L = 0$, isotrópico O primeiro problema a ser considerado é o problema isotrópico, isto é, $L = 0$ no primeiro somatório da equação (4.1). A tabela (4.1) mostra os resultados obtidos pelo método LTS_N ímpar, considerando respectivamente os métodos dos coeficientes a determinar e convolução para o cálculo da solução particular.

Tabela 4.1: **Intensidade de Radiação Escalar - N ímpar, $L = 0$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$**
- 1ª tabela coeficientes a determinar e 2ª convolução

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$
11	0.17549	0.18673	0.99394×10^{-1}	0.17549	0.18673	0.99394×10^{-1}
21	0.15215	0.17687	0.89667×10^{-1}	0.15215	0.17687	0.89667×10^{-1}
31	0.14421	0.17297	0.86273×10^{-1}	0.14421	0.17297	0.86273×10^{-1}
41	0.14021	0.17091	0.84550×10^{-1}	0.14021	0.17091	0.84550×10^{-1}
51	0.13779	0.16965	0.83507×10^{-1}	0.13779	0.16965	0.83507×10^{-1}
61	0.13617	0.16880	0.82808×10^{-1}	0.13617	0.16880	0.82808×10^{-1}
71	0.13502	0.16819	0.82306×10^{-1}	0.13502	0.16819	0.82306×10^{-1}
81	0.13415	0.16773	0.81929×10^{-1}	0.13415	0.16773	0.81929×10^{-1}
91	0.13347	0.16737	0.81635×10^{-1}	0.13347	0.16737	0.81635×10^{-1}
101	0.13293	0.16708	0.81399×10^{-1}	0.13293	0.16708	0.81399×10^{-1}
201	0.13048	0.16576	0.80335×10^{-1}	0.13048	0.16576	0.80335×10^{-1}
301	0.12966	0.16531	0.79979×10^{-1}	0.12966	0.16531	0.79979×10^{-1}
401	0.12925	0.16508	0.79800×10^{-1}	0.12925	0.16508	0.79800×10^{-1}
501	0.12900	0.16495	0.79693×10^{-1}	0.12900	0.16495	0.79693×10^{-1}
601	0.12884	0.16486	0.79621×10^{-1}	0.12884	0.16486	0.79621×10^{-1}
701	0.12872	0.16480	0.79570×10^{-1}	0.12872	0.16480	0.79570×10^{-1}
801	0.12863	0.16475	0.79532×10^{-1}	0.12863	0.16475	0.79532×10^{-1}
901	0.12856	0.16471	0.79502×10^{-1}	0.12856	0.16471	0.79502×10^{-1}
1001	0.12851	0.1647	0.79478×10^{-1}	0.12851	0.1647	0.79478×10^{-1}
tempo	424.067 s			497.7 s		

Os resultados apresentados na tabela (4.1) mostram que o método LTS_N ímpar possui resultados equivalentes tanto quando a solução particular é calculada por convolução ou como pelo método dos coeficientes a determinar. A única diferença, e mesmo assim não muito significativa, aparece no tempo computacional, que é maior no caso da convolução. Para comparação dos resultados obtidos pelo método LTS_N com N ímpar, na tabela (4.2) o resultado obtido pelo método LTS_N para N par é apresentado.

Tabela 4.2: **Intensidade de Radiação Escalar - N Par**, $L = 0$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$ - coeficientes a determinar

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
10	0.126404	0.164370	0.079241	
20	0.127601	0.164254	0.079231	
30	0.127833	0.164308	0.079251	
40	0.127914	0.164358	0.079256	
50	0.127951	0.164379	0.079259	
60	0.127971	0.164389	0.079260	
70	0.127984	0.164395	0.079261	
80	0.127991	0.164399	0.079261	
90	0.127997	0.164401	0.079262	
100	0.128001	0.164403	0.079201	
200	0.128013	0.164410	0.079263	
300	0.128017	0.164411	0.079263	
400	0.128017	0.164411	0.079263	
500	0.128017	0.164411	0.079263	
600	0.128017	0.164411	0.079263	
700	0.128017	0.164411	0.079263	
800	0.128017	0.164411	0.079263	
900	0.128017	0.164411	0.079263	
1000	0.128017	0.164411	0.079263	
				395.5 s

Comparando os resultados obtidos pelos métodos LTS_N par e ímpar, nota-se em ambos convergência, apesar de ser muito mais rápida no caso par.

2. Placa unitária com $\omega = 0.95$ e $\mu_0 = 0.5$, $L = 299$ O segundo problema resolvido é um problema de transferência radiativa com alta anisotropia, isto é, considera-se $L = 299$ no primeiro somatório da equação (4.1). Primeiramente, expõe-se a tabela (4.3) dos valores dos coeficientes β_l que são necessários à resolução deste problema. A seguir, os resultados obtidos no início, meio e fim da placa para a intensidade de radiação escalar são apresentados na tabela (4.4) para o método LTS_N ímpar, calculando a solução particular por coeficientes a determinar. A tabela (4.5) apresenta os resultados obtidos para o mesmo problema, considerando N par.

Tabela 4.3: Coeficientes β_ℓ considerando $L=299$

ℓ	β_ℓ	$\beta_{\ell+36}$	$\beta_{\ell+72}$	$\beta_{\ell+108}$	$\beta_{\ell+144}$	$\beta_{\ell+180}$	$\beta_{\ell+216}$	$\beta_{\ell+252}$	$\beta_{\ell+288}$
1	1.000	20.024	15.606	6.377	1.723	0.349	0.057	0.0008	0.0001
2	2.544	20.145	15.338	6.173	1.649	0.331	0.054	0.0008	0.0001
3	3.883	20.251	15.058	5.986	1.588	0.317	0.052	0.0007	0.0001
4	4.568	20.330	14.784	5.790	1.518	0.301	0.301	0.0007	0.0001
5	5.235	20.401	14.501	5.612	1.461	0.288	0.047	0.0006	0.0001
6	5.887	20.444	14.225	5.424	1.397	0.273	0.044	0.0006	0.0001
7	6.457	20.477	13.041	5.255	1.344	0.262	0.042	0.0006	0.0001
8	7.177	20.489	13.662	5.075	1.284	0.248	0.039	0.0005	0.0001
9	7.859	20.483	13.378	4.915	1.235	0.238	0.038	0.0005	0.0001
10	8.494	20.467	13.098	4.744	1.179	0.225	0.035	0.0005	0.0001
11	9.286	20.427	12.816	4.592	1.134	0.215	0.034	0.0005	0.0001
12	9.856	20.382	12.536	4.429	1.082	0.204	0.032	0.0004	0.0001
13	10.675	20.310	12.257	4.285	1.040	0.195	0.030	0.0004	
14	11.229	20.236	11.978	4.130	0.992	0.185	0.029	0.0004	
15	11.851	20.136	11.703	3.994	0.954	0.177	0.027	0.0004	
16	12.503	20.036	11.427	3.847	0.909	0.167	0.026	0.0003	
17	13.058	19.909	11.156	3.719	0.873	0.160	0.024	0.0003	
18	13.626	19.785	10.884	3.580	0.832	0.151	0.023	0.0003	
19	14.209	19.632	10.618	3.459	0.799	0.145	0.022	0.0003	
20	14.660	19.486	10.350	3.327	0.762	0.137	0.021	0.0003	
21	15.231	19.311	10.090	3.214	0.731	0.131	0.020	0.0003	
22	15.641	19.145	9.827	3.090	0.696	0.124	0.018	0.0002	
23	16.126	18.949	9.574	2.983	0.668	0.118	0.018	0.0002	
24	16.539	18.764	9.318	2.866	0.636	0.112	0.017	0.0002	
25	16.934	18.551	9.072	2.766	0.610	0.107	0.016	0.0002	
26	17.325	18.348	8.822	2.656	0.581	0.101	0.015	0.0002	
27	17.673	18.119	8.584	2.562	0.557	0.097	0.014	0.0002	
28	17.999	17.901	8.340	2.459	0.530	0.091	0.013	0.0002	
29	18.329	17.659	8.110	2.372	0.508	0.087	0.013	0.0002	
30	18.588	17.428	7.874	2.274	0.483	0.082	0.012	0.0002	
31	18.885	17.174	7.652	2.913	0.463	0.079	0.011	0.0001	
32	19.103	16.931	7.424	2.102	0.440	0.074	0.011	0.0001	
33	19.345	16.668	7.211	2.025	0.422	0.071	0.010	0.0001	
34	19.537	16.415	6.990	1.940	0.401	0.067	0.0009	0.0001	
35	19.721	16.144	6.785	1.869	0.384	0.064	0.0009	0.0001	
36	19.884	15.883	6.537	1.790	0.364	0.060	0.0008	0.0001	

Tabela 4.4: **Densidade de Radiação - N ímpar**, $L = 299$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$ -
Coefficientes a determinar

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
301	0.57040×10^{-1}	0.19504	0.17495	
401	0.56732×10^{-1}	0.19487	0.17476	
501	0.56547×10^{-1}	0.19476	0.17465	
601	0.56425×10^{-1}	0.19469	0.17457	
701	0.56337×10^{-1}	0.19464	0.17452	
801	0.56271×10^{-1}	0.19460	0.17448	
901	0.56220×10^{-1}	0.19457	0.17445	
1001	0.56179×10^{-1}	0.19454	0.17442	
				463.6 s

Tabela 4.5: **Densidade de Radiação - N par**, $L = 299$, $\omega = 0.95$, $\mu_0 = 0.5$

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
300	0.558133×10^{-1}	0.194323	0.174205	
400	0.558122×10^{-1}	0.194324	0.174204	
500	0.558118×10^{-1}	0.194324	0.174204	
600	0.558115×10^{-1}	0.194324	0.174204	
700	0.558114×10^{-1}	0.194324	0.174204	
800	0.558113×10^{-1}	0.194324	0.174204	
900	0.558112×10^{-1}	0.194325	0.174205	
1000	0.558112×10^{-1}	0.194325	0.174205	
				400.4 s

Aqui, novamente se observa uma convergência bem mais lenta para N ímpar, em que para $N = 1001$ em $x = 0$ apenas duas casas decimais de concordância entre os resultados é observada. Constata-se também que, apesar de este problema apresentar anisotropia severa, isto não influencia no comportamento da convergência entre o caso par e o ímpar, exatamente como ocorre para o caso de baixa anisotropia.

No caso N par, observa-se uma precisão de 5 casas decimais a partir de $N = 500$ e de 6 casas decimais a partir de $N = 900$.

3. Placa unitária com $\omega = 0.5$ e $\mu_0 = 0.5$, $L = 0$ e Espessura Unitária

O problema considerado é um problema isotrópico, isto é, $L = 0$ no primeiro somatório da equação (4.1). A tabela (4.6) mostra os resultados obtidos pelo método LTS_N ímpar, usando o métodos dos coeficientes a determinar da solução particular.

Tabela 4.6: **Intensidade de Radiação Escalar - N Ímpar**, $L = 0$, $\omega = 0.5$, $\mu_0 = 0.5$
- Espessura unitária

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
11	0.06433	0.05925	0.02952	
21	0.05523	0.05564	0.02650	
31	0.05193	0.05407	0.02539	
41	0.05023	0.05323	0.02481	
51	0.04920	0.05270	0.02445	
61	0.04849	0.05235	0.02421	
71	0.04799	0.05209	0.02404	
81	0.04761	0.05189	0.02391	
91	0.04731	0.05173	0.02380	
101	0.04707	0.05161	0.02372	
101	0.04707	0.05161	0.02372	
201	0.04599	0.05104	0.02335	
301	0.04563	0.05085	0.02322	
401	0.04544	0.05075	0.02316	
501	0.04533	0.05069	0.02312	
601	0.04526	0.05065	0.02310	
701	0.04521	0.05062	0.02308	
801	0.04517	0.05060	0.02306	
901	0.04514	0.05058	0.02305	
1001	0.04511	0.05057	0.02305	
				425.8 s

Na tabela (4.7) são apresentados os resultados para o mesmo problema descrito acima considerando N par.

Tabela 4.7: **Intensidade de Radiação Escalar - N Par, $L = 0$, $\omega = 0.5$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura unitária**

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
10	0.044329	0.050702	0.023038	
20	0.044744	0.050447	0.022987	
30	0.044827	0.050444	0.022981	
40	0.044857	0.050452	0.022978	
50	0.044870	0.050455	0.022977	
60	0.044878	0.050456	0.022976	
70	0.044882	0.050457	0.022976	
80	0.044885	0.050457	0.022975	
90	0.044887	0.050457	0.022975	
100	0.044889	0.050457	0.022975	
200	0.044893	0.050458	0.022974	
300	0.044894	0.050458	0.022974	
400	0.044895	0.050458	0.022974	
500	0.044895	0.050458	0.022974	
600	0.044895	0.050458	0.022974	
700	0.044895	0.050458	0.022974	
800	0.044895	0.050458	0.022974	
900	0.044895	0.050458	0.022974	
1000	0.044895	0.050458	0.022974	
				367.7 s

Os resultados obtidos pelo método LTS_N ímpar ou par evidenciam as mesmas características encontradas dos casos anteriores.

4. Placa unitária com $\omega = 0.2$ e $\mu_0 = 0.5$, $L = 0$ e Espessura Unitária

Agora, considera-se um problema em meio altamente absorvedor, isto é, $\omega = 0.2$, isotrópico ou $L = 0$ no primeiro somatório da equação (4.1) em uma placa unitária. Na tabela (4.8) visualizam-se os resultados obtidos pelo método LTS_N ímpar, considerando o métodos dos coeficientes a determinar da solução particular.

Tabela 4.8: **Intensidade de Radiação Escalar - N Ímpar**, $L = 0$, $\omega = 0.2$, $\mu_0 = 0.5$
- Espessura unitária

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
11	0.02192	0.01883	0.00908	
21	0.01876	0.01759	0.00812	
31	0.01757	0.01703	0.00776	
41	0.01695	0.01672	0.00756	
51	0.01656	0.01653	0.00744	
61	0.01630	0.01640	0.00736	
71	0.01612	0.01630	0.00731	
81	0.01598	0.01623	0.00726	
91	0.01586	0.01617	0.00723	
101	0.01577	0.01613	0.00720	
201	0.01537	0.01591	0.00707	
301	0.01523	0.01584	0.00703	
401	0.01516	0.01581	0.00701	
501	0.01512	0.01578	0.00700	
601	0.01509	0.01577	0.00699	
701	0.01507	0.01576	0.00698	
801	0.01506	0.01575	0.00698	
901	0.01505	0.01575	0.00697	
1001	0.01504	0.01574	0.00697	
				425.1 s

Na tabela (4.9) são apresentados os resultados para o mesmo problema descrito acima para N par, com a finalidade de comparação dos resultados alcançados.

Tabela 4.9: **Intensidade de Radiação Escalar - N Par**, $L = 0$, $\omega = 0.2$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura unitária

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
10	0.014765	0.015803	0.006972	
20	0.014906	0.015701	0.006956	
30	0.014934	0.015699	0.006953	
40	0.014945	0.015700	0.006952	
50	0.014949	0.015701	0.006951	
60	0.014952	0.015701	0.006951	
70	0.014954	0.015701	0.006950	
80	0.014955	0.015701	0.006950	
90	0.014955	0.015701	0.006950	
100	0.014956	0.015701	0.006950	
200	0.014958	0.015701	0.006950	
300	0.014958	0.015701	0.006950	
400	0.014958	0.015701	0.006950	
500	0.014958	0.015701	0.006950	
600	0.014958	0.015701	0.006950	
700	0.014958	0.015701	0.006950	
800	0.014958	0.015701	0.006950	
900	0.014958	0.015701	0.006950	
1000	0.014958	0.015701	0.006950	
				368.0 s

Neste caso de meio com alta absorção, verifica-se um comportamento análogo aos anteriores, isto é, para N ímpar a convergência existe, mas é mais lenta que no caso par. Conclui-se que o comportamento do método desenvolvido para N ímpar não é influenciado pelo tipo de meio (absorvedor ou espalhador) ou pelo tipo de anisotropia considerada no problema. A seguir resolve-se um problema que considera grande espessura.

5. Problema para grande espessura

Finalmente, é considerado um problema de grande espessura, isotrópico com $\omega = 0.9$ e $\mu_0 = 0.5$. A tabela (4.10) apresenta os resultados obtidos pelo método LTS_N ímpar, considerando o método dos coeficientes a determinar da solução particular.

Tabela 4.10: **Intensidade de Radiação Escalar - N Ímpar, $L = 0$, $\omega = 0.9$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura 100 livres caminhos médios**

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
11	0.18788	0.22483	0.18718	
21	0.16403	0.21225	0.17571	
31	0.15584	0.20737	0.17154	
41	0.15169	0.20480	0.16938	
51	0.14918	0.20323	0.16807	
61	0.14750	0.20216	0.16718	
71	0.14630	0.20140	0.16654	
81	0.14539	0.20082	0.16606	
91	0.14469	0.20037	0.16568	
101	0.14412	0.20000	0.16538	
201	0.14157	0.19835	0.16400	
301	0.14072	0.19779	0.16354	
401	0.14029	0.19751	0.16331	
501	0.14003	0.19734	0.16317	
601	0.13986	0.19723	0.16307	
701	0.13974	0.19715	0.16301	
801	0.13965	0.19709	0.16296	
901	0.13958	0.19704	0.16292	
1001	0.13952	0.19700	0.16289	
				425.5 s

Na tabela (4.11) são apresentados os resultados para o mesmo problema acima para N par.

Tabela 4.11: **Intensidade de Radiação Escalar - N Par, $L = 0$, $\omega = 0.5$, $\mu_0 = 0.5$ - Espessura 100 livres caminhos médios**

N	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	tempo
10	0.137589	0.196689	0.162234	
20	0.138646	0.196536	0.162493	
30	0.138847	0.196586	0.162562	
40	0.138918	0.196626	0.162583	
50	0.138951	0.196643	0.162594	
60	0.138968	0.196651	0.162599	
70	0.138979	0.196656	0.162603	
80	0.138986	0.196659	0.162605	
90	0.138991	0.196661	0.162607	
100	0.138994	0.196662	0.162608	
200	0.139005	0.196667	0.162611	
300	0.139007	0.196668	0.162612	
400	0.139008	0.196668	0.162612	
500	0.139008	0.196669	0.162612	
600	0.139008	0.196669	0.162612	
700	0.139008	0.196669	0.162612	
800	0.139008	0.196669	0.162612	
900	0.139008	0.196669	0.162612	
1000	0.139008	0.196669	0.162612	
				380.0 s

Pelos resultados obtidos neste último problema, vê-se que os artifícios introduzidos no método LTS_N , devido ao seu caráter exponencial, possuem bons resultados também no caso ímpar.

Analisando os resultados obtidos nos problemas de transferência radiativa, vê-se que:

1. Os resultados obtidos pelo método LTS_N ímpar, usando os métodos de coeficientes a determinar ou convolução para o cálculo da solução particular, tanto no caso isotrópico quanto no caso anisotrópico, são idênticos, diferindo apenas nos tempos computacionais. Isso se deve ao fato de, no caso do cálculo da solução particular por convolução, ser necessário avaliar a inversa da matriz dos autovetores, enquanto nos coeficientes a determinar apenas é necessário resolver um sistema de equações lineares. Já o tempo de processamento da versão ímpar ou par é similar, quando considerado o mesmo procedimento para o cálculo da solução particular.
2. Comparando os resultados obtidos pelo método LTS_N ímpar e o par, nota-se que o método LTS_N com N par converge mais rapidamente para o resultado com uma precisão prescrita que no caso de N ímpar. Isto é, no caso isotrópico, conforme a tabela (4.1), observam-se apenas duas casas decimais de precisão para $N = 1001$, enquanto pela tabela (4.2), quando se considera N par, observam-se quatro casas decimais exatas para N maior ou igual a $N = 200$. No caso de anisotropia severa ($L = 299$), verificam-se quatro casas decimais precisas a partir de $N = 300$ no caso de N par, enquanto para N ímpar observa-se apenas uma casa decimal de precisão para $N = 1001$. Deve-se notar que nos demais exemplos aqui apresentados o mesmo tipo de comportamento encontrado acima é mantido.
3. Através dos 3 primeiros exemplos, vê-se que o comportamento da convergência dos métodos mantém-se inalterada, considerando meio mais absorvedor ou mais espalhador.
4. Ainda os resultados obtidos para o caso de grande espessura mantêm o mesmo padrão descrito. Este fato mostra que a espessura considerada

não influencia na precisão dos resultados, diferentemente do que ocorre quando é mudada a quadratura angular: da quadratura angular de Gauss-Legendre para a quadratura angular DP_N , por exemplo [Lewis and Miller, 1984].

Com a finalidade de se avaliar a influência da singularidade em $\mu = 0$, neste trabalho ainda é considerado um problema idealizado, em que a função de espalhamento $\omega(\mu)$ é definida por uma Gaussiana com pico máximo em $\mu = 0$, isto é,

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \omega(\mu') \psi(x, \mu') d\mu', \quad e \omega(\mu) = \omega e^{-\frac{\mu^2}{k}}$$

com a condição de contorno dada por

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) &= 1 && \text{para } x = 0 \text{ e } \mu > 0 \\ \psi(x, \mu) &= 0 && \text{para } x = 1 \text{ e } \mu < 0 \end{aligned}$$

Os resultados obtidos pela aplicação do método LTS_N ímpar e par, para este problema, considerando tanto um grande desvio padrão, $k = 0.1$, e um caso com pequeno desvio padrão, $k = 0.0001$, são apresentados nas tabelas (4.12) e (4.13), respectivamente.

Tabela 4.12: **Fluxo escalar** $\omega = 0.9$, $x_0 = 1$ **núcleo de espalhamento Gaussiano** ($k = 0.1$)

N	N ímpar			N par		
	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1$
10	0.45493	0.17798	0.079717	0.52373	0.17754	0.079926
20	0.48842	0.17767	0.079835	0.52258	0.17795	0.079893
30	0.49966	0.17775	0.079860	0.52233	0.17797	0.079847
40	0.50529	0.17782	0.079859	0.52232	0.17793	0.079837
50	0.50868	0.17784	0.079856	0.52229	0.17791	0.079832
60	0.51094	0.17786	0.079853	0.52228	0.17790	0.079829
70	0.51255	0.17787	0.079850	0.52227	0.17790	0.079827
80	0.51376	0.17787	0.079848	0.52226	0.17790	0.079826
90	0.51470	0.17787	0.079846	0.52226	0.17790	0.079825
100	0.51546	0.17788	0.079844	0.52226	0.17790	0.079825

Tabela 4.13: **Fluxo escalar** $\omega = 0.9$, $x_0 = 1$ **núcleo de espalhamento Gaussiano**($k = 0.0001$)

N	N ímpar			N par		
	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1.0$	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = 1$
10	0.43177	0.16445	0.074232	0.50000	0.16196	0.074177
20	0.46348	0.16333	0.074242	0.50000	0.16328	0.074257
30	0.47507	0.16330	0.074249	0.49918	0.15971	0.072118
40	0.48109	0.16332	0.074249	0.47972	0.13363	-0.10374
50	0.48483	0.16334	0.074253	0.48938	0.15903	0.072510
60	0.48741	0.16335	0.074258	0.49999	-52.4351	-31.7617
70	0.48928	0.16341	0.074272	0.50000	5.0582	2.9832
80	0.49070	0.16352	0.074291	0.49999	1.5054	8.8643
90	0.49180	0.16957	0.075251	0.50000	3.2257	1.9297
100	0.49268	0.16469	0.074485	0.50000	-11.5709	-7.0383

Analisando as tabelas acima, vê-se que a convergência do método LTS_N com N ímpar preserva a propriedade de ser mais lenta que a convergência obtida pelo método LTS_N com N par. Porém, também se observa que quando o valor de k é muito pequeno, ou seja, quando a fonte está altamente concentrada na direção $\mu = 0$, o método LTS_N para N par apresenta instabilidade numérica, o que não ocorre com a versão ímpar. Acredita-se que esta instabilidade numérica se deva ao fato de a singularidade ser desconsiderada quando a versão par é escolhida para modelar este problema de difícil solução.

5 CONCLUSÕES

Analisando os resultados obtidos após o desenvolvimento dos problemas, tanto no caso de transferência radiativa quanto no problema idealizado com espalhamento Gaussiano, pode-se afirmar que, pelo menos sob o ponto de vista matemático, existe a solução LTS_N para as equações S_N de transporte para $N \geq 2$, tendo sempre em vista que N par apresenta sempre uma convergência mais rápida para uma precisão prescrita.

Para continuar a compreensão da influência da singularidade em $\mu = 0$, como trabalho futuro, sugere-se que seja feito um experimento numérico, introduzindo entre as direções discretas $\mu_{N/2}$ e $\mu_{N/2+1}$, isto é, próximo à singularidade $\mu = 0$ uma nova discretização, usando, neste caso, os pesos e raízes associados à quadratura de Gauss-Tchebichev. A justificativa deste procedimento é dada observando os resultados mostrados por Canuto e Quarteroni, [19, 18], na análise da estimativa de erro *a priori*.

gfklefgioj

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, C. N., AND KATTAWAR, G. W. *Solutions of the equations of radiative transfer by an invariant imbedding approach*, vol. 10. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 1970, pp. 341–356.
- [2] BARICHELLO, L. *Formulação analítica para solução do problema de ordenadas discretas unidimensional*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre:Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMECA), 1992.
- [3] BARICHELLO, L., AND VILHENA, M. *A General Analytical Approach to One Group One Dimensional Transport Equation*, vol. 58. Kerntechnik, 1993, pp. 182–184.
- [4] BARICHELLO, L. B. Comunicação pessoal, 1995.
- [5] BARICHELLO, L. B., AND VILHENA, M. T. M. B. *Um Problema Inverso em transporte de Nêutrons e Radiação*. Anais do IX ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica, Caxambu, MG, Brasil, 1993, pp. 22–24.
- [6] BARROS, R., CARDONA, A., AND VILHENA, M. *Analytical numerical methods applied to linear discontinuous angular approximations of the transport equation in slab geometry.*, vol. 61. Kerntechnik - Germany, 1996, pp. 111–116.
- [7] BARROS, R., AND LARSEN, E. *A numerical method for one-group slab geometry discrete ordinates problems with no spatial truncation error.*, vol. 104. Nuclear Science and engineering, USA, 1990, pp. 199–208.
- [8] BARROSO, P. Cálculo do problema de multigrupo pelo método lts_N . Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada-

- PPGMA_p*- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2000.
- [9] BATISTELA, C., AND VILHENA, M. *Cálculo de Criticalidade pelo Método LTS_N* , vol. 1. XI ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica, Poços de Caldas, M.G., Brasil, 1997, pp. 226–231.
- [10] BATISTELA, C., AND VILHENA, M. *Criticality by the LTS_N Method*, vol. 34. Journal of Nuclear Science and Technology, 1997, pp. 603–606.
- [11] BATISTELA, C., VILHENA, M., AND BORGES, V. *Determination of the effective multiplication factor in aslab by the LTS_N method*, vol. 26. Annals of Nuclear Science, 1999, pp. 761–776.
- [12] BELL, G. I., AND GLASSTONE, S. Nuclear reactor theory. *Krieger Publishing Company* (1985).
- [13] BELLMANN, R., AND WING, G. M. An introduction to invariant imbedding classic in applied mathematics. *Society for Industrial and Applied Mathematics-SIAM* (1992).
- [14] BOLTZMANN, L. Lectures on gas theory. University of California Press, Berkeley, 1964.
- [15] BORGES, V., AND VILHENA, M. T. M. B. Uso do método lts_N aplicado a problemas de engenharia nuclear. INAC - International Nuclear Atlantic Conference - XIII ENFIR, 2002.
- [16] BRANCHER, J., SEGATTO, C., AND VILHENA, M. *The LTS_N solution for radiative transfer problem without azimuthal symmetry with severe anisotropy.*, vol. 62. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Great Britain, 1999, pp. 743–753.
- [17] BRANCHER, J. D. *Formulação analítica para solução do problema de ordenadas discretas pelo método LTS_N , para valores de N grandes.* PhD thesis,

- Universidade Federal do Rio Grande do Sul-Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalurgia e Materiais- PPGEM, Porto Alegre, 1998.
- [18] CANUTO, C., HUSSEINI, A. Q., AND ZANG, T. A. Spectral methods in fluid dynamics. Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [19] CANUTO, C., AND QUARTERONI. *Error Estimates for Spectral and pseudospectral Approximations of Hyperbolic Equations*. SIAM J. Num Anal 19.
- [20] CARDONA, A. *Método Genérico de Solução Analítica para Aproximações da Equação Linear de Transporte*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Program de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PROMEC, Porto Alegre, 1996.
- [21] CARDONA, A., AND VILHENA, M. As funções de walsh e sua aplicação na solução da equação de transporte de nêutrons. IX Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-Hidráulica - IXENFIR, 1993.
- [22] CARDONA, A., AND VILHENA, M. *A solution of linear transport equation using Chebyshev polynomials and Laplace transform.*, vol. 59. Kerntechnik - Germany, 1994, pp. 278–281.
- [23] CARDONA, A., AND VILHENA, M. *A solution of linear transport equation using Walsh function and Laplace transform.*, vol. 21. Annals of Nuclear Energy, Great Britain, 1994, pp. 495–505.
- [24] CARDONA, A., AND VILHENA, M. *A Comparative Study of Analytical Solutions for Some One-Dimensional Transport Equation Approximations*. Progress in Nuclear Energy, 1998, pp. 289–300.
- [25] CARDONA, A. V., AND VILHENA, M. T. M. B. *Solução Analítica da Aproximação A_N da Equação de Transporte Linear com Simetria Planar*.

- Anais do *XENFIR* - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica-Águas de Lindóia, SP, 1995, pp. 528–531.
- [26] CARDONA, A. V., AND VILHENA, M. T. M. B. *Analytical Solution for A_N Approximation*, vol. 31. Progress in Nuclear Energy, 1997, pp. 219–223.
- [27] CASE, K., AND ZWEIFEL, P. Linear transport theory. *Addison-Wesley Publishing, Inc.* (1967).
- [28] CASE, K. M. *Elementary Solution of Transport Equation and their Applications.*, vol. 9. Annals of Physic, 1960, pp. 1–23.
- [29] CHANDRASEKHAR, S. Radiative transfer. *Dover Publications, Inc.* (1950).
- [30] CHIES, R. P. Cálculo da espessura de blindagem pela combinação do método lts_N , e decomposição. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada-Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1996.
- [31] DAVISON, B. Neutron transport theory. *Oxford University Press* (1957).
- [32] DEMIDOVICH, B. P., AND MARON, J. A. Computational mathematics. MIR, Moscow, 1987.
- [33] DUDERSTADT, J., AND HAMILTON, L. Nuclear reator analysis. *John Wiley & Sons, Inc.* (1976).
- [34] DUDERSTADT, J., AND MARTIN, W. R. Transport theory. *John Wiley & Sons, Inc.* (1979).
- [35] GARCIA, R. *A review of the facile F_N method in particle transport theory*, vol. 14. Transport Theory and Statistical Physics, 1985, pp. 391–435.
- [36] GONÇALVES, G., OLIVEIRA, G., AND VILHENA, M. *LTS_N solution of the adjoint neutron transport equation with arbitrary source for high order of quadrature in a homogeneous slab*, vol. 29. Annals of nuclear energy, USA, 2002, pp. 561–569.

- [37] GONÇALVES, G. A., SEGATTO, C. F., AND VILHENA, M. T. M. B. *The LTS_N Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature*, vol. 66. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2000, pp. 271–276.
- [38] HAUSER, E. B. *Estudo de Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Bidimensional pelo Método LTS_N para Elevadas Ordens de Quadraturas Angulares: LTS_N 2D-Diag e, LTS_N 2D-DiagExp*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica-PROMEC Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2002.
- [39] HOFFMANN, R. K. *Solução lts_N em uma placa plana com dependência angular contínua, fonte arbitrária e elevadas ordens de quadratura*. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada-PPGMAP Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2003.
- [40] KRUSE, F. *Cálculo do fator de utilização térmica de um reator nuclear através do método lts_N* . Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1998.
- [41] LEMOS, R. M. *Solução da equação de transferência radiativa condutiva em placa plana pelo método da decomposição e lts_2* . Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada-PPGMAP Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2000.
- [42] LEWIS, E., AND MILLER, W. *Computational methods of neutron transport*. *John Wiley & Sons, Inc.* (1984).
- [43] LORENZI, R. M. P. *Estudo da criticalidade em uma placa plana pelo método lts_N* . Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, Porto Alegre, RS, Brasil, 1996.

- [44] OLIVEIRA, J. V. P. Formulação lts_N para problema de ordenada discreta com anisotropia. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 1993.
- [45] OLIVEIRA, J. V. P., CARDONA, A. V., VILHENA, M. T. M. B., AND BARROS, R. C. *A Semi-Analytical Numerical Method for Time-Dependent Radiative Transfer Problems in a Slab Geometry with Coherent Isotropic Scattering*, vol. 73. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2002, pp. 55–62.
- [46] ORENGO, G. *Recentes Avanços e desenvolvimento de um código computacional para o método LTS_N em uma placa plana*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMECA), Porto Alegre, Rs, Brasil, 2002.
- [47] PAZOS, R. *Estudo da convergência em Teoria de transporte de partículas neutras*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.
- [48] PAZOS, R., AND VILHENA, M. *Convergence of the LTS_N method: approach of semi-groups.*, vol. 30. *Progress in nuclear energy*, 1999, pp. 77–86.
- [49] PAZOS, R., AND VILHENA, M. *Convergence of the spectral approximations for steady-state two-dimensional transport problem*, vol. 2. *Mathematics and Computation Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications-Internacional Conference*, Madrid, Spain, 1999, pp. 1965–1976.
- [50] PAZOS, R. P., HAUSER, E. B., AND VILHENA, M. T. M. B. *Advances in the solution of three-dimensional nodal neutron transport equation*. 11th *International Conference on Nuclear Engineering*, Tokyo, 2003.

- [51] PAZOS, R. P., AND VILHENA, M. T. M. B. *Convergence in Transport Theory*, vol. 30. Applied Numerical Mathematics, 1999, pp. 79–92.
- [52] PAZOS, R. P., VILHENA, M. T. M. B., AND HAUSER, E. B. Solution and study of two-dimensional nodal neutron transport equation. 10th International Conference on Nuclear Engineering-Proceedings of ICONE 10-Arlington, EUA, 2002.
- [53] RENZ, S. P. Solução da equação de transferência radiativa dependente do tempo pelos métodos espectral e lts_N . Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada-PPGMAp Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1999.
- [54] RETAMOSO, M. *Reconstrução de condições de fronteira e termo de fonte em ótica hidrológica*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre:Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMECC), 2000.
- [55] RETAMOSO, M., VILHENA, M., AND VELHO, H. *Estimation of boundary condition in hydrologic optics*, vol. 40. Applied numerical mathematics, Estados Unidos, 2002, pp. 87–100.
- [56] RETAMOSO, M. R., VELHO, H. F. C., AND VILHENA, M. T. M. B. Determining source term and boundary condutions in hydrological optics. 2nd Internacional Conference on Computacional Heat and Mass Transfer, Rio de Janeiro,, 2001.
- [57] SANTOS, M. A. $mglts_N^M$ aproximação angular multigrid em uma placa plana. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada-PPGMAp Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2005.
- [58] SEGATTO, C. *Extensão da formulação LTS_N para problemas de transporte sem simetria azimutal e problemas dependentes do tempo*. PhD thesis,

- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMECA), 1995.
- [59] SEGATTO, C., AND VILHENA, M. *Extension of the LTS_N formulation for discrete ordinates problem without azimuthal symmetry*, vol. 21. Annals of Nuclear Energy, Great Britain, 1994, pp. 701–710.
- [60] SEGATTO, C., AND VILHENA, M. *Solução genérica da equação de transporte unidimensional para elevadas ordens de quadratura.*, vol. 1. Anais do XI Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica., Minas Gerais, Brasil, 1997, pp. 238–242.
- [61] SEGATTO, C., VILHENA, M., AND BRANCHER, J. The one-dimensional lts_N formulation for high degree of anisotropy. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 1999.
- [62] SEGATTO, C., VILHENA, M., AND GOMES, M. The one-dimensional lts_N solution in a slab with high degree of quadrature. Annals of Nuclear Energy, 1999.
- [63] SEGATTO, C., VILHENA, M., AND PAZOS, R. On the convergence of the spherical harmonics approximations. Nuclear Science and Engineering, 2000.
- [64] SEGATTO, C. F., AND VILHENA, M. T. M. B. Solução da equação de ordenadas discretas dependentes do tempo pelo método lts_N . Anais VI CGEN-Congresso Geral de Energia Nuclear, 1994.
- [65] SEGATTO, C. F., VILHENA, M. T. M. B., AND TAVARES, L. S. *The Determination of Radiant Parameters by the LTS_N Method*, vol. 70. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2001, pp. 227–236.
- [66] SIMCH, M. Solução ltp_N para problemas de transporte de partículas neutras. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.

- [67] SIMCH, M. R., SEGATTO, C. F., AND VILHENA, M. T. M. B. An analytical solution for the s_N radiative transfer equations with polarization in a slab by the lts_N method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and TRadiative Transfer*, In press, 2005.
- [68] SOUZA, S. I. S. Determinação de parâmetros radiantes pelos métodos lts_N e ltp_N para geometria planar. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica-PROMEC Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1993.
- [69] STRECK, E. *Solução Analítica para a Aproximação P_N da Equação de Transporte Linear Unidimensional*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMEC), 1993.
- [70] TAVARES, L. Cálculo dos parâmetros superficiais de radiação pelo método lts_N . Master's thesis, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMEC), 2000.
- [71] TRZASKA, Z. *An efficient algorithm for partial fraction expansion of the linear matrix pencil inverse.*, vol. 324. *Journal of the Franklin Institute*, 1987, pp. 465–477.
- [72] VARGAS, R. M. F., AND VILHENA, M. T. M. B. *Analytical Solution of the Discrete Ordinates Problem by the Decomposition Method*, vol. 24. *Annals of Nuclear Energy*, 1997, pp. 785–791.
- [73] VARGAS, R. M. F., AND VILHENA, M. T. M. B. *A closed-form Solution for the One-dimensional Radiative Conduitive Problem by the Decomposition and LTS_N Methods*, vol. 61. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 1998, pp. 303–308.
- [74] VELHO, H., RETAMOSO, M., AND VILHENA, M. *Inverse problems for estimating bottom boundary conditions of natural waters in engineering.*,

- vol. 54. Internacional for numerical methods in engineering, 2003, pp. 1357–1368.
- [75] VILHENA, M., AND BARICHELLO, L. *The LTS_N Method: A new analytical approach to solve the neutron transport equation*, vol. 56. Kerntechnik, Germany, 1991, pp. 334–336.
- [76] VILHENA, M., AND BARICHELLO, L. *An analytical solution for the multi-group slab geometry discrete ordinates problems.*, vol. 24. Transport Theory and Statistical Physics, USA, 1995, pp. 1337–1352.
- [77] VILHENA, M., AND SEGATTO, C. *A new iterative method to solve the radiative transfer equation.*, vol. 55. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Great Britain, 1996, pp. 493–498.
- [78] VILHENA, M., SEGATTO, C., AND BARICHELLO, L. *General solution of one-dimensional approximations to the transport equation*, vol. 33. Progress in Nuclear Energy, Great Britain, 1998, pp. 99–115.
- [79] VILHENA, M., AND STRECK, E. *An Approximated Analytical Solution of the One-Group Neutron Transport Equation*, vol. 57. Kerntechnik, Germany, 1992, pp. 196–198.
- [80] VILHENA, M. T., BARICHELLO, L. B., AND ZABADAL, J. Solução da equação tridimensional de transporte pelo método lts_N . Anais VI CGEN-Congresso Geral de Energia Nuclear, 1994.
- [81] VILHENA, M. T. M. B., AND BARICHELLO, L. B. *A Closed-form Solution to the One-dimensional Linear and Nonlinear Radiative Transfer Problem*, vol. 1. Hybrid Methods In Engineering, 1999, pp. 1–17.
- [82] VILHENA, M. T. M. B., AND SEGATTO, C. F. Solução da equação de transporte de neutrons e radiação dependente do tempo pelo método lts_N . XVI CNMAC -Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - Uberlândia, MG, 1993.

- [83] VILHENA, M. T. M. B., AND SOUZA, S. I. Determinação de parâmetros radiantes em meios compostos - geometria planar - pelo método lts_N . XV CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional São Carlos, SP, 1992.
- [84] ZABADAL, J. *Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discretas Multidimensional*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica-PROMECC Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1994.
- [85] ZABADAL, J., VILHENA, M. T. M. B., AND BARICHELLO, L. B. *Solução da Equação de Ordenada Discreta em Duas Dimensões pelo Método LTS_N* . Anais do IX ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica, Caxambu, MG, Brasil, 1993, pp. 90–92.
- [86] ZABADAL, J., VILHENA, M. T. M. B., AND BARICHELLO, L. B. *Solution For Three Dimensional One Group Discrete Ordinates Problem by the LTS_N Method*, vol. 22. Annals of nuclear Energy, 1995, pp. 131–134.
- [87] ZABADAL, J., VILHENA, M. T. M. B., AND BARICHELLO, L. B. *An Analytical Solution for the Two-Dimensional Discrete Ordinate Problem In a Convex Domain*, vol. 31. Progress in Nuclear Energy, 1997, pp. 225–228.