

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM MECÂNICA E APROXIMAÇÃO DE GALERKIN MÍNIMOS QUADRADOS
DE ESCOAMENTOS AXISSIMÉTRICOS DE FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS SUJEITOS A
EFEITOS DE INÉRCIA

por

Renato da Rosa Martins

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2006

MODELAGEM MECÂNICA E APROXIMAÇÃO DE GALERKIN MÍNIMOS QUADRADOS
DE ESCOAMENTOS AXISSIMÉTRICOS DE FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS SUJEITOS A
EFEITOS DE INÉRCIA

por

Renato da Rosa Martins

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Comissão de avaliação:

Prof. Dr. Maria Laura Martins Costa, Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Adriane Prisco Petry, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Horácio Vielmo, PROMEC/UFRGS

Prof. Ph.D. Flávio Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de dezembro de 2006

RESUMO

Existe um grande interesse no entendimento de escoamentos de fluidos não-Newtonianos através de contrações abruptas. Este interesse se origina na importância destes escoamentos em processos poliméricos e no freqüente uso do escoamento com contração abrupta como um problema teste para validação de métodos numéricos. As duas propriedades reológicas mais freqüentemente apontadas e estudadas nos fluidos não-Newtonianos são: a viscosidade dependente da taxa de cisalhamento e a natureza viscoelástica destes fluidos. O caráter viscoelástico do fluido é descrito pelo número de Deborah. Na sua definição usual, o número de Deborah envolve as propriedades elásticas do fluido, isto é, o coeficiente primário de tensão normal ou tempo de relaxação terminal originado dos experimentos com tensões de relaxação. Para caracterizar a viscosidade pseudoplástica dos fluidos não-Newtonianos, utiliza-se a equação viscosidade de Carreau, a qual emprega uma viscosidade para baixas taxas de cisalhamento, um tempo característico igual ao recíproco da taxa de cisalhamento na qual se dá o início da pseudoplasticidade, e a inclinação da região *power-law* da viscosidade para altas taxas de cisalhamento. Ao número de Deborah, pode-se definir o número de Carreau de modo que ele possa ser utilizado para medir o efeito pseudoplástico nos escoamentos não-Newtonianos. A metodologia de elementos finitos utilizada, conhecida como método Galerkin Mínimos Quadrados (GLS), supera as dificuldades enfrentadas pelo método de Galerkin clássico em escoamentos sujeitos a altos números de Reynolds, a saber: a compatibilização dos subespaços de velocidade e pressão – satisfazendo deste modo a condição denominada de Babuška-Brezzi – e as oscilações espúrias devido a natureza assimétrica da aceleração convectiva da equação de momentum. O método GLS, adicionando termos malha-dependentes à formulação clássica de Galerkin, aumenta a formulação de Galerkin sem, contudo, prejudicar sua consistência. Esta dissertação objetiva a modelagem mecânica e simulação numérica via o método de Galerkin Mínimos-Quadrados, de escoamentos planares e axissimétricos de fluidos pseudoplásticos de Carreau através de contrações abruptas.

ABSTRACT

“MECHANICAL MODELING AND GALERKIN LEAST-SQUARES APPROXIMATIONS FOR AXISYMMETRIC FLOWS OF PSEUDOPLASTIC FLUIDS SUBJECTED TO INERTIA EFFECTS”

There is a great interest in understanding the flow of non-Newtonian fluids through sudden contractions. This interest arises from the importance of these flows in polymeric processes and in the frequent use of the flow with sudden contraction as a problem test for validation of numeric methods. The two most frequently mentioned and studied rheological properties of non-Newtonian fluids are the shear rate dependent viscosity and the viscoelastic nature of these fluids. The Deborah number describes the viscoelastic characteristic of the fluid. The Deborah number, in its basic definition, involves the elastic properties of the fluid, i.e., the primary coefficient of normal tension or time of terminal relaxation, originating experiments with relaxed tensions. The pseudoplastic viscosity of non-Newtonian fluids, usually the Carreau viscosity equation, is characterized by the employment of a low rate shear viscosity, a characteristic time - equal to the reciprocal of the shear rates in the beginning of the pseudoplasticity - and the slope of the power-law region of the viscosity for high shear rates. The Carreau number, with the Deborah number, can be used to measure the pseudoplastic effect in non-Newtonian flows. The finite elements method employed in this work, known as the Galerkin least-squares method (GLS), improve on the difficulties faced by the classic Galerkin method in flows subjected to high Reynolds numbers, i.e., the compatibility of sub-spaces of velocity and pressure (the Babuška-Brezzi condition) and the spurious oscillations due to the asymmetric nature of the convective acceleration of the momentum equation. The GLS method, adding mesh-dependents terms to the classic formulation of Galerkin, increases its stability without harm its consistency. This work has as main objective the mechanical modeling and numerical simulation, via the GLS method, of planar and axisymmetric flow of Carreau pseudoplastic fluids through an abrupt 4:1 contraction. In order to take into account the inertia and pseudoplastic effects, the Reynolds and Carreau numbers and power-law coefficient have been investigated within a range of $0 < Re < 100$ and $0 < Cu < 100$ and $0,2 < n < 1,0$, respectively. All numerical results shown to be physically relevant and in accordance with the literature.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	01
1.1 GENERALIDADES.....	01
1.2 FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS	03
1.3 ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS	05
<i>1.3.1 Métodos Estabilizados.....</i>	<i>05</i>
1.4 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS PSEUDOPLÁSTICOS	07
1.5 OBJETIVO E PLANO DA DISSERTAÇÃO.....	10
2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO.....	11
2.1 AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM TERMOS DE FLUXOS	11
<i>2.1.1 Conservação de Massa.....</i>	<i>11</i>
<i>2.1.2 Conservação de Momentum</i>	<i>13</i>
<i>2.1.3 Interpretação do Tensor Tensão</i>	<i>15</i>
<i>2.1.4 Equação de momentum angular.....</i>	<i>17</i>
2.2 AS EQUAÇÕES DE VARIAÇÃO EM TERMOS DAS PROPRIEDADES DE TRANSPORTE	17
<i>2.2.1 Fluido Newtoniano.....</i>	<i>17</i>
<i>2.2.2 Fluido Newtoniano Incompressível.....</i>	<i>18</i>
<i>2.2.3 Equação de Navier-Stokes Incompressível</i>	<i>19</i>
<i>2.2.4 Significado da Pressão nos escoamentos de Fluidos Incompressíveis</i>	<i>19</i>
3. FLUIDOS PURAMENTE VISCOSOS	20
3.1 VISCOSIDADE DOS FLUIDOS REAIS.....	20
3.2 FLUIDO NEWTONIANO GENERALIZADO.....	23
<i>3.2.1 O modelo Carreau-Yasuda.....</i>	<i>25</i>
<i>3.2.2 O modelo Power-Law de Ostwald e Waele.....</i>	<i>26</i>
4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS	29
4.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES	29
4.2 PROBLEMA FORTE	30
4.3 O MÉTODO DE GALERKIN	31
4.4 O MÉTODO DE GALERKIN/MÍNIMOS-QUADRADOS.....	33
4.5 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO	34

<i>4.5.1 Elemento Quadrangular Bilinear</i>	34
5 RESULTADOS NUMÉRICOS	38
5.1 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO.....	38
5.2 ESCOAMENTO DE CARREAU ATRAVÉS DE UMA CONTRAÇÃO AXISSIMÉTRICA	46
<i>5.2.1 Análise Global: Distribuições de Viscosidade, Pressão e Velocidade</i>	49
<i>5.2.2 Análise Local: Perfis de Velocidade e Queda de Pressão</i>	62
6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	75
6.1 COMENTÁRIOS FINAIS.....	76
6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS.....	77
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

LISTA DE SÍMBOLOS

C_h	Partição do domínio Ω em elementos finitos.....	[-]
$C^0(\Omega)$	Espaço das funções contínuas em Ω	[-]
C_u	Número de Carreau	[-]
C_p	Número de Euler	[-]
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação.....	[s ⁻¹]
\mathbf{f}	Força de campo do escoamento, força externa por unidade de massa.....	[N/kg]
\mathbf{g}	Aceleração da gravidade	[m/s ²]
h_K	Parâmetro relacionado ao tamanho do elemento K	[m]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$	[-]
$H_0^1(\Omega)$	Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ_g	[-]
\mathbf{I}	Tensor unitário	[-]
k	Viscosidade dilatacional.....	[-]
L_1	Comprimento do duto a montante da contração	[m]
L_2	Comprimento do duto a jusante da contração.....	[m]
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções de quadrado integráveis em Ω	[-]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω	[-]
m	Grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m	[-]
\mathbf{n}	Normal exterior unitária.....	[-]
n	Índice power-law	[-]
N_A	Função de aproximação do nó global A da partição C_h	[-]
N_B	Funções aproximação da velocidade	[-]
$\tilde{N}_{\tilde{B}}$	Funções aproximação da pressão	[-]
p	Pressão hidrostática do fluido	[Pa]
p_{ref}	Pressão de referência	[Pa]
p^h	Aproximação do campo de pressão do fluido	[Pa]
P_m	Espaço polinomial de grau m para elemento triangular ou tetraédrico.....	[-]
P	Espaço funcional do campo de pressão	[-]
P_h	Aproximação por elementos finitos do campo de pressão	[Pa]
q^h	Função peso do campo de pressão	[-]
Q	Vazão volumétrica.....	[m ³ /s]

Q_m	Espaço polinomial de grau m para elemento quadrilátero ou hexaédrico.....	[-]
r	Coordenada radial.....	[m]
\mathbf{r}	Vetor posição	[m]
\mathcal{R}	Espaço dos números reais	[-]
R_m	Espaço polinomial de grau m	[-]
R_1	Raio do cilindro a montante da contração	[m]
R_2	Raio do cilindro a jusante da contração.....	[m]
Re	Número de Reynolds	[-]
Re_K	Número de Reynolds de malha	[-]
t	Tempo	[s]
\mathbf{T}	Tensor tensão de Cauchy	[N/m ²]
T_{ij}	Componentes do tensor tensão.....	[N/m ²]
u_i	Componente da velocidade na direção i	[m/s]
\mathbf{u}^h	Aproximação do campo de velocidades.....	[m/s]
U_A	Parâmetros incógnitos da formulação de elementos finitos.....	[-]
U_h	Aproximação do conjunto de variáveis U	[-]
v^h	Função peso do campo de velocidades	[-]
\mathbf{v}	Velocidade de um elemento fluido infinitesimal	[m/s]
\mathbf{V}	Espaço funcional do campo de velocidade.....	[-]
V_1	Velocidade média a montante da contração	[m/s]
V_2	Velocidade média a jusante da contração.....	[m/s]
\mathbf{V}_h	Subespaço de \mathbf{V}	[-]
w^h	Função peso da velocidade.....	[-]
W_h	Subespaço de W	[-]
W_l	Peso do l -ésimo ponto de integração.....	[-]
\mathbf{x}	Posição em uma configuração deformada qualquer	[m]
z	Coordenada axial.....	[m]

LETRAS GREGAS

β	Razão de aspecto da contração.....	[-]
Γ	Fronteira do domínio Ω	[-]
Γ_g	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet.....	[-]

Γ_h	Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Neumann	[-]
λ	Tempo característico do fluido	[s]
μ	Viscosidade absoluta do fluido newtoniano	[kg/m.s]
ρ	Massa específica do fluido	[kg/m ³]
τ	Parcela do tensor desviador de tensões	[N/m ²]
Ω	Domínio do problema	[-]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema	[-]
Ω_K	Domínio do elemento finito K	[-]
ν	Viscosidade dinâmica do fluido.....	[m ² /s]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação por cisalhamento.....	[s ⁻¹]
η	Viscosidade viscométrica aparente.....	[Kg/m.s]
η_0	Viscosidade para taxa de cisalhamento zero.	[Kg/m.s]
η_∞	Viscosidade para taxa de cisalhamento tendendo ao infinito.....	[Kg/m.s]

SOBRESCRITO

a	Número do ponto nodal do elemento	[-]
\mathbf{g}	Condição de contorno essencial (Dirichlet)	[-]
\mathbf{h}	Condição de contorno natural (Neumman)	[-]
k	Grau dos polinômios dos termos de velocidade	[-]
k	Elemento finito da partição C_h	[-]

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente espacial	[-]
Δp	Queda de pressão	[Pa]
(\cdot, \cdot)	Produto interno de $L^2(\Omega)$	[-]
$(\cdot, \cdot)_K$	Produto interno de $L^2(\Omega_K)$	[-]
$\ \cdot\ _0$...	Norma de $L^2(\Omega)$	[-]
$\ \cdot\ _{0,K}$...	Norma de $L^2(\Omega_K)$	[-]

$\|\cdot\|_1$... Norma de $H^1(\Omega)$ [-]

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura	Pág.
1.1 Escoamento no tubo e <i>shear-thinning</i>	4
2.1 Volume arbitrário Ω fixo no espaço com fronteira Γ	11
2.2 Elemento de superfície $d\Gamma$ através do qual a força $t \cdot n \, d\Gamma$ atua.....	16
2.3 Esquema representando a convenção de sinais e índices para os componentes do tensor tensão T	16
3.1 Curvas de viscosidade para três polímeros fundidos.....	22
3.2 Curvas de viscosidade não-Newtoniana, ajustadas pela equação de viscosidade de Carreau.....	27
4.1 Domínio de elemento quadrilátero bilinear e ordenação nodal local.....	35
4.2 <i>Shape functions</i> local (N_a) e global (N_A) do elemento quadrilátero bilinear.....	37
5.1 Descrição do problema da cavidade.....	39
5.2 Isobáricas: (a) $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$	40
5.3 Linhas de corrente: (a) $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$	42
5.4 Perfil de velocidade horizontal: (a) $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$	44
5.5 Perfil de velocidade vertical: (a) $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$	45
5.6 Escoamento de Carreau através de uma contração axissimétrica abrupta 4:1.....	47
5.7 Isoregiões da função viscosidade de Carreau para $Re = 2$ e $n = 0,2$: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$	49
5.8 Isoregiões do campo de pressão para $Re = 2$ e $n = 0,2$: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$	52
5.9 Isoregiões do módulo do vetor velocidade para $Re = 2$ e $n = 0,2$: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$	56
5.10 Detalhes das isoregiões do módulo do vetor velocidade e vetores velocidade a jusante da contração para $Re = 2$ e $n = 0,2$: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 50$, (c) $Cu = 100$	59
5.11 Detalhes das linhas-de-Corrente na contração para $Re = 2$ e $n = 0,2$: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$	61
5.12 Queda de pressão ao longo da linha de simetria para $Re = 2$ e $n = 0,2$: (a) gráfico linear e (b) gráfico semi-log.....	63
5.13 Velocidades axiais no plano de contração e detalhes para as zonas de velocidade axial com $Re = 2$ e $n = 0,2$	65

5.14 Velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Re = 2$ e $n = 0,2$	66
5.15 Queda de pressão ao longo da linha de simetria a) $Cu = 10$ e (b) $Cu = 50$	68
5.16 Velocidade axial no plano de contração para a) $Cu = 10$ e b) $Cu = 100$	70
5.17 Velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Re = 2$ e $Cu = 100$	72
5.18 Velocidade axial no plano de contração para $Cu = 0$ e $n = 0,2$	73
5.19 Velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Cu = 100$ e $n = 0,2$	74

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela	Pág.
1.1 Equações a serem resolvidas para fluidos incompressíveis.....	3
3.1 Parâmetros <i>power-law</i> para soluções aquosas.....	27
4.1 Coordenadas locais no espaço ξ	36

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

Mecânica dos Fluidos é o estudo do comportamento de materiais fluidos em escoamento. A análise dos fenômenos da mecânica dos fluidos é baseada na solução simultânea de um número de equações representativas de certas leis físicas, as quais são supostas válidas para os fenômenos considerados.

Estas equações podem ser grupadas em duas diferentes categorias. Na primeira delas, incluímos aquelas equações representativas de leis físicas, válidas para todos os materiais. Estas equações são chamadas equações de balanço, visto representarem a formulação matemática de um princípio de conservação. Há basicamente quatro equações de balanço, representando os princípios de conservação de massa, momentum, momento do momentum e energia.

Um segundo grupo de equações representa certas leis físicas governantes do comportamento de materiais específicos. A forma destas equações depende da classe de material considerado; o valor dos parâmetros nelas envolvidos depende do material particular. Existem, basicamente, quatro equações neste grupo. A abordagem introduzida neste trabalho emprega conceitos derivados da termodinâmica clássica. Esta visão utiliza quatro equações para representar o comportamento dos materiais considerados: uma equação termodinâmica de estado, uma relação entre a densidade, pressão e temperatura; uma equação constitutiva, relacionando as tensões internas às variáveis cinemáticas; uma equação de transferência de calor, relacionando o fluxo de calor à distribuição de temperatura; e uma equação relacionando a energia interna a variáveis independentes relevantes, chamada equação energética de estado.

Em princípio, qualquer problema de mecânica dos fluidos requer a solução simultânea de todo o conjunto das oito equações acima mencionadas. Na prática, entretanto, isto é uma tarefa difícil e infrutífera, e, uma forma simplificada de uma ou mais equações relevantes, é freqüentemente empregada na solução de certas classes de problemas de fluidos. Uma simplificação importante surge quando consideramos fluidos de densidade constante, isto é, quando a equação termodinâmica de estado assume a forma bastante simplificada:

$$\rho = \text{cte} \quad (1.1)$$

Esta dissertação objetiva a modelagem mecânica e simulação de elementos finitos de fluidos não lineares somente com densidade constante, Eq. (1.1).

Quando do estabelecimento da equação de balanço, um sistema deve ser escolhido sobre o qual o princípio conservativo relevante é aplicado. Este sistema pode ter dimensões finitas, no qual as equações de balanço integrais são obtidas. Entretanto, uma forma particular muito útil dessas equações é obtida quando o sistema escolhido é um volume diferencial ao redor do ponto considerado. As equações de balanço são, então, obtidas na forma diferencial.

O princípio de conservação de massa, quando aplicado a um sistema específico qualquer, pode ser escrito como: “O fluxo líquido de massa no sistema é igual à acumulação de massa dentro do sistema.” É evidente que, tanto a densidade como a velocidade, irão aparecer na formulação matemática deste princípio, a qual dá origem à chamada equação da continuidade. Mesmo impondo densidade constante (Eq. (1.1)), este princípio não pode ser resolvido para velocidade, já que uma equação escalar não é suficiente para determinar uma incógnita vetorial.

O princípio de conservação de momentum é, portanto, sempre necessário. Ele pode ser descrito como: “O fluxo líquido de momentum no sistema, somado a todas as forças de superfície e de corpo que atuam sobre o sistema, é igual à taxa de acumulação de momentum no sistema”. As variáveis presentes na formulação matemática deste princípio, chamada equação de movimento, são novamente densidade e velocidade, porém duas novas variáveis surgem: pressão e tensão.

O sistema formado pelas equações da continuidade e movimento não é determinado, pois suas quatro incógnitas (densidade, pressão, velocidade e tensão) não podem ser determinadas a partir de apenas duas equações. Daí a necessidade de equações representando o comportamento físico do material, ou seja, uma equação constitutiva e uma equação termodinâmica de estado, esta última assumindo a forma simplificada: densidade igual a uma constante (Eq. (1.1)), nos chamados escoamentos incompressíveis.

A equação constitutiva é uma relação a qual permite que a tensão seja calculada como uma função das variáveis cinemáticas do escoamento. Limitando-se aos fluidos de viscosidade constante, os chamados fluidos Newtonianos, o sistema formado pelas equações da continuidade e movimento, em conjunto com a equação constitutiva, pode ser resolvido, em princípio, como mostrado na Tabela 1.1.

Tabela 1.1 Equações a serem resolvidas para fluidos incompressíveis.

Equações	Variáveis
Estado (escalar)	Pressão (escalar)
Balanço de Massa (escalar)	Densidade (escalar)
Balanço de Momentum (vetorial)	Velocidade (vetorial)
Constitutiva (tensorial)	Tensão (tensorial)

Observe que a mecânica dos fluidos clássica diz respeito ao caso onde a equação constitutiva simplesmente estabelece que o estado de tensão seja sempre isotrópico, isto é, completamente determinado pela pressão normal, enquanto a mecânica dos fluidos newtoniana diz respeito ao caso onde a equação constitutiva tem a forma linear simples, expressa pela lei de Newton. Formas mais complexas de equações constitutivas dão origem a mecânica dos fluidos não-Newtoniana.

1.2. FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Provavelmente a mais importante característica dos fluidos não-newtonianos é o fato de apresentarem uma viscosidade ‘*não-Newtoniana*’ ou ‘*cisalhante dependente*’. Um simples experimento qualitativo pode ilustrar esta propriedade (ver Fig. 1.1). Consideram-se dois tubos verticais idênticos, em cujas bases está uma chapa plana. Os dois tubos são preenchidos com fluidos, um Newtoniano (N) e outro não-Newtoniano (P, de polimérico), os quais apresentam a mesma viscosidade para baixas taxas de cisalhamento. Essa condição é satisfeita, por exemplo, se duas pequenas esferas idênticas caírem através dos tubos na mesma velocidade (Figura 1.1(a)). Além disso, a densidade da esfera apresenta ordem de grandeza muito superior à densidade dos fluidos, de forma a negligenciar-se a diferença das densidades dos mesmos. Na Figura 1.1(b), observa-se que, quando a chapa é removida das bases dos tubos, e os fluidos escoam segundo a gravidade, o fluido não-Newtoniano drena mais rapidamente que o fluido Newtoniano. Se ambos os fluidos fossem Newtonianos, então o fato das duas esferas descerem na mesma velocidade significaria que ambos têm a mesma viscosidade. Por outro lado, implicaria que os fluidos drenariam à mesma velocidade. Observando os resultados ilustrados na Figura 1.1, verifica-se que os líquidos não-Newtonianos apresentam uma viscosidade menor no experimento de maior taxa de deformação por cisalhamento (remoção da placa). O decréscimo na viscosidade com o aumento da taxa de cisalhamento é referido na literatura como

pseudoplasticidade (*shear-thinning*), sendo o fluido chamado de *pseudoplástico*. Este efeito pode ser drástico, com a viscosidade diminuindo de um fator de até 10^3 ou 10^4 . Dentre os fluidos pseudoplásticos, pode-se destacar os polímeros fundidos, as soluções poliméricas, tintas, fluidos biológicos como o sangue e saliva, e fluidos empregados na indústria alimentícia como ketchup, goma xantana e chocolate fundido.

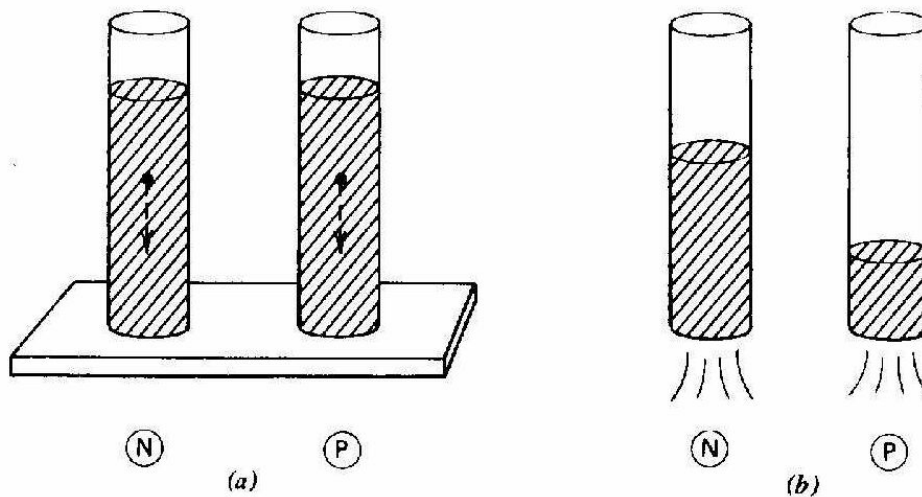


Figura 1.1 Escoamento no tubo e *shear-thinning*. (a) Duas pequenas esferas idênticas caem através dos tubos na mesma velocidade; (b) o fluido não-Newtoniano drena mais depressa que o fluido Newtoniano.

Alguns fluidos comportam-se de maneira inversa, ou seja, eles deixam o tubo mais lentamente que o líquido Newtoniano. Um fluido no qual a viscosidade aumenta com a taxa de cisalhamento é chamado dilatante. Este comportamento, chamado de dilatância (*shear-thickening*), é exibido em suspensões bastante concentradas de partículas de pequenos diâmetros. Dentre os fluidos dilatantes destacam-se as suspensões concentradas de sólidos, tais como: argila, cimento e argamassa.

Comportamento ainda mais complexo é apresentado por fluidos que não escoam a menos que sujeitos a uma tensão de cisalhamento crítica, chamada tensão de escoamento. Estes fluidos são chamados viscoplásticos. Certos tipos de tintas, graxas, e colas são exemplos de fluidos viscoplásticos. Embora o conceito de tensão de escoamento tenha se mostrado de grande utilidade, sua existência foi contestada com base que todos os materiais escoam, desde que um tempo suficientemente grande seja considerado. Por exemplo, um filme de tinta aplicado em um muro vertical certamente escoará, mas, para uma boa pintura, esse processo deve ser mais lento que a evaporação do solvente acarretando mudanças químicas na tinta. Então, a tensão de

escoamento transforma-se em uma propriedade constitutiva muito útil na descrição da tensão de cisalhamento, abaixo da qual o escoamento da tinta, por exemplo, torna-se desprezível.

1.3. ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS

O método de elementos finitos é um método de aproximação numérica de equações diferenciais, o qual se baseia na idéia de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos e funções de aproximação propriamente selecionadas ao longo de todo o domínio do problema [ver, por exemplo, Reddy and Gartling, 1994].

Quando da solução de um problema pelo método de elementos finitos, o problema é formulado variacionalmente, com seu domínio discretizado em um conjunto de subdomínios finitos não superpostos, os elementos finitos, os quais permitem a construção de funções de aproximação de forma simples, através da teoria de interpolação de funções. As funções de aproximação são, então, substituídas na forma variacional das leis de conservação, juntamente com as funções peso do problema, gerando, assim, um conjunto de equações algébricas, para o regime permanente dos problemas estudados [Johnson, 1987].

Assim descrito, o método de elementos finitos não inova em nada em relação aos métodos variacionais clássicos [Rektorys, 1975]. O que há de novo e poderoso na metodologia de elementos finitos é sua escolha particular das funções base, as quais utilizam funções polinomiais bilineares por partes de suporte compacto, construídas de modo a valerem um nos pontos nodais a elas associados e zero no restante do domínio. É esta importante característica do método que faz com que a matriz associada à formulação de Galerkin seja uma matriz de banda, reduzindo, assim, drasticamente os custos da solução numérica do sistema de equações algébricas associado.

1.3.1. Métodos Estabilizados

O método de elementos finitos mais empregado é o método de Galerkin, o qual tem sido aplicado, nas últimas décadas, a uma vasta classe de problemas. No entanto, sua extensão do método para problemas de escoamentos, algumas patologias numéricas foram detectadas em várias situações de interesse de engenharia. Constatou-se o surgimento de oscilações espúrias,

sobre todo o domínio computacional, em problemas envolvendo operadores não simétricos, fazendo divergir as aproximações de escoamentos advectivo-dominados. Em um primeiro momento, o refinamento da malha surgiu como uma primeira tentativa de eliminar o problema, mesmo acarretando no aumento do custo computacional. Em seguida, foram propostas novas estratégias, tais como o desenvolvimento de novos elementos finitos e a aplicação de regras de integração não convencionais [ver, por exemplo, Malkus and Hughes, 1978; Crouzeix and Raviart, 1973]. Alguns pesquisadores seguiram a linha da manutenção da formulação de Galerkin clássica com uso de elementos não conformes, enquanto, outros optaram pela manutenção de funções de interpolação usuais isoparamétricas com a alteração da formulação de Galerkin, visando adicionar ao problema a requerida estabilidade. Esta última opção gerou o que atualmente é conhecido como métodos estabilizados.

Especificamente a aproximação das equações de Navier-Stokes incompressível, via método de Galerkin, enfrenta duas grandes dificuldades. Primeiro, a necessidade de compatibilizar os sub-espacos de velocidade e pressão, satisfazendo, dessa maneira, a chamada condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Em seguida, tem-se a instabilidade inerente a esquemas de discretizações centrais, através da formulação de Galerkin ou através de esquemas de diferenças finitas na aproximação de escoamentos advectivo dominantes [Brooks and Hughes, 1982; Patankar and Spalding, 1972; Patankar, 1980]. O tratamento simétrico do termo de advecção pela formulação de Galerkin clássica, na qual as funções teste e peso pertencem ao mesmo espaço, é identificada como a fonte das instabilidades numéricas nos escoamentos de altos números de Reynolds.

Um grande passo no desenvolvimento de métodos estabilizados pode ser visto como a contribuição dada pelos trabalhos de Brooks and Hughes, 1982, e Hughes and Brooks, 1982, nos quais foi desenvolvido o método *streamline-upwind / Petrov-Galerkin*, ou, simplesmente, SUPG. Este método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*) - a qual atua somente na direção das linhas de corrente - às funções clássicas do método de Galerkin. O método SUPG apresenta elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro ótimas ou quase-ótimas [Johnson et al., 1984] quando a solução exata é suficientemente regular.

Dentre as evoluções a partir do método SUPG, destaca-se, o chamado método Galerkin/mínimos-quadrados (GLS), introduzido por Hughes et al., 1986 no contexto do problema de Stokes. Esta metodologia consiste na adição de termos dependentes da malha, ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, analogamente ao método SUPG, são construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem, contudo,

prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange. Dada a sua grande flexibilidade, a metodologia GLS vem sendo aplicada com sucesso a uma extensa gama de problemas de fluidos, como atestam os trabalhos de Hughes and Shakib, 1988; Franca and Hughes, 1988; Gresho, 1991; Franca et al., 1992; Franca and Frey, 1992; Franceschini and Frey, 2003; Franca and Hughes, 1993; Harari and Hughes, 1994].

1.4. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS PSEUDOPLÁSTICOS

Kim et al. (1983) analisam o papel da inércia do fluido e de sua viscosidade dependente da taxa de cisalhamento, na determinação do campo de velocidades em uma contração abrupta axissimétrica, através do método de elementos finitos para o escoamento de um fluido Newtoniano generalizado, com a função viscosidade dada pela equação de Carreau. De maneira isolada, tanto o aumento da pseudoplasticidade como o crescimento da inércia do fluido, tendem a anular o vórtice a montante da vizinhança da abertura do tubo menor. Nos escoamentos lentos, a pseudoplasticidade não gera concavidades, nem velocidades máximas, fora do centro do perfil de velocidade axial no interior do tubo menor, mesmo para altos números de Carreau, onde o campo de velocidade aproxima-se do perfil de um fluido *power-law*. Foram encontrados picos na velocidade axial, longe do centro do tubo, somente para valores médios e altos do número de Reynolds, picos os quais são aumentados pela pseudoplasticidade, com o decaimento da viscosidade e, conseqüentemente, o aumento do número de Reynolds local junto à parede do tubo menor. O efeito de gradientes de velocidade severos junto a esta superfície, nas aproximações por elementos finitos, é discutido detalhadamente neste artigo.

Karam et al (1999) relatam três dificuldades básicas quando da resolução numérica térmica acoplada a escoamentos incompressíveis de fluidos pseudoplásticos, a saber: o tratamento da incompressibilidade do fluido, a determinação das condições de acoplamento dos efeitos térmicos e dinâmicos e o caráter não linear das equações constitutivas pseudoplásticas como, por exemplo, a relação *power-law*, nas quais os métodos de solução de Newton falham na resolução adequada para fluidos com índices de potência muito grandes (fortemente dilatantes) ou muito pequenos (fortemente pseudoplásticos). Diferentemente da aproximação clássica para problemas não lineares acoplados, este trabalho introduz um método de elementos finitos baseado no princípio de Hellinger-Reissner para o problema de escoamentos térmicos de fluidos não lineares, em cinco variáveis primais: velocidade, tensor tensão, parte deviatória da tensão, temperatura e um multiplicador Lagrangeano com dimensão de tensão. Esta formulação

estabilizada permite empregar a mesma ordem de interpolação para todas as variáveis, com as tensões sendo interpoladas por funções de base descontínuas. Esta formulação emprega o algoritmo Uzawa para tratar a não linearidade bem como seu acoplamento térmico. Dutos de parede grossa são considerados quando efeitos conjugados estão presentes, tais como condução entre a parede sólida e o fluido com uma temperatura não especificada na interface. Estimativas de erros são desenvolvidas e resultados numéricos são apresentados comparando escoamentos acoplados e desacoplados termicamente de fluidos Newtonianos e pseudoplásticos.

Manglik et al (1999) estudam escoamentos laminares totalmente desenvolvidos, sem dependência no tempo, em um anel excêntrico. A reologia do fluido é modelada pela equação constitutiva do modelo power-law, a qual modela vários processos líquidos industriais. São apresentados modelos de escoamentos em canais na forma de anel em: trocadores de calor, extrusores, perfuração de poços, entre outros. A geometria da seção transversal do fluxo é mapeada dentro de um círculo unitário por meio de uma transformação de coordenadas, e a equação de momentum é resolvida pela técnica das diferenças finitas, usando uma discretização exata de segunda ordem. São apresentadas as soluções numéricas para uma faixa de variação da relação do raio anular ($0,2 \leq r \leq 0,8$), excentricidade ($0 \leq \varepsilon \leq 0,8$), e índice de cisalhamento ($1 \geq n \geq 0,2$). A reologia do fluido e a excentricidade anular são vistos como uma forte influência no comportamento do fluxo. A excentricidade causa uma estagnação ao escoamento, na estreita abertura, grandes picos de velocidade na larga abertura, e grandes variações azimutais no campo de velocidades. A pseudoplasticidade do fluido dá a ascensão a uma maior uniformidade do fluxo mal distribuído no entorno da seção anular, com campos de velocidade não uniformes, distribuição das tensões de cisalhamento na parede, e os fatores de fricção característicos.

Barnes et al (2001) relatam a possibilidade da obtenção, em regime permanente, de curvas de escoamentos de líquidos estruturados para uma larga variação da tensão de cisalhamento aplicada utilizando reômetros de tensão controlada. Para muitos líquidos, estas curvas apresentam novas formas, as quais demonstram características fortemente pseudoplásticas. Neste artigo, é introduzida uma categoria de modelos matemáticos empíricos, os quais são simplificações ou elaborações dos bem conhecidos modelos de Cross e Ellis (comportamento de líquidos estruturados intensamente pseudoplásticos), pois até o momento, têm-se modelado os escoamentos para elevadas taxas ou tensões de cisalhamento através de um modelo constitutivo com um parâmetro de tensão de escoamento (*yield stress*), isto é, do tipo Bingham, Casson ou Herschel-Bulkley. Estes novos modelos descrevem as curvas de escoamento tanto acima quanto abaixo de qualquer tensão de escoamento. Os novos modelos

encontram aplicação para uma gama de líquidos estruturados de interesse comercial, variando desde lamas de perfuração, chocolate fundido até dispersões floculadas não aquosas.

Junior e Naccache (2003) relatam a existência de escoamentos de fluidos não Newtonianos através de contrações e expansões em diversos processos industriais. Neste artigo, são realizadas simulações numéricas do escoamento de um fluido não-Newtoniano através de uma expansão axissimétrica seguida por uma contração. A solução numérica das equações de conservação de massa e momentum é obtida através do método de volumes finitos. De modo a modelar o comportamento não-Newtoniano do fluido, utiliza-se a equação constitutiva de fluido Newtoniano generalizado empregando a função viscosidade de Carreau. Os resultados obtidos mostram a influência dos parâmetros reológicos nos padrões de escoamento.

Manica e Bortoli (2004) simulam escoamentos de fluidos *power-law* através de uma expansão 3:1. Para escoamentos com número de Reynolds acima de um determinado valor crítico, três soluções podem surgir: uma simétrica e duas não simétricas. Neste artigo, são realizadas simulações empregando a técnica de diferenças finitas acoplada a um esquema explícito de Runge-Kutta de três estágios, para aproximações de segunda ordem no tempo e no espaço. Os resultados mostram a ocorrência de bifurcações para a faixa do índice power law n entre valores de zero a dois: para fluidos pseudoplástico, a bifurcação aparece logo após o caso Newtoniano, enquanto, para os fluidos dilatantes, ocorre exatamente o oposto, isto é, a bifurcação surge para valores de n muito distantes do limite Newtoniano. Além do que, uma combinação de altos números de Reynolds e determinados valores do expoente power law, transforma a solução do problema dependente do tempo. Os resultados deste artigo complementam os resultados anteriormente obtidos para expansões abruptas, pois aqui os autores investigam altos valores do número de Reynolds e o comportamento não-Newtoniano do fluido.

Neofytou (2005) investiga os efeitos não-Newtonianos em escoamentos de fluidos Newtonianos generalizados, empregando um esquema numérico baseado na formulação de volumes finitos. Este esquema utiliza o método de correção de pressão em conjunto com o algoritmo SIMPLE de modo a solucionar o sistema de equações discretizadas. Visando minimizar a difusividade artificial dos esquemas de baixa ordem, a aproximação dos termos convectivos é realizada usando o esquema QUICK de terceira ordem. Para modelar o comportamento da viscosidade não-Newtoniana, foram empregados os modelos *power-law*, Quemada e Bingham e Casson modificados. A validação do código é realizada através da comparação de resultados numéricos disponíveis na literatura. Analisando o problema da cavidade, uma dupla investigação é realizada no que diz respeito aos efeitos não-Newtonianos do

escoamento. O problema é tanto explorado empregando diferentes modelos constitutivos, como variando as características pseudoplásticas e dilatantes do fluido.

1.5 OBJETIVO E PLANO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação objetiva a modelagem mecânica e simulação numérica via o método de Galerkin Mínimos Quadrados, de escoamentos planares e axissimétricos de fluidos pseudoplásticos de Carreau através de contrações abruptas.

Finalizando este capítulo, para um melhor entendimento e apreciação desta dissertação, é conveniente apresentar um plano geral de seus capítulos:

- Capítulo 1: Introdução do trabalho, sua motivação, o estado da arte do método de elementos finitos em fluidos e escoamentos de fluidos pseudoplásticos.
- Capítulo 2: Modelagem mecânica baseada nas leis de conservação de massa e momentum linear e angular.
- Capítulo 3: Comportamento material dos fluidos puramente viscosos.
- Capítulo 4: Aproximação de elementos finitos para as equações de Navier-Stokes generalizadas.
- Capítulo 5: Resultados Numéricos.
- Capítulo 6: Conclusões e perspectivas futuras.
- Capítulo 7: Referências bibliográficas.

2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as equações que governam o escoamento dos fluidos. Essas equações indicam como a massa e o momentum do fluido variam com a posição e tempo ao longo de seu escoamento. Inicialmente, estas equações serão apresentadas em termos de fluxos, de modo a serem válidas para qualquer tipo de fluido. Em seguida, elas serão particularizadas para os fluidos viscosos Newtonianos.

2.1 AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM TERMOS DE FLUXOS

O movimento de um fluido qualquer é descrito pelas equações de conservação de massa, momentum e energia. Considere uma região arbitrária fixa do espaço, de volume Ω e superfície Γ (Fig.2.1), na qual, para toda superfície elementar $d\Gamma$, pode ser associado um vetor normal unitário exterior \mathbf{n} . Imagina-se, então, esta região fixa no meio do escoamento de um fluido, com o mesmo movendo-se através de suas fronteiras.

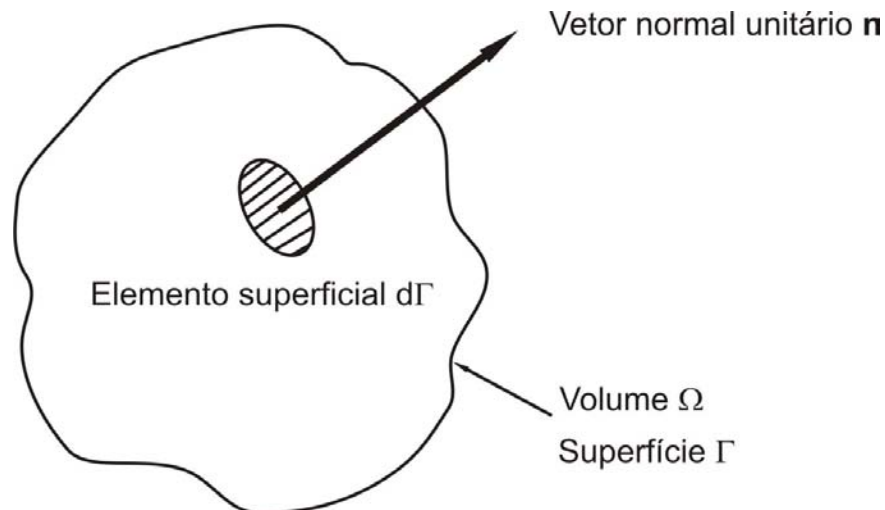


Figura 2.1: Volume arbitrário Ω fixo no espaço, de fronteira Γ .

2.1.1 Conservação de Massa

Suponha que, um elemento fluido infinitesimal, de superfície $d\Gamma$, cruze as fronteiras do volume Ω , com velocidade \mathbf{v} . A vazão volumétrica elementar do fluido que escoar através de $d\Gamma$ é

dada por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$. Se o fluxo deixa o volume Ω , isto é, eflui, então, a vazão elementar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$ será positiva; caso contrário se há afluxo do fluido, ela será negativa. Logo, a vazão mássica elementar de fluxo será dada por $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$, com $\rho \mathbf{v}$ denotando o chamado fluxo de massa, ou seja, massa por unidade de área e tempo.

De acordo com o princípio da conservação de massa, “a massa total de fluido no interior do volume Ω , somente aumentará devido ao afluxo líquido de fluido através da fronteira Γ ”. Matematicamente, este princípio pode ser expresso por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\Gamma} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma$$

Taxa de aumento da massa no interior de Ω	Afluxo líquido de massa através de Γ	(2.1)
---	--	-------

Aplicando o teorema da divergência de Gauss à Eq. (2.1), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\Omega} \text{div}(\rho \mathbf{v}) d\Omega \quad (2.2)$$

Através da aplicação do teorema de transporte de Reynolds, pode-se trazer a derivação no tempo para dentro da integral.

$$\int_{\Omega} [\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v})] d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

Argumentando, agora, que a Eq. (2.3) deve ser válida para qualquer volume arbitrário Ω , chega-se à forma diferencial Euleriana da *equação da continuidade*.

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

Finalmente, a partir da Eq. (2.4), pode-se, ainda, construir a forma diferencial Lagrangeana da *equação da continuidade*. Empregando-se o conceito do operador derivada material de um campo escalar na Eq. (2.4).

$$\frac{d_m(\bullet)}{dt} = D_t(\bullet) = \partial_t(\bullet) + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\bullet) = 0 \quad (2.5)$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \text{div} \mathbf{v} &= 0 \\ D_t \rho + \rho \text{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Caso seja suposto que o fluido tenha massa específica constante, tanto a forma Euleriana como a Lagrangeana da equação da continuidade, Eq. (2.4) e Eq. (2.6), respectivamente, reduzem-se à:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.7)$$

2.1.2 Conservação de Momentum

Como visto na seção anterior, a vazão volumétrica elementar de um fluido através de um elemento de superfície $d\Gamma$ é dada por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$. Se multiplicada pelo momentum, por unidade de volume de fluido, obtém-se $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma) \rho \mathbf{v}$, que representa a taxa pela qual o momentum é transportado pelo escoamento do fluido através do elemento de superfície $d\Gamma$. Esta expressão pode ser rearranjada como $[\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}] \mathbf{n} d\Gamma$, com o tensor $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ denotando o fluxo de momentum (momentum, por unidade de área e tempo) associado ao volume escoado de fluido (Este tipo de transporte, devido ao escoamento do fluido, é denominado *transporte convectivo*).

Observe que existe um paralelismo entre o primeiro parágrafo da seção anterior e o atual, porém com a ordem tensorial das grandezas envolvidas sendo diferentes. Na seção anterior, a grandeza sendo transportada era a massa (escalar), e o fluxo de massa representado pelo vetor $\rho \mathbf{v}$. Agora, a grandeza a ser transportada é o momentum (vetorial), e o fluxo de momentum é um tensor de segunda ordem, $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$.

Além do transporte convectivo de momentum devido ao escoamento do fluido, há também o momentum transferido devido aos movimentos e interações moleculares dentro do fluido. Este fluxo de momentum adicional será designado pelo símbolo \mathbf{T} , novamente um tensor de segunda ordem. Utiliza-se a convenção que o ij -ésimo componente do tensor \mathbf{T} representa o fluxo positivo do i -ésimo momentum na j -ésima direção positiva, associado aos processos moleculares no interior do fluido. A vazão volumétrica de momentum resultante dos movimentos

moleculares, através do elemento de superfície elementar $d\Gamma$ de orientação \mathbf{n} , é dada, então, por $\mathbf{Tn} d\Gamma$ (Nesta dissertação, o tensor \mathbf{T} será suposto simétrico, isto é, $T_{ij} = T_{ji}$, em concordância com a grande maioria das teorias cinéticas dos fluidos simples e macromoleculares).

De acordo com o princípio da conservação de momentum, “o momentum total do fluido no interior do volume Ω irá aumentar devido ao afluxo líquido de momentum através de suas fronteiras Γ ; seja por transporte convectivo ou por movimentos moleculares e devido à ação da força da gravidade atuando no fluido. Matematicamente, este importante princípio dinâmico pode ser expresso por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega = - \int_{\Gamma} [\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}] \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{T} \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega$$

Taxa de aumento de momentum no interior do volume Ω	Afluxo de momentum através de Γ por transporte convectivo	Afluxo de momentum por movimentos moleculares	Força agindo no volume Ω devido a gravidade	(2.8)
--	--	---	--	-------

Aplicando-se os teoremas da divergência de Gauss e do transporte de Reynolds à eq. (2.8), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \partial_t (\rho \mathbf{v}) d\Omega = - \int_{\Omega} \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{T} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega \quad (2.9)$$

Sendo o volume Ω arbitrário, os sinais da integral da Eq. (2.9) podem ser removidos, obtendo-se a forma diferencial Euleriana da *equação de movimento*,

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.10)$$

A forma Lagrangeana da equação de movimento pode ser obtida através da substituição, na Eq. (2.10), da identidade tensorial

$$\text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (2.11)$$

e da forma Euleriana da equação da continuidade, Eq. (2.4),

$$\begin{aligned}
\partial_i(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \\
\rho \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \partial_i \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} &= \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \\
\rho \partial_t \mathbf{v} + (\partial_i \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) \mathbf{v} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} &= \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \\
\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} &= \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Substituindo, então, a Eq. (2.5), obtém-se

$$\rho D_t \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \tag{2.13}$$

2.1.3 Interpretação do Tensor Tensão

Antes de prosseguir, é interessante dar uma interpretação alternativa do tensor \mathbf{T} e seus componentes. Na dedução da Eq. (2.10), o princípio da conservação de momentum poderia ser enunciado de modo ligeiramente diferente ao expresso na Eq. (2.8), a saber: o momentum total de fluido no interior do volume Ω aumentará devido ao afluxo líquido de momentum entrando através das fronteiras Γ , e devido às forças externas atuando no fluido, tanto pela força de superfície exercida pelas vizinhanças do fluido, como pela força de corpo exercida pela gravidade. O termo de força de contato na Eq. (2.8) teria, então, a forma $\int \mathbf{t}(\mathbf{n}) d\Gamma$, onde $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ é o chamado *vetor tensão*, o qual descreve a força exercida pelo fluido contido no lado positivo de $d\Gamma$, sobre o fluido contido no lado negativo de $d\Gamma$ (ver Fig. 2.2). A comparação da integral acima com termo correspondente da Eq. (2.8), conduz a $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}$, que representa que a força $\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Gamma$, correspondente a qualquer orientação \mathbf{n} de $d\Gamma$, pode ser obtida a partir do tensor \mathbf{T} . Quando esta interpretação é usada, é mais natural referir-se a \mathbf{T} como *tensor tensão*. O componente T_{ij} representa, então, a força, por unidade de área, atuando na direção positiva j e na superfície perpendicular à direção i , a força sendo exercida pelo material positivo sobre o material negativo (ver Fig.2.3 para detalhes).

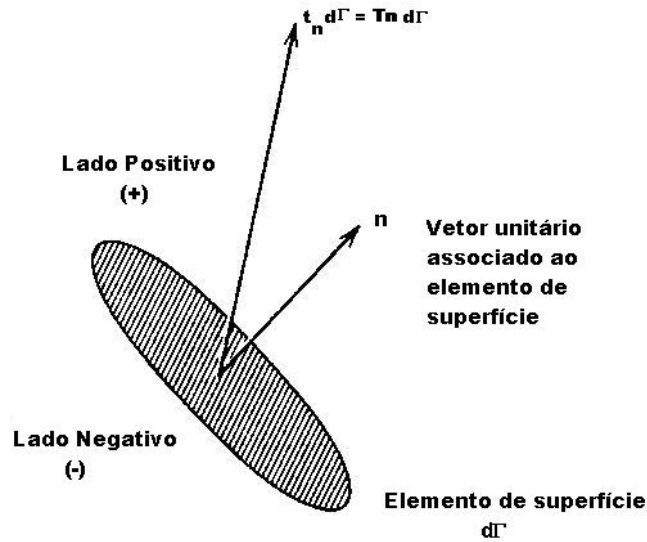


Fig. 2.2 Elemento de superfície $d\Gamma$ através do qual a força $\mathbf{t}(\mathbf{n}) d\Gamma$ atua.

Segundo este ponto de vista, a integral $\int \mathbf{Tn} d\Gamma$ na eq. (2.5) pode ser re-interpretada como a força do fluido no lado externo do volume Ω atuando sobre o fluido do lado interno ao volume Ω através Γ .

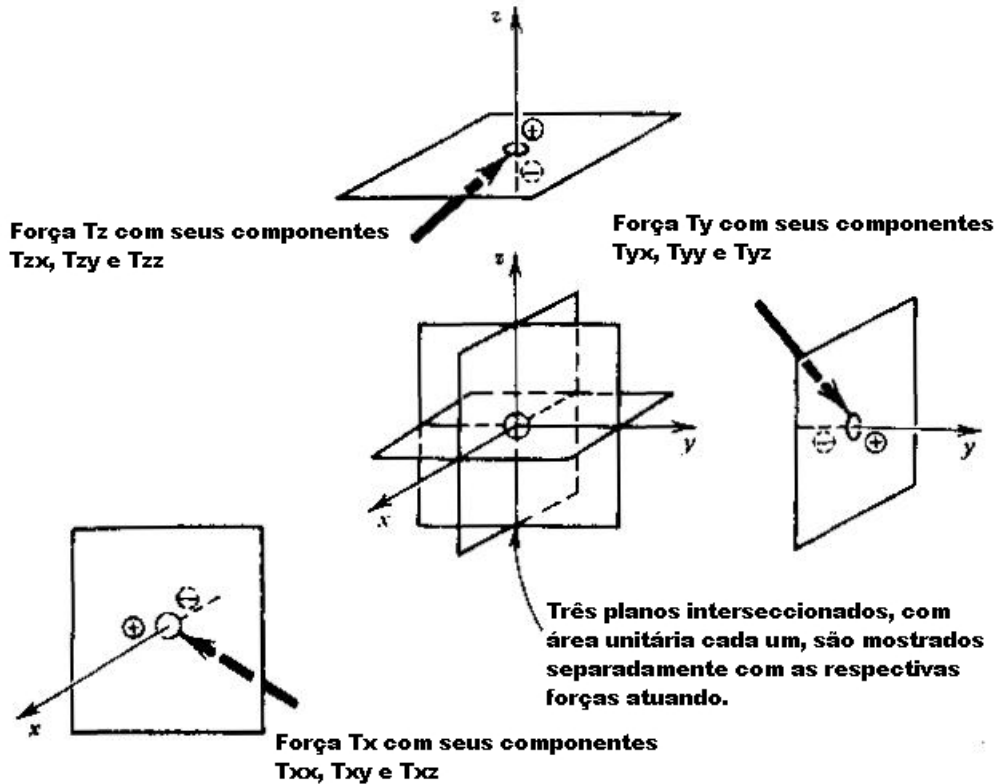


Fig. 2.3 Esquema representando a convenção de sinais e de índices para os componentes do tensor tensão \mathbf{T} .

2.1.4 Equação de momentum angular

Além disso, dando forma ao produto vetorial da posição do vetor \mathbf{r} com a equação de movimento e assumindo que o tensor tensão \mathbf{T} é simétrico obtém-se a equação de variação para o momento angular.

$$\partial_i(\rho \mathbf{r} \times \mathbf{v}) = -\text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \text{div}(\mathbf{r} \times \mathbf{T})^T + \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} \quad (2.14)$$

2.2 AS EQUAÇÕES DE VARIAÇÃO EM TERMOS DAS PROPRIEDADES DE TRANSPORTE

2.2.1 Fluido Newtoniano

As equações de conservação de massa, momentum linear e momentum angular, Eqs. (2.4), (2.10) e (2.14), da maneira como foram escritas, são válidas para qualquer tipo de fluido. Nesta seção, essas equações serão particularizadas, os chamados fluidos Newtonianos, de forma a obter-se as equações da mecânica dos fluidos clássica.

Para fluidos estruturalmente simples, como os gases, misturas gasosas, líquidos de baixo peso molecular e suas misturas, foi estabelecido experimentalmente que para um movimento cisalhante elementar, $v_1 = v_1(y)$ e $v_2 = v_3 = 0$, o fluxo da componente x de momentum, na direção positiva y , é dado pela chamada lei da viscosidade de Newton (Landau et Lifchitz, 1971),

$$T_{21} = -\mu \frac{dv_1}{dx_2} \quad (2.15)$$

onde μ é a viscosidade molecular ou dinâmica do fluido. Generalizando-se a Eq. (2.15) para escoamentos arbitrários em regime transiente, obtém-se a seguinte equação constitutiva tensorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ &= -p\mathbf{I} + \mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] - \left(\frac{2}{3} \mu - k \right) (\text{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde \mathbf{I} representa o tensor unitário, $\boldsymbol{\tau}$ o tensor desviador de tensão ou, simplesmente, tensor viscoso e $(\nabla\mathbf{v})^T$ é o transposto do tensor gradiente de velocidade, $\nabla\mathbf{v}$. Esta expressão contém todas as combinações possíveis das derivadas primeiras dos componentes do vetor velocidade, assumindo-se que o fluido é isotrópico e o tensor fluxo de momentum é simétrico. Na ausência de gradientes de velocidade ao longo do escoamento do fluido, a Eq. (2.16) reduz-se simplesmente à pressão hidrostática.

O símbolo p representa a pressão termodinâmica, a qual é relacionada com a densidade ρ e a temperatura T do fluido, através da equação termodinâmica de estado.

$$p = p(\rho, T) \quad (2.17)$$

O tensor $\boldsymbol{\tau}$ denota a parcela do tensor fluxo de momentum ou tensor tensão, associada à viscosidade do fluido. Uma equação que atribui um valor para o tensor $\boldsymbol{\tau}$ é chamada de equação constitutiva. A Eq. (2.16) é a equação constitutiva para fluidos Newtonianos.

Observe que, na lei da viscosidade de Newton generalizada, Eq. Eq. (2.16), surge uma propriedade de transporte adicional, a chamada viscosidade dilatacional k . A viscosidade dilatacional é identicamente nula para os gases monoatômicos ideais e líquidos incompressíveis, $\text{div } \mathbf{v} = 0$ (Eq. (2.7)), com o termo contendo k desaparecendo da Eq. (2.16).

2.2.2 Fluido Newtoniano Incompressível

Para todos os fluidos, a densidade ρ depende das variáveis termodinâmicas de estado, como pressão e temperatura. Entretanto, para os líquidos, é usualmente uma ótima suposição, supor a densidade constante. Tais fluidos idealizados são chamados “fluidos incompressíveis”, com a expressão do tensor fluxo de momentum reduzindo-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ &= -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.18)$$

na qual $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T)$ é o tensor taxa de deformação.

2.2.3 Equação de Navier-Stokes Incompressível

Substituindo a equação constitutiva de fluido Newtoniano, Eq. (2.18), na equação de movimento, Eq. (2.13), obtêm-se as equações de Navier-Stokes incompressível,

$$\begin{aligned}\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} &= \text{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) + \rho \mathbf{g} \\ \rho (\partial_t \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}) &= -\mathbf{I}\nabla p - p\text{div}\mathbf{I} + 2\mu\text{div}\mathbf{D} + \rho \mathbf{g}\end{aligned}\quad (2.19)$$

como $\text{div}\mathbf{I} = 0$, a Eq. (2.19) reduz-se a:

$$\rho (\partial_t \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}) = -\nabla p + 2\mu\text{div}\mathbf{D} + \rho \mathbf{g}\quad (2.20)$$

2.2.4 Significado da Pressão nos Escoamentos de Fluidos Incompressíveis

Quando a suposição de incompressibilidade é assumida, Eq. (2.7), surge o problema do significado físico do parâmetro p na Eq. (2.18). Por exemplo, para um fluido puro incompressível a temperatura constante, o gráfico $p \times \rho$ é uma linha reta vertical, ou seja, a função $p(\rho)$ não é bem representada. Isto não impõe nenhuma dificuldade na resolução de problemas hidrodinâmicos, já que somente o gradiente de pressão necessita ser conhecido. No entanto, quando da determinação das pressões na superfície do fluido, a teoria de fluidos incompressíveis somente pode prever diferenças de pressão e nunca valores absolutos de pressão, ao menos, que uma pressão na superfície do escoamento seja especificada através das equações e contorno do problema.

3. FLUIDOS PURAMENTE VISCOSOS

3.1 VISCOSIDADE DOS FLUIDOS REAIS

A viscosidade dos fluidos Newtonianos é definida como um meio da constante de proporcionalidade que relaciona o tensor tensão \mathbf{T} ao tensor taxa de deformação \mathbf{D} (Slattery, 1999). Isto implica que, para um dado escoamento, os componentes do tensor tensão devem ser proporcionais aos componentes do tensor taxa de deformação. Uma das mais bem conhecidas conseqüências da equação de Navier-Stokes é a chamada lei de Hagen-Poiseuille (Landau et Lifchitz, 1971), a qual relaciona a vazão volumétrica Q à queda de pressão Δp ao longo do escoamento permanente em um tubo de raio R e comprimento L , da seguinte maneira:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{16 \mu L} \quad (3.1)$$

A proporcionalidade direta entre a vazão volumétrica Q e a queda de pressão Δp predita pela Eq. (3.1) é observada experimentalmente, sob regime de escoamento laminar, para uma grande variedade de líquidos comuns de baixo peso molecular, tais como água e derivados leves de petróleo. Ao mesmo tempo, muitos fluidos reais não seguem o comportamento predito pela Eq. (3.1), com uma dependência não-linear de Q em Δp sendo observada experimentalmente. Suspensões espessas, tintas, soluções poliméricas e polímeros fundidos são exemplos típicos de fluidos que exibem este comportamento dito ‘não-newtoniano’.

O escoamento ao longo de um tubo circular é um exemplo de uma importante classe de escoamentos, os chamados escoamentos viscométricos. O exemplo mais simples de escoamento viscométrico é o escoamento linear de Couette, o qual ocorre entre duas placas planas paralelas e deslizantes uma em relação à outra. Em um sistema coordenado cartesiano x_i , $i= 1, 2, 3$, o escoamento linear de Couette, muitas vezes denominado de escoamento cisalhante, pode ser descrito por:

$$v_1 = \dot{\gamma} x_2 \quad \text{e} \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (3.2)$$

onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação por cisalhamento. Logo, os componentes do tensor taxa de deformação \mathbf{D} , para este escoamento são dados por:

$$[\mathbf{D}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \partial_{x_2} v_1 & 0 \\ \partial_{x_2} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

e, segundo a equação constitutiva newtoniana, Eq. (2.18), os componentes do tensor desviador de tensão, $\boldsymbol{\tau}$, serão:

$$[\boldsymbol{\tau}] = 2\mu[\mathbf{D}] = \mu\dot{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Fluidos que falham ao obedecer a lei de Hagen-Poiseuille, Eq. (3.1), também falham em exibir a dependência linear de τ_{12} (tensor deviatório de tensão x na direção positiva y) com $\dot{\gamma}$, predita pela Eq. (3.4). Para tais fluidos, uma “viscosidade viscométrica aparente”, $\eta(\dot{\gamma})$, pode então, ser definida como:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} \quad (3.5)$$

a ser medida em um experimento viscométrico. Portanto, a função viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$ dependerá do valor da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$.

Basicamente, dois tipos de fluidos são observados quando a viscosidade viscométrica aparente é considerada: os chamados fluidos *dilatantes*, para os quais $\eta(\dot{\gamma})$ é uma função crescente de $\dot{\gamma}$,

$$\frac{d\eta(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}} > 0 \quad (\text{dilatante}) \quad (3.6)$$

e os fluidos *pseudoplásticos*, para os quais o oposto é verdadeiro,

$$\frac{d\eta(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}} < 0 \quad (\text{pseudoplástico}) \quad (3.7)$$

Exemplos típicos de fluidos dilatantes são suspensões concentradas de sólidos; por outro lado, polímeros e soluções poliméricas são quase sempre pseudoplásticos.

Tratando-se de fluidos pseudoplásticos, quando a viscosidade viscométrica aparente é medida para uma faixa da taxa de cisalhamento cobrindo diferentes ordens de grandeza, o comportamento ilustrado na Figura 3.1 é geralmente observado. O comportamento newtoniano (isto é, um valor constante de η) é observado tanto para taxas de cisalhamento muito baixas como muito altas. Os valores limites η_0 e η_∞ , chamados, respectivamente, de limite inferior e superior da viscosidade viscométrica aparente, são, freqüentemente, algumas ordens de magnitude diferentes um do outro.

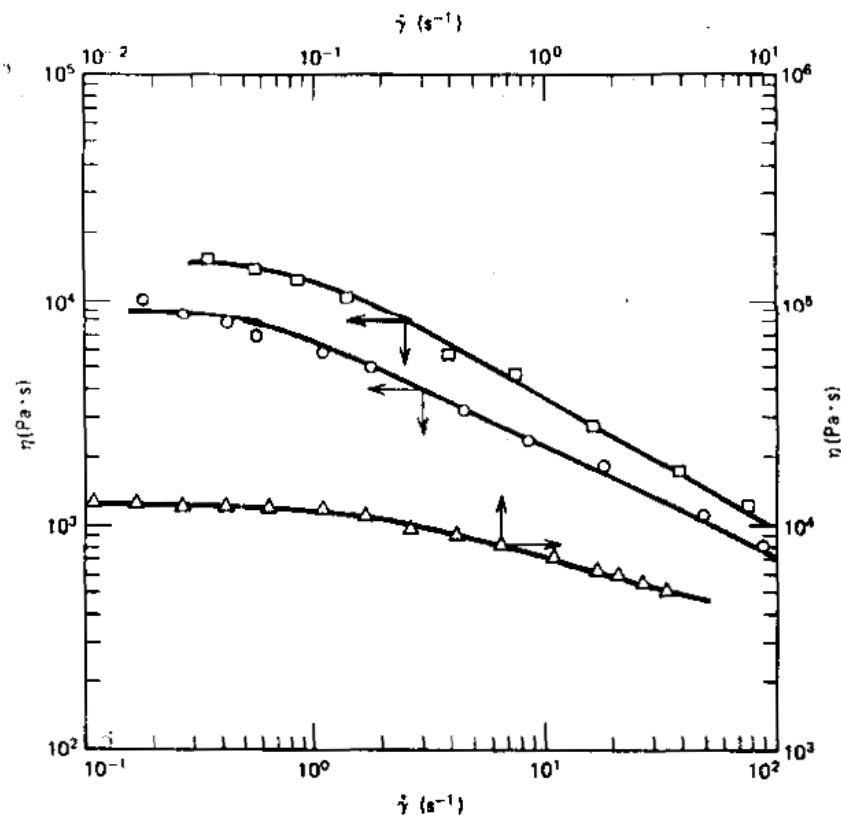


Figura 3.1: Curvas de viscosidade não-Newtoniana para três polímeros fundidos descritos pelo modelo de Carreau para $a = 2$, sugeridas por Bird et al., 1987: \square - Poliestireno, a 453K ($\eta_0 = 1,48 \times 10^4$ Pa.s, $\eta_\infty = 0$, $\lambda = 1.04$ s e $n = 0.938$); \circ - Polietileno de alta densidade, 443K ($\eta_0 = 8,92 \times 10^3$ Pa.s, $\eta_\infty = 0$, $\lambda = 1.58$ s e $n = 0.496$); \triangle - Fenox-A, a 485K ($\eta_0 = 1,24 \times 10^4$ Pa.s, $\eta_\infty = 0$, $\lambda = 7.44$ s e $n = 0.728$).

Fica evidente, portanto, que a equação constitutiva newtoniana, Eq. (2.18) é inadequada para representar o comportamento de fluidos reais com $\eta(\dot{\gamma})$ variável. Esta é uma das justificativas físicas básicas para o estudo de formas mais complexas de equações constitutivas, capazes de prever o comportamento observado nestes fluidos.

É, portanto, imperativo, analisar a dependência não-linear da tensão com o tensor taxa de deformação. Para tal, na seção seguinte, serão introduzidas as equações constitutivas dos fluidos Newtonianos generalizados (GNL).

3.2 FLUIDO NEWTONIANO GENERALIZADO

Para os escoamentos industriais de interesse, a mais importante propriedade dos fluidos macromoleculares é a viscosidade não-Newtoniana, ou seja, o fato da viscosidade do fluido variar com a taxa de cisalhamento. Para alguns fluidos, a viscosidade pode variar de um fator de 10, 100 ou até 1000, ficando evidente que estas enormes variações não podem ser ignoradas em projetos de escoamentos no interior de dutos, problemas de lubrificação, projetos de viscosímetros, operação de extrusão e cálculos de processos poliméricos. Consequentemente, não é surpresa o fato que o primeiro empirismo a ser introduzido foi uma modificação na lei de Newton da viscosidade (Eq. (2.18)), na qual é permitida a variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento, os chamados fluidos Newtonianos generalizados (GNL). Entretanto, estes modelos não podem descrever os efeitos de tensões normais ou a dependência no tempo dos efeitos elásticos.

Matematicamente, a partir da generalização acima proposta da equação constitutiva Newtoniana, Eq. (2.18), o modelo GNL pode ser expressão por:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ &= -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde a viscosidade aparente $\eta(\dot{\gamma})$ é uma função de invariantes escalares do tensor taxa de deformação, \mathbf{D} .

Se a viscosidade não-Newtoniana $\eta(\dot{\gamma})$, uma grandeza escalar, depende do tensor \mathbf{D} , então, ela deve depender, somente, de combinações particulares dos componentes deste tensor, as quais sejam independentes do sistema de coordenadas adotado (invariantes do tensor taxa de deformação):

$$\begin{aligned}I_{\mathbf{D}} &= \text{tr}\mathbf{D} \\ II_{\mathbf{D}} &= (\text{tr}\mathbf{D}^2) \\ III_{\mathbf{D}} &= \det\mathbf{D}\end{aligned}\tag{3.9}$$

Para um fluido incompressível, o primeiro invariante da Eq. (3.9) reduz-se a:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{D}} &= \text{tr} \mathbf{D} \\ &= \text{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Já nos escoamentos puramente cisalhantes, o terceiro invariante da Eq. (3.9) se anula,

$$III_{\mathbf{D}} = \det \mathbf{D} = 0 \quad (3.11)$$

pois os elementos fluidos não sofrem alterações de volume. Como a Eq. (3.8) deve ser somente empregada para escoamentos cisalhantes, ou, ao menos, escoamentos quase cisalhantes, a omissão do invariante $III_{\mathbf{D}}$ não é uma séria limitação. Assim, a função viscosidade η dependerá somente do segundo invariante do tensor \mathbf{D} , $II_{\mathbf{D}}$. Na prática, é preferível empregar-se a magnitude do tensor da taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, o tensor tensão, em vez de $II_{\mathbf{D}}$,

$$\dot{\gamma} = \left[\frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{D}^2) \right]^{1/2} = \left(\frac{1}{2} II_{\mathbf{D}} \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

com a escolha apropriada do sinal da raiz quadrada da Eq. (3.12) para que $\dot{\gamma}$ tenha valor positivo. Nos escoamentos cisalhantes, $\dot{\gamma}$ é chamado simplesmente de taxa de cisalhamento.

A Eq. (3.8), com $\eta = \eta(\dot{\gamma})$, encontra sua principal utilidade nos cálculos das vazões (Eq. (3.1)) e das forças cisalhantes (Eq. (3.5)) nos escoamentos puramente cisalhantes em regime permanente, tais como: escoamento em dutos, escoamento anular axial, tangencial e helicoidal, escoamento entre placas paralelas, escoamentos entre discos rotativos e escoamento cone - placa.

Embora a Eq. (3.8) forneça resultados estritamente corretos para vazões e forças cisalhantes somente para escoamentos puramente cisalhantes em regime permanente, os engenheiros vêm aplicando esta equação para escoamentos mais complexos e sistemas levemente transientes. Uma avaliação dos erros inerentes em tais extensões não é disponível, com tal prática representando um bom empirismo em engenharia.

Em seguida, serão introduzidos dois clássicos empirismos para a função viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$. Apesar de que, para alguns problemas, existe a possibilidade de empregarem-se diretamente dados experimentais para a viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$, é mais útil realizar cálculos e derivações com equações empíricas simples para $\eta(\dot{\gamma})$, as quais descrevem os dados

experimentais com suficiente exatidão. Dentre as muitas correlações disponíveis na literatura (Astarita and Marrucci, 1974, Bird et al., 1987 e Slattery, 1999), nesta dissertação serão empregados os modelos de Carreau-Yasuda e modelo Power-Law de Ostwald e Waele.

3.2.1 O modelo Carreau-Yasuda

Este modelo, a cinco parâmetros, tem suficiente flexibilidade para abranger uma grande variedade de curvas experimentais de $\eta(\dot{\gamma})$, mostrando-se útil para simulações numéricas, nas quais necessitam de uma expressão analítica para a curva de viscosidade não-Newtoniana. Matematicamente, este modelo pode ser expresso por:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{(n-1)/a} \quad (3.13)$$

onde η_0 representa a viscosidade aparente quando a taxa de cisalhamento tende a zero, η_{∞} a viscosidade aparente quando a taxa de cisalhamento tende ao infinito, λ é um tempo característico do fluido igual ao inverso do valor da taxa de cisalhamento, $\dot{\gamma}$, no qual a pseudoplasticidade inicia, n o expoente *power-law* (visto descrever, na região *power-law*, o coeficiente angular), e a um parâmetro adimensional que descreve a região de transição entre a região para a taxa de cisalhamento muito baixa e a região *power-law*. Alguns exemplos de ajustes de curvas de dados experimentais são fornecidos na Figura 3.2.

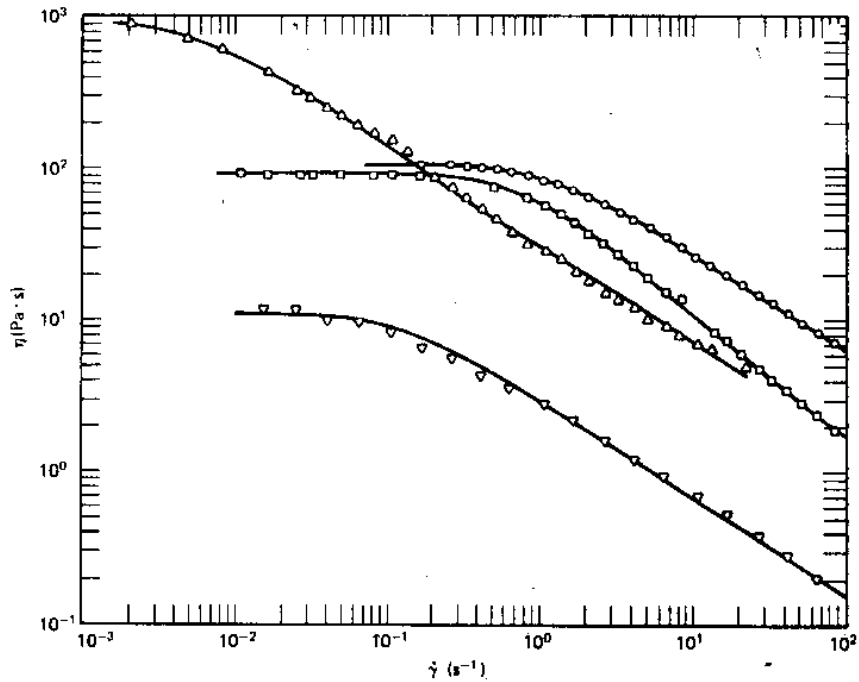


Figura 3.2: Curvas de viscosidade não-Newtoniana, citadas por Bird et al., 1987, ajustadas pela equação de Carreau (Eq. (3.13), for $a = 2$) para três polímeros fundidos e uma solução de sabão: Δ - 2% Poli-isobutileno em Primol 355, ($\eta_0 = 9,23 \times 10^2$ Pa.s, $\lambda = 191$ s, $n = 0,358$ e $\eta_\infty = 1,50 \times 10^{-1}$ Pa.s); O - 5% Poliestireno em Aroclor 1242, ($\eta_0 = 1,01 \times 10^2$ Pa.s, $\lambda = 0,84$ s, $n = 0,364$ e $\eta_\infty = 5,90 \times 10^{-2}$ Pa.s); ∇ - 0,75% Poliacrilamida (Separan – 30) em 95/5 mistura de água com glicerina ($\eta_0 = 10,6$ Pa.s, $\lambda = 8,04$ s, $n = 0,364$ e $\eta_\infty = 10^{-2}$ Pa.s) \square - 7% Sabão alumínio em decalin e m-cresol ($\eta_0 = 89,6$ Pa.s, $\lambda = 1,41$ s, $n = 0,2$ e $\eta_\infty = 10^{-2}$ Pa.s).

Para muitos polímeros fundidos e soluções poliméricas concentradas, bons ajustes podem ser obtidos para os valores de $a = 2$ e $\eta_\infty = 0$. Logo, a Eq. (3.13), originalmente proposta a cinco parâmetros, passa a ter somente três parâmetros, a saber, η_0 , λ , e n . A Eq. (3.13) com $a = 2$ é usualmente referida como modelo de Carreau, visto o parâmetro a ter sido introduzido, posteriormente, por Yasuda.

3.2.2 O modelo Power-Law de Ostwald e Waele

Em quase todos os problemas industriais, a região linear descendente (região *power-law*) do gráfico $\log \eta$ x $\log \dot{\gamma}$ observada na Figura 3.2, é, reologicamente, a região mais importante. De fato, para muitos viscosímetros mais simples e para muitos fluidos, é quase impossível obter

dados para o platô horizontal da curva de viscosidade aparente $\eta(\dot{\gamma})$. A reta inclinada desta região pode ser descrita por uma simples expressão “power-law”,

$$\eta = m(\dot{\gamma})^{(n-1)} \quad (3.14)$$

a qual contém apenas dois parâmetros: m (em Pa.s), e n (adimensional). A Eq. (3.14) pode também ser considerada como a expressão limite para altas taxas de cisalhamento obtidas da Eq. (3.13), para $\eta_{\infty} = 0$. Da comparação das Eqs. (3.13) e (3.14), fica evidente que o expoente n no modelo power-law, Eq. (3.14), tem o mesmo significado que na equação de Carreau - Yasuda, Eq. (3.13), e que o parâmetro m da power-law, Eq. (3.14), muitas vezes referido como índice de consistência, é dado por $\eta_0 \lambda^{n-1}$ no modelo de Carreau-Yasuda, Eq. (3.13). Tomando $n = 1$ $m = \mu$ na Eq. (3.14), recupera-se o modelo de fluido Newtoniano, Eq. (2.18). Para $n < 1$ na Eq. (3.14), o fluido é dito pseudoplástico ou *shear thinning*, e, se $n > 1$, o fluido é chamado dilatante ou *shear thickening*. Alguns valores numéricos para os parâmetros m e n são encontrados na Tabela 3.1. Observa-se que, ambos os parâmetros m e n são dependentes da temperatura, com o parâmetro m decaindo rapidamente com o aumento da temperatura.

Tabela 3.1 Parâmetros *power-law* para soluções aquosas.

Solução	Temperatura (K)	m (Pa.s)	n
0,5% Hidroxietilcelulose	293	0,84	0,509
	313	0,30	0,595
	333	0,136	0,645
2,0% Hidroxietilcelulose	293	93,5	0,189
	313	59,7	0,223
	333	38,5	0,254
1,0% Óxido de Polietileno	293	0,994	0,532
	313	0,706	0,544
	333	0,486	0,599

O modelo power-law para a viscosidade não-Newtoniana $\eta(\dot{\gamma})$ definido na Eq. (3.14), é o mais conhecido e extensamente empregado empirismo em engenharia, com uma extensa gama de escoamentos tendo sido resolvidos analiticamente por este modelo. Pode-se obter uma estimativa aproximada do efeito da viscosidade não-Newtoniana através de cálculos baseados na Eq. (3.14). Entretanto, as limitações do modelo power-law não devem ser negligenciadas: (i) o

modelo não pode determinar a viscosidade para taxas de cisalhamento muito pequenas, o que, em alguns problemas, pode conduzir a erros significativos; (ii) um tempo característico e uma viscosidade característica não podem ser construídos somente empregando os parâmetros m e n , o que pode não ser adequado do ponto de vista da análise dimensional; (iii) não é possível relacionar os parâmetros m e n com o peso molecular e concentração, já que as correlações padrões são descritas em termos de η_0 e η_∞ .

Finalizando, é importante ter-se em mente que, as Eq. (3.13) e (3.14), tratam-se, apenas, de curvas empíricas ajustadas a partir de curvas experimentais da viscosidade aparente $\eta(\dot{\gamma})$.

4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Os problemas abordados são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$, sendo N o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com fronteira Γ poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Γ_g é a parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e Γ_h a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais).

Sobre o domínio fechado $\bar{\Omega}$ realiza-se uma partição C_h de elementos finitos, na forma:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in C_h} \bar{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in C_h \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, a aproximação de uma variável U por U^h , pertencente à discretização C_h , é então representada como uma expansão na forma:

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (4.3)$$

onde N_A é a função de base associada ao ponto nodal global A da discretização C_h .

Para os espaços polinomiais, adota-se a notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro,} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ um quadrilátero ou hexaedro.} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $m \geq 0$, sendo m o grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m (Ciarlet, 1978).

Sobre os espaços de funções, $L^2(\Omega)$ define o espaço de funções quadrado-integráveis sobre Ω , $L_0^2(\Omega)$ o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre Ω ,

$H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω que se tornam zero em Γ_g [Rektorys, 1975].

Por fim, (\cdot, \cdot) e $\|\cdot\|$ representam o produto interno e a norma das funções de L^2 em Ω e $(\cdot, \cdot)_K$ e $\|\cdot\|_{0,K}$ denotam o produto interno e a norma de L^2 no domínio de cada elemento K , respectivamente.

4.2 PROBLEMA FORTE

Baseado nos princípios de conservação de massa, Eq. (2.4), e momentum, Eq. (2.10), para um fluido newtoniano generalizado, Eq. (3.8), escoando em regime laminar, pode-se montar o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}
 \rho(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} &= -\nabla p + 2\eta(\dot{\gamma})\text{div}\mathbf{D} + \rho\mathbf{g} && \text{em } \Omega \\
 \text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 \mathbf{T}\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde ρ é massa específica do fluido, \mathbf{u} a velocidade na direção x , p a pressão, $\nabla \mathbf{u}$ o tensor gradiente de velocidade, \mathbf{D} a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade, \mathbf{g} a aceleração da gravidade, \mathbf{t} o vetor tensão e com o tensor tensão \mathbf{T} relacionando-se com a deformação do fluido através da expressão Eq. (3.8),

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \tau \\
 &= -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) && \text{em } \Omega
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde τ é o tensor desviador de tensão e a função viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$ dada pela equação de Carreau, Eq. (3.13) para $a = 2$,

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[1 + \left(\lambda \dot{\gamma} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \tag{4.7}$$

Introduzindo-se L_c como um comprimento de escala, a velocidade média, V_c , como uma

velocidade de escala, a viscosidade para baixas taxas de cisalhamento, η_0 , como uma viscosidade de referência, $\eta_0 V_c / L_c$ como uma escala para a tensão viscosa e para o campo de pressão uma escala com ρV_c^2 , obtém-se:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L_c} ; \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{V_c} ; p^* = \frac{p}{\rho V_c^2} ; \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\eta_0 V_c / L_c} ; \eta^*(\dot{\gamma}) = \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_0} \quad (4.8)$$

onde o sobrescrito (*) representa as formas adimensionais das grandezas mecânicas empregadas nas Eqs. (4.5)-(4.6)-(4.7). Substituindo a Eq. (4.8) na Eq. (4.5), tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\rho V_c^2}{L_c} (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* &= -\frac{\rho V_c^2}{L_c} \nabla p^* + \frac{\eta_0 V_c}{L_c^2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^* + \rho \mathbf{g} = 0 && \text{em } \Omega \\ \frac{V_c}{L_c} \operatorname{div} \mathbf{u}^* &= 0 && \text{em } \Omega \\ V_c \mathbf{u}^* &= V_c \mathbf{u}_g^* && \text{sobre } \Gamma_g \\ \eta_0 V_c \mathbf{T}^* \mathbf{n}^* &= \eta_0 V_c \mathbf{t}_h^* && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando, à Eq. (4.9), as definições dos números de Reynolds e Froude,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} &= \frac{\rho V_c L_c}{\eta_0} \\ \operatorname{Fr} &= \frac{V_c}{\sqrt{L_c |\mathbf{g}|}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

a forma adimensional da Eq. (4.5) é dada por

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \operatorname{Re}^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^* + \operatorname{Fr}^{-2} \mathbf{g} = 0 && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^* &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* && \text{sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{T}^* \mathbf{n}^* &= \mathbf{t}_h^* && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.3 O MÉTODO DE GALERKIN

O método de aproximações de elementos finitos a ser utilizado nesta dissertação, denominado método de Galerkin (também conhecido como Bubnov-Galerkin), consiste em

aproximar os espaços de dimensão infinita, utilizados na formulação fraca do problema definido pelas Eq. (4.11), por subespaços de dimensão finita apropriados. Logo, sendo P e \mathbf{V} os espaços funcionais dos campos de pressão e velocidade, respectivamente, podem-se escrever,

$$\begin{aligned} P_h \subset P & \quad (\text{isto é, se } p^h \in P_h, \text{ então } p_h \in P) \\ \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V} & \quad (\text{isto é, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h, \text{ então } \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Consequentemente, da Eq. (4.12), se $\mathbf{u}^h \in P_h$ e $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}_h$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_g \quad \text{sobre } \Gamma_g \\ \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_g \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde \mathbf{u}_g é a condição de contorno essencial (Dirichlet) do problema definido pelas Eq. (4.11).

A aproximação de elementos finitos da Eq. (4.11) é construída sobre os subespaços usuais da dinâmica dos fluidos para os campos de velocidade (\mathbf{V}_h) e pressão (P_h) (Babuška, 1973; Brezzi, 1974),

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in C_h\} \quad (4.14)$$

$$P_h = \{p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in C_h\} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{V}_h^g = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in C_h, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g\} \quad (4.16)$$

onde R_k , R_l denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k e l [Ciarlet, 1978]

A aproximação de Galerkin para o problema definido pelas Eq. (4.11) pode ser escrita por: *Achar a dupla* $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h$ *tal que:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.4 O MÉTODO DE GALERKIN/MÍNIMOS-QUADRADOS

Baseado nas definições dos subespaços de pressão e velocidade, eqs. (4.14)-(4.16), respectivamente, podemos escrever uma formulação de Galerkin/Mínimos-Quadrados para o problema definido pela Eq. (4.11) como segue: *Achar o par* $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h$, *tal que:*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\Omega_K} \left((\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h + \nabla p^h - 2\eta(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \right) \cdot \\ & \quad \cdot \tau(\operatorname{Re}_K) \left((\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h - \nabla q^h + 2\eta(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) \right) d\Omega \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_h \times P_h \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde o parâmetro de estabilidade τ , avaliado a nível de elemento, é computado por:

$$\tau(\operatorname{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\operatorname{Re}_K) \quad (4.19)$$

$$\xi(\operatorname{Re}_K) = \begin{cases} \operatorname{Re}_K, & 0 \leq \operatorname{Re}_K < 1 \\ 1, & \operatorname{Re}_K \geq 1 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\operatorname{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\mu} \quad (4.21)$$

com $|\cdot|_p$ denotando a norma p do \mathfrak{R}^N

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |u_i|, & p = \infty \end{cases} \quad (4.22)$$

e o parâmetro m_k proveniente da análise de erro da formulação GLS introduzida em Franca and Frey (1992).

Observações:

1. Fazendo τ igual a zero em qualquer das formulações GLS definidas pelas Eqs. (4.18)-(4.21), recupera-se a aproximação clássica de Galerkin, definida pela Eq. (4.17).
2. A expressão usual do número de Reynolds de malha (Johnson, 1987) foi modificada com a inclusão do parâmetro m_k na Eq. (4.21), de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $Re_K > 1$ e as difusivo-dominadas por $Re_K < 1$, independente do elemento considerado (Franca and Frey, 1992).
3. As discretizações das Eqs.(4.18)-(4.21) são obtidas expandindo as aproximações de elementos finitos dos pares (\mathbf{u}^h, p^h) e (\mathbf{v}^h, q^h) como uma combinação das suas respectivas funções de forma e graus de liberdade, gerando, dessa maneira, um sistema de equações discretas não lineares. Este sistema é solucionado por um método de quase Newton incremental (), com um método de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva da formulação GLS definida nas Eqs.(4.18)-(4.21). Como estimativa inicial, o algoritmo emprega campos nulos de velocidade e pressão (Franceschini and Frey, 2003b).

4.5 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO

Deseja-se definir as funções de base de tal maneira que, ao se refinar a malha de elementos finitos, a solução da aproximação GLS definida nas Eqs. (4.18)-(4.21) convirja para a solução exata do problema forte estabelecido na Eq. (4.5).

4.5.1 Elemento *Quadrangular Bilinear*

O elemento quadrangular bilinear – notado por Q1 - é atribuído, segundo Hughes (1987), a Taig (1961). O domínio de um elemento quadrilátero Q1 é definido pela localização de seus quatro pontos nodais \mathbf{x}_a^K , $a = 1, \dots, 4$ no plano \mathfrak{R}^2 . Assume-se que os pontos nodais são numerados no sentido anti-horário (ver Figura 4.1). Através de uma transformação linear, pode-se relacionar o elemento global, cujas coordenadas de um ponto são $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$, com o elemento do ponto de vista local, um quadrilátero bi-unitário. O domínio do quadrilátero bi-unitário é denominado *parent domain* e é representado pelas coordenadas locais

$$\xi = \{\xi, \eta\} \quad (4.23)$$

em Ω^K mapeando na forma

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{1a}^K \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{2a}^K \end{aligned} \quad (4.24)$$

ξ e η são denominadas *coordenadas naturais*. Vetorialmente, as fórmulas (4.23) e (4.24) são escritas como

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi) \mathbf{x}_a^K \quad (4.25)$$

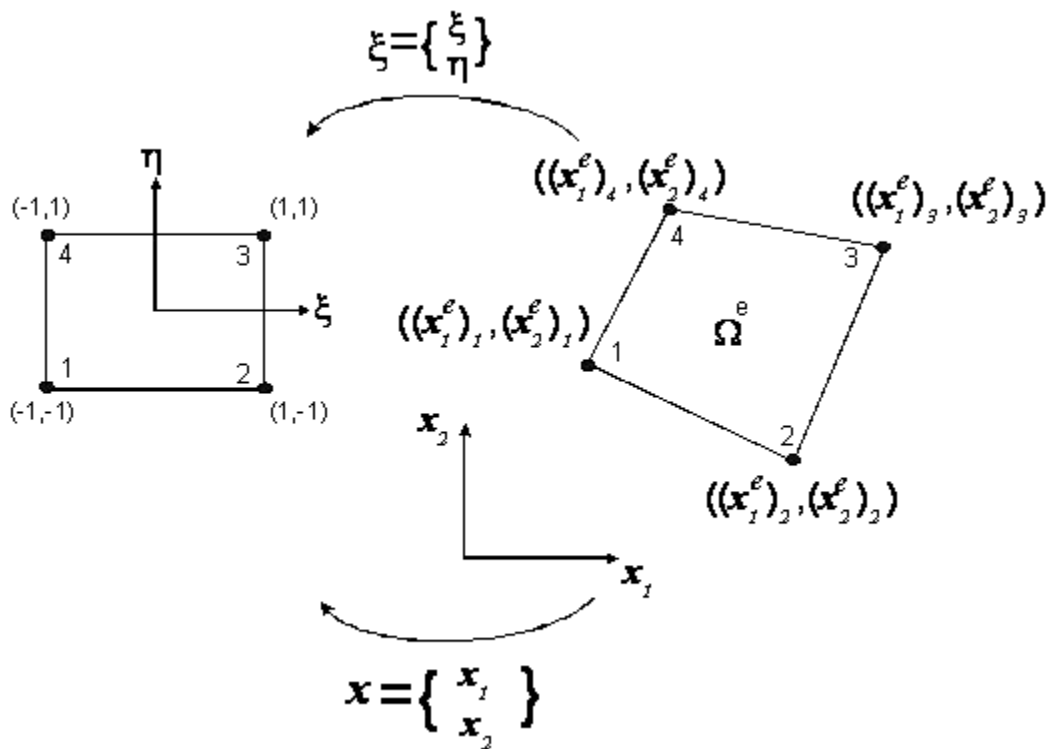


Figura 4.1 Domínio de elemento quadrilátero bilinear e ordenação nodal local.

As funções de base $N_a(\xi)$ empregadas na Eq. (4.25) podem ser determinadas assumindo, inicialmente, as expansões bilineares

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \\ x_2(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde α e β são coeficientes incógnitos a serem determinados. Em seguida, impondo que as eqs. (4.26) satisfaçam, respectivamente, as condições

$$\begin{aligned} x_1(\xi_a, \eta_a) &= x_{1a}^K \\ x_2(\xi_a, \eta_a) &= x_{2a}^K \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde ξ_a e η_a são definidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Coordenadas locais no espaço ξ

A	1	2	3	4
ξ_a	-1	+1	-1	+1
η_a	-1	-1	+1	+1

As eqs. (4.26)-(4.27) levam a um problema matricial para a determinação dos α e β , na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{11}^K \\ x_{12}^K \\ x_{13}^K \\ x_{14}^K \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{21}^K \\ x_{22}^K \\ x_{23}^K \\ x_{24}^K \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Resolvendo-se os sistemas (4.28) e (4.29) para os coeficientes α e β , respectivamente, obtém-se a expressão da função de forma bilinear $N_a(\xi)$:

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (4.30)$$

Com os valores de ξ_a e η_a dados pela Tab. 4.1 e visualizadas na Fig. 4.2.

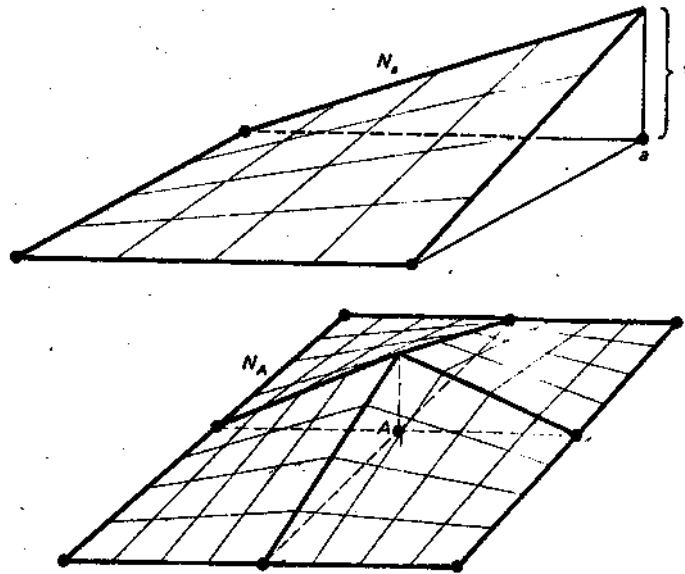


Figura 4.2 *Shape functions* local (N_s) e global (N_A) do elemento quadrilátero bilinear.

Observações:

1. Esta forma é igual ao produto das *shape functions* lineares unidimensionais nas direções ξ e η , o que caracteriza o elemento quadrangular bilinear Q1, como um elemento Lagrangeano de baixa ordem.
2. Elemento quadrangular bilinear é dito um elemento isoparamétrico, isto é, as *shape functions* que definem o mapeamento global definido pelas (4.25) são as mesmas funções de base utilizadas na aproximação das variáveis primais da formulação GLS definida pelas Eqs. (4.18)-(4.21). A importância dos elementos isoparamétricos é que, para estes elementos, as condições básicas de convergência do método de elementos finitos são virtualmente satisfeitas (Hughes, 1987), garantindo, dessa maneira, que a solução aproximada da formulação GLS definida pelas Eqs. (4.18)-(4.21) irá convergir para a solução exata do problema forte definido pela Eq. (4.11), quando o comprimento de malha h tender para zero. Além disso, do ponto de vista computacional, os elementos isoparamétricos são de implementação relativamente simples e concisa.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo será apresentada a aplicação do método de elementos finitos, com aproximações de Galerkin/mínimos-quadrados (GLS) das equações de Navier-Stokes (Eqs. (4.18)-(4.21)), para o escoamento isocórico de um fluido Newtoniano generalizado (Eq. (3.8)), empregando a função viscosidade de Carreau (Eq. (3.13), para $a = 2$), através de uma contração abrupta axissimétrica. Todos os resultados computacionais foram obtidos utilizando o código de elementos finitos GNLFEM, em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Para o processamento e pós-processamento gráfico dos resultados, utilizou-se um processador Intel Pentium IV 3.2GHz, com 4Gb de RAM.

5.1 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

A fim de validar a implementação computacional da formulação GLS definida nas Eqs. (4.18)-(4.21), foram realizadas as simulações do *benchmark* da cavidade forçada. Utilizando um sistema de coordenadas cartesianas retangulares com origem localizada no canto esquerdo inferior de uma cavidade biunitária (Fig. 5.1), foram impostas as condições de contorno em velocidade sendo impermeabilidade e condição de não deslizamento em suas paredes, com exceção do plano superior, na qual uma velocidade horizontal u_0 foi prescrita. O domínio computacional foi discretizado por 130x130 elementos bilineares (Q1/Q1), gerando um total de 17161 pontos nodais. O número de Reynolds foi investigado para valores de um, a fim de simular escoamento lento e sem inércia, 400 e 1000.

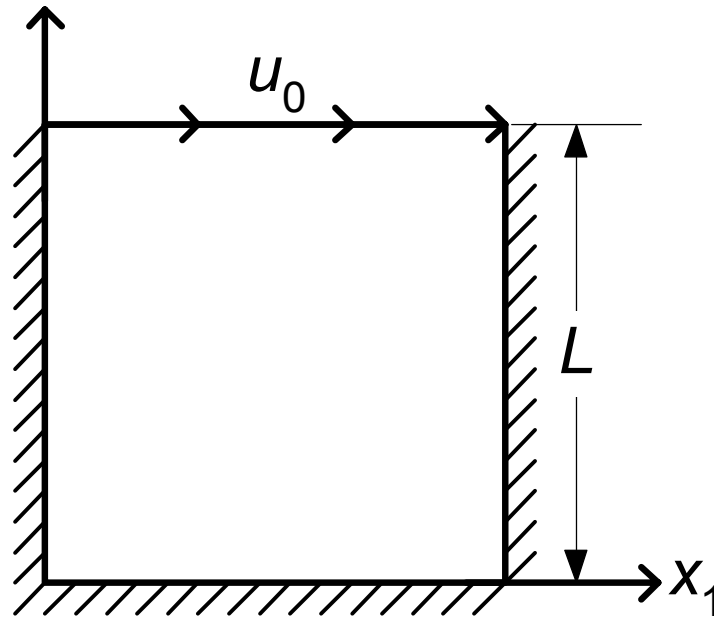


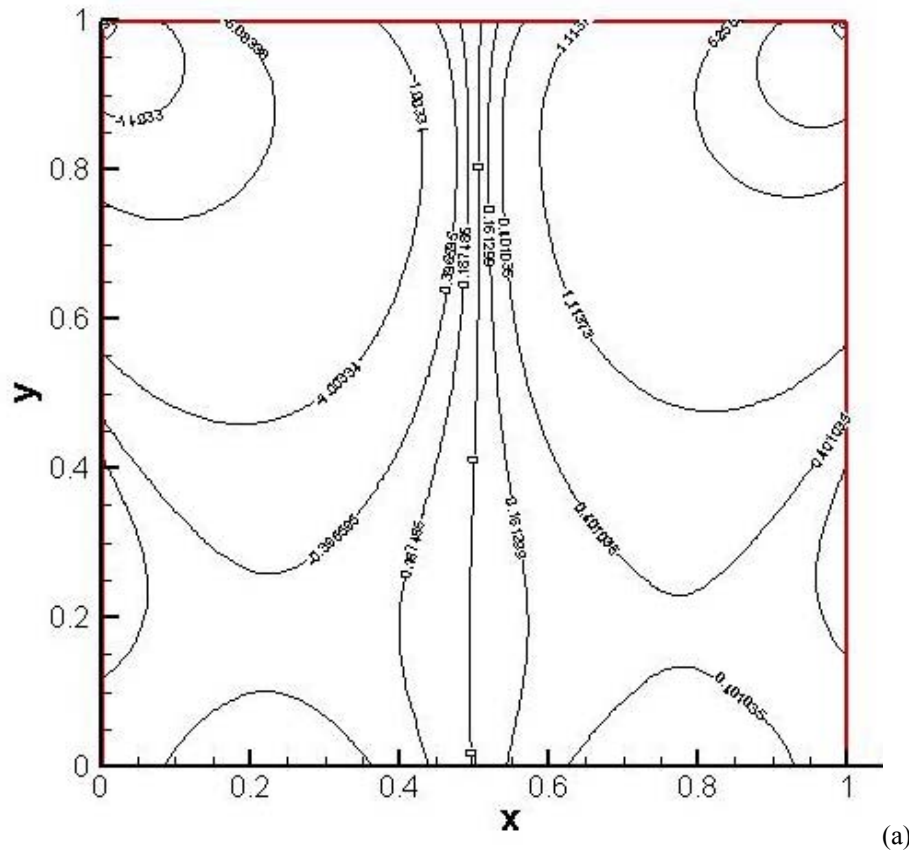
Figura 5.1: Descrição do problema da cavidade

Nas Figs. 5.2 e 5.3 são apresentadas, respectivamente, as isoregiões do campo de pressão e as linhas de corrente do campo de velocidade obtidas pela aproximação GLS (Eqs. (4.18)-(4.21)) do problema forte definido pelas Eq. (4.11). De modo geral, tanto as isobáricas como as linhas de corrente obtidas são bastante suaves, indicando que a formulação GLS (Eqs. (4.18)-(4.21)), estabilizou satisfatoriamente as oscilações espúrias inerentes ao método de Galerkin em escoamentos convectivos dominados. (escoamentos sujeitos a $Re = 400$ (Figs. 5.2(b) e 5.3(b)) e $Re = 1000$ (Figs. 5.2(c) e 5.3(c)).

Na Fig. 5.3, observa-se que, à medida que o número de Reynolds aumenta, a recirculação principal do escoamento tende a se deslocar para o centro da cavidade (Fig. 5.3(b) e 5.3(c)), não mais ficando restrita às proximidades da parede superior da cavidade (Fig. 5.3(a)). Isto se deve ao fato que, para as situações com inércia (Fig. 5.3(b) e 5.3(c)), a região inferior da cavidade também irá recircular, centralizando, assim, a recirculação do escoamento principal. Este efeito também pode ser observado nas isoregiões do campo de pressão, Fig. 5.2. Nestas figuras, o campo de pressão perde sua simetria inicial obtida para a situação sem inércia (Fig. 5.2(a)), criando, à medida que o número de Reynolds aumenta uma depressão no campo de pressão associada à recirculação principal do fluido, a qual também se desloca para a região central da cavidade (Fig. 5.2(b) e 5.2(c)).

Ainda nas Figs. 5.3, pode se observar que, o aumento do número de Reynolds também cria e desenvolve recirculações secundárias no escoamento junto às quinas inferiores da cavidade

(Figs. 5.3(b) e 5.3(c)), originadas devido ao descolamento do fluido nos cantos vivos da parede inferior da cavidade.



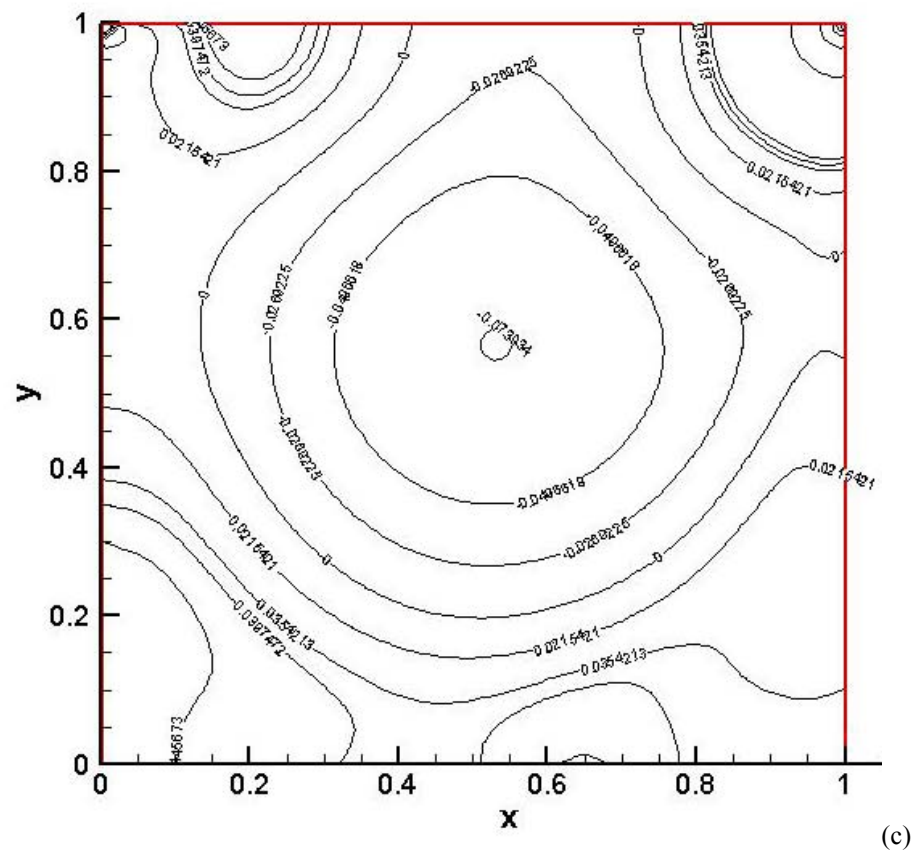
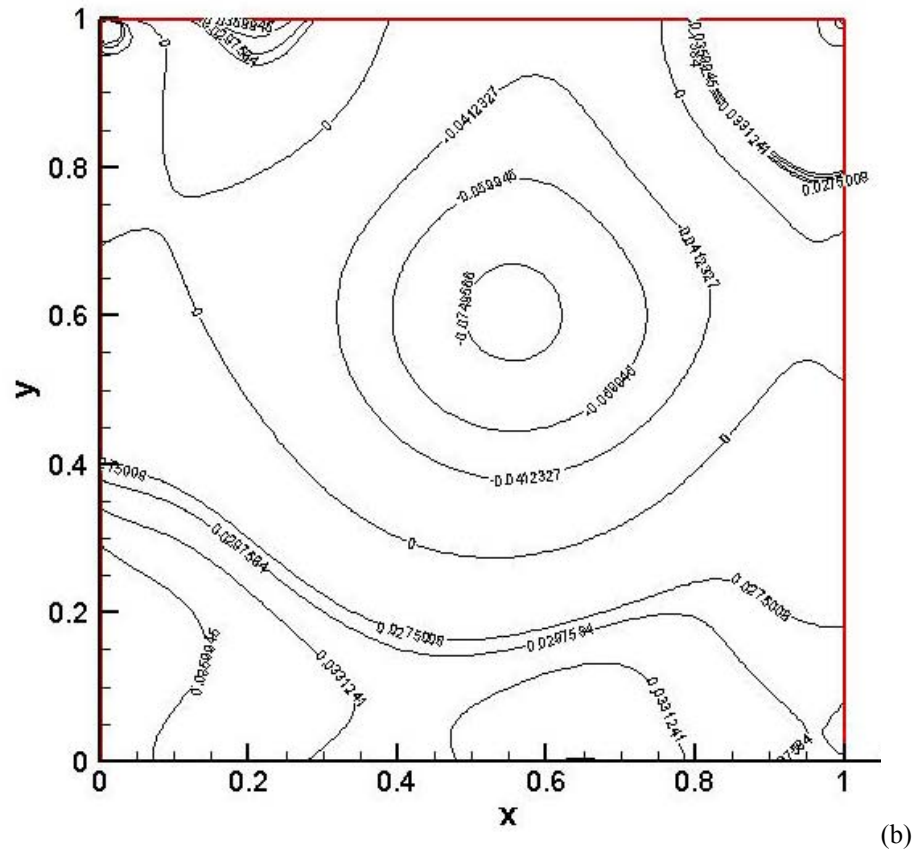
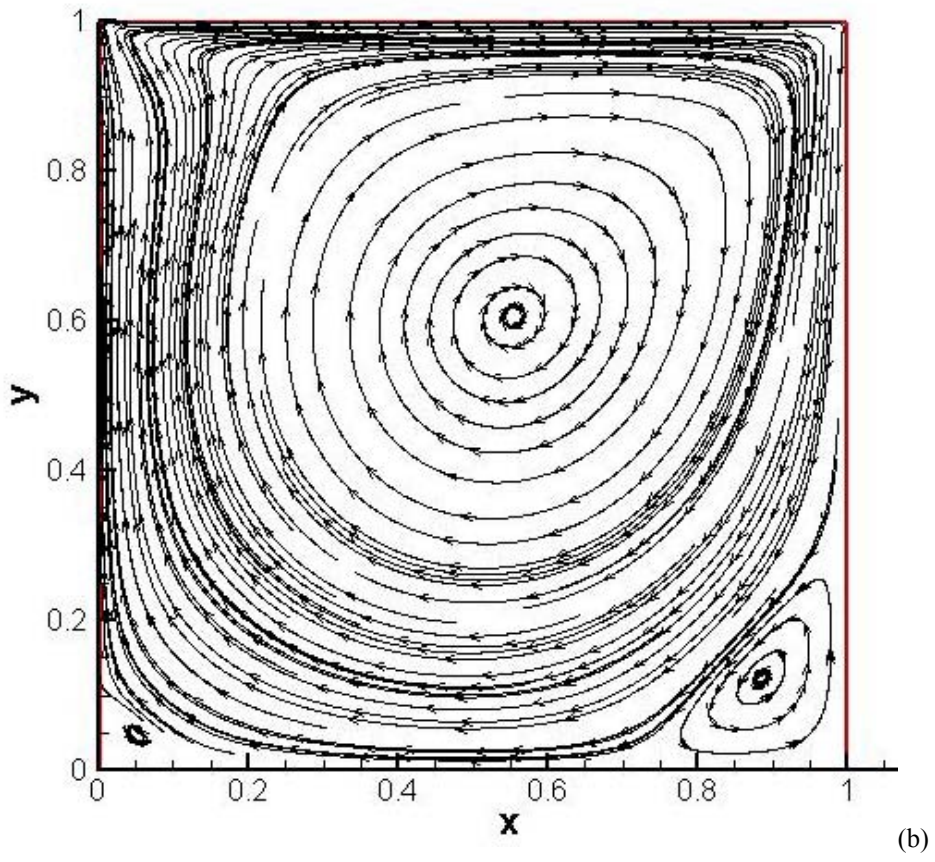
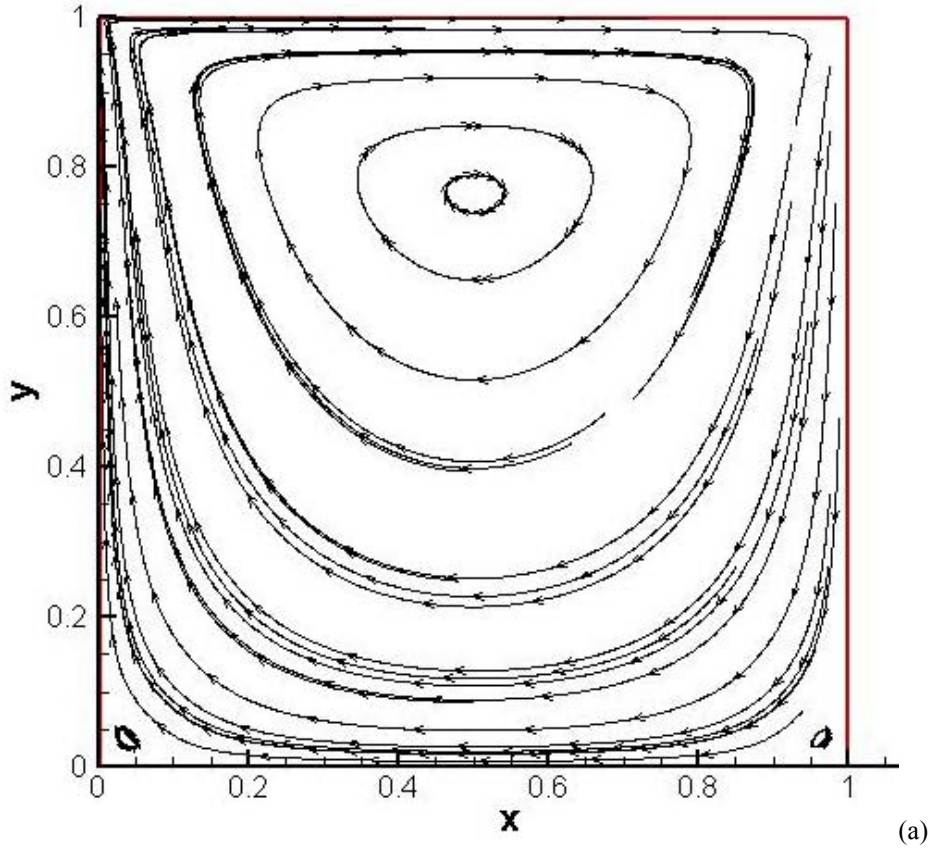


Figura 5.2: Isobáricas para 130×130 Q1/Q1 (17161 nós): (a) $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$.



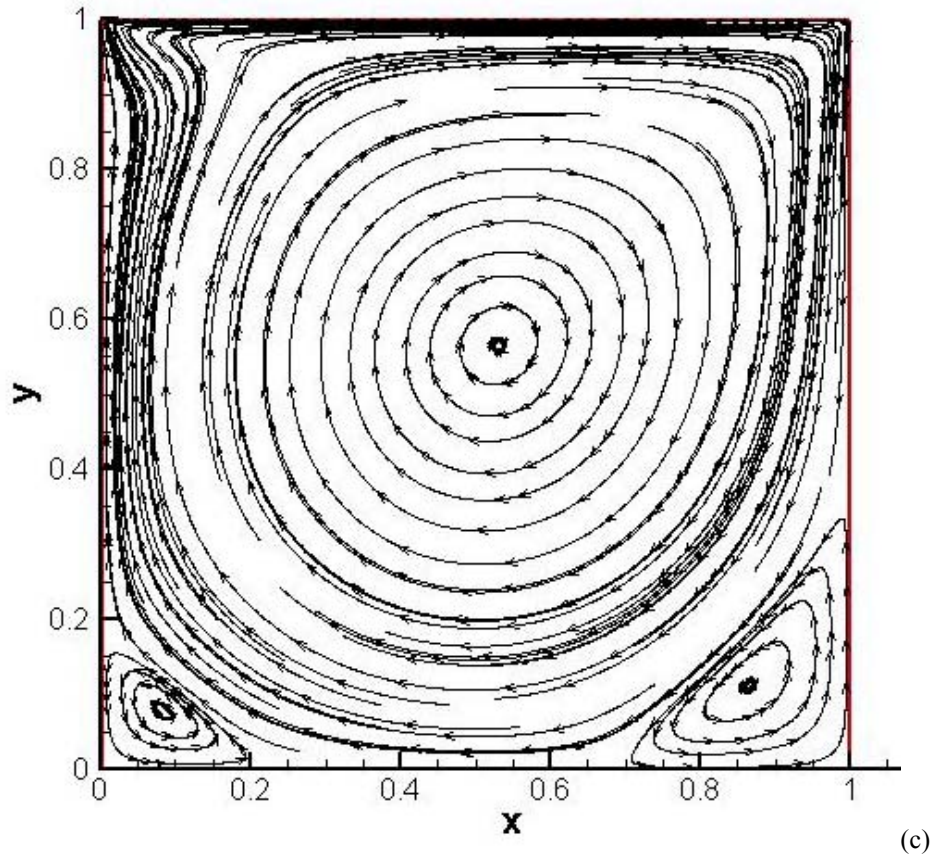
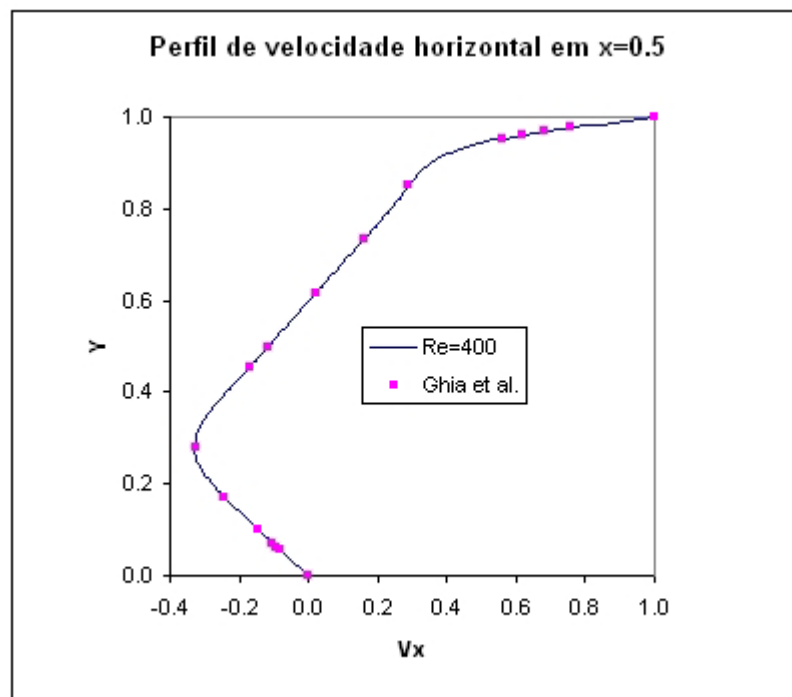
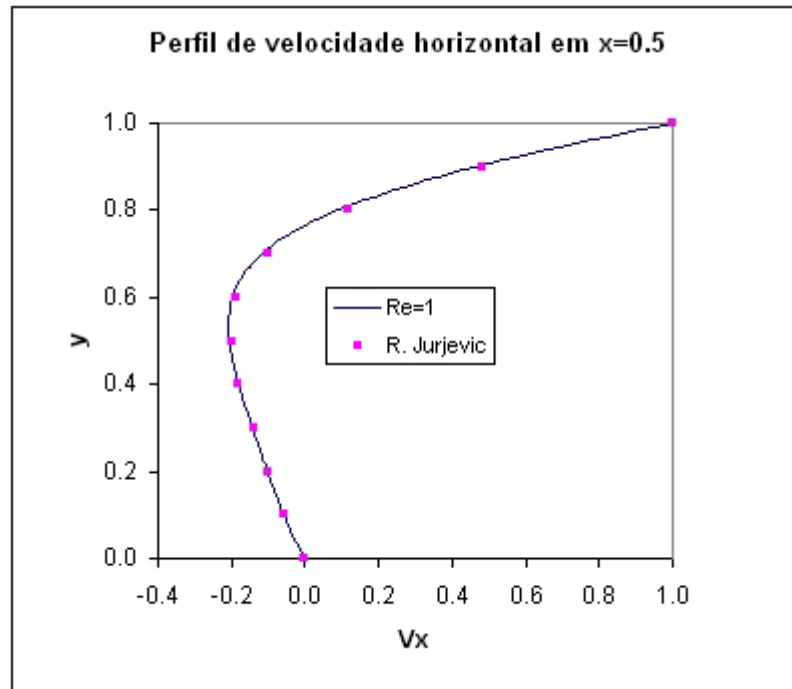


Figura 5.3: Linhas de corrente para 130x130 Q1/Q1 (17161 nós): (a) $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$.

Nas Figs. 5.4 e 5.5, os resultados obtidos com a formulação GLS (Eqs. (4.18)-(4.21)) são comparados com os resultados de Guia et al. (1982) – para as situações com inércia, a saber, $Re = 400$ e $Re = 1000$ – e Jurjevic. (1999) – para a situação com inércia desprezível, $Re = 1$. Tanto o perfil de velocidade horizontal em $x = 0,5$ (Figs. 5.4(a), 5.4(b) e 5.4(c)), como o perfil de velocidade vertical em $y = 0,5$ (Figs. 5.5(a), 5.5(b) e 5.5(c)), apresentaram ótima concordância para os três valores do número de Reynolds investigados, $Re = 1$, $Re = 400$ e $Re = 1000$.



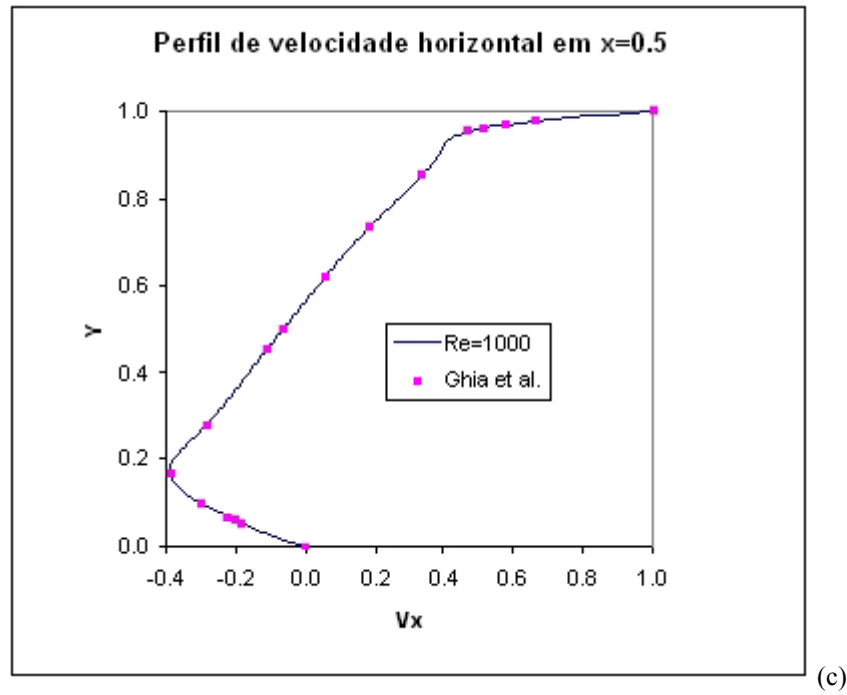
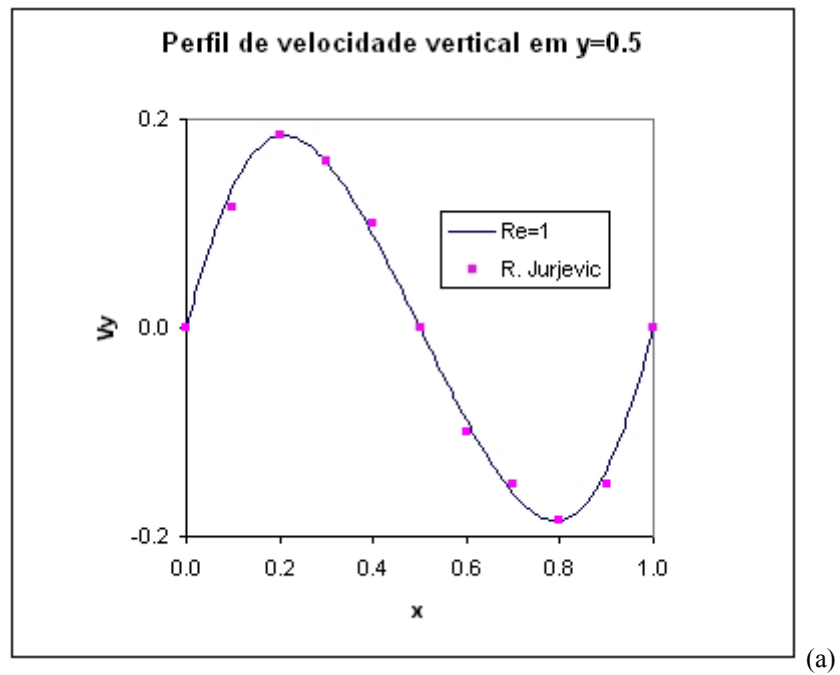


Figura 5.4: Perfil de velocidade horizontal em $x = 0,5$ para 130×130 Q1/Q1 (17161 nós):
 $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$.



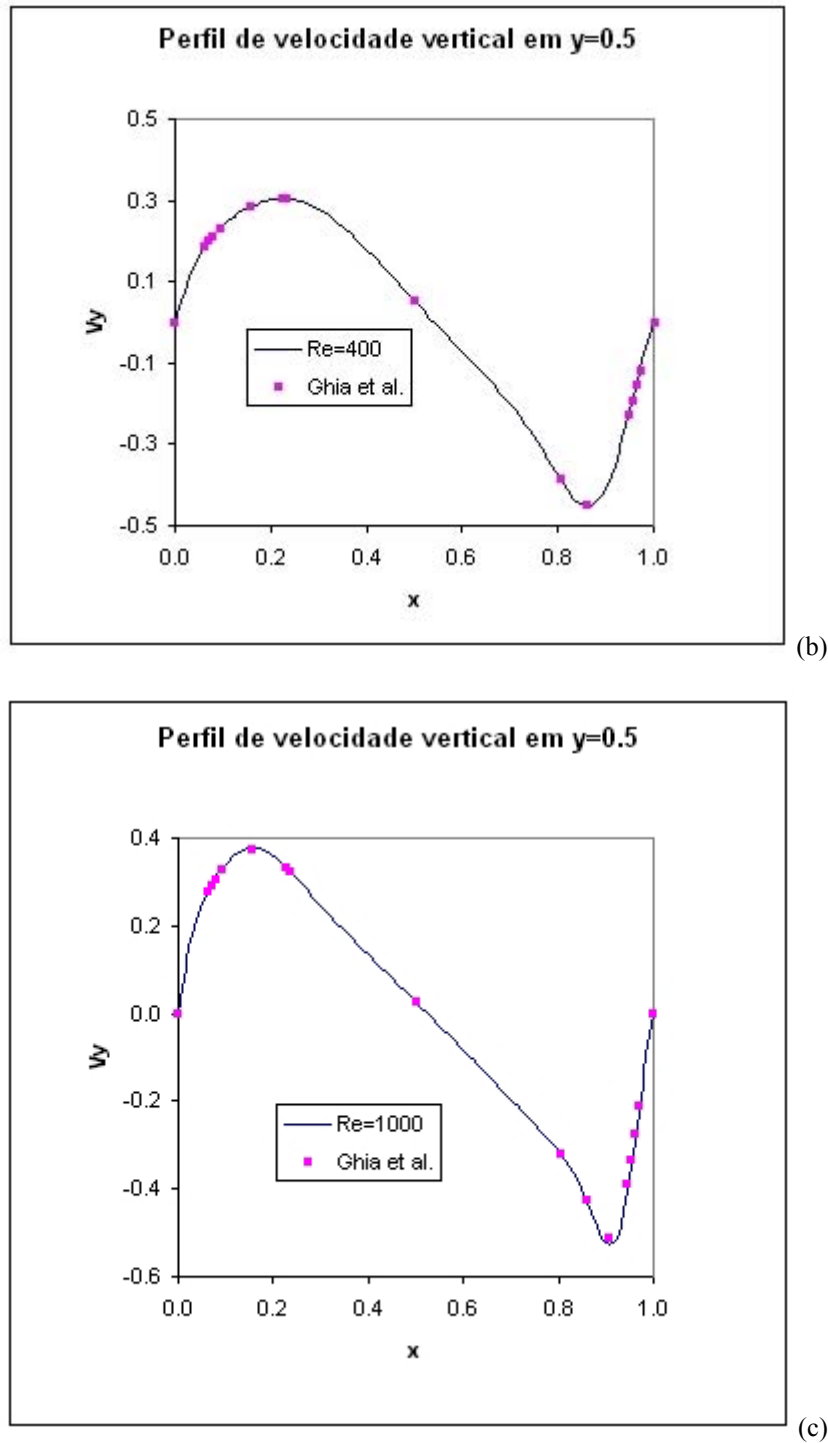


Figura 5.5: Perfil de velocidade vertical em $y = 0,5$ para 130×130 Q1/Q1 (17161 nós): (a) $Re = 1$, (b) $Re = 400$ e (c) $Re = 1000$.

5.2 ESCOAMENTO DE CARREAU ATRAVÉS DE UMA CONTRAÇÃO AXISSIMÉTRICA

Nesta seção, será realizada a aproximação GLS (Eq. (4.18)-(4.21)) do escoamento de fluido de Carreau (Eq. (3.13), para $a = 2$) através de uma contração abrupta axissimétrica,

formada pela junção de um tubo de raio, R_1 , com um tubo de menor raio, R_2 , a qual é matematicamente descrita pela relação de aspecto, $\beta \equiv R_1/R_2$, e pelos comprimentos do tubo a montante, L_1 , e a jusante, L_2 , do plano de contração.

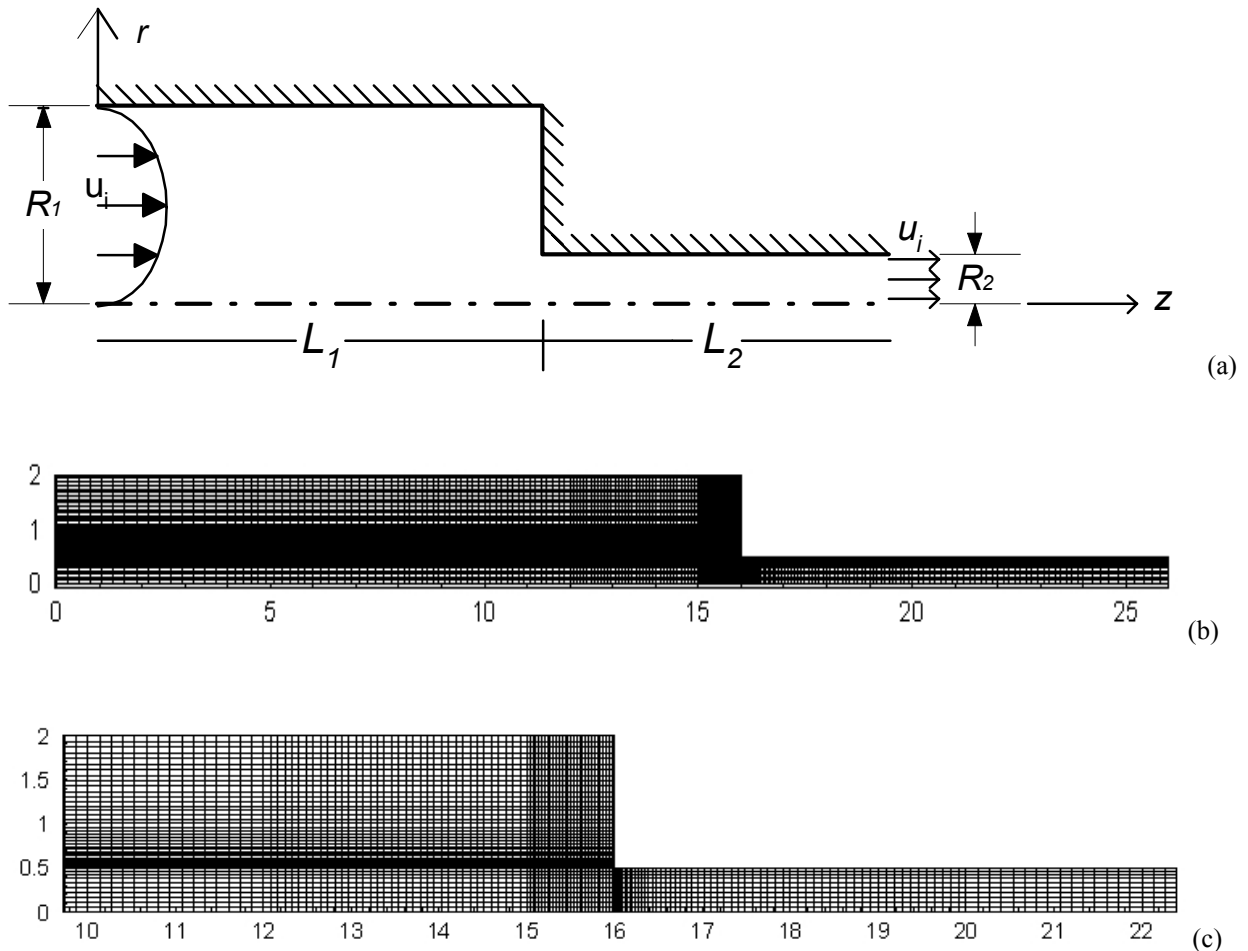


Figura 5.6: Escoamento de Carreau através de uma contração axissimétrica abrupta: (a) descrição do problema, (b) malha refinada com 7154 elementos bilineares (Q1/Q1) e (c) detalhe da malha refinada na região da contração.

O escoamento através da contração ilustrada na Fig. 5.6(a) é descrito pelo problema de valor contorno definido pela Eq. (4.9), nas quais o comprimento característico L_c será igual ao raio R_2 , a velocidade característica V_c igual à velocidade média no tubo menor V_2 , a viscosidade de referência igual à viscosidade para baixa taxa de cisalhamento η_0 . O número de Reynolds é definido por

$$\text{Re} = \frac{2R_2\rho V_2}{\eta_0} \quad (5.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido. A razão de aspecto da contração fixada em $\beta = 4$.

O sistema de coordenadas adotado é o sistema de coordenadas cilíndricas polares explorando a simetria em relação à coordenada angular θ , conforme mostra a Fig. 5.6(a). Como condições de contorno, a velocidade é especificada como zero através das paredes dos tubos maior e menor da contração e a linha de centro é designada como um eixo de simetria. O campo de velocidades na entrada do tubo grande é ajustado para corresponder a um escoamento totalmente desenvolvido. Na saída do tubo menor ($z = L_2$), é imposta tração nula, isto é, a velocidade é suposta ser independente da coordenada axial z . O nível de referência para pressão é fixado como $p_{ref} = p(r, z) = p(0, L_2) = 0$ Pa.

O fluido é construído de modo a ser um fluido Newtoniano generalizado (GNL), com o tensor tensão dado pela função viscosidade de Carreau, Eq. (3.13), para o parâmetro $a = 2$ e a viscosidade para altas taxas de cisalhamento η_∞ , sendo nula, Definindo o número de Carreau como:

$$Cu = \frac{\lambda V_2}{R_2} \quad (5.2)$$

com o parâmetro λ definido como tempo característico, igual à recíproca do valor da taxa de cisalhamento na qual inicia a pseudoplasticidade (ou seja, demarca o início da região *power-law*), a Eq. (3.13) reduz-se, então, a

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left[1 + (Cu\dot{\gamma})^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (5.3)$$

Para baixas taxas de cisalhamento, isto é, para $Cu\dot{\gamma} \ll 1$, a Eq. (5.3) prediz uma viscosidade constante η_0 , na forma dimensional, e, para altas taxas de cisalhamento, para $Cu\dot{\gamma} \gg 1$, o modelo prevê o comportamento *power-law* com a inclinação $n-1$.

Após um processo de refinamento de malha, o qual objetivou testar a independência de malha dos resultados obtidos, o domínio computacional foi finalmente discretizado por uma combinação de 7154 elementos bilineares (Q1/Q1). O número de Reynolds (Eq. (5.1)) foi investigado para valores de 2 – a fim de simular escoamento com inércia desprezível, em

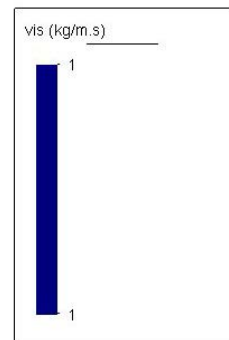
presença dos efeitos viscosos – a 100 e o número de Carreau (Eq. (5.2)) foi investigado de 0 a 100.

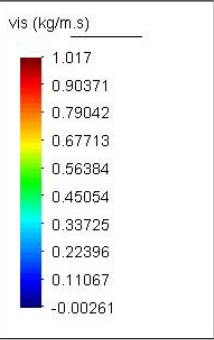
5.2.1 Análise Global: Distribuições de Viscosidade, Pressão e Velocidade

Nas Figs. 5.7 são apresentadas, as isoregiões da função viscosidade de Carreau - para número de Reynolds, $Re = 2$, coeficiente *power-law*, $n = 0,2$ e número de Carreau variando de $Cu = 0-100$ (Fig. 5.7(a)-Fig. 5.7(f), respectivamente) - obtidas pela aproximação GLS (Eq. (4.18)-(4.21)) do problema forte definido pelas Eqs. (4.11). Exceto na Fig. 5.7(a) – a qual corresponde a um fluido Newtoniano com viscosidade constante, pois $Cu = 0$, em todas as outras figuras o efeito pseudoplástico se faz presente, Observa-se que, a medida que o número de Carreau aumenta, o efeito pseudoplástico se torna mais drástico, como ilustrada a Fig. 5.7(f), para $Cu = 100$. Isto se deve ao fato do parâmetro λ ser a recíproca do valor para a taxa de cisalhamento na qual inicia a região *power-law* da viscosidade do fluido. Logo, o aumento contínuo do número Cu faz com que regiões de taxas de cisalhamento mais baixas iniciem o processo de pseudoplasticidade. Inicialmente, o efeito pseudoplástico fica restrito a regiões de altas taxas de cisalhamento, como as vizinhanças das paredes do tubo de menor diâmetro (Fig, 5.7(b)), para, em seguida, se estender também a regiões de taxas de cisalhamento mais baixas, como as regiões do duto maior (Fig, 5.7(c)-Fig. 5.7(f)).

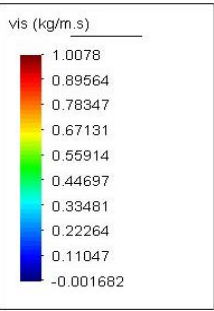


(a)

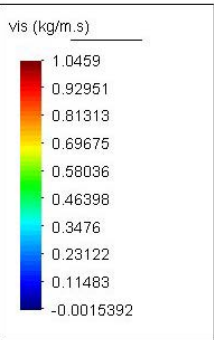
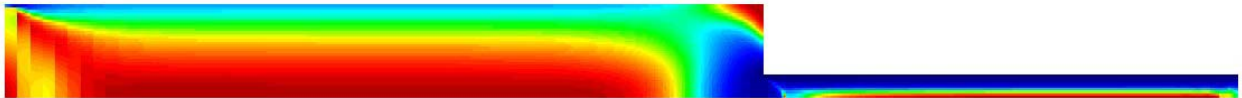




(b)



(c)



(d)

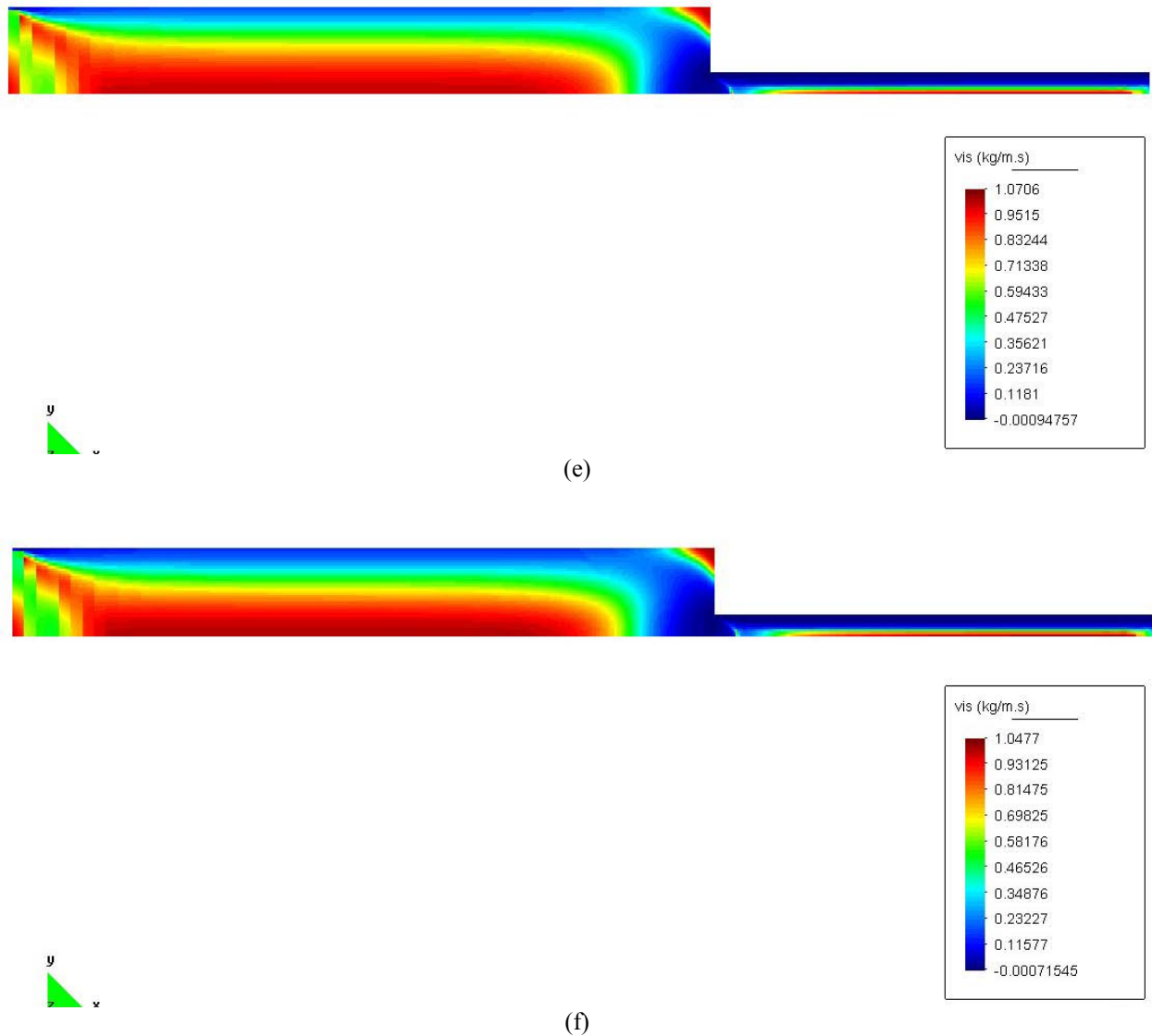
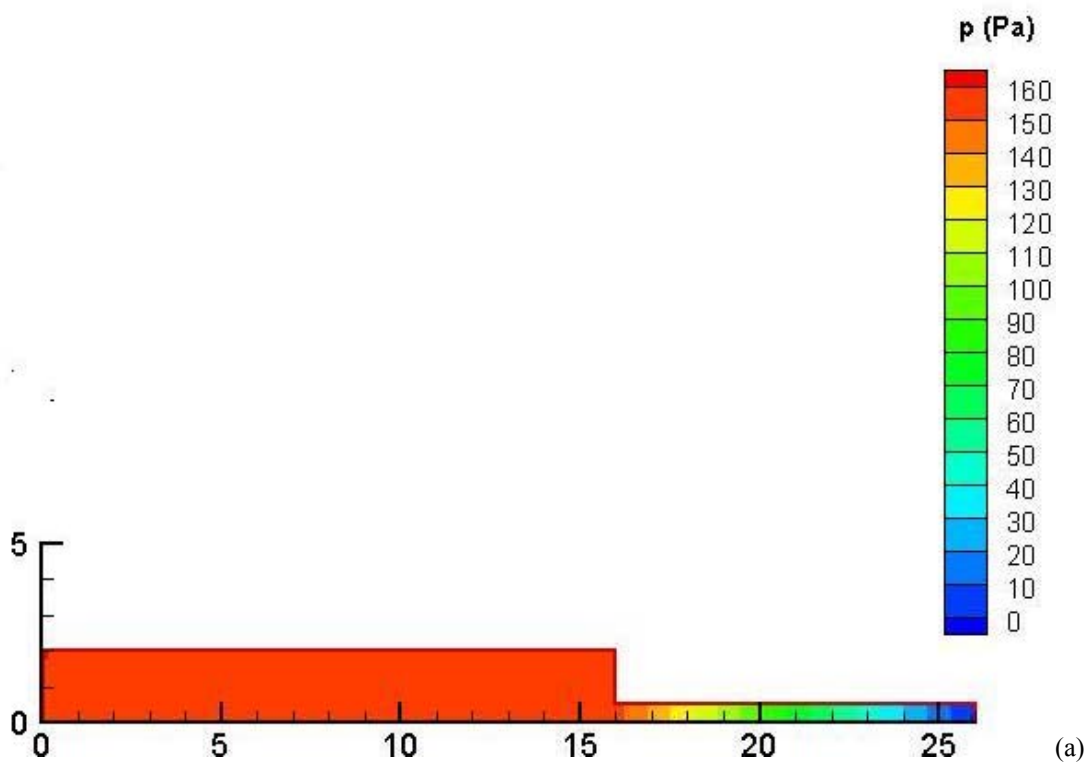
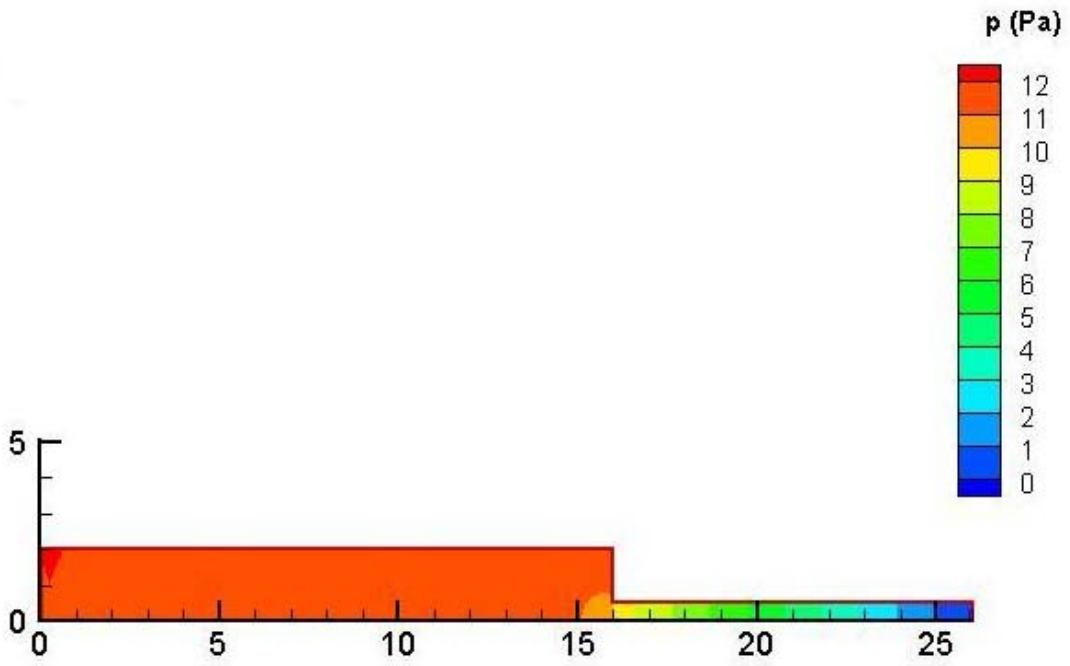


Figura 5.7: Isoregiões da função viscosidade de Carreau, para $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$.

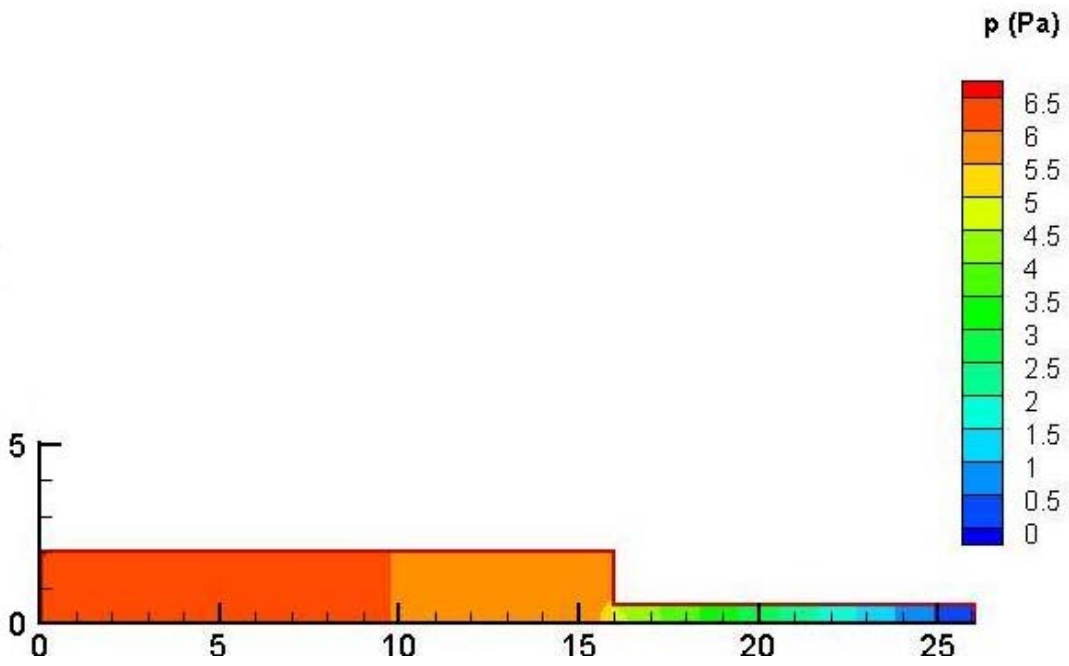
Nas Figs. 5.8 são apresentadas, as isoregiões do campo de pressão, para número de Reynolds, $Re = 2$, coeficiente *power-law*, $n = 0.2$, e número de Carreau variando de $Cu = 0-100$ (Fig. 5.8(a)-Fig. 5.8(f), respectivamente). Com uma observação global das figuras, constata-se inicialmente que, à medida que o número de Carreau aumenta, a queda de pressão ao longo da contração diminui monotonicamente (ver Fig. 5.8(a)-5.8(f)) - com a maior discrepância dos valores de Δp verificada na transição do caso Newtoniano, $Cu = 0$ (Fig. 5.8(a)), e o início da pseudoplasticidade, $Cu=10$ (Fig.5.8(b)). Isto é devido à queda progressiva da viscosidade do fluido observada nas Fig. 5.7(a)-5.7(f), a qual diminui a resistência ao escoamento e, conseqüentemente, sua perda de carga, à medida que Cu aumenta. Esta constatação fica evidente

da observação local de cada uma das figuras. Enquanto, na situação Newtoniana ($Cu = 0$) a queda de pressão no duto menor é tão severa que praticamente mascara o Δp no duto maior (Fig. 5.8(a)), a queda da pressão da situação mais pseudoplástica, $Cu=100$ (Fig. 5.8(f)), apresenta um Δp mais homogêneo ao longo da contração, devido a forte diminuição experimentada pela viscosidade do fluido, tanto no duto maior como no duto menor. Finalmente, pode-se observar ainda que os comprimentos dos dutos maior e menor foram suficientes para desenvolver hidrodinamicamente o escoamento, visto as isobáricas de todas as figuras mostrarem-se perpendiculares em relação à linha de simetria do escoamento, à exceção da vizinhança da contração.

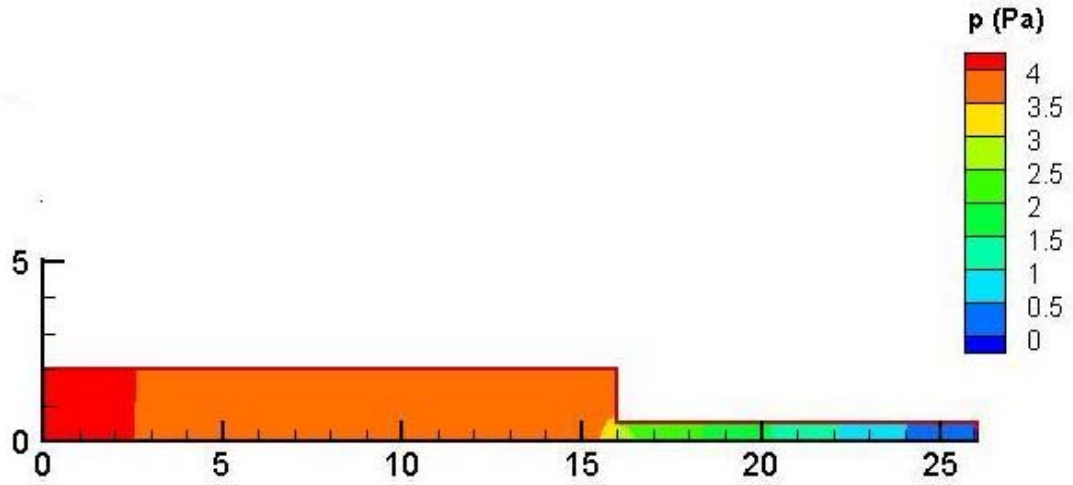




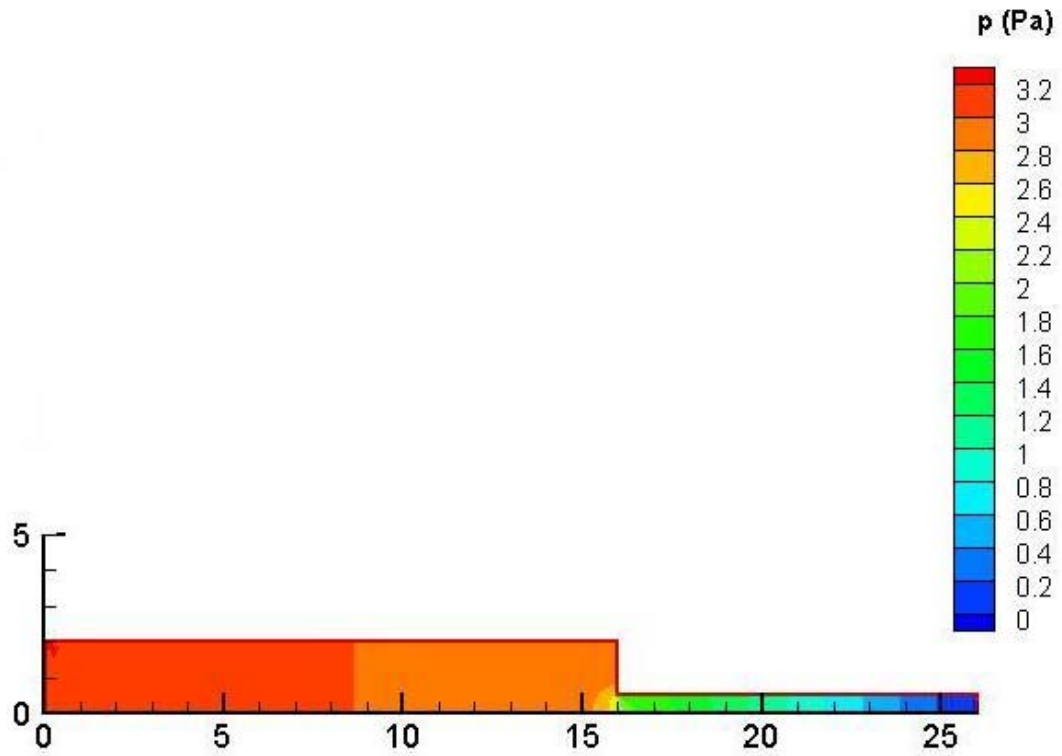
(b)



(c)



(d)



(e)

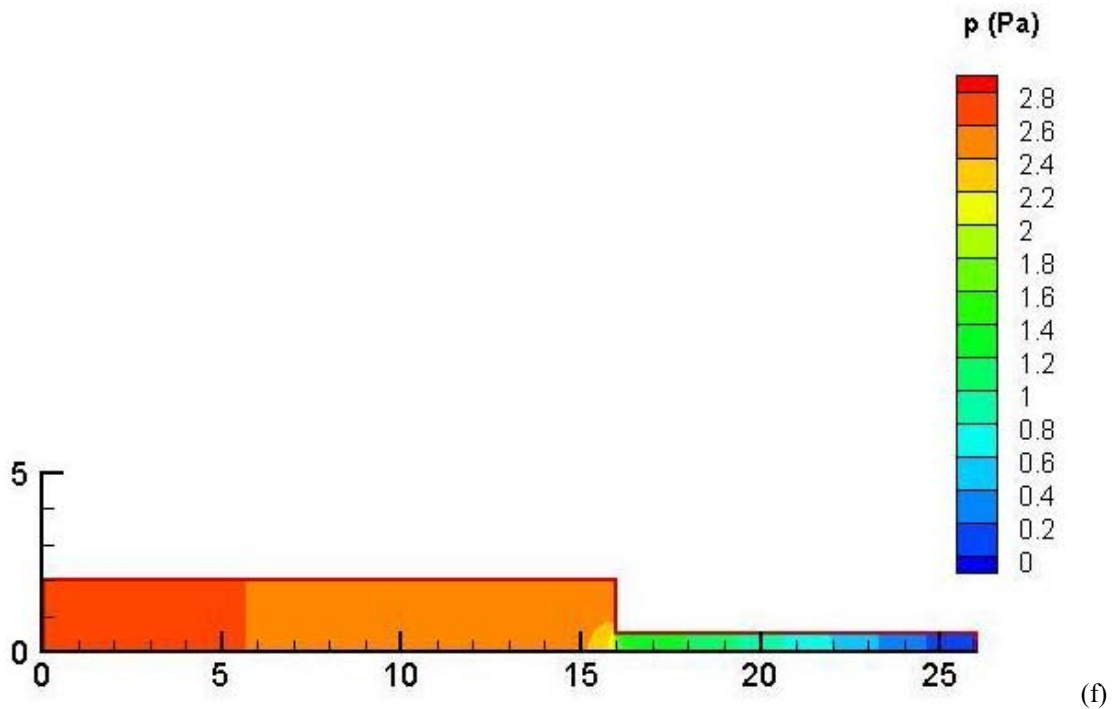
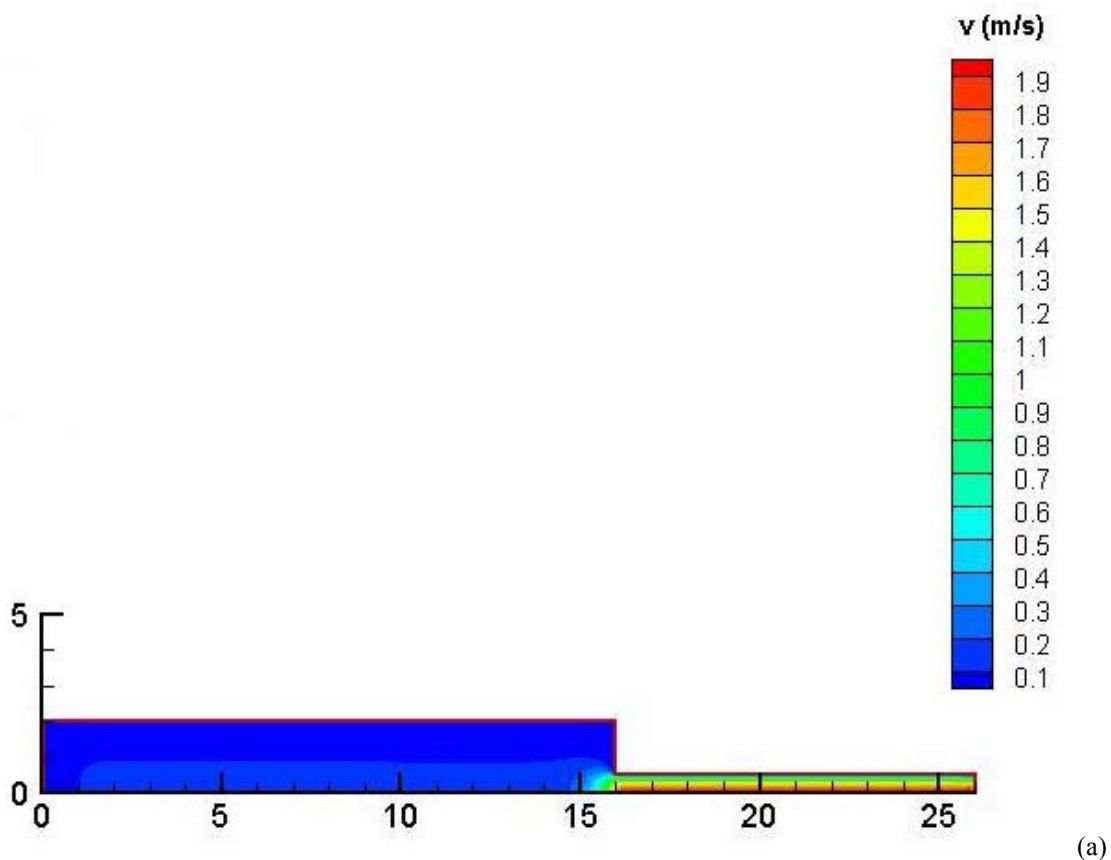


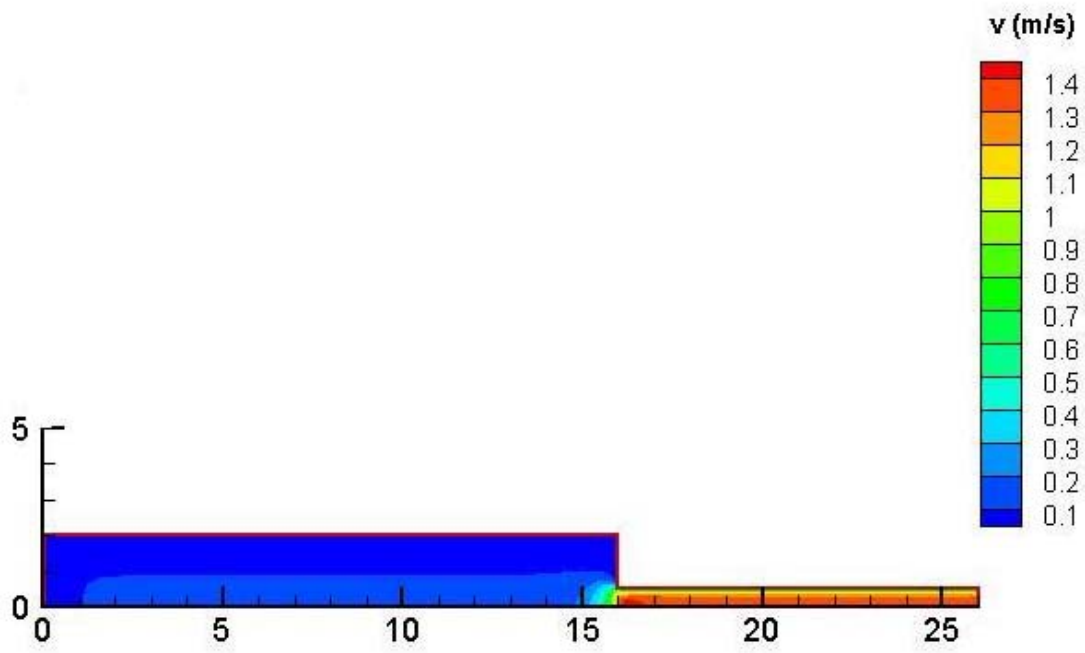
Figura 5.8: Isoregiões do campo de pressão para $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1:

(a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$.

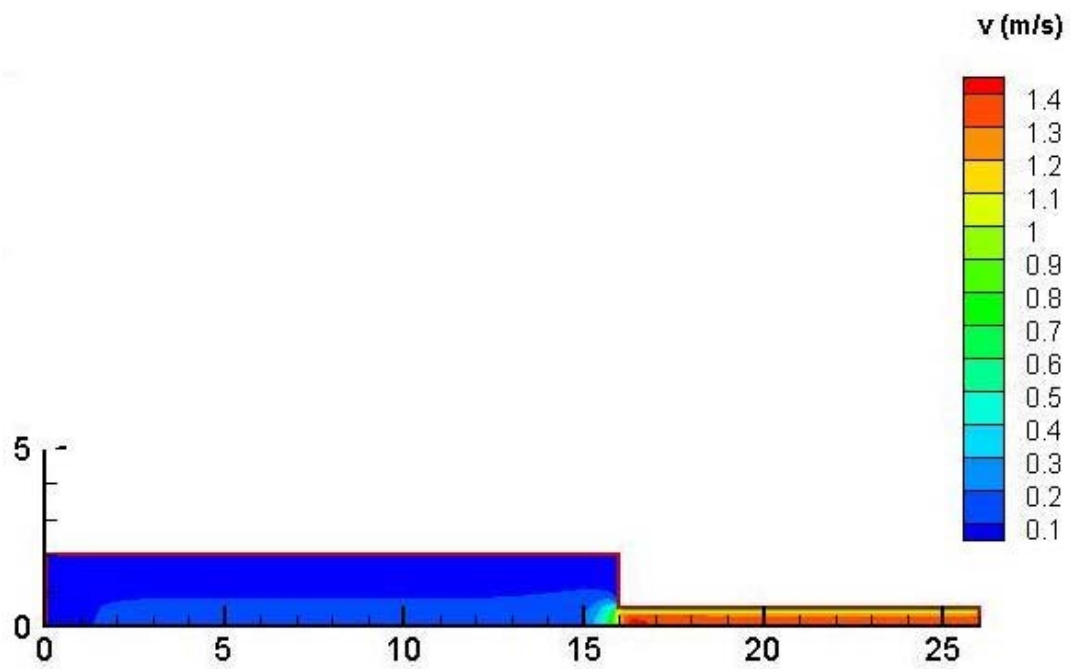
Nas Figs. 5.9 são apresentadas as isoregiões do módulo do vetor velocidade e, nas Figs. 5.10, os detalhes das isoregiões do módulo da velocidade e vetores velocidade a jusante da contração. Em todas as figuras, o número de Reynolds foi tomado igual a $Re = 2$, o coeficiente *power-law*, $n = 0,2$, e o número de Carreau foi variado de $Cu = 0-100$ (Fig. 5.9(a)-Fig. 5.9(f) e Fig. 5.10(a)-Fig. 5.10(c), respectivamente). Inicialmente, verifica-se que, à medida que o número de Carreau aumenta, a característica da crescente pseudoplasticidade do fluido tende a tornar o escoamento localmente advectivo dominado, devido à diminuição da viscosidade nas regiões do escoamento sujeitas as maiores taxas de cisalhamento. Ou seja, para as regiões sujeitas as altas taxas de deformação por cisalhamento, localmente as forças de inércia tendem a dominar as forças viscosas, originando um aumento local do número de Reynolds. Este comentário fica evidente através da comparação da situação Newtoniana, $Cu=0$ (Figs. 5.9(a) e 5.10(a)), com as situações pseudoplásticas, (Figs.5.9(b)-5.9(f) e 5.10(b) e 5.10(c)). Devido à redução contínua da viscosidade do fluido na região do duto de menor diâmetro – região sujeita às maiores taxas de cisalhamento do escoamento – em função do crescimento do número de Carreau, o gradiente de velocidade torna-se cada vez mais severo junto à parede do duto menor. Se no caso Newtoniano, $Cu = 0$ (Figs. 5.9(a) e 5.10(a)), é possível claramente observar uma queda suave da velocidade junto à parede do duto – oriunda da imposição da condição de contorno de não deslizamento e

impermeabilidade ali imposta – nas situações pseudoplásticas, (Figs.5.9(b)-5.9(f) e 5.10(b) e 5.10(c)), quase todo o duto fica à velocidade (máxima) de sua linha de simetria, à exceção da vizinhança de sua parede, região na qual a velocidade sofre um severo gradiente. Quanto ao comportamento do campo de velocidade no interior do duto de maior diâmetro, pode-se observar que seu gradiente transversal fica mascarado em presença da maior aceleração do fluido no interior do tudo de menor diâmetro. Conforme ilustrado nas Figs. 5.9(a)-5.9(f) e 5.10(a)-5.10(c), fica evidente que, para todos os valores do número de Cu investigados, os gradientes dos baixos valores experimentados pelo campo de velocidade no duto maior são incapazes de serem ilustrados na escala de velocidade destas figuras, com todos os valores da velocidade ao longo das seções longitudinais do escoamento recebendo uma coloração azul forte, associada ao mais baixos valores da escala de velocidades destas figuras – à exceção da região de entrada da contração, na qual o fluido sofre uma aceleração convectiva ao adentrar no duto de menor diâmetro. Finalmente, é importante ainda observar que, por argumentos de conservação de massa, as velocidades médias em todas as seções transversais do escoamento devem ser idênticas.

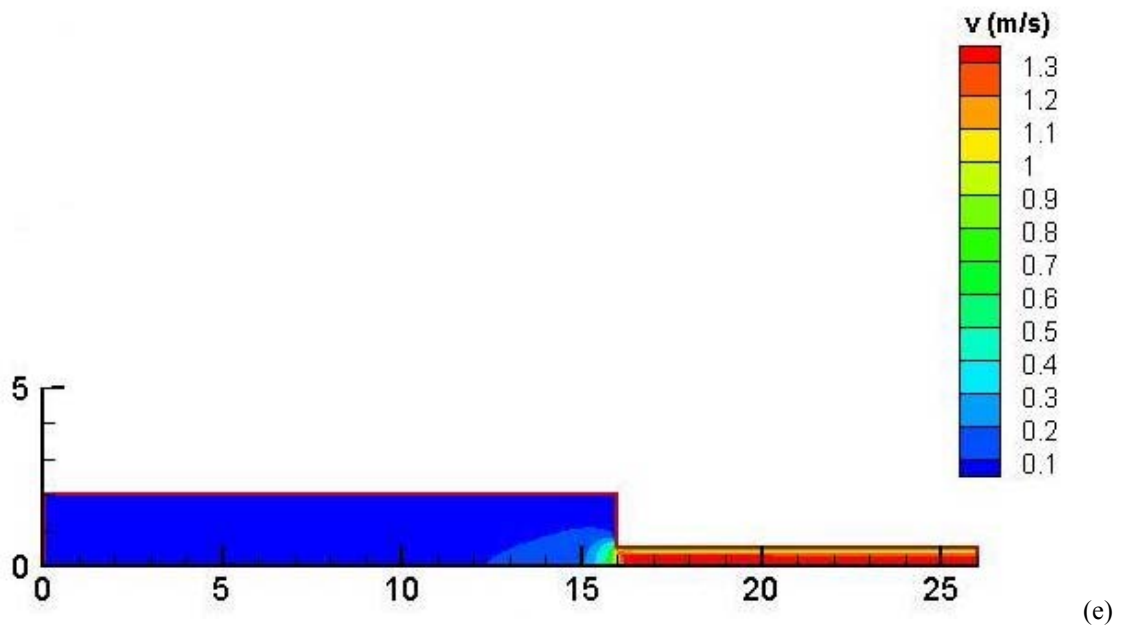
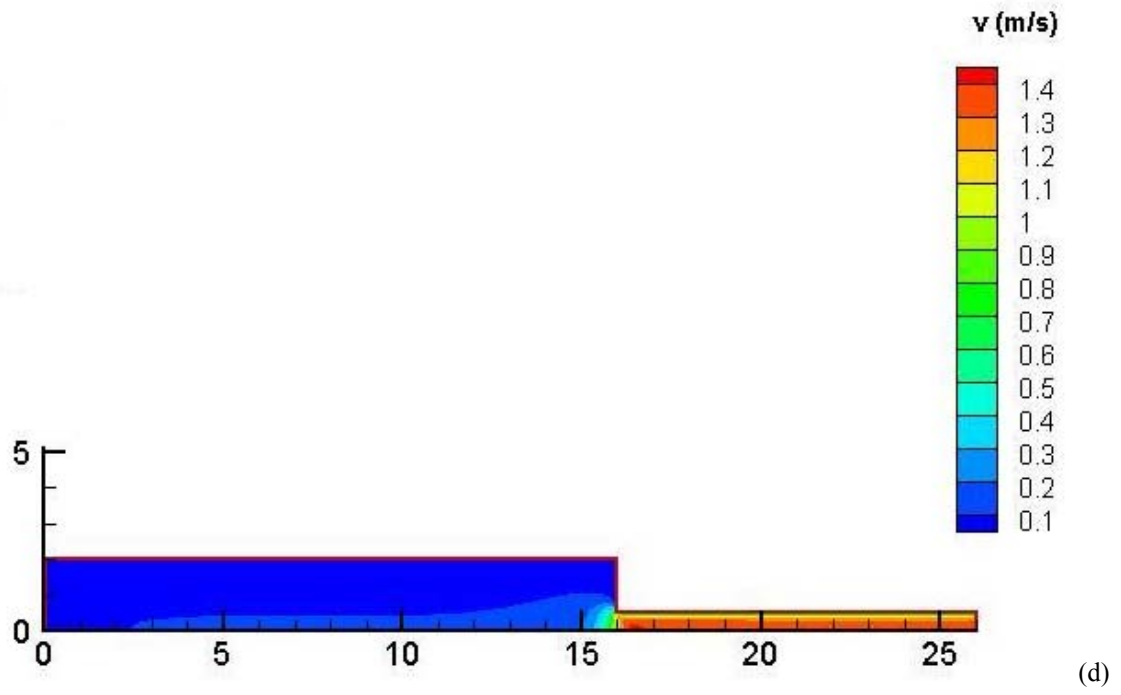




(b)



(c)



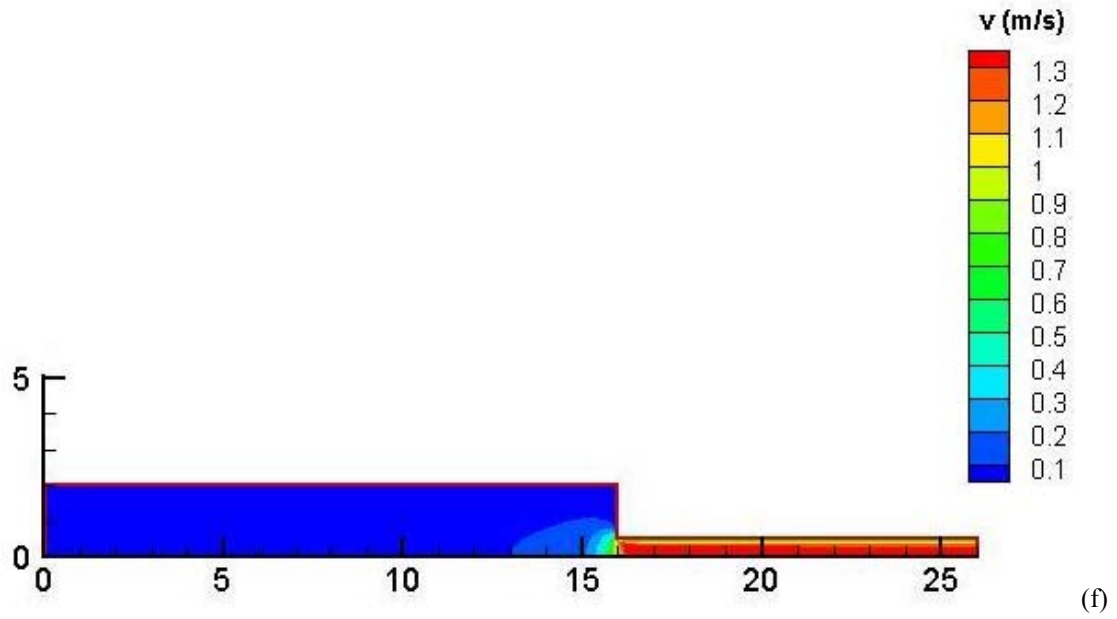
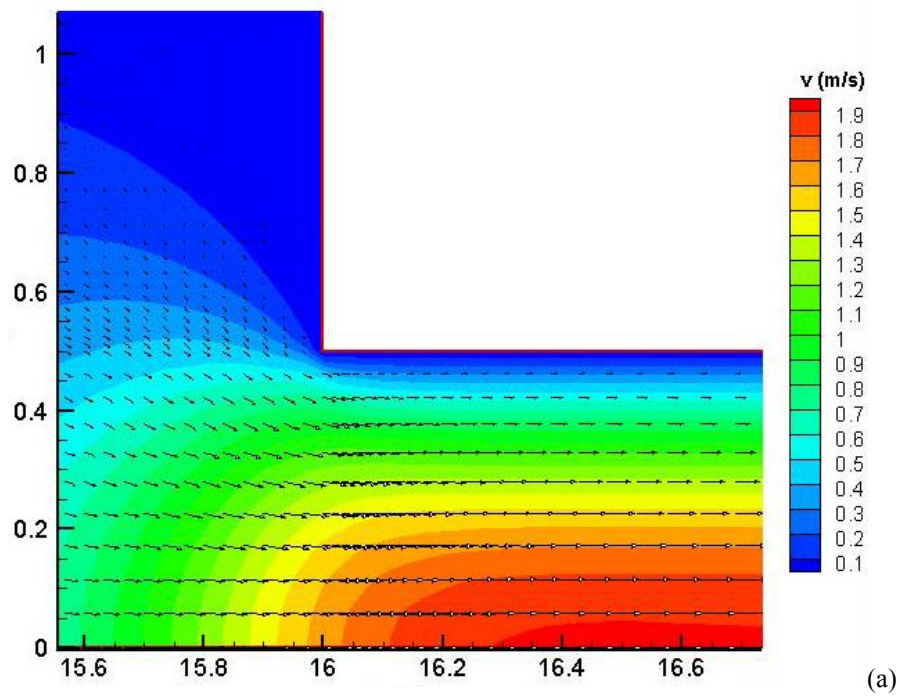


Figura 5.9: Isoregiões do módulo do vetor velocidade para $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$.



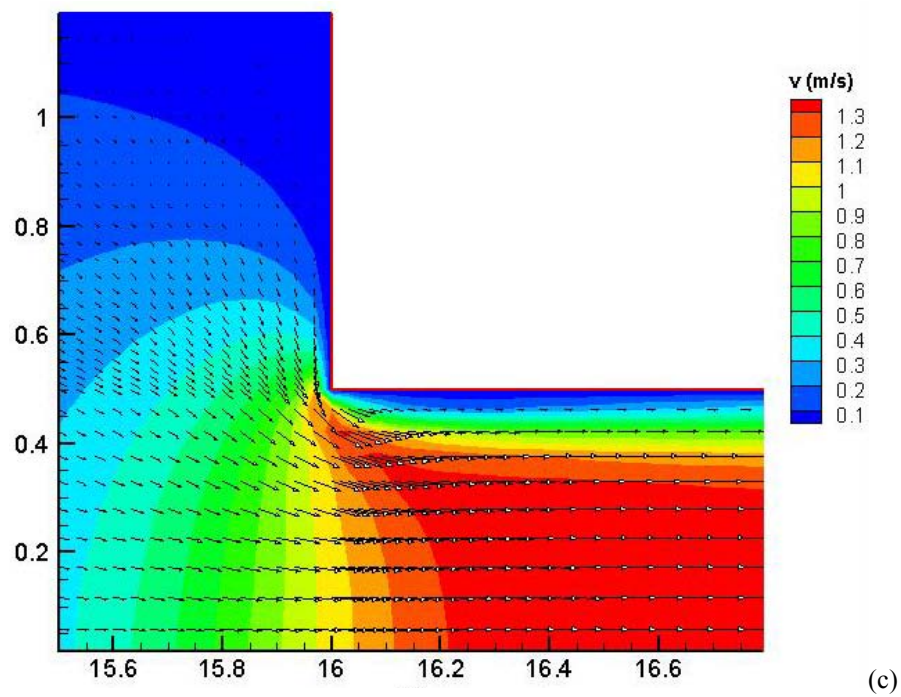
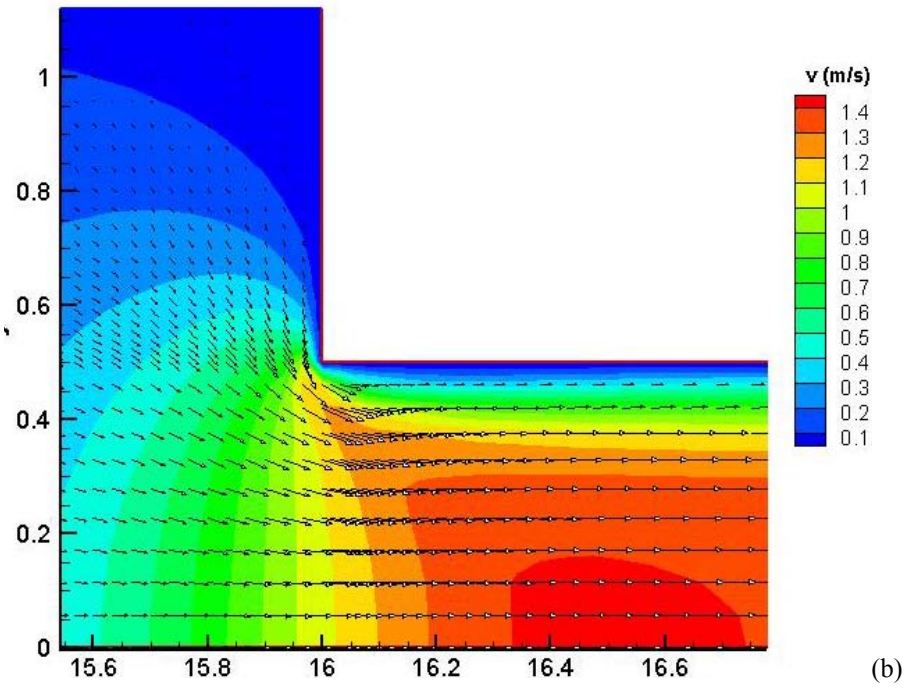
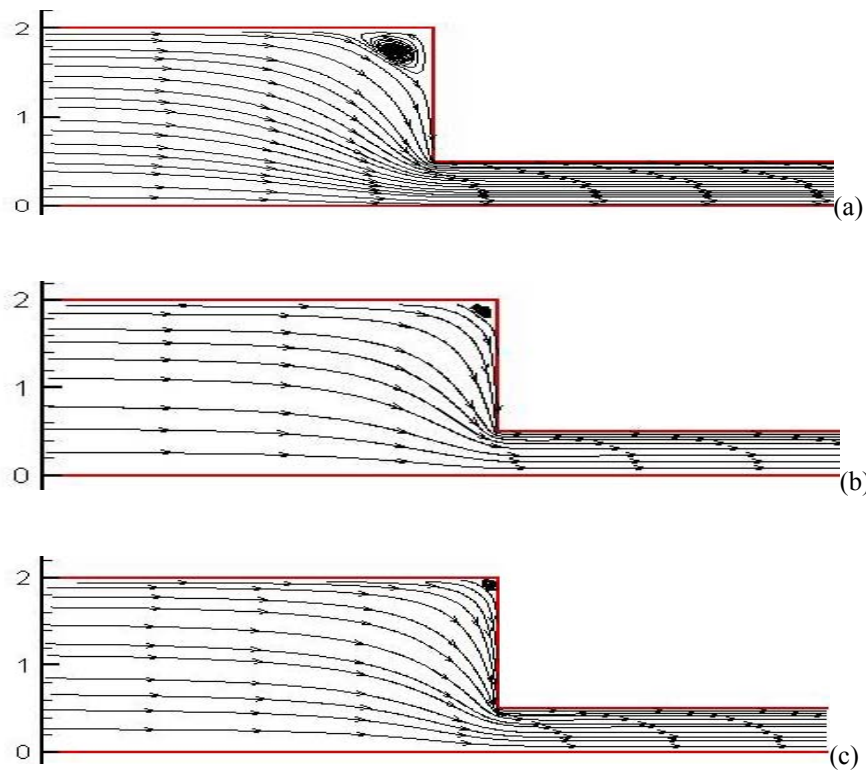


Figura 5.10: Detalhes das isoregiões do módulo do vetor velocidade e vetores velocidade a jusante da contração, para $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 50$ e (c) $Cu = 100$.

Nas Figs. 5.11 são apresentados os detalhes das linhas de corrente na região da contração, para número de Reynolds igual a $Re = 2$, coeficiente *power-law*, $n = 0,2$, e número de Carreau $Cu = 0-100$ (Figs. 5.11(a)-5.11(f)). As linhas de corrente seguem um padrão simples e bem definido, conforme o aumento do número de Carreau. Segundo pode se observar, nas Figs. 5.11(a)-5.11(f), a medida que Cu vai de 0 a 100, o vórtice da contração tende a desaparecer. Partindo da situação Newtoniana, $Cu = 0$ (Fig. 11(a)), quando a estrutura do vórtice é grande o suficiente para ser bem caracterizada, a medida que o grau de pseudoplasticidade aumenta o vórtice a montante da contração tende a desaparecer – fato visível a partir da Fig. 5.11(d), para $Cu = 50$. Isto pode ser explicado pelo fato que, à medida que a pseudoplasticidade do fluido cresce o escoamento principal a montante da contração tende a ficar cada vez mais advectivo dominado, dada a diminuição da viscosidade do fluido, provocando o início do colapso do vórtice junto à quina da contração (Figs. 5.11(a)-5.11.(d)) até sua total extinção (Fig. 5.11(e) e 5.11(f)). Pode-se ainda observar que, a maior proximidade das linhas de corrente na região do duto de menor diâmetro, indica uma maior aceleração do fluido nesta região – fato, este, em concordância com as observações feitas sobre os campos de velocidade ilustrados nas Figs. 5.9 e 5.10.



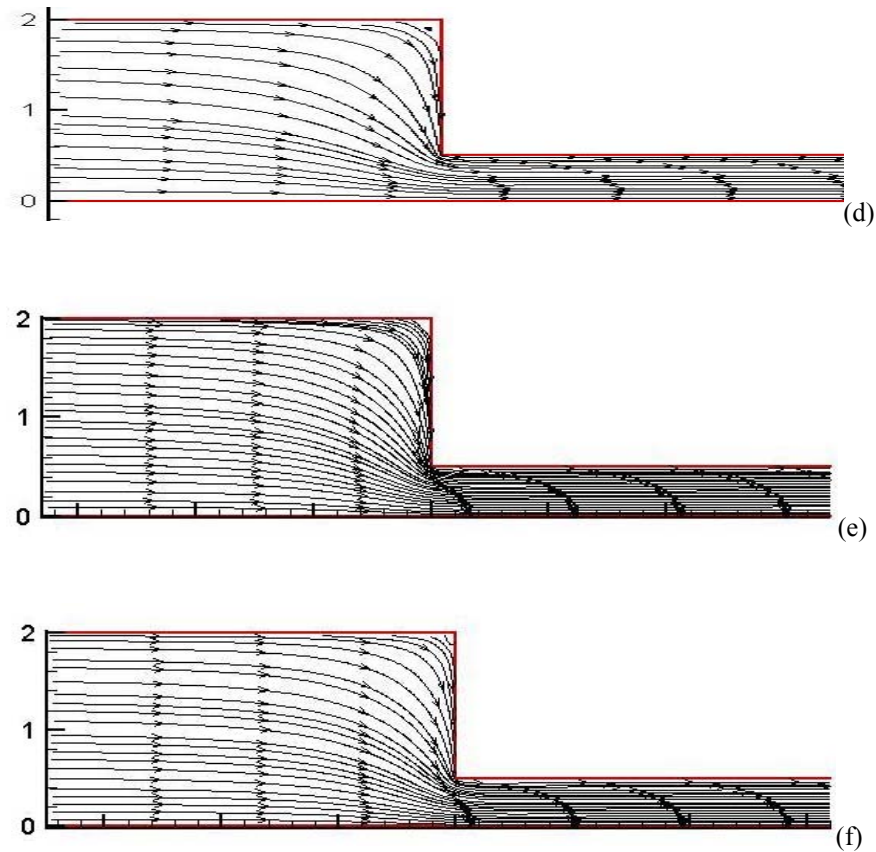


Figura 5.11: Detalhes das linhas-de-Corrente na contração, para $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$.

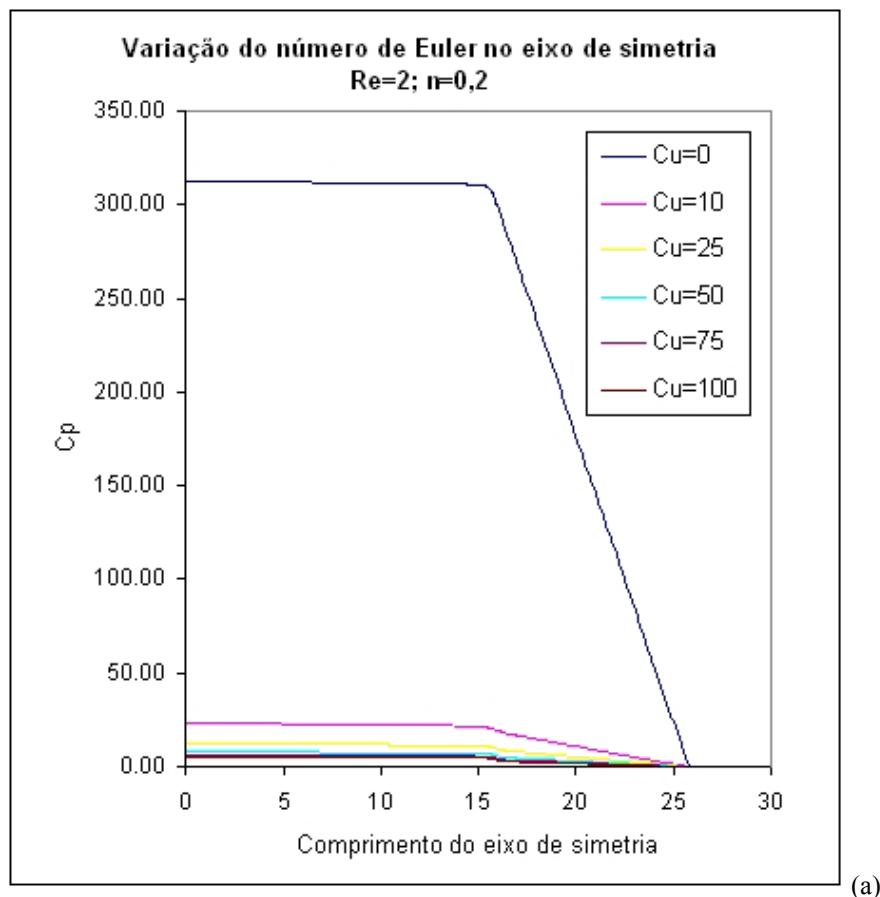
5.2.2 Análise Local: Perfis de Velocidade e Queda de Pressão

Nas Figs. 5.12 é apresentada a queda de pressão adimensionalizada, na verdade, o número de Euler ou coeficiente de pressão

$$C_p = \frac{(p - p_2)}{\frac{1}{2} \rho (V_2)^2} \quad (5.4)$$

onde p é a pressão local, p_2 é a pressão de corrente livre (pressão na linha de simetria anterior a pressão de referência considerada nula), V_2 é a velocidade média do menor tubo e a densidade $\rho = 1$. Verificaram-se os coeficientes de pressão ao longo da linha de simetria, para número de Reynolds igual a $Re = 2$, coeficiente *power-law*, $n = 0,2$, e número de Carreau, $Cu = 0-100$, em escala linear (Fig. 5.12(a)) e semi logaritma (Fig. 5.12(b)). A mais forte característica destas

figuras é que a queda de pressão para a situação Newtoniana, $Cu = 0$ (Fig. 12(a)), é muito mais elevada que o Δp das situações com números de Carreau mais altos, daí a necessidade de também apresentar-se a figura em escala semi-log (Fig. 12(b)). Uma segunda observação desta figura concorda com os comentários acerca das Figs. 5.8, a saber, à medida que o grau de pseudoplasticidade do fluido cresce, isto é, quando Cu aumenta, a queda de pressão ao longo da contração se dá em níveis cada vez menores. Mesmo recorrendo à escala semi-log para representar a queda de pressão na contração (Fig. 5.12(b)), as situações mais severamente pseudoplásticas ($Cu=50-100$) ficam muito próximas umas das outras. Quanto ao desenvolvimento hidrodinâmico, como todas as curvas de Δp da Fig. 5.12(a) são retilíneas, seja no duto de maior diâmetro, como no duto de menor diâmetro, tem-se que os comprimentos do duto maior, L_1 , e do duto menor, L_2 , foram suficientes para desenvolver o escoamento, corroborando as conclusões das Figs. 5.8, no que tange ao desenvolvimento do campo de velocidade. Finalmente, observa-se ainda, das Figs. 5.12(a) e 5.12(b) para quaisquer dos valores do número de Carreau investigados, que a forte inclinação angular das retas de queda de pressão no duto de menor diâmetro, devido a elevada aceleração do fluido ali experimentada, faz com que as retas de Δp no duto maior tenham coeficiente angular desprezível.



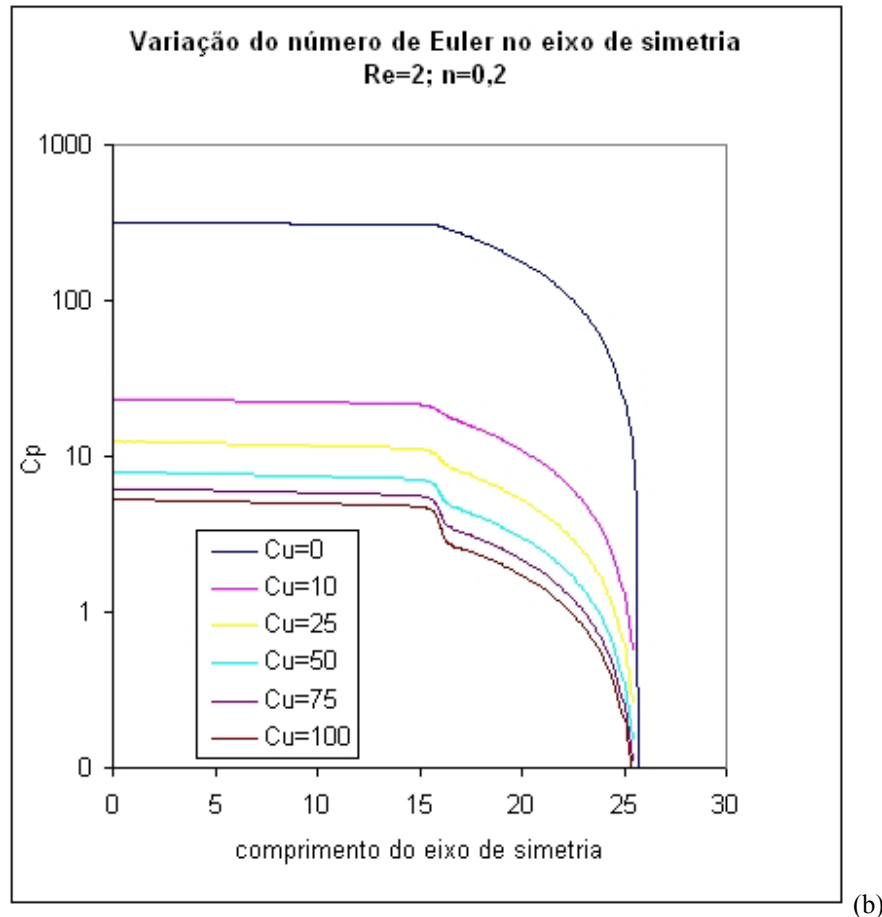


Figura 5.12: Queda de pressão ao longo da linha de simetria, para $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1: (a) gráfico linear e (b) gráfico semi-log.

Na Fig. 5.13 são apresentados os perfis de velocidade axial no plano de contração, para número de Reynolds igual a $Re = 2$, coeficiente *power-law*, $n = 0,2$, e número de Carreau, $Cu = 0-100$. Conforme já observado nas análises globais do campo de velocidade, Figs. 5.9 e 5.10, o aumento do número de Carreau tende a tornar o fluido localmente advectivo dominado, conforme ilustrado na Fig. 5.13. Partindo da solução parabólica, hidrodinamicamente desenvolvida, de um escoamento laminar Newtoniano, curva para $Cu = 0$ na Fig.5.13, evolui-se para um perfil de velocidade tipicamente advectivo dominado, com a velocidade (máxima) da linha de simetria estendendo-se até a vizinhança da parede da contração, formando ali uma delgada camada limite sujeita a severos gradientes de velocidade. Estas alterações nos perfis da velocidade axial no plano da contração podem ser explicadas pela progressiva diminuição da viscosidade do fluido localmente experimentado, na medida em que Cu vai de 0 a 100. Cabe sempre enfatizar que, por argumentos da conservação de massa do escoamento, todos os perfis ilustrados na Fig.5.13, para os diferentes valores do número de Carreau investigados, devem necessariamente ter velocidades médias iguais, explicando, desta maneira, a progressiva redução

da velocidade máxima destes perfis, à medida que a viscosidade do fluido diminui (Fig.5.13 para $Cu = 0-100$). Ainda, os detalhes para as zonas das velocidades axiais na contração: a) Perfil Newtoniano com uma solução parabólica e boa camada limite e b) $Cu = 100$ mostrando um perfil de velocidade tipicamente advectivo dominado, com a velocidade máxima da linha de simetria estendendo-se até a vizinhança da parede da contração, formando ali uma delgada camada limite sujeita a severos gradientes de velocidade, enfatizando desta forma, um posterior refinamento de malha junto a parede do tubo de menor diâmetro para melhorar a solução gráfica das situações mais pseudoplásticas.

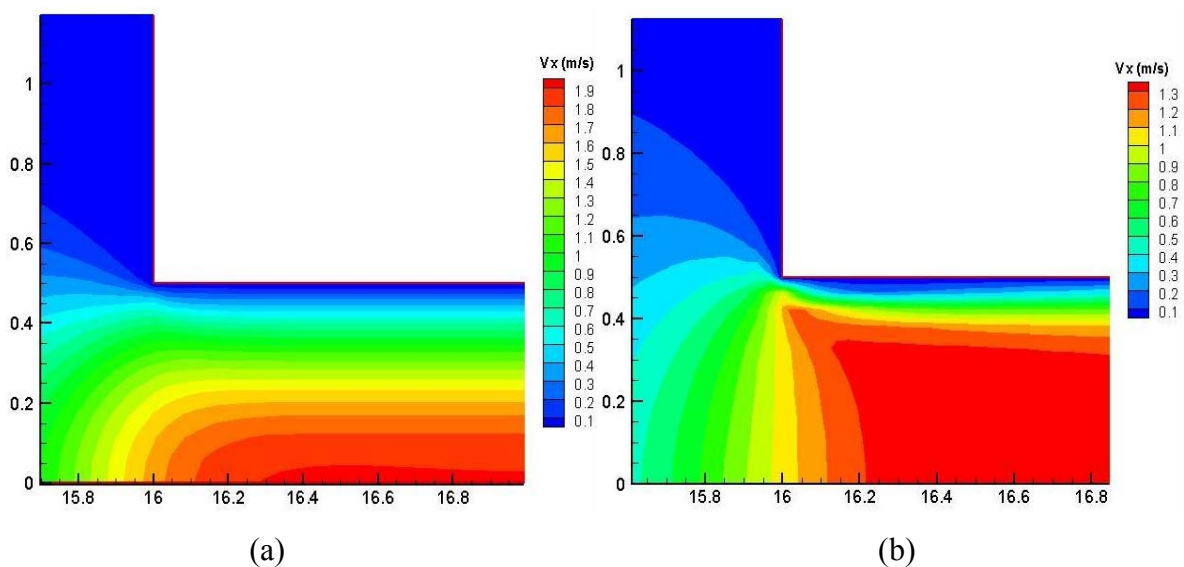
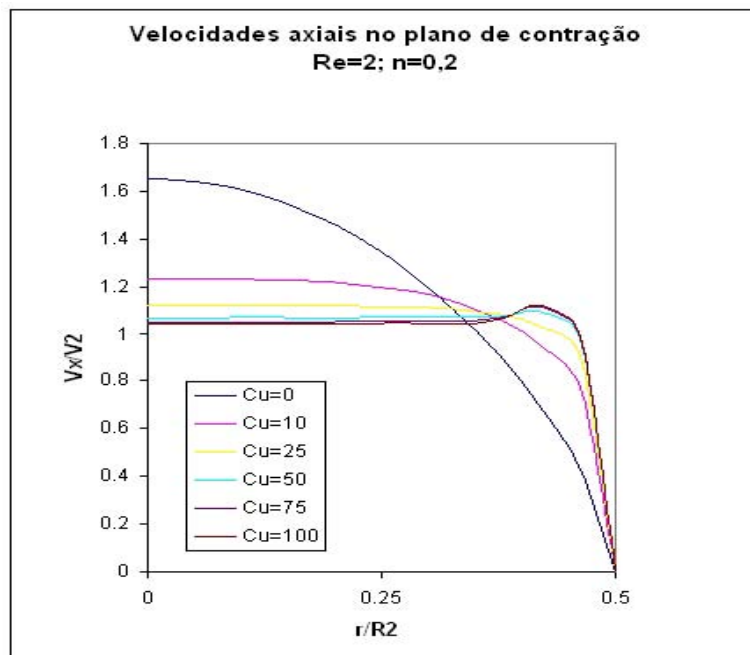


Figura 5.13: Velocidades axiais no plano de contração e detalhes para a) $Cu = 0$ e b) $Cu = 100$
 $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1.

Na Fig. 5.14 são apresentados os perfis de velocidade axial ao longo do eixo de simetria, para número de Reynolds igual a $Re = 2$, coeficiente *power-law*, $n = 0,2$, e número de Carreau, $Cu = 0-100$. A figura ilustra fundamentalmente o alto valor da velocidade máxima à qual está sujeita a situação Newtoniana, $Cu = 0$, na região do duto de menor diâmetro, se comparada às velocidades máximas experimentadas pelas situações pseudoplásticas, $Cu = 10-100$. Já, na região do duto de maior diâmetro, o mesmo não ocorre, ou seja, todos os perfis da velocidade axial na linha de simetria concordam para o mesmo valor. Este comportamento pode ser explicado da seguinte maneira: enquanto, na região do duto maior, o maior valor de Cu ($Cu = 100$) é ainda insuficiente para provocar o decaimento *power-law* da viscosidade do fluido – com todas as situações com viscosidade igual à Newtoniana, η_0 – já, no duto de menor diâmetro, o menor valor de Cu investigado ($Cu = 10$) já é suficiente para provocar o total decaimento *power-law* da viscosidade – o que explica que todas as situações pseudoplásticas ($Cu = 10-100$) terem viscosidade igual e bem diversa da situação Newtoniana ($Cu = 0$).

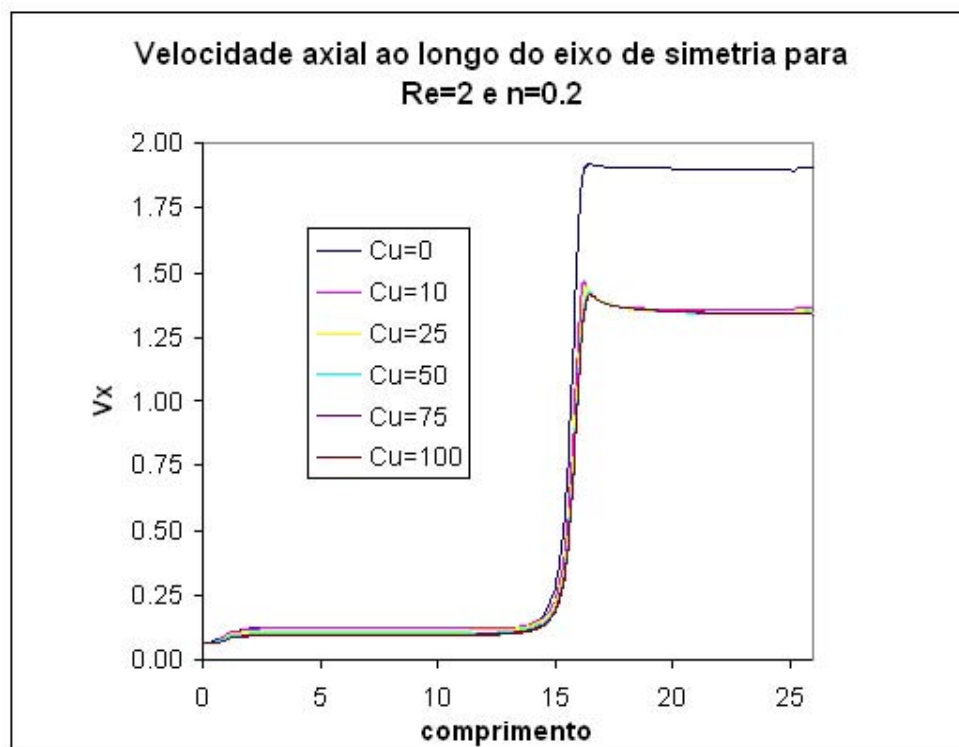


Figura 5.14: Velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Re = 2$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1.

Nas Figs. 5.15 retorna-se à análise da queda de pressão ao longo da linha de simetria, com $Re = 2$, agora, porém, para dois valores distintos do número de Carreau, $Cu = 10$ (Fig. 5.15(a)) e $Cu = 50$ (Fig. 5.15(b)), parametrizadas por diferentes valores do coeficiente *power-law*, $n = 0,2-1,0$. Como uma primeira observação, esta figura não mais pertence ao conjunto de resultados anteriormente mostrados nas Figs. 5.7-5.14, pois, agora, o aumento do grau de pseudoplasticidade do fluido é também investigado através da variação do coeficiente *power-law*, o qual, nas figuras anteriores, era mantido fixo, com valor $n = 0,2$. Como não poderia deixar de ser, todos os comentários tecidos nas Figs. 5.7-5.14 a cerca do efeito que o aumento do grau de pseudoplasticidade do fluido tem sobre a queda de pressão ao longo da contração, devem permanecer válidos. Isto realmente se verifica tanto na Fig. 5.15(a), para $Cu = 10$, como na Fig. 5.15(b), para $Cu = 50$. Em ambas as figuras, pode-se observar: (i) quedas de pressão lineares, tanto no duto de maior diâmetro, quanto no duto de menor diâmetro, (ii) coeficiente angular das quedas de pressão no duto maior são desprezíveis em face da severa inclinação da queda de pressão no duto menor, e (iii) diminuição de todos os níveis da queda de pressão ao longo da contração, a medida que o efeito pseudoplástico aumenta, isto é n decai do valor 1 (caso Newtoniano) até 0,2 (caso mais pseudoplástico). Novamente, a explicação para este último comentário recai sobre o aumento do efeito pseudoplástico do fluido, com as situações marcadamente pseudoplásticas ($n=0,6-0,2$), sendo muito afetadas pela diminuição da viscosidade do fluido nas regiões sujeitas a altas taxas de cisalhamento. Aliás, através da Fig. 5.15(b), pode-se constatar que, além do decaimento da viscosidade do fluido forçada pela diminuição progressiva do coeficiente n de 1 até 0,2, o grau de pseudoplasticidade do fluido também é afetado pela antecipação do início do decaimento *power-law* da função viscosidade, acarretada pela elevação do número de Carreau para o valor $Cu=50$ imposta na Fig. 5.15(b). Ou seja, o decaimento da viscosidade, para um dado valor fixo do coeficiente *power-law* n , se dará em regiões sujeitas a taxas de deformações mais baixas que as ostentadas na Fig.5.15(a), para $Cu=10$. Conforme se verifica na comparação das Figs. 5.15(a) e 5.15(b), somente a situação Newtoniana, $n=1$ (na qual não existe redução do campo viscosidade), não apresenta diferentes níveis de queda de pressão, ao passo que em todas as situações pseudoplásticas, $n=0,8-0,2$, os níveis de queda de pressão, para $Cu=50$ (Fig.5.15(b)), são todos inferiores aos respectivos níveis de queda de pressão para $Cu=10$ (Fig.5.15(a)).

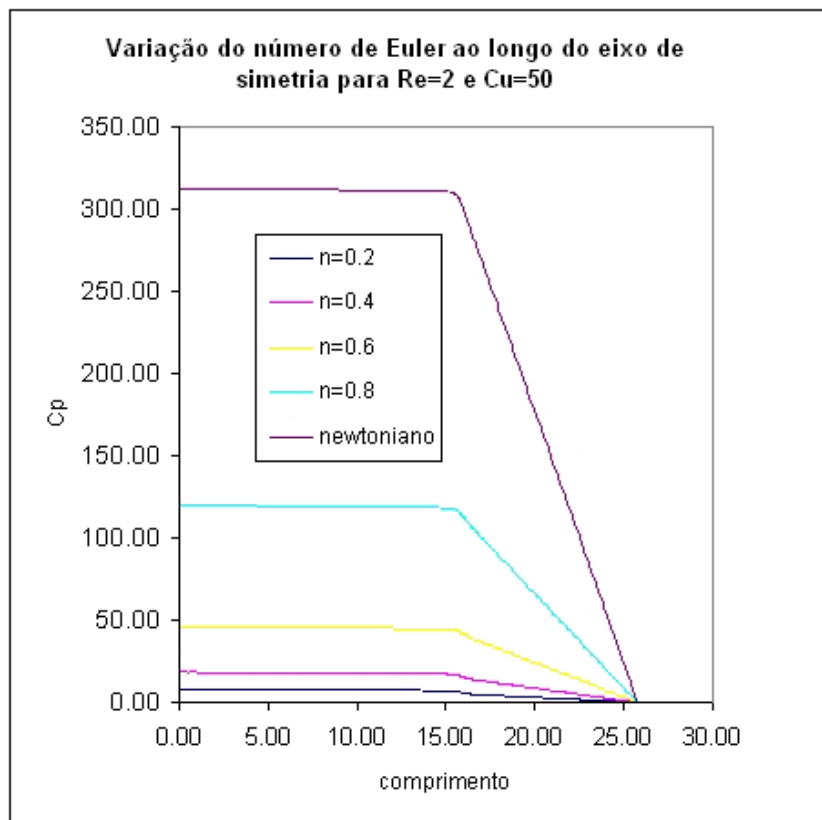
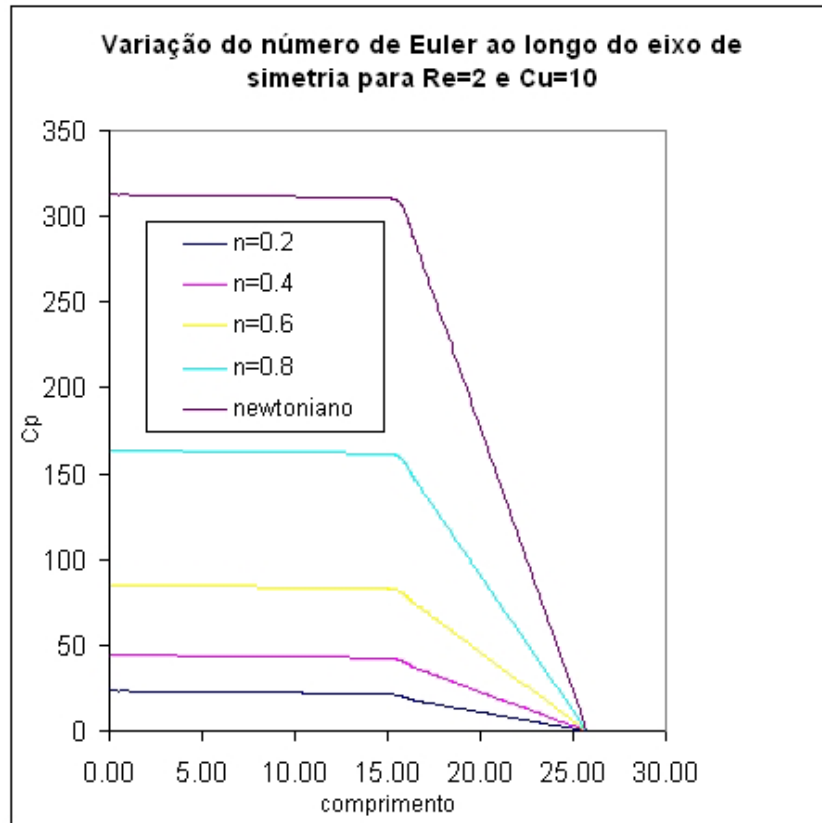
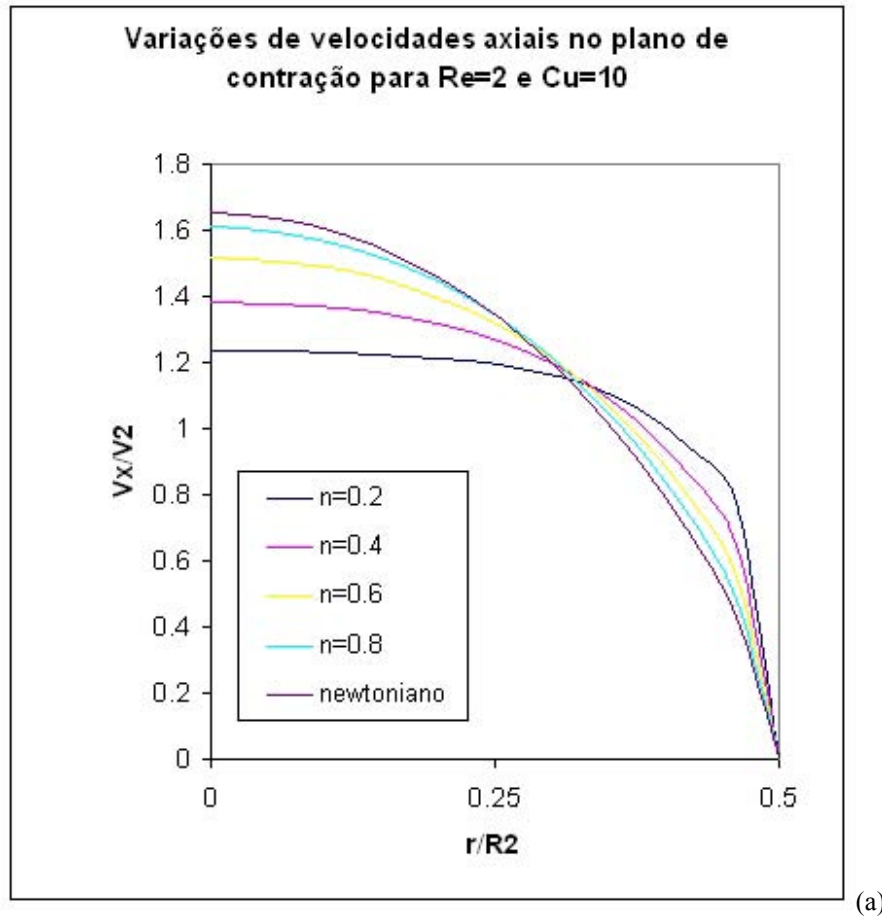


Figura 5.15 Queda de pressão ao longo da linha de simetria para $Re = 2$ e 7154 elementos Q1/Q1: (a) $Cu = 10$ e (b) $Cu = 50$.

Nas Figs. 5.16, volta-se a analisar o perfil de velocidade axial no plano de contração, para $Re=2$, porém, agora, para dois valores distintos do número de Carreau, $Cu=10$ (Fig. 5.16(a)) e $Cu=100$ (Fig. 5.16(b)), parametrizadas por diferentes valores do coeficiente *power-law*, $n=0,2-1,0$. Da comparação das Figs. 5.16(a) e 5.16(b) fica evidente que, tanto o coeficiente *power-law* n quanto o número de Carreau Cu , têm ambos a função de aumentar a pseudoplasticidade do fluido. Se atuam em conjunto, como no caso destas figuras, a diminuição da viscosidade do fluido será mais drástica, conforme ilustrado na Fig. 5.16(b), para $n=0,2$ e $Cu=100$. No que tange à variação dos perfis com a queda do coeficiente n de 1 a 0,2, para um dado valor fixo de Cu , todos os comentários da Fig. 5.13, permanecem válidos, a saber: (i) a evolução do perfil parabólico laminar do caso Newtoniano para os perfis advectivos dominados das situações pseudoplásticas; (ii) a estreita camada limite junto à parede do duto menor formada pelo efeito do aumento da pseudoplasticidade do fluido; (iii) a necessidade da igualdade das velocidades médias de todos os perfis, de modo a satisfazer a conservação de massa do escoamento. As Figs. 5.16 acrescentam à análise do perfil da velocidade axial no plano da contração, a influência conjunta do decaimento do coeficiente *power-law* e do aumento do número de Carreau, no comportamento pseudoplástico do fluido. Comparando-se as Figs. 5.16(a) e 5.16(b), observa-se, inicialmente, que o perfil Newtoniano, $n=1$ em ambas as figuras, é exatamente igual, seja para $Cu=10$ (Fig. 5.16(a)) ou $Cu=100$ (Fig. 5.16(b)). Já as situações pseudoplásticas, fornecem perfis diversos para o número de $Cu=10$ e 100. A medida que Cu aumenta - e, conseqüentemente, o decaimento *power-law* da viscosidade do fluido começa a ser sentido em regiões sujeitas a taxas de cisalhamento cada vez mais baixas - o caráter advectivo dos perfis de velocidade destas situações é cada vez mais dominante, com os valores das velocidades máximas recuando e estendendo-se até às vizinhanças da parede da contração - região, na qual, o campo de velocidade do fluido é obrigado a sofrer um severo gradiente em uma fina camada limite, de modo a satisfazer as condições de contorno de não deslizamento e impermeabilidade sobre a parede da contração. Finalmente, da Fig. 5.16(b), observa-se, para o perfil de maior comportamento pseudoplástico de todo conjunto ($n=0,2$ e $Cu=100$), o surgimento de uma concavidade na borda da camada limite da contração, a qual, supõem-se não ser fisicamente realista, originando-se, provavelmente, devido a uma insuficiência de malha na aproximação do drástico gradiente do campo de velocidade. É interessante também observar que, por argumentos de conservação de massa no plano da contração, essa aceleração espúria da velocidade na borda da camada limite da situação de comportamento mais pseudoplástico, irá gerar também um decaimento irrealista dos níveis da velocidade máxima nas regiões centrais do perfil fora da

camada limite. Na Fig. 5.16(b), o perfil de velocidade axial no plano de contração obtido nesta dissertação, para $n=0,4$, é comparado ao perfil obtido no artigo de Kim et al. (1983), para uma aproximação de elementos finitos de Galerkin com 116 elementos Q2/Q1.



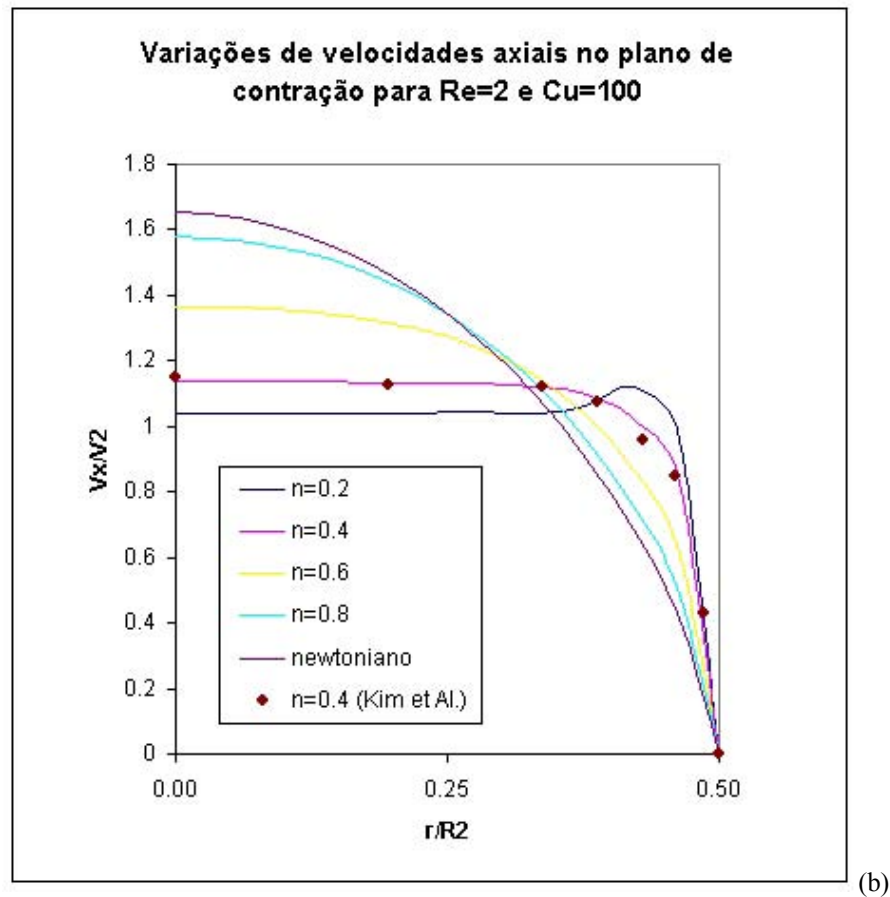


Figura 5.16: Velocidade axial no plano de contração para $Re = 2$ e 7154 elementos Q1/Q1: (a) $Cu = 10$ e (b) $Cu = 100$.

Nas Figs. 5.17, volta-se a analisar o perfil de velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Re=2$, porém, agora, para um único valor do número de Carreau, a saber, $Cu=10$, (Fig. 5.17), parametrizada por diferentes valores do coeficiente *power-law*, $n=0,2-1,0$. Se comparada a Fig.5.14, a região do duto de maior diâmetro se mostra idêntica, com a variação dos valores do coeficiente *power-law* n , a saber, para $n=0,2-1,0$; sendo insuficiente para diferenciar os perfis de velocidade investigados. Isto é explicado pelo fato desta região estar sujeita às mais baixas taxas de cisalhamento do escoamento, de modo que, nem o aumento de Cu (Fig.5.14), nem o aumento de n (Fig.5.17), são suficientes para provocar o deacimento local da viscosidade do fluido. Já, a região do duto menor, com o aumento do coeficiente *power-law* n experimentado na Fig. 5.17, verifica-se perfis de velocidade longitudinais distintos ao longo da linha de simetria. Na verdade, observa-se que, a medida que n diminui, o valor da velocidade axial junto à linha de simetria decai. Isto é facilmente entendido dado o aumento da característica advectiva do escoamento; as velocidades axiais (máximas) junto a linha de simetria devem diminuir, de modo que a conservação de massa no escoamento permaneça válida. Na Fig. 5.17, o perfil axil ao longo da

linha de simetria obtido nesta dissertação, para $n=0,4$, é comparado ao perfil obtido no artigo de Kim et al. (1983), para uma aproximação de elementos finitos de Galerkin com 116 elementos Q2/Q1.

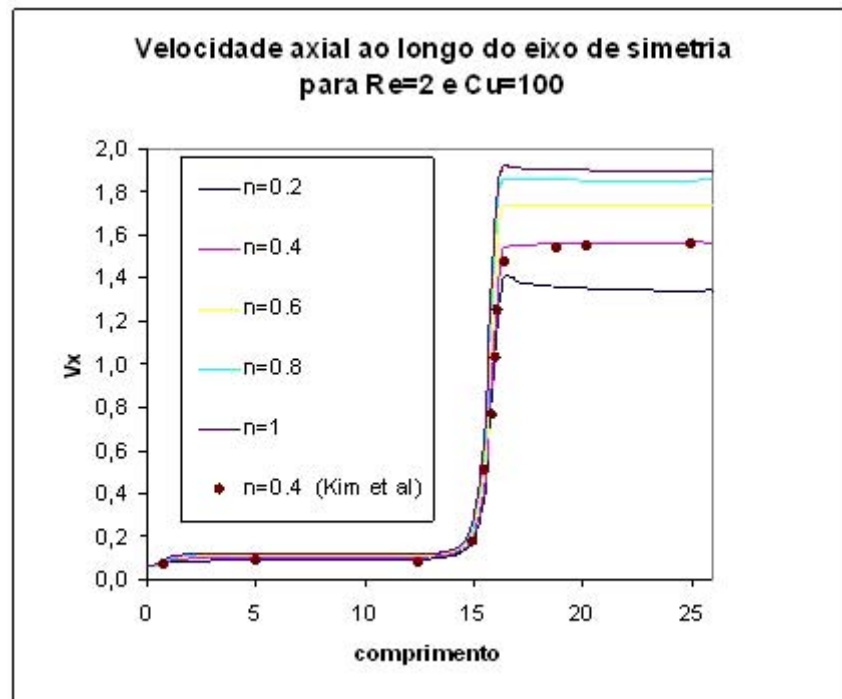


Figura 5.17: Velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Re = 2$, $Cu = 100$ e 7154 elementos Q1/Q1.

Por fim, as Fig. 5.18 e 5.19 apresentam o terceiro e último conjunto de resultados, a saber, a influência do efeito da inércia sobre o escoamento. Na Fig. 5.18, é analisado o perfil de velocidade axial no plano de contração para, $Cu = 0$ e $n = 0,2$, porém, agora, parametrizado por diferentes valores do número de Reynolds, $Re = 2-100$. Como, na Fig. 5.18, o número de Carreau é igual a zero, esta figura só contempla a situação Newtoniana, na qual a viscosidade mostra-se totalmente invariante às diferentes taxas de cisalhamento experimentados pelo escoamento. Portanto, o que pode se observar desta figura, unicamente é o efeito do aumento da inércia no escoamento em função da elevação do número de Reynolds. Para $Re = 2$, simulando-se a ausência de inércia, o perfil de velocidade axial no plano de contração tem o formato parabólico laminar, enquanto, à medida que Re cresce ($Re = 10-100$), a velocidade (máxima) junto à linha de simetria decresce, formando uma severa camada limite junto à parede da contração (ver curvas para $Re = 30$ e 100).

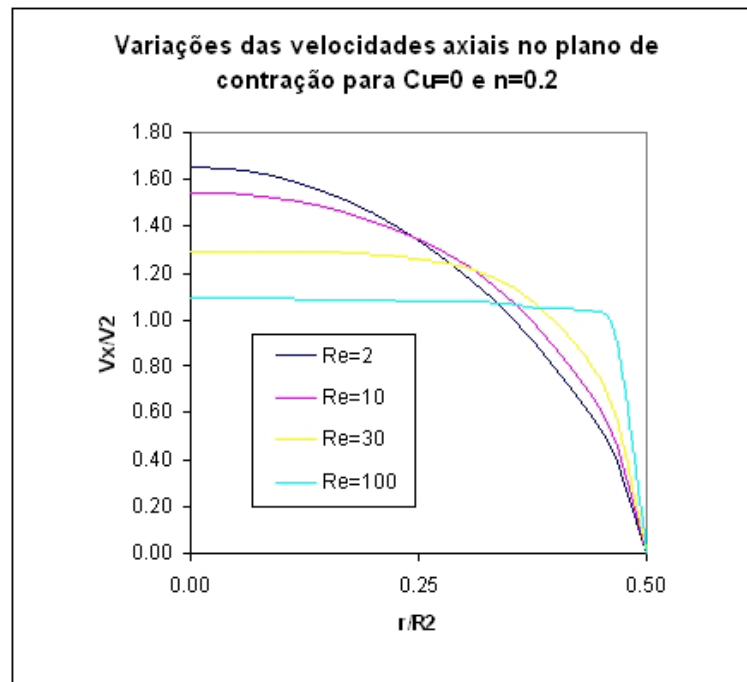


Figura 5.18: Velocidade axial no plano de contração para $Cu = 0$ e $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1.

Na Fig. 5.19, são analisados os perfis de velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Cu = 100$, $n = 0,2$, parametrizados por diferentes valores do número de Reynolds, $Re = 2-55$. Como $Cu = 100$ e $n = 0,2$, esta figura contempla a situação mais pseudoplástica investigada nesta dissertação, na qual a velocidade é fortemente dependente das diferentes taxas de cisalhamento experimentadas pelo escoamento. Portanto, observa-se nesta figura, o efeito do aumento da inércia (com Re crescendo de 2 a 55) em um escoamento fortemente pseudoplástico. Na verdade, a Fig. 5.19 segue um comportamento parecido ao ilustrado na Fig. 5.17 (figura, para a qual, Cu é também fixado em 100), isto é, a coincidência de todas os perfis na região da linha de simetria do duto de maior diâmetro – seja para todos os valores de Re investigados na Fig. 5.19, ou seja para todos os valores do coeficiente n investigados na Fig. 5.17 – e, no duto menor, perfis claramente advectivos dominados em ambas as figuras. Entretanto, à medida que o coeficiente *power-law* n diminui, na Fig. 5.17, as velocidades máximas de seus perfis decaem; já, na Fig. 5.19, à medida que o valor de Re cresce, as velocidades máximas dos perfis permanecem inalteradas e coincidentes entre si. Por último, o fato de todos os perfis terem um forte caráter advectivo dominado – mesmo para a situação com inércia desprezível, $Re = 2$ – decorre do altíssimo grau de pseudoplasticidade do fluido ($Cu = 100$ e $n = 0,2$). Na verdade, como observa-

se na Fig. 5.19, a influência do crescimento do número de Reynolds pouco ou nada acrescenta ao caráter advectivo dominado de um escoamento tão severamente pseudoplástico.

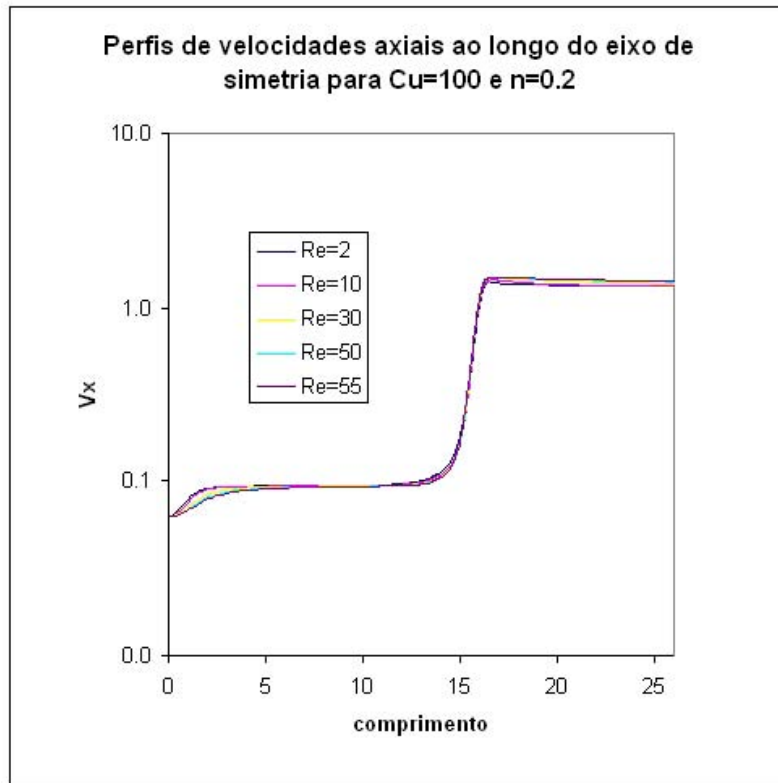


Figura 5.19: Velocidade axial ao longo do eixo de simetria para $Cu = 100$, $n = 0,2$ e 7154 elementos Q1/Q1.

6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta dissertação objetivou a aproximação numérica, via a metodologia de elementos finitos de Galerkin Mínimos-Quadrados, de escoamentos isocóricos de um fluido de Carreau através de uma contração axissimétrica súbita.

O Capítulo 1 desta dissertação introduziu os princípios das equações básicas da Mecânica dos Fluidos, a diferenciação do comportamento de um fluido não-Newtoniano de um Newtoniano, os princípios da aproximação de elementos finitos, suas dificuldades quando da aproximação de problemas de escoamentos de fluidos, a alternativa ao método clássico de Galerkin, empregada nesta dissertação – a metodologia de Galerkin Mínimos Quadrados (GLS) - e, por fim, uma revisão de alguns artigos de interesse sobre a aproximação numérica de escoamentos de fluidos pseudoplásticos.

No Capítulo 2 são introduzidas as equações de conservação de massa e momentum, as quais formam o modelo mecânico a ser utilizado nesta dissertação. Inicialmente, essas equações são expressas em termos de fluxo de massa e momentum, gerando, assim, as equações da continuidade e movimento, respectivamente. Em seguida, com o acoplamento do tensor tensão com a cinemática do escoamento através do tensor taxa de deformação, as equações de conservação são rescritas em função das variáveis primais usuais para escoamentos isocóricos Newtonianos, a saber, velocidade e pressão .

No capítulo 3, dedicado ao comportamento material dos fluidos puramente viscosos, é analisada a relação do tensor tensão com o tensor taxa de deformação para os chamados fluidos Newtonianos generalizados. Estes modelos empíricos, através da generalização da viscosidade Newtoniana de modo a permitir que a viscosidade do fluido passe a depender da taxa de cisalhamento, criam, assim, o conceito de viscosidade aparente. Por fim, são introduzidas duas correlações empíricas para a função viscosidade aparente: a função de viscosidade de Carreau – a ser utilizada nos testes numéricos desta dissertação – e a função viscosidade *power-law* de Ostwald e Waele.

No Capítulo 4, a aproximação numérica do modelo mecânico introduzido no Capítulo 3, é realizada através da utilização do método de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS). A partir da definição dos sub-espacos de elementos finitos do campo de velocidade e pressão, introduz-se a formulação GLS através da adição à formulação de Galerkin clássica, de termos estabilizados, funções do comprimento de malha empregado. Por serem introduzidos na forma residual, a solução exata - ou soluções aproximadas obtidas a partir de malhas muito refinadas – anula estes termos, deixando, assim, a formulação GLS consistente.

O Capítulo 5 é dedicado à análise dos resultados numéricos obtidos nesta dissertação. Inicialmente, a implementação da formulação GLS é validada para o problema da cavidade forçada, com os perfis de velocidade horizontal e vertical apresentando ótima concordância com a literatura. Em seguida, são realizadas as aproximações GLS do escoamento isocórico de um fluido pseudoplástico de Carreau através de uma contração axissimétrica abrupta 4:1, com os perfis de velocidade axial no plano de contração e sobre o plano de simetria mostrando-se fisicamente realistas e concordantes com a literatura específica.

6.1 COMENTÁRIOS FINAIS

Sobre os comentários tecidos no Capítulo 5, podem-se destacar os seguintes tópicos:

- a viscosidade do fluido decaiu nas regiões sujeitas as altas taxas de cisalhamento, à medida que o número de Carreau aumentou e o coeficiente *power-law* decaiu;
- o campo de velocidades foi fortemente influenciado pela queda da viscosidade nas regiões de altas taxas de cisalhamento, na medida em que C_u aumentou e n diminuiu;
- o campo de pressão obtido confirmou que os comprimentos dos dutos de maior e menor diâmetro foram suficientes para desenvolver hidrodinamicamente o escoamento;
- os níveis das quedas de pressão ao longo da contração diminuem, sensivelmente, com o aumento da pseudoplasticidade do fluido, visto a perda de carga do escoamento diminuir com o aumento de C_u e a diminuição de n ;
- as linhas de corrente indicaram que, na medida em que C_u cresce e n cai, o vórtice junto à quina da contração tende a se colapsar contra a parede da contração, devido ao aumento da inércia do fluido;
- os perfis de velocidade axial no plano da contração mostraram-se, cada vez mais, advectivos dominados, com a formação de uma forte camada limite junto à parede dos dutos, à medida que C_u aumentou e n diminuiu;
- os perfis de velocidade axial junto à linha de simetria apresentaram pouca sensibilidade ao aumento do número de Carreau, o que mostra que o menor $C_u \neq 0$ investigado ($C_u = 10$) já foi capaz de provocar o decaimento *power-law* da viscosidade junto as linhas de simetria de ambos os dutos;

- o aumento do número de Reynolds tem efeito análogo ao crescimento do grau de pseudoplasticidade do fluido, ou seja, à medida que Re cresce ou Cu cresce ou n decai, as regiões sujeitas à altas taxas de cisalhamento tendem a tornar-se advectivas dominadas.

6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Como perspectivas futuras para a continuação das simulações e análises desenvolvidas nesta dissertação, poder-se-ia propor:

- computar a perda de carga localizada devido à contração;
- investigar a influência da razão de aspecto da contração no padrão do escoamento do fluido;
- examinar modelos constitutivos que incorporem limites de escoamento, de modo a poder estudar como a plastificação do fluido, junto a linha de simetria (*plug flow*) e a quina da contração (*dead zone*), influenciariam o padrão de escoamento do fluido;
- realizar simulações tridimensionais do escoamento na contração, a fim de poder captar efeitos de extremidades;
- visualização do escoamento através da iluminação a laser de uma contração 4:1 de acrílico, através da qual escoava uma solução aquosa diluída de Carbopol, visando a validação experimental dos resultados.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astarita, G., Marrucci, G., 1974, "Principles of non-Newtonian fluid mechanics", McGraw-Hill, Great Britain.

Babuška, I., 1973. "The finite element method with lagrangian multipliers", **Numer. Math.**, vol. 20, pp. 179-192.

Billington, E.W., and Tate, A., 1981. "**The physics of deformation and flow**", McGraw-Hill Inc, USA.

Bird, R. B. Armstrong, R. C. Hassager, O., 1987, "Dynamics of polymeric liquids". v.1, John Wiley & Sons, U.S.A.

Brezzi, F., 1974. "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers", **RAIRO Ser. Rouge 8**, pp. 129-151.

Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R. , 1982. "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 32, pp. 199-259.

Ciarlet, P.G., 1978. "**The finite element method for elliptic problems**", North-Holland, Amsterdam.

Crouzeix, M., and Raviart, P.A., 1973. "Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations", **RAIRO**, pp. 33-76.

Dahlquist, G., and Bjorck, A., 1969. "Numerical Methods", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

Fang, P., Manglik, R.M. and Jog, M.A. , 1999. "Characteristics of laminar viscous shear-thinning fluid flows in eccentric annular channels ", **J. Non-Newt. Fluid Mech.**, vol. 84, pp. 1-17.

Franca, L.P., and Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 99, pp. 209-233.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1988. "Two classes of mixed finite element methods", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 89-129.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1993. "Convergence Analyses Of Galerkin Least-Squares Methods For Symmetrical Advective Diffusive Forms Of The Stokes And Incompressible Navier-Stokes Equations". **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 2, pp. 285-298.

Franca, L.P., Frey, S., and Hughes, T.J.R., 1992. "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 95, pp. 253-276.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003a. "Finite element approximation for single-phase multicomponent flows", **Mechanics Research Communications**, USA.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003b. "Galerkin least-squares approximations for generalized newtonian flows", Preprint submitted to **Journal of Fluids Engineering**, USA.

Gresho, P.M., 1991. "Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.87, pp. 2-3.

Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., 1982. "Hi-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method", **J. Comput Physics.**, vol. 48, pp. 387-411.

Gurtin, M.E., 1981. "**An Introduction to continuum mechanics**", Academic Press.

Harari, I., and Hughes, T.J.R., 1994. "Stabilized Finite-Element Methods For Steady Advection-Diffusion With Production", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 115, pp. 165-191.

Hughes, T.J.R., 1987. "**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Hughes, T.J.R., and Brooks, A., 1982. "A theoretical framework for Petrov-Galerkin Methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure", **Finite Elements in Fluids**, vol. 4.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 59, pp. 85-99.

Hughes, T.J.R., and Shakib, F., 1988. "Computational aerodynamics and the finite element method", **AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting**, USA.

Johnson, C., 1987. "**Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**", Cambridge University Press, Cambridge.

Johnson, C., Nävert, U., and Pitkäranta, J., 1984. "Finite element methods for linear hyperbolic problem", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 45, pp. 285-312.

Jurjevic, R., 1999. "Modelling of two-dimensional laminar flow using finite element method", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 31, pp. 601-626.

Karam Filho, J., Guerreiro, J.N.C., and Loula, A.F.D., 1999. "Finite Element Methods for Pseudoplastic Fluid Flows", **In: XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC**, Santos/SP. 99-99.

Kim, M.E., Brown, R.A., Armstrong, R.C., 1983. "The roles of inertia and shear-thinning in flow of an inelastic liquid through an axisymmetric sudden contraction", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 13, pp. 341-363.

Landau, L. et Lifchitz, E., 1971. "**Mécanique des fluides**", Edições Mir, Moscou.

Malkus, D.S., and Hughes, T.J.R., 1978. "Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 15, pp. 63-81.

Manica, R., and De Bortoli, A.L., 2004. "Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 121, pp. 35-40.

Neofytou, P., 2005. "A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flows", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 36, pp. 664-680.

Patankar, S.V., 1980. "**Numerical heat transfer and fluid flow**", McGraw-Hill, New York.

Patankar, S.V., and Spalding, D.B., 1972. "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", **International Journal of heat transfer and mass transfer**, vol.15, pp. 1787-1806.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K., 1994. "**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**", CRC Press Inc., USA.

Reis Junior, L.A., and Naccache, M.F., 2003. "Analysis of non-Newtonian flows through contractions and expansions", **In: XVII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**, Sao Paulo/SP. vol. 1.

Rektorys, K., 1975. "**Variational methods in mathematics, science and engineering**", D Reidel Publishing Co.

Slattery, J.C., 1999. "**Advanced transport phenomena**", Cambridge University Press, Cambridge.

Taig, I.C., 1961. "Structural analysis by the matrix displacement method", **English Electric Aviation Report**, vol. S017.