



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

**Estudo da interação feixe-plasma como
aplicação da teoria de turbulência em
plasmas**

por

Eber Camilo Fonseca Pongutá

Orientador

Luiz Fernando Ziebell

como requisito para obter
o título de Mestre em Física

no

Departamento de Física

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

25 de agosto de 2014

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus, por ter me permitido conseguir este importante objetivo na minha vida. A meus pais e a minha família que me apoiaram neste processo constante de formação.
- Também gostaria de agradecer ao professor **Luiz Fernando Ziebell** pela confiança, dedicação e ótima orientação.
- Ao IF e CNPq, pela oportunidade de continuar minha formação acadêmica e pelo financiamento econômico.
- Aos colegas do grupo de plasma, da sala M204, aos colegas Colombianos, pela ajuda e grata companhia.
- A todas as pessoas que sempre me tem apoiado neste longo caminho da minha formação integral como pessoa.

Resumo

Neste trabalho estudamos a interação feixe-plasma aplicando a teoria de turbulência fraca. Primeiramente fazemos uma introdução à teoria cinética de plasmas, estudando aspectos fundamentais como: a abordagem estatística das equações do plasma, o tratamento a ser dado às funções de correlação que aparecem nessa abordagem, e o sistema de equações de Vlasov-Maxwell.

Em seguida estudamos a aproximação de Vlasov e a solução do sistema de Vlasov-Maxwell na aproximação linear, enfocando a descrição de ondas no plasma e o amortecimento de Landau. Ao longo desse desenvolvimento fazemos uma apresentação relativamente detalhada dos procedimentos introduzidos por Landau ao tratar o sistema Vlasov-Maxwell como um problema de valor inicial, incluindo uma discussão sobre a resolução de integrais no plano complexo, com polos no denominador, e a solução da relação de dispersão para encontrar os modos normais de oscilação no plasma. Apresentamos também uma breve revisão a respeito da aproximação quase-linear do sistema de Vlasov-Maxwell, na qual abordamos a obtenção da equação quase-linear de difusão no espaço das velocidades para partículas e estudamos suas propriedades de conservação. Nesse contexto da teoria quase-linear, apresentamos uma revisão a respeito da evolução temporal do amortecimento de Landau no caso de distribuição de velocidades Maxwelliana e da instabilidade que pode ocorrer no caso de uma função distribuição com um feixe de partículas.

Depois dessa introdução à aproximação linear e à teoria quase-linear, abordamos a teoria de turbulência fraca num plasma não magnetizado, incluindo interações não lineares entre ondas e partículas. O formalismo apresentado inclui efeitos como emissão espontânea e induzida, decaimento e espalhamento de ondas. O sistema de equações acopladas da teoria de turbulência fraca é então reduzido a uma aplicação a um sistema considerando duas dimensões, depois re-escrito em termos de coordenadas polares e adaptado para solução numérica. Apresentamos então uma descrição do código numérico desenvolvido usando linguagem Fortran, abordando um plasma com elétrons descritos por uma função

distribuição Maxwelliana com um feixe tênue, e íons descritos por uma função distribuição Maxwelliana.

Finalmente, comparamos nossos resultados com outros obtidos por outros autores em trabalhos anteriores, desenvolvidos usando coordenadas cartesianas, avaliando nosso trabalho. Por último, discutimos algumas perspectivas para o desenvolvimento futuro do trabalho.

Palavras chave: teoria cinética, teoria de turbulência fraca, teoria quase-linear, instabilidade feixe-plasma, oscilações de Langmuir e ondas íon-acústicas.

Abstract

In the present work we study the beam-plasma interaction using the weak turbulence theory. We start with an introduction to the kinetic theory of plasmas, studying fundamental features, like the statistical approach to the plasma equations, the procedures to be employed to deal with the correlation functions appearing in the statistical approach, and the system of Vlasov-Maxwell equations.

In the sequence we discuss the Vlasov approximation and the solution of the Vlasov-Maxwell system in the linear approximation, emphasizing the description of waves in the plasma and the Landau damping. Along the development we present a relatively detailed description of the procedures introduced by Landau to treat the Vlasov-Maxwell system as an initial value problem, including a discussion about the resolution of integrals in the complex plane, with poles in the denominator, and the solution of the dispersion relation to find the normal mode of oscillations in the plasma. We also present a short review about the quasilinear approximation of the Vlasov-Maxwell system, in which we discuss the derivation of the quasilinear diffusion equation in the space of particle velocities, and study its properties of conservation. In the context of the quasilinear theory, we present a short review about the time evolution of the Landau damping in the case of Maxwellian velocity distribution, and about the instability which can occur in the case of a distribution function with a beam of particles.

After the introduction to the linear approximation and to the quasilinear theory, we present the equations of weak turbulence theory for a unmagnetized plasma, including non-linear interactions between waves and particles. The formalism which is presented includes effects and spontaneous and induced emission, decay and scattering of waves. The system of coupled equations of the weak turbulence theory is then reduced to application to a bi-dimensional case, and then re-written in terms of polar coordinates and adapted to numerical solution. We then present a description of the numerical code developed using Fortran language, suitable to describe a plasma with electrons described by a Maxwellian distribution function with a tenuous beam, and ions described by a Maxwellian distribution.

Finally, we compare our results with results obtained by other authors in previous works, developed using cartesian coordinates, as a validation of our work. Lastly we discuss some perspectives for future developments.

Sumário

List of Figures	8
1 Introdução	9
2 Teoria cinética	12
2.1 Equações do sistema	13
2.1.1 Equações das partículas	13
2.1.2 Equações dos campos	13
2.2 Definição estatística	13
2.3 Cadeia de equações cinéticas	16
2.3.1 Gás neutro (não ionizado)	17
2.3.2 Parâmetro do plasma	17
2.4 Sistema de Vlasov-Maxwell	17
2.4.1 Soluções no equilíbrio	18
3 Teoria de Vlasov de ondas do plasma	20
3.1 Linearização das equações	20
3.2 Aproximação eletrostática	21
3.3 Solução assintótica para $\phi_{\mathbf{k}}(t)$	23
3.4 Ondas eletrostáticas num plasma	26
3.4.1 Ondas de alta frequência	27
3.4.2 Ondas de baixa frequência	29
4 Teoria Quase-linear	31
4.1 Equação da função distribuição	31
4.2 Propriedades da teoria quase-linear	34
4.2.1 Conservação do número de partículas	35
4.2.2 Conservação do momento	35
4.2.3 Conservação de energia	36
4.3 Amortecimento de Landau	36
4.4 Função distribuição com uma instabilidade	40
5 Teoria da turbulência fraca	44
5.1 Equação para as ondas e partículas	44
5.2 Forma inicial da função distribuição das partículas	48
5.3 Equação para as partículas usando coordenadas polares	50
5.4 Equação para ondas Langmuir em coordenadas polares	55
5.5 Termo associado ao espalhamento envolvendo ondas L	58

5.6	Equação de diferenças finitas para a função distribuição de elétrons em coordenadas polares	74
5.6.1	Aplicação do operador \mathcal{L}_u :	75
5.6.2	Aplicação de \mathcal{L}_θ :	78
6	Resultados	80
6.1	Evolução temporal da função distribuição e da densidade espectral de ondas	81
7	Conclusões e comentários finais	88
A	Avaliação das componentes A_i e D_{ij}	90
A.1	Avaliação das componentes A_i	90
A.2	Avaliação das componentes D_{ij}	95
B	Condições de ressonância para A_i e D_{ij}	102
C	Integrais	104
C.1	Avaliação das integrais sobre velocidades	104

Lista de Figuras

3.1	p_0 , fica à direita de todos os polos da integral (adaptada de [1]).	23
3.2	Contorno de Landau (adaptada de [1]).	24
3.3	Polos da integral. Deformação do contorno de integração (adaptada de [1]).	25
3.4	Velocidade de fase muito maior à velocidade térmica (adaptada de [1]). . .	28
3.5	Localização das ondas íon-acústicas (adaptada de [1]).	30
4.1	Função distribuição de elétrons (adaptada de [1]).	36
4.2	Evolução da função distribuição de elétrons e da energia das ondas [1]. . .	38
4.3	Taxa de amortecimento (adaptada de [1]).	38
4.4	f_{e0} no limite assintótico (adaptada de [1]).	40
4.5	Função distribuição com um feixe quente [1].	41
4.6	Evolução da função distribuição de elétrons e da energia das ondas (adaptada de [1]).	41
4.7	Deformação da função distribuição eletrônica [1].	42
4.8	Evolução da função distribuição de elétrons [1].	43
6.1	$\Phi_e(\tau = 0)$ e $\mathcal{E}_q^L(\tau = 0)$	81
6.2	$\Phi_e(\tau = 100)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 100)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida.	82
6.3	$\Phi_e(\tau = 100)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 100)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida e os termos de espalhamento.	83
6.4	$\Phi_e(\tau = 500)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 500)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida.	84
6.5	$\Phi_e(\tau = 500)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 500)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida e os termos de espalhamento.	85
6.6	$\Phi_e(\tau = 1000)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 1000)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida.	86
6.7	$\Phi_e(\tau = 1000)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 1000)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida e os termos de espalhamento.	87

Capítulo 1

Introdução

O estudo da natureza do universo desde a antiguidade tem sido uma das atividades mais importantes para o homem, que permitiu o desenvolvimento da ciência nas civilizações. Na atualidade a importância do estudo do universo tem uma abrangência ainda maior, com diversas linhas como: astrofísica, astronomia, física de plasmas, entre outras.

Uma parte muito importante e de nosso interesse é o estudo do plasma, considerado como o quarto estado da matéria. O plasma representa aproximadamente 99% da matéria “convencional” (conhecida como “matéria hadrônica”) no universo, embora em nosso planeta a quantidade de plasma seja muito pequena comparada aos outros estados da matéria (sólido, líquido e gasoso). O plasma na Terra está localizado nas camadas superiores da atmosfera e é produzido pela radiação cósmica, em particular pelo Sol. A camada da atmosfera em estado de plasma é chamada *ionosfera*. Ocorre plasma também em descargas elétricas na atmosfera, mas é de curtíssima duração. Existem também plasmas artificiais gerados em laboratório, com diferentes características de pressão, ionização e densidade.

Os primeiros estudos conhecidos do plasma datam do final do século XIX, feitos pelo físico-químico inglês William Crookes. Ele chamou de *matéria radiante* ao gás ionizado dentro do tubo de raios catódicos. Tempos depois, no início do século XX, o também físico-químico norte-americano *Irving Langmuir* o chamaria de “*plasma*”, devido à capacidade de se moldar. Fisicamente um plasma pode ser definido como “**um gás ionizado onde predominam as interações coletivas de longo alcance**” (interações electromagnéticas).

A complexidade de um sistema físico desse tipo é devida à quantidade e diversidade de partículas. As abordagens do plasma podem ser classificadas como macroscópicas ou microscópicas, que fazem uso de procedimentos estatísticos. Abordagens macroscópicas são

a *magneto-hidrodinâmica* (MHD) e a *teoria de fluidos* (TF), enquanto a *teoria cinética* pode ser classificada como uma abordagem microscópica. As duas primeiras são baseadas na teoria clássica de fluidos (hidrodinâmica) e a terceira é uma teoria construída estatisticamente, compatível com as teorias de fluidos e MHD.

Dependendo do tipo de problema e fenômeno é mais conveniente usar uma ou outra das teorias. Por exemplo, as teorias macroscópicas são muito boas para descrever sistemas em grande escala e alguns casos específicos de instabilidades. Por outro lado, a teoria cinética é necessária para estudar fenômenos que dependem de detalhes da função distribuição de velocidades. Estas teorias tem limitações. As duas primeiras lidam apenas com valores médios e dependem de uma equação de estado. Por outro lado, o sistema de equações da teoria cinética é muito complexo, mas tem a vantagem de não estar limitado pelo tipo de função distribuição de velocidades e de não precisar de uma equação de estado.

Uma aproximação muito utilizada em estudos usando a teoria cinética consiste em desprezar as correlações entre partículas, restando então uma formulação em que a equação que descreve a evolução da função de distribuição de velocidades das partículas fica governada pelos campos eletromagnéticos médios gerados por todas as partículas. O sistema de equações resultantes é conhecido como sistema de equações de Vlasov-Maxwell. Uma abordagem muito frequente para o estudo deste sistema consiste na utilização de uma aproximação linear, pressupondo a existência de um estado de equilíbrio e de flutuações de pequena amplitude, de modo que fique justificado desprezar os termos não lineares nas flutuações.

Um passo no sentido da incorporação de efeitos não lineares consiste na chamada *teoria quase-linear*, em que são retidos alguns efeitos não lineares enquanto outros são desprezados. Especificamente, a teoria quase-linear considera que a função de distribuição que caracteriza o estado de equilíbrio do plasma pode evoluir lentamente, sob o efeito das perturbações de pequena amplitude, mas continua desprezando as interações não lineares na evolução das perturbações.

Um outro passo no sentido de incorporação de efeitos não lineares caracteriza a chamada *teoria de turbulência fraca*, que não somente leva em conta a evolução da função de distribuição de equilíbrio, sob ação das perturbações, como leva em conta efeitos não lineares na evolução dessas perturbações. A teoria de turbulência fraca teve boa parte de sua formulação básica desenvolvida em torno dos anos de 1960, e vem sendo retomada ao longo de anos recentes, particularmente ao longo da última década, muito em função da possibilidade de solução numérica oferecida pela evolução dos computadores. As interações não lineares tratadas pela teoria da teoria de turbulência fraca podem ser importantes em muitos fenômenos que ocorrem em plasmas naturais e de laboratório,

sendo por exemplo utilizadas na explicação mais aceita dos fenômenos de emissões solares conhecidas como emissões tipo II e tipo III. O grupo de plasmas do Instituto de Física da UFRGS tem participado dessa retomada e contribuído com estudos sobre fenômenos associadas à presença de um feixe de partículas percorrendo um plasma, desenvolvendo abordagens numéricas tanto em uma quando em duas dimensões.

O objetivo desta dissertação é apresentar um estudo da interação feixe plasma usando a teoria de turbulência fraca. Para introduzir a formulação teórica a ser empregada, iniciaremos apresentando uma introdução à teoria cinética, discutindo as condições que levam à aproximação de Vlasov. Abordaremos a solução do sistema Vlasov-Maxwell, apresentando como exemplo o caso de ondas eletrostáticas em um plasma e discutindo o amortecimento de Landau e a instabilidade que pode ocorrer no caso de uma função distribuição com um feixe de partículas. Faremos também uma breve introdução à teoria quase-linear e apresentaremos as equações da teoria de turbulência fraca. Como aplicação do formalismo, desenvolveremos essas equações considerando um sistema bidimensional no espaço de número de ondas e de velocidades, levando em conta efeitos quase-lineares, de flutuações espontâneas e de espalhamento onda-partícula, usando coordenadas polares. Em seguida descreveremos um código numérico que foi desenvolvido visando solução numérica do sistema de equações acopladas resultante do desenvolvimento teórico em coordenadas polares, e apresentaremos resultados obtidos considerando como estado inicial um plasma Maxwelliano na presença de um feixe tênue, comparando com resultados que aparecem em trabalhos publicados na literatura e discutindo ao final algumas perspectivas para continuidade do trabalho.

Capítulo 2

Teoria cinética

Introdução

A teoria cinética é uma teoria estatística complexa e auto-consistente, que permite estudar detalhes do plasma que outras teorias não descrevem. Especificamente no estudo de instabilidades dependentes da função distribuição das partículas, permitindo estudar funções quase-maxwellianas, kappa, entre outras.

Neste capítulo vamos fazer uma introdução à teoria cinética baseados no capítulo 7 do livro [1].

Para obter uma descrição formal do plasma podemos definir uma função $N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ que contém a informação de todo o sistema, isto é, posição e velocidade das partículas em qualquer instante de tempo. Definimos a função

$$\begin{aligned} N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{1 \leq i \leq N_\alpha^T} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha i}(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha i}(t)], \\ &= \sum_{1 \leq i \leq N_\alpha^T} \delta[\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\alpha i}(t)], \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ e o subíndice α diferencia os diferentes tipos de partículas do sistema. Agora pode-se fazer o cálculo do número total de partículas $N_\alpha^T(t)$ num instante de tempo t :

$$N_\alpha^T(t) = \int d^3x d^3v N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (2.2)$$

2.1 Equações do sistema

Precisamos equações de movimento para as partículas. Essas equações dependem de campos, e portanto precisamos também de equações para os campos.

2.1.1 Equações das partículas

As equações de movimento das partículas estão dadas pela ação dos campos pela força de Lorentz.

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right). \quad (2.3)$$

O super-índice M enfatiza que são campos microscópicos, e a aspa quer dizer que as partículas interagem somente com os campos das outras partículas. Pode-se escrever mais uma equação se o número de partículas é conservado no espaço de fase,

$$\frac{dN_\alpha}{dt} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla N_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \nabla_v N_\alpha = 0. \quad (2.4)$$

Esta nova equação é chamada *equação de Klimontovich-Dupree*.

2.1.2 Equações dos campos

Podemos escrever os campos microscópicos das partículas em termos da nova função $N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}^M &= 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha d^3v, \\ \nabla \times \mathbf{E}^M &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^M}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^M &= 0, \text{ e} \\ \nabla \times \mathbf{B}^M &= \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^M}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2 Definição estatística

A função $N_\alpha(\mathbf{X}, t)$ não é uma função estatística, precisamos definir uma nova função densidade de probabilidade f_N que contenha a informação estatística sobre todas as

configurações possíveis para as partículas do sistema,

$$f_N = f_N(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{X}_{\alpha N}; \mathbf{X}_{\beta 1}, \dots, \mathbf{X}_{\beta N}). \quad (2.6)$$

Esta nova função de probabilidade está normalizada

$$\int f_N \prod_{\eta} d^6 \mathbf{X}_{\eta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\eta N} = 1, \quad (2.7)$$

onde η é o tipo de partícula. Mas trabalhar com uma função que contém toda a informação do sistema é muito complexo, para maior simplicidade calculamos a função distribuição para uma partícula integrando sobre todas as outras coordenadas

$$f_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha 1}) = V \int f_N d\mathbf{X}_{\alpha 2} \dots d\mathbf{X}_{\alpha N} \prod_{\eta} d^6 \mathbf{X}_{\eta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\eta N}. \quad (2.8)$$

De acordo com essa definição, a probabilidade de encontrar uma partícula em uma região do espaço de fase entre (\mathbf{x}, \mathbf{v}) e $(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \mathbf{v} + \delta\mathbf{v})$ é dada por

$$\frac{1}{V} f_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha 1}) d^6(\mathbf{X}_{\alpha 1}), \quad (2.9)$$

onde V é o volume total do sistema. Mas sabemos que a probabilidade de encontrar a partícula num ponto \mathbf{x} pode ser alterada pela presença de uma segunda partícula em $\mathbf{x}' \approx \mathbf{x}$, então a probabilidade de encontrar as duas partículas na região $(\mathbf{x}_{\alpha 1}, \mathbf{x}_{\alpha 2}, \mathbf{v}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 2})$ e $(\mathbf{x}_{\alpha 1} + \delta\mathbf{x}_{\alpha 1}, \mathbf{x}_{\alpha 2} + \delta\mathbf{x}_{\alpha 2}, \mathbf{v}_{\alpha 1} + \delta\mathbf{v}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 2} + \delta\mathbf{v}_{\alpha 2})$ é,

$$\frac{1}{V^2} f_{\alpha 1, \alpha 2}(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \mathbf{X}_{\alpha 2}, t) d^6(\mathbf{X}_{\alpha 1}) d^6(\mathbf{X}_{\alpha 2}). \quad (2.10)$$

A função $f_{\alpha\beta}$ é obtida integrando a função f_N sobre todas as demais coordenadas, exceto $\mathbf{X}_{\alpha 1}$ e $\mathbf{X}_{\alpha 2}$, de forma similar ao que foi feito na equação (2.8). Esta função de probabilidade depende da interação das partículas. No caso em que as partículas não interagem a probabilidade de encontrar as duas partículas em uma configuração é o produto das probabilidades individuais ($f_{\alpha 1, \alpha 2} = f_{\alpha 1} f_{\alpha 2}$).

Distribuições dependendo de coordenadas de três ou mais partículas, $f_{\alpha\beta\gamma}$, $f_{\alpha\beta\gamma\delta}, \dots$, podem ser obtidas da mesma forma usada para a obtenção de f_{α} e $f_{\alpha\beta}$. Ou seja, integrando a f_N sobre as coordenadas de todas as demais partículas.

A função f_N permite obter o valor médio estatístico de qualquer função, como o número médio de partículas

$$\begin{aligned}\langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) \rangle &= \int f_N N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^{6N} X, \\ &= \bar{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t),\end{aligned}\quad (2.11)$$

onde $\bar{n}_\alpha = N_\alpha^T/V$ é a densidade de partículas da espécie α e $d^{6N}(X)$ é o elemento de volume. A média conjunta de $\langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t) \rangle$ é

$$\langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t) \rangle = \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) + \delta_{\alpha\beta} \bar{n}_\alpha \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') f_\alpha(\mathbf{X}, t), \quad (2.12)$$

onde foi tomado o limite termodinâmico $V \rightarrow \infty$.

Agora podemos fazer as médias sobre os campos microscópicos, obtendo os campos médios

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \langle \mathbf{E}^M \rangle = \int f_N \mathbf{E}^M d^{6N} X, \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{B}^M \rangle = \int f_N \mathbf{B}^M d^{6N} X.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Como já foi dito, em sistemas com grande número de partículas seria muito complexo e até mesmo inviável trabalhar com a função distribuição f_N . Por isso vamos trabalhar com a função distribuição para uma partícula.

Fazendo a média da equação de Klimontovich-Dupree (2.4) obtemos

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{\bar{n}_\alpha m_\alpha} \left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \nabla_v N_\alpha \right\rangle = 0, \quad (2.14)$$

que pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \\ = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \nabla_v \frac{N_\alpha}{\bar{n}_\alpha} \right\rangle - \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right].\end{aligned}\quad (2.15)$$

Pode ser mostrado que o termo do lado direito da equação acima depende da função distribuição para duas partículas, $f_{\alpha\beta}$. Esse termo está portanto relacionado à interação entre partículas do plasma, ou seja, relacionado às *correlações* entre partículas.

Como o termo do lado direito da equação depende da função distribuição para duas partículas, é preciso obter uma equação para $f_{\alpha\beta}$. Essa pode ser também obtida com uso da equação de Klimontovich-Dupree, mas verifica-se que depende da função distribuição para três partículas, $f_{\alpha\beta\gamma}$. Prosseguindo, obtém-se o que se conhece como *cadeia de equações estatísticas*, envolvendo todas as ordens de correlações entre partículas.

2.3 Cadeia de equações cinéticas

Para melhor entender a estrutura da cadeia de equações estatísticas, vamos considerar uma situação relativamente simples, fazendo a aproximação eletrostática $\mathbf{B}^M = 0$, e ignorando efeitos retardados ($v_{ter} \ll c$, onde v_{ter} é a velocidade térmica). Pode-se então escrever o campo elétrico como $\mathbf{E}^M = -\vec{\nabla}\psi^M$, onde

$$\psi^M(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{N_{\alpha}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' d^3v'. \quad (2.16)$$

Para partículas reescrevemos explicitamente a equação (2.15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{X}'} - \sum_{\beta} \bar{n}_{\beta} q_{\beta} \int f_{\beta}(\mathbf{X}') \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}(\mathbf{X})}{\partial v} dX', \\ = \sum_{\beta} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{\bar{n}_{\alpha} m_{\alpha}} \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\partial}{\partial v} ((N_{\alpha}(\mathbf{X}) N_{\beta}(\mathbf{X}'))' - \bar{n}_{\alpha} f_{\alpha} \bar{n}_{\beta} f_{\beta}) dX', \\ = \sum_{\beta} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{m_{\alpha}} \bar{n}_{\beta} \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \frac{\partial}{\partial v} (f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) - f_{\alpha} f_{\beta}) dX', \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde foi usada a identidade (2.12). A equação (2.17) inclui uma função distribuição para duas partículas, $f_{\alpha\beta}$, de modo que precisamos de mais uma equação. Como já foi mencionado ao final da seção 2.2, procedemos de forma similar ao que foi feito para obtenção da equação para a f_{α} e obtemos uma equação para $f_{\alpha\beta}$, que depende de $f_{\alpha\beta\gamma}$. Fazendo este cálculo iterativamente encontramos uma cadeia de equações, formando o que se conhece como *hierarquia BBGKY* (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon).

As funções distribuição de mais de uma partícula podem ser expressas em termos de funções distribuição de uma partícula e de correlações. Por exemplo, as funções distribuição para duas e três partículas podem ser escritas como:

$$f_{\alpha\beta} = f_{\alpha}(\mathbf{X}, t) f_{\beta}(\mathbf{X}', t) + g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma} = f_{\alpha}(\mathbf{X}, t) f_{\beta}(\mathbf{X}', t) f_{\gamma}(\mathbf{X}'', t) + g_{\beta\gamma}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'', t) f_{\alpha}(\mathbf{X}, t) \\ + g_{\alpha\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'', t) f_{\beta}(\mathbf{X}', t) + g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) f_{\gamma}(\mathbf{X}'', t) + g_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'', t), \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde os termos $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta\gamma}$ são as correlações para duas e três partículas.

No caso de grande número de partículas é complicado ou até mesmo inviável trabalhar com essa cadeia de equações. No entanto, existem aproximações que podem ser feitas para as correlações de forma que possamos obter um conjunto fechado de equações para as funções distribuição reduzidas.

Um exemplo prático para ver a relevância das correlações é pegar um gás não ionizado (As duas próximas subseções estão baseadas no trabalho [2]).

2.3.1 Gás neutro (não ionizado)

Se temos um gás neutro e rarefeito com uma distância característica r_0 dentro da qual é significativa a interação entre as partículas, e onde a distância média entre as partículas é dada por $n^{-1/3}$ (n a densidade do gás), muito maior do que r_0 , então pode-se considerar a correlação entre duas partículas da ordem de nr_0^3 [2]. Portanto a $g_{\alpha\beta} \ll 1$ e a correlação de ordem mais alta deve ser ainda menor, $g_{\alpha\beta\gamma} \sim 0$, de modo que podemos fechar a cadeia de equações estatísticas desprezando o efeito da correlação ternária.

2.3.2 Parâmetro do plasma

Nosso caso imaginemos um plasma com um determinado íon que gera um potencial de forma a atrair os elétrons que o circundam, onde os elétrons que estão a uma distância muito superior a um dado comprimento λ_D , não sentem a presença do mesmo. Isto ocorre devido a blindagem da carga do íon feita pelos elétrons que estão mais próximos dele. Este comprimento λ_D é chamado de comprimento de Debye, definido como

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi \bar{n}_e e^2}}, \quad (2.20)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, T_e , \bar{n}_e e e são a temperatura, densidade e carga eletrônica; este comprimento em torno do íon é o raio de uma esfera chamada esfera de Debye.

No caso em que a energia térmica do elétron é muito maior do que a energia de interação coulombiana entre ele e os outros componentes do plasma, podemos abordar o problema aproximadamente como o de uma partícula livre. Podemos escrever que

$$\frac{\text{Módulo energia média da interação}}{\text{Energia cinética média}} \propto \frac{(1/\bar{n}_e^{-1/3})}{T_e} \ll 1. \quad (2.21)$$

Agora podemos encontrar o número de elétrons numa esfera de raio λ_D (N_D) e definir um parâmetro que é o inverso de N_D ,

$$\sigma_D = \frac{1}{N_D} \propto \frac{\bar{n}_e^{1/2}}{T_e^{3/2}}, \quad \text{onde } N_D = \frac{4}{3}\pi \lambda_D^3 \bar{n}_e. \quad (2.22)$$

Usando (2.21) vemos que no caso de energia de interação muito menor do que a energia cinética teremos $\sigma_D \ll 1$. Podemos definir um parâmetro que é proporcional a essa quantidade σ_D para medir a importância da correlação entre partículas, conhecido como *parâmetro de plasma*,

$$g \equiv \frac{1}{\bar{n}_e \lambda_D^3}. \quad (2.23)$$

2.4 Sistema de Vlasov-Maxwell

A mais simples aproximação que pode ser feita na cadeia de equações estatísticas do plasma é aquela em que desprezamos todas as possíveis correlações entre as partículas. A equação assim

obtida para f_α é conhecida como *equação de Vlasov*, definida como:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v f_\alpha = 0. \quad (2.24)$$

Esta é uma boa aproximação quando são plasmas rarefeitos e suficientemente quentes, isto é, que o tempo das oscilações do plasma é muito menor do que seu tempo de relaxamento.

A aproximação de Vlasov tem a propriedade de conservar o número de partículas.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \bar{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v d^3 x = 0. \quad (2.25)$$

Os campos que aparecem na equação de Vlasov são campos médios. Equações para os campos médios podem ser obtidas fazendo a média sobre as equações para os campos microscópicos. Ou seja, fazendo a média sobre as equações (2.5), que leva ao seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \text{ e} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

O sistema de equações (2.24) e (2.26) é chamado *sistema Vlasov-Maxwell*.

2.4.1 Soluções no equilíbrio

O sistema tem muitos estados metaestáveis ou soluções quase-estacionárias onde a f_α não tem variação no tempo, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\alpha 0} = 0. \quad (2.27)$$

Estas soluções estacionárias satisfazem a seguinte equação

$$\left[\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v \right] f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (2.28)$$

Pode ser mostrado que a solução estacionária $f_{\alpha 0}$ pode ser qualquer função de coordenadas e velocidades da forma seguinte,

$$f_{\alpha 0}(a(\mathbf{x}', \mathbf{v}'), b(\mathbf{x}', \mathbf{v}') \dots), \quad (2.29)$$

onde a e b são funções conhecidas em física clássica como constantes de movimento,

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt'} &= \frac{da}{d\mathbf{x}'} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} + \frac{da}{d\mathbf{v}'} \cdot \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = 0, \\ &= \frac{da}{d\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{v}' + \frac{da}{d\mathbf{v}'} \cdot \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = 0.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Um exemplo comum são funções dependentes das componentes da velocidade, que são constantes de movimento para um plasma com $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = 0$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}f_{\alpha 0} &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)_{\alpha}^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT}v^2\right)_{\alpha}, \\ f_{\alpha 0} &= \frac{v_0}{2} \frac{1}{v^4 + v_0^4}, \\ f_{\alpha 0} &= v_0 \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z^2 - v_0^2), \text{ e} \\ f_{\alpha 0} &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)_{\alpha}^{1/2} \delta(v_x) \delta(v_y) \exp\left(-\frac{m[v_z^2 - v_0^2]}{2kT}\right)_{\alpha}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Estas soluções são para estados particulares do plasma.

No próximo capítulo se faz a linearização das equações do sistema Vlasov-Maxwell para encontrar a solução por meio de transformadas.

Capítulo 3

Teoria de Vlasov de ondas do plasma

Neste capítulo estudaremos a teoria de Vlasov do plasma linearizando o sistema de equações de Vlasov-Maxwell e fazendo uma aproximação eletrostática, para oscilações de baixa e alta frequência no plasma. Na teoria de Vlasov a interação entre partículas carregadas ocorre por meio dos campos médios, sendo estes consistentes com as densidades de carga e correntes elétricas. Nesta aproximação são ignoradas as interações de curto alcance, isto é, supõe-se que os tempos de colisões são muito maiores que os tempos de oscilação do plasma. O conteúdo desta seção está baseada na seção 8 de [1].

3.1 Linearização das equações

No sistema Vlasov-Maxwell os campos são dependentes da função distribuição e a equação para as partículas é não-linear, sendo difícil resolver o sistema de equações. Podemos fazer uma abordagem com teoria de perturbações linearizando as equações.

Para isto se pegam soluções de equilíbrio mais uma pequena perturbação na função distribuição e nos campos $(f_{\alpha 1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$, tais que:

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \epsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{E}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{E}_{\alpha 1}(\mathbf{x}, t), \text{ e} \\ \mathbf{B}_{\alpha}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}_{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{B}_{\alpha 1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Inserindo a (3.1) em (2.27) podemos separar as equações de ordem zero e de ordem um, desprezando termos de ordem ϵ^2 e de ordem superior,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_{\alpha 0} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c}) \cdot \nabla_v f_{\alpha 0} &= 0, \\
\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_0 &= 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \\
\vec{\nabla} \times \mathbf{E}_0 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t}, \text{ e} \\
\vec{\nabla} \times \mathbf{B}_0 &= \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}_0}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_{\alpha 1} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c}) \cdot \nabla_v f_{\alpha 1}, \\
= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c}) \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}, \\
\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}_1 &= 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \\
\vec{\nabla} \times \mathbf{E}_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \text{ e} \\
\vec{\nabla} \times \mathbf{B}_1 &= \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}_1}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

O conjunto de equações (3.2) e (3.3) é válido para tempos menores que os tempos de colisão, e pode ser resolvido por métodos convencionais, permitindo estudar algumas propriedades para oscilações de pequena amplitude no plasma.

3.2 Aproximação eletrostática

Para investigar a solução das equações obtidas na aproximação linear, vamos considerar como exemplo um caso relativamente simples. Consideremos um plasma uniforme livre de campos de equilíbrio. Podemos então escrever

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0, \quad f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z). \tag{3.4}$$

Também temos que em $t = 0$ não se tem carga líquida nem correntes internas, ou seja,

$$\rho_q = \sum_\alpha q_\alpha \bar{n}_\alpha \int f_{\alpha 0} d^3 v = 0, \text{ e} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha q_\alpha \bar{n} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d^3 v = 0. \tag{3.6}$$

Num tempo inicial $t = 0$ aparece uma pequena perturbação na função distribuição que pode ser causada por um deslocamento de uma ou várias cargas no plasma

$$f(t = 0) = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z) + \epsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t = 0), \tag{3.7}$$

esta perturbação $f_{\alpha 1}$ é eletrostática, isto é, somente desloca a carga sem gerar correntes, portanto, temos que

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \phi_1. \quad (3.9)$$

Nesta aproximação, as equações para $f_{\alpha 1}$ e para o potencial ϕ_1 ficam

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f_{\alpha 1} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla \phi_1 \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}, \quad (3.10)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 1} d^3 v. \quad (3.11)$$

É conveniente encontrar a solução simultânea das equações diferenciais (3.10) e (3.11). Para isto se faz uma transformada de Fourier nas coordenadas e de Laplace no tempo, definidas como

$$f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 x, \quad (3.12)$$

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi_1(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 x, \quad (3.13)$$

$$\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \int_0^\infty f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) e^{-pt} dt, \quad \text{Re}(p) \geq p_0, \quad (3.14)$$

$$\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(p) = \int_0^\infty \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{-pt} dt, \quad (3.15)$$

onde p_0 é uma constante positiva (ver figura 3.1) que garante que a integral converge. As transformadas inversas são dadas por

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dk \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) \frac{dp}{2\pi i}, \quad (3.16)$$

$$\phi_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dk \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(p) \frac{dp}{2\pi i}. \quad (3.17)$$

Usando as transformadas (3.16) e (3.17), as equações (3.10) e (3.11) ficam mais simples

$$(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} = f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t = 0) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}) \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}, \quad (3.18)$$

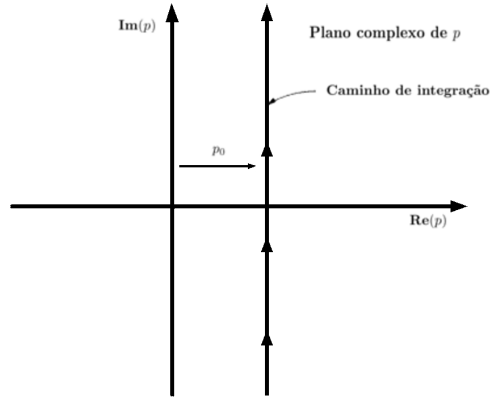
$$\mathbf{k}^2 \tilde{\phi}_{\mathbf{k}} = 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} d^3 v. \quad (3.19)$$

Usando (3.18) e (3.19), obtemos

$$\mathbf{k}^2 \tilde{\phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \frac{f_{\alpha \mathbf{k}}(t=0)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v}{1 + 4\pi \sum_\alpha \frac{\bar{n}_\alpha q_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}}{ip - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v}, \quad \text{Re}(p) \geq p_0. \quad (3.20)$$

O denominador é a função dielétrica das ondas eletrostáticas com frequência $\omega = ip$.

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 + 4\pi \sum_\alpha \frac{\bar{n}_\alpha q_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}}{ip - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v. \quad (3.21)$$


 FIGURA 3.1: p_0 , fica à direita de todos os polos da integral (adaptada de [1]).

Para simplificar as integrais definimos uma transformada nas velocidades (integrando nas velocidades perpendiculares)

$$F_{\alpha 0}(u) \equiv \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) dv, \quad (3.22)$$

$$\tilde{F}_{\alpha \mathbf{k}} \equiv \int \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) dv.$$

Reescrevendo o sistema de equações

$$\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \frac{1}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left[f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}) \tilde{\phi}_{\mathbf{k}} \right], \quad (3.23)$$

$$\tilde{\phi}_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{|\mathbf{k}|^3} \frac{1}{D(\mathbf{k}, ip)} \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha \mathbf{k}}(u, t=0)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du, \quad (3.24)$$

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\partial F_{\alpha 0}(u)/\partial u}{u - ip/|\mathbf{k}|} du \quad \text{Re}(p) \geq p_0, \quad (3.25)$$

onde $\omega_{p\alpha} = (4\pi n_{\alpha 0} q_{\alpha}^2 / m_{\alpha})^{1/2}$ é a frequência do plasma.

Fazendo a transformada inversa, obtemos

$$k^2 \phi_{\mathbf{k}}(t) = \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha \mathbf{k}}(u, t=0)}{p+i|\mathbf{k}|u} du}{D(\mathbf{k}, ip)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (3.26)$$

A inversão analítica da integral do potencial somente pode-se fazer para algumas funções iniciais longe do equilíbrio (*long-time*). As soluções são dadas no limite assintótico regidas pelos modos normais de oscilação do plasma, as solução perto da perturbação dependem das características da perturbação inicial.

3.3 Solução assintótica para $\phi_{\mathbf{k}}(t)$

Para resolver (3.26) precisamos lidar com integrais que têm polos no denominador. Para isso usaremos um método conhecido como *método de Landau*. Este consiste em fazer uma integral

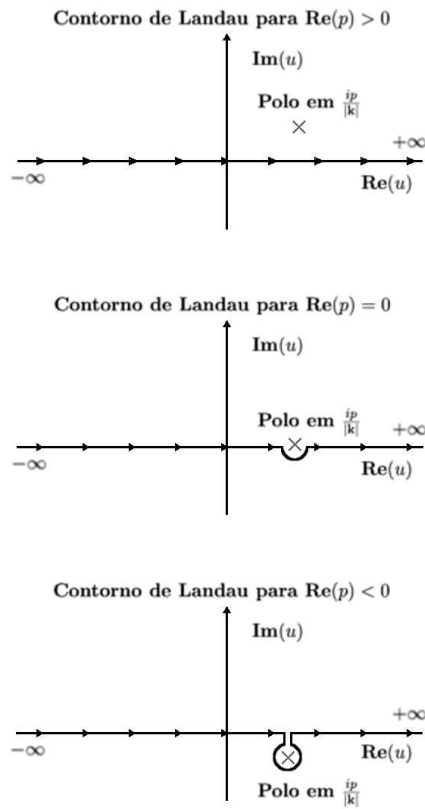


FIGURA 3.2: Contorno de Landau (adaptada de [1]).

de caminho no plano complexo deformando o contorno sem passar pelos polos. No caso de $\phi_{\mathbf{k}}$ se tem que $Re(p) \geq p_0$ para garantir a convergência da integral para $t > 0$. Analisando a equação (3.24), vemos que a integral é da forma

$$h(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du, \quad Re(p) > 0, \quad (3.27)$$

é conveniente que a $f(u)$ seja uma função analítica em $|u| < \infty$; (as funções distribuição Maxwellianas satisfazem esta condição) para calcular a integral se deforma o contorno de integração sem passar pelos polos da $u = ip/|\mathbf{k}|$, como se mostra na figura 3.2.

Agora podemos separar as integrais

$$h(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du, & Re(p) > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du + 2\pi i f\left(\frac{ip}{|\mathbf{k}|}\right), & Re(p) \leq 0. \end{cases}$$

Os polos correspondem aos zeros de $D[\mathbf{k}, ip_j(\mathbf{k})] = 0$.

Na Figura 3.3 se mostram os polos e o contorno de Landau deformado. Agora observando a figura podemos dividir a integral da seguinte forma:

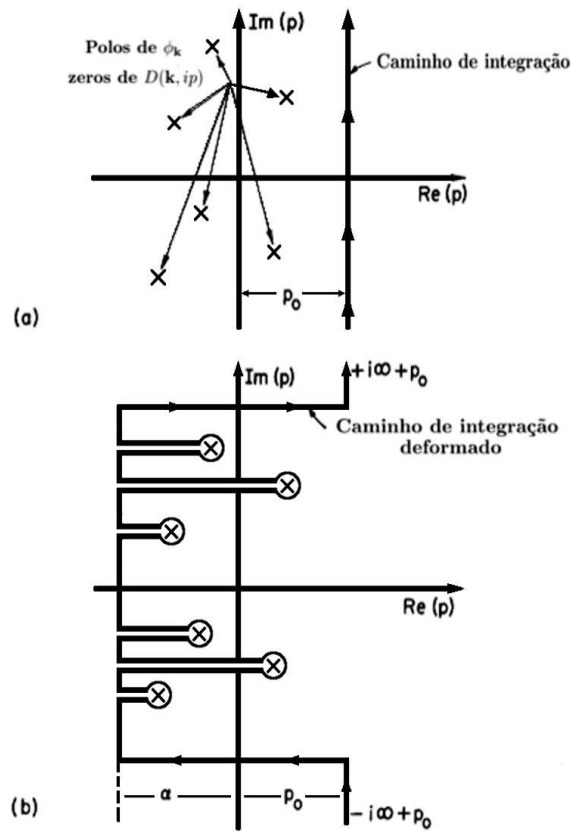


FIGURA 3.3: Polos da integral. Deformação do contorno de integração (adaptada de [1]).

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{k}}(t) = & \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t} + \int_{-i\infty+p_0}^{-i\infty-\alpha} \tilde{\phi}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}, \\ & + \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \tilde{\phi}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} + \int_{i\infty-\alpha}^{i\infty+p_0} \tilde{\phi}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde os polos estão localizados em p_j de $\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(p)$, e R é o resíduo ($R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(p)$). Pode se ver avaliando (3.28) no infinito a contribuição da segunda e quarta integral é muito pequena [$p \rightarrow \infty, \tilde{\phi} \rightarrow 0$] e a terceira integral diminui exponencialmente com o tempo, ou seja quando [$t \rightarrow \infty$] (com $t < t_{coll}$), ficamos somente com

$$\phi_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t}. \quad (3.29)$$

No caso dos polos que ficam à esquerda do eixo $\text{Re}(p_j) < 0$, o que significa um amortecimento da perturbação, enquanto que para os polos que ficam à direita do eixo se tem uma instabilidade, ou seja, um crescimento do campo elétrico. Por outro lado, a parte imaginária de cada p_j corresponde a um comportamento oscilatório, de modo que cada termo na soma que aparece na equação (3.29) representa uma oscilação amortecida ou amplificada. Podemos colocar a expressão em forma mais familiar definindo uma frequência angular, como $\omega = ip$, onde a parte real dá conta das oscilações e a parte imaginária dá conta do amortecimento ou instabilidade da

perturbação. Reescrevendo a equação (3.29) usando a variável ω , temos

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) = \sum_j R_j e^{-i\omega_j t}, \quad (3.30)$$

onde $\omega_j = \omega_r + i\omega_i$, esta frequência satisfaz

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\partial F_{\alpha 0}(u)/\partial u}{u - \omega/|\mathbf{k}|} du = 0. \quad (3.31)$$

Muitas vezes se tem que $\text{Re}[\omega(\mathbf{k})] \gg \text{Im}[\omega(\mathbf{k})]$, isto é, que as oscilações que aparecem perduram depois da perturbação inicial. Estas oscilações de frequências bem definidas, são conhecidas como modos normais de plasma e cumprem a relação (3.31).

Podemos encontrar os modos normais procurando os zeros de $D(\omega, \mathbf{k})$

$$D[\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})] = 0. \quad (3.32)$$

Esta é a *relação de dispersão*, onde ω é uma função que depende de \mathbf{k} ou vice-versa. Na seguinte seção se faz um exemplo de encontrar a relação de dispersão.

3.4 Ondas eletrostáticas num plasma

Na seção anterior apresentamos de forma breve a solução das equações da aproximação linear, usando um método que usa transformadas de Fourier-Laplace. É possível abordar o problema de forma mais “prática”, usando transformadas de Fourier e usando um contorno que passa por baixo dos polos, nas integrais em dv , o que é conhecido como *contorno de Landau*. Vamos utilizar essa abordagem para estudar em mais detalhe as ondas eletrostáticas que podem ocorrer em um plasma. Começamos com as equações em ordem um,

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \phi_1 \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}, \quad (3.33)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d^3v, \quad (3.34)$$

e escrevemos as perturbações em termos de transformadas de Fourier.

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\alpha \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\omega t}, \quad (3.35)$$

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\omega t}. \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) e (3.36) em (3.33), obtemos

$$f_{\alpha \mathbf{k}} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \phi_{\mathbf{k}}. \quad (3.37)$$

Inserindo (3.37) em (3.34)

$$k^2 \left(1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \right) = 0. \quad (3.38)$$

A solução não trivial se tem para

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v = 0. \quad (3.39)$$

Mas a integral somente se pode resolver conhecendo o contorno de integração de v . Então nesse caso temos o contorno de integração da figura 3.2,

$$\int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v \equiv \int_L \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 v, \quad (3.40)$$

onde L é o contorno de Landau.

As raízes da relação de dispersão são conhecidas como modos normais de oscilação do plasma. Estes são causados por uma perturbação inicial e persistem no tempo, porém, estes são modos reais e podem ter uma parte negativa muito pequena. No caso contrário em que $|\omega_i|$ é grande, com ω_i negativo, a perturbação é amortecida rapidamente. Para encontrar os modos normais do plasma fazemos uma expansão na integral ao redor de $\omega_i = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{v}) d^3 v}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{v}) d^3 v}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r - i\epsilon} + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{v}) d^3 v}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r - i\epsilon} \right) + \dots \quad (3.41)$$

Reduzindo as integrais para uma dimensão

$$F_{\alpha 0}(u) = \int f_{\alpha 0}(v) \delta \left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|} \right) dv. \quad (3.42)$$

Fazendo uso da relação

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(u) du}{u - \frac{\omega_r}{\mathbf{k}} - i\epsilon} = \int_C \frac{G(u) du}{u - \frac{\omega_r}{\mathbf{k}}} + \pi i G \left(u = \frac{\omega_r}{\mathbf{k}} \right), \quad (3.43)$$

a equação (3.39) fica

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \left(1 + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \right) \left[\int_C \frac{\partial_u F_{\alpha 0}(u)}{u - \frac{\omega_r}{|\mathbf{k}|}} du + \pi i \left(\frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} \right)_{u = \frac{\omega_r}{|\mathbf{k}|}} \right] = 0. \quad (3.44)$$

Esta relação de dispersão somente é válida para plasma livre de campos magnéticos.

Agora precisamos os zeros de $D(\mathbf{k}, \omega)$. Na seção seguinte procuraremos estes modos normais para uma função distribuição maxwelliana e estudando os limites de alta e baixa frequência.

3.4.1 Ondas de alta frequência

Para estudar os modos normais do plasma precisamos conhecer a função distribuição, neste caso vamos considerar uma função distribuição maxwelliana. Primeiro encontraremos a solução da

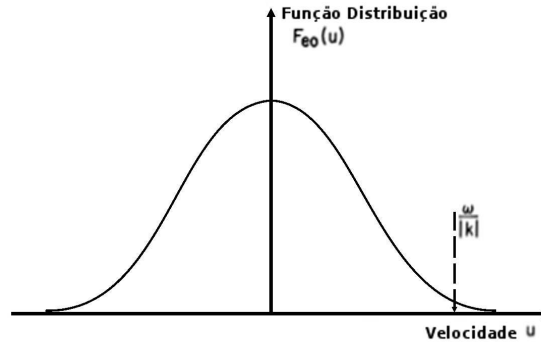


FIGURA 3.4: Velocidade de fase muito maior à velocidade térmica (adaptada de [1]).

relação de dispersão no limite de ondas de alta frequência, conhecidas como *oscilações de Langmuir*, as ondas de alta frequência estão no limite para partículas com velocidade muito maior do que sua velocidade térmica ($\omega/|\mathbf{k}| \gg v_{ter}$) como se mostra na Figura 3.4. Expandindo a primeira integral de (3.44) em série de Taylor

$$-\int_C \frac{\partial_u F_{\alpha 0}}{u - \omega_r/|\mathbf{k}|} du = \int \partial_u F_{\alpha 0} \left[\frac{1}{\omega_r/|\mathbf{k}|} + \frac{u}{(\omega_r/|\mathbf{k}|)^2} + \frac{u^2}{(\omega_r/|\mathbf{k}|)^3} + \dots \right] du. \quad (3.45)$$

Definimos a função distribuição maxwelliana para os elétrons como

$$F_{e0} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_e u^2}{2k_B T_e}}. \quad (3.46)$$

Podemos ignorar o termo de íons, cuja contribuição é muito pequena devido à razão das massas ($m_e/m_i \ll 1$). Nesta aproximação avaliamos a integral

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u F_{e0}}{u - \omega_r/|\mathbf{k}| - i\epsilon} du = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} + 3 \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_r^4} k^2 \lambda_{De}^2 + \dots + \frac{\pi i \omega_{pe}^2}{k^2} \partial_u F_{e0}(u)|_{u=\omega_r/|\mathbf{k}|}. \quad (3.47)$$

Agora para encontrar os normais de oscilação usamos a aproximação $|\omega_i|/|\omega_r| \ll 1$, isto é, que as ondas do plasma são fracamente amortecidas. Expandindo $D(\mathbf{k}, \omega)$ em séries de Taylor ao redor de ω_i obtemos

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega) &\simeq D(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \left. \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_r} \dots, \\ &= D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r) + \omega_i \left[i \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} - \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega_r} \dots. \end{aligned}$$

A parte real e a parte imaginária da frequência se obtém de aproximar

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) \simeq 0, \quad (3.48)$$

e cortar a série até segunda ordem, obtendo a seguinte relação para ω_i

$$\omega_i = - \frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial_\omega D_r(\mathbf{k}, \omega)_{\omega_r}},$$

logo, usando as equações (3.48) e (3.49) para uma distribuição Maxwelliana (3.46) no limite de alta frequência (3.47) obtemos

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2), \quad (3.49)$$

$$\omega_r \approx \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) \text{ e} \quad (3.50)$$

$$\omega_i = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{|k^3 \lambda_{De}^3|} e^{\left(\frac{1}{2k\lambda_{De}^2} + \frac{3}{2} \right)}. \quad (3.51)$$

A parte real da frequência é igual à que se obtém usando teoria de fluidos. Além disso a teoria cinética mostra que existe uma parte imaginária negativa, originando um leve amortecimento das ondas conhecido como *amortecimento de Landau*. O sinal negativo de ω_i está associado ao fato de que a parte imaginária de D_i depende da derivada da função de distribuição calculada na velocidade de ressonância, conforme mostra a equação (3.47), derivada essa que é negativa no caso de uma distribuição monotonicamente decrescente, como é o caso da distribuição Maxwelliana.

3.4.2 Ondas de baixa frequência

Se consideramos a contribuição dos íons em ondas de alta frequência quando as temperaturas $T_i \approx T_e$, esta é muito pequena. Mas quando se tem elétrons quentes ($T_i \ll T_e$) a contribuição dos elétrons fica mais reduzida, enquanto a contribuição dos íons em ondas de baixa frequência ganha importância no intervalo (ver Figura 3.5)

$$\left(\frac{k_B T_i}{m_i} \right)^{1/2} < \frac{\omega}{k} < \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (3.52)$$

Podemos estudar a dinâmica dos íons neste intervalo procurando os zeros de $D(\omega, \mathbf{k})$. Para modos normais ($|\omega_i| \ll \omega_r$) do plasma avaliamos a integral dos íons usando (3.52)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u F_{i0}}{\omega_r/|\mathbf{k}| - u} du \approx \int \partial_u F_{i0} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_r} + \frac{|\mathbf{k}|^2 u}{\omega_r^2} + \frac{|\mathbf{k}|^3 u^2}{\omega_r^3} + \frac{|\mathbf{k}|^4 u^3}{\omega_r^4} \right) du, \quad (3.53)$$

e para elétrons temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u F_{e0}}{\omega_r/|\mathbf{k}| - u} du &\approx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u F_{e0}}{u} \left(1 + \frac{\omega}{ku} + \frac{\omega^2}{k^2 u^2} \right), \\ &\approx - \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\partial F_{e0}}{\partial u^2} du. \end{aligned} \quad (3.54)$$

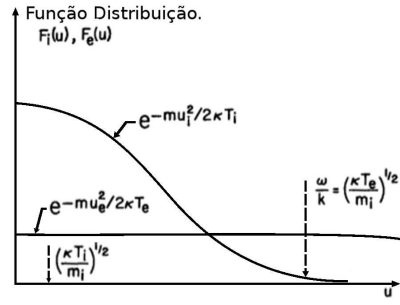


FIGURA 3.5: Localização das ondas íon-acústicas (adaptada de [1]).

Fazendo o mesmo procedimento da seção anterior encontramos $D_r(\omega, \mathbf{k})$, $D_i(\omega, \mathbf{k})$ e a relação de dispersão

$$D_r = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (3.55)$$

$$D_i = \pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k_B T_{\alpha}} \right)^{1/2} \frac{m_{\alpha}}{k_B T_{\alpha}} \frac{\omega_r}{|\mathbf{k}|} e\left(-\frac{\omega_r^2 m_{\alpha}}{2k^2 k_B T_{\alpha}}\right), \quad (3.56)$$

$$\omega_r^2 = \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \omega_i &= -\frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial_{\omega_r} D_r} \\ &= -\frac{|\omega_r| \sqrt{\pi/8}}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{3/2}} \left[\left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} e\left(-\frac{T_e/T_i}{2(1+k^2 \lambda_{De}^2)}\right) + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right], \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde

$$C_s \equiv \left(\frac{k_B T_e}{m_i} \right)^{1/2}, \quad (3.59)$$

é chamada *velocidade íon-acústica*. Essas ondas são chamadas ondas de baixa frequência ou *ondas íon-acústicas*, que no limite $k\lambda_D \ll 1$ se propagam com velocidade C_s . Quando o amortecimento é muito pequeno, isto é ($|\omega_i| \ll$), as ondas correspondem a modos normais de oscilação do plasma.

De novo os resultados são consistentes com os resultados obtidos na teoria de fluidos, mas a teoria cinética vai um pouco além. A teoria cinética não precisa de equação de estado e leva naturalmente ao aparecimento da temperatura eletrônica na relação de dispersão, consistente com a equação de estado para elétrons isotérmicos usada na teoria de fluidos. Além disso, a teoria cinética obtém o amortecimento das ondas íon-acústicas, que não é obtido na teoria de fluidos.

Na seguinte seção estudaremos a teoria “Quase-linear” que nos permitirá estudar mais detalhadamente ondas em plasmas e os novos termos obtidos na teoria cinética.

Capítulo 4

Teoria Quase-linear

Para entender mais detalhadamente o plasma, usaremos uma aproximação que vai além da teoria linear, chamada “teoria quase-linear”. Esta inclui um termo não linear a mais, permitindo estudar a evolução do plasma depois de uma perturbação inicial. Mostraremos de forma resumida como obter uma equação para a evolução da função distribuição de partículas, discutiremos propriedades da teoria quase-linear, e analisaremos o amortecimento de Landau e a instabilidade que pode ocorrer em uma função distribuição com um feixe. O conteúdo deste capítulo estão fortemente baseados no capítulo 10 de [1].

4.1 Equação da função distribuição

Consideremos um plasma não magnetizado com uma perturbação no campo elétrico e na função distribuição das partículas da forma

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1, \\ f_\alpha &= f_{\alpha 0} + \epsilon f_{\alpha 1},\end{aligned}\tag{4.1}$$

descrito pelo sistema de Vlasov-Maxwell na aproximação eletrostática,

$$\left(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_v \right) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0,\tag{4.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int d^3\mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t).\tag{4.3}$$

Uma função distribuição média $f_{\alpha 0}$, uniformemente distribuída, pode ser definida em função da média espacial da f_α

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{V} \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dx.\tag{4.4}$$

À diferença da $f_{\alpha 0}$ da teoria linear, esta muda lentamente no tempo, dando lugar a uma troca da energia das ondas do plasma com as partículas.

Para resolver o sistema de Vlasov-Maxwell usamos as transformadas de Fourier dependentes do tempo para \mathbf{E}_1 e $f_{\alpha 1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) dk, \\ f_{\alpha} &= f_{\alpha 0} + \epsilon \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f_{\alpha k}(t) dk.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Para um plasma inicialmente livre de campos médios, se tem que

$$\langle \mathbf{E}_0 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{B}_0 \rangle = 0. \quad (4.6)$$

Fazendo a média na equação (4.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \langle \nabla f_{\alpha} \rangle - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \langle \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_{\alpha} \rangle, \\ \frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial t} &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_v \cdot \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle,\end{aligned}\quad (4.7)$$

onde $\langle \mathbf{E}_1 \rangle = 0$, $\langle f_{\alpha 1} \rangle = 0$ e onde levamos em conta que a $f_{\alpha 0}$ não depende de posição. Então

$$\frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t},$$

reescrevendo (4.7)

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_v \cdot \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle, \quad (4.8)$$

sendo que a média de $f_{\alpha 0}$ muda lentamente no tempo devido aos efeitos não lineares da perturbação. Agora podemos substituir (4.1) em (4.2), logo usamos (4.8), obtendo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f_{\alpha 1} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_v \cdot \mathbf{E}_1 f_{\alpha 0} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_v \cdot (\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} - \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle), \quad (4.9)$$

sendo o segundo termo da direita da equação (4.9) da segunda ordem, pode ser desprezado.

Usando esta equação junto com a equação (4.8), ficamos com o seguinte conjunto de equações acopladas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_v \cdot \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f_{\alpha 1} &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_v \cdot \mathbf{E}_1 f_{\alpha 0}.\end{aligned}$$

Fazendo também a transformada de Fourier na variável t da equação (4.5), inserimos esta na equação (4.9), obtendo $\bar{f}_{\alpha k}$

$$\begin{aligned} (-i\omega + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\bar{f}_{\alpha k} &= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \bar{\mathbf{E}}_k \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}, \\ \bar{f}_{\alpha k} &= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\bar{\mathbf{E}}_k \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para o potencial usamos (4.3), a transformada de Laplace de (4.5) e (4.10)

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \left[\int d^3v \frac{q_\alpha}{m_\alpha} i \frac{\bar{\mathbf{E}}_k \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \right]. \quad (4.11)$$

Usando $\mathbf{E}_k = -i\mathbf{k}\phi$, a equação (4.11) fica

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^2 \phi_k &= 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \left[\int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \phi_k \right], \\ \left[1 - 4\pi \sum_\alpha \frac{\bar{n}_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha k^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \right] \phi_k &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

obtendo de novo a relação de dispersão encontrada na teoria linear, que permite encontrar os modos de oscilação do plasma.

Agora precisamos determinar uma equação para a função distribuição das partículas $f_{\alpha 0}$. Para isto, escrevemos explicitamente (4.8)

$$\partial_t f_{\alpha 0} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{V} \int d^3x \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_v f_{\alpha 1} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{V} \nabla_v \cdot \int d^3x \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1}. \quad (4.13)$$

Usando as transformadas de Fourier para \mathbf{E}_1 e $f_{\alpha 1}$, definidas na equação (4.5), e escrevendo $\mathbf{E}_k(t)$ e $f_{\alpha k'}(t)$ na forma de uma amplitude dependente de frequência (fracamente dependente do tempo) e uma oscilação rápida com a frequência obtida da relação de dispersão, obtemos o seguinte,

$$\partial_t f_{\alpha 0} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{V} \nabla_v \cdot \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_k(\omega) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} f_{\alpha k'}(\omega') e^{-i\omega(\mathbf{k}')t} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.14)$$

Usando a identidade $\int e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d^3x = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$ simplificamos (4.14) para

$$\partial_t f_{\alpha 0} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{V} \nabla_v \cdot \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(\omega) e^{-i[\omega(-\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k})]t} f_{\alpha \mathbf{k}}(\omega). \quad (4.15)$$

Fazendo uso das propriedades de simetria de $D(\omega, \mathbf{k})$ encontramos que

$$\omega(-\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) = 2i\omega_i(\mathbf{k}). \quad (4.16)$$

Para $|\omega_i|$ pequeno aproximamos

$$\mathbf{E}(\omega) e^{\omega_i t} \approx \mathbf{E}(\omega). \quad (4.17)$$

Usando (4.10) e (4.15) reescrevemos a equação para partículas

$$\partial_t f_{\alpha 0} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha V} \nabla_v \cdot \int d^3 k \frac{\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} (\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_v f_{\alpha \mathbf{k}})}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}, \quad (4.18)$$

com $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} = i\mathbf{k}\phi_{-\mathbf{k}}$

$$\partial_t f_{\alpha 0} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2 V} \nabla_v \cdot \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0})}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \phi_{\mathbf{k}} \phi_{-\mathbf{k}}. \quad (4.19)$$

Daí, $\phi_{-\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{k^2}$, então definimos

$$D_{ij} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2 V} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{k^2} \frac{k_i k_j}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}. \quad (4.20)$$

Reescrevendo (4.19)

$$\partial_t f_{\alpha 0} = \sum_{i,j} \partial_{v_i} (D_{ij} \partial_{v_j} f_{\alpha 0}). \quad (4.21)$$

A equação (4.21) é chamada *equação quase-linear de difusão no espaço das velocidades*, e descreve a dinâmica das partículas num plasma livre de campos médios, dando conta da absorção e emissão de ondas num plasma.

Para fazer uma análise reescrevemos a equação de difusão em termos da densidade de energia

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \right\rangle &= \frac{1}{8\pi V} \int d^3 x \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{(2\pi)^3} d^3 k \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^* e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}}, \\ &= \frac{1}{8\pi V} \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^*, \\ &= \int d^3 k \mathcal{E}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Onde $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{8\pi V} \frac{1}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^*$ é conhecida como densidade de energia espectral, podemos reescrever (4.20)

$$D_{ij} = 8\pi \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \int d^3 k \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2} \frac{k_i k_j}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}. \quad (4.23)$$

Na seguinte seção estudaremos propriedades desta teoria.

4.2 Propriedades da teoria quase-linear

A teoria quase-linear está baseada na aproximação de Vlasov, no entanto nesta teoria podem-se estudar algumas das propriedades. Para estudá-las vamos considerar o caso unidimensional

(1D) com $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(u)$, $\mathbf{E}_1 = \hat{x}\bar{E}_k(x)e^{ikx}$ e $u = v_x$ (pode ser estendido para três dimensões), reescrevemos a equação de difusão para 1D

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}(u, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} 8\pi \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \int_L \left[\frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}(u, t)}{\partial u} dk \right]. \quad (4.24)$$

Também podemos escrever uma equação para \mathcal{E}_k usando as equações (4.17), (4.16) e sua definição, obtendo

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = 2\omega_i \mathcal{E}_k. \quad (4.25)$$

Também reescrevemos a relação de dispersão (4.11) em 1D

$$1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k} \int_L \frac{1}{ku - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}(u)}{\partial u} du = 0. \quad (4.26)$$

4.2.1 Conservação do número de partículas

Para encontrar a conservação do número de partículas integramos (4.24) nas velocidades

$$\frac{d}{dt} \int f_{\alpha 0}(u, t) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} D_u \frac{\partial f_{\alpha 0}(u, t)}{\partial u} du = \left[D_u \frac{\partial f_{\alpha 0}(u, t)}{\partial u} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (4.27)$$

A integral é nula porque a $f_{\alpha 0}$ deve se anular para velocidades tendendo ao infinito. Portanto, a integral $\int f_{\alpha 0}(u, t) du$ é constante e o número de partículas se conserva.

4.2.2 Conservação do momento

Multiplicamos (4.24) por $\bar{n}_\alpha m_\alpha u$ e integramos sobre as velocidades para todas as partículas

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha \bar{n}_\alpha \int m_\alpha u f_{\alpha 0} du = - \sum_\alpha 2\omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du, \quad (4.28)$$

usando (4.26) e avaliando ao lado direito

$$\sum_\alpha 2\omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du = \int 2ik\mathcal{E}_k dk. \quad (4.29)$$

Como \mathcal{E}_k é simétrico em k , $\mathcal{E}_k \propto \mathbf{E}_{-k}\mathbf{E}_k$, então $\int \mathcal{E}_k k dk = 0$, assim

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha \bar{n}_\alpha \int m_\alpha u f_{\alpha 0} du = 0, \quad (4.30)$$

o momento das partículas se conserva.

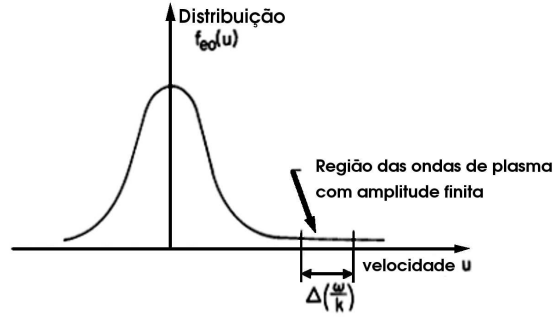


FIGURA 4.1: Função distribuição de elétrons (adaptada de [1]).

4.2.3 Conservação de energia

A conservação da energia pode ser demonstrada multiplicando (4.21) por $\bar{n}_\alpha m_\alpha u^2/2$ e integrando sobre as velocidades

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha \int \frac{1}{2} \bar{n}_\alpha m_\alpha u^2 f_{\alpha 0} du &= \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \int dk \int u^2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du, \\ &= \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \mathcal{E}_k \frac{-2u}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du, \\ &= \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \mathcal{E}_k \frac{-2}{k} \frac{\omega}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Usando (4.26)

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_\alpha \frac{1}{2} \bar{n}_\alpha m_\alpha \int u^2 f_{\alpha 0} du = 2i \int \omega \mathcal{E}_k dk = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_k dk. \quad (4.32)$$

Agora com (4.17) chegamos a

$$2i \int \omega \mathcal{E} dk = - \int 2\omega_i \mathcal{E}_k dk = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_k dk, \quad (4.33)$$

podemos ver que a energia cinética que perdem as partículas é compensada pela energia que ganham as ondas, devido ao amortecimento ou instabilidade das ondas no plasma.

4.3 Amortecimento de Landau

Para estudar o amortecimento de Landau consideremos o caso mostrado na figura 4.1, em que a frequência angular das ondas¹ pode ser escrita da forma

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) + i\omega_i. \quad (4.34)$$

¹obtida da relação de dispersão no capítulo anterior

Como foi visto no capítulo anterior, essas são ondas de alta frequência. Todas as ondas com velocidades de fase compreendidas no intervalo mostrado na figura 4.1 são fracamente amortecidas devido ao declive da função distribuição. O amortecimento ocorre para ondas com velocidade de fase no intervalo $\Delta(\omega/k)$, e é associado à parte imaginária da frequência, dada por

$$\omega_i = \frac{\pi \omega_{pe}^2 \omega_r}{2 \mathbf{k}^2} \left. \frac{\partial f_{e0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\omega/\mathbf{k}}. \quad (4.35)$$

Nosso interesse é encontrar de uma forma detalhada a transferência de energia entre ondas e partículas e a distorção da função distribuição de elétrons governada pelas relações

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{e0}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{8\pi e^2}{m_e^2} \int_L \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk}{i(ku - \omega)} \right] \frac{\partial f_{e0}}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{\partial t} &= 2\omega_i \mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde $\omega_r = \omega_r(f_{e0})$; $\omega_i = \omega_i(f_{e0})$, e a integral em k é uma integral onde se faz uso do contorno de Landau.

$$\int_L \frac{G(u) du}{ku - \omega} = \oint \frac{G(u) du}{ku - \omega} + \frac{\pi i}{|k|} G\left(\frac{\omega}{|k|}\right). \quad (4.37)$$

Agora usando a identidade (4.37) podemos escrever a equação ((4.31)) para a conservação da energia, separando a contribuição das partículas ressonantes com velocidades $u \approx \omega/k$ e a contribuição das partículas não ressonantes. Como $m_e/m_i \ll 1$, podemos ignorar os íons, também podemos aproximar $\omega \approx \omega_r$ lembrando que $\omega_i \ll \omega_r$, ficando com [1]

$$\partial_t \int \frac{1}{2} \bar{n}_e m_e u^2 f_{e0} du = -2\omega_{pe}^2 \int \frac{1}{|k|} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left[\int_c \frac{\omega}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{e0}}{\partial u} du + \pi \frac{\omega}{|k|} \left. \frac{\partial f_{e0}}{\partial u} \right|_{u=\omega/k} \right] dk. \quad (4.38)$$

O primeiro termo da direita na equação (4.38) corresponde à contribuição das partículas não ressonantes e o segundo à das partículas ressonantes. Usando (4.35) o segundo termo pode-se escrever da forma:

$$\frac{dK_{res}}{dt} = -4 \int \omega_i \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk = -2 \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk, \quad (4.39)$$

vemos que a energia eletrostática das ondas decresce devido ao amortecimento de Landau em $(\int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk)$, além disso, a energia cinética das partículas ressonantes incrementa duas vezes a energia das não ressonantes. Também podemos reescrever o termo correspondente às partículas não ressonantes da forma:

$$\frac{dK_{nres}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk, \quad (4.40)$$

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk, \quad (4.41)$$

onde as partículas não ressonantes perdem a mesma energia das ondas, porém a energia total que ganham as partículas é a mesma que perdem as ondas, conservando-se a energia.

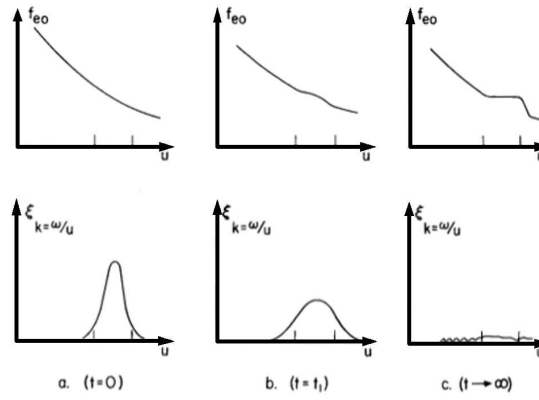


FIGURA 4.2: Evolução da função distribuição de elétrons e da energia das ondas [1].

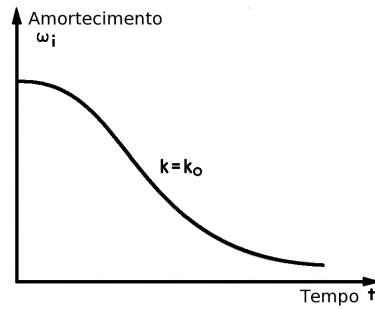


FIGURA 4.3: Taxa de amortecimento (adaptada de [1]).

Além da troca de energia, também podemos ver a deformação da f_{e0} durante o processo. Para isto tomamos a equação de difusão para partículas ressonantes [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e(u \approx \omega/k)}{\partial t} &= \frac{8\pi e^2}{m_e^2} \frac{d}{du} \frac{1}{u} \mathcal{E}_{k=\omega/u} \frac{d}{du} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{k} \right), \\ &= \frac{8\pi e^2}{m_e^2} \mathcal{E}_{k=\omega/u} \frac{1}{u} \frac{d^2}{du^2} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{k} \right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

e a equação para as ondas

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk = \int 2\omega_i \mathcal{E}_k dk. \quad (4.43)$$

A aproximação feita é válida para velocidades maiores que a velocidade térmica dos elétrons. Na figura 4.2 mostra-se como a energia da f_{e0} aumenta devido a $\frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} > 0$, para $\omega \approx ku$, achatando a f_{e0} na região de ressonância. No entanto, a energia das ondas decresce. Este achatamento faz que o amortecimento também decresça (ver figura 4.3) já que ω_i depende da derivada na região de ressonância. Por outro lado, se a amplitude das ondas é grande o amortecimento desaparece e as ondas podem perdurar no tempo; caso contrário desaparecem.

Agora para a evolução da f_{e0} , podemos analisar primeiro a parte da equação de difusão para partículas ressonantes

$$\frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{k}=\omega/u} \frac{df_{e0}}{du} \Big|_{u=\omega/k} = \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{u=\omega/k}, \quad (4.44)$$

e usando (4.42) reescrevemos (4.44) como

$$\frac{d}{dt} \left(f_{e0,res} - \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{u=\omega/k} \right) = 0. \quad (4.45)$$

Se o nível inicial da oscilação do plasma não é muito grande, \mathcal{E} vai para zero no limite assintótico. Neste caso, a f_{e0} na região de ressonância fica

$$f_{e0}^r(u, t \rightarrow \infty) = f_{e0}^r(u, t=0) - \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{u=\omega/k}(t=0), \quad (4.46)$$

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = 0,$$

e integrando sobre as velocidades na região de ressonância temos

$$\int_{reg.res.} f_{e0}(u, t \rightarrow \infty) du = \int_{reg.res.} f_{e0}(u, t=0) du, \quad (4.47)$$

isto da conta que o número de partículas se conserva.

Para a maioria das partículas fora da região de ressonância temos que $\omega_r \gg ku$, assim o coeficiente de difusão destas é independente de u , portanto, podemos escrever (4.36) ignorando ku e ω_i

$$\frac{\partial f_{e0,nres}}{\partial t} - \frac{1}{\bar{n}_e m_e} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk = 0. \quad (4.48)$$

A parte não ressonante da equação de difusão é muito pequena comparada com a parte ressonante, portanto, podemos aproximar

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial u^2} \approx \frac{\partial^2 f_{e0}(u, t=0)}{\partial u^2}. \quad (4.49)$$

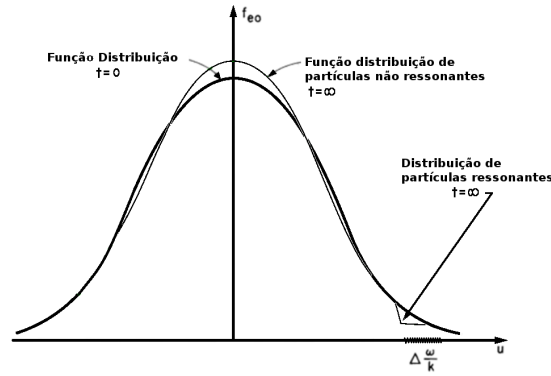
Integrando (4.48) no tempo (supondo que $\mathcal{E}(t \rightarrow \infty) = 0$)

$$f_{e0}^{nr}(u, t \rightarrow \infty) = f_{e0}(t=0) - \frac{1}{\bar{n}_e m_e} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t=0) dk. \quad (4.50)$$

Agora podemos usar (4.46) e (4.50) para mostrar a mudança da f_{e0} quando desaparece o amortecimento de Landau das oscilações Langmuir, ver figura 4.4.

Podemos encontrar uma relação para f_{e0} no limite $t \rightarrow \infty$ da mesma forma que para (4.48), definindo

$$\tau = \frac{1}{\bar{n}_e m_e} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk, \quad (4.51)$$


 FIGURA 4.4: f_{e0} no limite assintótico (adaptada de [1]).

ficando com

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2}. \quad (4.52)$$

Uma solução particular é

$$f_{e0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\bar{n}_e m_e} \int \mathcal{E} dk + \frac{k_B T_e}{2m_e}}} e^{-\frac{u^2}{4\left(\frac{1}{\bar{n}_e m_e} \int \mathcal{E} dk + \frac{k_B T_e}{2m_e}\right)}}. \quad (4.53)$$

A característica desta solução é que o amortecimento das ondas muda a função distribuição das partículas não ressonantes, portanto muda a temperatura efetiva do plasma, tornando a f_{e0} mais aguda. Este análise também pode se fazer para plasmas fracamente instáveis.

4.4 Função distribuição com uma instabilidade

Um exemplo ilustrativo para estudar com teoria quase linear é o que envolve uma função distribuição maxwelliana isotrópica com um feixe quente na cauda. Esta função é instável para ondas de Langmuir na região mostrada na figura 4.5, devido à derivada positiva da $f_{\alpha 0}$. A instabilidade associada a este tipo de função distribuição é conhecida como *gentle-bump instability*. O incremento da energia das ondas corresponde à perda de energia das partículas ressonantes (4.39)

$$\frac{d}{dt} W_r = -4 \int \omega_i \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk = -2 \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk,$$

sendo que a metade da perda de energia se transforma em energia das ondas e a outra metade em energia para as partículas não ressonantes (4.40)

$$\frac{d}{dt} W_{nr} = \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_r.$$

A equação de difusão das partículas ressonantes está dada por

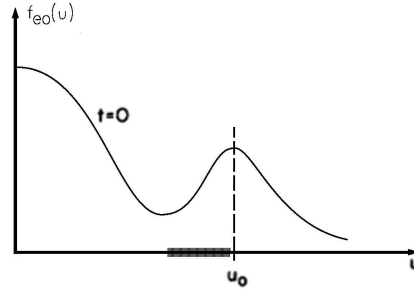


FIGURA 4.5: Função distribuição com um feixe quente [1].

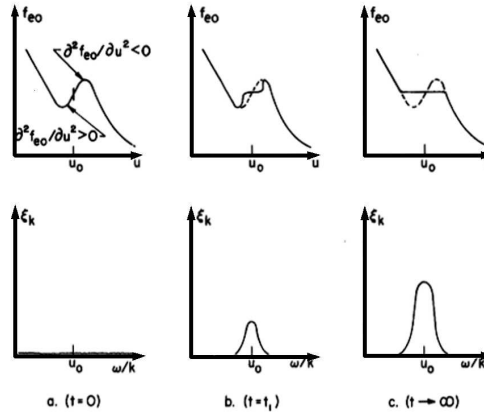


FIGURA 4.6: Evolução da função distribuição de elétrons e da energia das ondas (adaptada de [1]).

$$\frac{d}{dt} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \right) = \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \mathcal{E}_{\mathbf{k}=\omega/u} \frac{1}{u} \frac{d^2}{du^2} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \right). \quad (4.54)$$

Podemos ver a evolução da função distribuição de elétrons e da energia das ondas na figura 4.6. Por outro lado, a saturação da instabilidade pode ser encontrada usando (4.45)

$$\frac{d}{dt} \left(f_{e0,r} - \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \mathcal{E}_{\mathbf{k}=\omega/u} \right) = 0. \quad (4.55)$$

No limite assintótico $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$, então

$$f_{e0}(u, t \rightarrow \infty) - f_{e0}(u, t = 0) = \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \mathcal{E}_{\mathbf{k}=\omega/u}(t \rightarrow \infty), \quad (4.56)$$

e f_{α} se deforma até que deixa de ser instável, isto é

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial u} = 0, \quad (4.57)$$

ou seja, $f_{\alpha}(u, t = \infty)$ é constante na região ressonante formando-se um *plateau* (ver figura 4.7). Também podemos obter a distribuição da energia do campo elétrico integrando sobre o intervalo de velocidade das partículas ressonantes (4.56)

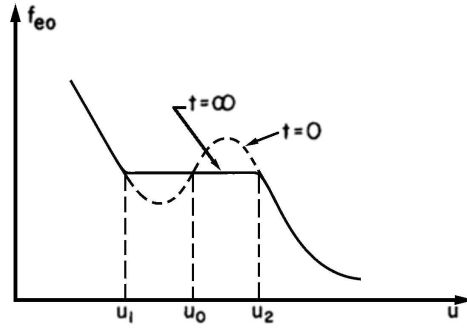


FIGURA 4.7: Deformação da função distribuição eletrônica [1].

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}=\omega/u} = \frac{\bar{n}_e m_e u^3}{2\omega_{pe}} \int_{u_1}^{u_2} [f(u', t \rightarrow \infty) - f(u', t \rightarrow 0)] du', \quad (4.58)$$

onde u_1 é o limite inferior da velocidade ressonante (ver figura 4.7). A energia total das ondas em ($t \rightarrow \infty$) pode ser calculada por conservação de energia

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_{\mathbf{k},r}. \quad (4.59)$$

Além disso, podemos aproximar a mudança na energia das partículas ressonantes

$$\Delta W_{K,r} \approx \frac{1}{2} \Delta(\bar{n}_B m_e u^2) \approx \bar{n}_B m_e u_0 (u_2 - u_0), \quad (4.60)$$

onde escrevemos a mudança de velocidade das partículas ressonantes como $\Delta u \approx u_2 - u_0$, em média [1]. Fazendo esta análise vemos que a energia que ganham as ondas está limitada pela energia disponível do feixe².

Agora podemos calcular a função distribuição das partículas como foi calculada na seção anterior, lembrando que $(\omega/k) \gg u$ a equação das partículas não ressonantes fica

$$\frac{\partial f_{e0,nr}}{\partial t} = \frac{1}{\bar{n}_e m_e} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk. \quad (4.61)$$

De novo encontramos a mesma equação cuja solução particular é

$$f_{e0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\bar{n}_e m_e} \int \mathcal{E} dk + \frac{k_B T_e}{2m_e}}} e^{-\frac{u^2}{4\left(\frac{1}{\bar{n}_e m_e} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk + \frac{k_B T_e}{2m_e}\right)}}. \quad (4.62)$$

A diferença com a seção anterior é que $\int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk$ incrementa no tempo. A função distribuição das partículas não ressonantes ganha energia, este incremento parece mudar a temperatura. Este aumento está associado com a energia das ondas

$$T_{KE} = \frac{2}{\bar{n}_e k_B} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk. \quad (4.63)$$

²Diferença na energia inicial do feixe e a energia final da distribuição, isto é, quando a derivada na região de ressonância é nula.

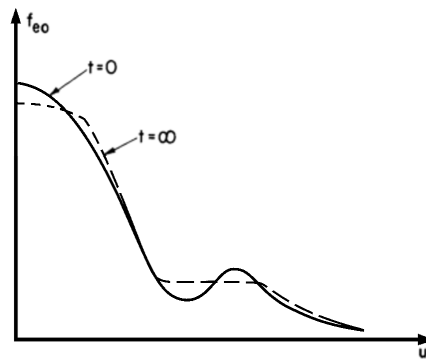


FIGURA 4.8: Evolução da função distribuição de elétrons [1].

É claro que este aumento de temperatura não é real; o que se tem são oscilações coerentes de partículas não ressonantes como resposta à flutuação do campo elétrico. Usando (4.57) e (4.62), pode-se fazer a figura 4.8 [1].

Capítulo 5

Teoria da turbulência fraca

Em capítulos anteriores estudamos a dinâmica do plasma com diferentes teorias. Neste capítulo fazemos uma abordagem além da teoria quase-linear chamada *teoria de turbulência fraca* [3] que mantém correlações e termos não lineares.

Muitos autores contribuíram para os fundamentos da teoria de turbulência fraca, que podem ser encontrados em livros bastante conhecidos [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Mais recentemente, foi desenvolvida uma nova formulação, inicialmente envolvendo apenas ondas eletrostáticas [3, 11] e depois generalizada para incluir o caso de ondas eletromagnéticas [12, 13]. A formulação restrita ao caso de ondas eletrostáticas, como aparece em [3, 11], vai ser a base dos desenvolvimentos apresentados nesse trabalho.

Neste trabalho não serão mostrados os detalhes do desenvolvimento da teoria de turbulência fraca, mas serão apresentadas as equações resultantes citando onde esses trabalhos foram apresentados.

5.1 Equação para as ondas e partículas

Vamos começar apresentando equações que descrevem a evolução temporal das ondas presentes no sistema, considerando um plasma não magnetizado, em que o efeito de colisões pode ser desprezado, e levando em conta apenas o efeito de ondas eletrostáticas.

Tomando como referência [3], [14] e [15], escrevemos equações para ondas de Langmuir (L) e íon-acústicas (S), contendo termos de emissão espontânea, emissão induzida, decaimento de ondas e espalhamento.

As equações para as ondas estão definidas em termos da densidade de energia espectral $I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} = \langle E_L^{\sigma 2} \rangle$ e $I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} = \langle E_S^{\sigma 2} \rangle$, onde $E_L^{\sigma 2}$ e $E_S^{\sigma 2}$ representam os módulos quadrados das componentes de Fourier dos campos elétricos associados aos dois tipos de ondas, com $\sigma = \pm 1$ representando o sinal da velocidade de fase da onda.

Para ondas de Langmuir temos [15]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} &= \mu_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left(\hat{n} e^2 F_e(\mathbf{v}) + \pi (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right) \\
&\quad - \pi \sigma \mu_{\mathbf{k}}^L \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left(\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right. \\
&\quad \left. + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\
&\quad + \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{\mu_{\mathbf{k}}^L \mu_{\mathbf{k}'}^L (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
&\quad \times \left[\frac{\hat{n} e^2}{\omega_{pe}^2} \left(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] + \pi \frac{m_e}{m_i} \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right].
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Para ondas íon-acústicas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} &= \mu_{\mathbf{k}}^S \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[\hat{n} e^2 [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
&\quad \left. + \pi (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right] \\
&\quad - \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S \mu_{\mathbf{k}'}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L [\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \left(\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right. \\
&\quad \left. + \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\
&\quad + \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{m_e^2 \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S \mu_{\mathbf{k}'}^S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^4 k'^4 \lambda_{De}^4} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\
&\quad \times \left[\frac{\hat{n} e^2}{\omega_{pe}^2} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right) [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\
&\quad \left. + \pi \frac{m_e}{m_i} \left(W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \sigma \sigma' \frac{k'}{k} \right) \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{\mu_{\mathbf{k}'}^S} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right].
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Nessas equações, o primeiro termo do lado direito representa os efeitos de emissão espontânea e induzida do plasma. Esse termo é o que seria obtido considerando apenas a aproximação quase-linear, com efeito de emissão espontânea. O segundo termo do lado direito de cada uma das equações contém a condição $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S)$, que pode ser interpretada como uma equação de conservação de energia do processo de decaimento de três ondas, neste caso envolvendo duas ondas L e uma S . O terceiro termo contém a condição de ressonância onda-partícula $\delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]$, associada ao espalhamento de ondas pelas partículas (também conhecido como amortecimento de Landau não-linear). Mais detalhes sobre a derivação dessas equações podem ser obtidos, por exemplo, no artigo de Yoon (2000) [11].

As relações de dispersão para as ondas L e S são dadas por

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right), \tag{5.3}$$

$$\omega_{\mathbf{k}}^S = \omega_{pe} \frac{k \lambda_{De}}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{1/2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e} \right), \tag{5.4}$$

onde $\omega_{pe} = (4\pi n_0 e^2 / m_e)^{1/2}$ é a frequência de plasma dos elétrons (já definida), $v_e = (2T_e / m_e)^{1/2}$ é a velocidade térmica dos elétrons, e onde aparecem quantidades adimensionais definidas como

$$\mu_{\mathbf{k}}^S = |k|^3 \lambda_{De}^3 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e} \right), \quad \mu_{\mathbf{k}}^L = 1. \quad (5.5)$$

Nos termos de espalhamento da equação para as ondas S aparece também a seguinte quantidade,

$$W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right)^2 \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^4 \lambda_{De}^4 |\epsilon_{\parallel}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S)|^2}, \quad (5.6)$$

$$\epsilon_{\parallel}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S) = 1 + \frac{2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma \sigma' k k')}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (k - \sigma \sigma' k')^2 \lambda_{De}^2} \quad (5.7)$$

$$+ i \left(\frac{\pi m_e}{2 m_i} \right)^{1/2} \left[\exp\left(-\frac{m_e \xi}{m_i 2}\right) + \left(\frac{m_i T_e^3}{m_e T_i^3} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{T_e \xi}{T_i 2}\right) \right],$$

$$\xi = \frac{(\sigma k - \sigma' k')^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \quad (5.8)$$

Equação para as partículas [3], [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial t} &= \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ &\times \left(\frac{m_a}{4\pi^2} \frac{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L}{k} F_a(\mathbf{v}) + \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial F_a(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para fazer o cálculo numérico é conveniente escrever as equações em termos de variáveis adimensionais. Portanto, definimos

$$z \equiv \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad \tau \equiv t \omega_{pe}, \quad \mathbf{q} \equiv \frac{\mathbf{k} v_e}{\omega_{pe}}, \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v_e}, \quad (5.10)$$

e definimos as quantidades incorporando a normalização

$$\Phi_a(\mathbf{u}) = v_e^3 F_a(\mathbf{u}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma \alpha} = \frac{(2\pi)^2 g I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{m_e v_e^2 \mu_{\mathbf{k}}^{\alpha}},$$

onde

$$g = \frac{1}{2^{3/2} (4\pi)^2 \hat{n} \lambda_{De}^3}.$$

Podemos escrever as propriedades de simetria da relação de dispersão da forma,

$$z_{-\mathbf{q}} = -z_{\mathbf{q}}.$$

Devido à simetria azimutal reescrevemos a condição de simetria em termos de q_{\perp} e q_{\parallel}

$$z_{q_{\perp}, -q_z} = -z_{q_{\perp}, q_z}. \quad (5.11)$$

No caso das ondas sua amplitude é independente do sentido de propagação \mathbf{q} , porém podemos reescrever a condição de simetria em termos de q_\perp e q_\parallel ,

$$\mathcal{E}_{-\mathbf{q}} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{q}_\perp, -q_\parallel} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}_\perp, q_\parallel} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{E}_{-\mathbf{q}_\perp, q_\parallel} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}_\perp, q_\parallel} = \mathcal{E}_{\mathbf{q}}. \quad (5.12)$$

Reescrevendo em termos das novas variáveis obtemos a seguinte equação para ondas L ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} = & \mu_{\mathbf{q}}^L \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left(g \Phi_e(\mathbf{u}) + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) \\ & - 2\sigma \mu_{\mathbf{q}}^L z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}'}^L \mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^S (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \left(\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right. \\ & \left. + \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' S} \right) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L) \\ & + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_{\mathbf{q}}^L \mu_{\mathbf{q}'}^L (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \\ & \times \left[g \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

E para ondas S

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S}}{\partial \tau} = & \mu_{\mathbf{q}}^S \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left[g [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] \right. \\ & \left. + (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right] \\ & - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma', \sigma''} \int d\mathbf{q}' \frac{\mu_{\mathbf{q}}^S \mu_{\mathbf{q}'}^L \mu_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L [\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}')]^2}{q^2 q'^2 |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|^2} \left(\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right. \\ & \left. + \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^{\sigma'' L} \right) \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - \sigma'' z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^L) \\ & + \sigma 4z_{\mathbf{q}}^L \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_{\mathbf{q}}^S \mu_{\mathbf{q}'}^S (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^4 q'^4} \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^S - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^S - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \\ & \times \left[g W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' S} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] \right. \\ & \left. + \frac{m_e}{m_i} \left(W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \sigma \sigma' \frac{q'}{q} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' S} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma S} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Para as partículas obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \tau} = \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \sum_{\sigma} \sum_{\alpha=L,S} \int d\mathbf{q} \left(\frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \quad (5.15)$$

$$\times \left(g \frac{m_a}{m_e} \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q} \Phi_a(\mathbf{v}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \frac{\mathbf{q}}{q} \cdot \frac{\partial \Phi_a(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right).$$

Para esta teoria já foram feitas aplicações numéricas em 1D [16, 17, 18, 19, 20] e 2D [21, 14, 22, 23, 15]. Esses artigos são mencionados como exemplo e podem encaminhar o leitor interessado a outros, por meio de suas referências. Nos artigos em 2D produzidos por integrantes do grupo de Física de Plasmas da UFRGS as soluções numéricas foram obtidas usando coordenadas cartesianas, como nas já mencionadas referências [21, 14, 22, 23] e outras. No presente trabalho faremos uma abordagem utilizando coordenadas polares e desenvolvendo um novo código numérico, visando comparação dos resultados com resultados obtidos usando coordenadas cartesianas, como os que aparecem em [21] e [14].

5.2 Forma inicial da função distribuição das partículas

Por simplicidade propomos uma função distribuição maxwelliana e estacionária para íons da forma

$$F_i = \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_i}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i}{2T_i} v^2 \right), \quad (5.16)$$

o qual está normalizada ($\int d\mathbf{v} F_i = 1$). Usando $v_* = (2T_*/m_e)^{1/2}$ para normalizar a velocidade, obtemos

$$F_i = \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_i}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} u^2 \right). \quad (5.17)$$

Portanto

$$\Phi_i = v_*^3 F_i = \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i T_*}{m_e T_i} u^2 \right). \quad (5.18)$$

Além disso,

$$\frac{m_e}{m_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_k} = -\frac{m_e}{m_i} (2u_k) \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i T_*}{m_e T_i} u^2 \right) = -2u_k \frac{T_*}{T_i} \Phi_i, \quad (5.19)$$

onde k pode ser x ou z .

Para a função distribuição de elétrons, adequada a um estudo da instabilidade feixe-plasma, tomamos como estado inicial uma função maxwelliana somada a duas maxwellianas com velocidade de deriva, para frente e para trás

$$F_e = \left(1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2T_e}(v - v_0)^2\right) \\ + \frac{n_f}{n_e} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_f}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2T_f}(v_\perp^2 + (v_\parallel - v_f)^2)\right) \\ + \frac{n_b}{n_e} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_b}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e}{2T_b}(v_\perp^2 + (v_\parallel - v_b)^2)\right),$$

o qual está normalizada $\int d\mathbf{v} F_e = 1$. Usando $v_* = (2T_*/m_e)^{1/2}$ para velocidade de normalização, obtemos

$$F_e = \left(1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_*}{T_e}(u - u_0)^2\right) \\ + \frac{n_f}{n_e} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_f}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_*}{T_f}(u_\perp^2 + (u_\parallel - u_f)^2)\right) \\ + \frac{n_b}{n_e} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{m_e}{T_b}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_*}{T_b}(u_\perp^2 + (u_\parallel - u_b)^2)\right).$$

Portanto,

$$\Phi_e = v_*^3 F_e = \left(1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e}\right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{T_*}{T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_*}{T_e}(u - u_0)^2\right) \\ + \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{T_*}{T_f}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_*}{T_f}(u_\perp^2 + (u_\parallel - u_f)^2)\right) \\ + \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{T_*}{T_b}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_*}{T_b}(u_\perp^2 + (u_\parallel - u_b)^2)\right), \quad (5.20)$$

onde está suposto que $u_f > 0$ e $u_b < 0$. A quantidade u_0 foi introduzida para termos uma função distribuição sem deriva média. Em outras palavras, usando u_0 trabalhamos em um sistema de referência onde a função distribuição está em repouso. A velocidade de deriva u_0 pode ser facilmente ignorada, se for conveniente, uma vez que é muito pequena, no caso de feixes pouco densos. A velocidade u_0 é obtida de

$$u_0 = -\left(\frac{n_f}{n_e} u_f + \frac{n_b}{n_e} u_b\right) \left(1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e}\right)^{-1}.$$

Coletando as funções distribuição para aplicações 3D,

$$\Phi_i = v_*^3 F_i = \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_i T_*}{m_e T_i} u^2 \right). \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_e(0) = v_*^3 F_e(0) &= \left(1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right) \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{T_*}{T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{T_*}{T_e} (u - u_0)^2 \right) \\ &+ \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{T_*}{T_f} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{T_*}{T_f} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_f)^2) \right) \\ &+ \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi^{3/2}} \left(\frac{T_*}{T_b} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{T_*}{T_b} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_b)^2) \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

No caso de aplicação 2D, temos que modificar a constante de normalização,

$$\Phi_i = v_*^2 F_i = \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right) \exp \left(-\frac{m_i T_*}{m_e T_i} u^2 \right), \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_e = v_*^2 F_e &= \left(1 - \frac{n_f}{n_e} - \frac{n_b}{n_e} \right) \frac{1}{\pi} \left(\frac{T_*}{T_e} \right) \exp \left(-\frac{T_*}{T_e} (u - u_0)^2 \right) \\ &+ \frac{n_f}{n_e} \frac{1}{\pi} \left(\frac{T_*}{T_f} \right) \exp \left(-\frac{T_*}{T_f} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_f)^2) \right) \\ &+ \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi} \left(\frac{T_*}{T_b} \right) \exp \left(-\frac{T_*}{T_b} (u_\perp^2 + (u_\parallel - u_b)^2) \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.3 Equação para as partículas usando coordenadas polares

Estamos interessados em uma situação com uma função distribuição composta por uma maxwelliana somada a feixes de partículas, de baixa densidade, movendo-se ao longo de uma dada direção. Podemos fazer coincidir esta direção com o eixo z e tratar o problema em duas dimensões. Esta aproximação é menos complexa que a abordagem em três dimensões, mas permite tratar de ondas que se propagam em diferentes direções, e partículas que se movem em diferentes direções, o que não pode ser feito em uma aproximação uni-dimensional.

As relações de transformação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares para velocidades das partículas e direção de propagação estão definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z = u \sin \theta \mathbf{e}_x + u \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{q} &= q_x \mathbf{e}_x + q_z \mathbf{e}_z = q \sin \vartheta \mathbf{e}_x + q \cos \vartheta \mathbf{e}_z, \\ u &= \sqrt{u_x^2 + u_z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{u_x}{u_z}. \end{aligned}$$

As derivadas em coordenadas polares ficam dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_x} &= \frac{\partial u}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u_x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{u_x}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{u_z^2}{u^2} \frac{1}{u_z} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial u_z} &= \frac{\partial u}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{u_z}{u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{u_z^2}{u^2} \frac{u_x}{u_z} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

De (5.15) obtemos a equação para a função distribuição F_a , que em 2D pode ser escrita da forma seguinte

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_a}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial u_x} (A_x^a \Phi_a) + \frac{\partial}{\partial u_z} (A_z^a \Phi_a) + \frac{\partial}{\partial u_x} \left(D_{xx}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u_x} + D_{xz}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u_z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u_z} \left(D_{zx}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u_x} + D_{zz}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u_z} \right),\end{aligned}\quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}A_i^a &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} g \frac{m_a}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} z_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z), \\ D_{ij}^a &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q_i q_j}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z).\end{aligned}\quad (5.26)$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_a}{\partial \tau} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (A_x^a \Phi_a) + \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (A_z^a \Phi_a) \\ &\quad + \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(D_{xx}^a \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + D_{xz}^a \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \right) \\ &\quad + \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(D_{zx}^a \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + D_{zz}^a \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \right).\end{aligned}$$

Coletando os termos com A_i ,

$$\begin{aligned}&\sin \theta \frac{\partial}{\partial u} (A_x^a \Phi_a) + \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} (A_z^a \Phi_a) + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_x^a \Phi_a) - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_z^a \Phi_a) \\ &\frac{\partial}{\partial u} [(A_x^a \sin \theta + A_z^a \cos \theta) \Phi_a] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\cos \theta}{u} (A_x^a \Phi_a) - \frac{\sin \theta}{u} (A_z^a \Phi_a) \right] + \frac{\sin \theta}{u} (A_x^a \Phi_a) + \frac{\cos \theta}{u} (A_z^a \Phi_a) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} [(A_x^a \sin \theta + A_z^a \cos \theta) \Phi_a] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\cos \theta}{u} (A_x^a \Phi_a) - \frac{\sin \theta}{u} (A_z^a \Phi_a) \right] + \frac{1}{u} [(A_x^a \sin \theta + A_z^a \cos \theta) \Phi_a] \\ &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} [u (A_x^a \sin \theta + A_z^a \cos \theta) \Phi_a] + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} [(A_x^a \cos \theta - A_z^a \sin \theta) \Phi_a] \\ &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u A_u^a \Phi_a) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\theta}^a \Phi_a),\end{aligned}$$

onde definimos

$$A_u^a = A_x^a \sin \theta + A_z^a \cos \theta,$$

$$A_{\theta}^a = A_x^a \cos \theta - A_z^a \sin \theta.$$

Portanto,

$$A_u^a = \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} g \frac{m_a}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} z_{\mathbf{q}}^{\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z),$$

$$A_u^a = \frac{e_a^2}{e^2} \frac{m_e^2}{m_a^2} g \frac{m_a}{m_e} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq q \frac{q(\sin\theta \sin\vartheta + \cos\theta \cos\vartheta)}{q_x^2 + q_z^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^\alpha z_{\mathbf{q}}^\alpha \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\alpha - q_x u_x - q_z u_z).$$

Fazendo o mesmo procedimento para A_θ^a , obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_u^a \\ A_\theta^a \end{pmatrix} &= \frac{e_a^2}{e^2} \frac{m_e^2}{m_a^2} g \frac{m_a}{m_e} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\vartheta + \cos\theta \cos\vartheta \\ \cos\theta \sin\vartheta - \sin\theta \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^\alpha z_{\mathbf{q}}^\alpha \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\alpha - qu(\sin\theta \sin\vartheta + \cos\theta \cos\vartheta)). \end{aligned}$$

Coletando os termos com D_{ij} ,

$$\begin{aligned} &\sin\theta \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{xx}^a \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + \frac{\cos\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + D_{xz}^a \left(\cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - \frac{\sin\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \right) \\ &+ \cos\theta \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{zx}^a \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + \frac{\cos\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + D_{zz}^a \left(\cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - \frac{\sin\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \right) \\ &+ \frac{\cos\theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{xx}^a \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + \frac{\cos\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + D_{xz}^a \left(\cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - \frac{\sin\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \right) \\ &- \frac{\sin\theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{zx}^a \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + \frac{\cos\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + D_{zz}^a \left(\cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - \frac{\sin\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \right). \end{aligned}$$

Coletando os termos com duas derivadas na variável u ,

$$\begin{aligned} &\sin\theta \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{xx}^a \sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{xz}^a \cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) + \cos\theta \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{zx}^a \sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{zz}^a \cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{xx}^a \sin\theta \sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{xz}^a \sin\theta \cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{zx}^a \cos\theta \sin\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{zz}^a \cos\theta \cos\theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(D_{xx}^a \sin\theta \sin\theta + D_{xz}^a \sin\theta \cos\theta + D_{zx}^a \cos\theta \sin\theta + D_{zz}^a \cos\theta \cos\theta \right) \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right] = \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{uu}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

$$D_{uu}^a = D_{xx}^a \sin\theta \sin\theta + D_{xz}^a \sin\theta \cos\theta + D_{zx}^a \cos\theta \sin\theta + D_{zz}^a \cos\theta \cos\theta,$$

$$\begin{aligned} D_{uu}^a &= \frac{e_a^2}{e^2} \frac{m_e^2}{m_a^2} \int_{-\infty}^\infty dq_x \int_{-\infty}^\infty dq_z \frac{q^2 (\sin^2\vartheta \sin^2\theta + \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\theta \cos\theta + \cos\vartheta \sin\vartheta \cos\theta \sin\theta + \cos^2\vartheta \cos^2\theta)}{q_x^2 + q_z^2}, \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^\alpha \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\alpha - q_x u_x - q_z u_z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{uu}^a &= \frac{e_a^2}{e^2} \frac{m_e^2}{m_a^2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq q (\sin^2\vartheta \sin^2\theta + 2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\theta \cos\theta + \cos^2\vartheta \cos^2\theta), \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^\alpha \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\alpha - q_x u_x - q_z u_z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{uu}^a &= \frac{e_a^2}{e^2} \frac{m_e^2}{m_a^2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq q (\sin\vartheta \sin\theta + \cos\vartheta \cos\theta)^2 \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^\alpha \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\alpha - qu(\sin\theta \sin\vartheta + \cos\theta \cos\vartheta)). \end{aligned}$$

Coletando os termos com derivadas nas variáveis u e θ ,

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{xx}^a \frac{\cos\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} - D_{xz}^a \frac{\sin\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + \cos\theta \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{zx}^a \frac{\cos\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} - D_{zz}^a \frac{\sin\theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(D_{xx}^a \sin \theta \cos \theta - D_{xz}^a \sin^2 \theta + D_{zx}^a \cos^2 \theta - D_{zz}^a \cos \theta \sin \theta \right) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} D_{u\theta}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} D_{u\theta}^a &= D_{xx}^a \sin \theta \cos \theta - D_{xz}^a \sin^2 \theta + D_{zx}^a \cos^2 \theta - D_{zz}^a \cos \theta \sin \theta, \\ D_{u\theta}^a &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q^2}{q_x^2 + q_z^2} (\sin^2 \vartheta \sin \theta \cos \theta - \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \theta + \cos \vartheta \sin \vartheta \cos^2 \theta - \cos^2 \vartheta \cos \theta \sin \theta) \\ &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z), \\ D_{u\theta}^a &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta) (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)). \end{aligned}$$

Coletando os termos com derivadas em θ e u ,

$$\begin{aligned} &\frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{xx}^a \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{xz}^a \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{zx}^a \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{zz}^a \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) \\ &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{xx}^a \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{xz}^a \cos^2 \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - D_{zx}^a \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - D_{zz}^a \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) \\ &\quad + \frac{\sin \theta}{u} \left(D_{xx}^a \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{xz}^a \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) + \frac{\cos \theta}{u} \left(D_{zx}^a \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{zz}^a \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right), \\ &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{xx}^a \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - D_{xz}^a \sin^2 \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{zx}^a \cos^2 \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - D_{zz}^a \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) \\ &\quad + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\underbrace{D_{xz}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} - D_{zx}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u}}_{=0} \right) + \frac{\sin \theta}{u} \left(D_{xx}^a \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{xz}^a \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{u} \left(D_{zx}^a \sin \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + D_{zz}^a \cos \theta \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right), \\ &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(D_{xx}^a \cos \theta \sin \theta - D_{xz}^a \sin^2 \theta + D_{zx}^a \cos^2 \theta - D_{zz}^a \sin \theta \cos \theta \right) \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right] \\ &\quad + \frac{1}{u} \left(D_{xx}^a \sin^2 \theta + D_{xz}^a \sin \theta \cos \theta + D_{zx}^a \cos \theta \sin \theta + D_{zz}^a \cos^2 \theta \right) \frac{\partial \Phi_a}{\partial u}, \\ &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) + \frac{1}{u} D_{uu}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u}, \end{aligned}$$

onde

$$D_{\theta u}^a = D_{xx}^a \cos \theta \sin \theta - D_{xz}^a \sin^2 \theta + D_{zx}^a \cos^2 \theta - D_{zz}^a \sin \theta \cos \theta = D_{u\theta}^a, \quad (5.27)$$

e onde

$$\begin{aligned}
& D_{xx}^a \sin^2 \theta + D_{xz}^a \sin \theta \cos \theta + D_{zx}^a \cos \theta \sin \theta + D_{zz}^a \cos^2 \theta \\
&= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q^2}{q_x^2 + q_z^2} \left(\sin^2 \vartheta \sin^2 \theta + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \theta \cos \theta + \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \vartheta \cos^2 \theta \right) \\
&\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z), \\
&= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \left(\sin^2 \vartheta \sin^2 \theta + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \vartheta \cos^2 \theta \right) \\
&\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z), \\
&= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z (\sin \vartheta \sin \theta + \cos \vartheta \cos \theta)^2 \\
&\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z) = D_{uu}^a. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Coletando os termos com derivadas na variável θ

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{xx}^a \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} - D_{xz}^a \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{zx}^a \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} - D_{zz}^a \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(D_{xx}^a \cos^2 \theta - D_{xz}^a \cos \theta \sin \theta - D_{zx}^a \sin \theta \cos \theta + D_{zz}^a \sin^2 \theta \right) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right] \\
&\quad + \frac{\sin \theta}{u} \left(D_{xx}^a \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} - D_{xz}^a \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{u} \left(D_{zx}^a \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} - D_{zz}^a \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right), \\
&= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^a \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u^2} \left(D_{xx}^a \sin \theta \cos \theta - D_{xz}^a \sin^2 \theta + D_{zx}^a \cos^2 \theta - D_{zz}^a \cos \theta \sin \theta \right) \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta}, \\
&= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^a \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u^2} D_{u\theta}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
D_{\theta\theta}^a &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \frac{q^2}{q_x^2 + q_z^2} \left(\sin^2 \vartheta \cos^2 \theta - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \theta \sin \theta - \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \vartheta \sin^2 \theta \right) \\
&\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z), \\
D_{\theta\theta}^a &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \int_{-\infty}^{\infty} dq_z (\sin \vartheta \cos \theta - \cos \vartheta \sin \theta)^2 \\
&\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^{\alpha} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^{\alpha} - q_x u_x - q_z u_z).
\end{aligned}$$

Podemos escrever as equações para as partículas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_a}{\partial \tau} &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u A_u^a \Phi_a) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\theta}^a \Phi_a) \\
&\quad + \frac{1}{u} D_{uu}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{uu}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{u\theta}^a \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^a \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u^2} D_{u\theta}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \tau} = & \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u A_u^a \Phi_a) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta^a \Phi_a) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u D_{uu}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) \\ & + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{u\theta}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^a \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Re-escrevemos aqui os coeficientes, todos juntos, para facilitar a leitura.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_u^a \\ A_\theta^a \end{pmatrix} &= \frac{e_a^2 m_e^2 g m_a}{e^2 m_a^2 m_e} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^\alpha z_{\mathbf{q}}^\alpha \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\alpha - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)), \\ \begin{pmatrix} D_{uu}^a \\ D_{u\theta}^a \\ D_{\theta\theta}^a \end{pmatrix} &= \frac{e_a^2 m_e^2}{e^2 m_a^2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \mu_{\mathbf{q}}^\alpha \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma\alpha} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^\alpha - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)), \\ & D_{\theta u}^a = D_{u\theta}^a. \end{aligned}$$

No apêndice se avaliam os coeficientes A_i e D_{ij} .

5.4 Equação para ondas Langmuir em coordenadas polares

Consideremos somente os efeitos de emissão espontânea e induzida. Temos da equação (5.13),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int d\mathbf{u} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{u}} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_\pi^{2\pi} d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

No segundo termo trocamos de variável definindo $\alpha = 2\pi - \theta$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_\pi^0 (-d\alpha) \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin(2\pi - \alpha) \sin \vartheta + \cos(2\pi - \alpha) \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left[g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin(2\pi - \alpha) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos(2\pi - \alpha)}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos(2\pi - \alpha) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Usando $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ e $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\alpha \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(-\sin \alpha \sin \vartheta + \cos \alpha \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(-\sin \alpha \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\cos \alpha}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \alpha} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \alpha \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \alpha}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \alpha} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Trocando de nome $\alpha \rightarrow \theta$ no segundo termo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + qu(\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin \vartheta \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos \vartheta \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \right), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L + qu(\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)) \\ &\quad \times \left(g \Phi_e - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu \cos(\theta - \vartheta)) \\
 &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta - \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin(\theta - \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu \cos(\theta + \vartheta)) \\
 &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta + \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin(\theta + \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right), \\
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \frac{1}{|q \cos(\theta - \vartheta)|} \delta \left(u - \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q \cos(\theta - \vartheta)} \right) \\
 &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta - \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin(\theta - \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \frac{1}{|q \cos(\theta + \vartheta)|} \delta \left(u - \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q \cos(\theta + \vartheta)} \right) \\
 &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta + \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin(\theta + \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right).
 \end{aligned}$$

Temos

$$u_{\pm} = \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^L}{q \cos(\theta \pm \vartheta)} = \frac{z_{\mathbf{q}}^L}{q \sigma \cos(\theta \pm \vartheta)}. \quad (5.33)$$

A quantidade u_{\pm} não pode ser negativa, caso contrário não há tem ressonância. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}}{\partial \tau} &= \frac{\pi}{q^4} (z_{\mathbf{q}}^L) \int_0^\pi d\theta \frac{1}{|\cos(\theta + \vartheta)|^2} \Theta[\sigma \cos(\theta + \vartheta)] \\
 &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta + \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin(\theta + \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right)_{u_+} \\
 &\quad + \frac{\pi}{q^4} (z_{\mathbf{q}}^L) \int_0^\pi d\theta \frac{1}{|\cos(\theta - \vartheta)|^2} \Theta[\sigma \cos(\theta - \vartheta)] \\
 &\quad \times \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta - \vartheta) \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \sin(\theta - \vartheta) \frac{1}{u} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right)_{u_-}. \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

O estado inicial é obtido supondo uma função distribuição maxwelliana para as partículas e buscando o equilíbrio entre a emissão induzida e a espontânea,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu \cos(\theta - \vartheta)) \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta - \vartheta) (-2u \Phi_e) \right) \\
 &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu \cos(\theta + \vartheta)) \left(g \Phi_e + \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} q \cos(\theta + \vartheta) (-2u \Phi_e) \right), \\
 0 &= \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu \cos(\theta - \vartheta)) \left(g \Phi_e - 2(\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \Phi_e \right) \\
 &\quad + \frac{\pi}{q^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty du u \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu \cos(\theta + \vartheta)) \left(g \Phi_e - 2(\sigma z_{\mathbf{q}}^L)^2 \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \Phi_e \right) \\
 &\quad \Rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}(0) = \frac{g}{2(z_{\mathbf{q}}^L)^2}. \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

5.5 Termo associado ao espalhamento envolvendo ondas L

Da equação (5.13), o termo associado ao espalhamento de ondas L é

$$(\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{\mu_{\mathbf{q}}^L \mu_{\mathbf{q}'}^L (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \\ \times \left[g_* \left(\sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right) [\Phi_e(\mathbf{u}) + \Phi_i(\mathbf{u})] + \frac{m_e}{m_i} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right].$$

Essa é a forma do termo que usamos nesse trabalho, compatível com a aproximação usada na Ref. [15]. Entretanto, a derivação pode ser feita um pouco mais completa com a inclusão de um termo associado à contribuição dos elétrons para o espalhamento induzido, proporcional à derivada de Φ_e [3], mesmo que esse termo seja desprezado ao final, para uso na abordagem numérica.

$$- \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{u} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2}{q^2 q'^2} \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{u}] \\ \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) (\Phi_e + \Phi_i) \right. \\ \left. + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left((\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e - \frac{m_e}{m_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \right] \\ = - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_x \int_{-\infty}^{\infty} dq'_z \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z] \\ \times \frac{(q_x q'_x + q_z q'_z)^2}{q^2 (q_x'^2 + q_z'^2)} \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) (\Phi_e + \Phi_i) \right. \\ \left. + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (q_x - q'_x) \frac{\partial}{\partial u_x} \left((\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e - \frac{m_e}{m_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \right. \\ \left. + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (q_z - q'_z) \frac{\partial}{\partial u_z} \left((\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e - \frac{m_e}{m_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \right], \\ = - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} dq' | -q' | \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} du | -u | \\ \times \delta[\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (q \sin \varphi - q' \sin \varphi')u \sin \phi - (q \cos \varphi - q' \cos \varphi')u \cos \phi] \\ \times \frac{q^2 q'^2 (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi')^2}{q^2 q'^2} \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) (\Phi_e + \Phi_i) \right. \\ \left. + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (q \sin \varphi - q' \sin \varphi') \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\cos \phi}{u} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left((\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e - \frac{m_e}{m_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \right. \\ \left. + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (q \cos \varphi - q' \cos \varphi') \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\sin \phi}{u} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left((\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e - \frac{m_e}{m_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \right].$$

Usando a forma explícita da função distribuição para íons (5.23), e tratando de forma aproximada a contribuição dos elétrons para o espalhamento, consideramos apenas a função distribuição maxwelliana de fundo dos elétrons (5.24). Portanto, as derivadas em ϕ se anulam. Obtemos

então

$$\begin{aligned}
&= - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty du u \\
&\quad \times \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (q \sin \varphi - q' \sin \varphi') u \sin \phi - (q \cos \varphi - q' \cos \varphi') u \cos \phi] \\
&\quad \times \frac{q^2 q'^2 (\cos(\varphi - \varphi'))^2}{q^2 q'^2} \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) (\Phi_e + \Phi_i) \right. \\
&\quad + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (q \sin \varphi - q' \sin \varphi') u \sin \phi \left(-2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e + 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \\
&\quad \left. + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (q \cos \varphi - q' \cos \varphi') u \cos \phi \left(-2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e + 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \right].
\end{aligned}$$

Usando a condição de ressonância simplificamos

$$\begin{aligned}
&= - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty du u \\
&\quad \times \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (q \sin \varphi - q' \sin \varphi') u \sin \phi - (q \cos \varphi - q' \cos \varphi') u \cos \phi] \\
&\quad \times \frac{q^2 q'^2 \cos^2(\varphi - \varphi')}{q^2 q'^2} \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) (\Phi_e + \Phi_i) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \Phi_e - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \Phi_i \right) \right].
\end{aligned}$$

As integrais a resolver são as seguintes,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty du u \Phi_{i,e} \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (q \sin \varphi - q' \sin \varphi') u \sin \phi - (q \cos \varphi - q' \cos \varphi') u \cos \phi] \\
&= \int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z \Phi_{i,e} \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (q_x - q'_x) u_x - (q_z - q'_z) u_z].
\end{aligned}$$

Usando (C.3) com $\beta = L$ e $\gamma = L$,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z \Phi_\alpha \delta [\sigma z_{\mathbf{q}}^L - s_2 \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L - (q_x - s_1 q'_x) u_x - (q_z - s_2 q'_z) u_z] \\
&= \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp \left(- \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2} \right).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
&(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2 = (q \sin \varphi - q' \sin \varphi')^2 + (q \cos \varphi - q' \cos \varphi')^2 \\
&= q^2 + q'^2 - 2qq'(\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi') = q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi').
\end{aligned}$$

Usando estes resultados,

$$\begin{aligned}
&= - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Separando as duas contribuições,

$$\begin{aligned}
&= - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_{-\pi}^0 d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right] \\
&\quad - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^\pi d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Mudando de variável $\varphi' \rightarrow -\varphi'$ na primeira integral,

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_{-\pi}^0 (-d\varphi') \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{-q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{-q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{-q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{-q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad - \mathcal{E}_{-q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{-q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{-q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{-q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{-q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \right] \\
&\quad - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^\pi d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Usando as simetrias da relação de dispersão (5.11) e da amplitude do espectro de ondas (5.12),

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^\pi d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad - \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^\pi d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
& - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Ainda podemos separar a expressão em mais duas partes,

$$\begin{aligned}
& = - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
& - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_{\pi/2}^\pi d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
& - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \Bigg] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \\
& - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \\
& - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \Bigg] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_{\pi/2}^\pi d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \\
& - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \\
& - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \Bigg].
\end{aligned}$$

Mudando de variável $\varphi' \rightarrow \pi - \varphi'$ no segundo e terceiro termo,

$$\begin{aligned}
& = - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
& \left. - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right) \right. \\
& \left. \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_{\pi/2}^0 (-d\varphi') \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi' + \pi)}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi' + \pi)}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q' \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')}^{\sigma' L} \right) \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi' + \pi)} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi' + \pi)} \right) \right] \\
& - \mathcal{E}_{q' \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')) \right) \\
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi' + \pi)} \right) \\
& - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi' + \pi)} \right) \Bigg] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
& \left. - \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \Bigg] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_{\pi/2}^0 (-d\varphi') \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi' - \pi)}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi' - \pi)}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q' \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')}^{\sigma' L} \right) \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi' - \pi)} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi' - \pi)} \right) \right] \\
& - \mathcal{E}_{q' \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi')) \right) \\
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi' - \pi)} \right) \\
& - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin(\pi - \varphi'), q' \cos(\pi - \varphi'))^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi' - \pi)} \right) \Bigg] .
\end{aligned}$$

Agora usamos $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha$ e $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$,

$$\begin{aligned}
&= -\frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right] \\
&\quad - \mathcal{E}_{q' \sin \varphi', q' \cos \varphi'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \right] \\
&\quad - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi' \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', -q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right] \\
&\quad - \mathcal{E}_{q' \sin \varphi', -q' \cos \varphi'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi') \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right] \\
&\quad - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right] \\
&\quad - \mathcal{E}_{q' \sin \varphi'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi', \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', -q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{T_e (q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i (q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \right] \right] \\
& - \mathcal{E}_{q' \sin \varphi', -q' \cos \varphi'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{T_e (q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', -q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i (q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Usando de novo a simetria da relação de dispersão (5.11) e da amplitude do espectro de ondas (5.12),

$$\begin{aligned}
& = - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi', \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \right] \right] \\
& - \mathcal{E}_{q' \sin \varphi', q' \cos \varphi'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i (q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi'))} \right) \right) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (-\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi', \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e (q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi'))} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i (q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi'))} \right) \right] \right] \\
& - \mathcal{E}_{q' \sin \varphi', q' \cos \varphi'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \\
& - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \Big] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
& - \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \\
& \times \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L - \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \Big] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* \sigma z_{\mathbf{q}}^L (-\sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_{\mathbf{q}}^L \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
& - \mathcal{E}_{q'}^{\sigma' L} \sin \varphi', q' \cos \varphi') \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi') \right. \\
& \times \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{T_e q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_{\mathbf{q}}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_* (\sigma z_{\mathbf{q}}^L + \sigma' z_{q'}^L \sin \varphi', q' \cos \varphi')^2}{m_e T_i q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \right) \Big].
\end{aligned}$$

Tomando em conta que φ e φ' estão no primeiro quadrante do plano cartesiano, as relações de dispersão somente são funções dos módulos de q ou q' (Devido as propriedades já mencionadas),

$$\begin{aligned}
&= - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_q^L (\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \\
&\quad - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \Big] \\
&\quad - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_q^L (-\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \\
&\quad - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \Big] \\
&\quad - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_q^L (\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \\
&\quad - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \Big] \\
&\quad - \frac{n_*}{n_e} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
&\quad \times \left[g_* \sigma z_q^L (-\sigma' z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - \sigma z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \Big] \\
& - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \\
& \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (\sigma z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \Big].
\end{aligned}$$

Dos termos exponenciais com $\sigma z_q^L - \sigma' z_{q'}^L$, a contribuição mais importante é quando $\sigma' = \sigma$, e para termos com $\sigma z_q^L + \sigma' z_{q'}^L$ é quando $\sigma' = -\sigma$.

$$\begin{aligned}
& = - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
& \left. - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
& \left. - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right] \right. \\
& \left. - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i}{m_e} \frac{T_*}{T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) \left[\left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right] \\
& - \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \right) \\
& - 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \left. \right].
\end{aligned}$$

Separando as contribuições dos elétrons e dos íons, obtemos o termo associado ao espalhamento espontâneo e induzido, envolvendo ondas L ,

$$\begin{aligned}
& = - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_e} (z_q^L - z_{q'}^L) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2qq' \cos(\varphi - \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \right] \\
& - \frac{n_*}{n_e} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi + \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_i T_*}{m_e T_i} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 + 2qq' \cos(\varphi + \varphi')} \right) \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma L}) + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{-\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} (z_q^L - z_{q'}^L) 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \right].
\end{aligned}$$

Pode-se fazer mais aproximações, como ignorar a contribuição dos elétrons no termo de espalhamento induzido, como já mencionado. Vemos também que, devido aos fatores exponenciais, a parte relevante da região de integração é ao redor de $q' = q_m$, onde $z_q^L = z_{q_m}^L$. No caso, isto

corresponde a $q' = q$,

$$1 + \frac{3}{2}q^2 = 1 + \frac{3}{2}q_m^2,$$

$$\Rightarrow q_m = q.$$

Outras aproximações podem ser feitas, como expandir o argumento da função exponencial, também podemos introduzir os sinais s_1 e s_2 obtendo,

$$\frac{(z_q^L - z_{q'}^L)}{\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')}}}$$

$$\simeq \left[\frac{(z_q^L - z_{q'}^L)}{\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')}} \right]_{q_m} + \left[-\frac{3}{2} \frac{q'}{(z_{q'}^L)} \frac{\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')}}{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \right. \\ \left. - \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)(\partial/\partial q')\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')}}{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \right]_{q_m} (q' - q_m),$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{q_m}{(z_{q_m}^L)} \frac{(q' - q_m)}{\sqrt{q^2 + q_m'^2 - s_2 2qq_m' \cos(\varphi - s_1 \varphi')}}},$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{q_m}{(z_q^L)} \frac{(q' - q_m)}{\sqrt{q^2 + q_m'^2 - s_2 2qq_m' \cos(\varphi - s_1 \varphi')}}}.$$

Usando esta expressão, escrevemos (para a contribuição no “termo de emissão espontânea”)

$$\left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \right)$$

$$\simeq \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{9}{4} \frac{q_m^2}{(z_q^L)^2} \frac{(q' - q_m)^2}{q^2 + q_m'^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \right),$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} \frac{2}{3} \frac{(z_q^L)}{q_m} \sqrt{q^2 + q_m'^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \delta(q' - q_m).$$

Podemos definir

$$a_\alpha = \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{9}{4} \frac{q_m^2}{(z_q^L)^2} \frac{1}{q^2 + q_m'^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1 \varphi')},$$

de modo que a expressão aproximada é

$$\left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{9}{4} \frac{q_m^2}{(z_q^L)^2} \frac{(q' - q_m)^2}{q^2 + q_m'^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \right)$$

$$= \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \exp(-a_\alpha (q' - q_m)^2).$$

A largura média da expressão pode-se obter com a relação

$$q' - q_m = \frac{1}{\sqrt{a_\alpha}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_\alpha}} \sqrt{\frac{T_\alpha}{T_*}} \frac{2}{3} \frac{(z_q^L)}{q_m} \sqrt{q^2 + q_m'^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1 \varphi')}.$$

O máximo desta largura depende de q e do sinal de s_1 e s_2 . Consideremos a largura $\varphi - s_1\varphi' = \pi/2$ e $q = q_m$, como representativa

$$\sqrt{\frac{m_e}{m_\alpha}} \sqrt{\frac{T_\alpha}{T_*}} \frac{2}{3} (z_q^L) \sqrt{2}.$$

Esta largura é muito menor para íons que para elétrons. Consideremos que z_q^L é do ordem da unidade, para $q < 1$, a aproximação do delta pode ser boa para íons mas não para elétrons.

Além disso, podemos ver o máximo da expressão $(x - x_0)e^{-a(x-x_0)^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(x - x_0)e^{-a(x-x_0)^2} \right] &= 0, \\ e^{-a(x-x_0)^2} [1 - 2a(x-x_0)^2] &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_\pm = x_0 \pm 1/\sqrt{2a}. \end{aligned}$$

O valor máximo da expressão é

$$\left[(x - x_0)e^{-a(x-x_0)^2} \right]_{x_0 \pm 1/\sqrt{2a}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-1/2}.$$

Para $|a|$ suficientemente grande, a função exponencial é muito estreita, no caso contrário podemos usar a seguinte aproximação válida somente dentro de uma integral,

$$\left[(x - x_0)e^{-a(x-x_0)^2} \right] \simeq \sum_{\pm} (\pm) \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-1/2} e^{-a(x-x_0 \mp 1/\sqrt{2a})^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{s=\pm} s \delta(x - x_s).$$

Por outro lado, a contribuição do “termo de emissão induzida” é

$$\begin{aligned} & \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)}{\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1\varphi')}} \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')} \right) \\ & \simeq - \frac{3 q_m}{2 z_q^L} \frac{(q' - q_m)}{\sqrt{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')}} \\ & \quad \times \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{9}{4} \frac{q_m^2}{(z_q^L)^2} \frac{(q' - q_m)^2}{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')} \right), \end{aligned}$$

e usando a definição de a_α , a expressão fica

$$\begin{aligned} & -\sqrt{a_\alpha} (q' - q_m) \exp(-a_\alpha (q' - q_m)^2) \\ & \simeq -\sqrt{a_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2a_\alpha}} e^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{a_\alpha}} \sum_{s=\pm} s \delta(q' - q_s), \quad q_s = q_m + s \frac{1}{\sqrt{2a_\alpha}} \\ & \Rightarrow -\sqrt{\pi} \frac{2}{3} \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \frac{(z_q^L)}{q_m} \left(\frac{T_\alpha}{T_*} \frac{m_e}{m_\alpha} \right)^{1/2} \sqrt{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')} \sum_{s=\pm 1} s \delta(q' - q_s). \end{aligned}$$

Utilizando as aproximações delta para os termos espontâneo e induzido (usada somente para a contribuição dos íons)

$$\begin{aligned}
& -\frac{n_*}{n_e} \sum_{s_1, s_2} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \cos^2(\varphi - s_1\varphi') \int_0^\infty dq' q' \\
& \times \left[g_* z_q^L (z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} - z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{s_2\sigma L}) \frac{2}{3} \frac{(z_q^L)}{q_m} \frac{\sqrt{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')}}{\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1\varphi')}} \delta(q' - q_m) \right. \\
& \left. - \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{s_2\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} 2 \frac{T_*}{T_i} (z_q^L) \frac{2}{3} \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \frac{(z_q^L)}{q_m} \left(\frac{T_i}{T_*} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \sqrt{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')} \sum_{s=\pm 1} s \delta(q' - q_s) \right].
\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
& \frac{n_*}{n_e} \frac{2}{3} (z_q^L)^2 \sum_{s_1, s_2} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \cos^2(\varphi - s_1\varphi') \int_0^\infty dq' \\
& \times \left[g_* (z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{s_2\sigma L} - z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) \frac{q'}{q_m} \frac{\sqrt{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')}}{\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1\varphi')}} \delta(q' - q_m) \right. \\
& \left. + \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{s_2\sigma L} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} 2 \frac{T_*}{T_i} \left(\frac{T_i}{T_*} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} \frac{q'}{q_m} \sqrt{q^2 + q_m^2 - s_2 2qq_m \cos(\varphi - s_1\varphi')} \sum_{s=\pm 1} s \delta(q' - q_s) \right].
\end{aligned}$$

Integrando sobre q' (e tomando em conta que $q_m = q$),

$$\begin{aligned}
& \frac{n_*}{n_e} \frac{2}{3} (z_q^L)^2 \sum_{s_1, s_2} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \cos^2(\varphi - s_1\varphi') \left[g_* z_q^L (\mathcal{E}_{q \sin \varphi', q \cos \varphi'}^{s_2\sigma L} - \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{T_*}{T_i} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} e^{-1/2} q \sqrt{1 - s_2 \cos(\varphi - s_1\varphi')} \left(\sum_{s=\pm 1} s \frac{q_s}{q_m} \mathcal{E}_{q_s \sin \varphi', q_s \cos \varphi'}^{s_2\sigma L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right].
\end{aligned}$$

Usando este resultado e coletando as contribuições de íons e elétrons, reescrevemos o termo de espalhamento da forma

$$\begin{aligned}
& \frac{n_*}{n_e} \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} (z_q^L) \sum_{s_1, s_2} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - s_1\varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1\varphi')}} \\
& \times \left[g_* (z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{s_2\sigma L} - z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) \right] \exp \left(-\frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - s_2 2qq' \cos(\varphi - s_1\varphi')} \right) \\
& + \frac{n_*}{n_e} \frac{2}{3} (z_q^L) \int_0^{\pi/2} d\varphi' \cos^2(\varphi - s_1\varphi') \left[g_* z_q^L (\mathcal{E}_{q \sin \varphi', q \cos \varphi'}^{s_2\sigma L} - \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{T_*}{T_i} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} e^{-1/2} q \sqrt{1 - s_2 \cos(\varphi - s_1\varphi')} \left(\sum_{s=\pm 1} s \frac{q_s}{q_m} \mathcal{E}_{q_s \sin \varphi', q_s \cos \varphi'}^{s_2\sigma L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right].
\end{aligned}$$

Ainda podemos simplificar mudando de notação e introduzindo os sinais $\sigma' = s_2\sigma$ e $\sigma\sigma' = s_2$, ficando com

$$\begin{aligned}
& \frac{n_*}{n_e} \left(\frac{1}{\pi} \frac{T_*}{T_e} \right)^{1/2} (z_q^L) \sum_{s_1, \sigma' = \pm} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \int_0^\infty dq' q' \frac{\cos^2(\varphi - s_1 \varphi')}{\sqrt{q^2 + q'^2 - 2\sigma\sigma'qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')}} \\
& \times \left[g_* (z_q^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}'}^{\sigma' L} - z_{q'}^L \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) \right] \exp \left(- \frac{T_*}{T_e} \frac{(z_q^L - z_{q'}^L)^2}{q^2 + q'^2 - 2\sigma\sigma'qq' \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \right) \\
& + \frac{n_*}{n_e} \frac{2}{3} (z_q^L)^2 \sum_{s_1, \sigma' = \pm} \int_0^{\pi/2} d\varphi' \cos^2(\varphi - s_1 \varphi') \left[g_* z_q^L (\mathcal{E}_{q \sin \varphi', q \cos \varphi'}^{\sigma' L} - \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L}) \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{T_*}{T_i} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} e^{-1/2} q \sqrt{1 - \sigma\sigma' \cos(\varphi - s_1 \varphi')} \left(\sum_{s=\pm 1} s \frac{q_s}{q_m} \mathcal{E}_{q_s \sin \varphi', q_s \cos \varphi'}^{\sigma' L} \right) \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \right].
\end{aligned}$$

O termo descrevendo o decaimento de três ondas pode ser tratado de forma similar. Da mesma forma, a equação para a evolução das ondas S pode ser também escrita em termos de coordenadas polares.

5.6 Equação de diferenças finitas para a função distribuição de elétrons em coordenadas polares

Para um abordagem numérica das equações de turbulência fraca, vamos transformar as equações diferenciais da teoria em equações de diferenças finitas. Começaremos com a equação para a função distribuição dos elétrons.

Da equação (5.29), temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} &= \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} (u A_u^e \Phi_e) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta^e \Phi_e) \\
&+ \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u D_{uu}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{u\theta}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right), \\
\frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial u} (A_u^e \Phi_e) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta^e \Phi_e) + \frac{1}{u} (A_u^e \Phi_e) \\
&+ \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{uu}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{u\theta}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} \left(D_{uu}^e \frac{\partial \Phi_e}{\partial u} \right).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Podemos usar Φ em vez de Φ_e , por simplicidade, assim como A_i e D_{ij} em vez de A_i^e e D_{ij}^e ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} (A_u \Phi) + \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{uu} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(D_{u\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{u} (A_u \Phi) + \frac{1}{u} \left(D_{uu} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)}_{\mathcal{L}_u} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \Phi) + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D_{\theta\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)}_{\mathcal{L}_\theta}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = & \underbrace{\left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi + \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u} + D_{uu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta}}_{\mathcal{L}_u} \\
& + \underbrace{\frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \Phi + \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial D_{\theta u}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{\theta u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta}}_{\mathcal{L}_\theta}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Usamos o índice i para a coordenada u_x , com $1 \leq i \leq n_i$, e j para a coordenada θ , com $1 \leq j \leq n_j$. Para o tempo normalizado τ , usamos o índice n , e o intervalo de tempo $\Delta\tau$. Para a solução numérica usaremos o método conhecido como *splitting*, que é aplicado da seguinte forma:

- para todo intervalo aplicamos \mathcal{L}_u e \mathcal{L}_θ sobre ϕ^n , gerando funções Φ_u e Φ_θ ;
- então escrevemos $\Phi^{n+1} = \Phi_x + \Phi_z - \Phi^n$;
- finalmente aplicamos as condições de fronteira sobre a função Φ^{n+1} .

5.6.1 Aplicação do operador \mathcal{L}_u :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi + \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u} + D_{uu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta}, \tag{5.39}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi - \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial u} - D_{uu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = \frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta}. \tag{5.40}$$

Aplicamos o operador de forma parcialmente explícita e parcialmente implícita. Para todo $1 \leq j \leq n_j$ e $2 \leq i \leq n_i - 1$, podemos aplicar as derivadas centradas em u , e derivada avançada em τ ,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta\tau} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \left(\frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta u} \right) \\
& - \frac{1}{2} D_{uu} \left(\frac{\Phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta u)^2} \right), \\
& = \frac{1}{2} \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \left(\frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta u} \right) + \frac{1}{2} D_{uu} \left(\frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{(\Delta u)^2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi_{i,j}^n + \frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi^n}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u \partial \theta}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Multiplicando por $\Delta\tau$,

$$\begin{aligned}
& (\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n) - \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \frac{\Delta\tau}{2} \Phi_{i,j}^{n+1} - \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u} (\Phi_{i+1,j}^{n+1} - \Phi_{i-1,j}^{n+1}) \\
& - D_{uu} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u)^2} (\Phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i-1,j}^{n+1}) \\
& = \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u} (\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n) + D_{uu} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u)^2} (\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n) \\
& + \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \frac{\Delta\tau}{2} \Phi_{i,j}^n + \left[\frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi^n}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u \partial \theta} \right] (\Delta\tau) .
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Podemos definir

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u} - D_{uu} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u)^2} , \\
\beta_1 &= 1 - \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \frac{\Delta\tau}{2} + 2D_{uu} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u)^2} , \\
\gamma_1 &= - \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u} - D_{uu} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u)^2} , \\
\psi_1 &= \Phi_{i,j}^n + \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \frac{\Delta\tau}{2} \Phi_{i,j}^n + \left(\frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi^n}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u \partial \theta} \right)_{i,j} (\Delta\tau) \\
& + \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{4\Delta u} (\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n) \\
& + D_{uu} \frac{\Delta\tau}{2(\Delta u)^2} (\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n) ,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

obtendo

$$\alpha_1 \Phi_{i-1,j}^{n+1} + \beta_1 \Phi_{i,j}^{n+1} + \gamma_1 \Phi_{i+1,j}^{n+1} = \psi_1 , \tag{5.44}$$

para $2 \leq i \leq n_i - 1$ e $1 \leq j \leq n_j$. As derivadas explícitas são avaliadas usando um esquema apropriado. Por exemplo, derivada de 5-pontos, com aproximações de derivada centrada de 3-pontos para frente ou para trás perto das bordas. Com este procedimento, a Equação (5.44) é válida para todos os valores de j . As condições de fronteira em u , para qualquer j , são dadas por

$$\frac{\partial \Phi_{1,j}}{\partial u} = 0 , \quad \frac{\partial \Phi_{n_i,j}}{\partial u} = \text{constant} . \tag{5.45}$$

A motivação para escolher estas condições de contorno em $u = u_{lim}$ é a seguinte: Supomos que as fronteiras são suficientemente longe da região mais povoada, assim que não mudará muito a distribuição. Portanto, as derivadas permanecem como a inicial. Com esta escolha podem

ocorrer algumas mudanças na função distribuição, que acontecem se não supusermos os valores da função distribuição na fronteira como constantes.

Uma alternativa para usar estas condições de fronteira é desenvolver uma equação de diferenças finitas para os pontos de fronteira. Quanto a \mathcal{L}_u , a condição proposta para $i = 1$ ainda pode ser utilizada. Para $i = n_i$, podemos desenvolver equações de diferenças finitas usando derivadas “para trás” (*backward derivatives*), tanto para primeira quanto para segunda ordem. As derivadas de segunda ordem podem ser escritas na forma explícita, para manter o sistema de equações na forma tri-diagonal.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta\tau} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \left(\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta u} \right) \\
& = \frac{1}{2} \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \left(\frac{\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{\Delta u} \right) + D_{uu} \left(\frac{\Phi_{i,j}^n - 2\Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i-2,j}^n}{(\Delta u)^2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi_{i,j}^n + \frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi^n}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u \partial \theta} .
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Multiplicando por $\Delta\tau$.

$$\begin{aligned}
& (\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n) - \frac{\Delta\tau}{2} \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{2\Delta u} \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} (\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i-1,j}^{n+1}) \\
& = \frac{\Delta\tau}{2\Delta u} \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} (\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n) + D_{uu} \frac{\Delta\tau}{(\Delta u)^2} (\Phi_{i,j}^n - 2\Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i-2,j}^n) \\
& + \frac{\Delta\tau}{2} \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \Phi_{i,j}^n + \left[\frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi^n}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u \partial \theta} \right] (\Delta\tau) .
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Podemos definir para $i = n_i$,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 & = \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{2\Delta u} , \\
\beta_1 & = 1 - \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{2\Delta u} - \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \frac{\Delta\tau}{2} , \\
\gamma_1 & = 0 , \\
\psi_1 & = \Phi_{i,j}^n + \left(\frac{\partial A_u}{\partial u} + \frac{1}{u} A_u \right) \frac{\Delta\tau}{2} \Phi_{i,j}^n + \left(\frac{1}{u} \frac{\partial D_{u\theta}}{\partial u} \frac{\partial \Phi^n}{\partial \theta} + \frac{1}{u} D_{u\theta} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial u \partial \theta} \right)_{i,j} (\Delta\tau) \\
& + \left(A_u + \frac{\partial D_{uu}}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{uu} \right)_{i,j} \frac{\Delta\tau}{2\Delta u} (\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n) \\
& + D_{uu} \frac{\Delta\tau}{(\Delta u)^2} (\Phi_{i,j}^n - 2\Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i-2,j}^n) ,
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Usando equações (5.43) e (5.48), podemos usar a equação (5.44) para $2 \leq i \leq n_i$ e $1 \leq j \leq n_j$. A solução em $i = 1$ se obtém usando as condições de contorno.

5.6.2 Aplicação de \mathcal{L}_θ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \Phi + \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial D_{\theta u}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{\theta u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta}, \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \Phi - \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{u} \frac{\partial D_{\theta u}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{\theta u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta}. \quad (5.50)$$

Para todo $1 \leq i \leq n_i$ e $2 \leq j \leq n_j - 1$, aplicamos as derivadas centradas derivadas em θ e a derivada avançada em τ .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta \tau} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \Phi_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{i,j} \left(\frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta \theta} \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \left(\frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta \theta)^2} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{i,j} \left(\frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n}{2\Delta \theta} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \left(\frac{\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{(\Delta \theta)^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \Phi_{i,j} + \frac{1}{u} \frac{\partial D_{\theta u}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{\theta u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial u}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Multiplicando a expressão por $\Delta \tau$

$$\begin{aligned} & (\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}) - \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \frac{\Delta \tau}{2} \Phi_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{i,j} \frac{\Delta \tau}{4\Delta \theta} (\Phi_{i,j+1}^{n+1} - \Phi_{i,j-1}^{n+1}) \\ & - \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta \theta)^2} (\Phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}) \\ & = \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{i,j} \frac{\Delta \tau}{4\Delta \theta} (\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n) + \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta \theta)^2} (\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \frac{\Delta \tau}{2} \Phi_{i,j} + \left[\frac{1}{u} \frac{\partial D_{\theta u}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{\theta u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial u} \right] (\Delta \tau). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Podemos definir

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{i,j} \frac{\Delta \tau}{4\Delta \theta} - \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta \theta)^2}, \\ \beta_2 &= 1 - \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \frac{\Delta \tau}{2} + \frac{2}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta \theta)^2}, \\ \gamma_2 &= - \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{i,j} \frac{\Delta \tau}{4\Delta \theta} - \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta \theta)^2}, \\ \psi_2 &= \Phi_{i,j} + \frac{1}{u} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \Phi_{i,j} \frac{\Delta \tau}{2} + \left(\frac{1}{u} \frac{\partial D_{\theta u}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{u} D_{\theta u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial u} \right)_{i,j} (\Delta \tau) \\ & + \left(\frac{1}{u} A_\theta + \frac{1}{u^2} \frac{\partial D_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right)_{i,j} \frac{\Delta \tau}{4\Delta \theta} (\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{1}{u^2} D_{\theta\theta} \frac{\Delta \tau}{2(\Delta \theta)^2} (\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n), \end{aligned} \quad (5.53)$$

e obtemos

$$\alpha_2 \Phi_{i,j-1}^{n+1} + \beta_2 \Phi_{i,j}^{n+1} + \gamma_2 \Phi_{i,j+1}^{n+1} = \psi_2 . \quad (5.54)$$

Para $i \leq i \leq n_i$ e $2 \leq j \leq n_j - 1$. Como condições de fronteira, usamos (para todo i)

$$\frac{\partial \Phi_{i,1}}{\partial \theta} = 0 , \quad \frac{\partial \Phi_{i,n_j}}{\partial \theta} = 0 . \quad (5.55)$$

Estas condições de fronteira são motivadas pela simetria azimutal.

Para finalizar esta seção, mencionamos que as equações de evolução das intensidades das ondas também devem ser expressas na forma de diferenças finitas. O procedimento é similar ao adotado para a equação de evolução da função distribuição. Entretanto, as equações de evolução das intensidades não contém derivadas parciais, de modo que para elas utilizamos o bem conhecido método Runge-Kutta de quarta ordem, ao invés do método de *splitting*.

Capítulo 6

Resultados

Para estudar a evolução temporal do sistema, vamos considerar um caso relativamente simples, levando em conta apenas as ondas de Langmuir e os processos de emissão espontânea e induzida e o espalhamento. Para tratar as equações normalizadas e discretizadas de ondas e partículas desenvolvemos um código numérico usando linguagem de programação *FORTRAN-90*, linguagem adequada para resolver problemas de ciência e engenharia.

Pegando as equações da teoria de turbulência fraca já mencionadas no capítulo anterior, equação (5.13) para as ondas e equação (5.15) para as partículas, resolvemos numericamente pelo método *splitting*¹ a equação das partículas e pelo método Runge-Kutta de quarta ordem a equação das ondas, iterando para fazer evoluir o sistema no tempo.

No código usamos grades com 51×51 pontos para (q, ϑ) , na faixa $0 < q < 0,5$ e $0 < \vartheta < 2\pi$. Para as velocidades, usamos grades com 101×101 , cobrindo a faixa de velocidades $0 < u < 12$ e $0 < \vartheta < 2\pi$. O número de pontos nas grades foi escolhido de forma que os gráficos tivessem boa resolução e o tempo de rodamento do código não fosse muito longo.

Para todas as soluções numéricas, consideramos a razão entre elétrons do feixe e elétrons térmicos dada por $n_f/n_0 = 1,0 \times 10^{-4}$, velocidade de feixe normalizada $v_f/v_e = 5,0$, temperatura do feixe $T_f/T_e = 1$, razão de temperaturas entre elétrons e íons $T_e/T_i = 7,0$, e o parâmetro de plasma $g = 5 \times 10^{-3}$. Não consideramos feixe indo para trás, de modo que usamos $n_b/n_e = 0.0$.

Os resultados obtidos com o programa, para diferentes instantes de tempo, tanto para a função distribuição de velocidades como para o espectro de ondas, são representados em gráficos feitos com o *software* “*Gnuplot*”, usando escala logarítmica no eixo z para mostrar com mais detalhe os resultados da interação entre partículas e ondas. Em cada figura se mostra no gráfico superior a função distribuição de elétrons e na parte inferior a densidade espectral das ondas, para um dado valor do tempo normalizado τ , sendo que na primeira figura, Fig. 6.1, se mostra a função distribuição de elétrons inicial e o espectro inicial de ondas L , ambos normalizados.

¹Usado para resolver equações com derivadas parciais.

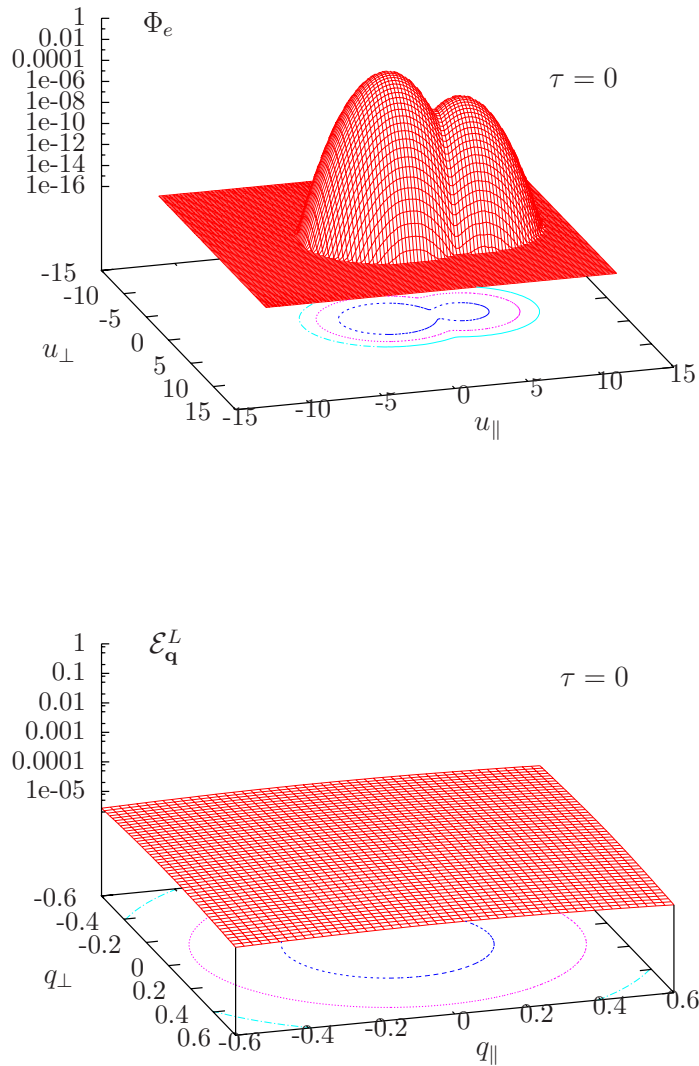


FIGURA 6.1: $\Phi_e(\tau = 0)$ e $\mathcal{E}_q^L(\tau = 0)$

6.1 Evolução temporal da função distribuição e da densidade espectral de ondas

Nas figuras se mostra a função distribuição de velocidades e a intensidade espectral das ondas L normalizadas, para diferentes valores do tempo normalizado. As figuras 6.2, 6.4 e 6.6 mostram resultados obtidos levando em conta a contribuição do termo de emissão espontânea e induzida na equação das ondas ($\mathcal{E}_q^L|_{emiss}$). As figuras 6.3, 6.5 e 6.7 são obtidas levando em conta tanto os termos de emissão espontânea e induzida como o termo de espalhamento ($\mathcal{E}_q^L|_{emiss} + \mathcal{E}_q^L|_{scatt}$).

Observando as figuras da função distribuição de elétrons vemos que gradualmente se forma um *plateau*, como previsto na teoria quase-linear e como também é obtido em artigos anteriores,

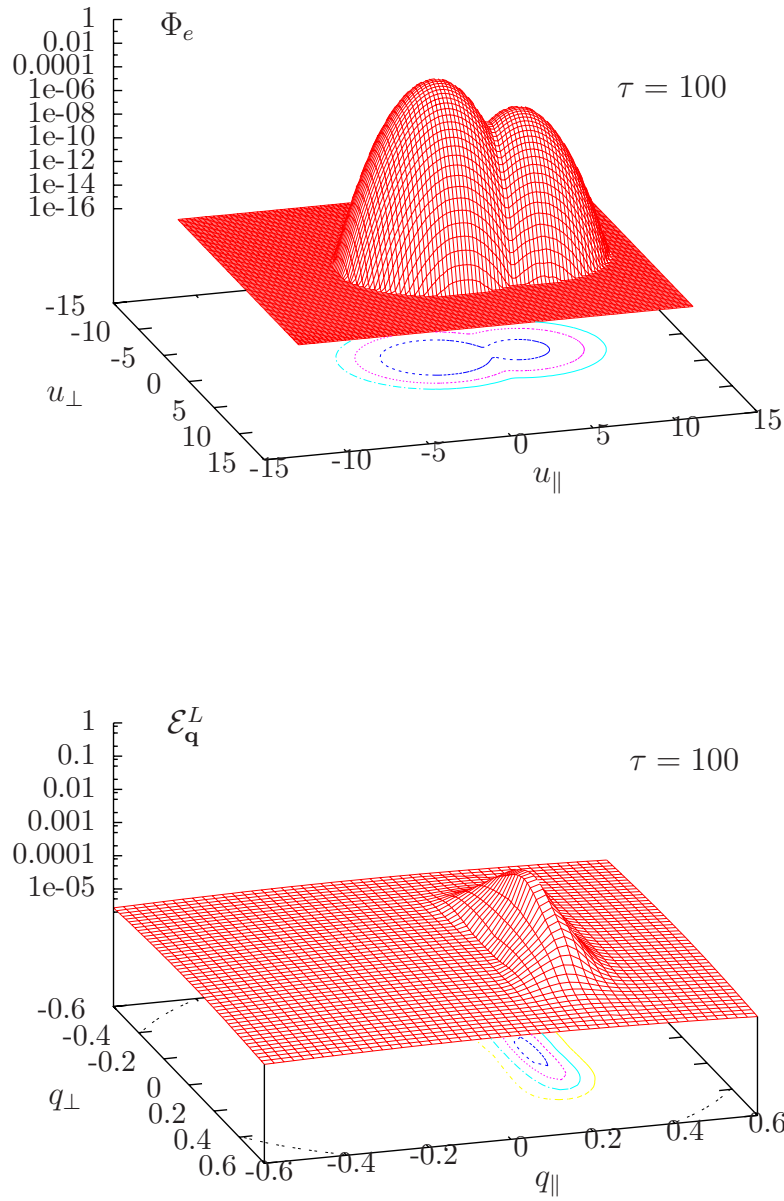


FIGURA 6.2: $\Phi_e(\tau = 100)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 100)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida.

feitos usando coordenadas cartesianas, que mostram soluções em 2D levando em conta efeitos não lineares [21, 14]². Por outro lado vemos que o termo de espalhamento de ondas L muda muito pouco as funções distribuição nos gráficos das figuras 6.2 e 6.4, que mostram resultados em $\tau = 100$ e $\tau = 500$, respectivamente. Na figura 6.6, para $\tau = 1000$, vemos que as curvas de

²O primeiro desses artigos leva em conta apenas efeitos de decaimento de ondas L e não o efeito do termo de espalhamento. O segundo levava em conta tanto os termos de espalhamento como os de decaimento.

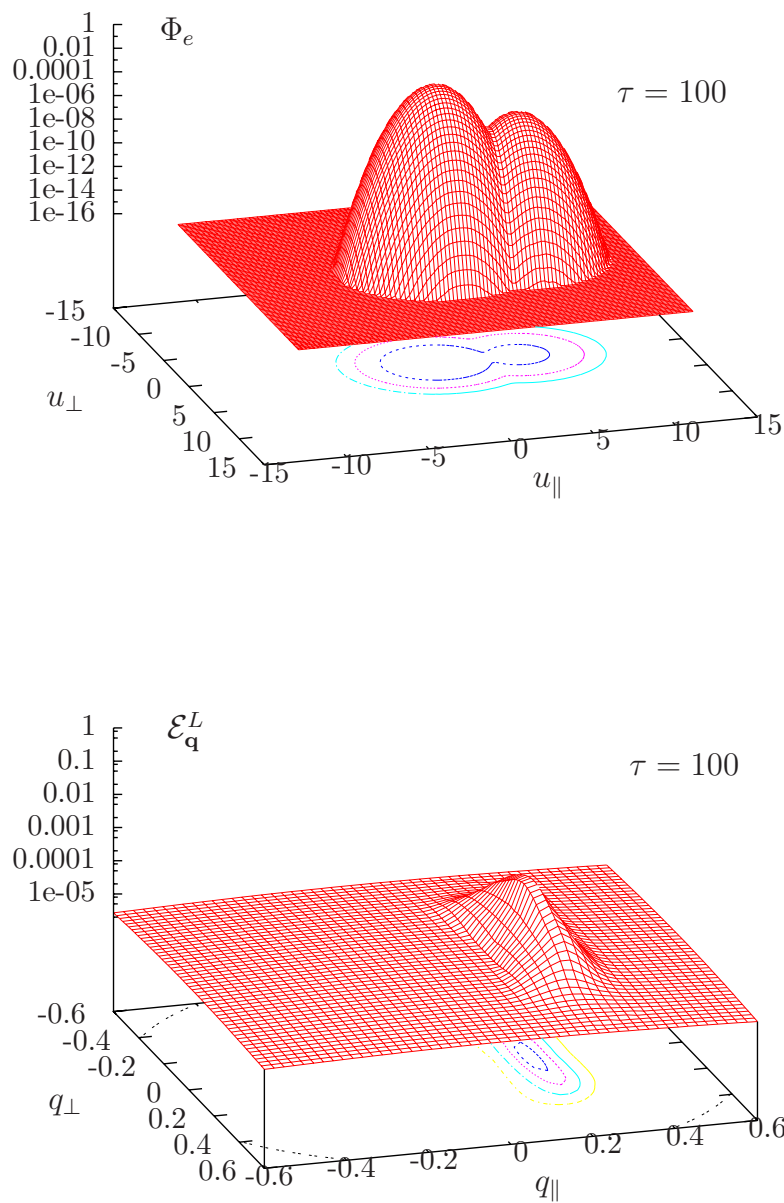


FIGURA 6.3: $\Phi_e(\tau = 100)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 100)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida e os termos de espalhamento.

nível da função distribuição já começam a se deformar, principalmente na região do feixe. Esses efeitos do termo de espalhamento também podem ser vistos no artigo [15]³.

Observando os gráficos dos espectros das ondas nas figuras 6.2 e 6.3 ($\tau = 100$) vemos que as duas figuras mostram espectros muito semelhantes entre si. Nas figuras 6.4 e 6.6, que mostram os

³Este artigo levou em conta também o efeito dos elétrons no termo de espalhamento espontâneo, que não estava incluído no estudo feito na Ref. [14].

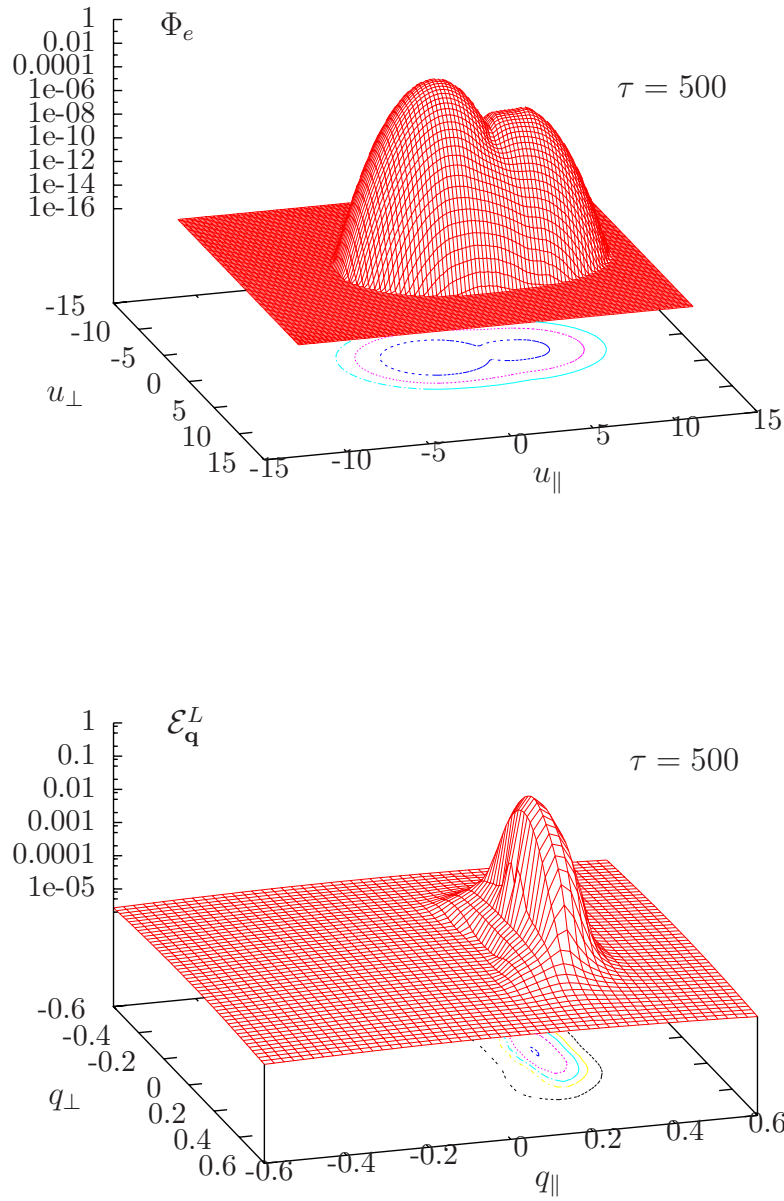


FIGURA 6.4: $\Phi_e(\tau = 500)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 500)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida.

resultados obtidos para $\tau = 500$ e $\tau = 1000$, respectivamente, sem o efeito do espalhamento, não se verifica a formação do anel observado em estudos anteriores [14, 21]. Entretanto, nos gráficos obtidos levando em conta o termo de espalhamento, nas figuras 6.5 e 6.7, se verifica a formação do anel. Além disso, vemos um preenchimento parcial do centro do anel, que não aparecia em [14, 21]. Este preenchimento é associado à contribuição dos elétrons ao termo de espalhamento espontâneo, como também se observa no artigo [15].

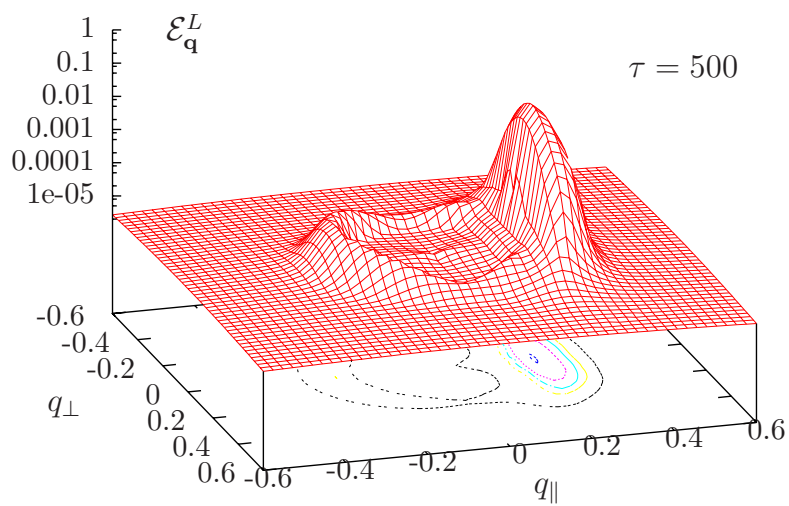
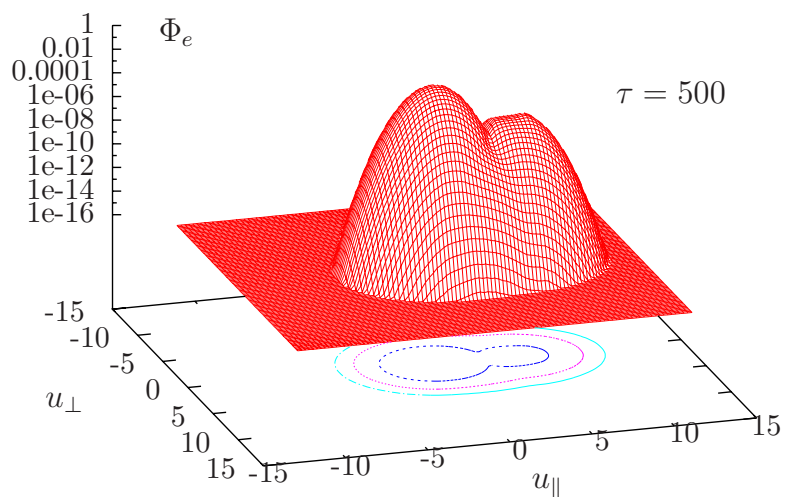


FIGURA 6.5: $\Phi_e(\tau = 500)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 500)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida e os termos de espalhamento.

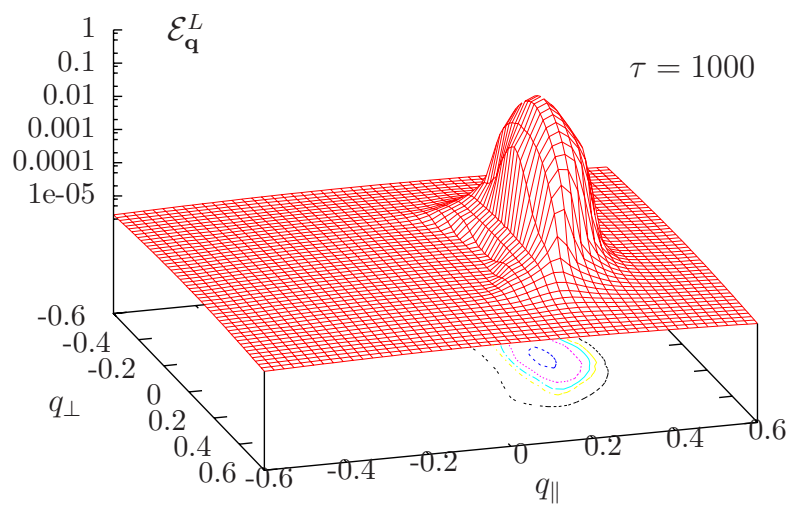
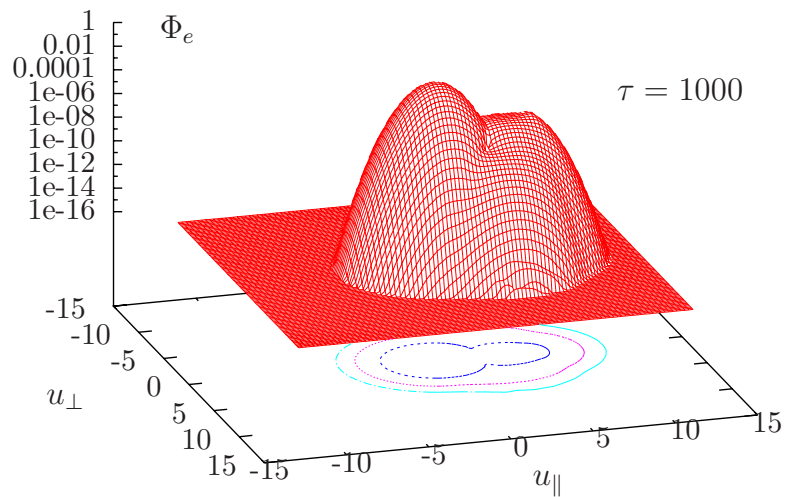


FIGURA 6.6: $\Phi_e(\tau = 1000)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 1000)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida.

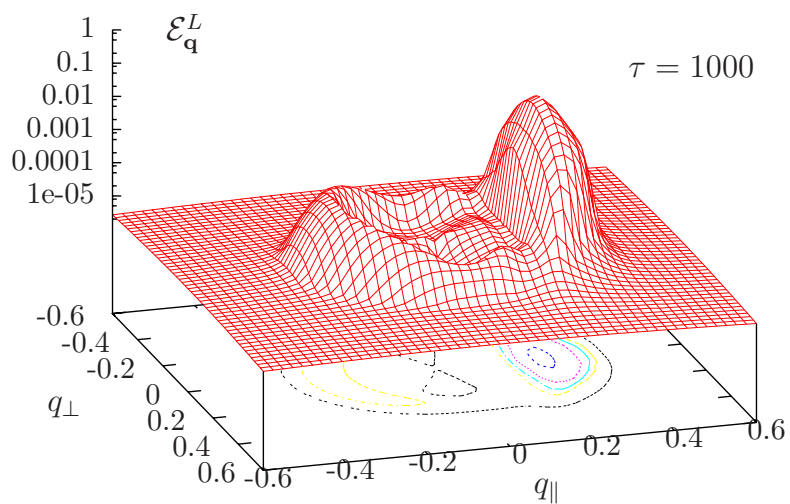
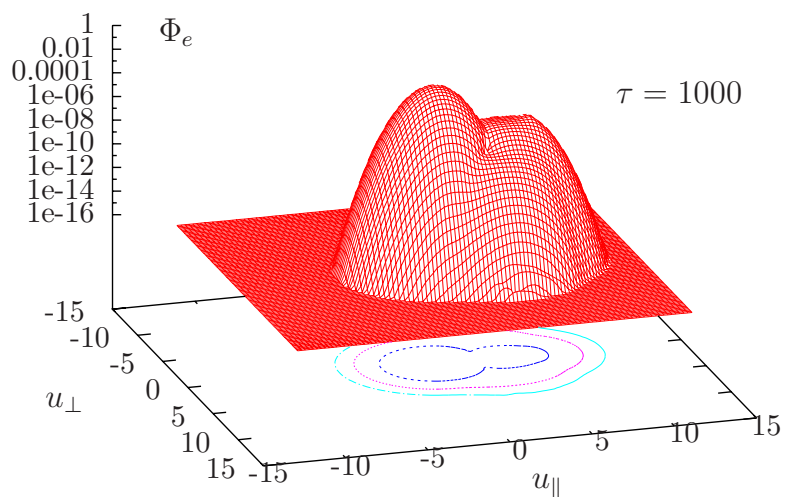


FIGURA 6.7: $\Phi_e(\tau = 1000)$, $\mathcal{E}_q^L(\tau = 1000)$, levando em conta os termos de emissão espontânea e induzida e os termos de espalhamento.

Capítulo 7

Conclusões e comentários finais

Nesta dissertação apresentamos uma revisão da teoria cinética de plasmas, utilizando uma metodologia que nos conduziu desde os aspectos fundamentais da teoria até o conjunto de equações acopladas da teoria de turbulência fraca, que apresentam diferentes termos, que podem ser interpretados como associados a mecanismos de emissão espontânea e induzida, decaimento envolvendo três ondas, e espalhamento onda-partícula.

As equações da turbulência fraca foram utilizadas para um estudo da interação feixe-plasma. Neste estudo levamos em conta apenas o efeito de ondas eletrostáticas e o efeito de termos de emissão induzida e espontânea e espalhamento. Consideramos uma situação inicial em que a distribuição de elétrons é descrita como uma distribuição Maxwelliana acrescida de um feixe tênue, e tratamos o problema considerando duas dimensões nos espaços de velocidade e de número de onda. A abordagem bi-dimensional permite a investigação de fenômenos que não podem ser analisados em uma análise uni-dimensional, como o espalhamento de ondas para direções diferentes da direção original de propagação, sem a complexidade computacional que seria exigida por uma abordagem tri-dimensional.

Para a obtenção de soluções numéricas para a evolução temporal do sistema de ondas e partículas, escrevemos as equações da teoria de turbulência fraca em termos de coordenadas polares, e posteriormente as escrevemos em termos de equações de diferenças finitas. Desenvolvemos então um código numérico para solução do sistema de equações, com o qual pudemos comparar os efeitos de diferentes termos e mecanismos incorporados nas equações, sobre as distribuições de velocidades e sobre os espectros das ondas. As soluções numéricas obtidas considerando os processos de emissão espontânea e induzida de ondas de Langmuir, mostraram tanto a formação do *plateau* na função de distribuição quanto o crescimento da energia das ondas com números de ondas ressonantes com velocidades na região de derivada positiva do feixe, conforme previsto pela teoria quase-linear. Também foram obtidos resultados incluindo o efeito de espalhamento de ondas de Langmuir, que mostraram a formação de um anel no espaço de número de ondas, além de preenchimento parcial da região central do anel. Na função distribuição obtivemos um aquecimento dos elétrons, mostrado pelo alargamento da função distribuição. Estas mudanças nas ondas e na distribuição de velocidades das partículas são próprias do espalhamento.

Os resultados obtidos com o código usando coordenadas polares mostraram boa concordância com resultados anteriores, obtidos por outros autores usando coordenadas cartesianas. Entretanto, verificamos que surgem instabilidades na solução se a evolução temporal é acompanhada além de $\tau = 1500$, o que mostra que o código usando coordenadas polares ainda necessita aperfeiçoamento. Além disso, o código em coordenadas polares pode também evoluir no sentido da inclusão de efeitos de decaimento, interações eletromagnéticas e outras ainda não incluídos nesta versão.

Apêndice A

Avaliação das componentes A_i e D_{ij}

A.1 Avaliação das componentes A_i

As componentes A_i^e podem ser escritas como na equação (5.29),

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} &= g \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &= g \int_{-\pi}^0 d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &\quad + g \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{\mathbf{q}}^L \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

Trocando $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ na primeira integral

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} &= g \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin(-\vartheta) + \cos \theta \cos(-\vartheta) \\ \cos \theta \sin(-\vartheta) - \sin \theta \cos(-\vartheta) \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{q \sin(-\vartheta), q \cos(-\vartheta)}^L \delta(\sigma z_{q \sin(-\vartheta), q \cos(-\vartheta)}^L - qu(\sin \theta \sin(-\vartheta) + \cos \theta \cos(-\vartheta)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + g \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

Usando as propriedades de $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$ e $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} & = g \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_{-q}^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_{-q}^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

Usando a relação de dispersão,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} & = g \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

Estas equações podem ser separadas em duas partes.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} & = g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_{\pi/2}^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + g \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

Trocando de variável $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ no segundo e quarto termos,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} & = g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\infty} dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_{\pi/2}^0 d(-\vartheta) \int_0^{\infty} dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta) \\ -\cos \theta \sin(\pi - \vartheta) - \sin \theta \cos(\pi - \vartheta) \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta) \\
 & \delta(\sigma z_q^L \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta) - qu(-\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta))) \\
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\infty} dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_{\pi/2}^0 d(-\vartheta) \int_0^{\infty} dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta) \\ \cos \theta \sin(\pi - \vartheta) - \sin \theta \cos(\pi - \vartheta) \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta) \\
 & \delta(\sigma z_q^L \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta) - qu(\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta)))
 \end{aligned}$$

Agora usamos $\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$ e $\sin(\pi - \vartheta) = \sin \vartheta$, trocando os limites das integrais no primeiro e quarto termos.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} & = g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\infty} dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\infty} dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, -q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, -q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, -q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, -q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

Usando de novo a propriedades de simetria da relação de dispersão, e simplificando

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} & = g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

O primeiro e quarto termos podem ser recolhidos num só, como também o segundo e o terceiro,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} & = 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ -\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

Na região de integração tanto $\sin \vartheta$ quanto $\cos \vartheta$ são quantidades positivas. Portanto podemos escrever a relação de dispersão como z_q^L ,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} &= -2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \delta(\sigma z_q^L + qu(\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &\quad + 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta \\ \cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \delta(\sigma z_q^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &= -2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} -\cos(\theta + \vartheta) \\ \sin(\theta + \vartheta) \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + \vartheta)) \\
 &\quad + 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \cos(\theta - \vartheta) \\ -\sin(\theta - \vartheta) \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta - \vartheta)) \\
 &= 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \cos(\theta + \vartheta) \\ -\sin(\theta + \vartheta) \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + \vartheta)) \\
 &\quad + 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \begin{pmatrix} \cos(\theta - \vartheta) \\ -\sin(\theta - \vartheta) \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma z_q^L \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta - \vartheta))
 \end{aligned}$$

Introduzindo um sinal para representar a soma e diferença de ângulos,

$$\begin{aligned}
 &2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \sum_{\sigma, s_1=\pm 1} \begin{pmatrix} \cos(\theta + s_1\vartheta) \\ -\sin(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} \sigma z_q^L \\
 &\quad \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + s_1\vartheta)) \\
 &= 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \sum_{\sigma, s_1=\pm 1} \begin{pmatrix} \cos(\theta + s_1\vartheta) \\ -\sin(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} qu \cos(\theta + s_1\vartheta) \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \\
 &\quad \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + s_1\vartheta)) \\
 &= 2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \sum_{\sigma, s_1=\pm 1} \begin{pmatrix} \cos(\theta + s_1\vartheta) \\ -\sin(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} qu \cos(\theta + s_1\vartheta) \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \\
 &\quad \delta(z_q^L - qu\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta))
 \end{aligned}$$

Usando a condição de ressonância dada pela equação (B.1),

$$\begin{aligned}
 &2g \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \sum_{\sigma, s_1=\pm 1} \begin{pmatrix} \cos(\theta + s_1\vartheta) \\ -\sin(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} qu \cos(\theta + s_1\vartheta) \\
 &\quad \times \frac{u |\cos(\theta + s_1\vartheta)|}{|u^2 \cos^2(\theta + s_1\vartheta) - 3/2|} \delta(q - q_{\sigma s_1}) \Theta[u^2 \cos^2(\theta + \sigma\vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)]
 \end{aligned}$$

Devido à condição $\sigma \cos(\theta + s_1 \vartheta)$, a quantidade $\cos(\theta + s_1 \vartheta)$, pode ser escrita como $\sigma |\cos(\theta + s_1 \vartheta)|$,

$$\begin{aligned}
 &= 2gu^2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq \sum_{\sigma, s_1 = \pm 1} \sigma \begin{pmatrix} \cos(\theta + s_1 \vartheta) \\ -\sin(\theta + s_1 \vartheta) \end{pmatrix} \frac{q \cos^2(\theta + s_1 \vartheta) \delta(q - q_{\sigma s_1})}{|u^2 \cos^2(\theta + s_1 \vartheta) - 3/2|} \\
 &\quad \times \Theta[u^2 \cos^2(\theta + s_1 \vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1 \vartheta)]
 \end{aligned}$$

Integrando sobre q , obtemos

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} &= 2gu^2 \sum_{\sigma, s_1 = \pm 1} \sigma \int_0^{\pi/2} d\vartheta \begin{pmatrix} \cos(\theta + s_1 \vartheta) \\ -\sin(\theta + s_1 \vartheta) \end{pmatrix} \frac{q_{\sigma s_1} \cos^2(\theta + s_1 \vartheta)}{|u^2 \cos^2(\theta + s_1 \vartheta) - 3/2|} \\
 &\quad \times \Theta[u^2 \cos^2(\theta + s_1 \vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1 \vartheta)]
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Alternativamente, podemos usar a expressão para o valor de $q_{\sigma s_1}$, eq. (B.1), e obter

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A_u^e \\ A_\theta^e \end{pmatrix} &= 2gu^2 \sum_{\sigma, s_1 = \pm 1} \sigma \int_0^{\pi/2} d\vartheta \begin{pmatrix} \cos(\theta + s_1 \vartheta) \\ -\sin(\theta + s_1 \vartheta) \end{pmatrix} \frac{\cos^2(\theta + s_1 \vartheta)}{[u^2 \cos^2(\theta + s_1 \vartheta) - 3/2]^{3/2}} \\
 &\quad \times \Theta[u^2 \cos^2(\theta + s_1 \vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1 \vartheta)]
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.2 Avaliação das componentes D_{ij}

As componentes D_{ij}^e podem ser escritas como na (5.29),

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} D_{uu}^e \\ D_{u\theta}^e \\ D_{\theta\theta}^e \end{pmatrix} &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma = \pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\pi}^0 d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{\mathbf{q}}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

Trocando $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ na primeira integral,

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin(-\vartheta) + \cos \theta \cos(-\vartheta))^2 \\ (\sin \theta \sin(-\vartheta) + \cos \theta \cos(-\vartheta))(\cos \theta \sin(-\vartheta) - \sin \theta \cos(-\vartheta)) \\ (\cos \theta \sin(-\vartheta) - \sin \theta \cos(-\vartheta))^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin(-\vartheta), q \cos(-\vartheta)}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{q \sin(-\vartheta), q \cos(-\vartheta)}^L - qu(\sin \theta \sin(-\vartheta) + \cos \theta \cos(-\vartheta))) \\
 &+ \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

Usando as propriedades $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$ e $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$,

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(-\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (-\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{-q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{-q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^L - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{-q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{-q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^L - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

Usando as simetrias da relação de dispersão e o espectro de ondas,

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

Estas expressões podem ser separadas em duas partes,

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_{\pi/2}^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) , \\
 & + \int_{\pi/2}^\pi d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

Trocando de variável $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ no segundo e quarto termos

$$\begin{aligned}
 & = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + \int_{\pi/2}^0 d(-\vartheta) \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) - \cos \theta \cos(\pi - \vartheta))^2 \\ (\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) - \cos \theta \cos(\pi - \vartheta))(\cos \theta \sin(\pi - \vartheta) + \sin \theta \cos(\pi - \vartheta)) \\ (\cos \theta \sin(\pi - \vartheta) + \sin \theta \cos(\pi - \vartheta))^2 \end{array} \right) \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta)}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta) - qu(-\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta))) \\
 & + \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin \vartheta, q \cos \vartheta}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) , \\
 & + \int_{\pi/2}^0 d(-\vartheta) \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta))^2 \\ (\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta))(\cos \theta \sin(\pi - \vartheta) - \sin \theta \cos(\pi - \vartheta)) \\ (\cos \theta \sin(\pi - \vartheta) - \sin \theta \cos(\pi - \vartheta))^2 \end{array} \right) \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta)}^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin(\pi - \vartheta), q \cos(\pi - \vartheta) - qu(\sin \theta \sin(\pi - \vartheta) + \cos \theta \cos(\pi - \vartheta))) ,
 \end{aligned}$$

Agora usamos $\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$ e $\sin(\pi - \vartheta) = \sin \vartheta$, e mudando os limites de integração da segunda e quarta integral,

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, -q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) , \\
 &+ \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, -q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

Usando de novo a simetria da relação de dispersão e o espectro de onda, simplificamos

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 &+ \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \left(\begin{array}{c} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{array} \right) \\
 &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) , \\
 & + \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L \sin \vartheta, q \cos \vartheta - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) ,
 \end{aligned}$$

O primeiro e o quarto termos podem ser unidos, como também o segundo e o terceiro. Além disso, podemos escrever a relação de dispersão e o espectro de ondas como z_q^L e \mathcal{E}_q^L , respectivamente, porque na região de integração as quantidades $\sin \vartheta$ e $\cos \vartheta$ são positivas,

$$\begin{aligned}
 & = 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta - \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta + \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L - qu(-\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & + 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)^2 \\ (\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)(\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta) \\ (\cos \theta \sin \vartheta - \sin \theta \cos \vartheta)^2 \end{pmatrix} \\
 & \times \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L - qu(\sin \theta \sin \vartheta + \cos \theta \cos \vartheta)) \\
 & = 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (-\cos(\theta + \vartheta))^2 \\ (-\cos(\theta + \vartheta))(\sin(\theta + \vartheta)) \\ (\sin(\theta + \vartheta))^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + \vartheta)) \\
 & + 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} (\cos(\theta - \vartheta))^2 \\ (\cos(\theta - \vartheta))(-\sin(\theta - \vartheta)) \\ (-\sin(\theta - \vartheta))^2 \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta - \vartheta)) \\
 & = 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} \cos^2(\theta + \vartheta) \\ -\cos(\theta + \vartheta) \sin(\theta + \vartheta) \\ \sin^2(\theta + \vartheta) \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + \vartheta)) \\
 & + 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \begin{pmatrix} \cos^2(\theta - \vartheta) \\ -\cos(\theta - \vartheta) \sin(\theta - \vartheta) \\ \sin^2(\theta - \vartheta) \end{pmatrix} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta - \vartheta))
 \end{aligned}$$

Introduzindo um sinal designando a soma e diferença de ângulos,

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \sum_{\sigma, s_1=\pm 1} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta + s_1\vartheta) \\ -\cos(\theta + s_1\vartheta) \sin(\theta + s_1\vartheta) \\ \sin^2(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + s_1\vartheta))$$

Usando a condição de ressonância dado pela equação (B.1),

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty dq q \sum_{\sigma, s_1 = \pm 1} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta + s_1\vartheta) \\ -\cos(\theta + s_1\vartheta) \sin(\theta + s_1\vartheta) \\ \sin^2(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} \mathcal{E}_q^{\sigma L} \\
 &\quad \times \frac{u |\cos(\theta + s_1\vartheta)|}{|u^2 \cos^2(\theta + s_1\vartheta) - 3/2|} \delta(q - q_{\sigma s_1}) \Theta[u^2 \cos^2(\theta + s_1\vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)]
 \end{aligned}$$

Integrando sobre q ,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} D_{uu}^e \\ D_{u\theta}^e \\ D_{\theta\theta}^e \end{pmatrix} &= 2u \sum_{\sigma, s_1 = \pm 1} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \begin{pmatrix} \cos^2(\theta + s_1\vartheta) \\ -\cos(\theta + s_1\vartheta) \sin(\theta + s_1\vartheta) \\ \sin^2(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \frac{q_{\sigma s_1} \mathcal{E}_{q_{\sigma s_1}}^{\sigma L} |\cos(\theta + s_1\vartheta)|}{|u^2 \cos^2(\theta + s_1\vartheta) - 3/2|} \Theta[u^2 \cos^2(\theta + s_1\vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos usar a expressão $q_{\sigma s_1}$, dada pela equação (B.1), e obtendo

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} D_{uu}^e \\ D_{u\theta}^e \\ D_{\theta\theta}^e \end{pmatrix} &= 2u \sum_{\sigma, s_1 = \pm 1} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \begin{pmatrix} \cos^2(\theta + s_1\vartheta) \\ -\cos(\theta + s_1\vartheta) \sin(\theta + s_1\vartheta) \\ \sin^2(\theta + s_1\vartheta) \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \frac{\mathcal{E}_{q_{\sigma s_1}}^{\sigma L} |\cos(\theta + s_1\vartheta)|}{[u^2 \cos^2(\theta + s_1\vartheta) - 3/2]^{3/2}} \Theta[u^2 \cos^2(\theta + s_1\vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

Apêndice B

Condições de ressonância para A_i e D_{ij}

A condição de ressonância é expressada pela função δ ,

$$\begin{aligned}\delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + s_1\vartheta)) &= \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + s_1\vartheta)) \\ &= \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \delta(z_q^L - qu\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta))\end{aligned}$$

O valor de q que satisfaz a condição de ressonância é $q_{\sigma s_1}$, portanto,

$$\begin{aligned}&= \frac{\delta(q - q_{\sigma s_1})}{|(z_q^L)^{-1}(3/2)q - u\sigma \cos(\theta + \vartheta)|} \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \\ &= \frac{\delta(q - q_{\sigma s_1})}{|(qu\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta))^{-1}(3/2)q - u\sigma \cos(\theta + \vartheta)|} \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \\ &= \frac{|u\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)|\delta(q - q_{\sigma s_1})}{|3/2 - u^2 \cos^2(\theta + \vartheta)|} \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)] \\ &= \frac{u|\cos(\theta + s_1\vartheta)|\delta(q - q_{\sigma s_1})}{|3/2 - u^2 \cos^2(\theta + \vartheta)|} \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1\vartheta)]\end{aligned}$$

Para obter o valor ressonante $q_{\sigma s_1}$, consideramos a condição de ressonância

$$\sigma z_q^L = qu \cos(\theta \pm \vartheta)$$

Elevando ao quadrado e usando a relação de dispersão desta para ondas L ,

$$\begin{aligned}(z_q^L)^2 &= q^2 u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) \\ 1 + \frac{3}{2}q^2 &= q^2 u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) \\ 1 &= q^2 \left(u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) - \frac{3}{2} \right) \\ q &= \frac{1}{\sqrt{u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) - 3/2}} \Theta[u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) - 3/2]\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \delta(\sigma z_q^L - qu \cos(\theta + s_1 \vartheta)) &= \frac{u |\cos(\theta + s_1 \vartheta)|}{|3/2 - u^2 \cos^2(\theta + \vartheta)|} \delta(q - q_{\sigma s_1}) \\
 &\quad \times \Theta[u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta + s_1 \vartheta)] \\
 q_{\sigma \pm} &= \frac{1}{\sqrt{u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) - 3/2}} \\
 &\quad \times \Theta[u^2 \cos^2(\theta \pm \vartheta) - 3/2] \Theta[\sigma \cos(\theta \pm \vartheta)] \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

Apêndice C

Integrais

C.1 Avaliação das integrais sobre velocidades

A integral a fazer é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_z \Phi_\alpha \delta \left[\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z \right],$$

onde β, γ são os tipos de ondas e α é o tipo de partícula. Agora temos que integrar na variável u_z ,

$$\frac{1}{|q_z - q'_z|} \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x) / (q_z - q'_z)}.$$

A integral na variável u_x pode-se fazer da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\Phi_\alpha \right]_{u_z = (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x) / (q_z - q'_z)} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right) \int_{-\infty}^{\infty} du_x \left[\exp \left(-\alpha (u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = a u_x + b} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right) \left[\int_{-\infty}^0 du_x \left[\exp \left(-\alpha (u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = a u_x + b} + \int_0^{\infty} du_x \left[\exp \left(-\alpha (u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = a u_x + b} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right) \left[\int_0^{\infty} du_x \left[\exp \left(-\alpha (u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = -a u_x + b} + \int_0^{\infty} du_x \left[\exp \left(-\alpha (u_x^2 + u_z^2) \right) \right]_{u_z = a u_x + b} \right] \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}, \quad a = -\frac{q_x - q'_x}{q_z - q'_z}, \quad b = \frac{\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma}{q_z - q'_z}$$

Usando o valor de u_z ,

$$\int_0^{\infty} du_x \exp \left[-\alpha \left((1 + a^2) u_x^2 \pm 2ab u_x + b^2 \right) \right].$$

O máximo para $b = 0$ é

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad (\text{C.1})$$

e para $b \neq 0$,

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \exp\left(-\frac{\alpha b^2}{a^2 + 1}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\pm \frac{a b \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) \right]. \quad (\text{C.2})$$

Consideramos o caso de $b \neq 0$, então usamos (C.2) e integramos em u_x

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du_x \exp\left[-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \left[\frac{(q_z - q'_z)^2 + (q_x - q'_x)^2}{(q_z - q'_z)^2} u_x^2 - 2(q_x - q'_x)(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma) u_x + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2 \right] \right] \\ & + \int_0^\infty du_x \exp\left[-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \left[\frac{(q_z - q'_z)^2 + (q_x - q'_x)^2}{(q_z - q'_z)^2} u_x^2 + 2(q_x - q'_x)(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma) u_x + (\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2 \right] \right] \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{m_e T_\alpha}{\pi m_\alpha T_*} \right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right) \\ & \quad \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}} \frac{(q_x - q'_x) |q_z - q'_z|}{q_z - q'_z} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}}\right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{m_e T_\alpha}{\pi m_\alpha T_*} \right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_e T_i}{m_e T_i} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right) \\ & \quad \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(-\sqrt{\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha}} \frac{(q_x - q'_x) |q_z - q'_z|}{q_z - q'_z} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}}\right) \right] \end{aligned}$$

Usando $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, obtemos,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right) \left(\frac{m_e T_\alpha}{\pi m_\alpha T_*} \right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right) \\ & = \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \frac{|q_z - q'_z|}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right). \end{aligned}$$

Além disso, dividimos por $|q_z - q'_z|$,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty du_x \int_{-\infty}^\infty du_z \Phi_\alpha \delta\left[\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma - (q_x - q'_x)u_x - (q_z - q'_z)u_z\right] \\ & = \left(\frac{1}{\pi} \frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}} \exp\left(-\frac{m_\alpha T_*}{m_e T_\alpha} \frac{(\sigma z_{\mathbf{q}}^\beta - \sigma' z_{\mathbf{q}'}^\gamma)^2}{(q_x - q'_x)^2 + (q_z - q'_z)^2}\right). \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] N.A. Krall and A.W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. International series in pure and applied physics. San Francisco Press, 1986.
- [2] Claudio José de H. Cavalcanti. *Emissão, propagação e aplicação da radiação quilométrica das auroras nas subcavidades aurorais*. IF-UFRGS, 2001.
- [3] Peter H. Yoon. Generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas (1994-present)*, 7(12):4858–4871, 2000.
- [4] B. B. Kadomtsev. *Plasma Turbulence*. Academic Press, New York, 1965.
- [5] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev. *Nonlinear Plasma Theory*. Benjamin, New York, 1969.
- [6] V. N. Tsytovich. *Nonlinear Effects in a Plasma*. Plenum, New York, 1970.
- [7] V. N. Tsytovich. *An Introduction to the Theory of Plasma Turbulence*. Pergamon, New York, 1977.
- [8] V. N. Tsytovich. *Lectures on Nonlinear Plasma Kinetics*. Springer, New York, 1995.
- [9] Ronald C. Davidson. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Academic Press, New York, 1972.
- [10] R. Davidson. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Elsevier Science, 2012.
- [11] Peter H. Yoon. Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas (1994-present)*, 12(4):–, 2005.
- [12] Peter H. Yoon. Statistical theory of electromagnetic weak turbulence. *Physics of Plasmas*, 13:022302, 15p., 2006.
- [13] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and J. Pavan. Electromagnetic weak turbulence theory revisited. *Phys. Plasmas*, 19(10):102303, Oct. 2012.
- [14] L F Ziebell, R Gaelzer, J Pavan, and P H Yoon. Two-dimensional nonlinear dynamics of beam–plasma instability. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50(8):085011, 2008.
- [15] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer, and J. Pavan. Langmuir condensation by spontaneous scattering off electrons in two dimensions. *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 54(5):055012, Apr. 2012.
- [16] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and Peter H. Yoon. Nonlinear development of weak beam–plasma instability. *Physics of Plasmas (1994-present)*, 8(9):3982–3995, 2001.

-
- [17] R. Gaelzer, L. F. Ziebell, and Peter H. Yoon. Generation of harmonic Langmuir mode by beam plasma instability. *Phys. Plasmas*, 9(1):96–110, Jan. 2002.
- [18] E. P. Kontar and H. L. Pécseli. Nonlinear development of electron-beam-driven weak turbulence in an inhomogeneous plasma. *Physical Review E*, 65(6):066408, 11p, Jun. 2002.
- [19] B Li, A. J. Willes, P. A. Robinson, and I. H. Cairns. Dynamics of beam-driven langmuir and ion-acoustic waves including electrostatic decay. *Phys. Plasmas*, 10(7):2748–2762, Jul. 2003.
- [20] R. Gaelzer, L. F. Ziebell, A. Figueroa-Viñas, P. H. Yoon, and C.-M. Ryu. Asymmetric solar wind electron superthermal distributions. *Astrophys. J.*, 677:676–682, Apr. 2008.
- [21] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon. Dynamics of langmuir wave decay in two dimensions. *Physics of Plasmas (1994-present)*, 15(3):–, 2008.
- [22] J. Pavan, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon. Two-dimensional nonlinear dynamics of bi-directional beam-plasma instability. *J. Geophys. Res.*, 114:A01106, Jan. 2009.
- [23] L F Ziebell, P H Yoon, J Pavan, and R Gaelzer. Two-dimensional quasilinear beam–plasma instability in inhomogeneous media. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53(8):085004, 2011.