UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ANDERSON DE ABREU BORTOLETTI

ABORDAGENS PARA O ENSINO DE NÚMEROS REAIS NA ESCOLA DE NÍVEL FUNDAMENTAL

Porto Alegre
2008

ANDERSON DE ABREU BORTOLETTI

ABORDAGENS PARA O ENSINO DE NÚMEROS REAIS NA ESCOLA DE NÍVEL FUNDAMENTAL

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática, como requisito parcial a à aprovação da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Orientadora: Profª. Drª. Vera Clotilde Vanzetto Garcia

Porto Alegre
2008

(Ficha catalográfica)

Bortoletti, Anderson de Abreu.
Abordagens para o ensino de números reais na escola de nível fundamental.
Trabalho de conclusão do curso de licenciatura em matemática.
Porto Alegre: s. n., 2008.

ANDERSON DE ABREU BORTOLETTI

ABORDAGENS PARA O ENSINO DE NÚMEROS REAIS NA ESCOLA DE NÍVEL FUNDAMENTAL

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática, como requisito parcial a aprovação da disciplina trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Data de aprovação:

Banca Examinadora:

____

____

____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ...

... aos meus pais, Adroaldo e Maria Estela, pelo apoio, carinho e compreensão em cada momento da minha vida;

... a minha noiva, Débora, pela paciência e aconchego nos momentos mais difíceis desta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Profª Drª Vera Clotilde Vanzetto Garcia**,** orientadora dessa obra, por sua paciência e incomensurável dedicação na orientação deste Trabalho.

RESUMO

Na disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática I, foi preparado e, aplicado, um módulo de ensino a respeito dos números reais. A partir dessa experiência, surgiu o interesse em pesquisar a respeito da existência de outras abordagens para o estudo dos números irracionais/reais.

O trabalho inicia pela descrição da prática desenvolvida e da sua fundamentação teórica. Em seguida, descreve a origem dos números reais, buscando mostrar o caminho que percorreram desde sua descoberta até serem aceitos pelos matemáticos, bem como são apresentados atualmente na universidade.

A fim de descobrir como os números irracionais/reais estão sendo levados para sala de aula, o texto descreve a maneira como os livros didáticos têm abordado este assunto, além de analisar trabalhos na área da educação matemática e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

O trabalho descreve seis formas distintas de abordagem, que muitas vezes desenvolvem-se juntas e têm muitos conceitos em comum, apenas mudando sua ordem de apresentação.

Palavras-chave:
números irracionais/reais, ensino de matemática.

ABSTRACT

In the *Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática I* course, it was prepared and applied a teaching module about real numbers. Starting from this experience came up the interest in research about the existence of others approaches in real numbers study.

This paper starts from the developed practice description and its theoretical basis. After that, it describes real numbers origins looking for the path they elapsed from theirs discover till mathematician's acceptance as well how they are presented at university.

Aiming find out how real and irrational numbers have been teach to the classroom, this paper describes the way student´s books have been approaching this topic and analyses works in mathematics education and in national curricula standards, like "Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)".

This paper describes six distinct ways to approach this topic which, many times, are developed together and has many concepts in common, just changing its presentation order.

Keywords:
Irrationals and real numbers, mathematics teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata do ensino dos números irracionais/reais, na escola de nível fundamental.

Partimos de reflexões sobre uma prática de ensino desenvolvida em 2006 na disciplina de Laboratório de Prática de Ensino em Matemática I. Descrevendo a prática, destacamos uma linha de desenvolvimento para o ensino dos números irracionais/reais. Refletindo sobre a prática, elaboramos a questão norteadora desta monografia: "Existem diferentes abordagens para o ensino dos números irracionais/reais que são ou poderiam ser utilizadas na escola de nível fundamental? Quais?"

Nossos objetivos consistem em identificar, descrever, analisar e comparar diferentes abordagens. Nesta direção, utilizamos a metodologia de pesquisa bibliográfica e de pesquisa documental, selecionando livros didáticos e outras publicações, como artigos em revistas especializadas ou disponibilizados na internet, dissertações de mestrado e documentos do MEC.

1. DESCRIÇÃO DA PRÁTICA

A prática foi desenvolvida na escola Escola Estadual de Ensino Fundamental Alcebíades Azeredo dos Santos com alunos da oitava série, no ano de 2006.

Programamos um módulo para ser apresentado em duas aulas. Na primeira, o foco foi o trabalho com os números racionais e, na aula seguinte, com os números irracionais. O grupo que participei foi responsável pela apresentação referente aos números irracionais. O objetivo era que os alunos se convencessem do seguinte:

"Nas retas que encontramos nos gráficos, para cada ponto existe um número. Estes números denominam-se reais. Os números reais têm forma decimal. Todo número decimal é real. Todo número real pode ser representado numa reta"

E esta proposta está baseada no livro "The National Council of Theachers of Mathematics – More Topics in Mathematics For Elementary School Theachers", onde o número real é definido como um número com casas decimais associado a um ponto da reta. Além disso, cada ponto da reta está associado a um número real.

Em Caraça (1951), encontramos uma forma semelhante de definir número real: um número real é um ponto da reta e todo ponto da reta corresponde a um número real.

Voltando a descrição da prática.

Na primeira aula, colegas da disciplina levaram gráficos variados do cotidiano, revistas e jornais. Os alunos foram questionados sobre as retas (eixos) que formam os gráficos e sobre os números que lá existem. A reta foi definida como Reta Real, os pontos da reta foram associados a números que foram denominados "números reais". Só foram identificados, nas retas, números na forma decimal, isto é, através de sua expansão decimal. Foi afirmado que todo número real pode ser escrito na forma decimal e vice-versa. Nesta aula, foi destacada (relembrada) a relação entre frações e suas expansões decimais, mostrando que estas podem ocorrer sob duas formas: expansão decimal finita e expansão decimal infinita periódica.

Na aula seguinte, iniciamos retomando os conceitos da aula anterior. Em seguida, buscamos mostrar os diferentes tipos de números que existem na reta.

1ª Atividade:

Objetivos/estratégias:

Retomar a reta numerada (da aula anterior), construindo-a novamente, com auxílio de um cordão, preso ao quadro. Marcar o zero como ponto de referência, escolher uma unidade, localizar os inteiros e marcar algumas frações, a partir das frações marcadas passar para a representação decimal;

Solicitar exemplos de números com expansão decimal finita, infinita periódica e infinita não periódica. Marcar na reta, a partir de aproximações sucessivas – cada intervalo é expandido, formando uma coleção de intervalos encaixados;

Lembrar (da aula anterior) a equivalência entre os números representados por frações (com denominador e numerador números inteiros) e os números representados por expansões decimais periódicas;

Salientar que todos fazem parte da reta real, portanto são números reais.

Separar os números reais em racionais (números com expansão decimal periódica) e irracionais (números com expansão decimal não periódica)

Conceitos:

representação decimal finita e infinita;

número real e reta real;

relação biunívoca entre pontos da reta e números reais.

2ª Atividade: A reta real e as medidas geométricas

Objetivos/estratégias:

Salientar que a unidade de medida para a construção da reta é arbitrária;

Relacionar medidas das diagonais de diferentes quadrados e retângulos com pontos da reta real;

Conceitos:

A reta e sua construção;

Relação entre pontos da reta e medidas geométricas;

3ª Atividade: Raízes inexatas e Teorema de Pitágoras

Objetivos/estratégias:

Demonstrar o teorema de Pitágoras, com material concreto (quebra-cabeça)

Aplicar o teorema em diferentes quadrados e retângulos cujos lados têm medida inteira e localizar na reta, pontos correspondentes as medidas diagonais.

Conceito:

Teorema de Pitágoras

Relação entre os pontos da reta e medidas geométricas

4ª Atividade: Raiz quadrada de dois

Objetivos/estratégias:

"Convencer" os alunos de que $\sqrt{2}$ é um número irracional, a partir de uma representação decimal com 500 casas, extraída da internet.

Experimentar a demonstração formal da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Conceito:

Número irracional e raízes inexatas

Ao programar as atividades esperava-se que houvesse dificuldades, tanto em motivar os alunos para o assunto proposto, quanto em convencê-los da existência dos números irracionais. Números que aparecem apenas dentro da matemática, pois todos sabemos que por mais preciso que seja um instrumento de medição, sempre obteremos como resultado da medida um número racional.

Para resolver o problema da motivação procuramos levar algo diferente para sala de aula. Levamos alguns quadrados e retângulos em cartolina (sendo o menor deles escolhido como sendo o de lado com medida igual à unidade escolhida para a reta), e marcamos na reta real o ponto que coincidia com os extremos da diagonal, mesmo sem saber a que número correspondia aquele ponto. Com esta atitude, pudemos perceber o despertar de uma certa curiosidade nos alunos a fim de saber que números eram aqueles presentes na reta.

Após utilizar o Teorema de Pitágoras para descobrir tais números, começaram a surgir outros números, na forma de radicais. Com isso, conseguimos convencer-lhes que estes números estão presentes na reta real, porém faltava convencer os alunos de que aqueles números eram irracionais.

Escolhemos a $\sqrt{2}$ para fazer tal convencimento e, seguimos duas linhas de desenvolvimento: uma pequena demonstração, sem muito rigor matemático; o número na sua forma decimal obtido na calculadora e na Internet. A demonstração utilizava idéia de que se $\sqrt{2}$ fosse racional, poderia ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a, b $\in \mathbb{Z}$ e b $\neq 0$, chegando-se então ao absurdo.

A partir desta experiência pude vivenciar as dificuldades que se apresentam no ensino-aprendizagem dos conceitos relacionados aos números irracionais/reais. Conceitos estes importantes por servirem de plataforma para o desenvolvimento da matemática nos níveis fundamental e médio de ensino.

1.1. Algumas conclusões

Identificamos e definimos, nesta experiência, uma abordagem para tratar os números irracionais/reais, a qual denominamos **Abordagem via Reta Real e Números Reais**. Iniciamos com a análise de gráficos, que estão presentes na vida do aluno e cujos eixos são definidos como retas reais. Definimos a nomenclatura e associamos pontos com números reais de duas maneiras; a) enfatizando a representação decimal; b) analisando medidas de objetos geométricos. A partir daí, parte-se para a distinção dos números reais existentes no grande conjunto geometricamente definido, considerando as diferenças na sua forma decimal: racionais e irracionais.

2. HISTÓRIA DOS NÚMEROS REAIS

A essência dos números reais está no surgimento dos números irracionais, daí a importância de se fazer um estudo histórico sobre estes números, os quais causaram uma crise na escola pitagórica. A construção histórica do conceito de número irracional demonstra que existe um obstáculo epistemológico, na transição dos números racionais para os irracionais.

Foram consultados os textos de Imenes (1989) e Eves (1996).

No tempo dos Pitagóricos, o sistema numérico tinha se desenvolvido até aquilo que chamamos o conjunto dos números racionais, quando foi feita uma descoberta espantosa: investigando o suporte lógico da geometria conhecida, descobriu-se a existência de segmentos cuja medida não é um número racional.

Os Pitagóricos conseguiram provar que certos segmentos, obtidos através de construções simples, têm comprimentos cuja medida não é um número racional, sendo que o mais famoso deles é a diagonal do quadrado cujo lado mede 1u.m.(unidade de medida). Foi provado que a diagonal e o lado do quadrado são segmentos incomensuráveis, isto é, não existe uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes na diagonal e no lado do quadrado, simultaneamente, isto quer dizer que o quociente da medida “d” da diagonal pelo lado “l” (d/l) do quadrado não pode ser expresso como um racional do tipo“m/n”, onde $n \neq 0$. Em particular se o lado “l” é considerado unitário, o número correspondente à medida da diagonal não é racional.

A descoberta dos números irracionais é atribuída a Hipaso de Metaponte, ele produziu uma demonstração, provavelmente geométrica, de que $\sqrt{2}$ é irracional. No entanto, Pitágoras considerava que este número maculava a perfeição dos números, e portanto não podia existir, porém ele não conseguiu refutar os argumento de Hipaso com a lógica.

Os números irracionais enfrentaram várias barreiras até serem aceitos pelos Pitagóricos, pois eles acreditavam que tudo era número, e toda realidade física poderia ser expressa e compreendida com os números inteiros, além disso, sua existência contrariava o senso comum de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. Geometricamente, ninguém duvidava de que dados dois segmentos de reta sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, por menor que fosse, que coubesse um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados.

Um fato ligado à descoberta dos números irracionais é a separação entre aritmética e geometria, isto decorre devido ao finitismo que impregna a ciência grega, a qual baseava-se na geometria. Apenas mais tarde se reconheceu que, com recurso a processos infinitos, se podem estudar teorias de números irracionais. Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind, escreve uma obra intitulada “Continuidade e Números Irracionais”, na qual menciona que a linha reta é infinitamente mais rica em pontos que o domínio dos números racionais o é em números, com isso faz-se necessário a criação de novos números, pois se pretendia que o domínio dos números fosse tão completo e tivesse a mesma continuidade que a linha reta.

De acordo com Dias e Cobianchi (200-), a construção dos Números Reais feita por Dedekind é a convergência das noções de infinidade, ordenação, densidade, enumerabilidade e continuidade tidas até o momento. O matemático alemão, toma como ponto de partida o domínio dos racionais, mas não identifica o número real como uma seqüência convergente de racionais, o que era comum na época, mas sim, como se este fosse gerado pelo poder da mente em classificar os números racionais. Este esquema de classificação é o chamado corte de Dedekind.

2.1. Construção e Axiomatização dos Números Reais

Em Ávila (2000), encontra-se a construção dos números reais através da teoria dos cortes de Dedekind.

A partir da descoberta da existência de segmentos incomensuráveis, conforme descrito acima, instalou-se um momento de crise no desenvolvimento da Matemática, superada ainda no século IV a.C. graças a Eudoxo, o qual desenvolveu uma teoria de proporções que permitiu superar a dificuldade dos incomensuráveis sem a necessidade dos números irracionais.

No caso de segmentos comensuráveis A e B, existe um segmento $\boldsymbol{\sigma}$ que cabe um número inteiro de vezes em A, digamos m, e um número inteiro de vezes em B, digamos n. Então, a razão de A para B, é por definição, $\frac{m}{n}$. Isso é equivalente a dizer que nA é congruente a mB, ou seja, $nA = mB$. Com essa definição dizer que " o segmento A está para o segmento B, assim como o segmento C está para o segmento D" significa que: $nA = mB \Leftrightarrow nC = mD$. Quando A e B são incomensuráveis, jamais teremos a igualdade escrita anteriormente, porém, dados dois números inteiros m e n, podemos testar se: $nA = mB$ ou $nA < mB$ ou $nA > mB$; $nC = mD$ ou $nC < mD$ ou $nC > mD$. A partir desse teste, Eudoxo fez uma definição para igualdade de razões, mesmo no caso de segmentos incomensuráveis, conforme segue abaixo:

Definição: Dados quatro segmentos A, B, C, D, diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números m, n,

$$nA = mB \Leftrightarrow nC = mD \quad \text{ou} \quad nA < mB \Leftrightarrow nC < mD \quad \text{ou} \quad nA > mB \Leftrightarrow nC > mD$$

Foi baseado na teoria das proporções desenvolvida por Eudoxo que Dedekind inspirou-se para sua construção dos números reais.

Considerando o caso de grandezas incomensuráveis, A e B, como a igualdade $nA = mB$ nunca se verifica, tem-se $nA < mB$ ou $nA > mB$. Os números racionais positivos ficam separados em duas classes; a classe E (esquerda) daqueles $\frac{m}{n}$ que satisfazem $nA > mB$ e a classe D(direita) dos que satisfazem $nA < mB$. Observa-se que todo número pertencente à classe E é menor que qualquer número pertencente à classe D. Eis o motivo pelo qual a definição da razão A/B não poder ser definida como número, uma vez que não existe número (racional) que esteja entre as classes E e D, isto é, que seja maior que todo elemento de E e menor que todo elemento de D.

Dedekind teve a idéia de caracterizar essas classes E e D.

Parte-se da idéia de que já se tem uma teoria dos números racionais que justifica todas as operações conhecidas com esses números. Define-se *cortes de Dedekind* como um par de classes E e D de números racionais, com as seguintes propriedades:

E e D são conjuntos não vazios cuja união é o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais;

Todo número menor que algum de E pertence a E e todo número maior que alguém de D pertence a D.

Qualquer número racional r determina um corte em que E é o conjunto dos números racionais menores do que, ou iguais a, r e D é o complementar de E (em $\mathbb{Q}$); ou E é o conjunto de todos os números racionais menores do que r e D o complementar de E (em $\mathbb{Q}$). Cortes deste tipo, ou seja, determinado por um número racional, possuem r como elemento de separação entre as classes E e D.

Dedekind postulou: *todo corte possui um elemento de separação* (supremo da classe E e ínfimo da classe D).

O efeito desse postulado é a criação dos números irracionais.

O postulado de Dedekind é somente o começo da construção dos números reais, é apenas a incorporação dos números irracionais ao conjunto dos números racionais. Para completar tal construção é necessário definir adição e multiplicação de cortes, é preciso demonstrar as propriedades associativa, comutativa e distributiva para essas operações, com base nas propriedades já estabelecidas para os números racionais; é preciso definir ordem (o que significa um corte ser maior do que outro);etc. Após estas etapas, está completa a construção dos números reais segundo Dedekind. (mais detalhes sobre cortes de Dedekind no Apêndice I)

Uma exposição maior a respeito dos cortes é apresentado no Apêndice I.

Nessa teoria, os números irracionais são inventados a fim de que todos os cortes possuam um elemento separador. Daí, surge a seguinte questão:

Agora que foi demonstrado que o conjunto de todos os cortes de números racionais é um corpo ordenado como o dos racionais, será que não pode-se repetir a mesma construção? Ou seja, não seria o caso de considerar agora o conjunto de todos os cortes de números reais e repetir a postulação de que todo corte deve ter um elemento separador, ampliando assim ainda mais o corpo dos números reais?(ÁVILA, 2000)

O autor responde negativamente a pergunta e expõe; "(...) demonstra-se que todos esses cortes já têm elemento separador; ou seja, não vai mais acontecer o que acontecia antes com os cortes de números racionais, muitos dos quais não tinham elemento separador" (ÁVILA, 2000, p.14) Daí, conclui-se que os números reais formam um corpo ordenado completo, uma vez que agora é verdade, como teorema, que todo corte tem elemento separador, ou que todo conjunto não vazio e limitado superiormente possui supremo (Teorema de Dedekind).

Por fim, Ávila (2000) destaca um último Teorema importante: *qualquer corpo ordenado completo é necessariamente isomorfo ao conjunto dos números reais*. Esse teorema demonstra que, a menos de isomorfismo só existe um corpo ordenado completo.

Em Caraça (1951), ao ser feita a discussão a respeito da continuidade da reta, define-se o que seria um corte sobre a reta conforme exposto acima. Em seguida, o autor traz a definição de número real dada por Richard Dedekind: "chamo número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional separando as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-à irracional" (CARAÇA, 1951, p. 62). Em outras palavras, um número real é um ponto da reta e todo ponto da reta é um número real.

Outros autores optam por um método não-construtivo, partem num ponto de vista, historicamente, bastante avançado. Consideram os números reais como conceitos primitivos verificando um certo número de propriedades que se tomam como axiomas.

Em Lima (2006), encontramos a introdução do conjunto dos números reais feito dessa maneira.

Lima (2006), faz uma construção axiomática dos números reais. O autor parte de uma lista de fatos elementares a respeito de números reais. Estes fatos são admitidos como axiomas e, a partir deles, são deduzidas certas conseqüências demonstradas como teoremas. De acordo com o autor, qualquer construção dos números reais a partir dos números racionais apenas é importante porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí, interessa apenas que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

A definição axiomática de $\mathbb{R}$ está no Apêndice II.

Em Lima et al (2006), encontramos uma maneira simplificada de colocar por que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo:

"$\mathbb{R}$ é corpo porque estão definidas as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. É um corpo ordenado por que existe a relação $x < y$, que está interligada com a adição e a multiplicação pelas leis conhecidas de monotonicidade. E, finalmente, a completeza de $\mathbb{R}$ equivale à continuidade da reta. É ela que garante a existência de $\sqrt[n]{a}$ e, mais geralmente, de a^x para todo $a > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}$." (LIMA et al, 2006, p. 58)

Conforme exposto acima, pode-se perceber que a construções dos números reais passou por vários percalços durante sua trajetória histórica, desde o descobrimento dos números irracionais através dos gregos, passando pela teoria das proporções de Eudoxo, até chegar a uma formalização matemática feita por Dedekind. Talvez, devido a isso, alguns autores, como Lima (2006), preferem avançar um pouco na história e tomar os números reais como conceitos primitivos, apresentando o conjunto dos números reais de maneira axiomática

3. A TEORIA DOS "OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS" DE BACHELLARD

Parece-nos que a evolução histórica dos conceitos de número irracional/real produzem obstáculos para o ensino, pois o caminho histórico contraria a forma intuitiva de pensar que o mundo é racional. Com relação, por exemplo, ao conceito de incomensurabilidade, a noção mais intuitiva é que dados dois segmentos sempre se possa encontrar um terceiro segmento comensurável a ambos; as construções teóricas, mais recentes, propõe noções abstratas – infinidade, densidade e continuidade - que dificilmente podem ser alcançadas pelo aluno de ensino fundamental. Esta idéia nos levou ao estudo do conceito de "obstáculo epistemológico".

No estudo de Pais (2002) encontramos informações teóricas sobre os obstáculos, segundo o autor, Bachellard, em sua obra *A Formação do Espírito Científico*, publicada em 1938, foi quem descreveu pela primeira vez a noção de obstáculo epistemológico. O autor ilustra fatos relacionados à formação histórica dos conceitos científicos. Como observou, *"a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos"*. (PAIS, 2002, p. 39)

Esses obstáculos não são a falta de conhecimento, mas conhecimentos antigos que, cristalizados pelo tempo, resistem à instalação de novas concepções, pois estas ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento. Na Educação Matemática, os obstáculos interferem com maior intensidade na fase da gênese das primeiras idéias. (PAIS, 2002)

Ao se iniciar o contato com um conceito inovador – estamos falando dos números irracionais - durante a aprendizagem, pode ocorrer uma revolução entre o equilíbrio aparente do saber que se encontra em fase de elaboração e o velho conhecimento – a idéia de que os números racionais são suficientes para entender o mundo. Esta revolução faz com que a noção seja de interesse para a didática, pois, por vezes, para a aprendizagem escolar, é preciso haver fortes rupturas com o saber do cotidiano. Isto caracteriza uma revolução interna, que leva o sujeito a vivenciar a passagem do seu mundo particular para um quadro mais vasto das idéias.

É mais pertinente, no plano pedagógico, referir-se à existência de *obstáculos didáticos*, que são conhecimentos já relativamente estabilizados no plano intelectual, os quais podem dificultar o processo da aprendizagem do saber escolar. O conhecimento antigo atua como uma força contrária à realização de uma nova aprendizagem. Deste modo, enquanto não ocorrer uma *ruptura epistemológica* com os saberes que predominaram durante um certo período, a evolução do conhecimento se encontrará estagnada.

Os obstáculos epistemológicos têm raízes históricas e culturais, mas também estão relacionados à dimensão social da aprendizagem, estando, muitos deles, próximos de representações elaboradas pelo imaginário do sujeito cognitivo, é nesse quadro que surgem dificuldades decorrentes de conhecimentos anteriores, bloqueando a evolução da aprendizagem. Assim, é preciso entender como ocorre a reorganização intelectual, de modo que o novo conhecimento entre em harmonia com os anteriores, sendo esse o momento em que os obstáculos se manifestam.

Reconhecendo que o conhecimento dos racionais, a passagem pelas medidas de segmentos da geometria ou pelas idéias abstratas de Dedekind são obstáculos epistemológicos para a construção de um novo conhecimento – números irracionais - o plano da experiência prática no Laboratório I, é um exemplo de outro caminho para o ensino: partir do que já foi construído e que está aí, no mundo, a reta completa, real, e os gráficos das aplicações da Matemática. A partir deste objeto, passamos a definir, analisar e descrever um conjunto de números que esteja relacionado biunivocamente com os pontos da reta.

4. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Nessa seção, o nosso objetivo é identificar, descrever, analisar e comparar outras abordagens para o ensino dos números irracionais/reais. Nessa linha, foram analisados cinco livros didáticos atuais, da 8ª série do Ensino Fundamental, todos distribuídos pelo MEC-PNLD (Ministério da Educação - Programa Nacional do Livro Didático) , a fim de obter uma pequena amostragem da maneira de como os números irracionais estão sendo levados para sala de aula.

No livro "Matemática: uma aventura do pensamento[1]" os números irracionais são introduzidos através da história. Conta-se que os pitagóricos foram os primeiros a descobrir que existiam números como $\sqrt{2}$ e que estes não eram números inteiros e, nem podiam ser expressos por uma razão destes. Em seguida, são apresentados outros exemplos de raízes quadradas de números primos, além do π. O autor define número irracional como números de representação decimal infinita e não-periódica. Ao introduzir o conjunto dos números reais, este é definido pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Além disso, é dito que a cada ponto da reta está associado um único número real. É apresentado um método para se obter a aproximação da representação decimal dos números irracionais que são raízes quadradas, a fim de marcá-los na reta numérica. Os exercícios propostos aos alunos são de classificar os números como naturais, inteiros, racionais e irracionais e, obter aproximações de raízes quadradas. Após, começa o trabalho com as operações e propriedades com radicais. Ao final do capítulo existe uma seção chamada "A vida e os matemáticos", nela é apresentada uma prova matemática de que $\sqrt{2}$ é um número irracional e, também, um método utilizando régua e compasso para localizá-lo na reta. Em

---

[1] GUELLI, O. **Matemática: uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 2002.

seguida, são sugeridos alguns números irracionais para que os alunos utilizem o mesmo processo e os localizem na reta.

No segundo livro analisado, "Tudo é Matemática"[2], na seção dos números irracionais, começa-se dizendo que os números racionais são aqueles representados por uma fração, ou seja, resultado da divisão de dois números inteiros. Esta divisão pode ser exata ou inexata e, neste último caso, será um número cuja expansão decimal é infinita periódica. Então, números irracionais são definidos como aqueles números cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Como exemplo, são mostrados o $\sqrt{2}$ e o π. Além disso, procura-se encontrar a expansão decimal do $\sqrt{2}$ e, após algumas tentativas afirma-se que este processo poderia ser continuado infinitamente. Ao final da seção, os exercícios propostos pedem que os alunos obtenham a aproximação decimal de alguns números irracionais. Na seção seguinte, é definido o conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números irracionais com o conjunto dos números racionais. Em seguida, são apresentados a reta real e alguns números racionais e irracionais marcados nela. Como exemplo de marcação de número irracional, marca-se a $\sqrt{2}$ na reta traçando-se o círculo, utilizando o compasso, cujo raio corresponde a medida da diagonal do quadrado de lado unitário.Na seqüência, são trabalhadas operações e propriedades dos radicais. Ao final do capítulo é apresentada uma demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

O terceiro livro analisado chama-se "Matemática"[3]. No capitulo 2, é trabalhado o Teorema de Pitágoras, a partir disso começa-se a trabalhar com radicais, suas operações e propriedades. Os conjuntos numéricos são introduzidos no Capítulo 6. Nele começa-se a introduzir o conjunto dos números irracionais com alguns exemplos como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π. Refere-se que o número $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário e que o π é a

---

[2] DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2002.
[3] IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1997.

razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro. Os números irracionais são definidos como todos os números que não vêm de divisões de números inteiros, ou seja, aqueles que não são racionais. Apenas ao final do capitulo é dito que os números irracionais têm expansão decimal infinita não-periódica. Na seção seguinte, é apresentado o conjunto dos números reais como sendo a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Os exercícios propostos são de reconhecimento e classificação dos números. O próximo conceito introduzido é o de reta numérica, nela é mostrado que os números irracionais podem ser marcados através de sucessivas aproximações. Durante os exercícios são propostos números irracionais para que sejam marcados na reta e também há exercícios em que os pontos estão marcados sobre a reta e é pedido o irracional que corresponde a esse ponto.

Já o quarto livro analisado, “Matemática na medida certa”[4], são trabalhadas apenas operações e propriedades com radicais, em momento algum são mencionados os números irracionais. Os exercícios propostos visam fixar estas operações e propriedades.

No último livro analisado, “Matemática Hoje é feita assim”[5], os números irracionais são introduzidos como os números que tem representação decimal infinita não-periódica. Após, é relatada a origem histórica destes números. Encontra-se um breve comentário sobre a prova, atribuída a Euclides de Alexandria, de que o número $\sqrt{2}$ não é um número racional. São trazidas algumas informações sobre os irracionais tais como: o conjunto dos irracionais é infinito; pode-se estabelecer uma relação entre os irracionais e os pontos da reta; “raiz quadrada de p” , sendo “p” um número primo, é sempre um número irracional; etc. Faz-se também um breve comentário sobre o número π, classificando-o como irracional. Os exercícios correspondentes a esta seção pedem para os que os alunos obtenham a aproximação decimal de alguns números irracionais. A seção seguinte introduz o conjunto dos números

---

[4] JAKUBOVIC, J;LELLIS, M. ;Centurion, M. **Matemática na medida certa**. São Paulo: Scipione, 2002.
[5] BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2000

reais, definindo-o como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. É dito também que a cada ponto da reta corresponde um número real. Mostra-se, em outra seção, como marcar os números na reta utilizando o compasso. Os exercícios correspondentes a estas duas seções trazem números racionais e irracionais para que sejam marcados na reta utilizando régua e compasso. Após estes conceitos, começa-se a trabalhar com as propriedades dos números reais, onde são inseridas as propriedades e operações com radicais. Os exercícios correspondentes a estas seções são de fixação das propriedades. Ao final do capítulo, em uma seção chamada “Revistinha”, relata-se a crise na escola pitagórica causada pela descoberta do número $\sqrt{2}$, além disso é feita a prova matemática de que esse número não é racional.

Analisando os livros didáticos citados acima, pode-se classificá-los em três grupos de acordo com a concepção que trazem sobre o ensino dos números irracionais/reais:

Grupo1: Os livros que integram este grupo definem os números irracionais como aqueles números que não são racionais. Os autores dos livros que integram este grupo não dão muita importância ao ensino dos números irracionais, tratando-os apenas como uma mera formalidade, e de maneira bastante rápida, passando então a definir o conjunto dos números reais. Ainda neste grupo, podemos colocar aqueles livros que nem falam em números irracionais e, somente trabalham com propriedades de radicais.

Grupo 2: Os livros que integram este grupo definem os números irracionais como números que possuem expansão decimal infinita e não-periódica.Os autores dos livros que integram este grupo dão ênfase a representação decimal dos números. Geralmente, apresentam a $\sqrt{2}$ como exemplo e, exploram sua representação decimal mostrando (de maneira intuitiva) que este é um número cuja representação decimal é infinita não-periódica

Grupo 3: Os livros que fazem parte deste grupo partem da história e introduzem os irracionais como raízes inexatas, enfatizando o $\sqrt{2}$, o que é um bom caminho para a parte seguinte, operações com radicais.

4.1. Algumas conclusões

Nesta análise, podemos identificar e descrever três maneiras para abordar o tema dos números irracionais/reais: via Negação dos Racionais, via Representação Decimal e via História.

A **Abordagem via Negação dos Racionais,** define irracional como um número que não é racional, ou seja, não pode ser expresso como uma razão entre dois inteiros. O objetivo maior é definir um conjunto que contém os números conhecidos – racionais – e mais alguma coisa – os irracionais. Esta definição é dada por mera formalidade, sem grande ênfase.

A **Abordagem via Representação Decimal,** define irracional como um número cuja representação decimal é infinita e não periódica. Neste caso, os primeiros exemplos são raízes de números primos e o objetivo é relacionar os irracionais com radicais, para passar às operações com estes números.

A **Abordagem via História,** enfatiza o Teorema de Pitágoras, o cálculo da diagonal do quadrado e o problema da incomensurabilidade dos segmentos.

5. ANÁLISE DE TRABALHOS DESENVOLVIDOS NA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Encontramos muitos trabalhos focalizando o ensino dos números irracionais/reais, o que demonstra a importância do tema. Alguns trazem resultados de pesquisas desenvolvidas com professores e outros, como nós, analisaram livros didáticos. Selecionamos aqueles que foram além das críticas e trouxeram propostas concretas para o ensino, com novas abordagens.

Penteado (2004) elaborou dissertação de Mestrado que demonstra a dificuldade dos professores quanto aos conceitos relacionados aos números irracionais/reais.

A autora relata em seu trabalho, algumas crenças apresentadas por alunos em recentes pesquisas, nacionais e internacionais, sobre os números reais. Entre estas: duas grandezas são sempre comensuráveis; as propriedades da reta real são as mesmas da reta racional; a cardinalidade dos naturais e dos reais é a mesma; existem mais números naturais dos que números ímpares; PI é igual a 3,1416, que é um número irracional; número irracional é um número representado por raízes; identificação entre um número e sua aproximação e distinção entre números iguais com representação diferentes como 1,999... e 2; a noção de sucessor existe nos números reais; além do desconhecimento das noções de infinito e completude.

Penteado (2004) busca as concepções de professores do nível médio a respeito da densidade dos números reais, propondo uma intervenção focada na propriedade da densidade. Trata-se de uma seqüência didática que traz dois tipos de procedimentos para abordar a densidade da reta: para estudar a densidade dos racionais nos reais, recorre a médias aritméticas através da representação gráfica, localização de pontos na reta real e o registro numérico; para a densidade dos irracionais utiliza um processo inspirado na diagonal de

Cantor, utilizando-se a representação decimal dos números reais indicando a troca de um ou mais algarismos nesta representação, utilizou-se também registros da língua natural e gráfico.

Também pensando nos professores, Dias e Cobianchi (200-, 2004), em uma pesquisa realizada junto a docentes de Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo, mostram que alguns não têm bem formalizadas as propriedades relacionadas ao conjunto dos números reais.

Os questionamentos propostos durante a realização da pesquisa confirmaram, entre os professores, as dificuldades que já percebidas em Penteado (2004). Alguns professores classificam o número zero como sendo racional e irracional ao mesmo tempo; não sabem o que realmente é um número irracional e, além disso, fazem uma relação de igualdade entre um número irracional e sua aproximação racional; não aceitam que um mesmo número possa ter representações distintas como 1,999... e 2, e muitos outros resultados.

Falando sobre o ensino, alguns professores da pesquisa explicitaram que utilizam materiais concretos para explicar a existência de alguns números irracionais, dentre os procedimentos utilizados foi relatado: o uso de barbante para a medição de objetos redondos a fim de se obter o número π; o uso da régua graduada para mostrar aos alunos que entre dois centímetro temos dez milímetros, procurando, assim, encontrar números cada vez mais próximos na reta numerada; e o uso da calculadora para obter a raiz quadrada de um número. Os autores salientaram que a calculadora ou o uso de medições empíricas podem levar à identificação de números distintos pela igualdade de um número com uma aproximação, assim como podem contribuir para uma concepção errônea de que o número irracional é encontrado ao realizarmos medições.

Ao analisar livros didáticos os autores constataram que existe uma ordem nas apresentações: 1) números naturais; 2) números inteiros englobando o conjunto anterior; 3) números racionais; contendo os conjuntos anteriores; 4) números irracionais como um conjunto diferente do conjunto dos números racionais; 5) conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números racionais com o conjuntos dos números irracionais. Apresentado desta maneira, o "conjunto dos números reais aparenta ter sido construído praticamente sem nenhum percalço em toda a sua longa trajetória, pois os conjuntos numéricos, de acordo com essa ordem de apresentação, surgem pedagogicamente encaixados um após o outro. Os autores de livros didáticos declaram que cada ponto da reta representa um número real, sem qualquer discussão de aprofundamento sobre essa afirmação." (DIAS; COBIANCHI, 200-, p.18).

Além dessa maneira de apresentar os conjuntos numéricos na escola, após a introdução dos números irracionais, é comum que se deixe de lado a representação decimal e se passe a trabalhar apenas com raízes, reduzindo os números irracionais a um amontoado de regras de operar com radicais. Desta maneira, os conjuntos acabam se tornando um amontoado de números. Conforme Dias e Cobianchi, "o significado dos números, a formação dos conjuntos e suas propriedades não são discutidos de forma a propiciar uma compreensão de sua existência" (DIAS; COBIANCHI, 200-, p.5-6).

Uma confusão que pode surgir junto aos alunos, quando se passa a estudar os números irracionais apenas como raízes, sem dar ênfase à representação decimal, é de que qualquer raiz quadrada é um número irracional, como, por exemplo, $\sqrt{9}$.

Ainda durante a pesquisa realizada por Dias e Cobianchi (200-), os professores manifestaram estarem insatisfeitos com as propostas pedagógicas atuais para o ensino de números reais. Este problema, segundo eles está relacionado a inadequada formação nos cursos de licenciatura e a falta de material adequado.

Neste quadro em outro artigo, Dias e Cobianchi (2004) propõem um curso para professores, cujo objetivo é discutir propostas para o ensino de números reais de modo a formar coletivamente pressupostos para uma unidade didática. Partem da análise e discussão de textos que abordam definições de número real, em diferentes décadas. Após uma apresentação de tópicos históricos, relacionados com a construção desse conjunto, procura correlações entre o histórico (o processo de mudança, etapas de surgimento e desenvolvimento do conceito) e, o lógico (meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico).

Um conceito matemático básico para o estudo de funções é o de reta real. Este conceito está diretamente ligado ao ensino de números reais, entretanto não é feita uma discussão com os alunos sobre o que realmente representa a reta real e o "por que" de seu uso. Talvez, fosse interessante discutir a causa de não se utilizar uma reta formada apenas por números racionais.

Em Guillen (1987), encontramos uma discussão bastante interessante sobre este assunto.

A primeira reta numerada adotada como modelo de contínuo foi apresentada pelos Gregos, nela encontrávamos apenas os números racionais, por isso denominada reta numerada racional. Durante anos este foi o modelo de contínuo adotado, porém os próprios Gregos descobriram buracos na reta ao tentar resolver o seguinte problema prático: "qual o comprimento de uma sebe que divide diagonalmente em dois triângulos retângulos um terreno quadrado com 1km de lado?" Ao aplicar o Teorema de Pitágoras não obtinham um valor exato, apenas que este era aproximadamente um metro e meio. Em 1872, conforme citado anteriormente, o matemático alemão Richard Dedekind, formalizou um processo aceitável relacionando os números racionais e irracionais dando um novo nome ao modelo de continuidade para a reta numerada, denominada então reta real. Algumas décadas depois foi provado que há uma infinidade de números racionais, como os Gregos suspeitavam, porém há uma infinidade ainda maior de números reais. Portanto, a reta numerada real é de alguma forma mais contínua e densamente ocupada do que a reta numerada racional.

Da leitura de Guillen (1987) percebo que o aluno teria uma melhor noção sobre o que é a reta real, e os tipos de números ali presentes, se o estudo da reta numerada inicia-se ao finalizar o estudo do conjunto dos números racionais. Ao trabalhar com a reta numerada racional, poderia-se proporcionar aos alunos situações como a que levou a posterior adoção da reta numerada real, ou seja, problemas que tenham como resultado números irracionais para que com isso os alunos possam perceber que esta reta contém falhas.

Em Ripoll (2004), encontram-se considerações bem interessantes que dizem respeito a definições relativas aos números irracionais presentes nos livros didáticos utilizados nas escolas atualmente. As definições são:

1) "Um número é irracional se não puder ser escrito na forma a/b com a, b $\in \mathbb{Z}$ e b $\neq 0$."

2) "Irracional é um número cuja representação decimal é infinita e não periódica"

3) "Os números irracionais representam medidas de segmentos incomensuráveis a unidade".

Conforme a autora, as duas primeiras definições apresentam incoerências, pois pressupõem a existência de outros números além dos racionais, quando o que se deseja é ampliação do conjunto dos números racionais. A autora relata que a primeira definição pode levar a uma confusão ainda maior. Um aluno de 8ª série ao responder um questionário aplicado pelos alunos da licenciatura da UFRGS apresentou $\sqrt{-1}$ como um exemplo de número irracional.

Quanto a definição 2, além de pressupor a existência de outros números, refere-se à expansão decimal de qualquer número, como se todos os números tivessem representação decimal, ou seja, esta definição poderá levar os alunos a confusão quanto começarem a trabalhar, posteriormente, com o conjunto dos números complexos. Os autores que utilizam estas definições concluem definindo o conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais o que inclui todos os números.

Com relação à definição 3, é preciso tornar claro aos alunos que na vida real os resultados de medidas, por mais preciso que seja o instrumento de medição utilizado, serão sempre números racionais, a discussão sobre irracionais é puramente matemática.

Ripoll (2004) sugere que a abordagem dos números irracionais se dê através do processo de medições de segmentos de reta, abordagem usual no Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, razão pela qual será aqui mais detalhada do que as demais.

Tentando expressar a medida exata de um segmento de reta procura-se chegar à construção dos números irracionais positivos, coincidindo com a evolução histórica. Primeiramente constrói-se uma régua decimal infinita, este instrumento de medição consiste em uma régua com a qual consegue–se uma medição com erro tão pequeno quanto se queira, pois, de maneira geral, todos os pontos da rede de graduação $\frac{1}{10^n}$ são pontos da rede de graduação $\frac{1}{10^{n+1}}$ e, além disso, em cada pedaço limitado da régua decimal infinita, existem infinitos pontos graduados. Após está construção, surge a seguinte questão: Será que, utilizando-se está régua é possível expressar a medida exata de qualquer, segmento? A resposta depende do segmento considerado. Considerando um segmento OP, onde O coincide com a origem, e cuja extremidade P corresponde a um ponto graduado a medição estará pronta, caso contrário, ou seja, se a extremidade P não corresponder a um ponto graduado, é necessário realizar um processo de medição infinito. Daí então, temos dois casos: se o segmento em questão for comensurável com a unidade adotada ainda teremos um número racional como resultado da medida, caso contrário, se o segmento não for comensurável com a unidade de medida conclui-se que existem números que não provêm da expansão decimal de números racionais expressando a medida de segmentos e, portanto deve-se ampliar o conceito de número utilizado até este momento, chegando-se a necessidade de se aceitar os números irracionais.

Seguindo esta orientação, Boff (2007) desenvolveu a dissertação de Mestrado, cujo título é "A Construção dos Números Reais na Escola Básica", com uma proposta pedagógica para o ensino de números reais em nível de ensino fundamental. Conforme Boff (2007), o ensino de números reais, nas últimas séries do ensino fundamental, justifica-se, pois é um fechamento para o ensino de números racionais e também a resolução completa do problema de medição. Além disso, serve de preparo para o aluno, no Ensino Médio, estudar na Física os movimentos que envolvem continuidade, fenômenos cujas variáveis são tempo, distância, velocidade, etc. Com relação à Matemática, ajudaria no estudo das funções que descrevem estes fenômenos.

A seqüência didática proposta busca levar o aluno a construir um número real (positivo) via medição de segmentos de reta. A primeira etapa consiste no convencimento dos alunos a respeito da insuficiência dos números racionais, a etapa seguinte diz respeito à construção matemática de um instrumento capaz de medir qualquer segmento, uma régua decimal infinita.

Durante a primeira etapa é discutida a insuficiência da régua escolar, instrumento de medição bastante conhecido por parte dos alunos, para a medida da diagonal de um quadrado unitário: foi proposto aos alunos que procurassem um número racional cujo quadrado fosse igual a dois. Para finalizar a primeira etapa, a fim de que os alunos aceitem que tal número existe e não é racional, é discutida uma prova por absurdo da não existência de uma fração que represente a medida deste segmento.

Na segunda etapa, ao construir a régua decimal infinita, os alunos começam construindo as redes de graduação (unitária, decimal, centesimal, etc). Em seguida, discute-se se existe a possibilidade de haver algum segmento cuja medida exata não pode ser expressa utilizando as redes de graduação. Conclui-se, junto aos alunos, que para expressar a medida exata de qualquer segmento é necessário o uso de listas infinitas (números com expansão decimal infinita), então lança-se a seguinte questão: Como será a lista que representa a diagonal do quadrado unitário? Dá primeira etapa, sabe-se que não pode ser uma fração, portanto não pode ser uma lista finita e nem infinita periódica, logo será uma lista infinita e não periódica. A partir da lista obtida, é mostrada aos alunos, através da colocação desta entre dois racionais convenientes, o que significa a quantidade expressa por ela.

Por fim, conclui-se que as listas infinitas não periódicas são a representação dos chamados números irracionais. As listas finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas são as representações dos números reais positivos.

Tamorozzi (2000), não apresenta uma nova abordagem de ensino, mas sim uma forma interessante para verificar se um número é racional ou irracional.

Para estudar números sob forma de raízes não exatas, o autor sugere que se utilizem polinômios e o Teorema das Raízes Racionais, o qual consiste no seguinte:

Se um número racional $\frac{c}{d}$(c,d $\in$ $\mathbb{Z}$, mdc(c, d) = 1) é raiz do polinômio $a_nx^n + ... + a_1x + a_0$, com coeficientes inteiros, então c é divisor de a_0 e d é divisor de a_n.

No artigo encontra-se o seguinte exemplo: $\sqrt{3}$ - $\sqrt{2}$ é um número irracional?

Fazendo : $\sqrt{3} - \sqrt{2} = a$, ou seja, $(\sqrt{3})^2 = (a + \sqrt{2})^2$, obtém-se $1 - a^2 = a.2\sqrt{2}$, e elevando ao quadrado novamente chegamos ao seguinte polinômio, do qual ‘a’ é raiz: $x^4 - 10x^2 + 1$. Utilizando o teorema acima temos que as possíveis racionais são $\pm$ 1, e como estes números não são raiz deste polinômio (basta substituir x por estes valores) conclui-se $\sqrt{3}$ - $\sqrt{2}$ que não é um número racional. Portanto, é um número irracional.

5.1. Algumas conclusões

É interessante nessa análise de artigos variados, a quase unanimidade com relação às dificuldades e à importância do ensino do conceito de número real. Os pesquisadores na área de Educação Matemática estão buscando caminhos para auxiliar os professores nesta tarefa.

Nessa perspectiva, identificamos e podemos descrever duas novas abordagens.

A **Abordagem via Medições de Segmentos de Reta** (utilizada na UFRGS) tem o objetivo de tentar expressar a medida exata de um segmento de reta, o que leva a um obstáculo, ligado a infinitude do número, coincidindo com a evolução histórica.

A **Abordagem via Reta Racional**, parte da reta e da identificação entre ponto e número racional e enfatiza problemas que tenham como resultado números irracionais – certamente questões geométricas - para que com isso os alunos possam perceber que está reta contém falhas. A partir da reta racional pode-se discutir o que representa a reta real e o "por que" de seu uso, passando à análise de gráficos de funções.

A abordagem histórica para professores, apresentada por Dias e Cobianchi (2004) passa pela noção de incomensurabilidade, valoriza a lógica do desenvolvimento do conceito de reais, por isso, extrapola o nível de ensino básico, mas torna-se interessante contribuição para a formação do professor.

O curso proposto por Penteado (2004) destina-se a professores e trabalha a densidade da reta real, o que não se configura como uma abordagem didática para a escola.

6. ANÁLISE DE DOCUMENTOS RECENTES DO MEC

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), os números constituem a base de toda a matemática a ser desenvolvida durante os níveis fundamental e médio. Devem aparecer em situações-problema e, também como objeto de estudo: devem se destacar suas propriedades, inter-relações e o modo como foram constituídos historicamente.

As situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, fazem com que o aluno seja levado a perceber a existência de diversos tipos de números (naturais, inteiros, racionais e irracionais). Durante o terceiro ciclo do ensino fundamental o aluno deverá ser estimulado a desenvolver o reconhecimento dos números racionais em diferentes contextos, cotidianos e históricos, bem como a exploração de problemas que indicam a relação parte-todo, quociente, razão ou funcionam como operador. Além disso, recomenda-se destacar a localização dos números racionais na reta numérica e, também, relações entre as representações sob a forma fracionária e decimal destes números.

Durante o quarto ciclo os alunos serão apresentados ao conjunto dos números reais. Para que estes possam entender a necessidade da ampliação dos conjuntos numéricos deve-se "*ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais*" (BRASIL, 1998, p81).

A fim de que o aluno amplie a noção de número, recomenda-se colocá-lo diante de situações-problema em que os números racionais apresentem-se insuficientes, evidenciando assim a necessidade do aparecimento dos números irracionais. Como exemplo, são citadas duas maneiras de fazer a introdução dos números irracionais: a primeira delas é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita e não-periódica a outra é o problema, bastante utilizado, de encontrar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Chegando ao

$\sqrt{2}$ o professor escolhe entre provar ou simplesmente afirmar a irracionalidade de tal número, expandindo o resultado particular obtido para esse número às demais raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos.

Indica-se que seja trabalhado junto aos alunos o número π, mostrando que este aparece com resultado da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Entretanto, o professor deve estar atendo ao realizar processos de medições, pois isto pode se tornar um obstáculo para que o aluno aceite a irracionalidade de tal quociente, já que medições envolvem apenas números racionais.

O interessante é propor aos alunos situações em se possa trabalhar com várias aproximações sucessivas do número π. Ao trabalhar com essas aproximações deve-se fazer uso da calculadora e informar aos alunos que computadores já conseguiram calcular milhões de casas desse número, sem que houvesse nenhuma regularidade em sua expansão decimal.

Ao trabalhar, junto aos alunos, com os números irracionais deve-se evitar limitá-los apenas a radicais. Nos PCN encontra-se, de maneira destacada, que o importante é o aluno identificar o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados e reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de dois inteiros. Recomenda-se, inclusive, o uso de construções geométricas utilizando régua e compasso para localizar alguns números irracionais na reta numerada.

6.1. Algumas conclusões

Para finalizar está análise, cabe destacar que a dificuldade na aprendizagem dos irracionais é atribuída, nos PCN, à falta de modelos materiais que exemplifiquem sua existência. Ao construir a idéia de densidade dos racionais junto aos alunos parece não haver lugar na reta para nenhum tipo de número além dos racionais. Daí, a idéia de irracional, durante o 4º ciclo, não ser intuitiva. Mas também não se recomenda que se faça o estudo do conjunto dos racionais e irracionais sob a ótica do rigor matemático.

Os PCN sugerem três das abordagens já detectadas via Reta Racional, via Representação Decimal e via História (com o cálculo de $\sqrt{2}$). Não inclui a abordagem via Negação dos Racionais, mas sugere que se mostre a existência de números não racionais a partir da análise de situações problemas, sem apresentar exemplo.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE O ESTUDO

Encontramos, neste estudo, seis propostas detalhadas de abordagem para os números irracionais/reais.

1. Medições de Segmentos de Reta	Um número irracional corresponde à medida de um segmento de reta que não consegue ser expressa de forma exata e que não corresponde a um número racional.	Anais Dissertação
2. Reta Racional	Um número irracional preenche as falhas da reta racional.	Artigo PCN
3. Reta Real e Números Reais	Um número irracional corresponde a um ponto da reta real extraída de gráfico de funções encontradas no cotidiano, com representação decimal infinita e não periódica.	Experiência didática
4. História	O número irracional foi encontrado pelos gregos ao comparar medidas de segmentos e ao utilizar o teorema de Pitágoras para medir a diagonal do quadrado de lado um.	PCN Livros didáticos
5. Representação Decimal	Um número irracional é aquele cuja representação decimal é infinita e não periódica.	Livros didáticos
6. Negação dos Racionais	Um número irracional é aquele não pode ser expresso como razão entre dois inteiros	Livros didáticos

Concluímos que a Abordagem via Negação dos Racionais e via Representação Decimal, sugerindo que existem expansões decimais periódicas (associadas com as frações entre números inteiros, os chamados números racionais) e não periódicas (que terão outra denominação) devem ser evitadas, pois essas abordagens - encontradas nos livros didáticos e nos PCN (BRASIL, 1998) - mostraram-se insuficientes sob dois aspectos: primeiramente por proporcionar aos alunos apenas uma noção superficial do que realmente são os números reais, além disso, parecem não obedecer a uma coerência lógica, pois se até o momento só se conhecem números racionais não se pode dizer que existam outros números.

A Abordagem via História por valorizar as dificuldades históricas para medir e comparar segmentos tem o mérito de ser instrutiva e contextualizada – mostra a Matemática como construção humana - mas não nos agrada porque, devido ao problema-chave da incomensurabilidade, não há como o aluno reviver a questão histórica, sentir a necessidade de novos números e construí-los. Além disso, esta abordagem tenta enfrentar um obstáculo epistemológica que historicamente levou séculos para ser superado, levando a pensar em sua dificuldade também para o ensino.

As outras duas abordagens, Abordagem via Medição de Segmentos e via Reta Racional, proporciona aos alunos situações em que estes são levados a necessidade de ampliar o campo numérico, chegando assim, aos números irracionais. A Abordagem via Medição de Segmentos, encontrada em Ripoll (2004) e em Boff (2007), sugere uma maneira de construir os números irracionais, ao invés de apresentá-los como algo que não pertence ao conjunto dos números racionais ou apresentam expansão decimal distinta destes. Na busca de construir os números irracionais, os alunos são levados a perceber a insuficiência dos números racionais e, então, a necessidade de ampliação do campo de números conhecidos até o momento. Deste modo, proporciona-se ao aluno que este perceba o conjunto dos números reais como uma ampliação do conjunto dos números racionais. Nesta mesma perspectiva, desenvolve-se a

Abordagem via Reta Racional encontrada em Guillen (1987) e nos PNC (1998), aqui os alunos também são levados a perceber a necessidade da ampliação do conjunto dos números racionais. Partindo da adoção de uma reta racional, os alunos são postos diante de situações em que a reta apresenta falhas, ocasionando a necessidade dos números irracionais e, posteriormente, a adoção da reta real, ou seja, o modelo geométrico do conjunto dos números reais.

A abordagem via Reta Real e Números Reais é diferenciada das demais. Ao contrário de partir de uma reta incompleta, admite-se que a reta é completa – é a reta que existe e é utilizada em gráficos de funções, que está presente nas revistas, nos jornais, no dia a dia e nos livros de outras ciências - e que existe uma relação biunívoca entre pontos e números, condição para esta reta ser amplamente utilizada. A pergunta é: que números são estes? A análise e localização de números salienta a representação decimal que possibilita diferenciar entre si, racionais e irracionais. Esta é uma abordagem original, proposta pelo The National Council of Teachers of Mathematics há cerca de 30 anos atrás.

É preciso notar que todas essas abordagens, como formas diferentes de tratar o tema, desenvolvem-se sempre juntas, apenas mudando a ordem de apresentação (diagrama em anexo)

CONSIDERAÇÕES DO AUTOR SOBRE SUA APRENDIZAGEM

Finalizando este trabalho buscarei relatar as aprendizagens que tive e o que isto refletirá em minha carreira profissional.

Iniciei este trabalho repensando sobre a prática que havia realizado durante o primeiro semestre de 2006, durante a disciplina de Laboratório I, e daí surgiu a questões que norteou toda esta monografia: "Existem diferentes abordagens para o ensino dos números reais que são ou poderiam ser utilizadas na escola de nível fundamental? Quais?"

Em busca de respostas para esta questão, pesquisei a origem dos números reais. Nesta etapa, pude perceber que existem dificuldades intrínsecas a este conteúdo, relacionadas a tradição e naturalidade do pensamento racional – o mundo é racional. Nesta tradição, parece que todos os segmentos são comensuráveis e que os números racionais são suficientes para resolver qualquer problema matemático.

Procurei abordagens existentes em livros didáticos, artigos, dissertações e nos PCN (BRASIL,1998). Defini seis abordagens: via Representação Decimal, via Negação dos Racionais, via História, via Medição de Segmentos, via Reta Racional e via Reta Real e Números Reais.

Dentre elas, minhas preferidas são as três últimas. As abordagens via Medição de Segmentos e via Reta Racional criam a necessidade de expandir o conjunto dos racionais, criando novos números. A abordagem via Reta Real e Números Reais é estritamente didática. Parte da reta real utilizada já construída nos gráficos e questiona a respeito dos números que estão relacionados com os pontos. A diferença fundamental, entre as abordagens, está numa certa perspectiva histórica, presente nas duas primeiras: historicamente os racionais já existiam, vamos mostrar a criação de novos números. A Abordagem via Reta Real e Números Reais não contempla o ritmo da história. É mais concreta. A reta real existe e está sendo usada há séculos, em gráficos do cotidiano e das outras ciências; Que números estão ali?

Por fim, cabe destacar a importância deste trabalho acadêmico para minha futura carreira profissional.

O desenvolvimento propiciou-me uma possibilidade de perceber que não existe uma maneira única para apresentar determinado conteúdo aos alunos. Há, sempre, diferentes maneiras de abordar conceitos, em particular, conceitos considerados difíceis de serem tratados em sala de aula, como o de número irracional/real.

Também percebi que existem maneiras mais ou menos adequadas de iniciar um assunto e que é preciso desenvolver um senso crítico para identificar as melhores e as que têm falhas.

Percebi também que é necessário proporcionar aos alunos situações que eles percebam a necessidade e/ou a origem de novos conceitos, cuidando para que haja uma coerência lógica entre eles, neste caso uma transposição mais suave e compreensível dos números racionais para os números reais. É necessário fazê-los perceber que a reta real é o modelo perfeito de continuidade e a representação ideal para as funções que modelam os fenômenos da vida real e das outras ciências que envolvem variáveis contínuas como tempo, medidas de comprimento, área, volume, medidas das variáveis humanas como altura e peso, medidas das grandezas físicas, como velocidade, distância e aceleração e medidas das grandezas químicas que participam nas diversas reações entre substâncias, como pH, coloração, temperatura, pressão e outras.

APÊNDICE I

Dados dois cortes (E, D) e (E', D'), tem-se (E, D) = (E', D') se, e somente se, E = E' e D = D'.

O autor fala brevemente sobre a adição e, não refere-se a multiplicação. A adição de dois corte $\boldsymbol{\alpha}$ = (E, D) e $\boldsymbol{\beta}$ = (E', D') é o corte $\boldsymbol{\gamma}$ = (E'', D''), onde E'' é o conjunto de todas as somas de um elemento de E com um elemento de E´, e analogamente define-se D''. Prova-se então que $\boldsymbol{\gamma}$ é um corte.

Após demonstrada todas as propriedades das operações definidas, verifica-se que o conjunto de toda as classes é um corpo ordenado, como o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais.

Considerando uma aplicação $\boldsymbol{\phi}$ que leva cada $r \in \mathbb{Q}$ na classe (E, D) cujo elemento de separação é r, verifica-se que existe um isomorfismo do conjunto Q no conjunto dos cortes determinados por número racionais, pois $\boldsymbol{\phi}$ possui as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{\phi}(\mathrm{r} + \mathrm{s}) = \boldsymbol{\phi}(\mathrm{r}) + \boldsymbol{\phi}(\mathrm{s})$; $\boldsymbol{\phi}(\mathrm{r.s}) = \boldsymbol{\phi}(\mathrm{r}).\,\boldsymbol{\phi}(\mathrm{s})$

$\mathrm{r} < \mathrm{s} \Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}(\mathrm{r}) < \boldsymbol{\phi}(\mathrm{s})$; $\boldsymbol{\phi}(\mathrm{r}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{r} = 0$.

Logo, do ponto de vista das operações de adição e multiplicação, bem como da relação de ordem, não existe uma distinção entre o conjunto de todos os cortes determinados por racionais e $\mathbb{Q}$.

APÊNDICE II

O primeiro passo dado por Lima (2006) na direção de definir o conjuntos dos números reais, é apresentar os axiomas de corpo.

Um corpo é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem as condições abaixo:

Axiomas da adição

Associatividade – quaisquer que sejam x, y, z $\in$ K, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$

Comutatividade - quaisquer que sejam x, y $\in$ K, tem-se $x + y = y + x$

Elemento Neutro – existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = 0 + x = 0$, seja qual for o $x \in K$. O elemento 0 chama-se *zero*.

Simétrico – todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x + (-x) = -x + x = 0$.

Axiomas da multiplicação

Associatividade - quaisquer que sejam x, y, z $\in$ K, tem-se $(x . y) . z = x . (y . z)$

Comutatividade - quaisquer que sejam x, y $\in$ K, tem-se $x . y = y . x$

Elemento Neutro – existe $1 \in K$ tal que $1 \neq$ e $x . 1 = 1 . x = x$, seja qual for o $x \in K$. O elemento 1 chama-se *um*.

Inverso Multiplicativo – todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1} tal que $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$.

Axioma da relação entre adição e multiplicação

Distributividade - dados x, y, z quaisquer em K, tem-se $x . (y + z) = x.y + x.z$

Após os axiomas que definem um corpo, Lima (2006) passa a definir o que é um corpo ordenado:

Um corpo ordenado é um corpo K, no qual se destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elementos positivos de K, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

A soma e o produto de elementos positivos são positivos. $[x, y \in P \Longrightarrow x + y \in P$ e $x.y \in P]$.

Dado $x \in K$, exatamente uma das alternativas a seguir ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

A parti disso, o autor indica com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, então $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$.

Antes de definir corpo ordenado completo, é necessário definir supremo.

Para que $b \in K$ seja supremo de um conjunto $X \subset K$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as condições abaixo:

Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.

Dado $c < b$ em K, existe $x \in X$ tal que $c < x$.

Um corpo ordenado K chama-se completo quando todo subgrupo X não-vazio, limitado superiormente, $X \subset K$, possui supremo em K.

Para finalizar, define-se a condição necessária para que um corpo ordenado K seja arquimediano.

Um corpo ordenado K chama-se arquimediano quando nele é válida qualquer das condições equivalentes do teorema abaixo:

Teorema: Num corpo ordenado K, as seguintes afirmações são equivalentes:

$\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;

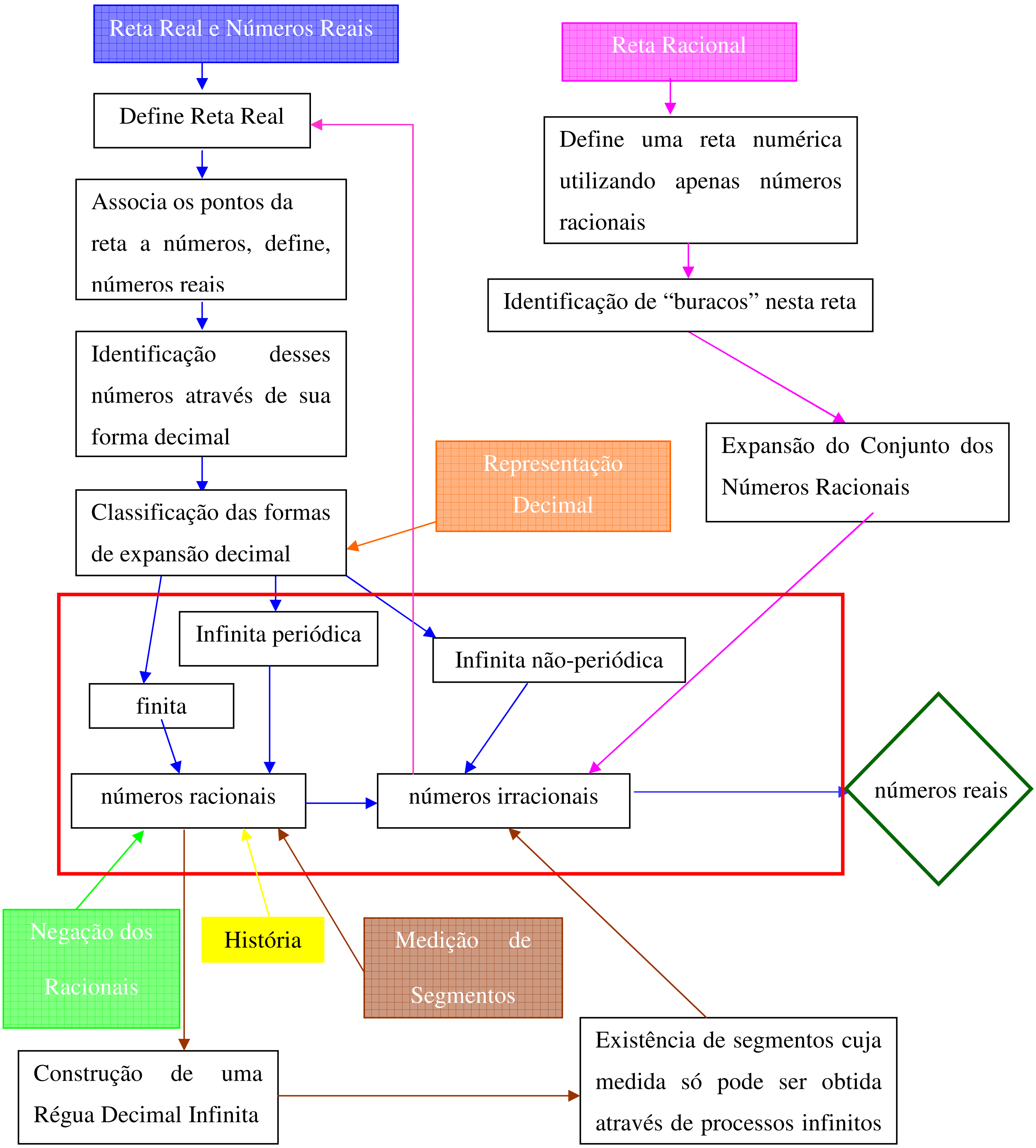
Dados $a,b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \, . \, a > b$

Dado qualquer $a > 0$ em k, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Por fim, o autor cita que todo corpo ordenado completo é arquimediano. Após toda essa exposição adota-se o axioma fundamental da análise matemática:

Axioma: Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o corpo dos números reais.

APÊNDICE III : DIAGRAMA DAS RELAÇÕES ENTRE AS DIFERENTES ABORDAGENS



REFERÊNCIAS

ÁVILA,G. **Introdução a Análise Matemática**. São Paulo: Bleicher, 2ª Ed, 2000.

ÁVILA, G., **Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática**. In: Revista do Professor de Matemática**.** Rio de Janeiro: SBM, n.05, pág. 05-10.

BOFF, D.S. **A Construção dos Números Reais na Escola Básica.** Dissertação – (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática, terceiro e quarto ciclo. Brasília: 1998.

CARAÇA, B.J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: [s.n.],1951.

DIAS, M. S.; COBIANCHI, A.S. **Correlação do Lógico e do Histórico no Ensino dos Números Reais** (200-) .Disponível em: <http:// www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_ Orais%5Cco0012.doc> Acesso em: 20 fev. 2008.

DIAS, M.S. ; COBIANCHI, A.S. **Números Reais: uma proposta de atividade para o ensino**. In: Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo: USP, 2004. Disponível em: <http:www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Oficinas&Cursos%5Cof-13.doc>. Acesso em: 15 fev. 2008

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 1996.

GUILLEN, M**..** **Continuidade e números: pensamento irracional**. In: Pontes para o infinito. O lado humano das matemáticas**.** Lisboa: Gradiva, 1987, pág. 41- 50

IMENES, L. M. **Os números na História da Civilização**. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Editora Scipione, 1989.

LIMA, E.L.; **Curso de Análise**; v. 1. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C.. **A Matemática do Ensino Médio, v.1**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NCTM - NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **More topics in Mathemtics for elementary school teachers.** Thirtieth Yearbook.Virginia:The National Council of Teachers of Mathematics. 1974. 2nd Edição.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**; uma análise da influência francesa. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PENTEADO, C. B. **Concepções do Professor de Ensino Médio relativas à densidade do Conjunto dos Números Reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_cristina_berndt_penteado.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2008.

RIPOLL, C. C.. A **construção dos Números Reais nos Ensinos Fundamental e Médio**, II Bienal da SBM. Salvador: UFBA, 2004. Disponível em: <http:// www.bienasbm.ufba.br/M54>. Acesso em: 6 jan. 2008.

TAMAROZZI, A.C. **Identificando Números Irracionais através de Polinômios**.In: Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2000, n.42, pág. 16-18.