

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

DOUGLAS GOMES DOS SANTOS

ENSAIOS EM ECONOMETRIA APLICADA A FINANÇAS E
MACROECONOMIA UTILIZANDO A ABORDAGEM DE REGRESSÃO
MIDAS

Porto Alegre
2014

DOUGLAS GOMES DOS SANTOS

**ENSAIOS EM ECONOMETRIA APLICADA A FINANÇAS E
MACROECONOMIA UTILIZANDO A ABORDAGEM DE REGRESSÃO
MIDAS**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Flávio A. Ziegelmann

**Porto Alegre
2014**

CIP - Catalogação na Publicação

Santos, Douglas Gomes dos
Ensaio em econometria aplicada a finanças e
macroeconomia utilizando a abordagem de regressão
MIDAS / Douglas Gomes dos Santos. -- 2014.
101 f.

Orientador: Flávio Augusto Ziegelmann.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2014.

1. Abordagem de regressão MIDAS. 2. Modelos não-
lineares MIDAS. 3. Previsão. 4. Volatilidade. 5.
Atividade econômica. I. Ziegelmann, Flávio Augusto,
orient. II. Título.

DOUGLAS GOMES DOS SANTOS

**ENSAIOS EM ECONOMETRIA APLICADA A FINANÇAS E
MACROECONOMIA UTILIZANDO A ABORDAGEM DE REGRESSÃO
MIDAS**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 25 de abril de 2014.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Flávio A. Ziegelmann - Orientador
PPGE-UFRGS

Prof. Dr. André Alves Portela Santos
UFSC

Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini
USP

Prof. Dr. João Fróis Caldeira
PPGE-UFRGS

À minha noiva, Paula.

À minha irmã, Claire.

Aos meus pais (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer às pessoas e às instituições que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta tese:

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por ter me proporcionado ensino de ótima qualidade desde a graduação;

À CAPES, a quem sou grato por ter me proporcionado suporte financeiro desde o mestrado;

Ao Programa de Pós-Graduação em Economia (PPGE-UFRGS);

Ao professor Flávio Ziegelmann, em especial, por todo o seu apoio, atenção, conhecimento transmitido e fundamental orientação na elaboração desta tese;

Aos demais professores do PPGE por todo o conhecimento transmitido;

À Paula por todo seu amor, compreensão e confiança;

À minha querida e paciente irmã;

E, por fim, aos meus amigos que de uma forma ou de outra sempre estiveram por perto.

RESUMO

A abordagem de regressão MIDAS (*Mixed Data Sampling*), proposta por Ghysels et al. (2004), permite relacionar diretamente variáveis em frequências distintas. Esta característica é particularmente atraente quando se deseja utilizar os dados nas frequências em que são disponibilizados, bem como quando o objetivo é calcular previsões multi-períodos à frente. Nesta tese, utiliza-se a abordagem de regressão MIDAS em três ensaios em que são realizadas aplicações empíricas nas áreas de finanças e macroeconomia. Os três ensaios são de caráter comparativo. Com aplicações em diferentes contextos de previsão, objetiva-se contribuir fornecendo evidências empíricas comparativas. No primeiro ensaio, são explorados resultados comparativos no contexto de previsão de volatilidade multi-períodos. Compara-se a abordagem MIDAS com dois métodos amplamente utilizados no cálculo de previsões multi-períodos à frente: as abordagens direta e iterada. Seus desempenhos relativos são investigados em um estudo de Monte Carlo e em um estudo empírico em que são computadas previsões de volatilidade para horizontes de até 60 dias à frente. Os resultados do estudo de Monte Carlo indicam que a abordagem MIDAS fornece as melhores previsões para os horizontes iguais ou superiores a 15 dias. Em contraste, as previsões geradas a partir da abordagem iterada são superiores nos horizontes de 5 e 10 dias à frente. No estudo empírico, utilizando-se retornos diários dos índices S&P 500 e NASDAQ, os resultados não são tão conclusivos, mas sugerem um melhor desempenho para a abordagem iterada. Todas as análises são fora da amostra. No segundo ensaio, são comparados diversos modelos de previsão de volatilidade multi-períodos, especificamente das famílias MIDAS e HAR. As comparações são realizadas em termos da acurácia das previsões de volatilidade fora da amostra. Combinações das previsões dos referidos modelos também são consideradas. São utilizados retornos intradiários do IBOVESPA no cálculo de medidas de volatilidade, tais como variância realizada, variação potente realizada e variação bipotente realizada, sendo estas medidas usadas como regressores em ambos os modelos. Adicionalmente, utiliza-se um procedimento não paramétrico na estimação das medidas de variabilidade dos componentes contínuo e de saltos do processo de variação quadrática. Estas medidas são utilizadas como regressores separados em especificações MIDAS e HAR. Quanto às evidências empíricas, os resultados em termos de erro quadrático médio sugerem que regressores baseados em medidas de volatilidade robustas a saltos (i.e., variação bipotente realizada e variação potente realizada) são melhores em prever volatilidade futura. Entretanto, observa-se que, em geral, as previsões baseadas nestes regressores não são estatisticamente diferentes daquelas baseadas na variância realizada (o regressor *benchmark*). Além disso, observa-se que, de modo geral, o desempenho relativo das três abordagens de previsão (i.e., MIDAS, HAR e combinação de previsões) é estatisticamente equivalente. No terceiro ensaio, busca-se comparar os modelos MS-MIDAS (*Markov-Switching* MIDAS) e STMIDAS (*Smooth Transition* MIDAS) em termos de acurácia preditiva. Para tanto, realiza-se um exercício de previsão em tempo real em que são geradas previsões fora da amostra para o crescimento do PIB trimestral dos Estados Unidos com o uso de indicadores financeiros mensais. Neste exercício, também são considerados modelos lineares MIDAS e outros modelos de previsão (lineares e não-lineares) que incluem informação dos indicadores (via agregação temporal das observações mensais) para fins comparativos de desempenho preditivo. A partir dos resultados do estudo empírico, observa-se que, de modo geral, os modelos MS-MIDAS fornecem previsões mais acuradas que os modelos STMIDAS.

Palavras-chave: Abordagem de regressão MIDAS. Modelos não-lineares MIDAS. Previsão. Volatilidade. Atividade econômica.

ABSTRACT

The Mixed Data Sampling (MIDAS) regression approach, proposed by Ghysels et al. (2004), allows us to directly relate variables at different frequencies. This characteristic is particularly attractive when one wishes to use the data at their original sampling frequencies, as well as when the objective is to calculate multi-period-ahead forecasts. In this thesis, we use the MIDAS regression approach in three papers in which we perform empirical applications in the areas of finance and macroeconomics. All papers are comparative studies. With applications in different forecasting contexts, we aim at contributing with empirical comparative evidence. In the first paper, we explore comparative results in the context of multi-period volatility forecasting. We compare the MIDAS approach with two widely used methods of producing multi-period forecasts: the direct and the iterated approaches. Their relative performances are investigated in a Monte Carlo study and in an empirical study in which we forecast volatility at horizons up to 60 days ahead. The results of the Monte Carlo study indicate that the MIDAS forecasts are the best ones at horizons of 15 days ahead and longer. In contrast, the iterated forecasts are superior for shorter horizons of 5 and 10 days ahead. In the empirical study, using daily returns of the S&P 500 and NASDAQ indexes, the results are not so conclusive, but suggest a better performance for the iterated forecasts. All analyses are out-of-sample. In the second paper, we compare several multi-period volatility forecasting models, specifically from MIDAS and HAR families. We perform our comparisons in terms of out-of-sample volatility forecasting accuracy. We also consider combinations of the models forecasts. Using intra-daily returns of the IBOVESPA, we calculate volatility measures such as realized variance, realized power variation, and realized bipower variation to be used as regressors in both models. Further, we use a nonparametric procedure for separately measuring the continuous sample path variation and the discontinuous jump part of the quadratic variation process. Thus, MIDAS and HAR specifications with the continuous sample path and jump variability measures as separate regressors are estimated. Our results in terms of mean squared error suggest that regressors involving volatility measures which are robust to jumps (i.e., realized bipower variation and realized power variation) are better at forecasting future volatility. However, we find that, in general, the forecasts based on these regressors are not statistically different from those based on realized variance (the benchmark regressor). Moreover, we find that, in general, the relative forecasting performances of the three approaches (i.e., MIDAS, HAR and forecast combinations) are statistically equivalent. In the third paper, we compare the Markov-Switching MIDAS (MS-MIDAS) and the Smooth Transition MIDAS (STMIDAS) models in terms of forecast accuracy. We perform a real time forecasting exercise in which out-of-sample forecasts for the quarterly U.S. output growth are generated using monthly financial indicators. In this exercise, we also consider linear MIDAS models, and other forecasting models (linear and nonlinear) that include information on the indicators (via temporal aggregation of the monthly observations) for comparative purposes. From the results of the empirical study, we observe that, in general, the MS-MIDAS models provide more accurate forecasts than do the STMIDAS models.

Keywords: MIDAS regression approach. Nonlinear MIDAS models. Forecasting. Volatility. Economic activity.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 8 |
| 2 | Multi-Period Volatility Forecasts: A Comparative Study Using MIDAS Regressions | 15 |
| 2.1 | Introduction | 16 |
| 2.2 | Methodology | 18 |
| 2.2.1 | Direct, Iterated and MIDAS Methods | 18 |
| 2.2.2 | Evaluating the Forecasts | 22 |
| 2.3 | Numerical Applications | 23 |
| 2.3.1 | Monte Carlo Study | 23 |
| 2.3.2 | Empirical Study | 25 |
| 2.4 | Conclusions | 26 |
| 2.5 | References | 27 |
| 2.6 | Appendix A: Figures | 29 |
| 2.7 | Appendix B: Tables | 30 |
| 3 | Volatility Forecasting via MIDAS, HAR and Their Combination: an Empirical Comparative Study for IBOVESPA | 32 |
| 3.1 | Introduction | 33 |
| 3.2 | Methodology | 35 |
| 3.2.1 | Volatility Measures | 36 |
| 3.2.2 | Regression Models for Volatility Forecasting | 39 |
| 3.2.3 | Evaluating the Forecasts | 42 |
| 3.3 | Empirical Study | 44 |
| 3.3.1 | Main Empirical Results | 46 |
| 3.4 | Conclusions | 49 |
| 3.5 | References | 50 |
| 3.6 | Appendix A: Detailed Empirical Results | 53 |
| 3.7 | Appendix B: Tables | 59 |
| 4 | Modelos de Regressão Não-Lineares MIDAS: Um Estudo Comparativo Empírico em Previsão | 65 |
| 4.1 | Introdução | 66 |
| 4.2 | Modelos de Regressão MIDAS | 69 |
| 4.2.1 | Modelo MIDAS Básico | 69 |
| 4.2.2 | Modelos Auto-Regressivos MIDAS | 71 |
| 4.2.3 | Modelos MIDAS com Mudança Markoviana | 71 |
| 4.2.4 | Modelos MIDAS com Transição Suave | 74 |
| 4.3 | Estudo Empírico Comparativo | 77 |
| 4.3.1 | Dados e Estrutura do Exercício de Previsão em Tempo Real | 77 |
| 4.3.2 | Exercício de Previsão em Tempo Real | 80 |
| 4.4 | Conclusão | 86 |
| 4.5 | Referências | 87 |
| 4.6 | Apêndice A: Figuras | 90 |
| 4.7 | Apêndice B: Tabelas | 91 |
| 5 | Considerações Finais | 93 |
| | Referências | 96 |

1 Introdução

A disponibilidade de dados em séries temporais amostrados em frequências distintas se apresenta como um problema adicional para aqueles interessados em calcular previsões. Por exemplo, medidas de atividade econômica que recebem especial atenção por parte dos agentes econômicos, como o Produto Interno Bruto (PIB) e a produção industrial, são disponibilizadas nas frequências trimestral e mensal, respectivamente. Por outro lado, existe uma gama de indicadores macroeconômicos observados mensalmente e diversas variáveis financeiras observadas diariamente com potencial poder preditivo para estas medidas. Uma questão relevante é que a maior parte dos modelos de previsão não relaciona variáveis observadas em frequências distintas. Desta forma, um procedimento usual é o de agregar temporalmente as observações da variável de maior frequência (por exemplo, por meio de uma média simples) antes de estimar o modelo de previsão. Todavia, procedimentos simples de conversão dos dados para a mesma frequência podem levar ao descarte de informações relevantes.

Modelos de regressão que relacionam diretamente variáveis em frequências distintas são uma alternativa atraente pois permitem a utilização dos dados nas frequências em que são disponibilizados. Em particular, os modelos de regressão MIDAS (*Mixed Data Sampling*) de Ghysels et al. (2004) possibilitam que se regrida diretamente uma variável de baixa frequência sobre uma variável de alta frequência. Isto é possível graças à especificação de um esquema de ponderação para os dados da variável de maior frequência amostral.

A possibilidade de relacionar variáveis em frequências distintas em um modelo de previsão também é relevante quando se objetiva calcular previsões multi-períodos à frente. Em finanças, por exemplo, previsões de volatilidade multi-períodos são importantes para a tomada de decisões relativas ao gerenciamento de risco, apreçamento de ativos, alocação de carteiras e supervisão regulatória. Dentre as abordagens existentes para obtenção de previsões de volatilidade multi-períodos, há três fundamentalmente distintas. A primeira abordagem consiste em estimar um modelo de previsão de volatilidade, tal como um GARCH, utilizando retornos mensais, por exemplo. Então, a partir do modelo estimado, pode-se computar de forma direta uma previsão para a volatilidade do próximo mês. A segunda abordagem consiste em estimar um modelo

de previsão de volatilidade auto-regressivo diário e então iterar sobre as previsões diárias para o número necessário de períodos de modo a gerar uma previsão para a volatilidade do próximo mês. A primeira e a segunda abordagens são referenciadas na literatura como *direta* e *iterada*, respectivamente (ver Marcellino et al. (2006)). A terceira abordagem, alternativa, é a MIDAS. Neste caso, estima-se uma regressão MIDAS com variáveis preditoras diárias (retornos ao quadrado, retornos absolutos, entre outras) e então gera-se de forma direta uma previsão para a volatilidade multi-períodos. A abordagem MIDAS incorpora as melhores características dos dois primeiros métodos, quais sejam: prever de forma direta e utilizar informação na maior frequência disponível para os preditores (ANDREOU et al., 2011; GHYSELS et al., 2012).

Na literatura sobre finanças empíricas existe uma gama de estudos em que a abordagem MIDAS é utilizada na previsão de volatilidade multi-períodos com o uso de preditores diários (ver, por exemplo, Forsberg e Ghysels (2007), Ghysels e Sohn (2009), Ghysels et al. (2006, 2009), entre outros). Recentemente, a abordagem de regressão MIDAS tem sido aplicada com sucesso na previsão de séries temporais macroeconômicas trimestrais com a utilização de dados mensais ou diários (ver, por exemplo, Andreou et al. (2013), Clements e Galvão (2008), Galvão (2013) e Kuzin et al. (2013)). Neste contexto, uma das vantagens de se utilizar regressões MIDAS está na possibilidade de atualizar as previsões trimestrais na medida em que novas observações da variável em alta frequência estejam disponíveis.

Nesta tese, utiliza-se a abordagem de regressão MIDAS em três ensaios independentes em que são realizadas aplicações empíricas nas áreas de finanças e macroeconomia. Os três ensaios que compõem a tese são de caráter comparativo. Nestes ensaios, modelos da classe MIDAS são comparados entre si bem como em relação a outros modelos de previsão alternativos em termos de acurácia preditiva fora da amostra. Com aplicações em diferentes contextos de previsão, objetiva-se contribuir fornecendo evidências empíricas comparativas. Os três ensaios, com uma contextualização de seus temas, são descritos brevemente a seguir.

As abordagens de previsão direta, iterada e MIDAS têm sido utilizadas amplamente na literatura de finanças empíricas. Entretanto, existem poucos resultados comparativos entre os métodos no contexto de previsão de volatilidade multi-períodos. Diebold et al. (1998) e Hawkes e Date (2007) são exemplos de trabalhos que examinam os métodos direto e iterado. Em um

estudo recente, Ghysels et al. (2009) encontram resultados robustos para a abordagem MIDAS em comparação com os métodos direto, iterado e outras abordagens de obtenção de previsões de volatilidade multi-períodos. Os autores utilizam um conjunto de dados formado por retornos diários do mercado de ações dos Estados Unidos (EUA) e prevêm volatilidade futura em horizontes de até 60 dias de negociação. Em termos gerais, Ghysels et al. (2009) encontram evidências de que as previsões obtidas a partir da abordagem MIDAS são significativamente mais acuradas que as geradas por meio das demais abordagens em horizontes de previsão superiores a 10 dias.

Os resultados empíricos obtidos por Ghysels et al. (2009) a partir do uso de regressões MIDAS motivaram o tema do primeiro ensaio desta tese. Neste ensaio, Capítulo 2 da tese, são explorados resultados comparativos entre as abordagens MIDAS, direta e iterada no contexto de previsão de volatilidade multi-períodos. Em particular, as previsões com as abordagens direta e iterada são computadas a partir de modelos da classe GARCH. O desempenho relativo dos métodos de previsão é examinado em um estudo de Monte Carlo e em um estudo empírico em que são computadas previsões de volatilidade fora da amostra para horizontes de 5 a 60 dias à frente.

No estudo de Monte Carlo, são avaliadas duas especificações baseadas em quadrados de retornos para cada método de previsão. Os resultados gerais deste estudo são bastante favoráveis à abordagem MIDAS. Os resultados indicam um melhor desempenho para a abordagem MIDAS nos horizontes de previsão iguais ou superiores a 15 dias. Para horizontes de 5 e 10 dias, as previsões obtidas a partir do método iterado são superiores às demais. No estudo empírico, são consideradas especificações baseadas em quadrados de retornos e (ou) retornos absolutos para cada abordagem de previsão. São utilizados nesta aplicação retornos diários dos índices S&P 500 e NASDAQ. Em relação aos resultados, as previsões geradas a partir da abordagem iterada apresentam o melhor desempenho em termos de erro quadrático médio em quase todos os horizontes de previsão. Contudo, em geral as três abordagens fornecem previsões estatisticamente equivalentes de acordo com o teste de Diebold e Mariano (1995).

A abordagem de regressão MIDAS permite que se avalie o poder preditivo de diversas medidas de volatilidade disponíveis. Por exemplo, prevendo volatilidade em horizontes relativamente mais curtos (a partir de um dia até um mês à frente), Ghysels et al. (2006) consideram várias medidas de volatilidade diárias, tais como variância realizada, variação potente realizada (i.e.,

soma de retornos absolutos intradiários), entre outras, que são utilizadas como regressores em modelos MIDAS. As medidas de volatilidade diárias são computadas a partir dos retornos intradiários do índice Dow Jones. Em particular, a variação potente realizada é uma medida de volatilidade, proposta por Barndorff-Nielsen e Shephard (2003, 2004), que é robusta à presença de saltos. A partir de um estudo empírico extenso, Ghysels et al. (2006) concluem que a medida de variação potente realizada é a melhor preditora de volatilidade futura (i.e., incrementos futuros em variação quadrática) nos diferentes horizontes considerados.

As evidências empíricas encontradas em Ghysels et al. (2006) relativas ao bom desempenho da medida de variação potente realizada em previsão foram corroboradas por análises adicionais em Forsberg e Ghysels (2007). Em uma análise empírica, Forsberg e Ghysels (2007) consideram medidas de volatilidade tais como variância realizada, variação potente realizada e variação bipotente realizada, que são utilizadas como covariáveis em regressões MIDAS assim como em regressões HAR (*Heterogeneous Autoregressive Regressions*), propostas por Corsi (2004, 2009). As medidas de volatilidade são calculadas a partir dos retornos intradiários do índice S&P 500. Em particular, a medida de variação bipotente realizada foi introduzida por Barndorff-Nielsen e Shephard (2004) como uma medida alternativa à variância realizada quando há saltos no processo dos preços. Utilizando-se a medida de variação bipotente (que é robusta a saltos), pode-se estimar a variação quadrática do componente contínuo dos preços na presença de saltos. Alternativamente, a diferença entre as medidas de variância realizada e variação bipotente realizada estima a variação quadrática do componente de saltos. Forsberg e Ghysels (2007) mostram que regressores baseados na medida de variação potente realizada são melhores em prever incrementos futuros em variação quadrática em diferentes horizontes de previsão. Os argumentos favoráveis à medida de variação potente realizada referem-se a, por exemplo, robustez a saltos e alta persistência.

Baseando-se nos resultados teóricos de Barndorff-Nielsen e Shephard (2004, 2006) para medidas de variação bipotente, Andersen et al. (2007) propõem um procedimento não paramétrico prático para mensurar separadamente a variação da trajetória amostral contínua e a parte descontínua de saltos do processo de variação quadrática. Os autores aplicam o método a um conjunto de dados formado por retornos de alta frequência oriundos dos mercados de câmbio,

ações e renda fixa. Além disso, Andersen et al. (2007) propõem a utilização das medidas de variabilidade dos componentes contínuo e de saltos como regressores separados em um modelo de regressão HAR. Prevendo a volatilidade dos retornos nos horizontes diário, semanal e mensal, os autores encontram evidências de que quase toda a previsibilidade advém do componente contínuo e que a especificação HAR proposta leva a ganhos significativos em termos de acurácia preditiva.

No segundo ensaio, Capítulo 3 da tese, são exploradas as abordagens e evidências empíricas apresentadas nos parágrafos anteriores em um estudo empírico comparativo. Neste estudo, são comparadas diversas regressões MIDAS e HAR, que diferem principalmente em relação à especificação dos regressores, em termos de acurácia das previsões de volatilidade fora da amostra. Ainda, combinações simples das previsões dos modelos MIDAS e HAR também são consideradas. São utilizados retornos intradiários do índice BOVESPA no cálculo de medidas de volatilidade, tais como variância realizada, variação potente realizada e variação bipotente realizada, sendo estas medidas usadas como covariáveis em regressões MIDAS e HAR. Além disso, o procedimento não paramétrico proposto por Andersen et al. (2007) é adotado na estimação das medidas de variabilidade dos componentes contínuo e de saltos que são utilizadas como regressores separados em regressões MIDAS e HAR. Neste estudo empírico, são computadas previsões de volatilidade fora da amostra para horizontes de um dia, e de uma semana até quatro semanas à frente.

Em relação aos regressores examinados, os resultados em termos de erro quadrático médio sugerem que aqueles baseados em medidas de volatilidade robustas a saltos (i.e., variação bipotente realizada e variação potente realizada) são melhores em prever volatilidade futura. Entretanto, utilizando-se o teste Diebold e Mariano (1995) modificado de Harvey et al. (1997), observa-se que, em geral, as previsões baseadas nas medidas robustas a saltos como regressores não são estatisticamente distintas em relação àquelas baseadas na variância realizada como regressor (o regressor *benchmark*). Além disso, observa-se que, de modo geral, o desempenho relativo das três abordagens de previsão (i.e., MIDAS, HAR e combinação de previsões) é estatisticamente equivalente.

Nos últimos anos, diversas extensões têm sido propostas para o modelo linear MIDAS básico. Em se tratando de modelos não-lineares, por exemplo, Galvão (2013) propôs um modelo MI-

DAS que possibilita captar mudanças na capacidade preditiva do regressor observado em alta frequência por meio de uma função de transição suave que depende de uma variável de transição observável. Em Galvão (2013), o modelo STMIDAS (*Smooth Transition* MIDAS) é utilizado no cálculo de previsões para o crescimento do PIB trimestral dos EUA e do Reino Unido com o uso de indicadores financeiros semanais e diários como preditores. A possibilidade de captar mudanças no poder preditivo de um indicador pode ser relevante, por exemplo, ao se calcular previsões de atividade econômica utilizando um *spread* entre taxas de juros de longo e curto prazo. Em particular, existem evidências empíricas que apontam que este indicador possui poder preditivo apenas para períodos de crescimento econômico baixo ou negativo (ver Galbraith e Tkacz (2000)).

Guérin e Marcellino (2013) propõem uma abordagem alternativa para incorporar mudança de regime nos parâmetros do modelo de regressão MIDAS, introduzindo o modelo MS-MIDAS (*Markov-Switching* MIDAS). O modelo proposto pelos autores permite captar mudanças de regime em quase todos os parâmetros do modelo MIDAS básico. Na obra referenciada, o modelo MS-MIDAS é utilizado para gerar previsões para o crescimento do PIB trimestral dos EUA e do Reino Unido com o uso de indicadores financeiros mensais.

No terceiro ensaio, Capítulo 4 da tese, objetiva-se comparar empiricamente os modelos MS-MIDAS e STMIDAS em termos de acurácia preditiva. Dado que estes modelos foram propostos recentemente na literatura, visa-se contribuir fornecendo evidências empíricas acerca da capacidade preditiva relativa dos mesmos. Para tanto, realiza-se um exercício de previsão fora da amostra em que são utilizados dados em tempo real do PIB trimestral dos EUA. Neste exercício, são geradas previsões para o crescimento do PIB trimestral com o uso de indicadores financeiros mensais, sendo os indicadores adotados na análise empírica semelhantes aos considerados nos estudos de Galvão (2013) e Guérin e Marcellino (2013). Em particular, são utilizados três indicadores financeiros: um *spread* entre taxas de juros de longo e curto prazo, retornos de um índice de ações e a taxa efetiva de juros dos *Federal Funds*. No exercício de previsão, também são considerados modelos lineares MIDAS e outros modelos de previsão (lineares e não-lineares) que incluem informação dos indicadores (via agregação temporal das observações mensais) para fins comparativos de desempenho preditivo.

Em relação aos resultados do estudo empírico, observa-se que, de modo geral, os modelos MS-MIDAS fornecem previsões mais acuradas que os modelos STMIDAS. Adicionalmente, observam-se diferenças mais expressivas em acurácia preditiva entre os modelos da classe MIDAS e os demais modelos de previsão apenas nos resultados obtidos com os retornos do índice de ações. Neste caso, os modelos da classe MIDAS geram previsões notadamente mais acuradas quando são utilizados dados do indicador mensal disponíveis para os meses do trimestre de previsão.

2 Multi-Period Volatility Forecasts: A Comparative Study Using MIDAS Regressions

DOUGLAS G. SANTOS¹ AND FLÁVIO A. ZIEGELMANN²

May, 2012

Abstract. We explore comparative results in the context of multi-period volatility forecasts using the MIDAS regression approach. We compare the MIDAS method with two widely used methods of producing multi-period forecasts: the direct and the iterated approaches. Their relative performances are investigated in a Monte Carlo study and in an empirical study in which we forecast volatility at horizons up to 60 days ahead. The results of the Monte Carlo study indicate that the MIDAS forecasts are the best ones at horizons of 15 days ahead and longer. In contrast, the iterated forecasts are superior for shorter horizons of 5 and 10 days ahead. In the empirical study, using daily returns of the S&P 500 and NASDAQ indexes, the results are not so conclusive, but suggest a better performance for the iterated forecasts. All analyses are out-of-sample.

Keywords and phrases: Volatility; Multi-period forecasts; MIDAS regressions; GARCH models.

JEL Classification: C22; C53; G17.

¹Graduate Program in Economics, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS 90040-000, Brazil, e-mail: dgomess@hotmail.com.

²Department of Statistics and Graduate Programs in Economics and Management, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS 91509-900, Brazil, e-mail: flavioaz@mat.ufrgs.br.

2.1 Introduction

The literature on volatility forecasting exhibits a large quantity of papers in which the focus is on the accuracy of one-period-ahead forecasts of volatility, see for example, Engle (1982), Bollerslev (1986), Andersen and Bollerslev (1998), Hansen and Lunde (2005), among many others. In contrast, studies on long-horizon (multi-period-ahead) volatility forecasts exist in small number. In particular, multi-period volatility forecasts are quite relevant for risk management, portfolio allocation and regulatory supervision.

Among the approaches to produce multi-period forecasts of volatility, there are the direct, the iterated, and the relatively less explored mixed data sampling (MIDAS). Regarding the first approach, the basic idea is to estimate a volatility model, such as a GARCH, with 5-day, 10-day or k -day returns and then directly calculate the volatility forecasts over the next 5 days, 10 days, and so on. On the other hand, in the iterated approach a volatility forecasting model, e.g. a GARCH, is estimated using daily returns. Then, the 5-day, 10-day or k -day forecasts of the conditional variance are obtained by iterating over the one-period-ahead forecasts for the necessary number of periods.¹ Alternatively, as a middle ground between the direct and iterated approaches, the MIDAS forecasting regressions are estimated with daily predictors (squared returns, absolute returns, among others) and directly produce multi-period volatility forecasts. MIDAS regression models were introduced by Ghysels et al. (2004, 2005).

The aforementioned approaches have been widely used in the empirical finance literature. However, there exist few comparative results in the context of multi-period volatility forecasting. Diebold et al. (1998), Andersen et al. (1999), and Hawkes and Date (2007) are examples of studies that examine the direct and iterated methods.² In a comprehensive empirical study, Ghysels et al. (2009) find robust results for the MIDAS approach in comparison with the direct, the iterated, and other approaches of obtaining multi-period forecasts of volatility. Ghysels et al. (2009) use a data set consisting of daily returns of the U.S. stock market and they forecast future return volatility at horizons up to 60 trading days. Their overall findings indicate that at horizons of 5 and 10 days ahead, the iterated forecasts are quite accurate. On the other hand, at horizons

¹For surveys covering theoretical aspects of the direct and iterated methods, see, e.g., Bhansali (1999, 2002).

²Forecasting the level of a large number of U.S. macroeconomic time series variables, Marcellino et al. (2006) provide empirical evidence on the relative forecasting performance of the direct and iterated methods.

of 10 days ahead and longer, the MIDAS forecasts are significantly better than those obtained from the other approaches. Focusing on relatively shorter horizons (one day, and from one week to four weeks), Ghysels et al. (2006) examine the forecasting ability of a set of daily predictors of future volatility in the context of MIDAS regressions. Moreover, they compare the MIDAS forecasts with iterated forecasts computed from an ARFIMA model. Using intra-daily data of the U.S. stock market, they consider daily regressors such as squared returns, absolute returns, daily ranges, realized variance and realized power (i.e., sum of intra-daily absolute returns). In particular, realized power variation is a volatility measure proposed by Barndorff-Nielsen and Shephard (2003, 2004). Ghysels et al. (2006) find that daily realized power is the best overall predictor of future volatility. They also find that MIDAS specifications involving daily absolute returns as forecasting variables outperform specifications based on daily squared returns. When comparing the MIDAS forecasts with the iterated forecasts from the benchmark model in terms of accuracy, the MIDAS forecasts perform best.

In this paper, our objective is to explore comparative results in the context of multi-period volatility forecasting using the MIDAS regression approach. We compare the MIDAS approach with two widely used methods of producing multi-period forecasts of volatility: the direct and the iterated approaches. In particular, the direct and the iterated forecasts of volatility are calculated from a set of GARCH models. The relative performance of the forecasting approaches is investigated in a Monte Carlo study and in an empirical study in which we compute out-of-sample forecasts of volatility for horizons ranging from 5 days to 60 days ahead. In the Monte Carlo study, we evaluate two specifications based on squared returns for each forecasting method. Further, we consider a Data Generating Process (DGP) in which, depending on the assumptions about the innovations, we are able to test the robustness of the methods. The overall findings are quite favorable to the MIDAS approach. We find that the MIDAS forecasts are the best ones at horizons of 15 days ahead and higher. In contrast, the iterated forecasts are superior for shorter horizons of 5 and 10 days ahead. In the empirical study, we consider specifications involving squared returns and (or) absolute returns for each forecasting approach. Our data sets consist of daily returns of the S&P 500 and NASDAQ stock indexes. Regarding the results, the iterated forecasts dominate in terms of Mean Squared Error (MSE) in almost all forecasting horizons.

However, in general, the three approaches provide forecasts that are not statistically different based on the Diebold and Mariano (1995) test. Lastly, take notice that all of the reported results are related to the out-of-sample performance of the forecasting approaches.

The remainder of the paper is organized as follows: Section 2.2 covers three approaches of producing multi-period forecasts of volatility, focusing on the MIDAS approach; Section 2.3 includes the numerical applications, the Monte Carlo study and the empirical study; and, finally, Section 2.4 concludes.

2.2 Methodology

In this section, we briefly review three fundamentally distinct approaches of obtaining multi-period forecasts of volatility: the direct, the iterated and the MIDAS. We focus on the MIDAS method because it is relatively less explored. A final subsection covers the way we evaluate the performance of the forecasts in the applications.

2.2.1 Direct, Iterated and MIDAS Methods

To present the methodology, we partially follow the notation used in Ghysels et al. (2009). We define the daily returns as $r_d = \ln P_d - \ln P_{d-1}$, $d = 1, 2, \dots, D$. For ease of notation we use a fractional lag to define the multi-period returns (at periods of k days) as $R_t^k = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j/k}$, $t = 1, 2, \dots, T_k$, where $T_k = [D/k]$ and $[\cdot]$ is the integer operator. In this notation, $t - j/k$ indexes the daily returns as a fraction of the k -period returns. Also, the multi-period returns are computed without overlap to avoid inserting serial dependence into the data. In our numerical applications, for example, we have $D = 7500$ daily observations, with which we can calculate non-overlapping returns of 5 days $T_5 = 1500$, 10 days $T_{10} = 750$, and so on. Notice that the number of non-overlapping returns changes with the horizon k .

There are two information sets, one associated with the daily returns and the other with the multi-period returns. The information set of daily returns at time t is

$$I_t = \{r_t, r_{t-1/k}, \dots, r_{t-(k-1)/k}, r_{(t-1)}, r_{(t-1)-1/k}, \dots, r_{(t-1)-(k-1)/k}, \\ \dots, r_1, r_{1-1/k}, \dots, r_{1-(k-1)/k}\}.$$

Similarly, $I_t^k = \{R_t^k, R_{t-1}^k, \dots, R_1^k\}$ is the information set of the non-overlapping k -period returns.

Moreover, let V_t denote the conditional variance of the daily return at time t and V_t^k denote that of the multi-period return. In particular, our goal is to forecast V_t^k for several horizons of k days. To this end, we will consider three distinct forecasting approaches.

Direct Approach

The first forecasting approach consists in using the k -period returns R_t^k to directly forecast V_t^k . One of the possible alternatives, for example, is to model V_t^k as a GARCH(p, q) and estimate the model using the multi-period returns in I_t^k . Then, a direct forecast for the next-period variance $V_{t+1|I_t^k}^k$ can be computed from the estimated model in one step. We denote the forecasts from the direct approach by $\hat{V}_{DI;t+1}^k$. As Ghysels et al. (2009) point out, the direct method is robust to biases arising from model misspecification. Nevertheless, it is less efficient when compared to methods in which the forecasts are computed from daily returns.

In our numerical applications, we generate direct forecasts from different models of the GARCH family.³ Furthermore, in the empirical analysis we select the order of the GARCH models using the Akaike Information Criterion (AIC), Bayesian Information Criterion (BIC) and other standard statistics of goodness-of-fit.

Iterated Approach

The second approach consists in using the daily returns r_t in I_t to obtain forecasts for the daily volatility k periods ahead, $V_{t+1/k|I_t}$, $V_{t+2/k|I_t}$, \dots , $V_{t+k/k|I_t}$. For instance, iterated forecasts of the daily volatility k periods ahead can be computed from a daily GARCH model and, assuming that the conditional covariances are zero, a forecast of $V_{t+1|I_t}^k$ may be obtained by summing the one-period-ahead forecasts, $\hat{V}_{t+1|I_t}^k = \sum_{j=1}^k \hat{V}_{t+j/k|I_t}$. We denote the multi-period forecasts obtained from the iterated approach by $\hat{V}_{I;t+1}^k$. In particular, the iterated method produces more efficient parameter estimates than the direct method, but it is prone to bias if the one-period forecasting model is misspecified (Marcellino et al., 2006).

To summarize the description of the GARCH models considered in this paper for both the

³We use R codes, particularly the fGarch package. The GARCH-type models are estimated by MLE.

direct and iterated approaches, we use a daily specification of the APARCH(p, q) model

$$\begin{aligned}
r_t &= E(r_t | I_{t-1/k}) + \varepsilon_t, \\
\varepsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \mathcal{D}(0, 1), \\
\sigma_t^\delta &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i/k}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i/k})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j/k}^\delta,
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

where $\delta > 0$, $-1 < \gamma_i < 1$, and $\mathcal{D}(0, 1)$ is the probability density function (pdf) of the iid process z_t with zero mean and unit variance. This model was introduced by Ding et al. (1993) and adds the flexibility of a varying exponent with an asymmetry coefficient to take the leverage effect into account. A stationary solution exists if $\omega > 0$, and $\sum_i \alpha_i \kappa_i + \sum_j \beta_j < 1$, where $\kappa_i = E(|z| + \gamma_i z)^\delta$. Notice that, if $\gamma \neq 0$ and (or) $\delta \neq 2$, κ_i depend on the assumptions made on the innovation process. Additionally, if $E(r_t | I_{t-1/k}) \neq 0$ we use an ARMA(p, q) model to remove the serial correlation of the returns series. The APARCH model nests the GARCH models that we employ as special cases:

- ARCH model of Engle (1982) when $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$, and $\beta_j = 0$.
- GARCH model of Bollerslev (1986) when $\delta = 2$, and $\gamma_i = 0$.
- TS-GARCH model of Taylor (1986) and Schwert (1989) when $\delta = 1$, and $\gamma_i = 0$.
- GJR model of Glosten et al. (1993) when $\delta = 2$.
- TGARCH model of Zakoian (1994) when $\delta = 1$.

MIDAS Approach

A third method, the mixed data sampling (MIDAS) approach, consists in using the daily returns r_t in I_t and directly calculate a multi-period forecast. In a MIDAS forecasting regression it is possible to use data sampled at different frequencies for the dependent variable and regressors. A MIDAS regression may be written as

$$\tilde{V}_{t+1}^k = \mu_k + \phi_k \sum_{j=0}^{j^{max}-1} b_k(j, \theta) r_{t-j/k}^2 + \varepsilon_{k,t+1}, \tag{2.2.2}$$

where \tilde{V}_{t+1}^k is a measure of (future) volatility such as realized variance, e.g. $\tilde{V}_{t+1}^k = RV_{t+1}^k \equiv \sum_{j=0}^{k-1} r_{t+1-j/k}^2$, and the lag coefficients $b_k(j, \theta)$ (weights) are parameterized as a function of a

low-dimensional vector of parameters θ . In particular, the regression in equation (2.2.2) involves data sampled at different frequencies. For instance, in our applications the realized variance (low frequency variable) is measured at horizons from 5 days (one week) to 60 days (three months), whereas the regressors (high frequency variables) are available at daily frequencies. Thus, assuming $j^{max} = 60$ and $k = 5$, for example, means that we are using up to 60 past daily squared returns to compute a forecast of next week's volatility. According to Ghysels and Valkanov (2012), the choice of j^{max} can be done conservatively, by taking a large value, and letting the weights $b_k(j, \theta)$ die out as determined by the parameter estimation.⁴ In this regard, we use $j^{max} = 60$ in our analyses.⁵ Moreover, following Ghysels et al. (2006), we also consider daily absolute returns $|r_{t-j/k}|$ as forecasting variables in the empirical study.

One of the most important features in a MIDAS regression is the weighting function. The parametric restriction imposed on the lag coefficients $b_k(j, \theta)$ circumvents the problem of parameter proliferation. In this regard, there are several ways of parameterizing $b_k(j, \theta)$. We adopt a specification based on the Beta function that has only two parameters, or $\theta = (\theta_1; \theta_2)$:

$$b_k(j, \theta) = \frac{f(\frac{j}{j^{max}}, \theta_1; \theta_2)}{\sum_{i=1}^{j^{max}} f(\frac{i}{j^{max}}, \theta_1; \theta_2)}, \quad (2.2.3)$$

where $f(z, a, b) = z^{a-1}(1-z)^{b-1}/\beta(a, b)$ and $\beta(a, b)$ is the Beta function, $\beta(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. This weighting scheme, introduced in Ghysels et al. (2004), provides positive coefficients, which we need for the positivity of the forecasted volatility. Besides, the weights add up to one, which allows the identification of the scale parameter ϕ_k . The specification (2.2.3) can take various shapes depending on the values of θ_1 and θ_2 . For example, with $\theta_1 = 1$ and $\theta_2 > 1$ the weights have a slowly decaying pattern.⁶ We also consider a restricted version of the Beta weighting scheme (i.e., with $\theta_1 = 1$) in which only θ_2 needs to be estimated.⁷ As Ghysels et al. (2009) point out, the MIDAS approach allows us to circumvent the iteration and aggregation issues that are typical of the iterated approach and also the inefficient use of multi-period returns as is the case in the direct approach. We denote the MIDAS forecasts by $\hat{V}_{M;t+1}^k$.

⁴The parameters of the MIDAS regression in equation (2.2.2) are estimated by NLS using R codes.

⁵We examined other lag lengths and the results were very similar.

⁶We refer to Ghysels et al. (2004, 2007) for further details about the Beta lag structure and alternative weighting functions.

⁷This restricted specification is frequently adopted in the context of volatility forecasting and it provides declining weights (see, e.g., Ghysels et al., 2006; Forsberg and Ghysels, 2007; Ghysels and Sohn, 2009; among others).

2.2.2 Evaluating the Forecasts

In this subsection, we present the criteria that are used to evaluate the forecasts from the three approaches (i.e., iterated, direct and MIDAS) in two numerical applications: a Monte Carlo study and an empirical study. In these applications, we compute forecasts for horizons ranging from 5 days to 60 days ahead. In the Monte Carlo study we are able to assess which of the forecasting approaches produces better forecasts of the true k -period variance. In this case, the out-of-sample forecast error is given by

$$e_{f;t+1}^k = V_{t+1}^k - \hat{V}_{f;t+1}^k, \quad (2.2.4)$$

where $\hat{V}_{f;t+1}^k$ is the forecasted variance from one of the approaches (i.e., $f = I, DI$ or M) and V_{t+1}^k is the true k -period variance. We obtain a measure for the true k -period variance from a Data Generating Process (DGP) in which we simulate daily observations. In particular, we obtain the k -period variance by aggregating the true one-period variances, $V_{t+1}^k = \sum_{j=1}^k V_{t+j/k}$.

Having simulated the data set, for each time series replicated from the DGP we split the sample into two parts; an in-sample period in which we estimate the parameters of the models and an out-of-sample period for evaluating the forecasts. Also, the models are re-estimated in the out-of-sample period after each k -period ahead forecast. We adopt a robust loss function, specifically the Median Absolute Error (MdAE), to measure the performance of the forecasts and deal with the occurrence of outliers. Therefore, for each forecast horizon k , we evaluate the performance of the forecasts from the three approaches by computing the MdAE as follows

$$MdAE_f^{k,i} = \text{median} \left(|e_{f;t+1}^{k,i}| \right), t = t^*, \dots, T_k - 1, f = I, DI, M, \text{ for } i = 1, \dots, 1000, \quad (2.2.5)$$

where i indexes the replicated time series. Of note, the first forecast is obtained by estimating the models using data up to $t = t^*$.

In our empirical analysis, we use the realized variance RV_t^k as a proxy for V_t^k since the true k -period variance is latent. As shown in Andersen et al. (1998), the realized variance is a more precise estimator of the conditional variance than the squared return. Nevertheless, the realized variance measure is constructed from high-frequency returns. Given that we do not have high-frequency data for our sample period, we compute the multi-period measures of realized variance from daily returns, which is the same procedure adopted in Ghysels et al. (2009). As a result,

our RV_t^k estimates will be noisy proxies of the true k -period variances. Substituting the realized variance for the latent k -period variance, the out-of-sample forecast error is given by

$$\hat{u}_{f;t+1}^k = RV_{t+1}^k - \hat{V}_{f;t+1}^k, f = I, DI, M. \quad (2.2.6)$$

In our empirical study we also split the sample into two parts (an initial estimation sample and an out-of-sample period for evaluating the forecasts) in a similar manner to the Monte Carlo exercise. We use the Mean Squared Error (MSE) to assess the performance of the forecasts

$$MSE_f^k = \frac{1}{T_k - t^*} \sum_{t=t^*}^{T_k-1} \left(\hat{u}_{f;t+1}^k \right)^2, f = I, DI, M. \quad (2.2.7)$$

The use of MSE is related to the work of Patton (2011), who classifies the measure as belonging to a class of loss functions that are robust to the presence of noise in the volatility proxy used, thus producing a consistent ranking of the forecasts even in the absence of the true volatility. Moreover, we use the Diebold and Mariano (1995) test of equal forecast accuracy to assess whether the forecasts from the three approaches are statistically different.

2.3 Numerical Applications

We carry out two exercises in which the objective is to forecast future return volatility for horizons of k days. We compare the multi-period forecasts of volatility obtained by the MIDAS, the direct and the iterated methods for horizons from 5 to 60 days ahead. Firstly, we examine the relative performance of the forecasting methods in a Monte Carlo study. Next, we analyze the forecasting approaches using the S&P 500 and NASDAQ daily returns series in an empirical study. In particular, all the forecasts are out-of-sample.

2.3.1 Monte Carlo Study

In this section, we simulate daily observations from an ARCH(2) model, defined as follows:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t z_t, \\ \sigma_t^2 &= 0.1 + 0.5r_{t-1/k}^2 + 0.2r_{t-2/k}^2, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

where $z_t \sim N(0, 1)$ for one set of simulations, and $z_t \sim t_6$ for the other set. For both distributions of z_t , we replicate 1000 time series each with 7500 observations. Also, for the estimation procedures, we consider the conditional mean as known and equal to zero. We compute, for each

time series, non-overlapping k -period returns R_t^k , and realized variances RV_t^k for the horizons $k = 5, 10, 15, 20, 30$ and 60 . Recall that the daily returns r_t are used to produce the iterated GARCH and MIDAS forecasts, whereas the returns R_t^k are used in the direct GARCH approach.

Regarding the models, we compare the forecasts from six models based on squared returns: two MIDAS regressions, one with the unrestricted Beta function (\hat{V}_{M1}^k) and the other with the restricted Beta function (\hat{V}_{M2}^k); two direct GARCH models, a GARCH(1,1), (\hat{V}_{DI1}^k) and a GJR(1,1), (\hat{V}_{DI2}^k); an iterated GARCH(1,1), (\hat{V}_{I1}^k); and an iterated GJR(1,1), (\hat{V}_{I2}^k).⁸ In particular, for each replicated time series, the first 6000 observations are used to estimate the parameters of the models. We leave 1500 final observations to evaluate the out-of-sample forecasts. Moreover, we re-estimate the models after each k -period ahead forecast. Figure 2.1 shows the box plots of the Median Absolute Errors (MdAEs) of the six models using three forecasting methods. In addition, Table 2.1 presents some statistics of these simulations for Gaussian innovations.

Considering the results, the MIDAS regressions present the best performance, in terms of bias, for longer forecasting horizons ($k \geq 15$), with slightly better results for the \hat{V}_{M2}^k forecasts. In contrast, the iterated GARCH models are superior to the others for relatively short horizons (5 and 10 days ahead). Also, the iterated approach shows less variability for the out-of-sample forecasts relative to the MIDAS approach. Lastly, the direct GARCH models exhibit the worst performance.

When we specify a distribution with heavier tails than the Normal for z_t , the results are even better for the MIDAS models. Figure 2.2 and Table 2.2 include the results of the simulations for Student-t innovations. In terms of bias, the MIDAS models provide the best forecasts in almost all horizons ($k \geq 10$). Besides, the models present less variability in their forecasts for longer horizons, especially the MIDAS model specified with the restricted Beta function (\hat{V}_{M2}^k forecasts). The iterated GARCH models are the best ones, considering the bias, for the first horizon ($k = 5$); however, they are the worst ones for longer horizons ($k \geq 20$). Additionally, the direct GARCH approach presents more variability in its forecasts when compared to the other approaches, for all horizons.

⁸We drop the time subscript of the forecasts to simplify the exposition.

2.3.2 Empirical Study

In this empirical study, we have 7500 daily returns of the S&P 500 and NASDAQ stock indexes from August 31, 1981 to May 20, 2011.⁹ A few descriptive statistics of the daily returns are provided in Table 2.3. Similarly to the Monte Carlo experiment, we use the first 6000 observations to estimate the parameters of the models. Then, we generate $\lfloor 1500/k \rfloor$ out-of-sample forecasts for each forecasting horizon of k days. The models' parameters are re-estimated in the out-of-sample period after each k -period ahead forecast. We consider four MIDAS regressions using squared returns (\hat{V}_{M1s}^k and \hat{V}_{M2s}^k forecasts) and absolute returns (\hat{V}_{M1a}^k and \hat{V}_{M2a}^k forecasts) as regressors. In these regressions, the unrestricted Beta function is used for ($\hat{V}_{M1s}^k, \hat{V}_{M1a}^k$), whereas the restricted version of the Beta function is used for ($\hat{V}_{M2s}^k, \hat{V}_{M2a}^k$). For the direct and iterated approaches, we always estimate a GARCH(1,1) model as benchmark (\hat{V}_{DI1}^k and \hat{V}_{I1}^k forecasts), and another specification of the GARCH family (GJR, TS-GARCH or TGARCH) for \hat{V}_{DI2}^k and \hat{V}_{I2}^k . The GARCH-type models are selected by information criteria and other usual goodness-of-fit measures.¹⁰ Notice that the model for \hat{V}_{DI2}^k forecasts may be distinct for each forecasting horizon, given that the time series of k -period returns R_t^k changes according to each k .

Firstly, for the S&P 500 return series, the iterated forecasts \hat{V}_{I2}^k are calculated from a GJR(1,1) model with Student-t distribution for the errors.¹¹ In particular, for both iterated models we specify for the conditional mean equation an ARMA(1,2) model. Additionally, the direct forecasts \hat{V}_{DI2}^k are computed from a GJR(1,1) model for ($k \leq 20$) and using a TGARCH(1,1) model for $k = 30, 60$. These models are estimated with Gaussian errors and, for the first forecast horizon ($k = 5$), we use an AR(1) model for the mean equation.

The comparative results of the multi-period forecasts are presented in Table 2.4. The main evidence is that the iterated forecasts \hat{V}_{I2}^k present the smallest MSEs for all horizons. The MIDAS method is the second best method for the horizons $k = 5, 10$, considering the \hat{V}_{M1s}^k and \hat{V}_{M2s}^k forecasts. In contrast, the direct method is the second best for longer horizons ($k \geq 15$), specifically the \hat{V}_{DI2}^k forecasts. Besides, using the iterated forecasts \hat{V}_{I2}^k as benchmark, we apply the Diebold-Mariano test to assess whether the forecasts from the distinct approaches are

⁹The data were obtained from *Yahoo! Finance*.

¹⁰Also, we specify two distributions for the errors, the Normal and the Student-t.

¹¹The GARCH(1,1) model (\hat{V}_{I1}^k forecasts) is also estimated with Student-t errors.

statistically different. Based on the results of the Diebold-Mariano test, we observe that the forecasts are not statistically different in almost all cases. The exceptions are the direct forecasts \hat{V}_{DI1}^k , for the horizons $k = 5, 10$, that are significantly outperformed by the benchmark forecasts.

Secondly, for the NASDAQ return series, the iterated forecasts \hat{V}_{I1}^k are computed from an ARMA(1,2)-GARCH(1,1) model with Gaussian distribution for the errors, whereas the \hat{V}_{I2}^k forecasts are calculated from an ARMA(1,2)-GJR(1,1) model with Student-t errors. Furthermore, the direct forecasts \hat{V}_{DI2}^k are obtained from an AR(1)-GJR(1,1) model for the horizons ($k = 5, 10$) and from an AR(1)-TGARCH(1,1) model for $k = 15$. For longer horizons ($k \geq 20$), they are calculated using a TS-GARCH(1,1) model. Also, these models are estimated with Student-t errors for ($k \leq 15$) and with Gaussian errors for ($k \geq 20$). Lastly, the GARCH(1,1) model used to obtain the \hat{V}_{DI1}^k forecasts is estimated with Gaussian errors and, for the horizons ($k \leq 15$), we include an AR(1) model for the mean equation.

Table 2.5 includes the out-of-sample forecasting results for the NASDAQ series. Once again, the iterated forecasts \hat{V}_{I2}^k present the smallest MSEs, except for the horizon $k = 10$ in which the direct forecasts \hat{V}_{DI2}^k are slightly superior. Regarding the methods, the MIDAS method is the second best for all horizons, excluding $k = 10$. Also, the direct method has the worst performance. Finally, from the results of the Diebold-Mariano test, we observe a significant difference in terms of accuracy only for the horizon $k = 5$ in which the direct forecasts \hat{V}_{DI1}^k are outperformed by the iterated forecasts \hat{V}_{I2}^k (benchmark forecasts).

2.4 Conclusions

We study multi-period forecasts of volatility using the MIDAS approach in two numerical applications. We compare the MIDAS method with more traditional methods of obtaining multi-step ahead forecasts of volatility: the direct and the iterated approaches. In particular, to compute the iterated and direct forecasts of volatility we use a set of GARCH models. We examine the performance of the forecasting approaches in a Monte Carlo study and in an empirical study. In these applications, we compute out-of-sample forecasts for horizons ranging from one week (5 days) to three months (60 days).

In the Monte Carlo study, we evaluate two specifications based on squared returns for each

forecasting method. Additionally, we consider a DGP in which, depending on the assumptions about the innovations, we may test the robustness of the methods. Our results of the Monte Carlo simulations are quite favorable to the MIDAS method. We find that the MIDAS forecasts are the best ones at horizons of 15 days ahead and higher. In contrast, the iterated forecasts are superior for shorter horizons (i.e., 5 and 10 days ahead). When we test robustness, the forecasting results of the MIDAS approach are even better relative to those of the other approaches.

In the empirical study, we consider specifications involving squared returns and (or) absolute returns for each forecasting approach. We use data sets consisting of daily returns of the S&P 500 and NASDAQ stock indexes. Our results indicate a better performance for the iterated approach when compared with the other approaches. The iterated forecasts dominate in terms of MSE in almost all forecasting horizons. The MIDAS approach is generally the second best. However, using the Diebold-Mariano test, we find that the forecasts from the three approaches are not statistically different in almost all cases.

2.5 References

1. Andersen, T.; Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review*, 39:885–905.
2. Andersen, T.; Bollerslev, T.; Lange, S. (1999). Forecasting Financial Market Volatility: Sample Frequency vis-à-vis Forecast Horizon. *Journal of Empirical Finance*, 6:457–477.
3. Barndorff-Nielsen, O.; Shephard, N. (2003). Realised Power Variation and Stochastic Volatility. *Bernoulli*, 9:243–265.
4. Barndorff-Nielsen, O.; Shephard, N. (2004). Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2:1–48.
5. Bhansali, R.J. (1999). Parameter Estimation and Model Selection for Multistep Prediction of Time Series: A Review. In *Asymptotics, Nonparametrics and Time Series*, S. Gosh (ed.), Marcel Dekker, New York, 201–225.
6. Bhansali, R.J. (2002). Multi-step Forecasting. In *A Companion to Economic Forecasting*, M.P. Clements, D.F. Hendry (eds.), Blackwell, Oxford.
7. Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.
8. Diebold, F.; Hickman, A.; Inoue, A.; Schuermann, T. (1998). Converting 1-day volatility to h -day volatility: Scaling by \sqrt{h} is worse than you think. *Working Paper*, Wharton Financial Institutions Center, 97-34.
9. Diebold, F.; Mariano, R. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13:253–263.
10. Ding, Z.; Granger, C.W.J.; Engle, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1:83–106.

11. Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variances of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50:987–1008.
12. Forsberg, L.; Ghysels, E. (2007). Why Do Absolute Returns Predict Volatility So Well? *Journal of Financial Econometrics*, 5:31–67.
13. Ghysels, E.; Rubia, A.; Valkanov, R. (2009). Multi-Period Forecasts of Volatility: Direct, Iterated, and Mixed-Data Approaches. *Working paper*, UNC and UCSD.
14. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2004). The MIDAS touch: Mixed data sampling regression models. *Working paper*, UNC and UCLA.
15. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2005). There is a risk-return tradeoff after all. *Journal of Financial Economics*, 76:509–548.
16. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2006). Predicting volatility: getting the most out of return data sampled at different frequencies. *Journal of Econometrics*, 131:59–95.
17. Ghysels, E.; Sinko, A.; Valkanov, R. (2007). MIDAS Regressions: Further Results and New Directions. *Econometric Reviews*, 26:53–90.
18. Ghysels, E.; Sohn, B. (2009). Which Power Variation Predicts Volatility Well? *Journal of Empirical Finance*, 16:686–700.
19. Ghysels, E.; Valkanov, R. (2012). Forecasting Volatility with MIDAS. In *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, Ch. 1, L. Bauwens, C. Hafner and S. Laurent (eds.), Wiley, New Jersey, 383–402.
20. Glosten, L.R.; Jagannathan, R.; Runkle, D. (1993). On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, 48:1779–1801.
21. Hansen, P.; Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a garch(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, 20:873–889.
22. Hawkes, R.; Date, P. (2007). Medium-term horizon volatility forecasting: A comparative study. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 23:465–481.
23. Marcellino, M.; Stock, J.H.; Watson, M.W. (2006). A Comparison of Direct and Iterated Multistep AR Methods for Forecasting Macroeconomic Time Series. *Journal of Econometrics*, 135:499–526.
24. Patton, A. (2011). Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies. *Journal of Econometrics*, 160:246–256.
25. Schwert, G.W. (1989). Why Does Stock Market Volatility Change Over Time? *Journal of Finance*, 44:1115–1153.
26. Taylor, S. (1986). *Modelling Financial Time Series*. New York: Wiley.
27. Zakoian, J.M. (1994). Threshold heteroskedasticity models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18:931–955.

2.6 Appendix A: Figures

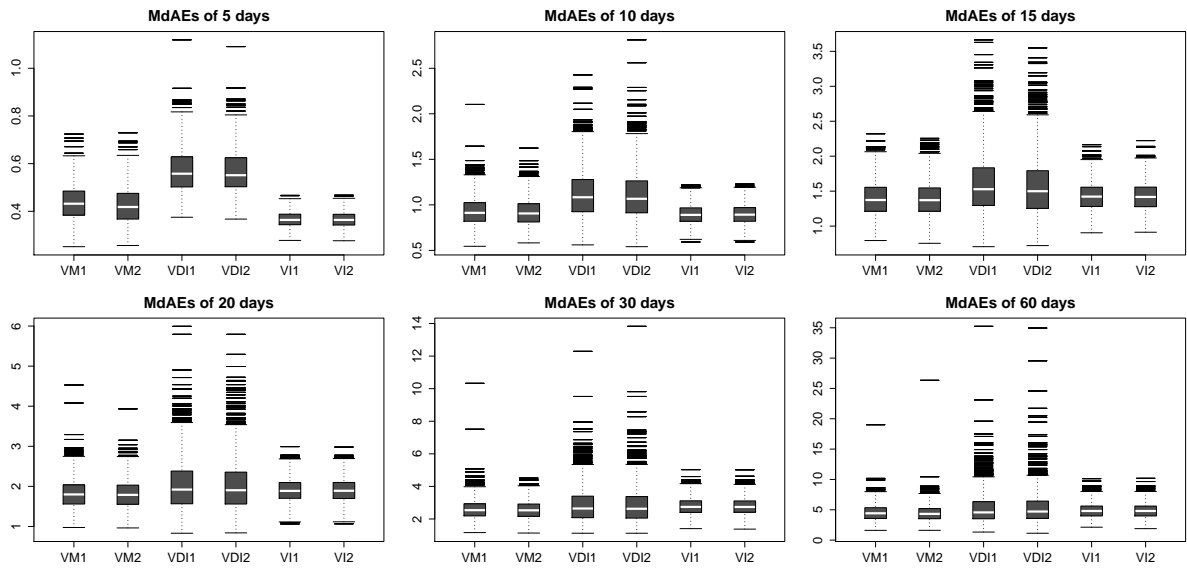


Figure 2.1: Median absolute errors of the multi-period forecasts - Normal distribution

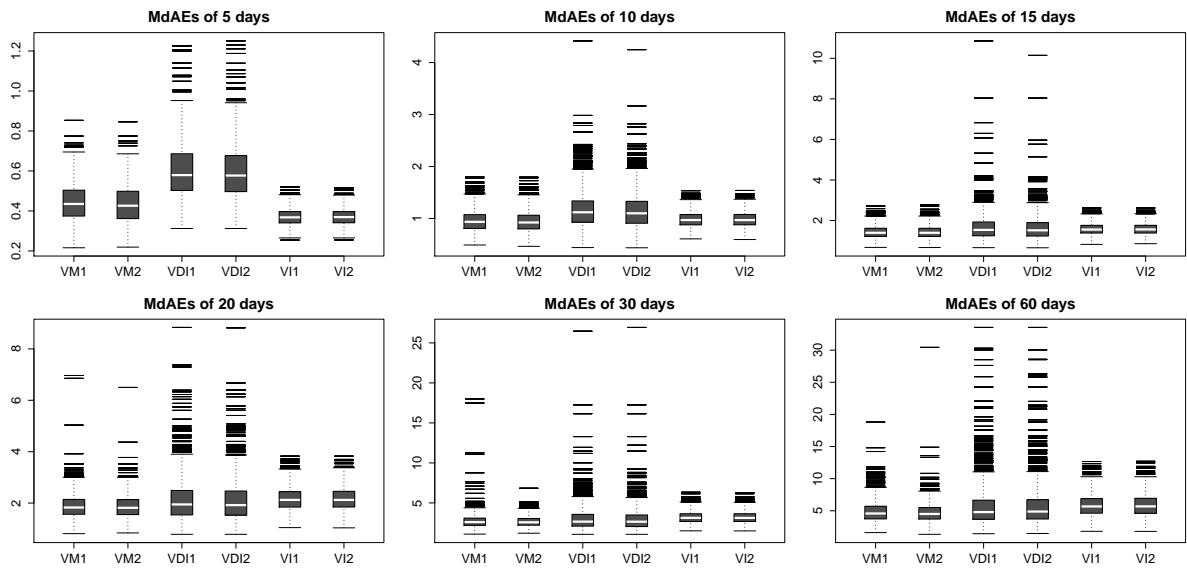


Figure 2.2: Median absolute errors of the multi-period forecasts - Student-t distribution

2.7 Appendix B: Tables

Table 2.1: Median absolute errors of the multi-period forecasts - Normal distribution.

| Method | | Forecasting horizon | | | | | |
|-------------------|----|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 60 |
| MIDAS | | | | | | | |
| \hat{V}_{M1}^k | M | 0.439 | 0.933 | 1.400 | 1.823 | 2.602 | 4.537 |
| | SD | 0.077 | 0.163 | 0.246 | 0.371 | 0.643 | 1.363 |
| \hat{V}_{M2}^k | M | 0.426 | 0.921 | 1.397 | 1.815 | 2.571 | 4.451 |
| | SD | 0.079 | 0.156 | 0.249 | 0.356 | 0.550 | 1.408 |
| DIRECT | | | | | | | |
| \hat{V}_{DI1}^k | M | 0.570 | 1.125 | 1.601 | 2.044 | 2.877 | 5.246 |
| | SD | 0.096 | 0.277 | 0.446 | 0.673 | 1.152 | 2.754 |
| \hat{V}_{DI2}^k | M | 0.567 | 1.113 | 1.577 | 2.028 | 2.866 | 5.400 |
| | SD | 0.095 | 0.281 | 0.443 | 0.677 | 1.177 | 2.989 |
| ITERATED | | | | | | | |
| \hat{V}_{I1}^k | M | 0.366 | 0.896 | 1.429 | 1.907 | 2.767 | 4.879 |
| | SD | 0.033 | 0.108 | 0.203 | 0.307 | 0.524 | 1.232 |
| \hat{V}_{I2}^k | M | 0.366 | 0.897 | 1.430 | 1.908 | 2.768 | 4.879 |
| | SD | 0.033 | 0.108 | 0.204 | 0.308 | 0.524 | 1.234 |

Note: M and SD denote, respectively, the mean and the standard deviation.

Table 2.2: Median absolute errors of the multi-period forecasts - Student-t distribution.

| Method | | Forecasting horizon | | | | | |
|-------------------|----|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 60 |
| MIDAS | | | | | | | |
| \hat{V}_{M1}^k | M | 0.443 | 0.953 | 1.432 | 1.890 | 2.746 | 4.827 |
| | SD | 0.101 | 0.207 | 0.316 | 0.510 | 1.090 | 1.606 |
| \hat{V}_{M2}^k | M | 0.434 | 0.943 | 1.427 | 1.870 | 2.654 | 4.704 |
| | SD | 0.103 | 0.205 | 0.311 | 0.465 | 0.665 | 1.646 |
| DIRECT | | | | | | | |
| \hat{V}_{DI1}^k | M | 0.606 | 1.173 | 1.674 | 2.138 | 3.061 | 5.786 |
| | SD | 0.152 | 0.366 | 0.730 | 0.901 | 1.699 | 3.604 |
| \hat{V}_{DI2}^k | M | 0.603 | 1.160 | 1.646 | 2.108 | 3.025 | 5.841 |
| | SD | 0.151 | 0.364 | 0.687 | 0.874 | 1.678 | 3.669 |
| ITERATED | | | | | | | |
| \hat{V}_{I1}^k | M | 0.370 | 0.980 | 1.584 | 2.158 | 3.213 | 5.852 |
| | SD | 0.046 | 0.154 | 0.293 | 0.470 | 0.771 | 1.716 |
| \hat{V}_{I2}^k | M | 0.370 | 0.980 | 1.585 | 2.160 | 3.216 | 5.862 |
| | SD | 0.046 | 0.154 | 0.293 | 0.472 | 0.771 | 1.718 |

Note: M and SD denote, respectively, the mean and the standard deviation.

Table 2.3: Summary statistics of the S&P 500 and NASDAQ daily returns.

| | S&P 500 | NASDAQ |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| Mean | 3.48×10^{-4} | 3.54×10^{-4} |
| Standard deviation | 0.011 | 0.014 |
| Skewness | -0.222 | -0.231 |
| Excess kurtosis | 9.053 | 8.591 |
| $Q_1(10)$ | 40.92 (0.000) | 27.01 (0.003) |
| $Q_2(10)$ | 4970.85 (0.000) | 5088.01 (0.000) |

Note: $Q_1(10)$ and $Q_2(10)$ are Ljung-Box statistics for up to tenth order serial correlation, for returns and squared returns, with the p -values in parentheses.

Table 2.4: Multi-period forecasts (MSEs) – S&P 500 index.

| Method | Forecasting horizon | | | | | |
|-------------------|---------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 60 |
| \hat{V}_{M1s}^k | 0.025 (0.274) | 0.102 (0.105) | 0.342 (0.107) | 0.440 (0.308) | 0.808 (0.320) | 2.919 (0.325) |
| \hat{V}_{M2s}^k | 0.026 (0.111) | 0.098 (0.124) | 0.324 (0.133) | 0.499 (0.271) | 0.810 (0.292) | 3.233 (0.297) |
| \hat{V}_{M1a}^k | 0.028 (0.210) | 0.109 (0.216) | 0.276 (0.380) | 0.465 (0.493) | 0.834 (0.290) | 3.307 (0.290) |
| \hat{V}_{M2a}^k | 0.030 (0.116) | 0.105 (0.246) | 0.271 (0.390) | 0.500 (0.419) | 0.844 (0.291) | 3.405 (0.268) |
| \hat{V}_{DI1}^k | 0.042 (0.051) | 0.161 (0.095) | 0.356 (0.216) | 0.596 (0.363) | 0.955 (0.217) | 4.166 (0.268) |
| \hat{V}_{DI2}^k | 0.031 (0.160) | 0.116 (0.187) | 0.202 (0.773) | 0.390 (0.658) | 0.457 (0.337) | 1.882 (0.319) |
| \hat{V}_{I1}^k | 0.026 | 0.089 | 0.242 | 0.380 | 0.558 | 1.739 |
| \hat{V}_{I2}^k | 0.021 | 0.071 | 0.186 | 0.322 | 0.342 | 0.762 |

Note: The smallest MSEs are in bold. We test the hypothesis of equal forecast accuracy for all models (methods) against the best overall model (method), \hat{V}_{I2}^k . In parentheses, the p -values of the Diebold-Mariano test.

Table 2.5: Multi-period forecasts (MSEs) – NASDAQ index.

| Method | Forecasting horizon | | | | | |
|-------------------|---------------------|-------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 60 |
| \hat{V}_{M1s}^k | 0.018 (0.792) | 0.082 (0.410) | 0.211 (0.395) | 0.299 (0.918) | 0.633 (0.306) | 3.212 (0.285) |
| \hat{V}_{M2s}^k | 0.020 (0.266) | 0.082 (0.442) | 0.218 (0.401) | 0.323 (0.781) | 0.614 (0.343) | 2.874 (0.312) |
| \hat{V}_{M1a}^k | 0.020 (0.396) | 0.080 (0.501) | 0.207 (0.429) | 0.311 (0.871) | 0.605 (0.304) | 3.041 (0.314) |
| \hat{V}_{M2a}^k | 0.022 (0.248) | 0.080 (0.514) | 0.206 (0.463) | 0.330 (0.773) | 0.594 (0.324) | 2.776 (0.325) |
| \hat{V}_{DI1}^k | 0.031 (0.081) | 0.080 (0.498) | 0.314 (0.211) | 0.502 (0.414) | 0.750 (0.220) | — |
| \hat{V}_{DI2}^k | 0.023 (0.283) | 0.062 (0.922) | 0.225 (0.397) | 0.541 (0.363) | 0.891 (0.187) | 3.821 (0.284) |
| \hat{V}_{I1}^k | 0.020 | 0.072 | 0.191 | 0.293 | 0.323 | 0.916 |
| \hat{V}_{I2}^k | 0.017 | 0.064 | 0.150 | 0.287 | 0.298 | 0.708 |

Note: The smallest MSEs are in bold. We test the hypothesis of equal forecast accuracy for all models (methods) against the best overall model (method), \hat{V}_{I2}^k . In parentheses, the p -values of the Diebold-Mariano test. Also, (—) indicates that the estimates for the model did not converge.

3 Volatility Forecasting via MIDAS, HAR and Their Combination: an Empirical Comparative Study for IBOVESPA

DOUGLAS G. SANTOS¹ AND FLÁVIO A. ZIEGELMANN²

March, 2013

Abstract. In this paper we compare several multi-period volatility forecasting models, specifically from MIDAS and HAR families. We perform our comparisons in terms of out-of-sample volatility forecasting accuracy. We also consider combinations of the models forecasts. Using intra-daily returns of the BOVESPA index, we calculate volatility measures such as realized variance, realized power variation, and realized bipower variation to be used as regressors in both models. Further, we use a nonparametric procedure for separately measuring the continuous sample path variation and the discontinuous jump part of the quadratic variation process. Thus, MIDAS and HAR specifications with the continuous sample path and jump variability measures as separate regressors are estimated. Our results in terms of mean squared error suggest that regressors involving volatility measures which are robust to jumps (i.e., realized bipower variation and realized power variation) are better at forecasting future volatility. However, we find that, in general, the forecasts based on these regressors are not statistically different from the ones based on realized variance (the benchmark regressor). Moreover, we find that, in general, the relative forecasting performances of the three approaches (i.e., MIDAS, HAR and forecast combinations) are statistically equivalent.

Keywords and phrases: Realized variance; Volatility forecasting; MIDAS regressions; HAR regressions; Forecast combination.

JEL Classification: C22; C53; G17.

¹Graduate Program in Economics, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS 90040-000, Brazil, e-mail: dgomess@hotmail.com.

²Department of Statistics and Graduate Programs in Economics and Management, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS 91509-900, Brazil, e-mail: flavioaz@mat.ufrgs.br.

3.1 Introduction

Given the importance of asset return volatility for several practical financial decisions, such as risk management, asset allocation and asset pricing, there have been extensive efforts to provide accurate estimates and forecasts of return volatility. Until recently, most of the empirical results in the literature were based on the use of daily or lower-frequency data, combined with the GARCH family models or stochastic volatility (SV) models (see Engle, 1982; Bollerslev, 1986; Taylor, 1986; and for a recent survey, see Andersen et al., 2006). Nevertheless, a more recent branch of the literature reports the benefits of incorporating high-frequency data into longer-run volatility modeling and forecasting problems through the use of simple reduced form time series models for daily realized volatility measures based on the summation of intra-daily squared returns (see, for example, Andersen et al., 2003; Corsi, 2004, 2009; Pong et al., 2004; Koopman et al., 2005; amongst others).

In the context of multi-period volatility forecasting, Ghysels et al. (2006) consider several daily volatility measures, such as realized variance, realized power variation (i.e., sum of intra-daily absolute returns), among others, which are used as regressors in Mixed Data Sampling (MIDAS) models, proposed by Ghysels et al. (2004). The daily volatility measures are computed from intra-daily returns of the Dow Jones index. In particular, realized power variation is a measure proposed by Barndorff-Nielsen and Shephard (2003, 2004), which is robust to the presence of jumps. From an extensive empirical study, Ghysels et al. (2006) find that daily realized power variation is the best predictor of future volatility (measured as increments in quadratic variation) at different forecast horizons.

The empirical evidence in Ghysels et al. (2006) concerning the quite good performance of realized power variation as predictor of future volatility was corroborated by theoretical and further empirical work by Forsberg and Ghysels (2007). Building on a continuous time stochastic volatility model for asset returns suggested by Barndorff-Nielsen and Shephard (2001), they study the persistence and linear regression properties of various volatility-related processes. In this context, Forsberg and Ghysels (2007) show that realized power variation has the most desirable population forecasting properties. In the empirical study, they consider volatility measures such as realized variance, realized power variation and realized bipower variation, for example,

that are used as covariates in MIDAS regressions, and in Heterogeneous Autoregressive (HAR) regressions, proposed by Corsi (2004, 2009). The volatility measures are calculated from intradaily returns of the S&P 500 index. In particular, realized bipower variation was introduced by Barndorff-Nielsen and Shephard (2004) as an alternative measure to realized variance when there are jumps in the price process. The bipower variation measure is constructed from the summation of appropriately scaled cross-product of adjacent high-frequency absolute returns. Using the realized bipower variation, which is a measure robust to jumps, one can estimate the quadratic variation of the continuous component of prices in the presence of jumps. Alternatively, the difference between realized variance and realized bipower variation estimates the quadratic variation of the jump component. Forsberg and Ghysels (2007) show that regressors involving realized power variation are better at forecasting future increments in quadratic variation at different forecast horizons. Some of the favorable arguments to realized power variation refer to robustness to jumps, high persistence, and better sampling error behavior.

Building on the theoretical results in Barndorff-Nielsen and Shephard (2004, 2006) for bipower variation measures, Andersen et al. (2007) provide a practical nonparametric procedure for separately measuring the continuous sample path variation and the discontinuous jump part of the quadratic variation process. They apply the method to a data set consisting of high-frequency returns from the foreign exchange, equity, and fixed income markets. Further, Andersen et al. (2007) propose the use of the continuous sample path and jump variability measures as separate regressors in a HAR regression model. They find that almost all of the predictability in daily, weekly, and monthly return volatilities comes from the continuous component, resulting in significant gains in terms of forecast accuracy.

In this paper, we aim at comparing results in the context of multi-period volatility forecasts. In an empirical study using data from the Brazilian stock market, we compare several MIDAS and HAR regressions, that differ mostly in the specification of the regressors, in terms of out-of-sample volatility forecast accuracy.¹ We also consider simple forecast combinations of the MIDAS and

¹In the literature, some authors include in their empirical analyses traditional GARCH-type models for comparative purposes. In particular, it is commonly found that simple HAR models outperform these popular latent volatility models in terms of forecast accuracy (see, for instance, McAleer and Medeiros, 2008; Martens et al., 2009; Scharth and Medeiros, 2009; among others). Also, in an extensive empirical study, Ghysels et al. (2009) find superior forecasting results for the MIDAS approach relative to direct and iterated GARCH approaches for long-horizon volatility forecasting.

HAR models.² We use intra-daily data (15-minute returns) of the BOVESPA Index (IBOVESPA) to calculate volatility measures such as realized variance, realized power variation, and realized bipower variation, which are used as covariates in MIDAS and HAR regressions. Further, we use the nonparametric approach proposed by Andersen et al. (2007) for separately measuring the continuous sample path variation and the discontinuous jump part of the quadratic variation process. Therefore, we also consider MIDAS and HAR specifications with the continuous sample path and jump variability measures as separate regressors. To provide as much empirical evidence as possible, we forecast realized variance and also focus on models for the realized variance in standard deviation and log form. We compute out-of-sample volatility forecasts for horizons of one day, and from one week to four weeks ahead. Regarding the regressors, our results in terms of mean squared error (MSE) suggest that those involving volatility measures which are robust to jumps (i.e., realized bipower variation and realized power variation) are better at forecasting future volatility. Using the modified Diebold and Mariano (1995) test of Harvey et al. (1997), however, we find that, in general, the forecasts based on realized bipower variation and realized power variation as regressors are not statistically different from the ones based on realized variance, considered as the benchmark regressor. Moreover, we find that, in general, the relative forecasting performances of the three approaches (i.e., MIDAS, HAR and forecast combinations) are statistically equivalent.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 3.2 provides a brief review of the relevant theory and the construction of the pertinent volatility measures. It also introduces the regression models for volatility forecasting and presents the criteria to evaluate the forecasts. Section 3.3 includes the comparative empirical study of the forecasting performance of the considered models. Section 3.4 concludes the paper.

3.2 Methodology

In this section, we briefly present the volatility measures of our interest and their asymptotic properties. Next, we describe the MIDAS and HAR regression models, focusing on the MIDAS approach, and also present our approach for combining MIDAS and HAR forecasts. At the end,

²For recent studies in the context of volatility forecasting using forecast combinations, see e.g., Becker and Clements (2008), McAleer and Medeiros (2008), Patton and Sheppard (2009), among others.

we evaluate the forecasts.

3.2.1 Volatility Measures

To begin, let $p(t)$ denote the log-price at time t of a financial asset. The continuous-time jump diffusion process used in asset pricing can be characterized by the following stochastic differential equation:

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \kappa(t)dq(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2.1)$$

where $\mu(t)$ is a continuous and locally bounded variation process, $\sigma(t)$ is a strictly positive stochastic volatility process with a sample path that is right continuous and has well-defined limits, $W(t)$ is a standard Brownian motion, $q(t)$ is a pure jump process with intensity $\lambda(t)$ and $\kappa(t)$ is the jump size.

The quadratic variation for the cumulative return process, $r(t) \equiv p(t) - p(0)$, is given by

$$[r, r]_t = \int_0^t \sigma^2(s)ds + \sum_{0 < s \leq t} \kappa^2(s), \quad (3.2.2)$$

where the summation consists of the $q(t)$ squared jumps that occurred between time 0 and time t . In the absence of jumps, i.e., $q(t) \equiv 0$, the summation disappears and the quadratic variation equals the integrated variance³ of the continuous sample path component.

Moreover, let the discretely sampled Δ -period returns be denoted by $r_{t,\Delta} \equiv p(t) - p(t - \Delta)$. To simplify the notation, we normalize the daily time interval to unity and denote the daily returns by a single time subscript,⁴ $r_{t+1} \equiv r_{t+1,1} \equiv r_{t+\Delta,\Delta} + r_{t+2\Delta,\Delta} + \dots + r_{t+1,\Delta}$. The daily realized variance (RV) is defined by the summation of the corresponding $1/\Delta$ intra-daily squared returns,

$$RV_{t+1}(\Delta) \equiv \sum_{j=1}^{1/\Delta} r_{t+j\cdot\Delta,\Delta}^2, \quad (3.2.3)$$

where $1/\Delta$ is assumed to be an integer. For instance, when dealing with typical stock market data, $1/\Delta = 78$ and $1/\Delta = 28$ correspond to 5-minute and 15-minute sampling frequencies, respectively. When the sampling frequency of the returns increases, for $\Delta \rightarrow 0$, then the realized variance converges uniformly in probability to the increment of the quadratic variation process,⁵

$$RV_{t+1}(\Delta) \rightarrow \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds + \sum_{t < s \leq t+1} \kappa^2(s). \quad (3.2.4)$$

³See, for instance, Andersen et al. (2010) for a review on the subject.

⁴We adopt the same notation as in Andersen et al. (2007).

⁵See Andersen et al. (2001, 2003, 2010), Barndorff-Nielsen and Shephard (2002a,b, 2007), among others.

Therefore, in the absence of jumps the realized variance is a consistent estimator of the integrated variance, which is central to certain models of option pricing with stochastic volatility.

The result in equation (3.2.4) motivates the direct modeling and forecasting of realized variances, as in Andersen et al. (2003). Nevertheless, given that the realized variance jointly measures the contributions to volatility of the continuous sample path component and the jump component, Andersen et al. (2007) argue that potentially superior forecasting models may be constructed by separately measuring and modeling the jump and nonjump components. To accomplish that, Andersen et al. (2007) use the asymptotic results of Barndorff-Nielsen and Shephard (2004, 2006) that allow for separate identification of the two components of the quadratic variation process. Barndorff-Nielsen and Shephard (2004) introduced the concept of realized bipower variation (BPV),

$$BPV_{t+1}(\Delta) \equiv \mu_1^{-2} \sum_{j=2}^{1/\Delta} |r_{t+j\cdot\Delta,\Delta}| |r_{t+(j-1)\cdot\Delta,\Delta}|, \quad (3.2.5)$$

where $\mu_1 \equiv \sqrt{2/\pi}$, and established that for $\Delta \rightarrow 0$,

$$BPV_{t+1}(\Delta) \rightarrow \int_t^{t+1} \sigma^2(s) ds. \quad (3.2.6)$$

Thus, the contribution to the quadratic variation process due to the jumps may be consistently estimated by

$$RV_{t+1}(\Delta) - BPV_{t+1}(\Delta) \rightarrow \sum_{t < s \leq t+1} \kappa^2(s), \quad (3.2.7)$$

for $\Delta \rightarrow 0$.

In addition, Barndorff-Nielsen and Shephard (2003, 2004) proposed another volatility measure that is asymptotically ($\Delta \rightarrow 0$) immune to jumps, the so-called realized power variation (RPV),

$$RPV_{t+1}(\Delta) \equiv \mu_1^{-1} \Delta^{1/2} \sum_{j=1}^{1/\Delta} |r_{t+j\cdot\Delta,\Delta}| \rightarrow \int_t^{t+1} \sigma(s) ds. \quad (3.2.8)$$

In particular, Forsberg and Ghysels (2007) show that regressors involving RPV are better at forecasting future volatility (measured by increments in quadratic variation) for several reasons, such as robustness to jumps, desirable population predictability features, and better sampling error behavior.

The result in equation (3.2.7) allows us to identify jumps; however, these jumps may be too small to be statistically significant. In this regard, Barndorff-Nielsen and Shephard (2004) derive

the asymptotic distribution and provide the test statistic,

$$\Delta^{-1/2} \frac{RV_{t+1}(\Delta) - BPV_{t+1}(\Delta)}{\left[(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5) \int_t^{t+1} \sigma^4(s) ds \right]^{1/2}} \Rightarrow N(0, 1), \quad (3.2.9)$$

for $\Delta \rightarrow 0$, under the assumption of no jumps. Therefore, a large value of the standardized difference between $RV_{t+1}(\Delta)$ and $BPV_{t+1}(\Delta)$ is treated as evidence of a significant jump over the time interval from t to $t+1$. In order to implement this test, one needs to estimate the integrated quarticity, $\int_t^{t+1} \sigma^4(s) ds$. This can be done, as suggested in Andersen et al. (2004, 2007), by the jump-robust realized tripower quarticity measure,⁶

$$TQ_{t+1}(\Delta) \equiv \Delta^{-1} \mu_{4/3}^{-3} \sum_{j=3}^{1/\Delta} |r_{t+j \cdot \Delta, \Delta}|^{4/3} |r_{t+(j-1) \cdot \Delta, \Delta}|^{4/3} |r_{t+(j-2) \cdot \Delta, \Delta}|^{4/3}, \quad (3.2.10)$$

where $\mu_{4/3} \equiv 2^{2/3} \cdot \Gamma(7/6) \cdot \Gamma(1/2)^{-1}$. Further, they note that for $\Delta \rightarrow 0$,

$$TQ_{t+1}(\Delta) \rightarrow \int_t^{t+1} \sigma^4(s) ds, \quad (3.2.11)$$

even in the presence of jumps. Thus, significant jumps may be identified using the feasible test statistic

$$W_{t+1}(\Delta) \equiv \Delta^{-1/2} \frac{RV_{t+1}(\Delta) - BPV_{t+1}(\Delta)}{\left[(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5) TQ_{t+1}(\Delta) \right]^{1/2}}, \quad (3.2.12)$$

where $W_{t+1}(\Delta) \sim N(0, 1)$ under the null hypothesis of no jumps.

The simulation results in Huang and Tauchen (2005) indicate that the test statistic in equation (3.2.12) tends to overreject the null hypothesis for large critical values. Alternatively, Huang and Tauchen (2005) suggest using the ratio-statistic,

$$Z_{t+1}(\Delta) \equiv \Delta^{-1/2} \frac{[RV_{t+1}(\Delta) - BPV_{t+1}(\Delta)] RV_{t+1}(\Delta)^{-1}}{\left[(\mu_1^{-4} + 2\mu_1^{-2} - 5) \max\{1, TQ_{t+1}(\Delta) BPV_{t+1}(\Delta)^{-2}\} \right]^{1/2}}, \quad (3.2.13)$$

which is normally distributed under the null. Andersen et al. (2007) identify significant jumps by the realizations of $Z_{t+1}(\Delta)$ in excess of some critical value $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$, for a significance level α , based on the standard normal distribution,

$$J_{t+1, \alpha}(\Delta) \equiv I[Z_{t+1}(\Delta) > \Phi^{-1}(1 - \alpha)] \cdot [RV_{t+1}(\Delta) - BPV_{t+1}(\Delta)], \quad (3.2.14)$$

⁶This measure is a special case of the multipower variation measures studied in Barndorff-Nielsen and Shephard (2004).

where $I[\cdot]$ is the indicator function. Also, the continuous path component is estimated as

$$\begin{aligned} C_{t+1,\alpha}(\Delta) &\equiv I[Z_{t+1}(\Delta) \leq \Phi^{-1}(1-\alpha)] \cdot RV_{t+1}(\Delta) \\ &+ I[Z_{t+1}(\Delta) > \Phi^{-1}(1-\alpha)] \cdot BPV_{t+1}(\Delta), \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

ensuring that the variation of $C_{t+1,\alpha}(\Delta)$ and $J_{t+1,\alpha}(\Delta)$ add up to the total realized variation, $RV_{t+1}(\Delta)$. In particular, Andersen et al. (2007) use a large critical value to identify only the most significant jumps (see also Forsberg and Ghysels, 2007; Bollerslev et al., 2008; Giot et al., 2010; among others). In our empirical study, for example, we follow the approach of Andersen et al. (2007) and estimate the jump (J) component and the continuous (C) component using $\alpha = 0.001$, or $\Phi^{-1}(0.999) = 3.090$.

3.2.2 Regression Models for Volatility Forecasting

Our objective is to forecast future return volatility at forecasting horizons of k days. Firstly, to simplify the notation, we omit the explicit reference to Δ in $RV_{t+1}(\Delta)$. Secondly, we construct multi-period realized variances in the same way as in Andersen et al. (2007) and Forsberg and Ghysels (2007). The multi-period measures are defined by the *normalized* sum of the one-period realized variances,

$$RV_{t,t+k} = k^{-1}(RV_{t,t+1} + RV_{t+1,t+2} + \cdots + RV_{t+k-1,t+k}). \quad (3.2.16)$$

Note that $RV_{t,t+1} \equiv RV_{t+1}$. In particular, in the empirical analysis we focus on $k = 5, 10, 15$, and 20, denoting realized variances for the horizons of one week to four weeks.

To forecast the realized variance over a future horizon of k days, $RV_{t,t+k}$, we first consider the Mixed Data Sampling (MIDAS) regression models. In the MIDAS regression framework it is possible to use data sampled at different frequencies for the dependent variable and regressors. The MIDAS model may be written as

$$RV_{t,t+k} = \mu + \phi \sum_{j=0}^{j^{max}-1} b(j, \theta) X_{t-j-1,t-j} + \varepsilon_{t,t+k}, \quad (3.2.17)$$

where $X_{t-j-1,t-j}$ denotes a daily regressor from $(t-j-1)$ to $(t-j)$. In MIDAS regressions the selection of $X_{t-j-1,t-j}$ corresponds to choosing the best predictor of future volatility from various possible measures of past fluctuations in returns (Ghysels and Valkanov, 2012). For instance, in our application we use the following volatility measures as regressors: RV , BPV

and RPV . Also, we use $j^{max} = 60$ in the empirical study.⁷ The lag coefficients $b(j, \theta)$ (weights) are parameterized as a function of θ (a low-dimensional vector of parameters), which circumvents the problem of parameter proliferation. In this regard, there are several ways of parameterizing $b(j, \theta)$. We adopt a specification based on the Beta function that has only two parameters, or $\theta = \{\theta_1; \theta_2\}$:

$$b(j, \theta) = \frac{f(\frac{j}{j^{max}}, \theta_1; \theta_2)}{\sum_{i=1}^{j^{max}} f(\frac{i}{j^{max}}, \theta_1; \theta_2)}, \quad (3.2.18)$$

where $f(z, a, b) = z^{a-1}(1-z)^{b-1}/\beta(a, b)$ and $\beta(a, b)$ is the Beta function, $\beta(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. This weighting scheme, introduced in Ghysels et al. (2004), provides positive coefficients, which we need for the positivity of the forecasted volatility. The specification (3.2.18) can take various shapes depending on the values of θ_1 and θ_2 . For example, with $\theta_1 = 1$ and $\theta_2 > 1$ the weights have a slowly decaying pattern.⁸ We use a restricted version of the Beta weighting scheme (i.e., with $\theta_1 = 1$) in which only θ_2 needs to be estimated.⁹

In addition, we are able to forecast $RV_{t,t+k}$ using as separate regressors the estimated measures for the jump (J) and continuous (C) components, defined in equations (3.2.14) and (3.2.15), respectively. For notational simplicity, let $J_t \equiv J_{t,\alpha}(\Delta)$ and $C_t \equiv C_{t,\alpha}(\Delta)$. Then, the MIDAS model using these measures as regressors can be written as¹⁰

$$\begin{aligned} RV_{t,t+k} = & \mu + \phi_1 \sum_{j=0}^{j^{max}-1} b^C(j, 1, \theta_2^C) C_{t-j-1,t-j} \\ & + \phi_2 \sum_{j=0}^{j^{max}-1} b^J(j, 1, \theta_2^J) J_{t-j-1,t-j} + \varepsilon_{t,t+k}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

where $\theta_1^C = \theta_1^J = 1$, and θ_2^C, θ_2^J need to be estimated for both Beta lag structures along with the other parameters, μ, ϕ_1 and ϕ_2 .¹¹ Besides forecasting RV, as in equations (3.2.17) and (3.2.19), we also focus on models for the RV in standard deviation and log form. Practical use of volatility models and forecasts often involves standard deviations instead of variances. In particular, the log transformation induces normality for RV measures, as Andersen et al. (2003) argue, which

⁷We examined other lag lengths and the results were very similar.

⁸We refer to Ghysels et al. (2004, 2007) for further details about the Beta lag structure and alternative weighting functions.

⁹This restricted specification is frequently adopted in the context of volatility forecasting and it provides declining weights (see, e.g., Ghysels et al., 2006; Forsberg and Ghysels, 2007; Ghysels and Sohn, 2009; among others).

¹⁰We employ the same specification for the MIDAS regression used in Forsberg and Ghysels (2007).

¹¹The parameters of the MIDAS regressions, in equations (3.2.17) and (3.2.19), are estimated by NLS using R codes.

facilitates modeling using standard autoregressions, for example. Moreover, as mentioned in Andersen et al. (2007), modeling and forecasting the log of RV guarantees nonnegativity of estimated and forecasted volatilities. To provide as much empirical evidence as possible, we proceed as in Ghysels et al. (2006), Andersen et al. (2007) and Forsberg and Ghysels (2007), modeling and forecasting the RV as well as the transformations of RV. Henceforth, to facilitate, a specific regression will be denoted by its dependent variable and regressor(s) as, for example, MIDAS-*RV-RV*. Thus, we consider MIDAS-*RV-X*, with $X = RV, BPV, C, CJ, RPV$ and RPV^2 .¹² For regressions involving transformations, we have MIDAS- $RV^{1/2}$ -*X*, with $X = RV^{1/2}, BPV^{1/2}, C^{1/2}, (CJ)^{1/2}$, and RPV as well as MIDAS- $\ln RV$ -*X*, with $X = \ln RV, \ln BPV, \ln C, \ln(CJ)$, and $\ln RPV$. Lastly, all the regressors are daily (computed from intra-daily returns).

The second type of regressions that we undertake is based on the Heterogeneous Autoregressive (HAR-RV) model of Corsi (2004, 2009), which is an extension of the Heterogeneous ARCH (HARCH) model of Müller et al. (1997).¹³ Following Andersen et al. (2007) and Forsberg and Ghysels (2007), the HAR-RV model may be expressed as

$$RV_{t,t+k} = \beta_0 + \beta_D RV_t + \beta_W RV_{t-5,t} + \beta_M RV_{t-20,t} + \varepsilon_{t,t+k}, \quad (3.2.20)$$

where the explanatory variables are basically the lagged realized variance over a day, a week, and four weeks (i.e., over different interval sizes).¹⁴ Besides being simple and parsimonious, the model is capable of capturing the long memory behavior of the realized variance (for more details, see Corsi, 2004, 2009). Noteworthy, the HAR-RV model can be seen as a MIDAS regression with step-functions (one of the possible weighting schemes for MIDAS models); see, e.g., Ghysels et al. (2007) and Ghysels and Valkanov (2012). Additionally, using the decomposition of RV_t into C_t and J_t , Andersen et al. (2007) propose the HAR-RV-CJ model

$$RV_{t,t+k} = \beta_0 + \beta_{CD} C_t + \beta_{CW} C_{t-5,t} + \beta_{CM} C_{t-20,t} \\ + \beta_{JD} J_t + \beta_{JW} J_{t-5,t} + \beta_{JM} J_{t-20,t} + \varepsilon_{t,t+k}, \quad (3.2.21)$$

¹²The use of RPV^2 is suggested in Forsberg and Ghysels (2007) to be on the same scale as RV .

¹³The motivation behind the HARCH model, and consequently behind the HAR-RV model, is based on the existence of different types of market participants with distinct investment horizons (Heterogeneous Market Hypothesis).

¹⁴Originally, the HAR-RV model is specified using the lagged RV over a month (i.e., $RV_{t-22,t}$). To carry out comparisons between MIDAS and HAR regressions, we use four weeks (i.e., $k = 20$) as in Forsberg and Ghysels (2007). Also, the parameters of the HAR-RV model are estimated by OLS.

where $C_{t-5,t}$, $C_{t-20,t}$ and $J_{t-5,t}$, $J_{t-20,t}$ are normalized multi-period measures, of the continuous and jump components, calculated in a similar manner to equation (3.2.16). In our empirical application, we analyze different regressors and transformations of the dependent variable, $RV_{t,t+k}$, for the HAR regressions in equations (3.2.20) and (3.2.21). Therefore, using the previous notation, we consider HAR- RV - X , with $X = RV, BPV, C, CJ, RPV$ and RPV^2 . Also, we have HAR- $RV^{1/2}$ - X , with $X = RV^{1/2}, BPV^{1/2}, C^{1/2}, (CJ)^{1/2}$, and RPV as well as HAR- $\ln RV$ - X , with $X = \ln RV, \ln BPV, \ln C, \ln (CJ)$ and $\ln RPV$. Finally, the measures $BPV_{t-5,t}$, $BPV_{t-20,t}$, $RPV_{t-5,t}$, and $RPV_{t-20,t}$ are computed similarly to equation (3.2.16).

As a final investigation, we also take into account simple forecast combinations of the MIDAS and HAR regressions. The idea of combining different forecasts of the same quantity, with the objective of improving forecast accuracy, was first proposed by Bates and Granger (1969).¹⁵ In particular, suppose we have a pair of multi-period forecasts, $\widehat{RV}_{t,t+k}^{(1)}$ and $\widehat{RV}_{t,t+k}^{(2)}$, representing, for instance, MIDAS- RV - RV and HAR- RV - RV forecasts of $RV_{t,t+k}$, respectively. Using a simple average, we may combine the pair of forecasts as follows

$$\widehat{RV}_{t,t+k}^{(c)} = (1/2)\widehat{RV}_{t,t+k}^{(1)} + (1/2)\widehat{RV}_{t,t+k}^{(2)}, \quad (3.2.22)$$

obtaining the mean forecast $\widehat{RV}_{t,t+k}^{(c)}$. For applications in the context of volatility forecasting using forecast combinations, see for instance, Donaldson and Kamstra (1996), Becker and Clements (2008), McAleer and Medeiros (2008), and Patton and Sheppard (2009). In our empirical study, we only combine individual forecasts obtained by the same regressors. Hence, we consider forecast combinations of MIDAS+HAR- RV - X , with $X = RV, BPV, C, CJ, RPV$ and RPV^2 . Likewise, we have MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ - X , with $X = RV^{1/2}, BPV^{1/2}, C^{1/2}, (CJ)^{1/2}$, and RPV as well as MIDAS+HAR- $\ln RV$ - X , with $X = \ln RV, \ln BPV, \ln C, \ln (CJ)$ and $\ln RPV$.

3.2.3 Evaluating the Forecasts

In the empirical study, we evaluate forecasts of the realized variance (and its transformations) for different horizons, ranging from one day to four weeks ahead. Further, we analyze the forecasting ability of a set of regressors for MIDAS and HAR regressions as well as forecast combinations of the models. To carry out comparisons, we calculate the Mean Squared Error (MSE) of the

¹⁵For reviews on the subject, see Clemen (1989), Diebold and Lopez (1996), Hendry and Clements (2004), Timmermann (2006), among others.

forecasts. Firstly, let us denote by $RV_{t,t+k}$ the actual value of the realized variance for the horizon of k days. Also, let $\widehat{RV}_{t,t+k}$ denote an out-of-sample forecast of the RV. Hence, the MSE is given by

$$MSE = N^{-1} \sum_{i=1}^N (RV_{i,i+k} - \widehat{RV}_{i,i+k})^2, \quad (3.2.23)$$

where N is the number of out-of-sample forecasts. The use of MSE is related to the work of Patton (2011), who classifies the measure as belonging to a class of loss functions that are robust to the presence of noise in the volatility proxy used; thus, producing a consistent ranking of the forecasts even in the absence of the true volatility.

Secondly, when we model the transformed measures of $RV_{t,t+k}$, i.e., $RV_{t,t+k}^{1/2}$ and $\ln RV_{t,t+k}$, we undo the transformations of the forecasted values before calculating the MSEs. This allows us to compare the forecasts obtained by regressions with distinct dependent variables. In particular, when we model the realized standard deviation, $RV_{t,t+k}^{1/2}$, we undo the transformation of the forecasted value as follows

$$MSE = N^{-1} \sum_{i=1}^N \left(RV_{i,i+k} - \left(\widehat{RV}_{i,i+k}^{1/2} \right)^2 \right)^2. \quad (3.2.24)$$

When we model the log of the realized variance, $\ln RV_{t,t+k}$, we undo the transformation of the forecasted value as follows

$$MSE = N^{-1} \sum_{i=1}^N \left(RV_{i,i+k} - \exp(\ln \widehat{RV}_{i,i+k}) \right)^2. \quad (3.2.25)$$

Noteworthy, as Forsberg and Ghysels (2007) mention, realized variance forecasts obtained by undoing the transformations are not going to be unbiased (see also Granger and Newbold, 1976).

In order to assess significant differences in forecast accuracy, we apply the modified Diebold and Mariano (1995) test of Harvey et al. (1997) to the series of forecasts. Concisely, suppose that a pair of multi-period forecasts have produced the forecast errors $\hat{e}_{t,t+k}^{(f)} = RV_{t,t+k} - \widehat{RV}_{t,t+k}^{(f)}$, $t = 1, 2, \dots, N$; $f = 1, 2$. To measure the performance of a forecast, we use the quadratic loss function, $L(\hat{e}_{t,t+k}^{(f)}) = [\hat{e}_{t,t+k}^{(f)}]^2$, $f = 1, 2$. The null hypothesis of equal forecast accuracy of the Diebold-Mariano (DM) test is

$$H_0 : E[L(\hat{e}_{t,t+k}^{(1)}) - L(\hat{e}_{t,t+k}^{(2)})] = 0.$$

Under the null hypothesis, the DM test statistic is

$$DM(k) = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\hat{V}(\bar{d})}} \Rightarrow N(0, 1), \quad (3.2.26)$$

where $\bar{d} = N^{-1} \sum_{t=1}^N d_t = N^{-1} \sum_{t=1}^N \{[\hat{e}_{t,t+k}^{(1)}]^2 - [\hat{e}_{t,t+k}^{(2)}]^2\}$ is the sample mean loss differential, and the variance of \bar{d} can be estimated by $\hat{V}(\bar{d}) = N^{-1}[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{k-1} \hat{\gamma}_\tau]$, where $\hat{\gamma}_\tau = N^{-1} \sum_{t=\tau+1}^N (d_t - \bar{d})(d_{t-\tau} - \bar{d})$. Harvey et al. (1997) propose a small-sample modification to the Diebold-Mariano test, yielding the modified DM test statistic

$$DM^*(k) = \left[\frac{N + 1 - 2k + N^{-1}k(k-1)}{N} \right]^{1/2} \times DM(k). \quad (3.2.27)$$

The authors also suggest comparing the $DM^*(k)$ statistic with critical values from the Student-t distribution with $(N - 1)$ degrees of freedom, rather than the standard normal distribution.¹⁶

Using the modified DM test, we compare the MIDAS forecasts, for example, obtained by the use of alternative regressors with those generated by using the realized variance (benchmark regressor). Moreover, we compare the forecasts produced by models involving transformations with the forecasts generated by models that do not involve transformations (e.g., MIDAS- $RV^{1/2}$ - $RV^{1/2}$ versus MIDAS- RV - RV). Finally, we explore differences in forecast accuracy between the MIDAS and HAR models, and between the MIDAS+HAR forecast combinations and the individual models (based on the same regressors).

3.3 Empirical Study

In this section, we use MIDAS and HAR regressions to forecast future volatility for several horizons, reporting empirical evidence for the Brazilian stock market. Further, we compute simple forecast combinations of the MIDAS and HAR models. Our data set consists of 15-minute intra-daily returns of the IBOVESPA from May 14, 2004 to October 08, 2009.¹⁷ The entire sample contains 1330 trading days with 28 observations per day, for a total of 37,240 15-minute returns (trading days of 7 hours). The adoption of a coarse sampling frequency is an usual and simple way of alleviating influences of market microstructure noise,¹⁸ while maintaining most of the

¹⁶Harvey et al. (1997) argue that the original DM test can be quite oversized in small and moderate samples, a problem that becomes more severe as the forecast horizon grows.

¹⁷The data were obtained from *CMA trade solution*.

¹⁸In practice, market microstructure effects (due to, e.g., price discreteness, bid-ask spreads, non-synchronous trading, among other factors) may induce biases in the RV estimates when sampling returns too frequently. The impact of microstructure noise on RV measures has been the focus of a number of studies, see, e.g., Aït-Sahalia et al. (2005), Hansen and Lunde (2006), Bandi and Russell (2008), and Hansen et al. (2008).

relevant information in the high-frequency data (see, e.g., Andersen et al., 2001, 2007; Bollerslev et al., 2008; among others). Thus, we use the 15-minute sampling frequency, which is already a conservative sampling frequency when compared with the one frequently used of 5-minute. In particular, in our intra-daily returns series we do not find evidence of serial correlation, which is usually found in higher-frequency returns due to market microstructure effects. From the entire sample, we calculate a set of daily volatility measures, such as realized variance (RV), realized bipower variation (BPV), realized power variation (RPV), and the continuous (C) and jump (J) components of the realized variance. When separating RV_t into C_t and J_t using the jump test of Barndorff-Nielsen and Shephard (2004, 2006), we have to define a significance level α for the test. Following Andersen et al. (2007), we adopt a conservative significance level ($\alpha = 0.001$) to identify only the most significant jumps.¹⁹ Moreover, we also consider the log and square root transformations of these measures.

Figure 3.1 shows the daily time series plots of the realized variance in standard deviation form, $RV_t^{1/2}$, and also of the continuous and jump components, $C_t^{1/2}$ and $J_t^{1/2}$, respectively. As can be seen from Figure 3.1, many of the largest $RV_t^{1/2}$ observations are directly associated with the occurrence of jumps, $J_t^{1/2}$. Also, the largest jumps for the IBOVESPA occurred during the final part of the sample, a period quite influenced by the *subprime crisis* (financial crisis with its origin in the U.S. mortgage market). The plots for the level and log form of RV show similar patterns. In addition, a few descriptive statistics for the daily volatility measures of the IBOVESPA are reported in Table 3.1 in Appendix B. Consistent with empirical evidence reported in Andersen et al. (2007) and Forsberg and Ghysels (2007) for different markets, we note from Table 3.1 that the volatility measures in log form are much closer to being normally distributed than are the other ones. Also, the RPV_t^2 , RPV_t , and $\ln RPV_t$ series exhibit the highest degree of serial correlation according to the Ljung-Box test statistics for up to tenth order serial correlation. This is in line with the findings that RPV measures are more persistent than RV measures. Lastly, the Ljung-Box statistic for the J_t series is notably lower than the corresponding test statistics for the RV_t and C_t series, which indicates that there is not much persistence in the jump component of the realized variance. This is also valid for the log and square root transformations.

¹⁹See Subsection 3.2.1 for details. Also, other significance levels were tested, yielding similar results.

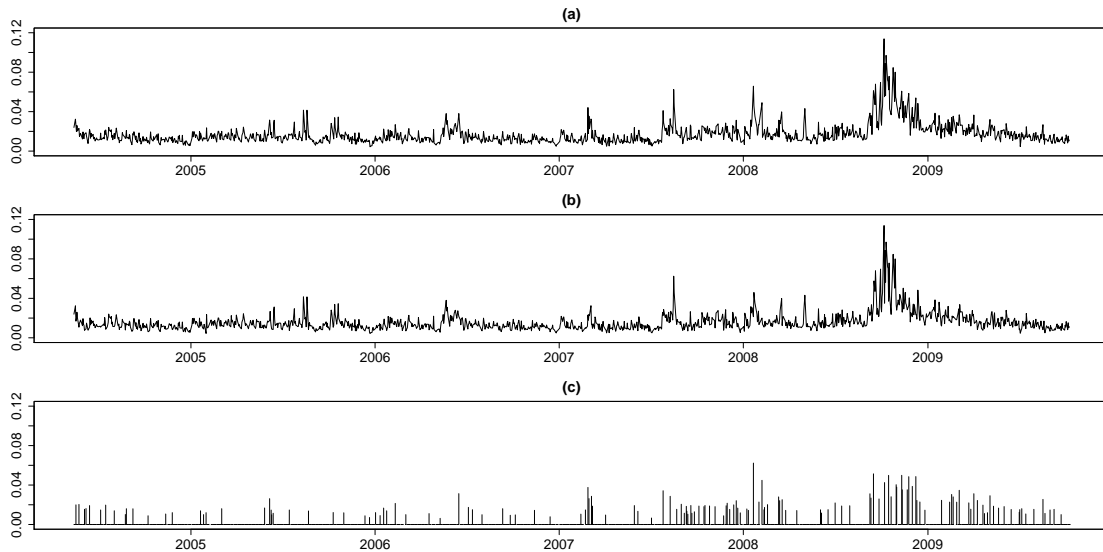


Figure 3.1: Daily IBOVESPA volatility and jumps (2004-2009): (a) realized variance in standard deviation form, $RV_t^{1/2}$; (b) continuous component, $C_t^{1/2}$; (c) jump component, $J_t^{1/2}$. See the text for details related to the separation of RV_t into C_t and J_t using the jump test. The significance level $\alpha = 0.001$ was used in the jump test.

The objective here is to forecast future volatility for horizons of k days. Specifically, we consider out-of-sample forecasts for horizons of one day, one week, two, three and four weeks, that is, for $k = 1, 5, 10, 15$ and 20 . These horizons are quite relevant for risk management and option pricing routines. We use the first 1120 daily observations to estimate the parameters of the models, and the remaining 210 daily observations to evaluate the out-of-sample forecasts. Also, the models are re-estimated in the out-of-sample period. Additionally, the number of out-of-sample forecasts will be different across distinct forecasting horizons. We have 210, 206, 201, 196, 191 forecasts for the horizons of $k = 1, 5, 10, 15$ and 20 days, respectively. Finally, we forecast realized variance, $RV_{t,t+k}$, and also consider models for the RV in standard deviation and log form. To simplify the exposition of our findings, we report the main results, according to the dependent variables, in the subsection below. Besides, detailed empirical results can be found in Appendix A.

3.3.1 Main Empirical Results

We begin with the main results for the out-of-sample forecasts of the realized variance, $RV_{t,t+k}$. Tables 3.2 to 3.4 (first panel) in Appendix B present the forecasting results of the MIDAS- RV and HAR- RV models, and those of the MIDAS+HAR- RV forecast combinations, respectively. In these tables, each column represents a different model or combination of forecasts (involving

distinct regressors). They report the MSE of the forecasts and the p -values of the modified DM test for comparisons of the forecasts based on alternative regressors with those based on RV (the benchmark regressor). We find that BPV as regressor produces the best forecasts in terms of MSE, for almost all forecast horizons. However, these forecasts are not statistically different from the ones based on RV .²⁰ Moreover, we compare the MIDAS- RV models, the HAR- RV models and the MIDAS+HAR- RV forecast combinations in terms of forecast accuracy. In general, the MIDAS- RV models provide the best forecasts in terms of MSE. Tables 3.5 to 3.7 (first panel) in Appendix B report the p -values of the modified DM test for comparisons between MIDAS- RV and HAR- RV models, between MIDAS+HAR- RV forecast combinations and HAR- RV models, and between MIDAS+HAR- RV forecast combinations and MIDAS- RV models, respectively. Concerning the results, we find that the MIDAS- RV specifications with BPV and RPV^2 as regressors generate significantly better forecasts than do the HAR- RV specifications with the same regressors, for most horizons. Also, the MIDAS+HAR- RV forecast combinations involving BPV and RPV^2 as regressors significantly outperform the HAR- RV forecasts, for most horizons. Lastly, for the horizons of three and four weeks, the MIDAS- RV forecasts based on RPV^2 as regressor are statistically superior to the MIDAS+HAR- RV forecast combinations.

We also have forecasting results for the realized variance in standard deviation form, $RV_{t,t+k}^{1/2}$. Tables 3.2 to 3.4 (second panel) in Appendix B report the out-of-sample results for the MIDAS- $RV^{1/2}$ and HAR- $RV^{1/2}$ models, as well as for the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations. We can see from the tables that $BPV^{1/2}$ as regressor generates the best forecasts in terms of MSE, for most horizons. Nevertheless, comparing the forecasts based on $BPV^{1/2}$ with those based on $RV^{1/2}$ as regressor, we do not observe significant differences in forecast accuracy. Additionally, from Tables 3.2 to 3.4, we evaluate whether superior forecasts are obtained by modeling the realized variance in standard deviation form. Thus, we compare the MIDAS- $RV^{1/2}$ models, the HAR- $RV^{1/2}$ models and the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations with their MIDAS- RV , HAR- RV and MIDAS+HAR- RV counterparts. From the comparative results, we highlight the superior forecasting performance of the HAR- $RV^{1/2}-(CJ)^{1/2}$ model relative to the HAR- $RV-CJ$ model. For the HAR- $RV^{1/2}-(CJ)^{1/2}$ model, the square root transformation is quite beneficial.

²⁰In a recent study for the IBM stock returns, Patton and Sheppard (2009) also find little statistically significant evidence (under the MSE loss function) when comparing out-of-sample forecasts of volatility from a simple HAR model. They use more than thirty different volatility measures and combinations of measures as regressors.

Lastly, we compare the MIDAS- $RV^{1/2}$ models, the HAR- $RV^{1/2}$ models and the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations in terms of forecast accuracy. As can be seen from Tables 3.2 to 3.7 (second panel), the overall results indicate that the three approaches have similar forecasting performance.

We finish with the main forecasting results for the realized variance in log form, $\ln RV_{t,t+k}$. Considering the results for the MIDAS- $\ln RV$ and HAR- $\ln RV$ models, as well as for the MIDAS+HAR- $\ln RV$ forecast combinations, reported in Tables 3.2 to 3.4 (third panel) in Appendix B, we note that $\ln RPV$ as regressor provides the best forecasts in terms of MSE, for most horizons. In general, the forecasts based on $\ln RPV$ as regressor are not statistically different from the ones based on $\ln RV$.²¹ Furthermore, from Tables 3.2 to 3.4, we assess whether superior forecasts are obtained by modeling the realized variance in log form. Hence, we compare the MIDAS- $\ln RV$ models, the HAR- $\ln RV$ models and the MIDAS+HAR- $\ln RV$ forecast combinations with their MIDAS- RV , HAR- RV and MIDAS+HAR- RV counterparts. We report the main results of these comparisons following. First, the MIDAS- $\ln RV$ - $\ln RPV$ model generates significantly better forecasts than does the MIDAS- RV - RPV^2 model, for two out of the five forecast horizons. Second, the HAR- $\ln RV$ forecasts based on $\ln RV$ and $\ln RPV$ as regressors are statistically superior to the HAR- RV forecasts based on RV and RPV^2 as regressors, for at least two out of the five forecast horizons. Third, for two out of the five horizons, the MIDAS+HAR- $\ln RV$ forecast combinations involving $\ln RV$ and $\ln RPV$ as regressors significantly outperform the MIDAS+HAR- RV forecast combinations involving RV and RPV^2 as regressors. Finally, we explore differences in forecast accuracy between the MIDAS- $\ln RV$ and HAR- $\ln RV$ models as well as between the MIDAS+HAR- $\ln RV$ forecast combinations and the individual models. The overall results indicate that the HAR- $\ln RV$ models generate the best forecasts in terms of MSE. Nonetheless, based on the results of the modified DM test, reported in Tables 3.5 to 3.7 (third panel) in Appendix B, we do not find significant differences in forecast accuracy in any of the direct comparisons.

²¹Using intra-daily data of the Dow Jones index, Ghysels and Sohn (2009) compare MIDAS forecasts based on several realized power variation measures as regressors at different forecasting horizons. Their out-of-sample results indicate a statistically equivalent forecasting performance for most horizons.

3.4 Conclusions

We forecast the volatility of IBOVESPA returns using MIDAS and HAR regression models at different forecast horizons, reporting empirical evidence for the Brazilian stock market. Additionally, we compute simple forecast combinations of the models. For both the MIDAS and HAR models, we evaluate the forecasting ability of various regressors. Using intra-daily returns of the IBOVESPA, we calculate a set of volatility measures to be used as regressors in both models. Besides, we use the nonparametric approach proposed by Andersen et al. (2007) for separately measuring the continuous sample path variation and the discontinuous jump part of the quadratic variation process. Thus, we also consider MIDAS and HAR specifications with the continuous sample path and jump variability measures as separate regressors. We compute out-of-sample forecasts for the horizons of one day, and from one week to four weeks ahead.

In our empirical study, we investigate three main points. First, the best regressor(s) for volatility forecasting. Second, whether superior forecasts are obtained by modeling transformed variables. Third, the best forecasting approach, i.e., MIDAS, HAR, or a combination of their forecasts. Regarding the regressors, our results in terms of MSE suggest that those involving volatility measures which are robust to jumps (i.e., realized bipower variation and realized power variation) are better at forecasting future volatility. This empirical finding is consistent with results in Ghysels et al. (2006), Andersen et al. (2007) and Forsberg and Ghysels (2007), who use different data sets. However, using the modified DM test, we find that, in general, the forecasts based on these alternative regressors are not statistically different from the ones based on realized variance. Given that we find little statistically significant evidence under the MSE loss function, it would be interesting to evaluate the performance of the different volatility measures in another context. For instance, in a risk management perspective, assessing their ability to forecast Value-at-Risk (VaR) (for such approach, see Clements et al., 2008; and Brownlees and Gallo, 2010).

With respect to the second point we investigate, the overall results indicate significant gains in forecasting accuracy particularly when considering models for the log of the realized variance, for specifications with $\ln RV$ and $\ln RPV$ as regressors. Concerning the last point we analyze, the overall results show that the forecasting performance of the three approaches is statistically

equivalent in most cases. Nonetheless, when considering models for the realized variance, we find a slight advantage in terms of accuracy for the MIDAS forecasts based on BPV and RPV^2 as regressors relative to the ones from the other approaches.

3.5 References

1. Aït-Sahalia, Y.; Mykland, P.; Zhang, L. (2005). How Often to Sample a Continuous-Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise. *Review of Financial Studies*, 18:351–416.
2. Andersen, T.G.; Bollerslev, T.; Christoffersen, P.; Diebold, F.X. (2006). Volatility and Correlation Forecasting. In *Handbook of Economic Forecasting*, G. Elliott, C.W.J. Granger, A. Timmermann (eds.), Elsevier Science, New York.
3. Andersen, T.G.; Bollerslev, T.; Diebold, F.X. (2004). Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Untangling Continuous and Jump Components in Measuring, Modeling and Forecasting Asset Return Volatility. *Working paper*, Duke University.
4. Andersen, T.G.; Bollerslev, T.; Diebold, F.X. (2007). Roughing It Up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling and Forecasting of Return Volatility. *The Review of Economics and Statistics*, 89:701–720.
5. Andersen, T.G.; Bollerslev, T.; Diebold, F.X. (2010). Parametric and Nonparametric Volatility Measurement. In *Handbook of Financial Econometrics*, Vol. 1, Y. Aït-Sahalia, L.P. Hansen (eds.), North-Holland, Amsterdam.
6. Andersen, T.G.; Bollerslev, T.; Diebold, F.X.; Labys, P. (2001). The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. *Journal of the American Statistical Association*, 96:42–55.
7. Andersen, T.G.; Bollerslev, T.; Diebold, F.X.; Labys, P. (2003). Modeling and Forecasting Realized Volatility. *Econometrica*, 71:579–625.
8. Bandi, F.M.; Russell, J.R. (2008). Microstructure Noise, Realized Volatility, and Optimal Sampling. *Review of Economic Studies*, 75:339–369.
9. Barndorff-Nielsen, O.E.; Shephard, N. (2001). Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of their Uses in Financial Econometrics. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 63:167–241.
10. Barndorff-Nielsen, O.E.; Shephard, N. (2002a). Econometric Analysis of Realised Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models. *Journal of the Royal Statistical Society*, 64:253–280.
11. Barndorff-Nielsen, O.E.; Shephard, N. (2002b). Estimating Quadratic Variation Using Realized Variance. *Journal of Applied Econometrics*, 17:457–478.
12. Barndorff-Nielsen, O.E.; Shephard, N. (2003). Realised Power Variation and Stochastic Volatility. *Bernoulli*, 9:243–265.
13. Barndorff-Nielsen, O.E.; Shephard, N. (2004). Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2:1–37.
14. Barndorff-Nielsen, O.E.; Shephard, N. (2006). Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation. *Journal of Financial Econometrics*, 4:1–30.
15. Barndorff-Nielsen, O.E.; Shephard, N. (2007). Variation, Jumps and High-Frequency Data in Financial Econometrics. In *Advances in Economics and Econometrics. Theory and Applications, Ninth World Congress*, Ch. 10, R. Blundell, P. Torsten and W.K. Newey (eds.), Econometric Society Monographs, Cambridge University Press.

16. Bates, J.M.; Granger, C.W.J. (1969). The Combination of Forecasts. *Operations Research Quarterly*, 20:451–468.
17. Becker, R.; Clements, A.E. (2008). Are Combination Forecasts of S&P 500 Volatility Statistically Superior? *International Journal of Forecasting*, 24:122–133.
18. Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.
19. Bollerslev, T.; Law, T.H.; Tauchen, G. (2008). Risk, Jumps, and Diversification. *Journal of Econometrics*, 144:234–256.
20. Brownlees, C.T.; Gallo, G.M. (2010). Comparison of Volatility Measures: a Risk Management Perspective. *Journal of Financial Econometrics*, 8:29–56.
21. Clemen, R.T. (1989). Combining Forecasts: A Review and Annotated Bibliography. *International Journal of Forecasting*, 5:559–581.
22. Clements, M.P.; Galvão, A.B.; Kim, J.H. (2008). Quantile Forecasts of Daily Exchange Rate Returns from Forecasts of Realized Volatility. *Journal of Empirical Finance*, 15:729–750.
23. Corsi, F. (2004). A Simple Long Memory Model of Realized Volatility. *Mimeo*, University of Southern Switzerland.
24. Corsi, F. (2009). A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7:174–196.
25. Diebold, F.; Lopez, J. (1996). Forecast Evaluation and Combination. In *Handbook of Statistics*, Vol. 14, G.S. Maddala, C.R. Rao (eds.), North-Holland, Amsterdam.
26. Diebold, F.; Mariano, R. (1995). Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13:253–263.
27. Donaldson, R.G.; Kamstra, M. (1996). Forecast Combining with Neural Networks. *Journal of Forecasting*, 15:49–61.
28. Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variances of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50:987–1008.
29. Forsberg, L.; Ghysels, E. (2007). Why Do Absolute Returns Predict Volatility So Well? *Journal of Financial Econometrics*, 5:31–67.
30. Ghysels, E.; Rubia, A.; Valkanov, R. (2009). Multi-Period Forecasts of Volatility: Direct, Iterated, and Mixed-Data Approaches. *Working paper*, UNC and UCSD.
31. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2004). The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression Models. *Working paper*, UNC and UCLA.
32. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2006). Predicting Volatility: Getting the Most Out of Return Data Sampled at Different Frequencies. *Journal of Econometrics*, 131:59–95.
33. Ghysels, E.; Sinko, A.; Valkanov, R. (2007). MIDAS Regressions: Further Results and New Directions. *Econometric Reviews*, 26:53–90.
34. Ghysels, E.; Sohn, B. (2009). Which Power Variation Predicts Volatility Well? *Journal of Empirical Finance*, 16:686–700.
35. Ghysels, E.; Valkanov, R. (2012). Forecasting Volatility with MIDAS. In *Handbook of Volatility Models and Their Applications*, Ch. 1, L. Bauwens, C. Hafner and S. Laurent (eds.), Wiley, New Jersey, 383–402.
36. Giot, P.; Laurent, S.; Petitjean, M. (2010). Trading Activity, Realized Volatility and Jumps. *Journal of Empirical Finance*, 17:168–175.

37. Granger, C.W.J.; Newbold, P. (1976). Forecasting Transformed Series. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 38:189–203.
38. Hansen, P.R.; Large, J.; Lunde, A. (2008). Moving Average-Based Estimators of Integrated Variance. *Econometric Reviews*, 27:79–111.
39. Hansen, P.R.; Lunde, A. (2006). Realized Variance and Market Microstructure Noise. *Journal of Business and Economic Statistics*, 24:127–161.
40. Harvey, D.; Leybourne, S.; Newbold, P. (1997). Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors. *International Journal of Forecasting*, 13:281–291.
41. Hendry, D.F.; Clements, M.P. (2004). Pooling of Forecasts. *The Econometrics Journal*, 7:1–31.
42. Huang, X.; Tauchen, G. (2005). The Relative Contribution of Jumps to Total Price Variance. *Journal of Financial Econometrics*, 3:456–499.
43. Koopman, S.J.; Jungbacker, B.; Hol, E. (2005). Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index Using Historical, Realised and Implied Volatility Measurements. *Journal of Empirical Finance*, 12:445–475.
44. Martens, M.; van Dijk, D.; Pooter, M. (2009). Forecasting S&P 500 Volatility: Long Memory, Level Shifts, Leverage Effects, Day-of-the-week Seasonality, and Macroeconomic Announcements. *International Journal of Forecasting*, 25:282–303.
45. McAleer, M.; Medeiros, M.C. (2008). A Multiple Regime Smooth Transition Heterogeneous Autoregressive Model for Long Memory and Asymmetries. *Journal of Econometrics*, 147:104–119.
46. Müller, U.A.; Dacorogna, M.M.; Davé, R.D.; Olsen, R.B.; Pictet, O.V.; Weizsäcker, J.v. (1997). Volatilities of Different Time Resolutions-Analyzing the Dynamics of Market Components. *Journal of Empirical Finance*, 4:213–239.
47. Patton, A. (2011). Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies. *Journal of Econometrics*, 160:246–256.
48. Patton, A.; Sheppard, K. (2009). Optimal Combinations of Realised Volatility Estimators. *International Journal of Forecasting*, 25:218–238.
49. Pong, S.E.; Shackleton, M.B.; Taylor, S.J.; Xu, X. (2004). Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models. *Journal of Banking and Finance*, 28:2541–2563.
50. Scharth, M.; Medeiros, M.C. (2009). Asymmetric Effects and Long Memory in the Volatility of Dow Jones Stocks. *International Journal of Forecasting*, 25:304–327.
51. Taylor, S.J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. New York: Wiley.
52. Timmermann, A. (2006). Forecast Combinations. In *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 1, G. Elliott, C.W.J. Granger, A. Timmermann (eds.), Elsevier, Amsterdam.

3.6 Appendix A: Detailed Empirical Results

In this appendix, we report detailed forecasting results pertaining to our empirical study for the IBOVESPA returns. To organize the exposition of our empirical findings, we present the results according to the response variables in the regressions in the next three subsections.

A.1 Modeling Realized Variance – RV

We start with the results for the out-of-sample forecasts of the realized variance, $RV_{t,t+k}$. The first panel of Table 3.2 in Appendix B presents the forecasting results of the MIDAS- RV models. For each model (with different regressors) the table reports the MSE, and the p -values of the modified DM test of equal forecast accuracy (RV is the benchmark regressor). Regarding the results, we note that BPV as regressor produces the best forecasts in terms of MSE, for almost all forecasting horizons (from one week to four weeks). In general, the second best results are obtained by using the continuous (C) part of the realized variance as regressor. For the daily horizon, the MIDAS- RV specification with RPV^2 as regressor presents the best performance. In particular, the transformation of RPV to the same scale as RV improves considerably the forecasting ability of the predictor. Using the continuous part and jump part of RV as separate regressors, i.e., CJ , the results in terms of MSE are similar to the ones obtained by the use of RV as regressor. However, we observe that, for all horizons, the forecasts produced by using BPV , C , CJ , and RPV^2 as regressors are not statistically different from the ones generated by RV .

The forecasting results of the HAR- RV models are presented in the first panel of Table 3.3 in Appendix B. Similar to Table 3.2 for the MIDAS- RV models, Table 3.3 reports for each HAR- RV model the out-of-sample MSE and the p -values of the modified DM test. Once again, the use of BPV as regressor provides the best forecasts in terms of MSE, for the horizons of one week to four weeks. For almost all horizons, the second best forecasts are provided by the continuous (C) component as regressor. As in the MIDAS- RV case, the best forecasting performance, for the daily horizon, is obtained by using RPV^2 as regressor. The HAR- RV specification with CJ as regressors produces the worst results in terms of MSE; nevertheless, comparing with the specification with RV as regressor, there is a significant difference in forecast accuracy only

for the daily horizon. When BPV , C , and RPV^2 are used as regressors, we do not observe significant differences in forecast accuracy relative to RV as regressor. These results, involving the reported regressors, are also valid for the MIDAS+HAR- RV forecast combinations presented in the first panel of Table 3.4 in Appendix B.

Besides investigating the best predictors of future volatility, we are able to evaluate differences in forecast accuracy between the MIDAS- RV and HAR- RV models as well as between the MIDAS+HAR- RV forecast combinations and the individual models. Considering the MSEs reported in Tables 3.2 to 3.4, the overall results indicate that the MIDAS- RV models present the best forecasting performance. In addition, we use the modified DM test to assess significant differences in forecast accuracy. Firstly, the first panel of Table 3.5 in Appendix B reports the p -values of the modified DM test for comparisons between MIDAS- RV and HAR- RV models. From the table, we observe significant differences in forecast accuracy, involving BPV and RPV^2 as regressors, for the horizons of two, three and four weeks. In particular, for these horizons, the MIDAS- RV - BPV and MIDAS- RV - RPV^2 models produce the best forecasts. On the other hand, the forecasting performance of the MIDAS- RV and HAR- RV models is statistically equivalent for the use of RV , C and CJ as regressors.

Secondly, Table 3.6 (first panel) in Appendix B presents the p -values of the modified DM test for comparisons between MIDAS+HAR- RV forecast combinations and HAR- RV models. Table 3.6 shows that the forecasts involving BPV and RPV^2 as regressors are statistically different for the horizons of two, three and four weeks. For these horizons and regressors, the MIDAS+HAR- RV forecast combinations present the best performance. Regarding the other regressors, the MIDAS+HAR- RV forecast combinations and the HAR- RV forecasts are not statistically different.

Lastly, Table 3.7 (first panel) in Appendix B reports the p -values of the modified DM test for comparisons between MIDAS+HAR- RV forecast combinations and MIDAS- RV models. We can see from the table that the forecasts based on RPV^2 as regressor are statistically different at horizons of three and four weeks. The MIDAS- RV - RPV^2 model provides the most accurate forecasts for these horizons. For the other regressors, the MIDAS+HAR- RV forecast combinations and the MIDAS- RV forecasts are not statistically different.

A.2 Modeling Realized Standard Deviation – $RV^{1/2}$

We also have forecasting results for the realized variance in standard deviation form, $RV_{t,t+k}^{1/2}$. In Table 3.2 (second panel) in Appendix B, we present the out-of-sample results for the MIDAS- $RV^{1/2}$ models. We can observe that $BPV^{1/2}$ as regressor generates the best forecasts in terms of MSE, for the horizons of two, three and four weeks. For these forecast horizons, the continuous component, $C^{1/2}$, as regressor produces the second best forecasts. For the daily horizon, the best forecasting performance is obtained by the use of RPV as regressor. Lastly, the best result in MSE terms, for the weekly horizon, is provided by the continuous and jump components as separate regressors, $(CJ)^{1/2}$. However, comparing the forecasts based on the above-mentioned regressors with the forecasts based on $RV^{1/2}$, we do not observe significant differences in forecast accuracy, for all horizons. The same results are valid for the HAR- $RV^{1/2}$ models presented in Table 3.3 (second panel) in Appendix B, and for the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations reported in the second panel of Table 3.4 in Appendix B.

In addition, from Table 3.2 we can compare the forecasting accuracy of the MIDAS- $RV^{1/2}$ regressions with that of the MIDAS- RV regressions. Considering the MSEs, we note that the square root transformation results in a better forecasting performance of the MIDAS- $RV^{1/2}$ - $RV^{1/2}$ model relative to the MIDAS- RV - RV model, for almost all horizons. On the other hand, this is not observed for the other MIDAS- $RV^{1/2}$ models. Using the modified DM test, we only find significant differences in forecast accuracy for the MIDAS- $RV^{1/2}$ - $BPV^{1/2}$ model (daily and weekly horizons) and for the MIDAS- $RV^{1/2}$ - $C^{1/2}$ model (daily horizon) when compared with their MIDAS- RV counterparts. For these forecast horizons, the MIDAS- $RV^{1/2}$ models provide the least accurate forecasts. The same type of analysis can be done from Table 3.3, for comparisons between the HAR- $RV^{1/2}$ and HAR- RV regressions. Table 3.3 shows that the HAR- $RV^{1/2}$ - $RV^{1/2}$ and HAR- $RV^{1/2}$ - $(CJ)^{1/2}$ models produce better forecasts in terms of MSE than do the HAR- RV - RV and HAR- RV - CJ models, for almost all horizons. Nonetheless, we do not observe the same improvement in terms of MSE for the other HAR- $RV^{1/2}$ models. Also, we only find significant differences in forecasting performance for the HAR- $RV^{1/2}$ - $RV^{1/2}$ and HAR- $RV^{1/2}$ - $(CJ)^{1/2}$ models. The former significantly outperforms the HAR- RV - RV model at the three weeks horizon, and the latter significantly outperforms the HAR- RV - CJ model at the

one day and two weeks horizons.

Based on the forecasting results reported in Table 3.4, we compare the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations with the MIDAS+HAR- RV ones. We can see from the table that the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations involving $RV^{1/2}$, $(CJ)^{1/2}$, and RPV as regressors present the smallest MSEs for almost all horizons. For the other MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations, the square root transformation is not beneficial. Furthermore, there is a significant difference in forecast accuracy only for the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ - $RV^{1/2}$ combination (three weeks horizon) when compared with the MIDAS+HAR- RV - RV combination. In this case, the former presents the best performance.

Finally, we compare the forecasting performance of the MIDAS- $RV^{1/2}$ and HAR- $RV^{1/2}$ models, as well as the performance of the MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ forecast combinations with the individual models. As can be seen from Tables 3.2 to 3.4, the three approaches provide similar forecasts in terms of MSE. Additionally, Tables 3.5 to 3.7 (second panel) in Appendix B report the p -values of the modified DM test for these direct comparisons. Regarding the results, we do not observe significant differences in forecast accuracy in any of the direct comparisons.

A.3 Modeling Realized Variance in log form – $\ln RV$

In this subsection we report forecasting results for the realized variance in log form, $\ln RV_{t,t+k}$. The out-of-sample results for the MIDAS- $\ln RV$ models are presented in the third panel of Table 3.2 in Appendix B. We can see from the table that $\ln RPV$ as regressor generates the best forecasts in terms of MSE, for all forecasting horizons except for the three weeks one. For the three weeks horizon, the best performance is obtained by using $\ln BPV$ as regressor. Using the continuous component, $\ln C$, as regressor, the results in terms of MSE are similar to the ones obtained by the use of $\ln RV$ as regressor, for most horizons (from two weeks to four weeks). In particular, the MIDAS- $\ln RV$ specification with $\ln(CJ)$ as regressors produces the worst forecasts, for the horizons of two, three and four weeks. Nonetheless, we only observe significant differences in forecast accuracy for the MIDAS- $\ln RV$ - $\ln RPV$ model (four weeks horizon) and for the MIDAS- $\ln RV$ - $\ln(CJ)$ model (daily horizon) when compared with the MIDAS- $\ln RV$ - $\ln RV$ model. For these forecasting horizons, the first one outperforms the benchmark model, and the

second one is outperformed by the benchmark.

The third panel of Table 3.3 in Appendix B reports the results, in terms of forecast accuracy, for the HAR- $\ln RV$ models. Table 3.3 shows that $\ln RPV$ as regressor produces the best forecasts in terms of MSE, for most horizons (one day, one week, and two weeks). For the horizons of three and four weeks, the use of $\ln BPV$ as regressor generates the best forecasts. Considering the MSEs, the use of $\ln RV$, and $\ln C$ as regressors generates similar results for most horizons. The HAR- $\ln RV$ - $\ln(CJ)$ model provides the worst forecasts for almost all horizons; however, comparing with the ones based on $\ln RV$ as regressor, there is a significant difference in terms of accuracy only for the daily horizon. When $\ln BPV$, $\ln C$, and $\ln RPV$ are used as regressors, we do not observe significant differences in forecasting performance relative to $\ln RV$ as regressor. These results, involving the aforementioned regressors, are also valid for the MIDAS+HAR- $\ln RV$ forecast combinations presented in the third panel of Table 3.4 in Appendix B.

We also evaluate whether superior forecasts are obtained by modeling the realized variance in log form. From Table 3.2 we are able to compare the forecasting performance of the MIDAS- $\ln RV$ and MIDAS- RV models. We can observe that, for almost all horizons, the MIDAS- $\ln RV$ - $\ln RV$ and MIDAS- $\ln RV$ - $\ln RPV$ models perform better than the MIDAS- RV - RV and MIDAS- RV - RPV^2 models. Nonetheless, this superior performance is not observed for the other MIDAS- $\ln RV$ models. In particular, for the horizons of three and four weeks, the MIDAS- $\ln RV$ - $\ln RPV$ model provides significantly better forecasts than does the MIDAS- RV - RPV^2 model. Furthermore, for the daily horizon, we find significant differences in forecast accuracy for the MIDAS- $\ln RV$ - $\ln BPV$ and MIDAS- $\ln RV$ - $\ln C$ models when compared with their MIDAS- RV counterparts. For this horizon, the MIDAS- $\ln RV$ models provide the least accurate forecasts.

Moreover, from Table 3.3 we can compare the forecasting accuracy of the HAR- $\ln RV$ and HAR- RV models. Table 3.3 shows that, for almost all horizons, the HAR- $\ln RV$ specifications with $\ln RV$, $\ln(CJ)$, and $\ln RPV$ as regressors produce the best forecasts in MSE terms. Further, the HAR- $\ln RV$ - $\ln RV$ and HAR- $\ln RV$ - $\ln RPV$ models generate significantly better forecasts than do the HAR- RV - RV and HAR- RV - RPV^2 models. The first one has the best performance for the horizons of three and four weeks, and the second one for most horizons (from two weeks to four weeks). We also find significant differences in forecast accuracy for the HAR- $\ln RV$ -

$\ln BPV$ and HAR- $\ln RV$ - $\ln C$ models in comparison with the HAR- RV - BPV and HAR- RV - C models. The HAR- $\ln RV$ models have the worst performance for the daily horizon and the best performance for the four weeks horizon. Similar results are found for forecasts involving the above-mentioned regressors when we compare the MIDAS+HAR- $\ln RV$ and MIDAS+HAR- RV forecast combinations, as can be observed in Table 3.4.

Finally, we explore differences in forecasting performance between the MIDAS- $\ln RV$ and HAR- $\ln RV$ models as well as between the MIDAS+HAR- $\ln RV$ forecast combinations and the individual models. As can be seen from Tables 3.2 to 3.4, the overall results indicate that the HAR- $\ln RV$ models generate the best forecasts in terms of MSE. However, from the results of the modified DM test, reported in the third panel of Tables 3.5 to 3.7 in Appendix B, we do not observe significant differences in forecast accuracy in any of the direct comparisons.

3.7 Appendix B: Tables

Table 3.1: Summary statistics for daily IBOVESPA measures.

| | Mean | Std. Dev. | Skewness | Ex. Kurtosis | $Q(10)$ |
|-----------------|------------------------|------------------------|----------|--------------|------------------|
| RV_t | 0.040×10^{-2} | 0.077×10^{-2} | 7.783 | 86.155 | 3737.931 (0.000) |
| BPV_t | 0.027×10^{-2} | 0.052×10^{-2} | 8.291 | 89.983 | 3532.596 (0.000) |
| C_t | 0.033×10^{-2} | 0.070×10^{-2} | 9.680 | 127.290 | 2864.703 (0.000) |
| J_t | 0.071×10^{-3} | 0.028×10^{-2} | 7.357 | 69.313 | 381.251 (0.000) |
| RPV_t^2 | 0.029×10^{-2} | 0.054×10^{-2} | 7.514 | 74.804 | 4541.887 (0.000) |
| $RV_t^{1/2}$ | 0.017 | 0.010 | 3.317 | 16.870 | 4860.045 (0.000) |
| $BPV_t^{1/2}$ | 0.014 | 0.008 | 3.613 | 20.465 | 4669.569 (0.000) |
| $C_t^{1/2}$ | 0.016 | 0.009 | 3.891 | 24.563 | 4121.698 (0.000) |
| $J_t^{1/2}$ | 0.003 | 0.008 | 3.241 | 12.622 | 186.126 (0.000) |
| RPV_t | 0.015 | 0.008 | 3.394 | 17.566 | 5735.040 (0.000) |
| $\ln RV_t$ | -8.369 | 0.911 | 0.757 | 1.319 | 3997.618 (0.000) |
| $\ln BPV_t$ | -8.726 | 0.870 | 0.765 | 1.603 | 3709.905 (0.000) |
| $\ln C_t$ | -8.549 | 0.888 | 0.754 | 1.608 | 3334.829 (0.000) |
| $\ln (J_t + 1)$ | 0.071×10^{-3} | 0.028×10^{-2} | 7.350 | 69.172 | 381.285 (0.000) |
| $\ln RPV_t$ | -4.313 | 0.428 | 0.813 | 1.623 | 4567.593 (0.000) |

Note: The column labeled $Q(10)$ reports the Ljung-Box test statistic for up to tenth order serial correlation with the p -value in parentheses. The daily series for the IBOVESPA are constructed from 15-minute returns spanning the period from May 2004 through October 2009, for a total of 1330 daily observations. RV_t denotes realized variance, C_t is the continuous part, and J_t is the jump part of RV_t as separated by the jump test presented in Subsection 3.2.1. The significance level $\alpha = 0.001$ was used in the jump test. BPV_t denotes realized bipower variation, and RPV_t denotes realized power variation.

Table 3.2: Forecasting results: MIDAS regressions – out-of-sample MSE.

| MIDAS- RV - | | | | | | |
|---------------------|------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| Horizon | RV | BPV | C | CJ | RPV | RPV^2 |
| 1 day | 0.866 | 0.853 (0.834) | 0.844 (0.686) | 0.877 (0.861) | 1.255 (0.014) | 0.832 (0.528) |
| 1 week | 0.257 | 0.255 (0.956) | 0.283 (0.526) | 0.297 (0.433) | 0.655 (0.018) | 0.267 (0.818) |
| 2 weeks | 0.233 | 0.184 (0.483) | 0.203 (0.384) | 0.217 (0.419) | 0.652 (0.024) | 0.217 (0.735) |
| 3 weeks | 0.212 | 0.142 (0.316) | 0.156 (0.180) | 0.221 (0.684) | 0.628 (0.033) | 0.180 (0.429) |
| 4 weeks | 0.180 | 0.120 (0.279) | 0.127 (0.219) | 0.242 (0.413) | 0.573 (0.059) | 0.148 (0.300) |
| MIDAS- $RV^{1/2}$ - | | | | | | |
| Horizon | $RV^{1/2}$ | $BPV^{1/2}$ | $C^{1/2}$ | $(CJ)^{1/2}$ | RPV | |
| 1 day | 0.870 | 0.892* (0.708) | 0.876* (0.907) | 0.845 (0.351) | 0.840 (0.593) | |
| 1 week | 0.253 | 0.270* (0.714) | 0.290 (0.302) | 0.248 (0.747) | 0.264 (0.751) | |
| 2 weeks | 0.222 | 0.194 (0.627) | 0.211 (0.689) | 0.245 (0.635) | 0.221 (0.982) | |
| 3 weeks | 0.194 | 0.144 (0.348) | 0.157 (0.250) | 0.239 (0.366) | 0.178 (0.521) | |
| 4 weeks | 0.162 | 0.118 (0.322) | 0.124 (0.283) | 0.218 (0.384) | 0.145 (0.402) | |
| MIDAS- $\ln RV$ - | | | | | | |
| Horizon | $\ln RV$ | $\ln BPV$ | $\ln C$ | $\ln(CJ)$ | $\ln RPV$ | |
| 1 day | 0.880 | 0.943* (0.136) | 0.931* (0.239) | 0.928 (0.083) | 0.861 (0.652) | |
| 1 week | 0.256 | 0.290 (0.292) | 0.306 (0.117) | 0.266 (0.724) | 0.255 (0.980) | |
| 2 weeks | 0.200 | 0.200 (0.985) | 0.213 (0.518) | 0.278 (0.259) | 0.195 (0.783) | |
| 3 weeks | 0.142 | 0.123 (0.356) | 0.135 (0.670) | 0.368 (0.238) | 0.125* (0.138) | |
| 4 weeks | 0.106 | 0.092 (0.324) | 0.098 (0.429) | 0.456 (0.277) | 0.090* (0.055) | |

Note: All the forecasts are out-of-sample and the smallest MSEs are in bold. In parentheses, the p -values of the modified Diebold-Mariano test (RV is the benchmark regressor). For the log and square root specifications, models with regressors that produce identical results are not reported to avoid duplication. Based on the modified Diebold-Mariano test, (*) stands for significant difference in forecast accuracy at the 10% level for comparisons between MIDAS- $RV^{1/2}$ and MIDAS- RV models as well as between MIDAS- $\ln RV$ and MIDAS- RV models.

Table 3.3: Forecasting results: HAR regressions – out-of-sample MSE.

| HAR- RV - | | | | | | |
|-------------------|------------|--------------------------|-------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| Horizon | RV | BPV | C | CJ | RPV | RPV^2 |
| 1 day | 0.827 | 0.826 (0.989) | 0.823 (0.951) | 0.986 (0.040) | 1.277 (0.002) | 0.812 (0.749) |
| 1 week | 0.263 | 0.246 (0.779) | 0.267 (0.917) | 0.285 (0.535) | 0.707 (0.009) | 0.265 (0.952) |
| 2 weeks | 0.237 | 0.198 (0.594) | 0.205 (0.395) | 0.306 (0.228) | 0.694 (0.023) | 0.236 (0.985) |
| 3 weeks | 0.223 | 0.154 (0.359) | 0.161 (0.161) | 0.372 (0.338) | 0.650 (0.036) | 0.199 (0.614) |
| 4 weeks | 0.190 | 0.130 (0.333) | 0.131 (0.185) | 0.430 (0.333) | 0.604 (0.069) | 0.166 (0.507) |
| HAR- $RV^{1/2}$ - | | | | | | |
| Horizon | $RV^{1/2}$ | $BPV^{1/2}$ | $C^{1/2}$ | $(CJ)^{1/2}$ | RPV | |
| 1 day | 0.873 | 0.863 (0.892) | 0.847 (0.682) | 0.845* (0.338) | 0.823 (0.378) | |
| 1 week | 0.254 | 0.263 (0.863) | 0.284 (0.426) | 0.251 (0.788) | 0.260 (0.868) | |
| 2 weeks | 0.225 | 0.198 (0.687) | 0.208 (0.611) | 0.213* (0.561) | 0.231 (0.893) | |
| 3 weeks | 0.204* | 0.145 (0.399) | 0.154 (0.273) | 0.196 (0.574) | 0.194 (0.744) | |
| 4 weeks | 0.176 | 0.118 (0.345) | 0.120 (0.283) | 0.189 (0.458) | 0.168 (0.680) | |
| HAR- $\ln RV$ - | | | | | | |
| Horizon | $\ln RV$ | $\ln BPV$ | $\ln C$ | $\ln (CJ)$ | $\ln RPV$ | |
| 1 day | 0.884 | 0.920* (0.455) | 0.910* (0.535) | 0.941 (0.080) | 0.831 (0.254) | |
| 1 week | 0.245 | 0.279 (0.332) | 0.302 (0.114) | 0.276 (0.186) | 0.233 (0.694) | |
| 2 weeks | 0.187 | 0.188 (0.973) | 0.203 (0.412) | 0.209 (0.287) | 0.179* (0.680) | |
| 3 weeks | 0.136* | 0.116 (0.345) | 0.128 (0.623) | 0.180 (0.225) | 0.122* (0.328) | |
| 4 weeks | 0.104* | 0.084* (0.282) | 0.090* (0.318) | 0.212 (0.265) | 0.094* (0.493) | |

Note: All the forecasts are out-of-sample and the smallest MSEs are in bold. In parentheses, the p -values of the modified Diebold-Mariano test (RV is the benchmark regressor). For the log and square root specifications, models with regressors that produce identical results are not reported to avoid duplication. Based on the modified Diebold-Mariano test, (*) stands for significant difference in forecast accuracy at the 10% level for comparisons between HAR- $RV^{1/2}$ and HAR- RV models as well as between HAR- $\ln RV$ and HAR- RV models.

Table 3.4: Forecasting results: MIDAS+HAR forecast combinations – out-of-sample MSE.

| MIDAS+HAR- RV - | | | | | | |
|-------------------------|------------|--------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Horizon | RV | BPV | C | CJ | RPV | RPV^2 |
| 1 day | 0.844 | 0.837 (0.915) | 0.831 (0.829) | 0.915 (0.072) | 1.261 (0.005) | 0.819 (0.624) |
| 1 week | 0.256 | 0.247 (0.879) | 0.272 (0.678) | 0.287 (0.463) | 0.677 (0.013) | 0.262 (0.875) |
| 2 weeks | 0.233 | 0.189 (0.539) | 0.203 (0.389) | 0.248 (0.464) | 0.671 (0.024) | 0.225 (0.862) |
| 3 weeks | 0.215 | 0.146 (0.335) | 0.157 (0.166) | 0.280 (0.404) | 0.636 (0.035) | 0.188 (0.523) |
| 4 weeks | 0.183 | 0.124 (0.303) | 0.128 (0.198) | 0.322 (0.356) | 0.585 (0.065) | 0.156 (0.400) |
| MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ - | | | | | | |
| Horizon | $RV^{1/2}$ | $BPV^{1/2}$ | $C^{1/2}$ | $(CJ)^{1/2}$ | RPV | |
| 1 day | 0.867 | 0.874 (0.913) | 0.858 (0.872) | 0.841 (0.333) | 0.841 (0.478) | 0.828 |
| 1 week | 0.250 | 0.264 (0.771) | 0.284 (0.348) | 0.245 (0.617) | 0.259 (0.803) | |
| 2 weeks | 0.221 | 0.194 (0.661) | 0.207 (0.641) | 0.226 (0.626) | 0.224 (0.941) | |
| 3 weeks | 0.197* | 0.143 (0.371) | 0.154 (0.250) | 0.214 (0.436) | 0.184 (0.645) | |
| 4 weeks | 0.167 | 0.116 (0.327) | 0.120 (0.273) | 0.200 (0.398) | 0.155 (0.529) | |
| MIDAS+HAR- $\ln RV$ - | | | | | | |
| Horizon | $\ln RV$ | $\ln BPV$ | $\ln C$ | $\ln (CJ)$ | $\ln RPV$ | |
| 1 day | 0.878 | 0.928* (0.254) | 0.917* (0.352) | 0.929 (0.074) | 0.842 (0.407) | |
| 1 week | 0.248 | 0.282 (0.299) | 0.301 (0.115) | 0.268 (0.412) | 0.242 (0.817) | |
| 2 weeks | 0.191 | 0.192 (0.974) | 0.206 (0.442) | 0.228 (0.296) | 0.184 (0.724) | |
| 3 weeks | 0.136* | 0.118 (0.389) | 0.129 (0.647) | 0.250 (0.221) | 0.121* (0.195) | |
| 4 weeks | 0.103* | 0.086* (0.293) | 0.092* (0.344) | 0.312 (0.272) | 0.089* (0.220) | |

Note: Forecast combinations of the MIDAS and HAR models. All the forecasts are out-of-sample and the smallest MSEs are in bold. In parentheses, the p -values of the modified Diebold-Mariano test (RV is the benchmark regressor). Based on the modified Diebold-Mariano test, (*) stands for significant difference in forecast accuracy at the 10% level for comparisons between MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ and MIDAS+HAR- RV forecast combinations as well as between MIDAS+HAR- $\ln RV$ and MIDAS+HAR- RV forecast combinations.

Table 3.5: MIDAS models versus HAR models: modified Diebold-Mariano test.

| MIDAS- RV vs HAR- RV | | | | | | |
|--------------------------------------|------------|-------------|-----------|--------------|-----------|---------|
| Horizon | RV | BPV | C | CJ | RPV | RPV^2 |
| 1 day | 0.358 | 0.332 | 0.347 | 0.204 | 0.526 | 0.477 |
| 1 week | 0.840 | 0.577 | 0.271 | 0.376 | 0.074 | 0.957 |
| 2 weeks | 0.747 | 0.091 | 0.666 | 0.111 | 0.297 | 0.088 |
| 3 weeks | 0.149 | 0.086 | 0.305 | 0.179 | 0.259 | 0.008 |
| 4 weeks | 0.113 | 0.055 | 0.273 | 0.230 | 0.312 | 0.003 |
| MIDAS- $RV^{1/2}$ vs HAR- $RV^{1/2}$ | | | | | | |
| Horizon | $RV^{1/2}$ | $BPV^{1/2}$ | $C^{1/2}$ | $(CJ)^{1/2}$ | RPV | |
| 1 day | 0.949 | 0.329 | 0.340 | 0.998 | 0.603 | |
| 1 week | 0.982 | 0.554 | 0.612 | 0.928 | 0.851 | |
| 2 weeks | 0.874 | 0.720 | 0.866 | 0.264 | 0.486 | |
| 3 weeks | 0.662 | 0.853 | 0.803 | 0.251 | 0.295 | |
| 4 weeks | 0.584 | 0.916 | 0.570 | 0.169 | 0.300 | |
| MIDAS- $\ln RV$ vs HAR- $\ln RV$ | | | | | | |
| Horizon | $\ln RV$ | $\ln BPV$ | $\ln C$ | $\ln(CJ)$ | $\ln RPV$ | |
| 1 day | 0.898 | 0.367 | 0.447 | 0.761 | 0.409 | |
| 1 week | 0.521 | 0.367 | 0.716 | 0.556 | 0.315 | |
| 2 weeks | 0.328 | 0.284 | 0.363 | 0.119 | 0.286 | |
| 3 weeks | 0.608 | 0.362 | 0.348 | 0.221 | 0.853 | |
| 4 weeks | 0.825 | 0.175 | 0.192 | 0.262 | 0.797 | |

Note: The table shows the p -values of the modified Diebold-Mariano test of equal forecast accuracy. We compare the MIDAS and HAR models (involving the same regressors) in terms of forecast accuracy.

Table 3.6: MIDAS+HAR forecast combinations versus HAR models: modified Diebold-Mariano test.

| MIDAS+HAR- RV vs HAR- RV | | | | | | |
|--|------------|-------------|-----------|--------------|-----------|---------|
| Horizon | RV | BPV | C | CJ | RPV | RPV^2 |
| 1 day | 0.431 | 0.452 | 0.490 | 0.134 | 0.361 | 0.598 |
| 1 week | 0.618 | 0.852 | 0.498 | 0.807 | 0.109 | 0.763 |
| 2 weeks | 0.565 | 0.057 | 0.365 | 0.144 | 0.253 | 0.066 |
| 3 weeks | 0.128 | 0.052 | 0.158 | 0.263 | 0.182 | 0.006 |
| 4 weeks | 0.106 | 0.054 | 0.142 | 0.286 | 0.255 | 0.001 |
| MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ vs HAR- $RV^{1/2}$ | | | | | | |
| Horizon | $RV^{1/2}$ | $BPV^{1/2}$ | $C^{1/2}$ | $(CJ)^{1/2}$ | RPV | |
| 1 day | 0.797 | 0.456 | 0.481 | 0.814 | 0.751 | |
| 1 week | 0.765 | 0.901 | 0.999 | 0.708 | 0.877 | |
| 2 weeks | 0.712 | 0.465 | 0.878 | 0.317 | 0.364 | |
| 3 weeks | 0.564 | 0.512 | 0.907 | 0.246 | 0.243 | |
| 4 weeks | 0.509 | 0.546 | 0.901 | 0.268 | 0.272 | |
| MIDAS+HAR- $\ln RV$ vs HAR- $\ln RV$ | | | | | | |
| Horizon | $\ln RV$ | $\ln BPV$ | $\ln C$ | $\ln(CJ)$ | $\ln RPV$ | |
| 1 day | 0.743 | 0.502 | 0.621 | 0.562 | 0.527 | |
| 1 week | 0.738 | 0.565 | 0.949 | 0.413 | 0.425 | |
| 2 weeks | 0.459 | 0.453 | 0.619 | 0.189 | 0.366 | |
| 3 weeks | 0.933 | 0.667 | 0.672 | 0.295 | 0.803 | |
| 4 weeks | 0.751 | 0.456 | 0.465 | 0.315 | 0.613 | |

Note: The table shows the p -values of the modified Diebold-Mariano test of equal forecast accuracy. We compare the forecast combinations of MIDAS and HAR models with the HAR models (involving the same regressors) in terms of forecast accuracy.

Table 3.7: MIDAS+HAR forecast combinations versus MIDAS models: modified Diebold-Mariano test.

| MIDAS+HAR- RV vs MIDAS- RV | | | | | | |
|--|------------|-------------|-----------|--------------|-----------|---------|
| Horizon | RV | BPV | C | CJ | RPV | RPV^2 |
| 1 day | 0.295 | 0.236 | 0.233 | 0.324 | 0.727 | 0.373 |
| 1 week | 0.881 | 0.359 | 0.131 | 0.108 | 0.223 | 0.677 |
| 2 weeks | 0.977 | 0.161 | 0.903 | 0.246 | 0.376 | 0.128 |
| 3 weeks | 0.300 | 0.174 | 0.621 | 0.289 | 0.371 | 0.015 |
| 4 weeks | 0.259 | 0.158 | 0.609 | 0.294 | 0.384 | 0.009 |
| MIDAS+HAR- $RV^{1/2}$ vs MIDAS- $RV^{1/2}$ | | | | | | |
| Horizon | $RV^{1/2}$ | $BPV^{1/2}$ | $C^{1/2}$ | $(CJ)^{1/2}$ | RPV | |
| 1 day | 0.897 | 0.231 | 0.231 | 0.810 | 0.474 | |
| 1 week | 0.775 | 0.306 | 0.299 | 0.821 | 0.592 | |
| 2 weeks | 0.918 | 0.986 | 0.628 | 0.235 | 0.672 | |
| 3 weeks | 0.790 | 0.775 | 0.540 | 0.227 | 0.368 | |
| 4 weeks | 0.681 | 0.673 | 0.317 | 0.194 | 0.339 | |
| MIDAS+HAR- $\ln RV$ vs MIDAS- $\ln RV$ | | | | | | |
| Horizon | $\ln RV$ | $\ln BPV$ | $\ln C$ | $\ln(CJ)$ | $\ln RPV$ | |
| 1 day | 0.943 | 0.261 | 0.307 | 0.999 | 0.311 | |
| 1 week | 0.352 | 0.231 | 0.430 | 0.757 | 0.235 | |
| 2 weeks | 0.177 | 0.178 | 0.198 | 0.181 | 0.163 | |
| 3 weeks | 0.310 | 0.180 | 0.193 | 0.301 | 0.528 | |
| 4 weeks | 0.435 | 0.107 | 0.115 | 0.318 | 0.889 | |

Note: The table shows the p -values of the modified Diebold-Mariano test of equal forecast accuracy. We compare the forecast combinations of MIDAS and HAR models with the MIDAS models (involving the same regressors) in terms of forecast accuracy.

4 Modelos de Regressão Não-Lineares MIDAS: Um Estudo Comparativo Empírico em Previsão

DOUGLAS G. SANTOS¹ E FLÁVIO A. ZIEGELMANN²

Dezembro, 2013

Resumo. Neste artigo, busca-se comparar empiricamente os modelos MS-MIDAS (*Markov-Switching* MIDAS) e STMIDAS (*Smooth Transition* MIDAS) em termos de previsão. Para tanto, realiza-se um exercício de previsão em tempo real em que são geradas previsões fora da amostra para o crescimento do PIB trimestral dos Estados Unidos com o uso de indicadores financeiros mensais. Neste exercício, também são considerados modelos lineares MIDAS e outros modelos de previsão (lineares e não-lineares) que incluem informação dos indicadores (via agregação temporal das observações mensais) para fins comparativos de desempenho preditivo. A partir dos resultados do estudo empírico, observa-se que, de modo geral, os modelos MS-MIDAS fornecem previsões mais acuradas que os modelos STMIDAS.

Palavras-chave: Regressões MIDAS; Modelos Não-Lineares; Previsão; Atividade Econômica; Indicadores Financeiros.

Códigos JEL: C22; C53; E44.

¹Programa de Pós-Graduação em Economia (UFRGS), Porto Alegre, RS 90040-000, Brasil, e-mail: dgomess@hotmail.com.

²Departamento de Estatística e Programas de Pós-Graduação em Economia e Administração (UFRGS), Porto Alegre, RS 91509-900, Brasil, e-mail: flavioaz@mat.ufrgs.br.

4.1 Introdução

A disponibilidade de dados em séries temporais amostrados em freqüências distintas se apresenta como um problema adicional para aqueles interessados em calcular previsões. Por exemplo, medidas de atividade econômica que recebem especial atenção por parte dos agentes econômicos, como o Produto Interno Bruto (PIB) e a produção industrial, são disponibilizadas nas freqüências trimestral e mensal, respectivamente. Por outro lado, existe uma gama de indicadores macroeconômicos observados mensalmente e diversas variáveis financeiras observadas diariamente com potencial poder preditivo para estas medidas. Uma questão relevante é que a maior parte dos modelos de previsão não relaciona variáveis observadas em freqüências distintas. Desta forma, um procedimento usual é o de agregar temporalmente as observações da variável de maior freqüência (por exemplo, por meio de uma média simples) antes de estimar o modelo de previsão. Todavia, procedimentos simples de conversão dos dados para a mesma freqüência podem levar ao descarte de informações relevantes.

Modelos de regressão que relacionam diretamente variáveis em freqüências distintas são uma alternativa atraente pois permitem a utilização dos dados nas freqüências em que são disponibilizados. Em particular, os modelos de regressão MIDAS (*Mixed Data Sampling*) de Ghysels et al. (2004) possibilitam que se regreda diretamente uma variável de baixa freqüência sobre uma variável de alta freqüência. Isto é possível graças à especificação de um esquema de ponderação para os dados da variável de maior freqüência amostral.

A abordagem de regressão MIDAS tem sido aplicada com sucesso na previsão de séries temporais macroeconômicas trimestrais com a utilização de dados mensais e diários. Clements e Galvão (2008), por exemplo, utilizam indicadores coincidentes mensais para obterem previsões para o crescimento do PIB trimestral dos Estados Unidos (EUA). Neste estudo, os autores reportam ganhos substanciais em termos de acurácia preditiva ao utilizarem informações dos indicadores mensais disponíveis para os meses do trimestre de previsão. Clements e Galvão (2009) e Kuzin et al. (2013) são exemplos adicionais de estudos que visam prever variáveis macroeconômicas trimestrais (o crescimento do PIB dos EUA e de seis países industrializados, respectivamente) a partir do uso de indicadores mensais como preditores. Ambos os estudos sugerem que a utilização de informações dos indicadores mensais disponíveis para o trimestre corrente leva a previsões

mais acuradas de crescimento do produto. Adicionalmente, Andreou et al. (2013) calculam previsões para o crescimento do PIB trimestral dos EUA a partir de fatores diários que são extraídos de um número expressivo de indicadores financeiros diários. Os autores reportam ganhos em termos de acurácia preditiva oriundos da inclusão de informações financeiras diárias nos modelos MIDAS.

Nos últimos anos, diversas extensões têm sido propostas para o modelo linear MIDAS básico. Em se tratando de modelos não-lineares, por exemplo, Galvão (2013) propôs um modelo MIDAS que possibilita captar mudanças na capacidade preditiva do regressor observado em alta frequência por meio de uma função de transição suave que depende de uma variável de transição observável. Neste estudo, o modelo STMIDAS (*Smooth Transition* MIDAS) é utilizado no cálculo de previsões para o crescimento do PIB trimestral dos EUA e do Reino Unido com o uso de indicadores financeiros semanais e diários como preditores. Galvão (2013) adota três tipos de indicadores: *spreads* entre taxas de juros de longo e curto prazo, taxas de juros de curto prazo e retornos de índices de ações. Em relação ao *spread*, por exemplo, existem evidências empíricas que apontam que este indicador possui poder preditivo apenas para períodos de crescimento econômico baixo ou negativo (ver Galbraith e Tkacz, 2000). A partir dos resultados de previsão para o crescimento do PIB em tempo real com o uso de variáveis financeiras, Galvão (2013) sugere que ganhos estatisticamente significativos em previsão sobre um modelo de regressão linear são mais prováveis de ocorrer quando as previsões são calculadas por meio dos modelos STMIDAS do que quando são computadas a partir dos modelos lineares MIDAS.

Guérin e Marcellino (2013) propõem uma abordagem alternativa para incorporar mudança de regime nos parâmetros do modelo de regressão MIDAS, introduzindo o modelo MS-MIDAS (*Markov-Switching* MIDAS). O modelo MS-MIDAS permite captar mudanças de regime em quase todos os parâmetros do modelo MIDAS básico, sendo neste sentido mais geral que o modelo STMIDAS, em que é possível captar mudanças de regime apenas no parâmetro de inclinação. Em Guérin e Marcellino (2013), o modelo MS-MIDAS é utilizado para gerar previsões para o crescimento do PIB trimestral dos EUA e do Reino Unido com o uso de indicadores mensais. Adicionalmente, os autores computam previsões para o crescimento da produção industrial mensal dos EUA a partir de indicadores semanais. Os indicadores financeiros considerados no estudo

contemplam: *spreads* entre taxas de juros de longo e curto prazo, retornos de índices de ações e taxas de juros básicas das economias dos EUA e do Reino Unido. Ainda, dois indicadores mensais adicionais são adotados na aplicação para o PIB dos EUA: produção industrial e uma pesquisa sobre nível de atividade econômica. Os resultados das aplicações empíricas indicam que, de forma geral, os modelos MS-MIDAS geram previsões mais acuradas que os modelos lineares MIDAS.

Uma prática freqüente na literatura sobre previsão de variáveis macroeconômicas (tal como o crescimento do PIB) com o uso de indicadores é a de utilizar dados disponíveis em tempo real. A preferência em torno do uso de dados em tempo real ao invés de dados finais (revisados) em exercícios de previsão fora da amostra está relacionada a evidências empíricas que sugerem que a utilização de dados finais pode levar a resultados exagerados no que diz respeito ao poder preditivo dos indicadores (ver, por exemplo, Diebold e Rudebusch, 1991; Orphanides e van Norden, 2005 e Clements e Galvão, 2008). Neste contexto, há preferência em calcular as previsões fora da amostra com o uso das séries temporais originalmente disponíveis ao público em cada origem de previsão. Isto explica em parte o elevado número de estudos com aplicações em dados da economia norte-americana, haja vista existirem para esta economia bases de dados em tempo real com séries históricas extensas e com acesso facilitado.

No presente artigo, objetiva-se comparar empiricamente os modelos MS-MIDAS e STMIDAS em termos de previsão. Dado que estes modelos foram propostos recentemente na literatura, visa-se contribuir fornecendo evidências empíricas acerca da capacidade preditiva relativa dos mesmos. Para tanto, realiza-se um exercício de previsão fora da amostra em que são utilizados dados em tempo real do PIB trimestral dos EUA.¹ Neste exercício, são geradas previsões para o crescimento do PIB trimestral com o uso de indicadores financeiros mensais, sendo os indicadores adotados na análise empírica semelhantes aos considerados nos estudos de Galvão (2013) e Guérin e Marcellino (2013). Em particular, são utilizados três indicadores financeiros: um *spread* entre taxas de juros de longo e curto prazo, retornos de um índice de ações e a taxa efetiva de juros dos *Federal Funds*. No exercício de previsão, também são considerados modelos lineares MIDAS e outros modelos de previsão (lineares e não-lineares) que incluem informação dos indicadores (via

¹A escolha em torno do uso de dados da economia norte-americana se deve, em parte, à existência de séries temporais extensas (mais adequadas para análises com modelos não-lineares).

agregação temporal das observações mensais) para fins comparativos de desempenho preditivo.

Em relação aos resultados do estudo empírico, observa-se que, de modo geral, os modelos MS-MIDAS fornecem previsões mais acuradas que os modelos STMIDAS. Adicionalmente, observam-se diferenças mais expressivas em acurácia preditiva entre os modelos da classe MIDAS e os demais modelos de previsão apenas nos resultados obtidos com os retornos do índice de ações. Neste caso, os modelos da classe MIDAS geram previsões notadamente mais acuradas quando são utilizados dados do indicador mensal disponíveis para os meses do trimestre de previsão.

O restante do artigo é estruturado da forma que segue: a Seção 4.2 revisa de forma breve a abordagem MIDAS, apresenta sucintamente os modelos que incluem um termo auto-regressivo e descreve os modelos não-lineares MS-MIDAS e STMIDAS, fornecendo informações sobre as especificações e os métodos de estimação; a Seção 4.3 contempla o estudo empírico comparativo, descreve os dados utilizados e a estrutura do exercício de previsão em tempo real, fornecendo detalhes adicionais sobre os modelos confrontados e os resultados de previsão. A Seção 4.4 conclui o artigo.

4.2 Modelos de Regressão MIDAS

Na primeira subseção, realiza-se uma breve revisão das principais características do modelo de regressão MIDAS. Na segunda subseção, são apresentadas duas especificações que incluem de maneira distinta um termo auto-regressivo no modelo MIDAS básico. Na terceira subseção, apresenta-se concisamente o modelo MS-MIDAS, as especificações consideradas e o método de estimação. Por fim, na quarta subseção, descreve-se sucintamente o modelo de regressão STMIDAS, algumas especificações adicionais e o método de estimação dos parâmetros.

4.2.1 Modelo MIDAS Básico

A abordagem de regressão MIDAS, proposta por Ghysels et al. (2004), permite o uso de dados amostrados em frequências distintas para as variáveis dependente e explicativas. Seguindo a notação de Clements e Galvão (2008), o modelo MIDAS básico univariado, especificado para previsão h -passos à frente, pode ser definido como

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 B(L^{1/m}; \boldsymbol{\theta}) x_{t-h}^{(m)} + \varepsilon_t, \quad (4.2.1)$$

onde $B(L^{1/m}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^K b(j; \boldsymbol{\theta}) L^{(j-1)/m}$ e $L^{s/m} x_{t-1}^{(m)} = x_{t-1-s/m}^{(m)}$. Salienta-se que t se refere à unidade de tempo da variável dependente y_t , enquanto que m se refere à unidade de tempo das variáveis em frequência mais alta $x_{t-h}^{(m)}$. Neste artigo, por exemplo, y é observada trimestralmente e $x^{(m)}$ mensalmente, logo $m = 3$.

No modelo MIDAS, os coeficientes (pesos) da defasagem distribuída $b(j; \boldsymbol{\theta})$ são parametrizados como uma função de $\boldsymbol{\theta}$ (um vetor de parâmetros de baixa dimensão), o que evita o problema de proliferação de parâmetros. Existem diversas formas de parametrizar $b(j; \boldsymbol{\theta})$. Por exemplo, pode-se utilizar uma função de ponderação definida em termos de somente dois parâmetros, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]$:

$$b(j; \boldsymbol{\theta}) = \frac{f(j, \theta_1, \theta_2)}{\sum_{j=1}^K f(j, \theta_1, \theta_2)}. \quad (4.2.2)$$

Duas especificações para $f(j, \boldsymbol{\theta})$ são frequentemente adotadas na literatura, Ghysels et al. (2005), Clements e Galvão (2008) e Andreou et al. (2013) usam funções polinomiais exponenciais,

$$f(j, \boldsymbol{\theta}) = \exp(\theta_1 j + \theta_2 j^2), \quad (4.2.3)$$

enquanto que Ghysels et al. (2007) e Galvão (2013) utilizam uma função beta:

$$f(j, \boldsymbol{\theta}) = \frac{(z)^{\theta_1-1} (1-z)^{\theta_2-1} \Gamma(\theta_1 + \theta_2)}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2)}; \quad z = j/(K+1). \quad (4.2.4)$$

Ambas as especificações são bastante flexíveis (mesmo dependendo de apenas dois parâmetros), podendo assumir diversos padrões para a distribuição dos pesos de agregação (para maiores detalhes sobre funções de ponderação, ver Ghysels et al., 2004, 2007). Tanto a função exponencial quanto a função beta, das expressões (4.2.3) e (4.2.4), serão utilizadas na aplicação empírica deste artigo.

Os parâmetros do modelo MIDAS são usualmente estimados por Mínimos Quadrados Não-Lineares (MQNL).² Adicionalmente, as previsões são computadas de forma direta, sem a necessidade de previsões para variáveis explicativas. Contudo, diferentemente da forma iterada de previsão, previsões diretas requerem que o modelo seja reestimado para cada horizonte de previsão distinto (discussões sobre as abordagens de previsão direta e iterada podem ser encontradas em Bhansali, 2002; Chevillon e Hendry, 2005; Marcellino et al., 2006; entre outros).

²Ver, por exemplo, Ghysels et al. (2004, 2006, 2007) e Clements e Galvão (2008, 2009).

4.2.2 Modelos Auto-Regressivos MIDAS

Modelos para previsão de variáveis macroeconômicas, tal como crescimento de produto agregado, freqüentemente incluem termos Auto-Regressivos (AR), por exemplo, como nos modelos ADL (*Autoregressive Distributed Lag*) de Stock e Watson (2003). Entretanto, como apontado em Ghysels et al. (2007), simplesmente incluir uma defasagem da variável dependente y_t no lado direito da regressão MIDAS em (4.2.1) geralmente não é apropriado. Resumidamente, os autores mostram que pode ocorrer uma resposta sazonal de y a $x^{(m)}$, mesmo que $x^{(m)}$ não apresente um padrão sazonal. Clements e Galvão (2008) sugerem uma solução ao problema, introduzindo dinâmica auto-regressiva em y_t como um fator comum. O modelo proposto, AR-MIDAS, tem a seguinte forma:

$$y_t = \beta_0 + \lambda y_{t-d} + \beta_1 B(L^{1/m}; \boldsymbol{\theta})(1 - \lambda L^d)x_{t-h}^{(m)} + \varepsilon_t. \quad (4.2.5)$$

Nesta especificação, quando o horizonte de previsão h é um número inteiro, $d = h$. Para horizontes de previsão que são frações da freqüência de y_t (serão abordados posteriormente), d será diferente de h .³

Andreou et al. (2013) descrevem uma especificação alternativa, chamada ADL-MIDAS, cuja simplicidade pode ser potencialmente benéfica em contextos de previsão fora da amostra. O modelo pode ser escrito como

$$y_t = \beta_0 + \lambda y_{t-d} + \beta_1 B(L^{1/m}; \boldsymbol{\theta})x_{t-h}^{(m)} + \varepsilon_t. \quad (4.2.6)$$

O modelo ADL-MIDAS generaliza o modelo ADL tradicional ao lidar com dados em freqüências distintas.

4.2.3 Modelos MIDAS com Mudança Markoviana

A idéia fundamental por trás dos modelos com mudança Markoviana é que os parâmetros do processo subjacente gerador dos dados dependem de uma variável latente discreta S_t , que representa um possível estado ou regime não-observável no instante t (ver Hamilton, 1989). Recentemente, Guérin e Marcellino (2013) introduziram mudança de regime em regressões MIDAS, propondo o modelo MS-MIDAS (*Markov-Switching* MIDAS) com a seguinte forma

$$y_t = \beta_0(S_t) + \beta_1(S_t)B(L^{1/m}; \boldsymbol{\theta})x_{t-h}^{(m)} + \varepsilon_t(S_t), \quad (4.2.7)$$

³Para detalhes sobre o modelo AR-MIDAS e sua estimação, ver Clements e Galvão (2008).

onde $\varepsilon_t|S_t \sim NID(0, \sigma^2(S_t))$. Adicionalmente, especificações que incluem um termo auto-regressivo também são consideradas pelos autores. O modelo MS-MIDAS baseado na proposta de Clements e Galvão (2008), equação (4.2.5), pode ser definido como

$$y_t = \beta_0(S_t) + \lambda y_{t-d} + \beta_1(S_t)B(L^{1/m}; \boldsymbol{\theta})(1 - \lambda L^d)x_{t-h}^{(m)} + \varepsilon_t(S_t), \quad (4.2.8)$$

enquanto que o modelo MS-MIDAS análogo à versão linear em (4.2.6) tem a seguinte forma

$$y_t = \beta_0(S_t) + \lambda y_{t-d} + \beta_1(S_t)B(L^{1/m}; \boldsymbol{\theta})x_{t-h}^{(m)} + \varepsilon_t(S_t). \quad (4.2.9)$$

O processo gerador dos regimes é assumido como uma cadeia de Markov ergódica com um número finito de estados $S_t = \{1, 2, \dots, N\}$ e com as seguintes probabilidades de transição

$$P(S_t = j|S_{t-1} = i) = p_{ij}, \quad (4.2.10)$$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4.2.11)$$

Neste artigo, as probabilidades de transição em (4.2.10) são constantes, assim como em Guérin e Marcellino (2013). Entretanto, este pressuposto pode ser potencialmente relaxado como em Diebold et al. (1994), Filardo (1994) e Kim et al. (2008), que utilizam probabilidades de transição variantes no tempo (basicamente, permitindo que as probabilidades de transição sejam influenciadas por um vetor de variáveis exógenas ou pré-determinadas).

Como se pode depreender a partir das equações (4.2.7) a (4.2.9), os parâmetros que podem variar de acordo com o regime são: o intercepto, β_0 , o parâmetro de inclinação, β_1 , e a variância dos erros, σ^2 . Destes parâmetros, destaca-se na abordagem MIDAS a possibilidade de captar via β_1 mudanças na capacidade preditiva de um regressor em frequência mais alta. Isto pode ser relevante, por exemplo, ao se calcular previsões de atividade econômica utilizando a diferença entre taxas de juros de longo e curto prazo. Este indicador possui poder preditivo para períodos de crescimento baixo ou negativo, porém, não é um bom preditor de momentos de alto crescimento (ver, e.g., Galbraith e Tkacz, 2000). Ainda, cabe dizer que não são todos os parâmetros que dependem do regime, isto é, o termo auto-regressivo, λ , e os parâmetros associados à função de ponderação, $\boldsymbol{\theta}$, são constantes. Decidiu-se por mantê-los constantes em função de Guérin e Marcellino (2013) reportarem problemas de convergência para as estimativas de $\boldsymbol{\theta}$ ao permitirem

mudança de regime. A Tabela 4.1 apresenta os acrônimos utilizados neste artigo para classificar cada modelo MS-MIDAS.

Diferentemente dos modelos MIDAS discutidos nas Subseções 4.2.1 e 4.2.2, estimados neste artigo por MQNL, os modelos MS-MIDAS são estimados por (pseudo) Máxima Verossimilhança (MV). Neste caso, torna-se necessária a suposição de normalidade distributiva para os erros, o que não é necessário ao utilizar o método de MQNL. O uso do método de MV está associado à utilização do filtro de Hamilton (1989), adotado no processo de inferência para a variável latente S_t . A partir do algoritmo iterativo descrito em Hamilton (1989, 1994), pode-se avaliar a função log-verossimilhança

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | \Omega_{t-1}; \phi), \quad (4.2.12)$$

onde $f(y_t | \Omega_{t-1}; \phi)$ é a densidade condicional de y_t dada a informação disponível até o instante $t - 1$, Ω_{t-1} , e ϕ representa um vetor que reúne os parâmetros do modelo MS-MIDAS e as probabilidades de transição p_{ij} . Ainda, note-se que $f(y_t | \Omega_{t-1}; \phi)$ pode ser reescrita como

$$f(y_t | \Omega_{t-1}; \phi) = \sum_{j=1}^N P(S_t = j | \Omega_{t-1}; \phi) f(y_t | S_t = j, \Omega_{t-1}; \phi). \quad (4.2.13)$$

Uma estimativa do valor de ϕ pode ser obtida maximizando a função log-verossimilhança via otimização numérica.⁴

Do procedimento de filtragem de Hamilton (1989), obtêm-se probabilidades estimadas de se estar em um determinado regime. Esta característica atrativa dos modelos com mudança Markoviana é relevante, por exemplo, em estudos que visam identificar e prever o estado da economia (ver, neste contexto, Chauvet e Piger, 2003; Nalewaik, 2012; Billio et al., 2013; Guérin e Marcellino, 2013; entre outros).

Uma questão importante que surge em aplicações com modelos com mudança Markoviana é a de determinar o número de regimes distintos que caracterizam adequadamente os dados observados. Um fator complicador, neste contexto, é que um teste de hipóteses baseado na estatística da razão de verossimilhanças tradicional não é apropriado. Uma das condições de regularidade para que o teste da razão de verossimilhanças tenha distribuição assintótica padrão é que a matriz

⁴Todos os cálculos necessários para a estimação dos parâmetros dos modelos MS-MIDAS foram realizados utilizando o *software* MATLAB. Para maiores detalhes sobre a estimação dos modelos MS-MIDAS, ver Guérin e Marcellino (2013). Para revisões sobre estimação de modelos com mudança Markoviana, ver Hamilton (1994) e Kim e Nelson (1999).

de informação não seja singular. Contudo, esta condição não é satisfeita, por exemplo, ao se estimar um modelo com um número de regimes maior que o do verdadeiro processo, uma vez que existirão alguns parâmetros que não são identificáveis sob a hipótese nula. Hansen (1992) e Garcia (1993, 1998) propõem procedimentos para a derivação da distribuição assintótica da estatística da razão de verossimilhanças. Entretanto, Krolzig (1997) salienta que estes procedimentos são computacionalmente pesados e de valor limitado para pesquisas empíricas.

Psaradakis e Spagnolo (2006) examinam o desempenho de critérios de informação penalizadores de complexidade para a seleção de modelos auto-regressivos com mudança Markoviana. Os autores constataam que critérios como Akaike (AIC), Schwarz (SIC) e Hannan-Quinn (HQ) apresentam um bom desempenho na seleção simultânea do número correto de regimes e ordem da defasagem auto-regressiva, desde que o tamanho da amostra e as mudanças nos parâmetros sejam suficientemente grandes.⁵

Neste artigo, os critérios de informação mencionados acima serão utilizados para determinar o número de regimes, conforme sugerido em Psaradakis e Spagnolo (2003, 2006), e para decidir se a variância dos erros deve ser regime-dependente. Desta forma, segue-se o mesmo procedimento adotado em Guérin e Marcellino (2013) para modelos MS-MIDAS.

4.2.4 Modelos MIDAS com Transição Suave

Uma classe alternativa a dos modelos com mudança Markoviana é a dos modelos de Regressão com Transição Suave (STR). Em particular, nos modelos STR a transição entre regimes distintos ocorre por meio de uma função suave em termos de uma variável de transição observável (ver Teräsvirta, 1998).⁶ Baseando-se nestes modelos, Galvão (2013) propõe uma abordagem similar para regressões MIDAS, em que mudanças de regime dependem da magnitude e sinal de um previsor em alta frequência ponderado.

O modelo de regressão MIDAS com Transição Suave (STMIDAS), sugerido por Galvão (2013), pode ser definido da seguinte forma:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t-h(\omega, K)}^{(m)} \left[1 - G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c) \right] + \beta_2 x_{t-h(\omega, K)}^{(m)} \left[G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c) \right] + \varepsilon_t, \quad (4.2.14)$$

⁵Para resultados similares envolvendo somente a determinação do número de regimes via critérios de informação, ver Psaradakis e Spagnolo (2003).

⁶Para uma revisão sobre esta classe de modelos não-lineares, ver van Dijk et al. (2002) e Teräsvirta et al. (2010).

onde

$$G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c) = \left(1 + \exp\{-(\gamma/\hat{\sigma}_x)(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)} - c)\}\right)^{-1}. \quad (4.2.15)$$

Para simplificar a notação, utiliza-se $x_{t-h(\omega, K)}^{(m)} = \sum_{j=1}^K b(j; \omega) L^{(j-1)/m} x_{t-h}^{(m)}$ para denotar a soma ponderada de $x_{t-h}^{(m)}$. A mesma notação simplificada é adotada para $x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}$. A função de transição em (4.2.15) é uma função logística que depende da soma ponderada do indicador em alta frequência. Adicionalmente, os vetores de parâmetros α e ω caracterizam os pesos aplicados para se utilizar o indicador em alta frequência como variável de transição e predição, respectivamente.

A função $G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c)$ cresce monotonicamente de 0 a 1 para valores crescentes de $x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}$. Assim, o parâmetro c pode ser interpretado como o limiar entre os regimes associados aos valores extremos da função de transição, isto é, $G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c) = 0$ e $G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c) = 1$. Note-se que $G(c; \gamma, c) = 0.5$. O parâmetro γ , por sua vez, determina o grau de suavidade na transição entre os regimes. Ainda, como apontado em Galvão (2013), γ é padronizado pelo desvio padrão amostral da variável de transição, $\hat{\sigma}_x$, para ser aproximadamente livre de escala. Para valores elevados de γ , a função $G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c)$ se torna similar a uma função indicadora, assumindo o valor zero quando $(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)} \leq c)$ e o valor um quando $(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)} > c)$. Neste caso, o impacto de $x_{t-h(\omega, K)}^{(m)}$ na predição de y_t é medido por β_1 quando $x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}$ tem baixa magnitude, ao passo que é medido por β_2 quando $x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}$ tem magnitude elevada. Por outro lado, quando o parâmetro de suavização γ é pequeno (mas diferente de zero), o impacto de $x_{t-h(\omega, K)}^{(m)}$ na predição de y_t é medido por uma soma ponderada (variante no tempo) de β_1 e β_2 que depende do valor da função $G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c)$.

Galvão (2013) descreve as restrições necessárias para a identificação dos parâmetros do modelo STMIDAS. Para tanto, o modelo é reescrito da seguinte forma:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t-h(\omega, K)}^{(m)} + \delta x_{t-h(\omega, K)}^{(m)} \left[G(x_{t-h(\alpha, K)}^{(m)}; \gamma, c) \right] + \varepsilon_t, \quad (4.2.16)$$

onde $\delta = (\beta_2 - \beta_1)$. Como é usual em regressões MIDAS, ao impor-se que $\sum_{j=1}^K b(j; \omega) = 1$, assegura-se a identificação de β_1 . A identificação de γ e c é assegurada ao impor-se que $\sum_{j=1}^K b(j; \alpha) = 1$. Adicionalmente, o parâmetro de inclinação β_2 é identificado se $\gamma > 0$.

Regressões STMIDAS com termos auto-regressivos também são consideradas por Galvão (2013).

O modelo STMIDAS com um termo auto-regressivo tem a seguinte forma:

$$y_t = \beta_0 + \lambda y_{t-d} + \beta_1 x_{t-h}^{(m)}(\omega, K) + \delta x_{t-h}^{(m)}(\omega, K) \left[G(x_{t-h}^{(m)}(\alpha, K); \gamma, c) \right] + \varepsilon_t. \quad (4.2.17)$$

A autora segue a abordagem de Andreou et al. (2013) para modelos ADL-MIDAS. De forma alternativa, pode-se considerar também uma especificação STMIDAS baseada no modelo AR-MIDAS de Clements e Galvão (2008). Uma especificação STMIDAS que inclui um termo auto-regressivo como um fator comum pode ser escrita como

$$y_t = \beta_0 + \lambda y_{t-d} + \beta_1 B(L^{1/m}; \omega)(1 - \lambda L^d)x_{t-h}^{(m)} + \delta B(L^{1/m}; \omega)(1 - \lambda L^d)x_{t-h}^{(m)} \left[G(x_{t-h}^{(m)}(\alpha, K); \gamma, c) \right] + \varepsilon_t, \quad (4.2.18)$$

onde $B(L^{1/m}; \omega)x_{t-h}^{(m)} = x_{t-h}^{(m)}(\omega, K)$. Para facilitar a diferenciação entre as especificações em (4.2.17) e (4.2.18), as mesmas serão chamadas de ADL-STMIDAS e AR-STMIDAS, respectivamente.

Os modelos de regressão STMIDAS são estimados pelo método de mínimos quadrados não-lineares. Galvão (2013) descreve detalhadamente o procedimento para se obter valores iniciais para os parâmetros de um modelo STMIDAS. Resumidamente, valores iniciais para os parâmetros da função de ponderação, ω_1 e ω_2 , são obtidos a partir das estimativas de um modelo MIDAS. De forma condicional a $\hat{\omega}_1$ e $\hat{\omega}_2$, valores iniciais para γ , c , α_1 e α_2 são obtidos conjuntamente via *grid search*. O procedimento ainda envolve uma segunda *grid search* para atualizar os valores iniciais de ω_1 e ω_2 .⁷

Algumas características do modelo de regressão STMIDAS podem ser salientadas. Em primeiro lugar, o modelo permite que o impacto do predictor no valor futuro da variável alvo mude de acordo com o regime. Em segundo lugar, as previsões são computadas de forma direta para cada horizonte de previsão distinto. Por fim, como Galvão (2013) ressalta, no modelo STMIDAS não é necessário definir previamente a defasagem da variável de transição (procedimento usual em modelos da classe STR) quando a mesma é representada pela soma ponderada do indicador em alta frequência.

⁷Para detalhes no que tange à obtenção de valores iniciais para os parâmetros e restrições adotadas sobre parâmetros no procedimento de otimização numérica, ver Galvão (2013). No presente artigo, todos os cálculos necessários para a estimação dos parâmetros dos modelos STMIDAS foram efetuados utilizando o *software* MATLAB.

4.3 Estudo Empírico Comparativo

Esta seção inclui um exercício de previsão em tempo real para o crescimento do PIB dos EUA utilizando-se indicadores financeiros como preditores. Neste exercício, busca-se comparar os modelos MS-MIDAS e STMIDAS em termos de acurácia preditiva. Além dos modelos da classe MIDAS, outros modelos de previsão tradicionais são considerados para fins comparativos de desempenho preditivo. Na Subseção 4.3.1, são descritos os dados e a estrutura do exercício de previsão em tempo real. A Subseção 4.3.2 reúne detalhes sobre os modelos examinados e os resultados comparativos de previsão.

4.3.1 Dados e Estrutura do Exercício de Previsão em Tempo Real

Neste estudo, os dados referentes ao PIB real trimestral dos EUA são oriundos de um conjunto de dados em tempo real, disponibilizado pelo *Federal Reserve Bank* da Filadélfia.⁸ O conjunto de dados em tempo real para o PIB real é formado por *vintages* trimestrais, em que cada *vintage* representa o conjunto de informação disponível para o PIB em uma data particular (em outras palavras, a série temporal originalmente disponível ao público na data). As *vintages* trimestrais refletem a informação disponível na metade do segundo mês de cada trimestre. O último valor em uma dada *vintage* trimestral é uma estimativa preliminar do PIB real observado no trimestre anterior (os valores anteriores a este já são revisados).

A variável dependente nos modelos é a taxa de crescimento (real) do PIB calculada como a diferença trimestral do logaritmo do PIB real. Baseando-se nos estudos de Galvão (2013) e Guérin e Marcellino (2013), três variáveis financeiras são utilizadas como regressores. Em particular, explora-se a capacidade preditiva de indicadores observados na frequência mensal.⁹ O primeiro indicador considerado é o *spread* entre taxas de juros, medido pela diferença entre a taxa de juros mensal do título do Tesouro de dez anos e a taxa de juros mensal do título de três meses. A respeito do *spread*, há uma vasta literatura acerca de suas propriedades como indicador antecedente para crescimento do produto (ver, por exemplo, Estrella e Hardouvelis,

⁸Disponível em: <http://www.phil.frb.org/research-and-data/real-time-center/real-time-data/data-files/>. Para uma discussão abrangente sobre o conjunto de dados em tempo real para macroeconomistas, ver Croushore e Stark (2001).

⁹Diferentemente de Guérin e Marcellino (2013) que utilizam indicadores mensais, Galvão (2013) considera indicadores financeiros observados nas frequências semanal e diária para prever o crescimento do PIB trimestral dos EUA.

1991; Hamilton e Kim, 2002; entre outros). Adicionalmente, utiliza-se a taxa efetiva de juros mensal dos *Federal funds* (*Fed funds*) como indicador mensal. Com este previsor, influências de decisões de política monetária sobre a atividade econômica podem ser consideradas. Por último, os retornos mensais de um índice de ações, o índice S&P 500, também são considerados como um indicador mensal para a previsão do crescimento do PIB trimestral. Os retornos mensais do S&P 500 são calculados pela diferença mensal do logaritmo do preço do índice. Os dados referentes às taxas de juros dos títulos do Tesouro e dos *Fed funds* foram obtidos da base de dados do *Federal Reserve*.¹⁰ Os dados referentes ao índice de ações S&P 500 foram obtidos do *Yahoo Finance*. Assim como em Guérin e Marcellino (2013), os indicadores *spread* e *Fed funds* são utilizados em primeira diferença devido aos melhores resultados em previsão com esta transformação.

As previsões de crescimento do PIB são computadas para os trimestres de 1998:1 a 2012:4. Para cada um desses trimestres, são calculadas previsões para horizontes a partir de $h = 0$ até 1 trimestre, com passos mensais ($h = 1/3$, $h = 2/3$), tal que $h \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$. A amostra de estimação inicial contempla o período de 1959:1 a 1997:4. As previsões são geradas utilizando-se um esquema recursivo (i.e., os parâmetros dos modelos são reestimados em uma amostra com tamanho crescente). Para cada horizonte considerado, obtêm-se 60 previsões fora da amostra. No exercício de previsão em tempo real, utiliza-se uma estrutura baseada nos trabalhos de Clements e Galvão (2008) e Guérin e Marcellino (2013).¹¹ Desta forma, adota-se a notação usual $y_{\tau;\nu}$ para denotar o crescimento do produto no período τ referente aos dados da *vintage* ν . Neste artigo, os erros de previsão são calculados em relação aos valores de crescimento do produto $y_{t;T}$ referentes à última *vintage* que se tem acesso, $T = 2013:1$, uma vez que se objetiva prever valores finais de crescimento do produto (revelados pelo processo de revisão dos dados). Ainda, como mencionado anteriormente, salienta-se que a *vintage* disponível no trimestre $t + 1$ contém dados do PIB até o trimestre t .

Ao se computar previsões para o crescimento do PIB via modelos MIDAS com variáveis financeiras mensais e com horizontes $h = 0, 1/3, 2/3$ e 1, quatro previsões para o trimestre corrente são obtidas. Dada a possibilidade de se utilizar informação de um indicador mensal disponível para os meses do trimestre de previsão, apresenta-se um exemplo simplificado de como

¹⁰Disponível em: <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm>.

¹¹No artigo de Clements e Galvão (2008), ver especificamente a Seção 3.1.1.

as previsões são geradas para os horizontes considerados. Para isso, utiliza-se uma especificação MS-MIDAS que inclui um termo auto-regressivo. Para os modelos MS-MIDAS, previsões 1 trimestre à frente para as probabilidades dos regimes são calculadas como

$$P(S_{t+1} = j|\Omega_t; \phi) = \sum_{i=1}^N p_{ij}P(S_t = i|\Omega_t; \phi).$$

As probabilidades previstas são geradas a partir das probabilidades de transição p_{ij} e das probabilidades filtradas $P(S_t = i|\Omega_t; \phi)$.¹²

Previsões para o crescimento do PIB com horizonte $h = 0$ podem ser calculadas quando se dispõe dos dados referentes ao indicador mensal para todos os meses do trimestre corrente. Sucintamente, para gerar uma previsão de $y_{t+1;T}$ com horizonte $h = 0$, regride-se $y_{t;t+1}$ sobre $y_{t-1;t+1}$ e $B(L^{1/3}; \theta)x_{t;t+1}$, onde $y_{t;t+1} = [y_{2;t+1}, \dots, y_{t;t+1}]$, $y_{t-1;t+1} = [y_{1;t+1}, \dots, y_{t-1;t+1}]$ e $x_{t;t+1} = [x_{2;t+1}, \dots, x_{t-1;t+1}, x_{t;t+1}]$. Note-se que a referência à frequência mensal de $x^{(3)}$ foi retirada para simplificar a notação. Ainda, por ser uma especificação MS-MIDAS, fica implícito que a regressão envolve defasagens mensais do vetor $x_{t;t+1}$. De posse das estimativas dos parâmetros, das previsões para as probabilidades dos regimes $P(S_{t+1} = j|\Omega_t; \hat{\phi})$ e dos valores de $y_{t;t+1}$ e $x_{t+1;t+1}$, calcula-se a previsão $\hat{y}_{t+1;T}$.

Quando se dispõe dos valores do indicador mensal para os dois primeiros meses do trimestre corrente, previsões com horizonte $h = 1/3$ podem ser geradas. Para se construir uma previsão com horizonte $h = 1/3$, regride-se primeiramente $y_{t;t+1}$ sobre $y_{t-1;t+1}$ e $B(L^{1/3}; \theta)x_{t-1/3;t+1}$, onde $x_{t-1/3;t+1} = [x_{2-1/3;t+1}, \dots, x_{t-4/3;t+1}, x_{t-1/3;t+1}]$. Então, a partir das estimativas dos parâmetros, das previsões para as probabilidades dos regimes $P(S_{t+1} = j|\Omega_t; \hat{\phi})$ e dos valores de $y_{t;t+1}$ e $x_{t+2/3;t+1}$, computa-se a previsão $\hat{y}_{t+1;T}$.

Utilizando-se informação disponível para o indicador mensal referente ao primeiro mês do trimestre corrente, pode-se calcular uma previsão para o crescimento do PIB no trimestre corrente com horizonte $h = 2/3$. Para tanto, regride-se $y_{t;t+1}$ sobre $y_{t-1;t+1}$ e $B(L^{1/3}; \theta)x_{t-2/3;t+1}$, onde $x_{t-2/3;t+1} = [x_{2-2/3;t+1}, \dots, x_{t-5/3;t+1}, x_{t-2/3;t+1}]$. A previsão $\hat{y}_{t+1;T}$ é calculada a partir dos parâmetros estimados, das previsões para as probabilidades dos regimes $P(S_{t+1} = j|\Omega_t; \hat{\phi})$ e dos valores de $y_{t;t+1}$ e $x_{t+1/3;t+1}$. Por fim, a previsão para $y_{t+1;T}$ com horizonte $h = 1$ é gerada a partir de uma regressão de $y_{t;t+1}$ sobre $y_{t-1;t+1}$ e $B(L^{1/3}; \theta)x_{t-1;t+1}$. Neste caso, a previsão é

¹²Para maiores detalhes, ver Guérin e Marcellino (2013).

calculada condicionalmente a $y_{t,t+1}$ e $x_{t,t+1}$.

4.3.2 Exercício de Previsão em Tempo Real

Nesta subseção, busca-se explorar resultados comparativos empíricos em termos da capacidade preditiva dos modelos não-lineares MS-MIDAS e STMIDAS. Para tanto, são geradas previsões fora da amostra para o crescimento do PIB trimestral dos EUA usando-se indicadores financeiros observados na frequência mensal. Adicionalmente, são calculadas previsões a partir de diversos modelos alternativos.

Os modelos considerados no exercício de previsão em tempo real foram selecionados dentro da amostra utilizando-se os dados de crescimento do PIB referentes a *vintage* 2013:1. Os modelos MS-MIDAS, STMIDAS e MIDAS são especificados com funções de ponderação distintas. Para os modelos MS-MIDAS, são utilizadas funções exponenciais ao passo que, para os modelos STMIDAS e MIDAS, são adotadas funções beta. Embora o desempenho preditivo com ambas as funções seja geralmente similar, decidiu-se adotar a mesma especificação que Guérin e Marcellino (2013) para os modelos MS-MIDAS, e a mesma especificação que Galvão (2013) para os modelos STMIDAS e MIDAS. Nos modelos MIDAS (não-lineares e lineares) são utilizados até doze meses de informação mensal dos indicadores financeiros (isto é, $K = 12$). A seleção do número de defasagens mensais incluídas nos modelos MS-MIDAS é realizada por meio da comparação dos valores de máximo da função log-verossimilhança.¹³ Nos modelos STMIDAS e MIDAS, a seleção do número de defasagens mensais é realizada a partir da comparação dos valores obtidos para o coeficiente de determinação R^2 .

Para os modelos MS-MIDAS, independentemente do indicador mensal utilizado, os critérios de informação oferecem suporte à escolha de modelos com três regimes, sendo que estes modelos permitem que a variância dos erros mude de acordo com o regime.¹⁴ Como um exemplo, são apresentadas na Figura 4.1 as probabilidades (suavizadas) estimadas para os regimes obtidas por meio do modelo MSHADL(3)-MIDAS com o indicador mensal *Fed funds*. Esta especificação, em particular, inclui um termo auto-regressivo e permite captar mudanças de regime no intercepto,

¹³Os critérios de informação adotados neste artigo não são eficazes para selecionar modelos MS-MIDAS cuja única diferença reside no número de defasagens mensais, haja vista não ocorrer aumento do número de parâmetros (critério usado para penalização) ao se considerar um maior número de defasagens.

¹⁴Para dados de crescimento do PIB trimestral dos EUA no período de 1959:1 a 2009:4, Guérin e Marcellino (2013) também utilizam modelos com três regimes.

no parâmetro de inclinação e na variância dos erros (para a classificação completa dos modelos MS-MIDAS considerados, ver a Tabela 4.1). Na Figura 4.1 (primeiro painel), pode-se perceber que as probabilidades estimadas para o *regime de recessão* se aproximam bem dos períodos de recessão (áreas sombreadas) definidos pelo *National Bureau of Economic Research* (NBER) para a economia norte-americana. Destes períodos de recessão, destaca-se o último associado à crise do *subprime* (de 2007:12 a 2009:6). No segundo painel, pode-se visualizar as probabilidades estimadas para o *regime de crescimento moderado* que é predominante a partir da segunda metade da década de 1980. Por último, o terceiro painel apresenta as probabilidades estimadas para o *regime de crescimento alto* que é predominante nas duas primeiras décadas em análise.

Seis modelos MS-MIDAS são utilizados para gerar previsões fora da amostra. Destes modelos, três permitem captar mudanças de regime no intercepto e na variância dos erros. Os modelos MSIHADL(3)-MIDAS e MSIHAR(3)-MIDAS incluem um termo auto-regressivo, sendo que o componente AR é inserido como um fator comum na segunda especificação. O modelo MSIH(3)-MIDAS não inclui um termo AR. Os modelos MSHADL(3)-MIDAS, MSHAR(3)-MIDAS e MSH(3)-MIDAS são análogos aos três primeiros, porém, também permitem captar mudanças de regime no parâmetro de inclinação.

A partir dos modelos MSIHADL(3)-MIDAS e MSHADL(3)-MIDAS descritos acima, obtêm-se dois modelos com mudança Markoviana alternativos para comparação de desempenho preditivo. Por exemplo, ao se estimar o modelo MSIHADL(3)-MIDAS usando um esquema de ponderação com pesos iguais e três meses (relativos ao trimestre anterior) de informação de um indicador, obtém-se o modelo MSIHADL(3). Especificamente, o modelo MSIHADL(3)-MIDAS reduz-se ao modelo MSIHADL(3) para $h = 1$, $K = 3$ e $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ (vetor de parâmetros da função de ponderação). Adicionalmente, para os mesmos valores de h , K e $\boldsymbol{\theta}$, o modelo MSHADL(3)-MIDAS reduz-se ao modelo MSHADL(3). Desta forma, têm-se dois modelos alternativos que incluem informação do indicador financeiro, embora os valores mensais deste indicador sejam agregados por meio de uma média simples. Comparações entre os modelos MS-MIDAS e os últimos modelos citados podem revelar ganhos em termos preditivos ao se explorar de forma ótima a informação de um indicador observado na frequência mensal.

Os modelos STMIDAS possibilitam captar mudanças de regime no parâmetro de inclinação.

As especificações adotadas neste artigo permitem a transição suave entre dois regimes associados aos valores extremos da função de transição logística. No exercício de previsão em tempo real, são consideradas as especificações ADL-STMIDAS e AR-STMIDAS (equações (4.2.17) e (4.2.18), respectivamente). Para cada especificação, avalia-se adicionalmente o desempenho fora da amostra de uma especificação obtida ao se impor a restrição $\omega = \alpha$ aos parâmetros das funções de ponderação associadas às variáveis de transição e predição. Como apontado em Galvão (2013), embora a especificação restrita seja aninhada à não-restrita, a imposição da restrição pode favorecer o procedimento de otimização associado à estimação do modelo.

De forma complementar, também considera-se o desempenho em previsão de um modelo de regressão com transição suave que é obtido a partir da simplificação do modelo ADL-STMIDAS. O modelo ADL-STR é obtido via restrição dos parâmetros das funções de ponderação do modelo ADL-STMIDAS (fazendo-se $\omega = \alpha = \mathbf{1}$) de tal forma que as mesmas gerem pesos iguais. Ainda, o modelo inclui três meses de informação do indicador financeiro referentes ao trimestre anterior (i.e., $K = 3$ e $h = 1$). No modelo ADL-STR, tanto a variável previsora quanto a variável de transição são definidas por uma média simples das observações mensais do indicador financeiro.

Em relação aos modelos lineares MIDAS, são geradas previsões a partir dos modelos ADL-MIDAS e AR-MIDAS. Adicionalmente, são considerados dois modelos usualmente adotados em previsão de variáveis macroeconômicas: um modelo ADL(1,1) e um modelo AR(1). O modelo ADL(1,1) relaciona a variável dependente a uma constante, a uma defasagem da própria variável e a uma média das observações do indicador financeiro referente aos meses do trimestre anterior. De modo a avaliar se há ganhos em termos preditivos oriundos das informações contidas nas variáveis financeiras, adota-se o modelo AR(1) como *benchmark*.

O desempenho preditivo de cada modelo citado nesta subseção é mensurado pelo Erro de Previsão Quadrático Médio (EPQM). A Tabela 4.2 reúne os resultados de previsão do crescimento do PIB trimestral dos EUA com o uso de variáveis financeiras mensais. Nesta tabela, para cada indicador financeiro e horizonte de previsão, os resultados são apresentados como razões de EPQMs dos modelos indicados em relação ao modelo AR(1). Desta forma, razões menores do que um indicam que os modelos alternativos geram melhores previsões que o modelo *benchmark*. Nos resultados associados a cada indicador, razões em negrito indicam os modelos com melhor

desempenho por horizonte de previsão. Adicionalmente, com o intuito de avaliar se as previsões geradas a partir dos modelos alternativos são estatisticamente mais acuradas que as obtidas pelo modelo AR(1), adota-se o teste para modelos aninhados de Clark e West (2007). Neste teste, examina-se a hipótese nula de igual acurácia preditiva fora da amostra contra a hipótese alternativa de que o modelo mais geral fornece previsões superiores. A estatística t corrigida de Clark e West (2007) é comparada com os valores críticos obtidos da distribuição normal padrão.¹⁵ Os resultados do teste também são reportados na Tabela 4.2.

No que diz respeito à comparação direta do desempenho preditivo dos modelos MS-MIDAS e STMIDAS, decidiu-se não adotar um teste formal de igual capacidade preditiva para modelos não-aninhados devido à incerteza quanto ao teste apropriado uma vez que são utilizados dados em tempo real na construção das previsões. Clark e McCracken (2009), por exemplo, mostram que o processo de revisão dos dados pode afetar as propriedades assintóticas dos testes de igual capacidade preditiva tradicionais. Desta forma, as comparações em termos do desempenho preditivo dos modelos MS-MIDAS e STMIDAS ocorrem por meio dos EPQMs.¹⁶

A partir da Tabela 4.2, os principais resultados de previsão fora da amostra são apresentados. Todos os modelos avaliados incluem um termo auto-regressivo, excetuando-se dois modelos MS-MIDAS com desempenho semelhante aos demais modelos da classe. Examinando-se os resultados relacionados ao uso do indicador *spread*, observa-se que os modelos MS-MIDAS, STMIDAS e MIDAS geralmente apresentam desempenho preditivo médio inferior ao modelo AR(1) (ver a coluna que reporta às médias das razões de EPQM em relação a todos os horizontes). Somente o modelo MSIHAR(3)-MIDAS gera previsões estatisticamente mais acuradas que às do modelo *benchmark* (apenas quando há informação disponível do indicador mensal para o trimestre de previsão, nos horizontes $h = 0$ e $h = 1/3$). Dentre os modelos que incluem informação do indicador por meio de um esquema de agregação simples, apenas o modelo MSIHADL(3) supera significativamente o *benchmark* em termos de acurácia preditiva.

Avaliando-se comparativamente o desempenho preditivo médio dos modelos MS-MIDAS e STMIDAS, observa-se que dois modelos MS-MIDAS (especificamente, MSIHAR(3)-MIDAS e

¹⁵O teste de Clark e West (2007) também é utilizado por Galvão (2013) e Guérin e Marcellino (2013) ao avaliarem o desempenho preditivo dos modelos STMIDAS e MS-MIDAS, respectivamente, em relação a um modelo *benchmark* restrito.

¹⁶A definição em torno de um teste formal para se avaliar a capacidade preditiva relativa dos modelos é deixada como ponto de pesquisa futura.

MSIHADL(3)-MIDAS) são ligeiramente superiores ao melhor modelo STMIDAS (a especificação AR-STMIDAS). Sob o mesmo critério de desempenho preditivo médio, os dois modelos lineares MIDAS fornecem previsões similares às dos melhores modelos MS-MIDAS e STMIDAS. De forma adicional, os modelos MS-MIDAS, STMIDAS e MIDAS podem ser comparados em termos de acurácia preditiva com os modelos similares que não relacionam diretamente variáveis em frequências distintas. Neste caso, examina-se o desempenho dos modelos em cada horizonte de previsão de modo a avaliar se há ganhos em acurácia preditiva ao se utilizar informação disponível do indicador mensal para o trimestre de previsão. Em primeiro lugar, nota-se que, de forma geral, o modelo com mudança Markoviana MSIHADL(3) gera previsões mais acuradas que os modelos MS-MIDAS. Em segundo lugar, os modelos STMIDAS são geralmente superiores ao modelo ADL-STR em termos de previsão. Por fim, os modelos MIDAS têm desempenho preditivo similar ao modelo ADL(1,1) em quase todos os horizontes.

Os resultados obtidos com a utilização dos retornos do S&P 500 nos modelos de previsão considerados revelam que este indicador contribui para o aumento da capacidade preditiva dos modelos de forma generalizada. Em relação aos modelos MS-MIDAS, por exemplo, a maior parte das especificações apresenta desempenho preditivo médio superior ao modelo AR(1). Ainda, estas especificações fornecem previsões significativamente melhores que às do modelo *benchmark* para a maioria dos horizontes. Adicionalmente, todos os modelos STMIDAS e MIDAS têm desempenho preditivo médio superior ao modelo AR(1). As previsões obtidas a partir destes modelos são estatisticamente mais acuradas que às do modelo AR(1) em quase todos os casos. Os modelos com mudança Markoviana MSIHADL(3) e MSHADL(3) também apresentam ganhos significativos em termos de acurácia preditiva.

Comparando-se os modelos MS-MIDAS e STMIDAS, observa-se uma ligeira vantagem em termos de desempenho preditivo médio para os modelos MSIH(3)-MIDAS e MSIHADL(3)-MIDAS em relação ao melhor modelo STMIDAS (a especificação ADL-STMIDAS com a restrição $\omega = \alpha$ imposta sobre os parâmetros das funções de ponderação). Entretanto, os melhores modelos MS-MIDAS são superados em termos de desempenho médio pelo modelo ADL-MIDAS. Além disso, nota-se que as previsões dos melhores modelos MIDAS (não-lineares e lineares) são substancialmente mais acuradas que as dos modelos com mudança Markoviana, ADL(1,1) e ADL-STR nos

horizontes em que se utiliza dados do indicador financeiro disponíveis para os meses do trimestre de previsão (i.e., $h \leq 2/3$).

Nos resultados associados ao uso do indicador *Fed funds* nos modelos de previsão, observa-se que os modelos MS-MIDAS e MIDAS apresentam ganhos em termos de acurácia preditiva frente ao modelo AR(1). Ambos os modelos MIDAS e as especificações MSIHAR(3)-MIDAS e MSIHADL(3)-MIDAS, em particular, geram previsões estatisticamente superiores. Por outro lado, os modelos STMIDAS apresentam desempenho preditivo inferior ao modelo *benchmark*. Os modelos ADL(1,1) e MSIHADL(3) fornecem previsões estatisticamente mais acuradas que as do modelo *benchmark*. Os modelos MS-MIDAS apresentam desempenho preditivo médio superior aos modelos STMIDAS. As diferenças entre os modelos em termos dos EPQMs são mais expressivas nos horizontes de previsão $h = 0$ e $h = 1/3$. Todavia, o modelo MS-MIDAS com melhor desempenho médio (a especificação MSIHAR(3)-MIDAS) é ligeiramente inferior ao modelo AR-MIDAS em termos de acurácia preditiva. Adicionalmente, nota-se que a maior parte das especificações MS-MIDAS fornece previsões mais acuradas que o modelo MSIHADL(3) para os horizontes $h = 0, 1/3$, ao passo que para os horizontes $h = 2/3, 1$ o último modelo é superior. Observa-se também um desempenho preditivo ligeiramente superior para a maioria dos modelos STMIDAS frente ao modelo ADL-STR. Por fim, o modelo MIDAS com melhor desempenho preditivo (AR-MIDAS) gera previsões mais acuradas que o modelo ADL(1,1) apenas para os horizontes $h = 0$ e $h = 1/3$.

Em relação aos resultados gerais do exercício de previsão em tempo real, nota-se que os retornos do índice S&P 500 contêm o maior conteúdo preditivo dentre os indicadores mensais adotados. Conseqüentemente, os dois melhores modelos (em termos de desempenho médio) para previsão do crescimento do PIB trimestral incluem informação mensal deste indicador. O modelo ADL-MIDAS tem o melhor desempenho preditivo médio, sendo seguido de perto pelo modelo MSIHADL(3)-MIDAS. A respeito disso, Galvão (2013) e Guérin e Marcellino (2013) também reportam resultados semelhantes acerca do desempenho preditivo dos modelos lineares MIDAS (com o mesmo indicador financeiro) em relação aos modelos STMIDAS e MS-MIDAS, respectivamente.

De modo geral, quando os melhores modelos MS-MIDAS e STMIDAS são comparados, nota-

se que os modelos com mudança Markoviana fornecem previsões mais acuradas. Nos resultados referentes ao indicador *Fed funds*, outro modelo linear MIDAS (AR-MIDAS) gera previsões ligeiramente superiores às do segundo melhor modelo, o MSIHAR(3)-MIDAS. Desta forma, cabe frisar os bons resultados em previsão obtidos a partir dos modelos lineares MIDAS frente às especificações não-lineares. Por fim, são observadas diferenças mais nítidas, em termos de desempenho preditivo, entre os modelos MIDAS (não-lineares e lineares) e os modelos que não relacionam variáveis em frequências distintas apenas nos resultados obtidos com os retornos do S&P 500. Com este indicador, os melhores modelos MIDAS (não-lineares e lineares) fornecem previsões substancialmente mais acuradas quando se utiliza informação disponível do indicador para os meses do trimestre de previsão.

4.4 Conclusão

Neste artigo, buscou-se comparar a capacidade preditiva dos modelos não-lineares STMIDAS e MS-MIDAS, propostos recentemente por Galvão (2013) e Guérin e Marcellino (2013), respectivamente, em um exercício de previsão fora da amostra. A principal característica destes modelos é que eles permitem captar mudanças de regime em alguns parâmetros do modelo de regressão linear MIDAS. Em um exercício de previsão em tempo real, foram geradas previsões para o crescimento do PIB trimestral dos EUA utilizando-se indicadores financeiros mensais como preditores. Os indicadores financeiros considerados no estudo empírico foram o *spread*, os *Fed funds* e os retornos do índice S&P 500. Além dos modelos MIDAS (não-lineares e lineares), foram considerados outros modelos de previsão que não relacionam diretamente variáveis em frequências distintas com o intuito de avaliar comparativamente os desempenhos em previsão. Em particular, com os modelos MS-MIDAS, STMIDAS e MIDAS é possível obter quatro previsões para o trimestre corrente. Com estes modelos, além de previsões com horizonte de um trimestre, é possível calcular previsões quando se dispõe dos valores das variáveis financeiras mensais para um, dois ou três meses do trimestre de previsão.

Nos resultados do exercício de previsão em tempo real observou-se, de forma geral, um melhor desempenho preditivo dos modelos MS-MIDAS frente aos modelos STMIDAS. Adicionalmente, os melhores resultados em previsão foram obtidos com os retornos do índice S&P 500. Incluindo

informação deste indicador, dois modelos apresentaram desempenho preditivo superior aos demais. Em primeiro lugar, um modelo linear MIDAS e, em segundo lugar, com desempenho ligeiramente inferior, uma especificação MS-MIDAS. De modo geral, os modelos lineares MIDAS mostraram-se bastante competitivos em relação aos melhores modelos não-lineares MIDAS, gerando resultados semelhantes ou ligeiramente superiores em termos dos EPQMs.

Por fim, foram observadas maiores diferenças em termos de acurácia preditiva entre os modelos MIDAS (não-lineares e lineares) e os modelos que não relacionam diretamente variáveis em frequências diferentes apenas nos resultados obtidos com os retornos do S&P 500. Com esta variável financeira, os melhores modelos MIDAS (não-lineares e lineares) apresentaram um desempenho preditivo notadamente superior nos horizontes em que há informação disponível da variável financeira para os meses do trimestre de previsão.

De forma complementar ao que foi realizado neste estudo, seria interessante examinar o desempenho preditivo relativo dos modelos não-lineares MIDAS com a adoção de outros indicadores. Seria interessante também relacionar variáveis com frequências diferentes das consideradas e analisar outros dados relativos à atividade econômica. Estes pontos deverão ser investigados em pesquisas futuras.

4.5 Referências

1. Andreou, E.; Ghysels, E.; Kourtellis, A. (2013). Should Macroeconomic Forecasters Use Daily Financial Data and How? *Journal of Business and Economic Statistics*, 31:240–251.
2. Bhansali, R.J. (2002). Multi-step Forecasting. In *A Companion to Economic Forecasting*, M.P. Clements, D.F. Hendry (eds.), Blackwell, Oxford.
3. Billio, M.; Ferrara, L.; Guégan, D.; Mazzi, G.L. (2013). Evaluation of Regime Switching Models for Real-Time Business Cycle Analysis of the Euro Area. *Journal of Forecasting*, 32:577–586.
4. Chauvet, M.; Piger, J. (2003). Identifying Business Cycle Turning Points in Real Time. *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, 85:47–61.
5. Chevillon, G.; Hendry, D.F. (2005). Non-Parametric Direct Multi-Step Estimation for Forecasting Economic Processes. *International Journal of Forecasting*, 21:201–218.
6. Clark, T.E.; McCracken, M.W. (2009). Tests of Equal Predictive Ability With Real-Time Data. *Journal of Business and Economic Statistics*, 27:441–454.
7. Clark, T.E.; West, K.D. (2007). Approximately Normal Tests for Equal Predictive Accuracy in Nested Models. *Journal of Econometrics*, 138:291–311.
8. Clements, M.P.; Galvão, A.B. (2008). Macroeconomic Forecasting With Mixed-Frequency Data. *Journal of Business and Economic Statistics*, 26:546–554.

9. Clements, M.P.; Galvão, A.B. (2009). Forecasting US Output Growth Using Leading Indicators: An Appraisal Using MIDAS Models. *Journal of Applied Econometrics*, 24:1187–1206.
10. Croushore, D.; Stark, T. (2001). A Real-Time Data Set for Macroeconomists. *Journal of Econometrics*, 105:111–130.
11. Diebold, F.X.; Lee, J.-H.; Weinbach, G. (1994). Regime Switching With Time-Varying Transition Probabilities. In *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*, C. Hargreaves (ed.), Oxford University Press, Oxford, UK.
12. Diebold, F.X.; Rudebusch, G.D. (1991). Forecasting Output With the Composite Leading Index: A Real-Time Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 86:603–610.
13. Estrella, A.; Hardouvelis, G.A. (1991). The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity. *Journal of Finance*, 46:555–576.
14. Filardo, A.J. (1994). Business-Cycle Phases and Their Transitional Dynamics. *Journal of Business and Economic Statistics*, 12:299–308.
15. Galbraith, J.W.; Tkacz, G. (2000). Testing for Asymmetry in the Link Between the Yield Spread and Output in the G-7 Countries. *Journal of International Money and Finance*, 19:657–672.
16. Galvão, A.B. (2013). Changes in Predictive Ability With Mixed Frequency Data. *International Journal of Forecasting*, 29:395–410.
17. Garcia, R. (1993). Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models. Working paper, Université de Montréal.
18. Garcia, R. (1998). Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models. *International Economic Review*, 39:763–788.
19. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2004). The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression Models. Working paper, UNC and UCLA.
20. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2005). There is a Risk-Return Tradeoff After All. *Journal of Financial Economics*, 76:509–548.
21. Ghysels, E.; Santa-Clara, P.; Valkanov, R. (2006). Predicting Volatility: Getting the Most Out of Return Data Sampled at Different Frequencies. *Journal of Econometrics*, 131:59–95.
22. Ghysels, E.; Sinko, A.; Valkanov, R. (2007). MIDAS Regressions: Further Results and New Directions. *Econometric Reviews*, 26:53–90.
23. Guérin, P.; Marcellino, M. (2013). Markov-Switching MIDAS Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 31:45–56.
24. Hamilton, J.D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, 57:357–384.
25. Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton.
26. Hamilton, J.D.; Kim, D.H. (2002). A Re-examination of the Predictability of Economic Activity Using the Yield Spread. *Journal of Money, Credit and Banking*, 34:340–360.
27. Hansen, B.E. (1992). The Likelihood Ratio Test Under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP. *Journal of Applied Econometrics*, 7:S61–S82.
28. Kim, C.J.; Nelson, C.R. (1999). *State-Space Models With Regime Switching*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
29. Kim, C.J.; Piger, J.; Startz, R. (2008). Estimation of Markov Regime-Switching Regression Models With Endogenous Switching. *Journal of Econometrics*, 143:263–273.

30. Krolzig, H-M. (1997). *Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis*. Springer, Berlin.
31. Kuzin, V.; Marcellino, M.; Schumacher, C. (2013). Pooling Versus Model Selection for Nowcasting GDP with Many Predictors: Empirical Evidence for Six Industrialized Countries. *Journal of Applied Econometrics*, 28:392–411.
32. Marcellino, M.; Stock, J.H.; Watson, M.W. (2006). A Comparison of Direct and Iterated Multistep AR Methods for Forecasting Macroeconomic Time Series. *Journal of Econometrics*, 135:499–526.
33. Nalewaik, J.J. (2012). Estimating Probabilities of Recession in Real Time Using GDP and GDI. *Journal of Money, Credit and Banking*, 44:235–253.
34. Orphanides, A.; van Norden, S. (2005). The Reliability of Inflation Forecasts Based on Output Gaps in Real Time. *Journal of Money, Credit and Banking*, 37:583–601.
35. Psaradakis, Z.; Spagnolo, N. (2003). On the Determination of the Number of Regimes in Markov-Switching Autoregressive Models. *Journal of Time Series Analysis*, 24:237–252.
36. Psaradakis, Z.; Spagnolo, N. (2006). Joint Determination of the State Dimension and Autoregressive Order for Models With Markov Regime Switching. *Journal of Time Series Analysis*, 27:753–766.
37. Stock, J.H.; Watson, M.W. (2003). How Did Leading Indicator Forecasts Perform During the 2001 Recession. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, 89/3:71–90.
38. Teräsvirta, T. (1998). Modeling Economic Relationships With Smooth Transition Regressions. In *Handbook of Applied Economic Statistics*, A. Ullah, D.E. Giles (eds.), Dekker, New York.
39. Teräsvirta, T.; Tjøstheim, D.; Granger, C.W.J. (2010). *Modelling Nonlinear Economic Time Series*. Oxford University Press, Oxford.
40. van Dijk, D.; Teräsvirta, T.; Franses, P.H. (2002). Smooth Transition Autoregressive Models - A Survey of Recent Developments. *Econometric Reviews*, 21:1–47.

4.6 Apêndice A: Figuras

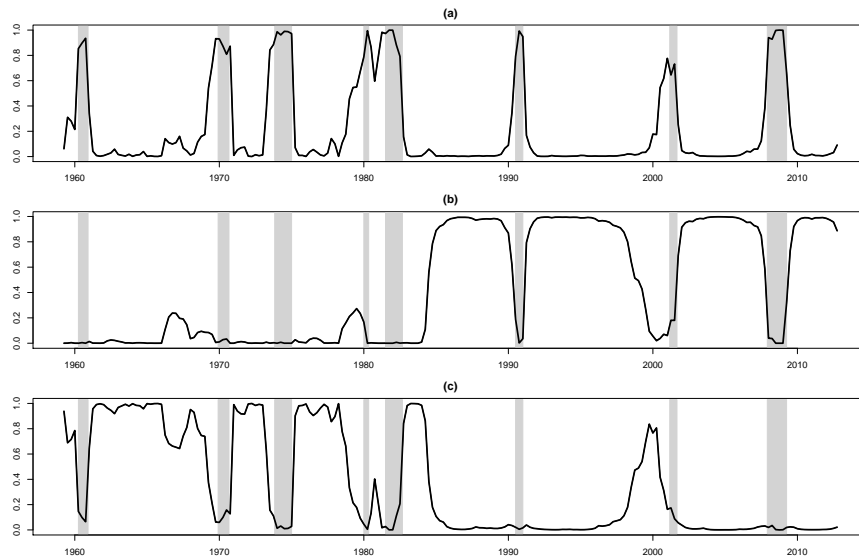


Figure 4.1: Probabilidades estimadas de se estar em um dado regime: (a) probabilidades suavizadas de se estar em uma recessão; (b) probabilidades suavizadas de se estar no regime de crescimento moderado; (c) probabilidades suavizadas de se estar no regime de crescimento alto. As probabilidades acima são obtidas por meio do modelo MSHADL(3)-MIDAS com o indicador mensal *Fed funds*. A amostra de estimação compreende o período de 1959:1 a 2012:4. As áreas sombreadas representam os períodos de recessão identificados pelo NBER.

4.7 Apêndice B: Tabelas

Table 4.1: Classificação dos modelos MS-MIDAS

| Modelo | Mudança de regime em | Termo AR |
|------------------|---------------------------------|----------|
| MSIH(N)-MIDAS | β_0 e σ^2 | × |
| MSH(N)-MIDAS | β_0, β_1 e σ^2 | × |
| MSIHAR(N)-MIDAS | β_0 e σ^2 | ✓ |
| MSHAR(N)-MIDAS | β_0, β_1 e σ^2 | ✓ |
| MSIHADL(N)-MIDAS | β_0 e σ^2 | ✓ |
| MSHADL(N)-MIDAS | β_0, β_1 e σ^2 | ✓ |

Nota: (I) refere-se a modelos com mudança de regime no intercepto, β_0 . (H) refere-se a modelos com mudança de regime na variância dos erros, σ^2 . (AR) refere-se a modelos com termo auto-regressivo via fator comum, ver equação (4.2.8). (ADL) refere-se a modelos com termo auto-regressivo sem fator comum, ver equação (4.2.9).

Table 4.2: Desempenho preditivo: previsões para o crescimento do PIB trimestral dos EUA com indicadores mensais

| Horizonte | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | Média | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | Média |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------|
| Modelo | <i>Spread</i> | | | | | Retornos do S&P 500 | | | | |
| MSH(3)-MIDAS | 1,027 | 1,066 | 1,063 | 1,076 | 1,058 | 0,834 | 0,824 | 0,776 | 0,882 | 0,829 |
| MSH(3)-MIDAS | 1,087 | 1,091 | 1,013 | 1,056 | 1,062 | 1,003 | 0,996 | 1,018 | 1,079 | 1,024 |
| MSIHAR(3)-MIDAS | 0,979^b | 0,989^a | 1,011 | 1,007 | 0,997 | 0,801 ^b | 0,799 ^b | 0,865 ^b | 0,931 ^a | 0,849 |
| MSHAR(3)-MIDAS | 1,080 | 1,043 | 1,016 | 0,994 | 1,033 | 0,915 ^a | 0,963 | 1,049 | 1,124 | 1,013 |
| MSIHADL(3)-MIDAS | 1,017 | 1,027 | 1,011 | 1,022 | 1,019 | 0,788^b | 0,814 ^a | 0,817 ^a | 0,866 ^b | 0,821 |
| MSHADL(3)-MIDAS | 1,067 | 1,068 | 1,002 | 1,103 | 1,060 | 0,924 | 0,928 | 0,869 ^a | 1,025 ^a | 0,936 |
| ADL-STMIDAS (r) | 1,052 | 1,028 | 1,113 | 1,043 | 1,059 | 0,831 ^b | 0,799 ^a | 0,771 ^b | 0,985 ^a | 0,846 |
| ADL-STMIDAS | 1,026 | 1,019 | 1,023 | 1,071 | 1,034 | 0,916 ^b | 0,826 ^a | 0,829 ^b | 0,947 ^a | 0,879 |
| AR-STMIDAS (r) | 1,090 | 1,046 | 1,023 | 1,021 | 1,045 | 0,880 ^a | 0,817 ^b | 1,036 | 1,025 ^b | 0,940 |
| AR-STMIDAS | 1,047 | 0,990 | 1,034 | 1,043 | 1,029 | 0,890 ^a | 0,954 ^c | 0,840 ^a | 0,863^b | 0,887 |
| ADL-MIDAS | 1,045 | 0,991 | 0,998 | 1,001 | 1,009 | 0,831 ^b | 0,765 ^b | 0,744 ^b | 0,889 ^b | 0,807 |
| AR-MIDAS | 1,101 | 0,997 | 0,990 | 0,994 | 1,020 | 0,880 ^a | 0,748^b | 0,724^b | 0,977 ^b | 0,832 |
| ADL(1,1) | .. | .. | .. | 0,995 | .. | .. | .. | .. | 0,974 | .. |
| ADL-STR | .. | .. | .. | 1,052 | .. | .. | .. | .. | 0,977 | .. |
| MSIHADL(3) | .. | .. | .. | 0,985^b | .. | .. | .. | .. | 0,914 ^a | .. |
| MSHADL(3) | .. | .. | .. | 1,055 | .. | .. | .. | .. | 0,959 ^a | .. |
| <i>Federal Funds</i> | | | | | | | | | | |
| MSH(3)-MIDAS | 0,951 | 0,933 | 0,978 | 1,008 | 0,968 | | | | | |
| MSH(3)-MIDAS | 0,982 | 1,027 | 1,017 | 1,028 | 1,014 | | | | | |
| MSIHAR(3)-MIDAS | 0,908^b | 0,946 ^a | 0,981 | 0,971 ^a | 0,952 | | | | | |
| MSHAR(3)-MIDAS | 0,965 | 0,944 | 0,976 | 0,999 | 0,971 | | | | | |
| MSIHADL(3)-MIDAS | 0,915 ^b | 0,952 ^a | 0,968 ^a | 0,995 | 0,957 | | | | | |
| MSHADL(3)-MIDAS | 0,936 ^a | 0,965 | 1,011 | 1,022 | 0,984 | | | | | |
| ADL-STMIDAS (r) | 1,050 | 1,071 | 1,063 | 1,062 | 1,062 | | | | | |
| ADL-STMIDAS | 0,995 | 1,041 | 1,043 | 1,019 | 1,024 | | | | | |
| AR-STMIDAS (r) | 1,023 | 1,053 | 1,056 | 1,022 | 1,038 | | | | | |
| AR-STMIDAS | 1,034 | 1,008 | 1,009 | 1,025 | 1,019 | | | | | |
| ADL-MIDAS | 0,919 ^b | 0,974 ^a | 0,964 ^b | 0,964 ^b | 0,955 | | | | | |
| AR-MIDAS | 0,914 ^b | 0,895^b | 0,960^a | 0,960^a | 0,933 | | | | | |
| ADL(1,1) | .. | .. | .. | 0,963 ^b | .. | | | | | |
| ADL-STR | .. | .. | .. | 1,046 | .. | | | | | |
| MSIHADL(3) | .. | .. | .. | 0,961 ^a | .. | | | | | |
| MSHADL(3) | .. | .. | .. | 1,066 | .. | | | | | |

Nota: As entradas na tabela são razões de EPQM dos modelos indicados em relação ao modelo AR(1). Razões em negrito indicam o modelo com melhor desempenho em previsão por horizonte. A coluna Média reporta as médias das razões de EPQM calculadas sobre os horizontes $h = 0, 1/3, 2/3, 1$, para os modelos indicados. Os sobrescritos ^{a, b, c} indicam que as previsões do modelo indicado (para o horizonte associado) são mais acuradas que as do modelo AR(1) ao nível de significância de 10%, 5% e 1%, respectivamente, de acordo com o teste de igual acurácia preditiva para modelos aninhados de Clark e West (2007). (r) indica as especificações STMIDAS em que a restrição $\omega = \alpha$ é imposta.

5 Considerações Finais

Na presente tese, utilizou-se a abordagem de regressão MIDAS em três ensaios em que foram realizadas aplicações empíricas nas áreas de finanças e macroeconomia. Nestes ensaios, modelos da classe MIDAS foram comparados entre si, bem como em relação a outros modelos de previsão alternativos, em termos de acurácia preditiva fora da amostra. Com aplicações em diferentes contextos de previsão, visou-se contribuir fornecendo evidências empíricas comparativas.

No primeiro ensaio, Capítulo 2 desta tese, foram avaliadas previsões de volatilidade multi-períodos geradas a partir das abordagens MIDAS, direta e iterada em aplicações numéricas com dados simulados e reais. O desempenho relativo das abordagens de previsão foi examinado em um estudo de Monte Carlo e em um estudo empírico em que foram computadas previsões de volatilidade fora da amostra para horizontes de 5 a 60 dias à frente. Os resultados do estudo de Monte Carlo foram bastante favoráveis à abordagem MIDAS, indicando a mesma como a de melhor desempenho preditivo em horizontes iguais ou superiores a 15 dias. Por outro lado, os resultados das previsões iteradas foram superiores aos das demais abordagens nos horizontes de prazo mais curto, isto é, 5 e 10 dias. No estudo empírico com dados diários dos índices S&P 500 e NASDAQ, os resultados gerais indicaram um melhor desempenho para a abordagem de previsão iterada em termos de erro quadrático médio. Sob o mesmo critério, a abordagem MIDAS apresentou, em termos gerais, um desempenho preditivo intermediário às abordagens direta e iterada. Todavia, baseando-se nos resultados do teste Diebold-Mariano, o desempenho das três abordagens de previsão se mostrou estatisticamente equivalente em quase todas as comparações diretas.

Como tópico de pesquisa futura, seria interessante aprofundar as comparações, tanto com dados simulados quanto com dados reais, de modo a obter uma visão mais clara em termos de desempenho relativo das três abordagens de previsão. Neste caso, poderia-se considerar outros processos geradores de dados no estudo de simulação, assim como outros conjuntos de dados reais na análise empírica.

A utilização de dados intradiários possibilita que se explore uma gama de medidas de volatilidade como regressores em modelos MIDAS. No segundo ensaio, Capítulo 3 desta tese, previu-se

a volatilidade dos retornos do IBOVESPA a partir dos modelos de regressão MIDAS e HAR em diferentes horizontes de previsão. De forma adicional, foram computadas combinações das previsões dos referidos modelos. Para ambos os modelos, examinou-se o poder preditivo de diversos regressores. Neste ensaio, foram geradas previsões de volatilidade fora da amostra para horizontes de 1 dia até 4 semanas à frente.

Quanto às evidências empíricas, os resultados em termos de erro quadrático médio indicaram que regressores baseados em medidas robustas a saltos (i.e., variação bipotente realizada e variação potente realizada) são melhores em prever volatilidade futura nos diferentes horizontes considerados. Entretanto, utilizando-se o teste Diebold-Mariano modificado, em geral, não foram observadas diferenças estatisticamente significativas entre as previsões baseadas nestes regressores alternativos e aquelas baseadas na medida de variância realizada como regressor. Dado que foram encontrados poucos resultados significativos ao se adotar uma função perda quadrática, seria interessante como tema de pesquisa futura examinar o desempenho das diferentes medidas de volatilidade em um outro contexto. Por exemplo, avaliando-se a capacidade das mesmas em prever Valor em Risco (VaR) (ver Clements et al. (2008) e Brownlees e Gallo (2010)). Em relação às comparações diretas entre as três abordagens (i.e., MIDAS, HAR e combinação de previsões), os resultados obtidos indicaram um desempenho preditivo estatisticamente equivalente na maior parte dos casos.

A abordagem de regressão MIDAS tem sido aplicada com êxito na previsão de séries temporais macroeconômicas trimestrais com a utilização de dados mensais. Uma das vantagens da utilização de regressões MIDAS está na possibilidade de se atualizar as previsões trimestrais na medida em que novas observações da variável de maior frequência estejam disponíveis. No terceiro ensaio, Capítulo 4 desta tese, visou-se comparar empiricamente a capacidade preditiva dos modelos de regressão não-lineares STMIDAS e MS-MIDAS. A principal característica destes modelos é que eles permitem captar mudanças de regime em alguns parâmetros do modelo de regressão linear MIDAS. Em um exercício de previsão em tempo real, foram geradas previsões fora da amostra para o crescimento do PIB trimestral dos EUA utilizando-se indicadores financeiros mensais como preditores. Os indicadores considerados no estudo empírico foram o *spread*, os *Fed funds* e os retornos do índice S&P 500. Além dos modelos MIDAS (não-lineares e lineares), foram

considerados outros modelos de previsão que não relacionam variáveis em frequências distintas com o intuito de avaliar comparativamente os desempenhos em previsão.

Nos resultados do exercício de previsão em tempo real observou-se, de forma geral, um melhor desempenho preditivo dos modelos MS-MIDAS frente aos modelos STMIDAS. Adicionalmente, os melhores resultados em previsão foram obtidos com os retornos do índice S&P 500. De modo geral, os modelos lineares MIDAS mostraram-se bastante competitivos em relação aos melhores modelos não-lineares MIDAS, gerando resultados semelhantes ou ligeiramente superiores em termos de erro de previsão quadrático médio. Além disso, foram observadas maiores diferenças em termos de acurácia preditiva entre os modelos MIDAS (não-lineares e lineares) e os modelos que não relacionam variáveis em frequências distintas apenas nos resultados obtidos com os retornos do índice S&P 500. Neste caso, os melhores modelos MIDAS (não-lineares e lineares) forneceram previsões substancialmente mais acuradas quando foram utilizados dados do indicador disponíveis para os meses do trimestre de previsão.

De forma complementar ao que foi realizado neste terceiro ensaio, seria interessante examinar o desempenho preditivo relativo dos modelos não-lineares MIDAS com a adoção de outros indicadores. Seria interessante também relacionar variáveis com frequências distintas das consideradas e analisar outros dados relativos à atividade econômica. Estas sugestões de pesquisa deverão ser investigadas futuramente.

REFERÊNCIAS

- AÏT-SAHALIA, Y.; MYKLAND, P.; ZHANG, L. How Often to Sample a Continuous-Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise. *Review of Financial Studies*, v. 18, p. 351–416, 2005.
- ANDERSEN, T.; BOLLERSLEV, T. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, v. 39, p. 885–905, 1998.
- ANDERSEN, T.G.; BOLLERSLEV, T.; CHRISTOFFERSEN, P.; DIEBOLD, F.X. Volatility and Correlation Forecasting. In: ELLIOTT, G.; GRANGER, C.W.J.; TIMMERMANN, A. (Ed.). *Handbook of Economic Forecasting*. New York: Elsevier Science, 2006. p. 777–878.
- ANDERSEN, T.G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F.X. Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Untangling Continuous and Jump Components in Measuring, Modeling and Forecasting Asset Return Volatility. Working paper, Duke University, 2004.
- ANDERSEN, T.G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F.X. Roughing It Up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling and Forecasting of Return Volatility. *The Review of Economics and Statistics*, v. 89, p. 701–720, 2007.
- ANDERSEN, T.G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F.X. Parametric and Nonparametric Volatility Measurement. In: AÏT-SAHALIA, Y.; HANSEN, L.P. (Ed.). *Handbook of Financial Econometrics*. Amsterdam: North-Holland, 2010. p. 67–137.
- ANDERSEN, T.G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F.X.; LABYS, P. The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. *Journal of the American Statistical Association*, v. 96, p. 42–55, 2001.
- ANDERSEN, T.G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F.X.; LABYS, P. Modeling and Forecasting Realized Volatility. *Econometrica*, v.71, p. 579–625, 2003.
- ANDERSEN, T.; BOLLERSLEV, T.; LANGE, S. Forecasting Financial Market Volatility: Sample Frequency vis-à-vis Forecast Horizon. *Journal of Empirical Finance*, v. 6, p. 457–477, 1999.
- ANDREOU, E.; GHYSELS, E.; KOURTELLOS, A. Forecasting with Mixed-Frequency Data. In: CLEMENTS, M.P.; HENDRY, D.F. (Ed.). *The Oxford Handbook of Economic Forecasting*. New York: Oxford University Press, 2011. p. 225–246.
- ANDREOU, E.; GHYSELS, E.; KOURTELLOS, A. Should Macroeconomic Forecasters Use Daily Financial Data and How? *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 31, p. 240–251, 2013.
- BANDI, F.M.; RUSSELL, J.R. Microstructure Noise, Realized Volatility, and Optimal Sampling. *Review of Economic Studies*, v. 75, p. 339–369, 2008.
- BARNDORFF-NIELSEN, O.E.; SHEPHARD, N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of their Uses in Financial Econometrics. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 63, p. 167–241, 2001.
- BARNDORFF-NIELSEN, O.E.; SHEPHARD, N. Econometric Analysis of Realised Volatility and Its Use in Estimating Stochastic Volatility Models. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 64, p. 253–280, 2002a.
- BARNDORFF-NIELSEN, O.E.; SHEPHARD, N. Estimating Quadratic Variation Using Realized Variance. *Journal of Applied Econometrics*, v. 17, p. 457–478, 2002b.

BARNDORFF-NIELSEN, O.E.; SHEPHARD, N. Realised Power Variation and Stochastic Volatility. *Bernoulli*, v. 9, p. 243–265, 2003.

BARNDORFF-NIELSEN, O.E.; SHEPHARD, N. Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. *Journal of Financial Econometrics*, v. 2, p. 1–37, 2004.

BARNDORFF-NIELSEN, O.E.; SHEPHARD, N. Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation. *Journal of Financial Econometrics*, v. 4, p. 1–30, 2006.

BARNDORFF-NIELSEN, O.E.; SHEPHARD, N. Variation, Jumps and High-Frequency Data in Financial Econometrics. In: BLUNDELL, R.; TORSTEN, P.; NEWEY, W.K. (Ed.). *Advances in Economics and Econometrics. Theory and Applications, Ninth World Congress*. Econometric Society Monographs, Cambridge University Press, 2007. p. 328–372.

BATES, J.M.; GRANGER, C.W.J. The Combination of Forecasts. *Operations Research Quarterly*, v. 20, p. 451–468, 1969.

BECKER, R.; CLEMENTS, A.E. Are Combination Forecasts of S&P 500 Volatility Statistically Superior? *International Journal of Forecasting*, v. 24, p. 122–133, 2008.

BHANSALI, R.J. Parameter Estimation and Model Selection for Multistep Prediction of Time Series: A Review. In: GOSH, S. (Ed.). *Asymptotics, Nonparametrics and Time Series*. New York: Marcel Dekker, 1999. p. 201–225.

BHANSALI, R.J. Multi-step Forecasting. In: CLEMENTS, M.P.; HENDRY, D.F. (Ed.). *A Companion to Economic Forecasting*. Oxford: Blackwell, 2002.

BILLIO, M.; FERRARA, L.; GUÉGAN, D.; MAZZI, G.L. Evaluation of Regime Switching Models for Real-Time Business Cycle Analysis of the Euro Area. *Journal of Forecasting*, v. 32, p. 577–586, 2013.

BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307–327, 1986.

BOLLERSLEV, T.; LAW, T.H.; TAUCHEN, G. Risk, Jumps, and Diversification. *Journal of Econometrics*, v. 144, p. 234–256, 2008.

BROWNLEES, C.T.; GALLO, G.M. Comparison of Volatility Measures: a Risk Management Perspective. *Journal of Financial Econometrics*, v. 8, p. 29–56, 2010.

CHAUVET, M.; PIGER, J. Identifying Business Cycle Turning Points in Real Time. *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, v. 85, p. 47–61, 2003.

CHEVILLON, G.; HENDRY, D.F. Non-Parametric Direct Multi-Step Estimation for Forecasting Economic Processes. *International Journal of Forecasting*, v. 21, p. 201–218, 2005.

CLARK, T.E.; MCCracken, M.W. Tests of Equal Predictive Ability With Real-Time Data. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 27, p. 441–454, 2009.

CLARK, T.E.; WEST, K.D. Approximately Normal Tests for Equal Predictive Accuracy in Nested Models. *Journal of Econometrics*, v. 138, p. 291–311, 2007.

CLEMEN, R.T. Combining Forecasts: A Review and Annotated Bibliography. *International Journal of Forecasting*, v. 5, p. 559–581, 1989.

CLEMENTS, M.P.; GALVÃO, A.B. Macroeconomic Forecasting With Mixed-Frequency Data. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 26, p. 546–554, 2008.

- CLEMENTS, M.P.; GALVÃO, A.B. Forecasting US Output Growth Using Leading Indicators: An Appraisal Using MIDAS Models. *Journal of Applied Econometrics*, v. 24, p. 1187–1206, 2009.
- CLEMENTS, M.P.; GALVÃO, A.B.; KIM, J.H. Quantile Forecasts of Daily Exchange Rate Returns from Forecasts of Realized Volatility. *Journal of Empirical Finance*, v. 15, p. 729–750, 2008.
- CORSI, F. A Simple Long Memory Model of Realized Volatility. Working paper, University of Southern Switzerland, 2004.
- CORSI, F. A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, v. 7, p. 174–196, 2009.
- CROUSHORE, D.; STARK, T. A Real-Time Data Set for Macroeconomists. *Journal of Econometrics*, v. 105, p. 111–130, 2001.
- DIEBOLD, F.; HICKMAN, A.; INOUE, A.; SCHUERMAN, T. Converting 1-day Volatility to h -day Volatility: Scaling by \sqrt{h} is Worse Than You Think. Working Paper 97-34, Wharton Financial Institutions Center, 1998.
- DIEBOLD, F.X.; LEE, J.-H.; WEINBACH, G. Regime Switching With Time-Varying Transition Probabilities. In: HARGREAVES, C. (Ed.). *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration*. Oxford: Oxford University Press, 1994.
- DIEBOLD, F.X.; LOPEZ, J.A. Forecast Evaluation and Combination. In: MADDALA, G.S.; RAO, C.R. (Ed.). *Handbook of Statistics*. Amsterdam: North-Holland, 1996. p. 241–268.
- DIEBOLD, F.X.; MARIANO, R. Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 13, p. 253–263, 1995.
- DIEBOLD, F.X.; RUDEBUSCH, G.D. Forecasting Output With the Composite Leading Index: A Real-Time Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, v. 86, p. 603–610, 1991.
- DING, Z.; GRANGER, C.W.J.; ENGLE, R.F. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, v. 1, p. 83–106, 1993.
- DONALDSON, R.G.; KAMSTRA, M. Forecast Combining with Neural Networks. *Journal of Forecasting*, v. 15, p. 49–61, 1996.
- ENGLE, R.F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variances of U.K. Inflation. *Econometrica*, v. 50, p. 987–1008, 1982.
- ESTRELLA, A.; HARDOUVELIS, G.A. The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity. *Journal of Finance*, v. 46, p. 555–576, 1991.
- FILARDO, A.J. Business-Cycle Phases and Their Transitional Dynamics. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 12, p. 299–308, 1994.
- FORSBERG, L.; GHYSELS, E. Why Do Absolute Returns Predict Volatility So Well? *Journal of Financial Econometrics*, v. 5, p. 31–67, 2007.
- GALBRAITH, J.W.; TKACZ, G. Testing for Asymmetry in the Link Between the Yield Spread and Output in the G-7 Countries. *Journal of International Money and Finance*, v. 19, p. 657–672, 2000.
- GALVÃO, A.B. Changes in Predictive Ability With Mixed Frequency Data. *International Journal of Forecasting*, v. 29, p. 395–410, 2013.

- GARCIA, R. Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models. Working paper, Université de Montréal, 1993.
- GARCIA, R. Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models. *International Economic Review*, v. 39, p. 763–788, 1998.
- GHYSELS, E.; RUBIA, A.; VALKANOV, R. Multi-Period Forecasts of Volatility: Direct, Iterated, and Mixed-Data Approaches. Working paper, UNC and UCSD, 2009.
- GHYSELS, E.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. The MIDAS Touch: Mixed Data Sampling Regression Models. Working paper, UNC and UCLA, 2004.
- GHYSELS, E.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. There is a Risk-Return Tradeoff After All. *Journal of Financial Economics*, v. 76, p. 509–548, 2005.
- GHYSELS, E.; SANTA-CLARA, P.; VALKANOV, R. Predicting Volatility: Getting the Most Out of Return Data Sampled at Different Frequencies. *Journal of Econometrics*, v. 131, p. 59–95, 2006.
- GHYSELS, E.; SINKO, A.; VALKANOV, R. MIDAS Regressions: Further Results and New Directions. *Econometric Reviews*, v. 26, p. 53–90, 2007.
- GHYSELS, E.; SOHN, B. Which Power Variation Predicts Volatility Well? *Journal of Empirical Finance*, v. 16, p. 686–700, 2009.
- GHYSELS, E.; VALKANOV, R. Forecasting Volatility with MIDAS. In: BAUWENS, L.; HAFNER, C.; LAURENT, S. (Ed.). *Handbook of Volatility Models and Their Applications*. New Jersey: Wiley, 2012. p. 383–402.
- GIOT, P.; LAURENT, S.; PETITJEAN, M. Trading Activity, Realized Volatility and Jumps. *Journal of Empirical Finance*, v. 17, p. 168–175, 2010.
- GLOSTEN, L.R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, v. 48, p. 1779–1801, 1993.
- GRANGER, C.W.J.; NEWBOLD, P. Forecasting Transformed Series. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 38, p. 189–203, 1976.
- GUÉRIN, P.; MARCELLINO, M. Markov-Switching MIDAS Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 31, p. 45–56, 2013.
- HAMILTON, J.D. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, v. 57, p. 357–384, 1989.
- HAMILTON, J.D. *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- HAMILTON, J.D.; KIM, D.H. A Re-examination of the Predictability of Economic Activity Using the Yield Spread. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 34, p. 340–360, 2002.
- HANSEN, B.E. The Likelihood Ratio Test Under Nonstandard Conditions: Testing the Markov Switching Model of GNP. *Journal of Applied Econometrics*, v. 7, p. S61–S82, 1992.
- HANSEN, P.R.; LARGE, J.; LUNDE, A. Moving Average-Based Estimators of Integrated Variance. *Econometric Reviews*, v. 27, p. 79–111, 2008.
- HANSEN, P.R.; LUNDE, A. A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a Garch(1,1)? *Journal of Applied Econometrics*, v. 20, p. 873–889, 2005.

- HANSEN, P.R.; LUNDE, A. Realized Variance and Market Microstructure Noise. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 24, p. 127–161, 2006.
- HARVEY, D.; LEYBOURNE, S.; NEWBOLD, P. Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors. *International Journal of Forecasting*, v. 13, p. 281–291, 1997.
- HAWKES, R.; DATE, P. Medium-Term Horizon Volatility Forecasting: A Comparative Study. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 23, p. 465–481, 2007.
- HENDRY, D.F.; CLEMENTS, M.P. Pooling of Forecasts. *The Econometrics Journal*, v. 7, p. 1–31, 2004.
- HUANG, X.; TAUCHEN, G. The Relative Contribution of Jumps to Total Price Variance. *Journal of Financial Econometrics*, v. 3, p. 456–499, 2005.
- KIM, C.J.; NELSON, C.R. *State-Space Models With Regime Switching*. Cambridge: MIT Press, 1999.
- KIM, C.J.; PIGER, J.; STARTZ, R. Estimation of Markov Regime-Switching Regression Models With Endogenous Switching. *Journal of Econometrics*, v. 143, p. 263–273, 2008.
- KOOPMAN, S.J.; JUNGBACKER, B.; HOL, E. Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index Using Historical, Realised and Implied Volatility Measurements. *Journal of Empirical Finance*, v. 12, p. 445–475, 2005.
- KROLZIG, H-M. *Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis*. Berlin: Springer, 1997.
- KUZIN, V.; MARCELLINO, M.; SCHUMACHER, C. Pooling Versus Model Selection for Nowcasting GDP with Many Predictors: Empirical Evidence for Six Industrialized Countries. *Journal of Applied Econometrics*, v. 28, p. 392–411, 2013.
- MARCELLINO, M.; STOCK, J.H.; WATSON, M.W. A Comparison of Direct and Iterated Multistep AR Methods for Forecasting Macroeconomic Time Series. *Journal of Econometrics*, v. 135, p. 499–526, 2006.
- MARTENS, M.; VAN DIJK, D.; POOTER, M. Forecasting S&P 500 Volatility: Long Memory, Level Shifts, Leverage Effects, Day-of-the-week Seasonality, and Macroeconomic Announcements. *International Journal of Forecasting*, v. 25, p. 282–303, 2009.
- MCALÉER, M.; MEDEIROS, M.C. A Multiple Regime Smooth Transition Heterogeneous Autoregressive Model for Long Memory and Asymmetries. *Journal of Econometrics*, v. 147, p. 104–119, 2008.
- MÜLLER, U.A.; DACOROGNA, M.M.; DAVÉ, R.D.; OLSEN, R.B.; PICTET, O.V.; WEIZSÄCKER, J.V. Volatilities of Different Time Resolutions-Analyzing the Dynamics of Market Components. *Journal of Empirical Finance*, v. 4, p. 213–239, 1997.
- NALEWAIK, J.J. Estimating Probabilities of Recession in Real Time Using GDP and GDI. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 44, p. 235–253, 2012.
- ORPHANIDES, A.; VAN NORDEN, S. The Reliability of Inflation Forecasts Based on Output Gaps in Real Time. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 37, p. 583–601, 2005.
- PATTON, A. Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies. *Journal of Econometrics*, v. 160, p. 246–256, 2011.
- PATTON, A.; SHEPPARD, K. Optimal Combinations of Realised Volatility Estimators. *International Journal of Forecasting*, v. 25, p. 218–238, 2009.

- PONG, S.E.; SHACKLETON, M.B.; TAYLOR, S.J.; XU, X. Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models. *Journal of Banking and Finance*, v. 28, p. 2541–2563, 2004.
- PSARADAKIS, Z.; SPAGNOLO, N. On the Determination of the Number of Regimes in Markov-Switching Autoregressive Models. *Journal of Time Series Analysis*, v. 24, p. 237–252, 2003.
- PSARADAKIS, Z.; SPAGNOLO, N. Joint Determination of the State Dimension and Autoregressive Order for Models With Markov Regime Switching. *Journal of Time Series Analysis*, v. 27, p. 753–766, 2006.
- SCHARTH, M.; MEDEIROS, M.C. Asymmetric Effects and Long Memory in the Volatility of Dow Jones Stocks. *International Journal of Forecasting*, v. 25, p. 304–327, 2009.
- SCHWERT, G.W. Why Does Stock Market Volatility Change Over Time? *Journal of Finance*, v. 44, p. 1115–1153, 1989.
- STOCK, J.H.; WATSON, M.W. How Did Leading Indicator Forecasts Perform During the 2001 Recession. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, v. 89/3, p. 71–90, 2003.
- TAYLOR, S.J. *Modelling Financial Time Series*. New York: Wiley, 1986.
- TERÄSVIRTA, T. Modeling Economic Relationships With Smooth Transition Regressions. In: ULLAH, A.; GILES, D.E. (Ed.). *Handbook of Applied Economic Statistics*. New York: Dekker, 1998.
- TERÄSVIRTA, T.; TJOSTHEIM, D.; GRANGER, C.W.J. *Modelling Nonlinear Economic Time Series*. Oxford: Oxford University Press, 2010.
- TIMMERMANN, A. Forecast Combinations. In: ELLIOTT, G.; GRANGER, C.W.J.; TIMMERMANN, A. (Ed.). *Handbook of Economic Forecasting*. New York: Elsevier Science, 2006. p. 135–196.
- VAN DIJK, D.; TERÄSVIRTA, T.; FRANSES, P.H. Smooth Transition Autoregressive Models - A Survey of Recent Developments. *Econometric Reviews*, v. 21, p. 1–47, 2002.
- ZAKOIAN, J.M. Threshold Heteroskedasticity Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 18, p. 931–955, 1994.