Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Espaços Uniformemente Convexos e Desigualdades

por

ROSANE MARIA FYDRYZEWSKI

Porto Alegre, 07 de março de 2007.

Dissertação submetida por Rosane Maria Fydryzewski[1] como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Dr. Jaime Bruck Ripoll
Dr. José Afonso Barrionuevo (PPGMAp-UFRGS)

Data da Defesa: 07 de março de 2007.

[1]Bolsista da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer à Deus por ter me dado força e saúde para conseguir chegar até aqui.

Quero agradecer em especial à Jeferson Rodrigues Abreu, que me acompanhou desde o início do mestrado. Obrigada pelo amor, companheirismo, pela paciência, pelas brincadeiras e por todo o apoio. Obrigada também por fazer parte da minha vida, você sabe o quanto é especial para mim.

Em especial, agradeço à Leonardo Prange Bonorino, pela orientação e apoio durante a dissertação. Obrigada.

Aos professores da pós, Alexandre Tavares Baravieira, Jaime Bruck Ripoll, Luis Gustavo Doninelli Mendes, Eduardo Henrique de Mattos Brietzke e Miguel Angel Alberto Ferrero. Obrigada.

Quero agradecer à todos os colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Joyce, Cleonis, Adriana, Cintia e Taiane. Em especial aos colegas, Cícero Nachtigall pela amizade e pelas horas de estudos. Guilherme Pumi, pelo exemplo de determinação, pela amizade, pela ajuda no LaTeX *e por todo apoio. Edson Werle (in memorian), pela amizade, pelos ensinamentos, pelos conselhos. Apesar do pouco tempo de amizade que tivemos, para mim, você sempre será um exemplo.*

À toda a minha família, em especial, à minha irmã Izolda Fydryzewski, pelo apoio desde o início da minha graduação. Obrigada.

Quero agradecer em especial à Tatiane Bagatini, uma pessoa iluminada que Deus colocou em minha vida, você é como uma irmã para mim. Obrigada por tudo.

À Rosane, nossa secretária do Programa de Pós-Graduação. Obrigada.

Quero agradecer à casa de estudante CEFAV, pela moradia gratuíta.

À CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico) pelo apoio financeiro.

Ao pessoal da CEFAV, Tatiane, Simone, Daiane, Guilherme, Ricardo, Márcio e Marisa pelo apoio e pela amizade. Obrigada a todos.

Por fim quero agradecer à todas aquelas pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuiram para esta fase da minha vida. Obrigada a todos.

Para minha mãe Josepha Fydryzewski,
pela compreensão, apoio
e pelo exemplo de vida que é.
Ela sabe o quão especial é para mim.

Resumo

No presente trabalho nós provamos diversas desigualdades a respeito da convexidade uniforme e a suavidade uniforme para os espaços L^p. Muitas dessas desigualdades são análogas a resultados já conhecidos. Posteriormente provamos várias desigualdades também envolvendo a convexidade uniforme e a suavidade uniforme para os espaços C_p. Dentre estas desigualdades, provamos a desigualdade ótima 2-uniformemente convexa para os espaços L^p e C_p.

Abstract

In this work we prove several inequalities regarding the uniform convexity and the uniform smoothness of L^p spaces. Some of them are analogous to well-known results. We also prove several inequalities regarding the uniform convexity and the uniform smoothness of C_p spaces. One of them is the optimal 2-uniform convexity inequality for L^p and C_p spaces.

Sumário

Introdução **1**

1 Conceitos Preliminares **3**

1.1 Definições e Teoremas 3

2 Espaços Uniformemente Convexos e Uniformemente Suaves **7**

2.1 Espaços Uniformemente Convexos e Uniformemente Suaves 7

2.2 Módulos de Convexidade e Suavidade de um Espaço de Banach 12

2.3 Teorema de Lindenstrauss 16

3 Convexidade e Suavidade Uniforme nos Espaços L^p **18**

3.1 Desigualdades de Clarkson 18

3.2 Convexidade e Suavidade Uniforme dos Espaços L^p . 27

3.3 Espaços r-Uniformemente Convexos e r-Uniformemente Suaves 28

4 Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa para Espaços L^p **36**

4.1 Desigualdade de Hanner 36

4.2 Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa . . . 40

4.3 Convexidade 2- Uniforme do Espaço de Hilbert . . . 43

4.4 Dualidade entre Convexidade e Suavidade Uniforme 45

5 Espaços C_p **53**

5.1 Definições e algumas propriedades sobre o traço de uma Matriz 53

5.2 Desigualdades de Clarkson 57

5.3 Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa . . . 62

Introdução

O conceito de convexidade uniforme e sua propriedade dual, a suavidade uniforme, têm um papel importante em Análise.

A noção de convexidade uniforme foi introduzida por James A. Clarkson em 1936. A partir de suas desigualdades obtemos a convexidade e a suavidade uniforme dos espaços L^p.

A noção de suavidade uniforme foi introduzida por Marlon M. Day em 1944. Day provou que um espaço de Banach X é uniformemente suave se e somente se seu dual X^* é uniformemente convexo.

Esta dissertação tem por objetivo provar várias desigualdades envolvendo convexidade uniforme e suavidade uniforme. Para os espaços L^p e C_p. Muitas dessas desigualdades já são conhecidas. Mas o objetivo principal do trabalho é provar as desigualdades de Olof Hanner para espaços L^p. Essas desigualdades são conhecidas como desigualdades de Hanner. Provar também a desigualdade ótima 2-uniformemente convexa para os espaços L^p e C_p. A prova da desigualdade ótima 2-uniformemente convexa para os espaços C_p é devida a Elliott H. Lieb.

O trabalho é dividido como segue.

O Capítulo 1 apresenta conceitos preliminares que são introduzidos sem demonstração.

No Capítulo 2 definimos convexidade e suavidade uniformes, modulo de convexidade e de suavidade. Mostramos que se um espaço de Banach X é uniformemente convexo, seu dual X^* é uniformemente suave. Provamos também que o módulo de suavidade de X e seu dual X^* estão relacionados.

No Capítulo 3 definimos r-convexidade uniforme e provamos diversas desigualdades para espaços L^p, dentre elas as desigualdades de Clarkson. Provamos também que os espaços L^p são uniformemente convexos e suaves.

No Capítulo 4 mostramos as desigualdades de Hanner para espaços L^p e a desigualdade ótima 2-uniformemente convexa para espaços L^p. Provamos ainda que as desigualdades de Hanner também implicam a convexidade e a suavidade uniforme para espaços de funções.

No Capítulo 5 apresentamos vários resultados para os espaços C_p. Provamos a desigualdade "fácil" de Clarkson e a desigualdade ótima 2-uniformemente convexa para espaços C_p.

Todo o trabalho foi baseado em [16] e referências ali citadas.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste trabalho, denotamos por X, X^* e X^{**} o espaço de Banach, seu dual e seu bidual, respectivamente.

1.1 Definições e Teoremas

Definição 1.1.1. (Espaços L^p). Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e X um conjunto mensurável. Para $p \geq 1$ definimos o espaço L^p de X por

$$L^p(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < +\infty\},$$

onde $\|\cdot\|_p$ é a norma p em L^p dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

Definição 1.1.2. (Espaços C_p). Seja $p \geq 1$, denotamos por C_p o espaço de Banach dos operadores compactos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que

$$\|A\|_p = \left(\operatorname{tr} (A^*A)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

sendo o traço do operador compacto B definido por

$$\operatorname{tr}(B) = \sum_k (Be_k, e_k),$$

onde $\{e_k\}$ é uma base ortonormal qualquer de $\mathcal{H}$.

Teorema 1.1.1. *(Desigualdade de Hölder). Sejam x_i e $y_i \in \mathbb{C}$, para $i \in \{1, \cdots, m\}$, $p > 1$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Prova: Veja [15]. $\square$

Teorema 1.1.2. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam x_i e $y_i \in \mathbb{C}$, para $i \in \{1, \cdots, m\}$, então,*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova: Veja [15]. $\square$

Teorema 1.1.3. *(Teorema de Hahn-Banach). Seja X um espaço vetorial real e p uma função definida em X satisfazendo*

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y),$$

para todo x e y em X e todo $\alpha \in [0,1]$. Suponha que λ é um funcional linear definido em um subespaço Y de X que satisfaz $\lambda(x) \leq p(x)$, para todo $x \in Y$. Então, existe um funcional Λ, definido em X, satisfazendo $\Lambda(x) \leq p(x)$, para todo x em X, tal que $\Lambda(x) = \lambda(x)$ para todo $x \in Y$.

Prova: Veja [19]. $\square$

Corolário 1.1.1. *Seja y um elemento de um espaço vetorial normado X. Então existe $\Lambda \in X^*$ não nulo tal que*

$$\Lambda(y) = \|\Lambda\|_{X^*} \|y\|.$$

Prova: Veja [19]. $\square$

Definição 1.1.3. Sejam X e Y espaços de Banach,

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & X \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto T(x) \end{aligned}$$

um operador linear limitado. Então, $T' : Y^* \longrightarrow X^*$, definido por $(T'l)(x) = lT(x)$ para todo $x \in X$ e para todo $l \in Y^*$, linear e limitado, é chamado de operador adjunto da aplicação T.

Proposição 1.1.1. *O operador adjunto T' é linear, limitado e $\|T'\| = \|T\|$.*

Prova: [15]. $\square$

Teorema 1.1.4. *(Derivação sob o sinal da integral). Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo $x \in U$ a função $t \longmapsto f(x,t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$;*
2. *A i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ existe para cada $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.*

Então, a função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt,$$

possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt.$$

Prova: Veja [17]. □

Em suma, pode-se derivar sob o sinal de integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Teorema 1.1.5. *Seja X um espaço de Banach. Para cada $x \in X$, seja $\tilde{x}(\cdot)$ um funcional linear em X^* que associa a cada $\lambda \in X^*$ o número $\lambda(x)$. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto \tilde{x} \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico de X em um subespaço de X^{**}.

Prova: Veja [19]. □

Definição 1.1.4. (Espaços Reflexivos). Se a aplicação J definida como no Teorema 1.1.5, é sobrejetiva, dizemos que X é um *espaço reflexivo.*

Observação 1.1.1. Como J é um isomorfismo isométrico, quando X é reflexivo identificamos X e X^{**}.

Definição 1.1.5. (Espectro). Seja $T \in \mathcal{L}(X)$, o *espectro* de T, denotado por $\sigma(T)$, consiste de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(T - \lambda I)$ não é invertível em $\mathcal{L}(X)$, onde I denota o operador identidade.

Definição 1.1.6. (Resolvente). Seja $T \in \mathcal{L}(X)$, então o conjunto $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\,(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$ é chamado *resolvente* de T.

Teorema 1.1.6. *(Fórmula integral de Cauchy). Seja f analítica no fecho da região limitada por um caminho fechado C. Se z_0 é um ponto qualquer no interior de C, então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

onde a integração é efetuada no sentido positivo ao longo de C.

Prova: Veja [5]. □

Capítulo 2

Espaços Uniformemente Convexos e Uniformemente Suaves

Neste capítulo vamos definir espaços uniformemente convexos e uniformementes suaves. Definimos também o Módulo de Convexidade e o Módulo de Suavidade para tais espaços. Provamos alguns resultados importantes que envolvem tais definições e que X é uniformemente convexo se, e somente se, X^* é uniformemente suave. Mostramos também que o módulo de convexidade para um espaço normado X e o módulo de suavidade para seu dual X^* estão relacionados.

2.1 Espaços Uniformemente Convexos e Uniformemente Suaves

Definição 2.1.1. (Espaços Uniformemente Convexos). Um espaço normado X é dito *uniformemente convexo* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se x e y são vetores unitários em X,

$$\|x - y\| \geq 2\varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Definição 2.1.2. (Espaços Uniformemente Suaves). Um espaço normado X é dito *uniformemente suave* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que, se x e y são vetores unitários em X,

$$\|x - y\| \leq 2\tau \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq 1 - \varepsilon\tau.$$

Lema 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach. Então, X é uniformemente convexo se, e somente se, quaisquer seqüencias x_n e y_n em X tais que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Prova: Suponhamos inicialmente que X é uniformemente convexo. Vamos supor por absurdo que existem $\varepsilon > 0$ e subseqüencias x_{n_k} de x_n e y_{n_k} de y_n em X tais que

$$\|x_{n_k}\| = \|y_{n_k}\| = 1 \text{ e } 1 - \frac{\|x_{n_k} + y_{n_k}\|}{2} \longrightarrow 0, \text{ mas } \|x_{n_k} - y_{n_k}\| \geq 2\varepsilon.$$

Isto não ocorre, pois o fato de $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| \geq 2\varepsilon$ e $1 - \frac{\|x_{n_k}+y_{n_k}\|}{2} \to 0$ contradiz a hipótese de X ser uniformemente convexo. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_{n_k} - y_{n_k}\| = 0$.

Reciprocamente, suponhamos por absurdo que X não é uniformemente convexo. Então, para algum $\varepsilon > 0$ existem seqüencias x_n e y_n tais que

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \text{ e } 1 - \frac{\|x_n + y_n\|}{2} \longrightarrow 0, \text{ e } \|x_n - y_n\| \geq 2\varepsilon.$$

Mas isto é absurdo, pois o fato de $\|x_n - y_n\| \geq 2\varepsilon$ contradiz a hipótese de $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Logo, X é uniformemente convexo. $\square$

Lema 2.1.2. *Um espaço normado X é uniformemente suave se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\tau(\varepsilon) > 0$ tal que, se x e y pertencem a X com $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq \tau$, temos*

$$\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2 + \varepsilon \|y\|. \tag{2.1}$$

Prova: Vamos mostrar que (2.1) implica que X é uniformemente suave. Suponhamos por absurdo que X não é uniformemente suave. Então existem $\varepsilon > 0$ e seqüencias x_n e y_n tais que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\|x_n - y_n\| \to 0$ e

$$\|x_n + y_n\| < \|x_n\| + \|y_n\| - \varepsilon \|x_n - y_n\|. \tag{2.2}$$

Definindo $S_n = x_n + y_n$, $t_n = x_n - y_n$, temos

$$x_n = \frac{S_n + t_n}{2} \text{ e } y_n = \frac{S_n - t_n}{2}.$$

Com isso, (2.2) se torna

$$\|S_n\| < \left\| \frac{S_n + t_n}{2} \right\| + \left\| \frac{S_n - t_n}{2} \right\| - \varepsilon \|t_n\|,$$

ou seja,

$$\|S_n + t_n\| + \|S_n - t_n\| > 2\|S_n\| + 2\varepsilon \|t_n\| . \tag{2.3}$$

Defina

$$S'_n = \frac{S_n}{\|S_n\|} \quad \text{e} \quad t'_n = \frac{t_n}{\|S_n\|} .$$

Note que

$$\|S'_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \|t'_n\| = \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n + y_n\|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, por um lado temos

$$\begin{aligned} \|S_n + t_n\| + \|S_n - t_n\| &= \big\|S'_n \|S_n\| + t'_n \|S_n\| \big\| + \big\|S'_n \|S_n\| - t'_n \|S_n\| \big\| \\ &= \|S_n\| \left(\|S'_n + t'_n\| + \|S'_n - t'_n\|\right) . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2\|S_n\| + 2\varepsilon \|t_n\| &= 2\|S'_n\| \|S_n\| + 2\varepsilon \|t'_n\| \|S_n\| \\ &= \left(2\|S'_n\| + 2\varepsilon \|t'_n\|\right) \|S_n\| . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) e (2.4) em (2.3), obtemos

$$\|S'_n + t'_n\| + \|S'_n - t'_n\| > 2 + 2\varepsilon \|t'_n\| ,$$

o que contradiz (2.1). Logo, X é uniformemente suave e isto completa a prova. Para mostrar a recíproca devemos usar um argumento similar ao do Teorema 4.4.1. $\square$

Lema 2.1.3. *Seja X um espaço normado uniformemente convexo e seja $u_0 \in X^*$ com $\|u_0\| = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se x' e x'' satisfazem $\|x'\| = \|x''\| = 1$ e $|u_0(x') - 1| < 2\delta$ e $|u_0(x'') - 1| < 2\delta$, então $\|x' - x''\| < \varepsilon$.*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$ da definição de convexidade uniforme. Note que

$$\frac{|u_0(x' + x'')|}{2} \le \frac{\|u_0\| \, \|x' + x''\|}{2} = \frac{\|x' + x''\|}{2} .$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\|x' + x''\|}{2} &\ge \frac{|u_0(x' + x'')|}{2} \\ &\ge |u_0(x')| - \frac{|u_0(x'' - x')|}{2} \\ &= |u_0(x')| - \frac{|u_0(x'') - 1|}{2} \\ &> 1 - \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Da definição de δ, segue que

$$\|x' - x''\| < \varepsilon.$$

Isto completa a prova. $\square$

Lema 2.1.4. *Seja X um espaço de Banach. Se X é uniformemente suave então X^* é uniformemente convexo.*

Prova: Suponhamos por absurdo que X^* não é uniformemente convexo. Então, pelo Lema 2.1.1, existem seqüencias u_n e v_n em X^* tais que

$$\|u_n\| = \|v_n\| = 1, \ \lim_{n\to\infty} \|u_n + v_n\| = 2 \ \text{ e } \ \|u_n - v_n\| \geq \varepsilon_0,$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$. Vamos assumir que $\|u_n + v_n\| > 2 - \frac{\varepsilon_0}{4n}$. Pela definição de norma, para cada n existem x_n e y_n em X tais que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$,

$$(u_n + v_n)(x_n) \geq \|u_n + v_n\| - \frac{\varepsilon_0}{8n}$$

e

$$(u_n - v_n)(x_n) \geq \|u_n - v_n\| - \frac{\varepsilon_0}{8n}\,.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\left\|x_n + \frac{y_n}{n}\right\| + \left\|x_n - \frac{y_n}{n}\right\| &\geq u_n\left(x_n + \frac{y_n}{n}\right) + v_n\left(x_n - \frac{y_n}{n}\right)\\
&= (u_n + v_n)(x_n) + (u_n - v_n)\left(\frac{y_n}{n}\right)\\
&\geq \|u_n + v_n\| + \|u_n - v_n\| \cdot \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon_0}{4n}\\
&> 2 - \frac{\varepsilon_0}{4n} + \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon_0}{4n}\\
&= 2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \left\|\frac{y_n}{n}\right\|.
\end{aligned}$$

Note que $\left\|\frac{y_n}{n}\right\| \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Obtemos então uma contradição ao Lema 2.1.2. Logo, X^* é uniformemente convexo. $\square$

Agora vamos enunciar um teorema cuja prova fará uso de todos os lemas enunciados e provados até aqui. A prova deste teorema é um resultado de Gottfried Köthe [14].

Teorema 2.1.1. *Todo espaço uniformemente convexo é reflexivo.*

Prova: Veja [3]. $\square$

Teorema 2.1.2. *Seja X um espaço de Banach. Então X é uniformemente convexo se, e somente se, X^* é uniformemente suave.*

Prova: Suponhamos que X^* não é uniformemente suave. Então, pelo Lema 2.1.2, existe $\varepsilon_0 > 0$ e existem seqüencias u_n, $v_n \in X^*$ tais que $\|u_n\| = 1$, $\|v_n\| \to 0$ e

$$\|u_n + v_n\| + \|u_n - v_n\| > 2 + \varepsilon_0 \|v_n\| . \tag{2.6}$$

Como X é uniformemente convexo e, portanto, reflexivo, existem elementos x_n, $x'_n \in X$ tais que $\|x_n\| = \|x'_n\| = 1$,

$$\|u_n + v_n\| = (u_n + v_n)(x_n)$$

e

$$\|u_n - v_n\| = (u_n - v_n)(x_n).$$

Note que

$$\Big| \|u_n + v_n\| - 1\Big| \leq \Big| \|u_n\| + \|v_n\| - 1\Big| = \Big|1 + \|v_n\| - 1\Big| = \|v_n\| .$$

Assim temos que

$$|(u_n + v_n)(x_n) - 1| \leq \|v_n\| .$$

Deste modo podemos concluir que

$$|u_n(x_n) - 1| \leq 2 \|v_n\| .$$

Da mesma maneira concluimos que $|u_n(x'_n) - 1| \leq 2 \|v_n\|$. Como por hipótese $\|v_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$, podemos afirmar que, para um $\delta(\varepsilon_0)$ pequeno, $2 \|v_n\| < \dfrac{\delta(\varepsilon_0)}{2}$, segue do Lema 2.1.3 que $\|x_n - x'_n\| < \varepsilon_0$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n + v_n\| + \|u_n - v_n\| &= |(u_n + v_n)(x_n) + |(u_n - v_n)(x'_n)| \\
&= |u_n(x_n) + v_n(x_n) + u_n(x'_n) - v_n(x'_n)| \\
&\leq |u_n(x_n) + u_n(x'_n)| + \|v_n\| \|x_n - x'_n\| .
\end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\|u_n + v_n\| + \|u_n - v_n\| &\leq |u_n(x_n) + u_n(x'_n)| + \|v_n\| \|x_n - x'_n\| \\
&\leq \|u_n\| \|x_n\| + \|u_n\| \|x'_n\| + \varepsilon_0 \|v_n\| \\
&\leq 2 + \varepsilon_0 \|v_n\| ,
\end{aligned}$$

o que contradiz (2.6) para $\varepsilon < \varepsilon_0$. Logo X^* é uniformemente suave. Reciprocamente, como X é um espaço de Banach, então X^* também é um espaço de Banach, e como X^* é uniformemente suave, pelo Lema 2.1.4 temos que X^{**} é uniformemente convexo. Como X é um subespaço de X^{**} e como X^{**} é uniformemente convexo, então X é uniformemente convexo. □

2.2 Módulos de Convexidade e Suavidade de um Espaço de Banach

Definição 2.2.1. (Módulo de Convexidade). Seja X um espaço de Banach. A função dada por

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf \left\{ 1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq 2\varepsilon \right\},$$

é chamado *módulo de convexidade* de X.

Muitas vezes a função $\delta_X(\cdot)$ é definida com ε no lugar de 2ε na última desigualdade. A Figura 2.1 dá uma noção geométrica do módulo de convexidade.

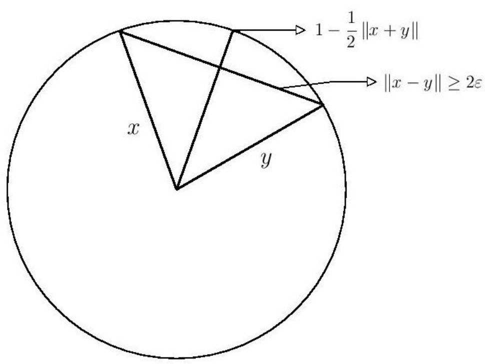

Figura 2.1: Noção geométrica do módulo de convexidade.

Proposição 2.2.1. *X é uniformemente convexo se, e somente se, δ_X é estritamente positiva para todo $\varepsilon > 0$.*

Prova: Suponhamos que X é uniformemente convexo. Então, dados dois vetores x e y tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\varepsilon > 0$, sempre podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$\|x-y\| \geq 2\varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \delta_X(\varepsilon) &= \inf \left\{ 1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq 2\varepsilon \right\} \\ &\geq \inf\{1 - (1-\delta) : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq 2\varepsilon\} \\ &= \inf\{\delta : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq 2\varepsilon\} \\ &= \delta > 0. \end{aligned}$$

Logo, δ_X é estritamente positiva. Reciprocamente, suponhamos que δ_X seja estritamente positiva. Então existe $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que, para x e y com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq 2\varepsilon$, tenhamos

$$\inf \left\{ 1 - \frac{1}{2}\|x + y\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq 2\varepsilon \right\} \geq \eta.$$

Então,

$$1 - \frac{1}{2}\|x + y\| \geq \eta,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \eta.$$

Fazendo $\eta = \delta$, obtemos que X é uniformemente convexo. $\square$

Observação 2.2.1. Seja X um espaço de Banach. A função dada por

$$S_X(\tau) := \sup \left\{ 1 - \frac{1}{2}\|x + y\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \leq 2\tau \right\}, \tag{2.7}$$

é uma maneira natural de definir o módulo de suavidade, pois é uma forma semelhante a definição do módulo de convexidade. De qualquer forma, a definição (2.7) não adapta bem a dualidade entre convexidade e suavidade uniformes. Portanto, vamos definir em seu lugar uma outra função $\rho_X(\cdot)$.

Definição 2.2.2. (Módulo de Suavidade) Seja X um espaço de Banach. A função

$$\rho_X(\tau) := \sup \left\{ \frac{\|u + v\| + \|u - v\|}{2} - 1 : \|u\| = 1, \|v\| = \tau \right\}, \tag{2.8}$$

é chamada *módulo de suavidade* de X.

Exemplo 2.2.1. A Figura 2.2 (veja página 14) nos dá a noção geométrica de um espaço que não é uniformemente suave. Note que, neste caso $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\rho(\tau)}{\tau} \neq 0$, pois os segmentos obtidos no caso da figura são proporcionais.

Conforme veremos na próxima proposição, para τ pequeno a diferença entre $S_X(\tau)$ e $\rho_X(\tau)$ não é substancial.

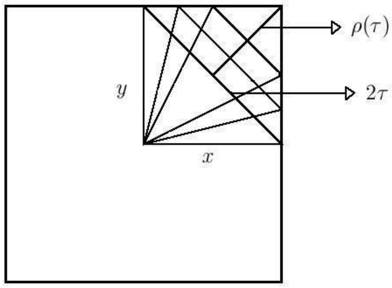

Figura 2.2: Um espaço que não é uniformemente suave.

Proposição 2.2.2. *Seja $S_X(\tau)$ dada por (2.7) e $\rho(\tau)$ dada por (2.8). Então,*

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\tau\to 0}\frac{S_X(\tau)}{\tau}=0.$$

Prova: Suponhamos que $\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\rho_X(\tau)}{\tau}=0$. Dados $x,y\in X$ tais que $\|x\|=\|y\|=1$ e $\|x-y\|\leq 2\tau$, sejam

$$u=\frac{x+y}{\|x+y\|}\quad \text{e}\quad v=\frac{x-y}{\|x+y\|}.$$

Assim, $\|u\|=1$ e

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}\\
&\leq \frac{2\tau}{\|x+y\|}\\
&= \frac{2\tau}{\|2x+y-x\|}\\
&= \frac{2\tau}{2\left\|x-\frac{(x-y)}{2}\right\|}\\
&\leq \frac{2\tau}{2\left(\|x\|-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|\right)}\\
&\leq \frac{2\tau}{2(1-\tau)}\\
&= \frac{2\tau}{2-2\tau}\\
&\leq 2\tau,
\end{aligned}$$

se $\tau\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Note que

$$\frac{u+v}{2}=\frac{x}{\|x+y\|}\quad \text{e}\quad \frac{u-v}{2}=\frac{y}{\|x+y\|}.$$

Logo,
$$\frac{\|u+v\|}{2}+\frac{\|u-v\|}{2}=\frac{\|x\|}{\|x+y\|}+\frac{\|y\|}{\|x+y\|}=\frac{2}{\|x+y\|}.$$
Portanto, como ρ é crescente,

$$\begin{aligned}
\rho(2\tau) &\geq \rho(\|v\|)\\
&\geq \frac{\|u+v\|}{2}+\frac{\|u-v\|}{2}-1\\
&\geq \frac{2}{\|x+y\|}-1\\
&= \frac{2-\|x+y\|}{\|x+y\|}\\
&\geq \frac{2-\|x+y\|}{2}\\
&= 1-\frac{\|x+y\|}{2}.
\end{aligned}$$

Como x e y são arbitrários tais que $\|x\|=\|y\|=1$ e $\|x-y\|\leq 2\tau$, então

$$\rho(2\tau)\geq S_X(\tau)\geq 0.$$

Assim,
$$0\leq \lim_{\tau\to 0}\frac{S_X(\tau)}{\tau}\leq \lim_{\tau\to 0}\frac{\rho(2\tau)}{\tau}=0.$$

□

Proposição 2.2.3. *Se*
$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}=0,$$
então X é uniformemente suave.

Prova: Suponhamos que $\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}=0$, então, dado $\varepsilon>0$, temos

$$\frac{\frac{\|u-v\|+\|u+v\|}{2}-1}{\tau}\leq\varepsilon.$$

Pela Proposição 2.2.2, para x e y tais que $\|x\|=\|y\|=1$, temos

$$0\leq\frac{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|}{\tau}\leq\frac{\frac{\|u-v\|+\|u+v\|}{2}-1}{\tau}\leq\varepsilon.$$

Então,
$$\frac{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|}{\tau}\leq\varepsilon\iff\frac{1}{2}\|x+y\|\geq 1-\varepsilon\tau.$$

Logo, X é uniformemente suave. $\square$

O próximo teorema é um resultado devido a Lindenstrauss [18], cuja prova é uma versão mais quantitativa da apresentada quando provamos que X é uniformemente convexo se, e somente se, X^* é uniformemente suave.

2.3 Teorema de Lindenstrauss

Teorema 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach. O módulo de convexidade de X e o módulo de suavidade de X^* estão relacionados por*

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup\{\tau\varepsilon - \delta_X(\varepsilon) : 0 \leq \varepsilon \leq 1\}, \tag{2.9}$$

para todo $\tau > 0$.

Prova: Primeiro vamos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ e $\tau > 0$,

$$\delta_X(\varepsilon) + \rho_{X^*}(\tau) \geq \tau\varepsilon. \tag{2.10}$$

Para isso, sejam x, $y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| = 2\varepsilon$. Pelo Corolário 1.1.1, existe f, $g \in X^*$ satisfazendo $\|f\| = \|g\| = 1$, tal que

$$f(x+y) = \|x+y\| \text{ e } g(x-y) = \|x-y\|.$$

Então,

$$\begin{aligned}
2\rho_{X^*}(\tau) &\geq \|f + \tau g\| + \|f - \tau g\| - 2 \\
&\geq f(x) + \tau g(x) + f(y) - \tau g(y) - 2 \\
&= f(x+y) + \tau g(x-y) - 2 \\
&= \|x+y\| + \tau\|x-y\| - 2 \\
&= \|x+y\| + 2\varepsilon\tau - 2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho_{X^*}(\tau) &\geq -1 + \frac{\|x+y\|}{2} + \varepsilon\tau \\
&\geq -\inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq 2\varepsilon\right\} + \varepsilon\tau \\
&\geq -\delta_X(\varepsilon) + \varepsilon\tau,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\rho_{X^*}(\tau) + \delta_X(\varepsilon) \geq \varepsilon\tau. \tag{2.11}$$

Agora sejam f e g em X^* satisfazendo $\|f\| = 1$ e $\|g\| = \tau$. Dado $\eta > 0$, existem x, $y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ e

$$(f+g)(x) \geq \|f+g\| - \eta \quad \text{e} \quad (f-g)(y) \geq \|f-g\| - \eta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|f+g\| + \|f-g\| &\leq f(x) + g(x) + \eta + f(y) - g(y) + \eta \\
&= f(x+y) + g(x-y) + 2\eta \\
&\leq \|x+y\| + \tau \|x-y\| + 2\eta \\
&= \|x+y\| + 2\varepsilon\tau + 2\eta,
\end{aligned}$$

onde $2\varepsilon = \|x-y\| \in [0,2]$. Subtraindo 2 de ambos lados da desigualdade e tomando o supremo, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \{\|f+g\| + \|f-g\| - 2\} &\leq \sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \{-2 + \|x+y\| + 2\varepsilon\tau\} + 2\eta \\
&= 2 \sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \left\{-1 + \frac{\|x+y\|}{2} + \varepsilon\tau\right\} + 2\eta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\rho_{X^*}(\tau) &= \sup\left\{\frac{\|f+g\| + \|f-g\|}{2} - 1 : \|f\| = 1,\ \|g\| = \tau\right\} \\
&\leq \sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \left\{-1 + \frac{\|x+y\|}{2} + \varepsilon\tau\right\} + \eta \\
&\leq \sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \left\{\sup\left\{\frac{\|x+y\|}{2} - 1 : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq 2\varepsilon\right\} + \varepsilon\tau\right\} + \eta \\
&\leq \sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \{-\delta_X(\varepsilon) + \varepsilon\tau\} + \eta.
\end{aligned}$$

Como a desigualdade vale para todo $\eta > 0$, segue que

$$\rho_{X^*}(\tau) \leq \sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \{\varepsilon\tau - \delta_X(\varepsilon)\}. \tag{2.12}$$

De (2.12) e (2.11), concluímos (2.9). $\square$

Capítulo 3

Convexidade e Suavidade Uniforme nos Espaços L^p

Neste capítulo vamos apresentar certas definições e resultados gerais para espaços L^p.
Vamos provar as desigualdades de Clarkson e, usando tais desigualdades, provar que os espaços L^p, para $p > 1$ são uniformemente convexos e uniformemente suaves.

Notação: Durante todo este trabalho, q denota o índice dual de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para $1 \leq p \leq \infty$.

3.1 Desigualdades de Clarkson

Lema 3.1.1. *(Caracterização Variacional de Somas das p-ésimas Potências). Para $1 < p < \infty$, defina $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por*

$$\alpha(r) = (1 + r)^{p-1} + |1 - r|^{p-1}. \operatorname{sinal}(1 - r).$$

Então, para todo x, $y \in \mathbb{R}$

$$|x + y|^p + |x - y|^p = \left\{ \begin{pmatrix} \sup \\ \inf \end{pmatrix} \right\} \left\{ \alpha(r)|x|^p + \alpha\left(\frac{1}{r}\right)|y|^p : 0 < r < \infty \right\},$$

o supremo ou ínfimo existem de acordo com $p \leq 2$ ou $p \geq 2$.

Prova: Vamos assumir $1 < p \leq 2$, a prova para $p \geq 2$ é similar. Vamos assumir também que $0 < y \leq 1$ e $x = 1$. Primeiramente vamos mostrar que se $r = y$ temos: $\alpha(r) + \alpha\left(\frac{1}{r}\right) y^p = (1 + y)^p + (1 - y)^p$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha(y)+\alpha\left(\frac{1}{y}\right)y^p &= (1+y)^{p-1}+(1-y)^{p-1}+y^p\left(1+\frac{1}{y}\right)^{p-1}-y^p\left|1-\frac{1}{y}\right|^{p-1}\\
&= (1+y)^{p-1}+(1-y)^{p-1}+(y+1)^{p-1}y-(1-y)^{p-1}y\\
&= (1+y)^{p-1}(1+y)+(1-y)^{p-1}(1-y)\\
&= (1+y)^p+(1-y)^p.
\end{aligned}$$

Assim, para ver que $(1+y)^p+(1-y)^p \geq \alpha(r)+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)y^p$ para todo r, é suficiente mostrar que $\alpha(r)+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)y^p$ atinge seu máximo quando $y=r$. De fato,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left(\alpha(r)+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)y^p\right) = \alpha'(r)-\frac{1}{r^2}\alpha'\left(\frac{1}{r}\right)y^p\\
&= (p-1)(1+r)^{p-2}-(p-1)|1-r|^{p-2}-\frac{y^p}{r^2}(p-1)\left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^{p-2}-\left|\frac{1}{r}-1\right|^{p-2}\right]\\
&= (p-1)\left\{(1+r)^{p-2}-|1-r|^{p-2}-\frac{y^p}{r^2}\left[\left(1+\frac{1}{r}\right)^{p-2}-\left|\frac{1}{r}-1\right|^{p-2}\right]\right\}\\
&= (p-1)\left[1-\left(\frac{y}{r}\right)^p\right]\left[(1+r)^{p-2}-|1-r|^{p-2}\right].
\end{aligned}$$

Como $p-2 \leq 0$ e $1+r \geq |1-r|$, o último fator é negativo. Então, a expressão é positiva se $0<r<y$, negativa se $r>y$ e zero se $r=y$. Portanto, $\alpha(r)+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)y^p$ atinge seu máximo quando $y=r$. Portanto,

$$(1+y)^p+(1-y)^p = \sup_{r>0}\left\{\alpha(r)+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)y^p\right\}.$$

Isto completa a prova. $\square$

No próximo teorema vamos enunciar e provar as desigualdades de Clarkson (veja [4] e [12]). Vamos provar as duas desigualdades que implicam que os espaços L^p são uniformemente convexos. Também provaremos as duas desigualdades que implicam que os espaços L^p são uniformemente suaves.

Teorema 3.1.1. *(Desigualdades de Clarkson). Sejam x e y funções em L^p. Então as seguintes desigualdades são válidas:*
Para $1<p\leq 2$,

$$\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\|x\|_p^p+\|y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

e

$$\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\geq\left(\frac{\|x\|_p^p+\|y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

Para $2 \leq p < \infty$,

$$\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\left(\frac{\|x\|_p^p+\|y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

$$\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\frac{\|x\|_p^p+\|y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

Prova: Primeiramente vamos provar a desigualdade (3.1). Fazendo $x = \frac{x+y}{2}$ e $y = \frac{x-y}{2}$, podemos reescrever (3.1) como

$$(\|x\|_p^q+\|y\|_p^q)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\frac{\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{para}\ 1<p\leq 2.$$

Ou seja, teremos que mostrar,

$$\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p\geq 2(\|x\|_p^q+\|y\|_p^q)^{\frac{p}{q}},\ \text{para}\ 1<p\leq 2.$$

Pelo Lema 3.1.1 podemos escrever

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p &= \sup_{r>0}\left\{\alpha(r)\,\|x\|_p^p+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)\|y\|_p^p\right\}\\ &\geq \alpha(r)\,\|x\|_p^p+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)\|y\|_p^p,\ \forall r>0.\end{aligned}$$

Fazendo $u = \|x\|_p^q$, $v = \|y\|_p^q$, $r = \frac{v}{u}$ e assumindo que $v \leq u$, teremos

$$\begin{aligned}\alpha(r)\|x\|_p^p+\alpha\left(\frac{1}{r}\right)\|y\|_p^p &= \alpha\left(\frac{v}{u}\right)u^{p-1}+\alpha\left(\frac{u}{v}\right)v^{p-1}\\ &= \left[\left(1+\frac{v}{u}\right)^{p-1}+\left|1-\frac{v}{u}\right|^{p-1}\right]u^{p-1}+\left[\left(1+\frac{u}{v}\right)^{p-1}-\left|1-\frac{u}{v}\right|^{p-1}\right]v^{p-1}\\ &= (u+v)^{p-1}+|u-v|^{p-1}+(v+u)^{p-1}-|v-u|^{p-1}\\ &= 2(u+v)^{p-1}\\ &= 2(u+v)^{\frac{p}{q}}\\ &= 2\big(\|x\|_p^q+\|y\|_p^q\big)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p\geq 2(\|x\|_p^q+\|y\|_p^q)^{\frac{p}{q}},\ \text{para}\ 1<p\leq 2.$$

Para provarmos a desigualdade (3.3), ou seja,

$$\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 2 \leq p < \infty,$$

reescrevemos $x = \frac{x+y}{2}$ e $y = \frac{x-y}{2}$. Então, (3.3) é equivalente a

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leq 2(\|x\|_p^q + \|y\|_p^q)^{\frac{p}{q}}.$$

Pelo Lema 3.1.1 podemos escrever

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p &= \inf_{r>0}\left\{\alpha(r)\,\|x\|_p^p + \alpha\left(\frac{1}{r}\right)\|y\|_p^p\right\} \\ &\leq \alpha(r)\,\|x\|_p^p + \alpha\left(\frac{1}{r}\right)\|y\|_p^p, \ \forall r > 0.\end{aligned}$$

Fazendo $u = \|x\|_p^q$, $v = \|y\|_p^q$, $r = \frac{v}{u}$ e assumindo que $v \leq u$, teremos

$$\begin{aligned}\alpha(r)\,\|x\|_p^p + \alpha\left(\frac{1}{r}\right)\|y\|_p^p &= \alpha\left(\frac{v}{u}\right) u^{p-1} + \alpha\left(\frac{u}{v}\right) v^{p-1} \\ &= \left[\left(1+\frac{v}{u}\right)^{p-1} + \left|1-\frac{v}{u}\right|^{p-1}\right] u^{p-1} + \left[\left(1+\frac{u}{v}\right)^{p-1} - \left|1-\frac{u}{v}\right|^{p-1}\right] v^{p-1} \\ &= (u+v)^{p-1} + |u-v|^{p-1} + (v+u)^{p-1} - |v-u|^{p-1} \\ &= 2(u+v)^{p-1} \\ &= 2(u+v)^{\frac{p}{q}} \\ &= 2\left(\|x\|_p^q + \|y\|_p^q\right)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leq 2(\|x\|_p^q + \|y\|_p^q)^{\frac{p}{q}}, \text{ para } 2 \leq p < \infty.$$

Para provarmos a desigualdade (3.4), note que podemos reescrevê-la como

$$\left(\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{q}}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 2 \leq p < \infty. \qquad (3.5)$$

Fazendo $x = \frac{x+y}{2}$ e $y = \frac{x-y}{2}$ e substituindo na desigualdade (3.3), teremos,

$$\left(\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\|x\|_p^q + \|y\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.6)$$

Analisando (3.5) e (3.6), concluímos que para provarmos a desigualdade (3.4), basta mostrar que

$$2^{\frac{1}{p}}\left(\|x\|_p^q+\|y\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}}\left(\|x\|_p^p+\|y\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

o que é equivalente a

$$2\left(\|x\|_p^q+\|y\|_p^q\right)^{p-1} \leq 2^{p-1}\left(\|x\|_p^p+\|y\|_p^p\right). \tag{3.7}$$

Escreva $a=\|x\|_p$ e $b=\|y\|_p$. Note que a, $b>0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a\leq b$. Desta forma, (3.7) se torna

$$2(a^q+b^q)^{p-1}\leq 2^{p-1}(a^p+b^p). \tag{3.8}$$

Agora fazendo $c=\frac{a}{b}$, podemos reescrever a desigualdade (3.8) na forma

$$2(c^q+1)^{p-1}\leq 2^{p-1}(c^p+1),\;\; 0<c\leq 1.$$

Temos que mostrar então que

$$\frac{2^{p-2}(c^p+1)}{(c^q+1)^{p-1}}\geq 1. \tag{3.9}$$

Elevando (3.9) na potência $1/p$, teremos

$$\frac{2^{\frac{p-2}{p}}(c^p+1)^{\frac{1}{p}}}{(c^q+1)^{\frac{1}{q}}}\geq 1.$$

Defina,

$$f(c)=\frac{2^{\frac{p-2}{p}}(c^p+1)^{\frac{1}{p}}}{(c^q+1)^{\frac{1}{q}}}.$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dc} &= 2^{\frac{p-2}{p}}\left[\frac{(c^q+1)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{p}(c^p+1)^{\frac{1}{p}-1}p\,c^{p-1}-\frac{1}{q}(c^q+1)^{\frac{1}{q}-1}q\,c^{q-1}(c^p+1)^{\frac{1}{p}}}{(c^q+1)^{\frac{2}{q}}}\right]\\
&= 2^{\frac{p-2}{p}}(c^p+1)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{c^{p-1}(c^p+1)^{-1}-(c^q+1)^{-1}c^{q-1}}{(c^q+1)^{\frac{2}{q}}}\right](c^q+1)^{\frac{1}{q}}\\
&= 2^{\frac{p-2}{p}}\frac{(c^p+1)^{\frac{1}{p}}}{(c^q+1)^{\frac{1}{q}}}\left[\frac{c^{p-1+q}+c^{p-1}-c^{q-1+p}-c^{q-1}}{(c^p+1)(c^q+1)}\right]\\
&= 2^{\frac{p-2}{p}}\frac{(c^p+1)^{\frac{1}{p}}}{(c^q+1)^{\frac{1}{q}}}\left[\frac{c^{p-1}-c^{q-1}}{(c^p+1)(c^q+1)}\right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Note que, como $p \geq 2$ e $0 < c \leq 1$, o último fator de (3.10) é não-positivo, portanto, a expressão é não-positiva, isto é, $\frac{df}{dc} \leq 0$. Ainda temos que $f'(1) = 0$, ou seja, $c = 1$ é um ponto crítico de f no intervalo $0 < c \leq 1$. Como $\frac{df}{dc} \leq 0$, $c = 1$ é um ponto de mínimo. Portanto,

$$f(c) = \frac{2^{\frac{p-2}{p}}(c^p + 1)^{\frac{1}{p}}}{(c^q + 1)^{\frac{1}{q}}} \geq 1 = f(1).$$

Com isso podemos concluir que a desigualdade (3.4) é válida. A prova da desigualdade (3.2) é análoga a apresentada para (3.4). Isto completa a prova do teorema. $\square$

Lema 3.1.2. *Sejam E e F espaços vetoriais. Sejam E^* e F^* os espaços duais de E e F, respectivamente. Então,*

$$(E \times F)^* = E^* \times F^*$$

Prova: Sejam as imersões $T_1 : E \longrightarrow E \times F$ dada por $T_1(x) = (x, 0)$ e $T_2 : F \longrightarrow E \times F$ dada por $T_2(y) = (0, y)$. Seja $l(x, y) \in (E \times F)^*$, então

$$\begin{aligned} l(x, y) &= l\big((x, 0) + (0, y)\big) \\ &=^1 l(x, 0) + l(0, y) \\ &= l\big(T_1(x)\big) + l\big(T_2(y)\big) \\ &= l_1(x) + l_2(y) \in E^* \times F^*, \end{aligned}$$

onde $l_1 = l \circ T_1$ e $l_2 = l \circ T_2$. Logo, $(E \times F)^* \subseteq E^* \times F^*$. Revertendo o argumento anterior, prova-se a outra inclusão. $\square$

Lema 3.1.3. *Sejam p, $q > 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então, definindo $L_{p,q} = L_p \times L_q$, temos*

$$(L_{p,q})^* = L_{q,p}.$$

Prova: Basta notar que, pelo Lema (3.1.2),

$$(L_{p,q})^* = (L_p \times L_q)^* = (L_p)^* \times (L_q)^* = L_q \times L_p = L_{q,p}.$$

$\square$

[1] Pela linearidade de l.

Lema 3.1.4. *Seja $q > 1$ e $0 < \varepsilon \leq 1$, então*
$$(1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}} \leq 1 - \frac{\varepsilon^q}{q}\,.$$

Prova: Defina
$$f(\varepsilon) = (1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}} - 1 + \frac{\varepsilon^q}{q}\,.$$
Note que $f(0) = 0$. Fazendo,
$$\begin{aligned}\frac{df}{d\varepsilon} &= \frac{1}{q}(1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}-1}(-q\varepsilon^{q-1}) + \frac{q\varepsilon^{q-1}}{q}\\ &= -(1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}-1}\varepsilon^{q-1} + \varepsilon^{q-1}\\ &= \varepsilon^{q-1}\left[1-(1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}-1}\right].\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{q} - 1 < 0$ e, considerando-se $0 < \varepsilon < 1$, temos que $(1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}-1} > 1$, o que implica $df/d\varepsilon < 0$, para $0 < \varepsilon < 1$. Portanto, $f(\varepsilon)$ é uma função decrescente em $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Como $f(0) = 0$, concluímos que,
$$f(\varepsilon) = (1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}} - 1 + \frac{\varepsilon^q}{q} < 0, \ \text{ para}\, 0 < \varepsilon \leq 1.$$
Portanto, $(1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}} \leq 1 - \frac{\varepsilon^q}{q}$. □

Lema 3.1.5. *Sejam $p > 1$ e $0 < \tau \leq 1$. Então,*
$$(1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} \leq 1 + \frac{\tau^p}{p}\,.$$

Prova: Defina
$$f(\tau) = (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} - 1 - \frac{\tau^p}{p}\,.$$
Note que $f(0) = 0$. Fazendo,
$$\begin{aligned}\frac{df}{d\tau} &= \frac{1}{p}(1+\tau^p)^{\frac{1}{p}-1}p\,\tau^{p-1} - \frac{p\,\tau^{p-1}}{p}\\ &= (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}-1}\tau^{p-1} - \tau^{p-1}\\ &= \tau^{p-1}\left[(1+\tau^p)^{\frac{1}{p}-1} - 1\right].\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{p} - 1 < 0$ e $(1+\tau^p)^{\frac{1}{p}-1} < 1$, então o último fator é negativo e, portanto, o todo é negativo, ou seja, $\frac{df}{d\tau} < 0$ para $0 < \tau < 1$. Portanto, $f(\tau)$ é uma função decrescente em $0 \leq \tau \leq 1$. Como $f(0) = 0$, concluímos que
$$f(\tau) = (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} - 1 - \frac{\tau^p}{p} < 0.$$

Portanto, para $0 < \tau \leq 1$, temos $(1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} < 1 + \frac{\tau^p}{p}$. $\square$

Proposição 3.1.1. *A desigualdade (3.4) é conseqüência da desigualdade (3.1).*

Prova: Sejam $1 \leq s, t < \infty$ e $L_s \times L_s$ com a norma $\|\cdot\|_{s,t}$ definida por

$$\|(x,y)\|_{s,t} = \left(\frac{\|x\|_s^t + \|y\|_s^t}{2} \right)^{\frac{1}{t}}. \tag{3.11}$$

Defina o operador $B : L_{s,t} \longrightarrow L_{s,t}$ por

$$B(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right).$$

Afirmação 1: O operador $B : L_{p,p} \longrightarrow L_{p,q}$ é limitado para $1 < p \leq 2$ com norma $2^{\frac{1}{p}}$. De fato, fazendo $s = p$ e $t = q$ em (3.11), teremos,

$$\begin{aligned}
\|B(x,y)\|_{p,q} &= \left\| \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) \right\|_{p,q} \\
&= \frac{\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq^{2} \frac{\left(\frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{1}{q}}} \\
&= \frac{\|(x,y)\|_{p,p}}{2^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq 2^{-\frac{1}{q}} \|(x,y)\|_{p,p} \\
&= 2^{-\frac{1}{q}} \|(x,y)\|_{p,p}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|B(x,y)\|_{p,q} \leq 2^{-\frac{1}{q}} \|(x,y)\|_{p,p}$. O operador B é auto-adjunto, então definindo, $B' : (L_{p,q})^* \longrightarrow (L_{p,p})^*$, pelo Lema(3.1.3), $B' : L_{q,p} \longrightarrow L_{q,q}$. Mas, pela Proposição 1.1.1, $\|B'\| = \|B\|$, então B' também é limitado com norma $2^{-\frac{1}{q}}$ para $1 \leq p \leq 2$. Portanto, $\|B'(x,y)\|_{q,q} \leq 2^{-\frac{1}{q}} \|(x,y)\|_{q,p}$.

Afirmação 2: Se $p \leq q$, então $\|(x,y)\|_{q,p} \leq \|(x,y)\|_{q,q}$, ou seja,

$$\left(\frac{\|x\|_q^p + \|y\|_q^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\|x\|_q^q + \|y\|_q^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.12}$$

[2]Por 3.1.

De fato, fazendo $a_1 = \|x\|_q$ e $a_2 = \|y\|_q$, podemos reescrever (3.12) como

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{a_1^q + a_2^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^p.1\right) \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} a_i^p.1 &\leq^{3} \left(\sum_{i=1}^{2}(a_i^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{i=1}^{2} 1^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^q\right)^{\frac{p}{q}} 2^{\frac{q-p}{q}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{2} a_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^p\right)^{\frac{p}{q}} 2^{\frac{q-p}{q}}.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade na potência$\frac{1}{p}$, teremos

$$\left(\sum_{i-1}^{2} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{i-1}^{2} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto, $\|(x,y)\|_{q,p} \leq \|(x,y)\|_{q,q}$. Concluindo temos,

$$\|B'(x,y)\|_{q,q} \leq 2^{-\frac{1}{q}}\|(x,y)\|_{q,p} \leq 2^{-\frac{1}{q}}\|(x,y)\|_{q,q}, \text{ para } 2 \leq q < \infty,$$

ou seja, $B : L_{q,q} \longrightarrow L_{q,q}$ é limitado para $2 \leq q < \infty$ com norma $2^{-\frac{1}{q}}$. $\square$

[3]Usando a desigualdade de Holdër para $\frac{1}{r} + \frac{p}{q} = 1$.

3.2 Convexidade e Suavidade Uniforme dos Espaços L^p

Proposição 3.2.1. *Para $p > 1$, o espaço L^p é uniformemente convexo.*

Prova: Sejam $p \geq 2$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Pela desigualdade (3.4) temos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leq \frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2} = 1.$$

Então, se $\|x - y\| \geq 2\,\varepsilon$ com $0 < \varepsilon \leq 1$, nós vemos que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p \leq 1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leq 1 - \varepsilon^p.$$

Elevando ambos os lados na potência $\frac{1}{p}$, temos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \leq (1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Fazendo $\delta = 1 - (1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$, obtemos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \leq 1 - \delta.$$

Por outro lado, sejam $1 < p \leq 2$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Pela desigualdade (3.1), temos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}} = 1.$$

Então se $\|x - y\| \geq 2\,\varepsilon$, com $0 < \varepsilon \leq 1$, nós vemos que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q \leq 1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \leq 1 - \varepsilon^q.$$

Elevando ambos os lados na potência $\frac{1}{q}$, obtemos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \leq (1 - \varepsilon^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Fazendo $\delta = 1 - (1 - \varepsilon^q)^{\frac{1}{q}}$, obtemos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \leq 1 - \delta.$$

$\square$

Proposição 3.2.2. *Para $p > 1$, o espaço L^p é uniformemente suave.*

Prova: Sejam $p \geq 2$ e $\|x\| = \|y\| = 1$, pela desigualdade (3.3) temos,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \geq \left(\frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{q}{p}} = 1.$$

Então se $\|x - y\| \leq 2\,\tau$, com $\tau > 0$, nós vemos que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q \geq 1 - \tau^q.$$

Elevando ambos os lados na potência $\frac{1}{q}$, obtemos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \geq (1 - \tau^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja τ pequeno de modo que $\varepsilon > \frac{1-(1-\tau^q)^{\frac{1}{q}}}{\tau}$. Isto é possível pois, $\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{1-(1-\tau^q)^{\frac{1}{q}}}{\tau} = 0$. Logo, $(1 - \tau^q)^{\frac{1}{q}} \geq 1 - \varepsilon\tau$ para τ pequeno e, portanto,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \geq 1 - \varepsilon\tau.$$

Para $1 < p \leq 2$, usando a desigualdade (3.2) e de forma análoga a feita para o caso $p > 1$ obtemos,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \geq 1 - \varepsilon\tau,$$

para τ pequeno. $\square$

No Capítulo 2 nós definimos o módulo de convexidade e o módulo de suavidade para um espaço normado X. Fazendo uso de tal fato, agora podemos definir r-convexidade e r-suavidade uniforme de um espaço normado X.

3.3 Espaços r-Uniformemente Convexos e r-Uniformemente Suaves

Definição 3.3.1. (Espaço r-uniformemente convexo). Um espaço normado X é dito r-*uniformemente convexo* se existe $c > 0$ tal que

$$\delta_X(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r,$$

para $r > 1$ e para $\varepsilon > 0$.

Definição 3.3.2. (Espaço r-uniformemente suave). Um espaço normado X é dito r-*uniformemente suave* se existe um $k > 0$ tal que

$$\rho_X(\tau) \leq \left(\frac{\tau}{k}\right)^r,$$

onde $r > 1$ e $\tau > 0$.

Proposição 3.3.1. *Para $1 < p \leq 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos que os espaços L^p e L^q são p-uniformemente suave e q-uniformemente convexo.*

Prova: Fazendo $s = p$, sejam $x, y \in L_s$. A partir da desigualdade (3.1) obtemos, para $1 < p \leq 2$,

$$\begin{aligned}
(\|x+y\|_s^q + \|x-y\|_s^q)^{\frac{1}{q}} &\leq 2\left(\frac{\|x\|_s^p + \|y\|_s^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{1-\frac{1}{p}}\left(\|x\|_s^p + \|y\|_s^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{q}}\left(\|x\|_s^p + \|y\|_s^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{\|x+y\|_s^q + \|x-y\|_s^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\|x\|_s^p + \|y\|_s^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.13}$$

Agora substituindo respectivamente x e y por $x + y$ e $x - y$ em (3.13) e reorganizando algumas potências de 2, obtemos

$$2^{1-\frac{1}{q}}\left(\|x\|_s^q + \|y\|_s^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\|x+y\|_s^p + \|x-y\|_s^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

que é equivalente a

$$\left(\|x\|_s^q + \|y\|_s^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\|x+y\|_s^p + \|x-y\|_s^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.14}$$

Esta desigualdade também é válida para $s = q$ por (3.3). Sejam $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| = 2\varepsilon$, de (3.13) obtemos,

$$\|x+y\|_s^q + \|x-y\|_s^q \leq 2^{\frac{q}{p}+1} = 2^q,$$

de onde segue que

$$\|x+y\|_s^q \leq 2^q - \|x-y\|_s^q = 2^q(1-\varepsilon^q).$$

Então,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_s^q \leq (1-\varepsilon^q).$$

Elevando ambos os lados da desigualdade na potência $\frac{1}{q}$, obtemos,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_s &\leq (1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq^4 1-\frac{\varepsilon^q}{q},\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_s \geq \frac{\varepsilon^q}{q},$$

ou seja,

$$\delta_{L_s}(\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon^q}{q}.$$

Logo, L_s é q-uniformemente convexo. Para provarmos que L_s é p-uniformemente suave, primeiramente precisamos mostrar que vale a seguinte desigualdade, para $1 < p \leq 2$,

$$2^{-\frac{1}{p}}(\|x\|_s + \|y\|_s) \leq (\|x\|_s^q + \|y\|_s^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.15}$$

Fazendo $a = \|x\|_s$ e $b = \|y\|_s$, podemos reescrever (3.15) como,

$$2^{-\frac{1}{p}}(a_1 + a_2) \leq (a_1^q + a_2^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Mas, pela desigualdade de Hölder para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos

$$\begin{aligned}(a_1+a_2) &= \sum_{i=1}^{2} 1.a_i\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{2} 1^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

logo,

$$2^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto, por (3.14) e (3.15) temos

$$\begin{aligned}\|x\|_s + \|y\|_s &\leq \frac{(\|x\|_s^q + \|y\|_s^q)^{\frac{1}{q}}}{2^{-\frac{1}{p}}}\\ &\leq \left(\frac{\|x+y\|_s^p + \|x-y\|_s^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^{-\frac{1}{p}}}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

[4]Pelo Lema 3.1.4.

Fazendo $x = u + v$, $y = u - v$, com $\|u\| = 1$ e $\|v\| = \tau$ e substituindo em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_s + \|u-v\|_s &\leq \left(\frac{2^p \|u\|_s^p + 2^p \|v\|_s^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^{-\frac{1}{p}}} \\
&= 2^{1-\frac{1}{p}}(1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^{-\frac{1}{p}}} \\
&= 2(1+\tau^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq^{5} 2\left(1 + \frac{\tau^p}{p}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\|u+v\|_s + \|u-v\|_s}{2} - 1 \leq \frac{\tau^p}{p}.$$

Portanto,

$$\rho_{L_s}(\tau) \leq \frac{\tau^p}{p},$$

o que mostra que L_s é p-uniformemente suave. □

Lema 3.3.1. *Sejam x e y funções em L^p e $p \geq 1$, então*

$$\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} \leq \left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.17}$$

Prova: Fazendo $a_1 = \|x+y\|$ e $a_2 = \|x-y\|$, podemos reescrever (3.17) como

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2) \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}(a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas, pela desigualdade de Hölder para $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} a_i &= \sum_{i=1}^{2} a_i \cdot 1 \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} 1^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= 2^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right) \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

[5] Pelo Lema 3.1.5.

e isto completa a prova. $\square$

Proposição 3.3.2. *Seja X um espaço normado uniformemente convexo e suponha que $\delta_X(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r$ para alguma constante c e para $r > 1$. Então*

$$\frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2} \geq \|x\|^r + \left\|yk^{-1}\right\|^r,$$

para todo x, y tais que $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Prova: Sejam $\|x\| = \|y\| = 1$, $0 < \varepsilon \leq 1$ e $\|x-y\| = 2\varepsilon$. Sabemos que $\delta_X(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r$, então

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade na potência r, obtemos

$$\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right)^r \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r\right)^r. \tag{3.18}$$

Podemos supor que $c > 1$ é tal que $\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r < \frac{1}{r}$. Então, usando um argumento análogo ao do Lema 3.1.4, podemos afirmar que $(1-z)^r \leq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1} z$, para $z \leq \frac{1}{r}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right)^r &\leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r\right)^r \\
&\leq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1} \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Tomando $k = c\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{t}}$ com $\frac{1}{t} + \frac{1}{r} = 1$ e substituindo em (3.19) temos

$$\begin{aligned}
\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right)^r &\leq 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{k\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}}}\right)^r \\
&= 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{k\left(\frac{r-1}{r}\right)^{\frac{r-1}{r}}}\right)^r \\
&= 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1} \cdot \left(\frac{\varepsilon^r}{k^r\left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1}}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^r \\
&= 1 - \left\|\frac{x-y}{2k}\right\|^r.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^r + \left\|\frac{x-y}{2k}\right\|^r \leq 1 = \frac{\|x\|^r + \|y\|^r}{2}, \tag{3.20}$$

para todo x e y tais que $\|x\| = \|y\| = 1$. De fato, esta desigualdade continua válida se $\|x\| = \|y\|$. Substituindo x por $x+y$ e y por $x-y$ em (3.20), obtemos

$$\frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2} \geq \|x\|^r + \left\|k^{-1}y\right\|^r, \tag{3.21}$$

para $r > 1$, desde que $\|x+y\| = \|x-y\|$. □

As duas definições que serão apresentadas a seguir, serão apresentadas com algumas restrições interessantes. Estas definições serão usadas para mostrar as relações entre muitas desigualdades que ainda vamos apresentar.

Definição 3.3.3. (Segunda definição de r-convexidade uniforme). Um espaço normado X é dito ser *r-uniformemente convexo* para algum $r > 1$ se existe uma constante k tal que, para todo x, $y \in X$,

$$\frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2} \geq \|x\|^r + \left\|yk^{-1}\right\|^r. \tag{3.22}$$

Essa constante k é chamada *constante de r-convexidade uniforme* de X

Observação: Na segunda definição de r-convexidade uniforme, o caso interessante em que vai valer certos resultados apresentados aqui neste trabalho é o caso $r \geq 2$. Note que não estamos impondo $\|x-y\| = \|x+y\|$.

Definição 3.3.4. (Segunda definição de suavidade t-uniforme). Um espaço normado X é dito ser *t-uniformemente suave* para algum $t \in (1, 2]$ se existe uma constante k tal que, para todo x, $y \in X$,

$$\frac{\|x+y\|^t + \|x-y\|^t}{2} \leq \|x\|^t + \|ky\|^t. \tag{3.23}$$

Essa constante k é chamada de *constante de t-suavidade uniforme* de X.

Proposição 3.3.3. *Seja X um espaço de Banach. Sejam $x, y \in X$. Se (3.20) vale, então é imediato que*

$$\delta_X(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r,$$

para alguma constante c e $r > 1$.

Prova: Sejam $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| = 2\varepsilon$. Temos por hipótese que,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^r + \left\|\frac{x-y}{2k}\right\|^r \leq \frac{\|x\|^r + \|y\|^r}{2}.$$

Então,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^r \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^r.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade na potência $\frac{1}{r}$, temos,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{x+y}{2}\right\| &\leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq^6 1 - \frac{1}{r}\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^r. \end{aligned}$$

Fazendo $c = (kr^{\frac{1}{r}})^r$, obtemos

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r.$$

Ou seja,

$$\delta_X(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r.$$

Isto completa a prova. □

Proposição 3.3.4. *Seja k uma constante tal que, para $x, y \in X$,*

$$\frac{\|x+y\|^t + \|x-y\|^t}{2} \leq \|x\|^t + \|ky\|^t, \quad \textit{para } 1 < t \leq 2,$$

então

$$\rho_X(\tau) \leq (c\tau)^t, \quad \textit{para } 1 < t \leq 2,$$

para algum $c > 0$.

Prova: Sejam $\|x\| = 1$ e $\|y\| = \tau$. Pelo Lema 3.3.1 temos,

$$\begin{aligned} \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} &\leq \left(\frac{\|x+y\|^t + \|x-y\|^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}} \\ &\leq \left(\|x\|^t + \|ky\|^t\right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \left(1 + (k\tau)^t\right)^{\frac{1}{t}} \\ &\leq^7 1 + \frac{(k\tau)^t}{t}. \end{aligned}$$

[6] Pelo Lema 3.1.4.
[7] Pelo Lema 3.1.5.

Fazendo $c = k\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}}$ temos

$$\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} - 1 \leq (c\tau)^t.$$

Logo,

$$\rho_X(\tau) \leq (c\tau)^t,$$

e isto completa a prova. $\square$

Capítulo 4

Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa para Espaços L^p

Neste Capítulo vamos provar que os espaços L^p são 2-uniformemente convexos e 2-uniformemente suaves. Vamos provar também a desigualdade de Hanner para espaços de funções. Provaremos também outros resultados importantes envolvendo um espaço normado X e seu dual X^*.

4.1 Desigualdade de Hanner

Lema 4.1.1. *(Desigualdade dois pontos de Gross). Sejam a e b números reais. Então as seguintes desigualdades são válidas:*
Para $1 \leq p < 2$,

$$\left(\frac{|a+b|^p + |a-b|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(a^2 + (p-1)b^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Para $p \geq 2$,

$$\left(\frac{|a+b|^p + |a-b|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(a^2 + (p-1)b^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

Prova: Para provarmos a desigualdade (4.1), vamos supor primeiro que $0 < |b| \leq |a|$. Fazendo $x = \frac{b}{a}$ e substituindo em (4.1), obtemos que isto é equivalente a

$$\left(1 + (p-1)x^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1]. \tag{4.3}$$

Mas escrevendo (4.3) na série binomial obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{2k} x^{2k} \\
&= 1 + \frac{p(p-1)x^2}{2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)x^4}{4!} + \cdots .
\end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{2k} x^{2k} \geq 1 + \frac{p(p-1)x^2}{2},$$

para $x \in [-1, 1]$. Pelo Lema 3.1.4 temos

$$\left(1 + (p-1)x^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq 1 + \frac{p(p-1)x^2}{2}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{2k} x^{2k} \\
&\geq 1 + \frac{p(p-1)x^2}{2} \\
&\geq \left(1 + (p-1)x^2\right)^{\frac{p}{2}} .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{|a+b|^p + |a-b|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(a^2 + (p-1)b^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Para o caso $b > a$, basta notar que

$$a^2 + (p-1)b^2 \leq b^2 + (p-1)a^2$$

e usar o caso anterior trocando a e b. A prova da desigualdade (4.2) é análoga a apresentada para a desigualdade (4.1). Basta notar que, para $p \geq 2$,

$$\left(1 + (p-1)x^2\right)^{\frac{p}{2}} \geq 1 + \frac{p(p-1)x^2}{2}.$$

Isto completa prova do lema. $\square$

Agora vamos mostrar que a desigualdade de Hanner é válida para os espaços L^p.

Teorema 4.1.1. *(Desigualdade de Hanner). Sejam x e $y \in L^p$. Então as seguintes desigualdades são válidas. Para $1 < p \leq 2$,*

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \geq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p + \left|\|x\|_p - \|y\|_p\right|^p. \tag{4.4}$$

Para $2 \leq p < \infty$,

$$\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p + \left|\|x\|_p - \|y\|_p\right|^p. \tag{4.5}$$

Prova: Vamos provar a desigualdade (4.4). A prova da desigualdade (4.5) é análoga. Sejam x e $y \in L^p$ e $1 < p \leq 2$. Então, pelo Lema 3.1.1,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^p + \|x-y\|^p &= \int |x+y|^p + |x-y|^p \\
&= \int \sup_{r>0} \left\{ \alpha(r)|x|^p + \alpha\left(\frac{1}{r}\right)|y|^p \right\} \\
&\geq \sup_{r>0} \int \left(\left\{ \alpha(r)|x|^p + \alpha\left(\frac{1}{r}\right)|y|^p \right\} \right) \\
&= \sup_{r>0} \left\{ \alpha(r)\|x\|^p + \alpha\left(\frac{1}{r}\right)\|y\|^p \right\} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^p + |\|x\| - \|y\||^p .
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue pelo mesmo argumento do Lema 3.1.1. □

Observação 4.1.1. Vimos no Capítulo 3 que as desigualdades de Clarkson mostram que os espaços L^p e L^q são p-uniformemente suave e q-uniformemente convexo. Agora vamos ver que as desigualdades de Hanner, (4.4) e (4.5) também determinam o módulo de convexidade e o módulo de suavidade para todo espaço L^p.

Corolário 4.1.1. *Das desigualdades de Hanner obtemos o módulo de convexidade e o módulo de suavidade para todo espaço L^p.*

Prova: Sejam $p \geq 2$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq 2\varepsilon$. Da desigualdade

$$\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p + \left|\|x\|_p - \|y\|_p\right|^p \geq \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p,$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &\leq 2^p - \|x-y\|_p^p \\
&\leq 2^p(1-\varepsilon^p).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p \leq (1-\varepsilon^p).$$

Elevando ambos os lados da desigualdade na potência $\frac{1}{p}$ e utilizando o Lema 3.1.4, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p &\leq (1-\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq 1-\frac{\varepsilon^p}{p}\,,\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p \geq \frac{\varepsilon^p}{p}\,,$$

ou seja,

$$\delta_{L^p}(\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon^p}{p}\,.$$

Logo, o espaço L^p, para $p \geq 2$, é p-uniformemente convexo.

Para $1 < p \leq 2$, considere a desigualdade

$$\Big(\|x\|_p+\|y\|_p\Big)^p + \Big|\|x\|_p-\|y\|_p\Big|^p \leq \|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p\,. \tag{4.6}$$

Fazendo $x = x+y$ e $y = x-y$ e substituindo em (4.6) obtemos,

$$\Big(\|x+y\|_p+\|x-y\|_p\Big)^p + \Big|\|x+y\|_p-\|x-y\|_p\Big|^p \leq 2^p\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right).$$

Note também que

$$\begin{aligned}\Big(\|x+y\|_p+\|x-y\|_p\Big)^p &\leq \Big(\|x+y\|_p+\|x-y\|_p\Big)^p + \Big|\|x+y\|_p-\|x-y\|_p\Big|^p\\ &\leq 2^p\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Fazendo $\|x\| = 1$ e $\|y\| = \tau$ e substituindo em (4.7) temos,

$$\left(\frac{\|x+y\|_p+\|x-y\|_p}{2}\right)^p \leq 1+\tau^p.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade na potência $\frac{1}{p}$, obtemos, pelo Lema 3.1.5,

$$\begin{aligned}\frac{\|x+y\|_p+\|x-y\|_p}{2} &\leq (1+\tau^p)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq 1+\frac{\tau^p}{p}\,.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Portanto,

$$\rho_{L^p}(\tau) \le \frac{\tau^p}{p}.$$

Logo o espaço L^p, para $1 < p \le 2$ é p-uniformemente suave. $\square$

4.2 Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa

Proposição 4.2.1. *(Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa). Sejam x e $y \in L^p$. Então valem as seguintes desigualdades:*
Para $1 \le p \le 2$,

$$\frac{\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2}{2} \ge \|x\|_p^2 + (p-1)\|y\|_p^2. \tag{4.9}$$

Para $2 \le p < \infty$,

$$\frac{\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2}{2} \le \|x\|_p^2 + (p-1)\|y\|_p^2. \tag{4.10}$$

Prova: Vamos provar a desigualdade (4.9), a prova de (4.10) é análoga. Para provarmos a desigualdade (4.9) vamos usar a desigualdade de Hanner e também a desigualdade dois pontos de Gross. Primeiramente vamos considerar o caso $1 < p \le 2$. Dados x e $y \in L^p$, $1 \le p \le 2$, pela desigualdade (3.12), temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} &\ge \left(\frac{\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\ge^{1} \left[\frac{\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p + \left|\|x\|_p - \|y\|_p\right|^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}\tag{4.11}$$

Fazendo $a = \|x\|_p$ e $b = \|y\|_p$ em (4.11) e usando a desigualdade dois pontos de Gross obtemos,

$$\left[\frac{\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p + \left|\|x\|_p - \|y\|_p\right|^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}} \ge \left(\|x\|_p^2 + (p-1)\|y\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

[1]Pela desigualdade de Hanner.

Ou seja,

$$\frac{\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2}{2} \geq \|x\|_p^2+(p-1)\|y\|_p^2 .$$

Para $p=1$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2}{2} &= \frac{\int_X (x+y)^2 d\mu + \int_X (x-y)^2 d\mu}{2} \\
&= \frac{2\int_X x^2 d\mu + 2\int_X y^2 d\mu}{2} \\
&= \|x\|^2+\|y\|^2 \geq \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Isto completa a prova. □

Na próxima proposição vamos generalizar a Proposição 4.2.1 para outras potências. Um argumento simples, baseado na desigualdade de Hanner, mostra tal fato.

Teorema 4.2.1. *(Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa). Sejam x e $y \in L^p$. Então valem as seguintes desigualdades:*
Para $1 \leq p \leq 2$,

$$\left(\frac{\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \geq \|x\|_p^2+(p-1)\|y\|_p^2 . \tag{4.12}$$

Para $2 \leq p < \infty$,

$$\left(\frac{\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \leq \|x\|_p^2+(p-1)\|y\|_p^2 . \tag{4.13}$$

Prova: Primeiramente vamos provar a desigualdade (4.12). Sejam x e $y \in L^p$ e $1 < p \leq 2$. Fazendo $a=\|x\|_p$ e $b=\|y\|_p$ na desigualdade dois pontos de Gross, obtemos

$$\left(\|x\|_p^2+(p-1)\|y\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)^p+\left|\|x\|_p-\|y\|_p\right|^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}} .$$

Agora, pela desigualdade de Hanner (Teorema 4.1.1) temos que

$$\left[\frac{\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)^p+\left|\|x\|_p-\|y\|_p\right|^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\|x+y\|_p^p+\|x-y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

de onde concluímos que

$$\|x\|_p^2 + (p-1)\,\|y\|_p^2 \leq \left(\frac{\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Para $p = 1$ a demonstração é análoga a feita na Proposição 4.2.1. $\square$

Agora usando a proposição 4.2.1 estamos em condições de provar que os espaços L^p são 2-uniformemente suaves e 2-uniformemente convexos.

Corolário 4.2.1. *Os espaços L^p, para $1 < p \leq 2$, são 2-uniformemente convexos.*

Prova: Fazendo $\tilde{x} = x + y$ e $\tilde{y} = x - y$ temos, pela desigualdade (4.9), que

$$\frac{1}{2}\left(\|\tilde{x}\|_p^2 + \|\tilde{y}\|_p^2\right) \geq \left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\|_p^2 + (p-1)\left\|\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right\|_p^2.$$

Se $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{y}\| = 1$ e $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| \geq 2\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\|_p^2 &\leq 1 - (p-1)\left\|\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right\|_p^2 \\ &\leq 1 - (p-1)\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Elevando ambos os lados da desigualdade (4.14) na potência $\frac{1}{2}$ e utilizando o Lema 3.1.4, obtemos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\|_p &\leq \left(1 - (p-1)\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 1 - \frac{(p-1)}{2}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta_{L^p}(\varepsilon) \geq 1 - \left\|\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\right\|_p \geq \frac{(p-1)}{2}\varepsilon^2,$$

e isto completa a prova. $\square$

Corolário 4.2.2. *Os espaços L^p, para $2 \leq p < \infty$, são 2-uniformemente suaves.*

Prova: Sejam x e $y \in L^p$ tais que $\|x\| = 1$ e $\|y\| = \tau$. Pelo Lema 3.3.1 e pela Proposição 4.2.1 temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|x+y\|_p + \|x-y\|_p}{2} &\leq \left(\frac{\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\|x\|_p^2 + (p-1)\|y\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(1 + (p-1)\tau^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 1 + \frac{(p-1)}{2}\tau^2.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\|x+y\|_p + \|x-y\|_p}{2} - 1 \leq \frac{(p-1)}{2}\tau^2.$$

Portanto, $\rho_{L^p}(\tau) \leq \frac{(p-1)}{2}\tau^2$. □

4.3 Convexidade 2- Uniforme do Espaço de Hilbert

Definição 4.3.1. (Relação de ordem “simbolo O grande”) Suponha que $x \to x_0$, com valores em $\mathbb{R}$. Seja N_0 uma vizinhança de x_0 tal que

$$|f(x)| \leq k|g(x)|$$

para todo $x \in N_0 \cap \mathbb{R}$, onde k é uma constante que independe de x. Então dizemos que $f(x)$ é O grande de $g(x)$ quando $x \to x_0$ e escrevemos simbolicamente $f(x) = O(g(x))$.

Proposição 4.3.1. *Qualquer espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é 2-uniformemente suave e 2-uniformemente convexo e 2 é o melhor expoente para cada propriedade.*

Prova: Usando a identidade do paralelogramo, ou seja,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| = 2\varepsilon$, temos,

$$\|x+y\|^2 = 4 - \|x-y\|^2 = 4(1-\varepsilon^2).$$

Portanto,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = (1-\varepsilon^2).$$

Elevando ambos os lados da desigualdade na potência $\frac{1}{2}$, pelo Lema 3.1.4 obtemos,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2,$$

o que é equivalente a

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Então o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é 2-uniformemente convexo. Para provarmos que o espaço de Hilbert é 2-uniformemente suave, note que pelo Lema 3.3.1 temos

$$\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} \leq \left(\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.15}$$

Fazendo $\|x\| = 1$ e $\|y\| = \tau$ e substituindo em (4.15), aplicando a lei do paralelogramo e o Lema 3.1.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} &\leq \left(\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (1+\tau^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 1 + \frac{\tau^2}{2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 \leq \frac{\tau^2}{2},$$

ou seja,

$$\rho_{\mathcal{H}}(\tau) \leq \frac{\tau^2}{2}.$$

Para concluir a prova da proposição temos que mostrar que 2 é o melhor expoente para cada propriedade.

Vamos analisar primeiro o caso 2-uniformemente convexo. Note que,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\frac{1-\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^2}$ é limitado. Então pela definição (4.3.1), temos que

$$1 - \left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} \simeq O(\varepsilon^2).$$

De modo análogo concluímos que

$$-1 + (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} \simeq O(\varepsilon^2).$$

$\square$

Agora vamos mostrar um resultado importante sobre a constante de p-suavidade uniforme do espaço normado X e a constante q-convexidade uniforme de seu dual X^*.

4.4 Dualidade entre Convexidade e Suavidade Uniforme

Proposição 4.4.1. *(Dualidade para q-Convexidade Uniforme e p-Suavidade Uniforme). Seja X um espaço normado e X^* seu dual. Então a constante de p-suavidade uniforme de X (a constante k em (3.23)) é igual a constante de q-convexidade uniforme de X^* (a constante k em (3.22))*

Prova: Primeiramente vamos supor que a constante de q-convexidade uniforme de X^* seja k e vamos mostrar que k é uma constante de p-suavidade uniforme de X. Sejam x, $y \in X$. Vamos denotar as normas de X e X^* por $\|\cdot\|$. Pelo Corolário 1.1.1, existem λ e $\mu \in X^*$ tais que

$$\|\lambda\| = \|\mu\| = 1, \ \lambda(x+y) = \|x+y\| \ \text{ e } \mu(x-y) = \|x-y\|.$$

Defina ϕ, $\psi \in X^*$ por

$$\phi = z^{-\frac{1}{q}} \|x+y\|^{p-1} \lambda \ \text{ e } \ \psi = z^{-\frac{1}{q}} \|x-y\|^{p-1} \mu,$$

onde

$$z = \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}.$$

Afirmação 1:

$$\|\phi\|^q + \|\psi\|^q = 2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^q + \|\psi\|^q &= z^{-1} \|x-y\|^p \|\lambda\| + z^{-1} \|x+y\|^p \|\mu\| \\
&= z^{-1} (\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) \\
&= \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{\left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Afirmação 2:

$$\frac{\phi(x+y)+\psi(x-y)}{2} = \left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(x+y)+\psi(x-y)}{2} &= \frac{z^{-\frac{1}{q}}\,\|x+y\|^{p-1}\,\lambda(x+y) + z^{-\frac{1}{q}}\,\|x-y\|^{p-1}\,\mu(x-y)}{2} \\
&= \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2\left(\frac{\|x+y\|^p+\|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&= \frac{\left(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{1-\frac{1}{q}}} \\
&= \left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} &= \frac{\phi(x+y)+\psi(x-y)}{2} \\
&= \frac{(\phi+\psi)(x)}{2} + \frac{(\phi-\psi)(y)}{2} \\
&= \frac{(\phi+\psi)(x)}{2} + \frac{(\phi-\psi)(ky)}{2k} \\
&\leq \left|\frac{(\phi+\psi)(x)}{2} + \frac{(\phi-\psi)(ky)}{2k}\right| \\
&\leq \left\|\frac{\phi+\psi}{2}\right\|\|x\| + \left\|\frac{\phi-\psi}{2k}\right\|\|ky\| \\
&\leq \left[\left\|\frac{\phi+\psi}{2}\right\| + \left\|\frac{\phi-\psi}{2k}\right\|\right]\big(\|x\|+\|ky\|\big). \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades de Hölder e a desigualdade (3.20) em (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left[\left\|\frac{\phi+\psi}{2}\right\| + \left\|\frac{\phi-\psi}{2k}\right\|\right] \cdot \left[\,\|x\| + \|ky\|\,\right] \\
&\leq \left[\left\|\frac{\phi+\psi}{2}\right\|^q + \left\|\frac{\phi-\psi}{2k}\right\|^q\right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\,\|x\|^p + \|ky\|^p\,\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{\|\phi\|^q + \|\psi\|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\|x\|^p + \|ky\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\|x\|^p + \|ky\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Agora vamos supor que a constante de p-suavidade uniforme de X seja k e vamos mostrar que k á uma constante de q-convexidade uniforme de X^*. Sejam φ e $\psi \in X^*$. Como X^* é reflexivo, então X é reflexivo. Logo, existem $\tilde{x}$ e $\tilde{y} \in X$ tais que $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{y}\| = 1$,

$$\|\varphi + \psi\| = (\varphi + \psi)(\tilde{x})$$

e

$$\|\varphi - \psi\| = (\varphi - \psi)(\tilde{y}).$$

Sejam u e $v \in X$ dados por

$$u = z^{-\frac{1}{p}} \left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^{q-1} \cdot \frac{\tilde{x}}{2} \quad \text{e} \quad v = z^{-\frac{1}{p}} \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\|^{q-1} \cdot \frac{\tilde{y}}{2k},$$

onde

$$z = \left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^{q} + \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\|^{q}.$$

Afirmação 1:

$$\|u\|^p + \|kv\|^p = \frac{1}{2^p}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|u\|^p + \|kv\|^p &= z^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^p \left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^{p(q-1)} + \left(\frac{1}{2k}\right)^p k^p \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\|^{p(q-1)}\right] \\
&= z^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^p \left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^{q} + \left(\frac{1}{2}\right)^p \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\|^{q}\right] \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p \left[\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\right\|^q + \left\|\frac{\varphi-\psi}{2k}\right\|^q\right]}{\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\right\|^q + \left\|\frac{\varphi-\psi}{2k}\right\|^q} \\
&= \frac{1}{2^p}
\end{aligned}$$

Afirmação 2:

$$(\varphi + \psi)(u) + (\varphi - \psi)(v) = \left(\left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^{q} + \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(\varphi + \psi)(u) + (\varphi - \psi)(v) &= z^{-\frac{1}{p}}\left(\left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\| \left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^{q-1} + \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\| \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\|^{q-1}\right) \\
&= \frac{\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\right\|^q + \left\|\frac{\varphi-\psi}{2k}\right\|^q}{\left(\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\right\|^q + \left\|\frac{\varphi-\psi}{2k}\right\|^q\right)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \left(\left\|\frac{\varphi + \psi}{2}\right\|^{q} + \left\|\frac{\varphi - \psi}{2k}\right\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left(\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\right\|^q + \left\|\frac{\varphi-\psi}{2k}\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= (\varphi+\psi)(u) + (\varphi-\psi)(v) \\
&= \varphi(u+v) + \psi(u-v) \\
&\leq \|\varphi\|\,\|u+v\| + \|\psi\|\,\|u-v\| \\
&\leq \big[\,\|u+v\| + \|u-v\|\,\big]\big[\,\|\varphi\| + \|\psi\|\,\big] \\
&\leq^2 \big(\,\|u+v\|^p + \|u-v\|^p\,\big)^{\frac{1}{p}}\big(\,\|\varphi\|^q + \|\psi\|^q\,\big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq^3 2^{\frac{1}{p}}\big(\,\|x\|^p + \|ky\|^p\,\big)^{\frac{1}{p}}\big(\,\|\varphi\|^q + \|\psi\|^q\,\big)^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{-1}\big(\,\|\varphi\|^q + \|\psi\|^q\,\big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}}\big(\,\|\varphi\|^q + \|\psi\|^q\,\big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{\|\varphi\|^q + \|\psi\|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Isto completa a prova. □

Proposição 4.4.2. *(Dualidade da Desigualdade de Hanner). Seja X um espaço normado e X^* o seu dual. Sejam $1 < p \leq 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, se*

$$\|\phi+\psi\|^q + \|\phi-\psi\|^q \leq \big(\,\|\phi\| + \|\psi\|\,\big)^q + \big|\,\|\phi\| - \|\psi\|\,\big|^q \tag{4.17}$$

vale para todo ϕ, $\psi \in X^*$, temos

$$\|y+z\|^p + \|y-z\|^p \geq \big(\,\|y\| + \|z\|\,\big)^p + \big|\,\|z\| - \|y\|\,\big|^p, \tag{4.18}$$

para todo y, $z \in X$.

Prova: Suponhamos primeiro que (4.17) vale em X^* e vamos mostrar que (4.18) vale em X. Fazendo, $y = u+v$ e $z = u-v$ e substituindo em (4.18) temos

$$2^p\big(\,\|u\|^p + \|v\|^p\,\big) \geq \big(\,\|u+v\| + \|u-v\|\,\big)^p + \big|\,\|u+v\| - \|u-v\|\,\big|^p. \tag{4.19}$$

Sem perda de generalidade, assuma que $\|u+v\| = 1$ e $r := \|u-v\| \leq 1$.

Afirmação 1: Podemos reescrever o lado direito de (4.19) como

$$R^p = \alpha\,\|u+v\|^p + \beta\,\|u-v\|^p = (1+r)^p + (1-r)^p,$$

onde

$$\alpha = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \quad \text{e} \quad \beta = r^{1-p}\big[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}\big].$$

---

[2]Pela desigualdade de Hölder.

[3]Pela desigualdade (3.23).

De fato,

$$\begin{aligned}
R^p &= \alpha \|u+v\|^p + \beta \|u-v\|^p \\
&= \alpha + \beta r^p \\
&= (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} + r(1+r)^{p-1} - r(1-r)^{p-1} \\
&= (1+r)(1+r)^{p-1} + (1-r)(1-r)^{p-1} \\
&= (1+r)^p + (1-r)^p.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 1.1.1, sejam λ, $\mu \in X^*$ tais que

$$\|\lambda\| = \|\mu\| = 1,\ \lambda(u+v) = \|u+v\| \ \text{ e } \ \mu(u-v) = \|u-v\|.$$

Defina,

$$\phi = \alpha R^{\frac{-p}{q}} \|u+v\|^{p-1} \lambda \qquad \text{e} \qquad \psi = \beta R^{-\frac{p}{q}} \|u-v\|^{p-1} \mu.$$

Afirmação 2:

$$\phi(u+v) + \psi(u-v) = R.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\phi(u+v)+\psi(u-v) &= \alpha R^{-\frac{p}{q}} \|u+v\| \|u+v\|^{p-1} + \beta R^{-\frac{p}{q}} \|u-v\| \|u-v\|^{p-1} \\
&= R^{-\frac{p}{q}} \big(\alpha \|u+v\|^p + \beta \|u-v\|^p\big) \\
&= \left(\frac{\alpha \|u+v\|^p + \beta \|u-v\|^p}{\big(\alpha \|u+v\|^p + \beta \|u-v\|^p\big)^{\frac{1}{q}}} \right) \\
&= (\alpha \|u+v\|^p + \beta \|u-v\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (R^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= R.
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
R = \phi(u+v) + \psi(u-v) &= (\phi+\psi)(u) + (\phi-\psi)(v) \\
&\leq |(\phi+\psi)(u) + (\phi-\psi)(v)| \\
&\leq \|\phi+\psi\| \|u\| + \|\phi-\psi\| \|v\| \\
&\leq \big[\, \|\phi+\psi\| + \|\phi-\psi\| \,\big] \big[\, \|u\| + \|v\| \,\big] \\
&\leq (\|\phi+\psi\|^q + \|\phi-\psi\|^q)^{\frac{1}{q}} (\|u\|^p + \|v\|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Para completar a demostração de (4.19), precisamos mostrar que,

$$T := \|\phi+\psi\|^q + \|\phi-\psi\|^q \leq 2^q.$$

Mas, por (4.17) temos,

$$\begin{aligned}
T &= \|\phi+\psi\|^q + \|\phi-\psi\|^q \\
&\leq (\|\phi\|+\|\psi\|)^q + \big|\, \|\phi\| - \|\psi\| \,\big|^q \\
&= \Big[R^{-\frac{p}{q}}\alpha \|u+v\|^{p-1}\|\lambda\| + R^{-\frac{p}{q}}\beta\|u-v\|^{p-1}\|\mu\|\Big]^q \\
&\quad + \Big[R^{-\frac{p}{q}}\alpha \|u+v\|^{p-1}\|\lambda\| - R^{-\frac{p}{q}}\beta\|u-v\|^{p-1}\|\mu\|\Big]^q \\
&= R^{-p}\big[\alpha+\beta r^{p-1}\big]^q + R^{-p}\big[\alpha-\beta r^{p-1}\big]^q \\
&= R^{-p}\Big[(1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1}+r^{1-p}\big[(1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1}\big]r^{p-1}\Big]^q \\
&\quad + R^{-p}\Big[(1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1}-r^{1-p}\big[(1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1}\big]r^{p-1}\Big]^q \\
&= R^{-p}\big[2(1+r)^{p-1}\big]^q + R^{-p}\big[2(1-r)^{p-1}\big]^q \\
&= \frac{2^q}{R^p}\big[(1+r)^p+(1-r)^p\big] \\
&= 2^q\frac{(1+r)^p+(1-r)^p}{(1+r)^p+(1-r)^p} \\
&= 2^q.
\end{aligned}$$

□

Vimos no Capítulo 3 duas definições para r-convexidade uniforme e t-suavidade uniforme, agora vamos terminar o capítulo provando a equivalência destas duas definições.

Teorema 4.4.1. *(Equivalência das Definições de r-Convexidade Uniforme e t-Suavidade Uniforme). Seja X um espaço normado. Então (3.20) vale para alguma constante k e para todo x, $y \in X$ se, e somente se, $\delta_x(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r$ vale para $r > 1$ e alguma constante c. Similarmente, (3.23) vale para alguma constante k e para todo x, $y \in X$ se, e somente se, $\rho_X(\tau) \leq c\tau^r$ vale para alguma constante c.*

Prova: Pela Proposição (3.3.4), temos que a validade de (3.23) para alguma constante k e para x, $y \in X$ implica que $\rho_X(\tau) \leq c\tau^r$ vale para alguma constante c. Agora suponhamos que $\rho_X(\tau) \leq c\tau^r$ vale para $1 < r \leq 2$ e alguma constante c. Sejam $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$. Logo $\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} - 1 \leq (c\|y\|)^r$. Defina os números

$$b := \frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} \qquad \text{e} \qquad a := \frac{\|x+y\|-\|x-y\|}{\|x+y\|+\|x-y\|}.$$

Afirmação:

$$\left(\frac{\|x+y\|^r+\|x-y\|^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} - \frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} = b\left[\left(\frac{(1+a)^r+(1-a)^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right] \tag{4.20}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&b\left[\left(\frac{(1+a)^r+(1-a)^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}-1\right]= \\
&= b\left[\frac{\left(1+\frac{\|x+y\|-\|x-y\|}{\|x+y\|+\|x-y\|}\right)^r}{2}+\frac{\left(1-\frac{\|x+y\|-\|x-y\|}{\|x+y\|+\|x-y\|}\right)^r}{2}\right]^{\frac{1}{r}}-b \\
&= \frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2}\left[\left(\frac{2\|x+y\|}{\|x+y\|+\|x-y\|}\right)^r+\left(\frac{2\|x-y\|}{\|x+y\|+\|x-y\|}\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}\frac{1}{2^{\frac{1}{r}}} \\
&\quad-\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} \\
&= \left\{\left(\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2}\right)^r\left[\frac{2^r\|x+y\|^r+2^r\|x-y\|^r}{\left(\|x+y\|+\|x-y\|\right)^r}\right]\right\}^{\frac{1}{r}}\frac{1}{2^{\frac{1}{r}}} \\
&\quad-\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} \\
&= \left(\frac{\|x+y\|^r+\|x-y\|^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}-\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2}.
\end{aligned}
$$

A função de a do lado direito em (4.20) desaparece quadraticamente na origem: seja

$$
p(a)=b\left[\left(\frac{(1+a)^r+(1-a)^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}-1\right],
$$

ou seja, $p(0)=0$. Então uma simples estimativa usando o Teorema de Taylor mostra que $p(a)$ é limitado por $D_r a^2$ para alguma constante D_r dependendo somente de r. De fato, usando o Teorema de Taylor com resto de Lagrange podemos escrever $p(a)$ como,

$$
p(a)=\frac{r(r-1)}{2!}\,\xi^2,
$$

onde $\xi\in(0,a)$. Fazendo $D_r=\frac{r(r-1)}{2}$, obtemos que

$$
p(a)=D_r\xi^2\le D_r a^2.
$$

Então, desde que $|a|\le\frac{\|y\|}{b}\le\|y\|$ e $1<r\le 2$, temos, por (4.20) e pela suposição em ρ_X, que

$$
\left(\frac{\|x+y\|^r+\|x-y\|^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}\le 1+c^r\|y\|^r+D_r\|y\|^2.
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2} &\leq \left(1 + c^r \|y\|^r + D_r \|y\|^2\right)^r \\
&\leq \left(1 + (c + D_r) \|y\|\right)^r \\
&\leq 1 + k_r^r \|y\|^r ,
\end{aligned}$$

para todo x, $y \in X$ com $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$ e a constante k_r dependendo somente de c e r. Portanto,

$$\frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2} \leq \|x\|^r + k_r^r \|y\|^r , \tag{4.21}$$

para todo x, $y \in X$ com $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$. Finalmente, aplicando a desigualdade para $\frac{x}{\|x\|}$ e $\frac{y}{\|x\|}$, (4.21) vale para todo x e y, tal que $\|y\| \leq \|x\|$.

Assumindo que $k_r > 1$, (4.21) vale para todo x e y. Agora pela Proposição 3.3.3 temos que a validade de (3.20) para alguma constante k e para x e $y \in X$ implica que $\delta_X(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r$ vale para alguma constante c. Agora suponhamos que $\delta_X(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r$ vale para alguma constante c. Então, pelo teorema (2.3.1) temos

$$\begin{aligned}
\rho_{X^*}(\tau) &= \sup\{\tau\varepsilon - \delta_X(\varepsilon) : 0 \leq \varepsilon \leq 1\} \\
&\leq \sup\left\{\tau\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^r : 0 \leq \varepsilon \leq 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\tau\varepsilon - \varepsilon^r \left(\frac{1}{c}\right)^r : 0 \leq \varepsilon \leq 1\right\} \\
&= (\tau c')^{r'},
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Então pelo que mostramos na primeira parte deste teorema, existe uma constante k que torna (3.23) válida em X^*. Logo, pela proposição 4.4.1, (3.20) é válida para em X^{**} e, portanto, para X, para alguma constante k. $\square$

Capítulo 5

Espaços C_p

Neste capítulo vamos mostrar a desigualdade "fácil" de Clarkson. Provaremos a desigualdade ótima 2-uniformemente convexa. E também que os espaços C_p são 2-uniformemente convexos.

5.1 Definições e algumas propriedades sobre o traço de uma Matriz

Definição 5.1.1. (Espaços C_p) Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por C_p o espaço de Banach de operadores compactos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com a norma

$$\|X\|_p = \left(\operatorname{tr}(X^*X)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\operatorname{tr}(XX^*)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{5.1}$$

onde X é um operador compacto de $\mathcal{H}$, X^* é o seu adjunto e

$$\operatorname{tr}(B) = \sum_k (Be_k, e_k),$$

para $\{e_k\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Para $p = \infty$, sejam X e Y espaços de Banach e $\mathcal{L}(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares e limitados de X em Y. Seja $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, definimos

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Dizemos que $\|A\|$ é a norma usual de operadores.

Notação: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Vamos denotar por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ o conjunto de operadores limitados de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$.

Definição 5.1.2. Um operador $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é chamado uma *isometria* se $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. U é chamado uma *isometria parcial* se U é uma isometria restrita ao subespaço fechado $\big(\mathrm{Ker}(U)\big)^{\perp}$.

Para o próximo lema, necessitaremos do bem conhecido Teorema da Decomposição Polar, que enunciamos a seguir.

Definição 5.1.3. Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, com $A^*A \geq 0$, então $|A| := \sqrt{A^*A}$.

Teorema 5.1.1. *(Decomposição Polar). Seja A um operador linear limitado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então existe uma isometria parcial U tal que $A = U|A|$. Além disso, U é unicamente determinado pela condição* $\mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Ker}\, A$. *Ou ainda,* $\mathrm{dom}\, U = \mathrm{dom}\, A$.

Prova: Veja [19].

Lema 5.1.1. *Sejam A e B dois operadores em C_p. Então,*

$$|\mathrm{tr}\,(AB)\,| \leq \big(\mathrm{tr}\,(|A^*| \cdot |B|)\,\big)^{\frac{1}{2}} \big(\mathrm{tr}\,(|A| \cdot |B^*|)\,\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova: Sejam A e B dois operadores em C_p e sejam U e V isometrias parciais tais que (conforme o Teorema 5.1.1) $A = U|A|$ e $B = V|B|$ sejam as decomposições polares de A e B, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}\,(AB)\,| &= |\mathrm{tr}\,(U|A|V|B|)\,| \\ &= \left|\mathrm{tr}\left(|B|^{\frac{1}{2}}U|A|V|B|^{\frac{1}{2}}\right)\right| \\ &= \left|\mathrm{tr}\left((|B|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}})(|B|^{\frac{1}{2}}V^*|A|^{\frac{1}{2}})\right)\right|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}\,(AB)\,|^2 &\leq \mathrm{tr}\left(|B|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}U^*|B|^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{tr}\left(|B|^{\frac{1}{2}}V^*|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}V|B|^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \mathrm{tr}\,(U|A|U^*|B|)\,\mathrm{tr}\,(|A|V|B|V^*) \\ &= \mathrm{tr}\,(|A^*||B|)\,\mathrm{tr}\,(|A||B^*|)\,. \end{aligned}$$

já que $|A^*| = U|A|U^*$ e $|B^*| = V|B|V^*$. Ou seja,

$$|\mathrm{tr}\,(AB)\,| \leq \big(\mathrm{tr}\,(|A^*| \cdot |B|)\,\big)^{\frac{1}{2}} \big(\mathrm{tr}\,(|A| \cdot |B^*|)\,\big)^{\frac{1}{2}},$$

como queríamos provar. $\square$

Observação 5.1.1. Muitas desigualdades familiares para a norma L^p valem também para a norma C_p, como mostra as seguintes proposições.

Proposição 5.1.1. *(Desigualdade de Hölder). Sejam X, $Y \in C_p$. Então,*

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q \,,$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Prova: Uma prova pode ser encontrada em [7].

Proposição 5.1.2. *Sejam A e $B \in C_p$. Então, usando a desigualdade triangular para $\|\cdot\|_1$, temos*

$$\mathrm{tr}\,(|A+B|) \leq \mathrm{tr}\,(|A| + |B|)\,.$$

Prova: Seja $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal. Sejam U, V e W isometrias parciais provenientes das decomposições polares, assim

$$A = V|A|, \quad B = W|B| \ \text{ e } \ A + B = U|A+B|.$$

Note que $\|A\|_1 = \mathrm{tr}\,(|A|)$ e $\|A\|_2 = (\mathrm{tr}\,(A^*A))^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{tr}\,(|A|^2))^{\frac{1}{2}}$.
Fazendo $\varphi'_n = U\varphi_n$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(|A+B|) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, |A+B|\varphi_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, U^*(A+B)\varphi_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, (U^\star A + U^* B)\varphi_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi'_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, B\varphi'_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, V|A|\varphi'_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, W|B|\varphi'_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (|A|^{\frac{1}{2}} V^* \varphi_n, |A|^{\frac{1}{2}} \varphi'_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (|B|^{\frac{1}{2}} W^* \varphi_n, |B|^{\frac{1}{2}} \varphi'_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| |A|^{\frac{1}{2}} V^* \varphi_n \right\| \left\| |A|^{\frac{1}{2}} \varphi'_n \right\| + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| |B|^{\frac{1}{2}} W^* \varphi_n \right\| \left\| |B|^{\frac{1}{2}} \varphi'_n \right\|. \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| |A|^{\frac{1}{2}} V^* \varphi_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| |A|^{\frac{1}{2}} \varphi'_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| |B|^{\frac{1}{2}} W^* \varphi_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{*} \left\| |B|^{\frac{1}{2}} \varphi'{}_n \right\| \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Agora, pela definição de norma, segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left(|A+B|\right) &\leq \left\||A|^{\frac{1}{2}}V^*\right\|_2 \left\||A|^{\frac{1}{2}}\right\|_2 + \left\||B|^{\frac{1}{2}}W^*\right\|_2 \left\||B|^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \\
&\leq \left\||A|^{\frac{1}{2}}\right\|_2^2 + \left\||B|^{\frac{1}{2}}\right\|_2^2 \\
&= \|A\|_1 + \|B\|_1 \\
&= \mathrm{tr}\left(|A|\right) + \mathrm{tr}\left(|B|\right),
\end{aligned}$$

pois,

$$\left\||A|^{\frac{1}{2}}\right\|_2^2 = \left[\left(\mathrm{tr}\left(|A|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \mathrm{tr}\left(|A|\right) = \|A\|_1 .$$

Isto completa a prova. □

Observação 5.1.2. Por outro lado muitas desigualdades para normas L^p não valem para normas C_p. Muitos destes exemplos estão relacionados com a aplicação

$$X \longmapsto |X| = (X^*X)^{\frac{1}{2}} .$$

Se f e $g \in L^p$ então vale que $\||f| - |g|\|_p \leq \|f-g\|_p$. Mas isto não é verdade em geral para o espaço C_p, como mostra a próxima proposição. Antes, precisamos definir os operadores de Hilbert-Schmidt.

Definição 5.1.4. (Operadores de Hilbert-Schmidt) Um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é chamado *Hilbert-Schmidt* se, e somente se, $\mathrm{tr}\,(T^*T) < \infty$. A família de todos os operadores Hilbert-Schmidt é denotada por $\mathfrak{l}^2$. Vamos denotar o espaço de Hilbert-Schmidt por HS

Proposição 5.1.3. *Sejam A e B dois operadores de Hilbert-Schimidt no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então,*

$$\left\||A| - |B|\right\|_{HS} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|A - B\| .$$

Prova: Vamos provar apenas um caso particular. A prova para o caso geral pode ser encontrado em [1]. Sejam X e Y operadores pertencentes ao espaço Hilbert-Schmidt e Q um operador linear limitado satisfazendo $X \geq 0$, $Y \geq 0$ e $\|Q\| \leq 1$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos que

$$\begin{aligned}
2|\mathrm{tr}\,(XY)\,| &\leq 2\left(\mathrm{tr}\,(XX^*)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{tr}\,(Y^*Y)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathrm{tr}\,(XX^*) + \mathrm{tr}\,(Y^*Y) . \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
4|\mathrm{tr}\,(QXY)\,| &= 4\Big|\mathrm{tr}\left((Y^{\frac{1}{2}}QX^{\frac{1}{2}})(X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}})\right)\Big| \\
&\leq^{2}\; 2\,\mathrm{tr}\left(Y^{\frac{1}{2}}QXQ^{*}Y^{\frac{1}{2}}\right) + 2\,\mathrm{tr}\left(Y^{\frac{1}{2}}XY^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2\,\mathrm{tr}\,(YQXQ^{*}) + 2\,\mathrm{tr}\,(XY) \\
&\leq^{2}\; \mathrm{tr}\,(YQQ^{*}Y) + \mathrm{tr}\left(QX^{2}Q^{*}\right) + 2\,\mathrm{tr}\,(XY) \\
&= \mathrm{tr}\left(Y^{2}QQ^{*}\right) + \mathrm{tr}\left(X^{2}Q^{*}Q\right) + 2\,\mathrm{tr}\,(XY) \\
&= \mathrm{tr}\left(X^{2}|Q|^{2}\right) + \mathrm{tr}\left(Y^{2}|Q|^{2}\right) + 2\,\mathrm{tr}\,(XY) \\
&\leq \mathrm{tr}\left(X^{2} + Y^{2} + XY + YX\right). \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Sejam $A = U|A|$ e $B = V|B|$ as decomposições polares de A e B respectivamente. Usando a desigualdade (5.3) para $X = |A|$, $Y = |B|$ e $Q = V^{*}U$, obtemos,

$$\begin{aligned}
2\left\|A - B\right\|_{HS}^{2} &= 2\,\mathrm{tr}\,((A - B)^{*}(A - B)) \\
&= 2\,\mathrm{tr}\left(|A|^{2} + |B|^{2}\right) - 2\,\mathrm{Re}(|B|V^{*}U|A|) \\
&\geq 2\,\mathrm{tr}\left(|A|^{2} + |B|^{2}\right) - \mathrm{tr}\left(|A|^{2} + |B|^{2} + |A||B| + |B||A|\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(|A|^{2} + |B|^{2}\right) - \mathrm{tr}\,(|A||B| + |B||A|) \\
&= \mathrm{tr}\,(|A| - |B|)^{2} \\
&= \big\||A| - |B|\big\|_{HS}^{2}.
\end{aligned}$$

Portanto temos

$$\big\||A| - |B|\big\|_{HS} \leq 2^{\frac{1}{2}}\left\|A - B\right\|,$$

como enunciado. □

Observação 5.1.3. O coeficiente que aparece na Proposição 5.1.3 é o melhor possível considerando A e B dois operadores quaisquer. Porém, se A e B são auto-adjuntos, então 1 é o melhor coeficiente.

5.2 Desigualdades de Clarkson

Agora vamos enunciar e provar vários lemas que serão utilizados para a demostração da desigualdade "fácil" de Clarkson para o caso C_p. A prova dessa desigualdade foi feita por Dixmier, [7].

Lema 5.2.1. *Sejam A e B operadores em C_p. Então,*

$$|\mathrm{tr}\,(AB)\,| \leq \mathrm{tr}\,(|AB|) \leq \left\|A\right\|_{1}\mathrm{tr}\,(|B|)\,.$$

[2] Por (5.2).

Prova: Suponhamos primeiramente que $A \geq 0$ e $B \geq 0$. Temos então, $B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}} \leq \|A\| \, B$ e, portanto,

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}\left(B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}\right) \leq \operatorname{tr}\left(B^{\frac{1}{2}} \|A\| \, B^{\frac{1}{2}}\right) = \|A\| \operatorname{tr}(B).$$

Agora supondo que A e B são dois operadores quaisquer, $A, B \in C_p$, temos então,

$$\operatorname{tr}(|A^*|.|B|) \leq \||A^*|\| \operatorname{tr}(|B|) = \|A\| \operatorname{tr}(|B|). \tag{5.4}$$

De fato, pelo Lema (5.1.1) e observando que $|A^*| = U|A|U^*$, $|B^*| = V|B|V^*$ e $B = V|B|$, onde U e V são isometrias parciais, temos

$$\begin{aligned}
|\operatorname{tr}(AB)| &\leq \big(\operatorname{tr}(|A^*| \cdot |B|)\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tr}\left(\big(|A| \cdot |B^*|\big)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\leq^{3} \big(\big\||A^*|\big\| \operatorname{tr}(|B|)\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\, \|A\| \operatorname{tr}(|B^*|)\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \big(\, \|U|A|U^*\| \operatorname{tr}(|B|)\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\big\||A|\big\| \operatorname{tr}(V|B|V^*)\big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \big\||A|\big\|_1 \big(\operatorname{tr}(|B|)\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\operatorname{tr}(|B|V^*V)\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|A\|_1 \operatorname{tr}(|B|)
\end{aligned}$$

Então, $\operatorname{tr}(AB) \leq \|A\|_1 \operatorname{tr}(|B|)$. Para provarmos a primeira desigualdade, seja I o operador identidade em C_p, então, pela desigualdade (5.4),

$$|\operatorname{tr}(AB)| = |\operatorname{tr}(IAB)| \leq \|I\| \operatorname{tr}(|AB|) = \operatorname{tr}(|AB|).$$

Para provarmos a última desigualdade, seja U uma isometria parcial tal que $|AB| = UAB$. Então, novamente pela desigualdade (5.4), temos

$$\operatorname{tr}(|AB|) = \operatorname{tr}(UAB) \leq \|UA\|_1 \operatorname{tr}(|B|) \leq \|A\|_1 \operatorname{tr}(|B|).$$

□

Lema 5.2.2. *Sejam $p \geq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e A, B, C e D operadores pertencentes a C_p. Então,*

$$\left|\operatorname{tr}\big((A+B)C + (A-B)D\big)\right| \leq 2^{\frac{1}{q}} \left[\, \|A\|_p^p + \|B\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\, \|C\|_q^q + \|D\|_q^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Se $p = \infty$ vamos usar a norma

$$\left[\, \|A\|_p^p + \|B\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} = \sup\{\|A\|_p \, , \|B\|_p\}.$$

[3]Por (5.4).

Prova: Primeiro vamos supor $p = \infty$ e $q = 1$. Assim, pelo Lema 5.2.1,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{tr}\big((A+B)C+(A-B)D\big)| &= |\mathrm{tr}\,((A+B)C)+\mathrm{tr}\,((A-B)D)\,| \\
&\leq |\mathrm{tr}\,((A+B)C)\,|+|\mathrm{tr}\,((A-B)D)\,| \\
&\leq \|A+B\|_\infty \mathrm{tr}\,(|C|)+\|A-B\|_\infty \mathrm{tr}\,(|D|) \\
&= \|A+B\|_\infty \|C\|_1+\|A-B\|_\infty \|D\|_1 \\
&\leq \big(\,\|A\|_\infty+\|B\|_\infty\big)\big(\,\|C\|_1+\|D\|_1\big) \\
&\leq 2\sup\{\|A\|_\infty\,,\|B\|_\infty\}\big(\,\|C\|_1+\|D\|_1\big) \\
&= 2\big[\,\|A\|_p^p+\|B\|_p^p\big]^{\frac{1}{p}}\big(\,\|C\|_1+\|D\|_1\big).
\end{aligned}$$

Agora vamos supor que $p \neq \infty$ e $q \neq 1$,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{tr}\big((A+B)C+(A-B)D\big)| &= |\mathrm{tr}\,((A+B)C)+\mathrm{tr}\,((A-B)D)\,| \\
&\leq |\mathrm{tr}\,((A+B)C)\,|+|\mathrm{tr}\,((A-B)D)\,| \\
&\leq^4 \|A+B\|_2\|C\|_2+\|A-B\|_2\|D\|_2 \\
&\leq \big[\,\|A+B\|_2+\|A-B\|_2\big]\big[\,\|C\|_2+\|D\|_2\big] \\
&\leq^5 \big[\,\|A+B\|_2^2+\|A-B\|_2^2\big]^{\frac{1}{2}}\big[\,\|C\|_2^2+\|D\|_2^2\big]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq^6 2^{\frac{1}{2}}\big[\,\|A\|_2^2+\|B\|_2^2\big]^{\frac{1}{2}}\big[\,\|C\|_2^2+\|D\|_2^2\big]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.2.3. *Seja $A \in C_p$, com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\|A\|_p = \sup\big\{|\mathrm{tr}\,(AB)\,| : \|B\|_q \leq 1\big\},$$

onde $B \in C^q$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Prova: Como vale a desigualdade de Hölder, ou seja, $|\mathrm{tr}\,(AB)\,| \leq \|A\|_p\,\|B\|_q$, é suficiente mostrar que existe um operador $B \in C_p$ tal que $\|B_q\| \leq 1$ e $|\mathrm{tr}\,(AB)\,| = \|A\|_p$. Sejam $A = U|A|$ e $|A^*| = U|A|U^*$ a decomposição polar de A. Considere $B = \lambda U^*|A^*|^{p-1}$, para $\lambda > 0$. Então,

$$AB = U|A|\lambda\, U^*|A^*|^{p-1} = |A^*|U\lambda\, U^*|A^*|^{p-1} = \lambda\, U^*|A^*|^pU = \lambda|A^*|^p.$$

Logo,

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(\lambda|A^*|^p) = \lambda\mathrm{tr}\,(|A^*|^p) = \lambda\mathrm{tr}\,(|A|^p)\,.$$

Por outro lado, como $\|B\| = \lambda|A^*|^{p-1}$, então,

$$\mathrm{tr}\,(|B|^q) = \mathrm{tr}\,(\lambda^q|A^*|^p) = \lambda^q\mathrm{tr}\,(|A^*|^p) = \lambda^q\mathrm{tr}\,(|A|^p)\,.$$

[4]Pelo Lema 5.2.1.

[5]Pela desigualdade de Hölder.

[6]Pela identidade do paralelogramo.

Como por hipótese $\|B\|_q \leq 1$, se $\mathrm{tr}\,(|A^*|^p) \neq 0$, basta tomar $\lambda = \big(\mathrm{tr}\,(|A|^p)\,\big)^{-\frac{1}{q}}$ para que $\mathrm{tr}\,(|B|^q) = 1$ e

$$|\mathrm{tr}\,(AB)\,| = \lambda \mathrm{tr}\,(|A|^p) = \frac{1 \cdot \mathrm{tr}\,(|A|^p)}{\big(\mathrm{tr}\,(|A|^p)\,\big)^{\frac{1}{q}}} = \big(\mathrm{tr}\,(|A|^p)\,\big)^{\frac{1}{p}} = \|A\|_p\,.$$

□

Teorema 5.2.1. *(Desigualdades de Clarkson para matrizes). Sejam A e $B \in C_p$. Então valem as seguintes desigualdades:*

Para $2 \leq p < \infty$,

$$\|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p \leq 2^{p-1}\big(\,\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big). \tag{5.5}$$

Para $1 < p \leq 2$ e $q = \frac{p}{p-1}$,

$$\|A+B\|_p^q + \|A-B\|_p^q \leq 2\big(\,\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big)^{\frac{q}{p}}. \tag{5.6}$$

Prova: Vamos provar apenas (5.5). Dado $\varepsilon > 0$, existem números $c \geq 0$ e $d \geq 0$ tais que

$$(c^q + d^q)^{\frac{1}{q}} \leq 1$$

e

$$\big[\,\|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p\big]^{\frac{1}{p}} \leq c\,\|A+B\|_p + d\,\|A-B\|_p + \varepsilon.$$

Por outro lado, existe um operador $C \in C_q$ tal que $\|C\|_q = c$ e pelo Lema 5.2.3 temos que, para $\varepsilon > 0$,

$$\|A+B\|_p\,\|C\|_q \leq |\mathrm{tr}\,((A+B)C)\,| + \varepsilon.$$

Vamos supor que $\mathrm{tr}\,((A+B)C) \geq 0$. De forma análoga, existe $D \in C_p$ tal que $\|D\|_q = d$ e

$$\|A-B\|_p\,\|D\|_q \leq |\mathrm{tr}\,((A-B)C)\,| + \varepsilon$$

e também vamos supor que $\mathrm{tr}\,((A-B)C) \geq 0$. Temos então,

$$\begin{aligned}
\big[\,\|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p\big]^{\frac{1}{p}} &\leq c\,\|A+B\|_p + d\,\|A-B\|_p + \varepsilon \\
&= \|A+B\|_p\,\|C\|_q + \|A-B\|_p\,\|D\|_q \\
&\leq \mathrm{tr}\,((A+B)C) + \mathrm{tr}\,((A-B)C) + \varepsilon + 2\varepsilon \\
&\leq^{5} 2^{\frac{1}{q}}\big[\,\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big]^{\frac{1}{p}}\big[\,\|C\|_q^q + \|D\|_q^q\big]^{\frac{1}{q}} + 3\varepsilon \\
&= 2^{\frac{1}{q}}\big[\,\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big]^{\frac{1}{p}}\big[c^q + d^q\big]^{\frac{1}{p}} + 3\varepsilon \\
&\leq 2^{\frac{1}{q}}\big[\,\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\big]^{\frac{1}{p}} + 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

[5] Pelo Lema 5.2.2.

qualquer que seja $\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\left[\,\|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p\,\right]^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{q}}\left[\,\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\,\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad \square$$

Observação 5.2.1. As desigualdades (5.5) e (5.6) para $1 < p \leq 2$ e $2 \leq p < \infty$, respectivamente, valem em sentido inverso. A prova da desigualdade (5.6) pode ser encontrada em [8], [2] ou [20].

Corolário 5.2.1. *O espaço C_p é p-uniformemente convexo para $2 \leq p < \infty$.*

Prova: Usando a desigualdade

$$\|A+B\|_p^p + \|A-B\|_p^p \leq 2^{\frac{p}{q}}\left(\,\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\right),$$

com $\|A\| = \|B\| = 1$ e $\|A-B\| \geq 2\varepsilon$, temos

$$\|A+B\|_p^p \leq 2^{\frac{p}{q}+1} - \|A-B\|_p^p = 2^p - \|A-B\|_p^p,$$

ou seja,

$$\|A+B\|_p^p \leq 2^p - 2^p\varepsilon^p = 2^p(1-\varepsilon^p).$$

Portanto,

$$\left\|\frac{A+B}{2}\right\|_p \leq (1-\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} \leq 1 - \frac{\varepsilon^p}{p},$$

o que é equivalente a

$$1 - \left\|\frac{A+B}{2}\right\|_p \geq \frac{\varepsilon^p}{p}.$$

Logo, $\delta_{C_p} \geq \dfrac{\varepsilon^p}{p}$. $\square$

Corolário 5.2.2. *O espaço C_p é q-uniformemente convexo para $1 < p \leq 2$.*

Prova: Usando a desigualdade

$$\|A+B\|_p^q + \|A-B\|_p^q \leq 2\left(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}},$$

com $\|A\| = \|B\| = 1$ e $\|A-B\| \geq 2\varepsilon$, temos,

$$\|A+B\|_p^q \leq 2^{\frac{q}{p}+1} - \|A-B\|_p^q = 2^q - \|A-B\|_p^q,$$

ou seja,

$$\|A+B\|_p^q \leq 2^q - 2^q\varepsilon^q = 2^q(1-\varepsilon^q).$$

Portanto,

$$\left\|\frac{A+B}{2}\right\|_q \leq (1-\varepsilon^q)^{\frac{1}{q}} \leq 1 - \frac{\varepsilon^q}{q},$$

o que é equivalente a

$$1 - \left\|\frac{A+B}{2}\right\|_q \geq \frac{\varepsilon^q}{q}.$$

Logo,

$$\delta_{C_p} \geq \frac{\varepsilon^q}{q}.$$

□

A partir de agora vamos enunciar e provar alguns lemas que serão necessários para a demonstraçõ do nosso próximo teorema.

5.3 Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa

Observação 5.3.1. Pelo Teorema 1.1.6, temos que se f é uma função analítica no interior e sobre um caminho fechado C e se z_0 é um ponto qualquer no interior de C, então,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz. \tag{5.7}$$

Na próxima definição, a idéia é estender (5.7) pegando valores no espaço de Banach $\mathcal{L}(X)$.

Definição 5.3.1. Seja X um espaço de Banach e seja $A \in \mathcal{L}(X)$ um operador linear limitado. Então, dada $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, definimos $f(A)$ por

$$f(A) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)(z-A)^{-1} dz,$$

onde $(z-A)^{-1}$ é o resolvente de A, f uma função holomorfa definida em um conjunto aberto de D o qual contém $\sigma(T)$ e Γ é uma curva fechada que contém todos os autovalores de A.

Lema 5.3.1. *(Representação Integral). Sejam $D \in C_p$, para $1 \leq p \leq 2$, uma matriz positiva e I o operador identidade. Então,*

$$D^{\frac{p}{2}-1} = \beta_p \int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1} \cdot \frac{1}{It+D}\, dt,$$

onde

$$\beta_p = -\frac{\sin\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)}{2\pi}.$$

Prova: Considere o seguinte caminho, conforme a Figura 5.1. Considere as curvas γ_1^k, γ_2^k, γ_3^k e γ_4^k com as seguintes parametrizações, para $\varepsilon_k > 0$ e $\eta_k > 0$,

$$\begin{aligned}
&\gamma_1^k : z = R_k e^{\mathrm{i}\theta}, \;\; \varepsilon_k < \theta < 2\pi - \varepsilon_k;\\
&\gamma_2^k : z = r_k e^{\mathrm{i}\theta}, \;\; \eta_k < \theta < 2\pi - \eta_k;\\
&\gamma_3^k : z = x + \mathrm{i}h_k, \;\; \tilde{r_k} < x < \tilde{R}_k, \quad h_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0;\\
&\gamma_4^k : z = x - \mathrm{i}h_k, \;\; \tilde{r_k} < x < \tilde{R}_k, \quad h_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

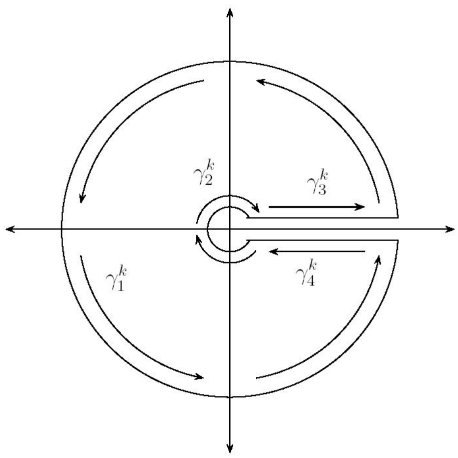

Figura 5.1: Caminhos γ_1^k, γ_2^k, γ_3^k e γ_4^k.

Agora usando a fórmula integral do resolvente

$$f(A) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma^k} \frac{f(z)}{zI - A}\, dz,$$

onde $\gamma^k = \gamma_1^k \cup \gamma_2^k \cup \gamma_3^k \cup \gamma_4^k$ é um caminho fechado simples que engloba todos os autovalores da matriz negativa A e z é o ponto qualquer no interior de γ. Seja R_k grande de maneira a englobar todos os autovalores. Primeiramente vamos calcular a integral para o caminho γ_1^k. Note que $z = R_k e^{\mathrm{i}\theta}$ e $f(z) =$

$\left(R_k e^{i\theta}\right)^{\frac{p}{2}-1}$ e vamos considerar $p < 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^k}\frac{f(z)}{zI-D}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\frac{\left(R_k e^{i\theta}\right)^{\frac{p}{2}-1}}{R_k e^{i\theta}I-D}\,R_k i e^{i\theta}\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\frac{\left(R_k e^{i\theta}\right)^{\frac{p}{2}}}{R_k e^{i\theta}I-D}\,d\theta\\
&\leq \left|\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\frac{(R_k)^{\frac{p}{2}}e^{i\theta\frac{p}{2}}}{R_k e^{i\theta}\left(I-\frac{D}{R_k e^{i\theta}}\right)}\,d\theta\right|\\
&\leq \int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\frac{|R_k|^{\frac{p}{2}}}{|R_k|}\left|\left(I-\frac{D}{R_k e^{i\theta}}\right)^{-1}\right|\,d\theta\\
&\leq c\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k} {R_k}^{\frac{p}{2}-1}d\theta\\
&= c\,(2\pi-2\varepsilon_k){R_k}^{\frac{p}{2}-1}\xrightarrow[R_k\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Note que para $p = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\frac{\left(R_k e^{i\theta}\right)^{\frac{2}{2}}}{R_k e^{i\theta}I-D}\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\frac{R_k e^{i\theta}}{R_k e^{i\theta}\left(I-\frac{D}{R_k e^{i\theta}}\right)}\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\left(I-\frac{D}{R_k e^{i\theta}}\right)^{-1}d\theta \xrightarrow[R_k\to\infty]{} I.
\end{aligned}$$

Agora calcularemos a integral para o caminho γ_2^k. Fazendo $z = r_k e^{i\theta}$ e $f(z) = \left(r_k e^{i\theta}\right)^{\frac{p}{2}-1}$, temos, para $p < 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2^k}\frac{f(z)}{zI-D}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k}\frac{\left(r_k e^{i\theta}\right)^{\frac{p}{2}-1}}{r_k e^{i\theta}I-D}\,r_k i e^{i\theta}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k}\frac{\left(r_k e^{i\theta}\right)^{\frac{p}{2}}}{r_k e^{i\theta}I-D}\,d\theta\\
&\leq \left|\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k}\frac{r_k^{\frac{p}{2}}e^{i\theta\frac{p}{2}}}{r_k e^{i\theta}-D}\,d\theta\right|\\
&\leq \int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k}|r_k|^{\frac{p}{2}}\left|\left(r_k e^{i\theta}I-D\right)^{-1}\right|d\theta\\
&\leq c\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k} r_k^{\frac{p}{2}}d\theta\\
&= c\,(2\pi-2\eta_k)r_k^{\frac{p}{2}}\xrightarrow[r_k\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

Note que para $p=2$, temos

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k}\frac{\left(r_k e^{\mathrm{i}\theta}\right)^{\frac{2}{2}}}{r_k e^{\mathrm{i}\theta}I-D}\,d\theta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k}\frac{r_k e^{\mathrm{i}\theta}}{r_k e^{\mathrm{i}\theta}I-D}\,d\theta\right| \\ &\leq \frac{c}{2\pi}\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k} r_k\,d\theta \xrightarrow[r_k\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

Para a curva γ_3^k, fazendo $z=x+h_k\mathrm{i}$ e $f(z)=(x+h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}$, então

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_3^k}\frac{f(z)}{zI-D}\,dz=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\tilde{r}_k}^{\tilde{R}_k}\frac{(x+h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}}{(x+h_k\mathrm{i})I-D}\,dx\longrightarrow\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}}{xI-D}\,dx,$$

quando $k\to\infty$. Note que,

$$\begin{aligned}z^{\frac{p}{2}-1}=e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\ln z} &= e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)[\ln z+\mathrm{i}\arg z]} \\ &= e^{\ln|z|^{\frac{p}{2}-1}+\left(\frac{p}{2}-1\right)\mathrm{i}\arg z} \\ &= |z|^{\frac{p}{2}-1}e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\mathrm{i}\arg z}.\end{aligned}$$

Temos que $\arg(x+h_k\mathrm{i})\longrightarrow 0$ quando $h_k\to 0^+$, logo,

$$(x+h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}=|x+h_k\mathrm{i}|^{\frac{p}{2}-1}e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\mathrm{i}\arg z}\xrightarrow[\arg z\to 0]{}|x|^{\frac{p}{2}-1}.$$

Finalmente vamos calcular a integral para o caminho γ_4^k. Fazendo $z=x-h_k\mathrm{i}$ e $f(z)=(x-h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}$, temos,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_4^k}\frac{f(z)}{zI-D}\,dz=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\tilde{R}_k}^{\tilde{r}_k}\frac{(x-h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}}{(x-h_k\mathrm{i})I-D}\,dx\to\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\infty}^{0}\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}e^{2\pi\mathrm{i}\left(\frac{p}{2}-1\right)}}{xI-D}\,dx,$$

quando $k\to\infty$. Note que $\arg(x-h_k\mathrm{i})\to 2\pi$ quando $h_k\to 0^-$. Logo,

$$(x-h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}=|x-h_k\mathrm{i}|^{\frac{p}{2}-1}e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\mathrm{i}\arg z}\longrightarrow|x|^{\frac{p}{2}-1}e^{2\pi\mathrm{i}(\frac{p}{2}-1)}.$$

Conclusão, fazendo $k\to\infty$,

$$\begin{aligned}D^{\frac{p}{2}-1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_k}^{2\pi-\varepsilon_k}\frac{\left(R_k e^{\mathrm{i}\theta}\right)^{\frac{p}{2}}}{R_k e^{\mathrm{i}\theta}I-D}\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\eta_k}^{2\pi-\eta_k}\frac{\left(r_k e^{\mathrm{i}\theta}\right)^{\frac{p}{2}}}{r_k e^{\mathrm{i}\theta}I-D}\,d\theta \\ &\quad +\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\tilde{r}_k}^{\tilde{R}_k}\frac{(x+h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}}{(x+h_k\mathrm{i})I-D}\,dx+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\tilde{R}_k}^{\tilde{r}_k}\frac{(x-h_k\mathrm{i})^{\frac{p}{2}-1}}{(x-h_k\mathrm{i})I-D}\,dx \\ &\longrightarrow \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}}{xI-D}\,dx-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}e^{2\pi\mathrm{i}\left(\frac{p}{2}-1\right)}}{xI-D}\,dx \\ &= \frac{1-e^{2\pi\mathrm{i}\left(\frac{p}{2}-1\right)}}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}}{xI-D}\,dx.\end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1-e^{2\pi\mathrm{i}\left(\frac{p}{2}-1\right)}}{2\pi\mathrm{i}}=\frac{\left[-1-\cos\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)\right]\mathrm{i}}{2\pi}-\frac{\sin\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)}{2\pi}.$$

Agora fazendo,

$$(-E)^{\frac{p}{2}-1}=\left[\frac{\left[-1-\cos\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)\right]\mathrm{i}}{2\pi}-\frac{\sin\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)}{2\pi}\right]\int_0^\infty\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}}{xI+E}\,dx,$$

onde $E=-(-D)$. Defina

$$g(E):=(-E)^{\frac{p}{2}-1}$$

Note que $g(E)$ assume valores complexos. Então podemos escrever g como

$$g(E)=f(E)+\mathrm{i}h(E),$$

onde f e g são funções analíticas. Portanto temos,

$$\begin{aligned} f(E)+\mathrm{i}h(E) &= \frac{\left[-1-\cos\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)\right]\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^\infty\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}}{xI+E}\,dx \\ &\quad -\frac{\sin\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)}{2\pi}\int_0^\infty\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}}{xI+E}\,dx. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Fazendo

$$\beta_p=-\frac{\sin\left(2\pi\left(\frac{p}{2}-1\right)\right)}{2\pi}$$

e comparando a igualdade (5.8), concluímos que

$$f(E)=\beta_p\int_0^\infty\frac{|x|^{\frac{p}{2}-1}}{xI+E}\,dx.$$

□

Lema 5.3.2. *Toda a matriz singular pode ser aproximada por matrizes invertíveis. Isto é, para toda matriz* $A\in\mathcal{M}(n)$*, existe uma seqüência* $B_k\in\mathcal{M}(n)$ *tal que* $\det B_k\neq 0$ *e* $B_k\longrightarrow A$*.*

Prova: Seja $A\in\mathcal{M}(n)$ e sejam $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ os autovalores de A. Se A é invertível, não temos nada a provar. Portanto, vamos supor que a matriz A é singular e, assim, pelo menos um dos autovalores é zero. Defina $B_\varepsilon=A+\varepsilon I$. Assim,

$$\det(B_\varepsilon-\lambda I)=\det(A+\varepsilon I-\lambda I)=\det(A-(\lambda-\varepsilon)I).$$

Note que os autovalores de B_ε são os mesmos autovalores de A deslocados de ε, portanto, podemos pegar ε de modo que nenhum desses autovalores seja zero. De onde concluímos que $\det(B_\varepsilon - \lambda I) = \det(A + (\varepsilon - \lambda)I) \neq 0$. Note também que

$$\|B_\varepsilon - A\| = A + \varepsilon I - A = \|\varepsilon I\| = \varepsilon.$$

Portanto, existe uma matriz B_ε próxima de A e B_ε é invertível. $\square$

Teorema 5.3.1. *(Desigualdade Ótima 2-Uniformemente Convexa). Sejam X e Y matrizes em C_p. Então, se $1 \leq p \leq 2$, temos que*

$$\left(\frac{\|X+Y\|_p^p + \|X-Y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{2}{p}} \geq \|X\|_p^2 + (p-1)\|Y\|_p^2. \tag{5.9}$$

Se $2 \leq p < \infty$ vale a desigualdade contrária.

Prova: Provaremos somente o caso $1 \leq p \leq 2$. Vamos supor que X e Y são matrizes auto-adjuntas. Sejam Z e W matrizes definidas em termos de X e Y como,

$$Z = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix}.$$

Afirmação 1: Podemos reescrever (5.9) como,

$$\left[\operatorname{tr}\left(|Z+rW|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}} \geq \left[\operatorname{tr}\left(|Z|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}} + r^2(p-1)\left[\operatorname{tr}\left(|W|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}}, \tag{5.10}$$

para $0 \leq r \leq 1$.

De fato, note que

$$\operatorname{tr}\left(|Z+rW|^p\right) = \operatorname{tr}\left(|Z-rW|^p\right) = \operatorname{tr}\left(|X+rY|^p\right) + \operatorname{tr}\left(|X-rY|^p\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left[\operatorname{tr}\left(|Z+rW|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}} &\geq 2^{\frac{2}{p}}(\|X\|_p^2 + (p-1)\|rY\|_p^2) \\
&= \left[\operatorname{tr}\left(|Z|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}} + (p-1)\left[\operatorname{tr}\left(|rW|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \left[\operatorname{tr}\left(|Z|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}} + r^2(p-1)\left[\operatorname{tr}\left(|W|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

Primeiramente vamos assumir que X e Y são invertíveis. Conseqüentemente, Z e W são invertíveis, logo seus vetores colunas são L.I. Portanto, o posto de cada uma dessas matrizes é n. Como Y é uma matriz invertível de posto n, gera um subespaço de dimensão n. Considerando $W = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix}$, concluímos que W gera $\mathbb{C}^{2n}$. Note também que $Z + rW$ gera o mesmo subespaço $\mathbb{C}^{2n}$ para r pequeno. Para isto observe que como $\det(Z + rW)$ é um polinômio de grau $2n$, existem $2n$ raízes $\{r_1, r_2, \cdots, r_{2n}\}$. Se $r \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_{2n}\}$, então $\det(Z + rW) \neq 0$, logo, $(Z + rW)$ é invertível então

$(Z+rW)$ também é invertível e zero não é autovalor de $(Z+rW)$.

Observação: Note que para a demostração deste teorema estamos supondo que Z e W são matrizes invertíveis. Mas, pelo Lema 5.3.2, concluímos que este resultado vale para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}(n)$.

Definindo,

$$\psi(r) = \mathrm{tr}\left(|Z+rW|^p\right) = \mathrm{tr}\left(Z^2 + r(ZW+WZ) + r^2W^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

notamos que $\psi(r)$ é continuamente diferenciável. Agora fazendo,

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = \frac{p}{2}\mathrm{tr}\left[\left(Z^2 + r(ZW+WZ) + r^2W^2\right)^{\frac{p}{2}-1}(ZW+WZ+2rW^2)\right], \tag{5.11}$$

usando o Lema 5.3.1, com $D = Z^2 + r(ZW+WZ) + r^2W^2$ podemos escrever,

$$\begin{aligned}\left[Z^2 + r(ZW+WZ) + r^2W^2\right]^{\frac{p}{2}-1} &= \\ = \beta_p \int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{It + (Z^2 + r(ZW+WZ) + r^2W^2)}\, dt. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Então podemos ver que $\frac{d\psi}{dr}$ é também continuamente diferenciável. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dr^2}(\psi(r))^{\frac{2}{p}} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{2}{p}\psi^{\frac{2}{p}-1}\frac{d\psi}{dr}\right) \\ &= \frac{2}{p}(\psi(r))^{\frac{2}{p}-1}\frac{d^2}{dr^2}\psi(r) + \frac{2}{p}\left(\frac{2}{p}-1\right)(\psi(r))^{\frac{2}{p}-2}\frac{d}{dr}\psi(r).\end{aligned} \tag{5.13}$$

Se provarmos que

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\psi(r)\right)^{\frac{2}{p}} \geq \frac{2}{p}\left(\psi(r)\right)^{\frac{2-p}{2}} \frac{d^2}{dr^2}\,\psi(r) \tag{5.14}$$

e

$$\frac{1}{p}\,\psi^{\frac{2-p}{p}}\,\frac{d^2\psi}{dr^2} \geq (p-1)\mathrm{tr}\left(|W|^p\right)^{\frac{2}{p}}, \tag{5.15}$$

concluíremos que

$$\frac{d^2}{dr^2}(\psi)^{\frac{2}{p}} \geq 2(p-1)\mathrm{tr}\left(|W|^p\right)^{\frac{2}{p}} = \alpha\text{"}(r), \tag{5.16}$$

onde α"(r) é a derivada segunda do lado direito de (5.10). Com isto provamos o teorema.

Para provar (5.14), basta usar (5.13) e mostrar que $\frac{d\psi(r)}{dr} \geq 0$ para $r \in (0,1)$.

Note que se mostrarmos que a desigualdade (5.15) é válida concluímos que $\psi"(r) \geq 0$. Note que

$$\begin{aligned}
\psi'(0) &= \operatorname{tr}\left(z^2 + 0(ZW+WZ) + 0^2W^2\right)\left(ZW+WZ+0\cdot 2W^2\right) \\
&= \left(\frac{p}{2}\right)\operatorname{tr}\left(Z^2(ZW+WZ)\right) \\
&= \left(\frac{p}{2}\right)\operatorname{tr}\begin{pmatrix} X^2(XY+YX) & 0 \\ 0 & X^2(-XY-YX)\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, temos que ψ' é não-decrescente e $\psi'(0) = 0$, então $\psi'(r) \geq 0$ em $(0,1)$, de onde concluímos que (5.14) é válida. Desta forma precisamos mostrar que a desigualdade (5.15) é válida para $0 < r < 1$. Redefinindo Z por $Z + rW$, basta provar que (5.15) vale para $r = 0$. Como $Z+rW$ é não singular, depois da redefinição, $|Z|$ é estritamente positiva.

Afirmação 2:

$$\frac{d^2}{dr^2}\operatorname{tr}\left(|Z+rW|^p\right)\Big|_{r=0} \geq \frac{d^2}{dr^2}\operatorname{tr}\left(\big||Z|+rW\big|^p\right)\Big|_{r=0}. \tag{5.17}$$

De fato, pela representação integral (5.12) e pelo Teorema 1.1.4, escrevendo por simplicidade

$$K(t) = It + (Z^2 + r(ZW+WZ) + r^2W^2),$$

temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dr^2}\operatorname{tr}\left(|Z+rW|^p\right) = \\
&= \frac{d}{dr}\left(\frac{p}{2}\right)\beta_p\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{K(t)}\right)(ZW+WZ+2rW^2)\,dt \\
&= \left(\frac{p}{2}\right)\beta_p\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{[K(t)]}\right)(2W^2)\,dt \\
&\quad - \left(\frac{p}{2}\right)\beta_p\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}\operatorname{tr}\left(\frac{ZW+WZ+2rW^2}{[K(t)]^2}\right)(ZW+WZ+2rW^2)\,dt.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Agora fazendo $r = 0$ em (5.18) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dr^2}\operatorname{tr}\left(|Z|^p\right) &= p\,\beta_p\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{It+Z^2}\right)(W^2)\,dt \\
&\quad - \left(\frac{p}{2}\right)\beta_p\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{Z^2+It}(ZW+WZ)\frac{1}{Z^2+It}(ZW+WZ)\right)dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d^2}{dr^2}\operatorname{tr}\left(|Z|^p\right) = p\ \operatorname{tr}\left(|Z|^{p-2}\right)W^2 -$$
$$-\left(\frac{p}{2}\right)\beta_p\int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{Z^2+It}(ZW+WZ)\frac{1}{Z^2+It}(ZW+WZ)\right)dt. \tag{5.19}$$

Usando a ciclicidade do traço, podemos escrever o último termo da igualdade (5.19) como

$$\operatorname{tr}\left(WZ\frac{1}{Z^2+It}WZ\frac{1}{Z^2+It}\right)+3\operatorname{tr}\left(W\frac{1}{Z^2+It}WZ^2\frac{1}{Z^2+It}\right).$$

Note que no segundo termo se substituirmos Z^2 por $|Z|^2$, este termo é inalterado. Agora analisando o primeiro termo, como estamos num espaço de dimensão finita com produto interno, então existe uma base ortonormal de autovetores relativamente a qual a matriz Z é diagonal. Assim, escrevendo o primeiro termo na base que diagonaliza Z, esse termo torna-se

$$\sum_{i,j=1}^{2n}\left(\frac{1}{Z_i^2+It}\right)\left(\frac{1}{Z_j^2+It}\right)|W_{ij}|^2 Z_i Z_j.$$

Note que este termo cresce quando substituímos Z por $|Z|$. Então, claramente a integral em (5.19) aumenta quando substituimos Z por $|Z|$ e o primeiro termo fica inalterado pois é uma função de Z^2. Assim a desigualdade (5.17) fica provada. Portanto, sem perda de generalidade, vamos assumir que $Z > 0$. Então, naturalmente, $Z + rW > 0$ para todo o r suficientemente pequeno. Também não precisamos mais elevar ao quadrado para obtermos um operador positivo cuja potência podemos expressar como uma integral do resolvente. Então vamos trabalhar diretamente com $Z + rW$.

Note que

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = p\big(\operatorname{tr}(Z+rW)^{p-1}W\big).$$

Usando a representação integral podemos escrever

$$(Z+rW)^{p-1} = \gamma_p\int_0^\infty t^{p-1}\left[\frac{1}{tI+(Z+rW)}\right]dt,$$

onde γ_p é uma constante. Fazendo,

$$\psi''(0) = p\,\gamma_p\int_0^\infty t^{p-1}\operatorname{tr}\left(\frac{1}{tI+Z}W\frac{1}{tI+Z}W\right)dt. \tag{5.20}$$

Agora vamos considerar o lado esquerdo de (5.20) como função de Z para W fixo, podemos fazer a seguinte afirmação:

Afirmação 3: A aplicação

$$Z \longmapsto \mathrm{tr}\left(\frac{1}{tI+Z}W\frac{1}{tI+Z}W\right)$$

é uma função convexa em Z. Para provarmos isso, é suficiente mostrar a seguinte desigualdade para toda a matriz auto-adjunta A:

$$\Delta(A) := \frac{d^2}{ds^2}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{It+(Z+sA)}W\frac{1}{It+(Z+sA)}W\right)\Bigg|_{s=0} \geq 0.$$

Por simplicidade, vamos definir $F(t) = It + (Z + sA)$. Fazendo,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{F(t)}W\frac{1}{F(t)}W\right) = \\
&\quad = \mathrm{tr}\left(\left[\frac{1}{F(t)}W\right]\left[-\frac{1}{[F(t)]^2}WA\right] + \left[\frac{-1}{[F(t)]^2}WA\right]\left[\frac{1}{F(t)}W\right]\right).
\end{aligned}$$

Agora fazendo,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{ds^2}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{F(t)}W\frac{1}{F(t)}W\right) = \\
&= \mathrm{tr}\Bigg(\left[\frac{1}{F(t)}W\right]\left[-\frac{1}{(F(t))^3}(-2WA^2)\right] + \left[-\frac{1}{F(t)^2}WA\right]\left[-\frac{1}{[F(t)]^2}WA\right] + \\
&\quad + \left[-\frac{1}{[F(t)]^2}WA\right]\left[-\frac{1}{[F(t)]^2}WA\right] + \left[-\frac{1}{[F(t)]^3}(-2WA^2)\right]\left[\frac{1}{F(t)}W\right]\Bigg),
\end{aligned}$$

temos então que,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{ds^2}\,\mathrm{tr}\left(\frac{1}{It+(Z+sA)}W\frac{1}{It+(Z+sA)}W\right)\Big|_{s=0} = \\
&= \mathrm{tr}\Bigg(\left[\frac{1}{It+Z}W\right]\left[\frac{1}{(It+Z)^3}2WA^2\right] + \left[\frac{1}{(It+Z)^2}WA\right]\left[\frac{1}{(It+Z)^2}WA\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{(It+Z)^2}WA\right]\left[\frac{1}{(It+Z)^2}WA\right] + \left[\frac{1}{(It+Z)^3}2WA^2\right]\left[\frac{1}{It+Z}W\right]\Bigg) \\
&= 4\mathrm{tr}\left(\left[\frac{1}{It+Z}W\frac{1}{(It+Z)^3}WA^2\right]\right) \\
&\qquad\qquad +2\mathrm{tr}\left(\left[\frac{1}{(It+Z)^2}WA\right]\left[\frac{1}{(It+Z)^2}WA\right]\right) \\
&= 4\mathrm{tr}\left(\left[\frac{1}{It+Z}\right]W^2\left[\frac{1}{It+Z}\right]\left[\frac{1}{It+Z}\right]A^2\left[\frac{1}{It+Z}\right]\right) \\
&\quad +2\mathrm{tr}\Bigg(\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]W\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]A\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]\times \\
&\qquad \times\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]W\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]A\left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg).
\end{aligned}$$

Definindo

$$C := \left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right] A \left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right] \quad \text{e} \quad D := \left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right] W \left[\frac{1}{(It+Z)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

temos,

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= 4\mathrm{tr}\left(D^2C^2\right) + 2\mathrm{tr}\left(DCDC\right) \\ &= 4\mathrm{tr}\left(C^2D^2\right) + 2\mathrm{tr}\left(DCDC\right). \end{aligned}$$

Afirmação 4:

$$|\mathrm{tr}\left(DCDC\right)| \le \mathrm{tr}\left(C^2D^2\right).$$

De fato, sejam U e V isometrias parciais tais que $D = U|D|$ e $C = V|C|$ sejam as decomposições polares de D e C, respectivamente. Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}\left(DCDC\right)| &= \left|\mathrm{tr}\big([DV|C|][DV|C|]\big)\right| \\ &\le^{6} \left[\mathrm{tr}\big([DV|C|][|C|V^*D]\big)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathrm{tr}\big([|C|V^*D][DV|C|]\big)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\mathrm{tr}\left(DC^2D\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathrm{tr}\left(CD^2C\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\mathrm{tr}\left(D^2C^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathrm{tr}\left(D^2C^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathrm{tr}\left(C^2D^2\right). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $\Delta(A) \ge 0$ e a integral em (5.20) é uma função convexa de Z. Fixando W e t, defina

$$F(Z) = \mathrm{tr}\left(\left[\frac{1}{It+Z}\right] W \left[\frac{1}{It+Z}\right] W\right).$$

Seja $\{e_1, \cdots, e_{2n}\}$ uma base ortonormal de autovetores de W. Note que, se U é uma matriz unitária que comuta com W, teremos $F(UZU^*) = F(Z)$. Seja $\{U_j\}_{1\le j\le 2^{2n}}$ o conjunto de 2^{2n} matrizes unitárias com a seguinte propriedade: para cada k, $U_je_k = \pm e_k$. Cada matriz deste conjunto tem entradas $+1$ ou -1 na diagonal. Logo, cada uma dessas matrizes comuta com W. Então, pela convexidade de F, temos

$$\begin{aligned} F(Z) &= 2^{-2n} \sum_{j=1}^{2^{2n}} F(U_jZU_j^*) \\ &\ge F\left(2^{-2n} \sum_{j=1}^{2^{2n}} U_jZU_j^*\right) \\ &= F(Z_{\mathrm{diag.}}), \end{aligned}$$

[6] Pelo Lema 5.1.1.

onde $Z_{\text{diag.}}$ é a matriz cujas entradas da diagonal, na base especificada acima, são as de Z e as entradas fora da diagonal principal são todas zero. Representando $Z_{\text{diag.}}$ por Z em (5.20) e usando que $Z_{\text{diag.}}$ e W comutam, temos

$$\psi''(0) = p(p-1)\text{tr}\left(|Z|^{p-2}W^2\right) \geq p(p-1)\left(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^{(p-2)}W_j^2\right),$$

onde Z_j e W_j são as j-ésimas entradas das diagonais de Z e W, respectivamente, na base especificada acima. Note que $\psi(0) = \text{tr}\,(Z^p)$. Deste modo, pelo mesmo método empregado, obtemos,

$$\psi(0) = \text{tr}\,(Z)^p \geq \left(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^p\right).$$

Assim,

$$\frac{1}{p}\big(\psi(0)\big)^{\frac{2-p}{p}}\psi''(0) \geq \frac{1}{p}\left(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^p\right)^{\frac{2-p}{p}} p(p-1)\sum_{j=1}^{2n} Z_j^{p-2}W_j^2.$$

Logo, para provar (5.15), basta mostrar que

$$\frac{1}{p}\bigg(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^p\bigg)^{\frac{(2-p)}{p}} p(p-1)\bigg(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^{(p-2)}W_j^2\bigg) \geq (p-1)\text{tr}\,(|W_j|^p)^{\frac{2}{p}},$$

o que é equivalente a

$$\left(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^p\right)^{\frac{(2-p)}{p}}\left(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^{(p-2)}W_j^2\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{2n} |W_j|^p\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{5.21}$$

Para provarmos (5.21) vamos usar a desigualdade de Hölder com $\frac{1}{r} + \frac{p}{2} = 1$. Para $p = 2$ a desigualdade é trivial. Vamos supor $\frac{2}{p} > 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{2n} |W_j|^p\right)^{\frac{2}{p}} &= \left[\sum_{j=1}^{2n} |W_j|^p \cdot \frac{1}{Z_j^{(2-p)\frac{p}{2}}} \cdot \left(Z_j^{(2-p)\frac{p}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \left[\left(\sum_{j=1}^{2n}\left(|W_j|^p \frac{1}{Z_j^{(2-p)\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{j=1}^{2n}\left(Z_j^{(2-p)\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \left[\left(\sum_{j=1}^{2n} |W_j|^2 Z_j^{(p-2)}\right)\left(\sum_{j} Z_j^p\right)^{\frac{2-p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} |W_j|^2 Z_j^{(p-2)}\left(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^p\right)^{\frac{2-p}{p}}.
\end{aligned}$$

Isto conclui o Teorema para X e Y auto-adjuntas.

Agora vamos considerar o caso em que X e Y são matrizes quaisquer. Defina

$$C = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que C e D são auto-adjuntas. Então, pelo caso que acabamos de provar,

$$\left(\frac{\|C+D\|_p^p + \|C-D\|_p^p}{2} \right)^{\frac{2}{p}} \geq \|C\|_p^2 + (p-1)\|D\|_p^2. \tag{5.22}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\|C+D\|_p^p &= \operatorname{tr}\left((C+D)(C+D)^*\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & X+Y \\ X^*+Y^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X+Y \\ X^*+Y^* & 0 \end{pmatrix}\right]^{\frac{p}{2}} \\
&= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} (X+Y)(X+Y)^* & 0 \\ 0 & (X+Y)^*(X+Y) \end{pmatrix}\right]^{\frac{p}{2}} \\
&= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} \big((X+Y)(X+Y)^*\big)^{\frac{p}{2}} & 0 \\ 0 & \big((X+Y)^*(X+Y)\big)^{\frac{p}{2}} \end{pmatrix}\right] \\
&= 2\operatorname{tr}\left(\big((X+Y)(X+Y)^*\big)^{\frac{p}{2}}\right) \\
&= 2\|X+Y\|_p^p.
\end{aligned}$$

Analogamente concluímos que

$$\|C+D\|_p^p = 2\|X_Y\|_p^p.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|C\|_p^2 &= \left(\operatorname{tr}(C^*C)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= \left[\operatorname{tr}\left(\left[\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix}\right]^{\frac{p}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \left[\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} XX^* & 0 \\ 0 & X^*X \end{pmatrix}^{\frac{p}{2}}\right)\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \left[\operatorname{tr}\begin{pmatrix} (XX^*)^{\frac{p}{2}} & 0 \\ 0 & (X^*X)^{\frac{p}{2}} \end{pmatrix}\right]^{\frac{2}{p}} \\
&= \left(\operatorname{tr}\left[(XX^*)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= 2^{\frac{2}{p}}\|X\|_p^2.
\end{aligned}$$

Analogamente prova-se que

$$\|D\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} \|Y\|_p^2 .$$

Substituindo em (5.22), temos

$$\left(\frac{2\|X+Y\|_p^p + 2\|X-Y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{2}{p}} \geq 2^{\frac{2}{p}} \|X\|_p^2 + (p-1)2^{\frac{2}{p}} \|Y\|_p^2 .$$

Portanto,

$$\left(\frac{\|X+Y\|_p^p + \|X_Y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{2}{p}} \geq \|X\|_p^2 + (p-1) \|Y\|_p^2 .$$

Isto completa a prova do Teorema. □

Corolário 5.3.1. *Sejam X e Y matrizes, X e $Y \in C_p$ e $1 \leq p \leq 2$ então,*

$$\frac{\|X+Y\|_p^2 + \|X-Y\|_p^2}{2} \geq \|X\|_p^2 + (p-1) \|Y\|_p^2 . \tag{5.23}$$

se $2 \leq p < \infty$ vale a desigualdade inversa.

Prova: Vamos provar o caso para $1 < p \leq 2$. Pelo Teorema 5.3.1 temos que,

$$\left(\frac{\|X+Y\|_p^p + \|X-Y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\|X\|_p^2 + (p-1) \|Y\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Pelo mesmo argumento de (3.12),

$$\left(\frac{\|X+Y\|_p^p + \|X-Y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\|X+Y\|_p^2 + \|X-Y\|_p^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Logo,

$$\|X\|_p^2 + (p-1) \|Y\|_p^2 \leq \frac{\|X+Y\|_p^2 + \|X-Y\|_p^2}{2} .$$

□

Proposição 5.3.1. *A desigualdade (5.23) implica a desigualdade (5.9).*

Prova: Considere as matrizes $2n \times 2n$ dadas em blocos formados por,

$$Z = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Então,

$$\operatorname{tr}|Z+W|^p = \operatorname{tr}|Z-W|^p = \big(\operatorname{tr}|X+Y|^p + \operatorname{tr}|X-Y|^p\big).$$

Como $\|X\|_p = \big(\operatorname{tr}(XX^*)^{\frac{p}{2}}\big)^{\frac{1}{p}}$, temos,

$$\Big(\|Z+W\|_p^2\Big) = \Big(\|Z-W\|_p^2\Big) = \Big(\|X+Y\|_p^p + \|X-Y\|_p^p\Big)^{\frac{2}{p}}.$$

Note que $\|Z\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}}\|X\|_p^2$ e $\|W\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}}\|Y\|_p^2$. Por (5.23) temos que,

$$\begin{aligned}
\|X\|_p^2 + (p-1)\|Y\|_p^2 &= 2^{\frac{-2}{p}}\Big(\|Z\|_p^2 + (p-1)\|W\|_p^2\Big) \\
&\leq 2^{\frac{-2}{p}}\left(\frac{\|Z+W\|_p^2 + \|Z-W\|_p^2}{2}\right) \\
&= 2^{\frac{-2}{p}}\left(\frac{2(\|X+Y\|_p^p + \|X-Y\|_p^p)}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= \left(\frac{\|X+Y\|_p^p + \|X-Y\|_p^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.3.2. *Os espaços C_p, para $1 < p \leq 2$, são 2-uniformemente convexos.*

Prova: Sejam C e $D \in C_p$ tais que $\|C\|_p = \|D\|_p = 1$ e $\|C-D\|_p \geq 2\varepsilon$. Fazendo $X = \frac{C+D}{2}$ e $Y = \frac{C-D}{2}$, pela desigualdade (5.23), temos

$$\left\|\frac{C+D}{2}\right\|_p^2 + (p-1)\left\|\frac{C-D}{2}\right\|_p^2 \leq \frac{\|C\|_p^2 + \|D\|_p^2}{2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{C+D}{2}\right\|_p^2 &\leq 1 - (p-1)\left\|\frac{C-D}{2}\right\|_p^2 \\
&\leq 1 - (p-1)\,\varepsilon^2. \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Elevando ambos os lados da desigualdade (5.25) na potência $\frac{1}{2}$ e utilizando o Lema (3.1.4), obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{C+D}{2} \right\|_p &\leq \left(1-(p-1)\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 1-\frac{(p-1)}{2}\,\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta_{C_p}(\varepsilon) \geq \frac{(p-1)}{2}\,\varepsilon^2.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Araki, H. e Yamagami, S. (1981). “An Inequality for the Hilbert-Schimidt norm”. *Communication in Mathematical Physics*. Vol. **81**, $89-96$.

[2] Boas, R. P. (1940).“Some Uniformly Convex Spaces”. *Bulletin of the American Mathematical Society*. Vol. **46**, $304-311$.

[3] Brezis, H. (1983). “Analyse Fonctionnelle Theórie et Applications”. Paris: Masson.

[4] Clarkson, J. A. (1936). “Uniformly Convex Spaces”. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. **40**, $396-414$.

[5] Conway, J. B. (1978). *Functions of One Complex Variable.* New York: Springer-Verlag. 2^a Edição.

[6] Day, M. (1944). “Uniform Convexity in Factor and Conjugate Spaces”. *Annals of Mathematics.* Vol. **45**, $375-385$.

[7] Dixmier, J. (1953). “Formes Linéaires sur Anneau D’opérateurs”. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Vol. **81**, $222-245$.

[8] Fack, T. e Kosaki, H. (1986). “Generalized s-Numbers of τ-Measurable Operators”. *Pacific Journal of Mathematics*. Vol. **123**, $269-300$.

[9] Figiel, T. e Johnson, S. B. (1974). “A Uniformly Convex Banach Space Wich Contains no C_p”. *Compositio Mathematica*. Vol. **29**, $179-190$.

[10] Figiel, T. (1976). “On the Moduli of Convexity and Smoothness”. *Studia Mathematica*. Vol. **56**, $121-155$

[11] Hanner, O. (1955). “On the Uniform Convexity of L^p and l^p.” *Arkiv för Matematik*. Vol. **3**, $239-245$.

[12] Hewitt, E. e Stromberg, K. (1965). *Real and Abstract Analysis: a Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable.* New York: Springer-Verlag.

[13] Lima, E. L.(2001). *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA. 5^a Edição.

[14] Köthe, G. (1969). *Topological Vector Spaces I*. Berlin: Springer-Verlag.

[15] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York: John Wiley.

[16] Lieb, E. H. (1994). "Sharp Uniform Convexity and Smoothness Inequalities for Trace Norms". *Inventiones Mathematicae*. Vol. **115**, $463-482$.

[17] Lima, E. L. (2000). *Curso de Análise Volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA. 6^a Edição.

[18] Lindenstrauss, J. (1963). "On the Modulus of Smoothness and Divergent Series in Banach Spaces". *Michigan Mathematical Journal*. Vol. **10**, $241-252$.

[19] Simon, B. e Reed, M. (1972). *Methods of Modern Mathematical Physics*. London: Academic Press.

[20] Simon, B. (1979). *Trace Ideals and Their Applications*. Providence: The American Mathematical Society. 2^a Edição.

[21] Tomezak-Jaegermann, N. (1974). "The Moduli of Smoothness and Convexity and the Rademacher Averages of Trace Classes S_p $(1 \leq p < \infty)$". *Studia Mathematica*. Vol. **50**, $163-182$.