

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**MODELAGEM MATEMÁTICA
E CONTROLE ATIVO DE UM
MANIPULADOR COM UM
ELO FLEXÍVEL**

por

Celiane Costa Machado

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro L. De Bortoli
Orientador

Prof. Dr. Sebastião C. P. Gomes
Co-Orientador

Porto Alegre, Abril de 2007.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Machado, Celiane Costa

MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE ATIVO
DE UM MANIPULADOR COM UM ELO FLEXÍVEL
/ Celiane Costa Machado.—Porto Alegre: PPGMAp da
UFRGS, 2007.

152 p.: il.

Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande
do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Apli-
cada, Porto Alegre, 2007.

Orientador: De Bortoli, Álvaro L.; Co-Orientador: Gomes,
Sebastião C. P.

Tese: Matemática Aplicada
Modelagem, controle, estruturas flexíveis

**MODELAGEM MATEMÁTICA
E CONTROLE ATIVO DE UM
MANIPULADOR COM UM
ELO FLEXÍVEL**

por

Celiane Costa Machado

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Álvaro L. De Bortoli

Co-Orientador: Prof. Dr. Sebastião C. P. Gomes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Andrei Bourchtein - UFPEL

Prof. Dr. Marat Rafikov - UNIJUÍ

Prof. Dr. Paulo R. A. Zíngano - UFRGS

Tese apresentada e aprovada em
26 de Abril de 2007.

Prof^ª. Dr^ª. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado condições e força para concluir este trabalho.

Agradeço também a todas as pessoas que me auxiliaram durante a realização deste trabalho, em especial:

Ao Prof. Dr. Álvaro Luis de Bortoli, pela sua colaboração e pelo seu profissionalismo durante a orientação deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes por ser um excelente profissional, por sua dedicação, compreensão, paciência e amizade durante toda a elaboração desta tese.

Ao colegiado do Departamento de Matemática que me concedeu afastamento para conclusão desta tese.

Ao PPGMAp, Fapergs e Capes pela oportunidade e a concessão de recursos.

Aos amigos Adriana, Denise, Leandro, Mário e Vitor, assim como aos demais colegas de trabalho e colegas de curso, por toda a colaboração recebida. Ao Fábio agradeço as dicas de Latex.

A amiga Patricia e sua Família pela acolhida que recebi.

A minha madrinha Delícia, ao meu sogro e minha sogra pelo incentivo.

Aos meus pais, por terem me dado meios de estudar e por sua participação em todos os momentos de minha vida.

E ao meu marido que foi paciente, incansável e companheiro durante todos os momentos, alegres, tristes, fáceis e difíceis. Muito obrigado Jonas!

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS	1
LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS	5
LISTA DE FIGURAS	7
RESUMO	11
ABSTRACT	12
1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Motivação	13
1.2 Objetivos	17
1.2.1 Objetivo geral	17
1.2.2 Objetivos específicos	17
1.3 Pesquisas relacionadas ao trabalho	18
1.3.1 Modelagem e controle de estruturas flexíveis	18
1.3.2 Compensação de Atrito	19
1.4 Roteiro do trabalho	21
2 MANIPULADOR FLEXÍVEL	22
2.1 Estudo analítico	22
2.1.1 Equações da dinâmica	23
2.1.2 Funções de transferência analíticas	29
2.2 Dinâmica estrutural	32
2.3 Dinâmica do atuador	40
2.4 Modelo de atritos	41
2.5 Descrição do experimento	45
2.6 Resultados experimentais e de simulações	48
3 COMPENSAÇÃO DE ATRITO	53

3.1	Atuador robótico	53
3.2	Compensador neural	54
3.3	Compensador <i>fuzzy</i>	59
3.4	Compensador <i>neuro-fuzzy</i>	64
3.5	Resultados experimentais <i>neuro-fuzzy</i> - caso rígido	65
4	TÉCNICAS DE CONTROLE	75
4.1	Elementos básicos do controlador	75
4.2	Controle por alocação de pólos	78
4.2.1	Fórmula de Ackermann	79
4.3	Controle LQG/LTR	81
4.3.1	Controle LQ	82
4.3.2	Controle LQG	83
4.3.3	Procedimento de recuperação LTR	85
4.4	Síntese \mathcal{H}_∞	89
5	PROJETO DE CONTROLADORES	93
5.1	Projeto por alocação de pólos	93
5.2	Projeto LQG/LTR	96
5.3	Projeto \mathcal{H}_∞	100
6	CONCLUSÕES	115
6.1	Contribuições	119
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120
	APÊNDICE A NORMAS, ESPAÇOS E SISTEMAS	130
A.1	Normas e espaços	130
A.2	Unicidade da solução do sistema (2.21)-(2.24)	133
A.3	Sistemas de controle com realimentação	135

APÊNDICE B	REDES NEURAIIS ARTIFICIAIS - RNA	139
B.1	Elemento de processamento genérico (neurônio artificial)	139
B.2	Arquitetura de redes neurais artificiais e regras de adaptação de pesos	140
B.3	Redes de propagação para frente	141
B.3.1	Erro quadrático mínimo	141
B.3.2	Gradiente descendente	142
B.3.3	Perceptron multi-camada e retropropagação de erro	143
APÊNDICE C	LÓGICA <i>FUZZY</i>	146
C.1	Conjuntos <i>fuzzy</i> , funções de pertinência, funções <i>fuzzy</i> e variáveis linguísticas	147
C.2	Processo de conversão	148
APÊNDICE D	RESULTADO FUNDAMENTAL DO CONTROLE H_∞	149

LISTA DE SÍMBOLOS

A e B	matrizes do sistema na forma de estado
A^{-1} e A^T	inversa e transposta de A
\hat{A}	conjunto fuzzy
C	matriz de observação
\mathcal{C}	matriz de controlabilidade
$[\tilde{C}]$	matriz de atritos
\mathbb{C}	conjunto dos números complexos
c_r	coeficiente de atrito do rotor
c_i	coeficiente de atrito devido à deflexão angular nas articulações fictícias
D	número de entradas
$D(\lambda)$	determinante da matriz $M(\lambda)$
\bar{d}	vetor de saída
$d(s)$	perturbação na saída da planta
$d(\bar{x}_p)$	valor de saída calculado pela RNA associado a \bar{x}_p
$\det(A)$	determinante de A
e	erro
E_c	energia cinética
E_p	energia potencial
$e(\bar{x}_p)$	erro associado ao padrão \bar{x}_p
EQM	erro quadrático médio
eb	espessura da lâmina
$E\{\}$	operador esperança
f_i, f_{iv}, \hat{c}_i	parâmetros identificados experimentalmente
f_{lim}	valor máximo assumido pelo coeficiente de atrito viscoso
f_v^*	coeficiente de atrito viscoso variável
g	ganho fuzzy
$G(s)$	matriz de transferência da planta aumentada

h	altura da viga
H	número de neurônios da camada escondida
I_s	inércia da carga
I_B	inércia da estrutura flexível
I_r	inércia do rotor
$[\tilde{I}]$	matriz de inércia
$[I]_{n \times n}$	matriz identidade de ordem n
I_T	momento de inércia do corpo rígido
J	funcional
k	constante elástica
K_1	constante elástica do atuador
K_f	ganho do filtro
K_r	ganho do regulador
$K(s)$	matriz de transferência do controlador
$[\tilde{K}]$	matriz de constantes elásticas
l	comprimento da estrutura
L	Lagrangeano
m	vetor de massas dos elementos rígidos
m_c	massa da carga
m_b	massa da estrutura
n	número de articulações fictícias
\bar{n}	índice de redução
$n(s)$	ruído de medida
\hat{n}	número de exemplos do conjunto de treino
\bar{N}	ganho nominal
$N_\theta(\lambda)$	numerador da função de transferência do caso colocado.
N_{yt}	numerador da função de transferência do caso não colocado.
net_i	combinação linear de entradas e pesos no neurônio i
$[0]_{n \times n}$	matriz nula de ordem n

p	vetor de comprimento dos elementos rígidos
$P(s)$	matriz de transferência da planta
Q, R	matrizes de ponderação
$r(s)$	sinal de referência
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	conjunto dos números reais não negativos
$Re(s)$	parte real de s
$Re[\lambda(A)]$	parte real dos autovalores da matriz A
s	variável de Laplace
$S(s)$	matriz de sensibilidade
T_{at}	torque de atrito
T_l	torque de reação da carga
T_{res}	torque resultante no atuador
T_m, τ_m	torque motor
$T(s)$	matriz de sensibilidade complementar
$\bar{T}(s)$	transformada de Laplace de $T_m(t)$
T_c	torque de controle
T_{zw}	matriz de transferência de w para z
T_{comp}	torque de compensação
\hat{T}_{at}	torque de atrito estimado
$tr[A]$	traço de A
t_p	valor desejado de saída
t_{final}	tempo final
\bar{t}_p	vetor de saídas desejado
\tilde{T}	conjunto de treino
T_{zw}	matriz de transferência de w para z
$u(s), u(t)$	sinal de controle
W^*	transposta conjugada de W

$w(s), w(t)$	vetor de entradas da planta generalizada
W, W_S, W_T	matrizes de ponderação
W_d, W_n	matrizes de intensidade
x_j	variável de entrada
\vec{x}, x	vetor de estado
\bar{x}	vetor de entradas
\bar{x}_p	vetor de entradas associado ao padrão p
\hat{x}	estado estimado
\hat{X}	coleção de objetos
$\ x\ _p$	p -norma de x
X_∞, Y_∞	soluções de equações de Riccati
y_i	saída do neurônio i
$y(s), y(t)$	sinal de saída
$y(x, t)$	variável sugerida por Brakwel
$\bar{y}(x, s)$	transformada de Laplace da variável $y(x, t)$
\bar{y}, \bar{d}	vetores de saída
$z(s), z(t)$	vetor de saídas da planta generalizada

LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

β, λ	variáveis complexas adimensionais
$\varepsilon, \hat{\eta}$	razões adimensionais
η	taxa de aprendizagem
θ_i	posições angulares
θ_r	posição angular do rotor
θ_s	posição angular da carga (atuador)
$\vec{\theta}_s$	vetor de posições
$\theta(t)$	posição angular do rotor em função do tempo
θ_{ref}	posição de referência
$\theta_{ini}, \theta_{fin}$	posição de referência inicial e final
$\dot{\theta}_i$	velocidades angulares
$\dot{\theta}_{lim}$	velocidade mínima estacionária do rotor
$\dot{\theta}(t)$	velocidade angular do rotor
$\ddot{\theta}(t)$	aceleração
$\mu_{\hat{A}}$	função de pertinência
$\phi(A)$	polinômio característico de A
ρ	massa por unidade de comprimento da linha elástica (massa específica)
$\bar{\rho}, \bar{\gamma}$	ponderações
$\bar{\sigma}[A]$	valor singular máximo de A
$\frac{d^n}{dx^n}$	derivadas totais n-ésima em relação a variável x
$\frac{\partial^n}{\partial x^n}$	derivadas parciais n-ésima em relação a variável x
e_i, \bar{w}_i	limites da função de inferência
\bar{w}	vetor de pesos
\tilde{w}_i	freqüências naturais de vibração (pólos da função de transferência)

w_{ij}	peso entre a variável de entrada x_j e o neurônio com índice i
$w(x, t)$	deflexão elástica
w_d, w_n	ruído de estado e de medida
\mathcal{H}_∞	subconjunto de $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$ de funções analíticas em $Re(s) > 0$
$\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$	funções limitadas em $Re(s) = 0$ incluindo em ∞
\mathcal{O}	matriz de observabilidade
∇E	gradiente da função E
\sum_h	somatório na camada h
\sum_i	somatório na camada i

Lista de Figuras

Figura 2.1	Estrutura flexível.	23
Figura 2.2	Gráfico da função de transferência analítica (caso colocado). . .	31
Figura 2.3	Gráfico da função de transferência analítica (caso não colocado). . .	32
Figura 2.4	Estrutura flexível com uma articulação fictícia (dividida em duas partes rígidas).	33
Figura 2.5	Estrutura flexível e sua aproximação discreta com uma articulação fictícia.	34
Figura 2.6	Estrutura flexível e sua aproximação discreta para os casos de uma, duas e de três articulações fictícias.	36
Figura 2.7	Representação do atuador.	40
Figura 2.8	Torque de atrito - modelo e experimento.	42
Figura 2.9	Fotografia do manipulador flexível.	45
Figura 2.10	Representação geométrica do manipulador flexível.	46
Figura 2.11	Atuador robótico utilizado para obtenção de resultados experimentais.	47
Figura 2.12	Posição angular da carga, resultados de simulação e experimental.	49
Figura 2.13	Funções de transferência analítica e do modelo no caso colocado.	50
Figura 2.14	Torque de reação da estrutura e velocidade do rotor.	51
Figura 3.1	Arquitetura da rede neural artificial.	54
Figura 3.2	Neurônio artificial.	55

Figura 3.3	Velocidades do rotor experimental (linha sólida) e filtrada (linha tracejada).	56
Figura 3.4	Padrões de treino da RNA.	58
Figura 3.5	Torque de atrito experimental e estimado pela RNA.	59
Figura 3.6	Sistema lógico fuzzy.	60
Figura 3.7	Funções de pertinência de entrada e saída.	61
Figura 3.8	Avaliação do comportamento do ganho g	63
Figura 3.9	Controle PD sem compensação de atritos.	67
Figura 3.10	Controle PD compensador neural.	68
Figura 3.11	Controle PD com compensador <i>neuro-fuzzy</i>	69
Figura 3.12	Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a um grau.	70
Figura 3.13	Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a dois graus.	71
Figura 3.14	Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a três graus.	72
Figura 3.15	Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a cinco graus.	72
Figura 3.16	Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a vinte graus.	73
Figura 4.1	Diagrama de blocos do controle ótimo LQG.	84
Figura 4.2	Diagrama de blocos com aberturas de malha.	85
Figura 4.3	Diagrama de blocos do compensador.	88

Figura 4.4	Diagrama de blocos do compensador, após o processo de recuperação, no limite quando $\tilde{\rho} \rightarrow 0$	88
Figura 4.5	Diagrama de blocos padrão.	89
Figura 4.6	Diagrama de blocos da planta aumentada, incerteza na primeira constante elástica.	91
Figura 5.1	Diagrama de Bode da função ganho de malha.	94
Figura 5.2	Simulação com o projeto por alocação de pólos, atrito linear. . .	95
Figura 5.3	Simulação com o projeto por alocação de pólos, atrito não linear. .	96
Figura 5.4	Diagrama de Bode das funções de transferência do filtro e da planta e o processo de recuperação.	97
Figura 5.5	Simulação com o projeto LQG/LTR, atrito linear.	98
Figura 5.6	Simulação com o projeto LQG/LTR, atrito não linear.	99
Figura 5.7	Transformação bilinear para deslocamento de pólos.	100
Figura 5.8	Resposta ao degrau em 20 graus sem compensação de atritos. . .	102
Figura 5.9	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (a). .	103
Figura 5.10	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (b). .	104
Figura 5.11	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (c). .	104
Figura 5.12	Resposta ao degrau em 30 graus sem compensação de atritos. . .	105
Figura 5.13	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (d). .	106
Figura 5.14	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (e). .	106
Figura 5.15	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (f). .	107
Figura 5.16	Resposta ao degrau alternado sem compensação de atritos. . . .	108

Figura 5.17	Resposta ao degrau alternado com compensação de atritos - experimento (g).	109
Figura 5.18	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (h).	110
Figura 5.19	Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (i).	111
Figura 5.20	Resposta a um impulso externo sem compensação de atritos.	112
Figura 5.21	Resposta a um impulso externo com compensação de atritos.	113
Figura A.1	Diagrama de blocos com realimentação.	136
Figura A.2	Barreiras de robustez de estabilidade e desempenho.	138
Figura B.1	Modelo de um neurônio.	140
Figura B.2	Arquiteturas principais de redes neurais artificiais	141
Figura B.3	Perceptron multi-camada com uma camada escondida e quatro variáveis de entrada, três variáveis de saída e função de ativação sigmoidal.	144
Figura C.1	Sistema especialista.	146
Figura C.2	Processo de conversão.	148
Figura D.1	Diagrama de blocos padrão.	149

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre o controle ativo de um manipulador robótico, que consiste de uma lâmina flexível, articulada em uma extremidade a um atuador do tipo *harmonic-drive* e livre na outra. Considera-se a modelagem dinâmica estrutural baseada no formalismo discreto "*lumped mass approach*", o qual aproxima a flexibilidade contínua por uma discreta, adotando-se um número finito de modos flexíveis. A dinâmica do atuador também é considerada no modelo, a qual contém flexibilidade e atritos. Tal modelagem é validada via comparação entre resultados de simulações e experimentos. Atritos não lineares existentes no interior das juntas dos robôs provocam efeitos tais como zona morta em torque e comportamentos do tipo *stick-slip*, dificultando o desempenho de leis de controle para o caso de robôs rígidos, chegando a inviabilizar completamente o controle para o caso dos robôs com elos flexíveis. Para diminuir estes problemas utilizou-se uma rede neural artificial (RNA) treinada *off-line*. A saída da RNA é o atrito estimado, o qual é utilizado para compensar o atrito real do manipulador. Como a RNA é treinada *off-line* e o atrito é um fenômeno que varia com o tempo e com as condições de operação do atuador, a RNA perde seu desempenho, surgindo assim a necessidade de auto ajustar o mecanismo de compensação. O torque de atrito (saída da RNA) é multiplicado por um ganho obtido a partir de um algoritmo de inferência *fuzzy*, constituindo, um compensador *neuro-fuzzy*. O algoritmo *fuzzy* ajusta *on-line* a saída do compensador para lidar com as variações do torque de atrito. Resultados experimentais indicaram que o compensador *neuro-fuzzy* reduz significativamente a não linearidade imposta pelo atrito no atuador. O problema de controle de vibrações da estrutura flexível é abordado com as técnicas alocação de pólos e LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery*) por meio de simulações. A tese é concluída com a apresentação de resultados experimentais de um controlador baseado na síntese \mathcal{H}_∞ combinada com o compensador de atrito, cujo desempenho mostrou-se satisfatório no controle de vibrações da lâmina flexível.

ABSTRACT

The aim of the present work is the active control of a robotic manipulator, which consists of a flexible beam, articulated at one extremity by a harmonic-drive actuator and free at the other. It is employed a structural dynamic model based on the lumped mass approach, which approximates the continuous beam flexibility by a discrete one, using a finite number of flexible modes. The dynamics of the actuator is also considered in the model, based on its flexibility and friction. The model is validated using numerical and experimental results. The non linear friction in the robot joints provokes effects such as torque dead zone and stick-slip behaviors, difficulting the performance of control laws for rigid robots and avoiding completely the control law performance in the case of robots with flexible links. To reduce these problems an artificial neural network (NN), trained off-line, was employed. The NN output is the estimated friction, which is used to compensate the real friction of the manipulator. Since the NN is trained off-line and the friction varies with time and with the actuator operational condition, the NN loses its performance, needing to self adjust this mechanism. The friction torque (NN output) is multiplied by a gain obtained from a fuzzy inference algorithm, resulting the neuro-fuzzy compensator. The fuzzy algorithm adjusts the compensator output on-line to deal with the variations of the friction torque. Experimental results indicate that the neuro-fuzzy compensator can significantly decrease the non linearity due to the friction on the actuator. The control of the structural vibrations is treated using pole allocation and Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery (LQG/LTR). The thesis ends with the presentation of experimental results for a controller based on \mathcal{H}_∞ synthesis combined with a friction compensator, whose performance showed to be satisfactory in controlling the vibration of the flexible beam.

1 INTRODUÇÃO

Existem diversas aplicações envolvendo estruturas flexíveis no domínio da ciência, principalmente em robótica flexível e na ciência espacial [74] [50] [71]. Dwivedy e Eberhard [28] apresentam uma extensa revisão sobre trabalhos referentes a análise dinâmica de manipuladores flexíveis.

Por estar presente em muitos tipos de materiais utilizados na fabricação de equipamentos, a flexibilidade torna-se uma característica bastante relevante. Existem vibrações inerentes às dinâmicas em vários sistemas como: aeronaves, robôs-manipuladores, veículos, estruturas metálicas para construção civil, etc. Importantes aplicações do problema de controle de vibrações são encontradas na robótica flexível [18] [30] [44].

Desta forma, neste capítulo apresenta-se a motivação e os objetivos assim como algumas pesquisas relacionadas ao controle ativo de um manipulador com um elo flexível.

1.1 Motivação

Encontram-se, na literatura, muitos trabalhos dedicados à aplicação de uma lei de controle a um manipulador flexível cujos resultados foram obtidos por simulações. Entretanto, quando o objetivo é abordar o problema de controle a partir de atuadores não lineares agregam-se dificuldades importantes. Maizza-Neto [57] (1974) foi um dos pioneiros na tentativa de resolver o problema do controle ativo de manipuladores flexíveis. Estudos experimentais sobre o controle ativo de um robô com apenas um elo flexível foram realizados por Cannon e Rosenthal em 1984 [12] e Schmitz em 1985 [69] utilizando, em ambos os casos, atuadores sem redutor de velocidades (*direct-drive*). Esse tipo de atuador possui maior linearidade por não utilizar redutor de velocidade e, conseqüentemente, não possui atritos que gerem

zona morta, [36]. Porém, este possui baixa capacidade em torque dificultando a sua aplicação em problemas reais.

Em 1992 Gomes e Chrétien [36] abordaram o problema de controlar uma estrutura flexível a partir de um atuador convencional do tipo moto-reductor, cuja autonomia em torque é bem maior do que a do atuador *direct-drive*. Eles comprovaram, experimentalmente, que os atritos não-lineares internos ao atuador alternam-se em modos do tipo adere-deslisa (*stick-slip*), inviabilizando completamente o desempenho de uma dada lei de controle. Além disso, ficou comprovado que os torques necessários para atenuar as vibrações estruturais pertenciam quase sempre ao interior da chamada zona morta em torque. Essa zona morta é caracterizada pelos atritos e limitada pelos níveis positivo e negativo do atrito estático (ou seco, como aproximação). Ou seja, a lei de controle envia o torque de controle ao rotor do atuador, torque este que, estando dentro da zona morta, não passa para a estrutura, a qual permanece vibrando como se fosse uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra.

Quanto às estratégias de controle para sistemas flexíveis, destaca-se algumas mais utilizadas como: redes neurais artificiais [82] [77], *fuzzy* [15], compensador *neuro-fuzzy* [42] [85], LQG [14], proporcional e derivativo [76], LQG/LTR, [53], μ -*synthesis* [48], fonte de fluxo [17], dinâmica inversa [22], alocação de pólos [53] [38], controle \mathcal{H}_∞ [6] [58] [71], *feedforward* [62], entre outras. Muitos autores apresentam apenas resultados referentes à simulações, o que em geral não coloca em evidência problemas que podem surgir em aplicações de interesse prático. Nesse caso o atrito é considerado linear, facilitando o trabalho da lei de controle. Outros autores apresentam resultados experimentais utilizando atuadores do tipo *direct-drive* (sem reductor de velocidade). A alta linearidade (zona morta em torque mínima), que esse tipo de equipamento possui, não oferece grandes dificuldades ao controlador. Entretanto, a utilização deste tipo de atuador pode ser inviabilizada em aplicações reais devido a sua baixa autonomia em torque.

A utilização de atuadores convencionais do tipo *harmonic-drive* torna-se mais vantajosa quando se deseja maior autonomia em torque. Porém, o atrito interno existente nesse tipo de atuador é um fenômeno bastante complicado de ser modelado devido à grande sensibilidade a variações paramétricas no tempo, condições operacionais do equipamento, etc, dificultando assim o trabalho da lei de controle. Visando contornar esse problema, propõe-se, nesse trabalho, a utilização de uma estratégia de compensação de atritos que, atuando em paralelo à lei de controle, mostrou-se bastante eficiente.

Outra questão importante quando se projeta leis de controle para atenuar vibrações estruturais em manipuladores flexíveis é a forma como é avaliada a robustez da lei de controle (desempenho e estabilidade). Existem trabalhos que apresentam resultados apenas referentes à resposta ao degrau, o que facilita o trabalho da lei de controle, ao contrário do caso onde se controla vibrações estruturais ativando-se os modos de vibração mediante um impulso externo, por exemplo. Desta forma, procurou-se contemplar, neste trabalho, diferentes tipos de testes, visando avaliar de forma consistente a robustez quanto ao desempenho e quanto à estabilidade da lei de controle proposta.

Normalmente, quando se deseja controlar estruturas flexíveis, o intuito é atenuar as vibrações em todos os modos de vibrar fisicamente observáveis e, idealmente, o processo de realimentação para o controle deveria se dar observando-se todas as variáveis de estado. Isto é difícil por que em aplicações práticas a instrumentação geralmente possui limitações em termos dos sensores, às quais inviabilizam a observação do estado completo. Adiciona-se a dificuldade naturalmente surgida ao se tentar controlar sistemas não colocados, isto é, quando o torque de controle é aplicado em um local diferente de onde está sendo feita a observação, dificuldade esta inerente a toda dinâmica flexível existente entre o local da aplicação do esforço de controle e o local no qual se realiza a observação.

Outras dificuldades impostas ao problema de controle de estruturas flexíveis em aplicações reais são efeitos das seguintes causas [69] [53]:

- i. Existência de perturbações externas, por vezes muito significativas;
- ii. Diferenças entre as dinâmicas da planta real (sistema físico) e do modelo matemático nominal;
- iii. Existência de ruídos provenientes dos sensores, os quais são realimentados no sistema na forma de erros de observação;
- iv. Dinâmicas não-lineares dos atuadores [37] [35].

Estes problemas, em sua maioria, serão considerados no decorrer do presente trabalho. Isso porque o estudo sobre o desenvolvimento de controladores para estruturas flexíveis, com condições reais de implementação, constitui uma preocupação constante durante todo o desenvolvimento do trabalho. É, portanto, imprescindível lidar com o conceito de robustez no desenvolvimento de controladores neste tipo de aplicação.

De forma simplificada, pode ser dito que existem dois tipos de robustez: do desempenho e estabilidade. Um sistema de controle é robusto quanto ao desempenho (à estabilidade) se, mesmo em presença de problemas tais como perturbações externas, erros de modelagem, ruídos dos sensores, etc., o desempenho (à estabilidade) em termos da resposta do sistema em malha fechada continua mantido (mantida) dentro de um nível aceitável. Como a robustez do desempenho e a robustez da estabilidade constituem objetivos conflitantes, ou seja, o acréscimo de uma acarreta a diminuição da outra, o esforço do projeto de um controlador consiste, então, na determinação de um bom compromisso entre estabilidade e desempenho.

Outro aspecto importante se refere à robustez da lei de controle, mediante incertezas paramétricas [54]. Na prática, muitas vezes torna-se difícil identificar com precisão o valor de determinadas grandezas físicas, sendo necessário que a lei de controle, mesmo em presença de variações em determinados parâmetros, mantenha seu desempenho.

1.2 Objetivos

Os objetivos podem ser classificados como gerais e específicos, indicando assim as contribuições desejadas nesta tese.

1.2.1 Objetivo geral

Apresentar um estudo sobre a modelagem e o controle ativo de um manipulador com um elo flexível, assim como sua validação com resultados experimentais.

1.2.2 Objetivos específicos

Apresentar uma descrição dos modelos do atuador e da estrutura flexível, comprovando-os de forma analítica e experimental;

Desenvolver um algoritmo *fuzzy* atualizado "*on-line*" para atuar em paralelo com um compensador neural de atritos internos ao atuador, cuja finalidade é recuperar o desempenho perdido pelo compensador neural em razão das variações no tempo, nos parâmetros de atrito. Mostrar, através de resultados experimentais, a eficiência desse novo compensador aplicado ao caso rígido (quando a lâmina é retirada do manipulador).

Desenvolver leis de controle para atenuar de forma ativa as vibrações estruturais;

Apresentar um projeto de controle com bom desempenho, através de resultados experimentais, combinando a técnica \mathcal{H}_∞ com um compensador neural de atritos, objetivo este que consiste na principal contribuição desta tese.

1.3 Pesquisas relacionadas ao trabalho

A seguir discute-se alguns trabalhos devotados a assuntos relacionados com o objeto de estudo do presente trabalho. Essa abordagem será feita em duas etapas: modelagem e controle de estruturas flexíveis e compensação de atritos.

1.3.1 Modelagem e controle de estruturas flexíveis

O controle de sistemas flexíveis tem sido objeto de diversos estudos realizados principalmente a partir dos anos oitenta [31] [87], seguindo nos anos noventa [60] [22] [63], até os dias atuais. Talebi et al. [83], Pereira [65] e Benosman et al. [8] também contribuíram para o avanço dos estudos nesta área. Mais recentemente pôde-se contar com as contribuições dos trabalhos de Benosman e Vey [9], Wai e Lee [89] e Ciliz [19], entre outros.

O conhecimento de um modelo dinâmico bem representativo da realidade do fenômeno é de fundamental importância para projetos de controladores com chances reais de funcionarem na prática. Várias estratégias de modelagem estrutural já foram propostas [86] [78] [56]. Aplicações de controle de estruturas flexíveis têm sido mais direcionadas à robôs manipuladores com elos flexíveis [69] [18].

A modelagem obtida via o método dos modos assumidos [73] [67] tem sido mais empregada ao caso de um único elo flexível, já que em manipuladores com mais de um elo com flexibilidade importante, esta técnica torna-se difícil de ser utilizada em razão de complicações advindas de condições de contorno [65]. O formalismo discreto (*"lumped mass approach"*) é um método de fácil implementação e tem grau de precisão relativamente alto [37] [56] servindo como base na obtenção do modelo matemático que representa a dinâmica estrutural no presente trabalho.

O atuador utilizado é do tipo *harmonic-drive* (com redutor de velocidades). Esse tipo de atuador é bastante utilizado em aplicações práticas devido a sua alta autonomia em torque [80] [81] [52] [37]. Porém essa escolha tem a desvan-

tagem que esse tipo de atuador possui grande zona morta em torque (de 10% a 20% de seu torque máximo) que pode ser reduzida quando se considera mecanismos de compensação de atritos eficientes.

1.3.2 Compensação de Atrito

De uma forma geral, quando se trabalha com sistemas de controle de movimento é necessário dar muita atenção aos efeitos oriundos de atritos. Esta é a razão pela qual o atrito é um fenômeno que tem sido bastante estudado nos últimos anos [21] [43] [88]. Muitos pesquisadores vêm contribuindo para minimizar o efeito das perturbações causadas pelos atritos, propondo mecanismos que atuam de forma a compensá-lo. Nos anos noventa surgiram importantes trabalhos nessa área realizados por Armonstrong-Helouvry [2] [3] [5] [4], Canudas [13] e Besançon [10]. A pesquisa nessa área segue até os dias atuais por inúmeros pesquisadores [1] [68] [45] [84]. Para atuadores *harmonic-drive* destacam-se alguns trabalhos como os de Taghirad [79], Dhaouadi [23], Gervini et al. [33] e Gomes e Rosa [40], entre outros.

O tipo de atuador considerado nesse trabalho (*harmonic-drive*) possui uma vantagem importante que é a autonomia em torque e o jogo angular praticamente nulo. Porém, o atrito interno existente nesse tipo de atuador é um dos principais fatores de perda de desempenho. Uma maneira de contornar essa questão é trabalhar com equipamentos mecânicos de alta qualidade e, conseqüentemente, de alto custo. Outra forma é trabalhar com equipamentos mais baratos, onde a presença de atritos torna-se mais significativa, sendo seu comportamento altamente não linear, variando com o tempo, temperatura e desgaste físico do equipamento. Neste caso, surge a necessidade de se projetar mecanismos de compensação de atritos robustos a essas variações.

É importante salientar que um dos principais problemas surge quando é feita a implementação experimental, ou seja, quando da presença dos atritos internos ao atuador de forma real, que por vezes são desprezados nos modelos. Um fato

importante acontece quando o torque projetado pela lei de controle é menor que o torque de atrito, ou seja, quando o torque de controle pertence ao interior da zona morta. Neste caso a articulação se bloqueia e o movimento cessa, fazendo com que o torque de controle não passe para a estrutura e, como conseqüência, inviabilizando o bom desempenho da lei de controle. Esse problema pode ser resolvido se junto com a lei de controle forem utilizados mecanismos de compensação de atritos eficientes.

Diversas aplicações de redes neurais artificiais podem ser encontradas no domínio da ciência [49] [46]. Porém, sua utilização em mecanismos de compensação de atritos em juntas de robôs é relativamente recente [21] [70]. A utilização de compensadores baseados em sistemas *fuzzy*, bem como compensadores *neuro-fuzzy*, tem surgido apenas a partir de 2005 [39] [41].

Devido à dificuldade em se obter um modelo dinâmico de atuador robótico realístico, tendo em vista atritos não lineares oriundos dos atuadores, Gervini et al. [33], propuseram um modelo para obter o torque de compensação de atrito utilizando redes neurais artificiais (RNA), treinadas *off-line*, obtendo bons resultados experimentais. Porém, foi verificado que, em razão da variação no tempo dos parâmetros de atrito, a RNA perde seu desempenho, surgindo a necessidade de ajustar *on-line* os parâmetros do compensador [55] evitando, assim, a necessidade de treinar novamente a RNA.

Ao considerar o caso rígido, ou seja, quando a lâmina flexível é retirada do manipulador, Gomes et al. [39] propuseram a obtenção desse ganho através de um algoritmo de inferência *fuzzy*, atualizado *off-line*, cujos resultados experimentais mostraram-se eficientes. Um procedimento automático (*on-line*) de atualização do ganho *fuzzy* é apresentado nesse trabalho, sendo que a sua proposição e implementação experimental desse compensador é parte da contribuição proposta nesta tese.

1.4 Roteiro do trabalho

Este trabalho é composto por uma parte introdutória, que destaca a motivação para o estudo e pesquisas realizadas na área do trabalho. O capítulo 2 trata da modelagem estrutural, do atuador e de atritos, assim como a descrição do suporte experimental. É feita uma comparação entre os resultados de simulações e os dados experimentais em malha aberta (sem controle), visando verificar a eficiência do modelo matemático apresentado para a estrutura. O mecanismo de compensação de atritos está explanado no capítulo 3, assim como resultados experimentais relacionados ao caso rígido, utilizando-se o compensador *neuro-fuzzy* com adaptação *on-line*. As técnicas de controle alocação de pólos, LQG/LTR e a síntese \mathcal{H}_∞ , usadas para a elaboração dos projetos de leis de controle, são brevemente explanadas no capítulo 4, enquanto que no capítulo 5 apresenta-se resultados de simulações de projetos de controladores com as técnicas alocação de pólos e LQG/LTR. Na seqüência apresentam-se resultados experimentais utilizando-se a síntese \mathcal{H}_∞ combinada ao compensador neural de atritos. As principais conclusões encontram-se descritas no capítulo 6, seguidas dos apêndices que contém os conceitos mais relevantes utilizados no decorrer da pesquisa e das referências bibliográficas.

2 MANIPULADOR FLEXÍVEL

Neste capítulo será apresentado um estudo analítico, constituído das equações governantes do movimento de uma estrutura flexível, bem como as funções de transferência analíticas (exatas) [69]. Será apresentada uma descrição da modelagem dinâmica da estrutura flexível, do atuador e de atritos e uma descrição do aparato experimental, seguido da comparação de resultados de simulações e experimento, visando avaliar a eficiência da modelagem proposta.

2.1 Estudo analítico

Considere uma estrutura flexível de comprimento l , articulada em uma extremidade a um atuador, do tipo motor elétrico, no qual é aplicado um torque motor T_m , sendo livre na outra extremidade na qual é colocada uma carga. I_r é a inércia do rotor, t é a variável tempo e m_c a massa da carga (de momento de inércia rotacional desprezível). A linha Or é uma linha fixa de referência, Ox é a linha tangente ao eixo neutro do rotor. O deslocamento de qualquer ponto P ao longo do eixo neutro da lâmina define uma distância x até o rotor sobre o eixo neutro da lâmina e é dado pelo ângulo $\theta(t)$ do rotor e pela pequena deflexão elástica $w(x, t)$, medida a partir da linha Ox , conforme mostra a figura 2.1. As deformações relativas ao eixo são desprezíveis (não há cisalhamento [61]) e o ângulo do rotor $\theta(t)$ pode ser arbitrariamente grande.

Denota-se as derivadas de primeira e segunda ordem em relação à variável t , da função $\theta(t)$, por $\dot{\theta}(t)$ e $\ddot{\theta}(t)$, respectivamente, enquanto que as derivadas parciais são denotadas da seguinte forma: $w_i(x, t)$ representa a derivada parcial de primeira ordem da função $w(x, t)$ em relação à variável i ; $w_{ii}(x, t)$ representa a derivada parcial de segunda ordem da função $w(x, t)$ em relação à variável i e assim sucessivamente, onde i pode ser igual a x ou t .

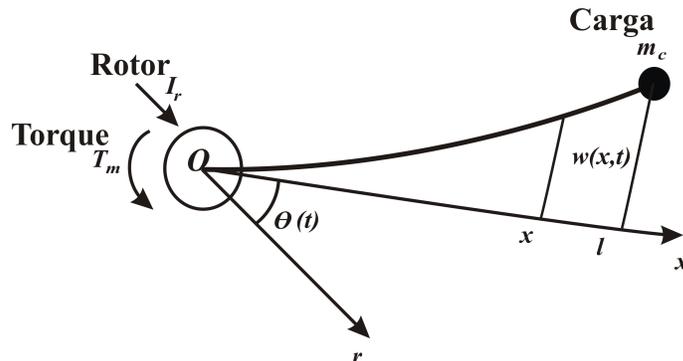


Figura 2.1: Estrutura flexível.

2.1.1 Equações da dinâmica

As equações das energias cinética e potencial são dadas por [69], respectivamente

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^l (w_t(x, t) + x \dot{\theta}(t))^2 \rho(x) dx + \frac{m_c}{2} (w_t(x, t) + x \dot{\theta}(t))^2 |_{x=l}, \quad (2.1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI w_{xx}(x, t)^2 dx, \quad (2.2)$$

onde ρ é a massa específica por unidade de comprimento da linha elástica, E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da área da secção transversal da estrutura.

Define-se o trabalho do torque T_m aplicado ao rotor da estrutura como

$$V_a = -T_m \theta(t). \quad (2.3)$$

Seja \mathcal{J} o operador (ação [61])

$$\mathcal{J}(w, \theta) = \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p - V_a) dt \quad (2.4)$$

onde E_c , E_p e V_a são dadas pelas equações (2.1)-(2.3). Pelo princípio de Hamilton, [61] tem-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p - V_a) dt = 0. \quad (2.5)$$

Supõe-se que a função $w(x, t)$ satisfaz as seguintes condições de contorno, também chamadas de condições essenciais

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0 \quad \forall t > 0 \\ w_x(0, t) &= 0 \quad \forall t > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Seja Ω e Θ funções arbitrárias e suaves onde

$$\begin{aligned} \Omega(0, t) &= 0 \quad \forall t > 0 \\ \Omega_x(0, t) &= 0 \quad \forall t > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

tal que $\Omega(x, t_1) = \Omega(x, t_2) = \Theta(t_1) = \Theta(t_2) = 0$ e

$$\mathcal{F}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathcal{J}(w + \varepsilon_1\Omega, \theta + \varepsilon_2\Theta)$$

para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$.

A partir da equação (2.4) tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(w + \varepsilon_1\Omega, \theta + \varepsilon_2\Theta) &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} I_r (\dot{\theta}(t) + \varepsilon_2 \dot{\Theta}(t))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^l [w_t(x, t) + \varepsilon_1 \Omega_t(x, t) + x(\dot{\theta}(t) + \varepsilon_2 \dot{\Theta}(t))]^2 \rho(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_c}{2} (w_t(l, t) + \varepsilon_1 \Omega_t(l, t) + l(\dot{\theta}(t) + \varepsilon_2 \dot{\Theta}(t)))^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{EI}{2} \int_0^l (w_{xx}(x, t) + \varepsilon_1 \Omega_{xx}(x, t))^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + T_m(\theta(t) + \varepsilon_2 \Theta(t)) \right\} dt. \end{aligned}$$

Assim obtém-se:

$$\mathcal{J}(w + \varepsilon_1\Omega, \theta + \varepsilon_2\Theta) = \mathcal{J}(w, \theta) + \mathcal{G}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \mathcal{O}(\varepsilon_1^2) + \mathcal{O}(\varepsilon_2^2).$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(w, \theta) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} I_r \dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^l (w_t(x, t) + x\dot{\theta}(t))^2 \rho(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_c}{2} (w_t(l, t) + l\dot{\theta}(t))^2 - \frac{EI}{2} \int_0^l w_{xx}(x, t) dx + T_m \theta(t) \right] dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \varepsilon_1 \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l (w_t(x, t) + x\dot{\theta}(t)) \Omega_t(x, t) \rho(x) dx + m_c (w_t(l, t) + l\dot{\theta}(t)) \Omega_t(l, t) - \right. \\ &\quad \left. - EI \int_0^l w_{xx}(x, t) \Omega_{xx}(x, t) dx \right] dt + \\ &\quad + \varepsilon_2 \int_{t_1}^{t_2} \left[I_r \dot{\theta}(t) \dot{\Theta}(t) + \int_0^l (w_t(x, t) + x\dot{\theta}(t)) x \dot{\Theta}(t) \rho(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + m_c (w_t(l, t) + l\dot{\theta}(t)) l \dot{\Theta}(t) + T_m \Theta(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Integrando-se a equação (2.8) por partes tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = & -\varepsilon_1 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l [\rho(x)(w_{tt}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) + EIw_{xxxx}(x, t)] \Omega(x, t) dx + \right. \\ & + m_c(w_{tt}(l, t) + l\ddot{\theta}(t)) \Omega(l, t) + \\ & + EIw_{xx}(x, t) \Omega_x(x, t) \Big|_{x=0}^{x=l} - EIw_{xxx}(x, t) \Omega(x, t) \Big|_{x=0}^{x=l} \Big\} dt - \\ & -\varepsilon_2 \int_{t_1}^{t_2} \left[I_r \ddot{\theta}(t) + \int_0^l x \rho(x)(w_{tt}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) dx + \right. \\ & \left. + m_c l(w_{tt}(l, t) + l\ddot{\theta}(t)) - T_m \right] \Theta(t) dt \end{aligned}$$

A partir do princípio de Hamilton, equação (2.5), e das condições (2.7) obtém-se:

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \int_0^l x \rho(x)(w_{tt}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) dx + m_c l(w_{tt}(l, t) + l\ddot{\theta}(t)) = T_m \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l [\rho(x)(w_{tt}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) + EIw_{xxxx}(x, t)] \Omega(x, t) dx + \right. \\ & \left. + m_c(w_{tt}(l, t) + l\ddot{\theta}(t)) \Omega(l, t) + EIw_{xx}(l, t) \Omega_x(l, t) - EIw_{xxx}(l, t) \Omega(l, t) \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Portanto, obtém-se as equações da dinâmica

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \int_0^l x \rho(x)(w_{tt}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) dx + m_c l(w_{tt}(l, t) + l\ddot{\theta}(t)) = T_m \quad (2.11)$$

$$\rho(x)(w_{tt}(x, t) + x\ddot{\theta}(t)) + EIw_{xxxx}(x, t) = 0. \quad (2.12)$$

com as seguintes condições de contorno [73]:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0 \\ w_x(0, t) &= 0 \\ w_{xx}(l, t) &= 0 \\ EIw_{xxx}(l, t) &= m_c(w_{tt}(l, t) + l\ddot{\theta}(t)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

e com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= a(x) \\ w_t(x, 0) &= b(x) \\ \theta(0) &= \bar{\alpha} \\ \dot{\theta}(0) &= \bar{\beta} \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções de x e $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são constantes, definidas a partir do problema físico a ser resolvido.

As condições de contorno representadas pelas equações (2.13) podem ser separadas em condições que ocorrem na extremidade livre da viga (carga terminal, condições naturais) e em condições que ocorrem no engaste da lâmina flexível ao rotor (condições essenciais), onde impõe-se que não há deslocamento flexível nesta região.

Considerando-se a transformação de variável sugerida por Brakwel [73]

$$y(x, t) = w(x, t) + x\theta(t), \quad (2.15)$$

o sistema (2.11)-(2.12) pode ser escrito na forma

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \int_0^l x \rho(x) y_{tt}(x, t) dx + m_c l y_{tt}(l, t) = T_m$$

$$EI y_{xxxx}(x, t) + \rho(x) y_{tt}(x, t) = 0$$

ou ainda,

$$I_r \ddot{\theta}(t) - EI \int_0^l x y_{xxxx}(x, t) dx + m_c l y_{tt}(l, t) = T_m \quad (2.16)$$

$$EI y_{xxxx}(x, t) + \rho(x) y_{tt}(x, t) = 0 \quad (2.17)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0 \\ y_x(0, t) &= \theta(t) \\ y_{xx}(l, t) &= 0 \\ EI y_{xxx}(l, t) &= m_c y_{tt}(l, t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

e com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \bar{a}(x) = a(x) + x\bar{\alpha} \\ y_t(x, 0) &= \bar{b}(x) = b(x) + x\bar{\beta} \\ \theta(0) &= \bar{\alpha} \\ \dot{\theta}(0) &= \bar{\beta} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Integrando-se por partes a equação (2.16) e considerando-se as condições de contorno (2.18) pode-se escrever a seguinte equação

$$I_r \ddot{\theta}(t) - EI y_{xx}(0, t) = T_m. \quad (2.20)$$

Assim o sistema (2.16)-(2.19) pode ser reescrito na seguinte forma

$$I_r \ddot{\theta}(t) - EI y_{xx}(0, t) = T_m \quad (2.21)$$

$$EI y_{xxxx}(x, t) + \rho(x) y_{tt}(x, t) = 0 \quad (2.22)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0 \\ y_x(0, t) &= \theta(t) \\ y_{xx}(l, t) &= 0 \\ EI y_{xxx}(l, t) &= m_c y_{tt}(l, t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

e com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \bar{a}(x) \\ y_t(x, 0) &= \bar{b}(x) \\ \theta(0) &= \bar{\alpha} \\ \dot{\theta}(0) &= \bar{\beta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

A existência da solução para o sistema (2.21)-(2.24) será apresentada na seqüência do texto, enquanto que a unicidade da referida solução pode ser encontrada no apêndice A, seção A.2.

Visando-se obter a solução do referido sistema, aplica-se a transformada de Laplace nas equações (2.21) e (2.22), considera-se as condições de contorno (2.23) e leva-se em conta o fato do sistema estar em repouso em $t = 0$, ou seja, $y(x, 0) = y_t(x, 0) = 0$ e $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, obtendo-se a equação:

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} - \beta^4 \bar{y} = 0 \quad (2.25)$$

onde $\beta^4 = -\frac{\rho}{EI}s^2$, com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}\bar{y}(0, s) &= 0 \\ EI \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Big|_{x=0} + \bar{T}(s) &= I_r s^2 \frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{x=0} \\ \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Big|_{x=l} &= 0 \\ EI \frac{d^3 \bar{y}}{dx^3} \Big|_{x=l} &= m_c s^2 \bar{y}(l, s)\end{aligned}\tag{2.26}$$

sendo $\bar{y}(x, s)$ e $\bar{T}(s)$ as transformadas de Laplace de $y(x, t)$ e $T_m(t)$, respectivamente.

Define-se o número adimensional complexo λ tal que

$$\lambda = \beta l,\tag{2.27}$$

assim como as razões adimensionais ε como $\varepsilon = \frac{I_r}{ml^2}$ e $\hat{\eta}$ como $\hat{\eta} = \frac{m_c}{m}$ obtendo-se

$$\varepsilon = \frac{I_r}{\rho l^3} = \frac{I_r}{3I_B}\tag{2.28}$$

e

$$\hat{\eta} = \frac{m_c}{m} = \frac{m_c l^2}{3I_B},\tag{2.29}$$

onde $m = \rho l$ e o momento de inércia da estrutura flexível é dado por $I_B = \frac{\rho l^3}{3}$.

A solução geral da equação diferencial (2.25) tem a forma

$$\bar{y} = \bar{A} \operatorname{sen}(\beta x) + \bar{B} \operatorname{senh}(\beta x) + \bar{C} \cos(\beta x) + \bar{D} \operatorname{cosh}(\beta x).\tag{2.30}$$

Ao aplicar-se as condições de contorno dadas pelas equações (2.26), levando em conta as equações (2.27), (2.28), (2.29) e (2.31), depois de realizar algumas operações algébricas resulta

$$\bar{y} = \bar{C} + \bar{D} = 0,\tag{2.31}$$

$$\varepsilon \lambda^3 \bar{A} + \varepsilon \lambda^3 \bar{B} - 2\bar{C} = -\frac{1}{EI\beta^2} \bar{T}(s),\tag{2.32}$$

$$EI\beta^2 [-\bar{A} \operatorname{sen} \lambda + \bar{B} \operatorname{senh} \lambda - \bar{C} (\cos \lambda + \operatorname{cosh} \lambda)] = 0,\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}(-\cos \lambda + \hat{\eta} \lambda \operatorname{sen} \lambda) \bar{A} + (\operatorname{cosh} \lambda + \hat{\eta} \lambda \operatorname{senh} \lambda) \bar{B} + \\ + [\operatorname{sen} \lambda - \operatorname{senh} \lambda + \hat{\eta} \lambda (\cos \lambda - \operatorname{cosh} \lambda)] \bar{C} = 0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

As equações (2.31)-(2.34) constituem o seguinte sistema não linear:

$$M(\lambda) \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = -\frac{1}{EI\beta^2} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\bar{D} = -\bar{C} \quad (2.36)$$

onde

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} \varepsilon\lambda^3 & \varepsilon\lambda^3 & -2 \\ -\text{sen}\lambda & \text{senh}\lambda & -(\text{cos}\lambda + \text{cosh}\lambda) \\ -(\text{cos}\lambda - \hat{\eta}\lambda\text{sen}\lambda) & \text{cosh}\lambda + \hat{\eta}\lambda\text{senh}\lambda & \text{sen}\lambda - \text{senh}\lambda + \hat{\eta}\lambda(\text{cos}\lambda - \text{cosh}\lambda) \end{bmatrix}.$$

As constantes \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} e \bar{D} podem ser obtidas da solução das equações (2.35) e (2.36) e são funções de λ e de $\bar{T}(s)$. Substituindo-as na solução geral (2.30) obtém-se $\bar{y}(s)$ em função de λ e de $\bar{T}(s)$.

2.1.2 Funções de transferência analíticas

As funções de transferência em malha aberta são obtidas através das seguintes condições:

- o ângulo do rotor: $\bar{\theta}(s) = \bar{y}_x(0, s)$ (caso colocado)
- a posição da extremidade: $\bar{y}_t(s) = \bar{y}(l, s)$ (caso não colocado)

Assim, as funções de transferência são definidas como:

- caso colocado: $\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_{\theta}(\lambda)}{D(\lambda)}$ (observa-se a posição do rotor)
- caso não-colocado: $\frac{\bar{y}_t(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_{yt}(\lambda)}{D(\lambda)}$ (observa-se a posição da carga terminal)

Os pólos das funções de transferência são as raízes da equação $D(\lambda) = 0$, sendo $D(\lambda)$ obtido pelo determinante da matriz $M(\lambda)$.

Das equações (2.27) tem-se

$$s = \tilde{\omega}j = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda^2 j$$

onde $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda^2$ corresponde à frequência natural de vibração.

Como existem infinitas raízes de $D(\lambda) = 0$, as frequências naturais de vibração serão dadas por

$$\tilde{\omega}_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

A função complexa $D(\lambda)$ pode ser expressa em série de Taylor como [69]

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{d^n D}{d\lambda^n}(0).$$

Como $\frac{d^i D}{d\lambda^i}(0) = 0$ para $i = 0, 1, 2$, então pode-se fatorar $D(\lambda)$ como

$$D(\lambda) = \frac{4}{3} \lambda^3 (1 + 3\varepsilon + 3\hat{\eta}) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\lambda_i^4}\right) = \frac{4}{3} \lambda^3 (1 + 3\varepsilon + 3\hat{\eta}) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{\tilde{\omega}_i^2}\right). \quad (2.37)$$

A função de transferência para o caso colocado é da forma

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_{\theta}(\lambda)}{D(\lambda)}$$

onde $D(\lambda)$ foi determinado por (2.37).

Para determinar $N_{\theta}(\lambda) = \bar{\theta}(s)$ usa-se a equação $\bar{\theta}(s) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(0, s)$; para isso obtém-se \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} e \bar{D} por (2.35) e (2.36), substitui-se na solução geral (2.30) e calcula-se a derivada parcial em relação a x , obtendo

$$N_{\theta}(\lambda) = -\frac{2}{EI\beta} [1 + \cos\lambda \cosh\lambda + \hat{\eta}\lambda(\sinh\lambda \cos\lambda - \sin\lambda \cosh\lambda)].$$

A realizar-se a expansão em série de Taylor de $N_{\theta}(\lambda)$, finalmente obtém-se a *função de transferência para o caso colocado*, [69]

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_{\theta}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{I_T s^2} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{s^2}{\tilde{\omega}_i^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\tilde{\omega}_i^2}\right)}$$

onde $I_T = I_B + I_r + m_c l^2$ é o momento de inércia de corpo rígido, $\Omega_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^c$, $i = 1, 2, \dots, \infty$ e λ_i^c as raízes de $N_\theta(\lambda) = 0$. O gráfico desta função de transferência pode ser observado na figura 2.2, na qual destacam-se os pólos (picos para $+\infty$) e zeros (picos para $-\infty$), denotando assim que o sistema é de fase mínima.

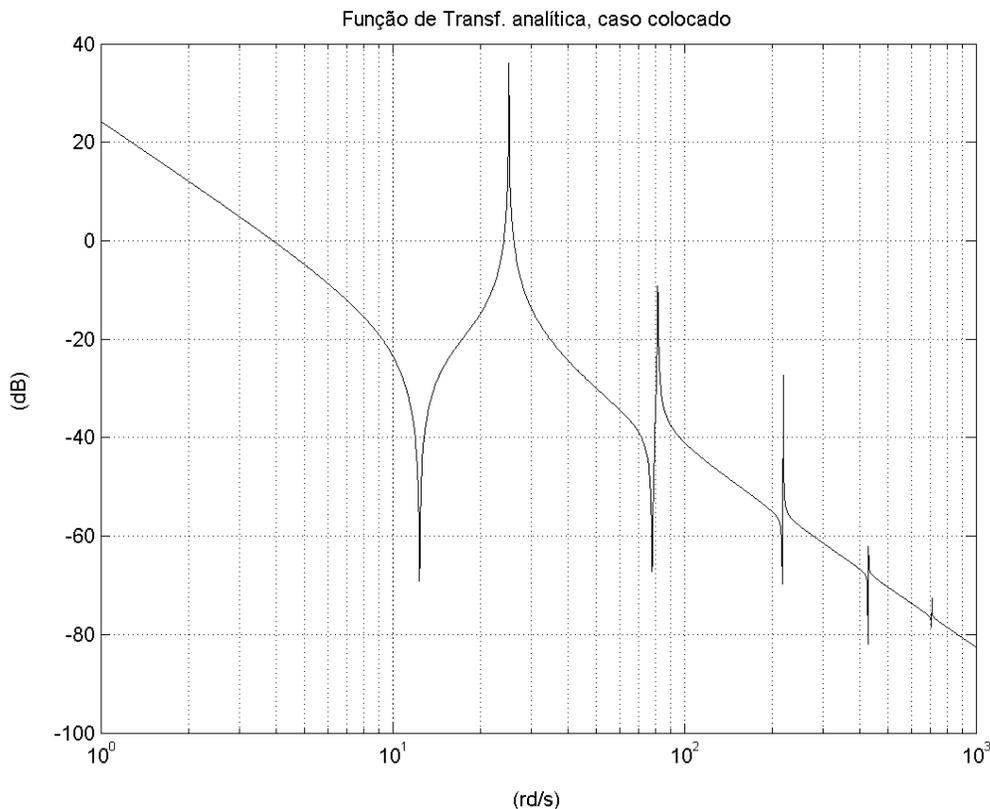


Figura 2.2: Gráfico da função de transferência analítica (caso colocado).

No caso não colocado, conforme mostra a figura 2.3, observa-se a posição da carga, ou seja, a observação é feita numa extremidade, enquanto que o torque motor é aplicado na outra extremidade, existindo, portanto, toda uma dinâmica flexível entre o local da aplicação do torque e o da realização da observação. Neste caso, de forma análoga ao caso colocado, obtém-se a *função de transferência para o caso não colocado*, [69]

$$\frac{\bar{y}_t(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_{yt}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{I_T s^2} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{s^2}{\alpha_i^2})}{(1 + \frac{s^2}{\omega_i^2})}$$

onde $\alpha_i^t = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^c$, $i = 1, 2, \dots, \infty$ e λ_i^c as raízes de $N_{yt}(\lambda) = 0$, sendo

$$N_{yt}(\lambda) = -\frac{2}{EI\beta^2} [\text{sen}\lambda + \text{senh}\lambda \text{cosh}\lambda].$$

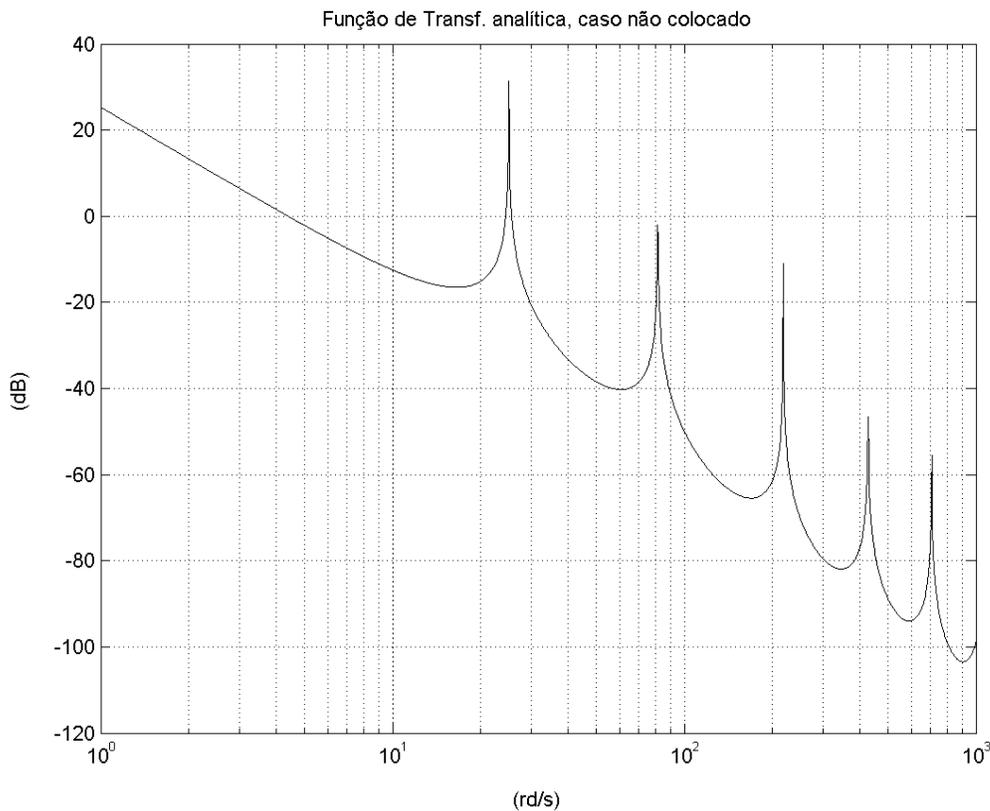


Figura 2.3: Gráfico da função de transferência analítica (caso não colocado).

2.2 Dinâmica estrutural

O procedimento de modelagem apresentado a seguir é denominado *formalismo discreto*, o qual aproxima a flexibilidade contínua por uma aproximação discreta, a partir de articulações fictícias. A seguir será mostrada a obtenção do modelo matemático considerando a existência de uma única articulação fictícia, para posteriormente generalizar para o caso de n articulações fictícias [53] [56].

Considere uma estrutura de comprimento l dividida em duas partes rígidas (elementos rígidos) de mesmo comprimento conectadas por uma articulação fictícia, conforme mostra a figura 2.4 onde I_r é a inércia do rotor, $\dot{\theta}_1$ a velocidade angular do rotor, T_m o torque aplicado ao rotor e k a constante elástica dada por [34]

$$k = \frac{nEI}{l}$$

sendo que α_1 tem a finalidade de ajustar a frequência do modo de vibração do modelo discreto com o modelo analítico; n é o número de articulações fictícias e EI é o módulo de Young multiplicado pela inércia da secção reta.

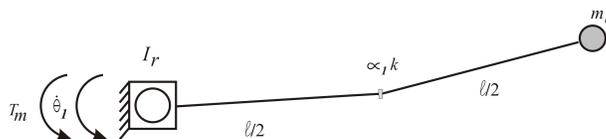


Figura 2.4: Estrutura flexível com uma articulação fictícia (dividida em duas partes rígidas).

O torque de atrito é contrário ao movimento e inicialmente considerado proporcional à velocidade angular, sendo c_r a constante de proporcionalidade, ou seja

$$T_{at} = -c_r \dot{\theta}_1. \quad (2.38)$$

As partes rígidas têm massas concentradas nos seus respectivos centros de massa, ou seja, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_c, y_c) são as coordenadas dos centros de massa dos elementos rígidos de massa m_1 e m_2 e da carga terminal de massa m_c , respectivamente, conforme a figura 2.5.

A equação de Euler-Lagrange [61] [72], que descreve o movimento, é dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = f_i(t) \quad (2.39)$$

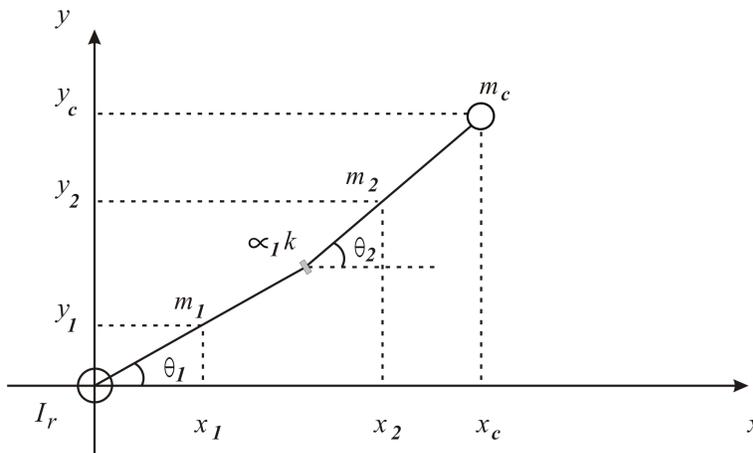


Figura 2.5: Estrutura flexível e sua aproximação discreta com uma articulação fictícia.

onde i é o índice relacionado ao elemento rígido e L é o Lagrangeano do sistema, definido por

$$L = E_c - E_p \quad (2.40)$$

sendo E_c a energia cinética, E_p a energia potencial e $f_i(t)$ corresponde aos esforços oriundos dos potenciais não conservativos (torque motor e atritos, por exemplo).

A energia cinética é definida como:

$$E_c = \frac{1}{2}I_r\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2), \quad (2.41)$$

onde $\frac{1}{2}I_r\dot{\theta}_1^2$ é a energia cinética devida à velocidade angular do rotor, $\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$ é devida ao movimento da massa m_1 , $\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$ é devida ao movimento da massa m_2 e $\frac{1}{2}m_c(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)$ é devida ao movimento da massa m_c . As componentes rotacionais da energia cinética, das partes rígidas em torno de seus respectivos centros de massa, foram negligenciadas, pois é feita a hipótese que esses termos são muito pequenos, devido às pequenas velocidades angulares de rotação das partes rígidas em torno de seus respectivos centros de massa.

Como não existe flexibilidade da estrutura no plano vertical, a energia potencial relativa à deformação na articulação fictícia é dada por

$$E_p = \frac{1}{2}\alpha_1 k(\theta_2 - \theta_1)^2. \quad (2.42)$$

As massas m_1 e m_2 são dadas por

$$m_1 = m_2 = \frac{m_b}{2}$$

onde m_b é a massa da lâmina.

As coordenadas dos centros de massa (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_c, y_c) podem ser facilmente obtidas da figura 2.5 por meio de relações trigonométricas. Ao considerar-se pequenas deflexões angulares na articulação fictícia e substituir-se as equações (2.41) e (2.42) na equação (2.40), obtém-se o Lagrangeano do sistema

$$L = \left[\frac{1}{2}I_r + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{l^2}{8} \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 k (\theta_2 - \theta_1)^2. \quad (2.43)$$

Quando $i = 1$ na equação (2.39) tem-se:

$$f_1(t) = T_m - c_r \dot{\theta}_1 - c_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2). \quad (2.44)$$

onde $-c_r \dot{\theta}_1$ é o torque de atrito no rotor, c_r é o coeficiente de atrito no rotor, c_1 é o coeficiente de atrito viscoso devido à deflexão angular na articulação fictícia. Para $i = 2$ tem-se:

$$f_2(t) = -c_1 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1). \quad (2.45)$$

Substituindo-se (2.43), (2.44) e (2.45) em (2.39), depois de algumas operações algébricas, obtém-se a seguinte equação matricial

$$[\tilde{I}] \vec{\theta} + [\tilde{C}] \dot{\vec{\theta}} + [\tilde{K}] \vec{\theta} = B' T_m \quad (2.46)$$

sendo $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix}^T$ o vetor de posições angulares,

$$[\tilde{I}] = \begin{pmatrix} I_r + \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) & \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) \\ \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{2} + m_c \right) & \frac{l^2}{4} \left(\frac{m_2}{4} + m_c \right) \end{pmatrix}$$

a matriz de inércia,

$$[\tilde{C}] = \begin{pmatrix} c_r + c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

a matriz de atritos e

$$[\tilde{K}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 k & -\alpha_1 k \\ -\alpha_1 k & \alpha_1 k \end{pmatrix}.$$

a matriz de constantes elásticas.

O coeficiente de atrito c_r pode ser obtido experimentalmente a partir da análise de resultados em malha aberta (atrito linear) ou por um modelo não linear.

A modelagem matemática, anteriormente mostrada, também pode ser obtida a partir de um número finito de articulações fictícias desejado. Estas articulações são posicionadas na estrutura como mostra a figura 2.6.

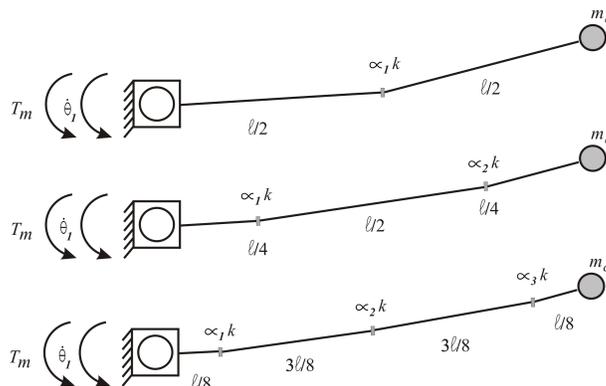


Figura 2.6: Estrutura flexível e sua aproximação discreta para os casos de uma, duas e de três articulações fictícias.

Para o caso de uma única articulação fictícia divide-se a estrutura em duas partes de mesmo comprimento (elementos rígidos) e coloca-se a articulação entre elas; para o modelo com duas articulações fictícias cada articulação é posicionada na metade de cada elemento rígido em que a estrutura foi dividida no caso anterior e assim sucessivamente, até que para n articulações, estas são posicionadas na metade de cada elemento rígido do caso de $n - 1$ articulações fictícias.

Depois de posicionadas as articulações fictícias e supondo l o comprimento da estrutura, conhecendo-se as massas de cada elemento rígido (concentradas

em seus respectivos centros de massa), a massa da carga terminal e as constantes elásticas de cada articulação fictícia, considerando-se θ_i o ângulo entre a direção x e o respectivo elemento rígido de número i , obtém-se as energias cinética e potencial e, conseqüentemente, o Lagrangeano do sistema. Por meio das equações de Euler-Lagrange e ainda, considerando-se pequenas deformações angulares nas articulações fictícias, obtém-se o modelo dinâmico:

$$[\tilde{I}]\vec{\theta} + [\tilde{C}]\vec{\theta} + [\tilde{K}]\vec{\theta} = B'T_m \quad (2.47)$$

sendo que n é o número de articulações fictícias, T_m é o torque motor, $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{1,n+1}^T$, $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_{n+1} \end{pmatrix}^T$ e as matrizes de inércia $[\tilde{I}]_{n+1,n+1}$, de atritos $[\tilde{C}]_{n+1,n+1}$ e das constantes elásticas $[\tilde{K}]_{n+1,n+1}$ são definidas a seguir.

Matriz $[\tilde{I}]$

Para $i = 1, \dots, n+1$:

Se $i = 1$

$$\tilde{I}_{i,i} = I_r + p(i)^2 \times \left(\frac{m(i)}{4} + m_c + \sum_{z=i+1}^{n+1} m(z) \right);$$

Se $i \neq 1$

$$\tilde{I}_{i,i} = p(i)^2 \times \left(\frac{m(i)}{4} + m_c + \sum_{z=i+1}^{n+1} m(z) \right);$$

Para $i = 1, \dots, n$, $j = i+1, \dots, n+1$ tal que $i < j$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{i,j} &= p(j) \times p(i) \times \left(\frac{m(j)}{2} + m_c + \sum_{z=j+1}^{n+1} m(z) \right); \\ \tilde{I}_{j,i} &= \tilde{I}_{i,j}. \end{aligned}$$

Matrizes $[\tilde{C}]$ e $[\tilde{K}]$

Para $i = 1, \dots, n$:

Se $i = 1$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{i,i} &= c_r + c_i; \\ \tilde{C}_{i,i+1} &= \tilde{C}_{i+1,i} = -c_i; \\ \tilde{K}_{i,i} &= \alpha_i k; \\ \tilde{K}_{i,i+1} &= \tilde{K}_{i+1,i} = -\alpha_i k; \end{aligned}$$

Se $i \neq 1$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,i} &= c_{i-1} + c_i; \\ \tilde{C}_{i,i+1} &= -c_i; \\ \tilde{C}_{i+1,i} &= -c_i; \\ \tilde{K}_{i,i} &= \alpha_{i-1}k + \alpha_i k; \\ \tilde{K}_{i,i+1} &= -\alpha_i k; \\ \tilde{K}_{i+1,i} &= -\alpha_i k.\end{aligned}$$

Para $i = n + 1$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,i} &= c_{i-1}; \\ \tilde{K}_{i,i} &= \alpha_{i-1}k;\end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, n - 1, j = i + 2, \dots, n + 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{i,j} = \tilde{C}_{j,i} &= 0; \\ \tilde{K}_{i,j} = \tilde{K}_{j,i} &= 0;\end{aligned}$$

onde c_r é o coeficiente de atrito no rotor que pode ser linear ou não. O vetor p (vetor de comprimentos de elementos rígidos) é obtido a partir do número de articulações fictícias. Por exemplo, para três articulações fictícias, seus elementos são:

$$\begin{aligned}p(1) &= l/8 \\ p(2) &= 3l/8 \\ p(3) &= 3l/8 \\ p(4) &= l/8\end{aligned}$$

conforme mostra a figura 2.6. O vetor m (vetor de massas dos elementos rígidos) é obtido por meio da expressão $m(i) = \frac{m_b p(i)}{l}$, sendo m_b a massa da estrutura. $k_j = \alpha_j k = \alpha_j \frac{nEI}{l}$, onde EI é o Módulo de Young vezes a inércia da secção reta e α_j uma constante que multiplica k a fim de minimizar os erros nas frequências dos modos de vibração entre o modelo analítico e o discreto.

A seguir são ilustradas as matrizes de inércia $[\tilde{I}]$, de atritos $[\tilde{C}]$ e de constantes elásticas $[\tilde{K}]$ para o caso de 3 articulações fictícias.

$$[\tilde{I}] = \begin{pmatrix} \tilde{I}_{11} & \tilde{I}_{12} & \tilde{I}_{13} & \tilde{I}_{14} \\ \tilde{I}_{21} & \tilde{I}_{22} & \tilde{I}_{23} & \tilde{I}_{24} \\ \tilde{I}_{31} & \tilde{I}_{32} & \tilde{I}_{33} & \tilde{I}_{34} \\ \tilde{I}_{41} & \tilde{I}_{42} & \tilde{I}_{43} & \tilde{I}_{44} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{11} &= I_r + \frac{l^2}{64}(m_1 + m_c + m_2 + m_3 + m_4), \\ \tilde{I}_{12} &= \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_2}{2} + m_c + m_3 + m_4\right), \\ \tilde{I}_{13} &= \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_3}{2} + m_c + m_4\right), \\ \tilde{I}_{14} &= \frac{l^2}{64}\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right), \tilde{I}_{21} = \tilde{I}_{12} \\ \tilde{I}_{22} &= \frac{9l^2}{64}\left(\frac{m_2}{4} + m_c + m_3 + m_4\right), \\ \tilde{I}_{23} &= \frac{9l^2}{64}\left(\frac{m_3}{2} + m_c + m_4\right), \\ \tilde{I}_{24} &= \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right), \tilde{I}_{31} = \tilde{I}_{13}, \tilde{I}_{32} = \tilde{I}_{23}, \\ \tilde{I}_{33} &= \frac{9l^2}{64}\left(\frac{m_3}{4} + m_c + m_4\right), \\ \tilde{I}_{34} &= \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right), \tilde{I}_{41} = \tilde{I}_{14}, \tilde{I}_{42} = \tilde{I}_{24}, \\ \tilde{I}_{43} &= \tilde{I}_{34}, \tilde{I}_{44} = \frac{3l^2}{64}\left(\frac{m_4}{2} + m_c\right). \end{aligned}$$

$$[\tilde{C}] = \begin{pmatrix} c_r + c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

e

$$[\tilde{K}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 k & -\alpha_1 k & 0 & 0 \\ -\alpha_1 k & \alpha_1 k + \alpha_2 k & -\alpha_2 k & 0 \\ 0 & -\alpha_2 k & \alpha_2 k + \alpha_3 k & -\alpha_3 k \\ 0 & 0 & -\alpha_3 k & \alpha_3 k \end{pmatrix}.$$

A equação (2.47) representa um sistema de segunda ordem, o qual pode ser reduzido a um sistema de primeira ordem a partir de uma mudança de variáveis;

obtém-se um sistema de primeira ordem da forma

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + BT_m \quad (2.48)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} [0]_{n+1 \times n+1} & [I]_{n+1 \times n+1} \\ -[\tilde{I}]_{n+1 \times n+1}^{-1}[\tilde{K}]_{n+1 \times n+1} & -[\tilde{I}]_{n+1 \times n+1}^{-1}[\tilde{C}]_{n+1 \times n+1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} [0]_{n+1 \times 1} \\ +[\tilde{I}]_{n+1 \times n+1}^{-1}B'_{n+1 \times 1} \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{\theta} \\ \dot{\vec{\theta}} \end{pmatrix}$$

sendo $[0]_{n+1 \times n+1}$ a matriz nula e $[I]_{n+1 \times n+1}$ a matriz identidade de ordem $n + 1$. A equação (2.48) representa o modelo dinâmico para n modos flexíveis.

2.3 Dinâmica do atuador

Um atuador do tipo moto-reductor pode ser visto como um elemento transmissor de movimento que contém elasticidade interna de constante elástica K_1 , como representado na figura 2.7.

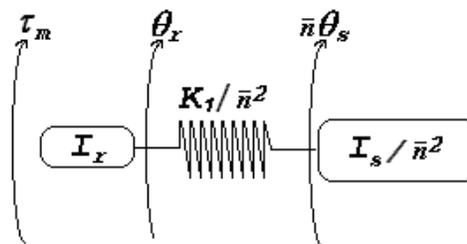


Figura 2.7: Representação do atuador.

τ_m é o torque motor aplicado ao rotor com inércia I_r , I_s é a inércia da carga acoplada ao eixo de saída do reductor, \bar{n} é o índice de redução e θ_r e θ_s representam as posições angulares do rotor e da carga, respectivamente.

Atritos não lineares estão sempre presentes neste tipo de dinâmica, fazendo com que o torque motor não seja integralmente transmitido para a saída do redutor. Conforme Gomes e Chrétien [37] o modelo dinâmico deste sistema é descrito pelas equações

$$I_r \ddot{\theta}_r + \frac{K_1}{\bar{n}^2} (\theta_r - \bar{n}\theta_s) = \tau_m - \tau_{at} \quad (2.49)$$

$$I_s \ddot{\theta}_s - K_1 \left(\frac{\theta_r}{\bar{n}} - \theta_s \right) = -T_l \quad (2.50)$$

onde τ_{at} é o torque de atrito não linear.

Considerando uma aproximação rígida, o modelo passa a ser constituído de um grau de liberdade. Fazendo-se $\frac{\theta_r}{\bar{n}} \approx \theta_s$, as equações (2.49) e (2.50) reduzem-se a

$$I_t \ddot{\theta}_s + f_v^* \dot{\theta}_s = T_m - T_l \quad (2.51)$$

onde $I_t = \bar{n}^2 I_r + I_s$ é a inércia total, f_v^* é o coeficiente de atrito viscoso variável [40], $T_m = \bar{n}\tau_m$ é o torque motor e T_l o torque de reação da carga acoplada a saída do redutor, com unidades físicas na saída do redutor.

Quando se deseja trabalhar com uma aproximação linear para o atrito, um valor constante para f_v^* deve ser considerado. Se o objetivo é considerar as não linearidades inerentes ao fenômeno físico, tais como modos *stick-slip* e o efeito Stribeck [41] o coeficiente f_v^* passa a ser função do vetor de estado $(\theta_s, \dot{\theta}_s)$ e do torque motor.

2.4 Modelo de atritos

O modelo de atrito usado neste trabalho foi proposto inicialmente por Gomes e Rosa [40]. Para a obtenção dos parâmetros de atritos, foram aplicados vários torques eletromagnéticos ao rotor de um atuador do tipo *harmonic-drive*, com uma carga rígida acoplada ao eixo de saída. Em cada nível de torque motor a velocidade é medida; o torque de atrito é igual ao torque motor aplicado, para cada velocidade estacionária, devido a ausência de outros torques externos. Desta

forma, é possível obter um conjunto de pontos de velocidades do rotor e de torque de atrito. Para cada sentido de rotação é traçada uma curva de ajuste em relação a esses pontos.

As equações polinomiais que fazem o ajuste têm a forma

$$T_{at} = f_i + f_{iv}\dot{\theta} + \hat{c}_i\dot{\theta}^2 \quad (2.52)$$

onde o índice i é igual a p para velocidade do rotor positiva e n para velocidade do rotor negativa. A partir da identificação experimental, figura 2.8, foi obtido

$$\begin{aligned} f_p &= 0.170081Nm; & f_n &= -0.172171Nm; \\ f_{vp} &= 0.306911Nm/rd/s; & f_{vn} &= 0.250968Nm/rd/s; \\ \hat{c}_p &= -0.074275Nm/rd^2/s^2; & \hat{c}_n &= 0.047308Nm/rd^2/s^2. \end{aligned}$$

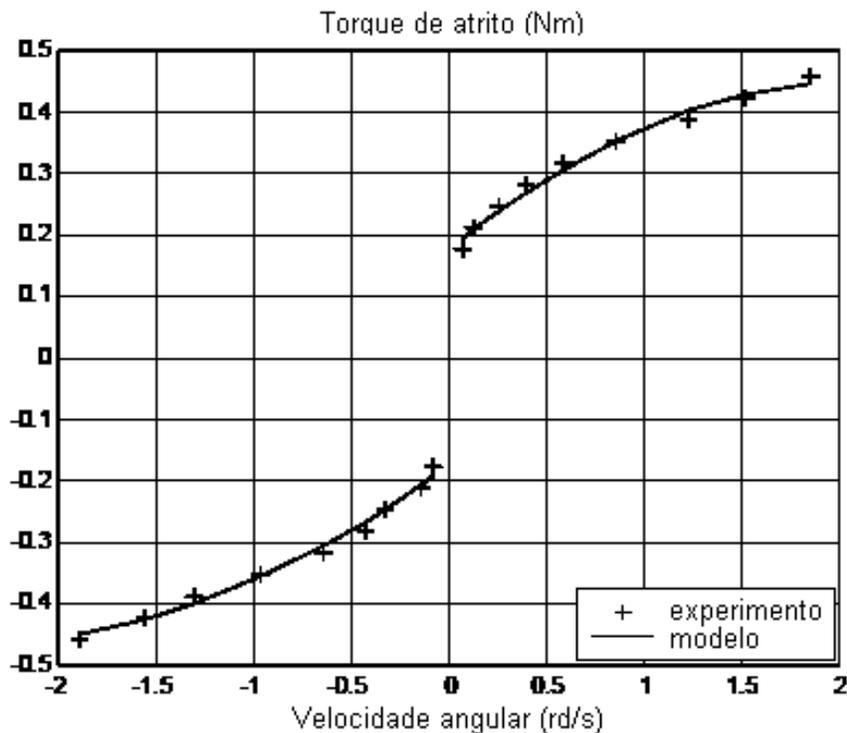


Figura 2.8: Torque de atrito - modelo e experimento.

O torque de atrito é escrito como um efeito dinâmico interno, na forma

$$T_{at} = f_v^* \dot{\theta} \quad (2.53)$$

onde f_v^* é o coeficiente de atrito viscoso variável. Para representar as trajetórias de atrito o valor de f_v^* é obtido na forma indicada no algoritmo descrito na tabela 2.1, [40].

Tabela 2.1: Algoritmo para identificação do coeficiente de atrito viscoso variável

Algoritmo
<pre> if $\dot{\theta} \geq \dot{\theta}_{lim}$ then $f_v^* = \frac{f_i + \hat{c}_i \dot{\theta}^2}{\dot{\theta}} + f_{vi}$; {lado de fora do <i>stick-slip</i>} else if $T_{res} > f_s^*$ then $f_v^* = \frac{f_i + f_{vi} \dot{\theta}_{lim} sign(\dot{\theta}) + \hat{c}_i \dot{\theta}_{lim}^2}{\dot{\theta}_{lim} sign(\dot{\theta})}$; {trajetória <i>slip</i>} else if $\dot{\theta} = 0$ then $\dot{\theta} = eps$; {$1e - 10$, por exemplo} endif; $f_v^* = \frac{f_i + \hat{c}_i \dot{\theta}^2}{\dot{\theta}} + f_{vi}$; {trajetória <i>stick</i>} if $f_v^* > f_{lim}$ then $f_v^* = f_{lim}$; {trajetória <i>stick</i> final} endif; endif; endif. </pre>

A utilização do algoritmo está condicionada ao fato de que a velocidade do rotor deve estar dentro do intervalo de velocidades que gerou a figura 2.8.

O torque resultante no atuador, denotado por T_{res} , é calculado pela equação

$$T_{res} = T_m - T_l = T_m - K_1 \left(\frac{\theta_r}{\bar{n}} - \theta_s \right). \quad (2.54)$$

T_l é o torque de reação da carga. Se não existe contato da carga com o meio externo ou dinâmica própria da carga e o atuador é aproximadamente rígido, T_{res} é igual a T_m . $\dot{\theta}_{lim}$ é a menor velocidade possível estacionária do rotor em malha aberta, medida como $0.07rd/s$. $f_s^* = 0.93(f_p - f_n)/2$ (93% do atrito seco médio)

e f_{lim} o valor máximo que pode ser assumido pelo coeficiente de atrito viscoso (trajetória *stick* final abaixo da velocidade zero), dada pela equação

$$f_{lim} = \left| \frac{f_i + \hat{c}_i \dot{\theta}_{st}^2}{\dot{\theta}_{st}} \right| + f_{vi},$$

onde $\dot{\theta}_{st} = \gamma \dot{\theta}_{lim}$, sendo usado $\gamma = 0.025$. Fisicamente, $\dot{\theta}_{st}$ é a menor velocidade do rotor e abaixo deste valor existe apenas deslocamentos micro elásticos entre materiais num nível microscópico (deslocamento *presliding*). Considera-se que a tolerância *eps* seja 1×10^{-10} .

Portanto, o modelo dinâmico global do manipulador flexível é composto pelos modelos estrutural e do atuador, conforme descritos anteriormente. O atuador robótico utilizado acrescenta um modo de vibração, devido a sua elasticidade externa, cuja frequência é bem maior que a do terceiro modo de vibração da estrutura, permitindo que seja feita uma aproximação rígida para o atuador, conforme equação (2.51). Assim o modelo dinâmico global do manipulador flexível, envolvendo as dinâmicas do atuador e da estrutura flexível, pode ser colocado na forma de estado

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + BT_m$$

para o caso de uma aproximação linear do atuador, e

$$\dot{\vec{x}} = A(\vec{x}, T_m)\vec{x} + BT_m$$

para o caso de se considerar a presença de atritos não lineares no atuador. Nesse caso o torque resultante é dado pela expressão

$$T_{res} = T_m - \alpha_1 k(x(2) - x(1))$$

que representa o torque resultante em relação à deflexão na primeira articulação fictícia e $\alpha_1 k$ a constante elástica nessa articulação.

2.5 Descrição do experimento

O suporte experimental consiste em um robô flexível que foi construído no Núcleo de Matemática Aplicada (NUMA, www.numa.furg.br) localizado na Universidade Federal do Rio Grande, conforme ilustrado na figura 2.9.

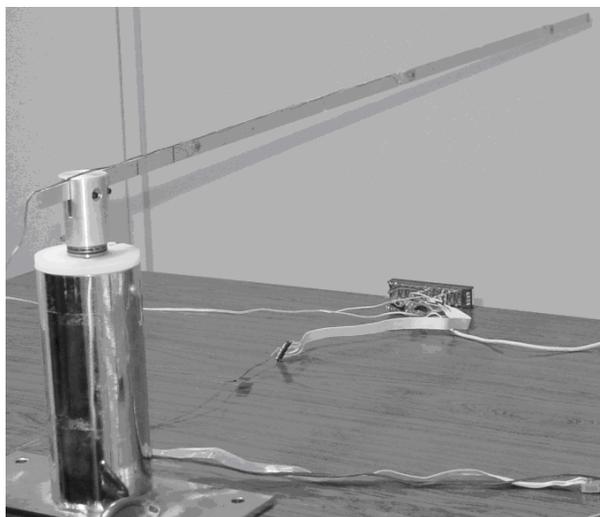


Figura 2.9: Fotografia do manipulador flexível.

Ele é composto por uma lâmina muito flexível, feita de alumínio, livre em uma extremidade (*end effector*) e articulada na outra (*moto-reductor*). Três sensores *strain gauges* foram colocados na lâmina, já que o segundo modo flexível é bem visível em experimentos e o interesse é controlar os dois primeiros modos. Os parâmetros físicos do manipulador flexível são mostrados na tabela 2.2 (todas as variáveis e parâmetros têm unidades físicas definidas na saída do atuador).

Uma representação geométrica do manipulador flexível pode ser vista na figura 2.10, indicando que a flexibilidade mais importante ocorre no plano horizontal (interesse em controlar).

Tabela 2.2: Parâmetros físicos da lâmina

Parâmetro	Símbolo	Valor
Inércia no rotor	I_r	$0.01334kgm^2$
Mód. de elast. dinâmico	EI	$1.975Nm^2$
Massa da lâmina	m_b	$0.11118kg$
Dimensões da lâmina	l, h, eb	$1.1m; 0.0126m; 0.00305m$

O atuador utilizado é um moto-reductor do tipo *harmonic-drive*, conforme pode ser visto na figura 2.11. Este tipo de atuador é muito usado em robótica porque o jogo angular é praticamente nulo em razão da grande quantidade de dentes das engrenagens permanentemente em contato dentro do reductor de velocidades. Entretanto, a presença de atritos internos, cujo comportamento é altamente não linear, gera uma importante zona morta em torque podendo inviabilizar a utilização de leis de controle, ou seja, nessa região os torques produzidos pela lei de controle são anulados pelos atritos. Para contornar esse tipo de problema pode-se utilizar mecanismos de compensação de atritos baseados, por exemplo, na utilização de redes neurais artificiais.

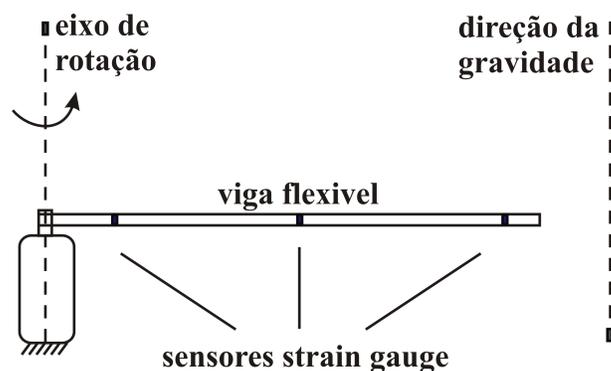


Figura 2.10: Representação geométrica do manipulador flexível.



Figura 2.11: Atuador robótico utilizado para obtenção de resultados experimentais.

As características físicas do atuador *harmonic-drive* utilizado são mostradas na tabela 2.3.

Tabela 2.3: Parâmetros físicos do atuador

Parâmetro	Símbolo	Valor
Inércia no rotor	I_r	$0.01334kgm^2$
Índice de redução	\bar{n}	100
Torque/constante de corrente	tcc	$1.74Nm/A$
Resolução do encoder	res	$5000PPR$

Atuadores do tipo *direct-drive* (sem redutor de velocidade) não apresentariam dificuldade em atenuar as vibrações estruturais devido a zona morta em torque ser insignificante, porém em situações práticas surgiriam dificuldades visto sua autonomia de torque ser pequena. Assim, a escolha de um *harmonic-drive* se justifica pelo interesse em projetar leis de controle para atenuar vibrações estruturais a partir de atuadores com condições reais de utilização em problemas robóticos. O verdadeiro desafio é projetar leis de controle para atenuar vibrações estruturais com atuadores que usam redutor de velocidade. Por isso usa-se um *harmonic-drive* no manipulador flexível.

2.6 Resultados experimentais e de simulações

A seguir são apresentados resultados de simulações com o modelo os quais são confrontados com experimentos em malha aberta (sem controle), visando verificar o nível de eficiência do modelo matemático considerado para a estrutura, em relação à planta física. Um modelo de atrito não linear proposto por Gomes e Rosa [40] foi utilizado, ou seja, o termo c_r na matriz de atritos $[\tilde{C}]$ passa a ser variável, e representado por f_v^* . Os resultados apresentados nas figuras 2.12-2.14 foram obtidos considerando-se a massa na extremidade livre da lâmina igual a zero. Também são apresentados resultados das curvas de resposta em frequência comparando-se o modelo matemático ao caso analítico.

Com o objetivo de obter um modelo bem representativo comparou-se as frequências $\alpha_1 k$, $\alpha_2 k$ e $\alpha_3 k$ dos três primeiros modos de vibração do modelo com as respectivas frequências obtidas experimentalmente. Ajustou-se as constantes multiplicativas α_1 , α_2 e α_3 de forma a obter erros mínimos, via função *fminsearch* do MATLAB, nos dois primeiros modos que são os de interesse em controlar na prática. A boa representatividade do modelo pode ser visualizada na figura 2.12, que confronta um resultado experimental a uma simulação, ambos obtidos sob as mesmas condições. Observa-se um bom "casamento" entre as frequências do modelo e as do experimento na posição angular da carga, melhor visualizado a partir da ampliação vista no segundo gráfico, referente aos 2 primeiros segundos. Os resultados desta figura foram obtidos ativando-se os modos nos primeiros 0.1s (degrau alternado em torque) e anulando-se o torque motor no restante do tempo, ou seja, trata-se de comparações entre simulação e experimento em malha aberta (sem controle).

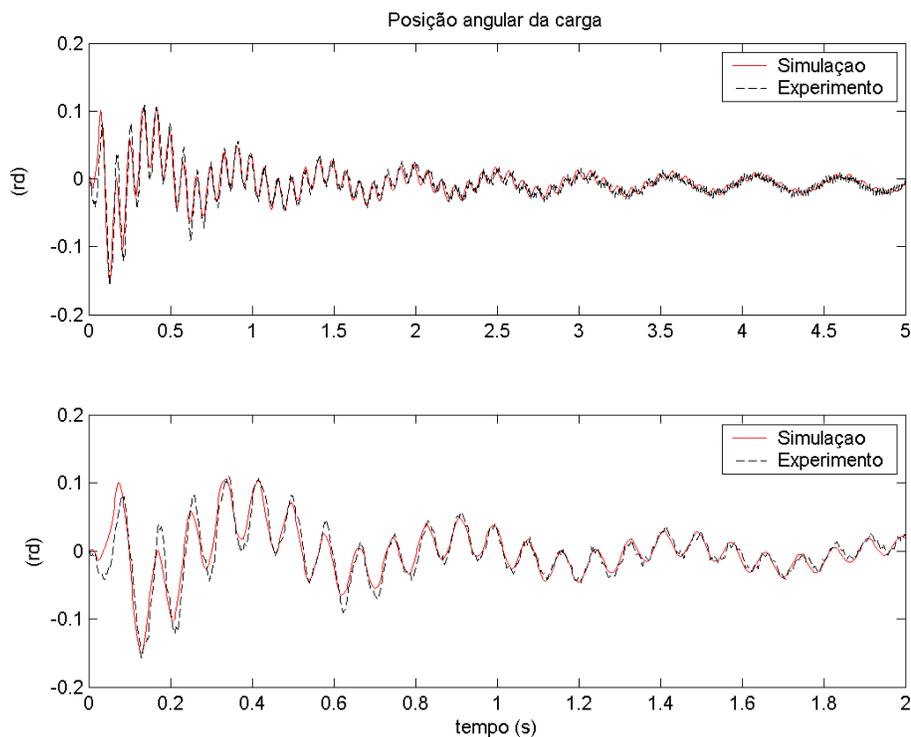


Figura 2.12: Posição angular da carga, resultados de simulação e experimental.

A figura 2.13 representa as curvas de resposta em frequência (diagrama de Bode) analítica (curva em preto) e do modelo (curva em vermelho) para o caso colocado. Observa-se que existe uma boa concordância nos dois primeiros modos de vibração. A diferença no terceiro modo deve ser desprezada, visto que o modelo visou reproduzir bem os dois primeiros modos que são de interesse em controlar na prática. Assim, verifica-se que o modelo se mostra bem representativo em relação tanto ao caso experimental quanto ao analítico, mostrando concordância entre modelo, teoria e prática.

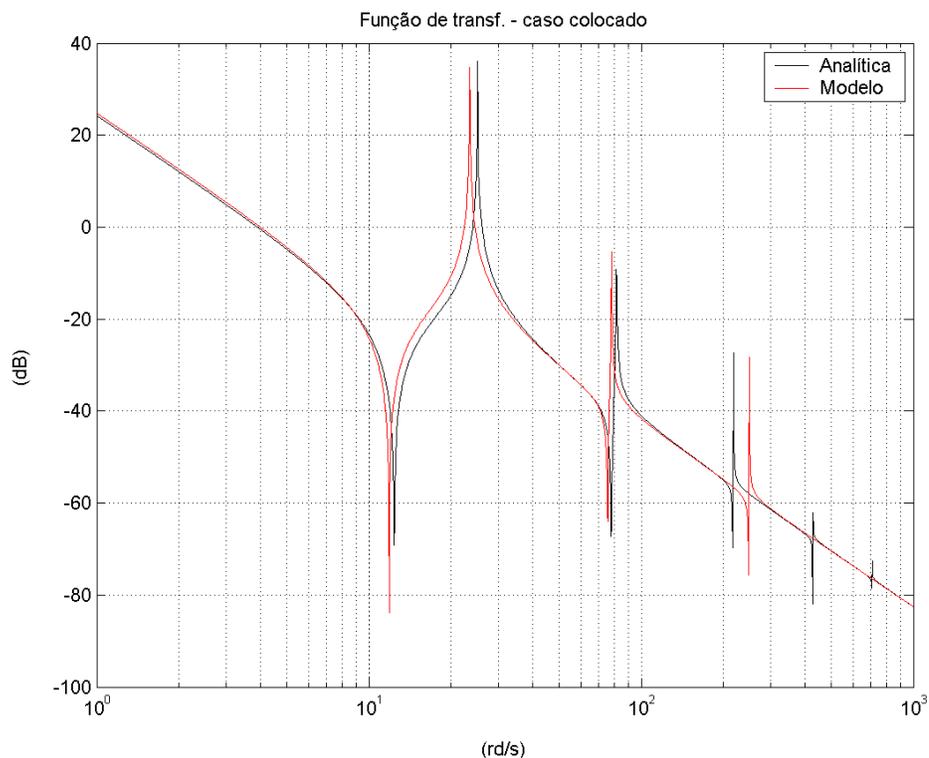


Figura 2.13: Funções de transferência analítica e do modelo no caso colocado.

Uma questão importante é que o tipo de atuador considerado, motor-reductor do tipo *harmonic-drive*, possui uma importante zona morta, que pode ser visualizada na figura 2.14, situada entre as retas tracejadas. Esta zona é identificada como equivalente a 10.8% do torque máximo do atuador e surge devido à presença de atritos internos ao atuador. Na prática, qualquer torque dentro da zona morta não é transmitido para estrutura. Esse efeito também é conhecido como gerador do modo *stick*, ou seja, a articulação fica sem movimento e a velocidade do rotor permanece em zero mesmo com a presença de torques diferentes de zero.

Ainda observando-se a figura 2.14 nota-se que, na maior parte do tempo, o torque de reação da carga ficou, em valores absolutos, dentro da zona morta em torque. Assim, em uma implementação real, uma lei de controle teria dificuldades em atenuar as vibrações residuais, já que o torque teria amplitudes compatíveis com o torque de reação da carga, que por estar dentro dos limites de atrito estático (ou

seco por aproximação) não passaria para a estrutura, fazendo com que a mesma permanecesse vibrando com se fosse uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra. Portanto, para que uma lei de controle funcione efetivamente no caso real, é necessário considerar mecanismos de compensação para corrigir o efeito de atritos não lineares internos a esse tipo de atuador.

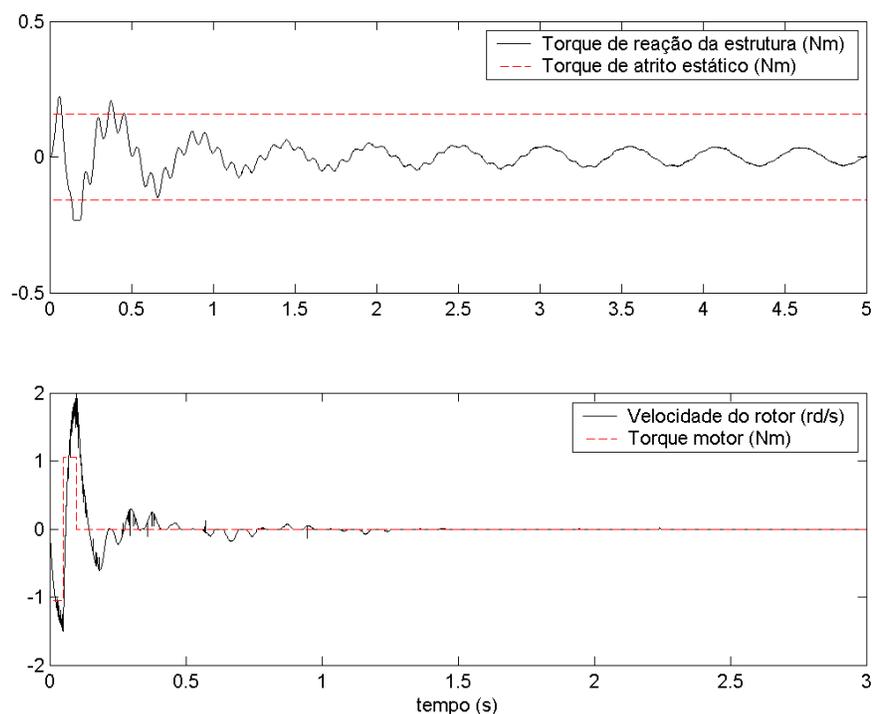


Figura 2.14: Torque de reação da estrutura e velocidade do rotor.

Neste capítulo, apresentou-se uma das contribuições desta pesquisa, através da proposição e implementação de um procedimento sistemático bastante simples para a obtenção de um modelo matemático para a estrutura flexível. A validação desse modelo foi, inicialmente, feita através da confrontação com resultados referentes a solução analítica. Um suporte experimental constituído de uma lâmina flexível articulada em uma extremidade a um atuador robótico do tipo *harmonic-drive* e livre na outra, serviu de base para a obtenção de resultados experimentais. Utilizou-se um modelo de atrito proposto na literatura com a finalidade de avaliar

o modelo fazendo-se comparações com resultados experimentais. A principal conclusão é que o modelo reproduziu com significativa precisão o fenômeno físico.

No próximo capítulo será apresentada uma estratégia de compensação para o atrito interno ao atuador, combinando-se uma RNA a um algoritmo *fuzzy*.

3 COMPENSAÇÃO DE ATRITO

Este capítulo tem como objetivo principal apresentar um mecanismo de compensação de atritos não-lineares internos a um atuador robótico do tipo moto-redutor. Depois de identificado o atrito não linear, o alvo é compensá-lo de maneira que o atuador torne-se aproximadamente linear, sendo possível a atuação efetiva da lei de controle em uma implementação prática. A seguir é apresentado um mecanismo de compensação de atritos, baseado em redes neurais artificiais (RNA) e lógica *fuzzy*, o qual mostrou-se eficiente na tentativa de eliminar os atritos não lineares internos ao atuador.

3.1 Atuador robótico

O atuador utilizado é um *harmonic-drive*, conforme citado no capítulo 2. Esse tipo de atuador robótico possui vantagens importantes como baixo peso, tamanho pequeno, jogo angular quase nulo, além da alta capacidade de transmissão de torque em razão do grande número de dentes das engrenagens em contato. Porém, a existência de uma zona morta em torque significativa (em torno de 10% a 20% de seu torque máximo) pode degradar o desempenho de leis controle projetadas. Essa zona morta surge em razão dos atritos internos que têm comportamento fortemente não linear.

Muitos modelos de atritos foram propostos na literatura, porém é bastante difícil identificar as características exatas do atrito em função da grande sensibilidade que o atrito possui sob diversos fatores como tempo de operação, temperatura, lubrificação, condições físicas do equipamento entre outras. Para contornar esse problema propõe-se a utilização de mecanismos que atuem de forma a compensar os efeitos do atrito. O mecanismo de compensação atua de forma a diminuir a zona morta em torque funcionando em paralelo com a lei de controle.

Na literatura foi proposto compensar o atrito utilizando uma RNA, que treinada *off-line*, tem como objetivo principal aprender o torque de atrito. A RNA foi capaz de aprender bem o fenômeno de atrito, entretanto passou a perder desempenho em razão das variações do atrito no tempo e com as condições operacionais do atuador. Porém, foi percebido que multiplicando a saída da RNA por um ganho o desempenho do compensador era recuperado, evitando retreinar a RNA a cada novo experimento, o que seria inviável. Visando obter esse ganho automaticamente propõe-se, nesse trabalho, uma estratégia baseada num algoritmo *fuzzy* que, atuando em paralelo com o compensador neural, mostrou-se bastante eficiente na prática.

3.2 Compensador neural

O compensador neural utilizado foi inicialmente proposto por Gervini et. al, [33]. Nesse mecanismo o torque de atrito é estimado por uma rede neural artificial (RNA). A RNA proposta é do tipo *feed-forward* com uma camada de entrada, uma camada de saída e uma camada intermediária multi conectada [33] [7]. A camada de entrada é composta de dois neurônios (torque motor e velocidade do rotor), a camada intermediária é composta de quatro neurônios e a camada de saída composta por um neurônio (torque de atrito), conforme mostrado na figura 3.1.

A regra de treinamento usada foi *back propagation* [29]. A referida configuração foi

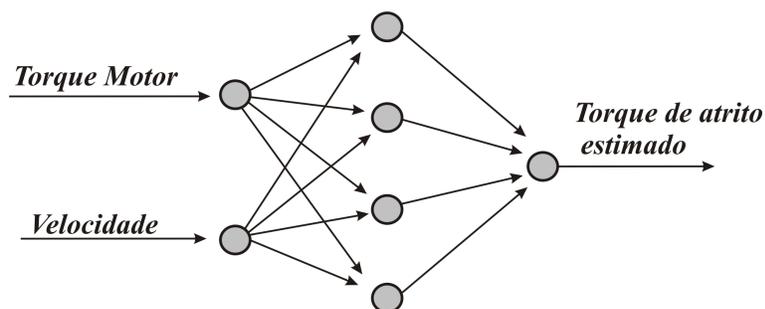


Figura 3.1: Arquitetura da rede neural artificial.

obtida depois de muitos testes, sendo aquela com menor número de neurônios capaz de aprender e reproduzir o padrão de treino apresentado. A figura 3.2 representa

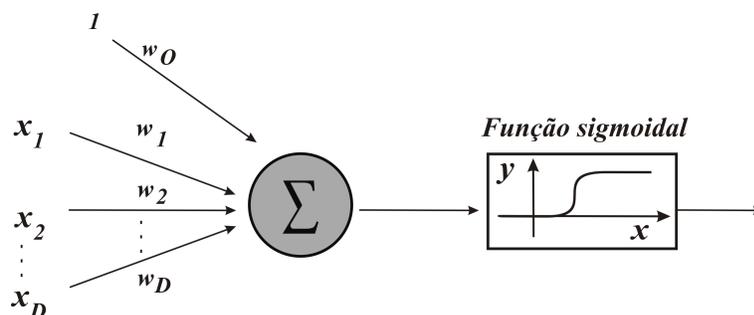


Figura 3.2: Neurônio artificial.

o modelo do neurônio considerado, cuja função de ativação usada foi uma função sigmoial (\tanh). Após o treinamento a RNA reproduziu o padrão de treino com 98% de precisão.

O padrão de treino apresentado a RNA foi obtido identificando o torque de atrito usando diferentes torques motores em malhas aberta e fechada. O modelo descrito pelas equações (2.49) e (2.50) não é adequado para identificação do atrito devido à elasticidade interna ao atuador. Porém, como a constante elástica K_1 é grande, pode-se fazer uma aproximação rígida para o atuador, a fim de se obter o torque de atrito experimental e assim apresentá-lo como padrão de treino à RNA.

Portanto, a partir das equações (2.49) e (2.50) obtém-se o modelo para a identificação do torque de atrito na forma

$$I_t \ddot{\theta}_s = T_m - T_{at} \quad (3.1)$$

onde $I_t = \bar{n}^2 I_r + I_s$. Observando-se a equação (3.1) vê-se que é necessário conhecer I_r , I_s , \bar{n} , $\ddot{\theta}_s$ e T_m para obtenção de T_{at} . Para se obter $\ddot{\theta}_s$ ou propriamente a aceleração do rotor, inicialmente, obteve-se a velocidade do rotor a partir da derivada no tempo *on-line* da posição (sinal do *encoder*). Essa velocidade foi gerada com ruídos de alta frequência que foram filtrados por um polinômio de sexto grau, por sub-intervalos, ou seja, cada sub-intervalo do sinal da velocidade não nulo foi considerado um sub-intervalo distinto. Cada sub-intervalo foi filtrado separadamente e depois reunido para então formar o sinal de velocidade no intervalo inteiro. Feito isso, o próximo

passo foi a determinação da aceleração do rotor a partir da derivada no tempo da velocidade polinomial suavizada.

A figura 3.3 mostra a velocidade do rotor experimental e a velocidade do rotor filtrada. Uma ampliação do primeiro pico, em torno de 3.3 segundos, é mostrada na segunda parte da figura. Essa foi a aceleração usada para a obtenção do torque de atrito para gerar os padrões de treino apresentados a rede neural.

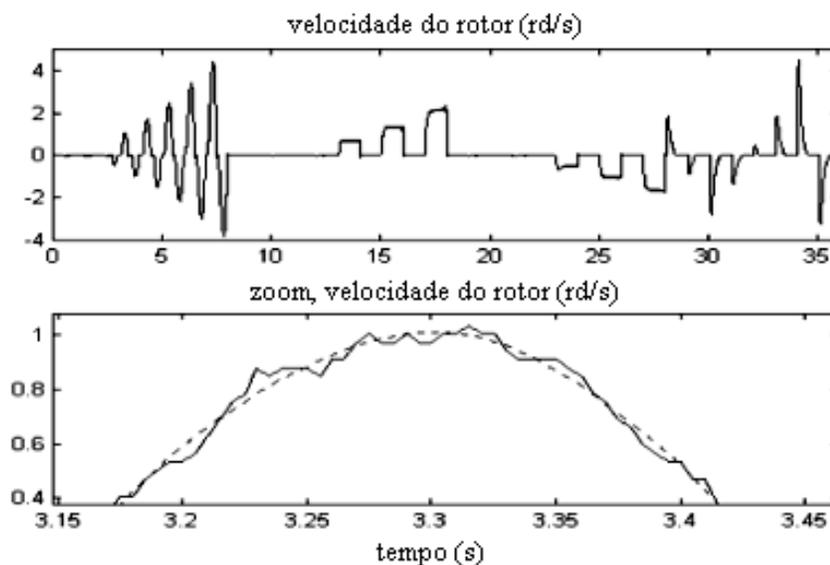


Figura 3.3: Velocidades do rotor experimental (linha sólida) e filtrada (linha tracejada).

Vários resultados experimentais foram obtidos, tanto em malha aberta quanto em malha fechada, para finalmente obter-se uma generalização do torque de atrito experimental. A tabela 3.1 contém o tipo de torque atribuído, onde inicialmente considerou-se um torque senoidal em malha aberta, seguido de um torque em degrau também em malha aberta, sendo que para cada intervalo de tempo (medido em segundos) é considerada uma dada amplitude.

Também foram obtidos resultados em malha fechada com um controle PD, cuja posição de referência está especificada na última coluna da tabela. Quando os intervalos de tempo em segundos não são indicados significa que o torque motor foi nulo. Esses dados foram utilizados na geração do torque de atrito experimental e, por consequência, como padrões de treino da rede neural artificial. Executou-se os resultados referentes a tabela 3.1 (mostrados na figura 3.4) na mesma seqüência para garantir uniformidade na determinação experimental do torque de atrito. Também realizou-se uma fase de pré-aquecimento do atuador, com um torque senoidal nos primeiros cinco segundos, antes do início da experimentação.

Tabela 3.1: Resultados experimentais para gerar o torque de atrito e os padrões de treino da RNA.

Torque senoidal em malha aberta (frequência 1Hz)		Torque em degrau em malha aberta		Malha fechada com controle PD	
Intervalo (s)	Amplitude (% torque máximo)	Intervalo (s)	Amplitude (% torque máximo)	Intervalo (s)	Posição de referência (graus)
0-1	10	9-10	10	28-29	30
1-2	15	11-12	15	29-30	0
2-3	20	13-14	20	30-31	-30
3-4	25	15-16	25	31-32	-45
4-5	30	17-18	30	32-33	-30
5-6	35	19-20	-10	33-34	0
6-7	40	21-22	-15	34-35	45
7-8	45	23-24	-20	35-36	0
		25-26	-25		
		27-28	-30		

A rede neural artificial reproduziu com alto grau de precisão os torques de atrito experimentais conforme pode ser visualizado na figura 3.5, que mostra o torque de atrito experimental (usado para treinar a RNA) e o torque de atrito estimado pela RNA. A diversificação dos torques que geraram os padrões de treino é importante para uma maior capacidade de generalização da RNA. Porém, como o atrito é um fenômeno que varia sob diversas condições, este causa perda de desem-

penho da RNA à medida que o tempo passa. Para recuperar o desempenho perdido pela RNA, sem treiná-la novamente, propõe-se que a saída da RNA seja multiplicada por um ganho atualizado automaticamente a cada passo de tempo, obtido por meio de um algoritmo de inferência *fuzzy*.

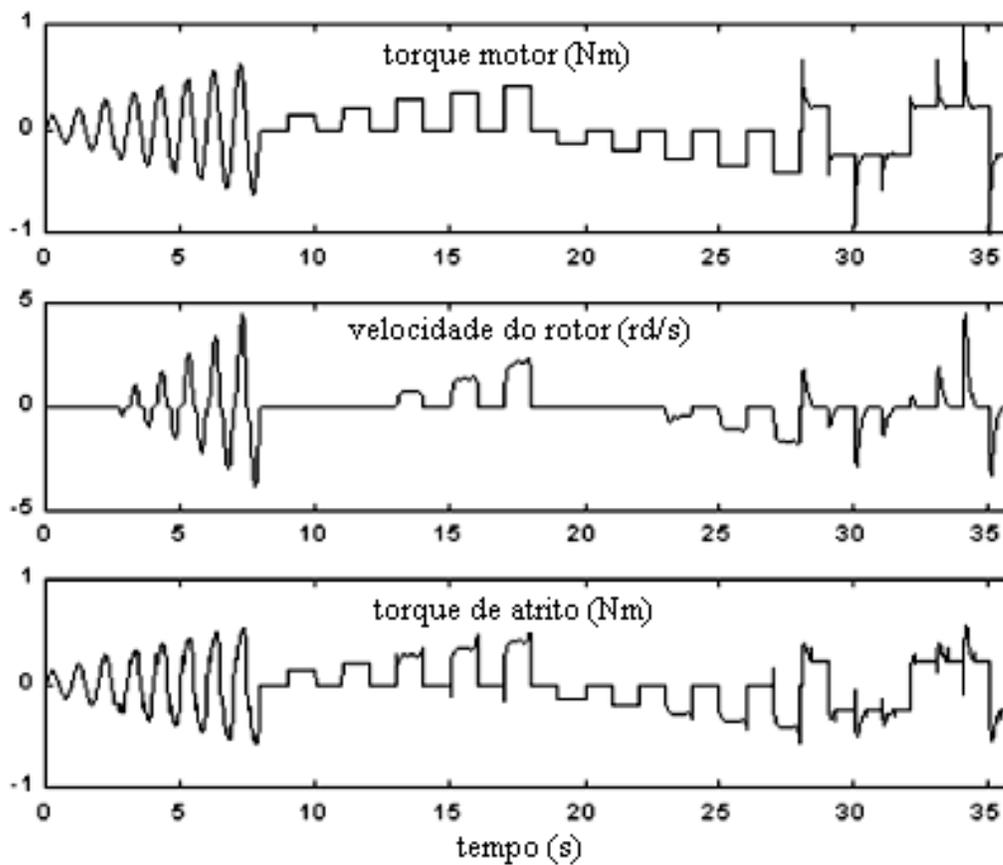


Figura 3.4: Padrões de treino da RNA.

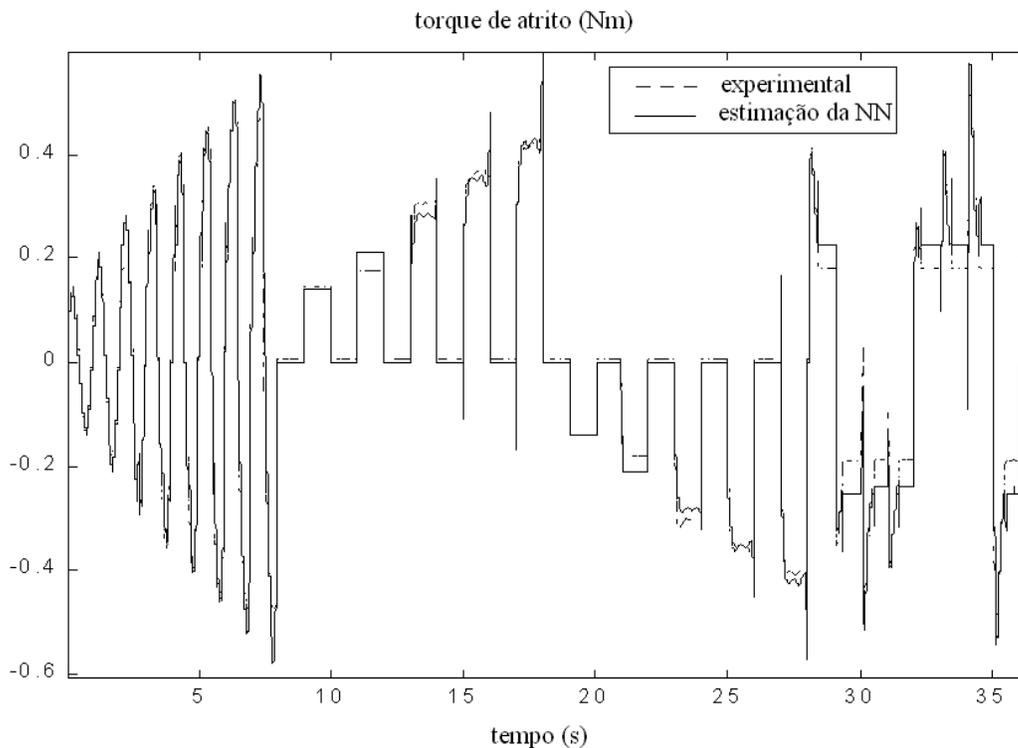


Figura 3.5: Torque de atrito experimental e estimado pela RNA.

3.3 Compensador *fuzzy*

Parâmetros de atrito estão sujeitos a variações com o tempo e a principal causa está associada com o material e as condições de operação dos atuadores. Existe também uma dependência relacionada à posição angular do eixo de saída do redutor e a mudança da inércia da carga. Esta variação de parâmetros diminui o desempenho da rede neural artificial na compensação dos torques de atrito. Porém, foi verificado que não é necessário treinar novamente a RNA [39] para garantir um bom desempenho, mas apenas multiplicar o sinal de saída da RNA por um ganho " g ". Assim o torque de compensação assume a forma

$$T_{comp}(j) = g\hat{T}_{at}(j)$$

onde $\hat{T}_{at}(j)$ é o torque de atrito estimado pela RNA.

Considerando o caso rígido, ou seja, sem a lâmina acoplada ao atuador, Gomes et. al [39] propôs um algoritmo baseado num sistema de inferência *fuzzy* para obtenção desse ganho. Esse algoritmo determina um ganho constante que ajustará (*off-line*) o torque de compensação. Baseado nesse algoritmo propõe-se um novo algoritmo que atualiza o ganho fuzzy a cada passo de tempo (*on-line*), conforme descrito a seguir.

Considerando-se a trajetória da posição de referência suave, a entrada do algoritmo fuzzy consiste do erro (devido a compensação ruim), diferença entre a posição de referência e a posição atual, e da derivada da posição de referência, enquanto que a saída consiste em um ganho escalar constante a cada passo de discretização.

A figura 3.6 resume o processo *fuzzy*, ou seja, o algoritmo *fuzzy* recebe como entradas o erro em posição, a posição de referência e a derivada da posição de referência; a partir daí é feita a fuzificação, que avalia os valores numéricos da entrada na forma dos conjuntos *fuzzy*. A inferência *fuzzy* faz a adequação dos valores fuzificados de acordo com as regras, um ganho é determinado e a defuzificação transforma o valor do ganho no conjunto *fuzzy* em um valor numérico. As variáveis linguísticas foram listadas na tabela 3.2.

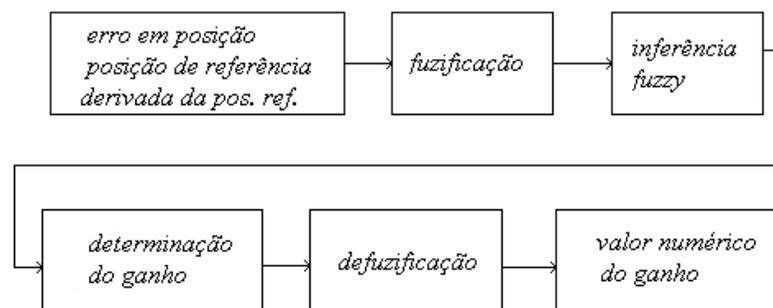


Figura 3.6: Sistema lógico fuzzy.

Tabela 3.2: Variáveis linguísticas

abs(erro)	ganho g (saída fuzzy)
VH \implies muito alto	VH \implies muito alto
H \implies alto	H \implies alto
M \implies médio	M \implies médio
S \implies baixo	S \implies baixo
Z \implies zero	N \implies nominal

As funções de pertinência (inferência) usadas são triangulares conforme mostra a figura 3.7, onde \bar{N} é o ganho nominal. Os valores limites dessas funções estão especificados na tabela 3.3, sendo escolhidos por tentativa e erro, de maneira a produzir respostas estáveis e com bom desempenho, ou seja, diversos resultados experimentais foram feitos enquanto que os limites das funções eram ajustados de maneira que a correção *fuzzy* gerasse respostas com bom compromisso entre estabilidade e desempenho.

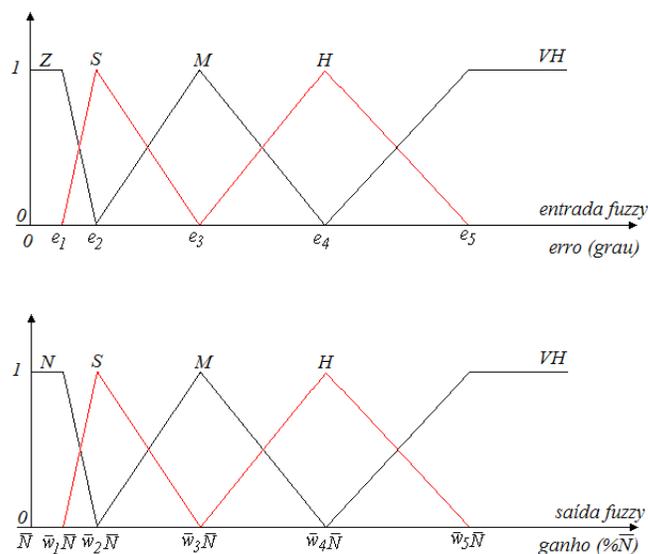


Figura 3.7: Funções de pertinência de entrada e saída.

Tabela 3.3: Valores limite das funções de inferência

e_1	0.05°	\bar{w}_1	1
e_2	0.3°	\bar{w}_2	1.005
e_3	0.5°	\bar{w}_3	1.01
e_4	0.7°	\bar{w}_4	1.015
e_5	1°	\bar{w}_5	1.02

Considere o erro como a diferença entre a posição de referência e a posição angular do eixo de saída do redutor,

$$e(j) = \theta_{ref}(j) - \theta_s(j) \quad (3.2)$$

sendo θ_{ref} uma trajetória de referência suave e sua respectiva derivada, $\dot{\theta}_{ref}$, conforme mostrado na figura 3.8, onde as curvas em azul e vermelho representam as possíveis situações que θ_s pode assumir. Como o torque de atrito é proporcional à velocidade, podem ocorrer duas situações que devem ser consideradas para a obtenção do ganho g , ou seja, a derivada da posição de referência $\dot{\theta}_{ref}$ pode ser positiva ou negativa.

Para $\dot{\theta}_{ref}$ positiva (posição de referência θ_{ref} crescente) e θ_s maior que θ_{ref} significa que a posição angular excede a referência (sobre compensação) e, portanto, deve-se diminuir a compensação, através da diminuição do ganho g . Se θ_s é menor que θ_{ref} o ganho g deve aumentar, ou seja, aumentar a compensação, já que a posição angular não alcança a referência (sub compensação).

Para $\dot{\theta}_{ref}$ negativa (posição de referência θ_{ref} decrescente) e θ_s maior que θ_{ref} significa que a posição angular excede a referência e, portanto, o ganho g deve aumentar. Se θ_s é menor que θ_{ref} o ganho g deve diminuir, ou seja, aumentar a compensação, já que a posição angular não alcança a referência.

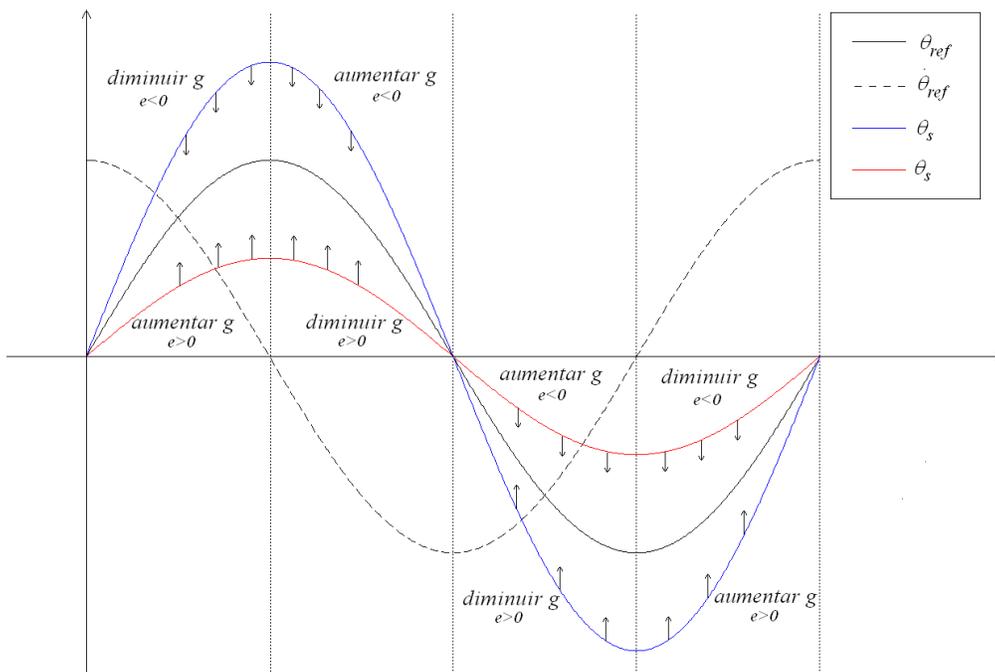


Figura 3.8: Avaliação do comportamento do ganho g .

A tabela 3.4 reúne cada uma das situações e o respectivo comportamento do ganho g , onde $gant$ representa o valor de g calculado no passo de tempo anterior ao atual e $fat = \left| \frac{g - gant}{g} \right|$ é um percentual relativo.

Tabela 3.4: Comportamento do ganho g

Referência θ_{ref}	Erro (e)	Ganho (g)
Crescente ($\dot{\theta}_{ref} > 0$)	Positivo	$g \leftarrow gant(1 + fat);$
	Negativo	$g \leftarrow gant(1 - fat);$
Decrescente ($\dot{\theta}_{ref} < 0$)	Positivo	$g \leftarrow gant(1 - fat);$
	Negativo	$g \leftarrow gant(1 + fat);$

O algoritmo que compõe as regras acima citadas, as quais são aplicadas a cada passo de discretização, pode ser visto na tabela 3.5.

Tabela 3.5: Algoritmo para identificação do ganho *fuzzy*

Algoritmo
<pre> g = 1; if e = Z then g = N; else if e = S then g = S; else if e = M then g = M; else if e = H then g = H; else g = VH; end; end; end; end; gant = g; if e > 0.05, if $\dot{\theta}_{ref} > 0$ and $e > 0$ or ($\dot{\theta}_{ref} < 0$ and $e < 0$) g = (1 + 1 - $\frac{gant}{g}$)gant; end; if $\dot{\theta}_{ref} < 0$ and $e > 0$ or ($\dot{\theta}_{ref} > 0$ and $e < 0$) g = (1 - 1 - $\frac{gant}{g}$)gant; end; end; N = g; </pre>

Para iniciar o processo *fuzzy* é necessário o conhecimento do ganho nominal \bar{N} , o qual pode ser igual a 1.

3.4 Compensador *neuro-fuzzy*

O mecanismo de compensação de atritos *neuro-fuzzy* consiste em escrever o torque de compensação sob a forma

$$T_{comp}(j) = g\hat{T}_{at}(j)$$

onde o ganho g é variável a cada passo de discretização, ou seja, o torque de compensação é determinado pelo produto da saída do algoritmo neural pela saída do algoritmo *fuzzy*.

Assim, o torque motor no instante $j + 1$ tem a forma:

$$T_m(j + 1) = T_c(j + 1) + g\hat{T}_{at}(j)$$

onde $T_c(j + 1)$ é o torque de controle, isto é, o torque efetivamente desejado, a ser aplicado no instante $j + 1$, considerando-se um atuador sem atrito. Como a RNA compensa todo o atrito acrescenta-se a parte linear considerada no modelo nominal para o projeto de controle, $-c_r\dot{\theta}_s$, resultando em

$$T_m(j + 1) = T_c(j + 1) + g\hat{T}_{at}(j) - c_r\dot{\theta}_s. \quad (3.3)$$

3.5 Resultados experimentais *neuro-fuzzy* - caso rígido

Os resultados experimentais apresentados a seguir referem-se ao caso rígido, quando a lâmina é retirada do manipulador, e o torque $T_c(j + 1)$ na equação (3.3) é obtido via controle PD (proporcional e derivativo). As figuras 3.9-3.11 são resultados obtidos sem compensação de atritos, com o compensador neural e com compensador *neuro-fuzzy*, respectivamente.

As entradas do sistema *fuzzy* consistem da posição de referência e sua respectiva velocidade. Considerou-se uma trajetória de referência suave com um perfil de velocidade trapezoidal obtida na forma explicada a seguir. Supõe-se conhecidos o tempo final, t_{final} , uma posição inicial, $\theta_{inicial}$, e uma posição final θ_{final} .

- Se $t \leq \frac{t_{final}}{3}$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{ref} &= a; \\ \dot{\theta}_{ref} &= at; \\ \theta_{ref} &= \theta_{inicial} + \frac{at^2}{2}; \end{aligned}$$

- Se $\frac{t_{final}}{3} < t \leq 2\frac{t_{final}}{3}$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{ref} &= 0; \\ \dot{\theta}_{ref} &= a\frac{t_{final}}{3}; \\ \theta_{ref} &= \theta_{inicial} + a\frac{t_{final}}{3}\left(t - \frac{t_{final}}{6}\right); \end{aligned}$$

- Se $2\frac{t_{final}}{3} < t \leq t_{final}$

$$\ddot{\theta}_{ref} = -a;$$

$$\dot{\theta}_{ref} = a(t_{final} - t);$$

$$\theta_{ref} = \theta_{inicial} + \frac{a}{2}\left(\frac{t_{final}^3}{3} + 2t_{final}t - t^2\right);$$

- Se $t > t_{final}$

$$\ddot{\theta}_{ref} = 0;$$

$$\dot{\theta}_{ref} = 0;$$

$$\theta_{ref} = \theta_{final};$$

onde t representa o tempo, sendo a aceleração dada por $a = \frac{9}{2}\left(\frac{\theta_{final}-\theta_{inicial}}{t_{final}^2}\right)$.

A figura 3.9 mostra um resultado experimental obtido para uma trajetória de referência suave cuja referência final é de dez graus (perfil de velocidade trapezoidal), sem compensação de atritos. O gráfico superior à esquerda mostra a posição de referência (curva em vermelho) e a posição real (curva em preto), o gráfico inferior à esquerda representa o erro entre a posição angular de referência e a posição angular real, o gráfico superior à direita representa a velocidade angular de referência (curva em vermelho) e a velocidade angular real (curva em preto), enquanto que o gráfico inferior à direita representa o torque motor.

Ainda observando-se a figura 3.9, percebe-se a presença de um erro de estado estacionário na posição angular da carga. Esse erro acontece devido à presença do atrito no atuador, ou seja, o torque projetado pela lei de controle é enviado mas sofre os efeitos do atrito interno. Por essa razão, junto ao torque de controle, acrescenta-se um torque que compensa esses atritos, recuperando o desempenho da lei de controle. A seguir, apresenta-se alguns resultados considerando-se o torque de compensação de atritos, obtido por meio da RNA e pelo algoritmo de inferência *fuzzy*.

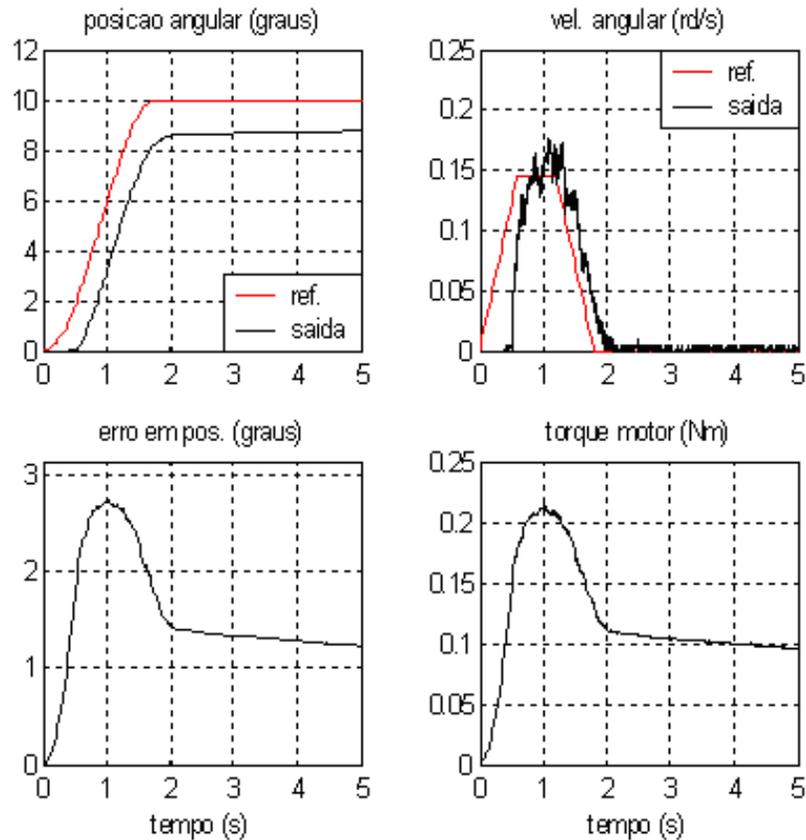


Figura 3.9: Controle PD sem compensação de atritos.

Na tentativa de diminuir o erro de estado estacionário, considerando-se as mesmas posições e velocidades de referência do caso anterior, utilizou-se a compensação de atritos através do compensador neural, figura 3.10, onde percebe-se uma diminuição significativa do erro em posição. Porém, ainda permanece um erro da ordem de 0.1 graus, que ocorre em decorrência da perda de desempenho da rede neural treinada *off-line*. Para diminuir esse erro adotou-se o compensador *neuro-fuzzy*, cujo ganho *fuzzy* atuará na tentativa de diminuir o erro em posição que existe exclusivamente devido às variações no atrito interno ao atuador, razão pela qual o erro foi escolhido como entrada no algoritmo *fuzzy*.

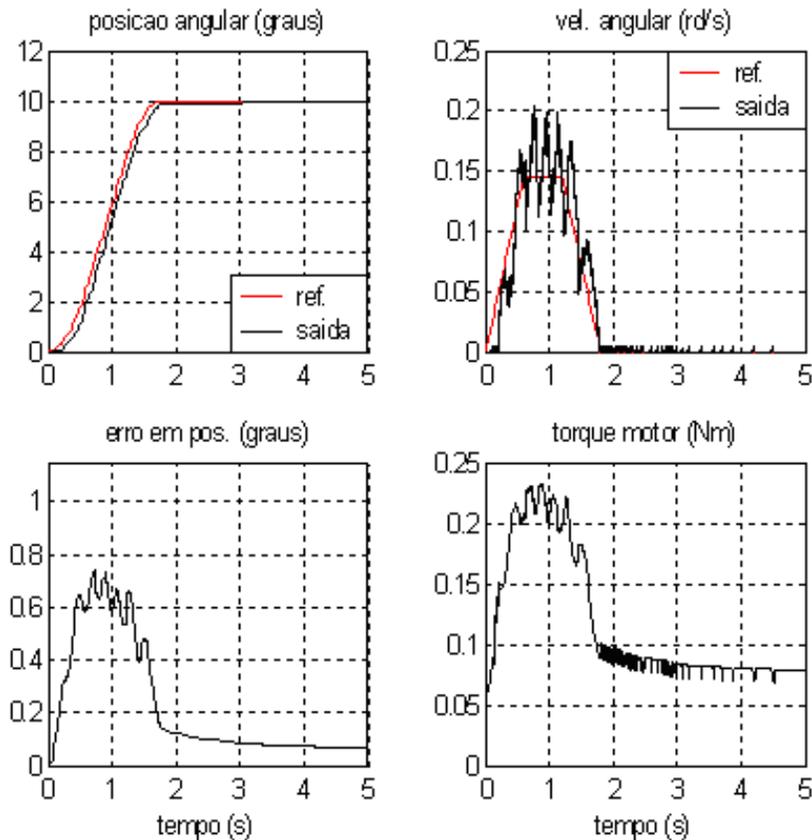


Figura 3.10: Controle PD compensador neural.

A figura 3.11 considera a mesma trajetória de referência aplicando-se, porém, o compensador *neuro-fuzzy*. Observa-se que o compensador *neuro-fuzzy* minimizou o erro em posição a um nível constante e próximo de zero, mostrando que o desempenho da compensação de atritos é recuperado. O ganho *fuzzy* é mostrado no gráfico inferior à esquerda na figura 3.11, que varia de acordo com a necessidade de aumentar ou diminuir o torque de compensação, a fim de que o erro em posição atinja valores mínimos. Supõe-se, inicialmente, o ganho *fuzzy* igual a um. A partir daí o algoritmo *fuzzy* avalia o erro e ajusta *on-line* o ganho, aumentando ou diminuindo, conforme a necessidade da compensação em razão da presença do atrito. À medida que o erro vai diminuindo o ganho *fuzzy* atinge um valor constante.

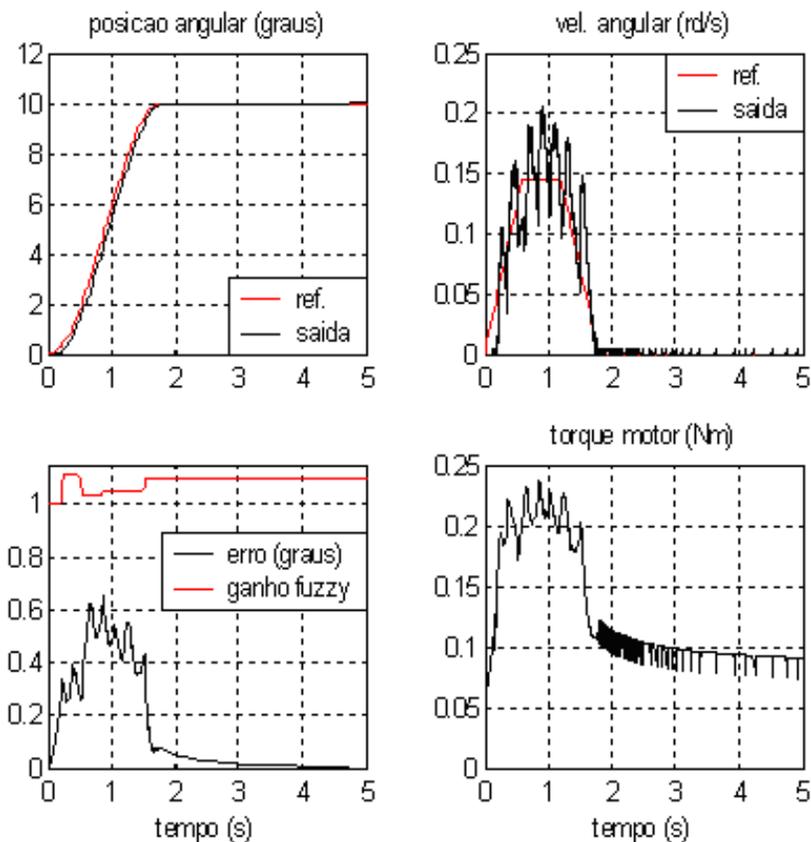


Figura 3.11: Controle PD com compensador *neuro-fuzzy*.

Outras trajetórias de referência foram consideradas nos experimentos. Quanto menor o ângulo final da trajetória de referência, mais difícil será para a lei de controle, pois menores serão os torques e maior é a chance da influência do atrito degradar o desempenho da lei de controle. As figuras 3.12-3.16, analisadas a seguir, mostram o erro em posição para diferentes trajetórias de referência e contêm as abreviações N-F, que representa a utilização do compensador *neuro-fuzzy*, N-sF para utilização do compensador neural e sN-sF para o caso em que nenhuma compensação de atritos é considerada.

A figura 3.12 representa o erro em posição angular, para uma trajetória de referência com posição final igual a um grau. Nesse caso, percebe-se que quando não se considera compensação de atritos, o erro em posição (curva em azul) praticamente coincide com a trajetória dada, ou seja, pode-se dizer que a articulação não fez qualquer movimento, ou ainda, que os torques enviados pela lei estavam quase que integralmente dentro da zona morta em torque. Quando se considera o compensador neural (curva em vermelho) o erro diminui significativamente, mas apenas alcança valores mínimos quando o compensador *neuro-fuzzy* (curva em preto) é considerado.

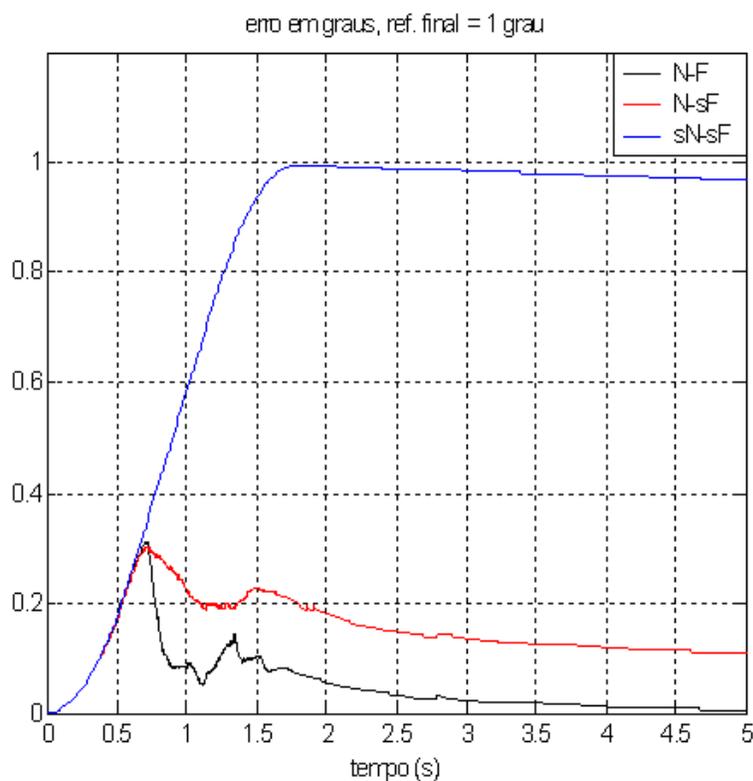


Figura 3.12: Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a um grau.

Quando o ângulo final da trajetória de referência é dois graus, figura 3.13, nota-se que na ausência de compensação de atritos, o erro diminui em relação a posição de referência dada, mas ainda continua grande. O compensador neural diminui o erro (curva em vermelho), mas novamente a melhor situação é alcançada quando utiliza-se o compensador *neuro-fuzzy* (curva em preto). À medida que outras trajetórias são dadas, em três graus, figura 3.14, em cinco graus, figura 3.15 e em vinte graus, figura 3.16, observa-se que o erro tende a diminuir significativamente, conseqüentemente melhorando o desempenho da lei de controle, quando o compensador *neuro-fuzzy* é utilizado.

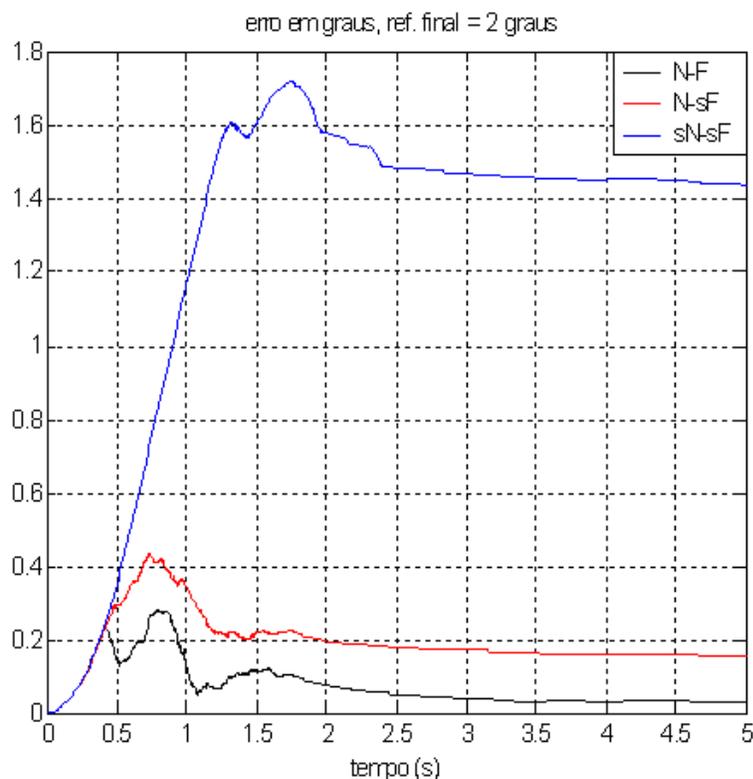


Figura 3.13: Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a dois graus.

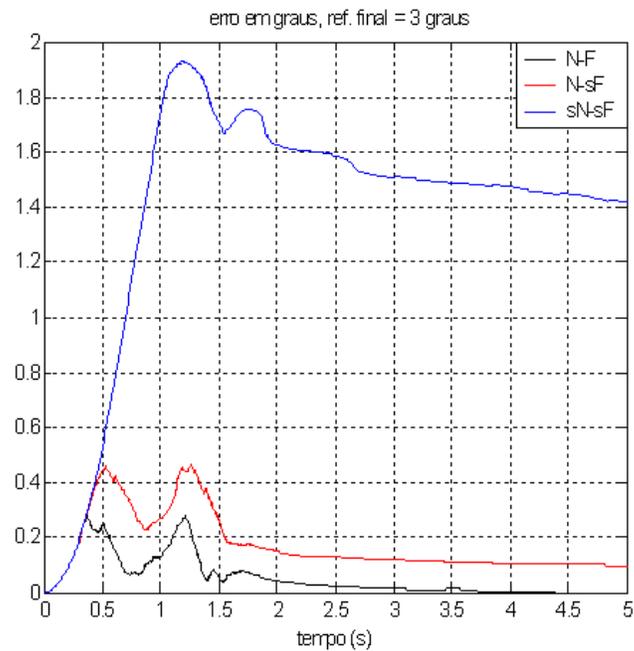


Figura 3.14: Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a três graus.

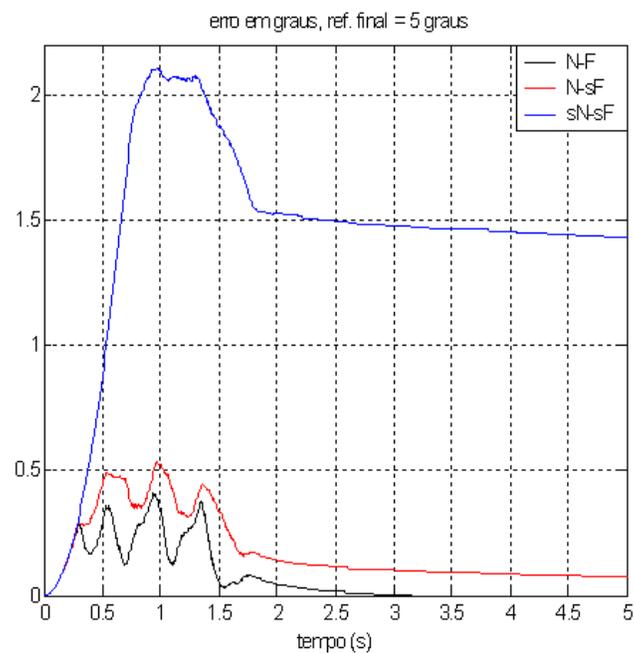


Figura 3.15: Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a cinco graus.

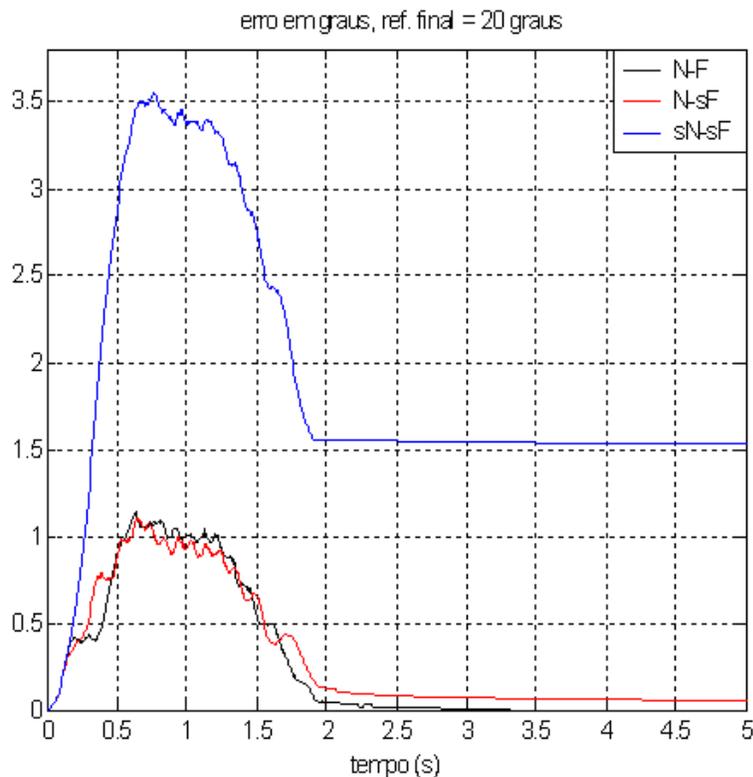


Figura 3.16: Erros em posição angular para uma trajetória de referência com posição final igual a vinte graus.

Nesse capítulo apresentou-se um mecanismo de compensação de atritos baseado na combinação de RNA's e lógica *fuzzy*, que lida automaticamente com as variações do atrito interno ao atuador em um manipulador robótico. Inicialmente, apresentou-se os principais elementos do compensador neural, seguido do algoritmo *fuzzy*. Resultados experimentais relacionados ao caso rígido, que fazem parte da contribuição desta tese, mostraram a eficiência da estratégia proposta, que é capaz de contornar os problemas causados pelos atritos. Em razão do treinamento *off-line* da RNA, esta perde desempenho ao lidar com as variações do atrito no tempo. Porém, observa-se que esse problema passou a ser corrigido *on-line* com a utilização do algoritmo *fuzzy*. Mais ainda, o problema é corrigido via *software*, no próprio torque de controle, evitando a necessidade de melhorar mecanicamente o equipa-

mento (atuador), o que não seria um tarefa fácil. Na seqüência do trabalho será abordado o problema de controle de vibrações estruturais, a partir de estratégias de controle que servirão de base para a elaboração das leis de controle.

4 TÉCNICAS DE CONTROLE

Este capítulo aborda, resumidamente, as estratégias de controle utilizadas para atenuar as vibrações estruturais do manipulador flexível, abordadas no âmbito do presente trabalho. Inicialmente são apresentados os elementos básicos de controle, seguido das estratégias de controle alocação de pólos, LQG/LTR e síntese \mathcal{H}_∞ .

4.1 Elementos básicos do controlador

Considere o sistema dinâmico escrito na seguinte forma de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ representa o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ é o controle aplicado no sistema e A e B são matrizes obtidas do modelo dinâmico (simples-entrada/simples-saída ou multi-entrada/multi-saída). Suponha que o par (A, B) é controlável.

Com o intuito de atenuar de forma ativa as vibrações estruturais, faz-se necessário utilizar uma lei de controle envolvendo todas as variáveis do sistema ao se fazer a realimentação. Desta forma obtém-se

$$u = -K_r x \quad (4.2)$$

onde K_r , vetor a ser determinado, é chamado vetor de ganhos da realimentação do estado. Substituindo a equação (4.2) na equação (4.1) obtém-se o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (A - BK_r)x \quad (4.3)$$

onde a matriz $A - BK_r$ é a matriz da dinâmica do sistema em malha fechada.

No domínio da frequência tem-se

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A)^{-1}Bu(s), \\ u(s) &= -K_r x(s). \end{aligned}$$

A hipótese de controlabilidade (ver apêndice A) é feita para tornar possível a obtenção de uma matriz K_r tal que os autovalores de $(A - BK_r)$ possam ser alocados em posições desejadas.

Como o sistema (4.3) possui solução do tipo

$$x(t) = e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} t} x(t_0)$$

onde λ_i são os autovalores de $A - BK_r$, a estabilidade desse sistema passa a ser determinada pelos sinais das partes reais de seus autovalores $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. É necessário determinar o valor do vetor de ganhos K_r que fornece apenas autovalores no semi-plano esquerdo (SPE) aberto, ou seja, com parte real negativa, a fim de que a estabilidade seja mantida. Essa alocação de pólos deve satisfazer ainda às especificações do projeto de controle. Os pólos do regulador são, portanto, os autovalores da matriz $A - BK_r$.

Na prática, supor que todas as componentes do estado estão disponíveis para realimentação nem sempre é uma hipótese realista pois requer o uso de muitos sensores, o que nem sempre é viável, impondo a necessidade de se projetar um estimador de estado. Tal estimador deve ser capaz de reconstruir o estado a partir das componentes observadas (conhecidas).

Supondo que não seja possível medir todas as componentes, aquelas que podem ser medidas podem ser escritas na forma de um vetor

$$y = Cx \tag{4.4}$$

onde C é chamada matriz de observação sendo o par (A, C) suposto observável (ver apêndice A). Considerando o estado estimado denotado por \hat{x} , a lei de controle assume a seguinte forma

$$u = -K_r \hat{x}. \tag{4.5}$$

O estado é estimado utilizando o próprio modelo dinâmico nominal do sistema, a partir da solução da seguinte equação diferencial

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \quad (4.6)$$

onde K_f é a matriz de ganhos do filtro, sendo a mesma escolhida de forma a obter um erro característico satisfatório, o qual é dado por

$$e = x - \hat{x}.$$

A dinâmica do erro pode ser obtida subtraindo-se as equações (4.1) e (4.6), o que resulta em

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K_f(y - C\hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - K_f(y - C\hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - K_fC(x - \hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= (A - K_fC)(x - \hat{x}) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\dot{e} = (A - K_fC)e. \quad (4.7)$$

Os pólos do filtro são, portanto, os autovalores da matriz $A - K_fC$. Se todos os autovalores de $A - K_fC$ pertencem ao semi-plano esquerdo aberto, \hat{x} tende assintoticamente a x quando t tende ao infinito, o que é garantido pela observabilidade do par (A, C) .

Substituindo as equações (4.5) em (4.6) resulta

$$\dot{\hat{x}} = [A - BK_r - K_fC]\hat{x} + K_fy \quad (4.8)$$

onde $[A - BK_r - K_fC]$ é a matriz da dinâmica em malha fechada.

Assim, a função de transferência do controlador, $K(s)$, que relaciona u e y é dada por

$$K(s) = K_r(sI - A + BK_r + K_fC)^{-1}K_f. \quad (4.9)$$

Considerando-se um estado ampliado a partir das equações (4.1), (4.4), (4.5) e (4.8) tem-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK_r \\ K_f C & A - BK_r - K_f C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é a equação da dinâmica com o estimador de estado. A propriedade da separação [51] garante que os projetos do regulador e do filtro podem ser feitos separadamente.

4.2 Controle por alocação de pólos

No controle por alocação de pólos o vetor de ganhos K_r é determinado a partir do conhecimento prévio dos pólos da dinâmica em malha fechada. Nesse caso o projetista estabelece os pólos da matriz $A - BK_r$ nas posições desejadas e obtém o vetor de ganhos K_r que satisfaz tal condição.

Existe um procedimento, chamado fórmula de Ackermann, que determina o vetor de ganhos K_r conhecidos os pólos do sistema em malha fechada. De acordo com Franklin [32], a fórmula de Ackermann é escrita na forma

$$K_r = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \phi(A) \quad (4.11)$$

onde $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^n B \end{bmatrix}$ é a matriz de controlabilidade e

$$\phi(A) = A^{n+1} + \alpha_1 A^n + \dots + \alpha_{n+1} I$$

sendo α_i os coeficientes do polinômio característico $\phi(s) = \det(sI - (A - BK_r))$ (pólos do regulador supostos conhecidos).

O projeto do filtro consiste em determinar o vetor K_f conhecidos os autovalores da matriz $A - K_f C$. De forma semelhante à obtenção dos ganhos do regulador, o vetor K_f pode ser obtido pela fórmula de Akermann [32] como

$$K_f = \phi_e(A) \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

onde $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^n \end{bmatrix}$ é a matriz de observabilidade e

$$\phi_e(A) = A^{n+1} + \kappa_1 A^n + \dots + \kappa_{n+1} I$$

sendo κ_i os coeficientes do polinômio característico $\phi_e(s) = \det(sI - (A - K_f C))$ (pólos do filtro supostos conhecidos). Portanto, a equação (4.12) pode ser usada para calcular o vetor de ganhos do estimador.

4.2.1 Fórmula de Ackermann

A seguir apresenta-se a dedução da fórmula de Ackermann descrita pela equação 4.11 [32] [64]. A partir desse procedimento foi feito o projeto de um controlador alocando os pólos em malha fechada, que será apresentado no capítulo 5. Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde a lei de controle por realimentação de estado tem a forma $u = -K_r x$. Suponha que o estado é completamente controlável e que os pólos desejados em malha fechada estejam em $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_{n+1}$.

O sistema em malha fechada é escrito na forma

$$\dot{x} = (A - BK_r)x \tag{4.13}$$

onde a matriz em malha fechada do sistema é definida por $\tilde{A} = A - BK_r$.

A equação característica desejada é:

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK_r) &= \det(\tilde{A}) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_{n+1}) = 0 \\ &= s^{n+1} + \alpha_1 s^n + \dots + \alpha_n s + \alpha_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton, onde \tilde{A} satisfaz sua própria equação característica, tem-se:

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^{n+1} + \alpha_1 \tilde{A}^n + \dots + \alpha_n \tilde{A} + \alpha_{n+1} I = 0. \tag{4.14}$$

Para simplificar o procedimento considera-se, por exemplo $n = 2$, sabendo que o procedimento pode ser estendido para qualquer outro n inteiro e positivo.

Considere as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} I &= I \\ \tilde{A} &= A - BK_r \\ \tilde{A}^2 &= (A - BK_r)^2 = A^2 - ABK_r - BK_r\tilde{A} \\ \tilde{A}^3 &= (A - BK_r)^3 = A^3 - A^2BK_r - ABK_r\tilde{A} - BK_r\tilde{A}^2 \end{aligned}$$

Multiplicando-se as equações precedentes na mesma ordem, respectivamente por α_3 , α_2 , α_1 e α_0 (onde $\alpha_0 = 1$), e somando-se os resultados, obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 &= \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2 (A - BK_r) + \alpha_1 (A^2 - ABK_r - BK_r\tilde{A}) + A^3 - A^2BK_r \\ &\quad - ABK_r\tilde{A} - BK_r\tilde{A}^2 \tag{4.15} \\ &= \alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 - \alpha_2 BK_r - \alpha_1 ABK_r - \alpha_1 BK_r\tilde{A} - A^2BK_r \\ &\quad - ABK_r\tilde{A} - BK_r\tilde{A}^2 \end{aligned}$$

Da equação (4.14) tem-se:

$$\alpha_3 I + \alpha_2 \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \phi(\tilde{A}) = 0.$$

Tem-se também que:

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3 = \phi(A) \neq 0. \tag{4.16}$$

A partir das equações (4.15) e (4.16), tem-se:

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_2 BK_r - \alpha_1 BK_r\tilde{A} - BK_r\tilde{A}^2 - \alpha_1 ABK_r - ABK_r\tilde{A} - A^2BK_r.$$

Como $\phi(\tilde{A}) = 0$, obtém-se:

$$\phi(A) = B(\alpha_2 K_r + \alpha_1 K_r\tilde{A} + K_r\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K_r + K_r\tilde{A}) + A^2BK_r$$

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 K_r + \alpha_1 K_r \tilde{A} + K_r \tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K_r + K_r \tilde{A} \\ K_r \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Como o sistema é de estado completamente controlável, a inversa da matriz de controlabilidade, $\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}^{-1}$, existe. Da equação (4.17) resulta

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}^{-1} \phi(A) = \begin{pmatrix} \alpha_2 K_r + \alpha_1 K_r \tilde{A} + K_r \tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K_r + K_r \tilde{A} \\ K_r \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}^{-1} \phi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 K_r + \alpha_1 K_r \tilde{A} + K_r \tilde{A}^2 \\ \alpha_1 K_r + K_r \tilde{A} \\ K_r \end{pmatrix} = K_r,$$

ou ainda

$$K_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}^{-1} \phi(A). \quad (4.18)$$

A equação (4.18) fornece a matriz de ganhos K_r de realimentação de estado. Para um inteiro n arbitrário e positivo, tem-se:

$$K_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}^{-1} \phi(A) \quad (4.19)$$

onde $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^n B \end{pmatrix}$ é a matriz de controlabilidade de ordem $n + 1$. A determinação dos ganhos do observador é deduzida de forma análoga ao caso anteriormente descrito.

4.3 Controle LQG/LTR

No final dos anos 60 e início dos anos 70 foi introduzido o controle LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) [11] [51]. Posteriormente, verificou-se que o regulador LQ (*Linear Quadratic*) continha características de robustez interessantes, ao contrário do regulador LQG, o qual se mostrou pouco robusto, sobretudo com respeito a diferenças entre o modelo nominal e a planta física.

Numa tentativa de recuperar as características de robustez do controle LQ, Doyle e Stein introduziram o controle LQG/LTR (*Linear Quadratic Gaussian / Loop Transfer Recovery*) [25] [26] [27] [75]. Esta técnica de controle utiliza a própria estrutura LQG, mas tenta recuperar características de robustez do controle LQ, conforme será visto a seguir.

4.3.1 Controle LQ

Na forma de estado, a equação diferencial representando a dinâmica do sistema, conforme definido no capítulo 2, é escrita como segue:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.20)$$

e o vetor de observação

$$y = Cx. \quad (4.21)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$.

As equações (4.20) e (4.21) representam o sistema nominal sem erros (determinístico). Assumindo-se que todo o estado pode ser observado (realimentação direta do estado), o controle $u(t)$ é definido sob a forma

$$u = -K_r x \quad (4.22)$$

onde K_r é o vetor de ganhos do regulador.

No caso do controle ótimo linear quadrático (LQ), os ganhos do regulador (vetor K_r) são obtidos a partir da minimização do seguinte funcional [51]:

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (4.23)$$

onde Q e R são matrizes de ponderação, sendo que:

$$Q = Q^T \geq 0$$

e

$$R = R^T > 0.$$

Sua solução é dada por [51]

$$K_r = R^{-1}B^T S$$

sendo S simétrica definida, positiva, obtida a partir da solução da equação algébrica de Riccati

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0. \quad (4.24)$$

4.3.2 Controle LQG

No caso do controle LQG, considere o sistema dinâmico representado pelas seguintes equações

$$\dot{x} = Ax + Bu + w_d, \quad (4.25)$$

$$y = Cx + w_n, \quad (4.26)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$, $w_d(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ e $w_n(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$, sendo que w_d e w_n são ruídos de estado e de medida, respectivamente, de forma que

$$E\{w_d\} = 0, \quad E\{w_d w_d^T\} = W_d \delta(t - \tau),$$

$$E\{w_n\} = 0, \quad E\{w_n w_n^T\} = W_n \delta(t - \tau),$$

e

$$E\{w_d w_n^T\} = 0, \quad E\{w_n w_d^T\} = 0$$

onde E é o operador esperança, $\delta(t - \tau)$ é uma função delta de Dirac, $W_d = W_d^T > 0$ é a matriz de intensidade (densidade espectral) do ruído no estado, $W_n = W_n^T > 0$ é a matriz de intensidade (densidade espectral) do ruído na medida. Estes ruídos são, portanto, não correlacionados, brancos, Gaussianos e de média nula. O par (A, C) é suposto observável.

O problema de controle LQG consiste em encontrar o controle ótimo u o qual minimiza o critério quadrático

$$J_{LQG} = E\left\{\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon [x^T Q x + u^T R u] dt\right\} \quad (4.27)$$

onde Q e R são matrizes de ponderação, sendo que:

$$Q = Q^T \geq 0$$

e

$$R = R^T > 0.$$

O estado estimado \hat{x} é obtido a partir da equação (4.6), sendo K_f a matriz com os ganhos do filtro de Kalman, obtida a partir da minimização do erro quadrático $\sum_{i=1}^n E\{[x_i(t) - \hat{x}_i(t)]^2\}$, resultando em [11] [59]:

$$K_f = PC^T C^{-1} W_n \quad (4.28)$$

onde P é obtido a partir da solução da equação algébrica de Riccati:

$$PA^T + AP - PC^T W_d^{-1} CP + W_d = 0. \quad (4.29)$$

Um diagrama de blocos do controle LQG é visto na figura 4.1. Analogamente ao mostrado na secção anterior, os autovalores de $A - K_f C$ são os autovalores do filtro e os autovalores de $A - BK_r$ são os autovalores do regulador.

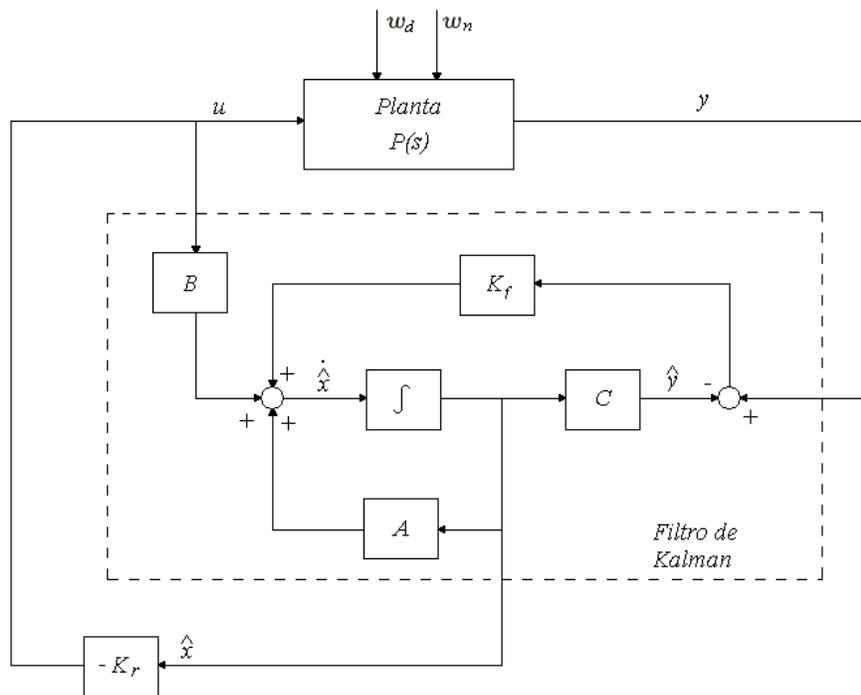


Figura 4.1: Diagrama de blocos do controle ótimo LQG.

4.3.3 Procedimento de recuperação LTR

Suponha que a planta tem zeros de transmissão apenas no semiplano esquerdo aberto, que $K(s)$ é a função de transferência do controlador e $P(s)$ a função de transferência da planta. Dois procedimentos (duais) de recuperação podem ser considerados. Um associado a função $P(s)K(s)$, equivalente a abertura de malha na saída da planta (ponto 2 na figura 4.2) e outro associado a função $K(s)P(s)$, equivalente a abertura de malha na entrada da planta (ponto 1 na figura 4.2). No caso de abertura de malha na entrada da planta, supõe-se fixada a matriz K_r

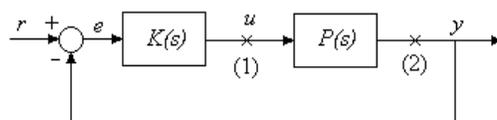


Figura 4.2: Diagrama de blocos com aberturas de malha.

enquanto K_f é ajustável. No caso de abertura de malha na saída da planta, supõe-se a matriz K_f fixada, enquanto K_r é ajustável.

Considerando-se a malha aberta na saída da planta, a seguir são enunciados alguns lemas utilizados na demonstração do resultado fundamental referente ao processo de recuperação.

Lema 4.1. [20] *Se os zeros de transmissão da matriz de funções de transferência $C(sI - A)^{-1}B$ pertencem ao SPE, então*

$$\lim_{\bar{\rho} \rightarrow 0^+} \sqrt{\bar{\rho}} K_r = WC$$

onde W é uma matriz ortogonal.

Lema 4.2. [47] *Dadas as matrizes A , B , C e D vale:*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

supondo que as dimensões das matrizes são compatíveis e as inversas indicadas existem.

Lema 4.3. [20] Vale a seguinte igualdade :

$$\bar{\phi}(s) = \phi(s) - \phi(s)K_f[I + C\phi(s)K_f]^{-1}C\phi(s)$$

onde

$$\begin{aligned}\phi(s) &= (sI - A)^{-1} \\ \bar{\phi}(s) &= (sI - A + K_fC)^{-1}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Teorema 4.1. Teorema Fundamental LTR [26]

Se:

- i. (A, B) é controlável e (A, C) é observável;
- ii. $P(s)$ é quadrada;
- iii. os zeros de transmissão de $P(s)$ se localizam no SPE aberto;
- iv. a matriz de ganhos K_r é calculada como

$$K_r = \frac{1}{\tilde{\rho}} B^T \bar{X},$$

onde $\tilde{\rho} > 0$ e

$$0 = -\bar{X}A - A^T\bar{X} - C^TC + \frac{1}{\tilde{\rho}}\bar{X}BB^T\bar{X},$$

então

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0} K(s) = [C(sI - A)^{-1}B]^{-1}C(sI - A)^{-1}K_f.$$

Demonstração: Das equações (4.9) e (4.30) tem-se

$$K(s) = K_r[\bar{\phi}^{-1} + BK_r]^{-1}K_f.$$

Fazendo-se as seguintes correspondências:

$${}^{\prime\prime}A{}^{\prime\prime} \leftarrow \bar{\phi}^{-1}(s) \quad {}^{\prime\prime}B{}^{\prime\prime} \leftarrow B \quad {}^{\prime\prime}C{}^{\prime\prime} \leftarrow I \quad {}^{\prime\prime}D{}^{\prime\prime} \leftarrow K_r$$

e aplicando-se o lema de inversão de matrizes 4.2

$$(\bar{\phi}^{-1} + BK_r)^{-1} = \bar{\phi} - \bar{\phi}B(I + K_r\bar{\phi}B)^{-1}K_c\bar{\phi}$$

obté-m-se

$$K(s) = K_r\{\bar{\phi}(s) - \bar{\phi}(s)B[I + K_r\bar{\phi}(s)B]^{-1}K_r\bar{\phi}(s)\}K_f$$

de onde resulta

$$K(s) = \{I - K_r\bar{\phi}(s)B[I + K_r\bar{\phi}(s)B]^{-1}\}K_r\bar{\phi}(s)K_f$$

ou ainda,

$$K(s) = [I + K_r\bar{\phi}(s)B]^{-1}K_r\bar{\phi}(s)K_f$$

que é o mesmo que

$$K(s) = [\sqrt{\tilde{\rho}}I + \sqrt{\tilde{\rho}}K_r\bar{\phi}(s)B]^{-1}\sqrt{\tilde{\rho}}K_r\bar{\phi}(s)K_f.$$

Tomando-se o limite para $\tilde{\rho} \rightarrow 0^+$ e considerando-se o lema 4.1,

obté-m-se

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0^+} K(s) = [C\bar{\phi}(s)B]^{-1}C\bar{\phi}(s)K_f$$

Usando-se o lema 4.3, tem-se:

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0^+} K(s) = \{C\phi(s)B - C\phi(s)K_f[I + C\phi(s)K_f]^{-1}C\phi(s)B\}^{-1}C\bar{\phi}(s)K_f$$

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0^+} K(s) = \{[I - C\phi(s)K_f(I + C\phi(s)K_f)^{-1}]C\phi(s)B\}^{-1}C\bar{\phi}(s)K_f$$

de onde resulta

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0^+} K(s) = [C\phi(s)B]^{-1}(I + C\phi(s)K_f)C\bar{\phi}(s)K_f$$

Aplicando-se novamente o lema 4.3 tem-se:

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0^+} K(s) = [C\phi(s)B]^{-1}[I + C\phi(s)K_f]C[\phi(s) - \phi(s)K_f(I + C\phi(s)K_f)^{-1}C\phi(s)]K_f$$

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0^+} K(s) = [C\phi(s)B]^{-1}[I + C\phi(s)K_f][I - C\phi(s)K_f(I + C\phi(s)K_f)^{-1}]C\phi(s)K_f$$

e, considerando-se que

$$I - C\phi(s)K_f[I + C\phi(s)K_f]^{-1} = [I + C\phi(s)K_f]^{-1}$$

então

$$\lim_{\tilde{\rho} \rightarrow 0^+} K(s) = [C\phi(s)B]^{-1}C\phi(s)K_f,$$

de onde resulta a prova do teorema.

A hipótese inicial de que os zeros de transmissão estão no SPE aberto serve para garantir que possíveis cancelamentos de pólos e zeros ocorram somente neste semi-plano, já que o processo de recuperação funciona como se o controlador invertesse a planta. Em outras palavras, ao aproximar $\tilde{\rho}$ de zero, a função de transferência de malha direta $P(s)K(s)$ tende à função de transferência do filtro $C\Phi(s)K_f$; esta característica fundamental é conhecida como processo de recuperação da malha objetivo, conforme as figuras 4.3 e 4.4.

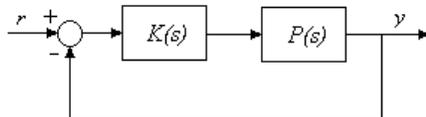


Figura 4.3: Diagrama de blocos do compensador.

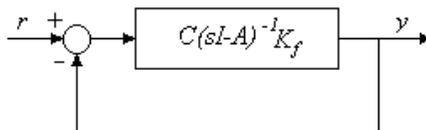


Figura 4.4: Diagrama de blocos do compensador, após o processo de recuperação, no limite quando $\tilde{\rho} \rightarrow 0$.

Assim, no caso de considerar-se a abertura de malha na saída da planta, o problema de projeto se resume a:

- Escolher a matriz K_f de maneira a garantir boas condições de estabilidade e desempenho;

- Aplicar o procedimento de recuperação LTR e obter a matriz K_r para $\tilde{\rho}$ suficientemente pequeno.

4.4 Síntese \mathcal{H}_∞

Considere o sistema descrito pelo diagrama de blocos na figura 4.5, onde $G(s)$, função de transferência da planta aumentada, e $K(s)$, função de transferência do compensador, são funções próprias e racionais e $K(s)$ estabiliza internamente o sistema. Na seqüência apresenta-se o procedimento de obtenção da função de transferência da planta aumentada $G(s)$.

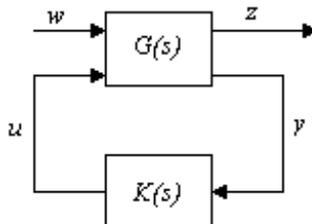


Figura 4.5: Diagrama de blocos padrão.

O vetor $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ representa um vetor de sinais de entrada; $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ é o vetor de sinais produzidos pelo controlador $K(s)$; $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ é o vetor de saída da planta aumentada e $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ é o vetor de sinais medidos pelos sensores, enquanto que o estado do sistema $x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

O problema de controle consiste então em encontrar uma lei de controle estabilizante

$$u(s) = K(s)y(s) \quad (4.31)$$

tal que a norma \mathcal{H}_∞ (ver apêndice A) da matriz de transferência de w para z seja minimizada.

A planta aumentada $G(s)$ pode ser escrita na forma

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

ou

$$G(s) = G_{21}(sI - G_{11})^{-1}G_{12} + G_{22},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \tag{4.32}$$

onde $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Desta forma, tem-se

$$G_{ij} = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij},$$

onde

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

$s = j\omega$ sendo que ω representa a frequência.

Considerando as equações (4.31) e (4.33) pode-se obter a função de transferência de w para z , T_{zw} , também chamada de transformação fracional linear (LFT) inferior de G em função de K ,

$$T_{zw} = F_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \tag{4.34}$$

Portanto, o problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ consiste na minimização de $\|F_l(G, K)\|_\infty$ no espaço de todos os controladores $K(s)$ que estabilizam o sistema. No caso em que $\|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$, para $\gamma > 0$, dizemos que o controlador $K(s)$ é sub-ótimo.

Supondo válidas as seguintes condições:

- (A, B_2) é estabilizável e (C_2, A) é detectável;

- $D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ e $D_{21} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$ tem posto de coluna completo $\forall \omega$;
- $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$ tem posto de linha completo $\forall \omega$;

a solução do referido problema de controle envolve a resolução de duas equações algébricas de Riccati ([24] e [91]), cada uma de mesma ordem da planta aumentada G . A função "*hinf.m*" do MATLAB implementa uma solução para esse problema.

Considerando-se o problema de controle de vibrações estruturais abordado neste trabalho, para obtenção de uma dada planta aumentada, supõe-se a formulação apresentada na figura 4.6, levando-se em conta que o modelo é aproximado por três articulações fictícias.

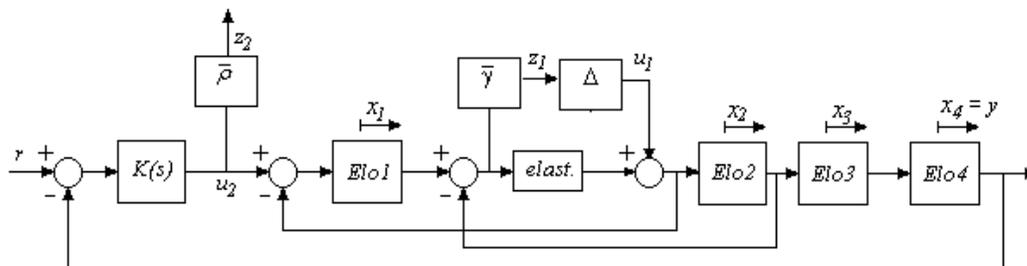


Figura 4.6: Diagrama de blocos da planta aumentada, incerteza na primeira constante elástica.

A planta aumentada é escrita na forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2 \\
 z &= C_1 x + D_{11} u_1 + D_{12} u_2 \\
 y &= C_2 x + D_{21} u_1 + D_{22} u_2
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde x representa o estado do sistema (posições e velocidades),

$$A = \begin{pmatrix} [0]_{4 \times 4} & [I]_{4 \times 4} \\ -[\tilde{I}]^{-1}[\tilde{K}] & -[\tilde{I}]^{-1}[\tilde{C}] \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \begin{pmatrix} [0]_{4 \times 1} \\ +[\tilde{I}]^{-1}[-1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} [0]_{4 \times 1} \\ +[\tilde{I}]^{-1}[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{pmatrix}, \\
z &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}^T, \\
C_1 &= \bar{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & D_{11} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & D_{12} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \end{pmatrix}, \\
C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & D_{21} &= 0 & e & D_{22} = 0.
\end{aligned}$$

O termo $\bar{\rho}$ representa uma penalização no sinal de controle, $\bar{\gamma}$ uma penalização na constante elástica e Δ o nível de incerteza ($\|\Delta\|_\infty \leq 1$).

O objetivo do projeto consiste na tentativa de encontrar um controlador que:

- i. Estabilize o sistema, admitindo uma variação em determinado parâmetro físico do modelo (nesse caso, uma das constantes elásticas);
- ii. Atenue as vibrações em um tempo máximo especificado;
- iii. Mantenha o torque de controle entre limites pré-estabelecidos.

Assim, o problema de controle consiste em obter-se

$$\left\| \begin{array}{l} \bar{\gamma} T_{z_1 u_1} \\ \bar{\rho} T_{z_2 u_2} \end{array} \right\| < 1. \quad (4.36)$$

Neste capítulo apresentou-se as considerações básicas sobre as estratégias de controle utilizadas para elaborar leis de controle para atenuar as vibrações estruturais do manipulador flexível. São elas: alocação de pólos, LQG/LTR e síntese \mathcal{H}_∞ . No próximo capítulo são mostrados os resultados de simulações e experimentais dos projetos de controle elaborados onde se observa o bom desempenho de cada um dos controladores.

5 PROJETO DE CONTROLADORES

Neste capítulo são apresentados os resultados de simulações de projetos de controladores com as técnicas alocação de pólos e LQG/LTR. Além disso, apresenta-se resultados experimentais combinando um mecanismo de compensação de atritos com um controlador H_∞ , referentes ao controle de vibrações no manipulador flexível, que representam uma das principais contribuições deste trabalho

5.1 Projeto por alocação de pólos

A partir do modelo dinâmico estrutural apresentado no capítulo 2, elaborou-se um projeto de controle usando a estratégia de controle por alocação de pólos. Os pólos em malha fechada foram impostos a partir dos pólos em malha aberta, conforme pode ser observado na tabela 5.1. Observa-se que os pólos em malha fechada foram obtidos multiplicando-se a parte real dos pólos em malha aberta por 8, por 4 e por 2, a partir do modo de mais alta freqüência. A parte imaginária foi multiplicada por 1.1 e o modo rígido foi colocado em $-3 \pm 0.35i$. O objetivo consiste em se obter um projeto cuja curva resposta em freqüência (diagrama de Bode) da função ganho de malha tenha um decaimento abaixo de $0dB$ em uma freqüência de aproximadamente o dobro da mais baixa freqüência do sistema em malha aberta, ou seja, próximo de $40rd/s$. Essa escolha permite que o projeto obtido apresente boas características de desempenho ao mesmo tempo que a estabilidade é mantida. A curva resposta em freqüência do ganho de malha $|PK|$ pode ser visualizada na figura 5.1.

Tabela 5.1: Pólos da planta $[\lambda_i(A)]$ e do regulador $[\lambda_i(A - BK_r)]$

Sistema	Pólos
Planta Nominal	$-1, 5231 \pm 250, 1678i; -1, 3618 \pm 77, 6171i; -6, 9565 \pm 20, 7061i; -5, 6703; 0, 0000$
Regulador	$-12, 1852 \pm 275, 1846i; -5, 4471 \pm 85, 3788i; -13, 913 \pm 22, 7767i; -3 \pm 0, 35i$

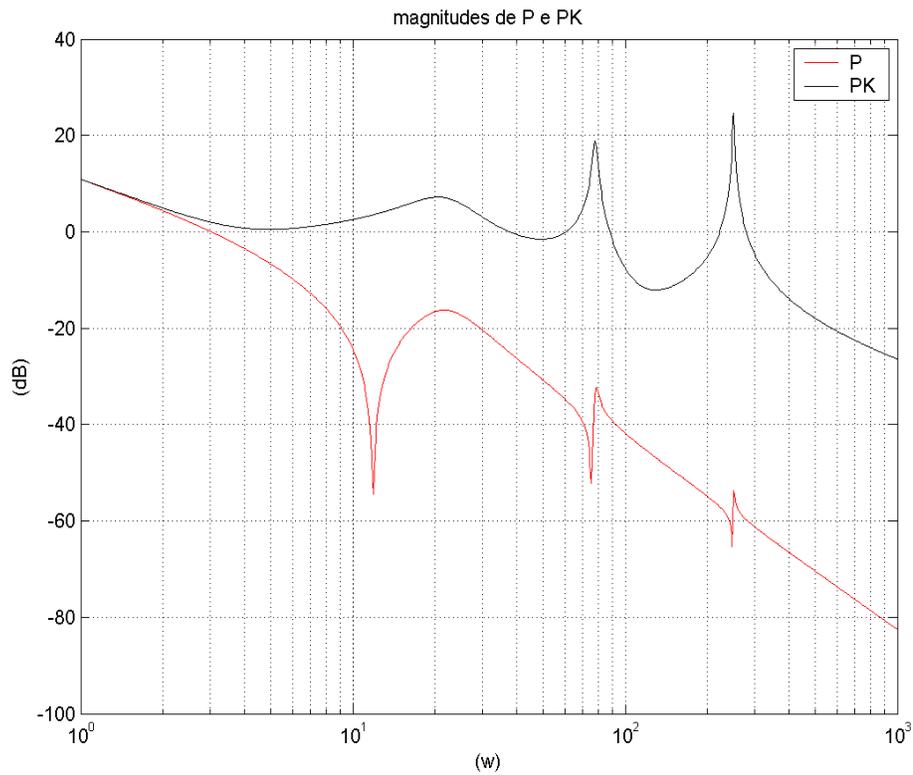


Figura 5.1: Diagrama de Bode da função ganho de malha.

A seguir são mostrados resultados de simulação em malha aberta (curva em azul) e em malha fechada (curva em preto) aplicando-se a lei de controle projetada por alocação de pólos, figuras 5.2 e 5.3. Inicialmente é feita uma ativação em malha aberta, aplicando-se um torque de $-0.704Nm$ nos primeiros 0.2 segundos, $+0.704Nm$ nos 0.2 segundos seguintes e logo em seguida passando a atuar o torque projetado pela lei de controle. É admitido um torque de controle máximo de $1.74Nm$ e um torque de controle mínimo de $-1.74Nm$, garantindo níveis de energia necessários dentro da realidade física para o tipo de atuador considerado neste trabalho. Durante todo o trabalho é considerada tal saturação.

A figura 5.2 é resultado de uma simulação com a aplicação da lei de controle, considerando-se que o atrito é linear, ou seja, c_r é constante na matriz de atritos $[\tilde{C}]$. Observa-se a atenuação das vibrações na posição e velocidade da carga assim como na velocidade angular do rotor em relação a simulação em malha aberta (curva em azul). Nota-se que a atenuação ocorre depois de aproximadamente 0.4

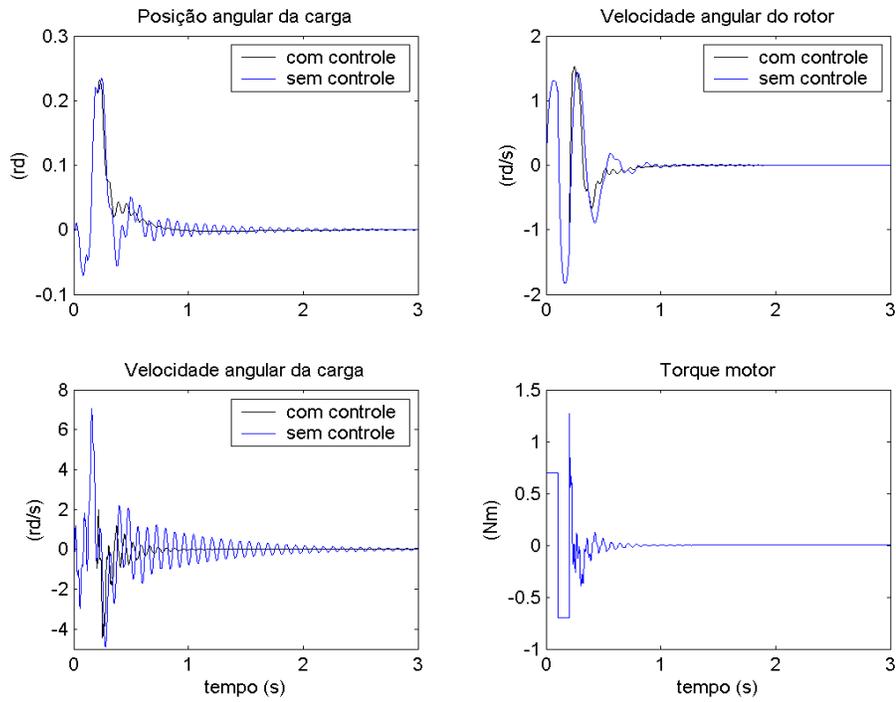


Figura 5.2: Simulação com o projeto por alocação de pólos, atrito linear.

segundos de simulação, e não antes disso, visto que é nesse instante que a lei de controle começa a atuar, conforme pode ser visto pelo comportamento do torque motor.

A figura 5.3 é resultado de uma simulação com o projeto de controle e ativação inicial utilizados na simulação mostrada na figura 5.2. A diferença fundamental agora é a utilização de um modelo não linear para o atrito, conforme abordado no capítulo 3. Esta situação surge quando é feita a implementação experimental da lei controle. Observa-se, visivelmente, os efeitos da zona morta em torque, visto que a lei de controle não é capaz de atenuar as vibrações como no caso do modelo em que o atrito era considerado linear. A posição e velocidade da carga não se estabilizam em um nível constante, assim como o torque motor. Para contornar esse problema é necessário o uso de mecanismos de compensação de atritos, visto que na prática a lei de controle, sob essas condições, não atenuaria as vibrações.

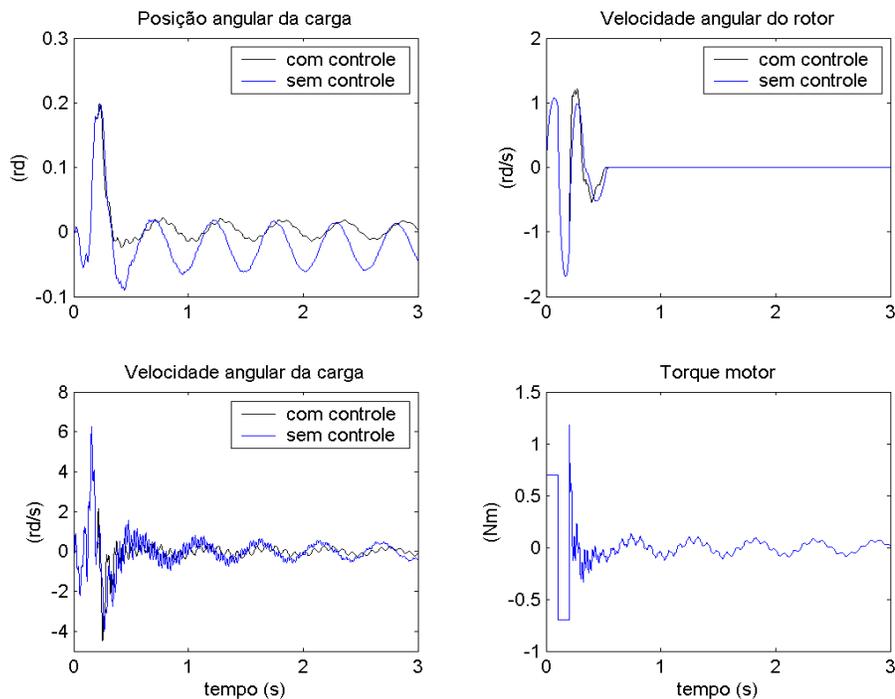


Figura 5.3: Simulação com o projeto por alocação de pólos, atrito não linear.

5.2 Projeto LQG/LTR

A seguir é apresentado um projeto de controle com a estratégia LQG/LTR onde a abertura de malha é feita na saída da planta. O esforço de projeto consiste em projetar o filtro de Kalman de forma que a malha objetivo $C(sI - A)^{-1}K_f$ atenda às barreiras de robustez pré estabelecidas. Na figura 5.4 são mostradas as respostas frequenciais (diagrama de Bode) das funções de transferência do filtro $C(j\omega I - A)^{-1}K_f$ (curva em preto) e da planta $P(j\omega)$ (curva em vermelho), na parte superior da figura. No processo de recuperação adotou-se $\tilde{\rho} = 10^{-3}$. O projeto foi baseado na tentativa de fazer com que o cruzamento em $0dB$, da função de transferência do filtro, ocorresse numa frequência aproximadamente o dobro da mais baixa frequência do sistema [73], conforme pode ser observado na parte inferior da figura 5.4, onde está representado em preto a função de transferência do filtro e

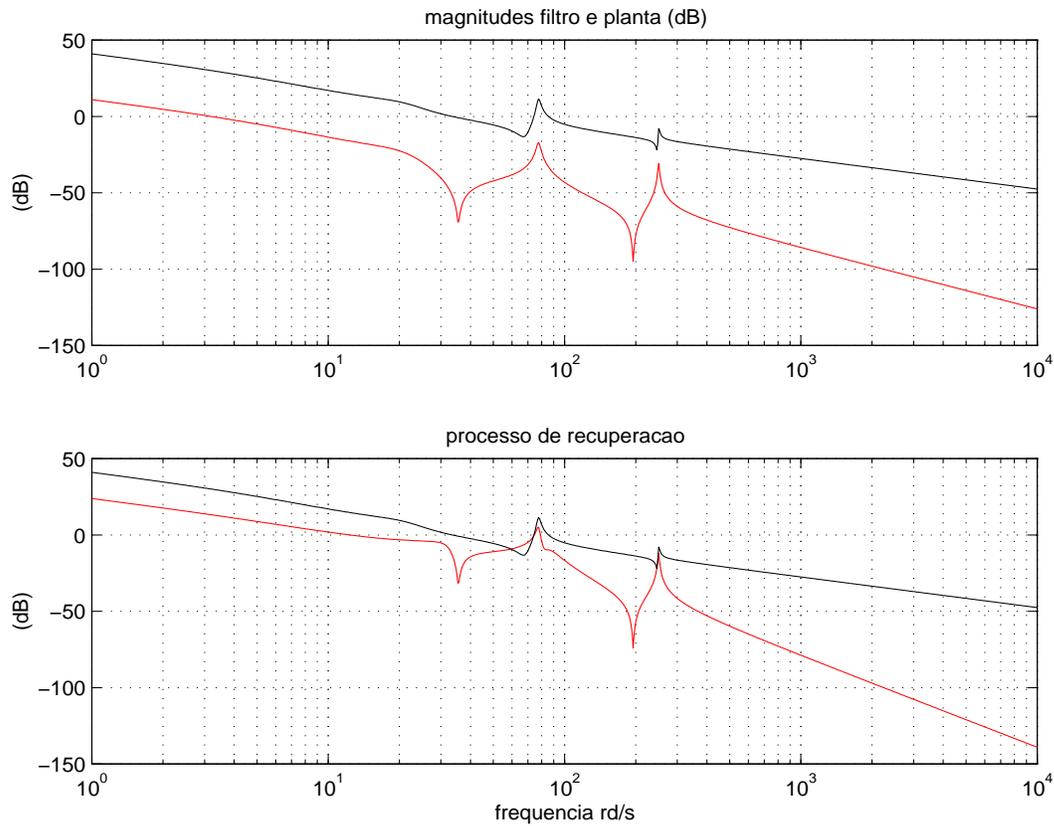


Figura 5.4: Diagrama de Bode das funções de transferência do filtro e da planta e o processo de recuperação.

em vermelho a função ganho de malha $|PK_{LQG}|$. Os pólos do regulador e do filtro são indicados na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Pólos da planta $[\lambda_i(A)]$, do regulador $[\lambda_i(A - BK_c)]$ e do filtro $[\lambda_i(A - K_f C)]$

Sistema	Pólos
Planta Nominal	$-1,5231 \pm 250,1678i$; $-1,3618 \pm 77,6171i$; $-6,9565 \pm 20,7061i$; $-5,6703$; $0,0000$
Regulador	$-2,2264 \pm 250,2959i$; $-7,6377 \pm 83,1299i$; $-41,0987 \pm 11,2051i$; $-3,5976 \pm 32,398i$
Filtro	$-2,0495 \pm 250,1499i$; $-6,1972 \pm 77,931i$; $-7,0408 \pm 25,5297i$; $-18,331 \pm 9,8337i$

Na seqüência são apresentados resultados de simulações realizadas com a técnica de controle LQG/LTR. Inicialmente, os modos de vibração da estrutura são ativados em malha aberta. Um torque motor de $0.704Nm$ é aplicado durante os primeiros 0.1 segundos. Nos 0.1 segundos seguintes aplica-se um torque

de $-0.704Nm$. A aplicação efetiva do controlador LQG/LTR é feita a partir de 0.2 segundos, passando-se a atuar no sistema em malha fechada. Analogamente ao caso anterior (projeto por alocação de pólos), a curva em azul representa o resultado em malha aberta e a curva em preto o resultado em malha fechada.

A figura 5.5 mostra a posição da carga, a velocidade do rotor e da carga e o torque motor; observa-se que a lei de controle é capaz de atenuar as vibrações da estrutura quando o atrito no atuador é considerado linear. As vibrações na posição angular da carga são atenuadas completamente a partir de um segundo de simulação, como também pode ser visto pelo comportamento do torque motor, que se estabiliza em zero a partir desse instante de tempo (um segundo).

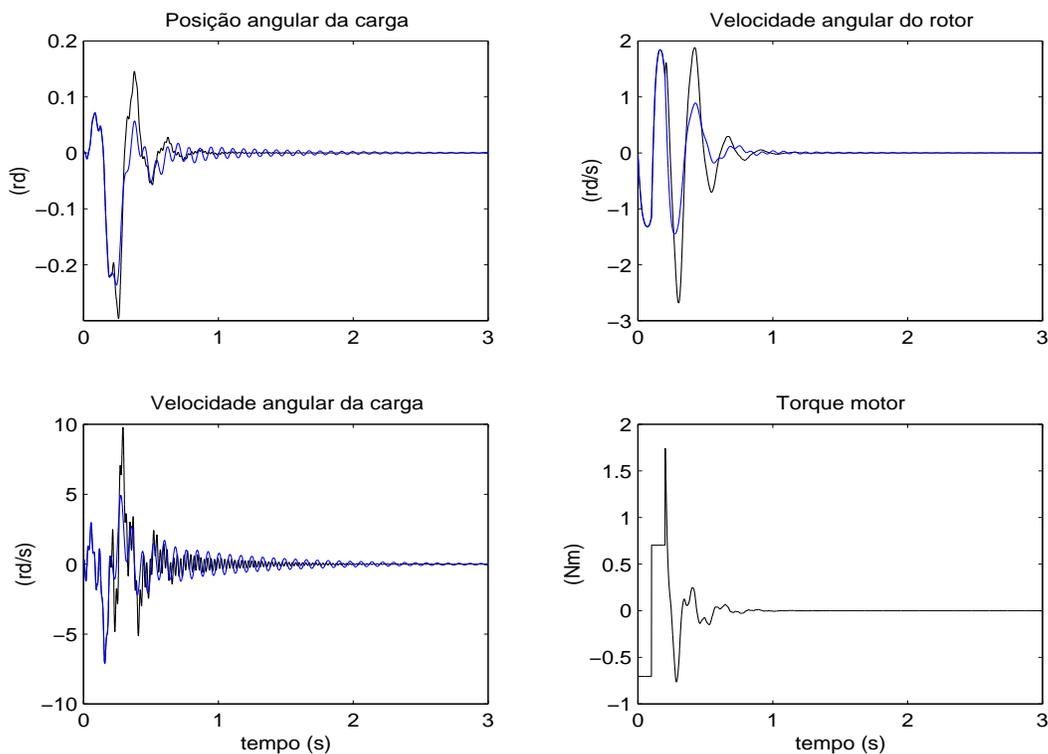


Figura 5.5: Simulação com o projeto LQG/LTR, atrito linear.

Ao introduzir o modelo de atrito não linear, mantendo-se a lei de controle projetada com a estratégia LQG/LTR utilizada no resultado anterior, percebe-se, na figura 5.6, que as vibrações não são atenuadas completamente. Isso ocorre pelo fato de que os torques projetados pela lei de controle permanecem, a maior parte do tempo, no interior da zona morta em torque, comprometendo o bom desempenho da lei de controle apresentado no caso em que o atrito é considerado constante (linear). Portanto, repete-se a necessidade de se realizar a compensação de atritos não lineares para que a lei tenha condições reais de funcionamento. A compensação funcionará de forma a linearizar os atritos e, como conseqüência, a tendência é de se reproduzir o comportamento apresentado no resultado da simulação quando se considerou o atrito linear.

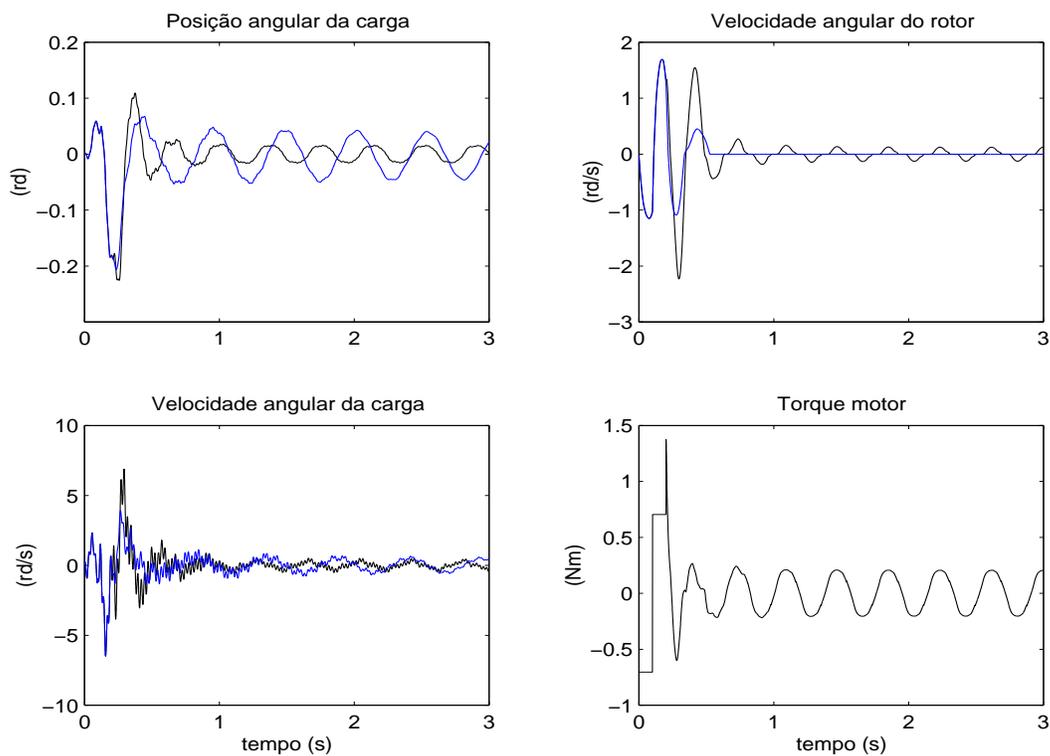


Figura 5.6: Simulação com o projeto LQG/LTR, atrito não linear.

5.3 Projeto \mathcal{H}_∞

Visando elaborar um terceiro projeto de controle, combinou-se a utilização de uma transformação bilinear com a síntese \mathcal{H}_∞ [16] onde a lei de controle resultante consiste de uma solução sub-ótima do problema de controle \mathcal{H}_∞ . A planta aumentada $G(s)$ é obtida a partir da formulação apresentada na figura 4.6, equação 4.35. A transformação bilinear mapeia o s -plano no \tilde{s} -plano e é formulada como

$$s = \frac{\tilde{s} + p_1}{\frac{\tilde{s}}{p_2} + 1} \quad (5.1)$$

bem como sua inversa

$$\tilde{s} = \frac{-s + p_1}{\frac{s}{p_2} + 1}. \quad (5.2)$$

onde os pontos p_1 e p_2 representam os pontos extremos do diâmetro de um círculo no semi-plano esquerdo do s -plano. A figura 5.7 mostra as regiões do s -plano mapeadas no \tilde{s} -plano, ou seja:

- Γ_1 , fronteira do círculo no s -plano, é mapeada no eixo $j\tilde{\omega}$ no \tilde{s} -plano;
- O eixo $j\omega$, no s -plano, é mapeado em Γ_2 , fronteira do círculo localizado no semiplano direito do \tilde{s} -plano;
- Finalmente, a região A é mapeada na região \tilde{A} , B em \tilde{B} e C em \tilde{C} .

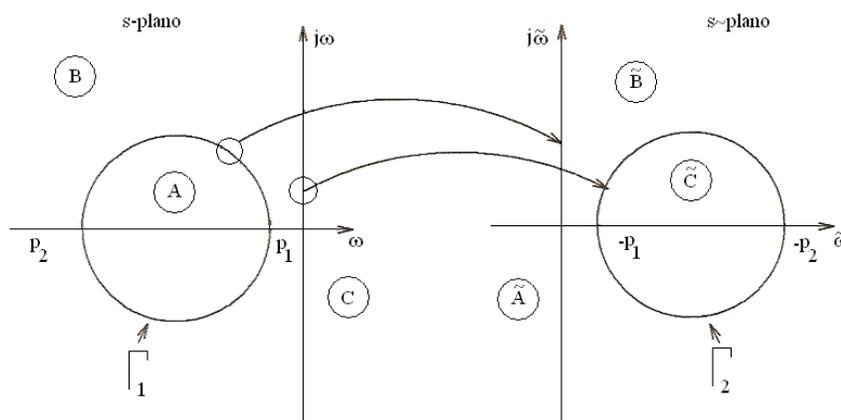


Figura 5.7: Transformação bilinear para deslocamento de pólos.

A principal vantagem da utilização dessa transformação é remover o mal condicionamento da planta aumentada, além de poder controlar a posição do par de pólos de mais baixa frequência em malha fechada.

O procedimento de projeto é resumido a seguir:

- Passo 1. Colocar os blocos de incerteza para formular o problema de controle robusto \mathcal{H}_∞ (parâmetros $\bar{\rho}$ e $\bar{\gamma}$);
- Passo 2. Mapear a planta do s -plano no \tilde{s} -plano via transformação bilinear (5.1) (parâmetros p_1 e p_2);
- Passo 3. Calcular o controlador \mathcal{H}_∞ para a planta transformada (função "hinf.m" do MATLAB);
- Passo 4. Mapear o controlador $\tilde{K}(\tilde{s})$ de volta para o s -plano via transformação bilinear inversa de (5.1);
- Passo 5. Retornar ao passo 2 e iterar o parâmetro p_1 até encontrar um bom compromisso entre estabilidade e desempenho.

Na seqüência são apresentados resultados experimentais relativos a lei de controle combinando a síntese \mathcal{H}_∞ com uma transformação bilinear, aplicados ao manipulador flexível, juntamente com o mecanismo neural de compensação de atritos. O ganho " g " que ajusta o desempenho da rede neural artificial na compensação foi considerado constante, equivalente a 1.

Realizou-se um experimento com um degrau em posição em vinte graus, conforme figura 5.8. A posição da carga corresponde à soma dos sinais do *encoder* e dos *strain-gauges*, enquanto que a velocidade do rotor é derivada do sinal do *encoder*. Observa-se que o desempenho da lei de controle não é satisfatório, visto que nesta situação nenhum mecanismo de compensação de atritos foi considerado. Ainda mantendo-se o degrau em posição em vinte graus, realizou-se um outro experimento considerando a compensação de atritos, chamado experimento (a), conforme

representado na figura 5.9. Observa-se que a lei de controle levou o estado para a referência caracterizando bom desempenho no caso em que o compensador de atritos foi utilizado, figura 5.9, ao contrário do caso de um experimento onde foi desconsiderada a compensação de atritos, figura 5.8.

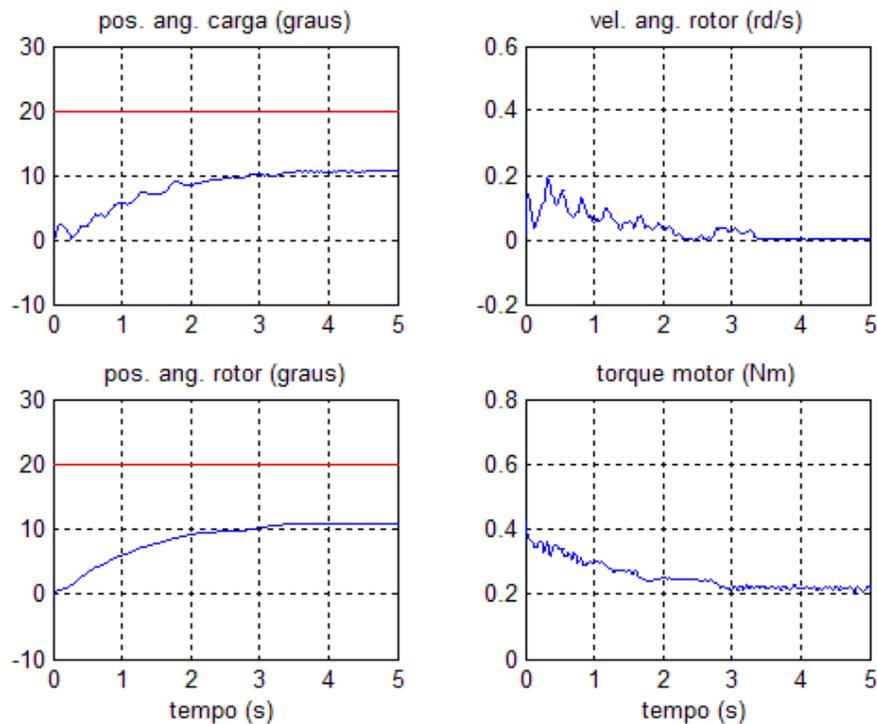


Figura 5.8: Resposta ao degrau em 20 graus sem compensação de atritos.

Observa-se, na figura 5.9, que tanto a posição angular da carga (gráfico superior à esquerda), quanto a posição angular do rotor (gráfico inferior à esquerda) alcançam a referência dada em aproximadamente dois segundos. Nesse mesmo instante de tempo (2 segundos), a velocidade angular do rotor tende a se estabilizar em zero (gráfico superior à direita), enquanto que o torque motor se estabiliza próximo de $0.2Nm$ (gráfico inferior à direita).

A comparação entre os resultados mostrados nas figuras 5.8 e 5.9 reforça, claramente, os efeitos, comentados anteriormente, sobre a zona morta em torque, que surge em decorrência do atrito não linear interno ao atuador, ou seja, à medida que a compensação de atritos é feita a zona morta em torque é reduzida e a lei de controle passa a atuar de forma eficiente.

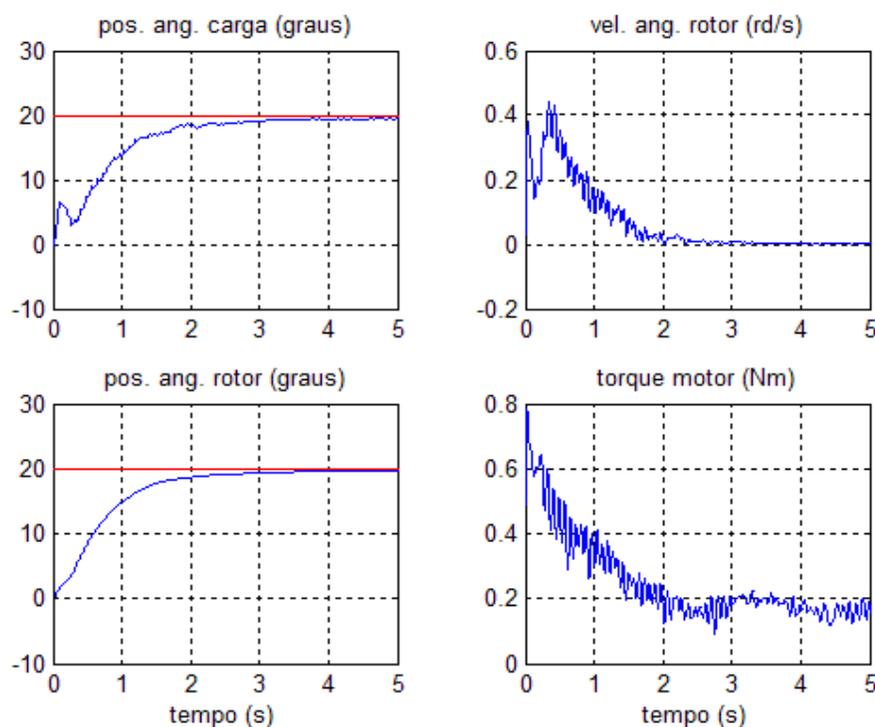


Figura 5.9: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (a).

Repetiu-se o experimento sob as mesmas condições do experimento (a) por mais duas vezes seguidas, experimentos (b) e (c), ficando evidente a repetibilidade do desempenho da lei de controle, conforme vê-se nas figuras 5.10 e 5.11. Além disso, a tabela 5.3, que representa os coeficientes de correlação na posição angular da carga obtida nos experimentos (a), (b) e (c), mostra que em todos os casos esse índice se mantém bem próximo de 1. A repetibilidade dos experimentos sob as mesmas condições de ativação inicial é importante, visto que reforça que a lei de controle é eficiente não apenas em uma situação isolada.

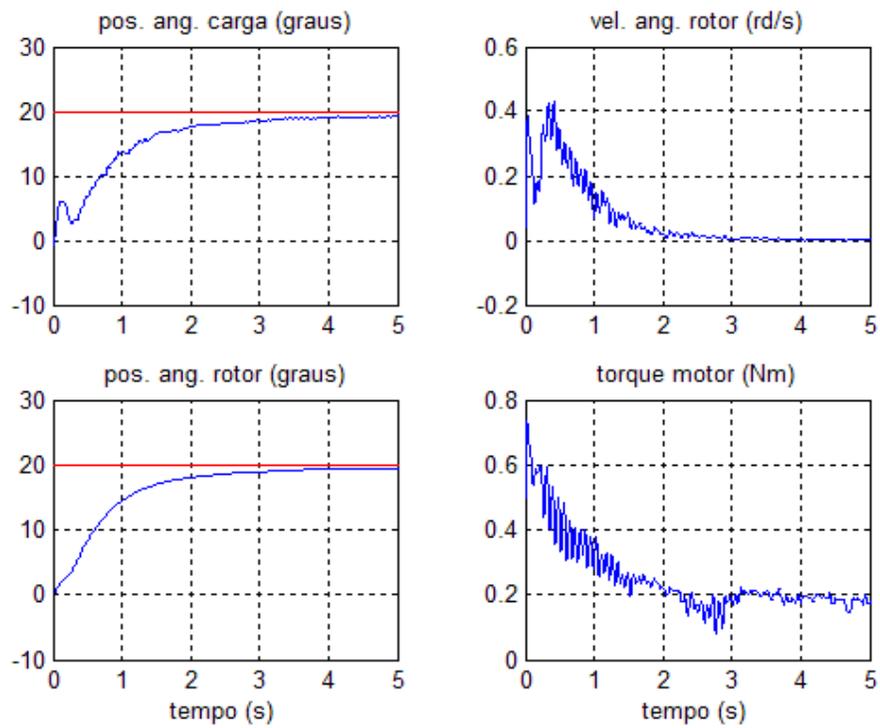


Figura 5.10: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (b).

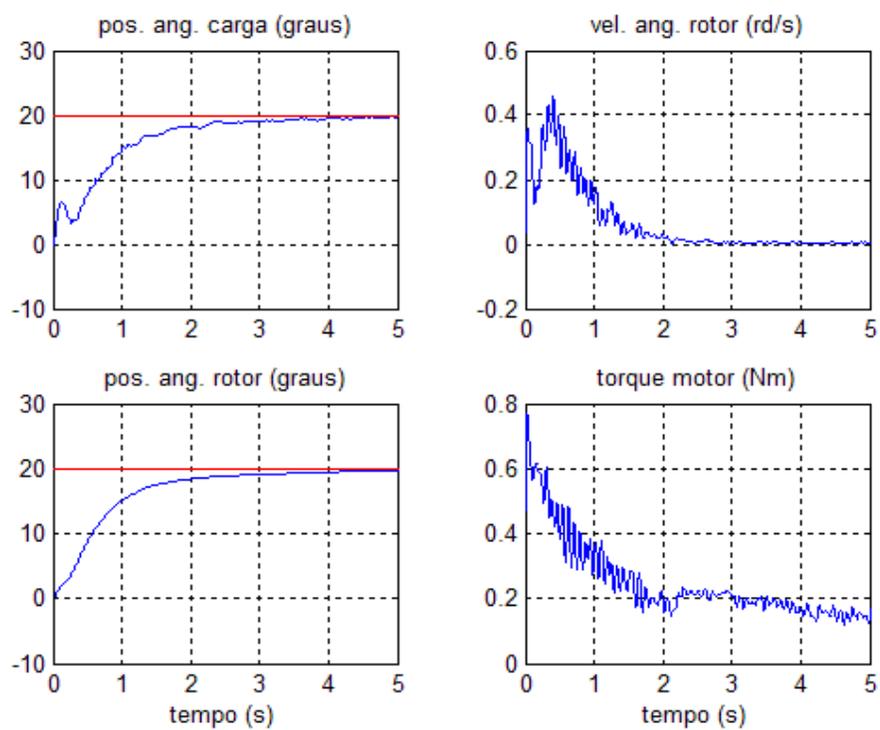


Figura 5.11: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (c).

Tabela 5.3: Índice de correlação - degrau em 20 graus

	Experimento (a)	Experimento (b)	Experimento (c)
Experimento (a)	1	0,9976	0,9967
Experimento (b)	0,9976	1	0,9976
Experimento (c)	0,9967	0,9976	1

Um outro degrau, em trinta graus, foi considerado e novamente verificou-se que o desempenho da lei de controle é ruim quando a compensação de atritos não é considerada (figura 5.12). Porém, quando junto à lei de controle, associa-se a compensação de atritos, experimento (d), o desempenho é garantido e o estado é levado à referência dada (figura 5.13). Novamente, repetiu-se o experimento por mais duas vezes seguidas, experimentos (e) e (f) e o desempenho da lei de controle mantém-se, conforme mostra-se nas figuras 5.14 e 5.15. Além disso, todos os coeficientes de correlação na posição angular da carga estão próximos de 1 ao comparar-se os experimentos (d), (e) e (f), conforme mostrado na tabela 5.4.

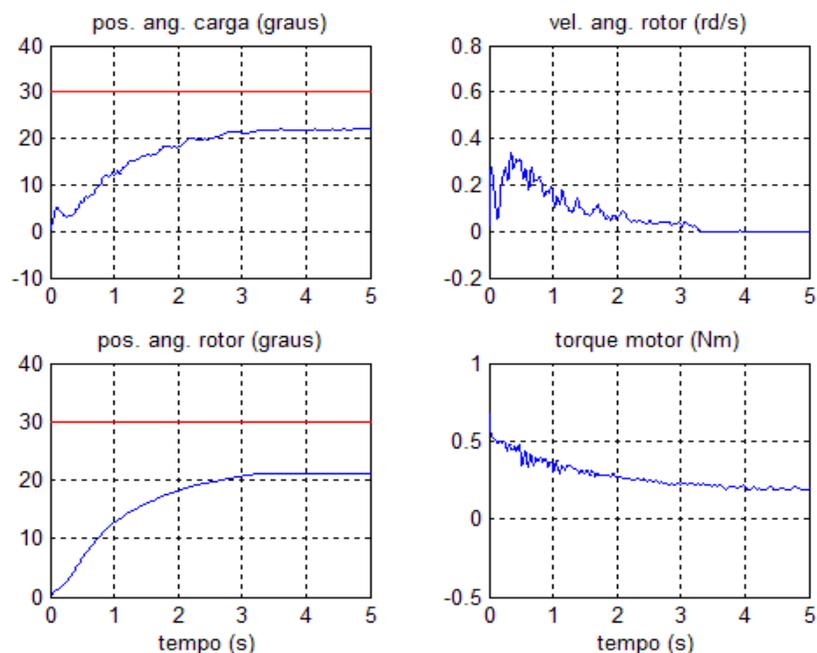


Figura 5.12: Resposta ao degrau em 30 graus sem compensação de atritos.

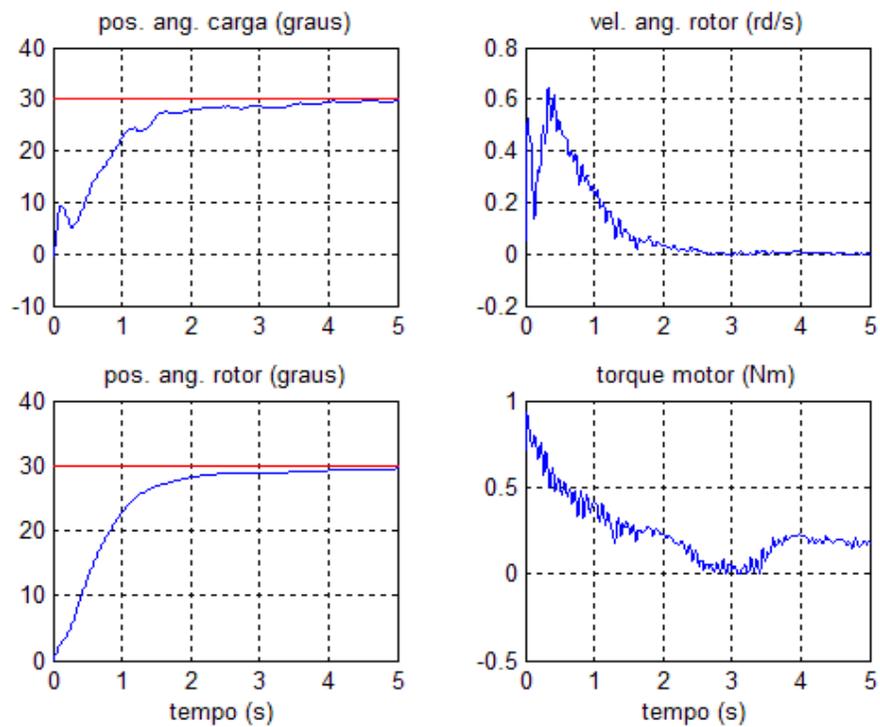


Figura 5.13: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (d).

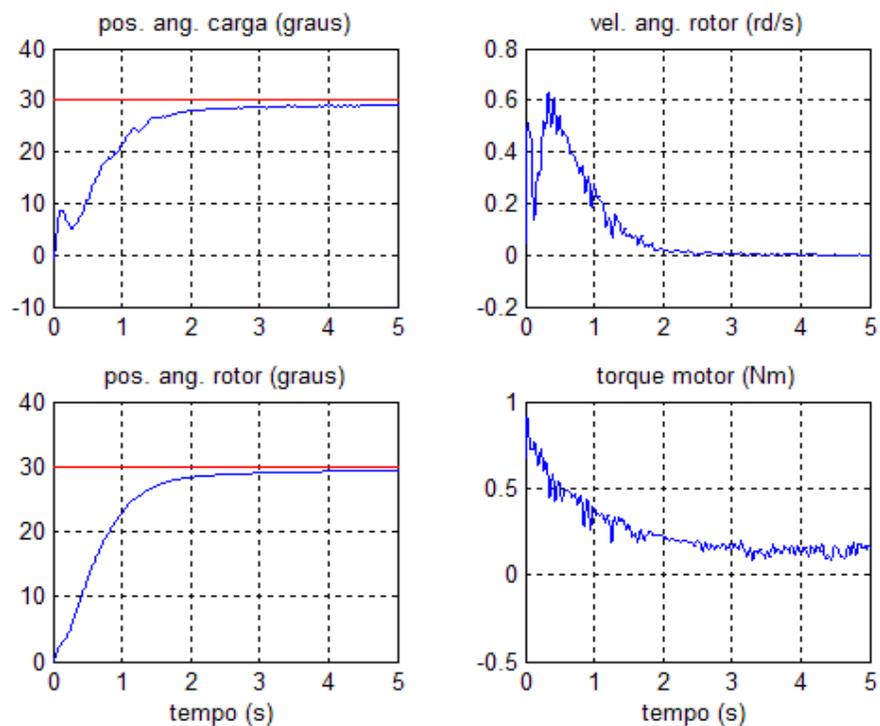


Figura 5.14: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (e).

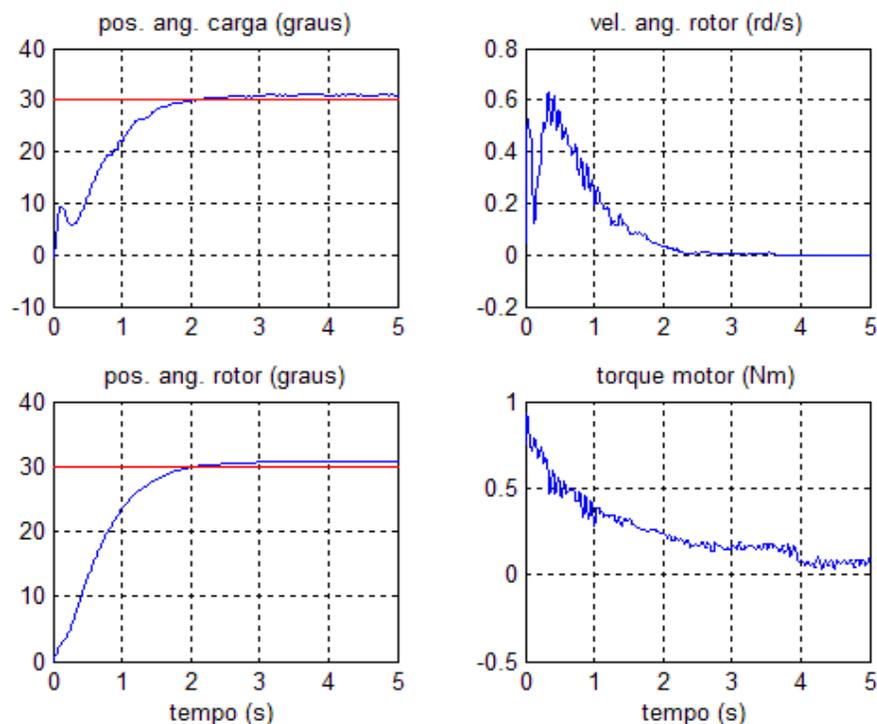


Figura 5.15: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (f).

Tabela 5.4: Índice de correlação - degrau em 30 graus

	Experimento (d)	Experimento (e)	Experimento (f)
Experimento (d)	1	0,9976	0,996
Experimento (e)	0,9976	1	0,998
Experimento (f)	0,996	0,998	1

O resultado mostrado a seguir, figura 5.16, foi obtido ativando-se os modos de vibração da estrutura em malha aberta com um degrau alternado, sendo que o controle é ativado em três segundos, ou seja, nos primeiros 0.2 segundos foi aplicado um torque de $-0.25Nm$, nos 0.2 segundos seguintes um torque de $0.25Nm$. A partir daí a estrutura fica vibrando em malha aberta (sem controle) até 3 segundos, instante em que o controle é ativado. Esse tipo de ativação inicial é importante pois impõe dificuldades relevantes à lei de controle, já que todos os modos de vibração estruturais são ativados, e em decorrência disso a estrutura encontra-se vibrando

no momento em que a lei de controle passa a atuar. Nesse resultado a ativação do controle foi feita sem a compensação de atritos, onde a posição angular da carga pode ser observada no gráfico superior da figura, em malha aberta (curva em vermelho) e em malha fechada (curva azul).

Observa-se, no gráfico situado na parte superior (figura 5.16), que o resultado considerando a presença da lei de controle (curva em azul) é bastante semelhante ao resultado obtido sem a lei de controle (curva em vermelho), ou seja, a lei de controle não foi capaz de atenuar as vibrações na posição angular da carga. Esse comportamento ocorre, conforme pode ser observado pelo gráfico situado na parte inferior, visto que os torques enviados pela lei de controle mantiveram-se dentro dos limites da zona morta em torque (linhas tracejadas), causada pela presença dos atritos internos ao atuador. Como consequência a estrutura fica vibrando como se fosse uma viga, engastada em uma extremidade (atuador) e livre na outra (carga).

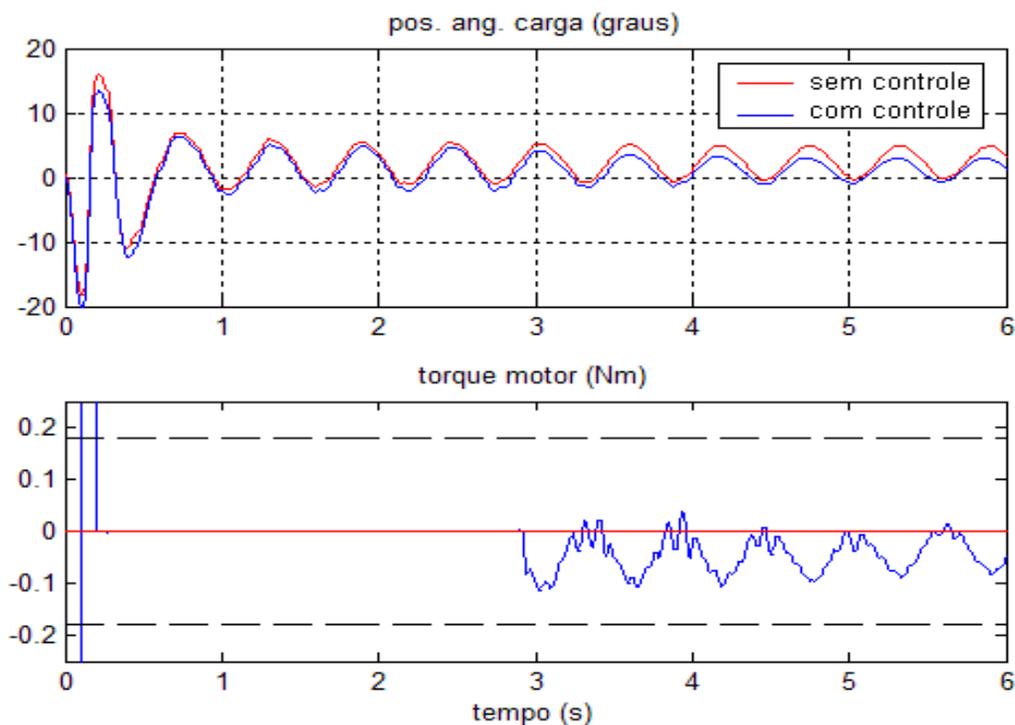


Figura 5.16: Resposta ao degrau alternado sem compensação de atritos.

Realizou-se um outro experimento, ainda mantendo-se a mesma lei de controle e considerando-se a compensação de atritos, experimento (g), mostrado na figura 5.17. Nesse experimento a ativação inicial dos modos de vibração estruturais foi semelhante ao caso anterior, mostrado na figura 5.16. Porém, nos primeiros 0.1 segundos foi aplicado um torque de $-1.76Nm$ e nos 0.1 segundos seguintes foi aplicado um torque de $1.76Nm$. Nos segundos seguintes o torque foi mantido nulo até o tempo de 3 segundos, quando a lei de controle passou a atuar. Observa-se que as vibrações estruturais são atenuadas. A posição angular da carga (gráfico superior esquerdo) se estabiliza no tempo de aproximadamente 3.5 segundos, o que ocorre também com a posição angular do rotor (gráfico inferior esquerdo). A velocidade angular do rotor se estabiliza em zero, enquanto o torque motor pode ser visualizado no gráfico inferior direito. Esse resultado evidencia mais uma vez a eficiência da lei de controle associada com o mecanismo de compensação no problema de controle de vibrações do elo flexível no manipulador.

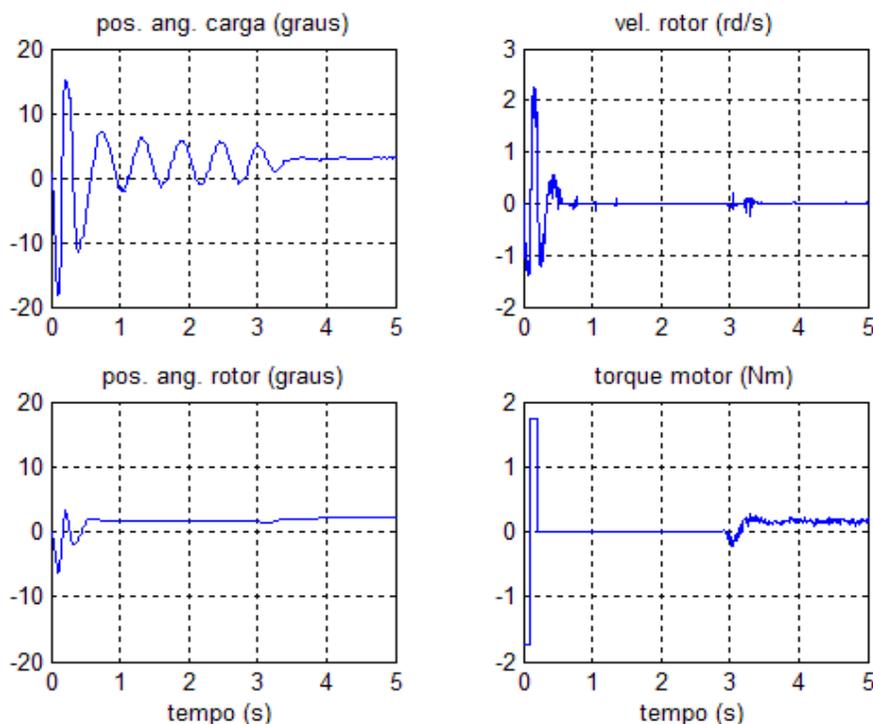


Figura 5.17: Resposta ao degrau alternado com compensação de atritos - experimento (g).

Ao repetir-se mais duas vezes o experimento, experimentos (h) e (i), figuras 5.18 e 5.19, respectivamente, pode-se constatar a semelhança nos resultados ao compará-los com a figura 5.17. Os índices de correlação entre os experimentos (g), (h) e (i) mantêm-se próximo de 1, conforme pode ser visto na tabela 5.5.

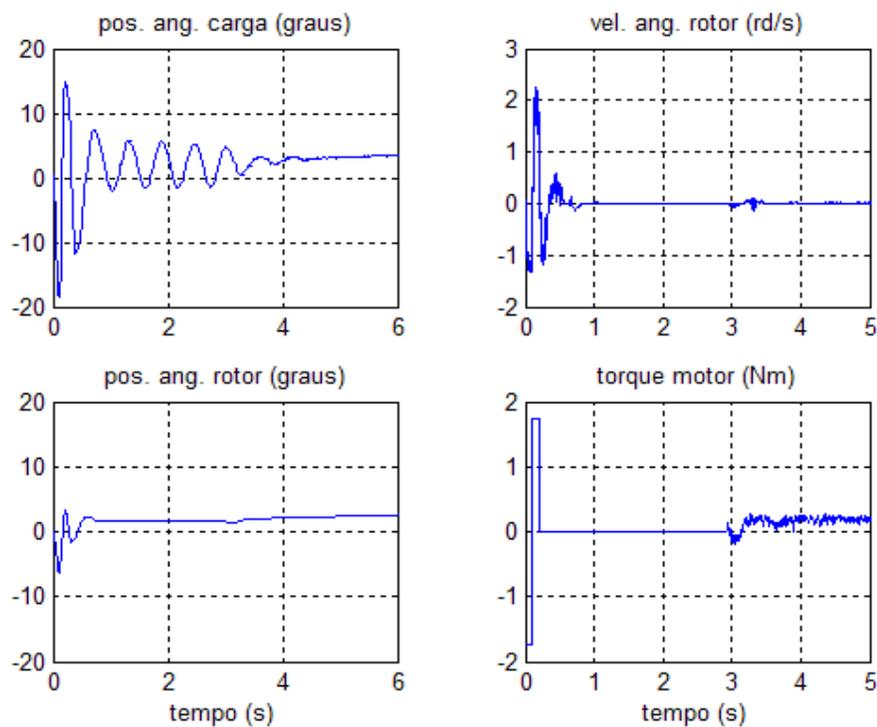


Figura 5.18: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (h).

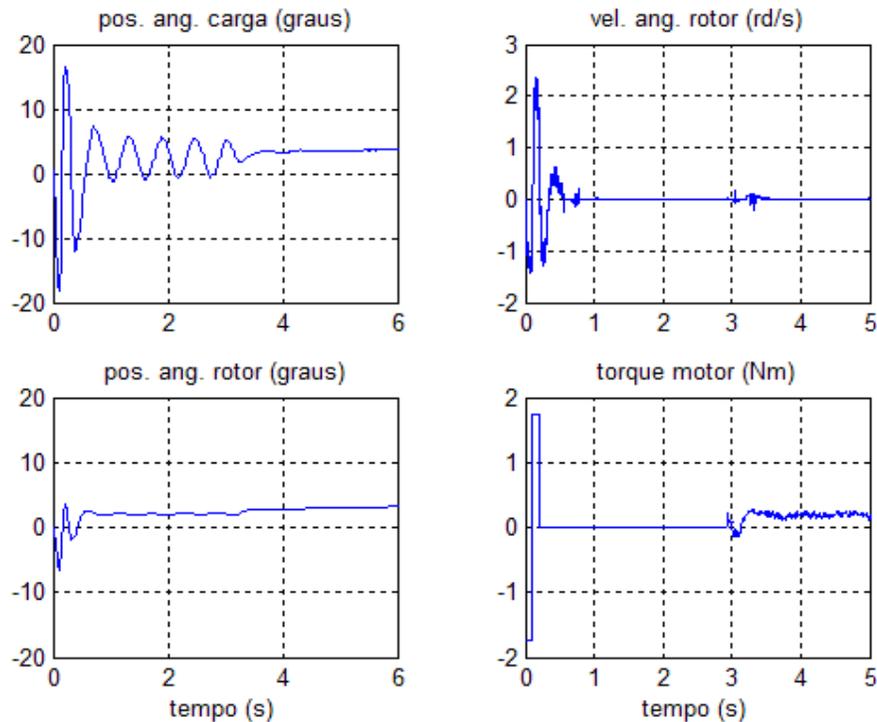


Figura 5.19: Resposta ao degrau com compensação de atritos - experimento (i).

Tabela 5.5: Índice de correlação - passo alternado

	Experimento (g)	Experimento (h)	Experimento (i)
Experimento (g)	1	0,9834	0,9888
Experimento (h)	0,9834	1	0,9934
Experimento (i)	0,9888	0,9934	1

Uma outra forma de ativação dos modos estruturais foi realizada e os resultados estão mostrados nas figuras 5.20 e 5.21. Essa ativação consiste na aplicação de um impulso externo na lâmina (batida na lâmina próxima à extremidade livre), sendo uma das situações que oferecem maior dificuldade à lei de controle. Na figura 5.20 não se considerou o mecanismo de compensação, ou seja, o torque motor corresponde apenas ao torque projetado pela lei de controle. O gráfico superior representa a posição angular da carga, sem controle (curva em vermelho) e com controle (curva em azul). Observa-se que a batida foi dada após aproximadamente

0.4 segundos, instante em que os modos de vibração são ativados. A posição angular da carga não se estabiliza dentro do tempo de 6 segundos, tanto no caso em que a lei de controle é considerada (malha fechada), quanto no caso em que a lei de controle não é considerada (malha aberta). Este fato ocorre, conforme visualiza-se no gráfico inferior, pelo comportamento do torque motor, que permanece dentro dos limites da zona morta em torque (linhas tracejadas), ou seja, os atritos não lineares no atuador atuam de forma que os torques idealmente projetados para atenuar as vibrações não passem para a estrutura, fazendo com que o mesmo permaneça vibrando.

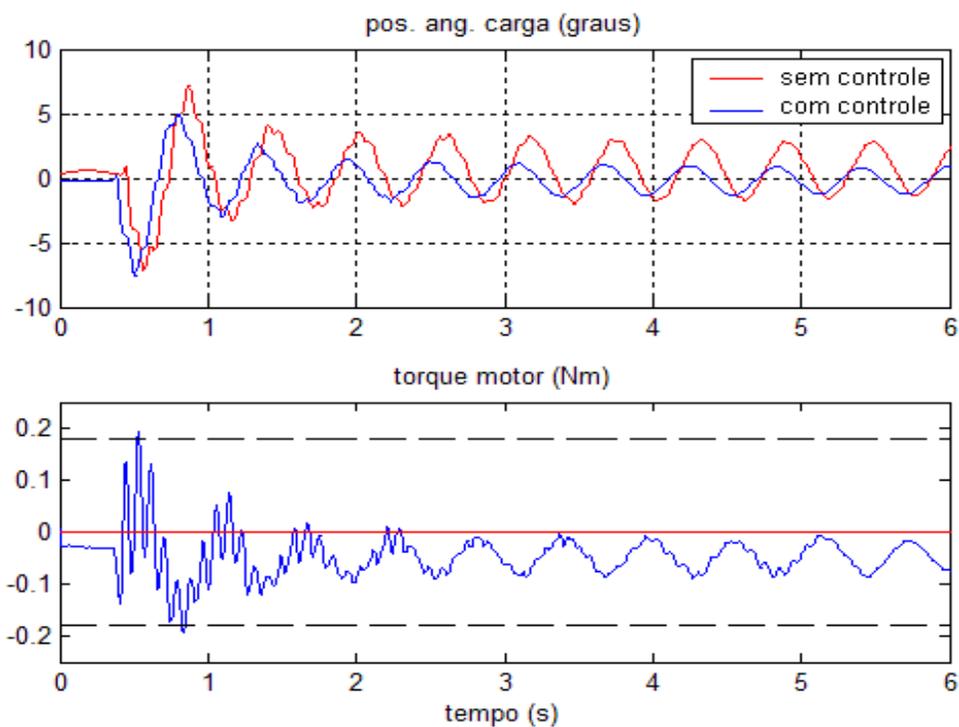


Figura 5.20: Resposta a um impulso externo sem compensação de atritos.

A figura 5.21 mostra também um resultado cuja ativação inicial consistiu de um impulso externo (batida na lâmina próxima à extremidade livre), porém com a compensação de atritos. O gráfico superior mostra a posição angular da carga sem controle (curva vermelha) e com controle (curva azul). A batida ocorreu após aproximadamente 0.2 segundos. Observa-se que no caso em que o controle é considerado a posição da carga se estabiliza em um nível constante a partir de 2

segundos, aproximadamente, enquanto que no caso não controlado (malha aberta) a estrutura permanece vibrando, o que mostra o bom desempenho da lei de controle quando associada com a compensação de atritos. O comportamento do torque motor no gráfico inferior evidencia que a zona morta em torque foi significativamente reduzida devido à utilização da compensação de atritos. Nesse tipo de experimento (batida na lâmina) não foi avaliada a repetibilidade, visto que é impossível reproduzir o mesmo impulso externo na forma de batida ao ativar os modos de vibração.

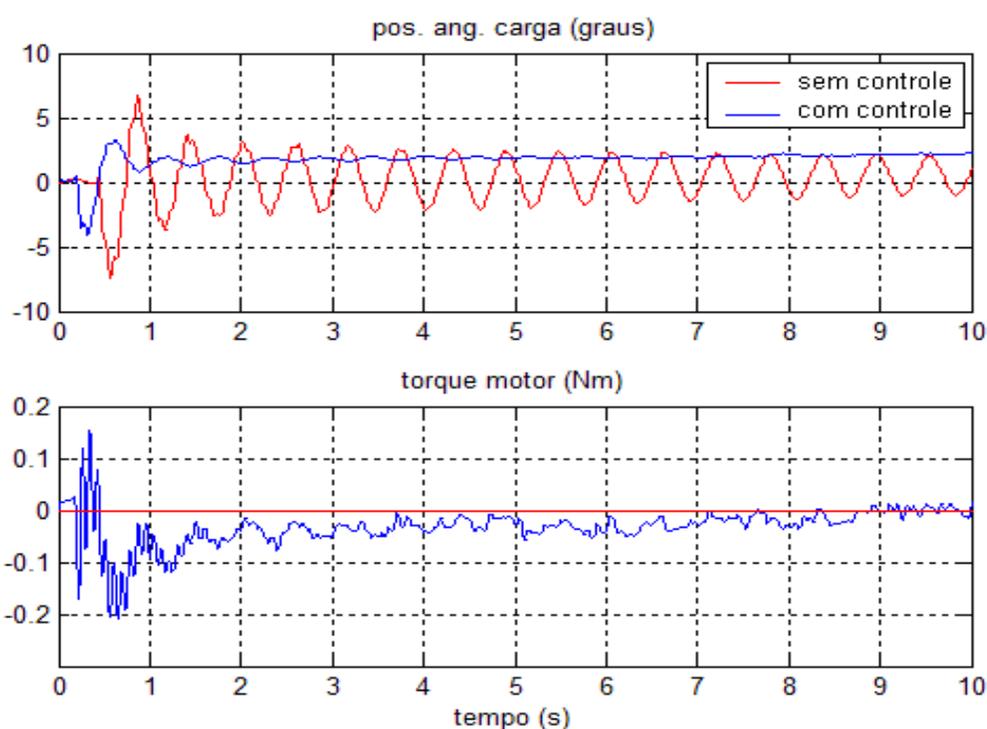


Figura 5.21: Resposta a um impulso externo com compensação de atritos.

Nesse capítulo apresentou-se os resultados mais relevantes do presente trabalho. Colocou-se em evidência o problema causado pelo efeito dos atritos em atuadores do tipo *harmonic drive* no projeto de controladores já em simulação, com os projetos de controladores obtidos fazendo-se alocação de pólos em malha fechada ou utilizando a estratégia LQG/LTR. Finalmente, apresentou-se os resultados experimentais de um projeto de controle combinando a síntese \mathcal{H}_∞ com o mecanismo de compensação neural de atritos baseado em RNA's, representando uma contribuição

inédita no problema de controle de manipuladores flexíveis utilizando atuadores com significativa zona morta em torque. Conforme visualizado, a lei de controle atuou de maneira eficiente e com excelente desempenho no controle de vibrações estruturais, sob as mais diversas situações testadas. Na seqüência do trabalho estão descritas, com mais detalhes, todas as contribuições do trabalho, assim como as sugestões para pesquisas futuras.

6 CONCLUSÕES

Este capítulo contém as principais conclusões referentes aos resultados obtidos durante a elaboração desta tese. O problema de controle de vibrações em manipuladores flexíveis tem sido amplamente estudado e a grande maioria dos trabalhos propostos apresentam resultados obtidos por meio de simulações. Em geral, resultados experimentais são obtidos utilizando-se atuadores lineares do tipo *direct-drive* (sem redutor de velocidade), para os quais a zona morta em torque é mínima, facilitando a ação dos controladores. Em razão disso, esse trabalho coloca em evidência o problema do controle de vibrações de um manipulador flexível utilizando-se um atuador convencional do tipo *harmonic-drive* (com redutor de velocidade). Esse tipo de atuador possui atritos internos altamente não lineares que são causadores de uma significativa zona morta em torque (normalmente entre 10% a 20% de seu torque máximo), causando, em geral, a degradação do desempenho das leis de controle. Porém, a característica de maior autonomia em torque, possibilita sua utilização em aplicações reais.

Neste trabalho foi feita a proposição de um procedimento sistemático para a obtenção de um modelo matemático para a estrutura flexível, obtido quando se considera um número finito de modos de vibração. Além de ser um procedimento de fácil implementação, as frequências dos modos de vibração do modelo podem ser ajustadas de forma a obter-se uma boa aproximação relativa às frequências próprias da estrutura, sejam estas últimas por meio da solução analítica (frequências analíticas), sejam as mesmas obtidas por meio de experimentos (frequências experimentais).

Devido à baixa autonomia em torque dos atuadores *direct-drive* optou-se por utilizar um atuador do tipo *harmonic-drive*. A escolha pelo *harmonic-drive* impõe a séria dificuldade em lidar com os efeitos do atrito existente no interior desse tipo de equipamento, fazendo com que seja necessário, por exemplo, a utilização de

mecanismos que funcionem de forma a compensá-lo reduzindo, assim, a zona morta em torque.

Diversos resultados experimentais foram obtidos durante a realização do presente trabalho, sempre com o manipulador flexível construído para esta finalidade. Parte destes resultados se concentram na identificação de parâmetros e na posterior validação do modelo dinâmico, pois a obtenção de um modelo dinâmico realista é uma base importante para um projeto de controle eficiente. Adotou-se um modelo de atritos proposto na literatura, constituindo-se um modelo global para o manipulador (dinâmica do atuador e dinâmica da estrutura). Em razão da dinâmica do atuador, acrescenta-se mais um modo de vibração ao modelo global do manipulador. A frequência de vibração desse modo (modo rotor) é bem mais alta do que a frequência do terceiro modo de vibração da estrutura, tendo sido feita uma aproximação rígida para o atuador.

Os resultados apresentados no capítulo 2 mostraram o bom grau de representatividade do modelo proposto quando comparado com a solução analítica, sem atrito, pela coincidência entre as funções de transferência analítica e do modelo, onde considerou-se a presença de três modos de vibração para a estrutura. Além disso, ainda no capítulo 2, comparou-se simulações obtidas com o modelo (modelo estrutural em conjunto com o modelo de atrito) com dados obtidos a partir de experimentos, onde observou-se a boa representação do modelo em relação ao fenômeno físico.

Para reduzir a zona morta em torque utilizou-se um compensador neural para os atritos não lineares. A rede neural artificial, apesar de ter aprendido bem o fenômeno de atrito, apresentou uma perda de desempenho na compensação visto que a rede neural artificial é treinada *off-line* e o atrito varia com o tempo, temperatura e condições operacionais do equipamento. Pesquisas realizadas indicaram que ao multiplicar a saída da RNA por um valor escalar (ganho), o desempenho do compensador neural era recuperado, evitando treinar novamente a RNA a cada novo experimento, o que seria inviável. Desta forma, propôs-se neste trabalho uma

estratégia baseada em um algoritmo *fuzzy*, para obtenção desse ganho. O algoritmo calcula o valor do ganho a cada passo de tempo, (*on-line*), e ajusta a compensação de forma a reduzir o erro existente em razão das variações, no tempo, sofridas pelo atrito. Esse algoritmo atua em paralelo com o compensador neural, constituindo o chamado compensador *neuro-fuzzy*, representando parte da contribuição desta tese. Resultados experimentais com o compensador *neuro-fuzzy* mostraram-se animadores quando aplicados ao caso rígido, ou seja, quando a lâmina é retirada do manipulador. Desta forma, o problema causado pelos atritos fica resolvido via *software* sem a necessidade de melhorar o equipamento.

Quanto ao compensador *neuro-fuzzy* ainda pode-se ressaltar que:

- possui grande generalização devida à forma de treinamento da RNA;
- a RNA possui apenas sete neurônios e isto implica um ganho significativo em termos de processamento na implementação em tempo real;
- o algoritmo *fuzzy* é bastante simples e lida automaticamente com as indesejáveis variações no tempo dos parâmetros de atrito.

Quanto ao problema de controle de vibrações da lâmina flexível, foram utilizadas as estratégias: alocação de pólos em malha fechada, controle LQG/LTR e síntese \mathcal{H}_∞ . Realizou-se um primeiro projeto, alocando os pólos em malha fechada em posições desejadas e um segundo projeto com a estratégia LQG/LTR. Ambos foram testados em simulação, considerando o atrito linear no atuador. Os resultados, conforme apresentados no capítulo 5, mostraram bom desempenho de ambos os projetos no controle das vibrações estruturais.

Resultados experimentais de um projeto de controle baseado na síntese \mathcal{H}_∞ combinada ao compensador neural mostraram-se eficientes no controle de vibrações da lâmina flexível, conforme apresentados no capítulo 5, resultados estes que representam uma das principais contribuições dessa tese. Na instrumentação

física considerou-se o conhecimento do estado pleno, evitando a utilização de um estimador de estado, fato que contribui para a estabilidade em malha fechada.

Para caracterizar o bom desempenho da estratégia de controle proposta realizou-se uma série de testes experimentais, nos quais observou-se como a lei de controle \mathcal{H}_∞ , combinada ao compensador neural, atuou em cada situação. Os primeiros experimentos foram obtidos atribuindo-se degraus constantes em 20 e 30 graus como posição de referência, onde verificou-se o bom desempenho da lei de controle ao levar o estado à referência em ambos os casos, sempre atenuando as vibrações estruturais.

Outro experimento foi realizado, ativando-se os modos de vibração com um degrau alternado. Aplicou-se um torque negativo nos primeiros 0.2 segundos, seguido de um torque positivo nos 0.2 segundos seguintes. A partir de 0.4 segundos aplicou-se um torque nulo até 3 segundos, instante em que o controle passou a atuar. Nesse caso a lei de controle é colocada em funcionamento com a estrutura já vibrando, onde se observou a eficiência do controlador ao atenuar as vibrações estruturais. Cada um dos experimentos acima descritos (referência em 20 graus, referência em 30 graus e ativação por meio de degrau alternado) foi repetido por três vezes, onde calculou-se para cada uma das três situações, os índices de correlação entre cada experimento e suas respectivas repetições. Em todos os casos os índices de correlação mantiveram-se bem próximos de 1, ficando evidenciado que a estabilidade é mantida.

Um último teste foi executado; esse teste consiste em ativar os modos de vibração da estrutura mediante um impulso externo na lâmina (batida na lâmina). Observou-se também que a lei de controle manteve o bom índice de desempenho ao atenuar as vibrações estruturais. Os dois últimos testes são bastante importantes, visto que são aqueles que impõe maior dificuldade à lei de controle. Portanto, em razão dos resultados apresentados verificou-se a robustez quanto ao desempenho e quanto à estabilidade do controlador proposto, combinando a síntese \mathcal{H}_∞ com o compensador neural.

6.1 Contribuições

A seguir, apresenta-se as principais contribuições desta tese, assim como sugestões de pesquisas futuras.

A contribuição principal desta tese é a junção de modelagem e controle de um manipulador flexível, que associados a mecanismos de compensação de atritos, mostram-se eficientes quando aplicados na prática. Mais especificamente, as contribuições resumem-se em:

- Propor um procedimento sistemático e simples para a obtenção de um modelo matemático estrutural bastante realístico;
- Considerando-se o caso rígido, apresentar um mecanismo baseado num sistema *fuzzy* que atua juntamente com um compensador neural de atritos, compensador *neuro-fuzzy*, cuja principal finalidade é lidar automaticamente com as variações no tempo dos parâmetros de atrito, assim como com as condições operacionais do equipamento;
- Apresentar resultados experimentais de um controlador robusto que atenua de forma ativa as vibrações estruturais com bom desempenho em um manipulador flexível, utilizando-se a síntese \mathcal{H}_∞ em conjunto com um compensador neural de atritos internos ao atuador.

A continuação da pesquisa será a elaboração de um procedimento *neuro-fuzzy* automático para lidar com as variações do atrito quando se considera o caso flexível. Outra proposta é a implementação experimental do projeto LQG/LTR.

Referências Bibliográficas

- [1] AL-BENDER, F., LAMPAERT, V., AND SWEVERS, J. The generalized Maxwell-slip model: A novel model for friction simulation and compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50** (2005), 1883–1887.
- [2] ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B. *Control of Machines with Friction*. Kluwer, 1991.
- [3] ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B. Stick slip and control in low-speed motion. *IEEE Transactions on Automatic Control* **38** (1993), 1483–1496.
- [4] ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B. *Dynamic for robot control: friction modeling and ensuring excitation during parameter identification*. PhD thesis, Stanford University, 1998.
- [5] ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B., DUPONT, P. E., AND CANUDAS DE WIT, C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for control of machines with friction. *Automática* **30** (1994), 1083–1138.
- [6] BANAVAR, R. N. \mathcal{H}_∞ control synthesis for a flexible structure. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (1994), 1305–1309.
- [7] BEALE, R., AND JACKSON, T. *Neural computing: an introduction*. Adam Hilger Bristol, 1990.
- [8] BENOSMAN, M., BOYER, F., LE VEY, G., AND PRIMAULT, D. Flexible link manipulators: from modelling to control. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* **34** (2002), 381–414.
- [9] BENOSMAN, M., AND LE VEY, G. Control of flexible manipulators: A survey. *Robótica* **22** (2004), 533–545.
- [10] BESANÇON, A., AND BESANÇON, G. Analysis of a two-relay system configuration with application to coulomb friction identification. *Automática* **35** (1999), 1391–1399.

- [11] BRYSON, A. E., AND HO, Y. C. *Applied optimal control*. John-Wiley and Sons, New York, 1975.
- [12] CANNON, R. H., AND ROSENTHAL, D. E. Experiments in control of flexible structures with noncollocated sensors and actuators. *Journal of Guidance and Control* **5** (1984), 546–553.
- [13] CANUDAS, C., OLSSON, H., ASTROM, K. J., AND LISCHINSKY, P. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40** (1995), 419–425.
- [14] CHAICHANAVONG, P., AND BANJERDPONGCHAI, D. A case study of robust control experiment on one-link flexible robotic arm. In *38th Conference on Decision & Control* (Phoenix, Arizona, USA, 1999), pp. 4319–4324.
- [15] CHALHOUB, N. G., KFOURY, G. A., AND BAZZI, B. A. Design of robust controllers and a nonlinear observer for the control of a single-link flexible robotic manipulator. *Journal of Sound and Vibration* **291** (2006), 437–461.
- [16] CHIANG, R. Y., AND SAFONOV, M. G. *Robust Control Toolbox User's Guide*. MathWorks, South Natick, 1992.
- [17] CHOI, C. H., RYU, J., AND PARK, K. H. Active vibration control of a flexible beam, based on flow source control. *Control Engineering Practice* **7** (1999), 335–345.
- [18] CHOI, S. B., AND CHEON, J. W. Vibration control of a single-link flexible arm subjected to disturbances. *Journal of Sound and Vibration* **271** (2004), 1147–1156.
- [19] CILIZ, M. K. Adaptive control of robot manipulators with neural network based compensation of frictional uncertainties. *Robótica* **23** (2005), 159–167.

- [20] CRUZ, J. J. *Controle Linear Robusto Multivariável*. EDUSP, São Paulo, 1996.
- [21] DAPPER, M., ZAHN, V., MAAB, R., AND ECKMILLER, R. How to compensate stick-slip friction in neural velocity force control (nvfc) for industrial manipulators. In *IEEE - Int. Conference on Robotics & Automation* (Detroit, Michigan, USA, 1999), pp. 3128–3132.
- [22] DE LUCA, A., PANZIERI, S., AND ULIVI, G. Stable inversion control for flexible link manipulators. In *IEEE - Int. Conference on Robotics & Automation* (Leuven, Belgium, 1998), pp. 799–805.
- [23] DHAOUADI, R. Nonlinear friction compensation in harmonic drives with hysteresis. In *IEEE/ASME - Int. Conference on Advanced Intelligent Mechatronics* (2003), pp. 278–282.
- [24] DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P., AND FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **34** (1989), 831–847.
- [25] DOYLE, J. C., AND STEIN, G. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* (1979).
- [26] DOYLE, J. C., AND STEIN, G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-26** (1981), 4–16.
- [27] DOYLE, J. C., WALL, J. E., AND STEIN, G. Performance and robustness analyses for structured uncertainty. In *IEEE - 20th Conference on Decision and Control* (1982).
- [28] DWIVEDY, S. K., AND EBERHARD, P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mech. Mach. Theory* **41** (2006), 749–777.
- [29] FAUSETT, L. *Fundamentals of neural networks*. Prentice Hall, 1994.

- [30] FELIU, V., PEREIRA, E., DIAZ, I. M., AND RONCERO, P. Feedforward control of multimode single-link flexible manipulators based on an optimal mechanical design. *Robotics and Autonomous Systems* **54** (2006), 651–666.
- [31] FELIU, V., RATTAN, K. S., AND BROWN, H. B. Adaptive control of a single-link flexible manipulator in the presence of joint friction and load changes. In *IEEE - Int. Conference on Robotic & Automation* (1989), vol. **2**, pp. 1036–1041.
- [32] FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., AND EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [33] GERVINI, V. I., GOMES, S. C. P., AND ROSA, V. S. A new robotic drive joint friction compensation mechanism using neural networks. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering* **25** (2003), 135–145.
- [34] GOMES, S. C. P. *Precision de la Transmission du Couple par un Moto-réducteur Électrique: Modélisation et Commande d'un Bras Rigide ou Fléxible avec Compensation du Frottement*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, 1992.
- [35] GOMES, S. C. P. Modelagem de atritos internos às articulações de robôs-manipuladores. In *XIII COBEM* (Belo Horizonte, MG, Brasil, 1995).
- [36] GOMES, S. C. P., AND CHRÉTIEN, J. P. Dynamic modeling and friction compensated control of a 1 d.o.f. rigid or flexible manipulator. In *1er Microdynamic et Pointage de Grande Précision* (Nice, France, 1992).
- [37] GOMES, S. C. P., AND CHRÉTIEN, J. P. Dynamic modeling and friction compensated control of a robot manipulator joint. In *IEEE - Int. Conference on Robotic and Automation* (1992), vol. **2**, pp. 1429–1435.

- [38] GOMES, S. C. P., GERVINI, V. I., GUIMARÃES JR., D. S., AND MACHADO, C. C. Controle de um manipulador flexível utilizando redes neurais. In *XX CBA* (2006).
- [39] GOMES, S. C. P., GOMES, D. S., AND DINIZ, C. M. Robot manipulator joint control with neuro-fuzzy friction compensation. In *18th International Congress of Mechanical Engineering* (Ouro Preto, Brazil, 2005).
- [40] GOMES, S. C. P., AND ROSA, V. S. A new approach to compensate friction in robotic actuators. In *IEEE - International Conference on Robotic and Automation* (Taipei, Taiwan, 2003), pp. 622–627.
- [41] GOMES, S. C. P., ROSA, V. S., AND ALBERTINI, B. C. Active control to flexible manipulators. *IEEE/ASME - Transactions on Mechatronics* **11** (2006), 75–83.
- [42] GORZALCZANY, M. B. On some idea of a neuro-fuzzy controller. *Information Sciences* **120** (1999), 69–87.
- [43] HUANG, S. N., TAN, K. K., AND LEE, T. H. Adaptive motion control using neural network approximations. *Automática* **38** (2002), 227–233.
- [44] JNIFENE, A. Active vibration control of flexible structures using delayed position feedback. *Systems & Control Letters* **56** (2007), 215–222.
- [45] JUANG, J. C., AND CHEN, J. S. On combining adaptive estimation and robust control for friction compensation. In *5th World Congress on Intelligent Control and Automation* (Hangzhou, P.R. China, 2004), pp. 4396–4400.
- [46] JUNG, S., AND HSIA, T. H. Analysis of nonlinear neural network impedance force control for robot manipulator. In *IEEE - Int. Conference on Robotic and Automation* (Leuven, Belgium, 1998), pp. 1731–1736.
- [47] KAILATH, T. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

- [48] KARKOUB, M., BALAS, G., TAMMA, K., AND DONATH, M. Robust control of flexible manipulators via μ -synthesis. *Control Engineering Practice* **8** (2000), 725–734.
- [49] KAYNAK, O., AND ERTUGRU, M. Neural network adaptive sliding mode control and its application to scara type robot manipulator. In *IEEE - Robotic and Automation Conference* (Albuquerque, New Mexico, USA, 1997).
- [50] KOMATSU, T., UENOHARA, M., IIKURA, S., MIURA, H., AND SHIMOYAMA, I. Active vibration control of a multi-link space flexible manipulator with torque feedback. *Advanced Robotics* **6** (1992), 23–39.
- [51] KWAKERNAAK, H., AND SIVAN, R. *Linear Optimal Control Systems*. John-Wiley and Sons, New York, 1972.
- [52] LEMMER, L., AND KISS, B. Modeling, identification, and control of harmonic drives for mobile vehicles. In *IEEE - 3rd Int. Conference on Mechatronics* (2006), pp. 369–374.
- [53] MACHADO, C. C. Um estudo sobre controle de estruturas flexíveis ativadas por escoamento de fluidos. Master's thesis, IM-UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 1999.
- [54] MACHADO, C. C., GOMES, S. C. P., AND BORTOLI, A. L. Modelagem e controle de vibrações de um manipulador flexível. In *64 SBA - Seminário Brasileiro de Análise* (São Paulo, Brasil, 2006).
- [55] MACHADO, C. C., GOMES, S. C. P., BORTOLI, A. L., GUIMARÃES JR., D., GERVINI, V. I., AND ROSA, V. S. Adaptive neuro-fuzzy friction compensation mechanism to robotic actuators. In *IEEE - Int. Conference on Intelligent Systems Design and Applications* (Rio de Janeiro, Brasil, 2007).

- [56] MACHADO, C. C., GOMES, S. C. P., PEREIRA, A. E. L., AND DE BORTOLI, A. L. Um novo algoritmo para a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis. *Revista Controle e Automação* **13** (2002), 134–140.
- [57] MAIZZA-NETO, O. *Modal analysis and control of flexible manipulators arms*. PhD thesis, M.I.T, , USA, 1974.
- [58] MATSUNO, F., WAKASHIRO, K., AND IKEDA, M. Force control of a flexible arm. *IEEE* (1994), 2107–2112.
- [59] MAYBECK, P. S. *Stochastic models, estimation and control*. Academic Press, New York, 1979.
- [60] MECKL, P. H., AND KINCELER, R. Robust motion control of flexible systems using feedforward forcing functions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **2** (1994), 245–254.
- [61] MEIROVITCH, L. *Analytical methods in vibrations*. The Macmilian Company, New York, 1967.
- [62] MOHAMED, Z., MARTINS, J. M., TOKHI, M. O., SÁ DA COSTA, J., AND BOTTO, M. A. Vibration control of a very flexible manipulator system. *Control Engineering Practice* **13** (2005), 267–277.
- [63] MORRIS, A., AND MADANI, A. Quadratic optimal control of a two-flexible-link robot manipulator. *Robótica* **16** (1998), 97–108.
- [64] OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, Brasil, 1993.
- [65] PEREIRA, A. E. L. Um estudo sobre modelagem matemática de estruturas flexíveis. Master's thesis, IM-UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 1999.
- [66] RAUBER, T. W. *Redes Neurais Artificiais*. Disponível em: <http://www.inf.ufes.br/thomas>, Acessado em: 10/11/2005.

- [67] RYU, J. H., KWON, D. S., AND PARK, Y. A robust controller design method for a flexible manipulator with a time varying payload and parameter uncertainties. In *IEEE - Int. Conference on Robotics & Automation* (Detroit, Michigan, USA, 1999), pp. 413–418.
- [68] RYU, J. H., SONG, J., AND KWON, D. S. A nonlinear friction compensation method using adaptive control and its practical application to an in-parallel actued 6-dof manipulator. *Control Engineering Practice* **9** (2001), 159–167.
- [69] SCHMITZ, E. *Experiments on the End-Point Position Control of a Very Flexible One-Link Manipulator*. PhD thesis, Stanford, California, USA, 1985.
- [70] SELMIC, R. R., AND LEWIS, F. L. Dead zone compensation in motion control systems using neural networks. *IEEE Transactions on Automatic Control* **45** (2000).
- [71] SETO, K., AND KAR, I. N. A comparative study on \mathcal{H}_∞ based vibration controller of a flexible structure system. In *Proceedings of the American Control Conference* (Chicago, Illinois, 2000), pp. 513–518.
- [72] SHABANA, A. A. *Theory of Vibration: An Introduction*. Springer Verlage, New York, 1995.
- [73] SOARES, A. M. S. *Modelagem e Identificação Experimental de Estruturas Flexíveis*. PhD thesis, ITA, São José dos Campos, Brasil, 1997.
- [74] SRIDHAR, B., AUBRUN, J., AND LORELL, R. K. Identification experiment for control of flexible structures. *IEEE Control Systems Magazine* **5** (1985), 29–35.
- [75] STEIN, G., AND ATHANS, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-32** (1987), 105–114.

- [76] SUGITA, M., MURAKAMI, T., AND OHNISHI, K. Following control of flexible manipulator. In *IEEE - AMC* (Nagoya, Japan, 2000), pp. 47–51.
- [77] SUNDARESHAN, M. K., AND ASKEW, C. Neural network-assisted variable structure control scheme for control of a flexible manipulator arm. *Automática* **33** (1997), 1699–1710.
- [78] SURDILOVIC, D., AND VUKOBRATOVIC, M. One method for efficient dynamic modeling of flexible manipulators. *Mech. Mach. Theory* **31** (1996), 297–315.
- [79] TAGHIRAD, H. D., AND BÉLANGER, P. R. An experimental study on modelling and identification of harmonic drive systems. In *IEEE - 35th Conference on Decision and Control* (Kobe, Japan, 1996), pp. 4725–4730.
- [80] TAGHIRAD, H. D., AND BÉLANGER, P. R. Intelligent torque sensing and robust torque control of harmonic drive under free-motion. In *IEEE - Int. Conference on Robotics and Automation* (Albuquerque, New Mexico, USA, 1997), pp. 1749–1754.
- [81] TAGHIRAD, H. D., AND BÉLANGER, P. R. Robust friction compensator for harmonic drive transmission. In *IEEE - Int. Conference on Control Applications* (Trieste, Italy, 1998), pp. 547–551.
- [82] TALEBI, H. A., KHORASANI, K., AND PATEL, R. V. Neural network based control schemes for flexible-link manipulators: simulations and experiments. *Neural Networks* **11** (1998), 1357–1377.
- [83] TALEBI, H. A., KHORASANI, K., AND PATEL, R. V. Experimental results on tracking control of a flexible-link manipulator: A new output re-definition approach. In *IEEE - Int. Conference on Robotics and Automation* (Michigan, Detroit, USA, 1999), pp. 1090–1095.
- [84] TAWARE, A., TAO, G., PRADHAN, N., AND TEOLIS, C. Friction compensation for a sandwich dynamic system. *Automática* **39** (2003), 481–488.

- [85] TIAN, L., AND COLLINS, C. Adaptive neuro-fuzzy control of a flexible manipulator. *Mechatronics* **15** (2005), 1305–1320.
- [86] TOKHI, M. O., MOHAMED, Z., AND SHAHEED, M. H. Dynamic characterisation of a flexible manipulator system. *Robótica* **19** (2001), 571–580.
- [87] TZOU, H. S. Nonlinear structural dynamics of space manipulators with elastic joints. *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* **4** (1989), 117–123.
- [88] WAHYUDI, SATO, K., AND SHIMOKOHBE, A. Robustness evaluation of three friction compensation methods for point-to-point (ptp) positioning systems. *Robotics and Autonomous Systems* **52** (2005), 247–256.
- [89] WAI, R. J., AND LEE, M. C. Intelligent optimal control of single-link flexible robot arm. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **51** (2004), 201–220.
- [90] ZHOU, K., AND DOYLE, J. C. *Essentials of robust control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.
- [91] ZHOU, K., DOYLE, J. C., AND GLOVER, K. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

Apêndice A NORMAS, ESPAÇOS E SISTEMAS

Neste apêndice são apresentadas noções principais sobre normas, espaços e sistemas, bem como algumas definições relevantes, cujo principal objetivo é facilitar a compreensão do texto.

A.1 Normas e espaços

Considere sistemas de entrada-saída lineares, invariantes no tempo e de dimensão finita, descritos por equações diferenciais com coeficientes constantes da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{A.1})$$

$$y = Cx + Du. \quad (\text{A.2})$$

A função de transferência de u para y é definida como

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

A função $P(s)$ é racional, $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, e com coeficientes reais. Ela é dita *estável* se é analítica no semi-plano direito (SPD) fechado ($Re(s) \geq 0$), é *própria* se o grau do denominador é maior ou igual ao grau do numerador e é *estritamente própria* se o grau do denominador é maior que o grau do numerador. Por analogia, uma matriz é racional, própria ou estritamente própria se cada uma de suas entradas também é.

Definição A.1. (Sistema ou par controlável) *O sistema dinâmico descrito pela equação (A.1) ou o par (A, B) é dito controlável se, para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$, $t_1 > 0$ e estado final x_1 , existe uma entrada (contínua por partes) $u(\cdot)$ tal que a solução da equação (A.1) satisfaz $x(t_1) = x_1$. Caso contrário, o sistema ou o par (A, B) é dito não controlável.*

Equivalentemente [90], um sistema ou par é controlável se a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^nB \end{bmatrix}$$

tem posto de linha completo.

Definição A.2. (Sistema Estável) *Um sistema dinâmico $\dot{x} = Ax$ é dito estável se todos os autovalores de A estão no semi-plano esquerdo aberto, isto é, $\text{Re}[\lambda(A)] < 0$.*

Definição A.3. (Sistema ou par estabilizável) *O sistema dinâmico (A.1), ou o par (A, B) , é dito ser estabilizável se existe uma realimentação de estado $u = Fx$ tal que o sistema é estável, isto é, $A + BF$ é estável. A matriz A com tal propriedade é dita estável ou Hurwitz.*

Definição A.4. (Sistema ou par observável) *O sistema dinâmico descrito pelas equações (A.1) e (A.2) ou pelo par (C, A) é dito ser observável se, para qualquer $t_1 > 0$ o estado inicial $x(0) = x_0$ pode ser determinado dada a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ no intervalo $[0, t_1]$. Caso contrário, o sistema ou o par (C, A) é dito não observável.*

Equivalentemente [90], um sistema ou par é observável se a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^n \end{bmatrix}^T$$

tem posto de coluna completo.

Definição A.5. (Sistema ou par detectável) *O sistema ou o par (C, A) é detectável se $A + LC$ é estável para alguma matriz L .*

Definição A.6. (Modo controlável) *Seja λ um autovalor de A , ou equivalentemente um modo do sistema. Então o modo λ é dito controlável (observável) se $x^*B \neq 0$ associados com λ , isto é, $x^*A = \lambda x^*$ ($Ax = \lambda x$) e $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$. Caso contrário o modo é dito não controlável (não observável).*

Definição A.7. (Norma) *Seja \mathcal{V} um espaço vetorial. Uma norma em \mathcal{V} é uma função real*

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \longmapsto \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

tal que para todo $x, y \in \mathcal{V}$ e $a \in \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \quad \|x\| \geq 0;$$

$$(ii) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(iii) \quad \|ax\| = |a|\|x\|;$$

$$(iv) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Seja $x \in \mathbb{C}^n$. Define-se a p -norma de x como

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$. Se $p = 1, 2, \infty$ tem-se

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2};$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$; então a norma de matrizes induzidas por uma p -norma é definida como

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Definição A.8. (Espaço $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$) O espaço $\mathcal{L}_\infty(j\mathbb{R})$ ou simplesmente \mathcal{L}_∞ é um espaço de Banach de funções (ou matrizes de funções) que são essencialmente limitadas em $j\mathbb{R}$, com a norma

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega} \text{ess} \{ \bar{\sigma}[G(j\omega)] \}.$$

onde $\bar{\sigma}$ denota o valor singular máximo.

O subespaço racional de \mathcal{L}_∞ , denotado por \mathcal{RL}_∞ , consiste de todas as funções (matrizes) de transferência racionais reais e próprias sem pólos no eixo imaginário.

Definição A.9. (Espaço \mathcal{H}_∞) O espaço Hardy \mathcal{H}_∞ é um subespaço (fechado) de \mathcal{L}_∞ de funções que são analíticas e limitadas no semi-plano direito aberto. A norma \mathcal{H}_∞ é definida como

$$\|G\|_\infty := \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}[G(s)]$$

ou ainda, pelo teorema do módulo máximo [90]

$$\|G\|_\infty := \sup_\omega \bar{\sigma}[G(j\omega)].$$

O subespaço real racional de \mathcal{H}_∞ , denotado por \mathcal{RH}_∞ , consiste de todas as funções (matrizes) de transferência estáveis, racionais reais e próprias sem pólos no eixo imaginário.

A.2 Unicidade da solução do sistema (2.21)-(2.24)

Com o objetivo de mostrar a unicidade da solução do sistema (2.21)-(2.24), supõe-se que (y_1, θ_1) e (y_2, θ_2) são duas soluções desse sistema e mostra-se que $y_1(x, t) = y_2(x, t)$ e $\theta_1(t) = \theta_2(t)$, para todo x e t .

A diferença $Y(x, t) := y_1(x, t) - y_2(x, t)$ e $\bar{\Theta}(t) := \theta_1(t) - \theta_2(t)$ satisfaz a equação

$$I_r \ddot{\bar{\Theta}}(t) - E I Y_{xx}(0, t) = 0 \quad (\text{A.3})$$

e a equação

$$E I Y_{xxxx}(x, t) + \rho(x) Y_{tt}(x, t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} Y(0, t) = 0 &\implies Y_t(0, t) = 0 \\ Y_x(0, t) &= \bar{\Theta}(t) \\ Y_{xx}(l, t) &= 0 \\ E I Y_{xxx}(l, t) &= m_c Y_{tt}(l, t) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} Y(x, 0) = 0 &\implies Y_x(x, 0) = 0 \implies Y_{xx}(x, 0) = 0 \\ Y_t(x, 0) &= 0 \\ \bar{\Theta}(0) &= 0 \\ \dot{\bar{\Theta}}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação (A.4) por $2Y_t(x, t)$ resulta

$$2EIY_{xxxx}(x, t)Y_t(x, t) + \rho(x)2Y_t(x, t)Y_{tt}(x, t) = 0.$$

Calculando-se a integral em $[0, l] \times [0, T]$, integrando-se por partes e usando-se as condições (A.3), (A.5) e (A.6), resulta

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(x)Y_t(x, T)^2 dx + EI \int_0^l Y_{xx}(x, T)^2 dx + m_c Y_t(l, T)^2 + \\ + 2EI \int_0^T Y_{xx}(0, t)\dot{\Theta}(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Reescrevendo-se a equação (A.3) tem-se que

$$I_r \ddot{\Theta}(t) = EIY_{xx}(0, t).$$

Multiplicando-se ambos os membros por $2\dot{\Theta}(t)$ e integrando-se em $t \in [0, T]$ resulta

$$I_r \dot{\Theta}(T)^2 = 2EI \int_0^T Y_{xx}(0, t)\dot{\Theta}(T) dt. \quad (\text{A.8})$$

Ao substituir-se a equação (A.8) na equação (A.7) resulta

$$\int_0^l \rho(x)Y_t(x, T) dx + EI \int_0^l Y_{xx}(x, T)^2 dx + m_c Y_t(l, T)^2 + I_r \dot{\Theta}(T)^2 = 0.$$

Logo

$$\dot{\Theta}(T) = 0 \quad \forall T > 0 \quad (\text{A.9})$$

$$Y_t(l, t) = 0 \quad \forall T > 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\int_0^l Y_{xx}(x, T)^2 dx = 0 \quad \forall T > 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\int_0^l \rho(x)Y_t(x, T) dx = 0 \quad \forall T > 0 \quad (\text{A.12})$$

Da equação (A.9) decorre que

$$\bar{\Theta}(t) = \text{constante} \quad \forall t > 0 \quad (\text{A.13})$$

e ainda, a partir da condição inicial $\bar{\Theta}(0) = 0$ (equação A.6)

$$\bar{\Theta}(t) = \bar{\Theta}(0) = 0 \quad (\text{A.14})$$

logo

$$\bar{\Theta}(t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (\text{A.15})$$

Das equações (A.11) e (A.12) decorre que

$$Y_{xx}(x, t) = 0 \quad \forall x \in [0, l], \quad \forall t > 0 \quad (\text{A.16})$$

e

$$Y_t(x, t) = 0 \quad \forall x \in [0, l], \quad \forall t > 0 \quad (\text{A.17})$$

resultando

$$Y(x, t) = f(x) \quad \forall x \in [0, l], \quad \forall t > 0. \quad (\text{A.18})$$

A partir da condição inicial $Y(x, 0) = 0$ (equação A.6) obtém-se

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, l] \quad (\text{A.19})$$

logo

$$Y(x, t) = 0 \quad \forall x \in [0, l], \quad \forall t > 0. \quad (\text{A.20})$$

Portanto, conclui-se a unicidade da solução tendo em vista que

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(t) = 0 &\implies \theta_1(t) = \theta_2(t) \\ Y(x, t) = 0 &\implies y_1(x, t) = y_2(x, t) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$\forall x \in [0, l]$ e $\forall t > 0$.

A.3 Sistemas de controle com realimentação

Considere-se a figura A.1 que representa a configuração para um sistema de controle simples entrada e simples saída (SISO) com realimentação onde $K(s)$ representa a função (matriz) de transferência do controlador, $P(s)$ representa a função (matriz) de transferência da planta, $d(s)$ é um sinal de perturbação na saída da planta, $r(s)$ é o sinal de referência, $y(s)$ o sinal de saída e $n(s)$ é um ruído no sinal de saída.

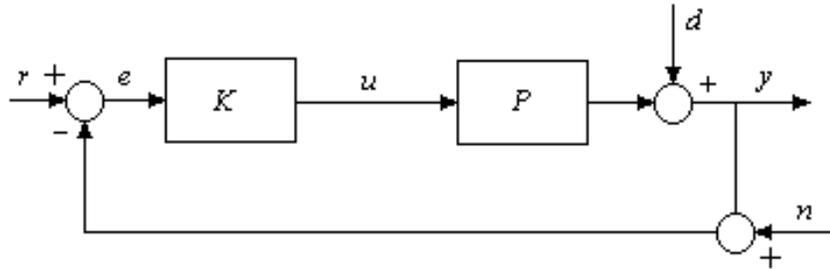


Figura A.1: Diagrama de blocos com realimentação.

Usando-se o ramo de realimentação o sinal de controle $u(s)$ (entrada da planta) é gerado a partir do erro de saída $e(s)$, a diferença entre $r(s)$ e $y(s)$. Assim resultam as seguintes relações:

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \quad (\text{A.22})$$

$$u(s) = K(s)S(s)r(s) - K(s)S(s)d(s) - K(s)S(s)n(s) \quad (\text{A.23})$$

onde $S(s) = (1 + P(s)K(s))^{-1}$ e $T(s) = (1 + P(s)K(s))^{-1}P(s)K(s)$ são chamadas *função (matriz) de transferência de sensibilidade* e *função (matriz) de transferência de sensibilidade complementar*, respectivamente. Mais ainda, S e T satisfazem $S(s) + T(s) = I$. A função (matriz) de transferência $P(s)K(s)$ é chamada *ganho de malha*, enquanto que a função $T(s)$ também é chamada de *função (matriz) de transferência em malha fechada*.

As relações representadas pelas equações (A.22) e (A.23) determinam que:

- Para rejeição de perturbação, $|S(j\omega)|$ deve ser pequeno;
- Para atenuação de ruído, $|T(j\omega)|$ deve ser pequeno;
- Para acompanhamento do sinal de referência, $|T(j\omega)| \approx 1$;
- Para redução da energia de controle, $|K(j\omega)S(j\omega)|$ deve ser pequeno;

- Para estabilidade robusta em presença de perturbação aditiva na planta, $|K(j\omega)S(j\omega)|$ deve ser pequeno.

As condições anteriormente citadas não podem ser satisfeitas simultaneamente, em razão de que é impossível que $|S(j\omega)|$ e $|T(j\omega)|$ sejam ambos pequenos já que a soma entre elas corresponde à identidade. Porém a viabilidade do projeto acontece justamente pelo fato de que os intervalos de frequências sobre os quais os objetivos são relevantes podem ser diferentes. Por exemplo, as condições de rejeição de perturbação e acompanhamento do sinal de referência são importantes na região de baixas frequências, enquanto que as condições de atenuação de ruído de medida, estabilidade robusta e redução de energia do controle, em geral, são relevantes na região de altas frequências.

Em termos da função ganho de malha, PK , as condições citadas anteriormente podem ser reescritas na seguinte forma:

- Para a rejeição de perturbação, $|PK|$ deve ser grande; condição válida no intervalo de baixas frequências;
- Para atenuação de ruído, $|PK|$ deve ser pequeno; condição válida no intervalo de altas frequências;
- Para acompanhamento do sinal de referência, $|PK|$ deve ser grande; condição válida no intervalo de baixas frequências;
- Para redução da energia de controle, $|K|$ deve ser pequeno; condição válida no intervalo de altas frequências;
- Para estabilidade robusta em presença de perturbação aditiva na planta, $|PK|$ deve ser pequeno; condição válida no intervalo de altas frequências.

As restrições acima podem ser representadas como barreiras de desempenho e da estabilidade, as quais devem ser obedecidas pelo diagrama de Bode da

função ganho de malha PK , podendo ser representadas graficamente conforme a figura A.2, onde ω_l representa o limite máximo do valor de frequência para a barreira de robustez do desempenho, ω_h representa o limite mínimo de frequência para a barreira de robustez de estabilidade e $0 \leq \omega_l \leq \omega_h$. Observa-se que o objetivo é que a magnitude do ganho de malha deve ser grande para baixas frequências e pequena para altas frequências.

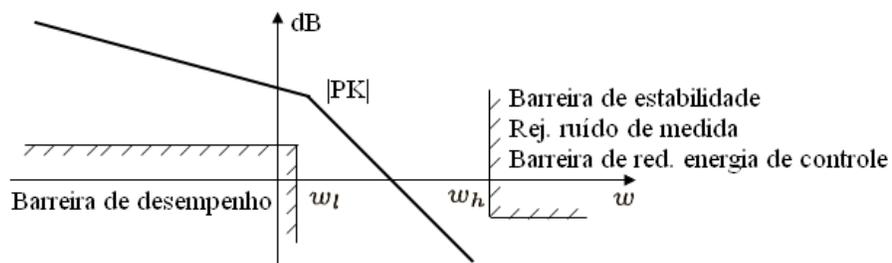


Figura A.2: Barreiras de robustez de estabilidade e desempenho.

Apêndice B REDES NEURAIIS ARTIFICIAIS - RNA

Redes Neurais Artificiais (RNA) são estruturas que tem por objetivo trabalhar no processamento de dados de forma semelhante ao cérebro humano. Pode-se dizer que uma RNA é uma estrutura de processamento de sinais constituída de vários elementos processadores simples altamente interconectados. Em uma RNA o conhecimento é obtido através de etapas de aprendizagem e armazenados nos pesos sinápticos. A conexão existente entre os neurônios é o que se chama de sinapse. A cada conexão é atribuído um valor o qual chama-se peso sináptico ou simplesmente peso. Portanto, montada uma rede neural artificial, uma coleção de valores é aplicada sobre um neurônio. Esses valores são multiplicados no neurônio pelo valor do peso e depois somados. Se esta soma alcançar um certo valor limite, um sinal é propagado pela saída (axônio) deste neurônio. Esta etapa é repetida para todos os neurônios da RNA. Em uma RNA existem três fundamentos que são: o modelo de um neurônio, a arquitetura da RNA e os paradigmas de aprendizagem, conforme será descrito a seguir.

B.1 Elemento de processamento genérico (neurônio artificial)

Um modelo computacional básico para um dado neurônio i considera a soma ponderada de entradas submetidas a uma função de ativação, conforme ilustrado na figura B.1, onde x_j são as entradas e w_{ij} os respectivos pesos, $j = 1, \dots, D$, $x_0 w_{i0}$ é chamado *termo polarizador* onde $x_0 = 1$, y_i é a saída do neurônio i tal que

$$y_i = g(\text{net}_i)$$

e

$$\text{net}_i = \sum_{j=1}^D w_{ij} x_j + w_{i0} = \bar{w}_i^T \bar{x}_i + w_{i0} \quad (\text{B.1})$$

visto que $\bar{w}_{ij}^T = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iD})^T$ e $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_D)^T$, $w_{ij}, x_j \in \mathbb{R}$. Para simplificar a notação, algumas vezes, omite-se o índice usado para denominar o neurônio, ficando y , net , w_j , \bar{w}_j , \bar{x} ao invés de y_i , net_i , w_{ij} , \bar{w}_{ij} , \bar{x}_i .

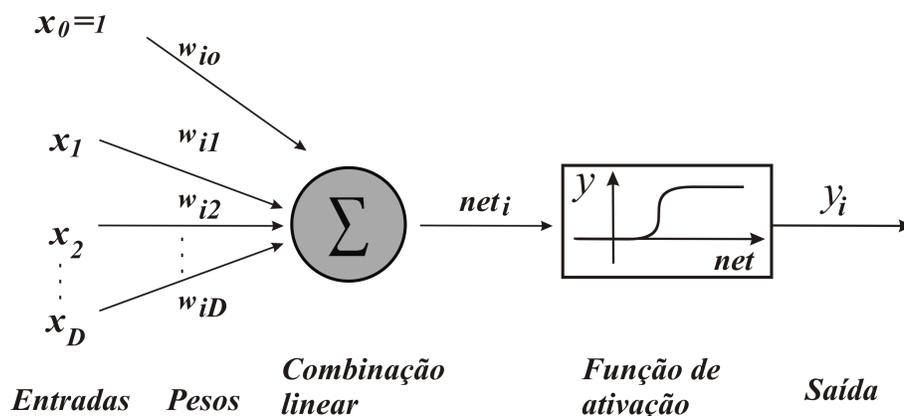


Figura B.1: Modelo de um neurônio.

B.2 Arquitetura de redes neurais artificiais e regras de adaptação de pesos

As redes neurais artificiais podem ser divididas em redes de propagação para frente (*feed-forward*) e redes realimentadas (*recurrent*) conforme representado na figura B.2. No caso das redes de propagação para a frente o fluxo de informação é unidirecional e os neurônios são agrupados em *camadas*. Camadas que não estão ligadas às entradas e nem às saídas da rede chamam-se *camadas escondidas*. Redes realimentadas têm ligações entre os neurônios sem restrições.

Uma vez definida a rede neural artificial, essa tem que ser treinada. Isso significa que os pesos w_{ij} devem ser modificados segundo um algoritmo. Um conjunto finito \tilde{T} de \hat{n} *exemplos de treino* está à disposição para adaptar os pesos durante a fase de treinamento da RNA. Em relação ao paradigma de aprendizagem destacam-se a *aprendizagem supervisionada* e a *aprendizagem não-supervisionada*. Nesse trabalho as RNAs consideradas são de propagação para frente, com apren-

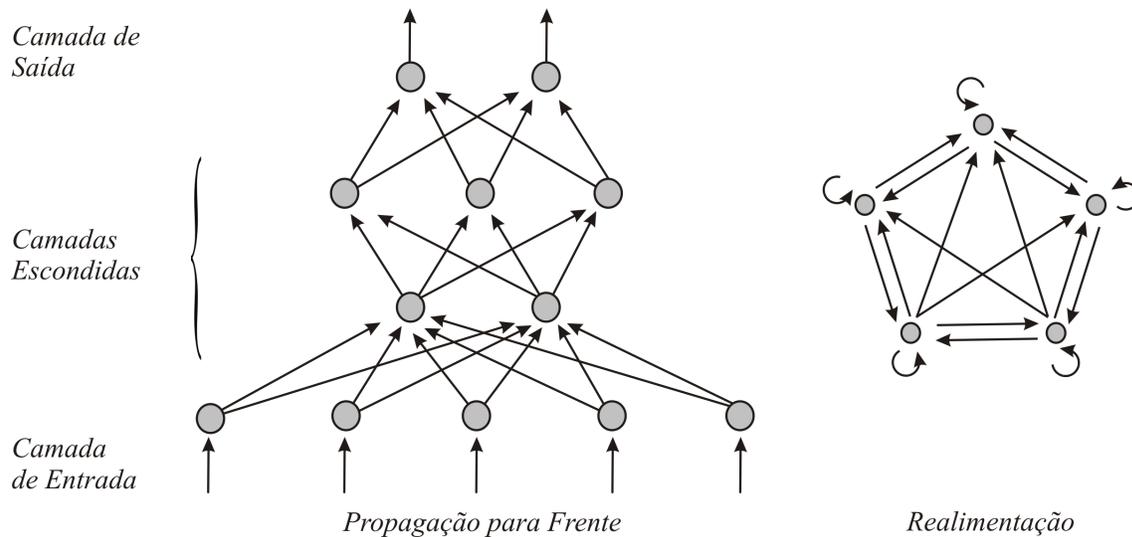


Figura B.2: Arquiteturas principais de redes neurais artificiais

dizagem supervisionada. Na aprendizagem supervisionada cada exemplo de treino é acompanhado por um valor que é o valor desejado.

O objetivo do algoritmo de aprendizagem é minimizar o erro entre os valores calculados pela RNA e desejados pelos exemplos fornecidos, num problema de aprendizagem supervisionada.

B.3 Redes de propagação para frente

As redes de propagação para frente estão organizadas em camadas, o fluxo de informação é unidirecional existindo pesos unidirecionais entre dois neurônios.

B.3.1 Erro quadrático mínimo

Uma escolha natural para medir a qualidade da função calculada pela RNA é a diferença entre o valor desejado para o exemplo \bar{x}_p e o valor calculado pela

RNA:

$$e(\bar{x}_p) = \text{desejado}(\bar{x}_p) - \text{calculado}(\bar{x}_p) \quad (\text{B.2})$$

O valor desejado é denominado t_p e o valor calculado pela RNA é denominado $d(\bar{x}_p)$. Como o erro definido em (B.2) pode ser negativo ou positivo, calcula-se o quadrado para sempre ter uma diferença positiva, considerando-se todos os exemplos individuais \bar{x}_p do conjunto de treino \tilde{T} . Então

$$e^2(\bar{x}_p) = (t_p - d(\bar{x}_p))^2 = (t_p - \bar{w}^T \bar{x}_p)^2. \quad (\text{B.3})$$

O objetivo do algoritmo é a minimização do erro, considerando-se a média de todos os \hat{n} exemplos, ou seja:

$$EQM = \frac{1}{\hat{n}} \sum_{p=1}^{\hat{n}} e^2(\bar{x}_p) = \frac{1}{\hat{n}} \sum_{p=1}^{\hat{n}} (t_p - \bar{w}^T \bar{x}_p)^2. \quad (\text{B.4})$$

B.3.2 Gradiente descendente

A técnica de descida de gradiente é utilizada no algoritmo de retropropagação do erro. O erro quadrático médio EQM é uma função dos pesos da RNA

$$EQM(\bar{w}) = f(\bar{w})$$

Essa função, em geral, não é conhecida para quem está procurando os pesos ótimos. O objetivo geral é encontrar o peso w_{\min} , que minimize o erro EQM (B.4), a partir da regra:

$$\bar{w}^{(m+1)} = \bar{w}^{(m)} + \Delta \bar{w}^{(m)} = \bar{w}^{(m)} - \eta \nabla E^{(m)} \quad (\text{B.5})$$

onde ∇E é o gradiente de E e η a taxa de aprendizagem.

Começa-se com um valor aleatório do peso $w^{(0)}$ na iteração 0. A regra de adaptação de peso é aplicada um número fixo de vezes ou até que a diferença entre os dois conjuntos de pesos consecutivos $\bar{w}^{(m+1)}$ e $\bar{w}^{(m)}$ seja menor do que uma

tolerância eps . A seguir, na tabela B.1, está descrito o algoritmo de descida de gradiente.

Tabela B.1: Algoritmo descida de gradiente

Objetivo:	Aprender um vetor de pesos ótimos \bar{w}_{opt} que minimize a função de custos E
Passo 1:	m_{max} : Número máximo de iterações eps : Diferença mínima entre dois vetores de pesos consecutivos η : Taxa de aprendizagem
Passo 2:	Inicialize para $m = 0$, $\bar{w}^{(0)}$ arbitrariamente
Passo 3:	Repete iteração m Calcule o gradiente do erro relativo aos pesos individuais w_j $\nabla E_j^{(m)} = \partial E^{(m)} / \partial w_j^{(m)}$ Adapte os pesos na direção oposta ao gradiente $w_j^{(m+1)} = w_j^{(m)} + \Delta w_j^{(m)} = w_j^{(m)} - \eta \nabla E_j^{(m)}$ até ($m > m_{max}$ ou $\ \bar{w}^{(m+1)} - \bar{w}^{(m)}\ = \sqrt{\sum_{j=0}^D (w_j^{(m+1)} - w_j^{(m)})^2} < eps$)

B.3.3 Perceptron multi-camada e retropropagação de erro

Apresenta-se, a seguir, o perceptron (rede neural artificial) com uma camada escondida e várias saídas, treinado pela retropropagação de erro, visando resolver problemas de classificação de maior complexidade.

Arquitetura

Considere o caso de uma RNA com uma única camada escondida, cuja função de ativação é uma função sigmoideal. Usando-se mais de uma saída, significa que a saída é um vetor $\bar{d} = (d_1, \dots, d_c)^T$ de c funções individuais d_i calculadas.

Assim, a RNA realiza um mapeamento de um vetor \bar{x} para um vetor \bar{d} , isto é, a RNA calcula $\bar{d}(\bar{x})$ com

$$\bar{d}(\bar{x}) = (d_1(x_1, \dots, x_D), \dots, d_c(x_1, \dots, x_D)).$$

A camada escondida tem um número H de neurônios. Usa-se, eventualmente, uma entrada constante igual a 1 também na camada escondida. Um

peso entre a variável de entrada x_j e o neurônio com índice h na camada escondida chama-se w_{hj} . Em analogia, existe um peso w_{ih} que liga o neurônio com o índice h na camada escondida com saída d_i .

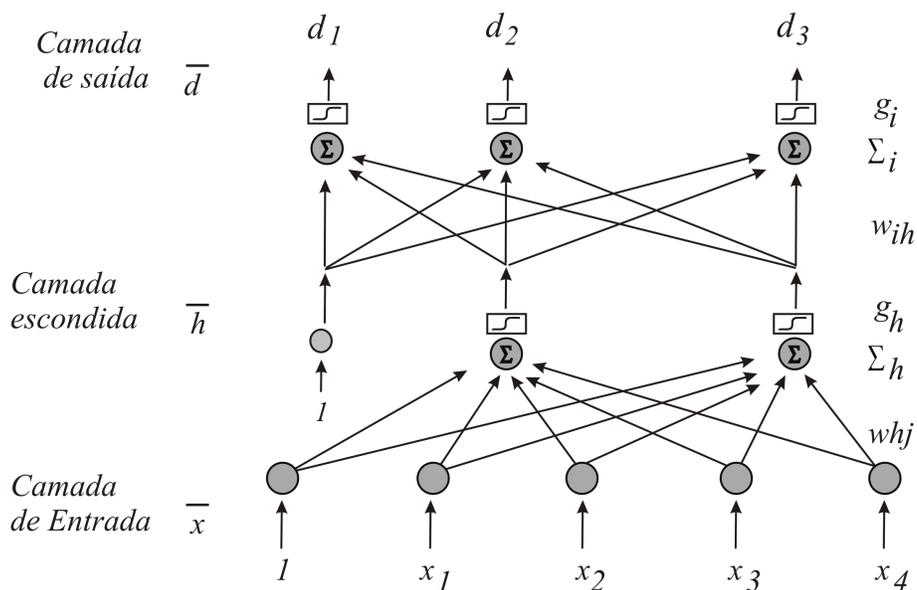


Figura B.3: Perceptron multi-camada com uma camada escondida e quatro variáveis de entrada, três variáveis de saída e função de ativação sigmoideal.

O mapeamento realizado para uma função d_i de saída é:

$$d_i(\bar{x}) = g\left(\sum_{h=0}^H w_{ih}g\left(\sum_{j=0}^D w_{hj}x_j\right)\right) \quad (\text{B.6})$$

Adaptação de pesos

Tenta-se aprender os pesos da RNA baseado numa função de erro entre o mapeamento realizado e o desejado. Usa-se a técnica de descida do gradiente. Como existem c saídas e d_i o erro quadrático (B.2) pode ser calculado, por exemplo, pela distância euclidiana na forma

$$e^2(\bar{x}_p) = \|\bar{t}_p - \bar{d}(\bar{x}_p)\|^2 = \sum_{i=0}^c (t_{pi} - d_i(\bar{x}_p))^2 \quad (\text{B.7})$$

onde \bar{t}_p é o vetor alvo e $\bar{d}(\bar{x}_p)$ é o vetor calculado pela RNA. O valor esperado do erro quadrático $E\{e^2(\bar{x}_p)\}$ pode ser estimado pela média dos erros quadráticos de todos os exemplos do conjunto de treino \tilde{T} .

$$EQM = \frac{1}{\hat{n}} \sum_{p=1}^{\hat{n}} e^2(\bar{x}_p) = \frac{1}{\hat{n}} \sum_{p=1}^{\hat{n}} \sum_{i=0}^c (t_{pi} - d_i(\bar{x}_p))^2 \quad (\text{B.8})$$

Utiliza-se o algoritmo de descida de gradiente para adaptar os pesos. Calcula-se o gradiente em relação aos pesos da camada escondida para a camada de saída $\nabla E_{ih} = \partial E / \partial w_{ih}$ e o gradiente em relação aos pesos da entrada para a camada escondida $\nabla E_{hj} = \partial E / \partial w_{hj}$. Segundo Rauber [66] as regras delta e delta generalizada podem ser escritas da forma seguinte:

Camada escondida para a camada de saída: regra delta

Define-se

$$\nabla E_{ih} = \partial E / \partial w_{ih} = -2\delta_i g_h \quad (\text{B.9})$$

onde a quantidade $\delta_i = e_i g'_i = e_i (g_i (1 - g_i))$ foi definida como *delta* da camada de saída.

Entrada para camada escondida: regra delta generalizada

De forma semelhante define-se

$$\nabla E_{hj} = \partial E / \partial w_{hj} = -2\delta_h x_j \quad (\text{B.10})$$

onde a quantidade $\delta_h = g'_h \sum_{i=1}^c \delta_i x_j$ foi definida como *delta* da camada escondida.

Nota-se que os deltas das camadas são propagadas "para trás", assim justificando o nome "retopropagação do erro" (*error backpropagation*).

Apêndice C LÓGICA *FUZZY*

Em português, lógica "*fuzzy*" pode ser interpretada como lógica nebulosa ou difusa. A teoria dos conjuntos *fuzzy* foi proposta por Lotfi Zadeh em 1965 e pode ser usada em diversas aplicações. Na presente tese, propôs-se a sua utilização em mecanismos de compensação de atritos. A seguir é feita uma breve apresentação de lógica *fuzzy* a fim de esclarecer os principais elementos envolvidos na elaboração de um sistema *fuzzy*.

A lógica *fuzzy* difere da lógica booleana por permitir a utilização de um intervalo entre os limites 0 e 1, ou seja, é possível trabalhar com todos os valores no intervalo $[0, 1]$ e não apenas com os valores 0 e 1. Sistemas *fuzzy* são sistemas baseados no conhecimento (sistemas especialistas). Um "especialista" humano cria a base de conhecimento na forma de um banco de regras. Um usuário humano consulta o sistema especialista apresentando fatos à base de fatos, conforme a figura C.1.

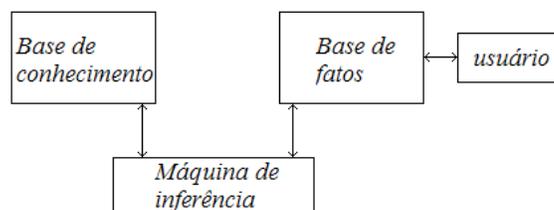


Figura C.1: Sistema especialista.

A máquina de inferência compara fatos e deduz informações novas com as premissas das regras. Por exemplo,

Fato: O erro é grande.

Regra: **Se** o erro é grande **então** aumenta o valor do ganho.

Conseqüência: Aumenta o valor do ganho.

C.1 Conjuntos *fuzzy*, funções de pertinência, funções *fuzzy* e variáveis linguísticas

Se \hat{X} é uma coleção de objetos denotado genericamente por x , então um *conjunto fuzzy* \hat{A} em \hat{X} é definido como o conjunto de pares ordenados:

$$\hat{A} = \{(x, \mu_{\hat{A}}(x)) / x \in \hat{X}\}$$

onde $\mu_{\hat{A}}(x)$ é chamada *função de pertinência* para o conjunto *fuzzy* \hat{A} . O grau de pertinência $\mu_{\hat{A}}(x)$ de um elemento x no conjunto \hat{A} admite valores entre 0 e 1.

Existem vários tipos de funções *fuzzy*, destacando-se aqui as funções triangular e trapezoidal, que serão consideradas no decorrer do trabalho.

A função triangular indica um único ponto de máximo no conjunto. A definição é do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ ou } x \geq c \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x < c \end{cases} . \quad (\text{C.1})$$

A função trapezoidal é do tipo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & d \leq x \end{cases} . \quad (\text{C.2})$$

As variáveis linguísticas não possuem valores precisos, podendo ser definidas como na linguagem, representando um espectro de valores. Por exemplo, dizer que o "erro é alto" não significa um valor exato, mas sim um intervalo. Define-se as variáveis *fuzzy* (variáveis linguísticas) através de conjuntos para representar os intervalos.

C.2 Processo de conversão

Como a inferência *fuzzy* utiliza variáveis linguísticas, para que um sistema *fuzzy* possa ser utilizado em tais aplicações será necessário converter números (valores exatos) em variáveis linguísticas e vice-versa, conforme mostrado na figura C.2.

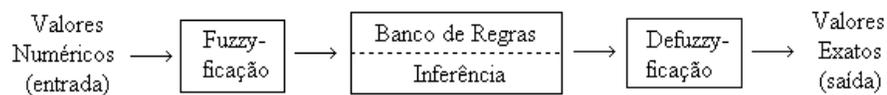


Figura C.2: Processo de conversão.

A fuzzyficação consiste em avaliar os valores numéricos de entrada na forma de conjuntos *fuzzy*. A inferência faz a adequação dos valores fuzzyficados a cada regra, deduzindo novas informações, enquanto a defuzzyficação consiste em pegar um valor no conjunto *fuzzy* e transformá-lo em um valor numérico final.

Um sistema *fuzzy* permite implementar controladores não lineares, em que as regras de funcionamento são obtidas de especialistas.

Apêndice D RESULTADO FUNDAMENTAL DO CONTROLE H_∞

A seguir é enunciado o resultado fundamental do problema de controle \mathcal{H}_∞ em termos das soluções de duas equações algébricas de Riccati, X_∞ e Y_∞ , [91]. Considere o sistema descrito pelo diagrama de blocos na figura D.1, onde $G(s)$ e $K(s)$ são funções próprias e racionais tal que $K(s)$ estabiliza internamente o sistema.

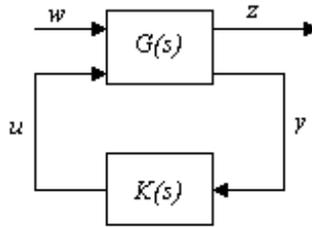


Figura D.1: Diagrama de blocos padrão.

Considere a matriz de transferência da planta G escrita na forma

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),$$

a qual é compatível com as dimensões de onde $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supõe-se que são válidas as seguintes condições:

- A1. (A, B_2) é estabilizável e (C_2, A) é detectável;
- A2. $D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ e $D_{21} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$;
- A3. $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$ tem posto de coluna completo $\forall \omega$;
- A4. $\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$ tem posto de linha completo $\forall \omega$.

Além disso,

$$R := D_{1\bullet}^* D_{1\bullet} - \begin{pmatrix} \gamma^2 I_{m1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $D_{1\bullet} := \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \end{pmatrix}$

$$\tilde{R} := D_{\bullet 1} D_{\bullet 1}^* - \begin{pmatrix} \gamma^2 I_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{\bullet 1} := \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{pmatrix}$$

$$H_\infty := \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ -C_1^* D_{1\bullet} \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} D_{1\bullet}^* C_1 & B^* \end{pmatrix}$$

$$J_\infty := \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C^* \\ -B_1 D_{\bullet 1}^* \end{pmatrix} \tilde{R}^{-1} \begin{pmatrix} D_{\bullet 1} B_1^* & C \end{pmatrix}$$

$$X_\infty := Ric(H_\infty)$$

$$Y_\infty := Ric(J_\infty)$$

$$F := \begin{pmatrix} F_{1\infty} \\ F_{2\infty} \end{pmatrix} := -R^{-1} \begin{pmatrix} D_{1\bullet}^* C_1 + B^* X_\infty \end{pmatrix}$$

$$L := \begin{pmatrix} L_{1\infty} & L_{2\infty} \end{pmatrix} := - \begin{pmatrix} B_1 D_{\bullet 1}^* + Y_\infty C^* \end{pmatrix} \tilde{R}^{-1}$$

As matrizes D , $F_{1\infty}$ e $L_{1\infty}$ são particionadas na forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} & F' \\ \hline L' & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} & F_{11\infty}^* & F_{12\infty}^* & F_{2\infty}^* \\ \hline L_{11\infty}^* & D_{1111} & D_{1112} & 0 \\ L_{12\infty}^* & D_{1121} & D_{1122} & I \\ L_{2\infty}^* & 0 & I & 0 \end{array} \right)$$

onde assume-se que todas as matrizes na partição existem.

Teorema D.1. *Considere que a planta aumentada G satisfaça as hipóteses (A1)-(A4).*

(a) *Existe um controlador admissível $K(s)$ tal que $\|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$ (i.e. $\|T_{z\omega}\|_\infty < \gamma$) se, e somente se*

- i. $\gamma > \max(\bar{\sigma}[D_{1111}, D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1111}^*, D_{1121}^*]);$
- ii. $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ com $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0;$
- iii. $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ com $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0;$
- iv. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2.$

(b) *Sendo válidas as condições da parte (a), então todos os controladores estabilizantes internamente e racionais $K(s)$ satisfazendo $\|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$ são dados por $K = F_l(M_\infty, Q)$ para um arbitrário $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ tal que $\|Q\|_\infty < \gamma$ onde*

$$M_\infty = \left(\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right)$$

$$\hat{D}_{11} = -D_{1121}D_{1111}^*(\gamma^2 I - D_{1111}D_{1111}^*)^{-1}D_{1112} - D_{1122},$$

$\hat{D}_{12} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ e $\hat{D}_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2}$ são matrizes quaisquer satisfazendo

$$\hat{D}_{12}\hat{D}_{12}^* = I - D_{1121}(\gamma^2 I - D_{1111}^*D_{1111})^{-1}D_{1121}^*,$$

$$\hat{D}_{21}^*\hat{D}_{21} = I - D_{1112}(\gamma^2 I - D_{1111}D_{1111}^*)^{-1}D_{1112}^*$$

e

$$\begin{aligned} \hat{B}_2 &= Z_\infty(B_2 + L_{12\infty})\hat{D}_{12}, \\ \hat{C}_2 &= -\hat{D}_{21}(C_2 + F_{12\infty}), \\ \hat{B}_1 &= -Z_\infty L_{2\infty} + \hat{B}_2\hat{D}_{12}^{-1}\hat{D}_{11}, \\ \hat{C}_1 &= F_{2\infty} + \hat{D}_{11}\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_2, \\ \hat{A} &= A + BF + \hat{B}_1\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_2 \end{aligned}$$

onde

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}.$$

Em Zhou et al. [91] uma versão do problema simplificado associado ao resultado acima é provada, assim como a transformação do problema geral no problema padrão (simplificado). Em razão da grande extensão, esse procedimento é aqui omitido.