

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# **K-teoria e o Teorema de Bott**

Dissertação de Mestrado

VINÍCIUS AMBROSI

Porto Alegre, 17 de abril de 2014

Dissertação submetida por Vinícius Ambrosi<sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

**Professor Orientador:**

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (PPGMat - UFRGS)

Prof. Dr. Luis Gustavo Doninelli Mendes (PPGMat - UFRGS)

Prof. Dra. Miriam Telichevesky (PPGMat - UFRGS)

Prof. Dr. Samuel Volkweis Leite (UFSM)

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

# Agradecimentos

Agradeço à UFRGS e ao seu corpo docente por abrirem portas que talvez eu sozinho não conseguisse abrir. Agradeço também à CAPES pela bolsa de estudos, sem a qual a realização do mestrado seria inviável.

Agradeço a minha família pelo apoio durante esses longos anos de estudo, sem questionar as minhas decisões, por mais estranhas que elas pareçam (afinal, quem quer ser um matemático?). Devo a eles também boa parte do meu espírito questionador, que provavelmente me botou no caminho da pesquisa.

Agradeço ao Luiz Fernando Carvalho da Rocha por ter ajudado a moldar minha visão de como a matemática deve ser: precisa e direta, mas ao mesmo tempo fundamentada na intuição. Agradeço-o também por ter sido um excelente orientador até o final do meu mestrado e pelos ensinamentos passados nesses quase 7 anos como meu professor.

Agradeço ao Jonier Amaral Antunes, colega do mestrado e companheiro de estudos, por embarcar em projetos ambiciosos de entender boa parte da matemática e física. É difícil expressar o quão importante é ter alguém para compartilhar as dificuldades que surgem no estudo e na pesquisa, especialmente numa área tão abstrusa.

Agradeço também aos membros da banca, pela paciência e pelos comentários que me ajudaram a melhorar essa dissertação.

Agradeço, por último, a minha companheira Priscilla, por me manter motivado na hora de estudar e por me fazer feliz em todos os outros momentos.

## Resumo

O principal objetivo desta dissertação é provar o teorema da periodicidade de Bott para a K-teoria complexa. Para isso, vamos desenvolver a teoria dos fibrados vetoriais e vamos definir os grupos de K-teoria de um par de espaços compactos. Além disso, vamos provar que a K-teoria é uma teoria de cohomologia generalizada, definindo, com isso, o anel  $K^*(X)$ .

# Abstract

The main goal of this dissertation is to prove the Bott periodicity theorem in the complex K-theory. Accordingly, we will develop the vector bundle theory and we will define the K-theory groups of a pair of compact spaces. Furthermore, we will prove that K-theory is a generalized cohomology theory. As a consequence, we will be able to define the ring  $K^*(X)$ .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Espaços topológicos</b>	<b>4</b>
1.1 Definições básicas . . . . .	4
1.2 Axiomas de separação e compacidade . . . . .	6
1.3 Quocientes de espaços topológicos . . . . .	7
1.4 Topologias definidas localmente . . . . .	11
1.5 Homotopias e pares de espaços . . . . .	12
<b>2 Fibrados vetoriais</b>	<b>15</b>
2.1 A categoria dos fibrados . . . . .	15
2.2 Representações locais . . . . .	19
2.3 O pullback de um fibrado . . . . .	21
2.4 Fibrados associados a um functor . . . . .	24
2.5 Subfibrados e morfismos estritos . . . . .	27
<b>3 Fibrados sobre compactos</b>	<b>31</b>
3.1 Compactos e a extensão de seções . . . . .	31
3.2 Invariância por homotopias . . . . .	33
3.3 Métricas Hermitianas . . . . .	35
3.4 Subfibrados e monomorfismos . . . . .	38
<b>4 K-teoria</b>	<b>40</b>
4.1 Semianéis e K-teoria . . . . .	40
4.2 K-teoria de um par de espaços . . . . .	43
4.3 Colapsando fibrados triviais . . . . .	45
4.4 A definição do grupo $\tilde{K}^1(X)$ . . . . .	48
4.5 Colando fibrados vetoriais . . . . .	50
4.6 O homomorfismo bordo . . . . .	52

<b>5</b>	<b>Teorema de Bott</b>	<b>54</b>
5.1	Fibrados sobre $X \times S^2 = X \times \mathbb{C}P$ . . . . .	55
5.2	Aproximações e séries de Laurent . . . . .	57
5.3	Morfismos polinomiais . . . . .	63
5.4	Morfismos afins . . . . .	65
5.5	O inverso do produto exterior . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Produtos na K-teoria</b>	<b>73</b>
6.1	Periodicidade de Bott . . . . .	73
6.2	Produtos na K-teoria . . . . .	76
6.3	Mayer-Vietoris . . . . .	77
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Introdução

A K-teoria foi introduzida pela primeira vez em um artigo de Atiyah e Hirzebruch [AH59]. Nesse artigo eles buscavam estender às variedades diferenciáveis uma generalização, dada por Grothendieck, do teorema de Riemann-Roch. Ali já podíamos ver os primeiros indícios da relação da K-teoria com operadores diferenciais e também das suas propriedades cohomológicas.

Essas propriedades foram desenvolvidas logo a seguir em um artigo dos mesmos autores [AH61]. A relação com os operadores diferenciais, contudo, só foi aprofundada alguns anos depois, quando foi demonstrado o teorema do índice [AS68a] [AS68b]. Em ambos os casos, entretanto, o teorema de Bott teve um papel essencial.

Nosso objetivo aqui, neste texto, é desenvolver a teoria dos fibrados vetoriais e, com isso, desenvolver a K-teoria o suficiente para poder provar o teorema de Bott e algumas dessas propriedades cohomológicas. A exposição dada aqui se baseará principalmente nos livros de Atiyah, Hatcher e Husemöller [Ati67], [Hat09] e [Hus94].

Uma boa referência para o desenvolvimento dessas teorias de um ponto de vista histórico é o livro de Dieudonné [Die09].



# Capítulo 1

## Espaços topológicos

O objetivo deste capítulo é definir alguns conceitos básicos e fixar as notações. Para uma exposição mais cuidadosa dos teoremas de topologia geral o leitor deve se referir ao livro de Munkres [Mun00]. A regra geral foi demonstrar somente as proposições que não estão demonstradas naquele livro.

### 1.1 Definições básicas

Um espaço topológico é um conjunto com uma noção de proximidade ou de vizinhança. Seguindo nessa linha, poderíamos definir os conjuntos abertos como sendo os subconjuntos que são uma vizinhança de cada um de seus pontos. Este curso é mais intuitivo. Definir abertos diretamente, contudo, tende a simplificar a exposição. Seguiremos esse último caminho.

**Definição 1.1.** Uma topologia em  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$ , que serão chamados de subconjuntos abertos de  $X$ , tais que:

1. Os conjuntos  $\emptyset$  e  $X$  são abertos;
2. Uma união arbitrária de abertos é conjunto aberto;
3. Uma interseção finita de abertos é um conjunto aberto.

Chamaremos o par  $(X, \tau)$  de espaço topológico.

**Construção 1.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos. Podemos, então, definir o espaço  $X \sqcup Y = (X \times 0) \cup (Y \times 1)$  que é chamado de união disjunta. Os abertos desse espaço são as uniões disjuntas de abertos de  $X$  com abertos de  $Y$ .

**Construção 1.2.** Também podemos dar uma topologia para o produto cartesiano  $X \times Y$  de dois espaços topológicos. Um conjunto  $A$  é aberto nessa topologia se, para cada elemento  $a \in A$ , existe um subconjunto  $W \subset A$  que contém  $a$  e que é igual a um produto de um aberto  $U \subset X$  com um aberto  $V \subset Y$ .

Chamaremos de fechado o conjunto que tem como complementar um aberto. É fácil mostrar que os fechados satisfazem propriedades análogas aos abertos. Mais especificamente, o vazio e o espaço topológico, vistos como subconjuntos do último, são fechados; a interseção arbitrária de fechados é fechada e a união finita de fechados é um subconjunto fechado.

Um conjunto  $V$  é uma vizinhança de um ponto  $x$  se existe um aberto que contém  $x$  e está contido em  $V$ . As funções contínuas serão então, naturalmente, as funções que preservam o conceito de vizinhança. Vemos que esta definição é praticamente idêntica à dada num curso de análise.

**Definição 1.2.** Uma função  $f: X \rightarrow Y$  é contínua se para todo  $x \in X$  e para toda vizinhança  $V$  de  $f(x)$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subset V$ .

Chamaremos de homeomorfismo toda a função contínua que tem uma inversa contínua. Dois espaços topológicos serão homeomorfos quando existir um homeomorfismo entre eles. Denotaremos essa relação de equivalência pelo símbolo  $\cong$ . Aqui usamos o fato que a composição de funções contínuas é contínua. Note que, na definição acima, poderíamos ter suposto que as vizinhanças eram abertas sem alterar o conceito de continuidade.

Note também que, ao longo deste texto, as expressões *a aplicação  $f$*  ou *o mapa  $f$*  só serão usadas quando a função  $f$  em questão for contínua.

A seguir uma caracterização do conceito de função contínua.

**Proposição 1.1.** *Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma função qualquer. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A função  $f$  é contínua;*
2. *A imagem inversa  $f^{-1}(U)$  é aberto, para todo o aberto  $U \subset Y$ ;*
3. *A imagem inversa  $f^{-1}(A)$  é fechada, para todo o fechado  $A \subset Y$ ;*

Pela proposição acima toda a imagem inversa de um fechado por uma função contínua é um fechado. Por outro lado, dada uma função  $f$  contínua, diremos que  $f$  é uma aplicação fechada se tivermos que  $f(A) \subset Y$  é fechado para todo o conjunto fechado  $A \subset X$ .

Todo o subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  tem um topologia induzida. Essa topologia é dada pela coleção dos conjuntos  $U \cap A$ , sendo que  $U$  é aberto em  $X$ . Diremos que um subconjunto é um subespaço quando quisermos enfatizar que ele está munido dessa topologia.

Com essas definições, vemos que a inclusão  $i_A: A \rightarrow X$  é contínua. Consequentemente, a restrição  $f|_A$  de uma função contínua  $f: X \rightarrow Y$ , que é por definição igual a  $f \circ i_A$ , é contínua. Em contrapartida:

**Proposição 1.2.** *Uma função  $f: X \rightarrow Y$  é contínua se e somente se para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $V$  desse ponto para a qual  $f|_V$  é contínua.*

Isso mostra que continuidade é um conceito local, ou seja, só depende do comportamento da função perto de um ponto. Uma observação similar à última nos permite definir funções contínuas por partes.

**Proposição 1.3.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois fechados tais que  $A \cup B = X$ . Sejam, também,  $f: A \rightarrow Y$  e  $g: B \rightarrow Y$  funções contínuas tais que  $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ . Então existe uma função contínua  $h: X \rightarrow Y$  tal que  $h|_A = f$  e  $h|_B = g$ .*

Por último, devemos definir o conceito de mergulho, que generaliza a inclusão de um subespaço. Diremos que uma função contínua é um mergulho se ela se restringir a um homeomorfismo entre seu domínio e sua imagem.

## 1.2 Axiomas de separação e compacidade

A definição de espaço topológico é muito geral e, por isso, vamos precisar de algumas hipóteses adicionais. Elas são classificadas em dois tipos: as hipóteses de separação e as hipóteses que restringem o tamanho do espaço localmente ou globalmente. As primeiras exigem que existam vizinhanças disjuntas de certos conjuntos disjuntos. As últimas geralmente tomam a forma de restrições na cardinalidade de bases ou coberturas. Vamos usar alguns poucos exemplos dessas hipóteses. Primeiramente, definiremos as de separação.

**Definição 1.3.** Um espaço topológico é de Hausdorff se para todo par de pontos distintos existirem vizinhanças disjuntas que os contêm.

É fácil ver que os pontos são subconjuntos fechados em um espaço de Hausdorff. Pois, para cada ponto do espaço, podemos unir as vizinhanças abertas que não o contêm. Esse conjunto é um aberto que, pela propriedade acima, contém todos os outros pontos do espaço. Também temos que todo o subespaço de um espaço de Hausdorff é de Hausdorff, pois basta tomar a interseção do subespaço com os abertos disjuntos dados pela definição.

**Definição 1.4.** Um espaço topológico é normal se para cada dois fechados disjuntos existem vizinhanças disjuntas que os contêm.

É interessante observar que um espaço é normal e de Hausdorff se, e somente se, existe, para cada par de subconjuntos fechados disjuntos, uma função contínua que os separa. Este é o conteúdo do lema de Urysohn, que, por sua vez, implica o teorema da extensão de Tietze. Esse teorema será usado para estender seções de fibrados vetoriais na seção 3.1.

Agora, daremos um exemplo do segundo tipo de hipótese: a compacidade. Intuitivamente, um espaço é compacto se ele não se estende até o infinito, ou, em outras palavras, se ele pode ser imaginado dentro de uma parte pequena de um espaço maior.

De fato, pode-se provar que todo o espaço métrico compacto (de dimensão de Lebesgue finita) pode ser mergulhado dentro de um subconjunto limitado de algum  $\mathbb{R}^m$ , o que suporta a nossa intuição. A definição precisa dessa propriedade, contudo, é um pouco abstrata.

**Definição 1.5.** Um espaço topológico é compacto se é de Hausdorff e se toda cobertura aberta tem uma subcobertura finita.

Pode-se provar, diretamente da definição, que todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto. Por outro lado, todo subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado. Analogamente, temos também que a imagem de um subconjunto compacto por uma função contínua é compacta, desde que o contradomínio seja de Hausdorff.

Como um corolário dessa afirmação temos que:

**Proposição 1.4.** *Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma função contínua injetiva. Se  $X$  é um espaço compacto e  $Y$  de Hausdorff, então  $f$  é um mergulho. Em particular, toda a bijeção contínua com domínio compacto é um homeomorfismo.*

Temos, também, que as definições dadas nesta seção estão relacionadas.

**Proposição 1.5.** *Todo o espaço topológico compacto é normal.*

A idéia por trás da demonstração dessa proposição é usar o fato de que todo compacto é Hausdorff para achar vizinhanças disjuntas de pontos  $x \in A$  e  $y \in B$ , sendo que  $A$  e  $B$  são os fechados que pretendemos separar. Depois usamos o fato de que existem subcoberturas finitas para poder mostrar que certas interseções de abertos são abertas.

### 1.3 Quocientes de espaços topológicos

Uma partição de um conjunto  $X$  é uma coleção disjunta de subconjuntos não-vazios que cobrem esse conjunto. Para toda partição  $X^*$  existe uma função  $p: X \rightarrow X^*$  que leva um elemento de  $X$  no único elemento de  $X^*$  ao qual ele pertence. Chamaremos essa função sobrejetiva de projeção no quociente.

Suponha, agora, que  $X$  é um espaço topológico. Diremos que  $U \subset X^*$  é aberto se o conjunto  $p^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ . Com isso, definimos uma topologia na qual a projeção é contínua. A próxima proposição dá uma condição suficiente para que uma função contínua qualquer desça ao quociente

$X^*$ . Veja que a hipótese de que  $g$  existe é equivalente à hipótese de que  $f$  é constante em  $p^{-1}(x)$  para todo o  $x \in X^*$ .

**Proposição 1.6.** *Seja  $X^*$  uma partição de  $X$  e seja  $f: X \rightarrow Y$  uma função contínua. Suponha que existe uma função  $g$  tal que*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow p & \nearrow g & \\ X^* & & \end{array}$$

*é comutativo. Então  $g$  é contínua.*

Será interessante também determinar quando que uma função é uma projeção em algum quociente. Com esse objetivo daremos a seguinte definição.

**Definição 1.6.** Uma função contínua sobrejetiva  $f: X \rightarrow Y$  é uma projeção se a seguinte afirmação for verdadeira

$$U \subset Y \text{ é aberto} \iff f^{-1}(U) \subset X \text{ é aberto.}$$

Essa definição é uma simples restrição do conceito de continuidade. Pois aqui, além de exigirmos que a imagem inversa de um aberto seja aberta, também exigimos que  $f(f^{-1}(U))$  seja aberto sempre que  $f^{-1}(U)$  for aberto. Observe, também, que a composição de projeções é uma projeção.

**Proposição 1.7.** *Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma projeção. Defina uma partição  $X^*$  que é dada pelos conjuntos  $f^{-1}(y)$ , para  $y \in Y$ . Então existe um homeomorfismo*

$$h: X^* \longrightarrow Y$$

*sendo que  $X^*$  está com a topologia do quociente. Em outras palavras, toda projeção é uma projeção no quociente a menos de um homeomorfismo.*

Precisaremos saber como os quocientes se comportam em relação às hipóteses de separação. Para os nossos propósitos, a próxima proposição bastará.

**Proposição 1.8.** *Seja  $X$  um espaço normal e de Hausdorff. Seja  $p: X \rightarrow Y$  uma projeção fechada. Então, o espaço topológico  $Y$  é normal e de Hausdorff.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que para todo  $A \subset Y$  e para todo aberto  $U \supset p^{-1}(A)$ , existe um aberto  $V \supset A$  tal que  $p^{-1}(V) \subset U$ . Em outras palavras, toda vizinhança da imagem inversa de um fechado por  $p$  contém um aberto que é, também, uma imagem inversa.

Pois seja  $C = X - U$  que é fechado. Já que  $p$  é fechada, então  $p(C)$  é fechado e, pela hipótese, disjunto de  $A$ . Temos então que  $V := Y - p(C)$  é um aberto que contém  $A$ . Como nenhum elemento de  $C$  está contido em  $p^{-1}(V)$ , temos que  $p^{-1}(V) \subset U$ , como enunciado.

Agora, vamos voltar a demonstração da proposição. Primeiro observamos que os pontos formam conjuntos fechados em  $Y$ , pois  $X$  é de Hausdorff e  $p$  é fechada. Para mostrar que  $Y$  é normal, escolhamos dois conjuntos fechados disjuntos  $A_1$  e  $A_2$  de  $Y$  e duas vizinhanças abertas disjuntas  $U_1$  e  $U_2$  dos conjuntos  $p^{-1}(A_1)$  e  $p^{-1}(A_2)$ , respectivamente. Essas vizinhanças existem pois  $X$  é normal.

Pela afirmação anterior, existem dois abertos  $V_1$  e  $V_2$  de tal forma que  $p^{-1}(V_i) \subset U_i$ . Mas como os  $U_i$  são disjuntos, os  $V_i$  também são.  $\square$

**Corolário 1.1.** *Seja  $X$  um espaço compacto e seja  $p: X \rightarrow Y$  uma projeção fechada. Então  $Y$  é um espaço compacto.*

*Demonstração.* Sabemos que a imagem de um compacto por uma função contínua é um compacto desde que o contradomínio dessa função seja Hausdorff. Mas pela proposição anterior  $Y$  é Hausdorff.  $\square$

Toda a relação de equivalência define uma partição. Nesse caso a projeção associa um ponto a sua classe de equivalência. O espaço quociente por uma relação é, então, definido como sendo a partição associada a essa relação com a topologia definida acima.

**Exemplo 1.1.** Definiremos neste exemplo o espaço projetivo complexo  $\mathbb{C}P^n$ . Esse espaço é o quociente de  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  pela relação de equivalência que identifica dois vetores que forem múltiplos um do outro (escalares complexos).

Também podemos ver esse espaço como o conjunto dos subespaços de dimensão um em  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Isso porque a aplicação que associa o vetor ao espaço gerado por ele é uma bijeção quando descemos ao quociente.

A projeção  $p: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é fechada e sobrejetiva quando restrita a esfera  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ . Isso somado ao fato de que todas as esferas são compactas nos dá que os espaços projetivos são compactos.

Logo abaixo, definiremos duas construções que serão muito importantes para o estudo das propriedades cohomológicas da K-teoria. Elas são o quociente de um espaço por um subespaço fechado e a colagem de dois espaços a partir de um homeomorfismo.

**Construção 1.3.** Seja  $A \subset X$  fechado. Definimos o espaço  $X/A$  como sendo o quociente do espaço topológico  $X$  pela relação  $\sim_1$  que é dada por

$$x \sim_1 y \iff x = y \quad \text{ou} \quad x, y \in A$$

Essa é, obviamente, uma relação de equivalência. Seu espaço quociente é uma cópia de  $X$  onde reduzimos  $A$  a um ponto. É fácil ver que a projeção, quando restrita ao complementar de  $A$ , é um homeomorfismo.

Podemos ver, também, que a projeção é fechada. Para isso temos que mostrar que a imagem de um fechado é fechada. O caso em que o fechado  $F \subset X$  é tal que  $F \cap A = \emptyset$  é trivial, pois no complementar de  $A$  a projeção  $p$  é um homeomorfismo.

Para o outro caso, nós observamos que, já que  $A$  é fechado,  $(A \cup F)^c$  é aberto. Além disso, decorre do fato que  $p$  é bijetiva fora de  $A$  e de que  $F \cap A \neq \emptyset$  que

$$p(F)^c = p(A \cup F)^c = p[(A \cup F)^c]$$

Entretanto, a imagem inversa de  $p[(A \cup F)^c]$  é  $(A \cup F)^c$ . Isso junto ao fato de  $p$  ser projeção implica que  $p[(A \cup F)^c]$  é aberto. Por isso, o complementar de  $p(F)$  é aberto e, portanto,  $p(F)$  é fechado. Demonstramos, então, que  $p$  é fechada.

Usando esse fato e a proposição 1.8, podemos mostrar que, se  $X$  é normal e de Hausdorff, então o quociente  $X/A$  é normal e de Hausdorff. Temos, também, pelo corolário 1.1, que se  $X$  for compacto então o quociente  $X/A$  é compacto.

Por último, observe que se  $X$  é compacto,  $A$  é fechado e  $U \subset A$  é aberto, então

$$X/A \cong (X - U)/(A - U) \tag{1.1}$$

Essa observação será útil na hora de mostrar que vale a excisão para a K-teoria.

Para demonstrar 1.1, note que  $X - U$  e  $X$  são compactos e, por isso, os quocientes são compactos. Sabemos também que a composição da inclusão de  $X - U$  em  $X$  com a projeção no quociente  $X/A$  desce a uma função contínua  $(X - U)/(A - U) \rightarrow X/A$ , pois respeita as identificações. A aplicação resultante é uma função bijetiva contínua entre compactos e, portanto, é um homeomorfismo.

**Construção 1.4.** Sejam  $A_1 \subset X_1$  e  $A_2 \subset X_2$  fechados e seja  $f: A_1 \rightarrow A_2$  um homeomorfismo. Podemos definir uma outra relação de equivalência  $\sim_2$  que está definida na união disjunta  $X_1 \sqcup X_2$  e é dada por

$$z \sim_2 w \iff z = w \quad \text{ou} \quad f(z) = w \quad \text{ou} \quad f(w) = z$$

Ou seja, identificamos  $A_1$  com  $A_2$  usando  $f$ . O quociente da união disjunta por essa relação será denotado por  $X_1 \cup_f X_2$ . Diremos que uma tripla  $(X_1, f, X_2)$  com essas propriedades define um espaço topológico por partes.

Da mesma forma que no exemplo anterior, a projeção é fechada. Isso porque, como é fácil ver, a projeção restrita a  $X_1$  ou a  $X_2$  é um mergulho. Para provar isso, basta usar a definição de projeção e observar que nesses conjuntos a projeção é injetiva. Também decorre da definição de projeção, e do fato que  $A_1$  é fechado, que  $p(X_1 - A_1)$  é aberto, pois sua imagem inversa é aberta. O complementar  $p(X_2)$  desse conjunto é, então, fechado. Portanto, a projeção no quociente  $p$  restrita a  $X_2$  é fechada. O mesmo vale para  $X_1$ . Agora, como todo o fechado na união disjunta é uma união disjunta de fechados, nós temos que  $p$  é fechada em  $X_1 \sqcup X_2$ .

Com isso, temos que se  $X_1$  e  $X_2$  são normais e de Hausdorff, então  $X_1 \cup_f X_2$  é normal e de Hausdorff, e se  $X_1$  e  $X_2$  são compactos, então  $X_1 \cup_f X_2$  é compacto. Note que é para obter essas conclusões que supomos que  $A_1$  e  $A_2$  são fechados.

A construção feita neste exemplo é uma extensão natural do conceito de união de conjuntos. Pois seja  $X$  um espaço compacto e sejam  $X_1$  e  $X_2$  subconjuntos fechados tais que  $X = X_1 \cup X_2$ . Defina  $A_1 = A_2 := X_1 \cap X_2$ . Temos então que

$$X_1 \cup_{\text{id}} X_2 \cong X$$

Isso porque a aplicação  $X_1 \sqcup X_2 \rightarrow X$  desce a uma função bijetiva no quociente e os dois conjuntos são compactos.

Por ser uma extensão da união é razoável esperar que existe um análogo para as funções definidas por partes. De fato, dadas duas funções  $g_i: X_i \rightarrow Y$  tais que  $g_1(x) = g_2 \circ f(x)$  para  $x \in A_1$ , temos que existe uma função  $g: X_1 \cup_f X_2 \rightarrow Y$  tal que  $g|_{X_i} = g_i$ . Isso decorre do caso especial que foi descrito na proposição 1.3.

## 1.4 Topologias definidas localmente

A topologia de uma variedade diferencial é determinada de forma única pelas suas coordenadas locais. Isso porque as trocas de coordenadas são homeomorfismos. Nesta seção, vamos demonstrar essa proposição num contexto mais geral, útil para definir funtores, como o produto tensorial, em fibrados.

Suponha, então, que os conjuntos  $U_i \subset X$  formam uma cobertura do conjunto  $X$  no qual queremos definir uma topologia. Defina, então, os conjuntos  $U_{ij}$  que são as interseções  $U_i \cap U_j$ . Suponha, também, que existam bijeções  $f_i: U_i \rightarrow Y_i$ , sendo que os  $Y_i$  são espaços topológicos. Defina, então, as trocas de coordenadas  $f_{ji}: f_i(U_{ij}) \rightarrow f_j(U_{ij})$ , que são dadas por  $f_{ji} = f_j \circ (f_i)^{-1}$ .

**Proposição 1.9.** *Suponha que as trocas de coordenadas  $f_{ji}$  são homeomorfismos. Suponha, também, que os conjuntos  $f_i(U_{ij})$  e  $f_j(U_{ij})$  são abertos. Então existe uma topologia em  $X$  que faz as funções  $f_i$  serem homeomorfismos.*

*Demonstração.* Primeiro precisamos definir a topologia em  $X$ . Para isso, diremos que um conjunto  $U \subset X$  é aberto se  $f_i(U)$  for aberto para todo  $i$ . Isso define uma topologia pois bijeções preservam uniões e interseções. Falta mostrar que as  $f_i$  são homeomorfismos. Por um lado, é fácil ver que a aplicação inversa  $f_i^{-1}$  é contínua, pois, por definição, se  $U$  é aberto,  $f_i(U)$  é aberto.

Por outro lado, temos que mostrar que  $f_i^{-1}(V)$ , para  $V$  aberto em  $Y_i$ , é tal que  $f_j[f_i^{-1}(V)]$  é aberto. Isso é equivalente a mostrar que  $f_{ji}(V)$  é aberto. Mas  $f_{ji}$  é um homeomorfismo entre conjuntos abertos e portanto temos o enunciado.  $\square$



A coleção das funções  $f_i$  que satisfazem as hipóteses da última proposição serão chamadas de atlas para a topologia. Diremos, também, por abuso de notação, que  $(X, f_i)$  é um espaço topológico.

Agora, veja que uma função contínua  $h: X \rightarrow Y$ , para algum espaço  $Y$ , é contínua se, e somente se,  $h \circ f_i^{-1}$  for contínua, para todo  $i$ . Pois  $h$  é contínua se, e só se,  $h^{-1}(U)$  é aberto para todo  $U$  aberto. Mas  $h^{-1}(U)$  ser aberto é equivalente a  $f_i \circ h^{-1}(U) = (h \circ f_i^{-1})^{-1}(U)$  ser aberto, para todo  $i$ . Isso é equivalente a  $h \circ f_i^{-1}$  ser contínua, para todo  $i$ .

De forma mais geral:

**Proposição 1.10.** *Sejam  $(X, f_i)$  e  $(Y, g_j)$  dois espaços topológicos. Então uma função qualquer  $h: X \rightarrow Y$  é contínua se, e só se, suas representações locais  $h_{ji} = g_j \circ h \circ f_i^{-1}$  são contínuas para todo  $i$  e  $j$ .*

*Demonstração.* Pelo parágrafo acima,  $h$  é contínua se, e somente se,  $h \circ f_i^{-1}$  é contínua para todo  $i$ . Como as funções  $g_j$  são homeomorfismos definidos em subespaços abertos, nós temos o enunciado.  $\square$

Sejam  $f_i$  e  $g_j$  homeomorfismos que formam dois atlas diferentes para um conjunto  $X$ . Pela proposição acima a função identidade  $\text{id}: (X, f_i) \rightarrow (X, g_j)$  é contínua se  $g_j \circ f_i^{-1}$  é contínua para todo  $i$  e  $j$ . Por isso, a identidade define um homeomorfismo entre essa duas topologias se, e só se, as funções  $f_i \circ g_j^{-1}$  e  $g_j \circ f_i^{-1}$  são contínuas. Isso é o mesmo que dizer que a união do atlas formado pelas  $f_i$  e do atlas formado pela  $g_j$  é um atlas.

## 1.5 Homotopias e pares de espaços

Uma homotopia é, intuitivamente, uma deformação contínua entre duas funções contínuas. Sua definição precisa é dada abaixo.

**Definição 1.7.** Uma homotopia entre duas funções contínuas  $f_0: X \rightarrow Y$  e  $f_1: X \rightarrow Y$  é uma função contínua

$$f: X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

tal que  $f(x, 0) = f_0(x)$  e  $f(x, 1) = f_1(x)$ . (Notação:  $f_0 \simeq f_1$ .)

A relação  $f \simeq g$  é uma relação de equivalência que preserva composições. Diremos que uma função é homotopicamente trivial quando ela for homotópica a uma constante. Denotaremos  $f(x, t)$  por  $f_t(x)$ , para todo  $t \in I$ , e diremos que  $f_t: X \rightarrow Y$  é uma homotopia quando  $f$  tiver essa propriedade. Veja que aqui usamos a notação  $I = [0, 1]$  para o intervalo fechado unitário.

Dois espaços  $X$  e  $Y$  tem o mesmo tipo de homotopia se existe uma  $f: X \rightarrow Y$  e uma  $g: Y \rightarrow X$  contínuas tais que  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  e  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Chamaremos uma  $f$  desse tipo de equivalência homotópica. Intuitivamente, as equivalências homotópicas são homeomorfismos a menos de homotopias.

Um retrato é uma função contínua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $A \subset X$  e  $r|_A$  é a identidade. Pode-se mostrar que se  $r$  é um retrato e  $X$  é de Hausdorff, então o subconjunto  $A$  é fechado.

Existe um tipo especial de equivalência homotópica que tem um papel especial, o retrato por deformação. Esses são os retratos  $r: X \rightarrow A$  tais que  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ , sendo que  $i: A \rightarrow X$  é a inclusão. Um espaço é contrátil quando existir um retrato por deformação entre ele e um de seus pontos.

Abaixo temos algumas construções úteis para o estudo das homotopias. Note que as construções abaixo resultam em espaços compactos quando o espaço  $X$  referido for compacto. Isso porque o quociente de um compacto por um fechado é sempre compacto.

**Construção 1.5.** O cone  $CX$  de um espaço  $X$  é o quociente  $(X \times I)/(X \times 0)$ . Usualmente, identificaremos a base desse cone, ou seja, a imagem pela projeção do conjunto  $X \times 1$ , com o espaço  $X$ .

O interesse nesse espaço se deve ao fato de que uma função  $f: X \rightarrow Y$  é homotopicamente trivial se, e somente se, ela se estende a uma função no cone. Essa extensão é dada pela homotopia entre  $f$  e a função constante.

Mais geralmente, a restrição de uma função  $f$ , como a acima, a um subconjunto fechado  $A$  é homotopicamente trivial se, e somente se, ela se estende a  $CA \cup X$ . Veja que para construir esse espaço nós colamos o cone de  $A$  em  $X$  usando a inclusão desse subespaço.

**Construção 1.6.** Analogamente ao exemplo acima, podemos nos perguntar quais são as possíveis homotopias entre duas aplicações constantes. Essa pergunta nos leva a definir a suspensão  $SX$  de um espaço  $X$  que é dada por

$$SX := CX/X = CX/(X \times 1)$$

Ou seja, estamos tomando o quociente de  $X \times I$  pelas relações  $(x_1, 0) \sim (x_2, 0)$  e  $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$ . Identificaremos o espaço  $X$  com o subconjunto de  $SX$  que a imagem de  $X \times 1/2$  pela projeção.

Podemos ver a suspensão como uma união de dois cones sobre  $X$  com suas bases identificadas. Em outras palavras,  $SX$  é homeomorfo ao espaço topológico  $CX \cup_f CX$  onde  $f$  é a aplicação identidade  $\text{id}: X \rightarrow X$ .

Veja, também, que a suspensão é um functor covariante. Pois, dada uma função contínua  $f: X \rightarrow Y$ , podemos definir uma função contínua  $Sf: SX \rightarrow SY$  de tal forma que  $Sf(x, t) = (f(x), t)$ .

Diremos que  $(X, A)$  é um par de espaços quando  $A \subset X$ . Uma função contínua  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  entre pares de espaços é uma função contínua entre

$X$  e  $Y$  tal que  $f(A) \subset B$ . Em particular, podemos definir uma homotopia relativa ao par como sendo uma função  $f: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ .

Um caso especial da definição acima são os espaços pontuados. Um espaço pontuado  $X$  é um par de espaços  $(X, x_0)$ , onde  $x_0 \in X$  é o ponto base. Frequentemente, denotaremos o ponto base de um espaço  $X$  por  $x_0$ , o de um espaço  $Y$  por  $y_0$  e assim por diante. O cone e a suspensão tem uma versão reduzida, ou seja, melhor adaptada aos espaços pontuados.

**Construção 1.7.** A versão reduzida do cone e da suspensão de um espaço pontuado  $X$  são dadas pelos quocientes

$$\begin{aligned} CX &:= (X \times I) / [(X \times 0) \cup (x_0 \times I)] \\ \Sigma X &:= (X \times I) / [(X \times 0) \cup (X \times 1) \cup (x_0 \times I)] \end{aligned}$$

sendo que  $x_0$  é o ponto base de  $X$ . A diferença dessas versões para as usuais é que aqui nós também colapsamos o intervalo sobre o ponto base. Note que usamos a mesma notação para o cone reduzido e não-reduzido. Isso não causará confusão, pois só usaremos a versão reduzida. É interessante, também, observar que esses dois cones são contráteis.

De agora em diante, denotaremos por **CTop** a categoria dos espaços compactos, por **CTop**<sup>2</sup> a categoria dos pares de espaços compactos e por **CTop**<sup>+</sup> a categoria dos espaços pontuados compactos.

Podemos, então, definir dois funtores covariantes:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CTop} & \longrightarrow & \mathbf{CTop}^2 \\ X & \longmapsto & (X, \emptyset) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{CTop}^2 & \longrightarrow & \mathbf{CTop}^+ \\ (X, A) & \longmapsto & (X/A, A/A) \end{array}$$

sendo que  $X/\emptyset := X^+$  que é a união disjunta de  $X$  com um ponto que servirá de base. Esses funtores permitirão reduzir as afirmações sobre a K-teoria de um espaço e a K-teoria de um par a afirmações sobre a K-teoria reduzida. Isso é útil porque na última as proposições são, em geral, mais fáceis de provar.

Por último, precisamos definir os análogos da união disjunta e do produto cartesiano para espaços pontuados.

**Construção 1.8.** A união wedge  $X \vee Y$  de dois espaços pontuados é o quociente da união disjunta onde identificamos os pontos base. Esse espaço pode ser visto como sendo o subespaço  $(X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)$  do produto cartesiano  $X \times Y$ .

O produto smash  $X \wedge Y$  é o quociente  $X \wedge Y = (X \times Y) / (X \vee Y)$ .

Esses duas construções são associativas e comutativas, a menos de homeomorfismos, e temos que  $\Sigma X = S^1 \wedge X$ . De uma forma mais geral, podemos provar que  $\Sigma^n X = S^n \wedge X$ , sendo que  $\Sigma^n$  é a aplicação da suspensão reduzida  $n$  vezes e  $S^n$  é a esfera de dimensão  $n$ .

# Capítulo 2

## Fibrados vetoriais

Neste capítulo, nós vamos definir os fibrados vetoriais e vamos provar algumas proposições fundamentais sobre eles. Os resultados deste capítulo são, em sua maioria, consequências diretas da trivialidade local desses fibrados.

Na primeira seção, nós vamos definir os fibrados vetoriais, os morfismos e as seções. Também definiremos uma topologia no espaço das seções e daremos alguns exemplos de fibrados vetoriais.

Na segunda seção, nós vamos mostrar que todo morfismo pode ser visto como uma seção. Com isso, concluiremos que para mostrar que um morfismo tem inverso basta mostrar que ele tem inverso em cada fibra. Ambos resultados vão ser usados constantemente no restante deste texto.

Na terceira e quarta seção, nós vamos estudar as propriedades functoriais dos fibrados vetoriais. Vamos definir o pullback e vamos definir os funtores contínuos. Estes conceitos nos permitirão definir a soma direta, o produto tensorial de fibrados e o fibrado dos homomorfismos. Isso será essencial, no capítulo 4, para mostrar que o conjunto das classes de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre  $X$  define um anel  $K(X)$ .

Por último, na quinta seção, nós vamos estudar os morfismos estritos. Mostraremos, então, que o núcleo e a imagem de morfismos estritos são fibrados vetoriais. Também falaremos sobre projeções e sobre as decomposições em soma direta que esse tipo de morfismo induz no seu domínio.

### 2.1 A categoria dos fibrados

Nessa seção definiremos a categoria **Vect** dos fibrados vetoriais complexos sobre um espaço topológico de Hausdorff. A idéia é generalizar os conceitos de espaço vetorial, aplicação linear e vetor. Para isso definiremos os fibrados vetoriais, os morfismos e as seções, respectivamente.

**Definição 2.1.** Um fibrado vetorial complexo sobre  $X$  é um par  $(E, p)$  onde  $E$  é um espaço topológico e  $p : E \rightarrow X$  é um mapa tal que valem as condições:

1. Para todo  $x \in X$  a imagem inversa  $p^{-1}(x)$  de  $x$  tem uma estrutura de espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ .
2. Cada ponto  $x_0 \in X$  está contido em uma vizinhança aberta  $V$  tal que existe um homeomorfismo  $\tau_V : p^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{C}^{k_V}$ , que chamaremos de trivialização local, para o qual o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(V) & \xrightarrow{\tau_V} & V \times \mathbb{C}^{k_V} \\
 & \searrow p & \swarrow \pi \\
 & & V
 \end{array}$$

é comutativo, sendo que  $\pi$  é a projeção. Exigimos também que a restrição de  $\tau_V$  a  $p^{-1}(x)$  para  $x \in V$  seja um isomorfismo de espaços vetoriais.

Em geral, deixaremos a aplicação  $p$  implícita na discussão e por isso denotaremos por  $E$  ou por  $E \rightarrow X$  um fibrado como o acima. Pelo mesmo motivo denotaremos a imagem inversa  $p^{-1}(A)$ , para  $A \subset X$ , por  $E_A$ . Daremos o nome de fibra sobre  $x$  ao conjunto  $E_x$  e de base ao conjunto  $X$ .

A fibra sobre um ponto é sempre não-vazia, já que todo o espaço vetorial contém o vetor nulo. Em outras palavras: a aplicação  $p$  é sobrejetiva. Também podemos ver que a segunda condição é equivalente a existirem trivializações locais  $\tau_{U_i}$  tais que os abertos  $U_i$  formam uma cobertura da base.

Para os leitores familiarizados com outras definições de fibrado, devemos ressaltar que na nossa definição a fibra pode ter dimensões diferentes em pontos diferentes da base. Contudo, a segunda condição da definição implica que essa dimensão é localmente constante. Por isso, a dimensão da fibra será constante em cada componente conexa da base. Se for igual a uma constante em toda parte, diremos que o fibrado é de posto igual a esta constante.

Também é interessante observar que na nossa definição supomos que  $E$  é um espaço topológico. Contudo, poderíamos ter retirado essa hipótese e usado as trivializações para definir a topologia de  $E$ . Pelos resultados da seção 1.9, bastaria então supor que as funções  $(\tau_V)^{-1} \circ \tau_U : U \cap V \times \mathbb{C}^k \rightarrow U \cap V \times \mathbb{C}^k$  fossem homeomorfismos para que esta topologia estivesse bem definida.

**Exemplo 2.1.** O exemplo mais simples de fibrado vetorial complexo é o fibrado dado pela projeção  $p : X \times \mathbb{C}^k \rightarrow X$ . Esse é o fibrado trivial de posto  $k$  sobre  $X$ . Muitas vezes usaremos a símbolo  $\mathbb{C}_X^k$  para denotá-lo.

**Exemplo 2.2.** A restrição da projeção  $p: E \rightarrow X$  a um subconjunto  $A$  qualquer define um fibrado  $E_A$  sobre  $A$ . As trivializações locais desse fibrado são as restrições das trivializações locais do fibrado maior.

Um subfibrado de um fibrado é um subconjunto tal que a restrição da projeção a esse conjunto define um fibrado. Esses objetos tem um papel importante porque, quando a base compacta, todo o fibrado vetorial é um subfibrado de um fibrado trivial, como veremos na seção 3.4.

**Exemplo 2.3.** Sabemos que  $\mathbb{C}P^n$  é igual ao conjunto dos subespaços vetoriais de dimensão um em  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Por isso podemos definir um subfibrado do fibrado trivial  $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$  que é dado pelo conjunto

$$E(n, 1) = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \ell\}$$

Esse conjunto define um fibrado, pois, para cada reta  $\ell \in \mathbb{C}P^n$  e para cada decomposição  $\mathbb{C}^{n+1} = \ell \oplus W$ , temos uma trivialização  $\tau_{\ell, W}$  de  $E(n, 1)$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{C}P^n$  formado pelas retas que são complementares a  $W$ . Para ver isso, defina  $\tau_{\ell, W}$  como sendo a composição das aplicações da sequência

$$E(n, 1)_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow U \times \ell \simeq U \times \mathbb{C}$$

sendo que a primeira é a inclusão e a segunda é o produto da identidade com a projeção em  $\ell$  paralela a  $W$ . Então,  $\tau_{\ell, W}$  é um homeomorfismo que é invertível em cada fibra porque a projeção é um isomorfismo quando restrita a uma reta que é complementar seu núcleo, que é o espaço vetorial  $W$ .

**Definição 2.2.** Um morfismo entre os fibrados  $E \rightarrow X$  e  $F \rightarrow Y$  é um par  $(L, f)$  sendo que  $L$  é uma aplicação  $L: E \rightarrow F$  e  $f$  é uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  tais que as seguintes condições são satisfeitas.

1. O seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

sendo as setas verticais são as projeções.

2. A restrição  $L_x: E_x \rightarrow F_{f(x)}$  de  $L$  às fibras que estão sobre  $x \in X$  e  $f(x) \in Y$  é uma aplicação linear.

No caso particular em que  $f$  é igual a identidade  $\text{id}: X \rightarrow X$  diremos que  $L$  é um morfismo sobre  $X$ .

Os morfismos, da mesma forma que os fibrados, têm representações locais. Dado um morfismo  $(L, f): E \rightarrow F$ , podemos escolher trivializações locais

$$\tau_U: E_U \rightarrow \mathbb{C}_U^k \quad \text{e} \quad \tau_V: F_V \rightarrow \mathbb{C}_V^l$$

tais que  $f(U) \subset V$ , já que  $f$  é contínua. Com isso, definimos a aplicação

$$L_{VU}: \mathbb{C}_U^k \rightarrow \mathbb{C}_V^l$$

que é dada pela composição  $L_{VU} := (\tau_V)^{-1} \circ L \circ \tau_U$ . Essa aplicação é o que chamamos de representação local de  $L$ .

Se  $L$  for um morfismo sobre  $X$  nós podemos supor que  $U = V$  e por isso, nesse caso, nos denotaremos o morfismo  $L_{VU}$  por  $L_U$ . Note que usaremos a notação  $L|_U$  para diferenciar a restrição

$$L|_U: E_U \rightarrow F_U$$

da representação local  $L_U$  que foi definida acima.

O que temos até agora é suficiente para obter a categoria  $\mathbf{Vect}$ . Além disso podemos perceber que essas mesmas definições nos dão, para cada  $X$ , uma subcategoria  $\mathbf{Vect}_X$  dos fibrados e morfismos sobre  $X$ .

**Exemplo 2.4.** Como é fácil de demonstrar, a categoria  $\mathbf{Vect}_{\text{pt}}$ , onde  $\text{pt}$  é o espaço topológico que só tem um ponto, é a categoria dos espaços vetoriais.

**Definição 2.3.** Uma seção de um fibrado vetorial  $E \rightarrow X$  é uma função contínua  $s: X \rightarrow E$  tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & E \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

é comutativo, sendo que  $\text{id}$  é a identidade.

Intuitivamente, uma seção é uma escolha contínua de um vetor por fibra. Todo o fibrado tem um seção, chamada de seção nula, que associa a cada ponto  $x \in X$  o vetor zero da fibra  $E_x$ . Veja que as seções também têm representações locais  $s_U: U \rightarrow \mathbb{C}_U^k$  dependendo de trivializações  $\tau_U$ .

Denotaremos por  $\Gamma(E)$  o conjunto das seções de um fibrado  $E$ . Podemos definir nesse conjunto uma topologia. Os abertos dessa topologia são uniões de conjuntos da forma

$$\mathcal{V}_U := \{s \in \Gamma(E) \mid s(X) \subset U\}$$

sendo que  $U \subset E$  é um subconjunto aberto. Ou seja, nessa topologia as vizinhanças abertas de um seção  $s$  são formadas pelas seções que tem uma imagem próxima a imagem dessa seção.

Podemos, também, observar que se  $C(X, \mathbb{C})$  é o anel das funções contínuas com valores complexos, então  $\Gamma(E)$  é um módulo sobre esse anel. A estrutura de módulo é dada de forma que se  $\alpha \in C(X, \mathbb{C})$  e  $s, t \in \Gamma(E)$  então

$$\begin{aligned}(s + t)(x) &= s(x) + t(x) \in E_x \\ (\alpha \cdot s)(x) &= \alpha(x)s(x) \in E_x\end{aligned}$$

onde a soma e o produto estão bem definidos pois  $E_x$  é um espaço vetorial.

Para mostrar que as seções assim definidas são contínuas, basta mostrar que elas são contínuas em torno de cada ponto (proposição 1.2). Usando, então, as trivializações locais, reduzimos a demonstração desta última afirmação ao caso dos fibrados triviais, onde ela é trivial.

## 2.2 Representações locais

Uma aplicação linear  $L: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^l$  pode ser vista como um vetor no espaço vetorial  $\text{hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$ . Analogamente, vamos provar que todo o morfismo

$$L: E \longrightarrow F \quad \text{com } E \text{ e } F \text{ fibrados sobre } X$$

está associado a uma seção  $s_L$  de um fibrado  $\text{hom}(E, F) \rightarrow X$  que tem como fibra sobre  $x \in X$  o espaço vetorial  $\text{hom}(E_x, F_x)$  (seção 2.4).

Em outras palavras, um campo de aplicações lineares induz um campo de vetores no fibrado das aplicações lineares. Antes disso, contudo, provaremos uma versão desta afirmação para fibrados vetoriais triviais.

**Proposição 2.1.** *Um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_X^k & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}_Y^l \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

*define um morfismo se e somente se existe uma função contínua*

$$X \xrightarrow{\ell} \text{hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$$

*tal que  $L(x, v) = (f(x), \ell(x)v)$ .*



*Demonstração.* Se existir  $\ell$  contínua, nós temos que a composta

$$X \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{\ell \times \mathbf{1}} \text{hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l) \times \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^l$$

é uma função contínua. Portanto, nós temos que as duas coordenadas da função  $L: X \times \mathbb{C}^k \rightarrow Y \times \mathbb{C}^l$  são contínuas. Pelas propriedades do produto cartesiano de espaços topológicos temos que  $L$  é contínua.

Para provar a outra implicação, definimos  $\ell$  como sendo a função que leva um ponto  $x \in X$  na aplicação linear  $L_x$  entre as fibras que estão sobre  $x$ .

Falta mostrar que está função é, então, contínua. Para isso, basta mostrar que cada uma de suas coordenadas é contínua. Sejam, portanto,  $e_i$  os vetores da base canônica em  $\mathbb{C}^k$ . Temos que a composição

$$X \xrightarrow{\text{id} \times e_i} X \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{L} Y \times \mathbb{C}^l \xrightarrow{\text{id} \times \pi_j} Y \times \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}$$

onde  $e_i$  é a aplicação constante igual a  $e_i$  e  $\pi_j$  é a projeção na  $j$ -ésima coordenada, é contínua, já que é uma composição de funções contínuas. É fácil ver que essa composição é a coordenada  $i, j$  da matriz  $\ell$  e portanto temos o enunciado.  $\square$

Essa proposição é usada, em geral, para reduzir as afirmações sobre fibrados às afirmações sobre transformações lineares. Um exemplo disso é a proposição a seguir.

**Proposição 2.2.** *Seja  $L: E \rightarrow F$  um morfismo sobre  $X$ . Para que exista o morfismo inverso  $L^{-1}: F \rightarrow E$  basta que a restrição  $L_x$  seja uma transformação linear invertível, para todo  $x \in X$ .*

*Demonstração.* Pela hipótese, podemos definir  $L^{-1}: F \rightarrow E$  como sendo a função que leva  $v \in F_x$  em  $(L_x)^{-1}(v) \in E_x$ . Falta mostrar que esta função é contínua. Para isso, é suficiente mostrar que, para cada  $x$ , existe um aberto  $U \ni x$  tal que a restrição de  $L^{-1}$  as fibras sobre  $U$  é contínua. Para isso, escolha trivializações locais  $\tau_1$  de  $E$  e  $\tau_2$  de  $F$ , ambas sobre  $U$ .

Temos então, pela proposição anterior, que o morfismo  $L_U$  está associado a uma função  $\ell: U \rightarrow \text{hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$ . Pelas hipóteses a imagem de  $\ell$  está contida no conjunto das funções lineares invertíveis. Seja, portanto,  $\ell^{-1}$  a composição de  $\ell$  com a função que dá a inversa de uma matriz. Estas duas funções são contínuas e por isso  $\ell^{-1}$  é contínua.

Por outro lado, é fácil ver que  $(L^{-1})_U = (x, \ell^{-1}(x)v)$ . Novamente pela proposição 2.1, temos que  $(L^{-1})_U$  é contínua. Isso somado ao fato de que as trivializações locais são homeomorfismos implica que  $L^{-1}$  é contínua.  $\square$

## 2.3 O pullback de um fibrado

Seja  $p: E \rightarrow X$  um fibrado. Temos que, para todo o subespaço  $A \subset X$ , a restrição  $p|_A: E_A \rightarrow A$  define um fibrado. Isso nos dá um morfismo

$$\begin{array}{ccc} E_A & \xrightarrow{L} & E \\ \downarrow p|_A & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad (2.1)$$

sendo que  $L$  e  $i$  são inclusões (lembre-se que  $E_A \subset E$ ). Este morfismo é a identidade, e portanto um isomorfismo, sobre cada fibra.

Nesta seção vamos generalizar a restrição de um fibrado. Mais especificamente, dado uma função contínua  $f: X \rightarrow Y$  e um fibrado  $E \rightarrow Y$  diremos que um fibrado  $F \rightarrow X$  é um pullback se existe um morfismo

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{L_f} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

tal que sua restrição a cada fibra é um isomorfismo. Nosso objetivo é mostrar que os pullbacks existem e são únicos, a menos de isomorfismos.

Primeiramente, vamos mostrar a existência. Para isso, considere o conjunto  $f^*(E)$  que é o subespaço de  $X \times E$  dado por

$$f^*(E) := \{(x, v) \in X \times E \mid p(v) = f(x)\}$$

Defina, então, a aplicação  $\pi_f: f^*(E) \rightarrow X$  como sendo a função que é a restrição da projeção  $X \times E \rightarrow X$  ao conjunto  $f^*(E)$ .

**Proposição 2.3.** *A aplicação  $\pi_f: f^*(E) \rightarrow X$  define um fibrado.*

*Demonstração.* É fácil ver que  $\text{id} \times p: X \times E \rightarrow X \times Y$  é um fibrado, pois

$$\text{id} \times \tau_U: X \times E_U \longrightarrow X \times U \times \mathbb{C}^k$$

é uma trivialização local se  $\tau_U$  for uma trivialização local de  $E$  sobre  $U$ . Seja, então,  $\Gamma_f \subset X \times Y$  o gráfico de  $f$ . Temos que  $(\text{id} \times p)^{-1}(\Gamma_f) = f^*(E)$ , ou seja,  $f^*(E) = E_{\Gamma_f}$ . Por isso,  $f^*(E) \rightarrow \Gamma_f$  é um fibrado. Como a projeção  $\Gamma_f \rightarrow X$  é um homeomorfismo, nós temos que  $f^*(E) \rightarrow X$  é um fibrado.  $\square$

Falta mostrar que o fibrado  $f^*(E)$  é um pullback. Para isso defina o morfismo  $L_f: f^*(E) \rightarrow E$  como sendo a restrição da projeção  $X \times E \rightarrow E$ . Esta aplicação é um morfismo sobre  $f: X \rightarrow Y$ , ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{L_f} & E \\ \downarrow \pi_f & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

comuta pois  $f \circ \pi_f(x, v) = f(x) = p(v) = p \circ L_f(x, v)$ . Estas igualdades são consequências diretas das definições de  $\pi_f$ ,  $L_f$  e  $f^*(E)$ .

Resta, então, mostrar que  $L_f$  é um isomorfismo em cada fibra. Para isso, note que a fibra de  $f^*(E)$  sobre um ponto  $x \in X$  é igual a  $\{x\} \times E_{f(x)}$ . Com isso, nós podemos concluir que a restrição de  $L_f$  a uma fibra é da forma

$$(L_f)_x: \{x\} \times E_{f(x)} \rightarrow E_{f(x)}$$

Mas como, por definição,  $L_f(x, v) = v$  temos que  $(L_f)_x$  é a identidade e portanto é um isomorfismo. Isso conclui a demonstração da existência.

Por último, vamos mostrar a unicidade. Para isso, vamos mostrar a seguinte proposição que nos permitirá definir o pullback  $f^*(L): F \rightarrow f^*(E)$  de um morfismo  $L: F \rightarrow E$  sobre a aplicação  $f$ . Note que

**Proposição 2.4.** *Seja  $p: E \rightarrow Y$  um fibrado vetorial e seja  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Para todo o morfismo  $(L, f): F \rightarrow E$  existe um único morfismo  $f^*(L): F \rightarrow f^*(E)$  sobre  $X$  que faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccccc} & & & & L \\ & & & & \curvearrowright \\ F & & & & E \\ \downarrow f^*(L) & \searrow & & & \downarrow p \\ & f^*(E) & \xrightarrow{L_f} & & \\ & \downarrow \pi_f & & & \downarrow p \\ & X & \xrightarrow{f} & & Y \\ & \downarrow q & & & \\ & & & & \end{array}$$

Além disso, o pullback, como definido acima, é o único fibrado, a menos de isomorfismos, que satisfaz essa propriedade.

*Demonstração.* Primeiro vamos definir o morfismo  $f^*(L)$ . Para isso, note que

o seguinte diagrama define um morfismo entre fibrados

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{q \times L} & X \times E \\ \downarrow q & & \downarrow \text{id} \times p \\ X & \xrightarrow{\text{id} \times f} & X \times Y \end{array}$$

Mas a imagem de  $\text{id} \times f$  é o gráfico  $\Gamma_f$  de  $f$ . Pela comutatividade do diagrama, a imagem de  $q \times L$  está contida no conjunto  $f^*(E) = (\text{id} \times p)^{-1}(\Gamma_f)$ . Ou seja, a composição  $\text{id} \circ (q \times L)$  dada no diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{q \times L} & f^*(E) & \xrightarrow{\text{id}} & f^*(E) \\ \downarrow q & & \downarrow \text{id} \times p & & \downarrow \pi_f \\ X & \xrightarrow{\text{id} \times f} & \Gamma_f & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

define um morfismo  $f^*(L)$  tal que o diagrama dado no enunciado da proposição comuta. Esse morfismo é único pois aquele diagrama exige que, em cada fibra,  $f^*(L)$  seja da forma  $f^*(L)_x = (L_f)_x^{-1} \circ L_x$ .

A demonstração da unicidade do fibrado pullback exigiria uma notação razoavelmente complicada e por isso vamos omiti-la. Os leitores mais interessados podem adaptar a demonstração da unicidade do anel associado a um semianel, dada no capítulo sobre K-teoria, para o caso presente. Essas duas propriedades são exemplos de propriedades universais.  $\square$

Note que a restrição de  $f^*(L)$  a uma fibra é invertível se, e somente se, a restrição de  $L$  a mesma fibra for invertível. Isso porque, como foi observado na demonstração,  $f^*(L)_x = (L_f)_x^{-1} \circ L_x$  e  $(L_f)_x^{-1}$  é um isomorfismo para todo  $x \in X$ . Mas, pelas seções anteriores, sabemos que um morfismo sobre  $X$  é um isomorfismo se for invertível em cada fibra. Com isso concluímos que:

**Proposição 2.5.** *Seja  $(L, f): F \rightarrow E$  um morfismo sobre uma função contínua  $f: X \rightarrow Y$ . Então o morfismo  $f^*(L): F \rightarrow f^*(E)$  é um isomorfismo se, e somente se,  $L_x: F_x \rightarrow E_x$  for invertível para todo  $x$ .*

Como um corolário desta proposição nós concluímos que todos os pullbacks são isomorfos ao fibrado  $f^*(E)$ . No resto desta seção mostraremos que o pullback é, de fato, uma generalização da restrição. Mostraremos, também, que ele se comporta bem com respeito as composições.

**Proposição 2.6.** *O pullback tem as seguintes propriedades:*

1.  $i^*(E) \simeq E_A$ , sendo que  $i$  é a inclusão de  $A$ ;
2.  $\text{id}^*(E) \simeq E$ , sendo que  $\text{id}$  é a identidade;
3.  $f^*g^*(E) \simeq (g \circ f)^*(E)$  para quaisquer duas funções  $f$  e  $g$ .

*Demonstração.* Para demonstrar a primeira propriedade, considere o morfismo  $(L, i): E_A \rightarrow E$  que foi definido no diagrama 2.1. Como foi observado, ele é invertível em cada fibra e portanto, pela proposição anterior, nós temos um isomorfismo  $i^*(L): E_A \rightarrow i^*(E)$ .

A segunda propriedade é um caso particular da primeira.

Para demonstrar a terceira propriedade nós observamos que as aplicações  $f$  e  $g$  induzem uma sequência de morfismos

$$f^*g^*(E) \xrightarrow{L_f} g^*(E) \xrightarrow{L_g} E$$

Esses morfismos são os morfismos canônicos de um pullback e, portanto, são invertíveis em cada fibra. A sua composição define um morfismo sobre  $g \circ f$ . Temos então que o pullback de  $L_g \circ L_f$  por  $g \circ f$  define um isomorfismo

$$(g \circ f)^*(L_g \circ L_f): f^*g^*(E) \rightarrow (g \circ f)^*(E)$$

Isso conclui a demonstração. □

## 2.4 Fibrados associados a um functor

Seja  $\mathcal{T}$  um functor covariante que leva a categoria dos espaços vetoriais nela mesma. Então temos uma aplicação

$$\mathcal{T}: \text{hom}(V, W) \longrightarrow \text{hom}(\mathcal{T}V, \mathcal{T}W)$$

Essa aplicação está definida pois um functor desse tipo leva uma aplicação linear  $L: V \rightarrow W$  em uma aplicação linear  $\mathcal{T}L: \mathcal{T}V \rightarrow \mathcal{T}W$ . Diremos, então, que um functor é contínuo quando a aplicação acima é contínua.

Nesta seção nós vamos mostrar que todo o functor contínuo se estende aos fibrados vetoriais, que essa extensão é compatível com o pullback e que ela preserva isomorfismos naturais.

Para isso, defina, para todo o fibrado  $E$  sobre  $X$ , o conjunto

$$\mathcal{T}E = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{T}E_x$$

Podemos, também, definir uma função  $\mathcal{T}L$  para todo morfismo  $L$ . Essa função é dada pela aplicação  $\mathcal{T}L_x$  em cada fibra. Com isso, nós podemos definir, para cada trivialização local  $\tau: E_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ , uma função

$$\mathcal{T}(\tau): \mathcal{T}E_U \longrightarrow U \times \mathcal{T}\mathbb{C}^k$$

É natural, portanto, exigir que a função acima seja uma trivialização local do fibrado  $\mathcal{T}E$ . Em outras palavras, nós queremos definir uma topologia no conjunto  $\mathcal{T}E$  tal que as funções acima são trivializações locais e tal que  $\mathcal{T}L$  é um morfismo para todo  $L$ .

De acordo com a seção 1.4, basta para isso verificar que as trocas de coordenada  $\mathcal{T}(\tau \circ \sigma^{-1})$ , que estão associadas as trivializações

$$\tau: E_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^k \quad \text{e} \quad \sigma: E_V \longrightarrow V \times \mathbb{C}^k$$

são homeomorfismos. Então, pelas proposições 2.1 e 2.2, basta verificar que

$$\mathcal{T}(\tau \circ \sigma^{-1}): U \cap V \longrightarrow \text{hom}(\mathcal{T}\mathbb{C}^k, \mathcal{T}\mathbb{C}^k)$$

é contínua e isso é consequência do fato que a aplicação acima é a composição de  $\tau \circ \sigma^{-1}: U \cap V \rightarrow \text{hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$  com a aplicação contínua  $\mathcal{T}$ .

Isso define a extensão do functor  $\mathcal{T}$  aos fibrados vetoriais. Essa extensão é tal que  $f^*(\mathcal{T}E) \simeq \mathcal{T}f^*(E)$ , ou seja, comuta com os pullbacks. Isso porque se aplicarmos o functor  $\mathcal{T}$  ao morfismo canônico

$$L_f: f^*(E) \longrightarrow E$$

nós obtemos uma aplicação  $\mathcal{T}(L_f)$  que é um isomorfismo em cada fibra, pois  $L_f$  é um isomorfismo em cada fibra. Então,

$$f^*\mathcal{T}(L_f): \mathcal{T}f^*(E) \longrightarrow f^*(\mathcal{T}E)$$

é um isomorfismo.

Essa discussão, por sua vez, pode ser estendida a funtores com mais variáveis (covariantes ou contravariantes) e portanto implica que a soma direta, o produto tensorial e o functor  $\text{hom}$  estão bem definidos na categoria dos fibrados.<sup>1</sup> Mais sobre isso nos exemplos abaixo.

**Exemplo 2.5.** O functor que associa a um espaço vetorial o seu dual é contínuo, pois a aplicação que associa uma aplicação a sua adjunta é linear. Portanto,

$$E^* = \bigsqcup E_x^*$$

é um fibrado vetorial e a adjunta  $L^*: F^* \rightarrow E^*$  é um morfismo.

---

<sup>1</sup>O leitor interessado pode achar mais sobre esses funtores e sobre as transformações naturais associadas a esses funtores no livro de Lang [Lan02].

**Exemplo 2.6.** Outro exemplo de functor contínuo é a soma direta. Em espaços vetoriais, a soma direta associa a cada par  $(V, W)$  de espaços vetoriais o espaço  $V \oplus W = V \times W$  e a cada par  $L_i: V_i \rightarrow W_i$  de aplicações lineares uma aplicação

$$L_1 \oplus L_2 = \begin{bmatrix} L_1 & \\ & L_2 \end{bmatrix}: V_1 \oplus V_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2$$

Ser contínua, nesse caso, significa que a aplicação

$$\oplus: \text{hom}(V_1, W_1) \times \text{hom}(V_2, W_2) \longrightarrow \text{hom}(V_1 \oplus V_2, W_1 \oplus W_2)$$

é contínua. Isso, contudo, decorre diretamente da definição acima.

Temos, então, que o fibrado  $E \oplus F = \bigsqcup E_x \oplus F_x$  está bem definido e tem trivializações locais da forma  $\tau \oplus \sigma$ . Mais ainda, os isomorfismos naturais da soma direta de espaços vetoriais também se estendem. Por isso,

$$\begin{aligned} (E \oplus F) \oplus G &\simeq E \oplus (F \oplus G) \\ E \oplus F &\simeq F \oplus E \end{aligned}$$

ou seja, a soma direta é associativa e comutativa a menos de isomorfismos. Também temos que, da mesma forma que os funtores de uma variável, vale que

$$f^*(E \oplus F) \simeq f^*(E) \oplus f^*(F).$$

**Exemplo 2.7.** Como a soma direta, o produto tensorial tem duas variáveis covariantes. Esse functor é utilizado para reduzir questões sobre aplicações bilineares a questões sobre aplicações lineares.

Por isso, o produto tensorial  $V \otimes W$  é definido de forma que ele seja gerado por produtos  $v \otimes w$  de vetores  $v \in V$  e  $w \in W$ . As únicas relações entre esses produtos são as relações que definem uma aplicação bilinear. Em outras palavras,  $(\alpha v) \otimes w = \alpha(v \otimes w) = v \otimes (\alpha w)$  e  $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ , sendo que o mesmo vale na segunda variável.

Temos, então, que o espaço  $V \otimes W$  é o único, a menos de isomorfismos, tal que

$$\begin{array}{ccc} & & V \otimes W \\ & \nearrow & \vdots \\ V \times W & & \\ & \searrow \gamma & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

tem uma única solução linear, sendo que  $U$  é um espaço vetorial e  $\gamma$  é uma aplicação bilinear. Assim, obtemos um functor contínuo.

Também podemos mostrar, usando as propriedades acima, que existem alguns isomorfismos naturais que se estendem aos fibrados. Mais especificamente,

$$\begin{aligned} (E \otimes F) \otimes G &\simeq E \otimes (F \otimes G) & E \otimes (F \oplus G) &\simeq (E \otimes F) \oplus (E \otimes G) \\ E \otimes F &\simeq F \otimes E & E \otimes \mathbb{C}_X &\simeq E \end{aligned}$$

Note, em especial, que o fibrado vetorial trivial de posto um serve como uma identidade multiplicativa e o produto tensorial é distributivo com respeito a soma direta. Esse functor também comuta com o pullback.

**Exemplo 2.8.** Por último, temos o functor  $\text{hom}$ . Esse functor é contravariante na primeira variável e covariante na segunda e a cada duas aplicações lineares  $L_1: W_1 \rightarrow V_1$  e  $L_2: V_2 \rightarrow W_2$  ele associa a aplicação  $L \mapsto L_2 \circ L \circ L_1$ . Isso define um functor contínuo. Portanto, temos um fibrado

$$\text{hom}(E, F) = \bigsqcup \text{hom}(E_x, F_x)$$

Esse fibrado tem algumas propriedades interessantes que usaremos com certa frequência e por isso vamos explicitá-las agora.

A primeira propriedade desse fibrado é que existe uma bijeção entre as seções desse fibrado e os morfismos entre os fibrados  $E$  e  $F$ . Nós já vimos isso localmente na seção sobre representações locais. O caso geral decorre diretamente do caso particular, pois sabemos pela seção 1.4 que uma coleção de representações locais que comutam com as trocas de coordenadas define uma aplicação global.

A segunda propriedade é consequência da definição da topologia desse fibrado. Pois pela seção 1.4, um conjunto é aberto se e só se as imagens pelas representações locais são abertas. Isso implica que o subespaço formado pela união  $\bigsqcup \text{iso}(E_x, F_x)$  das aplicações lineares invertíveis é aberto, já que suas representações locais são um produto de abertos  $U \times \text{iso}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l)$ . De forma mais geral, o conjunto formado pelas aplicações de posto máximo em cada fibra é aberto.

Portanto, quando consideramos a topologia no conjunto  $\Gamma[\text{hom}(E, F)]$  das seções, nós podemos notar que o subconjunto das seções que tem posto máximo em cada ponto é aberto. Com isso, obtemos uma topologia no conjunto dos morfismos entre fibrados vetoriais. Nessa topologia os morfismos de posto máximo formam um conjunto aberto.

## 2.5 Subfibrados e morfismos estritos

Relembrando, um subfibrado  $F$  é um subconjunto de um fibrado  $p: E \rightarrow X$  tal que a restrição  $p|_F: F \rightarrow X$  define um fibrado. Estamos supondo tacitamente nessa definição que a estrutura de espaço vetorial nas fibras de  $F$  é induzida pela estrutura definida nas fibras de  $E$ . Em outras palavras, o espaço vetorial  $F_x$  é subespaço do espaço vetorial  $E_x$ , para todo  $x \in X$ .

Um morfismo  $L: E \rightarrow F$  é um monomorfismo se a aplicação  $L_x: E_x \rightarrow F_x$  é injetiva para todo  $x \in X$ . Um morfismo é um epimorfismo se sua restrição a cada fibra for uma aplicação linear sobrejetiva. Por último, um morfismo  $L: E \rightarrow F$  é estrito se o posto de  $L_x$  é localmente constante em  $x$ . Em outras palavras, um morfismo  $L$  é estrito se para todo  $a \in X$  existe uma



vizinhança  $U \ni a$  tal que o posto de  $L_x$  é constante em  $U$ . Note que tanto os monomorfismos quanto os epimorfismos são exemplos de morfismos estritos.

Nesta seção nós vamos mostrar que o núcleo e a imagem de um morfismo estrito, que são dados pela união dos núcleos e imagens em cada fibra, são fibrados vetoriais. Com isso, vamos concluir que uma projeção decompõe um fibrado em uma soma direta.

**Proposição 2.7.** *Seja  $L: E \rightarrow F$  um morfismo estrito. Então o núcleo  $\text{Ker } L$  e a imagem  $\text{Im } L$  de  $L$  são subfibrados de  $E$  e  $F$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Para demonstrar esta proposição basta mostrar que esses dois conjuntos têm trivializações locais. Como essa é uma afirmação local, podemos supor que  $E = X \times \mathbb{C}^m$  e  $F = X \times \mathbb{C}^n$ .

Escolha, então, um ponto  $a \in X$  e escolha um espaço vetorial  $N_a^\perp$  complementar ao núcleo  $N_a$  de  $L_a$  na fibra  $E_a$ . Escolhemos, também, um espaço vetorial  $M_a^\perp$  que é complementar a imagem  $M_a$  da aplicação linear  $L_a$ . Esses conjuntos estão contidos em  $F_a$ . Definimos, a partir disso, um morfismo

$$K: E \oplus (X \times M_a^\perp) \longrightarrow F \oplus (X \times N_a)$$

tal que  $K_x$  é dado pela matriz

$$\begin{array}{ccc|ccc} & N_a & N_a^\perp & M_a^\perp & & & \\ & & & & & & \\ M_a & & & & & & 0 \\ M_a^\perp & & L_x & & & & 1 \\ N_a & 1 & 0 & 0 & & & 0 \end{array}$$

Note que  $E_x = N_a \oplus N_a^\perp$  e  $F_x = M_a \oplus M_a^\perp$  para todo  $x \in X$ . Note também que  $K_a$  é um isomorfismo porque  $L_a: N_a^\perp \rightarrow M_a^\perp$  é um isomorfismo.

Contudo, como o conjunto dos isomorfismos é aberto, existe uma vizinhança  $U$  do ponto  $a$  onde  $K_x$  é invertível. Vamos, agora, usar esse fato para mostrar que o núcleo e a imagem de  $L$  em  $U$  tem uma trivialização local.

Primeiramente, vamos considerar o núcleo de  $L$ . Note, para isso, que para todo  $v = (v_1, v_2) \in N_a \oplus N_a^\perp$  que pertence ao núcleo de  $L_x$ , nós temos que  $K_x(v_1, v_2, 0) = (0, 0, v_1)$ . Por isso, nós temos que a imagem  $K_x^{-1}(N_a)$  contém o núcleo de  $L_x$ . Por outro lado,  $K_a^{-1}(N_a) = N_a$ , ou seja, a imagem  $K_a^{-1}(N_a)$  é igual ao núcleo do morfismo  $L_a$ . Isso porque  $K_a$  é igual a identidade em  $N_a$ . Em particular, nós temos que  $K_a^{-1}(N_a)$  e  $N_a$  tem a mesma dimensão.

Entretanto, note que  $L$  é um morfismo estrito. Por isso, nós temos que o núcleo de  $L_x$  tem dimensão constante em uma vizinhança de  $a$ . Podemos supor que  $U$  é uma dessas vizinhanças. Por outro lado,  $K_x$  é um isomorfismo

em  $U$  e, por isso,  $N_a$  tem a mesma dimensão que  $K_x^{-1}(N_a)$ . Concluimos, então que  $K_x^{-1}(N_a)$  é igual ao núcleo de  $L_x$  e, portanto, nós temos que

$$K|_U: (\text{Ker } L)_U \longrightarrow U \times N_a$$

é uma trivialização local com inversa  $K^{-1}$ .

Agora, vamos demonstrar que a imagem de  $L$  é um fibrado. Para isso, note que, para  $v_2 \in N_a^\perp$ , nós temos que  $L_x(v_2) = 0$  se e só se  $K_x(0, v_2, 0) = 0$ . Mas  $K$  é um isomorfismo e, portanto, nós temos a restrição de  $K_x$  a  $N_a^\perp$  é injetiva. Então, pela afirmação anterior, a restrição de  $L_x$  a  $N_a^\perp$  é injetiva.

Por último, se mostrarmos que a aplicação linear  $L_x$  é sobrejetiva quando restrita a  $N_a^\perp$  nós vamos ter que

$$L_x^{-1}: (\text{Im})_U \longrightarrow U \times N_a^\perp$$

é uma trivialização local. Isso, contudo, é consequência do fato que  $L_a$  é um isomorfismo quando restrito a  $N_a^\perp$ , pela definição desse último, conjuntamente com fato de  $L$  ser um morfismo estrito. □

É importante observar que, pela última proposição, a imagem de um monomorfismo  $L: E \rightarrow F$  é um subfibrado de  $F$ . Por isso, nós temos que a restrição  $L: E \rightarrow \text{Im}(L)$  está bem definida como morfismo. Contudo, ela é invertível em cada fibra e, portanto, é um isomorfismo.

Por último, vamos falar um pouco sobre as projeções. Uma projeção é um morfismo  $P: E \rightarrow E$  tal que  $P^2 = P$ . Sempre que  $P$  for uma projeção, nós vamos ter que  $1 - P$  é uma projeção. Isso porque

$$(1 - P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - P$$

Por outro lado, nós temos também que  $1 = P + (1 - P)$ . Por isso, todo vetor  $v \in E_x$  pode ser escrito como uma soma de um vetor pertencente à imagem de  $P$  e um vetor pertencente à imagem de  $1 - P$ .

Além disso, as igualdades  $P(1 - P) = (1 - P)P = 0$  implicam que

$$\text{Im}(1 - P)_x \subset \text{Ker } P_x \quad \text{e} \quad \text{Im } P_x \subset \text{Ker}(1 - P)_x$$

Contudo, as igualdades  $P^2 = P$  e  $(1 - P)^2 = (1 - P)$  implicam que

$$\text{Ker } P_x \cap \text{Im } P_x = 0 \quad \text{e} \quad \text{Ker}(1 - P)_x \cap \text{Im}(1 - P)_x = 0$$

pois, por exemplo, se  $w \neq 0$  pertence a imagem de  $P$  nós temos que existe  $v$  tal que  $P(v) = w$  e, por isso,  $P(w) = P^2(v) = P(v) = w \neq 0$ . Ou seja, todo elemento da imagem que é diferente de zero não pertence ao núcleo.

Usando, então, as duas últimas relações destacadas, nós concluímos que

$$\text{Im}(1 - P)_x \cap \text{Im } P_x \subset \text{Ker } P_x \cap \text{Im } P_x = 0$$

e, portanto, nós temos que  $E_x = \text{Im } P_x \oplus \text{Im}(1 - P)_x$ . Além disso, nós podemos concluir da última igualdade que

$$\text{Im}(1 - P)_x = \text{Ker } P_x \quad \text{e} \quad \text{Im } P_x = \text{Ker}(1 - P)_x$$

Essas relações vão ser usadas na demonstração da próxima proposição.

**Proposição 2.8.** *Seja  $P: E \rightarrow E$  uma projeção. Então, nós temos que o fibrado  $E$  é isomorfo a soma direta do núcleo de  $P$  com a imagem de  $P$ .*

*Demonstração.* Já mostramos que  $E_x = \text{Ker } P_x \oplus \text{Im } P_x$ , para todo  $x \in X$ . Falta mostrar que o núcleo e a imagem de  $P$  são fibrados vetoriais. Para isso, vamos mostrar que  $P$  é um morfismo estrito.

Contudo, nós sabemos que, quando restrito a uma vizinhança  $U$  onde  $E$  é trivial,  $P$  está associado a uma função contínua  $x \mapsto P_x$ , que associa um ponto dessa vizinhança a uma aplicação linear  $P_x \in \text{hom}(\mathbb{C}^n)$ . Note que estamos identificando  $E_x$  com  $\mathbb{C}^n$  usando uma trivialização local.

Escolha, então, uma  $a \in U$  e seja  $k$  o posto da aplicação linear  $P_a$ . Pela definição de posto, nós temos que algum dos menores de ordem  $k$  de  $P_a$  é diferente de zero. Pela continuidade do determinante, nós temos que esse menor de ordem  $k$  vai ser diferente de zero em uma vizinhança de  $a$ . Por isso, o posto de  $P_x$  nessa vizinhança só pode crescer.

O mesmo argumento mostra que, em uma vizinhança ainda menor, nós podemos garantir que o posto da restrição de  $P$  e  $1 - P$  a fibra sobre  $x$  só pode crescer. Mas como  $E_x = \text{Im } P_x \oplus \text{Im}(1 - P)_x$  o posto dos dois morfismos é constante nessa vizinhança. Isso mostra que  $P$  é um morfismo estrito e, portanto, o seu núcleo e imagem são fibrados vetoriais.  $\square$

# Capítulo 3

## Fibrados sobre compactos

Nesse capítulo se encontram todos os resultados que são consequências da existência de partições da unidade em um compacto.

Na primeira seção, nós definiremos as partições da unidade e mostraremos que todo a seção que está definida em um subconjunto fechado de um compacto se estende a uma função definida em todo o conjunto. Essa afirmação será usada principalmente para estender trivializações de fibrados.

Na segunda seção, nós vamos mostrar que o pullback de um fibrado por uma função só depende da classe de homotopia dessa função. Essa propriedade é essencial para mostrar que a  $K$ -teoria é uma teoria de cohomologia.

Na terceira seção, nós vamos mostrar que todo o fibrado vetorial sobre um compacto tem uma métrica Hermitiana. Com isso, concluiremos, na última seção, que todo o subfibrado tem um fibrado complementar.

### 3.1 Compactos e a extensão de seções

Um dos problemas fundamentais em topologia é saber quando que uma função  $f: A \rightarrow Y$ , para  $A \subset X$ , se estende a  $X$ . Em particular, queremos saber quando que  $A$  é tal que todas as funções nele definidas se estendem. O teorema a seguir nos dá uma possível resposta para essa pergunta.

**Teorema 1** (Extensão de Tietze). *Seja  $X$  um espaço topológico normal e de Hausdorff, seja  $A \subset X$  um subconjunto fechado e seja  $V$  um espaço vetorial. Então, toda a aplicação  $f: A \rightarrow V$  se estende a uma aplicação  $g: X \rightarrow V$ .*

Podemos reduzir a demonstração desse teorema ao caso em que  $V$  é a reta real. Essa versão, contudo, tem uma demonstração bem conhecida [Mun00]. Nosso objetivo nesta seção é estender o teorema anterior para o caso dos fibrados sobre compactos. Para isso, precisaremos da seguinte definição.

**Definição 3.1.** Sejam  $U_i$  abertos que formam uma cobertura finita de  $X$ . Uma partição da unidade associada a essa cobertura é uma coleção de funções contínuas  $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$  que satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_i$ , para todo  $i$ ;
2.  $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ , para todo  $x \in X$ .

Podemos usar o teorema acima e o fato de que todo espaço compacto é normal (proposição 1.5) para construir partições da unidade e, então, provar:

**Proposição 3.1.** *Toda cobertura aberta finita de um espaço topológico compacto tem uma partição da unidade associada.*

As partições da unidade nós permitem colar objetos locais e assim definir um objeto global. Um exemplo disso está na demonstração a seguir da prometida generalização do teorema de Tietze.

**Proposição 3.2** (Extensão de seções). *Sejam  $X$  um espaço compacto,  $A$  um subconjunto fechado e  $E \rightarrow X$  um fibrado vetorial complexo. Então, toda a seção  $s: A \rightarrow E_A$  se estende a uma seção  $t: X \rightarrow E$ .*

*Demonstração.* Como  $X$  é compacto, podemos escolher uma cobertura finita formada por abertos  $U_i$  tais que existem trivializações  $\tau_i: E_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^{k_i}$ . Existem também funções  $\varphi_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  que formam uma partição da unidade subordinada a essa cobertura. Sejam  $F_i$  seus suportes.

Como todo o fechado dentro de um compacto é normal, podemos estender a representação local  $s_{A \cap F_i}$  a  $F_i$ . Essa extensão é uma função

$$g_i: F_i \rightarrow F_i \times \mathbb{C}^{k_i}$$

tal que  $\tau_i^{-1} \circ g_i(a) = s(a)$  para todo  $a \in A \cap F_i$ .

Defina, então, uma seção  $h_i: X \rightarrow E$  dada pelas equações

$$h_i(x) := \begin{cases} \varphi_i(x)(\tau_i^{-1} \circ g_i(x)) & \text{se } x \in F_i \\ 0 & \text{se } \varphi_i(x) = 0 \end{cases}$$

Essa seção é contínua pois podemos colar funções que são contínuas em fechados (proposição 1.3). A soma  $t := \sum_i h_i$  define, então, uma extensão de  $s$  e, portanto, temos o enunciado.  $\square$

Nas seções anteriores mostramos que todo o morfismo entre fibrados pode ser visto como uma seção. Isso juntamente com o fato que os morfismos de posto máximo formam um conjunto aberto implica que:

**Proposição 3.3.** *Todo o morfismo  $L: E_A \rightarrow F_A$  entre as restrições dos fibrados admite uma extensão  $M: E \rightarrow F$ . Se ele for estrito de posto máximo, existe uma vizinhança aberta de  $A$  onde a sua extensão tem posto máximo.*

## 3.2 Invariância por homotopias

Nesta seção vamos mostrar que dois fibrados vetoriais homotópicos são isomorfos. Essa afirmação e o teorema de Bott são os principais motivadores da idéia de transformar a K-teoria em uma teoria de cohomologia. Demonstraremos esse fato usando alguns lemas.

**Lema 3.1.** *Seja  $E \rightarrow X \times [a, c]$  um fibrado vetorial. Se existir um  $b \in [a, c]$  para o qual as restrições  $E_{X \times [a, b]}$  e  $E_{X \times [b, c]}$  são isomorfas a fibrados triviais, então  $E$  será isomorfo a um fibrado trivial.*

*Demonstração.* Escolha dois isomorfismos

$$K: E_{X \times [a, b]} \longrightarrow X \times [a, b] \times \mathbb{C}^k \quad \text{e} \quad L: E_{X \times [b, c]} \longrightarrow X \times [b, c] \times \mathbb{C}^l$$

Temos que  $k = l$  pois a aplicação linear  $L_{x, b} \circ (K_{x, b})^{-1}$  é um invertível, para todo  $x \in X$ . Agora, defina o morfismo

$$M: X \times [a, b] \times \mathbb{C}^k \longrightarrow X \times [a, b] \times \mathbb{C}^l$$

de forma que  $M_{x, t} := L_{x, b} \circ (K_{x, b})^{-1}$ . Veja que  $M$  é constante na variável  $t$ . Podemos então definir um função contínua definida por partes

$$N: E \longrightarrow X \times [a, c] \times \mathbb{C}^k$$

que é igual a  $M \circ K$  em  $E_{X \times [a, b]}$  e é igual a  $L$  em  $E_{X \times [b, c]}$ . Essa função é uma aplicação linear invertível em cada fibra e, portanto, é um isomorfismo. Assim, obtemos o enunciado.  $\square$

**Lema 3.2.** *Para todo o fibrado vetorial  $E \rightarrow X \times I$  e para todo o ponto  $x \in X$  existe uma vizinhança aberta  $V \subset X$  desse ponto tal que a restrição  $E_{V \times I}$  é isomorfa a um fibrado trivial.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U}$  o conjunto dos abertos de  $X \times I$  da forma  $U \times (t, s)$  sobre os quais existe uma trivialização local de  $E$ . Este conjunto é uma cobertura, já que  $E$  é um fibrado. Defina, então, o subconjunto

$$\mathcal{U}_x = \{U \times (t, s) \in \mathcal{U} \mid x \in U\}$$

da cobertura  $\mathcal{U}$ . Esse conjunto é uma cobertura do compacto  $x \times I$ . Escolha uma subcobertura finita formada pelos abertos  $U_i \times (a_i, b_i)$ . Seja  $V$  o aberto que é a interseção de todos os  $U_i$ . Ele é não-vazio pois contém  $x$ .

Escolha então uma sequência de números  $t_i$  de tal forma que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

e tal que para todo  $i$  existe um  $j$  para o qual  $[t_i, t_{i+1}] \subset (a_j, b_j)$ . Temos, então, que as restrições de  $E$  a cada um dos conjuntos  $V \times [t_i, t_{i+1}]$  são isomorfas a fibrados triviais. Pelo lema anterior podemos colar as trivializações, uma por uma, até obter uma trivialização de  $E_{V \times I}$ .  $\square$

No lema acima nós usamos a compacidade do intervalo para achar um número finito de trivializações e assim poder juntá-las. No teorema a seguir nós utilizaremos um processo similar, que usará partições da unidade. A idéia principal é tentar deformar o fibrado ao longo dos gráficos das funções de uma partição da unidade e assim obter um isomorfismo.

**Proposição 3.4.** *Seja  $X$  um espaço topológico compacto. Para cada homotopia  $f: X \times I \rightarrow Y$  e para cada fibrado  $E \rightarrow Y$  existe um isomorfismo*

$$f_0^*(E) \simeq f_1^*(E)$$

*Demonstração.* Pelas proposições na seção sobre pullbacks,

$$f_t^*(E) = (f|_{X \times t})^*(E) \simeq (f \circ i_{X \times t})^*(E) \simeq f^*(E)_{X \times t}$$

Portanto, sabemos que as restrições de  $f^*(E)$  a  $X \times 0$  e  $X \times 1$  são isomorfas a  $f_0^*(E)$  e  $f_1^*(E)$ , respectivamente. Basta então, para demonstrar o teorema, mostrar que as restrições  $F_{X \times 0}$  e  $F_{X \times 1}$  de um fibrado qualquer  $F \rightarrow X \times I$  são isomorfas.

Para isso, escolha uma cobertura finita de  $X \times I$  que é dada por abertos  $V_i \times I$  onde existem trivializações de  $F$ . Escolha, também, funções  $\varphi_i$  que formam uma partição da unidade associada a essa cobertura. Podemos, então, definir funções  $\psi_i = \varphi_1 + \dots + \varphi_i$  que têm como gráficos os subconjuntos  $\Gamma_i \subset X \times I$ . Note que  $\psi_0 = 0$  e  $\psi_n = 1$ , sendo que  $n$  é o número de elementos da cobertura.

Nosso próximo passo é definir uma sequência de morfismos

$$\begin{array}{ccc} F_{\Gamma_{i-1}} & \xrightarrow{L_i} & F_{\Gamma_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{i-1} & \xrightarrow{g_i} & \Gamma_i \end{array}$$

que são invertíveis em cada fibra e tais que as  $g_i$  são os homeomorfismos definidos pelas equações  $g_i(x, \psi_{i-1}(x)) = (x, \psi_i(x))$ . Para isso, definiremos  $L_{i,x}$  como sendo a identidade para os  $x$  tais que  $\varphi_i(x) = 0$ , ou seja, para os  $x$  tais que  $\psi_{i-1}(x) = \psi_i(x)$ .

O caso dos  $x$  que pertencem ao suporte de  $\varphi_i$  é um pouco mais complicado. Primeiro, observamos que esse suporte está contido em  $V_i$ . Escolhemos, então, uma trivialização local

$$\tau_i: F_{V_i \times I} \rightarrow V_i \times I \times \mathbb{C}^{k_i}$$

e definimos os conjuntos  $U_i = \Gamma_{i-1} \cap (V_i \times I)$  e  $W_i = \Gamma_i \cap (V_i \times I)$ . Daí, definimos a restrição do morfismo  $L_i$  ao conjunto  $F_{U_i}$  como sendo a composição

$$F_{U_i} \xrightarrow{\tau_i} U_i \times \mathbb{C}^{k_i} \longrightarrow W_i \times \mathbb{C}^{k_i} \xrightarrow{\tau_i^{-1}} F_{W_i}$$

sendo que o morfismo do meio é igual a função  $g_i|_{U_i} \times \mathbf{id}_{\mathbb{C}^{k_i}}$ . Com isso, temos um morfismo  $L_i$  que obviamente é invertível em cada fibra. A composição  $L = L_n \circ \dots \circ L_1$  define um isomorfismo entre  $F_{X \times 0}$  e  $F_{X \times 1}$  e portanto temos o enunciado.  $\square$

### 3.3 Métricas Hermitianas

Sabemos do capítulo anterior que todo o functor contínuo que está definido em espaços vetoriais pode ser estendido a um functor nos fibrados vetoriais. Em particular, nós podemos estender à  $\mathbf{Vect}_X$  o functor que associa a um espaço vetorial  $V$  o espaço das aplicações sesquilineares em  $V$ . Em outras palavras, o conjunto das aplicações  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  tais que

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle_B &= \langle v_1, v_3 \rangle_B + \langle v_2, v_3 \rangle_B & \langle \alpha v_1, v_2 \rangle_B &= \bar{\alpha} \langle v_1, v_2 \rangle_B \\ \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle_B &= \langle v_1, v_2 \rangle_B + \langle v_1, v_3 \rangle_B & \langle v_1, \alpha v_2 \rangle_B &= \alpha \langle v_1, v_2 \rangle_B \end{aligned}$$

Chamaremos o fibrado resultante de  $L_{\bar{1},1}(E)$  sendo que  $E \rightarrow X$  é um fibrado. Com isso podemos definir  $\text{herm}(E)$  que é o subconjunto aberto de  $L_{\bar{1},1}(E)$  formado pelas formas hermitianas, ou seja, formado pelos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_B \in L_{\bar{1},1}(E)_x$ , para algum  $x \in X$ , tais que  $\langle v, v \rangle_B > 0$  para todo  $v \neq 0$  em  $E_x$ .

As métricas Hermitianas sobre um fibrado são as seções de  $L_{\bar{1},1}(E)$  que tem a imagem inteiramente contida em  $\text{herm}(E)$ . Em outras palavras,

$$h: X \longrightarrow L_{\bar{1},1}(E)$$

é uma métrica sobre  $E$  se para todo  $x \in X$  e para todo  $v \in E_x$  nós temos que  $\langle v, v \rangle_{h(x)} > 0$ . É natural, então, perguntar se dado um fibrado vetorial existe alguma métrica sobre ele.



**Proposição 3.5.** *Existe uma métrica em todo o fibrado com base compacta.*

*Demonstração.* Nos fibrados triviais essa afirmação é trivial, pois basta usar o produto interno canônico de  $\mathbb{C}^n$  em cada fibra de  $\mathbb{C}_X^n$ . Escolha, então, uma cobertura finita da base  $X$  de um fibrado  $E$  de forma que, se os conjuntos  $U_k$  são os abertos dessa cobertura, então  $E_k := E_{U_k} \simeq U_k \times \mathbb{C}^{l_k}$ . Escolha, também, uma partição da unidade  $\varphi_k$  associada a essa cobertura.

Pela afirmação inicial, existem métricas  $h_k$  em cada um dos fibrados  $E_k$ . As seções que são dadas pelos produtos  $\varphi_k(x)h_k(x)$  estão bem definidas como seções de  $L_{\bar{1},1}(E)$ , pois basta pensar que elas são zero fora de  $U_k$ . Portanto, seja  $h$  igual a soma de todas essas seções.

Essa soma é uma métrica Hermitiana porque em cada ponto  $x \in X$  nós temos que pelo menos uma  $\varphi_k(x)$  é diferente de zero e, por isso, para todo vetor  $v \in E_x$  não-nulo existe  $k$  tal que  $\varphi_k(x)\langle v, v \rangle_{h_k(x)} > 0$ . Como a soma de todos os termos em  $h$  são maiores ou iguais a zero e pelo menos um termo é maior que zero, nós temos o enunciado.  $\square$

Toda métrica Hermitiana  $h$  em um fibrado  $E$  com base compacta define um norma no espaço vetorial  $\Gamma(E)$ . A norma de uma seção  $s \in \Gamma(E)$  é

$$\|s\|_h := \max_{x \in X} \langle s(x), s(x) \rangle_{h(x)}$$

Essa norma define uma topologia que é idêntica a definida na seção 2.1. Em particular, nós temos que para todo aberto  $U \subset \Gamma(E)$  que contém uma seção  $s$  existe uma bola  $B(s, \varepsilon) \subset U$ . Disso decorre que:

**Proposição 3.6.** *Seja  $U \subset \Gamma(E)$  um aberto e seja  $D \subset \Gamma(E)$  um conjunto denso. Então, para todo  $s \in U$  existe uma família contínua de seções*

$$s_t: X \longrightarrow E$$

*tal que  $s_0(x) = s(x)$ , tal que  $s_t \in U$ , para todo  $t$ , e tal que  $s_1 \in D$ .*

Veja que uma família contínua de seções  $s_t$  é, por definição, o mesmo que uma seção  $s: X \times I \rightarrow E \times I$ , sendo que  $s(x, t) = s_t(x)$ .

*Demonstração.* Como  $U$  é aberto, existe uma métrica em  $E$  e uma bola  $B(s, \varepsilon) \subset U$  que contém  $s$ . Essa bola também contém um elemento  $d \in D$ , pois esse conjunto é denso. Então, temos que a família  $s_t := (1 - t)s + td$  satisfaz as hipóteses, pois  $B(s, \varepsilon)$  é convexa.  $\square$

Essa demonstração foi trivial, mas a proposição terá uma aplicação importante na demonstração do teorema de Bott.

Para finalizar esta seção, vamos falar sobre isometrias e trivializações locais. Para isso, sejam  $E$  e  $F$  fibrados vetoriais e sejam  $g$  e  $h$  métricas sobre esses fibrados. Uma isometria é um morfismo  $L: E \rightarrow F$  tal que

$$\langle s(x), s(x) \rangle_{g(x)} = \langle Ls(x), Ls(x) \rangle_{h(x)}$$

para todo  $x \in X$  e para toda seção  $s \in \Gamma(E)$ .

Na próxima proposição, nós vamos mostrar que sempre podemos achar uma trivialização local isométrica ao redor de um ponto. Na demonstração nós usaremos o processo de Gram-Schmidt que transforma uma base qualquer em uma base ortonormal. Esse processo depende continuamente dos vetores da base original e, por isso, nós vamos poder aplicá-lo em todas as fibras simultaneamente. Note que, no fibrado trivial  $\mathbb{C}_X^n$ , nós sempre usaremos a métrica que é igual ao produto interno canônico em cada fibra.

**Proposição 3.7.** *Seja  $E$  um fibrado e seja  $h$  uma métrica sobre esse fibrado. Então, ao redor de todo ponto da base, existe uma trivialização local*

$$\sigma_U: E_U \longrightarrow \mathbb{C}_U^n$$

que também é uma isometria.

*Demonstração.* Dado um ponto  $a \in X$ , escolha uma trivialização local

$$\tau_U: E_U \longrightarrow \mathbb{C}_U^n$$

em uma vizinhança  $U$  de  $a$ . Defina, então, seções  $v_i$  do fibrado  $E_U$  tais que  $v_i(x) = (\tau_x)^{-1}(e_i)$ , sendo que  $e_i$  é a base canônica de  $\mathbb{C}^n$ . Para cada ponto  $x \in U$  nós temos que  $v_i(x)$  formam uma base de  $E_x$ .

Definimos, então, usando Gram-Schmidt na base  $v_i$  uma sequência de seções  $u_i$  de  $E_U$  de forma que  $u_i(x)$  forme uma base ortonormal de  $E_x$  para todo  $x \in U$ . A trivialização local do enunciado é dada pelo morfismo que tem como  $i$ -ésima coordenada a aplicação linear  $\sigma_{x,i}: E_x \rightarrow \mathbb{C}$  que é dada por

$$v \longmapsto \sigma_{x,i}(v) := \langle u_i(x), v \rangle_h$$

Ela é uma isometria pois (omitindo a dependência em  $x$  de  $\sigma$  e dos  $u_i$ )

$$\langle \sigma(v), \sigma(w) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\sigma_i(v)} \sigma_j(w) \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\sigma_i(v)} \sigma_j(w) \langle u_i, u_j \rangle_h = \langle v, w \rangle$$

já que  $\langle u_i, u_j \rangle_h = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$  e  $a = \sum_{i=1}^n \langle u_i, a \rangle_h u_i$ , para todo  $a \in E_x$ , pois os  $u_i$  formam uma base ortonormal. □

### 3.4 Subfibrados e monomorfismos

Nesta seção, nós vamos mostrar que todo o subfibrado tem um fibrado complementar e que todo fibrado é um subfibrado de um fibrado trivial. Seja, para isso,  $E$  um subfibrado de um fibrado  $G$ . Um fibrado complementar a  $E$  é um subfibrado  $F$  de  $G$  tal que  $E \oplus F$  é isomorfo a  $G$ .

**Proposição 3.8.** *Seja  $p: G \rightarrow X$  um fibrado com uma base compacta e seja  $E$  um subfibrado de  $G$ . Então existe um subfibrado  $F$  de  $G$  tal que  $E \oplus F \simeq G$ .*

*Demonstração.* Escolha uma métrica  $h$  para  $G$ . Defina, então, um subconjunto  $F$  de  $G$  de forma que  $v \in G_x$  pertence a  $F$  se e só se  $\langle w, v \rangle_h = 0$  para todo  $w \in E_x$ . Esse conjunto é o complemento ortogonal de  $E$ .

Como  $G_x = E_x \oplus F_x$  nós temos que o morfismo  $E \oplus F \rightarrow G$  que é a soma das inclusões vai ser um isomorfismo, já que ele vai ser invertível em todas as fibras. Portanto, para demonstrar a proposição, só falta mostrar que  $F$  é um subfibrado de  $G$ . Para isso, basta mostrar que dado um ponto  $a \in X$ , nós temos uma vizinhança  $U$  de  $a$  tal que  $F_U$  é um fibrado.

Para tanto, escolha uma vizinhança  $U$  tal que  $G$  seja trivial e tal que exista uma isometria  $\tau_U: E_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ . Essa isometria define uma base ortonormal de seções  $u_i(x) = (\tau_x)^{-1}(e_i)$  para  $1 \leq i \leq k$  para  $E_U$ . Usando essa base, nós definimos uma projeção  $P: G_U \rightarrow G_U$  dada por

$$P_x(v) = \sum_{1 \leq i \leq k} \langle u_i(x), v \rangle_h u_i(x)$$

para todo  $v \in G_x$ . Esse morfismo é uma projeção porque

$$\begin{aligned} P_x^2(v) &= \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{1 \leq j \leq k} \langle u_j(x), v \rangle_h \langle u_j(x), u_i(x) \rangle_h u_i(x) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{1 \leq j \leq k} \langle u_j(x), v \rangle_h \delta_{ji} u_i(x) = P_x(v) \end{aligned}$$

sendo que nós usamos a linearidade da métrica e o fato que os  $u_i(x)$  formam uma base ortonormal. Obviamente, nós temos que o núcleo de  $P_x$  é o complemento ortogonal de  $E_x$ , ou seja,  $F_x$  e a imagem de  $P_x$  é  $E_x$ .

Pelas propriedades das projeções, nós temos que  $F_U$  é um fibrado e isso completa a demonstração.  $\square$

**Proposição 3.9.** *Seja  $E \rightarrow X$  um fibrado com uma base compacta. Então existe um monomorfismo  $L: E \rightarrow \mathbb{C}_X^m$ . Como consequência, para todo fibrado  $E$  existe um fibrado complementar  $F$  tal que  $E \oplus F \simeq \mathbb{C}_X^m$ .*

*Demonstração.* Escolha um atlas finito ( $n$  elementos) de trivializações locais

$$\tau_i: E_i := E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^{m_i}$$

Sejam  $\varphi_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas que formam uma partição da unidade subordinada a cobertura de  $X$  dada pelos abertos  $U_i$ . Defina, então, para cada  $1 \leq i \leq n$ , um morfismo  $g_i: E \rightarrow \mathbb{C}_X^{m_i}$  tal que

$$g_i(v) = \varphi_i(p(v))\tau_i(v)$$

Esse morfismo é um isomorfismo sobre os  $x \in X$  tais que  $\varphi_i(x) > 0$ .

Seja, portanto,  $m = \sum_i m_i$ . Temos que a aplicação

$$L: E \longrightarrow \mathbb{C}_X^m = X \times \mathbb{C}^{m_1} \times \mathbb{C}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{C}^{m_n}$$

que é dada por  $L(v) = (x, g_1(v), g_2(v), \dots, g_n(v))$  é injetiva em toda parte. Isso porque para todo ponto  $x \in X$  existe um  $i$  tal que  $\varphi_i(x) > 0$ .

Agora, como todo subfibrado tem um complementar e  $E$  é isomorfo a sua imagem (pois  $L$  é monomorfismo), existe um subfibrado  $F$  de  $\mathbb{C}_X^m$  tal que  $E \oplus F \simeq \mathbb{C}_X^m$ . Com isso, obtemos o enunciado.  $\square$

# Capítulo 4

## K-teoria

Neste capítulo nós vamos definir os grupos  $K^n(X, A)$ , ou seja, os grupos de K-teoria de um par de espaços  $(X, A)$ , sendo que  $X$  é compacto e  $A \subset X$  é fechado. Mostraremos que  $K^n$  pode ser visto como um functor contravariante da categoria dos espaços topológicos compactos na categoria dos grupos abelianos (ou na categoria dos anéis para  $n$  igual a zero).

Nas primeiras duas seções e na quarta seção, nós vamos definir esses funtores e vamos provar algumas propriedades simples. Nas outras seções, nós vamos demonstrar a existência de uma sequência exata de um par para a K-teoria. As demonstrações dadas na última seção são adaptações da exposição dada em Switzer [Swi02] para a sequência exata topológica de um par.

### 4.1 Semianéis e K-teoria

Da mesma forma que o anel  $\mathbb{Z}$  pode ser definido como um fecho operacional do conjunto  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , nós podemos definir um anel  $K(S)$  que está associado a um semianel  $S$  e é único a menos de isomorfismos. Antes disso, contudo, temos que especificar o que é um semianel.

**Definição 4.1.** Um semianel é uma tripla  $(S, +, \times)$  tal que

$$+ : S \times S \rightarrow S \quad \times : S \times S \rightarrow S$$

são operações associativas, comutativas e que têm um elemento neutro. Exigimos também que a multiplicação seja distributiva com respeito a soma.

**Exemplo 4.1.** Seja  $\text{Vect}_X$  o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados vetoriais sobre um espaço compacto  $X$ . Sabemos, dos capítulos anteriores, que a soma direta e o produto tensorial estão definidos nesse conjunto. Além disso, note que essas duas operações fazem com que esse conjunto seja um semianel.

Temos, também, isomorfismos naturais entre o fibrado  $\mathbb{C}_X^n \otimes E$  e a soma direta de  $n$  cópias do fibrado  $E$ . Por isso, quando estivermos trabalhando com classes de equivalência, denotaremos o fibrado  $\mathbb{C}_X^n$  por  $n$ . Com isso  $n \otimes E$ , ou mais simplesmente,  $nE$  será a soma de  $n$  cópias de  $E$ . Note, em particular, que o fibrado trivial de posto um é o elemento neutro para multiplicação.

O próximo passo seria tentar definir o anel  $K(S)$ , para um semianel  $S$ . Analogamente a construção dos inteiros, usaremos diferenças formais  $a - b$  de elementos em  $S$ . Ou seja, tentaremos definir  $K(S)$  como um quociente do conjunto  $S \times S$  por um relação de equivalência.

Esta relação de equivalência  $\sim$  será dada pela seguinte definição

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff \exists c \in S \text{ tal que } a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c \quad (4.1)$$

Note que precisamos de  $c$  para garantir que essa relação seja transitiva, pois não exigimos na definição de um semianel que valha a lei do cancelamento. Denotaremos a classe de equivalência de um par  $(a, b)$  pelo símbolo  $a - b$ .

É fácil checar que essa relação é, de fato, de equivalência e que o conjunto assim definido é um anel com as operações definidas da forma óbvia.

**Exemplo 4.2.** Continuando o exemplo acima, podemos definir  $K(X)$  como sendo igual ao anel  $K(\text{Vect}_X)$ . Também é interessante observar que os elementos desse anel tem uma representação especial. Pois, sejam  $E$  e  $F$  fibrados sobre  $X$ . Como  $X$  é compacto podemos escolher um fibrado  $G$  tal que  $F \oplus G \simeq \mathbb{C}_X^n$ . Por isso,<sup>1</sup>

$$E - F = E + G - (F + G) = (E + G) - n$$

ou seja, todo o elemento de  $K(X)$  é da forma  $H - n$ . Ainda nesse sentido, podemos observar que, pela relação de equivalência que define  $K(X)$ ,

$$E_1 = E_2 \iff E_1 \oplus F \simeq E_2 \oplus F \implies E_1 \oplus \mathbb{C}_X^n \simeq E_2 \oplus \mathbb{C}_X^n$$

sendo que, na última implicação, nós somamos  $G$  dos dois lados. A recíproca é verdadeira por definição e, portanto,  $E_1 = E_2$  em  $K(X)$  se e só se existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $E_1 \oplus \mathbb{C}_X^n \simeq E_2 \oplus \mathbb{C}_X^n$ .

Também podemos ver que esse exemplo tem os inteiros como caso especial. Pois, nós sabemos que todo fibrado vetorial sobre um ponto é um espaço vetorial. Além disso, dois espaços vetoriais são isomorfos se e só se tem a mesma dimensão. Portanto, nós temos que  $\text{Vect}_{\text{pt}} = \mathbb{N}$ . Assim,  $K(\text{pt}) = \mathbb{Z}$ , pela construção acima.

O anel comutativo  $K(S)$  é especial pois, intuitivamente, ele é o menor anel que contém  $S$ . Para tornar essa afirmação mais precisa, nós precisamos

---

<sup>1</sup>Deste ponto em diante a expressão “ $E = F$ ” onde  $E$  e  $F$  são fibrados só será usada quando quisermos dizer que  $E$  e  $F$  tem a mesma classe de equivalência em  $K(X)$ .

observar que todo o homomorfismo  $\gamma: S \rightarrow A$ , onde  $A$  é um anel, pode ser estendido a um único homomorfismo  $K(\gamma): K(S) \rightarrow A$ .

Pois defina  $K(\gamma)(a-b) = \gamma(a) - \gamma(b)$ . Para nós mostrarmos que a imagem de um elemento de  $K(S)$  não depende do representante, nós aplicamos a  $\gamma$  na igualdade (4.1). Isso nos dá que

$$\gamma(a_1) + \gamma(b_2) + \gamma(c) = \gamma(a_2) + \gamma(b_1) + \gamma(c) \implies \gamma(a_1) - \gamma(b_1) = \gamma(a_2) - \gamma(b_2)$$

e isso demonstra nossa afirmação. Observe, também, que a definição que foi dada para  $K(\gamma)$  é a única possível que estende  $\gamma$ .

Com isso, nós podemos dar uma caracterização para o anel  $K(S)$ .

**Proposição 4.1.** *Seja  $S$  um semianel. Então,  $K(S)$  é o único anel, a menos de isomorfismos, para o qual o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & K(S) \\ & \searrow \gamma & \downarrow K(\gamma) \\ & & A \end{array}$$

tem uma única solução  $K(\gamma)$ , sendo que  $A$  é um anel e  $\alpha$  é a inclusão.

*Demonstração.* Sejam  $A_S$  um anel e  $\alpha_S: S \rightarrow A_S$  um homomorfismo. Suponha que esse par tenha uma propriedade análoga ao par  $(K(S), \alpha)$ , ou seja, suponha que para todo morfismo  $\gamma$  existe uma solução para um diagrama similar ao acima, só que com o par  $(A_S, \alpha_S)$ .

Então, pela propriedade universal de  $K(S)$  existe um homomorfismo  $K(\alpha_S): K(S) \rightarrow A_S$  que estende  $\alpha_S$ . Pela propriedade do  $A_S$  existe um homomorfismo  $\tilde{\alpha}_S: A_S \rightarrow K(S)$  que estende  $\alpha$ . Mas então a composição

$$K(\alpha_S) \circ \tilde{\alpha}_S: K(S) \longrightarrow K(S)$$

é um homomorfismo que estende  $\alpha$ . Por outro lado, o homomorfismo identidade também estende  $\alpha$ . Por hipótese a extensão é única e, então, temos que  $K(\alpha_S) \circ \tilde{\alpha}_S = \text{id}$ . Um argumento análogo mostra que  $\tilde{\alpha}_S \circ K(\alpha_S) = \text{id}$ . Por isso  $K(\alpha_S)$  é um isomorfismo e nós temos o enunciado.  $\square$

Será interessante estender um pouco a propriedade acima.

**Proposição 4.2.** *Seja  $\gamma: S \rightarrow T$  um homomorfismo entre semianéis. Então existe uma única extensão  $K(\gamma): K(S) \rightarrow K(T)$  desse homomorfismo. Além disso, valem as relações*

$$\begin{aligned} K(\text{id}) &= \text{id} \\ K(\gamma_1 \circ \gamma_2) &= K(\gamma_1) \circ K(\gamma_2) \end{aligned}$$

ou seja,  $K$  é um functor covariante.

*Demonstração.* Basta compor  $\gamma$  com a inclusão  $T \rightarrow K(T)$ . Pois esse é um homomorfismo que, pela proposição anterior, pode ser estendido de forma única a um homomorfismo que nós chamamos de  $K(\gamma)$ . Decorrem, também, dessa unicidade as identidades mencionadas.  $\square$

**Exemplo 4.3.** O pullback de fibrados vetoriais por uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  pode ser visto como um homomorfismo  $f^*: \text{Vect}_Y \rightarrow \text{Vect}_X$ . Pela proposição acima, ele pode ser estendido a um homomorfismo  $f^*: K(Y) \rightarrow K(X)$ . Note que, por simplicidade, denotaremos  $K(f^*)$  por  $f^*$ .

## 4.2 K-teoria de um par de espaços

Como vimos na seção anterior,  $K$  é um functor contravariante da categoria **CTop** dos espaços topológicos compactos na categoria dos anéis comutativos. Além disso, nós temos, pelo capítulo anterior, que  $f_0(E) \simeq f_1(E)$ , para toda a homotopia  $f: X \times I \rightarrow Y$  e para qualquer fibrado  $E$  sobre  $Y$ . Por isso, duas funções homotópicas definem a mesma aplicação

$$K(Y) \longrightarrow K(X)$$

Em particular, veja que se dois espaços  $X$  e  $Y$  tem o mesmo tipo de homotopia então o pullback por essa equivalência define um isomorfismo na K-teoria. Por isso, um espaço contrátil  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia de ponto. Consequentemente,  $K(X) \simeq K(x_0) \simeq \mathbb{Z}$ .

Nosso próximo passo é definir a K-teoria reduzida. Observe, então, que para todo espaço pontuado  $X$  nós temos um homomorfismo

$$i^*: K(X) \longrightarrow K(x_0) \simeq \mathbb{Z}$$

sendo que  $i$  é a inclusão do ponto base no espaço. O núcleo desse homomorfismo é um ideal de  $K(X)$  que será denotado por  $\tilde{K}(X)$ .

Observe, também, que se  $f: X \rightarrow Y$  é um aplicação entre espaços pontuados, nós temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{f^*} & K(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(y_0) & \xrightarrow{f^*} & K(x_0) \end{array}$$

é comutativo, pois  $f(x_0) = y_0$ . Portanto, temos que  $f^*[\tilde{K}(Y)] \subset \tilde{K}(X)$ . Por isso,  $\tilde{K}$  é um functor contravariante da categoria dos espaços pontuados na



categoria dos grupos abelianos (não usaremos o produto na K-teoria reduzida). Esse é o functor que dá a K-teoria reduzida de um espaço.

**Exemplo 4.4.** Veja que  $\tilde{K}(\text{pt}) = 0$ , pois o pullback pela inclusão do ponto nele mesmo é a identidade. Em particular, todo o espaço contrátil tem uma K-teoria reduzida trivial. Analogamente, considere a sequência

$$\mathbb{Z} = K(\text{pt}) \xrightarrow{c^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(\text{pt}) = \mathbb{Z}$$

onde  $c$  é a aplicação constante e  $i$  é a inclusão do ponto. A composição dessas aplicações é a identidade e por isso o homomorfismo  $c^*$  é injetivo,  $i^*$  é sobrejetiva e  $\ker(i^*) \cap \text{im}(c^*) = 0$ . Portanto,

$$K(X) = \ker(i^*) \oplus \text{im}(c^*) \simeq \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$$

pela definição de  $\tilde{K}(X)$  e porque  $c^*$  é um isomorfismo com sua imagem.

Podemos ver isso de uma maneira mais concreta. Pois veja que todo o elemento de  $K(X)$  é uma diferença  $H - n$ , para algum fibrado  $H$  sobre  $X$ . Temos, então, que  $i^*(H - n) = 0$  se e só se a fibra de  $H$  sobre o ponto base é igual a  $n$ . Então, para um elemento  $E - m$ , a decomposição acima é

$$E - m = (E - n) + (n - m)$$

onde  $n$  é a dimensão de  $E$  sobre o ponto base.

**Exemplo 4.5.** Analogamente, considere o homomorfismo

$$i^* \oplus j^*: K(X^+) \longrightarrow K(\text{pt}) \oplus K(X)$$

sendo que  $i$  e  $j$  são as inclusões de  $\text{pt}$  e  $X$ , respectivamente. Podemos definir uma inversa para esse homomorfismo. Ela é o homomorfismo que associa a um fibrado  $E$  sobre uma das partes ( $\text{pt}$  ou  $X$ ) um fibrado que igual a  $E$  nessa parte e igual ao fibrado trivial de posto zero na outra.

Com essa decomposição, nós vemos que  $\tilde{K}(X^+) = K(X)$ . Além disso, essa observação pode ser generalizada para mostrar que

$$K(X \sqcup Y) \simeq K(X) \oplus K(Y)$$

Para todos os espaços  $X$  e  $Y$  compactos.

**Exemplo 4.6.** Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma função constante igual a  $y_0$ . Essa função é igual a composta das funções

$$X \xrightarrow{c} \text{pt} \xrightarrow{i} Y$$

sendo que  $i$  é a função que leva o ponto em  $y_0$ . Como  $\tilde{K}(\text{pt}) = 0$ , então  $f^* = 0$ . Note, também, que o mesmo vale para funções homotópicas a uma constante, pela invariância por homotopias.

Usando a definição de K-teoria reduzida, nós podemos, então, definir (o isomorfismo do meio é induzido pelo homeomorfismo  $X/A \cong X^+/A^+$ )

$$\tilde{K}(X, A) := \tilde{K}(X/A) \simeq \tilde{K}(X^+/A^+) =: K(X, A)$$

que são chamados de grupos de K-teoria reduzida e não-reduzida, respectivamente, do par  $(X, A)$ . Essa definição é interessante pois ela nos dá um seqüência exata longa para um par de espaços topológicos. Isso será demonstrado nas próximas seções.

### 4.3 Colapsando fibrados triviais

Seja  $A \subset X$  um subespaço fechado de um espaço compacto. Para mostrar que a seqüência de grupos

$$\tilde{K}(X, A) \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(A) \quad (4.2)$$

é exata nós precisaremos mostrar que todo o fibrado sobre  $X$  que é trivial em  $A$  define um fibrado sobre  $X/A$ .

Para isso, seja  $E \rightarrow X$  um fibrado e  $\tau: E_A \rightarrow A \times \mathbb{C}^k$  uma trivialização. Seja, também,  $\pi: A \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$  a projeção. Defina, com isso, uma relação de equivalência em  $E$  que identifica pontos que tem a mesma imagem por  $\pi \circ \tau$ . Essa relação define um espaço topológico  $E_\tau$ .

Nossos próximos objetivos são mostrar que esse espaço é um fibrado sobre  $X/A$  e mostrar que o fibrado assim definido só depende da classe de homotopia da trivialização. Para o primeiro objetivo, basta mostrar que existe uma trivialização local ao redor de cada ponto da base.

Pelos capítulos anteriores, sabemos que podemos estender a trivialização  $\tau$  a uma vizinhança  $U$  de  $A$ . Perceba, então que essa trivialização desce a uma trivialização do quociente ao redor do ponto  $A/A \subset X/A$ . A demonstração que existe uma trivialização nos outros pontos de  $X/A$  é trivial.

Para o próximo objetivo, nós escolhemos uma homotopia  $\tau_t$  entre duas trivializações, ou seja, um isomorfismo

$$\tau: E_A \times I \longrightarrow A \times I \times \mathbb{C}^k$$

Veja que, como acima, podemos definir um fibrado  $(E \times I)_\tau \rightarrow X \times I$ . Isso dá uma homotopia, e portanto um isomorfismo, entre os fibrados  $E_{\tau_0}$  e  $E_{\tau_1}$ .

É interessante observar que, em geral, todas as construções que dependem de um isomorfismo entre fibrados na verdade só dependem da sua classe de homotopia desse morfismo. Pois nós sempre poderemos usar a homotopia

para construir um fibrado sobre  $X \times I$  que, então, pode ser usado para definir um isomorfismo. Usaremos esse truque algumas vezes neste texto.

Antes de voltarmos a sequência que queremos mostrar que é exata, nós precisaremos de mais uma proposição.

**Proposição 4.3.** *Para todo o par  $(E, \tau)$  como acima, nós temos que*

$$p^*(E_\tau) \simeq E$$

sendo que  $p: X \rightarrow X/A$  é a projeção.

*Demonstração.* Seja  $L: E \rightarrow E_\tau$  a projeção no quociente. É fácil ver que essa aplicação é um morfismo invertível em cada fibra. Pela caracterização do pullback, ela define o isomorfismo requerido pela proposição.  $\square$

A última proposição mostra que, de certa forma, a aplicação que faz a associação  $(E, \tau) \mapsto E_\tau$  define um inverso à direita para a aplicação induzida pela projeção  $p: X \rightarrow X/A$ . Podemos ver isso mais claramente na demonstração das proposições a seguir.

**Proposição 4.4.** *A seguinte sequência de grupos é exata*

$$K(X, A) \xrightarrow{p^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$$

sendo que a primeira aplicação é induzida pela projeção no quociente e a segunda é induzida pela inclusão.

*Demonstração.* A composição  $p \circ i$  é a aplicação constante, por isso  $i^*p^* = 0$ . Temos, então, que  $\text{im}(p^*) \subset \ker(i^*)$ . Para mostrar a outra inclusão, escolha um elemento  $\xi \in \ker(i^*)$ . Como  $X$  é compacto,  $\xi = E - n$  para algum fibrado  $E$  sobre  $X$ . Mas como  $\xi$  está no núcleo de  $i^*$ , nós temos, então, que

$$E_A \oplus \mathbb{C}_A^m \simeq \mathbb{C}_A^n \oplus \mathbb{C}_A^m$$

para algum  $m$ . Ou seja, existe uma trivialização  $\tau: E_A \oplus \mathbb{C}_A^m \rightarrow \mathbb{C}_A^{n+m}$ .

Sabemos que um par como o  $(E \oplus \mathbb{C}_X^m, \tau)$  define um fibrado vetorial  $F = (E_A \oplus \mathbb{C}_A^k)_\tau$  com base em  $X/A$ . Sabemos, também, pela proposição anterior que  $p^*(F) = E + m$ . Portanto,

$$p^*(F - (n + m)) = E - n = \xi$$

e, então,  $\ker(i^*) \subset \text{im}(p^*)$ .  $\square$

**Exemplo 4.7.** Podemos substituir  $X$  e  $A$  na sequência da proposição acima por  $X^+$  e  $A^+$  e obter a sequência exata

$$K(X, A) \xrightarrow{p^*} K(X) \xrightarrow{i^*} K(A)$$

Isso porque nós sabemos do exemplo 1.3 que existe um homeomorfismo entre  $X^+/A^+$  e  $X/A$  e por isso existe um isomorfismo  $K(X^+, A^+) \simeq K(X, A)$ . Também sabemos do exemplo 4.5 que  $\tilde{K}(X^+) = K(X)$ .

**Exemplo 4.8.** É fácil ver que existe um homeomorfismo  $(X \vee Y)/Y \cong X$  e outro homeomorfismo  $(X \vee Y)/X \cong Y$ . Por isso, nós temos duas sequências exatas

$$\begin{array}{ccccc} & & q_1^* & & i_1^* \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright \\ \tilde{K}(X) & & & \tilde{K}(X \vee Y) & & \tilde{K}(Y) \\ & & i_2^* & & q_2^* \\ & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft \end{array}$$

Como  $i_1^* \circ q_2^* = \text{id}$  e  $i_2^* \circ q_1^* = \text{id}$ , nós temos que

$$\tilde{K}(X \vee Y) = q_1^*[\tilde{K}(X)] \oplus q_2^*[\tilde{K}(Y)] \simeq \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \quad (4.3)$$

Para ver isso, note que  $q_1^*$  e  $q_2^*$  são isomorfismos com a imagem, pois são injetivas pelas equações acima. Isso define o isomorfismo em (4.3). Para a igualdade, basta mostrar que um elemento de  $z \in \tilde{K}(X \vee Y)$  é uma soma de elementos nas imagens das projeções e que essas imagens tem interseção trivial.

Mas, para isso, basta escrever  $x = [x - q_2^*i_1^*(x)] + q_2^*i_1^*(x)$ , pois o segundo elemento está na imagem de  $q_2^*$  e o primeiro está no núcleo de  $i_1^*$  que é igual a imagem de  $q_1^*$ . Isso porque  $i_1^*(x) - i_1^*q_2^*i_1^*(x) = 0$ , já que  $i_2^* \circ q_1^* = \text{id}$ .

Para ver que a interseção dessas imagens é nula, observe que para todo o elemento  $x \in \ker(i_1^*) \cap \text{im}(q_2^*) = \text{im}(q_1^*) \cap \text{im}(q_2^*)$ , nós temos um  $y \in \tilde{K}(Y)$  tal que  $q_2^*(y) = x$ . Mas, então,  $y = i_1^*q_2^*(y) = i_1^*(x) = 0$ . Isso implica que  $x = 0$  e, assim, concluímos a demonstração.

Observamos aqui que a decomposição em soma direta dada em (4.3) também preserva a estrutura de anel. Ou seja,  $(x_1 \oplus y_1)(x_2 \oplus y_2) = x_1x_2 \oplus y_1y_2$ . Isso porque aquelas imagens são ideais (pois são núcleos de morfismos) e tem interseção nula. Em particular,  $xy = 0$  para  $x \in q_1^*[\tilde{K}(X)]$  e  $y \in q_2^*[\tilde{K}(Y)]$ . Isso será usado, posteriormente, para mostrar que existe uma versão reduzida do teorema de Bott.

Se o subconjunto  $A$  for contrátil, então decorre da proposição acima que o homomorfismo induzido pela projeção é sobrejetivo. Além disso, podemos provar que, nesse caso, o fibrado  $E_\tau$  não depende da trivialização e, portanto, o pullback pela projeção é um isomorfismo.

**Proposição 4.5.** *Se o fechado  $A \subset X$  for contrátil, então*

$$p^*: \text{Vect}_{X/A} \longrightarrow \text{Vect}_X$$

*é uma bijeção. Por isso, o pullback  $p^*: K(X, A) \rightarrow \tilde{K}(X)$  é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Basta mostrar que  $p^*$  tem um inverso. Defina, então, uma aplicação  $q$  tal que  $q(E) := E_\tau$ , para toda classe de equivalência  $E \in \text{Vect}_X$ . Primeiro, temos que mostrar que essa aplicação está bem definida. Para isso, basta mostrar que, nesse caso, quaisquer duas trivializações são homotópicas.

Sejam, portanto, duas trivializações  $\tau_i: E_A \rightarrow A \times \mathbb{C}^k$ , para  $i = 0, 1$ . Então, a composição  $\tau_0 \circ \tau_1^{-1}$  define uma aplicação

$$\alpha: A \longrightarrow GL(k, \mathbb{C})$$

que é homotópica a uma constante, já que  $A$  é contrátil. Como  $GL(k, \mathbb{C})$  é conexo, nós podemos supor que essa constante é a aplicação identidade.

Em outras palavras, temos uma homotopia  $\alpha_t$  entre a aplicação  $\tau_0 \circ \tau_1^{-1}$  e a aplicação constante igual a identidade. Por isso, nós temos que

$$\alpha_0 \circ \tau_1 = (\tau_0 \circ \tau_1^{-1}) \circ \tau_1 = \tau_0 \quad \text{e} \quad \alpha_1 \circ \tau_1 = 1_{\mathbb{C}^k} \circ \tau_0 = \tau_0$$

Então,  $\alpha_t \circ \tau_1$  é uma homotopia entre  $\tau_0$  e  $\tau_1$  e, portanto,  $q$  está bem definida.

Falta mostrar que  $q$  é a inversa de  $p^*$ . Entretanto, nós já mostramos que

$$p^*q(E) = p^*(E_\tau) \simeq E$$

e a outra igualdade,  $qp^*(E) \simeq E$ , é trivial. □

## 4.4 A definição do grupo $\tilde{K}^1(X)$

Na seção passada nos vimos que a sequência (4.2) é exata. Nosso próximo passo é definir um grupo  $\tilde{K}^1(X)$  que nos permitirá estender aquela sequência. Ou seja, queremos um grupo abeliano tal que

$$\tilde{K}^1(A) \longrightarrow \tilde{K}(X, A) \longrightarrow \tilde{K}(X)$$

seja exata. Para isso, note que os fibrados sobre  $X$  que são induzidos por um fibrado de  $X/A$  são triviais em  $A$  (a menos de somas com fibrados triviais). A ideia é que, intuitivamente, dois desses fibrados vetoriais são iguais em  $X/A$  se eles diferem por um isomorfismo entre suas trivializações em  $A$ .

Por isso é natural definir  $\tilde{K}^1(A)$  como uma classe de equivalência de isomorfismos  $\mathbb{C}_A^n \rightarrow \mathbb{C}_A^n$ . Em outras palavras, diremos que dois isomorfismos

$$K: \mathbb{C}_A^n \longrightarrow \mathbb{C}_A^n \quad \text{e} \quad L: \mathbb{C}_A^m \longrightarrow \mathbb{C}_A^m$$

são estavelmente equivalentes se existir um isomorfismo

$$M: A \times I \times (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^k) \longrightarrow A \times I \times (\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^l)$$

tal que  $M|_{A \times 0} = K \oplus 1_{\mathbb{C}^k}$  e  $M|_{A \times 1} = L \oplus 1_{\mathbb{C}^l}$ . Esse isomorfismo será chamado de homotopia entre  $K \oplus 1_{\mathbb{C}^k}$  e  $L \oplus 1_{\mathbb{C}^l}$ . Note que essa relação é similar a que foi usada para definir  $K(X)$  (vide exemplo 4.2).

A soma entre duas classes de equivalência será dada pela soma direta de morfismos. Para ver que existe um inverso aditivo, nós observamos que, se  $K$  e  $L$  forem isomorfismos definidos em fibrados de mesma dimensão, então

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & \text{sen} \frac{\pi t}{2} \\ -\text{sen} \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & -\text{sen} \frac{\pi t}{2} \\ \text{sen} \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{bmatrix}$$

define uma homotopia entre  $KL \oplus 1$  e  $K \oplus L$  e, por isso,  $[KL] = [K \oplus L]$ . Temos, por isso, que  $[L] + [L^{-1}] = [L \oplus L^{-1}] = [LL^{-1}] = [1] = [0]$ .

Definimos então  $\tilde{K}^1(A)$  como sendo o grupo dado por essas classes de equivalência. A aplicação  $f^*: \tilde{K}^1(Y) \rightarrow \tilde{K}^1(X)$  que estará associada a uma função contínua  $f: X \rightarrow Y$  será dada pela relação  $f^*(L)_x = L_{f(x)}$  para todo o isomorfismo  $L: \mathbb{C}_Y^m \rightarrow \mathbb{C}_Y^m$  que pertence a  $K^1(Y)$ .

**Exemplo 4.9.** Nós temos que  $\tilde{K}^1(\text{pt}) = 0$ , pois toda a aplicação linear invertível é homotópica a identidade. Isso porque o grupo  $GL(k, \mathbb{C})$  é conexo.

**Exemplo 4.10.** Seja  $S^1 \subset \mathbb{C}$  o círculo unitário e seja  $f(w) = w^n$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . A multiplicação por  $z^m$  define um morfismo  $z^m: \mathbb{C}_{S^1} \rightarrow \mathbb{C}_{S^1}$ . Pela definição acima o pullback por  $f$  desse morfismo é  $f^*(z^m) = (z^n)^m = z^{nm}$ .

Apesar de ter uma motivação óbvia, essa definição é, muitas vezes, inconveniente para demonstrar teoremas. Por isso, demonstraremos na próxima seção que  $\tilde{K}^1(A) \simeq \tilde{K}(\Sigma A)$ . Analogamente, poderemos definir

$$\tilde{K}^n(X) := \tilde{K}(\Sigma^n X) \quad \text{e} \quad \tilde{K}^n(X, A) := \tilde{K}(\Sigma^n(X/A)) \simeq \tilde{K}(\Sigma^n X / \Sigma^n A)$$

Os análogos não-reduzidos serão dados pela composição das definições acima com o functor  $X \mapsto X^+$ .

O homomorfismo que fará a sequência definida no começo dessa seção ser exata será definido na última seção desse capítulo.

## 4.5 Colando fibrados vetoriais

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fechados de um espaço  $X = A \cup B$  compacto. Analogamente ao caso das funções, diremos que uma tripla  $(E, L, F)$  define um fibrado por partes se ela for composta por dois fibrados  $E \rightarrow A$  e  $F \rightarrow B$  e um isomorfismo  $L: E_{A \cap B} \rightarrow F_{A \cap B}$  entre as restrições desses fibrados.

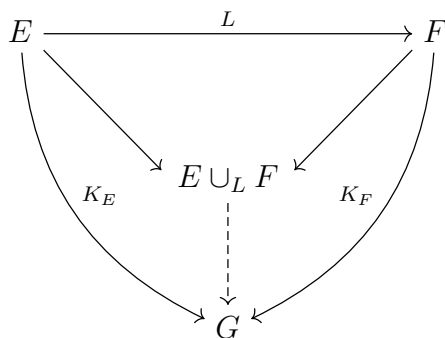
**Proposição 4.6.** *Suponha que  $(E, \alpha, F)$  define um fibrado por partes. Então o espaço topológico  $E \cup_\alpha F$  é um fibrado vetorial sobre  $A \cup B$ .*

*Demonstração.* Para demonstrar essa proposição, basta mostrar que para qualquer ponto da base existe uma trivialização local. Note, para isso, que quando  $x \in B - A$  basta escolher uma trivialização sobre um aberto  $U$  suficientemente pequeno para que  $U \cap A = \emptyset$ . Já que uma observação análoga vale para  $x \in A - B$ , só nos resta analisar o caso em que  $x$  pertence a interseção desses dois conjuntos.

Seja, então,  $x \in A \cap B$ . Escolha duas vizinhanças abertas  $U$  e  $V$  de  $x$  em  $X$ . Suponha que  $\bar{U} \subset V$  e suponha, também, que existe uma trivialização local  $\tau_1$  de  $E$  em  $V \cap A$ . Vemos, então, que a composição do isomorfismo  $\alpha^{-1}$  com  $\tau_1$  define uma trivialização de  $F$  no fechado  $\bar{U} \cap A \cap B$ . Essa última trivialização pode ser estendida a um morfismo  $\tau_2$  definido em todo  $F$ , pois  $B$  é compacto. Como  $\tau_1 \circ \alpha^{-1}$  era um isomorfismo em  $\bar{U} \cap A \cap B$ , temos que  $\tau_2$  é um isomorfismo numa vizinhança desse conjunto.

Construímos, portanto, duas trivializações locais  $\tau_1$  e  $\tau_2$  de  $E$  e  $F$ , respectivamente. Elas são tais que  $\tau_1 \circ (\alpha^{-1}|_{U \cap A \cap B}) = \tau_2|_{U \cap A \cap B}$  e, por isso, podemos colá-las e assim definir uma trivialização  $\tau$  de  $E \cup_\alpha F$  na vizinhança aberta  $U$  do ponto  $x$ .  $\square$

O fibrado que foi definido na proposição anterior é o único, a menos de isomorfismos, para o qual o seguinte diagrama tem uma solução única



sendo que  $K_E$  e  $K_F$  são morfismos e  $K_F \circ L = K_E$  em  $A \cap B$ . Essa propriedade decorre da propriedade análoga do espaço topológico  $E \cup_L F$  se observamos que a função contínua definida por  $K_E$  e  $K_F$  é linear em cada fibra.

Disso decorre, por exemplo, que  $E_1 \cup_{L_1} F_1$  é isomorfo a  $E_2 \cup_{L_2} F_2$  desde que existam isomorfismos  $K_1: E_1 \rightarrow E_2$  e  $K_2: F_1 \rightarrow F_2$  para os quais vale a igualdade  $L_2 = K_2 \circ L_1 \circ (K_1)^{-1}$ . Por outro lado, se

$$M: E_{A \cap B} \times I \longrightarrow F_{A \cap B} \times I$$

for uma homotopia entre  $M_i: E_{A \cap B} \rightarrow F_{A \cap B}$ , ou seja, for um isomorfismo com  $M_0 = M|_{A \cap B \times 0}$  e  $M_1 = M|_{A \cap B \times 1}$ , então nós podemos construir um fibrado  $(E \times I) \cup_M (F \times I)$  que define um isomorfismo  $E \cup_{M_0} F \simeq E \cup_{M_1} F$ .

Note que essa construção preserva somas diretas e produtos tensoriais. Mais especificamente, nós temos isomorfismos

$$\begin{aligned} (E_1 \cup_{L_1} F_1) \oplus (E_2 \cup_{L_2} F_2) &\simeq (E_1 \oplus E_2) \cup_{L_1 \oplus L_2} (F_1 \oplus F_2) \\ (E_1 \cup_{L_1} F_1) \otimes (E_2 \cup_{L_2} F_2) &\simeq (E_1 \otimes E_2) \cup_{L_1 \otimes L_2} (F_1 \otimes F_2) \end{aligned}$$

Veja também que essa construção é natural porque se  $E \rightarrow X$  é um fibrado, então  $E_A \cup_{\text{id}} E_B \simeq E$ . Tudo isso decorre da caracterização de  $E \cup_L F$ .

No resto da seção nos dedicaremos a provar que  $\tilde{K}^1(X) \simeq \tilde{K}(\Sigma X)$ . Note, para isso, que a suspensão  $\Sigma X$  pode ser vista como a união de dois cones que são as projeções dos conjuntos  $X \times [0, 1/2]$  e  $X \times [1/2, 1]$  no quociente. Esses conjuntos são contráteis e, por isso, todos os fibrados sobre eles são triviais.

Temos então que todo o isomorfismo  $L: \mathbb{C}_X^n \rightarrow \mathbb{C}_X^n$  define um fibrado  $E_L$  sobre a suspensão  $\Sigma X$  (lembre-se que identificamos imagem do conjunto  $X \times 1/2$  em  $\Sigma X$  com  $X$ ). Portanto, definimos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{K}^1(X) &\longrightarrow \tilde{K}(\Sigma X) \\ [L] &\longmapsto E_L - \mathbb{C}_X^n \end{aligned}$$

Veja que se nós tivermos uma homotopia entre os isomorfismos

$$L_1 \oplus 1_{\mathbb{C}^k}: \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^k \quad \text{e} \quad L_2 \oplus 1_{\mathbb{C}^l}: \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^l \rightarrow \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^l$$

então nós podemos concluir que

$$E_{L_1} - \mathbb{C}_X^n = E_{L_1} + \mathbb{C}_X^k - \mathbb{C}_X^{n+k} = E_{L_1 \oplus 1_k} - \mathbb{C}_X^{n+k} = E_{L_2 \oplus 1_l} - \mathbb{C}_X^{m+l} = E_{L_2} - \mathbb{C}_X^m$$

e por isso o homomorfismo está bem definido. Essa aplicação é uma bijeção porque todo o fibrado sobre  $\Sigma X$  é trivial sobre os cones e por isso ele é isomorfo a colagem de fibrados triviais usando a composição das trivializações. Isso define um homomorfismo que se estende a  $\tilde{K}(\Sigma X)$  e é um inverso do homomorfismo acima.



## 4.6 O homomorfismo bordo

Nesta seção nós vamos definir o homomorfismo  $\delta$  que faz a sequência

$$\tilde{K}(\Sigma X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(\Sigma A) \xrightarrow{\delta} \tilde{K}(X/A) \xrightarrow{p^*} \tilde{K}(X) \quad (4.4)$$

ser exata. Considere, para isso, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X/A & & \Sigma A & \longleftarrow & \Sigma X \\ & \searrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow \\ & & CA \cup X & & CA \cup CX & & \Sigma X \\ & & \longleftarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & & \\ & & & & & & \end{array} \quad (4.5)$$

sendo que as setas em forma de gancho são inclusões, as duplas induzem um isomorfismo na K-teoria, pois são quocientes por contráteis, e as outras, excluindo  $j$ , são projeções no quociente. Mais especificamente, a aplicação  $CA \cup X \rightarrow \Sigma A$  é a composição das aplicações

$$CA \cup X \longrightarrow CA \cup X/X \longrightarrow CA/A \longrightarrow \Sigma A$$

sendo a primeira é a projeção e as duas últimas são homeomorfismos. Da mesma forma, a função  $CA \cup CX \rightarrow \Sigma X$  é a composição das aplicações

$$CA \cup CX \longrightarrow CA \cup CX/CA \cup X \longrightarrow CX/X \longrightarrow \Sigma X$$

As outras projeções são definidas de forma análoga. Note, também, que os dois triângulos no diagrama acima são comutativos, por definição.

Definimos, então,  $\delta$  como sendo a composição  $(p^*)^{-1} \circ q^*$  dos homomorfismos induzidos pela sequência

$$X/A \xleftarrow{p} CA \cup X \xrightarrow{q} \Sigma A$$

O próximo passo é checar que a sequência (4.4) é exata.

Note, para isso, que, pela proposição 4.4, a sequência

$$X \longleftarrow CA \cup X \longrightarrow \Sigma A$$

induz uma sequência exata na K-teoria reduzida. Por isso, nós temos que a primeira parte da sequência (4.4) é exata.

Para demonstrar que a outra parte da sequência (4.4) é exata, nós precisaremos da seguinte proposição.

**Proposição 4.7.** *Seja  $j: \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  dada por  $j(x, t) = (x, 1 - t)$ . Então*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A & \xleftarrow{\quad} & \Sigma X \\ \uparrow & & \uparrow j \\ CA \cup CX & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

*é comutativo a menos de homotopias.*

*Demonstração.* A homotopia  $h_s: CA \cup CX \rightarrow \Sigma X$  que faz esse diagrama comutar é dada por  $h_s(a, t) = (a, (1 - s)t)$  para  $a \in A$  e  $h_s(x, t) = (x, 1 - st)$  para  $x \in X$ . Ela está bem definida e é contínua pois na interseção dos cones, ou seja, quando  $x \in A$  e  $t = 1$ , as duas definições coincidem.  $\square$

Temos, então, que a última parte de (4.4) é exata porque

$$\tilde{K}(\Sigma X) \longleftarrow \tilde{K}(CA \cup CX) \longleftarrow \tilde{K}(CA \cup X)$$

é uma sequência exata. Com isso, mostramos que a sequência (4.4) é exata. Para resumir, nós concluímos que:

**Teorema 2** (Sequência exata do par). *Para todo o subespaço fechado  $A$  de um espaço compacto  $X$  nós temos uma sequência exata de grupos*

$$\tilde{K}^1(X, A) \longrightarrow \tilde{K}^1(X) \longrightarrow \tilde{K}^1(A) \longrightarrow \tilde{K}(X, A) \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(A)$$

*Além disso, a versão não-reduzida dessa sequência também é exata.*

Podemos, então, usando as definições dos grupos  $K^n(X, A)$  que foram dadas na seção 4.4 e aplicando a suspensão em todos os espaços no teorema anterior, concluir que a sequência

$$\tilde{K}^n(X, A) \rightarrow \tilde{K}^n(X) \rightarrow \tilde{K}^n(A) \rightarrow \tilde{K}^{n-1}(X, A) \rightarrow \tilde{K}^{n-1}(X) \rightarrow \tilde{K}^{n-1}(A)$$

é exata. Por isso, vemos que a sequência exata do par pode ser estendida à esquerda o quanto quisermos. Estendê-la à direita, contudo, vai exigir a versão reduzida do teorema de Bott.

# Capítulo 5

## Teorema de Bott

O produto exterior é um homomorfismo

$$\boxtimes: K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$$

que é induzido pela aplicação  $E \boxtimes F := p_1^*(E) \otimes p_2^*(F)$ , sendo que  $E \rightarrow X$  e  $F \rightarrow Y$  são fibrados e  $p_i$  são as projeções nos fatores de  $X \times Y$ . Veja que esse produto é uma generalização do produto em  $K(X)$ , pois a composição

$$K(X) \otimes K(X) \xrightarrow{\boxtimes} K(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} K(X)$$

onde  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  é a aplicação diagonal, é o produto tensorial.

Esse homomorfismo é, também, natural, ou seja, nós temos que

$$\begin{array}{ccc} K(X) \otimes K(Y) & \xrightarrow{\boxtimes} & K(X \times Y) \\ f^* \otimes g^* \uparrow & & \uparrow (f \times g)^* \\ K(Z) \otimes K(W) & \xrightarrow{\boxtimes} & K(Z \times W) \end{array}$$

para toda  $f: X \rightarrow Z$  e  $g: Y \rightarrow W$  contínuas. Para ver isso basta escrever explicitamente as definições das composições  $\boxtimes \circ (f^* \otimes g^*)$  e  $(f \times g)^* \circ \boxtimes$  nos fibrados vetoriais e ver que ali elas coincidem.

É natural, então, perguntar se essa aplicação é um isomorfismo para algum par de espaços. O teorema de Bott, cuja demonstração é o objetivo desse capítulo, dá uma resposta afirmativa para essa questão no caso em que  $X$  é um espaço qualquer e  $Y$  é a esfera  $S^2$ .

Esse teorema, além de ser um método para calcular o  $K$  do produto de um espaço pela esfera, nos permitirá, no próximo capítulo, mostrar que existe

um isomorfismo  $K^2(X) = \tilde{K}(S^2X) \simeq \tilde{K}(X)$ . Em outras palavras, poderemos mostrar que o functor  $K$  é periódico.

**Teorema 3** (Teorema de Bott). *Seja  $X$  compacto. O produto exterior*

$$\beta: K(X) \otimes K(S^2) \longrightarrow K(X \times S^2)$$

*é um isomorfismo de anéis.*

A estratégia para a demonstração envolve estudar os fibrados vetoriais sobre  $X \times S^2$ . Na primeira seção, vamos mostrar que todos esses fibrados podem ser obtidos pela colagem de dois fibrados  $E \rightarrow X$  e  $F \rightarrow X$  usando um isomorfismo  $L: E \times S^1 \rightarrow F \times S^1$ . Na segunda, mostraremos que todo isomorfismo desse tipo pode ser aproximado, e é portanto homotópico, a um isomorfismo de Laurent.

Nas próximas duas seções nós vamos mostrar que existem algumas identidades entre morfismos polinomiais (um morfismo de Laurent difere de um polinomial por uma multiplicação por  $z^{-n}$ ). Essas relações nos permitiram definir, na última seção, um inverso para o produto exterior  $\beta$ .

## 5.1 Fibrados sobre $X \times S^2 = X \times \mathbb{C}P$

A esfera  $S^2$  pode ser vista como sendo a compactificação de  $\mathbb{C}$  ou como sendo a colagem de dois discos fechados (os hemisférios)  $D_0$  e  $D_\infty$ . Essas duas descrições são essencialmente equivalentes, pois podemos fazer a identificação

$$\begin{aligned} D_0 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \\ D_\infty &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

Por causa disso, todo o fibrado vetorial sobre  $S^2$  é uma colagem de um fibrado vetorial sobre  $D_0$  e outro sobre  $D_\infty$ . Ou seja, todo fibrado vem de uma tripla  $(E, L, F)$ , onde  $L$  é um morfismo sobre  $D_0 \cap D_\infty = S^1$ .

Note, entretanto, que esses dois conjuntos são contráteis e, por isso, todo o fibrado sobre eles é trivial. Então, da mesma forma que na seção 4.5, nós temos que todo o fibrado sobre  $S^2$  vem de um morfismo  $\mathbb{C}_{S^1}^k \rightarrow \mathbb{C}_{S^1}^k$ .

Essa discussão pode ser facilmente generalizada para obtermos:

**Proposição 5.1.** *Para todo o fibrado  $G \rightarrow X \times S^2$  existe um par  $(E, L)$ , sendo que  $E$  é um fibrado sobre  $X$  e  $L: E \times S^1 \rightarrow E \times S^1$  é um isomorfismo, tal que o fibrado  $[E, L] := (E \times D_0) \cup_L (E \times D_\infty)$  é isomorfo a  $G$ .*

*Demonstração.* Sejam  $r_i: X \times D_i \rightarrow X \times \{1\}$ , para  $i = 0$  ou  $\infty$ , os retratos por deformação que levam os conjuntos contráteis  $D_0$  e  $D_\infty$  em  $1 \in \mathbb{C}$ . Então, pela invariância por homotopias, nós temos que os fibrados vetoriais  $G_{X \times D_0}$  e  $G_{X \times D_\infty}$  são isomorfos aos pullbacks por  $r_i$  de  $E := G_{X \times 1}$ .

Com isso, defina os isomorfismos  $K_i: G_{X \times D_i} \rightarrow r_i^*(E) = E \times D_i$ . A composição  $K_\infty \circ K_0^{-1}$  define um isomorfismo  $L: E \times S^1 \rightarrow E \times S^1$  tal que  $[E, L] \simeq G$  pelas propriedades da colagem de fibrados.  $\square$

Só precisamos de um fibrado na proposição acima, entretanto será conveniente definir  $[E, L, F] := (E \times D_0) \cup_L (F \times D_\infty)$ . Isso vai evitar que façamos identificações desnecessárias. Lembre-se também que dois isomorfismos homotópicos definem o mesmo fibrado vetorial. No resto dessa seção nós vamos calcular as triplas que correspondem a certos fibrados sobre  $X \times S^2$ .

Seja, para isso,  $\mathbb{C}P \cong S^2$  a reta projetiva complexa. Esse espaço topológico pode ser visto como sendo o conjunto dos espaços vetoriais de dimensão um em  $\mathbb{C}^2$ , ou como sendo o quociente de  $\mathbb{C}^2 - \{0\}$  pela relação de equivalência

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0; \quad v = \lambda w$$

Em particular, a última descrição define a topologia usual da reta projetiva. A primeira, por outro lado, nos permite definir um subfibrado do fibrado trivial  $\mathbb{C}P \times \mathbb{C}^2$  que é dado pelo conjunto

$$E(1, 1) = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P \times \mathbb{C}^2 \mid v \in \ell\}$$

Esse é o fibrado canônico da reta projetiva complexa que tinha sido definido no exemplo 2.3.

Seja  $[z, w]$  a classe de equivalência em  $\mathbb{C}P$  de um ponto  $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ . Definimos dois abertos da reta projetiva complexa

$$U_0 := \{[z, w] \in \mathbb{C}P \mid w \neq 0\} \quad \text{e} \quad U_1 := \{[z, w] \in \mathbb{C}P \mid z \neq 0\}$$

Veja que cada um desses abertos é homeomorfo a  $\mathbb{C}$ . No primeiro, a aplicação que dá esse homeomorfismo é da forma  $z \mapsto [z, 1]$ .

O fibrado canônico é trivial quando restrito a esses abertos. As trivializações que dão esses isomorfismos são dadas pelas equações

$$\begin{aligned} \tau_0^{-1}([z, 1], \alpha) &= ([z, 1], (\alpha z, \alpha)) \in E(1, 1)_{U_0} \subset \mathbb{C}P \times \mathbb{C}^2 \\ \tau_1^{-1}([1, z], \alpha) &= ([1, z], (\alpha, \alpha z)) \in E(1, 1)_{U_1} \subset \mathbb{C}P \times \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

A troca de coordenadas  $\tau_1^{-1} \circ \tau_0$  é, então, dada pela equação

$$\tau_1 \circ \tau_0^{-1}([z, 1], \alpha) = ([z, 1], \alpha z)$$

(para checar esse fato aplique  $\tau_1^{-1}$  na equação e observe que  $[z, 1] = [1, 1/z]$ ).

Portanto, se identificarmos  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  com a reta projetiva usando a aplicação  $z \rightarrow [z, 1]$ , nós temos que, pela discussão acima, o fibrado  $E(1, 1)$  é isomorfo ao fibrado  $[\mathbb{C}, z]$ . Veja que  $z$  representa o morfismo  $\mathbb{C}_{S^1} \rightarrow \mathbb{C}_{S^1}$  dado pela associação  $(z, w) \mapsto (z, zw) \in S^1 \times \mathbb{C}$ .

Decorre então das propriedades da colagem de fibrados que

$$E(1, 1) \otimes E(1, 1) \simeq [\mathbb{C}, z] \otimes [\mathbb{C}, z] \simeq [\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}, z \otimes z] \simeq [\mathbb{C}, z^2]$$

Ou, de forma mais geral,  $[\mathbb{C}, z^n] \otimes [\mathbb{C}, z^m] = [\mathbb{C}, z^{n+m}]$ . Como consequência disso nós temos que o fibrado  $H := [\mathbb{C}, z^{-1}]$ , chamado de fibrado dos hiperplanos, é tal que  $H \otimes E(1, 1) \simeq \mathbb{C}_{S^2}$ .

**Proposição 5.2.** *O fibrado  $H \rightarrow S^2$  satisfaz a igualdade  $H^2 \oplus \mathbb{C}_{S^2} \simeq H \oplus H$ .*

*Demonstração.* Veja que o fibrado  $H^2 \oplus \mathbb{C}_{S^2}$  é isomorfo a  $[\mathbb{C}^2, z^{-2} \oplus 1]$  e o fibrado  $H \oplus H$  é isomorfo a  $[\mathbb{C}^2, z^{-1} \oplus z^{-1}]$ . Então, a homotopia da seção 4.4, mostra que os isomorfismos  $z^{-2} \oplus 1$  e  $z^{-1} \oplus z^{-1}$  são homotópicos.  $\square$

Podemos, então, generalizar essa discussão para  $X \times S^2$ . Pois observe que  $p_1^*(E) \simeq [E, 1]$  quando  $E \rightarrow X$  é um fibrado e  $p_1: X \times S^2 \rightarrow X$  é a projeção. Por isso, nós temos que

$$E \boxtimes H^n = p_1^*(E) \otimes p_2^*(H)^n \simeq [E, 1] \otimes [\mathbb{C}_X, z^{-n}] \simeq [E, z^{-n}]$$

ou seja, esses fibrados estão na imagem do produto exterior.

Nosso objetivo nas próximas seções será mostrar que todo o fibrado sobre  $X \times S^2$  é uma soma de fibrados dessa forma.

## 5.2 Aproximações e séries de Laurent

Na última seção nós reduzimos o problema de entender os fibrados sobre  $X \times S^2$  ao problema de entender os morfismos da forma

$$L: E \times S^1 \rightarrow F \times S^1$$

sendo que  $E \times S^1$  e  $F \times S^1$  são fibrados sobre  $X \times S^1$  que tem a projeção natural. Veremos, agora, que esses isomorfismos podem ser aproximados por morfismos de Laurent. Esses últimos tem uma estrutura mais simples que será estudada com cuidado nas próximas seções.

Primeiro vamos a sua definição.

**Definição 5.1.** Um morfismo  $L: E \times S^1 \rightarrow F \times S^1$  é dito de Laurent se existem morfismos  $a_k: E \rightarrow F$  tais que

$$L(x, z) = \sum_{|k| \leq n} a_k(x) z^k$$

sendo que  $(x, z) \in X \times S^1$  e  $L(x, z)$  é a restrição de  $L$  a fibra  $E_{x,z} = E_x$ .

Veja que essa definição é análoga a definição dos polinômios de Laurent do círculo unitário. É natural, portanto, tentar generalizar os teoremas que são válidos para funções sobre esse círculo. Faremos isso primeiro num caso particular. Veremos logo em seguida que ele implica um teorema mais geral.

Seja, então,  $X$  é um espaço compacto e  $f: X \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua. Definimos, então, funções  $a_n: X \rightarrow \mathbb{C}$  dadas pelas equações

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(x, z) z^{-n-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

e definimos, então, uma função<sup>1</sup>  $u: X \times B^2 \rightarrow \mathbb{C}$  que dada por

$$u(x, z) = u(x, r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) r^{|n|} e^{in\theta}$$

sendo que  $\theta$  é o argumento de  $z$  e  $r$  é o seu valor absoluto. Essa função está definida no disco aberto  $B^2$  pois, em cada ponto do espaço  $X \times S^1$ , a soma é dominada por uma constante vezes a série geométrica  $\sum_{n \in \mathbb{N}} r^n$ , que é convergente para  $0 \leq r < 1$  (lembre-se que  $X$  é compacto).

Podemos também usar o fato da soma ser absolutamente convergente para mostrar que, para  $0 \leq r < 1$ ,

$$\begin{aligned} u(x, r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x, e^{it}) r^{|n|} e^{in(\theta-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \right) f(x, e^{it}) dt \end{aligned}$$

pois, assim, nós podemos trocar a ordem da integração e da soma. Esse cálculo nos leva a seguinte definição.

**Definição 5.2.** O núcleo de Poisson  $P: B^2 \rightarrow \mathbb{C}$  é definido pela soma

$$P(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$$

que é absolutamente convergente.

<sup>1</sup>denotaremos por  $B^2$  a bola unitária aberta em  $\mathbb{C}$

A seguir mostraremos que esse núcleo define uma identidade aproximada no anel das funções contínuas com valores complexos. Com isso mostraremos que a função  $u$ , quando restrita a um  $r$  próximo de um, aproxima  $f$ . Primeiro, contudo, temos que observar que valem as seguintes identidades

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} &= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} (re^{-i\theta})^n = \frac{1}{1 - re^{-i\theta}} - 1 = \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{-i\theta}}\end{aligned}$$

sendo que nas duas nós somamos uma série geométrica. Portanto,

$$P(r, \theta) = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} + \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{-i\theta}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} \quad (5.1)$$

As seguintes propriedades são as propriedades que fazem do núcleo de Poisson ser uma identidade aproximada.

**Proposição 5.3.** *O núcleo de Poisson tem as seguintes propriedades:*

1. Para  $0 \leq r < 1$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$  nós temos que  $P(r, \theta) > 0$ ;
2. Para todo  $0 < \delta < \pi$  nós temos que, para  $r \rightarrow 1$ ,  $P(r, \theta)$  converge uniformemente a função identicamente nula no intervalo  $[\delta, 2\pi - \delta]$ ;
3. Para todo  $0 \leq r < 1$  nós temos que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta) d\theta = 1$ .

*Demonstração.* Como  $0 \leq r < 1$  nós temos que

$$1 - r^2 > 0 \quad \text{e} \quad 1 - 2r \cos(\theta) + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (r - 1)^2 > 0$$

Então, pela equação (5.1), obtemos a propriedade (1). Também decorre dela que  $P(r, \theta) = P(r, 2\pi - \theta)$  e que  $P(r, \theta)$  é decrescente no intervalo  $[0, \pi]$  e crescente no intervalo  $[\pi, 2\pi]$ . Isso, por sua vez, nos mostra que o máximo de  $P(r, \theta)$  no intervalo  $[\delta, 2\pi - \delta]$  é igual a  $P(r, \delta) = P(r, 2\pi - \delta)$ .

Podemos, então, mostrar que para todo  $0 < \delta < \pi$  a função  $P(r, \theta)$  converge uniformemente a zero pois

$$|P(r, \theta)| < |P(r, \delta)| = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta) + r^2} \rightarrow \frac{0}{2 - 2 \cos(\delta)} = 0$$

independentemente de qual  $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$  nós escolhermos. Isso demonstra a propriedade (2).



Para demonstrar a propriedade (3) basta integrar a soma que define  $P(r, \theta)$  termo a termo. Pois,

$$\int_0^{2\pi} r^{|n|} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim concluímos a demonstração.  $\square$

A seguinte proposição nos dá as aproximações desejadas. Veja que a demonstração só depende das propriedades dadas na proposição anterior, portanto essa proposição vale para um identidade aproximada qualquer.

**Proposição 5.4.** *Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que*

$$1 - \delta < r < 1 \implies |u(x, r, \theta) - f(x, e^{i\theta})| < \varepsilon$$

para todo  $x \in X$  e para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Pelas propriedades (1) e (3) do núcleo de Poisson,

$$\begin{aligned} |u(x, r, \theta) - f(x, e^{i\theta})| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) [f(x, e^{it}) - f(x, e^{i\theta})] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) |f(x, e^{it}) - f(x, e^{i\theta})| dt \end{aligned}$$

Escolha, então, um  $0 < \delta_1 < \pi$  tal que, para todo  $x \in X$ ,

$$|\theta - t| < \delta_1 \implies |f(x, e^{it}) - f(x, e^{i\theta})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Um  $\delta_1$  com essa propriedade existe porque  $X$  é compacto e, por isso, a continuidade de  $f$  é uniforme. Portanto podemos dividir a última integral da equação acima em dois intervalos. Para o primeiro nós temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\theta-t|<\delta_1} P(r, \theta - t) |f(x, e^{it}) - f(x, e^{i\theta})| dt < \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

Para o segundo intervalo nós observamos que, pela propriedade (2), existe um  $\delta > 0$  tal que, para  $t \in [0, 2\pi]$  tal que  $|\theta - t| > \delta_1$ ,

$$1 - \delta < r < 1 \implies |P(r, \theta - t)| < \frac{\varepsilon}{4 \sup |f|}$$

Por isso, e já que  $|f(v) - f(w)| \leq 2 \sup |f|$  para todo  $v, w \in X \times S^1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\theta-t|>\delta_1} P(r, \theta - t) |f(x, e^{it}) - f(x, e^{i\theta})| dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

Então temos o enunciado.  $\square$

**Corolário 5.1.** *Para todo  $\varepsilon > 0$  nós podemos escolher um  $N$  suficientemente grande e um  $r$  suficientemente próximo de um para que*

$$\left| f(x, z) - \sum_{n \leq N} c_n(x) r^{|n|} z^n \right| < \varepsilon$$

*para todo  $x \in X$  e  $z \in S^1$ . Em outras palavras, nós podemos aproximar uma função contínua arbitrariamente bem por somas do tipo  $\sum_{n \leq N} a_n(x) z^n$ .*

Esse corolário, que é uma consequência óbvia da proposição anterior e da definição de  $u$ , era um dos principais objetivos dessa seção. Isso porque ele será usado, na próxima proposição, para aproximar um isomorfismo qualquer por morfismos de Laurent.

**Proposição 5.5.** *Seja  $L: E \times S^1 \rightarrow F \times S^1$  um morfismo. Existe, então, um morfismo de Laurent que é homotópico a ele. Além disso, se*

$$K(x, z) = \sum_{|k| \leq n} a_k(x) z^k \quad e \quad L(x, z) = \sum_{|k| \leq n} b_k(x) z^k$$

*são homotópicos, então existe uma homotopia  $M$  entre eles tal que*

$$M(x, t, z) = \sum_{|k| \leq m} c_k(x, t) z^k$$

*com  $c(x, 0) = a_k(x)$  e  $c_k(x, 1) = b_k(x)$ .*

*Demonstração.* Pela proposição 3.6, para mostrar que  $L$  é homotópico a um morfismo de Laurent, basta mostrar que o conjunto dos isomorfismos de Laurent é denso no fibrado

$$\Gamma[\text{hom}(E \times S^1, F \times S^1)]$$

Para isso, escolha uma métrica  $h$  para esse fibrado e escolha um atlas finito com trivializações locais ortonormais (que existe pela proposição 3.7)

$$\tau_k: \text{hom}(E \times S^1)_k \longrightarrow U_k \times S^1 \times \text{hom}(\mathbb{C}^{m_k}, \mathbb{C}^{m_k})$$

e escolha uma partição da unidade formada por funções contínuas  $\varphi_k$  tais que seus suportes  $B_k$  estão contidos em  $U_k$ .

Temos então que a restrição

$$L_k := \tau_k \circ L: B_k \longrightarrow U_k \times S^1 \times \text{hom}(\mathbb{C}^{m_k}, \mathbb{C}^{m_k})$$

pode ser aproximada coordenada a coordenada por funções de Laurent. Por isso, dado um  $\varepsilon > 0$ , nós podemos definir um isomorfismo de Laurent  $\ell_k$  tal que  $|L_k - \ell_k| < \varepsilon$  na norma definida pelo produto interno canônico. Por isso,

$$\begin{aligned} \left| L(x, z) - \sum_k \varphi_k(x) \tau_k^{-1} \ell_k(x, z) \right|_h &= \left| \sum_k \varphi_k(x) L(x, z) - \sum_k \varphi_k(x) \tau_k^{-1} \ell_k(x, z) \right|_h \\ &\leq \sum_k \varphi_k(x) \left| L(x, z) - \tau_k^{-1} \ell_k(x, z) \right|_h \\ &= \sum_k \varphi_k(x) |L_k(x, z) - \ell_k(x, z)| < \varepsilon \end{aligned}$$

sendo que usamos o fato de  $\tau_k$  ser isometria na última igualdade. Como isso vale para todo  $(x, z) \in X \times S^1$  nós temos que  $\|L - \ell\|_h < \varepsilon$  sendo que  $\ell$  é igual a soma  $\sum_k \varphi_k(x) \tau_k^{-1} \ell_k(x)$ , que é um morfismo de Laurent. Note que esse morfismo é um isomorfismo porque ele se encontra próximo de um isomorfismo e o conjunto dos isomorfismos é aberto.

A segunda parte da proposição é uma consequência da primeira. Pois uma homotopia  $H$  entre dois morfismos de Laurent  $K$  e  $L$  é um morfismo

$$H: E \times I \times S^1 \longrightarrow F \times I \times S^1$$

tal que  $M_0 = K$  e  $M_1 = L$ . Mas todo morfismo pode ser aproximado, e é portanto homotópico, à um morfismo de Laurent. Por isso, se denotarmos por  $\tilde{h}$  a métrica induzida pela métrica  $h$  em

$$\Gamma[\text{hom}(E \times I \times S^1, F \times I \times S^1)]$$

nós temos um morfismo de Laurent  $M$  tal que  $|M - H|_{\tilde{h}} < \varepsilon$ . Essa métrica é tal que  $\tilde{h}(x, t, z)$  é uma forma hermitiana constante igual a  $h(x, z)$  para  $t \in I$ .

Podemos então concluir que pela definição da norma  $|\cdot|_{\tilde{h}}$

$$|M(x, 0, z) - K(x, z)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |M(x, 1, z) - L(x, z)| < \varepsilon$$

para todo  $(x, z) \in X \times S^1$ . Contudo, se  $\varepsilon$  for pequeno o suficiente, a bola de centro  $K$  e raio  $\varepsilon$  está dentro do conjunto dos isomorfismos, por isso a homotopia linear entre  $K$  e  $M_0$  é um morfismo de Laurent. Analogamente,  $L$  e  $M_1$  são homotópicos.

Por último, é só compor a homotopia entre  $K$  e  $M_0$  com a homotopia  $M$  e depois com a homotopia entre  $M_1$  e  $L$ . Essa composição é uma homotopia e também é um morfismo de Laurent, porque  $M$  era de Laurent e uma homotopia linear entre morfismos de Laurent é de Laurent.  $\square$

### 5.3 Morfismos polinomiais

Para todo o morfismo polinomial  $p$  de grau  $n$ , ou seja,

$$p: E \times S^1 \longrightarrow F \times S^1$$

$$p(x, z) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k(x) z^k$$

e para todo  $m \geq n$  nós vamos definir um morfismo

$$\mathcal{L}_m(p): (m+1)E \times S^1 \rightarrow (F \oplus mE) \times S^1$$

dado pela matriz

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ -z & 1 & & & & \\ & -z & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -z & 1 & \\ & & & & -z & 1 \end{bmatrix}$$

sendo que  $a_k = 0$  para  $m \geq k > n$ . Também definiremos o fibrado

$$\mathcal{L}_m(E, p, F) := [(m+1)E, \mathcal{L}_m(p), F \oplus mE]$$

que é o fibrado associado ao morfismo  $\mathcal{L}_m(p)$ .

**Proposição 5.6.** *Seja  $p$  um morfismo polinomial de grau  $n$ . Então, os morfismos lineares  $\mathcal{L}_m$  satisfazem as seguintes propriedades:*

1. Para todo  $m \geq n$  nós temos que

$$\mathcal{L}_m(E, p, F) \simeq [E, p, F] \oplus [mE, 1]$$

2. Para todo  $m \geq n+1$  nós temos que

$$\mathcal{L}_m(E, p, F) \simeq \mathcal{L}_{m-1}(E, p, F) \oplus [E, 1]$$

$$\mathcal{L}_m(E, zp, F) \simeq \mathcal{L}_{m-1}(E, p, F) \oplus [E, z]$$

*Demonstração.* Para demonstrar a primeira parte, nós definimos uma sequência de morfismos  $p_n: E \times S^1 \rightarrow E \times S^1$  de forma que

$$p_0 = p \quad \text{e} \quad zp_{r+1}(x, z) = p_r(x, z) - p_r(x, 0)$$

e com isso nós temos que o morfismo  $L_m(p)$  é igual ao produto

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_m \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -z & 1 & & & \\ & -z & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -z & 1 \end{bmatrix}$$

como é fácil verificar. Podemos ver, então, que a igualdade acima é da forma

$$\mathcal{L}_m(p) = (\mathbf{1} + N_1)(p \oplus \mathbf{1})(\mathbf{1} + N_2)$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são matrizes nilpotentes.

Note também que  $1 + tN$  é isomorfismo quando  $N$  é uma matriz nilpotente. Isso porque, se  $t \neq 0$  e  $v$  pertence ao núcleo de  $1 + tN$ , nós temos que  $Nv = -t^{-1}v$  e portanto  $N^k v = (-t)^{-k}v$ . Contudo, nós temos que  $N^k = 0$  para uma  $k$  suficientemente grande e, por isso,  $v = 0$ . O caso  $t = 0$  é trivial.

Então, decorre desse fato que, trocando as matrizes  $N_1$  e  $N_2$  por  $tN_1$  e  $tN_2$  na identidade acima, nós podemos definir uma homotopia entre o automorfismo  $\mathcal{L}_m(p)$  e o automorfismo  $p \oplus \mathbf{1}_{mE}$ . Isso demonstra a primeira parte da proposição.

Para a segunda parte da proposição, nós usaremos as homotopias:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\ -z & 1 & & & \\ & -z & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -z & 1 \\ & & & & & -tz & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} \\ -z & t1 & & & \\ & -z & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -z & 1 \\ & & & & & -z & 1 \end{bmatrix}$$

Veja que essas matrizes são isomorfismos para todo  $t \in I$ . Para mostrar isso, considere primeiro o caso em que cada entrada da matriz acima, restrita a uma fibra, é um número. Nesse caso particular, nós podemos mostrar que o determinante é constante em  $t$  usando a expansão por cofatores na última coluna ou na primeira coluna, respectivamente.

O caso geral, onde cada entrada da matriz acima é uma outra matriz, tem uma demonstração parecida. Nós só temos que expandir por cofatores cada coluna da matriz correspondente ao número referido no parágrafo anterior. Os detalhes desse argumento são triviais e, por isso, vamos omiti-los.  $\square$

## 5.4 Morfismos afins

Nessa seção vamos mostrar que para toda tripla  $(E, p, F)$  com um morfismo  $p(x, z) = a(x)z + b(x)$ , que chamaremos de morfismo afim, existem decomposições  $E = E_+ \oplus E_-$  e  $F = F_+ \oplus F_-$  tais que

$$[E, p, F] \simeq [E_+, z] \oplus [E_-, 1]$$

Essas decomposições são dadas pelos subfibrados associados as projeções  $Q_E: E \rightarrow E$  e  $Q_F: F \rightarrow F$ , sendo que

$$Q_E(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} p^{-1} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (a(x)z + b(x))^{-1} a(x) dz$$

$$Q_F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (dp)p^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} a(x)(a(x)z + b(x))^{-1} dz$$

Note que  $p(x, z) = a(x)z + b(x)$  está definida para  $z \in \mathbb{C}$  e, portanto, nós podemos deformar o contorno de integração dentro do aberto onde  $p(x, z)$  é isomorfismo sem alterar a integral. A decomposição será então dada pelos subfibrados  $E_+ = \text{im}(Q_E)$ ,  $F_+ = \text{im}(Q_F)$ ,  $E_- = \text{ker}(Q_E)$  e  $F_- = \text{ker}(Q_F)$ .

**Proposição 5.7.** *As aplicações  $Q_E$  e  $Q_F$  são projeções tais que para cada ponto  $(x, z) \in X \times S^1$  nós temos que  $p(x, z)Q_E(x) = Q_F(x)p(x, z)$ .*

*Demonstração.* Note, primeiramente, que para  $w \neq z$  vale que

$$(aw + b)^{-1}a(az + b)^{-1} = \frac{(az + b)^{-1}}{w - z} + \frac{(aw + b)^{-1}}{z - w} \quad (5.2)$$

$$= (az + b)^{-1}a(aw + b)^{-1}$$

pois, para a primeira igualdade, basta observar que

$$\frac{(az + b)^{-1}}{w - z} + \frac{(aw + b)^{-1}}{z - w} = (aw + b)^{-1} \frac{aw + b}{w - z} (az + b)^{-1}$$

$$+ (aw + b)^{-1} \frac{az + b}{z - w} (az + b)^{-1}$$

$$= (aw + b)^{-1} a(az + b)^{-1}$$

A segunda decorre de substituir  $w$  por  $z$  nas igualdades acima. Observe também que o primeiro e último termo de (5.2) são iguais mesmo quando  $z = w$ . Para obter a relação  $p(x, z)Q_E(x) = Q_F(x)p(x, z)$  basta multiplicar (5.2) por

$az + b$  a esquerda e a direita e integrar, já que

$$\begin{aligned}(az + b)Q_E &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (az + b)(aw + b)^{-1} a \, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} a(aw + b)^{-1}(az + b) \, dw \\ &= Q_F(az + b)\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que  $Q_E$  é projeção, ou seja,  $Q_E^2 = Q_E$ . Para isso escolha  $R_1$  e  $R_2$  tal que  $1 - \varepsilon < R_1 < 1 < R_2 < 1 + \varepsilon$ , sendo que  $\varepsilon > 0$  é pequeno o suficiente para que  $p(x, z)$  seja invertível na faixa  $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$ . Observe, também, que as seguintes identidades são verdadeiras:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z - w} &= 1 \quad \text{se } |w| < 1 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z - w} &= 0 \quad \text{se } |w| > 1\end{aligned}$$

Portanto usando a relação (5.2) temos que

$$\begin{aligned}Q_E^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|w|=R_1} \int_{|z|=R_2} (az + b)^{-1} a(aw + b)^{-1} a \, dz \, dw \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|w|=R_1} \int_{|z|=R_2} \frac{1}{w - z} (az + b)^{-1} a + \frac{1}{z - w} (aw + b)^{-1} a \, dz \, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R_1} (aw + b)^{-1} a \, dw = Q_E\end{aligned}$$

onde integramos o primeiro termo em  $w$  e integramos o segundo termo primeiro em  $z$ . Um cálculo análogo prova que  $Q_F^2 = Q_F$ .  $\square$

A última proposição nos diz que o morfismo  $p$  pode ser decomposto na soma direta dos morfismos

$$p_+ : E_+ \times S^1 \rightarrow F_+ \times S^1 \quad \text{e} \quad p_- : E_- \times S^1 \rightarrow F_- \times S^1$$

Isso porque as projeções definem decomposições dos fibrados na soma direta de seus núcleos e imagens (proposição 2.8) e também porque podemos usar a relação  $p(x, z)Q_E(x) = Q_F(x)p(x, z)$  para mostrar que

$$p(\text{im}(q) \times S^1) = \text{im}(r) \times S^1 \quad \text{e} \quad p(\text{ker}(q) \times S^1) = \text{ker}(r) \times S^1$$

**Proposição 5.8.** *Nós temos que  $p_+(\cdot, z) : E_+ \rightarrow F_+$  é um isomorfismo para  $|z| \geq 1$  e  $p_-(\cdot, z) : E_- \rightarrow F_-$  é um isomorfismo para  $|z| \leq 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $v \in E_{x,z}$  pertencente ao núcleo de  $p$ , ou seja,

$$p(x, z)v = a(x)zv + b(x)v = 0$$

para um  $|z| \neq 1$ . Temos que, para um  $w$  tal que  $|w| = 1$ ,

$$(w - z)a(x)v = a(x)wv - a(x)zv = a(x)wv + b(x)v$$

pela escolha de  $v$ . Ou seja,  $(a(x)w + b(x))^{-1}a(x)v = (w - z)^{-1}v$ .

Integrando essa relação temos que

$$Q_E(x)v = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} (a(x)w + b(x))^{-1}a(x)v \, dw = \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{dw}{w - z} \right) v$$

Contudo, a última integral é igual a identidade para  $|z| < 1$  e é igual a zero para  $|z| > 1$ . Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \ker(p)_{x,z} &\subset \text{im}(Q_E)_x = E_{+,x} \text{ se } |z| < 1 \\ \ker(p)_{x,z} &\subset \ker(Q_E)_x = E_{-,x} \text{ se } |z| > 1 \end{aligned}$$

Portanto, pela primeira igualdade,  $p_-(\cdot, z)$  que é a restrição de  $p(\cdot, z)$  a  $E_-$  é injetiva para  $|z| < 1$ . Pela segunda,  $p_+(\cdot, z)$  é injetiva para  $|z| > 1$ .

Veja, entretanto, que  $p_+(\cdot, z)$  é um isomorfismo para  $|z| = 1$ , pois  $p(\cdot, z)$  é um isomorfismo nesse conjunto, e, portanto, os fibrados  $E_+$  e  $F_+$  tem o mesmo posto. Uma afirmação similar vale para  $p_-$ . Essas afirmações conjuntamente com o fato de que uma aplicação linear injetiva entre espaços de mesma dimensão é invertível implica o enunciado.  $\square$

O próximo passo será mostrar que a aplicação  $p_+$  é homotópica a  $a_+z$  e  $p_-$  é homotópica a  $b_-$ . Para isso, defina a homotopia

$$p_-^t(x, z) = (1 - t)a_-(x)z + b_-(x)$$

Ela é invertível para todo  $|z| = 1$  e  $t \in [0, 1]$  porque, se isso não fosse verdade, nós teríamos que, para algum  $t$  e para algum  $v \in E_{x,z}$ ,

$$a_-(x)[(1 - t)z]v + b_-(x)v = 0$$

ou seja,  $p_-$  não seria invertível para  $w = (1 - t)z$ , sendo que  $|w| \leq 1$ . Isso contradiz a proposição anterior e, portanto,  $p_-^t$  tem que ser invertível.

Da mesma forma, definimos uma aplicação

$$p_+^t(x, z) = a_+(x)z + (1 - t)b_+(x)$$



que por motivos análogos é um homotopia entre morfismos invertíveis. Isso nos permite definir, finalmente, uma homotopia  $p^t = p_+^t \oplus p_-^t$  que leva  $p$  na soma direta de  $a_+z$  com  $b_-$ .

Por último nós observamos que, como foi mostrado anteriormente, alterar as triplas usando isomorfismos não altera o fibrado final. Mais precisamente,  $[E_+, a_+z, F_+] \simeq [E_+, z]$  e  $[E_-, b_-, F_-] \simeq [E_-, 1]$ . Isso nos mostra que

$$[E, az + b, F] \simeq [E_+, z] \oplus [E_-, 1]$$

e com isso alcançamos o objetivo da seção.

Só nós resta enunciar as algumas relações úteis entre os operadores  $\mathcal{L}_n$ .

**Proposição 5.9.** *Seja  $p$  um morfismo polinomial de grau  $n$ . Então, nós temos os seguintes isomorfismos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n+1}(E, p, F)_+ &\simeq \mathcal{L}_n(E, p, F)_+ & \mathcal{L}_{n+1}(E, p, F)_- &\simeq \mathcal{L}_n(E, p, F)_- \oplus E \\ \mathcal{L}_{n+1}(E, zp, F)_+ &\simeq \mathcal{L}_n(E, p, F)_+ \oplus E & \mathcal{L}_{n+1}(E, zp, F)_- &\simeq \mathcal{L}_n(E, p, F)_- \end{aligned}$$

*Demonstração.* Essa proposição é uma consequência direta da proposição 5.6 e do fato que as construções definidas nessa seção preservam soma diretas.  $\square$

## 5.5 O inverso do produto exterior

Nosso objetivo é demonstrar o teorema de Bott, que foi enunciado na introdução deste capítulo. Contudo, nós conseguiremos fazer mais que isso. Pois, pela proposição 5.2, em  $K(S^2)$ , nós temos que  $H^2 + 1 = 2H$  e, portanto, temos que  $(H - 1)^2 = 0$ . Por isso, nós podemos definir um homomorfismo

$$\gamma: \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \longrightarrow K(S^2)$$

Aplicando, então, o produto tensorial com a identidade, nós obtemos uma sequência de homomorfismos de anéis

$$K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2 \xrightarrow{\text{id} \otimes \gamma} K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{\beta} K(X \times S^2)$$

sendo que o último homomorfismo é o produto exterior.

Nosso objetivo, nesta seção, será demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 4.** *Existe um isomorfismo de anéis*

$$\nu: K(X \times S^2) \longrightarrow K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$$

tal que seu inverso é a composição  $\mu = \beta \circ (\text{id} \otimes \gamma)$ .

Note que, no caso em que  $X$  só contém um ponto, nós temos que o produto exterior é um homomorfismo  $\beta: K(X) \otimes \mathbb{Z} \rightarrow K(X)$  que é dado pela relação  $\beta(E \otimes m) = mE \in K(X)$ , ou seja, é igual a multiplicação por um inteiro. Contudo, pelas propriedades do produto tensorial de grupos, nós sabemos que essa aplicação é um isomorfismo.

Com isso, é fácil provar o seguinte corolário do teorema acima.

**Corolário 5.2.** *O homomorfismo  $\gamma: \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \rightarrow K(S^2)$ , que foi definido no começo desta seção, é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Como  $\mu = \beta \circ (\text{id} \otimes \gamma)$  é um isomorfismo e  $\beta$  é um isomorfismo pelo parágrafo anterior, nós temos que  $\gamma$  tem que ser um isomorfismo.  $\square$

Além disso, podemos usar esse corolário conjuntamente com o teorema acima para demonstrar o teorema de Bott. Resta, então, para alcançarmos nossos objetivos, demonstrar o teorema 4. Faremos isso no resto dessa seção.

Nosso primeiro passo será definir o homomorfismo  $\nu$ .

Seja, então,  $(E, L, F)$  uma tripla que define um fibrado sobre  $X \times S^2$ . Escolha um morfismo polinomial  $p_n$  de grau menor ou igual a  $2n$  tal que  $z^{-n}p_n$  é homotópico a  $L$ . Definimos, então, uma aplicação

$$\nu_n(E, L, F) = \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ \otimes (H^{n-1} - H^n) + E \otimes H^n$$

Note que  $\nu_n(E, L, F)$  pertence a  $K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$ . Note também que ele só está definido para um  $n$  suficientemente grande. Queremos mostrar que podemos usar essas  $\nu_n$  para definir um inverso  $\nu$  para o aplicação

$$\mu: K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \longrightarrow K(X \times S^2)$$

Primeiro, contudo, temos que mostrar que as aplicações  $\nu_n$  estão bem definidas. Mais precisamente, vamos mostrar que dadas duas triplas

$$(E_1, L_1, F_1) \quad \text{e} \quad (E_2, L_2, F_2)$$

que definem o mesmo fibrado sobre  $X \times S^2$  e dados dois morfismos polinomiais  $p_n$  e  $q_n$  associados a cada uma dessas triplas, então

$$\nu_n(E_1, L_1, F_1) = \nu_n(E_2, L_2, F_2)$$

Em particular, provaremos que a aplicação  $\nu_n$  não depende do morfismo polinomial escolhido.

Vamos, então, a prova desse fato. Note que como as duas triplas são equivalentes, podemos supor que  $E_1 = E_2$  e  $F_1 = F_2$ . Chamaremos esses fibrados de  $E$  e  $F$ , respectivamente. Daí, então, basta provar que

$$\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ = \mathcal{L}_{2n}(E, q_n, F)_+$$

Sabemos, contudo, que duas triplas equivalentes com fibrados iguais tem morfismos homotópicos. Pela transitividade da relação de homotopia, os morfismos de Laurent  $z^{-n}p_n$  e  $z^{-n}q_n$  são, então, homotópicos.

Portanto, pela proposição 5.5, existe um morfismo polinomial  $r_m$  sobre o espaço  $X \times I \times S^1$  de grau  $2m$ , com  $m \geq n$ , tal que

$$z^{-m}r(x, 0, z) = z^{-n}p_n(x, z) \quad \text{e} \quad z^{-m}r(x, 1, z) = z^{-n}q_n(x, z)$$

Temos então que  $\mathcal{L}_{2m}(E \times I, r_m, F \times I)_+$  é um fibrado sobre  $X \times I$  que tem como restrições a  $X \times 0$  e a  $X \times 1$  os fibrados  $\mathcal{L}_{2m}(E, z^{m-n}p_n, F)_+$  e  $\mathcal{L}_{2m}(E, z^{m-n}q_n, F)_+$ , respectivamente.

Contudo, quaisquer dois fibrados homotópicos são isomorfos e por isso

$$\mathcal{L}_{2m}(E, z^{m-n}p_n, F)_+ \simeq \mathcal{L}_{2m}(E, z^{m-n}q_n, F)_+$$

Usando, então, as propriedades demonstradas na última seção, nós temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ \oplus (m-n)E &\simeq \mathcal{L}_{2m}(E, z^{m-n}p_n, F)_+ \\ &\simeq \mathcal{L}_{2m}(E, z^{m-n}q_n, F)_+ \\ &\simeq \mathcal{L}_{2n}(E, q_n, F)_+ \oplus (m-n)E \end{aligned}$$

e, portanto, os fibrados  $\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+$  e  $\mathcal{L}_{2n}(E, q_n, F)_+$  tem a mesma classe de equivalência em  $K(X)$ .

O próximo passo é mostrar que  $\nu_n$ , na verdade, não depende de  $n$ .

Suponha, para isso, que escolhemos um polinômio  $p_n$  tal que  $z^{-n}p_n$  é homotópico a  $L$ . Podemos definir, então,  $p_{n+1} = zp_n$ , pois

$$z^{-(n+1)}p_{n+1} = z^{-(n+1)}zp_n = z^{-n}p_n$$

é homotópico a  $L$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \nu_{n+1}(E, L, F) &= \mathcal{L}_{2n+2}(E, p_{n+1}, F)_+ \otimes (H^n - H^{n+1}) + E \otimes H^{n+1} \\ &= \mathcal{L}_{2n+2}(E, zp_n, F)_+ \otimes (H^n - H^{n+1}) + E \otimes H^{n+1} \end{aligned}$$

Mais ainda, pelas propriedades dos  $\mathcal{L}_n$  e já que o morfismo polinomial  $zp_n$

tem grau menor ou igual a  $2n$  nós temos que

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1}(E, L, F) &= \mathcal{L}_{2n+2}(E, zp_n, F)_+ \otimes (H^n - H^{n+1}) + E \otimes H^{n+1} \\
&= \mathcal{L}_{2n+1}(E, zp_n, F)_+ \otimes (H^n - H^{n+1}) + E \otimes H^{n+1} \\
&= [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ + E] \otimes (H^n - H^{n+1}) + E \otimes H^{n+1} \\
&= \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ \otimes (H^n - H^{n+1}) + E \otimes H^n
\end{aligned}$$

Por último, observamos que, já que  $(H - 1)^2 = 0$ , então  $H(H - 1) = H - 1$ . Disso decorre que  $H^n - H^{n+1} = H^{n-1} - H^n$  e, portanto,

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1}(E, L, F) &= \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ \otimes (H^n - H^{n+1}) + E \otimes H^n \\
&= \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ \otimes (H^{n-1} - H^n) + E \otimes H^n = \nu_n(E, L, F)
\end{aligned}$$

Resumindo, os homomorfismos  $\nu_n(E, L, F)$  e  $\nu_{n+1}(E, L, F)$  estão bem definidos e são iguais sempre que o primeiro deles estiver bem definido.

Podemos, agora, definir a inversa  $\nu$ . A imagem de um tripla  $(E, L, F)$  por essa aplicação será dada pela equação  $\nu(E, L, F) = \nu_n(E, L, F)$ , sendo que  $n$  é o primeiro natural para o qual  $L$  é homotópica a um morfismo de Laurent. Veja que esse  $n$  depende da tripla escolhida.

Falta, então, mostrar que  $\nu$  é, de fato, a inversa de  $\mu$ .

Veja, para tanto, que como o anel  $\mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$  é gerado por  $H$  e pela unidade, basta mostrar que  $\nu\mu(E \otimes H^n) = E \otimes H^n$ , para concluir que  $\nu\mu = 1$ . Mas nós sabemos que  $\mu(E \otimes H^n) = \beta(E \otimes H^n) = [E, z^{-n}]$  e, portanto,

$$\nu\mu(E \otimes H^n) = \nu(E, z^{-n}) = \mathcal{L}_{2n}(E, 1)_+ \otimes (H^{n-1} - H^n) + E \otimes H^n = E \otimes H^n$$

Por outro lado, para concluir que  $\nu$  satisfaz a igualdade  $\mu\nu = 1$ , basta mostrar que  $\mu\nu(E, z^{-n}p_n, F) = [E, z^{-n}p_n, F]$ . Para isso usaremos duas igualdades. A primeira decorre de multiplicar a equação

$$\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F) = [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+, z] + [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_-, 1]$$

da seção passada pelo pullback de  $H^n$  a  $X \times S^2$  e obter

$$\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F) \boxtimes H^n = [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+, z^{1-n}] + [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_-, 1] \boxtimes H^n$$

A segunda é uma das propriedades básicas dos  $\mathcal{L}_n$ . Ela é dada pela equação:

$$\mathcal{L}_m(E, p, F) \simeq [E, p, F] \oplus mE$$

Finalmente, podemos notar que, já que

$$\nu(E, z^{-n}p_n, F) = \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ \otimes (H^{n-1} - H^n) + E \otimes H^n$$

então valem a igualdades

$$\begin{aligned} \mu\nu(E, z^{-n}p_n, F) &= [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+, z^{1-n}] - [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+, z^{-n}] + [E, z^{-n}] \\ &= \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F) \boxtimes H^n - [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_-, 1] \boxtimes H^n \\ &\quad - [\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+, 1] \boxtimes H^n + [E, z^{-n}] \\ &= 2nE \boxtimes H^n + [E, z^{-n}p_n] - (2n+1)E \boxtimes H^n + E \boxtimes H^n \\ &= [E, z^{-n}p_n] \end{aligned}$$

sendo que nós usamos que  $\mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_+ \oplus \mathcal{L}_{2n}(E, p_n, F)_- \simeq (2n+1)E$ . Assim, concluímos a demonstração do teorema 4.

# Capítulo 6

## Produtos na K-teoria

Neste último capítulo, nós vamos mostrar que o teorema de Bott tem uma versão reduzida e também vamos demonstrar mais algumas propriedades cohomológicas da K-teoria.

A primeira seção será dedicada ao primeiro objetivo. Na segunda seção, mostraremos que a soma direta  $\tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}^1(X)$  tem uma estrutura de anel análoga a estrutura de anel da cohomologia singular. Mostraremos, então, que a sequência exata do par preserva essa estrutura.

Na última seção, nós mostraremos que existe um análogo da sequência de Mayer-Vietoris para a K-teoria. Isso, juntamente com a definição dada na seção 4.4 para o grupo  $\tilde{K}^1(X)$ , pode ser usado para calcular os grupos de K-teoria de uma superfície qualquer.

A demonstração que será dada neste capítulo da existência de uma sequência de Mayer-Vietoris é, em parte, uma adaptação da exposição dada no livro de Munkres [Mun84] para a sequência análoga na cohomologia singular.

### 6.1 Periodicidade de Bott

Nesta seção nós vamos dar uma versão do teorema de Bott para a K-teoria reduzida. Para isso, nós vamos precisar definir o produto exterior reduzido

$$\tilde{\boxtimes}: \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \longrightarrow \tilde{K}(X \wedge Y)$$

Considere, então, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}(X \wedge Y) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}(X \times Y) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{K}(X \vee Y) \\ & & \uparrow \tilde{\boxtimes} & & \\ & & \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) & & \end{array}$$

sendo que na parte de cima temos a sequência exata do par  $(X \times Y, X \vee Y)$ . Observe que a imagem de um gerador  $x \otimes y$  do grupo  $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)$  pela composição do produto exterior com o pullback pela inclusão é

$$j^*[x \boxtimes y] = j^*[p_1^*(x) \otimes p_2^*(y)] = (p_1 \circ j)^*(x) \otimes (p_2 \circ j)^*(y)$$

sendo que  $p_1$  e  $p_2$  são as projeções nos fatores do produto cartesiano  $X \times Y$ . Mas, por outro lado, é fácil ver que  $(p_1 \circ j)^* = q_1^*$  e  $(p_2 \circ j)^* = q_2^*$ , sendo que  $q_i$  são as projeções definidas no exemplo 4.8. Portanto, pela propriedade que foi provada lá nós temos que  $j^*[x \boxtimes y] = 0$ .

Nosso objetivo é, então, definir o produto exterior reduzido como sendo a composição  $(i^*)^{-1} \circ \boxtimes$ . Para isso, vamos precisar mostrar que  $i$  é injetiva. Por isso, considere a sequência exata do par  $(X \times Y, X)$ ,

$$K^1(X \times Y) \xrightarrow{k^*} K^1(X) \longrightarrow \tilde{K}((X \times Y)/X) \longrightarrow \tilde{K}(X \times Y)$$

Como  $X \times Y$  é um retrato de  $X$ , nós temos que  $k^*$  é sobrejetiva. Isso porque o pullback pela projeção é uma inversa a direita. Então, a segunda aplicação é zero e, por isso, a terceira aplicação é injetiva.

O mesmo argumento mostra que a terceira aplicação de

$$K^1(X \times Y/X) \longrightarrow K^1(Y) \longrightarrow \tilde{K}(X \wedge Y) \longrightarrow \tilde{K}(X \times Y/X)$$

é injetiva. Portanto, a composição dessas duas setas, que é igual a  $i$ , é injetiva. Com isso, temos definido o produto exterior reduzido. Esse produto é natural da mesma forma que sua versão não-reduzida. Mais explicitamente,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) & \xrightarrow{\boxtimes} & \tilde{K}(X \wedge Y) \\ \uparrow f^* \otimes g^* & & \uparrow (f \wedge g)^* \\ \tilde{K}(Z) \otimes \tilde{K}(W) & \xrightarrow{\boxtimes} & \tilde{K}(Z \wedge W) \end{array}$$

sendo que  $f$  e  $g$  preservam os pontos bases e  $f \wedge g$  é a função induzida no quociente  $X \wedge Y$  pelo produto cartesiano das duas funções.

Além dessa definição, precisaremos da descrição explícita do grupo  $\tilde{K}(S^2)$  para provar a versão reduzida do teorema de Bott.

**Proposição 6.1.** *O grupo de  $K$ -teoria reduzida  $\tilde{K}(S^2)$  é um grupo abeliano livre gerado por  $H - 1$ . Em outras palavras,  $\tilde{K}(S^2)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Pelo corolário 5.2, nós temos que  $K(S^2) = \mathbb{Z}[H]/(H - 1)^2$ . Por isso, nós temos que todo o elemento de  $K(S^2)$  é da forma  $mH + n$ , sendo que  $n$  e  $m$  são inteiros. Contudo, os elementos do subgrupo  $\tilde{K}(S^2)$  são diferenças  $E - k$ , sendo que  $k$  é o posto do fibrado  $E$  sobre o ponto base.

Com isso, podemos concluir que, já que  $H$  é um fibrado de posto um, todos os elementos de  $\tilde{K}(S^2)$  são da forma  $m(H - 1)$ . Em outras palavras, todos os elementos deste grupo são múltiplos do elemento  $H - 1$ . Por isso, nós temos um isomorfismo  $K(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Teorema 5** (Periodicidade de Bott). *Seja  $X$  um espaço topológico compacto. Então temos um isomorfismo de grupos*

$$\beta: \tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(\Sigma^2 X) = \tilde{K}^2(X)$$

que é dado pelo produto exterior reduzido.

*Demonstração.* O homomorfismo  $\beta$  é dado pela composição

$$\tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(X) \longrightarrow \tilde{K}(S^2 \wedge X) = \tilde{K}(\Sigma^2 X)$$

sendo que a primeira seta é dada pelo isomorfismo  $\tilde{K}(S^2) \simeq \mathbb{Z}$  e a segunda é o produto exterior reduzido. Como a segunda é a restrição de um isomorfismo,  $\beta$  é um isomorfismo.  $\square$

Com esse teorema podemos, finalmente, estender a sequência do par à direita. Para isso basta definir, para  $n < 0$ ,

$$\tilde{K}^{2n}(X, A) = \tilde{K}(X, A) \quad \text{e} \quad \tilde{K}^{2n+1}(X, A) = \tilde{K}^1(X, A)$$

e usar a periodicidade acima. Para evitar redundância, entretanto, nós vamos “enrolar” essa sequência para obter uma sequência exata

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}(X, A) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{K}(X) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{K}(A) \\ \delta \uparrow & & & & \downarrow \delta \circ \beta \\ \tilde{K}^1(A) & \xleftarrow{i^*} & \tilde{K}^1(X) & \xleftarrow{j^*} & \tilde{K}^1(X, A) \end{array}$$

para cada par  $(X, A)$  com  $X$  compacto.



## 6.2 Produtos na K-teoria

Nesta seção, vamos usar a periodicidade de Bott para definir uma estrutura de anel em  $\tilde{K}^*(X) = \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}^1(X)$  ou, de forma mais geral, uma estrutura de  $\tilde{K}^*(X)$ -módulo nos grupos  $\tilde{K}^*(X, A) = \tilde{K}(X, A) \oplus \tilde{K}^1(X, A)$  e  $\tilde{K}^*(A)$ . Essa estrutura é análoga a estrutura de anel em  $H^*(X)$ .

Para isso note que o produto reduzido dá um homomorfismo

$$\tilde{K}^n(X) \otimes \tilde{K}^m(Y) = \tilde{K}(\Sigma^n X) \otimes \tilde{K}(\Sigma^m Y) \rightarrow \tilde{K}(\Sigma^n X \wedge \Sigma^m Y) = \tilde{K}^{n+m}(X \wedge Y)$$

sendo que usamos o fato que  $\Sigma^n X = S^n \wedge X$  e também usamos a comutatividade do produto smash. Analogamente, podemos mostrar, usando uma série de homeomorfismos, que o produto reduzido dá um homomorfismo

$$\tilde{K}^n(X, A) \otimes \tilde{K}^m(Y, B) \rightarrow \tilde{K}^{n+m}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

que, no caso  $Y = X$ , pode ser composto com o pullback pela diagonal

$$X/(A \cup B) \longrightarrow (X \times X)/[(X \times B) \cup (A \times X)]$$

para obter um homomorfismo

$$\tilde{K}^n(X, A) \otimes \tilde{K}^m(X, B) \rightarrow \tilde{K}^{n+m}(X, A \cup B)$$

Usando a periodicidade de Bott podemos mostrar que esse último produto define uma multiplicação em  $\tilde{K}^*(X)$  (basta tomar  $A = B = \emptyset$ ) e também define uma estrutura de  $\tilde{K}^*(X)$ -módulo em  $\tilde{K}^*(X, A)$  (tome  $B = \emptyset$ ). A estrutura de  $\tilde{K}^*(X)$ -módulo do grupo  $\tilde{K}^*(A)$  é dada pela restrição da estrutura definida em  $\tilde{K}^*(X)$ . Com isso, podemos usar a naturalidade do produto exterior para mostrar que a sequência exata do par, como definida na seção anterior, preserva essas estruturas de módulo.

De outra forma, podemos dizer que o triângulo

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{K}^*(X, A) & \\
 \delta \nearrow & & \searrow \\
 \tilde{K}^*(A) & & \tilde{K}^*(X) \\
 i^* \searrow & & \nearrow j^*
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{K}(A) & & \tilde{K}(X, A) \\
 & & \delta\beta \nearrow & & \delta \nearrow \\
 \oplus & & & & \oplus \\
 \tilde{K}^1(A) & & \tilde{K}(X) & & \tilde{K}^1(X, A) \\
 i^* \searrow & & \nearrow j^* & & \nearrow j^* \\
 \oplus & & & & \oplus \\
 \tilde{K}^1(X) & & & & \tilde{K}^1(X)
 \end{array}$$

de  $\tilde{K}^*(X)$ -módulos é exato.

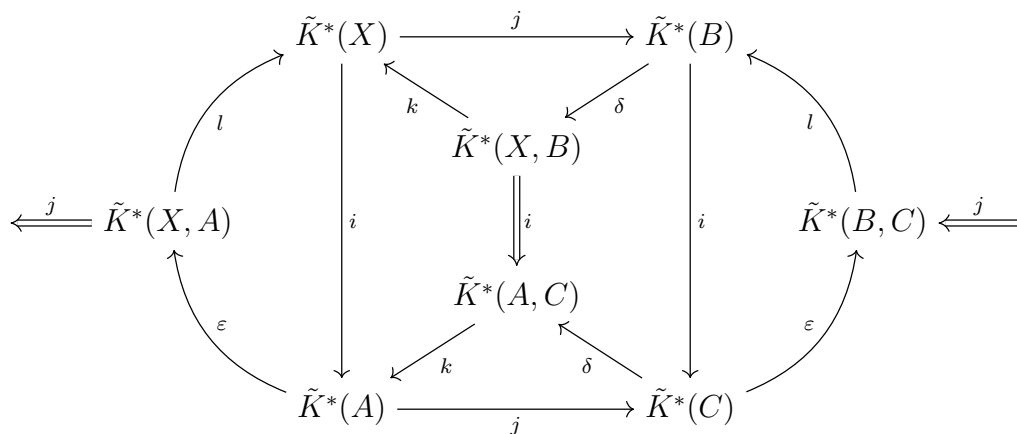
### 6.3 Mayer-Vietoris

Nesta seção nós vamos mostrar que o triângulo de Mayer-Vietoris é exato. Ou seja, se  $A$  e  $B$  são fechados tais que  $X = A \cup B$ , então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{K}^*(A) \oplus \tilde{K}^*(B) & \\
 i \oplus j \nearrow & \downarrow j-i & \\
 \tilde{K}^*(X) & & \tilde{K}^*(C) \\
 & \nwarrow ki^{-1}\delta & 
 \end{array} \tag{6.1}$$

sendo que  $C = A \cap B$ , é exato como uma seqüência de módulos sobre  $\tilde{K}^*(X)$  (definiremos os homomorfismos a seguir).

Considere, para isso, o seguinte diagrama



onde cada triângulo é uma seqüência exata de um par e cada quadrado é comutativo. Os nomes das aplicações foram escolhidos de forma que as relações de comutatividade pareçam naturais. Por isso, por exemplo, valem as igualdades  $\delta i = i \delta$  e  $\varepsilon j = j \varepsilon$ . As setas duplas são isomorfismos pela excisão. Note, também, que os homomorfismos do triângulo de Mayer-Vietoris são dados pelas aplicações do diagrama acima.

Agora, vamos checar que o diagrama (6.1) é exato. Para mostrar que as imagens estão contidas nos núcleos, basta mostrar que a composição de duas setas em seqüência é zero. Isso é uma tarefa trivial e, por isso, fica como um exercício para o leitor.

O próximo passo seria mostrar as núcleos estão contidos nas imagens. Vamos fazer isso separadamente em cada um dos vértices do triângulo.

Começamos por  $\tilde{K}^*(X)$ . Seja, então,  $x \in \tilde{K}^*(X)$  tal que  $i(x) \oplus j(x) = 0$ . Temos, portanto, que  $i(x) = 0$  e  $j(x) = 0$ . Pela sequência do par  $(X, B)$ , existe um elemento  $x_b \in \tilde{K}^*(X, B)$  tal que  $k(x_b) = x$ . Por isso,

$$ki(x_b) = ik(x_b) = i(x) = 0$$

Então, pela sequência do par  $(A, C)$ , nós temos que existe  $c \in \tilde{K}^*(C)$  tal que  $\delta(c) = i(x_b)$ . Por isso,  $ki^{-1}\delta(c) = k(x_b) = x$  e  $x$  está na imagem de  $ki^{-1}\delta$ .

Agora, vamos mostrar que a sequência é exata em  $\tilde{K}^*(A) \oplus \tilde{K}^*(B)$ . Para isso, seja  $a \oplus b$  um elemento desse módulo tal que  $i(b) = j(a)$ . Aplique  $\delta$  dois lados da equação para obter que  $i\delta(b) = \delta i(b) = \delta j(a) = 0$ , pois  $\delta j = 0$ . Mas como  $j$  é um isomorfismo,  $\delta(b) = 0$ . Então, pela sequência do par  $(X, B)$ , temos que existe um  $x \in \tilde{K}^*(X)$  tal que  $j(x) = b$ . Temos, também, que

$$j[i(x) - a] = ji(x) - j(a) = ij(x) - j(a) = i(b) - j(a) = 0$$

Portanto, pela sequência exata do par  $(A, C)$ , existe  $a_c \in \tilde{K}^*(A, C)$  tal que  $k(a_c) = i(x) - a$ . Com isso, podemos concluir que

$$\begin{aligned} (i \oplus j)[x - ki^{-1}(a_c)] &= [i(x) - iki^{-1}(a_c)] \oplus [j(x) - jki^{-1}(a_c)] \\ &= [i(x) - k(a_c)] \oplus j(x) = a \oplus b \end{aligned}$$

e, por isso, o núcleo de  $j - i$  está contido na imagem de  $i \oplus j$ .

Falta mostrar que o triângulo é exato em  $\tilde{K}^*(C)$ . Para isso, escolha um elemento  $c$  tal que  $ki^{-1}\delta(c) = 0$ . Temos, então, que existe um  $b \in \tilde{K}^*(B)$  tal que  $\delta(b) = -i^{-1}\delta(c)$ . Disso podemos concluir que

$$\delta[c + i(b)] = \delta(c) + \delta i(b) = \delta(c) + i\delta(b) = \delta(c) - ii^{-1}\delta(c) = 0$$

Por isso, existe um  $a \in \tilde{K}^*(A)$  tal que  $j(a) = c + i(b)$ . Em outras palavras,  $j(a) - i(b) = c$ , como queríamos demonstrar.

# Referências Bibliográficas

- [AH59] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch, *Riemann-roch theorems for differentiable manifolds*, Bulletin of the American Mathematical Society **65** (1959), no. 4, 276–281.
- [AH61] ———, *Vector bundles and homogeneous spaces*, Proc. Symp. Pure Math, vol. 3, 1961, pp. 197–221.
- [AS68a] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators: I*, The Annals of Mathematics **87** (1968), no. 3, 484–530.
- [AS68b] ———, *The index of elliptic operators: Iii*, The Annals of Mathematics **87** (1968), no. 3, 546–604.
- [Ati67] M.F. Atiyah, *K-theory*, Mathematics lecture notes series, Benjamin, 1967.
- [Die09] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*, Springer, 2009.
- [Hat09] A. Hatcher, *Vector bundles and K-theory*, 2009.
- [Hus94] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1994.
- [Lan02] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2002.
- [Mun84] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Advanced book classics, Perseus Books, 1984.
- [Mun00] ———, *Topology*, Topology, Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [Swi02] R.M. Switzer, *Algebraic topology: Homotopy and homology*, Classics in Mathematics, Springer, 2002.