

**Análise do Comportamento de Estruturas de Concreto  
Reforçado com Fibras de Aço via Método dos  
Elementos Finitos**

**Vanessa Fátima Pasa**

**Porto Alegre**

**Março 2007**

**Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil**

**Vanessa Fátima Pasa**

**Análise do Comportamento de Estruturas de Concreto  
Reforçado com Fibras de Aço via Método dos  
Elementos Finitos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia, na modalidade Acadêmico.  
Área de Concentração: Estruturas

**Porto Alegre  
Março de 2007**

PASA, Vanessa Fátima

Análise do Comportamento de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço via Método dos Elementos Finitos / Vanessa Fátima Pasa. – Porto Alegre: PPGEC / UFRGS, 2007.

158 p.

Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul; Mestre em Engenharia. Orientadores: Américo Campos Filho e Alexandre Rodrigues Pacheco.

1. Concreto Reforçado com Fibras de Aço. 2. Estruturas de concreto. 3. Método dos Elementos Finitos

CCAA2

**Vanessa Fátima Pasa**

**Análise do Comportamento de Estruturas de Concreto  
Reforçado com Fibras de Aço via Método dos  
Elementos Finitos**

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 23 de Março de 2007.

**Prof. Américo Campos Filho**

Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Orientador

**Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco**

Ph.D. pela Pennsylvania State University  
Co-Orientador

**Prof. Fernando Schnaid**

Coordenador do PPGEC / UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Samir Maghous (UFRGS)**

Docteur pela Ecole Nationale Des Ponts Et Chaussees

**Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho (UFRGS)**

Ph.D. pela Leeds Metropolitan University

*Dedico este trabalho  
aos meus adorados  
pais e irmã;  
e ao meu Amor.*

## ***Agradecimentos***

*Mais uma etapa foi alcançada e ao finalizar este estudo, recordo os momentos e pessoas que estiveram presentes durante estes últimos anos ouvindo-me e auxiliando-me quando necessário. Agradeço-lhes pelo apoio a cada decisão a ser tomada e os conselhos, como também a companhia ao longo do caminho.*

*Aos professores do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelos valiosos ensinamentos transmitidos, que constituíram base para este trabalho e para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.*

*Aos professores Américo Campos Filho e Alexandre Rodrigues Pacheco, pela orientação e dedicação que dispensaram durante todo o período deste trabalho. Pelos conselhos e apoio, pela compreensão e confiança depositada. Pela amizade.*

*Aos colegas de disciplinas, pela troca de experiências, companheirismo e amizade.*

*Aos colegas do CEMACOM (Centro de Mecânica Aplicada e Computacional), pelo auxílio, acolhimento e maravilhosa convivência, lembrados eternamente.*

*Aos professores e colegas que durante o período de graduação contribuíram para o meu encontro com a pesquisa.*

*Aos amados pais e a tudo o que eles representam; pelo seu exemplo de vida, modelo que desejo sempre seguir. E à minha irmã, minha eterna companheira.*

*Aos meus sogros, queridos pais que a vida me deu de presente.*

*Ao meu Amor, pela paciência, pelo carinho, pela troca, pela compreensão, pelo amor.*

*A Deus, que esteve e sempre estará ao meu lado, tanto nos momentos bons quanto naqueles em que a vida se apresenta de forma adversa.*

*Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo suporte financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.*

*Há que tornar a ungir os cavalos guerreiros e levar a luta até ao fim;  
porque quem nunca descansa, quem com o coração e o sangue pensa em  
conseguir o impossível, esse triunfa.*

I Ching

---

## Resumo

Pasa, V. F. Análise do Comportamento de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço via Método dos Elementos Finitos. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O concreto é um material que possui grande versatilidade de aplicação em construções e, desde a sua criação, vem sofrendo significativas modificações tanto na sua forma de produção e aplicação, quanto na sua composição. A razão para estas constantes modificações é a busca permanente do aperfeiçoamento das propriedades do concreto, ampliando ainda mais o seu espectro de utilização. Neste contexto e, visando principalmente melhorar o seu comportamento frágil perante esforços de tração, a adição de diferentes tipos de fibras surgiu como uma alternativa bastante promissora.

Assim, fibras dispersas e concreto passam a formar, juntos, um material composto, o qual, segundo verificações experimentais, pode trazer benefícios significativos às construções sob o ponto de vista estrutural. Este é o caso do concreto reforçado com fibras de aço (*CRFA*), em cujos ensaios foram observados aumentos importantes de resistência à tração e à compressão biaxial com o incremento da quantidade de fibras adicionadas.

Visando uma análise mais profunda deste material, o presente trabalho tem por objetivo o estudo de peças de *CRFA* através da análise numérica tridimensional via Método dos Elementos Finitos. Para tanto, foi desenvolvido um programa computacional, em linguagem *FORTRAN 90/95*, com o intuito de modelar o comportamento de estruturas executadas com este material. Com base em estudos anteriores, foi implementado no programa um modelo constitutivo capaz de simular o comportamento do concreto com a presença das fibras.

A representação do comportamento dos materiais foi feita através de um modelo elastoplástico, sendo analisadas estruturas sob condições de carregamento estático de curta duração. Especificamente para a determinação do comportamento do concreto com fibras, utilizou-se uma variante da superfície de ruptura de Willam-Warnke que considera a presença das fibras através da alteração do seu meridiano de tração. Além disso, a fissuração do concreto foi representada pelo modelo de fissuras distribuídas, que leva em consideração a contribuição da matriz entre fissuras.

Dados experimentais disponíveis na literatura são apresentados para efeito de comparação com os resultados obtidos através do programa computacional desenvolvido. Observou-se que o modelo matemático e a metodologia numérica empregados forneceram resultados bastante próximos aos experimentais, validando, desta forma, a modelagem do *CRFA* realizada neste estudo através de alterações nas propriedades do concreto em função da presença das fibras.

**Palavras-chave:** Concreto Reforçado com Fibras de Aço; Estruturas de Concreto; Método dos Elementos Finitos.

---

---

## Abstract

Pasa, V. F. Behaviour Analysis of Steel Fiber Reinforced Concrete Structures Using the Finite Element Method. 2007. M.S. Thesis (Civil Engineering) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Concrete is a material of great versatility of application in constructions and, since its invention, it has been experimenting significant changes in its form of production and application as well as on its composition. The reason for these continued changes is a permanent search for improvement in concrete's properties, to widen even more its spectrum of use. In this context, and targeting mainly the improvement of its fragile behavior under tension, the addition of different types of fibers came up as a promising alternative.

In this way, disperse fibers and concrete form, together, a composite material that, according to experimental investigations, can bring significant contributions to constructions under a structural standpoint. This is the case of the steel fiber reinforced concrete (*SFRC*), in whose tests important tensile and biaxial compression strength increases were observed with the increment of the fiber quantity added.

Aiming a deeper analysis of this material, the present work has the objective of studying *SFRC* elements through numerical analyses based on the Finite Element Method. For in such a way, a computational program has been developed in *FORTRAN 90/95* language aiming the modeling of the behavior of structures made with this material. On the basis of previous studies, a constitutive model, capable of adequately simulate the behavior of *SFRC*, was implemented.

The representation of the behavior of the materials was carried out through an elastoplastic model and structures under short duration loading conditions were analyzed. Specifically for the determination of the behavior of the concrete with fibers, a variant of the Willam-Warnke rupture surface has been used, which considers the fibers presence through modifications of its tension meridian. Additionally, the concrete cracking was represented in the program by the smeared cracking model, which takes into consideration the contribution of the matrix between cracks.

Experimental data available in the literature are compared to the results obtained with the developed computational program. It is observed that the used mathematical model and numerical methodology give results that are quite close to the available experimental data, validating, in this way, the *SFRC* modeling implemented.

**Keywords:** Fiber Reinforced Concrete; Concrete Structures; Finite Element Method.

---



---

## Sumário

<b>Capítulo 1.....</b>	<b>1</b>
<b>Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1 GENERALIDADES.....	1
1.2 BREVE HISTÓRICO.....	2
1.3 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS .....	4
1.4 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO .....	5
<b>Capítulo 2 .....</b>	<b>7</b>
<b>O Concreto Reforçado com Fibras de Aço .....</b>	<b>7</b>
2.1 CARACTERÍSTICAS DAS FIBRAS METÁLICAS.....	11
2.2 MECANISMO DE ATUAÇÃO DAS FIBRAS .....	13
2.2.1 A Interação Fibra-Matriz .....	15
2.2.2 Volume Crítico de Fibras.....	19
2.2.3 Comprimento Crítico .....	21
2.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO .....	22
2.3.1 O concreto reforçado com fibras sob compressão.....	23
2.3.2 O concreto reforçado com fibras sob tração.....	25
2.3.3 O concreto reforçado com fibras sob solicitações biaxiais.....	28
2.3.4 O concreto reforçado com fibras sob solicitações de corte .....	31
2.3.5 O concreto reforçado com fibras sob solicitações dinâmicas .....	33
2.4 APLICAÇÕES PRÁTICAS .....	33
<b>Capítulo 3 .....</b>	<b>36</b>
<b>O Método dos Elementos Finitos .....</b>	<b>36</b>
3.1 FORMULAÇÃO BÁSICA .....	36
3.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA O CONCRETO .....	39
3.2.1 Expressões básicas para elementos isoparamétricos tridimensionais .....	39
3.2.2 Funções de Interpolação dos Elementos .....	42
3.3 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA.....	44
3.3.1 Formulação Geométrica .....	45
3.3.2 Funções de Interpolação.....	46
3.3.3 Matriz de Rigidez para a Armadura.....	47
3.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	50

<b>Capítulo 4</b> .....	<b>53</b>
<b>Modelo para um Material Elasto-Viscoplástico</b> .....	<b>53</b>
4.1 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO.....	54
4.1.1 Expressões Básicas .....	54
4.1.2 Tensão Total.....	56
4.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO .....	57
4.2.1 Taxa de Deformação Específica Viscoplastica.....	57
4.2.2 Tensão para a armadura.....	57
4.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO .....	58
4.3.1 Análise por incrementos de carga.....	59
4.3.2 Análise por incrementos de deslocamento .....	61
4.4 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO COMPUTACIONAL .....	62
 <b>Capítulo 5</b> .....	 <b>65</b>
<b>Modelos Constitutivos para o Aço e para o Concreto com Fibras</b> .....	<b>65</b>
5.1 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO .....	66
5.1.1 Modelo para o Concreto Íntegro.....	66
5.1.1.1 Critério de Ruptura .....	68
5.1.1.2 Critério de Plastificação .....	74
5.1.1.3 Regra de Endurecimento .....	74
5.1.2 Modelo para o Concreto Fissurado.....	76
5.1.2.1 Critério de Fissuração.....	77
5.1.2.2 Colaboração do Concreto entre Fissuras .....	78
5.1.2.3 Modelo de Transferência para as Tensões de Corte.....	81
5.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO.....	82
 <b>Capítulo 6</b> .....	 <b>84</b>
<b>Análises Numéricas e Resultados</b> .....	<b>84</b>
6.1 SUPERFÍCIE DE RUPTURA DE WILLAM-WARNKE MODIFICADA .....	84
6.2 VIGAS DE CONCRETO COM FIBRAS ENSAIADAS POR LIM E OH .....	90
6.3 VIGAS DE CONCRETO COM FIBRAS ENSAIADAS POR KOVÁCS E BALÁZS .....	98
 <b>Capítulo 7</b> .....	 <b>105</b>
<b>Conclusões e Sugestões</b> .....	<b>105</b>
1.1 CONCLUSÕES .....	106
1.2 SUGESTÕES .....	108
 <b>Referências Bibliográficas</b> .....	 <b>110</b>

---

<i>Apêndice A</i> .....	<i>115</i>
Fibras de Aço Modeladas como Elementos de Armadura .....	115
<i>Apêndice B</i> .....	<i>120</i>
Arquivo de Entrada de Dados .....	120
<i>Apêndice C</i> .....	<i>125</i>
Saída Gráfica de Resultados .....	125
C.1 ARQUIVO COM EXTENSÃO “.msh” .....	125
C.2 ARQUIVO COM EXTENSÃO “.res” .....	126

## Lista de Figuras

### Capítulo 1

Figura 1.1 – Ilustração dos tipos mais comuns de fibras de aço, adaptado de Naaman (2000, apud Rosa, 2005).  
..... 3

### Capítulo 2

Figura 2.1 – Fibras de Aço, de Vidro, Sintéticas e Naturais, com diferentes comprimentos e formas, que podem ser utilizadas no concreto (adaptado de CTU, 2006). ..... 8

Figura 2.2 – Diagrama de tensão por deformação específica elástica de matriz e fibras de alto e baixo módulo de elasticidade trabalhando em conjunto (adaptado de Figueiredo, 2005). ..... 10

Figura 2.3 – Tipos de fibras metálicas: (a) retas; (b) deformadas/onduladas; (c) extremidades em gancho; (d) extremidades alargadas; (e) irregulares (adaptado de Simões, 1998). ..... 12

Figura 2.4 – A “costura” que as fibras propiciam ao concreto e o esquema de distribuição de tensões para um concreto sem e com reforço de fibras (adaptado de Figueiredo, 2005). ..... 14

Figura 2.5 – Representação de uma fissura no concreto reforçado com fibras (adaptado de Wecharatana e Shah, 1983). ..... 14

Figura 2.6 – Esquema de deformações (a) e distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da interface fibra-matriz (adaptado de Bentur e Mindess, 1990). ..... 16

Figura 2.7 – Representação das tensões tangenciais (de cisalhamento) na interface fibra-matriz (adaptado de Bentur e Mindess, 1990). ..... 17

Figura 2.8 – Distribuição das tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz imediatamente após a fissura quando o descolamento ocorre antes (a) e após (b) a fissuração (adaptado de Bentur e Mindess, 1990). ..... 17

Figura 2.9 – Diagrama simplificado de força de arrancamento por escorregamento, adaptado de Bartos (1981, apud Bentur e Mindess, 1990). ..... 18

Figura 2.10 – Comparação entre curvas de arrancamento de fibras retas e fibras com ancoragem em gancho (adaptado de Naaman e Najm, 1991). ..... 19

Figura 2.11 – Compósitos reforçados com fibras em teor baixo (A), acima (B) e igual (C) ao volume crítico de fibras durante o ensaio de tração na flexão (adaptado de Figueiredo, 2000). ..... 20

Figura 2.12 – Distribuições possíveis de tensão ao longo de uma fibra em função do comprimento crítico (adaptado de Bentur e Mindess, 1990). ..... 22

Figura 2.13 – Curvas tensão-deformação na compressão de concretos convencionais (à esquerda) e de concretos de alta resistência (à direita), reforçados com fibras de aço de 50 mm e com ganchos (adaptado de Balaguru, 1992, apud Lobão, 2005). ..... 23

Figura 2.14 – Diagramas tensão-deformação na compressão uniaxial: comparação entre concretos sem e com diversos teores de fibras (adaptado de Ezzeldin e Balaguru, 1992, apud Simões, 1998). ..... 24

<i>Figura 2.15 – Modos de ruptura típicos para compressão uniaxial de concretos reforçados com fibra: (a) baixo teor, (b) moderado teor e (c) alto teor de fibras (adaptado de Iyengar e Viswanatha, 1972).</i> .....	25
<i>Figura 2.16 – Resultados de ensaio de compressão diametral para concreto com e sem adição de fibras (adaptado de Cucchiara et al., 2004).</i> .....	26
<i>Figura 2.17 – Aumento da resistência à tração obtida pela adição de fibras de aço (resultados resistência à tração de ensaios de compressão diametral).</i> .....	27
<i>Figura 2.18 – Resposta tensão-elongamento na tração direta: comparação entre concreto não reforçado e reforçado com diversos teores de fibra (adaptado de Gopalaratnam e Shah, 1987, apud Simões, 1998).</i> .....	28
<i>Figura 2.19 – Envoltória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibra (adaptado de Yin et al., 1989).</i> .....	29
<i>Figura 2.20 – Envoltória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibra (adaptado de Abdull-Abad e Abbas, 1989, apud Barros, 1996).</i> .....	29
<i>Figura 2.21 – Envoltória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibra (adaptado de Swaddinvudhipong e Seom, 2006).</i> .....	30
<i>Figura 2.22 – Comportamento ao corte de vigas de concreto reforçado com fibras (adaptado de ACI 544.4R-88, 1988).</i> .....	32
<i>Figura 2.25 – Capa de compressão (a) e radier executado em concreto com fibra (b) (adaptado de Dhondt, 2004).</i> .....	34
<i>Figura 2.26 – Piso de depósito industrial (a) e de depósito de porto(b) executados em concreto reforçado com fibras (adaptado de Stadlober, 2006).</i> .....	34
<i>Figura 2.27a – Túnel executado em concreto com fibras (adaptado de Stadlober, 2005).</i> .....	35
<i>Figura 2.27b – Anéis segmentados para revestimentos em túneis (adaptado de Lambrechts, 1999).</i> .....	35
<i>Figura 2.28 – Elementos pré-moldados executados com concreto reforçado com fibras (adaptado de Lambrechts, 1999).</i> .....	35
 <b>Capítulo 3</b>	
<i>Figura 3.1 – Hexaedro quadrático com 20 nós.</i> .....	43
<i>Figura 3.2 – Coordenada ao longo do eixo da armadura.</i> .....	46
<i>Figura 3.3 – Elemento finito com 27 pontos de integração (integração completa).</i> .....	51
<i>Figura 3.4 – Elemento finito com 15 pontos de integração (integração reduzida).</i> .....	52
 <b>Capítulo 4</b>	
<i>Figura 4.1 – Modelo Elasto-Viscoplástico.</i> .....	53
<i>Figura 4.2 – Método de Newton-Raphson com Rigidez Inicial.</i> .....	60

<i>Figura 4.3 – Fluxograma do Programa.</i> .....	64
---	----

## **Capítulo 5**

<i>Figura 5.1 – Superfície de ruptura no espaço de tensões Haigh-Westergaard.</i> .....	67
<i>Figura 5.2 – Representação da superfície de ruptura através dos seus planos desviadores (a) e dos seus meridianos (b) (adaptado de Chen e Han, 1988).</i> .....	68
<i>Figura 5.3 – Estado de tensão na ruptura para um concreto reforçado com fibras e para um concreto simples análogo (adaptado de Seow e Swaddinvudhipong, 2005).</i> .....	72
<i>Figura 5.4 – Superfícies de ruptura e de carregamento.</i> .....	74
<i>Figura 5.5 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.</i> .....	76
<i>Figura 5.6 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado.</i> .....	79
<i>Figura 5.7 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado reforçado com fibras (adaptado de Lim et al., 1987).</i> .....	80
<i>Figura 5.8 – Modelo elastoplástico perfeito para armaduras.</i> .....	82
<i>Figura 5.9 – Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras.</i> .....	83

## **Capítulo 6**

<i>Figura 6.1 – Resultados experimentais dos ensaios biaxiais de Yin et al. (1989) e respectivas superfícies de ruptura propostas por Seow e Swaddinvudhipong (2005).</i> .....	86
<i>Figura 6.2 – Resultados experimentais dos ensaios biaxiais de Traina e Mansour (1991) e respectivas superfícies de ruptura propostas por Seow e Swaddinvudhipong (2005).</i> .....	86
<i>Figura 6.3 – Superfícies de ruptura obtidas pelo programa desenvolvido e aquelas propostas por Seow e Swaddinvudhipong (2005) para os ensaios biaxiais de Yin et al. (1989).</i> .....	88
<i>Figura 6.4 – Superfícies de ruptura obtidas pelo programa desenvolvido e aquelas propostas por Seow e Swaddinvudhipong (2005) para os ensaios biaxiais de Traina e Mansour (1991).</i> .....	88
<i>Figura 6.5 – Envoltórias de resistência biaxial do concreto. Comparação entre resultados obtidos nos testes e àqueles apresentadas por Seow e Swaddinvudhipong (2005).</i> .....	90
<i>Figura 6.6 – Detalhamento da viga de Lim e Oh (1999) com 75% da área de armadura necessária para o reforço ao corte (vigas S0.75-0 e S0.75-1).</i> .....	91
<i>Figura 6.7 – Detalhamento da viga de Lim e Oh (1999) com 50% da área de armadura necessária para o reforço ao corte (vigas S0.50-0, S0.50-1 e S0.50-2).</i> .....	91
<i>Figura 6.8 – Malha de elementos finitos para a viga de Lim e Oh (1999).</i> .....	93
<i>Figura 6.9 – Elementos de aço para as vigas de Lim e Oh (1999) com 75% dos estribos necessários para o reforço transversal, e = 6cm.</i> .....	93

Figura 6.10 – Elementos de aço para as vigas de Lim e Ob (1999) com 50% dos estribos necessários para o reforço transversal, $e = 8\text{cm}$ .....	94
Figura 6.11 – Resultados dos deslocamentos no centro do vão para as vigas S0.75-0 e S0.75-1. Incrementos de deslocamento (a) e incrementos de carga (b).....	95
Figura 6.12 – Resultados dos deslocamentos no centro do vão para as vigas S0.50-0, S0.50-1 e S0.50-2. Incrementos de deslocamento (a) e incrementos de carga (b).....	95
Figura 6.13 – Tensão $\sigma_{xx}$ do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga S0.50-1 com a atuação de 13 kN. ....	96
Figura 6.14 – Tensão $\sigma_{xx}$ do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga S0.50-1 com a atuação de 30 kN. ....	97
Figura 6.15 – Tensão $\sigma_{xx}$ do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga S0.50-1 com a atuação de 95 kN. ....	97
Figura 6.16 – Detalhamento da viga de Kovács e Balázs (2003) (vigas KB-0.0, KB-0.5 e KB-1.0). ....	98
Figura 6.17 – Malha de elementos finitos para a viga de Kovács e Balázs (2003). ....	100
Figura 6.18 – Elementos de aço para as vigas de Kovács e Balázs (2003).....	101
Figura 6.19 – Resultados dos deslocamentos no centro do vão para as vigas KB-0.0, KB-0.5 e KB-1.0. Incrementos de deslocamento (a) e incrementos de carga (b).....	101
Figura 6.20 – Tensão $\sigma_{xx}$ do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga KB-0.5 com a atuação de 11 kN. ....	102
Figura 6.21 – Tensão $\sigma_{xx}$ do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga KB-0.5 com a atuação de 19 kN. ....	103
Figura 6.22 – Tensão $\sigma_{xx}$ do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga KB-0.5 com a atuação de 68 kN. ....	103

## **Apêndice A**

Figura A.1 – Envoltórias de resistência biaxial do concreto com adição de fibras. Dados de ensaios experimentais de Traina e Mansour (1991) e do programa implementado.....	116
Figura A.2 – Curvas tensão-deformação do para o concreto com adição de fibras de Traina e Mansour (1991), obtidas através do programa implementado. ....	117
Figura A.3 – Deslocamento das fibras adicionadas aleatoriamente ao concreto. ....	118
Figura A.4 – Tensões desenvolvidas nas fibras adicionadas ao concreto. ....	118

---

## Lista de Tabelas

### Capítulo 2

Tabela 2.1 – Valores de resistência mecânica e de módulo de elasticidade para diversos tipos de fibras e da matriz de cimento (adaptado de PCA, 1991 e ACI 544.1R-96, apud CTU, 2006). ..... 9

### Capítulo 3

Tabela 3.1 – Coeficientes para a integração completa. .... 50

Tabela 3.2 – Coeficientes para a integração reduzida. .... 51

### Capítulo 6

Tabela 6.1 – Coeficientes  $k$  dos concretos executados por Yin et al. (1989) e Traina e Mansour (1991), fornecidos por Seow e Swaddiwudhipong (2005). ..... 85

Tabela 6.2 – Valores de  $f_t$  adotados para concretos executados por Yin et al. (1989) e Traina e Mansour (1991), baseando-se na Figura 2.17. .... 87

Tabela 6.3 – Propriedades do concreto das vigas de Lim e Oh (1999). .... 92

Tabela 6.4 – Coeficiente  $k$  da superfície de ruptura e  $\sigma_{tm}$ , resistência à tração pós-fissuração do concreto reforçado com fibras, das vigas de Lim e Oh (1999). .... 92

Tabela 6.5 – Propriedades do concreto das vigas de Kovács e Balázs (2003). .... 99

Tabela 6.6 – Coeficiente  $k$  da superfície de ruptura e  $\sigma_{tm}$ , resistência à tração pós-fissuração do concreto reforçado com fibras, das vigas de Kovács e Balázs (2003). .... 100

## **Lista de Siglas**

ACI: American Concrete Institute

ASCE: American Society of Civil Engineers

CRFA: Concreto Reforçado com Fibras de Aço

IBRACON: Instituto Brasileiro do Concreto

MEF: Método dos Elementos Finitos

PPGEC: Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil

SFRC: Steel Fiber Reinforced Concrete

UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

## Lista de Símbolos

### *Letras Romanas Maiúsculas*

A: área; coeficiente da integração reduzida

$A_s$ : área da seção transversal de aço

B: coeficiente da integração reduzida

[B]: matriz que relaciona deformações e deslocamentos

$[B_i]$ : matriz deformação-deslocamento associada ao nó i

$\{B_s\}$ : vetor linha que relaciona deformações de armadura e deslocamentos nodais do elemento de concreto

$\{B_{s_i}\}$ : vetor linha que relaciona deformações de armadura e deslocamentos do elemento de concreto associado ao nó i

C: coeficiente da integração reduzida; função de posição ao longo da barra de armadura; coeficiente

E: módulo de elasticidade longitudinal

$E_s$ : módulo de elasticidade longitudinal do aço

[E]: matriz de elasticidade constitutiva ou de coeficientes elásticos do material

F: superfície de plastificação

$F_0$ : tensão corrente de plastificação

$G_c$ : módulo de elasticidade transversal reduzido do concreto

$G_o$ : módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado

$H_j$ : função de interpolação para o elemento de armadura, associado ao nó j

$H_s$ : parâmetro ou taxa de endurecimento da armadura

$H_k^m(\chi)$ : polinômio de Lagrange em função da coordenada normalizada  $\chi$ , com grau  $m = n-1$

$I_1$ : primeiro invariante do tensor de tensões

$J_2$ : segundo invariante do tensor de tensões desviadoras

$J_3$ : terceiro invariante do tensor de tensões desviadoras

$[J]$ : matriz Jacobiana

$K_i$ : parâmetro

$[L]$ : matriz de operadores diferenciais

$N_i$ : função de interpolação do elemento de concreto associada ao nó  $i$

$[N]$ : matriz que contém as funções de interpolação do elemento

$[N]$ : matriz linha formada por  $N_i$

$Q$ : função potencial plástico

$S_{mn}$ : componentes da matriz de rigidez

$[S]^e$ : matriz de rigidez do elemento

$[S]^*$ : matriz de rigidez global

$[S_s]$ : matriz de rigidez das barras de armadura

$\{U_i\}$ : vetor que contém os deslocamentos do nó  $i$  do elemento

$V_e$ : volume do elemento finito

$V_f$ : fração de volume de fibras adicionadas

$V_s$ : volume de barra de aço

$W_s$ : contribuição da armadura para o trabalho virtual interno

### ***Letras Romanas Minúsculas***

$a$ : coeficiente

$a_1, a_2, a_3$ : coeficientes, parâmetros da superfície de ruptura de Willam-Warnke

$b$ : largura da viga; coeficiente para a integração reduzida

$b_1, b_2, b_3$ : parâmetros da superfície de ruptura de Willam-Warnke

$c$ : parâmetro, coeficiente para a integração reduzida

$d$ : diâmetro da fibra

$\{d^*\}$ : vetor de deslocamentos nodais da malha

$f_c$  : resistência à compressão uniaxial

$f_{cc}$  : resistência à compressão biaxial

$f_{ck}$  : resistência característica à compressão do concreto

$f_{cm}$  : resistência média à compressão do concreto

$f_i$  : função

$f_t$  : resistência à tração uniaxial

$f_{tm}$  : resistência média à tração do concreto

$f_y$  : tensão de escoamento da armadura

$\{f\}$  : cargas nodais externas aplicadas

$\{f\}^e$  : vetor que contém as forças nodais do elemento

$\{f^*\}$  : vetor correspondente às forças nodais

$\{f_{int}\}$  : vetor de forças internas do elemento de concreto; vetor de forças internas do elemento de concreto e de armadura

$\{f_{s_{int}}\}$  : vetor de forças internas das armaduras

$\{f\}_p^e$  : vetor que contém as forças nodais equivalentes às forças de volume

$\{f\}_q^e$  : vetor que contém as forças nodais equivalentes às forças de superfície

$\{f\}_{\sigma_0}^e$  : vetor que contém as forças nodais equivalentes às tensões iniciais

$j$  : nó do elemento de armadura

$k$  : parâmetro da superfície de Willam-Warnke utilizado para a consideração da presença de fibras no concreto

$l$  : comprimento da fibras

$l_c$  : comprimento crítico das fibras

$l_e$  : vão efetivo da viga

$l_f$  : comprimento da fibra

$m$  : número de nós do elemento de concreto

$n$  : subíndice que relaciona vetores, matrizes ou variáveis ao instante de tempo  $t_n$

$\{\bar{p}\}$ : vetor de forças de volume

$\{\bar{q}\}$ : vetor de forças de superfície

$r'$ : razão entre a área de seção transversal da fibra e o seu perímetro

$s$ : tensão desviadora; coordenada ao longo do eixo de armadura; distância

$s_n$ : coordenada do eixo da armadura

$t$ : tempo

$t_n$ : instante de tempo

$\{u\}$ : vetor de deslocamentos de um ponto de elemento finito

$\{u\}^e$ : vetor de deslocamentos nodais do elemento finito

$w_j, w_k, w_i$ : fator de peso associado ao ponto de integração

$x$ : coordenada cartesiana na posição indeformada

$x_j$ : coordenada global do nó  $j$  do elemento de armadura

$y$ : coordenada cartesiana na posição indeformada

$y_j$ : coordenada global do nó  $j$  do elemento de armadura

$z$ : coordenada cartesiana na posição indeformada

$z_j$ : coordenada global do nó  $j$  do elemento de armadura

### ***Letras Gregas Maiúsculas***

$\Delta$ : incremento

$\Sigma$ : somatório

$\Phi$ : função de escoamento; função de fluxo

### ***Letras Gregas Minúsculas***

$\alpha$ : parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente do diagrama de tração do concreto; parâmetro para a determinação de  $\tau_u$ ; ângulo

$\alpha_n$ : ângulo entre a direção da barra e o eixo cartesiano  $X$

$\alpha_u$ : relação entre a resistência à tração e a resistência à compressão uniaxial

$\beta$ : parâmetro para a determinação de  $\tau_u$ ; fator de redução de  $G_0$

$\beta_n$ : ângulo entre a direção da barra e o eixo cartesiano Y

$\chi$ : coordenada normalizada do eixo de armadura

$\delta\pi$ : variação do funcional energia potencial total

$\epsilon$ : deformação específica axial

$\epsilon_{ctu}$ : deformação última para o concreto tracionado

$\epsilon_m$ : deformação específica limite

$\epsilon_p$ : deformação plástica

$\epsilon_{ref}$ : deformação de tração máxima alcançada transversalmente à fissura

$\epsilon_s$ : deformação axial ao longo do eixo da armadura; deformação total do aço

$\epsilon_{s_{en}}$ : deformação elástica do aço

$\epsilon_{s_{vp}}$ : deformação viscoplástica do aço

$\epsilon_t$ : deformação normal de tração no concreto; deformação correspondente à  $f_{tm}$

$\epsilon_y$ : deformação de escoamento da armadura

$\{\epsilon\}$ : vetor de deformações

$\{\dot{\epsilon}\}$ : velocidade ou taxa de deformação total

$\{\epsilon_e\}$ : deformação elástica

$\{\epsilon_{TOT}\}$ : deformação total

$\{\epsilon_{vp}\}$ : deformação viscoplástica

$\phi$ : diâmetro das barras de armadura

$\gamma$ : coeficiente de fluidez; parâmetro para a determinação de  $\tau_u$

$\gamma_n$ : ângulo entre a direção da barra e o eixo cartesiano Z

$\gamma_s$ : coeficiente de fluidez do aço

$\eta$ : coordenada normalizada

$\eta_i$  : coordenadas adimensionais ou normalizadas dos nós  $i$

$\eta_k$  : coordenadas do ponto de integração  $i$ , integração completa

$\eta_l$  : fator de comprimento eficiente da fibra

$\eta_o$  : fator de orientação da fibra

$\kappa$  : parâmetro de endurecimento

$\nu$  : coeficiente de Poisson

$\theta$  : ângulo de similaridade

$\rho$  : Superfície de Ruptura de Willam-Warnke

$\{\rho_c\}$  : meridiano de compressão

$\{\rho_s\}$  : meridiano de corte

$\{\rho_t\}$  : meridiano de tração

$\sigma$  : tensão axial

$\sigma_1$  : tensão principal de tração

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : tensões principais

$\sigma_{ct,u}$  : resistência última do compósito à tração

$\sigma_{ef}$  : tensão efetiva ou uniaxial equivalente do concreto

$\sigma_{fu}$  : tensão de ruptura de fibra

$\sigma_m$  : tensão normal média; resistência da matriz à tração

$\sigma_0$  : tensão de plastificação

$\sigma_{oct}$  : tensão normal octaédrica

$\sigma_s$  : tensão normal da armadura; tensão total do aço

$\sigma_y$  : tensão de plastificação da armadura

$\{\sigma\}$  : vetor de tensões

$\{\dot{\sigma}\}$  : velocidade ou taxa de tensão

$\{\sigma_0\}$ : vetor de tensões iniciais

$\tau$ : tensão de corte

$\tau_{\text{oct}}$ : tensão de corte octaédrica

$\tau_u$ : a resistência última de aderência entre fibra e matriz

$\Psi$ : vetor de forças não-equilibradas

$\xi$ : coordenada normalizada

$\xi_i$ : coordenadas adimensionais ou normalizadas dos nós  $i$

$\xi_j$ : coordenadas do ponto de integração  $i$ , integração completa

$\zeta$ : coordenada normalizada

$\zeta_i$ : coordenadas adimensionais ou normalizadas dos nós  $i$

$\zeta_j$ : coordenadas do ponto de integração  $i$ , integração completa

### ***Símbolos Especiais***

$\{ \}$ : vetor

$[ \ ]$ : matriz

$[ \ ]$ : matriz linha

$[ \ ]^T$ : matriz transposta

$[ \ ]^{-1}$ : matriz inversa

$\| \|$ : norma

®: marca registrada

det: determinante

d: diferencial

$\delta$ : variação

$\partial$ : operador diferencial

$\int$  : integração

$(\dot{\phantom{x}})$ : diferenciação em função do tempo

- vírgula como índice indica derivação em relação à variável que lhe segue



O concreto reforçado com fibras de aço é um material compósito formado por uma matriz cimentícia e por uma certa quantidade de fibras dispersas que visa a melhoria das propriedades do conjunto. No presente trabalho, realiza-se um estudo sobre o comportamento estrutural deste material.

Neste capítulo introdutório, apresentam-se generalidades a respeito do concreto com adição de fibras e um breve histórico sobre o tema. Além disso, serão expostos a motivação e os objetivos para a realização do trabalho. Por fim, apresenta-se a forma na qual esta dissertação está organizada, de acordo com os assuntos abordados em cada capítulo.

## 1.1 GENERALIDADES

Novos materiais tendem a surgir em função da necessidade de se suprir falhas ou de se melhorar o desempenho de materiais já conhecidos. Ao longo da história, o ser humano vem substituindo ou acrescentando novos materiais na execução de suas construções, contudo, a utilização racional dos mesmos exige o estudo e a compreensão do seu comportamento.

O concreto, formado basicamente por agregados, água e um componente cimentante, é um dos materiais mais utilizados em construções. Este fato decorre da grande versatilidade de aplicação, ou seja, da possibilidade de sua utilização nas mais diversas situações estruturais. Historicamente, os romanos foram os primeiros a usar uma versão do concreto conhecida por pozzolana; entretanto, o material só veio a ser melhor desenvolvido e pesquisado no século XIX.

Assim como o crescente uso deste material, a busca pela melhoria de suas características também vem ocorrendo nestes últimos anos. Desta forma, passou-se a utilizar concretos de alta resistência, de alto desempenho, celular, branco, leve e o concreto com adição de fibras.

Apesar de apresentar um bom comportamento estrutural quando em compressão, sua capacidade à tração é apenas cerca de 7 a 10% da de compressão. Desta forma, na busca de um melhor desempenho do concreto, quando submetido a esforços de tração, tem-se adicionado fibras

---

dispersas ao mesmo. As fibras não só têm atuado como reforço à tração, mas também, têm melhorado o seu desempenho como um todo, pois elas minimizam o comportamento frágil característico deste material. Barros (1996) afirma que, com a correta adição de fibras à composição dos materiais de matriz cimentícia, ocorrem melhorias nas propriedades do compósito, tais como: ductilidade; capacidade de absorção de energia; o comportamento sob fissuração e a resistência às ações dinâmicas e estáticas.

O concreto com a adição de fibras passa a ser um material pseudo-dúctil, ou seja, continua apresentando uma resistência residual a esforços nele aplicados mesmo após sua fissuração (Figueiredo, 2000). Segundo Barros (1996), as melhorias do comportamento do concreto, quando reforçado com fibras, são função das propriedades dos elementos constituintes da matriz; das propriedades mecânicas e características geométricas das fibras; da composição e processo de fabricação do material compósito, bem como, a interação entre fibra e matriz. Desta forma, o material passa a ter exigências específicas para o seu controle de qualidade, dosagem e aplicação diferentes do concreto convencional. Para algumas aplicações, o concreto reforçado com fibras apresenta vantagens tecnológicas e econômicas em relação ao convencional, como é o caso do revestimento de túneis, do concreto projetado, dos pavimentos, dos pré-moldados, entre outras aplicações (Figueiredo, 2000).

## 1.2 BREVE HISTÓRICO

A adição de fibras a uma matriz cimentícia resulta em um material compósito. No caso da matriz concreto, fibras curtas de aço, de polipropileno, de sisal, de aramida, entre outros tipos, já foram utilizados em obras e investigados nos mais diversos estudos. Na literatura é comum encontrar a expressão *SFRC*, do inglês *Steel Fiber Reinforced Concrete*, como denominação de Concreto Reforçado com Fibras de Aço (*CRFA*), foco principal deste trabalho.

As primeiras dosagens dos *CRFA*, datadas na década de setenta, continham matrizes cimentícias compostas de agregados graúdos e fibras metálicas lisas. Pelas características das fibras, das matrizes e do processo de produção (mistura em betoneira), os percentuais de fibras eram bastante limitados. Volumes de fibras superiores a 2% eram inviáveis de serem utilizados nos processos convencionais de produção (Naaman, 2000, *apud* Rosa, 2005). Cabe salientar também que o desenvolvimento de plastificantes e superplastificantes, nesta última década, favoreceu a utilização de fibras no concreto.

Inicialmente, as fibras de aço utilizadas apresentavam resistências entre 500 e 900 MPa e geometrias cilíndricas. Sabia-se que seções com maior área de contato entre a fibra e matriz aumentariam o desempenho do compósito, mas, num primeiro momento, por limitações técnicas, não era possível produzir fibras com outras seções transversais. Só mais tarde, com o desenvolvimento de novas tecnologias é que houve a possibilidade de criação de novas geometrias para as fibras de aço (Naaman, 2000, *apud* Rosa, 2005).

A utilização de fibras longas garante ancoragem suficiente para a transferência de tensões da matriz à fibra, analogamente ao que acontece com as armaduras no concreto armado. As limitações de execução existentes no momento da mistura do concreto, porém, exigem fibras relativamente curtas.

Melhorar as condições de aderência, tanto pela mudança da microestrutura da matriz como pela melhoria das propriedades das fibras, como é o caso da sua ancoragem, foi o caminho para obter melhores resultados. Conforme apresentado por Naaman (2000, *apud* Rosa, 2005), a primeira solução adotada para compensar a pequena área de contato foi a criação de ancoragens mecânicas nas fibras pela variação da geometria. Exemplos destas geometrias podem ser observados na Figura 1.1.

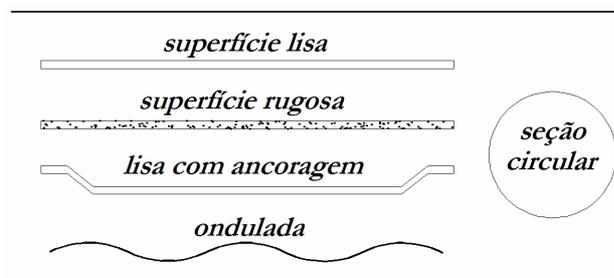


Figura 1.1 – Ilustração dos tipos mais comuns de fibras de aço, adaptado de Naaman (2000, *apud* Rosa, 2005).

Ao longo do tempo, os estudos apontaram que, além da aderência da fibra à matriz, um outro fator importante a ser considerado quanto à utilização de fibras dispersas, se refere à possibilidade de ocorrência de falhas na distribuição das mesmas, permitindo a criação de regiões frágeis, as quais favorecem a formação de fissuras. Exige-se, então, a adequada mistura e dispersão das fibras na matriz de concreto.

---

Na década de oitenta, estudos experimentais, almejando um maior conhecimento do *CRFA*, tomaram impulso. Significativos trabalhos foram conduzidos por Bentur e Mindess (1990) e estabeleceram importantes características deste material, destacando-se, o comportamento da microestrutura do concreto com adição de fibras, a interação dos seus constituintes, as propriedades mecânicas e a eficiência deste compósito.

A evolução dos concretos reforçados com fibras proporcionou melhores desempenhos mecânicos, além de avanços quanto à durabilidade e trabalhabilidade. Atualmente, o desafio está em investigar o comportamento estrutural dos mesmos. Tais informações serão necessárias para estabelecer diretrizes e orientações aplicadas ao desenvolvimento de projetos que prevêem a utilização deste material.

### 1.3 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Diversos são os estudos experimentais conduzidos para o conhecimento do comportamento do concreto com adição de fibras. Nos trabalhos iniciais, datados da década de setenta, buscou-se a caracterização básica do material, com ensaios de compressão e tração, como também ensaios biaxiais. Estudos posteriores procuraram analisar elementos estruturais em concreto com fibras, estudando respostas estruturais frente à flexão, ao cisalhamento, à fadiga, como também o efeito da utilização de fibras em concretos com armadura protendida e em lajes sujeitas à punção.

O concreto com adição de fibras vem sendo aplicado em diversas obras como: pisos industriais, pavimentos de aeroportos e portos, revestimentos de túneis, elementos pré-moldados; apresentando em estruturas reais um bom desempenho. Contudo, poucos são os estudos que privilegiam o estudo computacional do comportamento estrutural deste material. Assim, este trabalho tem por objetivo a modelagem computacional de elementos constituídos por concreto reforçado com fibras através da utilização de um modelo constitutivo, capaz de representar o comportamento deste material. Para avaliar o desempenho das implementações realizadas, os resultados obtidos com este programa são comparados com valores experimentais disponíveis na literatura.

Observações experimentais e os trabalhos de Seow e Swaddiwudhipong (2005) e Lim *et al.* (1987), os quais abordam o tema concreto com fibras de aço, formam o alicerce deste estudo. Além disso, adaptou-se um programa desenvolvido por Jost (2006) para a análise de estruturas de concreto armado via Método dos Elementos Finitos e que, por sua vez, foi baseado no trabalho

---

de Hinton (1988), de forma que se pudesse modelar numericamente o real funcionamento de elementos de concreto reforçado com fibras de aço dispersas.

O programa computacional utiliza, como ferramenta numérica, o Método dos Elementos Finitos, bastante conhecido e consagrado no meio acadêmico e que tem fornecido excelentes resultados nas mais distintas áreas e temas. A linguagem computacional adotada foi o *FORTRAN 90/95*, linguagem de programação tradicionalmente utilizada em aplicações científicas, inclusive neste Programa de Pós-Graduação.

## 1.4 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em sete capítulos. O **Capítulo 2** se constitui de uma revisão bibliográfica que contempla aspectos relativos ao concreto reforçado com fibras. São apresentadas as características físicas e geométricas das fibras metálicas, o mecanismo de atuação destas e o comportamento mecânico do concreto reforçado com fibras.

O **Capítulo 3** contém a formulação de elementos finitos empregada para o concreto, de acordo com o elemento finito hexaédrico quadrático, e para a armadura, à qual se utiliza o modelo incorporado. As integrações necessárias para a obtenção do sistema de equações representativo dos problemas analisados são realizadas através de integração numérica do tipo Gauss-Legendre reduzida, com 15 pontos de integração, ou completa, com 27 pontos de integração, e também estão elencadas neste capítulo.

O **Capítulo 4** aborda o modelo de elementos finitos para a análise de um material elasto-viscoplástico, adotado neste estudo e que segue a proposição dada por Owen e Hinton (1980). É apresentado, também, o funcionamento do algoritmo de solução incremental para problemas não-lineares através de um fluxograma, ilustrando a estrutura principal do programa utilizado.

Os modelos constitutivos para os materiais, concreto e aço, são expostos no **Capítulo 5**, como também as alterações realizadas para a consideração das fibras de aço no concreto. São apresentados os modelos utilizados para o concreto e da armadura comprimidos e tracionados.

Exemplos de aplicações do modelo numérico implementado para a consideração do concreto com fibras são abordados no **Capítulo 6**. Através de comparações entre resultados experimentais e numéricos, busca-se verificar a adequação do programa computacional a este estudo, para tanto elementos estruturais são modelados.

No **Capítulo 7**, são elencadas as conclusões resultantes do presente estudo, bem como as sugestões para trabalhos subseqüentes.

No **Apêndice A**, é apresentado um estudo inicial realizado, onde se procurou simular o comportamento do material compósito *CRFA*, modelando as fibras como barras de armadura, distribuídas aleatoriamente nos elementos finitos hexaédricos de concreto, conforme proposta de Vanalli *et al.* (2005). Os resultados obtidos através deste modelo são expostos e analisados neste apêndice.

Finalmente, no **Apêndice B**, faz-se a descrição da entrada de dados do programa, e no **Apêndice C**, a descrição da saída gráfica de dados do programa, com a finalidade de facilitar a utilização do modelo computacional desenvolvido neste trabalho em investigações futuras.

## O Concreto Reforçado com Fibras de Aço

Materiais compósitos constituem-se da mistura de dois componentes: a matriz e o reforço, denominado fibra para o *CRFA*. A matriz confere estrutura ao compósito preenchendo os espaços vazios que ficam entre as fibras e mantendo-as em suas posições relativas. Já as fibras são o componente que realça as propriedades mecânicas, eletromagnéticas ou mesmo químicas do material compósito como um todo. A união de ambos tende a resultar em um material compósito final com propriedades superiores àquelas dos materiais originais ou ainda não existentes nos mesmos.

A utilização de compósitos é antiga tendo sido retratada nas Sagradas Escrituras, onde o povo egípcio empregava palha no fabrico de tijolos (Bentur e Mindess, 1990). Naquela época, já se tinha o conhecimento de que a adição de determinados materiais a outros possibilitaria melhorias nas características do conjunto.

Com o passar dos anos, desenvolveu-se uma extensa gama de materiais compósitos com as mais diversas funções e abrangendo aplicações que vão desde a construção civil até a indústria aeroespacial. Entre as principais vantagens na utilização de materiais compósitos, está a sua elevada relação resistência-peso próprio, obtendo-se, deste modo, um material de melhor desempenho sem que haja um aumento considerável de seu peso.

No segmento da construção civil destacam-se, como materiais compósitos utilizados, as telhas de fibrocimento, telhas de plástico reforçadas com fibras de vidro, tecidos de fibras de carbono e matriz de resinas para reforços estruturais e o concreto reforçado com diversos tipos e configurações de fibras curtas. Este, por sua vez, vem sendo empregado cada vez mais em obras correntes devido a ganhos observados com sua utilização.

Existem numerosos tipos de fibras disponíveis para uso comercial. De acordo com a terminologia adotada pelo *American Concrete Institute (ACI), Committee 544 (Fiber Reinforced Concrete)*, existem quatro categorias de concreto reforçado com fibras: concreto reforçado com fibras de aço (*SFRC - Steel Fiber Reinforced Concrete*), de vidro (*GFRC - Glass Fiber Reinforced Concrete*), as fibras

sintéticas (*SNFRC – Synthetic Fiber Reinforced Concrete*) e as naturais (*NFRC – Natural Fiber Reinforced Concrete*).

Na Figura 2.1 observam-se fibras de aço, de vidro, sintéticas e naturais, com diferentes comprimentos e formas, que podem ser utilizadas no concreto.



Figura 2.1 – Fibras de Aço, de Vidro, Sintéticas e Naturais, com diferentes comprimentos e formas, que podem ser utilizadas no concreto (adaptado de CTU, 2006).

As fibras de vidro são normalmente produzidas a partir da sílica ( $\text{SiO}_2$ ), com a adição de óxidos de cálcio ( $\text{CaO}$ ), boro ( $\text{B}_2\text{O}_3$ ), sódio ( $\text{Na}_2\text{O}$ ) e/ou alumínio ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Isto resulta num material amorfo, que é comercializado na forma de fios têxteis, mantas, tecidos e fios trançados. As fibras de vidro utilizadas em matrizes cimentícias necessitam ser resistentes a álcalis, caso contrário ocorre a natural deterioração da fibra por parte dos álcalis do cimento.

As fibras sintéticas são fibras derivadas de polímeros orgânicos, resultantes de pesquisas desenvolvidas na indústria petroquímica e têxtil. Entre as principais fibras sintéticas estão as fibras acrílicas, de poliamidas aromáticas (aramida), de nylon, de poliéster, de polietileno, de polipropileno e de carbono.

Entre as principais fibras naturais utilizadas no reforço de matrizes cimentícias encontram-se as de sisal, casca de coco, bagaço de cana-de-açúcar, bambu e juta, entre outras.

As fibras de aço são produzidas a partir de fios de aço trefilados, que são cortados e comercializados em diversos comprimentos e diâmetros. As destinadas ao reforço do concreto possuem comprimentos variando entre 12,7 mm e 63,5 mm e fator de forma (relação entre o comprimento da fibra e seu diâmetro equivalente) variando entre 30 e 100, sendo deste modo,

suficientemente curtas para se dispersarem aleatoriamente numa mistura fresca de concreto (ACI 544.1R-96, 1996).

Na Tabela 2.1 podem ser observadas algumas das características de diversos tipos de fibras e da matriz de cimento. A compatibilidade entre fibra e matriz é fundamental para a obtenção da durabilidade e qualidade satisfatórias do produto final. Uma revisão mais completa dos tipos de fibra utilizadas no concreto pode ser encontrada em Bernardi (2003).

Tabela 2.1 – Valores de resistência mecânica e de módulo de elasticidade para diversos tipos de fibras e da matriz de cimento (adaptado de PCA, 1991 e ACI 544.1R-96, *apud* CTU, 2006).

Fibra	Massa específica (g/cm <sup>3</sup> )	Diâmetro, $\mu\text{m}$	Resistência à tração, Mpa	Módulo de elasticidade, Mpa	Deformação específica na ruptura (%)
<b>Aço</b>	7,8	100 - 1000	500 - 2600	210000	0,5 - 3,5
<b>Vidro</b>					
<b>E</b>	2,54	8 - 15	2000 - 4000	72000	3,0 - 4,8
<b>AR</b>	2,7	12 - 20	1500 - 3700	80000	2,5 - 3,6
<b>Sintéticas</b>					
<b>Acrílico</b>	1,18	5 - 17	200 - 1000	17000 - 19000	28 - 50
<b>Aramida</b>	1,44	10 - 12	2000 - 3100	62000 - 120000	2 - 3,5
<b>Carbono</b>	1,9	8 - 10	1800 - 2600	230000 - 380000	0,5 - 1,5
<b>Nylon</b>	1,14	23	1000	5200	20
<b>Poliéster</b>	1,38	10 - 80	280 - 1200	10000 - 18000	10 - 50
<b>Polietileno</b>	0,96	25 - 1000	80 - 600	5000	12 - 100
<b>Polipropileno</b>	0,9	20 - 200	450 - 700	3500 - 5200	6 - 15
<b>Naturais</b>					
<b>Celulose</b>	1,5	25 - 125	350 - 2000	10000 - 40000	3,5
<b>Sisal</b>	-	-	280 - 600	13000 - 25000	10 - 25
<b>Coco</b>	1,12 - 1,15	100 - 400	120 - 200	19000 - 25000	-
<b>Bambu</b>	1,5	50 - 400	350 - 500	33000 - 40000	-
<b>Juta</b>	1,02 - 1,04	100 - 200	250 - 350	25000 - 32000	1,5 - 1,9
<b>Capim Elefante</b>	-	425	180	4900	3,6
<b>Matriz de Cimento (para comparação)</b>	2,5	-	10000 - 45000	$3,7 \times 10^3$	0,02

Figueiredo (2005) afirma que o módulo de elasticidade e a resistência mecânica são as duas propriedades mais importantes na definição da capacidade de reforço que a fibra pode proporcionar ao concreto. O mesmo autor classifica as fibras como fibras de baixo e alto módulos. Na Figura 2.2, observa-se o esquema de uma matriz hipotética reforçada com três tipos de fibras: uma de baixo módulo de elasticidade e duas de alto módulo, sendo uma de baixa e outra de alta resistência mecânica. Todas as fases foram consideradas como de comportamento elástico perfeito. No momento em que a matriz se rompe (ponto A) e transfere a tensão para a

fibra de baixo módulo (ponto D), esta apresenta uma tensão muito baixa neste nível de deformação ( $\sigma_{\text{FIBRA}}$  de baixo módulo de elasticidade), resultando numa baixa capacidade de reforço pós-fissuração da fibra. Por outro lado, a fibra de alto módulo de elasticidade e alta resistência já apresentará um elevado nível de tensão ( $\sigma_{\text{FIBRA}}$  de alto módulo de elasticidade e alta resistência) no momento de ruptura da matriz, o que lhe permitirá atuar como reforço já a partir do ponto B. Contudo, mesmo que uma fibra tenha elevado módulo de elasticidade, mas tenha uma baixa resistência à tração ou ao cisalhamento, sua capacidade de reforço pós-fissuração também será reduzida ou inexistente. Este é o caso observado na linha 0-C, onde qualquer que seja a situação, haverá a ruptura das fibras, ou seja, quando a matriz se romper, as fibras já terão sido rompidas e não fornecerão nenhum tipo de reforço. Essa preocupação é importante, pois a base do desempenho dos concretos reforçados com fibras está no papel exercido pelas fibras de ponte de transferência de tensão pelas fissuras.

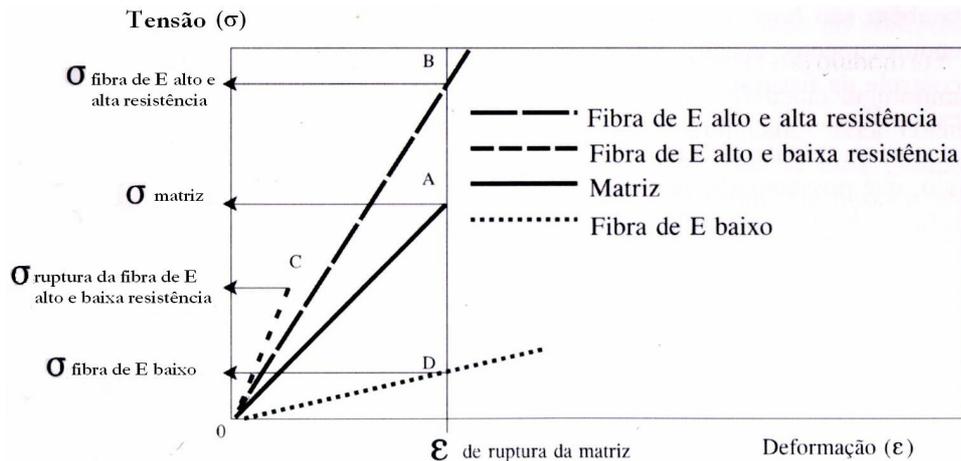


Figura 2.2 – Diagrama de tensão por deformação específica elástica de matriz e fibras de alto e baixo módulo de elasticidade trabalhando em conjunto (adaptado de Figueiredo, 2005).

As fibras de aço, segundo Figueiredo (2000), podem ser classificadas como fibras de alto módulo. Logo, podem ser consideradas como fibras destinadas ao reforço primário do concreto, ou seja, não se destinam somente à redução da fissuração e ao aumento na resistência ao impacto do material, mas também são capazes de proporcionar um ganho de desempenho quanto ao reforço mecânico. As fibras de aço atuam principalmente na pós-fissuração do concreto, onde servem como pontes de transferência de tensão pelas fissuras, possibilitando uma redução da velocidade de propagação das mesmas.

As vantagens do emprego do concreto reforçado com fibras de aço são bem conhecidas do meio técnico internacional e começam a ser conhecidas também nacionalmente. Mindess (1995, *apud* Figueiredo, 2000) chega a apontar a utilização de fibras no concreto como de grande interesse tecnológico mesmo em estruturas convencionais de concreto armado, onde, em conjunto com o concreto de elevado desempenho, aumenta a competitividade do material quando comparado com outras tecnologias como a das estruturas de aço, por exemplo.

## 2.1 CARACTERÍSTICAS DAS FIBRAS METÁLICAS

As fibras metálicas são confeccionadas com aço carbono ou aço inoxidável. A resistência à tração dessas fibras varia entre 500 e 2600 MPa, enquanto seu módulo de elasticidade é algo em torno de 210 GPa. Normalmente, têm um comprimento máximo de 63,5 mm (ACI 544.3R-93, 1993), embora fibras mais longas, com até 100 mm, já estejam sendo empregadas (Simões, 1998). A seção transversal das fibras pode ser circular ou outra forma poligonal. Para as fibras que não possuem seção transversal circular é comum determinar o diâmetro equivalente da fibra, correspondente ao diâmetro de um círculo que possua a mesma área da seção transversal da fibra. Segundo Zollo (1997), fibras com pequeno diâmetro equivalente apresentam baixa rigidez à flexão, mas uma certa habilidade para ocupar os espaços na pasta de cimento, enquanto fibras com grande diâmetro equivalente apresentam grande rigidez à flexão, contudo influenciam na consolidação dos agregados durante os processos de mistura e adensamento. O diâmetro equivalente das fibras utilizadas em concreto varia entre 0,4 e 0,8 mm (Naaman, 2000, *apud* Gava, 2006), podendo ser utilizadas fibras de até 1 mm de diâmetro (ACI 544.3R-93, 1993).

Um parâmetro numérico para descrever a geometria da fibra é o fator de forma ou relação de aspecto, que corresponde à relação entre o comprimento da fibra e o seu diâmetro equivalente. Este parâmetro varia entre 30 e 100 para as fibras de aço normalmente empregadas em concreto (ACI 544.3R-93, 1993).

Alguns tipos de fibras metálicas são apresentados na Figura 2.3. Diversas são as formas utilizadas, tais como retas, deformadas ou irregulares, todas dependendo do processo de fabricação. Em geral, as fibras metálicas retas (Figura 2.3a) e as deformadas são obtidas através do corte de fios finos ou folhas de aço. As fibras também podem ser produzidas a partir de fios trefilados progressivamente até se chegar ao diâmetro desejado. Com isto, acabam por apresentar uma maior resistência mecânica (dado o seu encruamento), a qual pode ser ainda maior quando da utilização de aços com maior teor de carbono (Figueiredo, 2000).

As deformações, quando existentes, têm o objetivo de melhorar a aderência com a matriz e podem ser induzidas ao longo de todo comprimento das fibras (Figura 2.3b) ou apenas nas suas extremidades (fibras com extremidades dobradas — Figura 2.3c — ou "alargadas" — Figura 2.3d). As fibras de aspecto irregular e com superfície áspera, apresentadas na Figura 2.3e, são obtidas através de outros processos metalúrgicos (*chatter machining e melt extraction*) (Simões, 1998).

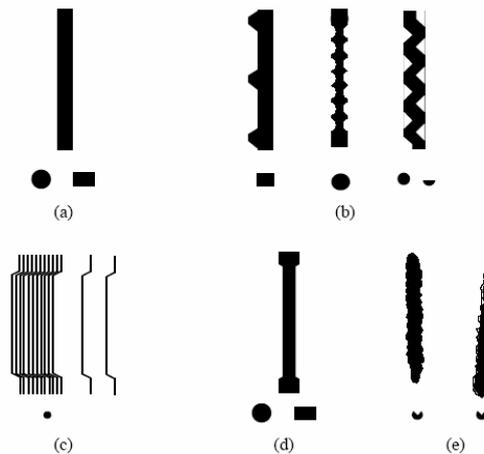


Figura 2.3 – Tipos de fibras metálicas: (a) retas; (b) deformadas/onduladas; (c) extremidades em gancho; (d) extremidades alargadas; (e) irregulares (adaptado de Simões, 1998).

Com relação à concentração ou quantidade de fibras empregadas no concreto, é comum quantificar as fibras em relação ao volume de concreto reforçado, utiliza-se então o teor de fibras em volume,  $(V_f)$ . No caso de fibras de aço, a adição de 1% em volume corresponde a aproximadamente 80 kg de fibra para 1 m<sup>3</sup> de concreto. Segundo o ACI 544.3R-93 (1993), o teor usual de emprego de fibras de aço em concreto varia entre 0,25% em relação ao volume, equivalente a 20 kg/m<sup>3</sup> em massa, e 2% em volume, equivalente a 157 kg/m<sup>3</sup>. Armelin (1992, *apud* Gava, 2006), reunindo estudos de diversos autores, verifica que os teores utilizados variam entre 1,5% a 4% em volume. Técnicas especiais, como a SIFCON (*Slurry Infiltrated Fiber Concrete*) permite a adição de teores superiores de fibras, entre 8% e 12%, podendo alcançar teores de 25% (ACI 544.1R-96, 1996). Nesta técnica as fibras são dispostas inicialmente no molde para posterior infiltração de pasta de cimento.

Na maioria das vezes, as fibras metálicas se apresentam soltas, embora aquelas com extremidades dobradas também sejam fornecidas em pentes e unidas nas extremidades por uma cola solúvel em água. Deste modo, durante a mistura, essas fibras se separam e se dispersam individualmente

---

pela massa, facilitando o processo de mistura com o concreto e evitando o agrupamento e a má distribuição.

Quanto à durabilidade, concretos contendo fibras metálicas, quando bem compactados e curados, possuem excelente desempenho, desde que as fibras permaneçam protegidas pela pasta de cimento. Na maioria dos ambientes, no entanto, a corrosão das fibras posicionadas junto à superfície do concreto é inevitável e, embora não haja propagação desta corrosão para as fibras do interior, as características estéticas do elemento podem ficar comprometidas.

## 2.2 MECANISMO DE ATUAÇÃO DAS FIBRAS

É amplamente conhecido que o concreto possui um bom desempenho quando submetido a tensões de compressão; segundo a NBR 6118 : 2004 concretos de resistência normal apresentam, atualmente, um  $f_{ck}$  superior a 10 MPa e inferior a 50 MPa. Notadamente, os avanços tecnológicos vêm possibilitando a produção de concretos de resistência ainda maiores (alta resistência), cujos valores de  $f_{ck}$  variam entre 50 e 150 MPa.

O bom comportamento da matriz cimentícia, entretanto, fica comprometido por sua limitada resistência à tração. O concreto possui, normalmente, microfissuras na zona de transição entre matriz e agregados graúdos, e pouca energia é necessária para que ocorra o aumento destas fissuras. Quando o concreto se encontra submetido à tração ou à flexão, as tensões se concentram nas extremidades das microfissuras, provocando um alargamento incontrolado das mesmas e fazendo com que a ruína do material se apresente de forma frágil.

No caso do concreto com adição de fibras, ocorre um retardo no alargamento das fissuras. As fibras agem como pontes de ligação, transferindo as solicitações de um lado a outro da matriz e minimizando as tensões nas extremidades das fissuras. A Figura 2.4 mostra o efeito de “costura” (Holanda, 2002) que as fibras propiciam ao concreto e o esquema de distribuição de tensões para um concreto sem e com reforço de fibras. Observa-se, também, a redução da concentração de tensões nas extremidades das fissuras.

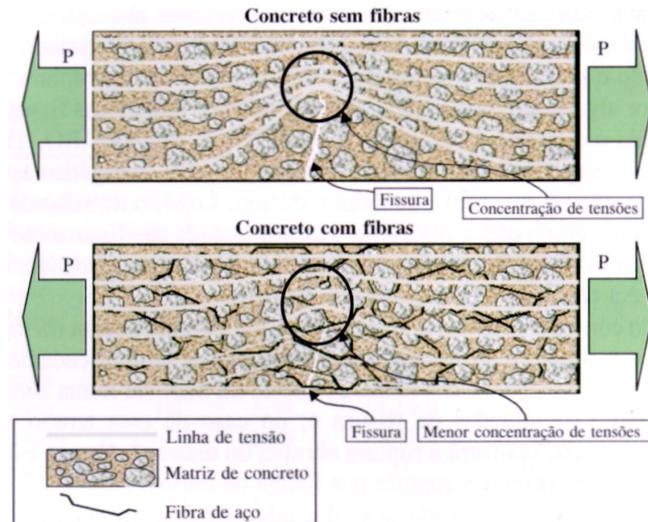


Figura 2.4 – A “costura” que as fibras propiciam ao concreto e o esquema de distribuição de tensões para um concreto sem e com reforço de fibras (adaptado de Figueiredo, 2005).

A representação das fissuras no concreto reforçado com fibras é mostrada por Wecharatana e Shah (1983) e pode ser visualizada na Figura 2.5.

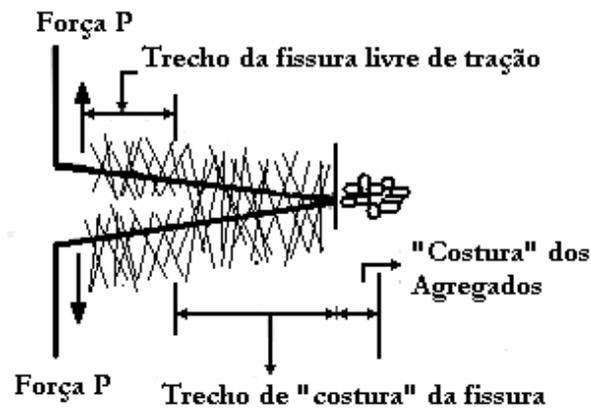


Figura 2.5 – Representação de uma fissura no concreto reforçado com fibras (adaptado de Wecharatana e Shah, 1983).

Na fissura são identificadas três zonas distintas: a zona livre de tração, onde a matriz se encontra fissurada e as fibras rompidas ou arrancadas da matriz; a zona de “costura” das fissuras pelas fibras, no qual a tensão é transferida da matriz para as fibras por atrito; a zona de microfissuração da matriz, mas com suficiente continuidade e engrenamento dos agregados, para que ocorra transferência de tensão na própria matriz.

---

A presença das fibras causa alterações no padrão de fissuração do concreto, com o aparecimento de fissuras mais finas, menos espaçadas e distribuídas de forma mais uniforme na estrutura (Nunes e Agopyan, 1998). Ocorre, também, uma redução na velocidade de propagação das fissuras, sendo necessária uma maior quantidade de energia para a abertura e propagação das mesmas. Deste modo, a ruína do compósito se torna menos frágil, propiciando eventual ganho de ductilidade da estrutura. Segundo Figueiredo (2000), o concreto passa a ser um material pseudo-dúctil, ou seja, continua apresentando uma resistência residual a esforços nele aplicados mesmo após sua fissuração. Além disso, a primeira fissura não consegue levar o compósito à ruína e, conseqüentemente, há um aumento da resistência do material à fissuração, conforme afirma Holanda (2002).

É possível afirmar, portanto, que o comportamento do compósito formado por fibras e concreto é dependente da sua capacidade para ligar as fissuras. Esta capacidade está relacionada com o teor de fibras dispersas na mistura e a eficiência da interação fibra-matriz, que, por sua vez, é influenciada pela geometria e propriedades mecânicas das fibras e pela composição da matriz.

### 2.2.1 A Interação Fibra-Matriz

O comportamento do concreto com adição de fibras é controlado por processos de transferência de tensão da matriz para as fibras. Em matrizes frágeis, como o concreto, o efeito da transferência de tensão é influenciado por uma série de fatores, tais como: a condição da matriz, ou seja, antes da fissuração ou após a fissuração; propriedades mecânicas da matriz e da fibra; a geometria da fibra, ou seja, o seu comprimento, forma, diâmetro e mecanismo de ancoragem e o teor de fibras no compósito.

Antes da fissuração, segundo Bentur e Mindess (1990), o mecanismo dominante de transferência de tensão é o elástico e os deslocamentos longitudinais na interface da fibra e da matriz são geometricamente compatíveis. Em função da diferença entre os módulos de elasticidade da fibra e da matriz, tensões tangenciais são desenvolvidas na interface, distribuindo a carga externa entre a fibra e a matriz. Os autores também afirmam que a distribuição das tensões tangenciais ao longo da interface fibra-matriz não é uniforme, conforme se observa na Figura 2.6.

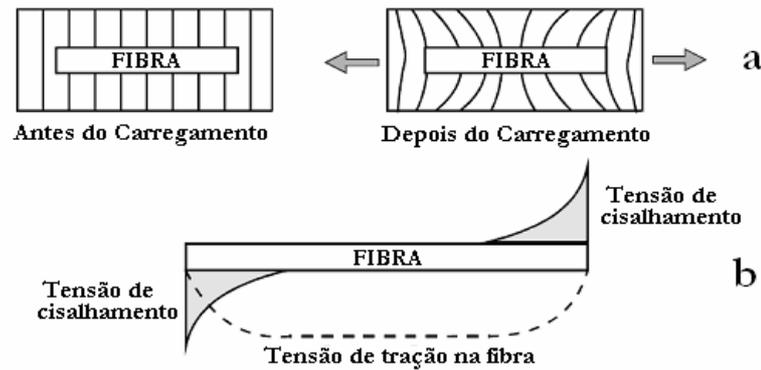


Figura 2.6 – Esquema de deformações (a) e distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da interface fibra-matriz (adaptado de Bentur e Mindess, 1990).

Em avançados estágios de carga, ocorrem descolamentos entre a fibra e a matriz e o mecanismo de transferência de tensão entre ambas passa a ser por atrito, ocorrendo deslocamentos relativos entre a fibra e a matriz. A tensão de atrito desenvolvida é uma tensão tangencial, considerada como sendo uniformemente distribuída ao longo da interface. Este processo tem maior importância na pós-fissuração, onde as fibras atuam como pontes de ligação através das fissuras, controlando, inclusive, propriedades como a resistência e a deformação específica últimas do compósito (Bentur e Mindess, 1990).

A transição do mecanismo de transferência de tensão elástico para transferência de tensão por atrito ocorre quando as tensões tangenciais na interface fibra-matriz excedem o limite de resistência ao cisalhamento,  $(\tau_{au})$ . Quando esta tensão é excedida, o descolamento entre fibra e matriz é iniciado e tensões de atrito passam a atuar na interface. A máxima tensão tangencial de atrito que pode ocorrer na interface é denominada  $(\tau_{fu})$ . Na Figura 2.7 pode ser observada a representação das tensões tangenciais na interface fibra-matriz.

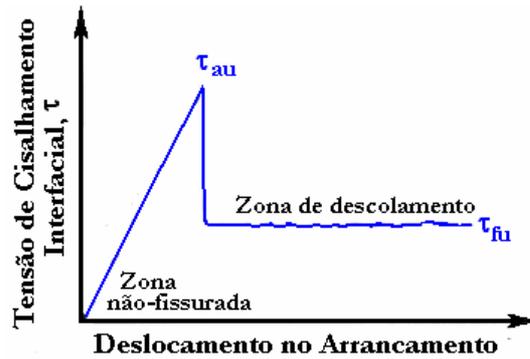


Figura 2.7 – Representação das tensões tangenciais (de cisalhamento) na interface fibra-matriz (adaptado de Bentur e Mindess, 1990).

A transição do tipo de transferência de tensão, por aderência elástica (antes do descolamento) e por atrito (após o descolamento) é um processo gradual, durante o qual ambos os mecanismos são efetivos. Quando o descolamento ocorre anteriormente ao início da fissuração da matriz, o efeito combinado destes dois mecanismos pode influenciar a forma da curva tensão-deformação do compósito. A ocorrência do descolamento é dependente das propriedades dos materiais que constituem o compósito e da sua interação, como a resistência de aderência e a resistência à tração da matriz.

Quando o descolamento das fibras ocorre após a fissuração, este é influenciado pela formação e desenvolvimento das fissuras, bem como a posição das fibras na matriz. Na Figura 2.8 observa-se a distribuição de tensões de cisalhamento da interface fibra-matriz imediatamente após a fissura, quando o descolamento ocorre antes e após a fissuração.

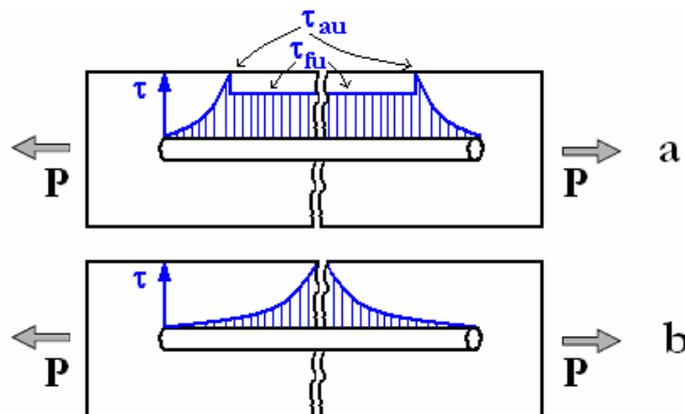


Figura 2.8 – Distribuição das tensões de cisalhamento na interface fibra-matriz imediatamente após a fissura quando o descolamento ocorre antes (a) e após (b) a fissuração (adaptado de Bentur e Mindess, 1990).

A tensão de cisalhamento desenvolvida paralela à interface fibra-matriz é um importante mecanismo de transferência de carga entre fibra e matriz, conforme indicado anteriormente; entretanto, também devem ser considerados os efeitos das tensões e deformações normais que surgem na interface. As tensões normais são resultantes do efeito de Poisson, de alterações de volume e de carregamentos biaxiais e triaxiais; podendo causar enfraquecimento da interface e um desligamento prematuro das fibras e alterando a resistência ao atrito, que é sensível a tensões normais.

Para as fibras que possuem dispositivos de ancoragem em sua geometria, além dos mecanismos de transferência de tensões mencionados anteriormente, deve ser considerada a transferência mecânica de tensões proporcionada pela ancoragem.

Estudos realizados para a investigação dos mecanismos de transferência de tensões na interação fibra-matriz geralmente consistem na análise de curvas de carga de arrancamento por escorregamento da fibra. Um modelo de deste tipo de curva para fibras retas é apresentado por Bartos (1981, *apud* Bentur e Mindess, 1990) e pode ser observado na Figura 2.9. O trecho OE da curva demonstra a transferência de tensões por aderência, enquanto o trecho EM caracteriza o descolamento gradual da fibra. A queda súbita da curva no trecho MF marca a ocorrência do descolamento total da fibra. A partir do trecho F a curva decresce gradualmente e indica a ação do mecanismo de transferência de tensões por atrito.

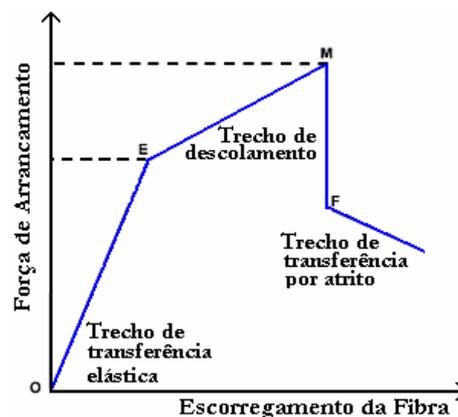


Figura 2.9 – Diagrama simplificado de força de arrancamento por escorregamento, adaptado de Bartos (1981, *apud* Bentur e Mindess, 1990).

Naaman e Najm (1991) realizaram uma análise comparativa entre ensaios de arrancamento feitos em fibras retas e fibras com ancoragem em gancho. Os resultados obtidos podem ser observados na Figura 2.10 através de curvas Carga de arrancamento-Escorregamento.

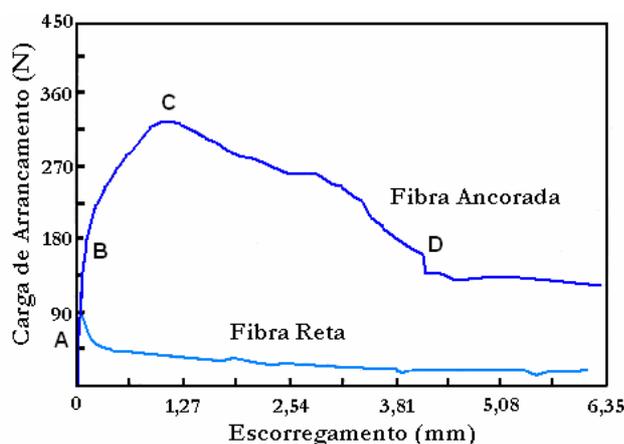


Figura 2.10 – Comparação entre curvas de arrancamento de fibras retas e fibras com ancoragem em gancho (adaptado de Naaman e Najm, 1991).

Observa-se que a curva da fibra reta segue o mesmo padrão da curva da Figura 2.9. Na curva da fibra ancorada é possível identificar os trechos relativos à contribuição da ancoragem na transferência de tensão fibra-matriz. O trecho AB corresponde ao gradual deslizamento da fibra. Com o descolamento da fibra, inicia-se o arrancamento e retificação da ancoragem, caracterizado pela mudança de inclinação da curva a partir do ponto B. Quando a ancoragem está parcialmente reta, a carga de arrancamento cai, conforme é observado a partir do ponto C. O ponto D sugere que a ancoragem já foi toda retificada e a fibra a partir deste ponto atua de forma semelhante à fibra reta, predominando o mecanismo de transferência de tensões por atrito. Conclui-se então que a contribuição da ancoragem no mecanismo de transferência de tensões está caracterizada no trecho BD da curva.

## 2.2.2 Volume Crítico de Fibras

Conforme Figueiredo (2000), a definição conceitual do volume crítico é de que ele corresponde ao teor de fibras que mantém a mesma capacidade portante para o compósito a partir da ruptura da matriz. Ou seja, abaixo do volume crítico, no momento em que ocorre a ruptura da matriz, ocorre também uma queda na carga a qual o material tem capacidade de suportar. Acima do volume crítico, o compósito continua aceitando níveis de carregamentos crescentes mesmo após

a ruptura da matriz. Este conceito se encontra ilustrado na Figura 2.11, onde se apresentam curvas de carga por deflexão em prismas de concretos com fibras rompidos à flexão. Existe um trecho elástico linear inicial correspondente ao estágio pré-fissurado da matriz do compósito e outro, similar a um patamar de escoamento, onde se pode diferenciar o comportamento do concreto reforçado com teores abaixo, acima e igual ao volume crítico.

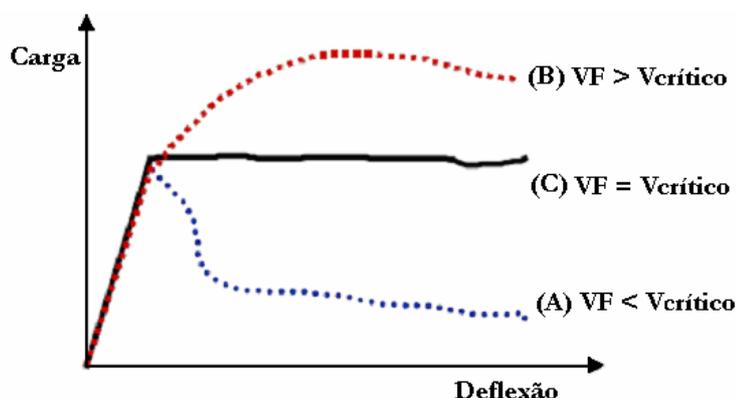


Figura 2.11 – Compósitos reforçados com fibras em teor baixo (A), acima (B) e igual (C) ao volume crítico de fibras durante o ensaio de tração na flexão (adaptado de Figueiredo, 2000).

A determinação do volume crítico está associada à modelagem proposta por Aveston *et al.* (1971, *apud* Figueiredo 2000) a qual focaliza um compósito ideal, com fibras contínuas e alinhadas à direção do esforço principal. Este modelo não representa com precisão a realidade do material *CRFA*, onde as fibras são descontínuas e distribuídas randomicamente. Para corrigir estes desvios são utilizados os chamados fatores de eficiência, que permitem uma maior aproximação do  $V_{f.crit.}$  teórico e aquele obtido experimentalmente. Assim o volume crítico é calculado através da Eq. 2.1, considerando os efeitos de orientação da fibra (Figueiredo, 2000).

$$V_{f.crit.} = \frac{\epsilon_{mu} E_c}{\sigma_{fu} \eta_1} \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon_{mu}$  é a deformação última de ruptura da matriz;  $E_c$  é o módulo de deformação elástica da matriz;  $\sigma_{fu}$  é a resistência à tração da fibra e  $\eta_1$  é o fator de correção do volume crítico em função da orientação das fibras.

Para um concreto reforçado com fibras de aço, adotando-se os seguintes valores de referência:  $\epsilon_{mu} = 100 \cdot 10^{-6}$ ;  $E_c = 25000$  MPa;  $\sigma_{fu} = 1100$  MPa e  $\eta_1 = 0,20$  correspondente a fibras em 3

direções (Hannant, 1978 *apud* Figueiredo 2000), obtém-se um  $V_{f_{cr.}} = 1\%$ , valor semelhante ao indicado por Shah (1991, *apud* Nunes 2006) para o volume crítico das fibras de aço em um CRFA.

De acordo com Bentur e Mindess (1990), o volume crítico para fibras distribuídas aleatoriamente em três direções é dependente da resistência da matriz e do fator de forma das fibras ( $l/d$ ) e é calculado através da Eq. 2.2.

$$V_{f_{cr.}} = 2 \frac{\sigma_{mu}}{\tau_{fu}} \frac{1}{l/d} \quad (2.2)$$

onde  $\sigma_{mu}$  é a resistência à tração da matriz sem fibras;  $\tau_{fu}$  é máxima tensão tangencial de atrito, variando de 1 MPa a 10 MPa (Bentur e Mindess, 1990);  $l$  é o comprimento da fibra e  $d$  é o diâmetro da fibra. Adotando-se os seguintes valores de referência:  $\sigma_{mu} = 3$  MPa;  $\tau_{fu} = 7$  MPa e  $l/d = 60$ , obtém-se um  $V_{f_{cr.}} = 1,4\%$ .

### 2.2.3 Comprimento Crítico

O comprimento crítico é outro fator que influencia o comportamento do concreto com adição de fibras. Figueiredo (2000) afirma que o comprimento crítico de uma fibra pode ser definido como aquele que, quando da ocorrência de uma fissuração perpendicular à fibra, e posicionada na região média do seu comprimento, proporciona uma tensão no seu centro igual à sua tensão de ruptura.

Na Figura 2.12 é possível observar as possíveis distribuições de tensão ao longo de uma fibra em função do seu comprimento crítico. Quando a fibra tem um comprimento menor que o crítico, a carga de arrancamento proporcionada pelo comprimento embutido na matriz não é suficiente para produzir uma tensão que supere a resistência da fibra. Nesta situação, com o aumento da deformação e, conseqüentemente, da abertura da fissura, a fibra, que está atuando como ponte de transferência de tensões pela fissura, será arrancada do lado que possuir menor comprimento embutido. Quando o comprimento da fibra é maior ou igual ao comprimento crítico, é possível desenvolver na fibra uma tensão de tração igual à sua resistência e, no caso de um comprimento de fibra maior do que o comprimento crítico, a ruptura do compósito será predominante por ruptura da fibra.

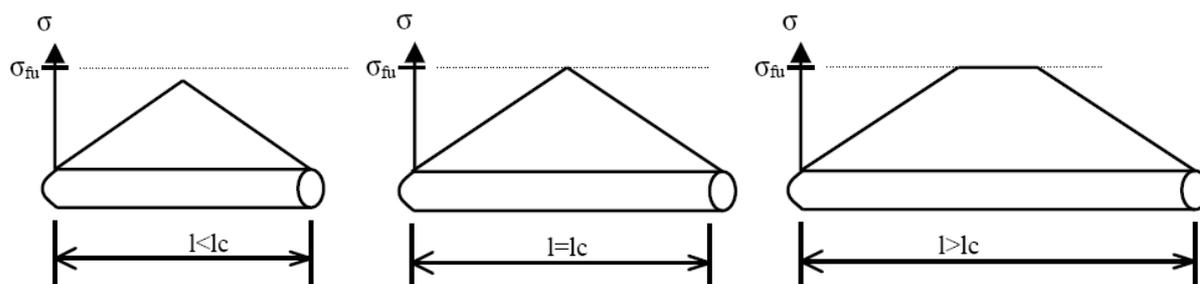


Figura 2.12 – Distribuições possíveis de tensão ao longo de uma fibra em função do comprimento crítico (adaptado de Bentur e Mindess, 1990).

### 2.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Para cada tipo de solicitação a que é submetido, o material concreto com fibras apresenta um comportamento bem característico. Pode-se dizer que a adição de fibras promove poucas alterações na parte ascendente dos diagramas tensão-deformação à compressão do concreto, sendo que as mudanças mais significativas aparecem, realmente, no ramo descendente destes diagramas. O ganho em resistência à compressão, quando há, conforme verificado em bibliografia, é pouco expressivo, já a resposta pós-pico é mais suave e gradual, fazendo com que o material atinja níveis de deformação mais elevados.

No caso de solicitações de tração, contudo, o comportamento do concreto com a adição de fibras é significativamente alterado, observando-se um aumento da sua resistência à tração à medida que se adicionam fibras. Este aumento é importante uma vez que o material concreto apresenta uma baixa resistência à tração.

Observa-se, também, que o concreto submetido a testes de compressão biaxial tem como resposta um aumento de resistência com o incremento da quantidade de fibras adicionadas, vindo a alcançar acréscimos de até 35% para adições em volume de fibras de 2%. Este fato faz com que haja distintas superfícies de ruptura para o concreto com adição de diferentes quantidades de fibras.

Nesta seção, serão discutidos os principais efeitos do emprego de fibras em concretos no que diz respeito a seu comportamento perante solicitações uniaxiais de compressão e tração, bem como perante solicitações biaxiais e de cisalhamento.

### 2.3.1 O concreto reforçado com fibras sob compressão

Bentur e Mindess (1990), afirmam que a adição de fibras produz pequeno ou nenhum aumento na resistência à compressão do concreto. O que se constata na literatura, no entanto, é que o efeito de fibras de aço na resistência à compressão do concreto é variável, sendo documentados aumentos insignificantes na maior parte dos casos, como também, um acréscimo de 23% para um concreto contendo 2% de fibras em volume, observado em Williamson (1974, *apud* ACI 544.4R-88, 1988). Neste estudo foram ensaiados corpos-de-prova cilíndricos de concreto com dimensão máxima do agregado de 19 mm e fibras com um fator de forma de 100. Além disso, na Figura 2.13 podem ser observadas curvas tensão-deformação de concretos reforçados com diferentes teores de fibra para concretos convencionais e concretos de alta resistência obtidas de estudos realizados por Balaguru (1992, *apud* Lobão, 2005).

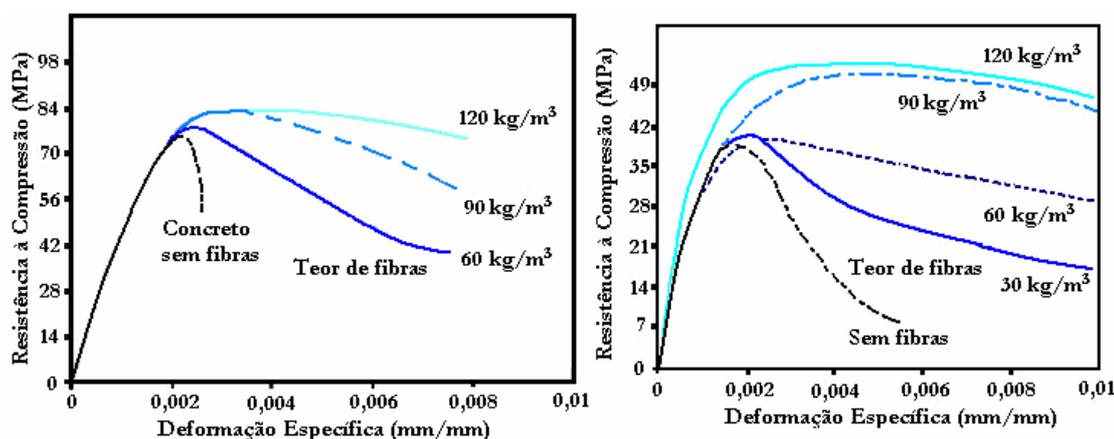


Figura 2.13 – Curvas tensão-deformação na compressão de concretos convencionais (à esquerda) e de concretos de alta resistência (à direita), reforçados com fibras de aço de 50 mm e com ganchos (adaptado de Balaguru, 1992, *apud* Lobão, 2005).

Em outro estudo, Hughes e Fattuhi (1976) obtiveram apenas um aumento de 7% na resistência à compressão para o caso de concreto com fibras do tipo *Duoform steel fibres* ( $l = 25$  mm e  $d = 0,25$  mm). Os autores avaliaram, nestes testes, distintos tipos de fibras na porcentagem de 1,5% em volume e em diferentes idades (30, 90 e 190 dias), verificando apenas um leve e semelhante incremento da resistência e da rigidez inicial para todas as misturas testadas e para as diferentes idades.

No caso de argamassas, o aumento da resistência à compressão obtido por Williamson (1974, *apud* ACI 544.4R-88, 1988) foi imperceptível ou muito pequeno. Além disso, a presença de fibras

não altera as características básicas da curva tensão-deformação, conforme observado por Fanella e Naaman (1985). Nesta curva, ocorre alteração na inclinação da porção descendente, apresentando-se menos abrupta em relação ao caso sem fibras, semelhante à resposta do *CRFA*. Isso indica que há um acréscimo considerável de tenacidade do material, ou seja, de sua capacidade de absorção de energia de deformação, a qual pode ser estimada pela área sob a curva tensão-deformação ou carga-deslocamento. O aumento da tenacidade em compressão, obtida pela adição de fibras, é benéfica para a prevenção de ruptura repentina e explosiva (ACI 544.4R-88, 1988).

Conclui-se, então, que o reforço das fibras impõe uma mudança significativa no comportamento pós-pico do material, tornando sua resposta muito mais suave — em termos da declividade do ramo descendente do diagrama tensão-deformação — e levando-o a atingir níveis de deformação específica maiores, até a ruptura. Tais observações também podem ser comprovadas através da Figura 2.14, onde são apresentados diagramas tensão-deformação correspondentes ao estudo experimental conduzido por Ezeldin e Balaguru (1992, *apud* Simões, 1998), com o objetivo de verificar a influência das características do reforço de fibras no desempenho à compressão do concreto.

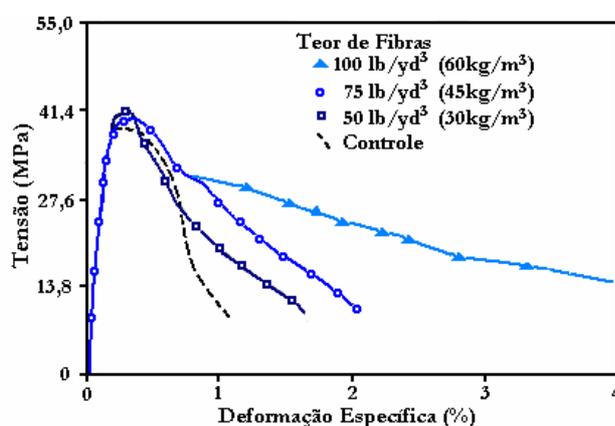


Figura 2.14 – Diagramas tensão-deformação na compressão uniaxial: comparação entre concretos sem e com diversos teores de fibras (adaptado de Ezeldin e Balaguru, 1992, *apud* Simões, 1998).

Quanto à forma de ruptura à compressão, Iyengar e Viswanatha (1972), em seus ensaios, observaram três tipos distintos para concretos reforçados com diferentes teores de fibras. O primeiro tipo de ruptura é bastante similar ao dos corpos-de-prova de concreto sem fibras, exceto pelo fato de que não ocorre destacamento de pedaços do concreto. A Figura 2.15a,

demonstra este tipo de ruptura, típica de corpos-de-prova com pequenas quantidades de fibras de pequeno comprimento. O segundo tipo foi marcado por intensa deformação lateral dos espécimes. Os corpos-de-prova se despedaçaram completamente ao longo da superfície externa, na região média. A Figura 2.15c mostra este tipo de ruptura, que é característico de concretos com grandes quantidades de fibras longas. A Figura 2.15b apresenta o tipo de ruptura intermediário entre os dois anteriores. Observa-se significativa deformação, com deslocamento lateral leve e com um modo de ruptura final semelhante ao primeiro caso.

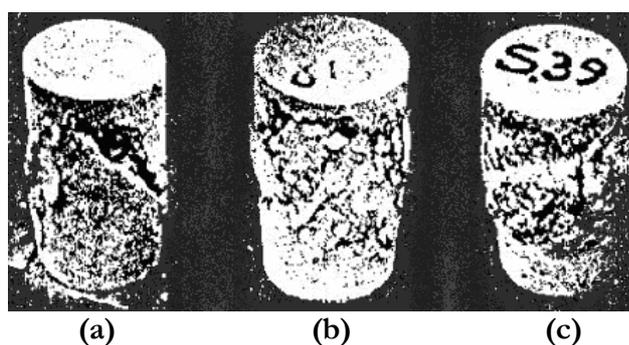


Figura 2.15 – Modos de ruptura típicos para compressão uniaxial de concretos reforçados com fibra: (a) baixo teor, (b) moderado teor e (c) alto teor de fibras (adaptado de Iyengar e Viswanatha, 1972).

### 2.3.2 O concreto reforçado com fibras sob tração

Não existem testes padrões que determinem a curva tensão-deformação para o concreto em tração direta. As curvas dependem do tamanho do corpo-de-prova, método de teste, da rigidez da máquina de teste, e do tipo de aparelhagem de medição utilizado (ACI 544.4R-88, 1988).

Segundo Nanni (1988), o ensaio de compressão diametral para a obtenção da resistência à tração do concreto é utilizado desde 1953, quando foi apresentado por dois estudos independentes: Carneiro e Barcellos (1953) e Akazaca (1953). O autor afirma que este ensaio pode ser utilizado para a determinação dos parâmetros de tração característicos do concreto reforçado com fibras, descrevendo adequadamente o comportamento deste material quando submetido a esforços de tração. Além da obtenção da resistência à tração e da tensão na primeira fissura, é possível obter os índices de tenacidade do compósito, através da curva carga-deslocamento.

Quando submetido a tensões de tração, o concreto convencional rompe, repentinamente, no momento em que a deformação correspondente à sua resistência for superada. É observado, experimentalmente, que o concreto reforçado com fibras continua resistindo a cargas

consideráveis, com deformação bastante superior às deformações do concreto convencional. A Figura 2.16, apresentada por Cucchiara *et al.* (2004) ilustra esta afirmação através de resultados de ensaios de compressão diametral. Mais importante, no entanto, é que, observando os resultados obtidos, pode-se perceber o quanto a incorporação de fibras influencia no aumento da resistência à tração.

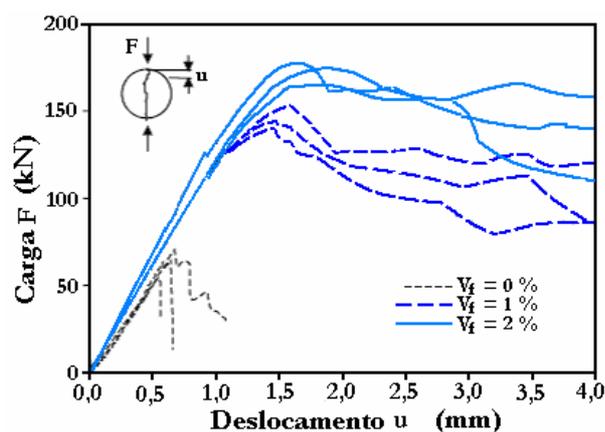


Figura 2.16 – Resultados de ensaio de compressão diametral para concreto com e sem adição de fibras (adaptado de Cucchiara *et al.*, 2004).

Mehta e Monteiro (1994) argumentam que produtos reforçados com fibras não apresentam melhora substancial na resistência à tração, se comparados a misturas similares sem fibras. No entanto, pesquisas recentes parecem indicar o contrário, mostrando que ocorre um aumento significativo da resistência à tração do concreto quando a este são adicionadas fibras. A Figura 2.17 reúne os dados experimentais de ensaios de compressão diametral em corpos-de-prova de concretos reforçados com fibras de diversos autores e é possível observar o aumento da resistência à tração provocada pela adição de fibras.



arrancamento, oferecida pelas fibras. Assim como nos ensaios de compressão, também se observa um aumento da tenacidade para o caso de tração.

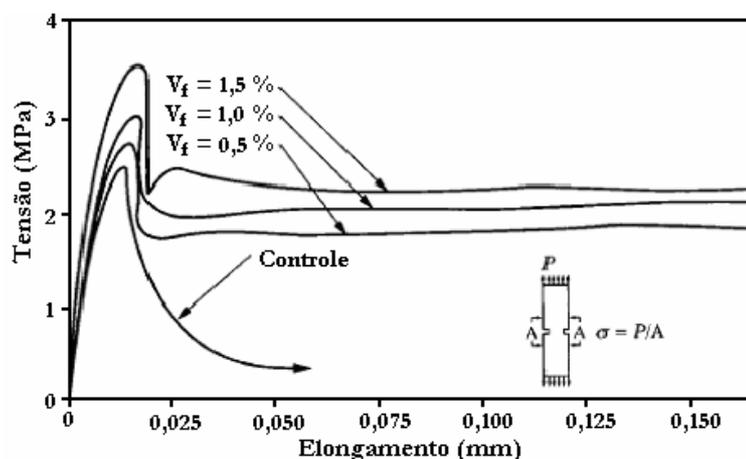


Figura 2.18 – Resposta tensão-elongamento na tração direta: comparação entre concreto não reforçado e reforçado com diversos teores de fibra (adaptado de Gopalaratnam e Shah, 1987, *apud* Simões, 1998).

### 2.3.3 O concreto reforçado com fibras sob solicitações biaxiais

Poucas investigações sobre o desempenho do concreto com fibras sob estados biaxiais de carregamento têm sido relatadas na literatura. Contudo, estes poucos resultados indicam que as fibras aumentam a resistência do concreto sob esse tipo de solicitação. Salienta-se o trabalho de Torreti e Djebri (1995), que afirmam que o ganho para concreto reforçado com fibras em compressão biaxial pode ser considerável.

Yin *et al.* (1989) verificaram em ensaios de compressão uniaxial, que o incremento de resistência devido à adição de fibras é muito pequeno, não mais que 4%. Contudo, a resistência biaxial do mesmo concreto foi significativamente maior que no concreto sem fibras. Observou-se um aumento de 35% para o caso de adição de fibras de 2% em volume para uma razão entre as tensões principais  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  de 0,2 e comprimento da fibra de 25,4 mm. Na Figura 2.19 podem ser observados os resultados obtidos por Yin *et al.* (1989).

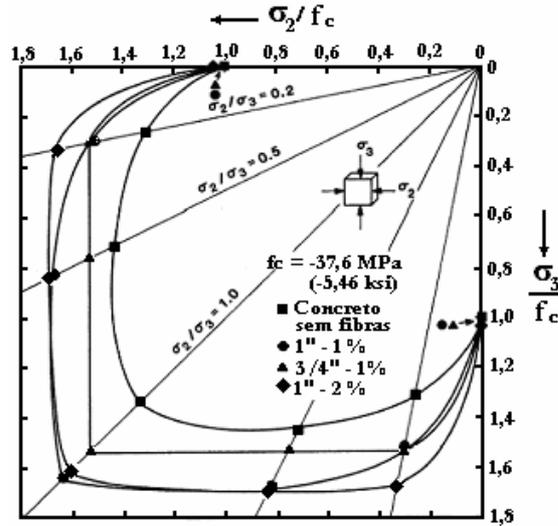


Figura 2.19 – Envoltória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibra (adaptado de Yin *et al.*, 1989).

Resultados de Abdull-Ahad e Abbas (1989, *apud* Barros, 1996) indicam que as fibras aumentam a resistência do concreto sob estado biaxial de compressão e também de tração, conforme se observa na Figura 2.20. Barros afirma que, analogamente ao que ocorre no caso uniaxial, nos ensaios multiaxiais também se registra um aumento significativo da ductilidade do concreto ao se adicionar fibras.

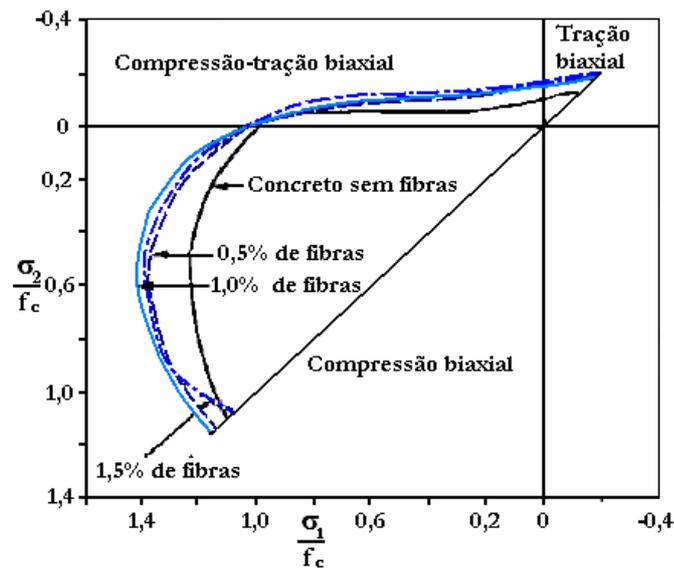


Figura 2.20 – Envoltória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibra (adaptado de Abdull-Ahad e Abbas, 1989, *apud* Barros, 1996).

Segundo Traina e Mansour (1991), em compressão uniaxial, o concreto reforçado com fibras pode apresentar aumento, decréscimo ou nenhuma mudança na resistência, comparado ao concreto convencional, dependendo do tipo de fibra, sua relação de forma,  $l/d$ , e teor utilizado. Em seus ensaios, os autores encontraram um aumento na compressão uniaxial de até 22% para a situação de adição de 1,5% de fibras com ancoragem em gancho nas extremidades,  $l/d$  de 60 e dimensões de  $l = 30$  mm e  $d = 0,5$  mm. Também foram testados concretos com adição de fibras corrugadas ao longo do seu comprimento, com  $l/d$  de 33 e dimensões de  $l = 25,4$  mm e  $d = 0,76$  mm, onde não foi observado nenhum aumento significativo da compressão uniaxial. Já na compressão biaxial, o concreto com adição de fibras teve uma maior resistência em relação ao concreto sem fibras para os dois tipos de fibras e para as relações de forma analisadas. Um acréscimo na resistência biaxial de 70% em relação à compressão uniaxial foi obtido para as fibras com ancoragem e de 60% para as fibras corrugadas, ambos os casos com adição de fibra em volume de 1,5% e uma razão entre tensões principais de 0,5.

Ensaio de compressão biaxial mais recentes, realizados por Swaddiwudhipong e Seow (2006), em concreto com adições de fibras em 0,5%, 1% e 2%, confirmaram o mesmo comportamento. Os resultados destes ensaios podem ser observados na Figura 2.21

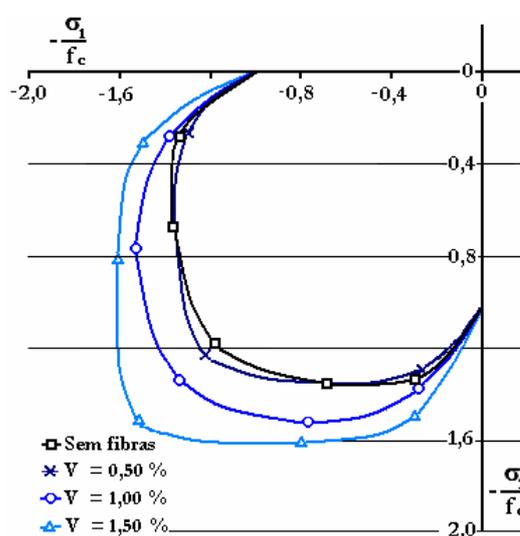


Figura 2.21 – Envoltória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibra (adaptado de Swaddiwudhipong e Seow, 2006).

Yin *et al.* (1989) também constataram que a adição de fibras de aço ao concreto é similar à aplicação de uma pequena pressão de confinamento na direção não carregada. Ambas situações

apresentam efeito similar tanto na resistência quanto no modo de ruptura e rigidez do concreto. Utilizando-se desta equivalência, Tan *et al.* (1994) apresentaram um modelo analítico para o cálculo da resposta do concreto reforçado com fibras em compressão biaxial. Desta forma, o concreto em compressão biaxial é considerado análogo a um concreto convencional em compressão triaxial, com uma pressão de confinamento devido às fibras na terceira direção. Esta pressão de confinamento depende das características geométricas, do teor e da forma de distribuição das fibras, bem como da interação entre a fibra e a matriz.

#### 2.3.4 O concreto reforçado com fibras sob solicitações de corte

Em estruturas de concreto se procura evitar a ruptura por corte, uma vez que esta se apresenta de forma frágil. Para tal, utilizam-se correntemente estribos, os quais absorvem a maior parte dos esforços de corte atuantes. Entretanto, há situações em que é complexa e onerosa a aplicação de estribos e, nestas situações, as fibras poderiam substituí-los, pelo menos parcialmente. Zonas de elevada densidade de armadura, onde a concretagem é difícil; estruturas de paredes delgadas em que é laboriosa a colocação de estribos sem dificultar a concretagem e elementos de reduzida altura, em que os estribos são pouco eficazes, são alguns dos exemplos de onde esta substituição seria possível (Barros, 1996).

As fibras de aço ao serem utilizadas juntamente com estribos para o reforço ao corte apresentam algumas vantagens: as fibras são aleatoriamente distribuídas por todo o volume do concreto, encontrando-se a pequena distância umas das outras, o que não pode ser obtido através do reforço convencional (barras), a resistência à tração para a primeira fissura (*first-crack tensile strength*) e a resistência à tração do concreto são aumentadas com o uso de fibras, como também a resistência ao corte (*shear-friction strength*) (ACI 544.4R-88, 1988).

Na literatura, encontra-se uma série de trabalhos experimentais indicando um considerável aumento na resistência ao corte de concretos reforçados com fibras de aço (Sharma, 1986; Narayanan e Darwish, 1988; El Niema, 1991; Cucchiara *et al.*, 2004 e Cho S. e Kim Y., 2003). Este aumento parece ser mais significativo nas vigas com  $a/d < 3$ , sendo  $a$  o vão de corte, isto é, a distância entre o ponto de aplicação da carga e o apoio mais próximo do ponto de aplicação da carga e  $d$  é a altura útil da seção da viga.

Na Figura 2.22 é possível verificar o aumento da resistência ao corte provocada pela adição de fibras ao concreto. Observa-se que, quanto menor a razão  $a/d$  e maior a porcentagem de fibras, maior é a resistência ao corte desenvolvida na ruptura.

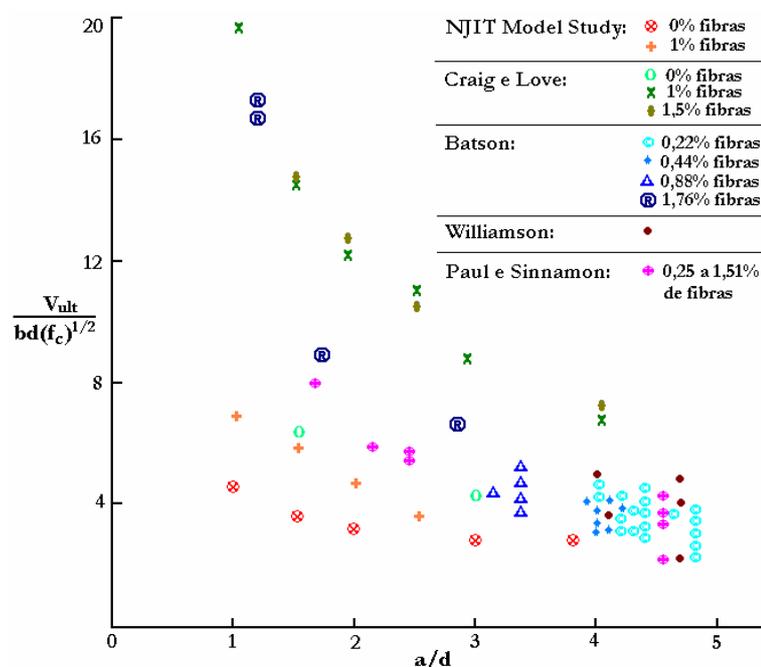


Figura 2.22 – Comportamento ao corte de vigas de concreto reforçado com fibras (adaptado de ACI 544.4R-88, 1988).

Segundo Barros (1996), o aumento da resistência ao corte com a participação de fibras se deve, fundamentalmente, à maior resistência à tração do *CRFA* fissurado. Uomoto *et al.* (1986, *apud* Barros, 1996) concluíram que a resistência residual à tração do *CRF* fissurado é o principal fator que deve ser levado em conta na situação da contribuição das fibras na resistência ao corte de vigas de concreto armado. As fibras aumentam, ainda, a “resistência ao corte” das armaduras longitudinais de tração (efeito de pino/ cavilha) (Swamy, 1981, *apud* Barros, 1996).

A combinação de fibras e estribos pode ser utilizada eficientemente, conforme se evidencia em diversos estudos experimentais. Entretanto, apesar do aumento da capacidade ao corte ter sido verificada em inúmeras pesquisas, este benefício ainda não é empregado em aplicações práticas (ACI 544.4R-88, 1988).

### 2.3.5 O concreto reforçado com fibras sob solicitações dinâmicas

A resistência dinâmica do concreto reforçado com diversos tipos de fibras e sujeito a cargas explosivas, cargas de impacto e esforços dinâmicos de compressão, tração ou de flexão é 3 a 10 vezes maior do que a resistência de concretos sem adição de fibras (ACI 544.4R-88, 1988). A maior quantidade de energia necessária para o arrancamento das fibras da matriz justifica o aumento na resistência dinâmica observada.

O aumento da resistência à fadiga com a participação das fibras é uma das principais razões da aplicação de *CRFA* em pavimentos que são submetidos a elevado número de ciclos de carga como, por exemplo, os pavimentos de edifícios industriais, de estradas e aeroportos. A resistência ao impacto dos materiais de matriz cimentícia, por sua vez, também aumenta com a percentagem de fibras, principalmente se estas forem de aço e com extremidades dobradas (Ramakrishnan, 1981, *apud* Barros, 1996).

A orientação das fibras é importante no aumento da resistência ao impacto. Por este fato, nos corpos-de-prova moldados segundo o método de concreto projetado (“shotcrete”), onde as fibras apresentam-se sob direções preferenciais, têm-se registrado aumentos de resistência ao impacto superiores aos obtidos nos demais corpos-de-prova, moldados de forma convencional e onde as fibras apresentam-se de forma aleatória (Ramakrishnan, 1981, *apud* Barros, 1996).

## 2.4 APLICAÇÕES PRÁTICAS

A utilização de concretos reforçados com fibras, apesar de ainda não estar amplamente difundida no Brasil, já é uma prática corrente em alguns países. Aplicações deste compósito podem ser observadas nas próximas figuras.



Figura 2.24 – Aspecto do concreto reforçado com fibras (adaptado de Stadlober, 2005).

Entre os empregos de *CRFA* estão os pavimentos e capeamentos, como são os casos dos pavimentos rodoviários e malhas urbanas, pavimentos portuários, de pontes, pistas de aeroportos e bases aéreas, pisos sem juntas e capas de compressão;



(a)



(b)

Figura 2.25 – Capa de compressão (a) e radier executado em concreto com fibra (b) (adaptado de Dhondt, 2004).

Destaca-se, ainda, a utilização de *CRFA* em pisos industriais pesados e leves, armazéns de alta densidade, pátios de manobra de caminhões e transportadoras pesadas.



(a)



(b)

Figura 2.26 – Piso de depósito industrial (a) e de depósito de porto (b) executados em concreto reforçado com fibras (adaptado de Stadlober, 2006).

Outros empregos seriam em estruturas hidráulicas, como na recuperação e construção de diques; estruturas marinhas, como em flutuadores para marinas; reparos e reabilitações, como em reparos de viadutos, pontes e outras estruturas; concreto projetado, como nos revestimentos de túneis e estabilização de maciços rochosos.



Figura 2.27a – Túnel executado em concreto com fibras (adaptado de Stadlober, 2005).



Figura 2.27b – Anéis segmentados para revestimentos em túneis (adaptado de Lambrechts, 1999).

Ainda, diversas aplicações em pré-moldados, tais como anéis segmentados de túneis, tubos de concreto, tampas de bueiro, blocos de fundação, painéis e placas.



Tanques para esgotos



Banheiros para celas



Blocos de fundação

Figura 2.28 – Elementos pré-moldados executados com concreto reforçado com fibras (adaptado de Lambrechts, 1999).

Outras aplicações abrangeriam ainda estruturas resistentes à explosão.

## O Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos, eficiente ferramenta numérica para a resolução de problemas da mecânica do contínuo, é utilizado, além de outras áreas, na análise de estruturas. Ele apresenta excelentes resultados, possibilitando, nos dias de hoje, a análise da maior parte dos sistemas físicos dos quais trata a engenharia.

A concepção do Método dos Elementos Finitos se baseia na divisão do domínio de um meio contínuo em um número discreto de subdomínios interligados entre si. A ligação é feita por pontos em seus contornos, de maneira que o conjunto destes subdomínios se comporte de forma semelhante ao meio contínuo original. Mas a sua formulação matemática costuma oferecer certa dificuldade e é descrita a seguir, conforme Soriano (2003).

### 3.1 FORMULAÇÃO BÁSICA

O campo de deslocamentos, para pontos no interior de um elemento finito, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{u\} = [N]\{u\}^e \quad (3.1)$$

onde  $[N]$  é a matriz que relaciona deslocamentos de um ponto qualquer do elemento,  $\{u\}$ , com deslocamentos nodais do elemento,  $\{u\}^e$ , ou, ainda, é a matriz das funções de interpolação,  $N_i$ .

Como as deformações específicas são expressas em termos de derivadas de deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas, a partir da interpolação dos deslocamentos dados pela Eq. 3.1, pode-se escrever:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\}^e = [B]\{u\}^e \quad (3.2)$$

sendo  $[L]$ , a matriz de operadores diferenciais e  $[B]$ , a matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos nodais, conforme explicitado na Eq. 3.2.

$$[B] = [L][N] \quad (3.3)$$

As componentes de deformação específica se relacionam com as componentes de tensão da seguinte forma:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (3.4)$$

onde  $[E]$  é a matriz de elasticidade constitutiva ou de coeficientes elásticos do material.

Considerando a variação do campo de deslocamentos (ou deslocamento virtual infinitesimal), a partir das Eq. 3.1 e 3.2, escrevem-se as variações:

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta u\}^e \quad (3.5)$$

$$\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta u\}^e \quad (3.6)$$

As expressões básicas do Método dos Elementos Finitos são obtidas substituindo-se essas variações e o campo de deslocamentos, expresso pela Eq. 3.1, na expressão da variação do funcional energia potencial total, dada pela Eq. 3.7, a qual equivale ao Princípio dos Deslocamentos Virtuais.

$$\delta\pi = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T (\{\sigma\} + \{\sigma_0\}) dV - \int_V \{\delta u\}^T \{\bar{p}\} dV - \int_{S_1} \{\delta u\}^T \{\bar{q}\} dS = 0 \quad (3.7)$$

com  $\delta\pi$  sendo a variação do funcional da energia potencial total;  $\{\delta \varepsilon\}$  e  $\{\delta u\}$ , a variação da deformação específica e do deslocamento, respectivamente;  $\{\sigma\}$  e  $\{\sigma_0\}$ , a tensão e a tensão inicial;  $\{\bar{p}\}$ , a força de volume, e  $\{\bar{q}\}$ , a força de superfície.

A partir da Eq. 3.7 e algum algebrismo, obtém-se a equação na forma compacta:

$$[S]^e \{u\}^e = \{f\}^e \quad (3.8)$$

onde,

$$\{f\}^e = -\{f\}_p^e - \{f\}_q^e - \{f\}_{\sigma_0}^e \quad (3.9)$$

A Eq. 3.8 representa o sistema de equações (algébricas) de equilíbrio de um elemento genérico.  $[S]^e$  é a matriz de rigidez (simétrica) e  $\{f\}^e$  é o vetor das forças nodais.  $\{u\}^e$  são os deslocamentos nodais e  $\{f\}_p^e$ ,  $\{f\}_q^e$  e  $\{f\}_{\sigma_0}^e$  são as forças nodais equivalentes, respectivamente às forças de volume, às forças de superfície e às tensões iniciais. A matriz de rigidez e os vetores de força podem ser obtidos através das seguintes equações:

$$[S]^e = \int_{V_e} [B]^T [E][B] dV_e \quad (3.10)$$

$$\{f\}_p^e = - \int_{V_e} [N]^T \{\bar{p}\} dV_e \quad (3.11)$$

$$\{f\}_q^e = - \int_{S_e} [N]^T \{\bar{q}\} dS_e \quad (3.12)$$

$$\{f\}_{\sigma_0}^e = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\} dV_e \quad (3.13)$$

Ressalta-se que, neste procedimento, lança-se mão do fato de o princípio dos trabalhos virtuais ser condição suficiente para o equilíbrio e que, arbitrando-se um campo de deslocamentos para o elemento, substitui-se com este princípio as equações diferenciais de equilíbrio e as condições mecânicas de contorno por equações algébricas de equilíbrio do elemento como um todo. No caso geral, escolhendo-se um referencial para cada ponto nodal da malha de elementos finitos, a partir dos sistemas de equações de equilíbrio dos diversos elementos e das forças externas diretamente aplicadas aos pontos nodais, obtém-se o sistema global de equações:

$$[S^*] \{d^*\} = \{f^*\} \quad (3.14)$$

sendo  $[S^*]$  a matriz de rigidez global;  $\{d^*\}$  o vetor de deslocamentos nodais da malha (incluindo os deslocamentos restringidos ou de apoio) e  $\{f^*\}$  o vetor correspondente às forças nodais.

## 3.2 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA O CONCRETO

Para representar o concreto foram utilizados, neste trabalho, elementos finitos tridimensionais isoparamétricos da família *Serendipity*. Elementos isoparamétricos são aqueles que utilizam as funções de interpolação para definir tanto as incógnitas do problema quanto a geometria a partir dos respectivos valores nodais. Elementos que possuem nós apenas no seu contorno fazem parte da família *Serendipity*. Este nome, em inglês, se refere à habilidade de descobertas por acaso e se deve ao fato de as funções de interpolação dessa família terem sido originalmente determinadas por tentativa (Soriano, 2003).

Foram escolhidos os elementos hexaédricos quadráticos de 20 nós. Estes elementos possuem três graus de liberdade por nó, que correspondem às três translações em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema global de coordenadas.

A seguir, são descritas as expressões básicas para o elemento isoparamétrico tridimensional, bem como as suas funções de interpolação.

### 3.2.1 Expressões básicas para elementos isoparamétricos tridimensionais

Para elementos isoparamétricos, a sua geometria é definida pela interpolação de suas coordenadas nodais. Deste modo, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

onde o zero representa a matriz nula;  $[N]$  é a matriz linha formada pelas funções de interpolação,  $N_i$ , nas coordenadas normalizadas  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  para formas regulares do elemento.

$\{x\}^e$ ,  $\{y\}^e$  e  $\{z\}^e$ , são, respectivamente, os conjuntos das coordenadas nodais  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$ .  $m$  é o número de nós do elemento.

Para o elemento isoparamétrico tridimensional,  $[L]$ , a matriz de operadores diferenciais, é dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Como a formulação do elemento se dá através do sistema de coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , ao se fazer a montagem do problema, deve-se utilizar os valores em coordenadas globais. Para isto, utiliza-se a matriz Jacobiana,  $[J]$ :

$$[J] = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i & N_{i,\xi} z_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i & N_{i,\eta} z_i \\ N_{i,\zeta} x_i & N_{i,\zeta} y_i & N_{i,\zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

sendo  $N_{i,\xi}$ ,  $N_{i,\eta}$  e  $N_{i,\zeta}$  as derivadas das funções de interpolação em relação aos eixos de coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , respectivamente. Assim, as derivadas das funções de interpolação em relação aos eixos globais  $x$ ,  $y$  e  $z$  a partir das correspondentes derivadas em relação a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , são dadas por:

$$\begin{bmatrix} [N]_{,x} \\ [N]_{,y} \\ [N]_{,z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} [N]_{,\xi} \\ [N]_{,\eta} \\ [N]_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde  $[N]_{,x}$ ,  $[N]_{,y}$ ,  $[N]_{,z}$  são as derivadas das matrizes linha de funções de interpolação em relação aos eixos globais  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.  $[N]_{,\xi}$ ,  $[N]_{,\eta}$ ,  $[N]_{,\zeta}$  são as derivadas das matrizes linha de funções de interpolação em relação aos eixos de coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , respectivamente; e  $[J]^{-1}$  é a matriz Jacobiana inversa.

Escrevem-se, então, as componentes de deformação em termos dos deslocamentos nodais e de derivadas das funções de interpolação em relação a  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [H] \begin{bmatrix} \tilde{J}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N]_{,\xi} & 0 & 0 \\ [N]_{,\eta} & 0 & 0 \\ [N]_{,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{,\xi} & 0 \\ 0 & [N]_{,\eta} & 0 \\ 0 & [N]_{,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{,\xi} \\ 0 & 0 & [N]_{,\eta} \\ 0 & 0 & [N]_{,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^e \\ \underline{v}^e \\ \underline{w}^e \end{bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \underline{u}^e \\ \underline{v}^e \\ \underline{w}^e \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Portanto, a matriz  $[B]$ , que relaciona as deformações específicas,  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ , com os deslocamentos nodais segundo  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja,  $\{u\}^e$ ,  $\{v\}^e$  e  $\{w\}^e$ , pode ser expressa da seguinte maneira:

$$[B] = [H] \begin{bmatrix} \tilde{J}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N]_{,\xi} & 0 & 0 \\ [N]_{,\eta} & 0 & 0 \\ [N]_{,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{,\xi} & 0 \\ 0 & [N]_{,\eta} & 0 \\ 0 & [N]_{,\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{,\xi} \\ 0 & 0 & [N]_{,\eta} \\ 0 & 0 & [N]_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

com

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Pelo Método dos Elementos Finitos, escreve-se (3.19) através de relação:

$$\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^m [B]\{U\}_i \quad (3.22)$$

sendo  $m$  o número de nós do elemento finito.

### 3.2.2 Funções de Interpolação dos Elementos

Para o elemento hexaédrico de 20 nós, mostrado na Figura 3.1, as funções de interpolação são do tipo quadrática. Isso se deve ao fato do campo de deslocamentos possuir variação quadrática e o campo de tensões e deformações específicas possuírem variação linear ao longo das bordas do elemento.

Sendo  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , as coordenadas naturais do elemento, e a numeração dos nós de acordo com a Figura 3.1, as funções de interpolação são:

a) Nós do canto:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (3.23)$$

b) Nós intermediários:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad i = 9, 11, 13, 15 \quad (3.24)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_i) \quad i = 10, 12, 14, 16 \quad (3.25)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2) \quad i = 17, 18, 19, 20 \quad (3.26)$$

sendo  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  e  $\zeta_i$  as coordenadas adimensionais ou normalizadas dos nós em questão.

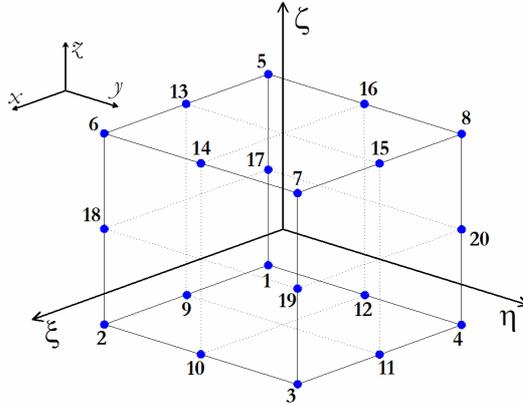


Figura 3.1 – Hexaedro quadrático com 20 nós.

Retomando a Eq. 3.10, através da qual se determina a matriz de rigidez do elemento finito, define-se, na Eq. 3.27, a matriz de elasticidade, constitutiva ou de coeficientes elásticos do material,  $[E]$ , para o estado triplo de tensão e materiais isotropos, necessária para o cálculo da matriz de rigidez.

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & \textit{simétrico} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Na Eq. 3.10, tem-se ainda o volume do elemento diferencial,  $dV_e$ , dado por:

$$dV_e = dx \cdot dy \cdot dz = \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (3.28)$$

onde  $\det J$  é o determinante da matriz Jacobiana,  $[J]$ , dada pela Eq. 3.17.

Para o cálculo das forças internas do elemento, emprega-se a seguinte equação:

$$\{f_{\text{int}}\} = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dV_e \quad (3.29)$$

A integral da equação 3.29, bem como as demais, deve ser calculada numericamente.

### 3.3 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA

A formulação adotada neste trabalho para representar as barras de armadura é do tipo Modelo Incorporado. Neste modelo, uma barra de armadura é considerada como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. Supõe-se que as armaduras resistam apenas a esforços axiais na direção da barra e que há compatibilidade de deslocamentos entre seus pontos e os pontos de concreto localizados na mesma posição. Deste modo, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez de um elemento de concreto, sendo a matriz de rigidez total a soma das duas.

O Modelo Incorporado permite, desta forma, ter dentro de cada elemento de concreto quantos segmentos de armadura se queira e com disposição arbitrária das barras sem a geração de novas incógnitas no problema. Admite-se também aderência perfeita entre o aço e o concreto e os deslocamentos ao longo da barra de armadura são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto correspondentes. Isto acaba favorecendo a modelagem das estruturas por não restringir tamanhos de malha e posição de armadura, por exemplo.

Este modelo foi implementado e testado em diversos trabalhos, tais como em Campos Filho (1987), Machado (2002), Jost (2006), entre outros. A seguir, é explicitada a formulação geométrica utilizada, as funções de interpolação para a armadura e o modelo para encontrar a matriz de rigidez do elemento de barra.

### 3.3.1 Formulação Geométrica

A formulação utilizada para incorporar as barras de armadura ao elemento de concreto, descrita neste item, foi desenvolvida com base na formulação apresentada por Elwi e Hrudey (1989). Uma das vantagens deste método é o de permitir que a localização e a geometria das barras sejam independentes da malha de elementos finitos. As barras de armadura, igualmente aos elementos de concreto, são modeladas por elementos isoparamétricos. Desta forma, as coordenadas de qualquer ponto ao longo de uma barra podem ser obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} x(\chi) \\ y(\chi) \\ z(\chi) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & H_j(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & H_j(\chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

onde  $\{x_j\}$ ,  $\{y_j\}$  e  $\{z_j\}$  são as coordenadas globais do nó  $j$  do elemento de armadura;  $H_j(\chi)$  é a função de interpolação associada a este nó em função da coordenada normalizada; e  $m$  é o número de nós do elemento de armadura.

Os vários termos da rigidez associada com a armadura requerem integrações ao longo da mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento  $ds_n$ , disposto ao longo da armadura, e que pode ser obtido a partir da expressão 3.34, conforme ilustra a Figura 3.2. A orientação da tangente à barra é dada pelos ângulos  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  e  $\gamma_n$  no instante  $t_n$ , onde:

$$\cos \alpha_n = x_{n,s_n} = x_{n,\chi} \chi_{,s_n} \quad (3.31)$$

$$\cos \beta_n = y_{n,s_n} = y_{n,\chi} \chi_{,s_n} \quad (3.32)$$

$$\cos \gamma_n = z_{n,s_n} = z_{n,\chi} \chi_{,s_n} \quad (3.33)$$

sendo que o elemento diferencial de comprimento  $ds_n$  pode ser obtido por:

$$s_{n,\chi} = \sqrt{(x_{n,\chi})^2 + (y_{n,\chi})^2 + (z_{n,\chi})^2} \quad (3.34)$$

e

$$\begin{Bmatrix} x_n \triangleright \chi \\ y_n \triangleright \chi \\ z_n \triangleright \chi \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_{j \triangleright \chi} & 0 & 0 \\ 0 & H_{j \triangleright \chi} & 0 \\ 0 & 0 & H_{j \triangleright \chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

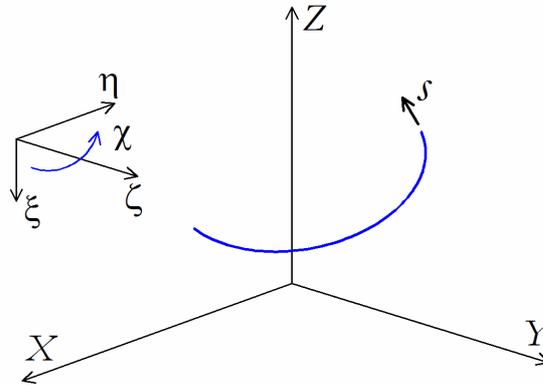


Figura 3.2 – Coordenada ao longo do eixo da armadura.

Um elemento diferencial de volume  $dV_s$  da barra de aço pode ser expresso em termos de  $ds_n$  e da área da seção transversal da barra  $A_s$ , resultando:

$$dV_{s_n} = A_s ds_n \quad (3.36)$$

Usando o fator de mapeamento descrito na Eq. 3.34, integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada normalizada  $\chi$  como:

$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\chi} C \cdot A_s \cdot s_n \triangleright \chi d\chi \quad (3.37)$$

onde  $C$  é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

### 3.3.2 Funções de Interpolação

Neste trabalho, as barras de armadura são modeladas por elementos isoparamétricos unidimensionais. As funções de interpolação para os elementos da armadura são polinômios de Lagrange,  $H(\chi)$ , expressas em função da coordenada normalizada  $\chi$ , e são dadas pela expressão (Zienkiewicz, 1986):

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \dots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_n)}{(\chi_k - \chi_1) \dots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_n)} \quad (3.38)$$

Esta função é um polinômio de grau  $m$  igual a  $n-1$  em  $\chi$ , e tem valor unitário em  $\chi$  igual a  $\chi_k$  e nulo para  $\chi$  igual a  $\chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$ , onde  $n$  é o número de nós do elemento.

Cada barra de armadura é dividida em segmentos dentro de cada elemento de concreto. Cada um destes segmentos de armadura será definido por dois ou três nós que pertencem ao elemento de concreto.

As funções utilizadas podem ser lineares ou quadráticas. Para o hexaedro de 20 nós ou quando for utilizada integração numérica com 15 ou 27 pontos, são usadas funções quadráticas, sendo que os segmentos de armadura no elemento de concreto devem ser definidos por 3 nós. Para um elemento quadrático (com 3 nós), as funções de interpolação são:

$$H_1(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi}{2} \quad (3.39)$$

$$H_2(\chi) = 1 - \chi^2 \quad (3.40)$$

$$H_3(\chi) = \frac{\chi^2 + \chi}{2} \quad (3.41)$$

### 3.3.3 Matriz de Rigidez para a Armadura

As barras de armadura são posicionadas pelas coordenadas globais  $x$ ,  $y$  e  $z$  de seus pontos de extremidade e, no caso de barras curvas, são necessários três pontos. Para a obtenção da matriz de rigidez total de um determinado elemento, precisa-se saber quais barras o interceptam.

O programa computacional utilizado neste trabalho determina de forma automática os segmentos das barras que ficam situados no interior do elemento de concreto. Para tanto é verificado se a curva ou reta que define a armadura intercepta alguma das seis faces ou as arestas do elemento de concreto. Este processo é efetuado em coordenadas naturais.

É possível verificar se a armadura está completa ou parcialmente dentro ou fora do elemento de concreto, definindo assim quais os segmentos que irão contribuir para a formação da matriz de rigidez total (concreto e aço) de determinado elemento.

Em função de serem utilizados elementos unidimensionais para representar as barras de armadura e, considerando que haja aderência perfeita entre o concreto e o aço, pode-se dizer que a deformação ao longo da barra de armadura é igual à deformação normal no elemento de concreto, na direção tangente ao eixo do segmento da armadura. Desta forma, podem-se encontrar as componentes de deformação específica no concreto num ponto em que passa uma barra de aço através da Eq. 3.22. A deformação específica na armadura na direção tangente ao eixo pode ser calculada com base na expressão proposta por Elwi e Hrudey (1989):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s_n} = & \varepsilon_x \cos^2 \alpha_n + \varepsilon_y \cos^2 \beta_n + \varepsilon_z \cos^2 \gamma_n + \gamma_{xy} \cos \alpha_n \cos \beta_n \\ & + \gamma_{yz} \cos \beta_n \cos \gamma_n + \gamma_{xy} \cos \alpha_n \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (3.42)$$

A primeira variação da deformação específica da armadura, para a determinação da contribuição desta para o vetor de forças internas do elemento de concreto, é dada por:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{s_n} = & \delta \varepsilon_x \cos^2 \alpha_n + \delta \varepsilon_y \cos^2 \beta_n + \delta \varepsilon_z \cos^2 \gamma_n + \delta \gamma_{xy} \cos \alpha_n \cos \beta_n \\ & + \delta \gamma_{yz} \cos \beta_n \cos \gamma_n + \delta \gamma_{xy} \cos \alpha_n \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (3.43)$$

Seguindo a formulação utilizada para elementos finitos, a equação é escrita da seguinte forma:

$$\delta \varepsilon_{s_n} = \{B_{s_n}\} \delta U_n \quad (3.44)$$

onde  $\{B_{s_n}\}$  é o vetor linha que relaciona a primeira variação da deformação específica na armadura com a primeira variação dos deslocamentos  $\delta U_n$  dos nós do elemento de concreto.

A vetor  $\{B_{s_n}\}$  é dado como:

$$\{B_{s_n}\}^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_n (x_{n,xx} N_{i,xx}) + \cos^2 \beta_n (x_{n,yy} N_{i,yy}) + \cos^2 \gamma_n (x_{n,\alpha\alpha} N_{i,\alpha\alpha}) \\ + \cos \alpha_n \cos \beta_n (x_{n,xy} N_{i,xx} + x_{n,xy} N_{i,yy}) + \cos \beta_n \cos \gamma_n (x_{n,\alpha\alpha} N_{i,yy} + x_{n,yy} N_{i,\alpha\alpha}) \\ \cos^2 \alpha_n (x_{n,xx} N_{i,xx}) + \cos^2 \beta_n (x_{n,yy} N_{i,yy}) + \cos^2 \gamma_n (x_{n,\alpha\alpha} N_{i,\alpha\alpha}) \\ + \cos \alpha_n \cos \beta_n (x_{n,xy} N_{i,xx} + x_{n,xy} N_{i,yy}) + \cos \beta_n \cos \gamma_n (x_{n,\alpha\alpha} N_{i,yy} + x_{n,yy} N_{i,\alpha\alpha}) \\ \cos^2 \alpha_n (x_{n,xx} N_{i,xx}) + \cos^2 \beta_n (x_{n,yy} N_{i,yy}) + \cos^2 \gamma_n (x_{n,\alpha\alpha} N_{i,\alpha\alpha}) \\ + \cos \alpha_n \cos \beta_n (x_{n,xy} N_{i,xx} + x_{n,xy} N_{i,yy}) + \cos \beta_n \cos \gamma_n (x_{n,\alpha\alpha} N_{i,yy} + x_{n,yy} N_{i,\alpha\alpha}) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais (Eq. 3.7), pode-se determinar que a contribuição da armadura é dada por:

$$\delta W_{s_n} = \int_{V_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{s_n}^T \boldsymbol{\sigma}_{s_n} dV_{s_n} \quad (3.46)$$

onde  $V_{s_n}$  é o volume da armadura e  $\boldsymbol{\sigma}_{s_n}$  é a tensão normal na armadura, calculada por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{s_n} = E_s \boldsymbol{\varepsilon}_{s_n} \quad (3.47)$$

sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade longitudinal do aço.

Substituindo-se (3.36), (3.44) e (3.47) em (3.46), pode-se determinar que a matriz de rigidez para a armadura é dada por:

$$[S_{s_n}] = \int_{\chi} [B_{s_n}]^T E_s [B_{s_n}] A_s \frac{ds_n}{d\chi} d\chi \quad (3.48)$$

com  $A_s$  a área de aço e  $\frac{ds_n}{d\chi}$  é calculado pela Eq. 3.34.

O vetor de forças internas para a armadura pode ser obtido também a partir da Eq. 3.46, ficando definida como:

$$\{f_{s_{int}}\} = \int_{\chi} \{B_{s_n}\}^T \boldsymbol{\sigma}_{s_n} A_s \frac{ds_n}{d\chi} d\chi \quad (3.49)$$

Tanto a matriz de rigidez como o vetor de forças internas da armadura são somados à matriz de rigidez e ao vetor de forças internas do concreto para a consideração do concreto armado.

### 3.4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Quando se define a geometria do elemento através das coordenadas nodais, na grande maioria dos casos, as integrações necessárias ao cálculo da matriz de rigidez e dos vetores de forças nodais equivalentes são muito elaboradas e impraticáveis de serem levadas a efeito analiticamente. Utiliza-se, então, como proposto por Irons em 1966, a integração numérica (Soriano, 2003). Diversos são os métodos desenvolvidos visando maior eficiência de cálculo. Neste trabalho, as integrais envolvidas na formulação são obtidas através de resolução numérica com integração reduzida, sendo 15 o número de pontos de integração. Entretanto, o programa empregado efetua também a integração completa de Gauss-Legendre.

A integração reduzida foi proposta originalmente por Doherty *et al.* (1969), e foi utilizada extensivamente a partir do trabalho de Zienkiewicz *et al.* (1971) (Soriano, 2003). A vantagem desta integração em relação à completa se dá no fato de que, em muitos casos, é necessário um grande número de pontos de integração para a integração do volume do elemento, como é o caso do elemento hexaédrico de 20 nós. Neste caso, a integração reduzida diminui substancialmente o tempo computacional.

Na integração completa, integrais envolvendo regiões prismáticas são definidas por:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i w_j w_k w_l f(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) \quad (3.50)$$

com  $i$  sendo o número do ponto de integração,  $\xi_j, \eta_k, \zeta_l$ , as coordenadas dos pontos  $i$ ,  $w_j, w_k, w_l$ , os pesos associados ao ponto  $i$ .

Para o elemento quadrático, que utiliza um polinômio de segundo grau, é necessário a utilização de 27 pontos de integração, sendo empregada a regra de 3x3x3 pontos de Gauss. Os pontos de integração são localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo de integração, sendo que os pares simétricos têm o mesmo peso, conforme apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Coeficientes para a integração completa.

Regra	$\xi_j, \eta_k, \zeta_l$	$w_j, w_k, w_l$
3x3x3	0	0,88888
	$\pm 0,77459$	0,55555

A distribuição dos 27 pontos de integração sobre o elemento de 20 nós, para o caso de integração completa, pode ser vista na Figura 3.3.

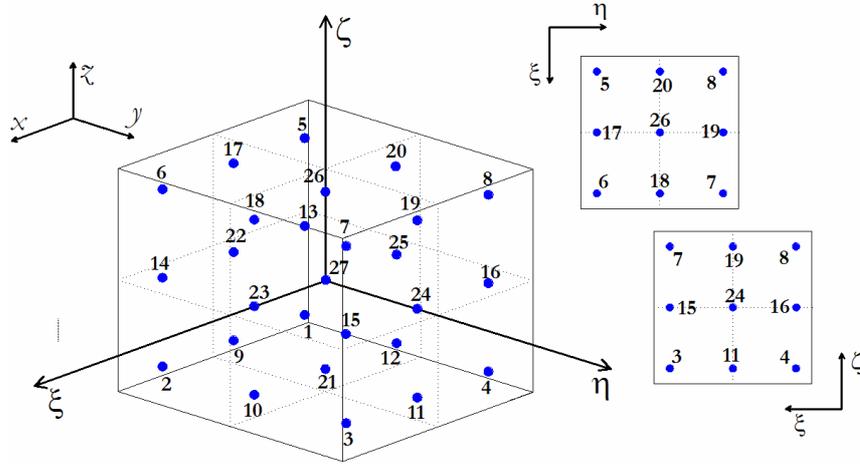


Figura 3.3 – Elemento finito com 27 pontos de integração (integração completa).

Na integração reduzida com 15 pontos de integração, a regra pode ser expressa por:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = A \cdot f(0, 0, 0) + B [f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + f(0, -b, 0) + \dots] + C [f(-c, -c, -c) + f(c, -c, -c) + \dots] \quad (3.51)$$

Os coeficientes da Eq. 3.51 são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Coeficientes para a integração reduzida.

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>b</b>	<b>c</b>
1,564444	0,355556	0,537778	1,000000	0,674100

A distribuição dos 15 pontos de integração sobre o elemento de 20 nós, para o caso de integração reduzida, pode ser vista na Figura 3.4.

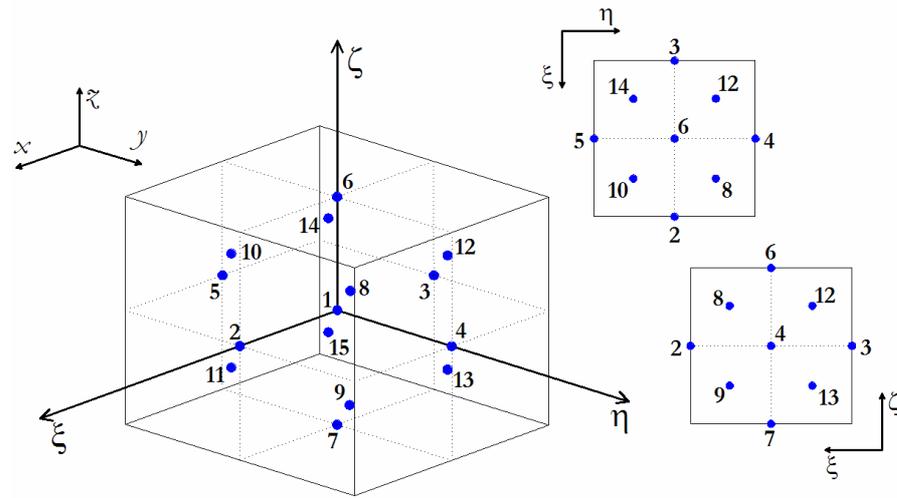


Figura 3.4 – Elemento finito com 15 pontos de integração (integração reduzida).

## Modelo para um Material Elasto-Viscoplástico

Para a análise computacional de materiais complexos, como é o caso do concreto armado, é necessário adotar modelos reológicos capazes de representar com fidelidade o seu comportamento. Existem três modelos reológicos básicos que, quando conjugados, são capazes de representar o comportamento complexo de materiais reais: o modelo elástico, o plástico e o viscoso.

O modelo mostrado na Figura 4.1 representa o comportamento de um material elasto-viscoplástico. A resposta elástica instantânea é proporcionada pela mola linear. Tendo em vista que o amortecedor não sofre deformação instantânea, o elemento de atrito também apresentará deformação nula, pois ambos estão conectados em paralelo. O elemento de atrito torna-se ativo somente se a tensão corrente,  $\sigma$ , for maior do que a tensão de plastificação,  $\sigma_0$ . O excesso de tensão,  $(\sigma - \sigma_0)$ , é absorvido pelo amortecedor, caracterizando desta maneira, o comportamento elasto-viscoplástico do material.

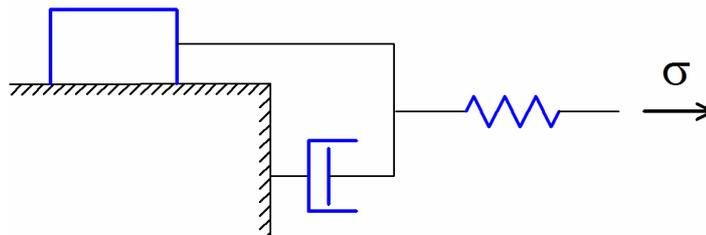


Figura 4.1 – Modelo Elasto-Viscoplástico.

Através deste modelo pode-se encontrar soluções para problemas elastoplásticos ou viscoelásticos. Considerando-se que o tempo tende ao infinito, determina-se a resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico submetida a um carregamento instantâneo. Tomando-se como nula a tensão de plastificação, pode-se ter a solução para problemas viscoelásticos, em que se determina a resposta da estrutura decorrido um período de tempo após a aplicação do carregamento.

O modelo computacional utilizado teve como base o programa desenvolvido por Hinton (1988) para a análise dinâmica de estruturas tridimensionais de concreto armado com não-linearidade física. Este modelo foi modificado por Jost (2006) para a análise estática de peças de concreto protendido. No presente trabalho foram introduzidas alterações nesta última versão do modelo para estender sua aplicabilidade para a análise do comportamento de estruturas de concreto reforçadas com fibras metálicas. Estas implementações foram realizadas com base em modelos disponíveis na literatura e que se encontram detalhados no Capítulo 5. Nos tópicos que seguem é apresentada a formulação matemática, utilizada em um modelo de elementos finitos, para a consideração de um material elasto-viscoplástico, conforme o modelo da Figura 4.1.

## 4.1 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO

Neste item é apresentada a formulação matemática utilizada por Owen e Hinton (1980) para a análise de estruturas de concreto via MEF. Considera-se um material isotrópico e homogêneo.

### 4.1.1 Expressões Básicas

De um modo geral, na formulação usual para problemas contínuos não-lineares, admite-se que as componentes de deformação específica total, em um dado ponto, são compostas de uma parcela elástica  $\{\varepsilon_e\}$ , e outra viscoplástica  $\{\varepsilon_{vp}\}$ . Sendo a taxa de deformação específica total expressa por:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_e\} + \{\dot{\varepsilon}_{vp}\} \quad (4.1)$$

onde (  $\dot{\quad}$  ) representa a diferenciação em relação ao tempo.

As tensões são produzidas unicamente pelas deformações específicas elásticas e são expressas por:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon_e\} \quad (4.2)$$

onde  $[E]$  é a matriz de elasticidade constitutiva ou de coeficientes elásticos do material.

No espaço de tensões tem-se uma superfície de plastificação representada genericamente pela equação:

$$F(\{\sigma\}, \{\varepsilon_{ip}\}) - F_0(\kappa) = 0 \quad (4.3)$$

onde  $F_0$  é um valor que define a posição de superfície de plastificação, sendo uma função do parâmetro de endurecimento  $\kappa$ . O aparecimento do comportamento viscoplástico se dá somente quando  $F > F_0$ .

Para estabelecer uma lei específica para a determinação das deformações viscoplásticas utiliza-se a formulação sugerida por Owen e Hinton (1980), onde estas deformações são obtidas a partir do estado de tensões:

$$\{\dot{\varepsilon}_{ip}\} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0 \quad (4.4)$$

$$\text{e } \{\dot{\varepsilon}_{ip}\} = \{0\}, \text{ para } F \leq F_0$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de fluidez,  $Q = Q(\{\sigma\}, \{\varepsilon_{ip}\}, \kappa)$  é a função potencial plástico. O termo  $\langle \Phi(F) \rangle$  é uma função crescente para  $F > 0$  e a notação  $\langle \rangle$  implica que:

$$\langle \Phi(F) \rangle = \Phi(F) = F - F_0, \text{ para } F > 0 \quad (4.5)$$

$$\text{e } \langle \Phi(F) \rangle = 0, \text{ para } F \leq 0$$

Limitando-se ao caso de plasticidade associada, onde  $F \equiv Q$ , a equação fica definida como:

$$\{\dot{\varepsilon}_{ip}\} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0 \quad (4.6)$$

$$\text{e } \{\dot{\varepsilon}_{ip}\} = \{0\}, \text{ para } F \leq F_0$$

onde  $\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}$  é o vetor de fluxo plástico.

### 4.1.2 Tensão Total

Problemas de não-linearidade física geralmente utilizam a forma incremental para a solução das equações de equilíbrio. Para tanto, é necessário a obtenção do incremento de tensão total, correspondente a um determinado intervalo de tempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ . O incremento de tensão total é obtido através da expressão:

$$\{\Delta \sigma_n\} = [E]\{\Delta \epsilon_{e_n}\} = [E]\left[\{\Delta \epsilon_{TOT_n}\} - \{\Delta \epsilon_{vp_n}\}\right] \quad (4.7)$$

onde  $\{\Delta \epsilon_{e_n}\}$  é o incremento de deformação específica elástica, que é a diferença entre o incremento de deformação específica total,  $\{\Delta \epsilon_{TOT_n}\}$ , e o incremento de deformação específica viscoplástica,  $\{\Delta \epsilon_{vp_n}\}$ , no instante  $t_n$ . O incremento de deformação específica total é calculado utilizando a forma incremental da Eq. 3.2, obtendo-se:

$$\{\Delta \epsilon_{TOT_n}\} = [B]\{\Delta u_n\} \quad (4.8)$$

onde  $[B]$  é a matriz que relaciona deformações específicas e deslocamentos, definida no Capítulo 3, e  $\{\Delta u_n\}$  é o vetor de incrementos de deslocamentos em relação aos eixos globais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Utilizando o esquema explícito de integração no tempo, através de passos de tempos discretos  $\Delta t_n$ , pode-se encontrar o valor do incremento de deformações específicas viscoplásticas através da expressão:

$$\{\Delta \epsilon_{vp_n}\} = \{\dot{\epsilon}_{vp_n}\} \Delta t_n \quad (4.9)$$

sendo  $\{\dot{\epsilon}_{vp_n}\}$  a taxa de deformação específica viscoplástica no instante  $t_n$ , definido pela Eq. 4.6.

A tensão total é calculada por:

$$\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_n\} + \{\Delta \sigma_n\} \quad (4.10)$$

## 4.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO

Utilizando a mesma metodologia empregada para o concreto e detalhada no item anterior, descreve-se, a seguir, o comportamento elasto-viscoplástico do aço, sendo apresentados os modelos utilizados para as armaduras.

### 4.2.1 Taxa de Deformação Específica Viscoplástica

A taxa de deformação específica viscoplástica para a armadura pode ser calculada como:

$$\dot{\varepsilon}_{s\eta_n} = \gamma_s \left[ \sigma_s - (\sigma_y + H_s \varepsilon_{s\eta_{n-1}}) \right], \quad \text{para } \sigma_s > \sigma_y \quad \text{e} \quad (4.11)$$

$$\dot{\varepsilon}_{s\eta_n} = 0, \quad \text{para } \sigma_s \leq \sigma_y$$

sendo  $\sigma_s$  a tensão axial em um ponto da barra de aço;  $\sigma_y$  é a tensão de plastificação inicial;  $H_s$  é o parâmetro de endurecimento dado pela Eq. 5.29, tomado igual a zero quando se utiliza barras com comportamento elastoplástico perfeito;  $\varepsilon_{s\eta_{n-1}}$  é a deformação específica viscoplástica total no instante anterior, dado pela Eq. 4.15; e  $\gamma_s$  o coeficiente de fluidez. Na fase elastoplástica, o valor de  $\gamma_s$  é tomado como  $10^{-5}$ .

### 4.2.2 Tensão para a armadura

O incremento de tensão total é obtido, para um passo de tempo  $t_n$ , através da expressão:

$$\Delta\sigma_{s_n} = E_s \Delta\varepsilon_{s\varepsilon_n} = E_s \left[ \Delta\varepsilon_{s_n} - \Delta\varepsilon_{s\eta_n} \right] \quad (4.12)$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;  $\Delta\varepsilon_{s\varepsilon_n}$  é o incremento de deformação específica elástica do aço, que é a diferença entre o incremento de deformação específica total,  $\Delta\varepsilon_{s_n}$ , e o incremento de deformação específica viscoplástica do aço,  $\Delta\varepsilon_{s\eta_n}$ . O valor do incremento de deformação específica total é obtido, através dos deslocamentos nodais do elemento de concreto, como:

$$\Delta \varepsilon_{s_n} = \{B_s\} \Delta u_n \quad (4.13)$$

onde  $\{B_s\}$  é o vetor das relações deslocamentos-deformações da barra de armadura definido pela Eq. 3.45.

Da mesma forma que para o concreto, o incremento de deformação específica viscoplástica para o aço é definido utilizando-se a integração explícita no tempo:

$$\Delta \varepsilon_{s_{vp_n}} = \dot{\varepsilon}_{s_{vp_n}} \Delta t_n \quad (4.14)$$

Com este valor, pode-se determinar a deformação específica viscoplástica total:

$$\varepsilon_{s_{vp_n}} = \sum_{i=1}^n \Delta \varepsilon_{s_{vp_i}} \quad (4.15)$$

A tensão total, que a barra de armadura está submetida, é obtida através de:

$$\sigma_{s_{n+1}} = \sigma_{s_n} + \Delta \sigma_{s_n} \quad (4.16)$$

### 4.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Em uma análise estrutural, o problema consiste na definição da configuração de equilíbrio de uma estrutura frente a um determinado estado de carregamentos ou deslocamentos impostos. Quando a estrutura apresenta um comportamento não-linear, o problema de análise estrutural pode ser representado pela Eq. 4.17, onde a configuração de equilíbrio é alcançada para um carregamento quando as cargas nodais externas aplicadas,  $\{f_{n+1}\}$ , e  $\{f_{int_{n+1}}\}$ , as forças internas ou resistentes do concreto, Eq. 3.29, e do aço, Eq. 3.49, forem equivalentes, ou seja:

$$\{f_{n+1}\} - \{f_{int_{n+1}}\} = 0 \quad (4.17)$$

sendo

$$\{f_{int_{n+1}}\} = \int_V [B]^T \{\sigma_{n+1}\} dV + \int_s [B_s] \{\sigma_{s_{n+1}}\} A_s ds \quad (4.18)$$

Análises incrementais por controle de deslocamento ou de carga constituem-se em abordagens eficientes para a solução dos problemas não-lineares. No método de incremento de carga, esta é dividida em pequenos incrementos que, aplicados à estrutura, resultam em incrementos de deslocamentos. No método de deslocamentos prescritos, incrementos de deslocamento são aplicados aos nós e direções desejadas. Neste caso, os demais nós sofrerão incrementos de deslocamentos em função daqueles prescritos. Estratégias por incrementos de carga demandam menores esforços computacionais, enquanto as análises por controle de deslocamentos podem determinar a resposta pós-pico. A solução da equação depende, também, de um critério de convergência compatível com a precisão da análise.

A convergência, para a obtenção do estado estacionário é atingida ao se examinar os deslocamentos nodais. Quando esta quantidade se torna relativamente pequena, a convergência é obtida. O critério adotado é definido por:

$$\frac{\|\{\Delta u_n\}\|}{\|\{u_n\}\|} < 10^{-4} \quad (4.19)$$

onde  $\|\{\Delta u_n\}\|$  é a norma do vetor de incremento de deslocamentos e  $\|\{u_n\}\|$  é a norma do vetor de deslocamentos totais.

#### 4.3.1 Análise por incrementos de carga

Utilizando-se o *Método de Newton-Raphson* para o incremento de carga, a equação de equilíbrio 4.17 assume a forma da expressão 4.20. A cada iteração, determinam-se os incrementos de deslocamentos,  $\{\Delta u_n\}$ , pela Eq. 4.20 e, ao final da etapa, obtém-se os deslocamentos acumulados utilizando-se a Eq. 4.21.

$$\{\Delta u_n\} = [S_n]^{-1} \{\Delta f_n\} \quad (4.20)$$

onde  $[S_n]$  é a matriz de rigidez global e  $\{\Delta f_n\}$  é a variação das cargas no intervalo de tempo  $t_n$ .

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} \quad (4.21)$$

O cálculo do incremento de deslocamentos está baseado em uma forma linearizada da equação de equilíbrio. Desta forma, é necessária uma correção sobre os valores de  $\{\Delta u_n\}$ , de modo a alcançar um estado estacionário para o equilíbrio. O procedimento adotado foi o de calcular o vetor de forças não-equilibradas  $\{\psi_{n+1}\}$ , (vetor definido pela diferença entre a carga externa aplicada e as forças internas) e reaplicá-lo na próxima iteração.

$$\{\psi_{n+1}\} = \{f_{n+1}\} - \{f_{int_{n+1}}\} \quad (4.22)$$

A Figura 4.2 mostra o procedimento de aplicação do *Método de Newton-Raphson com Rigidez Inicial* em uma etapa incremental.

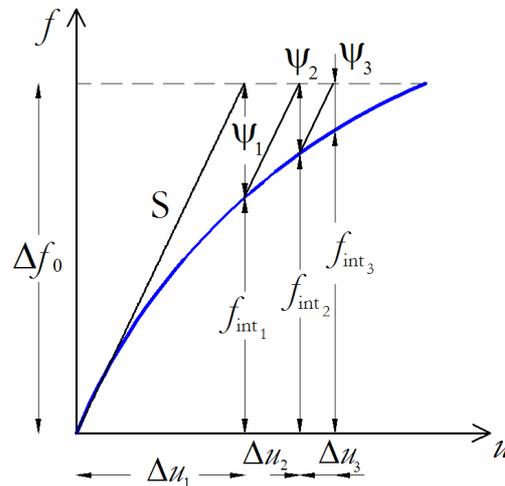


Figura 4.2 – *Método de Newton-Raphson com Rigidez Inicial*

A solução de um problema não-linear, utilizando o *Método de Newton-Raphson com Rigidez Inicial*, pode ser obtida através do seguinte procedimento:

- (a) na primeira iteração, o incremento de carga  $\{\Delta f_n\}$  é aplicado à estrutura. Nas iterações seguintes aplicam-se as forças não-equilibradas  $\{\psi_{n+1}\}$ . Em todas as iterações e etapas de carga, considerando-se a matriz de rigidez tangente inicial, obtém-se os deslocamentos  $\{\Delta u\}$  e as demais respostas incrementais da estrutura;
- (b) somam-se nos vetores de força e deslocamentos, os incrementos obtidos na iteração;
- (c) determinam-se as forças internas ou resistentes  $\{f_{int_{n+1}}\}$ ;

- (d) calculam-se as forças não-equilibradas  $\{\psi_{n+1}\}$ ;
- (e) verifica-se o critério de convergência da Eq. 4.19;
- (f) caso se tenha obtido a convergência, encerra-se a etapa incremental; em caso contrário, realiza-se uma nova iteração, retornando-se ao item (a).

### 4.3.2 Análise por incrementos de deslocamento

O programa possibilita, além da utilização de incrementos de carga, incrementos de deslocamento, que é uma abordagem também conhecida como deslocamentos prescritos. Nesta abordagem, a Eq. 4.20 também é utilizada para cada incremento, entretanto a matriz  $[S_n]$  e o vetor  $\{\Delta f_n\}$  sofrem alterações para a consideração dos deslocamentos nos nós e direções desejados.

A matriz de rigidez global,  $[S_n]$ , e o vetor de incrementos de cargas,  $\{\Delta f_n\}$ , que inicialmente são representados pela expressão 4.23, após a aplicação dos deslocamentos prescritos, são calculados através da Eq. 4.24. Este é um artifício utilizado para se introduzir um deslocamento desejado na direção  $i$ , e que consiste em se fazer o elemento da diagonal principal da matriz  $[S_n]$ , na linha  $i$ , igual a 1, anulando-se as posições restantes pertencentes a esta linha e coluna. Além disso, deve ser colocado o valor do deslocamento conhecido,  $\Delta u'_{n_i}$ , na posição anteriormente ocupada por  $\Delta f_{n_i}$ , bem como passar para o vetor  $\{\Delta f_n\}$  os coeficientes  $S_{n_{ji}} u_{n_i}$  com o sinal trocado. Esta formulação também é utilizada para a aplicação das restrições nodais. Neste caso os deslocamentos conhecidos,  $\Delta u'_{n_i}$ , nos nós e direções desejadas são nulos.

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta f_{n_1} \\ \Delta f_{n_2} \\ \vdots \\ \Delta f_{n_i} \\ \vdots \\ \Delta f_{n_m} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} S_{n_{11}} & S_{n_{12}} & \dots & S_{n_{1i}} & \dots & S_{n_{1m}} \\ S_{n_{21}} & S_{n_{22}} & \dots & S_{n_{2i}} & \dots & S_{n_{2m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{n_{i1}} & S_{n_{i2}} & \dots & S_{n_{ii}} & \dots & S_{n_{im}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{n_{m1}} & S_{n_{m2}} & \dots & S_{n_{mi}} & \dots & S_{n_{mm}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta u_{n_1} \\ \Delta u_{n_2} \\ \vdots \\ \Delta u_{n_i} \\ \vdots \\ \Delta u_{n_m} \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta f_{n_1} - S_{n_{1i}} \Delta u'_{n_i} \\ \Delta f_{n_2} - S_{n_{2i}} \Delta u'_{n_i} \\ \vdots \\ \Delta u'_{n_i} \\ \vdots \\ \Delta f_{n_m} - S_{n_{mi}} \Delta u'_{n_i} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} S_{n_{11}} & S_{n_{12}} & \dots & 0 & \dots & S_{n_{1m}} \\ S_{n_{21}} & S_{n_{22}} & \dots & 0 & \dots & S_{n_{2m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{n_{m1}} & S_{n_{m2}} & \dots & 0 & \dots & S_{n_{mm}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta u_{n_1} \\ \Delta u_{n_2} \\ \vdots \\ \Delta u_{n_i} \\ \vdots \\ \Delta u_{n_m} \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

A análise por incremento de deslocamentos é semelhante à de incremento de carga.

#### 4.4 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO COMPUTACIONAL

O programa computacional implementado neste trabalho tem sua estrutura principal apresentada através do fluxograma da Figura 4.3.

O programa está organizado de forma a executar a análise em duas etapas seqüenciais. Na primeira etapa, calcula-se a resposta da estrutura transcorrido um certo período de tempo da última aplicação de cargas ou deslocamentos. Há um processo de incremento no tempo real, onde são considerados os efeitos da variação do tempo sobre a estrutura. Nesta primeira etapa, considera-se que os materiais apresentam um comportamento viscoelástico (a tensão de plastificação é considerada nula no modelo reológico básico).

Na segunda etapa, busca-se encontrar a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo. Isto é feito mediante a aplicação do seguinte artifício: determina-se o estado de deformação da estrutura, suposta com comportamento elasto-viscoplástico, quando o tempo (fictício) tende ao infinito. Quando o tempo cresce indefinidamente, e havendo endurecimento, a diferença de tensão,  $(\sigma - \sigma_0)$ , que seria absorvida pelo amortecedor, vai diminuindo, ou seja, a influência do mesmo vai desaparecendo, ficando o elemento de atrito cada vez mais rígido. Como a parcela de tensão absorvida pelo amortecedor é proporcional à velocidade de deformação viscosa, esta última também começa a diminuir e, conseqüentemente, a deformação total vai adquirindo um comportamento assintótico. Este estado corresponde à resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico, submetida a um carregamento instantâneo.

O programa permite a aplicação de diversos carregamentos, em datas distintas, entre os quais ocorrem os efeitos decorrentes do tempo. Deste modo, as etapas um e dois são executadas de

---

forma sucessiva, à medida que são aplicadas as cargas nas datas especificadas pelo usuário. No presente trabalho apenas a segunda etapa foi utilizada, uma vez que os ensaios experimentais analisados apenas contemplavam a situação de carregamentos instantâneos em estruturas de concreto reforçado com fibras metálicas.

Para a realização da análise de estruturas através do programa faz-se necessária, primeiramente, a introdução de dados de entrada, a qual é realizada através de Linguagem Orientada, processo em que os dados são lidos através de palavras e de valores numéricos e se transformam em comandos a serem interpretados pelo programa computacional. No Anexo B está detalhado o modelo de arquivo de entrada de dados. Através dele são fornecidos dados da geometria e topologia da estrutura, da malha de elementos finitos adotada, do tipo de carregamento ou deslocamento prescrito e condições de contorno, das propriedades dos materiais e das condições ambientais.

Na seqüência, o processamento dos dados é efetuado. Cada vez que é atingida a convergência para determinado incremento de carga ou de deslocamento são registrados os resultados para posterior análise. Visando uma melhor compreensão e interpretação dos resultados, utilizou-se a ferramenta computacional de pós-processamento *GID*<sup>®</sup> (versão 7.2) para a visualização gráfica dos mesmos. No Anexo C estão detalhados os modelos de arquivos que contém os dados resultantes da simulação numérica e são utilizados no pós-processamento com o *GID*<sup>®</sup>.

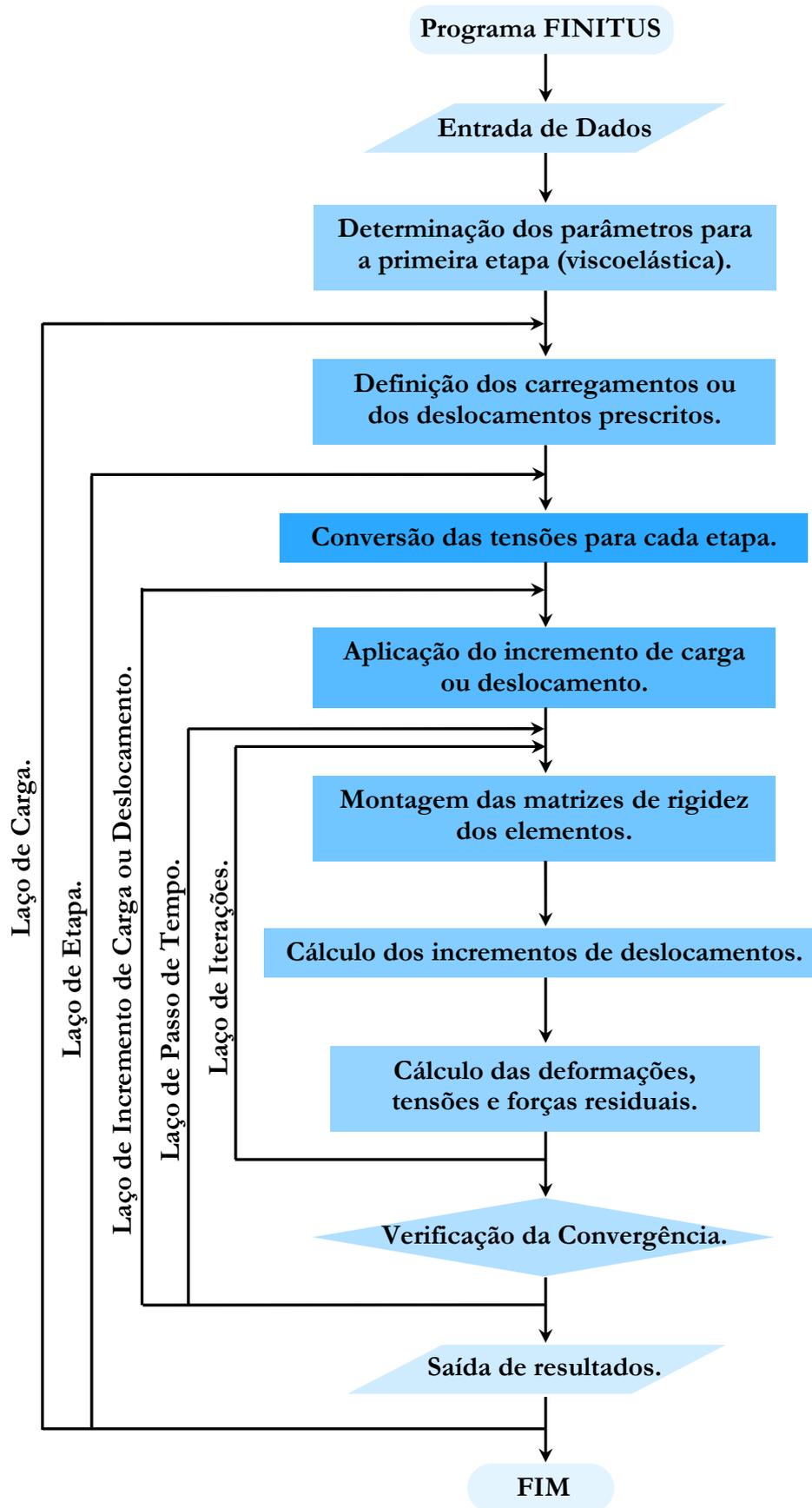


Figura 4.3 – Fluxograma do Programa.

## Modelos Constitutivos para o Aço e para o Concreto com Fibras

Para a análise de uma estrutura, é essencial o conhecimento das equações constitutivas dos materiais que a compõe. As relações constitutivas são expressões que relacionam as tensões, as deformações e o tempo. O concreto armado é um material composto e seus componentes, o concreto e o aço, podem ter seus comportamentos descritos por equações constitutivas. Estas equações constitutivas são o objeto do presente capítulo.

O concreto simples pode ser idealizado como um sistema de duas fases: uma matriz (a pasta de cimento endurecido) envolvendo um conjunto de partículas de agregado. A presença de microfissuras, especialmente na interface da pasta de cimento e dos agregados, é fundamental para o seu comportamento mecânico. A propagação destas microfissuras, durante o carregamento, produz o comportamento não-linear do concreto.

Tanto para o concreto tracionado, como para o comprimido, as curvas tensão-deformação apresentam formas semelhantes. Para os dois casos, o aparecimento das microfissuras é fundamental (Chen, 1982).

Quanto ao aço, devido à forma de utilização do mesmo nas peças de concreto armado, é suficiente conhecer o seu comportamento uniaxial. Basicamente, o diagrama tensão-deformação dos aços de construção, laminados a quente, consta de um primeiro trecho retilíneo, onde se comporta como um material perfeitamente elástico, seguindo um patamar de escoamento e, após, a ocorrência de grandes deformações até atingirem a ruptura. As curvas tensão-deformação dos aços são praticamente iguais na tração e na compressão.

A plastificação do concreto e do aço comprimido, a fissuração do concreto tracionado e os efeitos dependes do tempo, como fluência e retração do concreto, aliados ao comportamento dos materiais constituintes, fazem com que a resposta do concreto armado seja altamente não-linear. Além disso, o deslizamento das barras de aço na matriz do concreto, o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço no concreto fissurado são também importantes fatores contribuintes para este comportamento não-linear.

## 5.1 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

A principal característica do comportamento do concreto é a sua baixa resistência à tração quando comparada a sua resistência à compressão. Em função disso, utilizam-se dois modelos distintos para descrever tal comportamento. Para o concreto comprimido, é empregado um modelo elastoplástico com endurecimento, enquanto que, para o concreto sob tração, adota-se um comportamento elástico-linear até a ruptura. Após a ruptura, admite-se a colaboração do concreto entre fissuras devido às forças de aderência entre o concreto e o aço, possibilitando uma análise mais realista da estrutura.

A seguir, descrevem-se os modelos constitutivos empregados na representação do concreto, e, também, as alterações nestes modelos para a consideração da presença das fibras.

### 5.1.1 Modelo para o Concreto Íntegro

Para o concreto íntegro, foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento, composto de um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

Admite-se, para o concreto não-fissurado, um comportamento isotrópico. A configuração geral da superfície de ruptura, baseada em observações experimentais do material, pode ser expressa das seguintes formas:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad f(\xi, \rho, \theta) = 0 \quad f(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta) = 0 \quad (5.1)$$

No primeiro caso, a superfície de ruptura é expressa em função dos invariantes  $I_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ . No segundo, é representada, também, no espaço de tensões *Haigh-Westergaard* como função das coordenadas  $\xi$ ,  $\rho$  e  $\theta$  e, no terceiro, como função das tensões normal e de corte octaédricas  $(\sigma_{oct}, \tau_{oct})$ , onde, considerando-se as tensões principais  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ , têm-se:

$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$  – primeiro invariante do tensor de tensões;

$J_2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_m)^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_m)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_m)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$  – segundo invariante do tensor de tensões desviadoras;

$$J_3 = (\sigma_{xx} - \sigma_m) \left[ (\sigma_{yy} - \sigma_m)(\sigma_{zz} - \sigma_m) - \tau_{xz}^2 \right] + \tau_{xy} \left[ \tau_{yz}(\sigma_{zz} - \sigma_m) - \tau_{yx}\tau_{xz} \right] - \text{terceiro invariante} \\ + \tau_{xz} \left[ \tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_{yy} - \sigma_m)\tau_{xz} \right]$$

do tensor de tensões desviadoras,

com a tensão normal média sendo  $\sigma_m = \frac{I_1}{3}$  e  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  as tensões totais.

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}}; \quad \rho = \sqrt{2J_2}; \quad \cos \theta = \left[ \frac{3(\sigma_1 - \sigma_m)}{\sqrt{6}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3\sigma_m^2}} \right]; \quad (5.2)$$

$\sigma_{oct} = \sigma_m$   $\tau_{oct} = \frac{\rho}{\sqrt{3}}$  – tensões normal e de corte octaédricas, respectivamente.

A superfície de ruptura representada no espaço tridimensional de tensões *Haigh-Westergaard* pode ser observada na Figura 5.1.

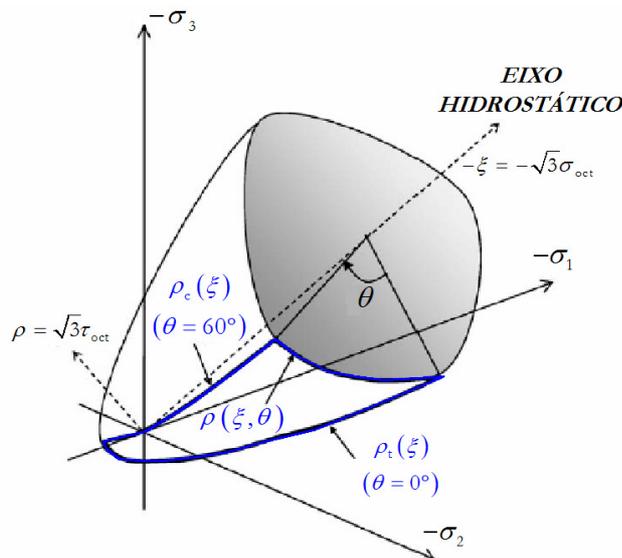


Figura 5.1 – Superfície de ruptura no espaço de tensões *Haigh-Westergaard*.

Ela pode ser melhor visualizada através de suas seções transversais e seus meridianos, conforme a Figura 5.2. As seções transversais são curvas de interseção entre a superfície de ruptura e um plano desviador, que é perpendicular ao eixo hidrostático, considerando  $\xi$  constante. Os meridianos da superfície de ruptura são curvas de interseção entre esta superfície e um plano meridiano, que contém o eixo hidrostático, considerando  $\theta$  constante (Chen e Han, 1988).

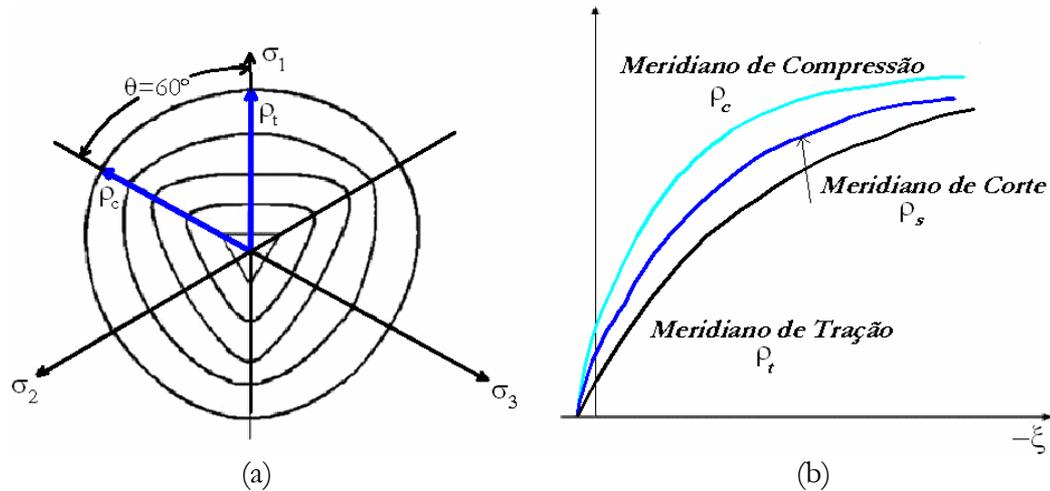


Figura 5.2 – Representação da superfície de ruptura através dos seus planos desviadores (a) e dos seus meridianos (b) (adaptado de Chen e Han, 1988).

As seções transversais das superfícies de ruptura apresentam setores de simetria. Portanto, é necessário analisar apenas o setor de  $\theta = 0^\circ$  a  $\theta = 60^\circ$ . Estas seções transversais são dependentes do ângulo  $\theta$ , definido como ângulo de orientação do estado de tensão no plano desviador. Este ângulo pode ser obtido a partir das tensões principais, conforme a Eq. 5.2.

O meridiano correspondente à  $\theta = 60^\circ$  é chamado de *meridiano de compressão*, e o meridiano determinado por  $\theta = 0^\circ$  é chamado de *meridiano de tração*. Além disso, o meridiano determinado por  $\theta = 30^\circ$  é chamado de *meridiano de corte*. Como observado na Figura 5.2, estes três meridianos satisfazem a relação  $\rho_t < \rho_s < \rho_c$ .

#### 5.1.1.1 Critério de Ruptura

Diversos critérios de ruptura, ao longo do tempo, foram propostos para o concreto. Chen e Han (1988) classificaram os critérios de ruptura conforme o número de constantes do material que aparecem na expressão dos mesmos. Tem-se, desta forma, o Modelo de Willam-Warnke como sendo de cinco parâmetros. Neste modelo, os meridianos de compressão,  $\rho_c$ , e de tração,  $\rho_t$ , são expressos por funções quadráticas, côncavas na direção do eixo  $\sigma_{out}$  negativo. A curva elíptica  $\rho(\xi, \theta)$ , Eq. 5.3, é usada para interpolar  $\rho_c$  e  $\rho_t$  e determinar a tensão na ruptura de qualquer estado de tensão, com ângulos de similaridade,  $\theta$ , de  $0^\circ$  a  $60^\circ$ .

A função quadrática usada para definir  $\rho_t$ , Eq. 5.4, e  $\rho_c$ , Eq. 5.5, assegura que a superfície de ruptura não intercepte o eixo hidrostático para altas tensões triaxiais de compressão, enquanto o uso da interpolação elíptica  $\rho(\xi, \theta)$ , permite uma grande flexibilidade em modificar uma parte específica da superfície de ruptura para considerar a presença das fibras no concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), segundo Seow e Swaddiwudhipong (2005).

$$\rho(\xi, \theta) = \frac{2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos\theta + \rho_c(2\rho_t - \rho_c)[4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_t\rho_c]^{1/2}}{4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2} \quad (5.3)$$

$$\frac{\xi}{f_c} = a_2 \left( \frac{k\rho_t}{f_c} \right)^2 + a_1 \left( \frac{k\rho_t}{f_c} \right) + a_0, \text{ com } k \leq 1 \quad (5.4)$$

$$\frac{\xi}{f_c} = b_2 \left( \frac{\rho_c}{f_c} \right)^2 + b_1 \left( \frac{\rho_c}{f_c} \right) + b_0 \quad (5.5)$$

Os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $a_0 = b_0$ , são os parâmetros da superfície de Willam-Warnke empregada no presente trabalho e dependem das características do material. O parâmetro  $k$  é utilizado para considerar a presença das fibras.

Desta forma, tem-se uma superfície que satisfaz os requisitos necessários: de ser suave, convexa, com exceção do seu vértice; dos seus meridianos serem parabólicos e abrirem no sentido do eixo hidrostático negativo; de ser aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando mais circular à medida que as tensões de compressão aumentam.

Nesta formulação as tensões de compressão são negativas e as equações são expressas em termos de  $\xi$ ,  $\rho$  e  $\theta$ , definidos em 5.2.

Chen e Han (1988) apresentam a mesma superfície, expressa em termos de  $\sigma_m$ ,  $\rho$  e  $\theta$ , sendo  $\xi = \sqrt{3}\sigma_m$ .

Para a determinação dos coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  e  $b_2$ , parâmetros da superfície de Willam-Warnke, são utilizados os seguintes estados de ruptura, baseando-se nos ensaios biaxiais apresentados por Kupfer *et al* (1969) e outros ensaios triaxiais (Chen e Han, 1988):

$(\sigma_m, \rho_c) = (-1,95 f_c; 2,770 f_c)$  - resistência à compressão biaxial confinada com  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ;

$(\sigma_m, \rho_t) = (-3,90 f_c; 3,461 f_c)$  - resistência à compressão biaxial confinada com  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ .

onde:

$f_c$  - resistência à compressão uniaxial  $\theta = 60^\circ$ ;

$f_t = 0,1 f_c$  - resistência à tração uniaxial  $\theta = 0^\circ$ ;

$f_\alpha = 1,15 f_c$  - resistência à compressão biaxial  $\theta = 0^\circ$ .

A partir destes estados de ruptura, podem-se determinar os cinco parâmetros usados nos meridianos de compressão e de tração da superfície de Willam-Warnke. Como os dois meridianos devem interceptar o eixo hidrostático no mesmo ponto,  $a_0$  e  $b_0$  possuem o mesmo valor.

$$a_0 = b_0 = 0,1732 \quad a_1 = -1,455 \quad a_2 = -0,1597 \quad b_1 = -0,788 \quad e \quad b_2 = -0,1746 \quad (5.6)$$

Estes valores de coeficientes são utilizados na região da superfície de ruptura onde ocorrem apenas tensões principais de compressão (tensões negativas).

Para as situações em que uma das tensões principais é de tração (tensão positiva) os coeficientes são expressões dependentes da relação  $\alpha_u = \frac{f_t}{f_c}$ . Tem-se, desta forma, uma superfície de ruptura que pode considerar o aumento da resistência à tração, provocada pela presença das fibras no concreto. As expressões para o cálculo dos parâmetros da superfície são obtidas a partir dos estados de ruptura mencionados anteriormente e, segundo Franca (2006), estes coeficientes são determinados a partir das equações:

$$a_0 = b_0 = -\frac{19,68\alpha_u + 1,82\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} \quad (5.7)$$

$$a_1 = \frac{1,52 + 0,95\alpha_u + 0,54\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2} \quad (5.8)$$

$$a_2 = -\frac{-2,73 + 8,73\alpha_u}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} \quad (5.9)$$

$$b_1 = \frac{0,62 + 2,44\alpha_u + 0,42\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2} \quad (5.10)$$

$$b_2 = -\frac{-2,86 + 10,76\alpha_u + 0,017\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} \quad (5.11)$$

O coeficiente  $k$ , na Eq. 5.4, modifica a superfície de ruptura para considerar a presença das fibras. Para o concreto sem fibras, o valor de  $k$  é 1. Neste caso, a superfície de ruptura se reduz ao Modelo de Willam-Warnke original. Para o caso de *CRFA*,  $k$  deve ser calculado com a Eq. 5.12 (Seow e Swaddiwudhipong, 2005).

$$k = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 \left[ a_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{f_\alpha}{f_c} \right) \right]}}{a_2 \sqrt{\frac{8}{3}} \left( \frac{f_\alpha}{f_c} \right)} \quad (5.12)$$

sendo  $f_\alpha$  a resistência à compressão biaxial e  $f_c$  a resistência à compressão uniaxial do concreto com fibras. O valor de  $f_\alpha$  do *CRFA* nem sempre é conhecido. Seow e Swaddiwudhipong (2005), então, apresentam uma forma de estimativa do valor de  $f_\alpha$  baseado na constatação de que a existência de fibras fornece uma tensão de confinamento,  $\sigma_m$ , na direção de  $\sigma_3$ , quando este é submetido a tensões nas direções de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . O valor de  $\sigma_m$  é obtido através de:

$$\sigma_m = \frac{\eta_l \eta_o V_f l_f \tau_u}{2r'} \quad (5.13)$$

sendo,  $\eta_l$  o fator de comprimento eficiente;  $\eta_o$  o fator de orientação;  $V_f$  a fração de volume;  $l_f$  o comprimento da fibra;  $\tau_u$  a resistência última de aderência e  $r'$  a razão entre a área da seção transversal da fibra e o seu perímetro.

Murugappan *et al.* (1993), sugere que o estado de tensão de um corpo-de-prova de *CRFA* ao longo do meridiano de tração,  $\rho_{l(\text{SFRC})}$ , é análogo ao concreto simples com um estado de tensão similar e uma pressão adicional de confinamento externa,  $\sigma_m$ , na direção de  $\sigma_3$ . Desta forma, para um corpo-de-prova de *CRFA* em compressão biaxial, com uma razão unitária de tensões, o estado de tensão observado na ruptura é dado por  $(-f_\alpha, -f_\alpha, 0)$  e o correspondente estado de

tensão para um corpo-de-prova análogo de concreto simples é  $(-f_{cc}, -f_{cc}, \sigma_{tu})$ , conforme ilustrado na Figura 5.3.

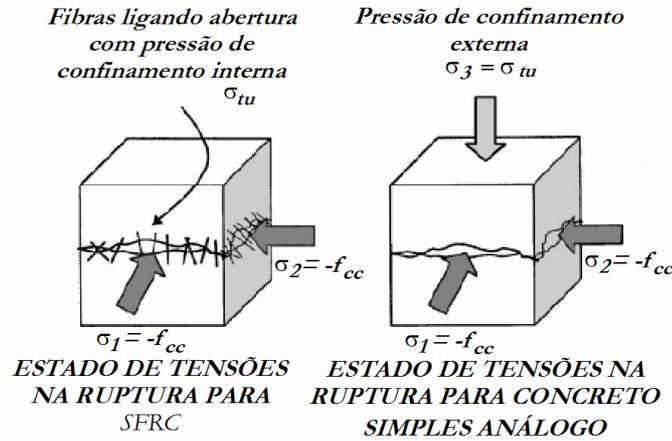


Figura 5.3 – Estado de tensão na ruptura para um concreto reforçado com fibras e para um concreto simples análogo (adaptado de Seow e Swaddiwudhipong, 2005).

Determinar a resistência à compressão biaxial do *CRFA*,  $f_{cc}$ , é então semelhante a determinar o valor da tensão de ruptura nas direções de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  no concreto simples quando uma pressão de confinamento externo,  $\sigma_{tu}$ , é aplicada na direção  $\sigma_3$ . Quando o estado de tensão no concreto simples é de  $(-f_{cc}, -f_{cc}, \sigma_{tu})$ ,  $\rho_{t(Simples)}$  e  $\xi_{(Simples)}$  são expressos, segundo de Seow e Swaddiwudhipong (2005), pelas equações :

$$\rho_{t(Plain)} = \sqrt{\frac{2}{3}} (f_{cc} - \sigma_{tu}) \quad \xi_{(Plain)} = \frac{-2f_{cc} - \sigma_{tu}}{\sqrt{3}} \quad (5.14)$$

Substituindo estas expressões na Eq. 5.4, com  $k = 1$ , um valor de  $f_{cc}$  pode ser determinado. Este valor de  $f_{cc}$ , utilizado na Eq. 5.12, fornece o valor do coeficiente  $k$  para *CRFA* a ser estudado. Assim, alterado o meridiano de tração através do coeficiente  $k$ , pode-se considerar a presença das fibras no concreto.

Lim *et al.* (1987) apresentam os valores de  $\eta_l$  e  $\eta_o$ , para o concreto com fibras dispersas, estes parâmetros são necessários para a determinação de  $\sigma_{tu}$  (Eq. 5.13).

$$\eta_l = 0,5, \text{ para } l_f \leq l_c \quad (5.15)$$

$$\eta_l = 1 - \frac{l_c}{2l_f}, \text{ para } l_f > l_c$$

onde  $l_f$  e  $l_c$  são o comprimento e o comprimento crítico das fibras.  $l_c$  denota o comprimento requerido para o desenvolvimento da tensão de ruptura na fibra,  $\sigma_{fu}$ , quando da ocorrência da tensão de aderência última,  $\tau_u$ , na interface da fibra-matriz, sendo determinado através de:

$$l_c = \frac{0,5\sigma_{fu}d}{\tau_u} \quad (5.16)$$

sendo  $d$  o diâmetro da fibra e  $\sigma_{fu}$  é a resistência última da fibra à tração.

Para o caso de concreto com fibras dispersas aleatoriamente nas três direções ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) é tomado o valor 0,405 para o parâmetro  $\eta_0$ .

Quanto à tensão de aderência última na interface fibra-matriz,  $\tau_u$ , seria ideal que a sua determinação fosse realizada através de ensaios de arrancamento de fibras. Contudo, como estes ensaios não são comumente efetuados, utilizou-se, então, a Eq. 5.17, proposta por Soroushian e Bayasi (1997, *apud* Holanda, 2002), baseada na lei dos compósitos, para a determinação de  $\tau_u$ .

$$\tau_u = \frac{\sigma_{ct,u} - \gamma\sigma_m(1 - V_f)}{2\alpha\beta(l/d)V_f} \quad (5.17)$$

Os autores sugerem valores médios para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são fatores de eficiência que consideram a distribuição aleatória das fibras, e o fato que a fissura cruza a fibra em um local aleatório do seu comprimento. Admite-se o valor de 0,41 para estes dois parâmetros. O parâmetro  $\gamma$  representa a fração da resistência da matriz que contribui para a resistência à tração do compósito e seu valor foi adotado como 1,0.  $\sigma_{ct,u}$  é a resistência última do compósito à tração direta e  $\sigma_m$  é a resistência da matriz à tração direta.  $l/d$  é a relação de aspecto da fibra e  $V_f$  é a fração de volume de fibras adicionadas.

### 5.1.1.2 Critério de Plastificação

Considera-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que a superfície de plastificação tenha a mesma forma da superfície de ruptura. Assim calcula-se a tensão efetiva ou uniaxial equivalente através da seguinte relação:

$$\sigma_{ef} = \left( \frac{\rho}{\rho_{sup}} \right)^3 f_{cm} \quad (5.18)$$

sendo  $\rho$  calculado para o estado de tensões principais que o concreto está submetido através de (5.2), e  $\rho_{sup}$  é o valor sobre a superfície de ruptura calculado com (5.3), utilizando  $\xi$  obtido pelo estado de tensões principais através de (5.2). Considerando-se a tensão de plastificação inicial nula, o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento, é definido para tensões efetivas,  $\sigma_{ef}$ , dentro do intervalo  $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$ , conforme ilustra a Figura 5.4.

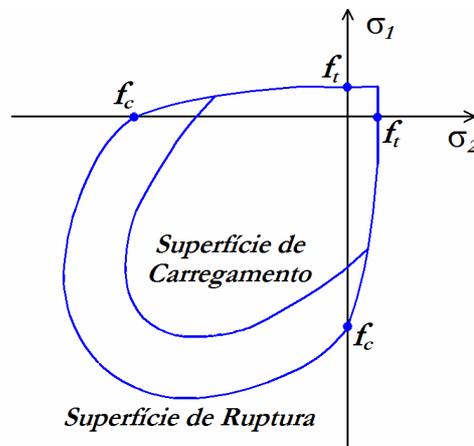


Figura 5.4 – Superfícies de ruptura e de carregamento.

### 5.1.1.3 Regra de Endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. É determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho utilizou-se a curva tensão-deformação proposta pelo *Código Modelo CEB-FIB 1990* (1993), para representar o comportamento do concreto, sob compressão uniaxial, cuja expressão é:

$$\sigma = -\frac{-\frac{E}{f_{cm}}\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{-0.0022}\right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}}0.0022 - 2\right)\frac{\varepsilon}{-0.0022}} f_{cm} \quad (5.19)$$

Substituindo-se  $\varepsilon = \varepsilon_{elástico} + \varepsilon_{plástico} = \sigma / E + \varepsilon_p$  na equação anterior e isolando-se  $\sigma$ , tem-se uma relação  $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$  dada pela expressão:

$$\sigma = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.20)$$

onde

$$a = \frac{\left(1 - \frac{f_{cm}}{0.0022E}\right)^2}{f_{cm}},$$

$$b = \varepsilon_p \left( \frac{E}{f_{cm}} - \frac{0.0022E}{0.0011} \right) \quad (5.21)$$

$$e \quad c = -\varepsilon_p \left( \frac{E - (\varepsilon_p f_{cm})}{0.0022^2} \right)$$

A Figura 5.5 representa o diagrama tensão-deformação, para o concreto comprimido.

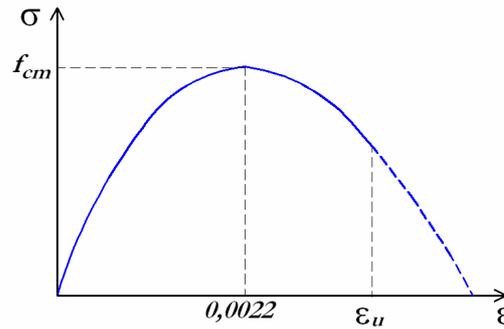


Figura 5.5 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.

### 5.1.2 Modelo para o Concreto Fissurado

O concreto é um material que apresenta resistência à tração muito inferior à resistência à compressão. Em função disso, nas estruturas de concreto armado, as fissuras aparecem ainda em condições de serviço, quando este está sujeito a baixas tensões de tração. A fissuração no concreto merece especial atenção, pois induz a um acentuado comportamento não-linear no material, sendo que a modelagem de forma adequada é fundamental para a precisão dos resultados.

Os modelos para descrever o funcionamento do concreto armado fissurado consideram uma perda de capacidade de carga do concreto causada pela fissuração. No contexto do Método dos Elementos Finitos, segundo Hinton (1988), basicamente dois modelos são usados para representar a fissuração: o modelo de fissuras discretas e o modelo de fissuras distribuídas.

O primeiro modelo trata da representação de cada fissura individualmente, como uma descontinuidade real na malha de elementos finitos. Neste caso a resposta é altamente dependente da malha utilizada, pois as fissuras devem se formar ao longo da borda dos elementos finitos. Mais recentemente, têm sido utilizados refinamentos de malha, através de métodos auto-adaptativos, de modo que novos elementos são inseridos ao longo da propagação das fissuras. Contudo a sofisticação deste modelo faz com seja gasto muito tempo de cálculo para a análise de sistemas, tornando-o apropriado apenas para problemas envolvendo poucas fissuras dominantes.

O modelo de fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade real da malha. Pelo contrário, as propriedades são alteradas para a consideração do dano devido à fissuração, enquanto o concreto fissurado permanece contínuo. O concreto é inicialmente isotrópico, porém a fissuração induz-lhe anisotropia. Após a fissuração, admite-se que o concreto torna-se

ortotrópico, com os eixos materiais principais orientados no sentido das direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e de tensão. O módulo de elasticidade longitudinal reduz-se na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura é, também, reduzido.

O modelo de fissuras distribuídas (*smearred crack model*) é atrativo do ponto de vista computacional, uma vez que a topologia da malha não muda no decorrer da análise, mesmo que sua relação tensão-deformação deva ser atualizada quando ocorre a fissuração.

Neste trabalho, o concreto tracionado é modelado como sendo um material elástico com amolecimento, sendo que, antes de fissurar, comporta-se como um material elástico-linear. Após a fissuração, é utilizado o modelo de fissuras distribuídas, baseado na formulação apresentada por Hinton (1988) e aprimorada por Martinelli (2003). A seguir é feita a descrição dos três itens que abrangem esse modelo: o critério de fissuração, uma regra para a consideração de colaboração do concreto entre fissuras (*tension stiffening*) e um modelo para transferência de tensões de corte (*shear transfer*).

#### 5.1.2.1 Critério de Fissuração

A avaliação da fissuração do concreto no programa desenvolvido neste trabalho é feita através do nível de tensões dos pontos de integração dos elementos de concreto. Verifica-se, deste modo, se o estado de tensões correspondente a cada ponto de integração alcançou a superfície de ruptura, apresentada no item 5.1.1.1.

O ponto pode alcançar a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto. Para distinguir estas situações, adota-se o critério proposto pelo *Código Modelo CEB-FIB 1990* (1993) e, deste modo, tem-se:

(a)  $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$ , para a fissuração do ponto de integração;

(b)  $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$ , para o esmagamento do ponto de integração;

onde  $\sigma_1$  é a tensão principal de tração, que pode ser determinada por:

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (5.22)$$

e  $f_{tm}$  é a resistência média à tração do concreto, que pode ser calculada, para concretos convencionais (sem fibras), por:

$$f_{tm} = C (f_{cm})^{2/3} \quad (5.23)$$

onde  $C$  pode variar entre 0,095 e 0,185, e a resistência,  $f_{tm}$ , é dada em kN/cm<sup>2</sup>.

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal à direção da tensão principal de tração. O comportamento do concreto deixa de ser isotrópico e passa a ser ortotrópico, com os eixos materiais locais coincidindo com as direções principais das tensões.

No modelo implementado, é permitida a ocorrência de dois conjuntos de fissuras em cada ponto de integração. Desta forma, para carregamentos posteriores, uma segunda fissura pode ocorrer no ponto já fissurado em uma direção. Neste caso, utiliza-se o procedimento da fissura fixa, em que a direção do primeiro conjunto de fissuras permanece fixa e a tensão de tração é avaliada perpendicularmente ao plano de fissuração já existente. Se a tensão exceder a resistência do concreto à tração, então um novo conjunto de fissuras será formado, perpendicular ao já existente, e todas as componentes de tensão serão zeradas.

### 5.1.2.2 Colaboração do Concreto entre Fissuras

Segundo Hinton (1988), as primeiras análises numéricas realizadas em concreto armado consideravam o concreto com um comportamento frágil sob esforços de tração. Quando ocorria a fissuração, a tensão normal à direção da fissura era zerada. Verificou-se, então, que este procedimento conduzia a dificuldades de convergência e os resultados eram extremamente dependentes do tamanho do elemento finito utilizado na análise.

Hinton (1988) afirma ainda que foi verificado também que o concreto entre fissuras tende a suportar um certo nível de tensões de tração, graças a forças de aderência entre o aço e o concreto. O concreto adere às barras de armadura e contribui ativamente para a rigidez total da estrutura. Este efeito é conhecido com enrijecimento à tração (*tension stiffening*). A aderência é

responsável pela transmissão do esforço entre o aço e o concreto fissurado e depende principalmente de fatores como resistência do concreto e características das barras de armaduras, como diâmetro e conformação superficial.

No presente trabalho, adotando uma proposta de Hinton (1988), o efeito de enrijecimento à tração foi incorporado ao modelo, modificando-se a curva tensão-deformação do concreto. A degradação da aderência, que ocasiona perdas de resistência à tração, é considerada através da introdução de um ramo descendente na curva tensão-deformação para o concreto tracionado, conforme é apresentado na Figura 5.6. Isso significa dizer que o concreto é um material com amolecimento em tração. A relação constitutiva adotada foi utilizada por Prates Júnior (1992), por Martinelli (2003) e por Jost (2006), sendo expressa pela relação:

$$\sigma = \alpha f_{tm} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} \right) \quad (5.24)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente e  $\varepsilon_m$  é um parâmetro que indica a deformação específica limite na qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser levada em conta. Adotou-se os valores de 0,6 e 0,01 para  $\alpha$  e  $\varepsilon_m$ , respectivamente.

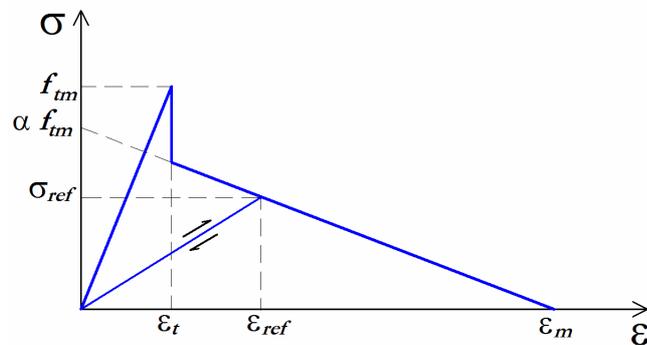


Figura 5.6 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado.

Para a consideração do comportamento do concreto reforçado com fibras, algumas alterações foram efetuadas na curva tensão-deformação do concreto tracionado em função das mudanças provocadas pela adição de fibras, conforme observado em dados experimentais.

No presente trabalho utilizou-se a curva tensão-deformação à tração idealizada de Lim *et al.* (1987), baseada no comportamento do concreto reforçado com fibras. O concreto apresenta um comportamento elástico-linear até a ruptura, após a fissuração, admite-se a colaboração do

concreto entre fissuras. Para tanto, se atribui uma perda de resistência e esta se mantém constante até a deformação específica limite,  $\epsilon_m$ , onde a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser levado em conta. A curva empregada pode ser observada na Figura 5.7.

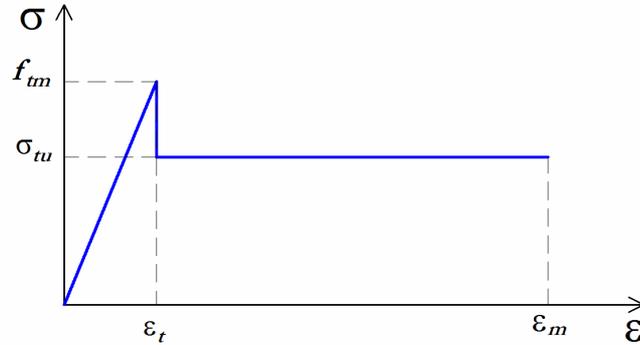


Figura 5.7 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado reforçado com fibras (adaptado de Lim *et al.*, 1987).

A relação constitutiva adotada para o caso de concreto reforçado com fibras é expresso pela relação:

$$\sigma = \sigma_{tu} \quad (5.25)$$

A tensão  $\sigma_{tu}$ , dependente das propriedades e quantidades de fibras no concreto, pode ser determinada através da Eq. 5.13. No item 5.1.1.1 são apresentados todos os parâmetros necessários e como calculá-los para a determinação de  $\sigma_{tu}$ .

A redistribuição de tensões, devido à fissuração em outros pontos de integração ou carregamentos posteriores, pode, eventualmente, forçar algum ponto previamente fissurado a fechar total ou parcialmente. Esta possibilidade é considerada neste trabalho.

Segundo Hinton (1988), caso a deformação específica atual,  $\epsilon$ , seja pequena em relação à deformação específica  $\epsilon_{ref}$ , armazenada como a deformação específica de tração máxima alcançada transversalmente à fissura em questão, a tensão normal à fissura,  $\sigma$ , é calculada por:

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\epsilon_{ref}} \epsilon \quad (5.26)$$

onde  $\sigma_{ref}$  é a tensão interpolada correspondente à deformação específica  $\epsilon_{ref}$ . A trajetória desta “descarga” secante é visualizada na Figura 5.6. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até  $\epsilon_{ref}$  ser excedida, a partir da qual segue a trajetória descendente definida pela Eq. 5.24.

### 5.1.2.3 Modelo de Transferência para as Tensões de Corte

Segundo Hinton (1988), ensaios experimentais mostram que valores consideráveis de tensões de corte podem ser transferidos através de faces ásperas de fissuras no concreto. O valor destas tensões depende das condições locais da fissura. O mecanismo predominante na transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos. Além disso, o efeito de pino da armadura que cruza a fissura (*dowell effect*) também tem importância nesta transferência de esforços, sendo as principais variáveis envolvidas o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano de fissura. Ambos os mecanismos são controlados pela abertura da fissura.

A inclusão direta dos mecanismos mencionados acima num modelo de fissuras distribuídas é complexa. Emprega-se, geralmente, uma aproximação simplificada para levar em conta a capacidade de transferência de corte no concreto fissurado. O processo consiste em atribuir ao módulo de elasticidade transversal, correspondente ao plano fissurado, um valor reduzido,  $G_c$ , definido, segundo Hinton (1988), como:

$$G_c = \beta G_0 \quad (5.27)$$

Sendo  $G_0$  o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado e  $\beta$  um fator de redução compreendido entre 0 e 1.

Em diversas análises, um valor constante foi atribuído a  $\beta$ , mas seria mais realista relacioná-lo com a deformação específica normal à tração do concreto,  $\epsilon_t$ . Hinton (1988) utilizou a seguinte fórmula para  $\beta$ , a qual foi adotada neste trabalho.

$$\beta = 1 - \left( \frac{\epsilon_t}{0,005} \right)^{K_1} \quad (5.28)$$

$K_1$  é um parâmetro que varia de 0,3 até 1,0. Nas aplicações do programa, apresentados neste trabalho, foi utilizado o valor mínimo.

Pode-se observar que, quanto maior a deformação específica,  $\varepsilon$ , menor será o módulo  $G_c$  e, conseqüentemente, menor a tensão de corte transferida através da fissura. Se a fissura fechar, o módulo  $G_0$  é adotado novamente.

## 5.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO

Neste trabalho, utiliza-se um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras, uma vez que, em estruturas de concreto armado, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais. No modelo computacional implementado, o aço é representado como um material elastoplástico e que apresenta o mesmo comportamento em tração e em compressão. A representação se dá por um diagrama tensão-deformação bilinear.

Dependendo do processo de fabricação do material, as barras seguem comportamentos distintos. Para aços com patamar de escoamento bem definido e com dureza natural, adotou-se o modelo elastoplástico perfeito apresentado na Figura 5.8. Para os aços encruados a frio, utilizou-se um comportamento elastoplástico com endurecimento linear a partir de 0,85 da tensão de escoamento, conforme Figura 5.9.

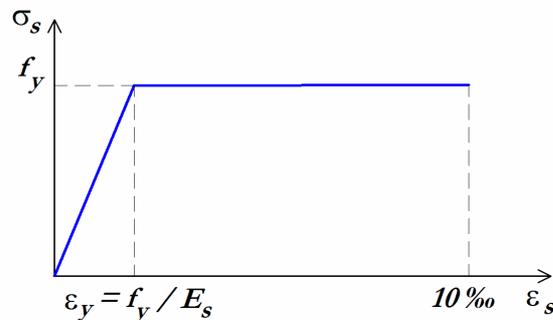


Figura 5.8 – Modelo elastoplástico perfeito para armaduras.

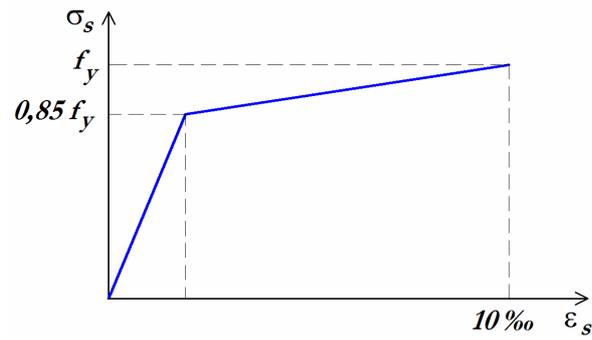


Figura 5.9 – Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras.

O parâmetro de endurecimento para as armaduras é definido por:

$$H_s = \frac{0,15 f_y}{10\text{‰} - \frac{f_y}{E_s}} \quad (5.29)$$

## Análises Numéricas e Resultados

Neste capítulo são apresentados resultados experimentais disponíveis na literatura de estruturas confeccionadas com *CRFA* e, também, resultados obtidos pelo programa computacional. Estes resultados são confrontados com o intuito de validar o modelo constitutivo desenvolvido neste trabalho, bem como, verificar a adequação do mesmo na modelagem do comportamento de estruturas constituídas pelo material compósito, formado por concreto e fibras de aço.

Num primeiro momento, buscou-se analisar graficamente a superfície de ruptura de Willam-Warnke através da sua interseção com o plano  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Com isso, foi possível conferir e validar a superfície de ruptura implementada, a qual apresenta-se de forma distinta para cada tipo e quantidade de fibra adicionada. Os resultados são comparados com aqueles apresentados por Seow e Swaddiwudhipong (2005), e também com os resultados experimentais de ensaios biaxiais de Yin *et al.* (1989) e Traina e Mansour (1991).

Posteriormente, apresentam-se resultados de vigas de *CRFA*. Para este estudo, utilizaram-se os trabalhos de Lim e Oh (1999) e Kovács e Balázs (2003). Os resultados obtidos pelo programa desenvolvido foram confrontados com os respectivos resultados experimentais. Nas estruturas analisadas foram utilizadas diferentes malhas de elementos finitos hexaédricos de 20 nós com integração reduzida através de 15 pontos. Em todos os exemplos foram aplicadas cargas de curta duração.

### 6.1 SUPERFÍCIE DE RUPTURA DE WILLAM-WARNKE MODIFICADA

Buscando graficar a superfície de ruptura adotada, através da sua interseção com o plano  $\sigma_1 - \sigma_2$ , foi desenvolvido, em paralelo, um programa em linguagem *Fortran 90/95*. Este programa é capaz de gerar e ordenar automaticamente três tensões principais; conjugando cada grupo de três tensões principais aleatórias, ele verifica se o ponto formado pelas mesmas, no espaço tridimensional de tensões, está sobre a superfície de ruptura, neste caso, as tensões são impressas.

Uma das tensões,  $\sigma_3$ , foi adotada como nula, sendo possível, de tal modo, representar a interseção da superfície de ruptura com o plano  $\sigma_1 - \sigma_2$ .

Para a definição da Superfície de Willam-Warnke, utiliza-se a mesma rotina do programa computacional de análise de estruturas, desenvolvido neste trabalho, e as equações apresentadas no Capítulo 5.

Conforme detalhado no item 5.1.1.1, o meridiano de tração da superfície é modificado através do coeficiente  $k$ , considerando desta forma o efeito da presença das fibras no concreto. O coeficiente  $k$  depende das propriedades das fibras adicionadas, do concreto e da interação entre eles. Seow e Swaddiwudhipong (2005), apresentam os coeficientes  $k$  para os concretos utilizados nos ensaios biaxiais de Yin *et al.* (1989) e Traina e Mansour (1991). Os valores dos coeficientes  $k$ , para as porcentagens de fibras e o concreto, estão indicados na Tabela 6.1, juntamente com o fator de aspecto das fibras,  $l/d$ , e a resistência à tração pós-fissuração do compósito,  $\sigma_{tu}$ , necessários para o cálculo do coeficiente  $k$ .

Tabela 6.1 – Coeficientes  $k$  dos concretos executados por Yin *et al.* (1989) e Traina e Mansour (1991), fornecidos por Seow e Swaddiwudhipong (2005).

Concreto	Porcentagem de Fibra	l/d	$\sigma_{tu}$ (MPa)	$k$
Traina 0,5	0,5	60	0,84	0,978
Traina 1,0	1,0	60	1,68	0,961
Traina 1,5	1,5	60	2,52	0,951
Yin 45-1	1,0	45	0,76	0,979
Yin 59-1	1,0	59	1,15	0,972
Yin 59-2	2,0	59	2,31	0,947

Nas Figuras 6.1 e 6.2 podem ser observados os dados experimentais dos ensaios biaxiais de Yin *et al.* (1989) e Traina e Mansour (1991), juntamente com as respectivas superfícies de ruptura propostas por Seow e Swaddiwudhipong (2005), as quais empregam o coeficiente  $k$ .

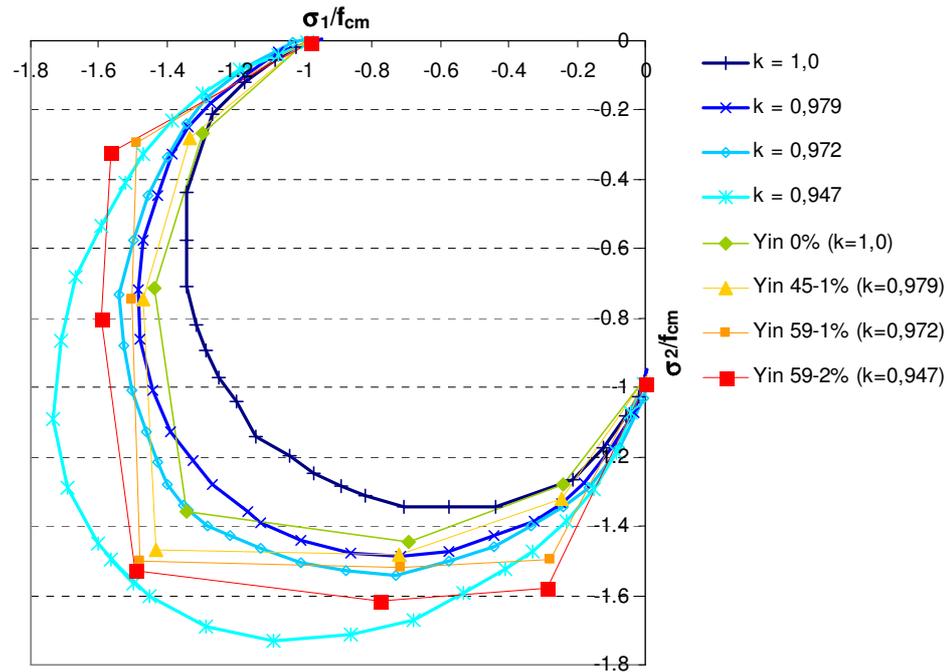


Figura 6.1 – Resultados experimentais dos ensaios biaxiais de Yin *et al.* (1989) e respectivas superfícies de ruptura propostas por Seow e Swaddiwudhipong (2005).

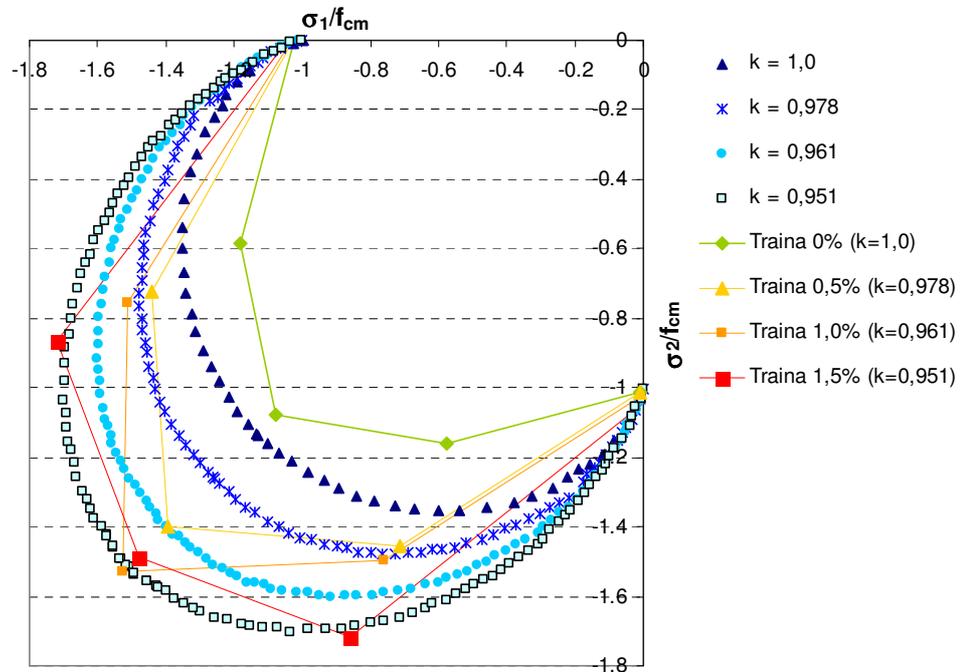


Figura 6.2 – Resultados experimentais dos ensaios biaxiais de Traina e Mansour (1991) e respectivas superfícies de ruptura propostas por Seow e Swaddiwudhipong (2005).

Os coeficientes da Tabela 6.1 foram utilizados na verificação da superfície de ruptura através do programa desenvolvido em paralelo. Como dados de entrada, além do coeficiente  $k$ , são necessários os valores da resistência à compressão e à tração do concreto. Como os autores não realizaram ensaios para a caracterização da resistência à tração, foram atribuídos valores de  $f_t$  ao concreto para a representação total da superfície de ruptura.

O valor de  $f_t$  do concreto sem adição de fibras foi obtido através da equação do *Código Modelo CEB-FIB 1990* (1993), Equação 5.23, a qual permite a determinação da resistência à tração do concreto a partir da sua resistência à compressão; quanto aos concretos com porcentagens de adição de fibras, foram adotados aumentos nos valores de  $f_t$ , em relação aos concretos sem fibras, baseando-se na literatura disponível condensada na Figura 2.17. Esta figura demonstra o aumento da resistência à tração provocada pela adição de fibras, o qual tem sido observado em distintos estudos já realizados.

Na Tabela 6.2 estão apresentados os valores de  $f_t$  utilizados para a obtenção das superfícies de ruptura correspondentes aos concretos dos estudos de Yin *et al.* (1989) e Traina e Mansour (1991).

Tabela 6.2 – Valores de  $f_t$  adotados para concretos executados por Yin *et al.* (1989) e Traina e Mansour (1991), baseando-se na Figura 2.17.

Concreto	Porcentagem de Fibra	$f_{tm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )
Traina 0	0,0	$f_{tm_{f, TM}} = 0,14 \left( f_{cm_{f, TM}} \right)^{2/3}$
Traina 0,5	0,5	$1,50 f_{tm_{f, TM}}$
Traina 1,0	1,0	$1,65 f_{tm_{f, TM}}$
Traina 1,5	1,5	$1,80 f_{tm_{f, TM}}$
Yin 0	0,0	$f_{tm_{f, Y}} = 0,14 \left( f_{cm_{f, Y}} \right)^{2/3}$
Yin 45-1	1,0	$1,80 f_{tm_{f, Y}}$
Yin 59-1	1,0	$1,80 f_{tm_{f, Y}}$
Yin 59-2	2,0	$1,95 f_{tm_{f, Y}}$

Nas Figuras 6.3 e 6.4 são comparadas as superfícies de ruptura apresentadas por Seow e Swaddiwudhipong (2005) e também aquelas obtidas pelo programa.

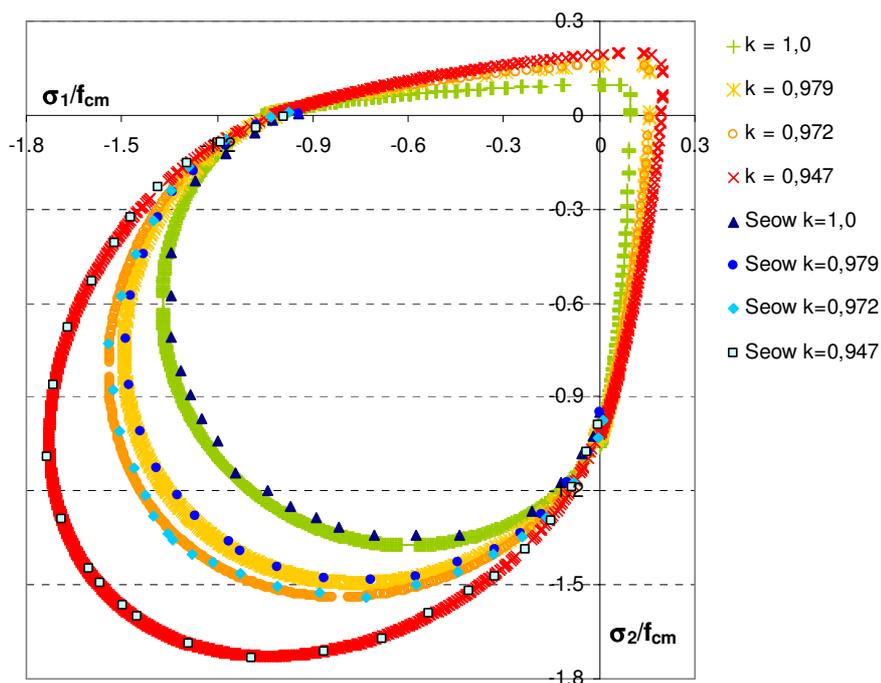


Figura 6.3 – Superfícies de ruptura obtidas pelo programa desenvolvido e aquelas propostas por Seow e Swaddiwudhipong (2005) para os ensaios biaxiais de Yin *et al.* (1989).

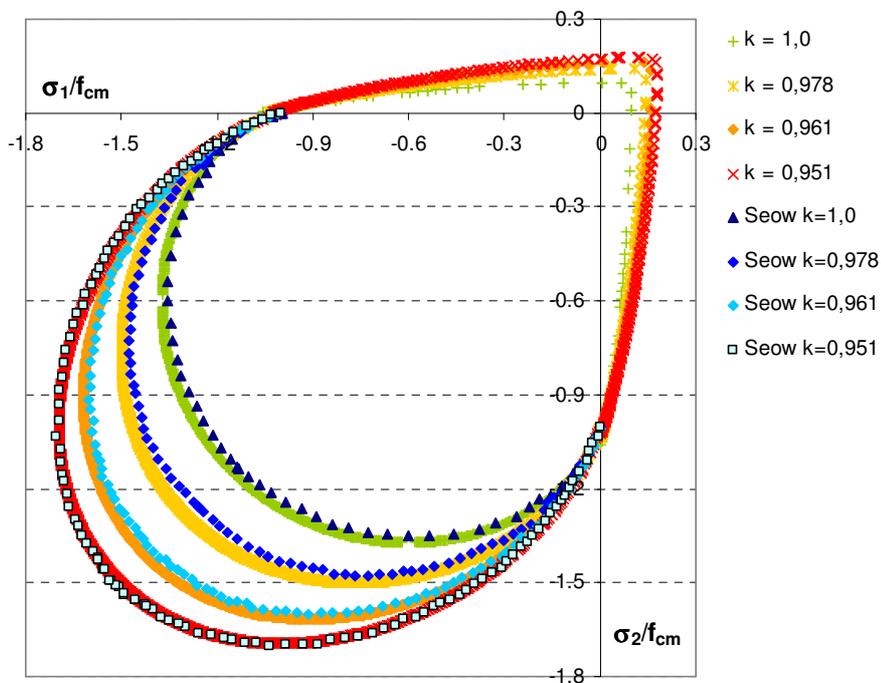


Figura 6.4 – Superfícies de ruptura obtidas pelo programa desenvolvido e aquelas propostas por Seow e Swaddiwudhipong (2005) para os ensaios biaxiais de Traina e Mansour (1991).

---

Conforme se pode observar nas Figuras 6.1 e 6.2, as superfícies de ruptura propostas por Seow e Swaddiwudhipong (2005) são capazes de representar o comportamento do concreto com adição de fibras, sendo o aumento da resistência à compressão biaxial, provocado pelas fibras, adequadamente modelado através do coeficiente  $k$ . Conclui-se, também, que as superfícies de ruptura obtidas através do programa desenvolvido, Figuras 6.3 e 6.4, apresentaram comportamento semelhante àquelas propostas por Seow e Swaddiwudhipong (2005), sendo possível, desta forma, validar a superfície de ruptura utilizada no programa, que modela estruturas de concreto para a situação de concreto reforçado com fibras de aço.

A expansão da superfície de ruptura, observada na região de tensões positivas, foi obtida através do emprego dos cinco parâmetros da superfície de Willam-Warnke, Equações 5.7 a 5.11, calculados a partir do valor da resistência à tração do concreto, a qual aumenta ao se adicionar fibras.

Finalmente, foram modelados corpos-de-prova cúbicos de concreto (aresta de 76 mm), com adição de fibras de 0%, 0,5%, 1% e 1,5% em volume, semelhantes aos de Traina e Mansour (1991). As fibras utilizadas são do tipo lisas com ganchos nas extremidades, comprimento de 30 mm e diâmetro de 0,5 mm, com o fator de forma,  $l/d$ , de 60 e a resistência à tração de 1172 MPa. O concreto empregado tem a resistência de 40,2 MPa.

Os resultados obtidos foram confrontados às envoltórias de resistência biaxial do concreto, apresentadas por Seow e Swaddiwudhipong (2005), correspondentes aos dados experimentais de Traina e Mansour (1991), na Figura 6.5.

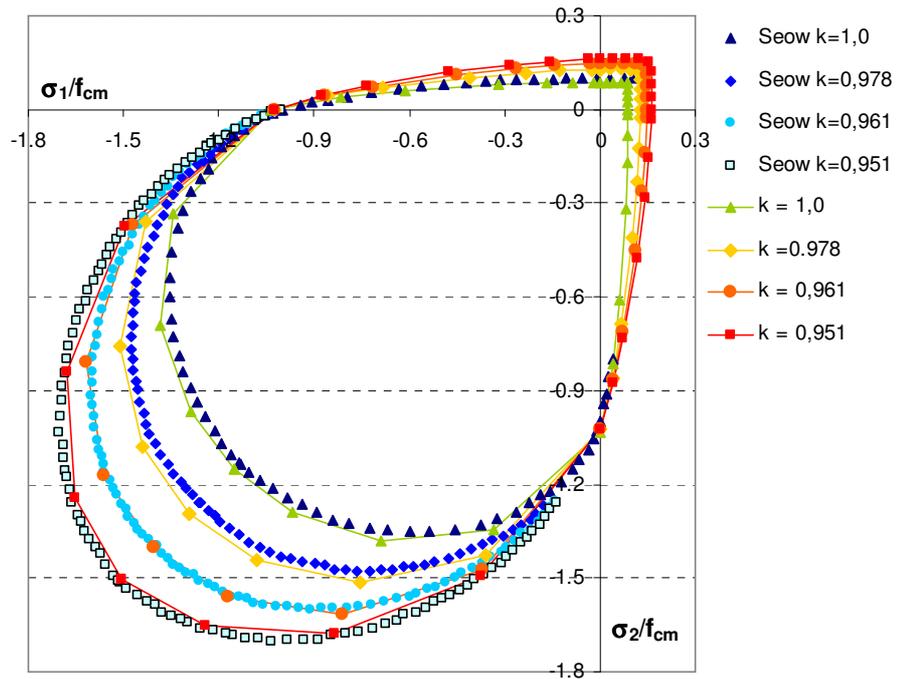


Figura 6.5 – Envoltórias de resistência biaxial do concreto. Comparação entre resultados obtidos nos testes e àqueles apresentadas por Seow e Swaddiwudhipong (2005).

## 6.2 VIGAS DE CONCRETO COM FIBRAS ENSAIADAS POR LIM E OH

Neste item são utilizados os experimentos realizados por Lim e Oh (1999) na avaliação do modelo numérico. O objetivo dos autores foi investigar o aumento da resistência das vigas ao corte através da combinação de estribos e fibras de aço e a possibilidade do uso de fibras na substituição parcial do reforço transversal de vigas. Para tanto, os autores variaram a quantidade de fibras adicionadas e de estribos necessários para o reforço transversal. Os elementos estruturais modelados são vigas bi-apoiadas com carregamento instantâneo, até atingir a ruptura, através de duas cargas concentradas.

As vigas executadas por Lim e Oh (1999) estão divididas em dois grupos com distintas quantidades de reforço transversal. O primeiro grupo é composto por vigas contendo 75% dos estribos necessários para resistir ao corte, com distância entre estribos de 6 cm, e com adição de fibras em volume de 0% e 1% (vigas S0.75-0 e S0.75-1). O segundo grupo é composto por vigas contendo 50% dos estribos necessários para o reforço ao corte, com distância entre estribos de 8 cm, e com adição de fibras em volume de 0%, 1% e 2% (vigas S0.50-0, S0.50-1 e S0.50-2). Nas

Figuras 6.6 e 6.7, podem ser observadas a geometria, a disposição das armaduras, o detalhamento da seção de concreto e os pontos de aplicação de cargas para as vigas ensaiadas.

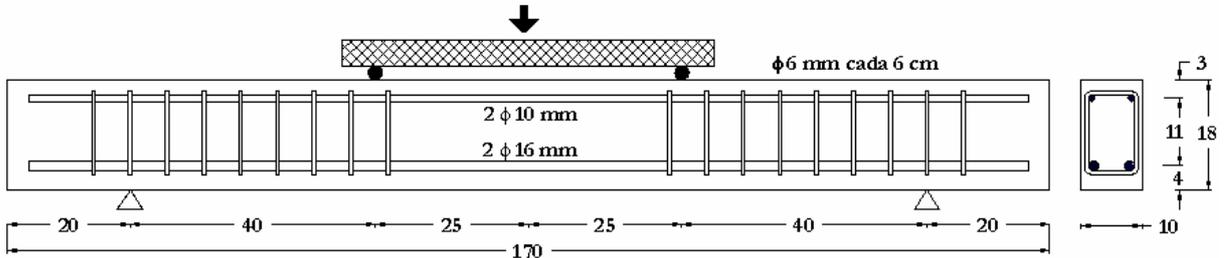


Figura 6.6 – Detalhamento da viga de Lim e Oh (1999) com 75% da área de armadura necessária para o reforço ao corte (vigas S0.75-0 e S0.75-1).

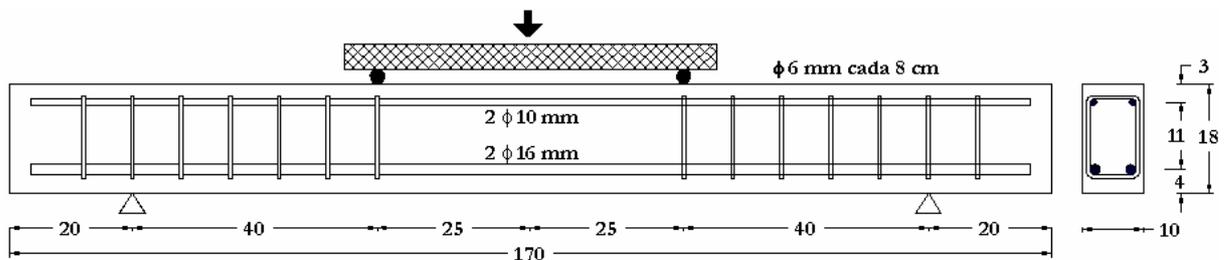


Figura 6.7 – Detalhamento da viga de Lim e Oh (1999) com 50% da área de armadura necessária para o reforço ao corte (vigas S0.50-0, S0.50-1 e S0.50-2).

As propriedades dos materiais, fornecidos pelos autores, são semelhantes para os dois grupos de vigas. A armadura longitudinal apresenta inferiormente duas barras de 16 mm de diâmetro e, superiormente, duas barras de 10 mm de diâmetro ( $f_y = 420 \text{ MPa}$ ). A armadura transversal é composta por estribos verticais com 6 mm de diâmetro ( $f_y = 359 \text{ MPa}$ ). Todas as barras de armaduras apresentam um comportamento elastoplástico com endurecimento linear e com um módulo de elasticidade longitudinal tem um valor de 210.000 MPa.

A resistência média à compressão,  $f_{cm}$ , e à tração,  $f_{tm}$ , do concreto aos 28 dias para as diferentes quantidades de adição de fibras são apresentadas na Tabela 6.3. O coeficiente de Poisson do concreto não foi fornecido pelos autores, foi adotado, então, o valor de 0,2.

Tabela 6.3 – Propriedades do concreto das vigas de Lim e Oh (1999).

Porcentagem de Fibra	$f_{cm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_{tm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )
0,0%	3,400	0,25
1,0%	3,869	0,40
2,0%	4,240	0,51

As fibras adicionadas ao concreto são do tipo lisas com seção transversal circular, com comprimento de 42 mm e diâmetro de 0,7 mm, fator de forma,  $l/d$ , de 60 e resistência à tração de 1784 MPa.

O coeficiente  $k$ , para a alteração da superfície de ruptura em função da presença das fibras, bem como a resistência à tração pós-fissuração do compósito,  $\sigma_{tu}$ , foram calculados através das equações do item 5.1.1.1 e são apresentados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Coeficiente  $k$  da superfície de ruptura e  $\sigma_{tu}$ , resistência à tração pós-fissuração do concreto reforçado com fibras, das vigas de Lim e Oh (1999).

Porcentagem de Fibra	$\sigma_{tu}$ (MPa)	$k$
1,0%	1,84	0,954
2,0%	3,19	0,936

Para a análise computacional, adotou-se a malha apresentada na Figura 6.8. Como pode ser visto, apenas metade da viga foi modelada, uma vez que a viga apresenta simetria de carga e geometria. Foi utilizado um total de 21 elementos finitos hexaédricos quadráticos e 36 ou 28 elementos lineares para a armadura, conforme a quantidade de estribos a ser modelada. Os elementos de armadura, para as vigas com espaçamento entre estribos de 6 cm e 8 cm, estão apresentados na Figura 6.9 e 6.10, respectivamente.

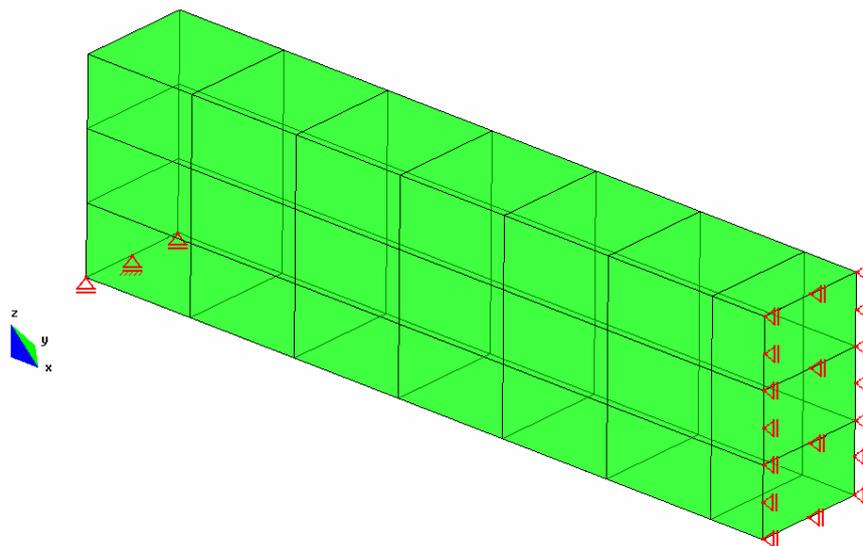


Figura 6.8 – Malha de elementos finitos para a viga de Lim e Oh (1999).

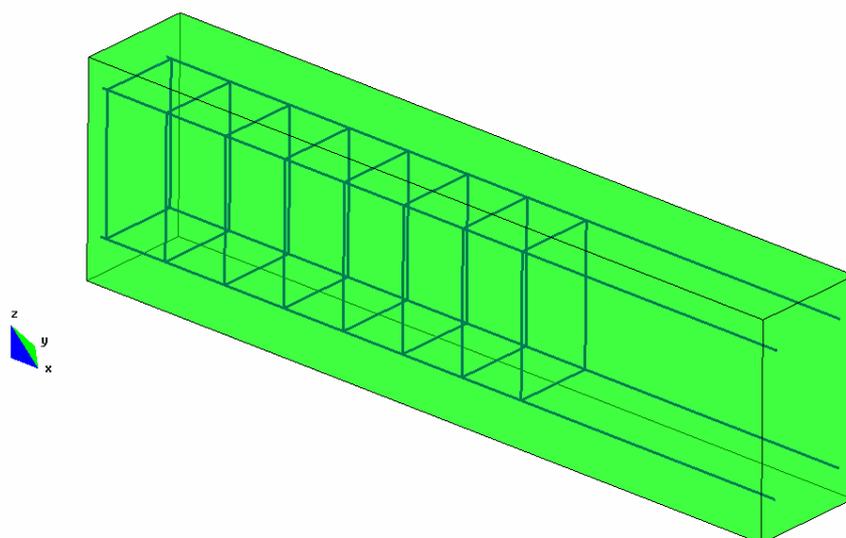


Figura 6.9 – Elementos de aço para as vigas de Lim e Oh (1999) com 75% dos estribos necessários para o reforço transversal,  $e = 6\text{cm}$ .

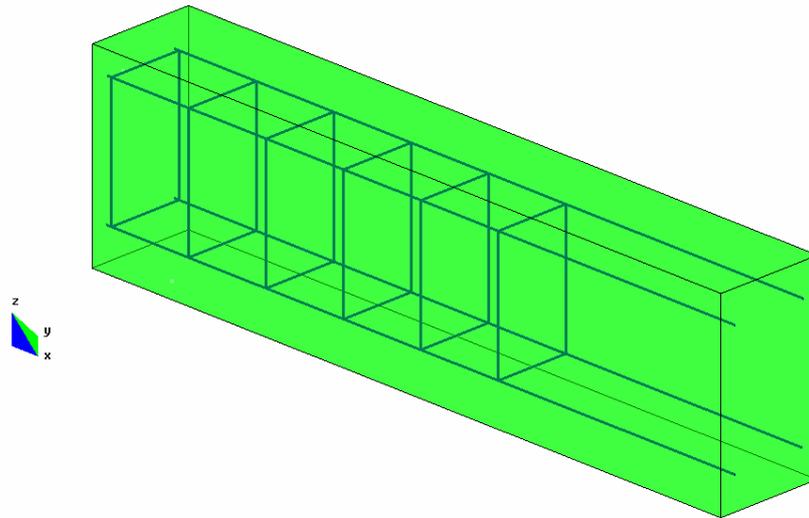


Figura 6.10 – Elementos de aço para as vigas de Lim e Oh (1999) com 50% dos estribos necessários para o reforço transversal,  $e = 8\text{cm}$ .

Os resultados dos deslocamentos no centro do vão, para as vigas modeladas, são apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12, juntamente com os respectivos resultados experimentais. Na Figura 6.11, têm-se os resultados para as vigas com 75% dos estribos necessários para o reforço transversal, sendo que os resultados da Figura 6.11a foram obtidos através de incrementos de carga, enquanto os da Figura 6.11b foram obtidos através de incrementos de deslocamento. Na Figura 6.12, têm-se os resultados para as vigas com 50% dos estribos necessários para o reforço transversal, sendo que os resultados da Figura 6.12a, foram obtidos através de incrementos de deslocamento, enquanto os da Figura 6.12b foram obtidos através de incrementos de carga.

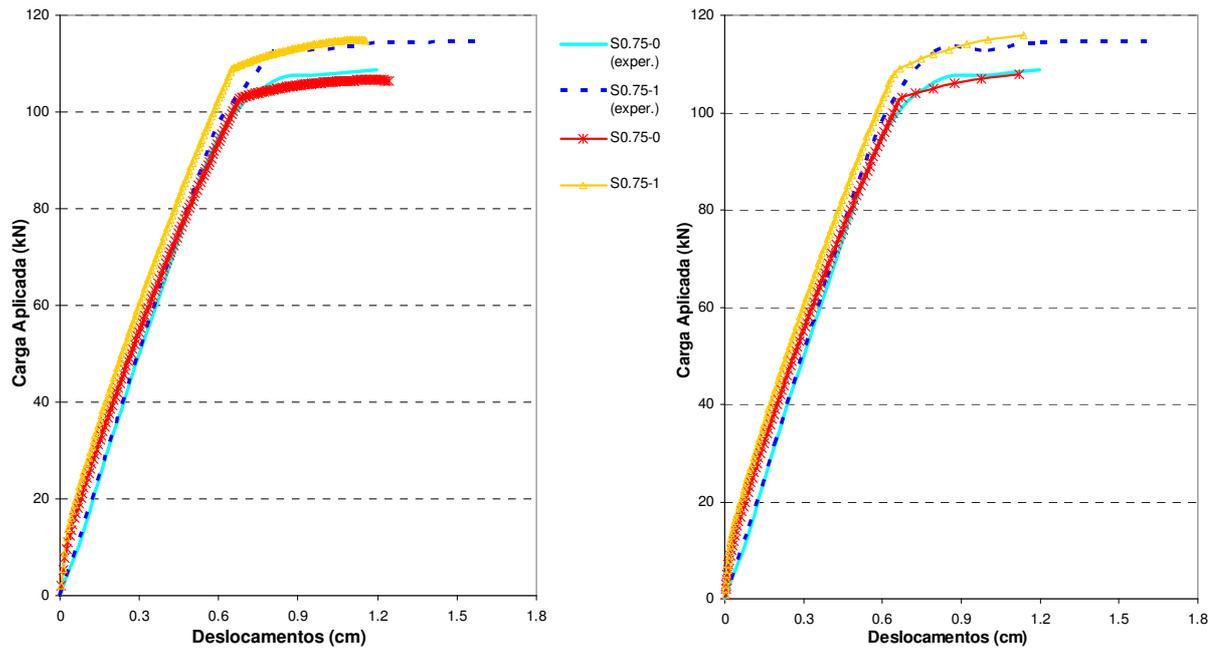


Figura 6.11 – Resultados dos deslocamentos no centro do vão para as vigas S0.75-0 e S0.75-1. Incrementos de deslocamento (a) e incrementos de carga (b).

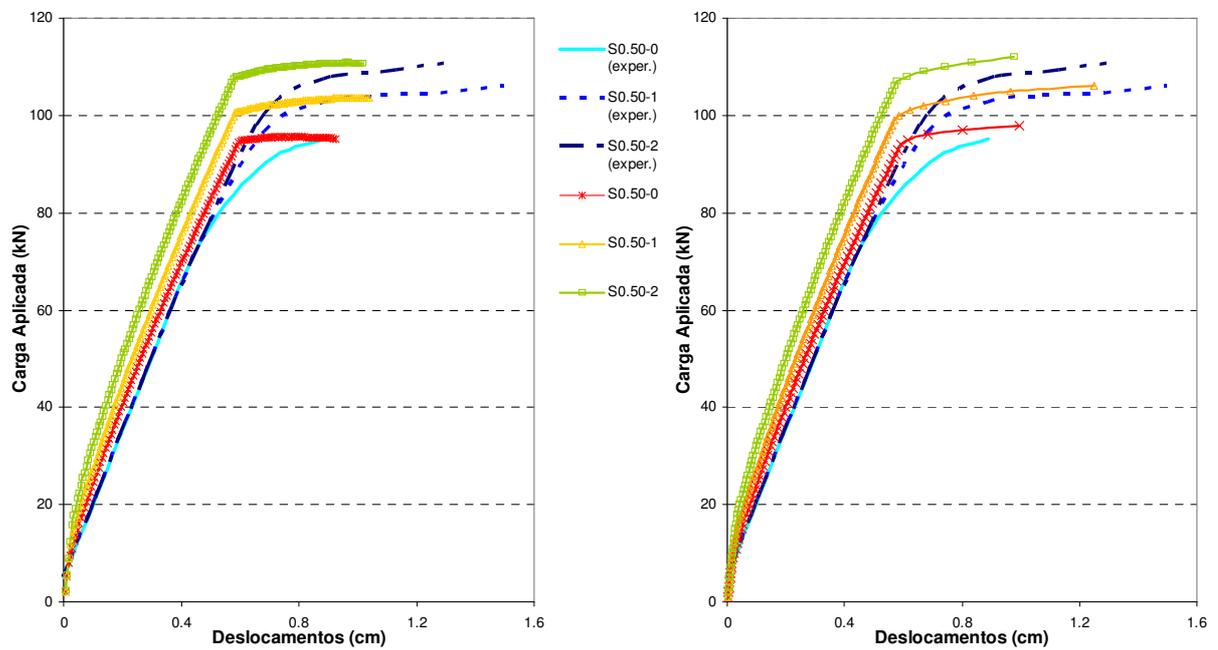


Figura 6.12 – Resultados dos deslocamentos no centro do vão para as vigas S0.50-0, S0.50-1 e S0.50-2. Incrementos de deslocamento (a) e incrementos de carga (b).

Uma análise mais detalhada do comportamento das vigas pode ser feita através da visualização da deformada e das tensões no concreto e na armadura. As Figuras 6.13 a 6.15 mostram a evolução

dos valores das tensões  $\sigma_{xx}$  para a viga S0.50-1 com incrementos de carga, e as correspondentes tensões nas armaduras.

Sob ação das cargas concentradas, as fibras inferiores se encontram tracionadas, enquanto as superiores estão comprimidas. Quando a carga chega a 13 kN, os valores das tensões nas fibras inferiores estão chegando próximos à tensão de ruptura do concreto, conforme mostra a Figura 6.13. A queda da tensão na parte central da viga, ocorrida após a fissuração, é vista claramente na Figura 6.14, a qual corresponde a uma carga de 30 kN.

Ao longo do carregamento, observa-se que a linha neutra vai subindo, deixando as fibras superiores cada vez mais comprimidas. Na Figura 6.15 observa-se a posição elevada da linha neutra, com as fibras superiores apresentando altas tensões de compressão.

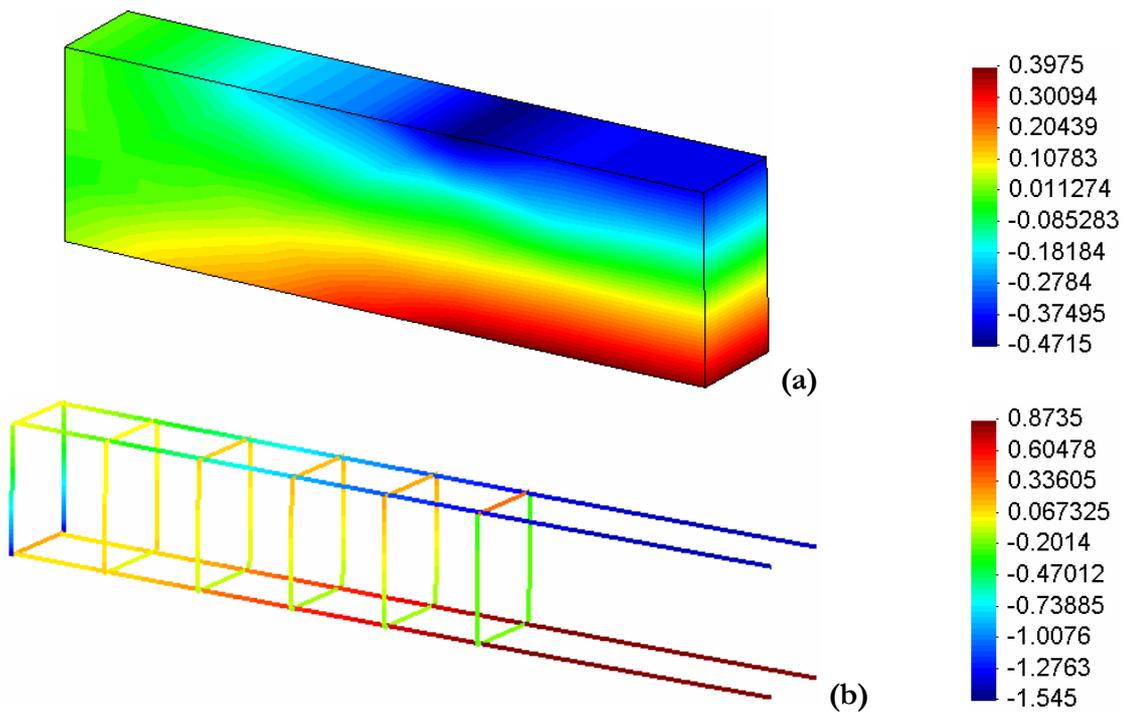


Figura 6.13 – Tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga S0.50-1 com a atuação de 13 kN.

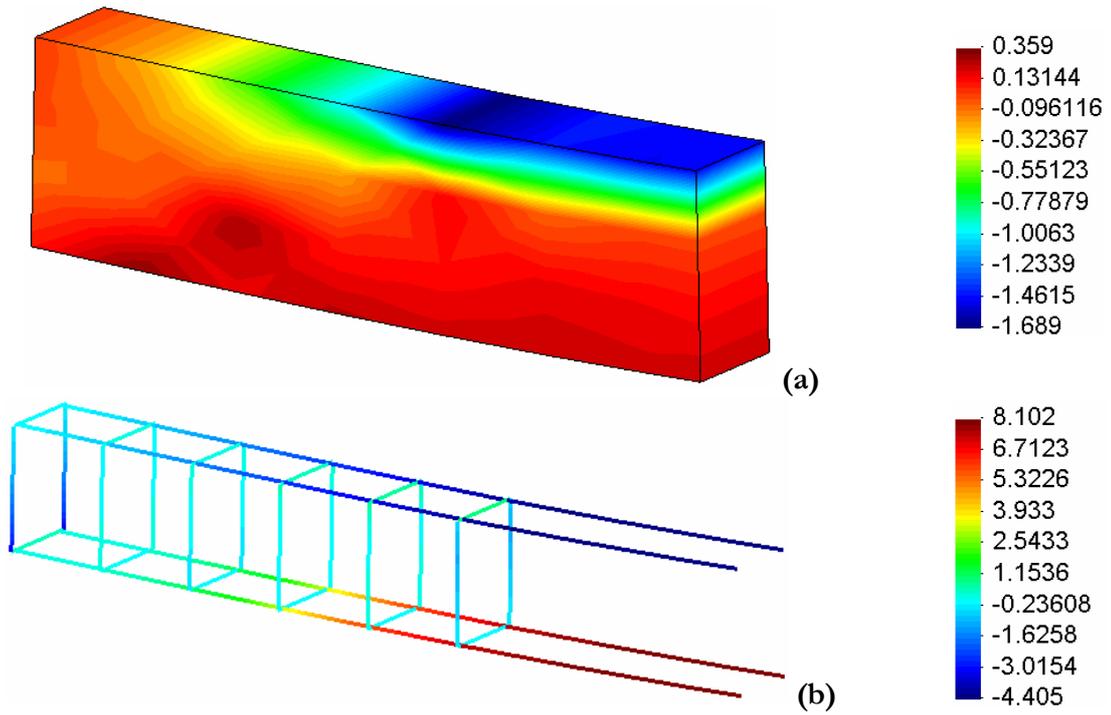


Figura 6.14 – Tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga S0.50-1 com a atuação de 30 kN.

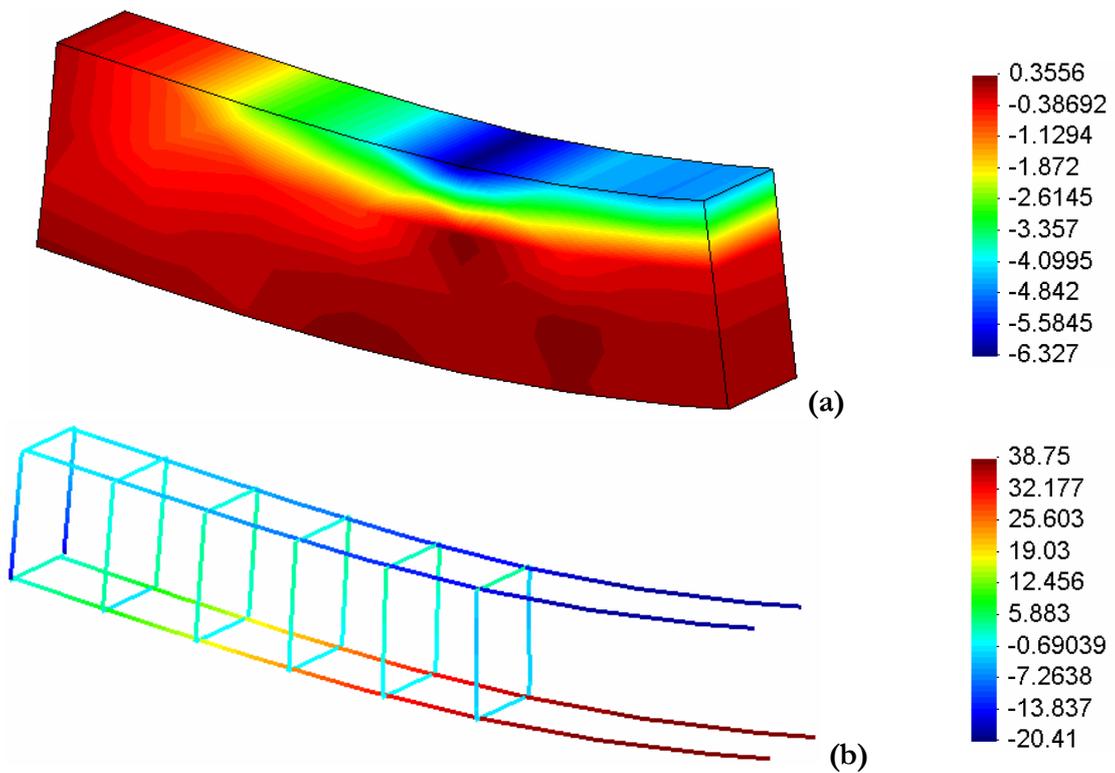


Figura 6.15 – Tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga S0.50-1 com a atuação de 95 kN.

Para a representação da deformada da viga, utilizou-se um fator de escala de 20. Nas Figuras 6.13 e 6.14, onde as cargas ainda estão baixas, não é possível observar claramente os deslocamentos, os quais, para estes níveis de carga, ainda são pequenos. Na Figura 6.15, onde a carga atuante sobre a viga é maior, pode-se observar a deformação da viga.

### 6.3 VIGAS DE CONCRETO COM FIBRAS ENSAIADAS POR KOVÁCS E BALÁZS

Neste item são utilizados os experimentos realizados por Kovács e Balázs (2003) na avaliação do modelo numérico. O objetivo dos autores foi o estudo do comportamento mecânico de vigas de concreto reforçado com fibras de aço. As vigas contêm a mesma quantidade de armadura longitudinal e transversal, mas diferentes porcentagens de adição de fibras. Os autores partem do pressuposto de que a aplicação de fibras pode reduzir a quantidade de estribos e de reforço necessários em regiões de altas tensões de corte. Afirmam, ainda, que poucos trabalhos privilegiam o estudo do comportamento estrutural de elementos de concreto reforçado com fibras.

Os elementos estruturais modelados são vigas bi-apoiadas com carregamento instantâneo, até atingir a ruptura, através de duas cargas concentradas aplicadas nos terços médios. Todas as vigas foram executadas com o mesmo concreto, variando-se apenas a quantidade de fibras adicionadas: vigas de concreto sem fibras e com adição de fibras em volume de 0,5% e 1%. Na Figura 6.16, podem ser observadas a geometria, a disposição das armaduras, o detalhamento da seção de concreto e os pontos de aplicação de cargas para as vigas ensaiadas.

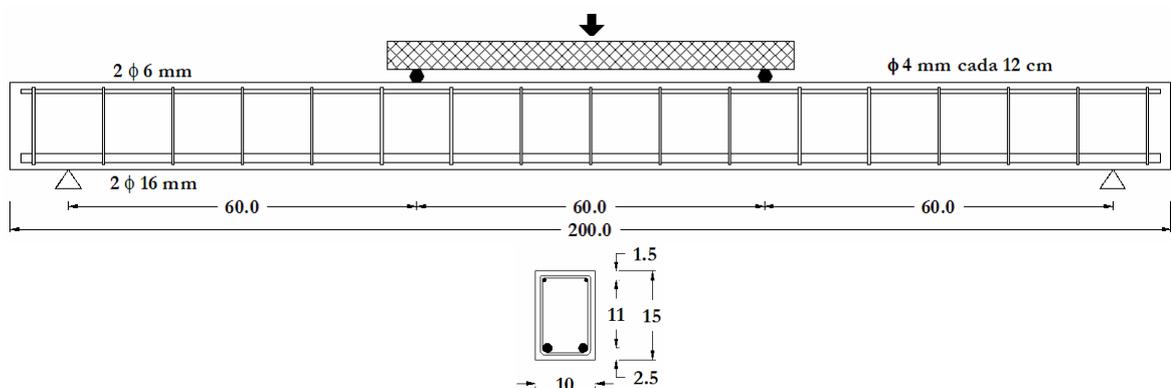


Figura 6.16 – Detalhamento da viga de Kovács e Balázs (2003) (vigas KB-0.0, KB-0.5 e KB-1.0).

As propriedades dos materiais são fornecidas pelos autores. A armadura longitudinal, de  $f_y = 500\text{MPa}$ , apresenta inferiormente duas barras de 16 mm de diâmetro e superiormente duas barras de 6 mm de diâmetro. A armadura transversal, também de  $f_y = 500\text{MPa}$ , é composta por estribos verticais com 4 mm de diâmetro e espaçamento de 12 cm. Todas as barras de armaduras apresentam um comportamento elastoplástico perfeito com um módulo de elasticidade longitudinal de 210.000 MPa.

A resistência média à compressão do concreto aos 28 dias,  $f_{cm}$ , para as diferentes quantidades de adição de fibras é apresentada na Tabela 6.5. Como os autores não realizaram ensaios para a caracterização da resistência à tração, foram atribuídos valores de  $f_{tm}$ . O valor de  $f_{tm}$  do concreto sem adição de fibras foi obtido através da equação do *Código Modelo CEB-FIB 1990* (1993), Eq. 5.23, a qual permite a determinação da resistência à tração do concreto a partir da sua resistência à compressão. Como coeficiente  $C$  da Eq. 5.23 foi adotado o valor de 0,185, este foi o valor que resultou em melhor aproximação com o resultado experimental do concreto sem fibras. Quanto aos concretos com porcentagens de adição de fibras, foram adotados aumentos nos valores de  $f_{tm}$ , em relação ao concreto sem fibras, baseando-se na literatura disponível, cujos dados foram condensados na Figura 2.17, a qual demonstra o aumento da resistência à tração provocada pela adição de fibras, observado em distintos estudos já realizados. Os valores adotados para a resistência média à tração do concreto,  $f_{tm}$ , para as diferentes quantidades de adição de fibras são apresentadas na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Propriedades do concreto das vigas de Kovács e Balázs (2003).

Porcentagem de Fibra	$f_{cm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_{tm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )
0,0%	4,27	$f_{tm_{sf}} = 0,185 \left( f_{cm_{sf}} \right)^{2/3} = 0,48$
0,5%	4,88	$1,50 f_{tm_{sf}} = 0,73$
1,0%	4,72	$1,65 f_{tm_{sf}} = 0,81$

As fibras adicionadas ao concreto são do tipo onduladas (Figura 1.1) com comprimento de 30 mm e diâmetro de 0,5 mm, fator de forma,  $l/d$ , de 60 e resistência à tração de 1200 MPa.

O coeficiente  $k$ , para a alteração da superfície de ruptura em função da presença das fibras, bem como, a resistência à tração pós-fissuração do compósito,  $\sigma_{tu}$ , foram calculados através das equações do item 5.1.1.1 e são apresentados na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Coeficiente  $k$  da superfície de ruptura e  $\sigma_{tu}$ , resistência à tração pós-fissuração do concreto reforçado com fibras, das vigas de Kovács e Balázs (2003).

Porcentagem de Fibra	$\sigma_{tu}$ (MPa)	$k$
0,5%	4,86	0,922
1,0%	5,63	0,911

O coeficiente de Poisson do concreto não foi fornecido pelos autores, foi adotado, então, o valor de 0,2 para esta propriedade do compósito.

Para a análise computacional adotou-se a malha apresentada na Figura 6.17. Como pode ser visto, apenas metade da viga foi modelada, uma vez que a viga apresenta simetria de carga e geometria. Foi utilizado um total de 18 elementos finitos hexaédricos quadráticos e 36 elementos lineares para a armadura. Os elementos de armadura das vigas estão apresentados na Figura 6.18.

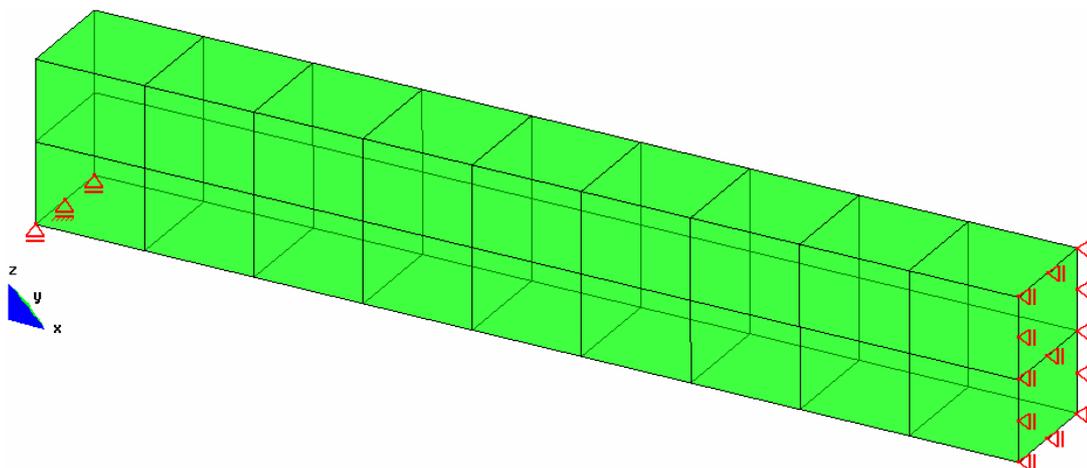


Figura 6.17 – Malha de elementos finitos para a viga de Kovács e Balázs (2003).

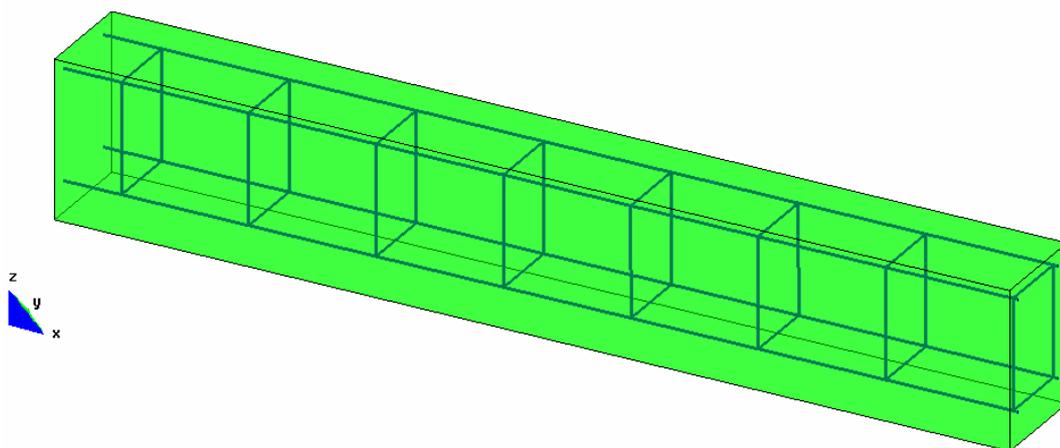


Figura 6.18 – Elementos de aço para as vigas de Kovács e Balázs (2003).

Os resultados dos deslocamentos no centro do vão, para as vigas modeladas, são apresentados nas Figuras 6.19, juntamente com os respectivos resultados experimentais. Os resultados da Figura 6.19a foram obtidos através de incrementos de deslocamento, enquanto os da Figura 6.19b foram obtidos através de incrementos de carga.

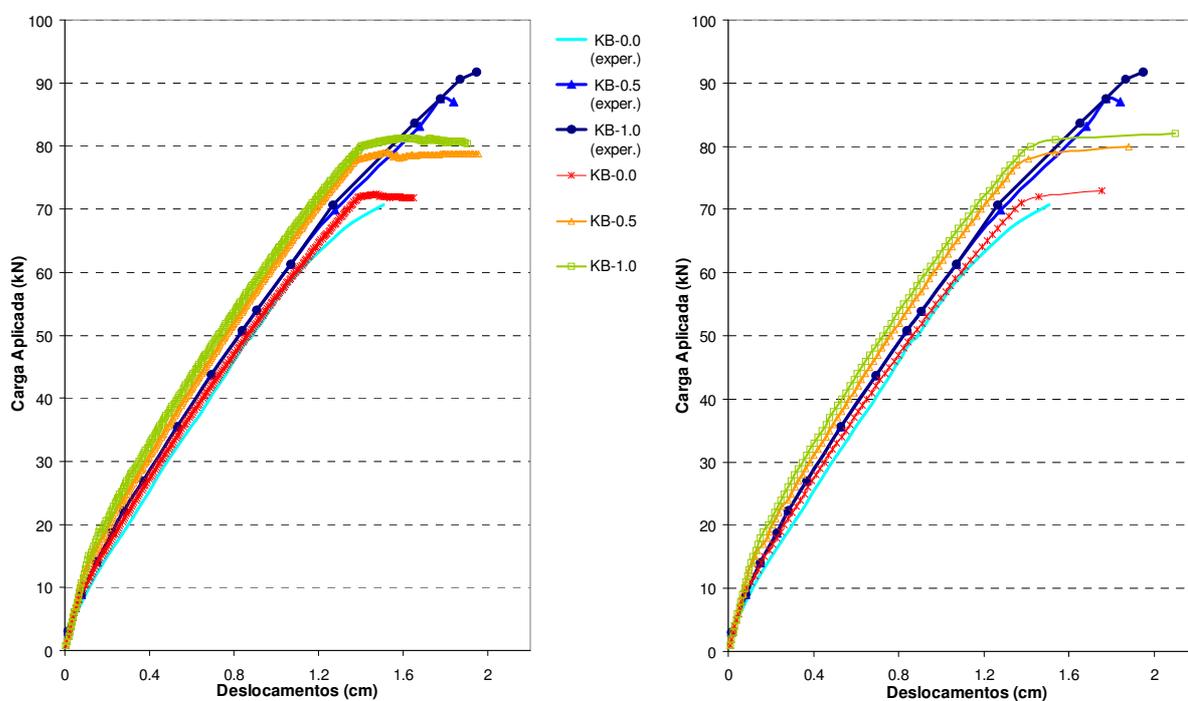


Figura 6.19 – Resultados dos deslocamentos no centro do vão para as vigas KB-0.0, KB-0.5 e KB-1.0. Incrementos de deslocamento (a) e incrementos de carga (b).

Pode-se acompanhar a evolução do comportamento das vigas através da visualização da deformada e das tensões no concreto e na armadura. As Figuras 6.20 a 6.22 mostram a evolução dos valores das tensões  $\sigma_{xx}$  e da deformada da viga KB-0.5 com incrementos de deslocamento, e as correspondentes tensões nas armaduras.

Sob ação das cargas concentradas, as fibras inferiores se encontram tracionadas, enquanto as superiores estão comprimidas. Quando a carga chega a 11 kN, os valores das tensões nas fibras inferiores estão chegando próximos à tensão de ruptura do concreto, conforme mostra a Figura 6.20. A queda da tensão na parte central da viga, ocorrida após a fissuração, é vista claramente na Figura 6.21, a qual corresponde a uma carga de 19 kN.

Ao longo do carregamento, observa-se que a linha neutra vai subindo, deixando as fibras superiores cada vez mais comprimidas. Na Figura 6.22 observa-se a posição elevada da linha neutra, com as fibras superiores apresentando altas tensões de compressão.

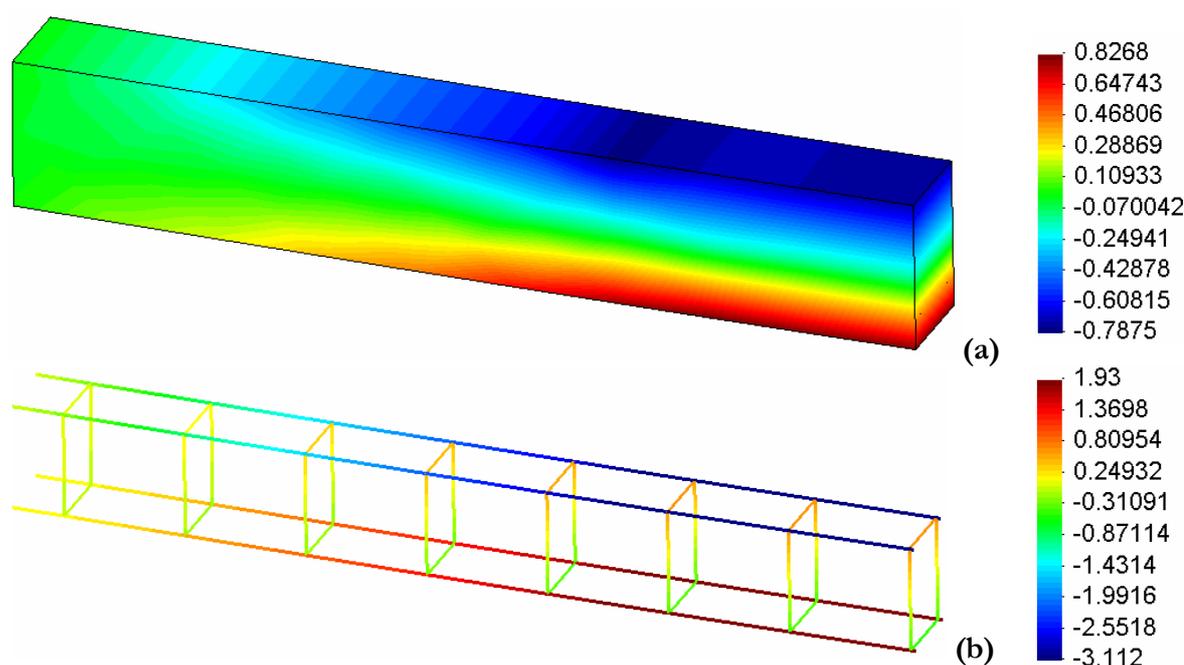


Figura 6.20 – Tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga KB-0.5 com a atuação de 11 kN.

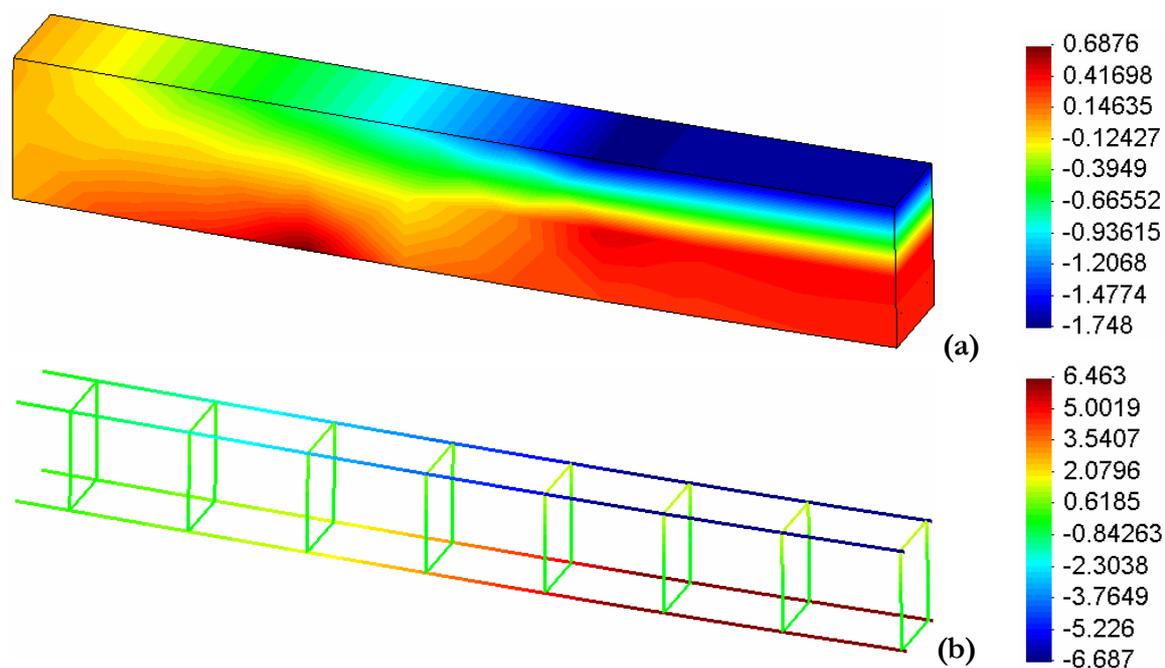


Figura 6.21 – Tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga KB-0.5 com a atuação de 19 kN.

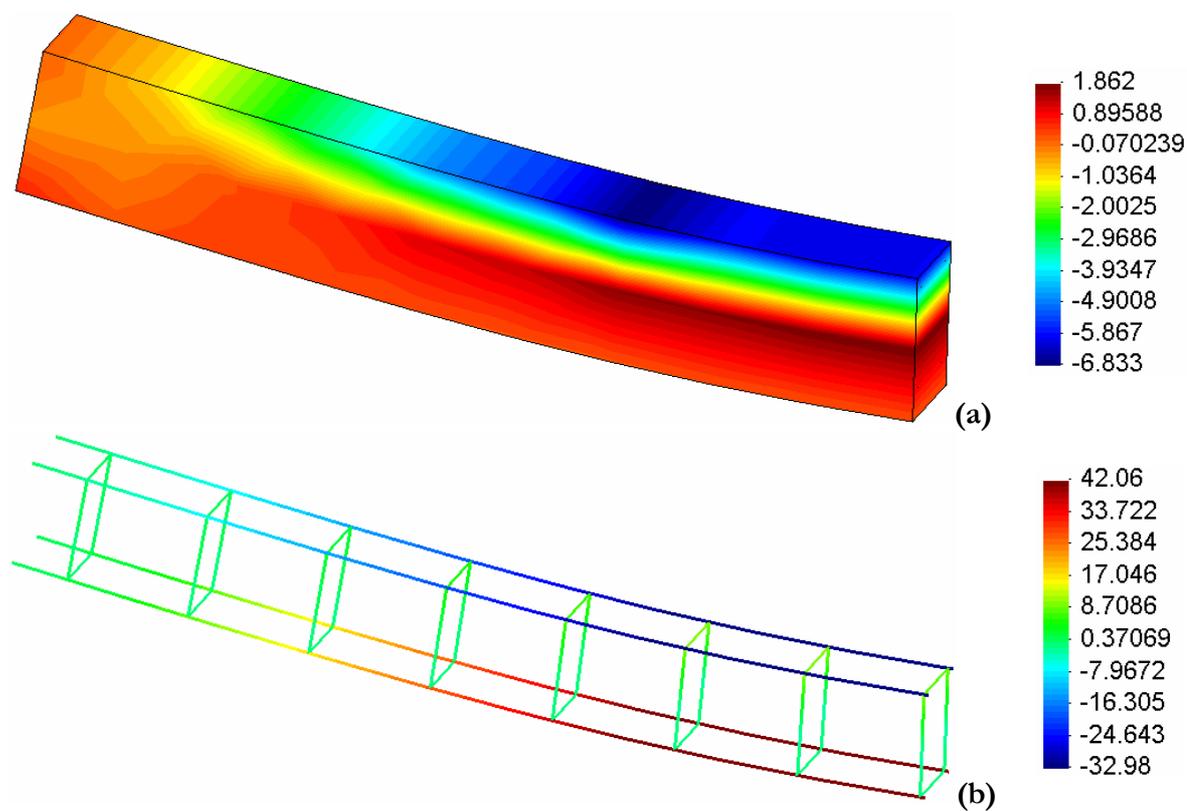


Figura 6.22 – Tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto (a) e tensão nas armaduras (b) para a viga KB-0.5 com a atuação de 68 kN.

Para a representação da deformada da viga utilizou-se um fator de escala de 10. Nas Figuras 6.20 e 6.21, onde as cargas ainda estão baixas, não é possível observar claramente os deslocamentos, os quais, para estes níveis de carga, ainda são pequenos. Na Figura 6.22, onde a carga atuante sobre a viga é maior, pode-se observar a deformação da viga.

**Conclusões e Sugestões**

O emprego do concreto reforçado com fibras de aço tem se mostrado eficiente em diversas aplicações, tais como em pavimentos, pré-moldados, revestimento de túneis e outros empregos do concreto projetado. Além disso, diferentes pesquisas são realizadas para a caracterização do seu comportamento mecânico, ou seja, o estudo da resposta deste material quando submetido a esforços de compressão, de tração, ao cisalhamento, à fadiga e à torção.

Os dados experimentais disponíveis têm demonstrado que a adição de fibras metálicas provoca alterações benéficas no desempenho do concreto, tais como o aumento da resistência à tração, o aumento da resistência ao cisalhamento, o aumento da resistência ao impacto e o aumento da tenacidade; benefícios estes, que podem ser utilizados positivamente em elementos estruturais.

Quanto à modelagem numérica deste compósito, poucos são os estudos realizados que privilegiam esta abordagem. Figueiredo (2006) modelou numericamente a resposta do *CRFA* sob cargas estáticas e impulsivas, utilizando o Método dos Elementos Discretos. Outro estudo realizado por Moreira (2003), por sua vez, utiliza o Método dos Elementos Finitos para analisar a influência das fibras de aço no controle de propagação de fissuras no concreto, para tanto, faz-se a introdução da fibra à medida que ocorre a abertura da fissura através da inclusão de um elemento de barra na malha de elementos finitos, interrompendo desta forma a propagação da fissura.

Neste trabalho, buscou-se simular o comportamento do *CRFA* através do auxílio do Método dos Elementos Finitos. O desenvolvimento computacional do modelo utilizado para o concreto foi baseado no estudo apresentado por Hinton (1988) para a análise dinâmica de estruturas tridimensionais de concreto armado com não-linearidade física. Jost (2006) efetuou alterações neste modelo para a análise estática de peças de concreto protendido e, finalmente, foram introduzidas modificações nesta última versão do modelo, para que sua aplicabilidade fosse estendida à análise do comportamento de estruturas de concreto reforçadas com fibras metálicas. Tais modificações constituem-se da proposição e implementação de um modelo constitutivo para o concreto com adição de fibras, verificados através da comparação dos resultados numéricos e experimentais.

---

Neste capítulo são elencadas as conclusões obtidas a partir das implementações e simulações numéricas efetuadas, as quais têm seus resultados apresentados no Capítulo 6. Além disso, são sugeridas para trabalhos futuros, alternativas de estudos sobre o *CRFA*.

## 1.1 CONCLUSÕES

A partir do estudo de Seow e Swaddiwudhipong (2005), verificou-se que é possível introduzir pequenas modificações na formulação da superfície de ruptura de Willam-Warnke, através de um certo coeficiente  $k$ , e conseguir representar o comportamento do concreto com fibras.

Observa-se, no item 6.1, que a utilização do coeficiente  $k$  na superfície de ruptura apresentou bom desempenho ao se comparar os resultados experimentais com aqueles obtidos através do programa. As fibras ao serem adicionadas ao concreto provocam um aumento da sua resistência biaxial; este efeito foi alcançado, no programa utilizado, por meio de pequenas variações no valor de  $k$ , calculado através da formulação apresentada no item 5.1.1.1.

A utilização dos 5 parâmetros da superfície de Willam-Warnke ( $a_0 = b_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$ ), sendo estes determinados através das Eq. 5.7 a 5.11 e dependentes da relação entre a resistência à tração e à compressão, permitiu a consideração do aumento da resistência à tração e à tração biaxial do *CRFA*, efeito que pôde ser observado nas Figuras 6.3 e 6.4. Este aumento deve ser avaliado, uma vez que em diversos experimentos verificou-se tal desempenho, assim como foi apresentado nas Figuras 2.16, 2.17 e 2.20.

Segundo Barros (1996), o aumento da resistência ao corte com a participação de fibras se deve, fundamentalmente, à maior resistência à tração do *CRFA* fissurado. Uomoto *et al.* (1986, *apud* Barros, 1996) concluíram que a resistência residual à tração do *CRF* fissurado é o principal fator que deve ser levado em conta na situação da contribuição das fibras na resistência ao corte de vigas de concreto armado. Este efeito foi considerado neste trabalho através da curva de Lim *et al.* (1987), apresentada no item 5.1.2.2, onde a tensão  $\sigma_{tu}$  determina a colaboração do concreto entre fissuras para o *CRFA*. Verificou-se, nos testes realizados, que o efeito conjunto do aumento da resistência à tração e o aumento da resistência à tração do concreto fissurado (Figura 5.7) provocou o aumento da carga resistida pelas vigas modeladas (Figuras 6.11, 6.12 e 6.19), confirmando Barros (1996) e Uomoto *et al.* (1986).

Os benefícios trazidos pelas fibras ao comportamento do concreto frente ao cisalhamento podem ser compreendidos a partir das características do reforço que elas promovem. O caráter aleatório da distribuição e orientação das fibras proporciona um reforço de pequeno espaçamento, atuante nas três dimensões; o que não se obtém por qualquer armadura convencional. Deste modo, as fibras interceptam e fazem a ligação das fissuras formadas em todas as direções, aumentando a fricção cisalhante nas superfícies dessas fissuras e, conseqüentemente, melhorando o desempenho do elemento estrutural (Simões, 1998).

A tentativa de proposta de um modelo constitutivo para o concreto com adição de fibras de aço, implementado no programa computacional apresentado por Hinton (1988), baseado no Método dos Elementos Finitos, mostrou-se satisfatória, o que pode ser comprovado pelos exemplos apresentados no Capítulo 6. Entretanto, é válido ressaltar que continua sendo necessário o desenvolvimento de novos modelos onde se possa considerar e representar outros parâmetros influentes no comportamento deste compósito como, por exemplo, a deterioração da aderência na interface entre os dois materiais, a distribuição e a orientação aleatória das fibras e até mesmo a representação de cada fibra como um elemento com características próprias, simulando desta forma o que ocorre na realidade.

Observa-se para os grupos de vigas testadas e apresentadas nos itens 6.2 e 6.3, um adequado comportamento das curvas carga-deslocamento, quando comparados aos resultados experimentais. No caso das vigas de Kovács e Balázs (2003), as cargas de ruptura das vigas, obtidas numericamente, foram inferiores às experimentais. Uma possível justificativa para isto é o fato de que algum efeito não considerado da adição das fibras ao concreto e influente na modelagem deste material tenha proporcionado este incremento de capacidade resistente. Entretanto, segundo se observa na Figura 6.19, a rigidez destas vigas, obtida numericamente, está bastante próxima à determinada nos experimentos.

A curva de Lim *et al.* (1987), adotada neste estudo para o *CRFA*, conforme item 5.1.2.2, apresenta uma queda brusca de resistência do concreto após a ruptura por tração, entretanto é verificado experimentalmente que esta queda pode não ocorrer de forma tão abrupta, como se observa nos experimentos de Cucchiara *et al.* (2004), Figura 2.16. Uma curva mais suave poderia representar melhor o comportamento deste material quando solicitado à tração. A proposta de uma curva para a representação da contribuição do *CRFA* após a fissuração e a verificação da sua validade constituem-se sugestão para trabalhos futuros.

---

## 1.2 SUGESTÕES

Apesar de diversos trabalhos envolvendo o *CRFA* já terem sido executados, outros estudos, tanto de caráter experimental quanto numérico, necessitam ser realizados para ampliar o conhecimento do desempenho estrutural deste material. Tais informações serão necessárias para estabelecer diretrizes e orientações aplicadas ao desenvolvimento de projetos que prevêem a utilização do mesmo.

Entre os trabalhos experimentais sugeridos, está a caracterização do *CRFA* quando sob solicitações biaxiais. Poucos dados são encontrados a respeito do comportamento deste compósito quando submetido à compressão biaxial. Quanto à tração e à tração-compressão biaxial, a quantidade de estudos encontrados é ainda menor. Quantificar e avaliar de que forma o aumento destas resistências é obtido ao se adicionar fibras é um fator importante a ser entendido.

Apesar dos dados experimentais mostrarem que ocorre um pequeno ou nenhum aumento da resistência à compressão dos concretos reforçados com fibras, sabe-se que ocorre um aumento de tenacidade do compósito, conforme se observa nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15. O estudo e o equacionamento da curva de compressão do *CRFA* em função da quantidade de fibras adicionadas permitiriam avaliar a influência do aumento da tenacidade à compressão deste material através de modelos numéricos.

A verificação da aderência entre o aço e o concreto, quando a este são adicionadas fibras, e a durabilidade do *CRFA* são outros fatores importantes a serem analisados, já que são fundamentais para o desempenho do material. Há ainda, a possibilidade de adição de fibras, não só as de aço, em diferentes tipos de concreto, tais como o concreto auto-adensável, o concreto de alta resistência, o concreto branco ou o concreto protendido e a investigação dos efeitos desta adição nas resistências à compressão, à tração, ao cisalhamento, a ações dinâmicas, ao impacto, na ductilidade, na tenacidade, na fluência e nas demais propriedades do compósito.

Os dados dos distintos experimentos citados podem ser empregados em simulações numéricas executadas em programas apropriados. O programa desenvolvido neste trabalho, por exemplo, permite o estudo do comportamento ao longo do tempo do *CRFA* utilizando o modelo viscoelástico. Para tanto, dados experimentais são necessários para a calibragem deste modelo. Além disso, existe a possibilidade do estudo de vigas de concreto protendido com adição de fibras, uma vez que ao modelo de Hinton (1988) já foi adicionada, por Jost (2006), a consideração da protensão.

Uma vez que o emprego de fibras ao concreto não fica restrito ao caso de fibras de aço, novos modelos constitutivos podem ser propostos e implementados para a situação de adição de fibras produzidas com diferentes materiais (polipropileno, aramida, vidro, fibras naturais). Cabe ressaltar que poucos modelos constitutivos têm sido propostos para simular a resposta mecânica do concreto reforçado com fibras sob estados multiaxiais de tensão e deformação. Talvez esta escassez de modelos seja uma das causas do ainda tímido emprego desse tipo de material em aplicações estruturais, apesar de suas evidentes qualidades (Simões, 1998).

Diversos estudos envolvendo materiais compósitos têm buscado aplicar a teoria matemática da homogeneização. Neste caso um meio heterogêneo, formado por duas ou mais fases, é substituído por um meio homogêneo equivalente e a influência de detalhes microestruturais nas características do composto é avaliada por meio do volume elementar representativo. O *CRFA* é um material compósito e a aplicação da teoria da homogeneização para o estudo do seu comportamento pode trazer promissores resultados na formulação de equações constitutivas macroscópicas para o mesmo.

---

## Referências Bibliográficas

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete (ACI 544-4R-88)**. In: Manual of concrete Practice. Detroit, Michigan, v. 85. 1988.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Guide for Specifying, Proportioning, Mixing, Placing, and Finishing Steel Fiber Reinforced Concrete (ACI 544.3R-93)**. In: Manual of concrete Practice. Detroit, Michigan, v. 90. 1993.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **State-of-the-art report on fiber reinforced concrete (ACI 544.1R-96)**. In: Manual of concrete Practice. Detroit, Michigan, v. 93. 1996.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro, 2004.

AKAZACA, T. Tension Test Method for Concretes. **RILEM Bulletin** (Paris), n. 16, Nov. 1953, p. 13-23.

BARROS, J. A. O. Estado-de-Arte dos betões reforçados com Fibras. **Eng. Civil UM, Departamento de Eng. Civil, Univ. do Minho, Guimarães, Portugal**, n. 3, p. 29-47, 1996.

BENTUR, A.; MINDESS, S. **Fibre Reinforced Cementitious Composites**. New York: Elsevier Science Publishers, 1990.

BERNARDI, S. T. **Avaliação do Comportamento de Materiais Compósitos de Matrizes Cimentícias Reforçadas com Fibra de Aramida Kevlar**. 2003. 164 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

CAMPOS FILHO, A. **Análise Teórico-Experimental de Elementos de Concreto Armado para Obtenção de Modelos Matemáticos**. 1987. p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CARNEIRO, F. L. L. B., BARCELLOS, A. Tensile Strength of Concretes. **RILEM Bulletin** (Paris), n. 13, Mar. 1953, p. 97-123.

CHEN, W.F. **Plasticity in reinforced concrete**. New York: McGraw-Hill, 1982. 474 p.

CHEN, W.F.; HAN, D.J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988.

CHO, S.; KIM, Y. Effects of Steel Fibers on Short Beams Loaded in Shear. **ACI Structural Journal**, v. 100, n. 6, p. 765-774, Nov.-Dec. 2003.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990: Design Code**. London: Thomas Telford Services, 1993.

CTU. CAN THO UNIVERSITY. KOSMATKA, S.; KERKHOFF, B.; PANARESE, W. **Design and Control of Concrete Mixtures. CHAPTER 7 Fibers**. New York: PCA, 2002. 372 p. Disponível em: <<http://www.ctu.edu.vn/colleges/tech/bomon/ktxd/giaotrinh/CONCRETE/Chap.7/Chap7.pdf>>. Acesso em: 15.04.2006.

CUCCHIARA, C.; MENDOLA, L. L.; PAPIA, M. Effectiveness of stirrups and steel fibres as shear reinforcement. **Cement and Concrete Composites**, v. 26, n. 7, p. 777-786, Oct. 2004.

DHONDT, D. **Lightly loaded floors Composite slabs with Steel decking** (Dramix Duo). 2004. Disponível em: <http://www.bekaert.com/building> Acesso em: 10/05/2005.

EL-NIEMA, E. I. Effectiveness of stirrups and steel fibres as shear reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 88, n. 2, p. 178-183, Mar.-Apr. 1991.

ELWI, A. E., HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE**, v. 115, n. 4, p. 740-754, 1989.

FANELLA, D. A. e NAAMAN, A. E. Stress-Strain Properties of Fiber Reinforced Mortar in Compression. **ACI Journal**, v. 82, n. 4, p. 475-483, Jul.-Aug. 1985.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto com Fibras de Aço**, 2000. 69 p. Boletim Técnico, Série BT/PCC/260– Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

FIGUEIREDO, A. D. Concreto com Fibras. **Concreto Ensino, Pesquisa e Realizações. Ibracon**, v. 2. São Paulo: Iapis Gráfica e Editora, 2005. cap.39, p.1195-1225.

FIGUEIREDO, M. P. **Aplicação do Método dos Elementos Discretos na Análise Estática e Dinâmica de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço**. 2006. 92 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

FRANCA, G. F. **Modelos Constitutivos para a Análise de Estruturas de Concreto Armado através do Método dos Elementos Finitos**. 2006. 151 p. Exame de Qualificação (Doutorado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: <http://www.ppgec.ufrgs.br/gfranca/> Acesso em: 01/03/2007.

GARCEZ, E. O. **Análise Teórico-Experimental do Comportamento de Concretos Reforçados com Fibras de Aço Submetidos a Cargas de Impacto**. 2005. 141 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GAVA, G. P. **Análise Teórica-Experimental do Comportamento à Flexão de Vigas de Concreto Reforçado com Fibras de Aço**. 2006. 306 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

---

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamics analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 1988.

HOLANDA, K. M. A. **Análise dos Mecanismos Resistentes e da Similaridade dos Efeitos de Adição de Fibras de Aço na Resistência e na Ductilidade à Punção de Lajes-Cogumelo e ao Cisalhamento de Vigas de Concreto**. 2002. 278 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

HUGHES, B. P.; AND FATTUHI, N. I. Stress-Strain Curves for Fibre Reinforced Concrete in Compression. **Cement and Concrete Research**, v. 7, n. 2, p. 173-183, Mar. 1976.

IYENGAR, K. T. S. R.; AND VISWANATHA, C. S. Discussion of the paper: Stress-Strain Properties of Random Wire Reinforced Concrete. **ACI Journal**, v. 69, n. 6, p. 346-349, Jun. 1972.

JOST, D. T. **Análise de Peças Fletidas com Protensão não Aderente pelo Método dos Elementos Finitos**. 2006. 180 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

KOVÁCS, I.; BALÁZS, G. L. Structural behaviour of steel fibre reinforced concrete. **Structural Concrete**, v. 4, n. 2, p. 57-63, 2003.

LAMBRECHTS, A. **Steel fibres for the Precast Industry** (Dramix). 1999. Disponível em: <http://www.bekaert.com/building> Acessado em: 10/05/2005.

LIM, D. H.; OH, B. H. Experimental and theoretical investigation on the shear of steel fibre reinforced concrete beams. **Engineering Structures**, v. 21, n. 10, p. 937-944, Oct. 1999.

LIM, T. Y.; PARAMASIVAM, P.; LEE, S. L. Analytical Model for Tensile Behavior of Steel-Fiber Concrete. **ACI Materials Journal**, v. , n. , p. 286-298, Jul.-Aug. 1987.

LOBÃO, L. M. M. **Taxa de Armadura Longitudinal de Tração Mínima em Vigas de Concreto de Resistência Normal com Fibras de Aço**. 2005. 127 p. Dissertação (Mestrado) – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MACHADO, M. A. S. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elasto-Viscoplástica de Peças de Concreto Armado e Protendido, submetidas a Estados Planos de Tensão**. 2002. 150 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos**. 2003. 168 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**. São Paulo: Pini, 1994.

MOREIRA, R. S. **Simulação Computacional em Concreto Reforçado com Fibras de Aço**. 2003. 81 p. Dissertação (Mestrado) – Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do norte Fluminense, Campos dos Goytacazes.

MURUGAPPAN, K., PARAMASIVAM, P., E TAN, K. H. Failure envelope for steel-fiber concrete under biaxial compression. **J. Mater. Civ. Eng.**, v. 5, n. 4, p.436–446, 1993.

NAAMAN, A. E.; NAJM, H. S. Bond-slip mechanisms of steel fibers in concrete. **ACI Materials Journal**, v. 88, n. 2, p. 135-145, Mar.-Apr. 1991.

NANNI, A. Splitting-tension test for fiber reinforced concrete. **ACI Materials Journal**, v. 85, n. 4, p. 229-233, Jul.-Aug. 1988.

NARAYANAN, R., DARWISH, I. Y. S. Use of steel fiber as shear reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 84, n. 3, p. 216-227, May-Jun. 1987.

NUNES, L. N. **Contribuição para a Aplicação do Concreto Reforçado com Fibras de Aço em Elementos de Superfície Restringidos**. 2006. 276 p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo.

NUNES, L. N.; AGOPYAN, V. **A Influencia do Fator de Forma da Fibra na Tenacidade à Flexão do Concreto Reforçado com Fibras de Aço**, 1998. 26 p. Boletim Técnico, Série BT/PCC/225 – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

OWEN, D. R. J.; HINTON, **Finite element in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press, 594 p., 1980.

PRATES JÚNIOR, N. P. **Um Modelo Elasto-Viscoplástico para Análise de Peças de Concreto Estrutural, Submetidas a Estados Planos de Tensão, através do Método dos Elementos Finitos**. 1992. 131 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

ROSA, J. I. **Modelagem Numérica - Experimental de Prismas, Placas e Cascas de Compósitos Fibrosos de Altíssima Resistência**. 2005. 173 p. Dissertação (Mestrado) – Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SEOW P. E. C. e SWADDIWUDHIPONG, S. Failure Surface for Concrete under Multiaxial Load—a Unified Approach. **Journal of Materials in Civil Engineering – ASCE**, v. 17, n. 2, p. 219-228, Mar.-Apr. 2005.

SHARMA, A. K. Shear strength of steel fiber reinforced concrete beams. **ACI Journal**, v. 83, n. 4, p. 624-628, Jul.-Aug. 1986.

SIMÕES, L. C. **Um Modelo Constitutivo para Concreto com Fibras**. 1998. 111 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

---

SORIANO, H.L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Edusp, 2003.

STADLOBER, H. **Steel fibres for industrial floors** (Dramix). 2006. Disponível em: <http://www.bekaert.com/building> Acessado em: 10/05/2005.

STADLOBER, H. **Composite slabs with Steel decking** (Dramix).2005. Disponível em: <http://www.bekaert.com/building> Acessado em: 10/05/2005.

SWADDIWUDHIPONG, S. e SEOW P. E. C. Modelling of steel fiber-reinforced concrete under multi-axial loads. **Cement and Concrete Research**, v. 36, n. 7, p. 1354-1361, Jul. 2006.

TAN, K.H.; MURUGAPPAN, K. AND PARAMASIVAN, P. Constitutive Relation for Steel Fibre Concrete Under Biaxial Compression. **Cement & Concrete Composites**, v. 16, n. 1, p. 9-14, 1994.

TORRETI, J. M.; AND DJEBRI, B. Behavior of Steel-Fibre-Reinforced Concretes Under Biaxial Compression Loads. **Cement & Concrete Composites**, v. 17, n. 4, p. 261-266, Apr. 1995.

TRAINA, L. A., and MANSOUR, S. A. Biaxial strength and deformational behavior of plain and steel fiber concrete. **ACI Mater. J.**, v. 88 n. 4, p. 354–362, Jul.-Aug. 1991.

WECHARATANA, M. e SHAH, S. P., A Model for predicting fracture resistance of fibre reinforced concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 13, n. , p. 819-829, 1983.

VANALLI, L., PRADO, A. A., PACCOLA, R. R., e CODA, H. B. Análise não-linear física de meios anisotrópicos reforçados com fibras – aplicação do MEF. In: PROCEEDINGS OF THE XXVI IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING – CILAMCE 2005, 10., 2005, Guarapari, Espírito Santo, Brazil.

YIN, W. S., SU, E. C. M., MANSUR, M. A., and HSU, T. T. C. Biaxial tests of plain and fiber concrete. **ACI Mater. J.**, v. 86, n. 3, p. 236–243, May-Jun. 1989.

ZIENKIEWICZ. O. C. **The finite element method**. London: McGraw-Hill, 1986. 787p.

ZIENKIEWICZ. O. C. TAYLOR, R. L., TOO, J. M. Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 3, p. 275-290, 1971

ZOLLO, R. F. Fiber-reinforced concrete: an overview after 30 years of development. **Cement & Concrete Composites**, v. 19, n. 2, p. 107-122, 1997.

## Fibras de Aço Modeladas como Elementos de Armadura

Na etapa inicial deste trabalho, procurou-se simular o comportamento do material compósito *CRFA*, modelando as fibras como barras de armadura, inseridas em elementos finitos hexaédricos de concreto, conforme proposta de Vanalli *et al.* (2005). As fibras foram consideradas como segmentos curtos de aço, com propriedades específicas, distribuídos aleatoriamente nos elementos de concreto.

Em função da formulação adotada, a localização e a geometria das fibras são independentes da malha de elementos finitos, ou seja, os nós não precisam estar coincidentes com os nós da malha onde a fibra se insere. Isto permite que as fibras sejam colocadas em qualquer posição no domínio do problema. Os deslocamentos nodais das fibras, por sua vez, são escritos em função dos deslocamentos dos nós dos elementos finitos de concreto, onde elas estão inseridas. Nenhum aumento dos graus de liberdade é imposto à análise e nenhuma técnica de redimensionamento de malha é necessária.

As fibras, assim consideradas, funcionam como enrijecedores, aumentando a rigidez total do meio reforçado. O que, na aproximação numérica por elementos finitos, significa que a fibra estará contribuindo com a rigidez do elemento (ou dos elementos) no qual ela está inserida. A matriz de rigidez do meio reforçado,  $[S]^e$ , então, é composta pelas matrizes de rigidez do elemento finito de concreto,  $[S]^c$ , e dos elementos finitos das fibras,  $[S]^f$ , conforme a equação:

$$[S]^e = [S]^c + [S]^f \quad (\text{A.1})$$

A distribuição randômica das fibras permite modelar a fibra conforme ela se apresenta nas estruturas reais. São geradas aleatoriamente as coordenadas iniciais das fibras e os cossenos diretores, que definem a orientação das mesmas no espaço tridimensional, através da função intrínseca *RAN*, da linguagem de programação *FORTRAN*. Deste modo, a disposição de todas as fibras é gerada pelo próprio programa. As coordenadas finais são determinadas através das coordenadas iniciais, dos cossenos diretores e do comprimento desejado para as fibras.

Para verificar a validade desta teoria foram simulados ensaios biaxiais no concreto através do programa implementado e comparados com resultados experimentais de Traina e Mansour (1991). Estes autores testaram corpos-de-prova cúbicos (arestas de 76 mm) de concreto com adição de fibras de 0%, 0,5%, 1% e 1,5% em volume. As fibras utilizadas são do tipo lisas com ganchos nas extremidades, comprimento de 30 mm e diâmetro de 0,5 mm, com o fator de forma,  $l/d$ , de 60 e a resistência à tração de 1172 MPa. O concreto empregado, por sua vez, tinha uma resistência à compressão média de 40,2 MPa.

Conforme constatado pelos experimentos, para cada porcentagem de fibra, as curvas de ruptura são distintas, admitindo-se que as propriedades das fibras as alteram consideravelmente. Na Figura A.1 estão representadas as envoltórias de resistência biaxial do concreto, com diferentes porcentagens de fibras, produzido por Traina e Mansour (1991). Comparam-se os resultados experimentais e aqueles obtidos através do programa, sendo, cada fibra, um elemento de armadura distinto.

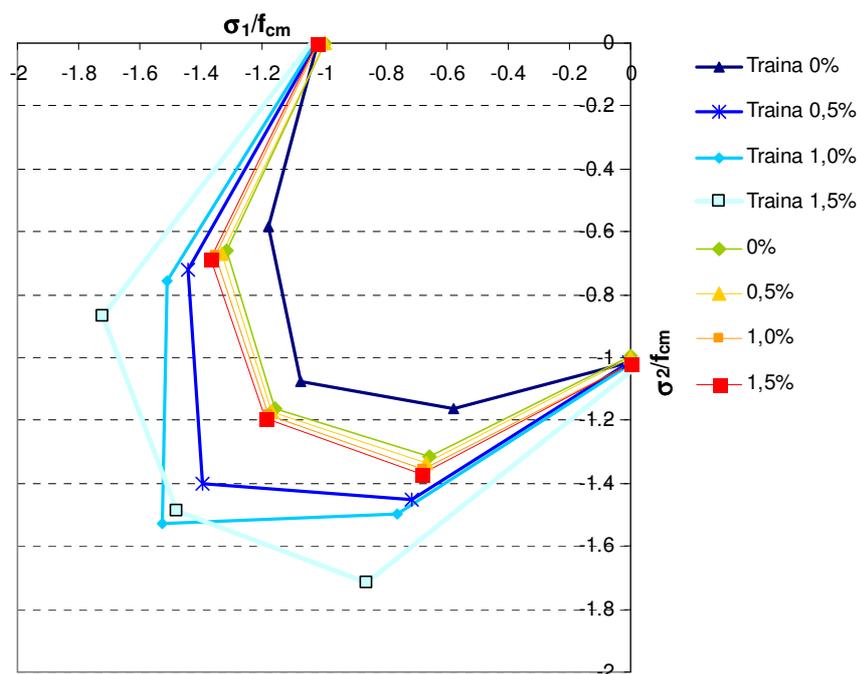


Figura A.1 – Envoltórias de resistência biaxial do concreto com adição de fibras. Dados de ensaios experimentais de Traina e Mansour (1991) e do programa implementado.

Segundo a figura, pode-se observar um aumento da resistência biaxial para as diversas combinações de tensões testadas, porém, tal acréscimo não é tão significativo quanto àqueles observados nos experimentos.

Na Figura A.2, apresentada abaixo, estão graficadas as curvas tensão-deformação para os testes da Figura A.1. Neste caso, verifica-se um aumento da rigidez para o concreto quando são adicionadas diferentes porcentagens de fibras, conforme o esperado.

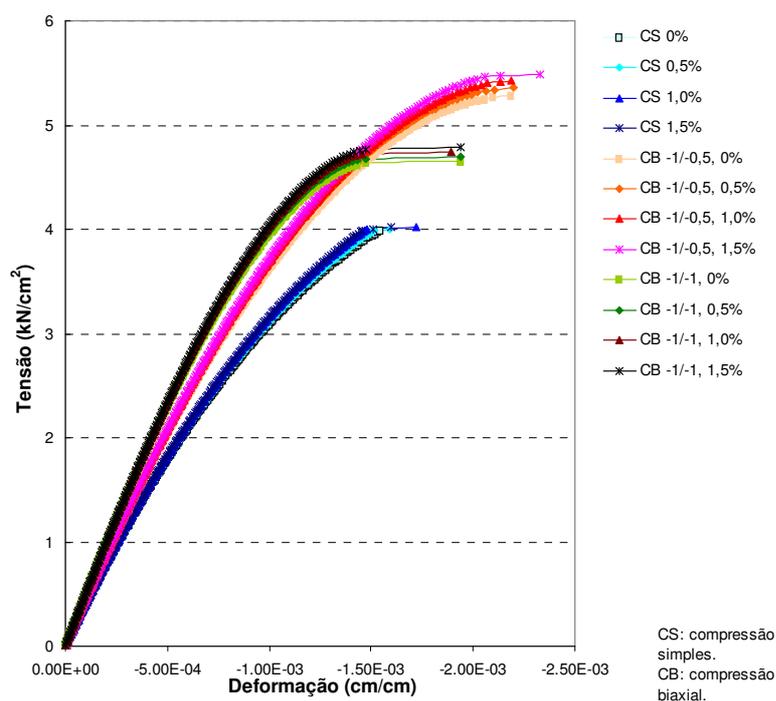


Figura A.2 – Curvas tensão-deformação do para o concreto com adição de fibras de Traina e Mansour (1991), obtidas através do programa implementado.

Na Figura A.3 estão representados os deslocamentos das fibras adicionadas aleatoriamente ao concreto e, na Figura A.4, por sua vez, apresentam-se as tensões desenvolvidas pelas mesmas. Estes resultados são obtidos através dos testes realizados pelo programa implementado e podem ser visualizados com a ferramenta computacional de pós-processamento *GID*<sup>®</sup> (versão 7.2).

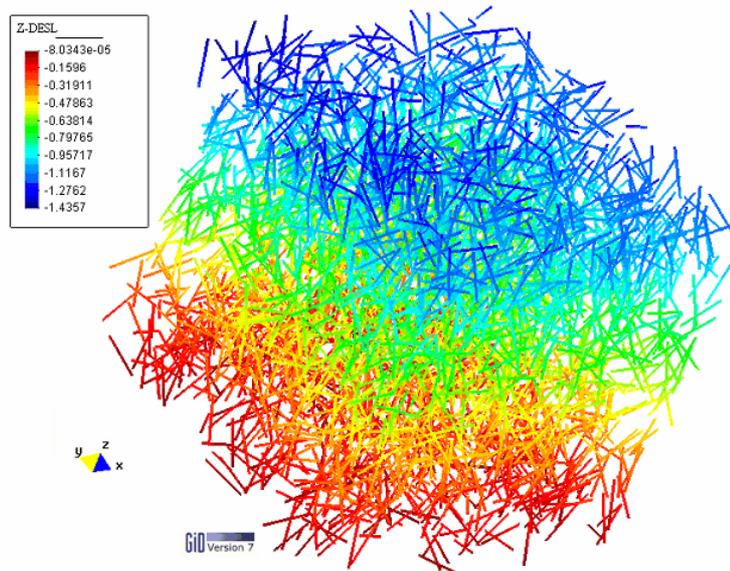


Figura A.3 – Deslocamento das fibras adicionadas aleatoriamente ao concreto.

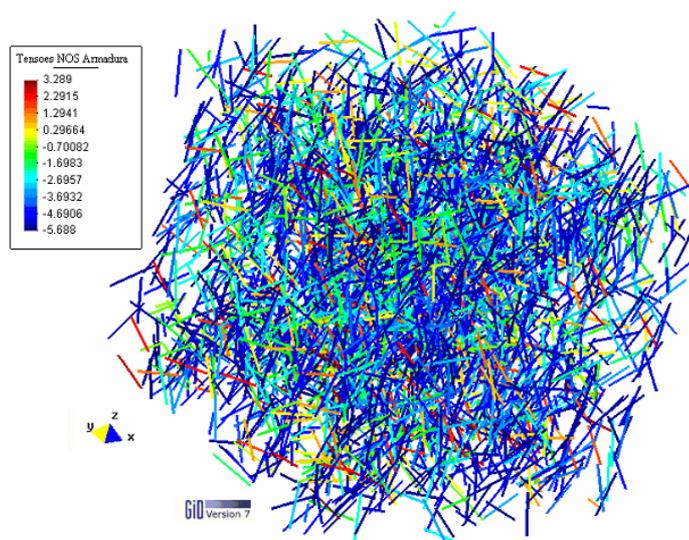


Figura A.4 – Tensões desenvolvidas nas fibras adicionadas ao concreto.

Através das Figuras A.1 e A.2, pode-se observar que o programa implementado foi capaz de modelar o aumento da resistência à compressão biaxial que o material *CRFA* apresenta em relação ao concreto sem fibras. Tal acréscimo, entretanto, não é tão significativo quanto àqueles observados nos experimentos. Conhecer melhor o comportamento deste material possibilitaria realizar alterações no programa, permitindo que este forneça resultados mais próximos aos reais. Além disso, o programa não permite a modelagem das diversas configurações de fibras (fibras

rugosas, com ancoragem, onduladas); segundo Traina e Mansour (1991) ocorrem diferenças significativas nos resultados obtidos para distintos tipos de fibras.

A alternativa de simular as fibras como elementos finitos é bastante interessante, uma vez que ela representa o que ocorre na realidade com o *CRFA*, até mesmo quanto à distribuição aleatória das fibras. Mais estudos, entretanto, são necessários para que resultados adequados possam ser obtidos.

## Apêndice

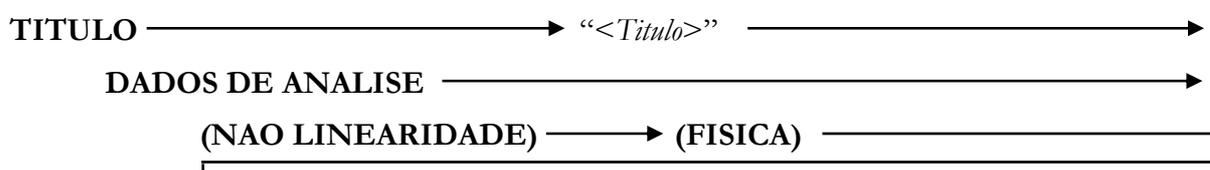
**B****Arquivo de Entrada de Dados**

A entrada de dados é realizada através de linguagem orientada, processo em que os dados são lidos através de um conjunto de palavras e valores numéricos, que expressam comandos a serem interpretados pelo programa computacional. O arquivo utilizado na entrada de dados possui o formato texto (arquivos com extensão “.txt”). Cada uma das linhas deste arquivo corresponde a um comando. Os comandos são formados por uma série de palavras e números lidos seqüencialmente. Estas palavras são identificadas computacionalmente, definindo-se uma ação a ser executada pelo programa. Ao final da leitura e interpretação de todos os comandos, os dados de análise estão prontos para serem utilizados no processo de análise.

O arquivo de entrada de dados é dividido em uma série de comandos principais. O primeiro e último são, respectivamente, os comandos TITULO e FIM. Entre estes, estão os outros quatro comandos principais: DADOS DE ANALISE, DADOS DA MALHA, DADOS ESTRUTURAIIS e DADOS DE CARGA, dentro dos quais, existe uma outra série de subcomandos.

O arquivo de entrada de dados utilizado neste estudo está baseado no trabalho realizado por Jost (2006). Alterações foram efetuadas para que dados sobre o concreto reforçado com fibras, empregados na análise numérica, fossem fornecidos pelo arquivo de entrada de dados. Na Figura B.1 é apresentado o diagrama de sintaxe dos comandos.

As letras maiúsculas e palavras escritas em maiúsculas são constantes da linguagem e devem ser utilizadas sem qualquer modificação. As setas indicam a continuação da linha de comando, que termina quando aparecer um traço vertical. As letras e palavras que aparecerem entre os sinais de maior e menor (< >) indicam que os seus respectivos valores devem ser especificados naquele local. Letras ou palavras entre parênteses são facultativas no comando.







---

22 ATE 57 APASSIVA  
PONTOS DE INTEGRACAO 15  
COORDENADAS MULTIPLAS

1 ATE 7 INICIO 0 0 0 FIM 60 0 0  
9 ATE 15 INICIO 0 10 0 FIM 60 10 0  
17 ATE 23 INICIO 0 0 6 FIM 60 0 6  
25 ATE 31 INICIO 0 10 6 FIM 60 10 6  
93 ATE 99 INICIO 0 0 12 FIM 60 0 12  
101 ATE 107 INICIO 0 10 12 FIM 60 10 12  
147 ATE 153 INICIO 0 0 18 FIM 60 0 18  
155 ATE 161 INICIO 0 10 18 FIM 60 10 18  
33 ATE 38 INICIO 5 0 0 FIM 55 0 0  
48 ATE 53 INICIO 5 10 0 FIM 55 10 0  
55 ATE 60 INICIO 5 0 6 FIM 55 0 6  
70 ATE 75 INICIO 5 10 6 FIM 55 10 6  
109 ATE 114 INICIO 5 0 12 FIM 55 0 12  
124 ATE 129 INICIO 5 10 12 FIM 55 10 12  
163 ATE 168 INICIO 5 0 18 FIM 55 0 18  
178 ATE 183 INICIO 5 10 18 FIM 55 10 18  
40 ATE 46 INICIO 0 5 0 FIM 60 5 0  
62 ATE 68 INICIO 0 5 6 FIM 60 5 6  
116 ATE 122 INICIO 0 5 12 FIM 60 5 12  
170 ATE 176 INICIO 0 5 18 FIM 60 5 18  
77 ATE 83 INICIO 0 0 3 FIM 60 0 3  
85 ATE 91 INICIO 0 10 3 FIM 60 10 3  
131 ATE 137 INICIO 0 0 9 FIM 60 0 9  
139 ATE 145 INICIO 0 10 9 FIM 60 10 9  
185 ATE 191 INICIO 0 0 15 FIM 60 0 15  
193 ATE 199 INICIO 0 10 15 FIM 60 10 15  
209 ATE 216 INICIO 0.5 1.5 4 FIM 40.5 1.5 4  
217 ATE 224 INICIO 0.5 1.5 15 FIM 40.5 1.5 15  
225 ATE 232 INICIO 0.5 8.5 15 FIM 40.5 8.5 15  
233 ATE 240 INICIO 0.5 8.5 4 FIM 40.5 8.5 4

COORDENADAS

8 65 0 0  
16 65 10 0  
24 65 0 6  
32 65 10 6  
84 65 0 3  
92 65 10 3  
100 65 0 12  
108 65 10 12  
138 65 0 9  
146 65 10 9  
154 65 0 18  
162 65 10 18  
192 65 0 15  
200 65 10 15  
39 62.5 0 0  
54 62.5 10 0  
61 62.5 0 6

76 62.5 10 6  
 115 62.5 0 12  
 130 62.5 10 12  
 169 62.5 0 18  
 184 62.5 10 18  
 47 65 5 0  
 69 65 5 6  
 123 65 5 12  
 177 65 5 18  
 201 0 1.5 4  
 202 0 8.5 4  
 203 0 8.5 15  
 204 0 1.5 15  
 205 65 1.5 4  
 206 65 8.5 4  
 207 65 8.5 15  
 208 65 1.5 15

#### CONETIVIDADES MULTIPLAS

1 ATE 7 NOS 1 2 10 9 17 18 26 25 33 41 48 40 55 63 70 62 77 78 86 85 PASSO 1  
 8 ATE 14 NOS 17 18 26 25 93 94 102 101 55 63 70 62 109 117 124 116 131 132 140  
 139 PASSO 1  
 15 ATE 21 NOS 93 94 102 101 147 148 156 155 109 117 124 116 163 171 178 170  
 185 186 194 193 PASSO 1  
 26 ATE 33 NOS 209 233 PASSO 1  
 34 ATE 41 NOS 217 225 PASSO 1  
 42 ATE 49 NOS 209 217 PASSO 1  
 50 ATE 57 NOS 233 225 PASSO 1

#### CONETIVIDADES

22 201 205  
 23 202 206  
 24 203 207  
 25 204 208

#### DADOS DE CARGA

##### CARREGAMENTO 1

DATA 28

##### CARGAS NODAIS

151 159 CARGA Z -20  
 174 CARGA Z -80

#### DADOS ESTRUTURAIIS

##### PROPRIEDADES

1 ATE 21 FCM28 3.87 FT 0.4 FIBRA 1.0 K 0.95 TENSAO TU 0.2 POISSON 0.2  
 CIMENTO 0 ESPESSURA FICTICIA 6.43  
 22 ATE 23 E 21000 DIAMETRO 1.6 FY 42 ENDURECIMENTO 1  
 24 ATE 25 E 21000 DIAMETRO 1.0 FY 42 ENDURECIMENTO 1  
 26 ATE 57 E 21000 DIAMETRO 0.6 FY 35.9 ENDURECIMENTO 1

##### RESTRICOES NODAIS

1 9 INCOGNITAS Z  
 40 INCOGNITAS Y Z  
 154 192 100 138 24 84 8 162 200 108 146 32 92 16 47 69 123 177 INCOGNITAS X

FIM

## Saída Gráfica de Resultados

Em uma análise numérica, a visualização dos resultados é de fundamental importância para a compreensão e interpretação da solução de determinado problema. Deslocamentos, tensões, deformações específicas e a deformada da estrutura são itens que definem o comportamento de uma estrutura e que, sendo visualizados numa saída gráfica tornam-se muito mais acessíveis. Desta forma, adotou-se a ferramenta computacional de pós-processamento *GID*<sup>®</sup> (versão 7.2), que é disponibilizada gratuitamente pelos autores em sua versão educacional e que possui grande versatilidade. O *GID*<sup>®</sup> possui uma interface gráfica interativa que permite a visualização de todos os dados resultantes da simulação numérica por elementos finitos. Além disso, é possível a criação de animações dos resultados e também gráficos relacionados às análises.

No pós-processamento do *GID*<sup>®</sup>, a comunicação com o programa de análise é feita através de dois tipos de arquivos: um com extensão “.msh”, que contém os dados da malha, como coordenadas dos nós, suas conectividades e tipos dos elementos; e outro arquivo com extensão “.res”, que possui os resultados nodais e nos pontos de integração para deslocamentos, deformações específicas e tensões no concreto e armadura. Os dois arquivos devem possuir o mesmo nome e devem estar localizados no mesmo diretório do computador para que seja possível a leitura dos resultados. O pós-processamento através do *GID*<sup>®</sup>, adotado neste estudo, foi desenvolvido por Jost (2006) e utiliza os comandos e ferramentas de Ajuda fornecidas pelo próprio programa.

A seguir, é mostrado um exemplo de cada arquivo utilizado pós-processamento.

## C.1 ARQUIVO COM EXTENSÃO “.msh”

MESH "Malha dos Elementos de Concreto" dimension = 3 Elemtyp Hexahedra Nnode = 20  
Coordinates

1	0.000	0.000	0.000
2	7.600	0.000	0.000
3	7.600	7.600	0.000
4	0.000	7.600	0.000

---

5	0.000	0.000	7.600
6	7.600	0.000	7.600
7	7.600	7.600	7.600
8	0.000	7.600	7.600
9	3.800	0.000	0.000
10	7.600	3.800	0.000
11	3.800	7.600	0.000
12	0.000	3.800	0.000
13	3.800	0.000	7.600
14	7.600	3.800	7.600
15	3.800	7.600	7.600
16	0.000	3.800	7.600
17	0.000	0.000	3.800
18	7.600	0.000	3.800
19	7.600	7.600	3.800
20	0.000	7.600	3.800

End coordinates

Elements

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	17	18	19	20	13
14	15	16															

End elements

MESH "Malha dos Elementos da Armadura" dimension = 3 Elemtyp linear Nnode = 3

Coordinates

21	0.000	1.000	1.000
22	3.800	1.000	1.000
23	7.600	1.000	1.000
24	0.000	6.600	1.000
25	3.800	6.600	1.000
26	7.600	6.600	1.000

End coordinates

Elements

2	21	23	22
3	24	26	25

End elements

## C.2 ARQUIVO COM EXTENSÃO “.res”

GiD Post Results File 1.0

GaussPoints "PI Concr" ElemType Hexahedra

Number Of Gauss Points: 15

Natural Coordinates: given

0.0	0.0	0.0
+1.0	0.0	0.0

---

```

-1.0      0.0      0.0
0.0      +1.0     0.0
0.0      -1.0     0.0
0.0      0.0     +1.0
0.0      0.0     -1.0
+0.67    +0.67    +0.67
+0.67    +0.67    -0.67
+0.67    -0.67    +0.67
+0.67    -0.67    -0.67
-0.67    +0.67    +0.67
-0.67    +0.67    -0.67
-0.67    -0.67    +0.67
-0.67    -0.67    -0.67
end gausspoints

GaussPoints "PI Arm" ElemType Linear
  Number Of Gauss Points: 3
  Nodes not included
  Natural Coordinates: internal
end gausspoints

Result "DESLOCAMENTOS" "Load Analysis" 4 Vector OnNodes
ComponentNames "X-DESL", "Y-DESL", "Z-DESL"
Values
  1  0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
  2  0.63303E-04 0.00000E+00 0.00000E+00
  3  0.59612E-04 0.10035E-03 0.00000E+00
  4  0.00000E+00 0.91494E-04 0.00000E+00
  5  0.00000E+00 0.00000E+00 -0.44395E-03
  6  0.96054E-04 0.00000E+00 -0.45478E-03
  7  0.94991E-04 0.89668E-04 -0.45232E-03
  8  0.00000E+00 0.89764E-04 -0.44242E-03
  9  0.32415E-04 0.00000E+00 0.00000E+00
 10 0.70636E-04 0.49398E-04 0.00000E+00
 11 0.30515E-04 0.92898E-04 0.00000E+00
 12 0.00000E+00 0.46222E-04 0.00000E+00
 13 0.46922E-04 0.00000E+00 -0.44492E-03
 14 0.93325E-04 0.45336E-04 -0.45443E-03
 15 0.45964E-04 0.90145E-04 -0.44288E-03
 16 0.00000E+00 0.44666E-04 -0.44408E-03
 17 0.00000E+00 0.00000E+00 -0.22018E-03
 18 0.79448E-04 0.00000E+00 -0.22806E-03
 19 0.76987E-04 0.95618E-04 -0.22653E-03
 20 0.00000E+00 0.91115E-04 -0.21913E-03
 21 0.00000E+00 0.12214E-04 -0.57602E-04
 22 0.35790E-04 0.12157E-04 -0.58285E-04
 23 0.70573E-04 0.12777E-04 -0.60139E-04
 24 0.00000E+00 0.79626E-04 -0.57358E-04
 25 0.34467E-04 0.80525E-04 -0.57989E-04
 26 0.68080E-04 0.85891E-04 -0.59800E-04
End Values

```

---

Result "Tensões PI Concr" "Load Analysis" 4 Matrix OnGaussPoints "PI Concr"

Values

1	-0.4469E-02	0.1479E-03	-0.2391E+00	0.1142E-03	0.5155E-04	0.3679E-03
	-0.4724E-02	0.9545E-03	-0.2441E+00	0.4723E-03	-0.5647E-03	0.1364E-02
	-0.5068E-02	-0.3478E-03	-0.2393E+00	-0.1368E-03	-0.1131E-03	0.2876E-03
	-0.6870E-02	-0.1289E-03	-0.2389E+00	-0.8814E-03	0.7407E-04	0.1795E-02
	-0.5848E-02	-0.2319E-03	-0.2395E+00	0.1228E-02	-0.1024E-03	0.1475E-02
	0.1743E-02	0.3246E-03	-0.2393E+00	-0.6414E-04	-0.2982E-04	-0.1144E-03
	-0.1041E-01	-0.4681E-03	-0.2392E+00	0.2847E-03	0.2525E-05	0.1952E-02
	0.9007E-03	0.3266E-03	-0.2403E+00	0.2241E-03	-0.6347E-03	0.8220E-03
	-0.1210E-01	0.7089E-03	-0.2427E+00	-0.1796E-02	-0.7501E-03	0.3841E-02
	0.1148E-02	0.9585E-03	-0.2406E+00	-0.3909E-03	-0.1797E-03	0.3930E-03
	-0.1155E-01	-0.6503E-03	-0.2440E+00	0.3450E-02	-0.5779E-04	0.3548E-02
	-0.2216E-02	-0.2329E-03	-0.2401E+00	0.1814E-03	0.2596E-03	0.8907E-03
	-0.1006E-01	-0.1102E-02	-0.2371E+00	-0.8120E-03	0.1505E-03	0.5251E-03
	-0.1325E-02	-0.1958E-03	-0.2403E+00	-0.4704E-04	-0.2374E-03	0.7171E-03
	-0.8687E-02	-0.3108E-03	-0.2376E+00	0.5004E-03	-0.3326E-04	0.4695E-03

End Values

Result "Deformações PI Concr" "Load Analysis" 4 Matrix OnGaussPoints "PI Concr"

Values

1	0.1075E-04	0.1211E-04	-0.5852E-04	0.6742E-07	0.3042E-07	0.2173E-06
	0.1090E-04	0.1258E-04	-0.5979E-04	0.2789E-06	-0.3336E-06	0.8057E-06
	0.1060E-04	0.1199E-04	-0.5843E-04	-0.8070E-07	-0.6665E-07	0.1697E-06
	0.1013E-04	0.1212E-04	-0.5827E-04	-0.5196E-06	0.4362E-07	0.1058E-05
	0.1045E-04	0.1211E-04	-0.5854E-04	0.7250E-06	-0.6043E-07	0.8713E-06
	0.1228E-04	0.1186E-04	-0.5890E-04	-0.3793E-07	-0.1762E-07	-0.6735E-07
	0.9294E-05	0.1222E-04	-0.5815E-04	0.1678E-06	0.1466E-08	0.1151E-05
	0.1212E-04	0.1195E-04	-0.5909E-04	0.1323E-06	-0.3748E-06	0.4855E-06
	0.9047E-05	0.1283E-04	-0.5910E-04	-0.1061E-05	-0.4433E-06	0.2270E-05
	0.1217E-04	0.1211E-04	-0.5922E-04	-0.2309E-06	-0.1061E-06	0.2322E-06
	0.9313E-05	0.1253E-04	-0.5938E-04	0.2039E-05	-0.3414E-07	0.2097E-05
	0.1133E-04	0.1192E-04	-0.5878E-04	0.1069E-06	0.1530E-06	0.5252E-06
	0.9305E-05	0.1195E-04	-0.5762E-04	-0.4787E-06	0.8869E-07	0.3095E-06
	0.1156E-04	0.1189E-04	-0.5887E-04	-0.2775E-07	-0.1399E-06	0.4229E-06
	0.9626E-05	0.1209E-04	-0.5784E-04	0.2950E-06	-0.1960E-07	0.2768E-06

End Values

Result "Tensoes PI Arm" "Load Analysis" 4 Scalar OnGaussPoints "PI Arm"

Values

2	0.1993E+00
	0.1950E+00
	0.1907E+00
3	0.1918E+00
	0.1881E+00
	0.1845E+00

End Values

Result "Deformacoes PI Arm" "Load Analysis" 4 Scalar OnGaussPoints "PI Arm"

Values

2 0.9491E-05  
 0.9286E-05  
 0.9080E-05  
 3 0.9132E-05  
 0.8958E-05  
 0.8784E-05

End Values

Result "Tensoes NOS Concreto" "Load Analysis" 4 Matrix OnNodes

Values

1	-0.8556E-02	0.6570E-03	-0.2340E+00	-0.2534E-03	-0.3230E-03	-0.1432E-02
2	-0.2115E-01	-0.3233E-02	-0.2523E+00	0.1128E-01	0.5508E-03	0.8651E-02
3	-0.2148E-01	0.2566E-02	-0.2481E+00	-0.7149E-02	-0.2408E-02	0.9266E-02
4	-0.1238E-01	-0.2919E-02	-0.2334E+00	-0.1625E-02	0.3884E-03	-0.1808E-02
5	-0.2209E-02	-0.5041E-03	-0.2452E+00	-0.1521E-02	-0.1122E-02	0.3390E-02
6	0.7626E-02	0.2222E-02	-0.2380E+00	-0.4357E-02	0.1068E-03	-0.8221E-03
7	0.8534E-02	-0.6838E-03	-0.2378E+00	0.2367E-02	-0.1865E-02	0.3704E-03
8	-0.3980E-02	-0.5698E-03	-0.2458E+00	0.3040E-02	0.9146E-03	0.3508E-02
9	-0.1325E-01	-0.1013E-02	-0.2400E+00	0.2600E-02	0.1205E-03	0.3076E-02
10	-0.1392E-01	0.1828E-03	-0.2458E+00	0.1073E-02	-0.7317E-03	0.4574E-02
11	-0.1463E-01	-0.6890E-03	-0.2387E+00	-0.1740E-02	-0.2410E-03	0.3354E-02
12	-0.1103E-01	-0.9175E-03	-0.2377E+00	-0.2246E-03	-0.3834E-04	0.2362E-03
13	0.1883E-02	0.1793E-03	-0.2395E+00	-0.1411E-03	-0.8267E-04	0.9375E-03
14	0.4591E-02	0.1077E-02	-0.2423E+00	-0.1274E-03	-0.7431E-03	0.4766E-03
15	0.9761E-03	-0.2385E-03	-0.2390E+00	-0.4034E-04	-0.1138E-03	0.1369E-02
16	0.1194E-02	-0.1687E-03	-0.2411E+00	-0.6509E-04	-0.1029E-03	0.2107E-03
17	-0.6153E-02	-0.3949E-03	-0.2397E+00	0.4459E-03	-0.2472E-03	0.8363E-03
18	-0.6343E-02	0.3113E-03	-0.2446E+00	0.2128E-02	-0.3655E-03	0.2991E-02
19	-0.7043E-02	0.7313E-03	-0.2434E+00	-0.1056E-02	-0.1110E-02	0.3493E-02
20	-0.7736E-02	-0.9085E-03	-0.2391E+00	-0.6097E-03	0.1050E-03	0.1043E-02

End Values

Result "Deformacoes NOS Concreto" "Load Analysis" 4 Matrix OnNodes

Values

1	0.9387E-05	0.1209E-04	-0.5692E-04	-0.1517E-06	-0.1907E-06	-0.8474E-06
2	0.7520E-05	0.1282E-04	-0.6088E-04	0.6669E-05	0.3253E-06	0.5113E-05
3	0.6985E-05	0.1410E-04	-0.6020E-04	-0.4226E-05	-0.1423E-05	0.5479E-05
4	0.8635E-05	0.1142E-04	-0.5648E-04	-0.9564E-06	0.2289E-06	-0.1068E-05
5	0.1152E-04	0.1202E-04	-0.5985E-04	-0.8975E-06	-0.6614E-06	0.1999E-05
6	0.1351E-04	0.1191E-04	-0.5885E-04	-0.2573E-05	0.6311E-07	-0.4884E-06
7	0.1391E-04	0.1118E-04	-0.5877E-04	0.1398E-05	-0.1101E-05	0.2178E-06
8	0.1116E-04	0.1217E-04	-0.6000E-04	0.1794E-05	0.5390E-06	0.2069E-05
9	0.8678E-05	0.1229E-04	-0.5821E-04	0.1536E-05	0.7114E-07	0.1816E-05
10	0.8790E-05	0.1296E-04	-0.5977E-04	0.6338E-06	-0.4323E-06	0.2704E-05
11	0.8266E-05	0.1238E-04	-0.5786E-04	-0.1028E-05	-0.1427E-06	0.1981E-05
12	0.9073E-05	0.1205E-04	-0.5770E-04	-0.1327E-06	-0.2273E-07	0.1390E-06
13	0.1230E-04	0.1179E-04	-0.5887E-04	-0.8326E-07	-0.4859E-07	0.5522E-06
14	0.1309E-04	0.1205E-04	-0.5981E-04	-0.7561E-07	-0.4387E-06	0.2817E-06
15	0.1207E-04	0.1171E-04	-0.5869E-04	-0.2409E-07	-0.6744E-07	0.8068E-06
16	0.1219E-04	0.1179E-04	-0.5916E-04	-0.3894E-07	-0.6071E-07	0.1233E-06
17	0.1033E-04	0.1203E-04	-0.5843E-04	0.2634E-06	-0.1457E-06	0.4931E-06

---

18	0.1057E-04	0.1254E-04	-0.5982E-04	0.1258E-05	-0.2158E-06	0.1768E-05
19	0.1032E-04	0.1262E-04	-0.5953E-04	-0.6240E-06	-0.6559E-06	0.2064E-05
20	0.9945E-05	0.1196E-04	-0.5820E-04	-0.3595E-06	0.6162E-07	0.6153E-06

End Values

Result "Tensoes NOS Armadura" "Load Analysis" 4 Scalar OnNodes

Values

21	0.2006E+00
22	0.1950E+00
23	0.1894E+00
24	0.1928E+00
25	0.1881E+00
26	0.1834E+00

End Values

Result "Deformacoes NOS Armadura" "Load Analysis" 4 Scalar OnNodes

Values

21	0.9551E-05
22	0.9286E-05
23	0.9021E-05
24	0.9183E-05
25	0.8958E-05
26	0.8733E-05

End Values