

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos  
Laminados utilizando Algoritmos Genéticos**

**FELIPE SCHAEGLER DE ALMEIDA**

Porto Alegre  
Dezembro de 2006

**FELIPE SCHAEGLER DE ALMEIDA**

**Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos  
Laminados utilizando Algoritmos Genéticos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre  
Dezembro de 2006

---

Snnnt SCHAEDLER DE ALMEIDA, Felipe

Otimização de Estruturas de Materiais  
Compósitos Laminados utilizando Algoritmos  
Genéticos/ Felipe Schaedler de Almeida. – 2006.

Dissertação de mestrado – Universidade  
Federal do Rio Grande do Sul, Escola de  
Engenharia, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2006.

Orientação do Prof. Dr. Armando Miguel  
Awruch.

1. Compósitos laminados. 2. Algoritmos  
genéticos. 3. Otimização. 4. Elementos finitos I.  
Awruch, Armando M.. II. D.Sc..

CDU –ver bibliotecário

**FELIPE SCHAEGLER DE ALMEIDA**

**Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos  
Laminados utilizando Algoritmos Genéticos**

Esta Dissertação de Mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de  
MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor  
orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade  
Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 08 de Dezembro de 2006

Prof. Armando Miguel Awruch  
D. Sc. COPPE/UFRJ  
Orientador

Prof. Fernando Schnaid  
Coordenador do PPGE/UFGRS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Inácio Benvegnu Morsch (PPGE/UFGRS)**  
Dr. PPGE/UFGRS

**Prof. Herbert Martins Gomes (PROME/UFGRS)**  
Dr. PPGE/UFGRS

**Prof. Sérgio Frascino Müller de Almeida (CTA/ITA)**  
PhD. University of Kansas

---

Dedico este trabalho aos meus pais, José Milton  
Kerpel de Almeida e Sônia Teresinha Schaedler de  
Almeida.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Armando M. Awruch, pela orientação, dedicação e incentivo durante a realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior – CAPES, pela bolsa de estudos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC/UFRS, pelos ensinamentos transmitidos.

Aos colegas de Pós-Graduação, pela convivência frutífera e agradável.

À Celine, meu amor, pelo carinho e compreensão.

E principalmente aos meus pais Milton e Sônia, e meu irmão Guilherme, por terem me apoiado e incentivado durante toda minha vida.

---

## RESUMO

ALMEIDA, F. S. **Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados utilizando Algoritmos Genéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2006.

O emprego dos compósitos laminados como material estrutural vem crescendo nos últimos tempos, incentivado pela suas excelentes propriedades mecânicas e baixo peso. Em consenso com todo o esforço científico dedicado a essa área, o presente trabalho visa a implementação de uma ferramenta computacional capaz de otimizar estruturas complexas fabricadas com tais materiais. Para tanto são utilizados os Algoritmos Genéticos (AG) como método de otimização, construídos para tratar especificamente esses problemas. São incorporadas várias modificações à estrutura clássica, apresentadas em outros trabalhos encontrados na literatura, o que possibilita um incremento no desempenho do algoritmo. Paralelamente é desenvolvido um programa de análise estrutural, empregando o MEF, que dá suporte ao algoritmo de otimização e permite sua aplicação a casos envolvendo estruturas mais complexas que as suportadas pelas formulações matemáticas fechadas. Um elemento finito triangular plano para casca e placas é utilizado com modificações destinadas ao tratamento desses materiais não convencionais. Sua formulação permite a incorporação de não-linearidade geométrica à análise, que é efetivada pelo emprego do Método do Controle dos Deslocamentos Generalizados (MCDG) na solução do problema. Também são realizadas análises de flambagem das estruturas e de falha dos materiais, sendo a última baseada no critério de Tsai-Wu. O trabalho em conjunto dos dois elementos desenvolvidos possibilita abordagens bastante sofisticadas nas otimizações, o que é demonstrado nos exemplos de aplicação. Esses incluem a manipulação de uma gama de variáveis envolvidas em otimizações multiobjetivas, e otimização do comportamento pós-flambagem.

Palavras-chave: Compósitos laminados; algoritmos genéticos; otimização, elementos finitos.

## ABSTRACT

ALMEIDA, F. S. **Otimização de Estruturas de Materiais Compósitos Laminados utilizando Algoritmos Genéticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2006.

### **Laminated composite material structures optimization with genetic algorithms**

The use of laminated composite as a structural material has been growing, stimulated by their excellent mechanical properties and low weight. Following all the scientific effort dedicated to this area, the present work aims at implementing a computational tool capable of optimizing complex structures manufactured with these materials. For this reason Genetic Algorithms (GA) are used as the optimization method, constructed to deal specifically with these problems. Many modifications are introduced to the classical structures of GA, found in other works, making possible an improvement on the algorithm performance. At the same time, a structural analysis program is developed, based on the FEM to give support for the optimization algorithm allowing its application to more complex structures than those supported by closed mathematical formulations. A plate and shell flat triangular finite element is used with modifications in order to deal with these non conventional materials. A geometrically non linear analysis is supported by the element formulation and the problem solution is carried on using the Generalized Displacement Control Method (GDCM). Buckling and material failure analysis are also performed, the latter based on the Tsai-Wu criterion. The two developed topics working together allow very sophisticated considerations in the optimization process, as can be observed in the examples presented here. These examples include the manipulation of many variables involved multiobjective optimizations and postbuckling behavior optimization.

Key-words: Laminated composites; genetic algorithms; optimization; finite elements



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Estrutura básica do AG .....	4
Figura 1.2: Lâmina formada por matriz envolvendo reforço de fibras unidirecionais .....	9
Figura 1.3: Formação do compósito laminado pela sobreposição de camadas com reforço de fibras unidirecionais.....	9
Figura 2.1: Graus de liberdade do elemento triangular plano para placa e casca.....	19
Figura 2.2: Lâminas formando o laminado e ângulo $\theta$ entre eixo principal do material 1-2 e sistema x-y do laminado.....	22
Figura 2.3: Graus de liberdade de membrana mais rotação em torno do eixo z.....	26
Figura 2.4: Graus de liberdade de flexão.....	28
Figura 2.5: Representação dos nós intermediários e direções perpendicular e paralela aos lados.....	30
Figura 2.6: Sistemas de coordenadas global e local para um elemento triangular.....	38
Figura 2.7: Deslocamento total de membrana para o elemento no instante $t$ .....	40
Figura 2.8: Ângulo $\delta$ entre sistemas de eixos locais do elemento e eixos principais do material.....	44
Figura 2.9: Características de um sistema não-linear.....	46
Figura 3.1: Fluxograma básico do AG.....	55
Figura 3.2: Fluxograma da geração da população de filhos.....	56
Figura 3.3: Alfabeto de codificação das propriedades dos laminados.....	59
Figura 4.1: Placa laminada quadrada simplesmente apoiada.....	80
Figura 4.2: Curva pressão-deslocamento da placa ortotrópica simplesmente apoiada..	81
Figura 4.3: Placa laminada quadrada.....	82
Figura 4.4: Curva pressão-deslocamento central para placa quadrada laminada [90, 0].....	83
Figura 4.5: Casca em cilíndrica sob carga concentrada.....	84
Figura 4.6: Curvas carga-deslocamento para espessura de 12,7mm.....	85
Figura 4.7: Curvas carga-deslocamento para espessura de 6,35mm e laminação [90,0, 90]	86
Figura 4.8: Curvas carga-deslocamento para espessura de 6,35mm e laminação [0,90,0]	87
Figura 4.9: Painel cilíndrico submetida a carga pontual.....	87
Figura 4.10: Curva carga-deslocamento para painel cilíndrico engastado nas bordas..	88
Figura 4.11: Placa apoiada sob carga de compressão uniaxial.....	90
Figura 4.12: Modo de flambagem da placa apoiada sob carga de compressão uniaxial.....	90
Figura 4.13: Placa apoiada sob carga de compressão biaxial.....	91
Figura 4.14: Modo de flambagem da placa apoiada sob carga de compressão biaxial.	92

Figura 4.15: Malha de elementos finitos para placa retangular simplesmente apoiada.	93
Figura 4.16: Tensões nas faces superior e inferior da placa.....	95
Figura 4.17: Malha de elementos finitos e indicação do ponto de integração onde são comparadas as tensões calculadas.....	96
Figura 4.18: Curva tensão $\sigma_1$ - nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1.....	97
Figura 4.19: Curva tensão $\sigma_2$ - nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1.....	97
Figura 4.20: Curva tensão $\tau_{12}$ - nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1.....	98
Figura 4.21: Placa quadrada com malha de elementos finitos e condições de contorno.....	99
Figura 4.22: Peso e deslocamento central das estruturas que não violam a restrição do problema, considerando pressão de 0,1 MPa.....	102
Figura 4.23: Peso e deslocamento máximo das soluções obtidas nas otimizações.....	105
Figura 4.24: Evolução de peso e de deslocamento máximo das soluções ótimas obtidas para consecutivos valores de $\alpha$ .....	106
Figura 4.25: Número médio de análises requeridas nas otimizações para cada valor de $\alpha$ .....	106
Figura 4.26: Confiabilidade aparente para OBJ1.....	107
Figura 4.27: Confiabilidade aparente para OBJ2.....	107
Figura 4.28: Confiabilidade aparente para OBJ2 com parâmetros do AG modificados..	109
Figura 4.29: Placa de compósito laminado sujeita a carregamento de compressão e cisalhamento no seu plano.....	110
Figura 4.30: Peso e custo de todas as estruturas que não violam as restrições.....	111
Figura 4.31: Confiabilidade aparente do algoritmo e seu desvio padrão.....	115
Figura 4.32: Média de análises requeridas em otimizações.....	116
Figura 4.33: Casca em cilíndrica submetida a carga uniformemente distribuída...	117
Figura 4.34: Gráfico nível de carga crítico x deslocamento central máximo das soluções que não violam restrições do problema.....	119
Figura 4.35: Número médio de análises requeridas por otimização e confiabilidade aparente para cada combinação de parâmetros do AG.....	122

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Propriedades do material da placa ortotrópica.....	81
Tabela 4.2: Deslocamento central da placa ortotrópica simplesmente apoiada.....	81
Tabela 4.3: Propriedades do material e dados geométricos.....	82
Tabela 4.4: Constantes elásticas do compósito.....	85
Tabela 4.5: Constantes elásticas do compósito.....	88
Tabela 4.6: Constantes elásticas do compósito kevlar-epoxy .....	89
Tabela 4.7: Constantes elásticas do compósito grafite-epoxy.....	91
Tabela 4.8: Propriedades do material.....	94
Tabela 4.9: Tensões no ponto próximo ao centro da placa para faces superior e inferior.....	94
Tabela 4.10: Propriedades do compósito.....	100
Tabela 4.11: Alfabeto de codificação dos ângulos e das espessuras.....	100
Tabela 4.12: Conjunto de pontos ótimos.....	103
Tabela 4.13: Parâmetros do AG.....	104
Tabela 4.14: Ponto ótimo obtido para cada valor de $\alpha$ .....	105
Tabela 4.15: Parâmetros modificados para o AG.....	108
Tabela 4.16: Propriedades dos materiais compósitos.....	110
Tabela 4.17: Alfabeto de codificação dos ângulos e dos materiais.....	112
Tabela 4.18: Conjunto de pontos ótimos.....	112
Tabela 4.19: Parâmetros para o AG.....	114
Tabela 4.20: Pontos ótimos para cada valor de $\alpha$ .....	114
Tabela 4.21: Propriedades do compósito glass-epoxy.....	118
Tabela 4.22: Alfabeto de codificação dos ângulos.....	118
Tabela 4.23: Parâmetros estudados do AG.....	120
Tabela 4.24: Combinações dos parâmetros estudados e resultados obtidos pelo AG...	121
Tabela 4.25: Melhores combinações segundo ordem crescente de confiabilidade aparente.....	123

## LISTA DE SIGLAS

AG: Algoritmo Genético;

CST: Constant Stress Triangular element;

DKT: Discrete Kirchhoff Triangular element;

EM: Elitismo Múltiplo

FPL: Falha da Primeira Lâmina;

FUL: Falha Última de Laminado;

gdl: Grau de Liberdade;

*ge*: Grafite-Epoxi;

GSP: General Stiffness Parameter;

*ke*: Kevlar-Epoxi;

MCDG: Método do Controle por Deslocamentos Generalizados;

MEF: Método dos Elementos Finitos;

TCL: Teoria Clássica dos Laminados;

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$  : Módulo de elasticidade longitudinal;

$G$  : Módulo de elasticidade transversal;

$\nu$  : Coeficiente de Poisson;

$h$  : Espessura total do laminado;

$t_{l\grave{a}mina}$  : Espessura da lâmina;

$\rho$  : Peso específico do material;

$C$  : Custo do material por unidade de peso;

$A$  : Área do elemento finito;

$L_i$  : Coordenadas de área em região triangular;

$\xi, \eta$  : Coordenadas de área em região triangular;

$x, y, z$  : Coordenadas cartesianas;

$u_x, u_y, w$  : Componentes de deslocamento de translação da placa ou casca;

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  : Componentes de deslocamento de rotação da placa ou casca;

$b_i, c_i$  : Relações geométricas do elemento finito;

$l_{ij}$  : Comprimento do lado  $ij$  do elemento finito;

$t$  : Instante de tempo;

$t\lambda^{(i)}$  : Parâmetro de incremento de carga do MCDG;

$tNC^{(i)}$  : Nível de carga do MCDG;

$\theta$  : ângulo de orientação das fibras de uma lâmina em relação ao sistema de eixos do laminado;

$\varepsilon_i, \varepsilon_j, \gamma_{ij}$  : Componentes de deformação;

$\sigma_i, \sigma_j, \tau_{ij}$  : Componentes de tensão;

$\{\varepsilon\}$  : Vetor de deformações lineares;

$\{\eta\}$ : Vetor dos componentes não-lineares da deformação de Lagrange;

$\{\sigma\}$ : Vetor de tensões;

$\{\varepsilon^0\}$ : Vetor de deformações no plano médio do laminado;

$\{\kappa\}$ : Vetor de curvaturas;

$\{N\}$ : Vetor de forças normais;

$\{M\}$ : Vetor de momentos;

$N_i$ : Funções de forma do elemento finito;

$\{H_x\}, \{H_y\}$ : Vetores com funções de interpolação do elemento finito;

$[Q]$ : Matriz de relação tensão-deformação na lâmina segundo direções principais;

$[\bar{Q}]$ : Matriz de relação tensão-deformação na lâmina segundo eixos do laminado;

$[T]$ : Matriz de transformação entre os sistemas de eixos principal da lâmina e o sistema de eixos do laminado;

$[T_r]$ : Matriz de transformação entre os sistemas de eixos global-local;

$[\lambda]$ : Matriz de cossenos diretores entre os sistemas de eixos global-local;

$[D_m]_p, [D_b]_p, [D_{mb}]_p$ : Matrizes constitutivas de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão para o laminado;

$[B_m]_p, [B_b]_p, [B_{mb}]_p$ : Matrizes de relação deformação-deslocamento de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão para o elemento;

$[B_{NL}]$ : Matrizes de relação deformação-deslocamento não-linear;

$[\hat{N}], [N^*]$ : Matrizes contendo componentes de força normal, utilizadas para o cálculo da matriz de rigidez não-linear;

$[K_L]$ : Matriz de rigidez linear;

$[K_{NL}]$ : Matriz de rigidez não-linear;

$[K_m]_p, [K_b]_p, [K_{mb}]_p$ : Matriz de rigidez de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão para o elemento de casca;

$k_{\theta z}$ : Coeficiente de rigidez à rotação fora do plano do elemento;

$\beta_i$ : Rotação da normal à superfície do plano médio do elemento, na direção  $i$ ;

$\{U\}$ : Vetor de deslocamentos nodais do elemento;

$\{U_m\}, \{U_b\}$ : Vetor de deslocamentos nodais com gdl de membrana e flexão;

$\{\bar{U}_m\}$ : Vetor de deslocamentos totais de membrana para análise não-linear;

$\{U^*\}$ : Vetor de deslocamentos contendo os gdl correspondentes à matriz de rigidez não-linear;

$\{U_1\}, \{U_2\}$ : Vetor de deslocamentos nodais auxiliares, utilizados no MCDG;

$\{P\}$ : Vetor de cargas nodais externas;

$\{F\}$ : Vetor de forças nodais equivalentes;

$\{F_m\}, \{F_b\}, \{F_{mb}\}$ : Vetor de forças nodais equivalentes de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão;

$\{R\}$ : Vetor de forças desequilibradas;

$F_{1c}, F_{2c}$ : Parâmetro de resistência da lâmina à compressão nas direções princip. 1-2;

$F_{1t}, F_{2t}$ : Parâmetro de resistência da lâmina à tração nas direções principais 1-2;

$F_{1t}, F_{2t}$ : Parâmetro de resistência da lâmina à tração das direções principais 1-2;

$F_{12}$  ou  $F_{2t}$ : Parâmetro de resistência da lâmina ao cisalhamento no plano;

$f_i, f_{ij}$ : Componentes de resistência da função de falha de Tsai-Wu;

$S_f$ : Fator de segurança pela função de falha de Tsai-Wu;

$r$ : Número pseudo-aleatório pertencente ao intervalo  $[0,1)$ ;

$CA$ : Alfabeto de codificação dos cromossomos de ângulos no AG;

$CM$ : Alfabeto de codificação dos cromossomos de material no AG;

$P$ : Número de indivíduos na população a cada geração no AG;

$f_{OBJ}$  ou  $OBJ$  : Função objetivo utilizada no AG;

$APT$  : Função ou valor da aptidão do indivíduo no AG;

$p_s$  : Probabilidade de seleção de um indivíduo para reprodução no AG;

$p_{ma}$ ,  $p_{mm}$  : Probabilidade ocorrência dos operadores de mutação de ângulos e mutação de material no AG;

$p_{ac}$ ,  $p_{sc}$  : Probabilidade ocorrência dos operadores de adição de camada e subtração de camada no AG;

$p_{per}$  : Probabilidade ocorrência do operador de permutação no AG;

$N_e$  : Número de indivíduos de elite para o método de seleção EM no AG;

$N_{LG}$  : Número limite de gerações para uma otimização no AG;

$N_{MO}$  : Número limite de gerações sem alteração da melhor solução para uma otimização no AG;

$R$  : Confiabilidade aparente para o AG na resolução de um problema;

$\sigma_R$  : Desvio padrão para a Confiabilidade aparente do AG;

$N_o$  : Número otimizações com sucesso na busca pela solução ótima;

$A_n$  : Número médio de análises requeridas por otimização realizada pelo AG;

$X_g^i$  : Número de gerações decorridas em uma otimização realizada pelo AG;

$\alpha$  : Parâmetro de ponderação que determina a ênfase da otimização em problemas de otimização multiobjetiva;

$FF$  : Máximo valor da função de falha no laminado;

$\lambda_f$ ,  $\lambda_b$  : Fator de segurança da estrutura à falha do material e à flambagem;

$\lambda^*$  : Fator de segurança da estrutura;

$\lambda^*$  : Número de violações ao limite de lâminas contíguas com mesma orientação;



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 ALGORITMOS GENÉTICOS .....	3
1.2 MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS.....	7
1.3 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE COMPÓSITO LAMINADO .....	12
1.4 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	15
<b>2 ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS DE COMPÓSITO LAMINADO</b> .....	<b>18</b>
2.1 ELEMENTO TRIANGULAR PLANO PARA PLACAS E CASCAS DE COMPÓSITO LAMINADO .....	18
2.2 MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR.....	20
<b>2.2.1 Matrizes constitutivas para compósitos laminados</b> .....	<b>21</b>
<b>2.2.2 Matriz de rigidez de membrana</b> .....	<b>25</b>
<b>2.2.3 Matriz de rigidez de flexão</b> .....	<b>27</b>
<b>2.2.4 Matriz de rigidez de acoplamento membrana-flexão</b> .....	<b>34</b>
<b>2.2.5 Montagem da matriz de rigidez linear</b> .....	<b>36</b>
2.3 FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE COM GRANDES DESLOCAMENTOS .....	39
<b>2.3.1 Vetor de forças e matriz de rigidez não-linear de membrana</b> .....	<b>39</b>
<b>2.3.2 Vetor de forças e matriz de rigidez não-linear de flexão</b> .....	<b>41</b>
2.4 CÁLCULO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES .....	42
2.5 MÉTODO DE SOLUÇÃO INCREMENTAL-ITERATIVO PARA ANÁLISE NÃO- LINEAR.....	45
2.6 CRITÉRIO DE FALHA PARA COMPÓSITOS LAMINADOS.....	50
<b>2.6.1 Critério de falha de Tsai-Wu para materiais compósitos</b> .....	<b>51</b>
<b>3 ALGORITMO GENÉTICO PARA ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS</b> .....	<b>55</b>
3.1 CODIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS .....	57
3.2 POPULAÇÃO INICIAL.....	60
3.3 GERAÇÃO DA POPULAÇÃO DE FILHOS .....	61
<b>3.3.1 Seleção e aptidão</b> .....	<b>61</b>
<b>3.3.2 Recombinação</b> .....	<b>65</b>
<b>3.3.3 Mutação</b> .....	<b>66</b>
<b>3.3.4 Permutação</b> .....	<b>71</b>
3.4 FORMAÇÃO DE NOVAS GERAÇÕES.....	73
3.5 TÉRMINO E AVALIAÇÃO DAS OTIMIZAÇÕES COM AG.....	75
<b>3.5.1 Critério de parada dos AG</b> .....	<b>76</b>

3.5.2	Confiabilidade e custo computacional do AG .....	77
4	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	79
4.1	ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS .....	80
4.1.1	Análise estática linear .....	80
4.1.2	Análise estática não-linear geométrica .....	82
4.1.3	Análise de flambagem.....	89
4.1.4	Análise de tensões .....	92
4.2	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS.....	98
4.2.1	Minimização de peso e deslocamento em placa de compósito laminado sujeita a carga transversal.....	98
4.2.2	Minimização de peso e custo em placa de compósito laminado sujeita a carga no seu plano.....	109
4.2.3	Maximização de rigidez em casca de compósito laminado considerando efeitos de não-linearidade geométrica.....	116
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	124
	REFERÊNCIAS .....	127

# 1 INTRODUÇÃO

Num projeto estrutural sempre se busca a solução que apresente o melhor desempenho empregando a menor soma de recursos possível. A medida de desempenho depende da finalidade para qual a estrutura é concebida, mas normalmente está relacionada a propriedades tais como rigidez e resistência. Do lado oposto da balança estão os recursos empregados na execução desses projetos, os quais são normalmente quantificados em termos de custo ou quantidade de material. Assim, duas situações nas quais se procura a melhor solução podem ser definidas. Na primeira tem-se limitada a quantidade de recursos disponíveis, o que significa que a solução ótima é aquela que apresenta o maior desempenho, aproveitando ao máximo os materiais empregados. Por outro lado, há casos em que as solicitações que a estrutura deve suportar já estão definidas, restando ao projetista a tarefa de minimizar o dispêndio na fabricação (Gürdal, Haftka e Hajela, 1999).

Todo esse trabalho de busca pela melhor solução tem sido realizado ao longo dos anos com base unicamente nas experiências acumuladas. O processo tradicional de projeto consiste primeiramente em identificar os requisitos que devem ser atendidos. Em seguida, partindo de soluções iniciais que atendam a tais requisitos, são implementadas modificações visando uma redução dos recursos empregados ou melhora do desempenho estrutural. Essa tarefa é extremamente trabalhosa, requerendo algumas iterações, já que as modificações testadas são tomadas a partir da sensibilidade do projetista. O que ocorre é que alterações em certos parâmetros no intuito de aprimorar determinadas características da estrutura podem modificar outras, acabando por violar alguma restrição. Existem casos que a satisfação dessas restrições é muito difícil, requerendo um grande número de iterações e complicando até mesmo o estabelecimento de um ponto de partida.

Com intuito de amenizar o trabalho envolvido no projeto de estruturas uma série de técnicas de otimização baseadas em métodos matemáticos vêm sendo empregadas. Essas técnicas de otimização matemática têm sido desenvolvidas durante as últimas décadas visando a maximização ou minimização de alguma função. Sua aplicação aos problemas estruturais torna o processo sistemático e bem definido, facilitando o trabalho através da eliminação de iterações realizadas pelos projetistas e baseadas na sua sensibilidade. A performance da estrutura ou a quantidade de material empregado na sua confecção são traduzidos em funções capazes de serem interpretadas pelos métodos matemáticos, que manipulam variáveis da estrutura com o objetivo de alcançar a melhor configuração.

Dentre as aplicações de otimização matemática para projeto estrutural destaca-se o dimensionamento de estruturas fabricadas em materiais compósitos. O emprego desse tipo de material para funções estruturais vem crescendo nos últimos tempos devido a suas vantagens em relação aos materiais convencionais como alumínio, aço e outras ligas. Os compósitos apresentam características muito mais complexas que as dos demais materiais, tanto no que diz respeito à composição quanto ao comportamento estrutural, como será discutido nas seções seguintes. O desempenho superior dos compósitos se deve principalmente à alta rigidez específica (razão entre rigidez e peso) e resistência específica (razão entre resistência e peso) apresentada, o que estimulou sua utilização em aplicações cujo fator crítico é o peso, como na indústria aeroespacial. Porém, esses não são os únicos fatores que tornam os compósitos atraentes, pois a sua utilização introduz no projeto algumas variáveis que alteram diretamente o comportamento do material. Assim, para obter um aprimoramento no desempenho estrutural ou atender a certas restrições de projeto, torna-se possível manipular propriedades do material adicionalmente às dimensões da estrutura.

Essas novas variáveis são de fundamental importância, pois seu ajuste é determinante no desempenho dos compósitos frente a solicitações específicas para as quais são projetados. No entanto sua introdução aumenta drasticamente a dificuldade do processo, uma vez que o número de soluções possíveis é proporcional à quantidade de variáveis manipuladas. Outra grande dificuldade está na complexidade do comportamento estrutural desses materiais, pois isso torna problemática a previsão dos resultados de alguma alteração pretendida. Tendo em vista esses fatos, as técnicas de otimização acabam sendo altamente aconselháveis no projeto de estruturas constituídas de materiais compósitos, e por isso têm despertado bastante interesse nos pesquisadores.

Contudo, nem todos os métodos de otimização se mostram adequados para tratar problemas envolvendo esses tipos de materiais, sobretudo os compósitos laminados, que são tema desse trabalho. Isso ocorre porque a maior parte dos métodos foram desenvolvidos para otimizar estruturas convencionais, cujas variáveis de projetos são contínuas. No entanto, devido a questões de manufatura, as variáveis envolvidas no dimensionamento de materiais compósitos podem assumir apenas valores discretos. Além disso, os métodos matemáticos baseados em gradientes são mais apropriados para busca de soluções ótimas em espaços de resposta suaves e contínuos, o que também não ocorre nos problemas envolvendo compósitos laminados. Como alternativa aos métodos convencionais, partiu-se para a aplicação de técnicas de otimização com algoritmos genéticos (AG), que se baseiam nos mecanismos de evolução natural. Sua implantação se

mostrou bastante adequada no que diz respeito às exigências elencadas acima, porém outros problemas surgiram, sobretudo o alto custo de processamento computacional.

O objetivo desse trabalho é implementar um AG capaz de realizar otimização de estruturas de compósitos laminados que apresentem os mais diversos níveis de complexidade. Para tanto é adotado o método dos elementos finitos como ferramenta de análise estrutural, cujo desenvolvimento também faz parte do esforço empenhado. Em relação ao algoritmo de otimização, são introduzidas grande parte das modificações encontradas na literatura para o caso específico dessa atividade. A função dessas alterações sobre o AG clássico é melhorar o desempenho do método na otimização de compósitos laminados, o que é obtido levando-se em conta as características peculiares do material em questão. Alguns exemplos de aplicação são apresentados no intuito de comprovar a eficiência do programa desenvolvido, bem como demonstrar as potencialidades do método. As seções subseqüentes desse capítulo trazem informações a respeito do funcionamento e das características básicas da técnica de otimização empregada. Em seguida é feita uma introdução sobre as propriedades dos compósitos laminados, e questões relacionadas à otimização desses materiais são discutidas.

## 1.1 ALGORITMOS GENÉTICOS

Os algoritmos genéticos foram concebidos por John Holland na década de 70 quando empregou as leis de seleção natural no desenvolvimento de sistemas artificiais (Holland, 1975), implementados na forma de programas computacionais, e a partir desses aplicáveis a diversas disciplinas, sobretudo naquelas com ênfase em otimização. Contudo, sua popularização se deu mais tarde por Goldberg, aluno de Holland, através de seus trabalhos voltados ao campo da engenharia ou mesmo abordando temas teóricos sobre o assunto, que são referência na discussão de propriedades teóricas dos AG (Goldberg, 1989).

Como enunciado sucintamente por Goldberg, AG são “métodos (ou procedimentos) de busca baseados na mecânica da seleção natural e na genética natural”. Quando uma população de organismos vivos evolui por sucessivas gerações as características úteis para a sobrevivência tendem a serem transmitidas ao longo do tempo. Isso ocorre porque os indivíduos que as possuem têm mais chances de sobreviverem e se reproduzirem, originando descendentes com características semelhantes ou mesmo superiores às suas. São em estruturas biológicas denominadas cromossomos que estão armazenadas, na forma

de genes, as informações determinantes das características de cada indivíduo. Os processos de reprodução ocorrem através da mecânica da genética natural, baseados em operações onde é realizada mescla de informação genética entre os cromossomos pertencentes a dois indivíduos, além de eventuais modificações sobre alguns genes. Essas operações são realizadas de forma aleatória, porém estruturada, resultando na evolução das espécies.

Os AG imitam o processo natural, na forma de um sistema artificial, por meio de operações que se equivalem aos mecanismos genéticos da natureza. Seu elemento principal é o indivíduo ou organismo, que representa uma solução possível no espaço de resposta (conjunto de todas as soluções possíveis). Ele é constituído por um ou mais cromossomos, que por sua vez são formados por vários genes, como ilustra a Fig. 1.1. A representação desses cromossomos se dá através de *strings* (conjunto de dados concatenados), nas quais cada dado representa um gene. Como na natureza, os genes contêm informações que determinam as características do indivíduo, estando nesse caso codificadas por meio de números binários ou outros alfabetos mais complexos. Cada gene do cromossomo representa uma variável de otimização, cujos valores possíveis são determinados pela codificação empregada no processo.

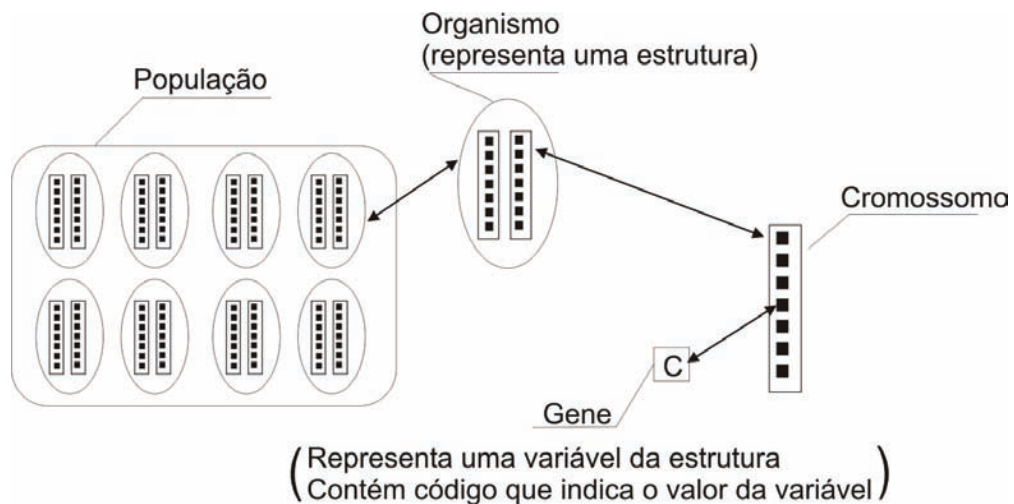


Figura 1.1: Estrutura básica do AG

Em cada passo ou geração do algoritmo existe um grupo de indivíduos que formam uma população. Os componentes da geração inicial normalmente são criados de forma aleatória, sem utilizar nenhuma informação sobre o problema a ser tratado. Após a primeira, cada geração é formada por alguns indivíduos presentes na anterior e por filhos gerados a partir desses. A seleção dos componentes das sucessivas populações é baseada na

aptidão, sendo escolhidos dentre os pré-existentes e os recém criados, utilizando como critério o princípio da sobrevivência do mais apto. A aptidão também determina as chances de participação do indivíduo num processo de reprodução para criação de um filho. As duas etapas mencionadas, envolvendo a formação da população de filhos e a formação da geração seguinte a partir da existente e dos filhos criados, compõem o mecanismo básico do AG. Elas têm como pré-requisito o valor da aptidão de cada indivíduo, cuja avaliação é de fundamental importância para o bom funcionamento do algoritmo, sendo normalmente derivado de uma função objetivo que traduz o alvo da otimização. Essa função tem como variáveis as características relevantes no problema, sejam elas desejáveis ou não. Sua função é equivalente à mensuração da adaptação de um organismo vivo a um ambiente natural.

Como ocorre na natureza, a evolução das populações se dá pela procriação dos organismos que as compõem. Nos AG o processo de reprodução é constituído basicamente por três fases. Na primeira é selecionado dentre os indivíduos da população existente o par de pais que participarão da geração do novo filho. Essa seleção é realizada por um mecanismo probabilístico, onde os mais aptos têm maiores chances de serem escolhidos. Uma vez definidos os participantes, procede-se a segunda fase, onde um organismo filho é gerado pela aplicação do operador de recombinação. Sua atuação consiste em mesclar informação genética dos cromossomos dos pais para formar um novo indivíduo. Desse processo resulta um filho que tem características semelhantes às dos pais e provavelmente apresenta boa aptidão, já que seus genitores foram escolhidos com base nesse aspecto. Existem muitas formas de implementar o operador de recombinação, como demonstra o trabalho de Le Riche (1994), devendo ser estudado para cada aplicação o método mais eficiente.

A última fase da reprodução ocorre após a obtenção do filho, que é então submetido a operações de mutação. Essas operações consistem na introdução de nova informação genética nos cromossomos, tendo como objetivo auxiliar o algoritmo na produção de indivíduos mais fortes. Sua atuação se dá pela modificação de genes através da substituição do valor original por outro utilizado na codificação da variável. Isso não acontece sempre, mais sim segundo uma probabilidade de ocorrência, que pode ser maior ou menor para cada problema. Os genes a serem modificados ou mesmo o novo valor atribuído a eles é determinado de forma aleatória, o que torna esses mecanismos responsáveis pela capacidade exploratória do AG. Outra função da mutação é a prevenção contra a perda de informação genética decorrente da uniformização da população na fase final da otimização.

Embora as operações de seleção, recombinação e mutação sejam suficientes para a realização de otimização por AG, existem outros operadores que também podem compor a reprodução. Eles foram desenvolvidos em vários trabalhos (Nagendra, 1996 e Todoroki, 1998), muitas vezes com aplicação restrita a um tipo de problema, mas todos com o objetivo de melhorar o desempenho do algoritmo. Dentre os mais utilizados para a otimização de compósitos estão os operadores de permutação (*gene-swap*), de adição ou subtração de camadas (*stack addition* e *stack deletion*) e de reparo (*repair operator*). O primeiro, mais simples entre os mencionados, atua trocando a posição de dois genes escolhidos aleatoriamente na *string* do cromossomo. Os dois seguintes modificam o número de camadas através da manipulação dos códigos atribuídos aos genes do indivíduo. Seu desenvolvimento é inteiramente voltado à otimização de laminados, constituindo uma ferramenta muito importante para esses casos. Quando se lida com problemas envolvendo restrições, é benéfica a utilização do operador de reparo. Alterando a forma como se decodifica o cromossomo esse mecanismo dirige a busca do AG de regiões onde existe violação das restrições para outras onde elas são atendidas. Todas essas formas de aprimoramento dos AG são de fundamental importância para sua viabilização, pois uma das características mais problemáticas do método é a alta demanda de análises das possíveis soluções. Em muitos problemas as análises necessárias são bastante complexas, envolvendo métodos numéricos que consomem muito esforço computacional, o que torna a aplicação do AG impraticável. Por isso o desenvolvimento de novas técnicas e operadores para atividades específicas tem ganhado bastante atenção dos pesquisadores, pois junto com o aumento da capacidade de processamento proporcionada pelos computadores mais modernos tornam a utilização dos AG cada vez mais interessante.

A despeito dos problemas relacionados ao consumo de esforço computacional, os AG têm muitas vantagens em relação aos métodos clássicos de otimização. A primeira delas é a característica intrínseca de lidar com variáveis discretas. Isso é extremamente interessante nos problemas de engenharia, pois na prática se trabalha com número restrito de opções disponíveis no mercado ou com padronização da fabricação. Os métodos tradicionais empregam variáveis contínuas, que no final do processo têm de ser arredondadas para os valores praticáveis e assim normalmente acabam perdendo a qualidade alcançada. Outro aspecto de fundamental importância no AG é a forma como são avaliadas as soluções. Em vez de utilizarem derivadas ou gradientes, como ocorre nos algoritmos de otimização clássicos, os AG trabalham com funções objetivo baseadas em dados simples dos indivíduos. Essa característica torna o método indicado para problemas que envolvam funções descontínuas, uma vez que as técnicas baseadas em gradientes são incapazes de tratar esses casos. Além disso, diferentemente dos métodos de otimização



tradicionais, que realizam a busca focando em uma única solução por vez se deslocando de um ponto para outro no espaço de resposta, os AG trabalham com população de indivíduos a cada geração. Com isso o algoritmo é capaz de explorar simultaneamente diferentes áreas do espaço de resposta, mantendo a busca em regiões prósperas já identificadas enquanto procura por outras. Tal capacidade é decorrente da forma como a posição dos novos pontos de avaliação é determinada. Devido a mecanismos probabilísticos como a mutação, os pontos se deslocam facilmente, varrendo todas as regiões, independentemente das características do espaço de resposta. Assim, mantendo vários pontos de busca previne-se a convergência prematura da solução final a um ótimo local, como acontece nas otimizações por métodos baseados em gradientes quando o ponto de partida é mal escolhido. Todos esses aspectos acarretam num aumento das chances de se encontrar a solução ótima ou outras com qualidade semelhante, mesmo nos problemas que apresentam os espaços de resposta mais adversos.

## 1.2 MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Compósito estrutural é um sistema de materiais constituído de duas ou mais fases numa escala macroscópica, cuja performance e propriedades mecânicas são projetadas para serem superiores às dos materiais constituintes atuando independentemente. Uma das fases é usualmente descontínua, mais rígida e mais resistente, sendo denominado reforço. A outra, denominada matriz, normalmente é contínua, com rigidez e resistência menor. Algumas vezes, devido a interações químicas ou outros processos pode existir uma fase adicional, denominada interface, situada entre o reforço e a matriz. As propriedades de um compósito dependem das propriedades do material, geometria e distribuição de cada uma das fases (Daniel e Ishai, 1994).

Algumas das propriedades que podem ser melhoradas com o uso de materiais compósitos são: resistência, rigidez, densidade, resistência à fadiga, à corrosão e ao desgaste, além de isolamento, condutividade e estabilidade térmica. Evidentemente nem todas essas propriedades são melhoradas ao mesmo tempo. O que se busca é o aprimoramento das qualidades requeridas no projeto da estrutura em que o material será empregado. Embora apresentem muitas outras características desejáveis, a base de sua performance estrutural superior está na alta resistência específica e alta rigidez específica, além do caráter anisotrópico e heterogêneo do material (Daniel e Ishai, 1994). Eles são amplamente empregados nas indústrias naval, automotiva, aeroespacial, esportiva,

biomédica e demais segmentos que requerem alto desempenho mecânico e estabilidade ambiental acompanhados de baixo peso.

A utilização desse tipo de material é indicada principalmente em estruturas que tenham requerimentos críticos como alta resistência e/ou rigidez, muitas vezes inatingíveis por materiais estruturais convencionais, como as ligas metálicas. Em termos econômicos os compósitos também podem ser vantajosos, principalmente se forem considerados todos os custos influenciados pela escolha do material. Esses vão desde o processo de fabricação, manutenção, vida útil, operação até a montagem da estrutura final. Dependendo da aplicação podem ser obtidas reduções nesses custos pelo emprego de compósitos, os quais tendem a ser cada vez mais competitivos à medida que os processos de fabricação vão se aprimorando e se difundindo. Outro aspecto altamente desejável em certas aplicações é a redução de peso, como ocorre na indústria aeroespacial, onde esse fator pode ser limitante ou influenciar fortemente os custos de operação (Jones, 1999).

Os materiais compósitos podem ser agrupados em categorias segundo o tipo, geometria e orientação do reforço, além do tipo de matriz empregada. Neste trabalho são abordados especificamente os materiais formados por finas lâminas de material compósito sobrepostas e unidas umas às outras, aos quais denominamos compósitos laminados, apresentados nas Fig. 1.2 e Fig.1.3. O reforço é constituído de fibras contínuas e unidirecionais, alinhadas paralelamente em cada lâmina segundo uma orientação. Essa configuração imprime um caráter ortotrópico às laminas, pois a resistência e rigidez do material são muito maiores na direção em que as fibras são orientadas do que nas perpendiculares a estas. A matriz exerce a função de envolver as fibras mantendo sua posição e protegendo-as, além de promover a distribuição ou transferência de carga entre elas. Quando lâminas de dois ou mais materiais diferentes são empregadas adota-se a denominação de compósito híbrido.

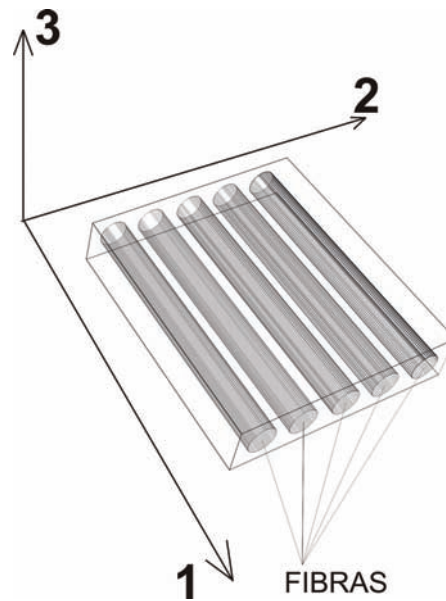


Figura 1.2: Lâmina formada por matriz envolvendo reforço de fibras unidirecionais.

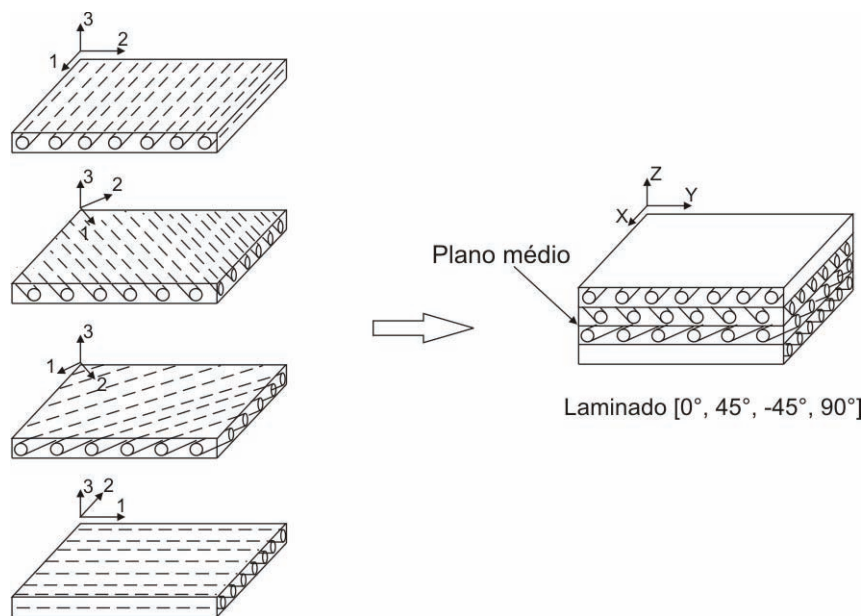


Figura 1.3: Formação do compósito laminado pela sobreposição de camadas com reforço de fibras unidirecionais.

Os compósitos laminados são representados por uma notação que traz a sua seqüência de laminação, como é descrito a seguir. A seqüência de laminação mostra as características de cada lâmina, iniciando pela superior e seguindo até a inferior. Nela é indicado o ângulo de orientação das fibras, medido a partir do eixo de referência do laminado e tomando-se o sentido anti-horário como positivo. Normalmente todas as lâminas

são constituídas do mesmo material e têm a mesma espessura, definida pelo processo de fabricação. Contudo, existem os casos de laminados híbridos ou lâminas fabricáveis em diferentes espessuras. Por isso, na seqüência de laminação também podem constar informações a respeito do tipo de material constituinte e da espessura. Para um laminado de  $N$  lâminas, cada uma com um ângulo  $\theta$ , uma espessura  $t$  e um material  $m$ , a seqüência de laminação é representada como

$$\left[ \theta_1^{(m1,t1)}, \theta_2^{(m2,t2)}, \theta_3^{(m3,t3)}, \dots, \theta_N^{(mN,tN)} \right] \quad (1.1)$$

Num exemplo usando dados de um laminado com 10 lâminas constituídas de 2 materiais a representação se daria por

$$\left[ 0^{(1)}, 45^{(2)}, -45^{(2)}, 0^{(1)}, 45^{(2)}, -45^{(2)}, 90^{(1)}, 90^{(1)}, -60^{(2)}, 60^{(2)} \right] \quad (1.2)$$

Quando algumas lâminas com as mesmas características são adjacentes é comum agrupa-las, indicando o número de lâminas contíguas por um subíndice. Também ocorrem os casos em que um par de lâminas difere apenas no sinal do ângulo de orientação de suas fibras, quando são utilizados os símbolos  $\pm$  e  $\mp$  para representá-las. Assim, no exemplo apresentado anteriormente a seqüência de laminação ficaria

$$\left[ 0^{(1)}, \pm 45^{(2)}, 0^{(1)}, \pm 45^{(2)}, 90_2^{(1)}, \mp 60^{(2)} \right] \quad (1.3)$$

Quando um grupo de lâminas se repete no laminado também pode haver uma compactação na notação da seqüência de laminação. Isso é realizado através da representação desse grupo entre parênteses e um subíndice que informa o número de repetições. No caso do exemplo utilizado o grupo  $(0^{(1)}, \pm 45^{(2)})$  ocorre duas vezes seguidas no início do laminado, podendo ser representado como  $\left[ (0^{(1)}, \pm 45^{(2)})_2, 90_2^{(1)}, \mp 60^{(2)} \right]$ .

Existem algumas classificações atribuídas aos compósitos laminados devido à sua seqüência de laminação. Isso ocorre para configurações especiais que normalmente são requeridas em projeto ou que levam a certos comportamentos desejados no material. Uma das classificações é a de laminado simétrico, caracterizado quando as lâminas presentes na metade inferior do laminado são uma imagem espelhada das localizadas acima do plano médio. Nesses casos apenas a seqüência de laminação da metade superior é representada, ficando as demais presumidas pela condição de simetria indicada por um subíndice S no final. Um exemplo de laminado simétrico é apresentado a seguir:

$$\left[0^{(1)}, 90_2^{(1)}, -60^{(2)}, -60^{(2)}, 90_2^{(1)}, 0^{(1)}\right] = \left[0^{(1)}, 90_2^{(1)}, -60^{(2)}\right]_s \quad (1.4)$$

Outra classificação especial é dedicada aos laminados em que existe uma lâmina orientada a um ângulo  $\theta$  negativo para cada lâmina orientada a um ângulo  $\theta$  positivo, ainda que esses pares com sinais opostos não estejam em posições adjacentes. Os laminados que apresentam essa característica são denominados laminados balanceados. Alguns exemplos desses casos específicos seriam  $\left[0^{(1)}, \pm 45_2^{(1)}, \mp 60^{(2)}\right]_s$ , ou  $\left[-30^{(2)} 90_3^{(1)}, +30^{(2)}\right]$ .

O comportamento mecânico de um compósito laminado depende fortemente da sua seqüência de laminação. Uma simples alteração de posição das lâminas acarreta em drásticas modificações na reação do material a solicitações externas. Existem mecanismos de resposta apresentados pelos compósitos laminados que são bastante complexos e difíceis de serem previstos, a exemplo dos fenômenos de acoplamento extensão-flexão, acoplamento flexão-torção e acoplamento extensão-cisalhamento. Esses fenômenos ocorrem de maneira mais ou menos intensa na maioria dos laminados e são decorrentes da complexa distribuição de tensões entre as diversas lâminas, resultante da diferença de rigidez entre elas. Eles podem ser evitados apenas em casos muito específicos, como nos laminados simétricos que não apresentam acoplamento extensão-flexão e laminados balanceados, nos quais não se observa o acoplamento extensão-cisalhamento.

A complexidade do comportamento estrutural apresentado pelos compósitos laminados se reflete também no projeto das estruturas que eles compõem. Essa tarefa requer análises estruturais muito mais complicadas que as realizadas para materiais isotrópicos, pois todos os fenômenos de acoplamento e a distribuição de tensões incomum apontadas anteriormente devem ser consideradas para que a resposta real do material seja obtida. Nesse intuito, para analisar as soluções propostas no projeto são empregados programas computacionais baseados em métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (MEF), desenvolvidos especificamente para simulação de estruturas de compósitos laminados. No entanto, mesmo com essas ferramentas computacionais, o dimensionamento acaba sendo uma atividade demasiadamente nebulosa pela dificuldade em se prever os resultados de cada alteração proposta sobre a solução inicial. Para combater esse problema vêm sendo empregados métodos de otimização no dimensionamento de compósitos laminados, dentre eles os algoritmos genéticos, que vêm se mostrando bastante adequados à realização dessa tarefa.

### 1.3 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE COMPÓSITO LAMINADO

Com a incorporação dos compósitos laminados na fabricação de estruturas se obtém aumento considerável no desempenho mecânico e redução do peso total, motivos pelos quais o seu emprego vem ganhando espaço nos últimos tempos. As vantagens sobre os materiais convencionais se devem à alta resistência específica e alta rigidez específica apresentada, além da possibilidade do ajuste fino de diversos parâmetros do material. Contudo, acompanhando esse desempenho superior vem o aumento do número de variáveis envolvidas no dimensionamento, bem como novos mecanismos de resposta estrutural, normalmente incomuns às estruturas fabricadas em materiais convencionais. Esses dois aspectos se refletem numa maior complexidade das atividades de análise estrutural e de projeto. A tarefa do projetista quando trabalha com esse tipo de material é ajustar parâmetros tais como número de camadas, espessura de lâminas e ângulo de orientação das fibras, de maneira que a estrutura apresente o melhor desempenho possível dada uma configuração de solicitações. Normalmente são impostas ainda algumas restrições que podem ser geométricas, de fabricação, de custo, de falha ou outras específicas para cada caso.

Devido à dificuldade em tratar os problemas envolvendo compósitos laminados pelo método tradicional de projeto, muitos pesquisadores vêm despendendo esforços no desenvolvimento de ferramentas que sejam capazes de realizar essa tarefa eficientemente, e aproveitando toda a potencialidade do material. Inicialmente foram empregados os mesmos métodos matemáticos utilizados para otimização de estruturas convencionais. Esses algoritmos, que lidam com variáveis contínuas e se baseiam em gradientes para realizar a busca pela melhor solução num espaço de resposta, tiveram sucesso limitado por duas razões (Soremekun, 2001). Primeiramente porque o dimensionamento dos compósitos laminados envolve preponderantemente variáveis discretas, que assumem valores restritos devido aos processos de fabricação. Numa otimização desenvolvida por um método clássico essas variáveis são tratadas como contínuas e ao fim do processo a solução é arredondada para o valor exequível mais próximo, resultando em estruturas que são diferentes da ótima ou mesmo violam restrições impostas ao problema. Em segundo lugar, o projeto de compósitos laminados envolve espaços de resposta multimodais, descontínuos e com muitos ótimos locais. Os métodos baseados em gradientes são incapazes ou têm muita dificuldade em lidar com essas características, podendo convergir para soluções que são ótimos locais, principalmente quando o ponto de partida da busca é mal escolhido.

Essas dificuldades foram superadas com o emprego dos algoritmos genéticos como método de otimização, em substituição aos clássicos. Devido à forma como são representadas nos AG, as variáveis manipuladas no processo são intrinsecamente discretas, se adequando perfeitamente aos requisitos do problema em questão. Por utilizar apenas informações derivadas de funções objetivo e se basear em regras probabilísticas, esse método não tem dificuldades em realizar a busca da solução ótima por espaços de resposta complexos como os apresentados nos problemas que envolvem compósitos laminados. Além disso, os AG trabalham com um conjunto de pontos simultaneamente, o que aumenta a chance de obtenção do ótimo global juntamente com outras soluções de performance similar a ele. Assim, caso a solução ótima seja impraticável por motivos não contemplados na otimização, o projetista tem uma gama de opções para substituí-la, mantendo o nível de desempenho.

Diversos pesquisadores contribuíram com trabalhos voltados à aplicação de AG na otimização de estruturas constituídas de materiais compósitos. Dentre os primeiros estão incluídos Callahan e Weeks (1992), que maximizaram a resistência e a rigidez de laminados sujeitos a carregamentos no plano e de flexão, e Nagendra (1993 e 1996) com trabalhos extensivos na aplicação dos AG para otimização de placas enrijecidas de compósitos laminados. Haftka, Watson, Gürdal e seus colaboradores (Nagendra et al., 1992; Le Riche e Haftka, 1993; Gürdal et al., 1994; Le Riche, 1994; Soremekun, 1997), desenvolveram AG especializados para a otimização da seqüência de laminação de compósitos sob restrições quanto a falha e flambagem. O número de trabalhos envolvendo AG aplicados a compósitos laminados é muito grande, abrangendo estruturas de cascas e placas com ou sem enrijecedores, com ou sem orifícios, e outras, sujeitas às mais diversas configurações de carga e condições de contorno. Cada pesquisa foca a otimização num objetivo, podendo-se citar como exemplo:

- Peso;
- Resistência;
- Rigidez;
- Carga de flambagem (incluindo cargas higrotérmicas);
- Comportamento (resistência) pós-flambagem;
- Custo;

- Comportamentos desejados (ex: acoplamento torção-flexão);

A maior parte desses trabalhos tenta reproduzir uma situação real de projeto. Para isso é imprescindível a consideração de restrições no problema, estando dentre as mais comuns:

- Integridade do material (avaliada com algum critério de falha);
- Restrições de deformação e deslocamento;
- Estabilidade (restrição quanto à flambagem);
- Número de lâminas em seqüência com mesmo ângulo de fibras;
- Balanceamento e simetria do laminado;

Outra questão particular a cada problema é o tipo de variável manipulada para proceder a busca pela solução ótima. Nos processos que envolvem compósitos laminados as variáveis de otimização mais comuns são as seguintes:

- Espessura das lâminas;
- Ângulo de orientação das fibras;
- Número de lâminas ou camadas;
- Seqüência de laminação;
- Material das lâminas;
- Número, posicionamento e dimensões de enrijecedores;

Existem ainda aplicações que envolvem mais de um objetivo no mesmo problema, sendo esses casos denominados de otimizações multiobjetivas. Soremekun (1994) otimizou simultaneamente o peso e o custo de placas simplesmente apoiadas empregando dois materiais distintos no mesmo laminado. Walker e Smith (2003) apresentaram uma técnica para minimizar o peso e a deflexão máxima em placas de compósitos laminados empregando AG.

As pesquisas no campo de otimização de laminados também diferem quanto à forma de avaliação das estruturas. Alguns trabalhos realizam a análise estrutural por meio de formulações matemáticas, enquanto outros empregam métodos numéricos, como o MEF.



Essa questão é de fundamental importância, pois os compósitos laminados podem apresentar comportamento mecânico bastante complexo, requerendo uma análise precisa para a determinação fiel da resposta da estrutura. A não ser nos casos bastante simplificados, com geometrias básicas e condições específicas de laminação de carregamento e de contorno, as equações matemáticas fechadas não são capazes de prever o comportamento real desses materiais. Para sua obtenção são adotadas várias simplificações que podem ser mais ou menos importantes em cada caso, devendo ser levadas em consideração quando analisada a representatividade do resultado final da otimização. Por outro lado, com o emprego do MEF é possível simular as respostas mais complexas da estrutura, inclusive capturando seu comportamento em casos que envolvam grandes deslocamentos, ações dinâmicas e outras situações mais complexas. A adoção dessa segunda alternativa de análise é sem dúvida o caminho a ser seguido nas linhas de pesquisa, pois apenas assim se poderá colocar em prática o método para as aplicações mais complexas requeridas pela indústria. No entanto, os métodos numéricos são muito mais dispendiosos do que as soluções fechadas, e por isso seu uso como ferramenta de análise nos AG encontra muitas restrições. Em várias pesquisas são desenvolvidas estratégias e mecanismos para diminuir o número de análises requeridas nas otimizações, seja acelerando a convergência ou aproveitando resultados já calculados. O sucesso desses trabalhos é essencial para a inserção dos AG como ferramenta na prática de projeto.

## 1.4 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Conforme discutido anteriormente, o emprego dos compósitos laminados como material estrutural vem crescendo nos últimos tempos, incentivado por suas excelentes propriedades mecânicas e baixo peso. Sua incorporação no projeto de estruturas só foi viabilizado pelo aprimoramento dos métodos de análise e mais recentemente pelo desenvolvimento de ferramentas de otimização que permitem a automação do processo. Dentre essas ferramentas, os AG foram os que obtiveram maior sucesso, se adaptando perfeitamente aos requisitos dos problemas que envolvem os materiais em questão. Muitos trabalhos se desenvolveram com foco na aplicação e no aprimoramento dos AG para esse fim, trazendo considerável evolução de resultados.

Esse trabalho visa se inserir na linha de pesquisa descrita acima através da implementação de uma ferramenta computacional capaz de otimizar estruturas complexas fabricadas em compósitos laminados. Para tanto foi construído um AG específico para

tratar esses problemas, compilando várias modificações à estrutura clássica encontradas na literatura, que incrementam o desempenho do método. Paralelamente foi desenvolvido um programa de análise estrutural, empregando o MEF, que dá suporte ao algoritmo de otimização e permite sua aplicação a casos envolvendo estruturas mais complexas que as suportadas pelas formulações matemáticas fechadas. O trabalho em conjunto desses dois elementos possibilita abordagens bastante sofisticadas em termos mecânicos, sendo potencialmente extensível à prática de projeto.

Assim, o trabalho se divide em duas frentes. No capítulo 2 é apresentada a teoria que embasa o programa computacional destinado à análise das estruturas de compósitos laminados. Um elemento finito triangular plano para casca e placas é utilizado, introduzindo-se a ele as modificações necessárias para que a formulação original, desenvolvida para materiais isotrópicos, seja adaptada aos materiais considerados aqui. Graças a sua formulação lagrangeana-atualizada é possível realizar análises incorporando os efeitos de não-linearidade geométrica. A solução dos problemas não-lineares é realizada pelo método incremental-iterativo denominado Método do Controle por Deslocamentos Generalizados (MCDG), proposto por Yang e Shieh (1990). Além disso, o programa é capaz de realizar análise de falha aplicando o critério de Tsai-Wu (Daniel e Ishai, 1994) em diversos pontos do elemento, onde são calculadas as tensões e deformações.

Uma vez estabelecida a ferramenta de análise estrutural é introduzido o método de otimização. O capítulo 3 desse trabalho se dedica a explicações sobre o AG implementado. Inicialmente são discutidos aspectos básicos dos algoritmos, alguns inerentes a qualquer aplicação e outros específicos aos problemas de compósitos laminados, como a forma de representação das estruturas. Em seguida são apresentados os diversos operadores ou etapas que compõem o AG. Cada um deles é tratado individualmente, com explicações detalhadas do seu funcionamento acompanhadas por exemplos de aplicação. Por fim discutem-se aspectos sobre a confiabilidade e o consumo computacional do método.

No capítulo 4 são reunidos os exemplos de aplicação que demonstram a efetividade das ferramentas implementadas. Primeiramente são apresentadas aplicações que comprovam o funcionamento do programa de análise estrutural. Elas compreendem análises estáticas linear e não-linear de placas e cascas de compósitos laminados. Também é verificado o funcionamento das rotinas de avaliação das tensões e de determinação da carga de flambagem. Tendo-se comprovado a eficácia da análise estrutural, parte-se para os problemas de otimização propriamente ditos. São apresentadas três aplicações para o AG implementado. Na primeira delas, uma placa retangular de compósito laminado sujeita a

carga transversal distribuída tem a orientação das fibras e a espessura de suas lâminas otimizadas para a redução do peso total e da deflexão central, sujeito a restrições quanto a falha. Esse exemplo constitui uma otimização multiobjetiva, que apresenta vários aspectos interessantes, conforme é discutido no texto. O segundo exemplo trata da otimização de uma placa sujeita a carregamento de compressão no seu plano. Novamente o problema se enquadra como otimização multiobjetiva, uma vez que se pretende reduzir peso e custo da estrutura através da manipulação do número de camadas, da orientação das fibras e do material constituinte das lâminas. São permitidos dois materiais com propriedades mecânicas e custos diferentes, que podem ser combinados na laminação para obtenção de melhores resultados. Adicionalmente à ruptura do material é incorporada a flambagem como restrição, uma vez que esse é o mecanismo de falha mais importante para o problema. A abrangência de tantos fatores nessa otimização se reflete num aumento drástico de complexidade em relação ao exemplo anterior, servindo como um bom teste para o algoritmo. No último exemplo o desafio passa da dificuldade da busca pela solução ótima para a complexidade envolvida na análise estrutural. A otimização consiste em ajustar os ângulos de orientação das fibras do compósito de maneira a aumentar a rigidez de uma casca cilíndrica sujeita a carga de pressão. Na avaliação de rigidez é realizada uma abordagem não-linear geométrica do problema, capturando todo o comportamento pós-flambagem da estrutura. O critério de ruptura do material também é adotado como restrição, e juntamente com a análise dos deslocamentos resulta num tratamento bastante sofisticado para o problema.

## 2 ANÁLISE DE PLACAS E CASCAS DE COMPÓSITO LAMINADO

Neste trabalho a análise das estruturas é realizada através do método dos elementos finitos (MEF). Elementos triangulares planos são empregados na modelagem das placas e cascas. Sua formulação consiste em sobrepor um elemento de placa fina a um elemento de estado plano de tensões (desconsiderando deformações por corte transversal). Adicionalmente são introduzidos termos para que o acoplamento entre efeitos de membrana e flexão, presentes no caso de laminados não-simétricos, possa ser considerado.

Problemas que envolvam rotações e deslocamentos finitos podem ser tratados graças à formulação lagrangeana atualizada adotada para o elemento (Bathe e Ho, 1981). Nestas situações emprega-se uma solução incremental-iterativa utilizando o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados (MCDG) (Yang e Shieh, 1990).

A falha dos laminados é analisada pelo critério de falha da primeira lâmina. Para determinação de falha das lâminas de compósitos com reforço por fibras contínuas unidirecionais, é empregado o critério de Tsai-Wu (Daniel e Ishai, 1994).

### 2.1 ELEMENTO TRIANGULAR PLANO PARA PLACAS E CASCAS DE COMPÓSITO LAMINADO

Descreve-se a seguir o elemento empregado na análise da estrutura. Sua formulação é baseada no elemento triangular de estado plano de tensões *Constant Stress Triangular element* (CST) e no elemento triangular para placas finas *Discret Kirchhoff Triangular Element* (DKT) (Bathe, Ho e Batoz, 1980). O comportamento do elemento segue a teoria clássica de laminados (TCL) que adota as seguintes considerações (Daniel e Ishai, 1994):

- a) Cada lâmina é quase-homogênea e ortotrópica;
- b) O laminado é delgado se comparado às suas dimensões laterais e suas lâminas estão sob estado plano de tensões;

- c) Os deslocamentos são pequenos se comparados à espessura do laminado, consideração essa válida para teoria com linearidade geométrica;
- d) Os deslocamentos são contínuos no laminado;
- e) Deslocamentos no plano variam linearmente ao longo da espessura do laminado;
- f) Deformações transversais por cisalhamento são ignoradas. Essa consideração e a anterior implicam em que linhas retas normais à ao plano médio continuam retas e normais a este após a deformação;
- g) As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são lineares;
- h) Distâncias normais ao plano médio permanecem constantes, ou seja, a deformação normal na direção perpendicular ao plano médio  $\epsilon_z$  é ignorada;

O elemento triangular possui três nós, localizados em seus vértices. A cada nó são atribuídos seis graus de liberdade (gdl), totalizando 18 gdl por elemento. Dois deslocamentos no plano e um de rotação, perpendicular ao plano médio do elemento, formam os gdl de membrana. Os gdl de flexão são constituídos pelo deslocamento perpendicular ao plano e as duas rotações no plano.

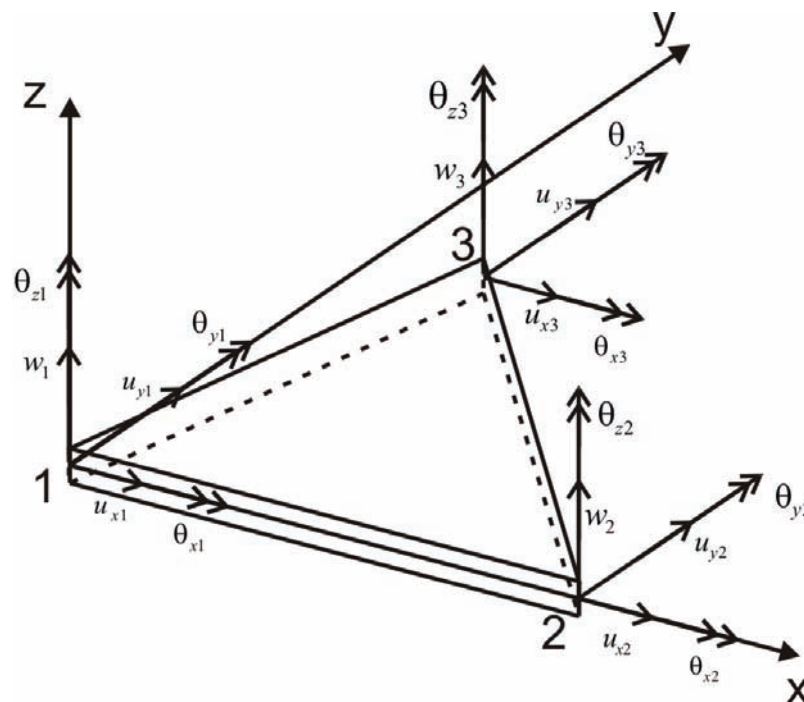


Figura 2.1: Graus de liberdade do elemento triangular plano para placa e casca

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{V'} \{\varepsilon\}^T [D] \delta\{\varepsilon\} dV + \int_{V'} \{\sigma\}^T \delta\{\eta\} dV = \delta\{u\}^T \{P\} - \int_{V'} \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV, \quad (2.1)$$

Os vetores  $\{\varepsilon\}$  e  $\{\eta\}$  são respectivamente as componentes linear e não-linear da deformação de Green-Lagrange. As tensões de Cauchy são dadas pelo vetor  $\{\sigma\}$  e  $\delta\{u\}^T \{P\}$  é o trabalho virtual externo. O tensor  $[D]$  relaciona componentes de tensão e deformação.

A Eq. 2.1 pode ser reescrita compactamente, no contexto de uma análise incremental-iterativa pelo MEF, da seguinte forma:

$$\left( \left[ {}^t K_L \right] + \left[ {}^t K_{NL} \right] \right) \{\Delta U^{(i)}\} = \left\{ {}^{t+\Delta t} P \right\} - \left\{ {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \right\}, \quad (2.2)$$

sendo  $\left[ {}^t K_L \right]$  e  $\left[ {}^t K_{NL} \right]$  respectivamente as matrizes de rigidez linear e não-linear no instante  $t$ . O vetor de incremento de deslocamentos é dado por  $\{\Delta U^{(i)}\}$ , enquanto  $\left\{ {}^{t+\Delta t} P \right\}$  e  $\left\{ {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \right\}$  são o vetor de cargas externas e o vetor de forças nodais equivalentes devido às forças internas no instante  $t+\Delta t$ , sendo este último oriundo da iteração anterior. Cada um dos termos da Eq. 2.2 é apresentado detalhadamente nas partes subseqüentes do texto.

## 2.2 MATRIZ DE RIGIDEZ LINEAR

A matriz de rigidez linear total é obtida pela sobreposição das matrizes de rigidez de membrana  $\left[ K_m \right]$ , de flexão  $\left[ K_b \right]$ , de acoplamento entre membrana e flexão  $\left[ K_{mb} \right]$  e rigidez à rotação fora do plano  $k_{\theta z}$ , apresentadas a seguir. Tendo em vista que estas podem ser calculadas independente, sua formulação é discutida separadamente.

Porém, antes de apresentar a formulação das matrizes de rigidez, é demonstrada a obtenção das matrizes constitutivas para o material empregado.

## 2.2.1 Matrizes constitutivas para compósitos laminados

As matrizes constitutivas de um compósito laminado são formadas pela integração das matrizes constitutivas de cada uma das lâminas ao longo da espessura. Para tanto, é definida inicialmente a matriz constitutiva de uma lâmina de compósito reforçado com fibras segundo uma direção  $\theta$  em relação ao eixo  $x$  do laminado.

A relação tensão-deformação para uma lâmina, segundo seus eixos principais (eixos na direção das fibras e perpendicular às mesmas) é dada por

$$\{\sigma_{12}\} = [Q] \{\varepsilon_{12}\}, \quad (2.3)$$

sendo  $\{\sigma_{12}\}$  o vetor de tensões e  $\{\varepsilon_{12}\}$  vetor de deformações, ambos nas direções principais, e cujas componentes são

$$\{\sigma_{12}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_{12}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

A matriz tensão-deformação para a lâmina é dada por

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Na Eq. 2.5 os termos  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos de elasticidade do material segundo o seu sistema de eixos principais 1-2, conforme ilustrado pela Fig. 2.2. As outras constantes de material são o módulo de corte  $G_{12}$  e o coeficiente de Poisson  $\nu_{12}$ . O coeficiente de Poisson  $\nu_{21}$  pode ser obtido pela Eq. 2.6.

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \quad (2.6)$$

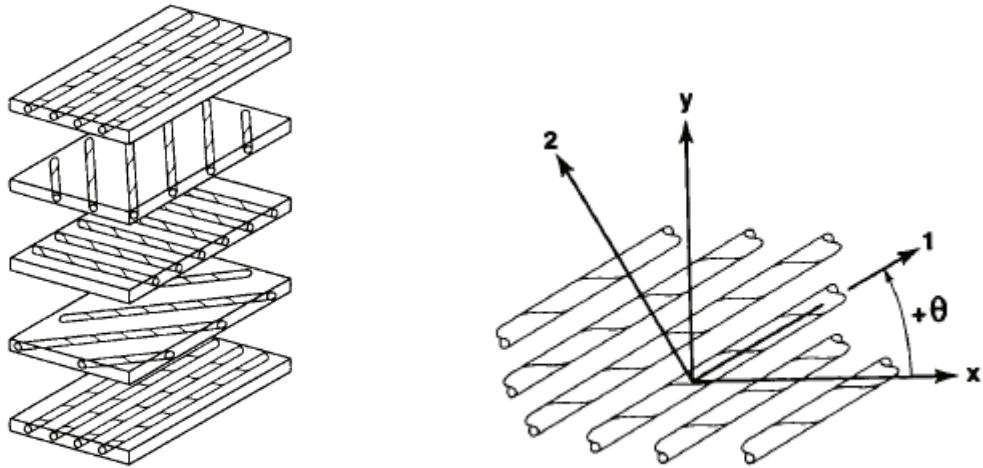


Figura 2.2: Lâminas formando o laminado e ângulo  $\theta$  entre eixo principal do material 1-2 e sistema x-y do laminado (Jones, 1999).

Uma vez definida a relação constitutiva da lâmina para o sistema de eixos principais do material, é possível, através de uma transformação do sistema de referência, obter esta mesma relação para os eixos coordenados x-y do laminado.

A transformação de tensões e deformações é realizada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.7)$$

em que

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2nm \\ n^2 & m^2 & -2nm \\ -nm & nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad \text{com } m = \cos\theta \text{ e } n = \text{sen}\theta. \quad (2.8)$$

Por adotar-se deformações de engenharia neste trabalho, realiza-se uma pré e pós-multiplicação da matriz de transformação  $[T]$  pela matriz  $[R]$  e sua inversa. A matriz  $[R]$ , utilizada para realizar esta transformação, é obtida da relação entre deformações, como consta na Eq. 2.9.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$



uma vez que  $\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$  e  $\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2}$ .

Assim, a matriz de transformação para deformações de engenharia fica:

$$[T_e] = [R] [T] [R]^{-1}, \quad [T_e] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & nm \\ n^2 & m^2 & -nm \\ -2nm & 2nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Com estas matrizes se obtém a relação tensão-deformação segundo os eixos x-y, expressa pela equação

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

na qual a matriz tensão-deformação segundo os eixos coordenados x-y é dada por

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T_e]. \quad (2.12)$$

Pelas relações trigonométricas obtém-se facilmente a inversa de  $[T]$ :

$$[T(\theta)]^{-1} = [T(-\theta)] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2nm \\ n^2 & m^2 & 2nm \\ nm & -nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Para um material constituído de várias lâminas, pode-se relacionar as deformações em qualquer ponto com as deformações do plano médio e as curvaturas deste laminado (Daniel e Ishai, 1994). A equação

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\}, \quad (2.14)$$

expressa esta relação. Nela  $\{\varepsilon^0\}$  é o vetor de deformações no plano médio, z é a distância do ponto em relação ao plano médio e  $\{\kappa\}$  é o vetor de curvaturas, dados por:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,x} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \end{Bmatrix}, \quad \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

sendo que  $u_x$ ,  $u_y$  e  $w$  são deslocamentos transversais e perpendicular de um ponto contido no plano médio do laminado.

Introduzindo a Eq. 2.14 na Eq. 2.11 definem-se as tensões para uma lâmina  $k$  em termos das deformações do plano médio e das curvaturas do laminado, como segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = [\bar{Q}]_{(k)} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (2.16)$$

Por sua vez, as resultantes de tensões em um determinado ponto do material são obtidas pela integração das tensões ao longo da espessura do laminado. As Eq.2.17 e Eq.2.18 definem essas resultantes. Uma vez que as tensões estão definidas pela Eq. 2.16 para cada lâmina em separado, a integração sobre a espessura total transforma-se em uma somatória de integrações sobre a espessura de cada lâmina.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^{nlam} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad (2.17)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^{nlam} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad (2.18)$$

Nestas equações  $z_k$  é a posição da face superior da lâmina  $k$  ao longo da espessura total  $h$  do laminado e  $nlam$  é o número de lâminas.

Substituindo a Eq. 2.16 nas Eq.2.17 e Eq.2.18, as seguintes relações constitutivas são obtidas para o laminado:

$$\{N\} = [D_m] \{\varepsilon^0\} + [D_{mb}] \{\kappa\}, \quad (2.19)$$

e

$$\{M\} = [D_{mb}] \{\varepsilon^0\} + [D_b] \{\kappa\}, \quad (2.20)$$

ou, em conjunto

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_m] & [D_{mb}] \\ [D_{mb}] & [D_b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

Na Eq. 2.21 as matrizes  $[D_m]$ ,  $[D_b]$  e  $[D_{mb}]$  são respectivamente as matrizes constitutivas de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão dadas por:

$$[D_m] = \sum_{k=1}^{nlam} [\bar{Q}]_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz, \quad \text{sendo} \quad D_{mij} = \sum_{k=1}^{nlam} \bar{Q}_{(k)ij} (z_k - z_{k-1}), \quad (2.22)$$

$$[D_{mb}] = \sum_{k=1}^{nlam} [\bar{Q}]_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz, \quad \text{sendo} \quad D_{mbij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nlam} \bar{Q}_{(k)ij} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (2.23)$$

$$[D_b] = \sum_{k=1}^{nlam} [\bar{Q}]_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz, \quad \text{sendo} \quad D_{bij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nlam} \bar{Q}_{(k)ij} (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad (2.24)$$

Deve-se notar que, no caso de laminados simétricos, a integral ao longo da espessura na equação da matriz  $[D_{mb}]$  torna-se zero. Isto significa que a matriz também é zerada, o que indica a inexistência do acoplamento membrana-flexão.

## 2.2.2 Matriz de rigidez de membrana

Para o elemento de estado plano de tensões CST adotado neste trabalho o vetor de deslocamentos de membrana é dado por:

$$\{U_{m_i}^e\} = \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.25)$$

Os deslocamentos de membrana são definidos ao longo do elemento pela interpolação de seus valores nodais. As funções de interpolação de membrana  $N_m$  estão dadas pela Eq. 2.26, onde  $L_i$  são coordenadas de área na região triangular.

$$[N_{m_i}] = \begin{bmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.26)$$

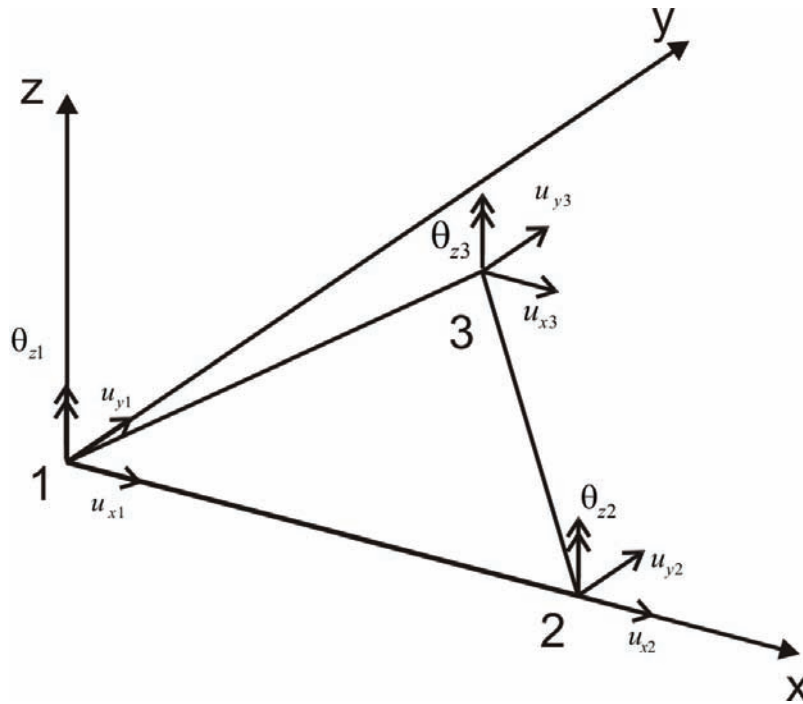


Figura 2.3: Graus de liberdade de membrana mais rotação em torno do eixo z

Aplicando-se os procedimentos clássicos do MEF obtém-se a matriz de relação deformação-deslocamento de membrana  $[B_m]$ , que fica da seguinte forma:

$$[B_{m_i}] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} 2b_i & 0 \\ 0 & 2c_i \\ 2c_i & 2b_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.27)$$

Sendo que  $A$ , a área do elemento, e os termos  $b_i$  e  $c_i$  são dados por:

$$A = \frac{1}{2}(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$b_i = y_j - y_k \quad \text{e} \quad c_i = x_k - x_j \quad \text{sendo } i, j, k = 1, 2, 3 \text{ (com permutação cíclica)} \quad (2.28)$$

A matriz  $[B_m]$  é obtida de forma direta utilizando-se de simples operações aritméticas, uma vez que suas componentes são constantes geométricas, como apresentado na Eq. 2.28. Através de um simples produto matricial a matriz de rigidez de membrana  $[K_m]$  pode então ser obtida, vindo expressa da seguinte forma:

$$[K_m] = [B_m]^T [D_m] [B_m] \quad (2.29)$$

Esta matriz de rigidez é advinda da formulação do elemento CST, que por sua vez é empregado para problemas de estado plano de tensões. Apenas os deslocamentos no plano do elemento são contemplados na formulação. Porém, como descrito no início desse capítulo, o elemento triangular de casca estudado aqui apresenta um gdl de rotação perpendicular ao seu plano médio, o qual é denominada  $\theta_z$ . Assim sendo, introduz-se um valor artificial de rigidez  $k_{\theta_z}$  nas posições da diagonal da matriz de rigidez do elemento de casca correspondentes a esses gdl. Desta forma elimina-se a singularidade que ocorreria na matriz, sem afetar os resultados. O valor recomendado para o coeficiente  $k_{\theta_z}$  é de  $10^{-4}$  vezes a menor componente de rigidez de flexão encontrada na matriz  $[K_b]$  (Bathe e Ho, 1981).

### 2.2.3 Matriz de rigidez de flexão

A formulação de elementos baseados na teoria de Kirchhoff para flexão de placas finas é obtida considerando inicialmente uma teoria de placas incluindo as deformações transversais de corte. Nestes casos as quantidades independentes são o deslocamento transversal e as rotações. A energia de corte transversal é então completamente ignorada e as hipóteses de Kirchhoff são introduzidas de forma discreta ao longo dos lados do elemento relacionando às rotações ao deslocamento transversal (Bathe e Ho, 1980).

O elemento de placa que, sobreposto ao elemento de membrana descrito anteriormente, forma o elemento de casca triangular plana discutida neste trabalho é o DKT. Sua formulação foi apresentada por Bathe e Ho (1980), mostrando-se bastante eficiente na simulação numérica de placas.

Os gdl deste elemento são dados pela Eq. 2.30 e ilustrados na Fig. 2.4. A teoria empregada na obtenção da matriz de rigidez é apresentada a seguir.

$$\{U_{bi}^e\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

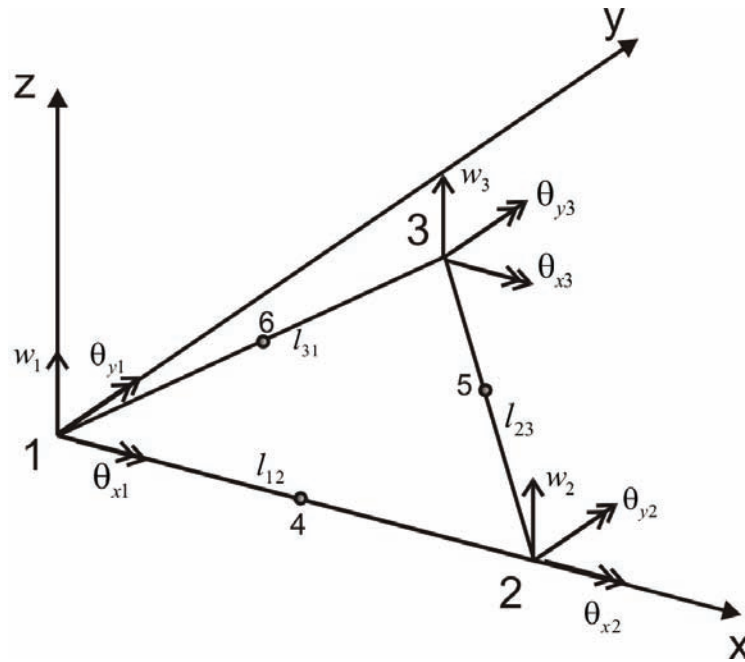


Figura 2.4: Graus de liberdade de flexão

As seguintes considerações são empregadas na formulação do elemento DKT:

- a) As rotações da normal à superfície média da placa com os planos  $xz$  e  $yz$  representadas por  $\beta_x = -w_{,x}$  e  $\beta_y = -w_{,y}$ , respectivamente, variam de forma quadrática no elemento, isto é:

$$\beta_x = -w_{,x} = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{xi} ,$$

$$\beta_y = -w_{,y} = \sum_{i=1}^6 N_i \beta_{yi} , \quad (2.31)$$

em que  $i = 1$  a  $6$  representa os nós de canto e intermediários e  $N_i$  são as funções de forma dadas por:

$$N_1 = 2(1 - \xi - \eta) \left( \frac{1}{2} - \xi - \eta \right);$$

$$N_2 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_3 = \eta(2\eta - 1) \quad (2.32)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

sendo  $\xi$  e  $\eta$  as coordenadas de área  $L_2$  e  $L_3$ , respectivamente.

b) As hipóteses de Kirchhoff são impostas em:

1) Nós dos cantos

$$\{\mathcal{V}\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} = \{0\}, \text{ nos nós } 1, 2 \text{ e } 3 \quad (2.33)$$

2) Nós dos lados (definidos nas bordas do elemento, Fig. 2.5).

$$\beta_{sk} + \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_k = 0, \quad k = 4, 5 \text{ e } 6 \quad (2.34)$$

com  $\beta_{sk}$  sendo a rotação na direção paralela ao lado.

c) Ao longo dos lados são impostas as seguintes condições:

A variação de  $w$  ao longo da coordenada  $s$  é cúbica, sendo que a formulação é definida por quatro parâmetros, que são os deslocamentos e rotações nos nós dos extremos. A rotação no ponto central  $k$  do lado  $ij$  vem dada por:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_k = -\frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_j \quad (2.35)$$

Por outro lado, a variação de  $\beta_n$  (rotação na direção perpendicular ao lado) ao longo dos lados é linear, resultando em:

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} (\beta_{ni} + \beta_{nj}), \quad (2.36)$$

com  $k = 4, 5, 6$  representando os nós intermediários dos lados  $ij = 23, 31$  e  $12$ , respectivamente, e sendo  $l_{ij}$  o comprimento desses lados.

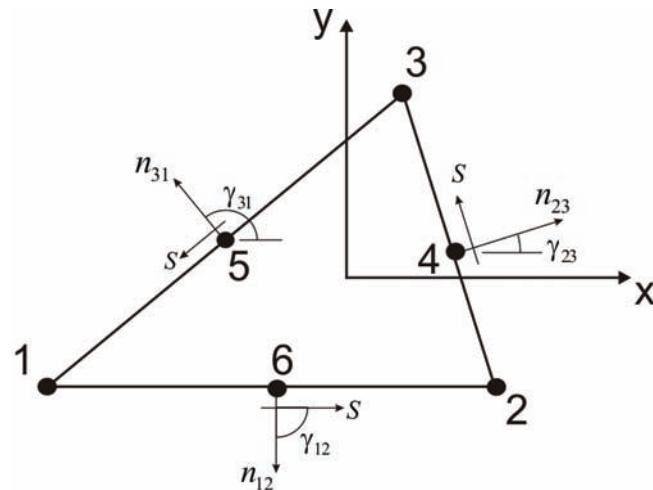


Figura 2.5: Representação dos nós intermediários e direções perpendicular e paralela aos lados

Algumas observações que podem ser feitas são as seguintes:

- Como  $w$  varia segundo uma formulação cúbica nos lados, também varia cubicamente no interior do elemento. Consequentemente,  $\frac{\partial w}{\partial s}$  varia quadraticamente, da mesma forma que  $\beta_s$ .
- Como  $\frac{\partial w}{\partial s} + \beta_s = 0$  nos nós centrais de cada lado, a hipótese de Kirchhoff é satisfeita em todo o contorno do elemento.
- $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial s}$ ,  $\beta_s$  e  $\beta_n$  são compatíveis ao longo dos lados (ou seja, que tem continuidade entre elementos). Como  $w$  não foi definido no interior do elemento,  $\frac{\partial w}{\partial n}$  não foi introduzido.

Para obter-se  $\beta_x$  e  $\beta_y$  em termos dos graus de liberdade de flexão nos nós de vértice são necessárias as seguintes relações geométricas em cada lado do triângulo:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

e



$$\begin{Bmatrix} w_{,s} \\ w_{,n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}, \quad (2.38)$$

nas quais  $c = \cos(\gamma_{ij})$  e  $s = \text{sen}(\gamma_{ij})$  tal que  $\gamma_{ij} = (\vec{x}, \vec{n}_{ij})$ , como mostra a Fig. 2.5.

Com isso obtém-se as seguintes relações:

$$\beta_x = \{H_x\}^T \{U_b^e\} \quad \text{e} \quad \beta_y = \{H_y\}^T \{U_b^e\} \quad (2.39)$$

sendo  $\{H_x\}$  e  $\{H_y\}$  vetores cujas nove componentes são as novas funções de interpolação. Essas componentes são escritas em função de  $N_i$ ,  $i = 1$  a 6 e das coordenadas dos nós, como segue:

$$\begin{aligned} H_{x1} &= 1,5(a_6 N_6 - a_5 N_5) \\ H_{x2} &= b_5 N_5 - b_6 N_6 \\ H_{x3} &= N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6 \\ H_{y1} &= 1,5(d_6 N_6 - d_5 N_5) \\ H_{y2} &= -N_1 + e_5 N_5 + e_6 N_6 \\ H_{y3} &= -H_{x2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

As funções  $H_{x4}$ ,  $H_{x5}$ ,  $H_{x6}$ ,  $H_{y4}$ ,  $H_{y5}$  e  $H_{y6}$  são obtidas através das expressões acima, substituindo  $N_1$  por  $N_2$  e os índices 6 e 5 por 4 e 6, respectivamente. As funções  $H_{x7}$ ,  $H_{x8}$ ,  $H_{x9}$ ,  $H_{y7}$ ,  $H_{y8}$  e  $H_{y9}$  são obtidas substituindo  $N_1$  por  $N_3$  e os índices 6 e 5 por 5 e 4, respectivamente. As outras variáveis que compõem as equações são:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{-x_{ij}}{l_{ij}^2} & b_k &= \frac{3x_{ij}y_{ij}}{4l_{ij}^2} & c_k &= \frac{\left(\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2\right)}{l_{ij}^2} \\ d_k &= \frac{-y_{ij}}{l_{ij}^2} & e_k &= \frac{\left(\frac{1}{4}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}x_{ij}^2\right)}{l_{ij}^2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

em que  $k = 4, 5, 6$  são os nós intermediários dos lados  $ij = 23, 31$  e  $12$ , respectivamente. Também são utilizadas as constantes geométricas  $x_{ij} = x_i - x_j$  e  $y_{ij} = y_i - y_j$ .

Empregando os procedimentos padrão do MEF para obtenção da matriz de rigidez chega-se à relação deformação-deslocamento de flexão que fica (Bathe e Ho, 1980):

$$[B_b(\xi, \eta)] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \{H_{x,\xi}\}^T + y_{12} \{H_{x,\eta}\}^T \\ -x_{31} \{H_{y,\xi}\}^T - x_{12} \{H_{y,\eta}\}^T \\ -x_{31} \{H_{x,\xi}\}^T - x_{12} \{H_{x,\eta}\}^T + y_{31} \{H_{y,\xi}\}^T + y_{12} \{H_{y,\eta}\}^T \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

onde  $\{H_{x,\xi}\}$ ,  $\{H_{x,\eta}\}$ ,  $\{H_{y,\xi}\}$  e  $\{H_{y,\eta}\}$  são as derivadas de  $\{H_x\}$  e  $\{H_y\}$  em relação a  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente, lembrando que  $\xi = L_2$  e  $\eta = L_3$ . Estas derivadas vêm dadas por:

$$\{H_{x,\xi}\} = \left\{ \begin{array}{l} P_6(1-2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1-2\xi) + \eta(P_4 + P_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_6 - q_4) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_5 + P_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{array} \right\} \quad (2.43a)$$

$$\{H_{y,\xi}\} = \left\{ \begin{array}{l} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{array} \right\} \quad (2.43b)$$

$$\{H_{x,\eta}\} = \left\{ \begin{array}{l} -P_5(1-2\eta) - \xi(P_6 - P_5) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ P_5(1-2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{array} \right\} \quad (2.43c)$$

$$\{H_{y,\eta}\} = \left\{ \begin{array}{l} -t_5(1-2\eta) - \xi(t_6 - t_5) \\ 1 + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{array} \right\} \quad (2.43d)$$

onde,

$$P_k = -6x_{ij}/l_{ij}^2 = 6a_k; \quad t_k = -6y_{ij}/l_{ij}^2 = 6d_k$$

$$t_k = 3x_{ij}y_{ij}/l_{ij}^2 = 4b_k; \quad r_k = 3y_{ij}^2/l_{ij}^2 \quad (2.43e)$$

sendo  $k = 4, 5$  e  $6$  para  $ij = 23, 31$  e  $12$ , respectivamente.

A matriz de rigidez de flexão do elemento DKT é obtida fazendo:

$$[K_b] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [B_b]^T [D_b] [B_b] d\xi d\eta \quad (2.44)$$

Uma vez que a espessura e as propriedades do material são tomadas constantes no plano de elemento, a integração exata de  $[K_b]$  é obtida utilizando integração numérica com três pontos no interior do elemento.

## 2.2.4 Matriz de rigidez de acoplamento membrana-flexão

A existência dessa matriz é um reflexo dos fenômenos de acoplamento entre deformações de extensão, torção e flexão pertinentes aos materiais laminados. Estes fenômenos ocorrem principalmente em laminados assimétricos com camadas ortotrópicas. Sua dedução pode ser obtida da mesma forma que nas demais matrizes de rigidez em se trabalhando o primeiro termo da equação dos trabalhos virtuais, como será demonstrado a seguir.

$$\int_{V'} \{\varepsilon\}^T [D] \delta\{\varepsilon^t\} dV + \int_{V'} \{\sigma\}^T \delta\{\eta^t\} dV = \delta\{u\}^T \{^{t+\Delta t} P\} - \int_{V'} \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon^t\} dV \quad (2.45)$$

Trabalhando com o primeiro termo e omitindo os superíndices  $t$  que indicam a configuração da estrutura num determinado instante, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{V'} \{\varepsilon\}^T [D] \delta\{\varepsilon\} dV &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \{\varepsilon\}^T [\bar{Q}] \delta\{\varepsilon\} dz dA = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{\varepsilon^0\}^T + z\{\kappa\}^T \right) [\bar{Q}] \delta\left( \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\} \right) dz dA = \\ &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{\varepsilon^0\}^T [\bar{Q}] \delta\{\varepsilon^0\} + \{\varepsilon^0\}^T z [\bar{Q}] \delta\{\kappa\} + \{\kappa\}^T z [\bar{Q}] \delta\{\varepsilon^0\} + \{\kappa\}^T z^2 [\bar{Q}] \delta\{\kappa\} \right) dz dA \end{aligned} \quad (2.46)$$

Em seguida, aplicando-se as relações deformação-deslocamento a esta equação, e trabalhando com cada um dos termos da integral separadamente, obtém-se:

a) Do primeiro termo:

$$\begin{aligned} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{\varepsilon^0\}^T [\bar{Q}] \delta\{\varepsilon^0\} \right) dz dA &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{U_m\}^T [B_m]^T [\bar{Q}] [B_m] \delta\{U_m\} \right) dz dA = \\ \{U_m\}^T \left[ \int_A [B_m]^T \left( \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{Q}] dz \right) [B_m] dA \right] \delta\{U_m\} &= \{U_m\}^T \left[ \int_A [B_m]^T [D_m] [B_m] dA \right] \delta\{U_m\} \\ \Rightarrow \int_A [B_m]^T [D_m] [B_m] dA &= [K_m] \end{aligned} \quad (2.47)$$

b) Do segundo termo:

$$\begin{aligned}
& \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{\varepsilon^0\}^T z [\bar{Q}] \delta\{\kappa\} \right) dz dA = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{U_m\}^T [B_m]^T z [\bar{Q}] \delta[B_b] \{U_b\} \right) dz dA = \\
& \{U_m\}^T \left[ \int_A [B_m]^T \left( \int_{-h/2}^{h/2} z [\bar{Q}] dz \right) [B_b] dA \right] \delta\{U_b\} = \{U_m\}^T \left[ \int_A [B_m]^T [D_{mb}] [B_b] dA \right] \delta\{U_b\} \\
& \Rightarrow \int_A [B_m]^T [D_{mb}] [B_b] dA = [K_{mb}] \tag{2.48}
\end{aligned}$$

c) Do terceiro termo:

Como  $\left( \{\varepsilon^0\}^T z [\bar{Q}] \delta\{\kappa\} \right) = \left[ \left( \{\kappa\}^T z [\bar{Q}] \delta\{\varepsilon^0\} \right) \right]^T$ , é evidente que se cumpre a relação  $[K_{bm}] = [K_{mb}]^T$  entre as matrizes de acoplamento.

d) Do quarto termo:

$$\begin{aligned}
& \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{\kappa\}^T z^2 [\bar{Q}] \delta\{\kappa\} \right) dz dA = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( \{U_b\}^T [B_b]^T z^2 [\bar{Q}] [B_b] \delta\{U_b\} \right) dz dA = \\
& \{U_b\}^T \left[ \int_A [B_b]^T \left( \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [\bar{Q}] dz \right) [B_b] dA \right] \delta\{U_b\} = \{U_b\}^T \left[ \int_A [B_b]^T [D_b] [B_b] dA \right] \delta\{U_b\} \\
& \Rightarrow \int_A [B_b]^T [D_b] [B_b] dA = [K_b] \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Como deduzido acima, a matriz de acoplamento membrana-flexão fica:

$$[K_{mb}] = \int_A [B_m]^T [D_{mb}] [B_b] dA, \tag{2.50}$$

que nesse caso é obtida por integração numérica pois os coeficientes de  $[B_b]$  são variáveis ao longo do elemento.

## 2.2.5 Montagem da matriz de rigidez linear

A montagem da parte linear da matriz de rigidez total do elemento fica, unindo todas as componentes discutidas anteriormente, da seguinte forma:

$$[K_L] = \begin{bmatrix} [K_m] & [K_{mb}] & 0 \\ [K_{mb}]^T & [K_b] & 0 \\ 0 & 0 & [K_{\theta_z}] \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

para um vetor de deslocamentos

$$\{\bar{U}^e\} = \begin{Bmatrix} \{U_m\} \\ \{U_b\} \\ \{U_{\theta_z}\} \end{Bmatrix}, \quad (2.52)$$

sendo que

$$[K_{\theta_z}] = \begin{bmatrix} k_{\theta_z} & 0 & 0 \\ 0 & k_{\theta_z} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta_z} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{U_{\theta_z}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

A matriz  $[K_L]$  é rearranjada de forma que seus coeficientes de rigidez correspondam ao vetor de deslocamentos total utilizado

$$\{U_i^e\} = \{u_{xi} \quad u_{yi} \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\}^T, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (2.54)$$

Tendo em vista que as equações de equilíbrio da estrutura são estabelecidas num sistema global de referência e que todas as discussões apresentadas até o momento são construídas segundo o sistema local do elemento (ver Fig. 2.6), é necessário estabelecer uma relação de transformação entre o sistema local e o sistema global. Os deslocamentos do nó  $i$ , do elemento  $e$ , dados pela Eq. 2.54, são transformados do sistema global para o local por:

$$\{U_i^e\}^l = [T_r] \{U_i^e\}^g \quad (2.55)$$

onde

$$[T_r] = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] \\ [0] & [\lambda] \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

é a matriz de transformação global-local, sendo  $[\lambda]$  uma matriz contendo os cossenos entre os eixos do sistema global e local. Essa matriz é dada por:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

cujas componentes são calculadas como segue (Zhang et al., 1998):

$$\lambda_{x'x} = \frac{x_2^g - x_1^g}{l_{12}}; \quad \lambda_{x'y} = \frac{y_2^g - y_1^g}{l_{12}}; \quad \lambda_{x'z} = \frac{z_2^g - z_1^g}{l_{12}}$$

$$\lambda_{z'x} = \frac{x_c}{2A}; \quad \lambda_{z'y} = \frac{y_c}{2A}; \quad \lambda_{z'z} = \frac{z_c}{2A}$$

$$\lambda_{y'x} = \lambda_{z'y} \lambda_{x'z} - \lambda_{x'y} \lambda_{z'z}; \quad \lambda_{y'y} = \lambda_{x'x} \lambda_{z'z} - \lambda_{z'x} \lambda_{x'z}; \quad \lambda_{y'z} = \lambda_{z'x} \lambda_{x'y} - \lambda_{x'x} \lambda_{z'y} \quad (2.58)$$

onde

$$l_{12} = \left[ (x_2^g - x_1^g)^2 + (y_2^g - y_1^g)^2 + (z_2^g - z_1^g)^2 \right]^{1/2}$$

$$x_c = (y_2^g - y_1^g)(z_3^g - z_1^g) - (z_2^g - z_1^g)(y_3^g - y_1^g)$$

$$y_c = (z_2^g - z_1^g)(x_3^g - x_1^g) - (x_2^g - x_1^g)(z_3^g - z_1^g)$$

$$z_c = (x_2^g - x_1^g)(y_3^g - y_1^g) - (y_2^g - y_1^g)(x_3^g - x_1^g)$$

$$2A = (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2)^{1/2} \quad (2.59)$$

Assim, a transformação do vetor de deslocamentos nodais de um elemento do sistema global para o sistema local é expressa pela relação:

$$\{U^e\}^l = [\tilde{T}_r] \{U^e\}^g \quad (2.60)$$

onde

$$[\tilde{T}_r] = \begin{bmatrix} [T_r] & [0] & [0] \\ [0] & [T_r] & [0] \\ [0] & [0] & [T_r] \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

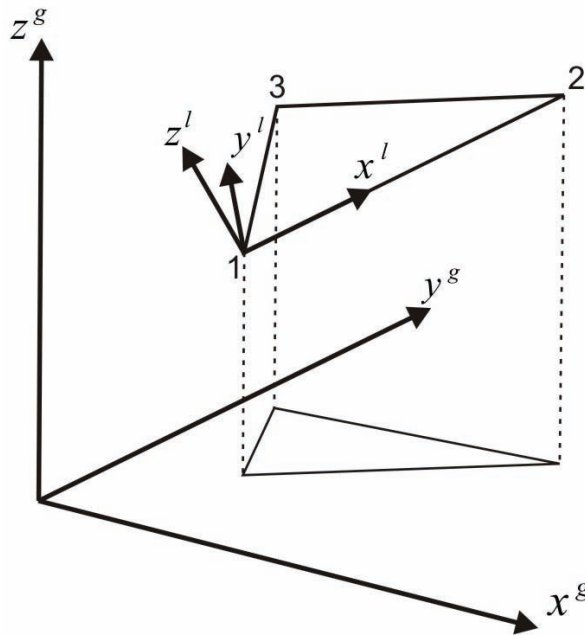


Figura 2.6: Sistemas de coordenadas global e local para um elemento triangular

Essa mesma matriz também serve para fazer a transformação do vetor de cargas e da matriz de rigidez do sistema local para o global, permitindo assim a montagem da equação de equilíbrio no MEF. As transformações citadas são dadas por:

$$[K^e]^g = [\tilde{T}_r]^T [K^e]^l [\tilde{T}_r]$$

$$\{P^e\}^g = [\tilde{T}_r]^T \{P^e\}^l \quad (2.62)$$

onde  $[K^e]^l$  é a matriz de rigidez total do elemento no sistema local, incluindo a parte geométrica nos casos de análise não-linear, e o vetor  $\{P^e\}^l$  representa as cargas aplicadas nos nós do elemento  $e$ , também segundo o sistema local de coordenadas.



## 2.3 FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE COM GRANDES DESLOCAMENTOS

Como descrito anteriormente, os problemas com grandes deslocamentos são resolvidos usando um esquema incremental-iterativo, dado pela seguinte equação:

$$\left( [{}^t K_L] + [{}^t K_{NL}] \right) \{ \Delta U^{(i)} \} = \{ {}^{t+\Delta t} P \} - \{ {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \} \quad (2.63)$$

Nesta equação é considerado o equilíbrio para um único elemento, o que pode ser estendido para toda a estrutura utilizando-se os procedimentos comuns de montagem do MEF. A formulação Lagrangeana atualizada é utilizada porque a configuração de referência (representada pelo subíndice esquerdo) corresponde ao tempo em que as quantidades são calculadas (representado pelo superíndice esquerdo) (Bathe e Ho, 1981). O superíndice direito  $i$  se refere ao número da iteração realizada pelo método de solução do problema, dentro do passo de carga.

Sendo assim, o vetor de deslocamentos totais em um instante  $t+\Delta t$  é obtido por:

$$\{ {}^{t+\Delta t} U^{(i)} \} = \{ {}^{t+\Delta t} U^{(i-1)} \} + \{ \Delta U^{(i)} \} \quad (2.64)$$

O sistema global de coordenadas, no qual são calculados os deslocamentos e rotações nodais totais e incrementais, é fixo. Adicionalmente a este consideramos um sistema local fixo ao corpo. A matriz de rigidez e vetor de forças, correspondentes ao sistema global, são obtidos inicialmente no sistema local fixo e posteriormente transformados para o global. A seguir serão discutidos os vetores de forças nodais e a matriz de rigidez não-linear.

### 2.3.1 Vetor de forças e matriz de rigidez não-linear de membrana

Os deslocamentos totais de membrana  $\{ {}^t \bar{U}_m \}$  são calculados num instante  $t$  pelas diferenças das coordenadas nodais do elemento entre o instante  $t$  e zero. Esse vetor é dado por (Bathe e Ho, 1981):

$$\{ {}^t \bar{U}_m \} = \{ 0 \quad 0 \quad {}^t u_x^2 \quad 0 \quad {}^t u_x^3 \quad {}^t u_y^3 \}^T, \quad (2.65)$$

como ilustrado na Fig 2.7.

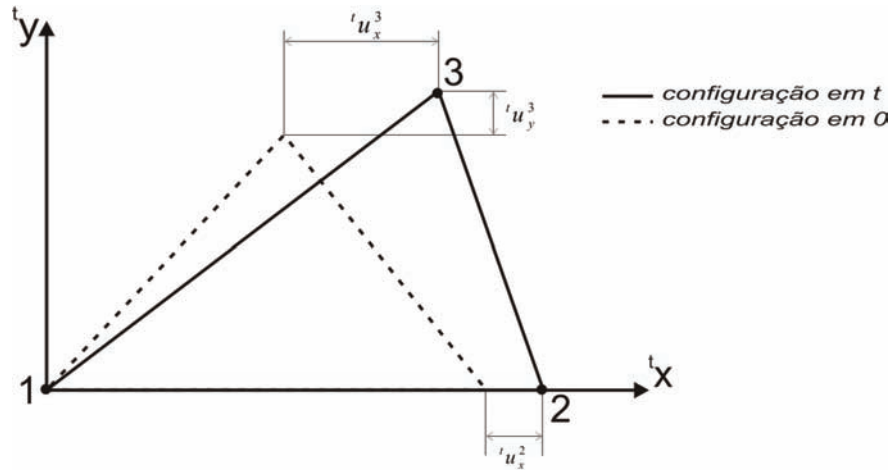


Figura 2.7: Deslocamento total de membrana para o elemento no instante  $t$

As forças internas de membrana, utilizadas na obtenção da matriz geométrica, são calculadas de forma linear e no sistema local:

$$\{ {}^t N \} = [D_m] \{ {}^t \varepsilon^0 \} + [D_{mb}] \{ {}^t \kappa \} \quad (2.66)$$

na qual

$$\{ {}^t \varepsilon^0 \} = [B_m] \{ {}^t \bar{U}_m \} \quad (2.67)$$

e

$$\{ {}^t \kappa \} = [B_b] \{ \Delta {}^t U_b \} + \{ {}^{t-\Delta t} \kappa \} \quad (2.68)$$

Neste processo  $\{ {}^t \kappa \}$  é calculado incrementalmente, como sugere a presença do superíndice  $t-\Delta t$  que indica a configuração anterior à que está sendo considerada. As duas matrizes tensão-deformação  $[D_m]$  e  $[D_{mb}]$  correspondem à configuração inicial do elemento.

O vetor de forças nodais equivalentes, referente às forças de membrana, é dado por:

$$\{ {}^t F_m^{(i)} \} = [K_m] \{ {}^t \bar{U}_m^{(i)} \} + \{ {}^t F_{mb}^{(i)} \}, \quad (2.69)$$

no qual  $\{ {}^t F_{mb}^{(i)} \}$  é o vetor de forças nodais equivalentes de membrana devido ao acoplamento membrana-flexão, calculado incrementalmente da seguinte forma:

$$\{F_{mb}^{(i)}\} = [K_b] \{\Delta U_b^{(i)}\} + \{F_{mb}^{(i-1)}\} \quad (2.70)$$

A matriz não-linear de rigidez é dada por (Bathe e Ho, 1981):

$$[{}^t K_{NL}] = \int_A [B_{NL}]^T [{}^t \hat{N}] [B_{NL}] dA \quad (2.71)$$

sendo,

$$[{}^t \hat{N}] = \begin{bmatrix} [{}^t N^*] & & \\ & [{}^t N^*] & \\ & & [{}^t N^*] \end{bmatrix}, \quad [{}^t N^*] = \begin{bmatrix} {}^t N_x & {}^t N_{xy} \\ {}^t N_{xy} & {}^t N_y \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

e, dado o vetor de deslocamentos correspondente  $\{{}^t U^*\}$ , no sistema local

$$\{{}^t U^*\} = \{{}^t u_{x1} \quad {}^t u_{y1} \quad {}^t w_1 \quad {}^t u_{x2} \quad {}^t u_{y2} \quad {}^t w_2 \quad {}^t u_{x3} \quad {}^t u_{y3} \quad {}^t w_3\}^T \quad (2.73)$$

tem-se

$$[B_{NL}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

sendo  $b_i = y_j - y_k$  e  $c_i = x_k - x_j$  com  $i, j, k = 1, 2, 3$ . O coeficiente  $b_3$  não está presente por ter valor zero para qualquer configuração neste sistema local de eixos. Graças à consideração de restrição a problemas de pequenas deformações é possível utilizar a matriz  $[B_{NL}]$  calculada de acordo com a configuração inicial, para qualquer configuração  $t$  (Bathe e Ho, 1981).

### 2.3.2 Vetor de forças e matriz de rigidez não-linear de flexão

De maneira semelhante ao apresentado para as forças internas de membrana, o vetor de momentos é calculado da seguinte forma:

$$\{ {}^t M \} = [D_{mb}]^T \{ {}^t \varepsilon^0 \} + [D_b] \{ {}^t \kappa \} \quad (2.75)$$

Nesta equação os vetores de deformações  $\{ {}^t \varepsilon^0 \}$  e  $\{ {}^t \kappa \}$  são os mesmos calculados para determinação das forças de membrana. Sendo assim,  $\{ {}^t M \}$  é calculado por incrementos, uma vez que  $\{ {}^t \kappa \}$  é obtido desta forma, conforme a Eq.2.68.

O vetor de forças nodais equivalentes relativo aos gdl de flexão é dado por:

$$\{ {}^t F_b^{(i)} \} = \{ {}^t F_{bb}^{(i)} \} + \{ {}^t F_{bm}^{(i)} \} \quad (2.76)$$

onde

$$\{ {}^t F_{bb}^{(i)} \} = [K_b] \{ \Delta {}^t U_b^{(i)} \} + \{ {}^t F_{bb}^{(i-1)} \} \quad (2.77)$$

e

$$\{ {}^t F_{bm}^{(i)} \} = [K_{mb}]^T \{ {}^t \bar{U}_m^{(i)} \} \quad (2.78)$$

A matriz de rigidez não-linear de flexão é ignorada. Essa consideração é possível porque os efeitos de flexão são relativamente pequenos, sendo requerida apenas uma matriz de rigidez aproximada para a análise.

As equações anteriores foram obtidas assumindo-se que o incremento de deslocamentos é pequeno e que a distorção dos elementos por flexão pode ser ignorada na avaliação da matriz deformação-deslocamento generalizada (Bathe e Ho, 1981).

## 2.4 CÁLCULO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

O cálculo das tensões e deformações se dá de forma peculiar para o tipo de material em questão. Nos compósitos laminados cada camada pode apresentar um estado de tensão e deformação diferente. Além disto, as camadas podem possuir diferentes propriedades, o que torna difícil apontar um local crítico a se examinar em uma análise de falha.

Somada à necessidade de se calcular os estados de tensões e deformações para cada lamina ainda existe um segundo complicador neste tipo de análise. Os eixos principais das lâminas, aos quais estão referidos as propriedades elásticas e de resistência do

material, geralmente não coincidem com os eixos principais do laminado ou mesmo do elemento. Sendo assim, se faz necessária uma transformação de sistema coordenado para as variáveis previamente calculadas. Apenas depois destas operações é que se pode aplicar as teorias de falha sobre cada lâminas e investigar a integridade da estrutura.

Neste trabalho os valores de tensão e deformação são calculados no domínio de cada elemento em três pontos. A posição destes corresponde aos pontos de integração numérica no interior do elemento, como realizado para a obtenção da matriz de rigidez de flexão. No local destes pontos são calculadas as deformações e tensões para as faces superior e inferior de cada lamina.

O processo de cálculo destas componentes é praticamente idêntico nos casos de análise linear ou não-linear da estrutura. A única distinção ocorre devido à forma como se considera os deslocamentos de membrana em cada caso.

Como está explícito na Eq. 2.79, já apresentada anteriormente, o estado de tensões em um ponto do material é dependente de suas características elásticas e das componentes de deformação neste ponto.

$$\{\sigma_{12}\} = [Q] \{\varepsilon_{12}\}, \quad (2.79)$$

A matriz que faz relação entre tensões e deformações depende unicamente das propriedades elásticas do compósito e pode ser obtida facilmente conforme a Eq. 2.5. Resta então a tarefa de calcular o vetor de deformações durante a análise numérica da estrutura.

Conforme a TCL, as deformações num ponto, contido no elemento e a uma distancia  $z$  em relação ao seu plano médio, podem ser obtidas pela seguinte relação:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\}, \quad (2.80)$$

As componentes desta equação, descritas em trechos anteriores do texto, são referenciadas ao sistema de eixos local do elemento. Portanto o vetor de deformações obtido através dela também se refere ao sistema local. A operação de transformação aplicada para que se obtenha as deformações referenciadas aos eixos principais de cada lamina se procede como segue.

$$\{\varepsilon_{12}\} = [T_e(\delta)] \{\varepsilon\} \quad (2.81)$$

Na Eq. 2.81  $[T_e(\delta)]$  é a mesma matriz de transformação dada pela Eq. 2.10. Porém, agora suas componentes são calculados em função do ângulo  $\delta$ , definido entre o sistema de eixos principais da lâmina e os eixos locais do elemento (ver Fig 2.8).

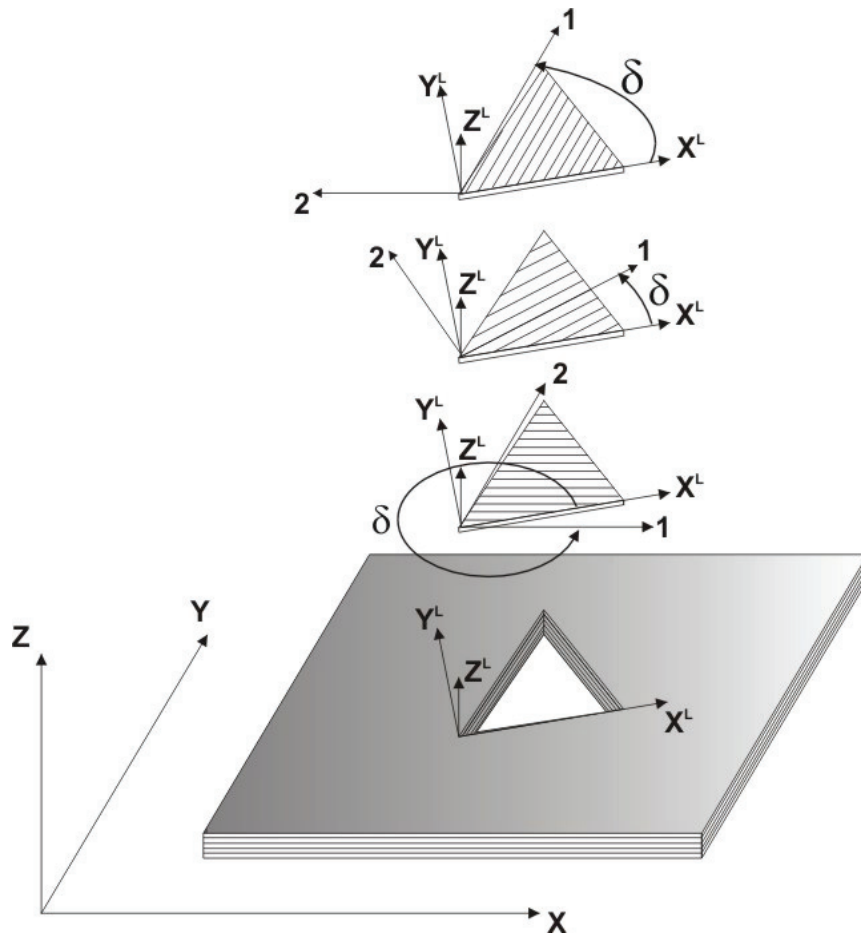


Figura 2.8: Ângulo  $\delta$  entre sistemas de eixos locais do elemento e eixos principais do material

Previamente às operações recentemente discutidas se faz necessária a obtenção dos vetores de deformação do plano médio e curvaturas,  $\{\varepsilon^0\}$  e  $\{\kappa\}$ . Pelas características inerentes ao elemento CST, utilizado aqui para compor a parte de membrana, as deformações do plano médio são constantes em todo o domínio do elemento. Seu cálculo é simples, uma vez que a matriz  $[B_m]$ , que faz a relação entre os deslocamentos de membrana e as deformações, tem constantes geométricas como componentes (ver Eq. 2.27). No entanto, existe uma diferenciação no cálculo de  $\{\varepsilon^0\}$  em casos de análise linear e não-linear. Isto se deve pela forma como é definido o vetor de deslocamentos nodais de membrana.

As Eq. 2.82 e 2.83 são referentes aos casos de análise linear e não-linear respectivamente.

$$\{\varepsilon^0\} = [B_m] \{U_m\} \quad (2.82)$$

$$\{^t\varepsilon^0\} = [B_m] \{^t\bar{U}_m\} \quad (2.83)$$

Uma única diferença é observada quanto aos vetores de deslocamento, cujos componentes estão descritos nas Eq. 2.25 e Eq. 2.65. Vale ressaltar no caso não-linear que no cálculo para a configuração  $t$  não existe dependência em relação às configurações anteriores.

O outro componente da Eq. 2.80 a ser calculada é o vetor de curvaturas da casca ou placa. Numa situação distinta da anterior, este vetor tem suas componentes variáveis ao longo do elemento. Sendo assim, é necessário o cálculo das curvaturas em cada um dos pontos de integração, onde serão definidas as tensões e deformações. Esta característica é derivada da matriz deformação-deslocamento  $[B_b]$  oriunda do elemento DKT. Outra diferença importante em relação à obtenção das deformações do plano médio está no fato de que nos casos de análise não-linear o cálculo das curvaturas é realizado incrementalmente.

As Eq. 2.84 e 2.85 trazem o cálculo das curvaturas em função das coordenadas de área  $\xi$  e  $\eta$ , determinadas para cada local dentro do elemento. O vetor  $\{U_b\}$  está definido na Eq. 2.30, sendo  $\{\Delta^t U_b\}$  o incremento de deslocamentos entre as configurações  $t$  e  $t-\Delta t$ .

$$\{\kappa(\xi, \eta)\} = [B_b(\xi, \eta)] \{U_b\} \quad (2.84)$$

$$\{^t\kappa(\xi, \eta)\} = [B_b(\xi, \eta)] \{\Delta^t U_b\} + \{^{t-\Delta t}\kappa\} \quad (2.85)$$

## 2.5 MÉTODO DE SOLUÇÃO INCREMENTAL-ITERATIVO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR

A estrutura pode assumir comportamentos de amolecimento ou enrijecimento, através de um caminho de equilíbrio estável ou instável, e pode estar sobre carga ou

descarga. Estes fenômenos são identificados pela ocorrência de pontos críticos, tais como pontos limite e pontos de *snap-back* na curva carga deflexão (Fig. 2.9).

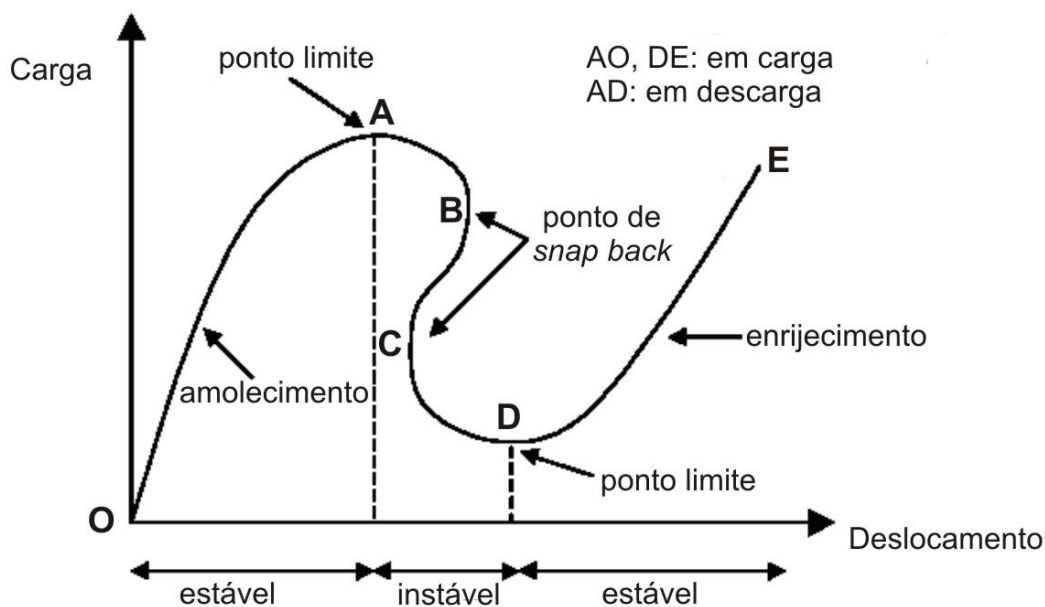


Figura 2.9: Características de um sistema não-linear (Yang e Shieh, 1990).

Para ser empregado em problemas que apresentem estes fenômenos o método de solução não-linear deve satisfazer três critérios:

- Manter a estabilidade numérica em regiões próximas aos pontos limite e pontos de *snap-back*;
- Ajustar os incrementos de carga de acordo com as variações de rigidez;
- Capacidade de auto-adaptação para determinação da direção de carga;

Dentre os métodos utilizados na solução de problemas não-lineares o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados (MCDG), proposto por Yang e Shieh (1990), tem se mostrado bastante eficiente. Este parece ser o que melhor preenche os requisitos citados anteriormente, e por isso é empregado neste trabalho para solução dos problemas não-lineares.



Na solução incremental-iterativa de problemas estruturais não-lineares o parâmetro de incremento de carga para cada passo iterativo pode ser considerado como uma incógnita adicional. Assumindo-se que o incremento de carga seja proporcional, ou seja,

$$\{\Delta^t P^{(i)}\} = {}^t \lambda^{(i)} \{P\}, \quad (2.86)$$

pode-se escrever a equação de equilíbrio na configuração  $t$  da seguinte forma:

$$[{}^t K^{(i-1)}] \{\Delta^t U^{(i)}\} = {}^t \lambda^{(i)} \{P\} + \{R^{(i-1)}\}, \quad (2.87)$$

onde  ${}^t \lambda^{(i)}$  é o parâmetro de incremento de carga para a iteração  $(i)$  e  $\{R^{(i-1)}\}$  representa o vetor de forças desequilibradas para a iteração  $(i-1)$ , dado por:

$$\{R^{(i-1)}\} = {}^t NC^{(i-1)} \{P\} - \{F^{(i-1)}\}, \quad (2.88)$$

na qual  $\{F^{(i-1)}\}$  é o vetor de forças nodais equivalentes devido às forças internas na iteração  $(i-1)$ .  ${}^t NC^{(i-1)}$  é o nível de carga da estrutura na mesma iteração, sendo que para cada iteração seu valor é dado por:

$${}^t NC^{(i)} = {}^t NC^{(i-1)} + {}^t \lambda^{(i)} \quad (2.89)$$

ou seja,  $NC$  é a soma de todos os incrementos de carga decorridos.

A Eq. 2.87 pode ser substituída pelas seguintes equações:

$$[{}^t K^{(i-1)}] \{U_1^{(i)}\} = \{P\} \quad (2.90)$$

$$[{}^t K^{(i-1)}] \{U_2^{(i)}\} = \{R^{(i-1)}\} \quad (2.91)$$

$$\{\Delta^t U^{(i)}\} = {}^t \lambda^{(i)} \{U_1^{(i)}\} + \{U_2^{(i)}\} \quad (2.92)$$

sendo que o parâmetro de incremento de carga deve ser determinado previamente para a solução das equações.

O MCDG emprega o parâmetro denominado como *General stiffness parameter* (GSP) (parâmetro de rigidez generalizado) para monitorar a rigidez da estrutura. Este parâmetro possui importantes características que o tornam mais adequados que os demais. Dentre as características vantajosas do GSP estão:

- 1) O GSP é representativo da rigidez da estrutura no passo atual. Além disso, tem a vantagem de não apresentar saltos de valores numéricos, mesmo em regiões próximas a pontos de *snap-back*;
- 2) Seu valor é negativo somente para passos de carga imediatamente posteriores a pontos limite. Essa característica o torna um indicador adequado da mudança de direção do carregamento;
- 3) O valor do GSP se inicia com a unidade e se torna zero em pontos limite;

O parâmetro GSP é obtido no início de cada passo de carga da seguinte forma:

$$GSP = \frac{\{^1U_1^{(1)}\}^T \{^1U_1^{(1)}\}}{\{^{t-1}U_1^{(1)}\}^T \{^tU_1^{(1)}\}} \quad (2.93)$$

Assim, na primeira iteração de cada passo de carga o parâmetro de incremento de carga é dado por:

$${}^t\lambda^{(1)} = \pm {}^1\lambda^{(1)} (|GSP|)^{1/2}, \quad (2.94)$$

sendo que o parâmetro de carga inicial  ${}^1\lambda^{(1)}$  é um dado do problema, cujo valor deve ser fornecido de acordo com o grau de não-linearidade previsto para o comportamento da estrutura. O sinal da equação é definido pela variação de sinal do parâmetro GSP, permitindo assim a reversão da direção de carregamento ao se atingir um ponto limite.

Para as iterações posteriores no passo de carga ( $i > 1$ ) tem-se:

$${}^t\lambda^{(i)} = - \frac{\{^{t-1}U_1^{(1)}\}^T \{^tU_2^{(i)}\}}{\{^{t-1}U_1^{(1)}\}^T \{^tU_1^{(i)}\}}, \quad (2.95)$$

sendo que, para  $t = 1$ , faz-se  $\{^0U_1^{(1)}\} = \{^1U_1^{(1)}\}$ .

Os passos do algoritmo são reproduzidos a seguir:

- 1) Seleção do parâmetro de incremento de carga inicial  ${}^1\lambda^{(1)}$
- 2) Para a primeira iteração ( $i=1$ ) em todos passos:
  - a) Formação da matriz de rigidez  $[{}^tK^{(0)}]$ .

b) Solução da Eq. 2.90, obtendo o valor de  $\{^t U_1^{(i)}\}$ .

Cálculo do valor de GSP, adotando  $GSP = 1$  para  $t = 1$ .

c) Para  $t > 2$ , determinar o parâmetro de incremento de carga pela equação

$${}^t \lambda^{(i)} = \pm {}^1 \lambda^{(i)} (|GSP|)^{1/2}.$$

d) Inverter o sinal de  ${}^1 \lambda^{(i)}$  caso o sinal de GSP seja negativo.

e) Determinar o incremento de deslocamentos por  $\{\Delta {}^t U^{(i)}\} = {}^t \lambda^{(i)} \{^t U_1^{(i)}\}$ , uma vez que  $\{^t U_2^{(i)}\} = 0$ .

3) Para iterações subseqüentes ( $i > 2$ )

a) Determinação do vetor de forças desequilibradas  $\{^t R^{(i-1)}\}$

b) Atualizar a matriz de rigidez  $[{}^t K^{(i-1)}]$  (opcional).

c) Resolver as Eq. 2.90 e Eq. 2.91 para determinar os vetores  $\{^t U_1^{(i)}\}$  e  $\{^t U_2^{(i)}\}$

d) Determinar o parâmetro de incremento de carga pela Eq 2.95.

e) Calcular o incremento de deslocamentos usando a Eq. 2.92.

4) Atualizar as deformações e forças nos elementos, o nível de carga ( $NC$ ) e a geometria da estrutura.

5) Repetir os passos de carga 3) e 4) até que um critério de convergência seja

satisfeito. Neste trabalho considera-se a convergência quando  $\frac{\|\{^t R^{(i)}\}\|}{\|\{^t NC^{(i)}\{P\}\|} \leq tol$ ,

sendo  $tol$  um valor predeterminado de tolerância.

6) Se o nível de carga não ultrapassar o valor máximo de carga (neste trabalho adotado como  $NC_{max}=1$ ), retornar ao passo 2). Caso contrário encerrar o processo de solução.

## 2.6 CRITÉRIO DE FALHA PARA COMPÓSITOS LAMINADOS

A análise de falha em um laminado é muito mais complexa do que em materiais convencionais. O estado de tensões em cada lâmina é fundamental, controlando o início e a progressão da falha no material. Ocorrência de falha em uma lâmina não implica necessariamente na falha do laminado, podendo ser apenas o início de um processo progressivo e iterativo. A resistência de cada lâmina é computada separadamente referenciando tensões ao seu sistema de eixos principais 1-2, que varia de lâmina para lâmina, e aplicando o critério de falha selecionado (Daniel e Ishai, 1994).

A resistência de um laminado é função de muitos fatores, adicionalmente à resistência individual das lâminas. Variações da orientação, rigidez, resistência e coeficientes de expansão térmica ou por umidade de uma lâmina afetam a resistência do material em uma determinada direção. A seqüência de laminação afeta a rigidez à flexão e a rigidez de acoplamento ( $[D_b]$  e  $[D_{mb}]$ ). Em conseqüência as tensões e resistência do laminado também são afetadas. Além destes fatores, o processo de fabricação produz tensões residuais, que por sua vez influenciam na resistência final.

Existem basicamente três tipos, ou definições, de falhas de laminados: (1) falha inicial ou falha da primeira lâmina (FPL), (2) falha última do laminado (FUL), e (3) falha interlaminar ou falha por delaminação. No primeiro caso considera-se que a falha do laminado ocorre quando a primeira lâmina falha. No segundo caso é considerada a falha do laminado quando o nível máximo de carga é atingido ou excedido, seguido de falha de múltiplas lâminas. No terceiro caso a separação de duas lâminas contíguas resulta na falha do laminado, mesmo que as lâminas continuem intactas.

As duas primeiras definições acima representam dois níveis no processo de falha, o inicial e o final, que são análogos aos critérios de tensão de escoamento e de tensão última em materiais elastoplásticos. O critério FPL é em geral muito conservativo, podendo ser utilizado com baixos valores de fator de segurança. Já o critério FUL é mais avançado, requerendo conhecimento mais preciso a respeito do carregamento e distribuição das tensões, sendo portanto aplicado com valores mais elevados de fator de segurança.

Neste trabalho, é empregado o critério FPL, limitando as cargas a níveis que atinjam no máximo a falha da primeira lâmina.

Quando se utiliza o critério FPL, o fator de segurança para o laminado é dado pelo menor valor de fator de segurança para falha de uma das suas lâminas. Pode-se entender tal parâmetro como um multiplicador do vetor de tensões que leva à falha da lâmina.

Existem problemas em que se deseja identificar o nível máximo de carga suportado pela estrutura, e não a segurança a um carregamento. Nos casos em que a resposta da estrutura à carga aplicada é não-linear, o nível máximo de carga é identificado quando, no decorrer da solução não-linear, a primeira lâmina viola o critério de falha escolhido. Já em casos onde a resposta da estrutura é linear, a falha do laminado ocorre quando se aplica uma carga igual à utilizada para análise multiplicada pelo coeficiente de segurança do laminado, definido anteriormente.

Como se pode notar, para determinação do fator de segurança ou identificação de falha de um laminado é imprescindível a análise de falha de cada uma das suas lâminas. Sendo assim, o critério de falha para lâminas utilizado neste trabalho é descrito a seguir.

### **2.6.1 Critério de falha de Tsai-Wu para materiais compósitos**

A falha de lâminas constituídas por materiais compósitos com reforço de fibras unidirecionais se dá, segundo uma abordagem micromecânica, através de diversos mecanismos. O mecanismo específico pelo qual a falha ocorre depende do tipo de carregamento e está intimamente ligado às propriedades dos constituintes do material (fibras, matriz e interface). Porém, no presente trabalho a abordagem da resistência dos compósitos se dará apenas na escala macromecânica. Sendo assim, estão apresentados a seguir os parâmetros de resistência relativos aos diversos tipos de cargas aplicadas :

- 1) Tração longitudinal às fibras – F1t
- 2) Compressão longitudinal às fibras – F1c
- 3) Tração transversal às fibras – F2t
- 4) Compressão transversal às fibras – F2c
- 5) Cisalhamento no plano do laminado – F12 ou F6

Existem várias teorias para avaliar a resistência de materiais compósitos, dentre as quais a teoria polinomial tensorial de Tsai-Wu. Esta teoria foi desenvolvida baseada na

existência de uma superfície de falha no espaço de tensões. Para o estado plano de tensões a equação que representa o critério de Tsai-Wu pode ser expressa por:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_6\tau_6 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2f_{16}\sigma_1\tau_6 + 2f_{26}\sigma_2\tau_6 = 1 \quad (2.96)$$

sendo que  $f_i$  e  $f_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$  são as componentes de resistência do tensor de Tsai-Wu e a notação  $\tau_6$  foi adotada para a componente de cisalhamento  $\tau_{12}$ .

Uma vez que a resistência da lâmina sob cisalhamento puro segundo seus eixos principais é independente do sinal da tensão de cisalhamento, todos os termos lineares de  $\tau_6$  devem ser retirados. Ficando assim determinado:

$$f_6 = f_{16} = f_{26} = 0 \quad (2.97)$$

Os demais coeficientes de resistência do critério de Tsai-Wu são obtidos aplicando condições de carga elementares ao laminado (Daniel e Ishai, 1994). Dessas operações resultam:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}} \\ f_{11} &= \frac{1}{F_{1t}F_{1c}} \\ f_2 &= \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}} \\ f_{22} &= \frac{1}{F_{2t}F_{2c}} \\ f_{66} &= \frac{1}{F_6^2} \end{aligned} \quad (2.98)$$

O coeficiente  $f_{12}$  deve ser obtido a partir de algum teste biaxial. Porém, em muitos casos este coeficiente de interação entre as tensões normais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  não é crítico e portanto uma aproximação de seu valor é suficiente. Dentre várias possíveis, a equação a seguir é considerada com uma boa aproximação (Daniel e Ishai, 1994).

$$f_{12} = -\frac{1}{2}(f_{11}f_{22})^{1/2} \quad (2.99)$$

Fica então a forma reduzida da equação do critério de Tsai-Wu:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (2.100)$$

sendo os coeficientes determinados pelas Eq. 2.98 e Eq. 2.99.

A falha é atingida quando a parcela esquerda da equação é igual ou superior a 1, representando um ponto sobre ou fora da superfície de falha definida pelo critério no espaço de tensões.

Existem casos em que se deseja calcular o fator de segurança para o laminado. Este fator, aqui denominado  $S_f$ , é um multiplicador, aplicado a todas as componentes de tensões, que leva à falha da lâmina. Então, substituindo na equação do critério de Tsai-Wu as componentes de tensão por  $S_f\sigma_1$ ,  $S_f\sigma_2$ ,  $S_f\tau_6$ , obtém-se:

$$aS_f^2 + bS_f - 1 = 0 \quad (2.101)$$

onde

$$a = f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\tau_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (2.102)$$

$$b = f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 \quad (2.103)$$

O fator de segurança para o laminado é obtido pela resolução da equação quadrática, levando a dois valores:

$$S_{fa} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \quad (2.104)$$

e

$$S_{fr} = \left| \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2a} \right| \quad (2.105)$$

onde  $S_{fa}$  é o valor do fator de segurança para o estado de tensões existente e  $S_{fr}$  é o valor do fator de segurança para o estado de tensões com sinal invertido, ou seja  $\{-\sigma_1 \quad -\sigma_2 \quad -\tau_6\}$  (Daniel e Ishai, 1994).



### 3 ALGORITMO GENÉTICO PARA ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Este capítulo é dedicado à apresentação do algoritmo genético (AG) implementado para a otimização de estruturas de compósitos laminados. No decorrer do texto são indicadas as capacidades e restrições do processo. Também são detalhadamente explicados os diversos operadores que compõem o algoritmo, esclarecendo o seu funcionamento.

Problemas que envolvam a otimização de estrutura pela manipulação de suas dimensões não são abordados nesse trabalho. Apenas características do material são tomadas como variáveis no processo. Dentre elas estão propriedades das lâminas como o ângulo de orientação das fibras, o material constituinte e a espessura. Nesse grupo também se enquadra o número de lâminas do material. Algumas dessas variáveis, ou todas elas, podem ser adotadas numa otimização utilizando-se o mesmo algoritmo, desde que as particularidades sejam respeitadas. O AG também pode ser facilmente empregado em otimizações de estruturas constituídas por mais de um laminado, como no caso típico de placas enrijecidas, onde os próprios enrijecedores são barras laminadas.

Em linhas gerais o AG implementado segue basicamente o mesmo modelo dos AG clássicos. Cada estrutura gerada no processo é considerada um indivíduo, como se fosse um organismo vivo. Estes indivíduos formam populações que se transformam ao longo de gerações, similarmente ao que ocorre nos processos evolutivos naturais (Ver Fig. 3.1).

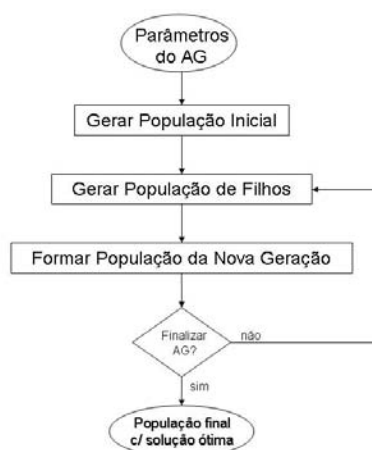


Figura 3.1: Fluxograma básico do AG

As propriedades de cada estrutura são codificadas e agrupadas em *strings* (conjunto de dados concatenados) que formam os cromossomos, podendo assim ser manipuladas pelos operadores genéticos. A cada geração são criados novos indivíduos (filhos) a partir dos indivíduos pertencentes à população atual (pais). Essa tarefa é realizada pelos operadores genéticos, desenvolvidos para que a evolução ocorra de forma a gerar indivíduos com características cada vez mais apropriadas (aptos ou adaptados) aos objetivos da otimização (Ver Fig. 3.2). Os componentes das populações de pais e filhos são então selecionados para formar as novas gerações. Repete-se esse ciclo até que um critério de parada seja satisfeito. As diferenças do algoritmo implementado em relação ao AG clássico estão na codificação das variáveis e em alguns operadores que atuam de maneira específica, levando em conta as características do problema. Nas seções a seguir são descritas cada uma das etapas ou operadores que compõem o AG.

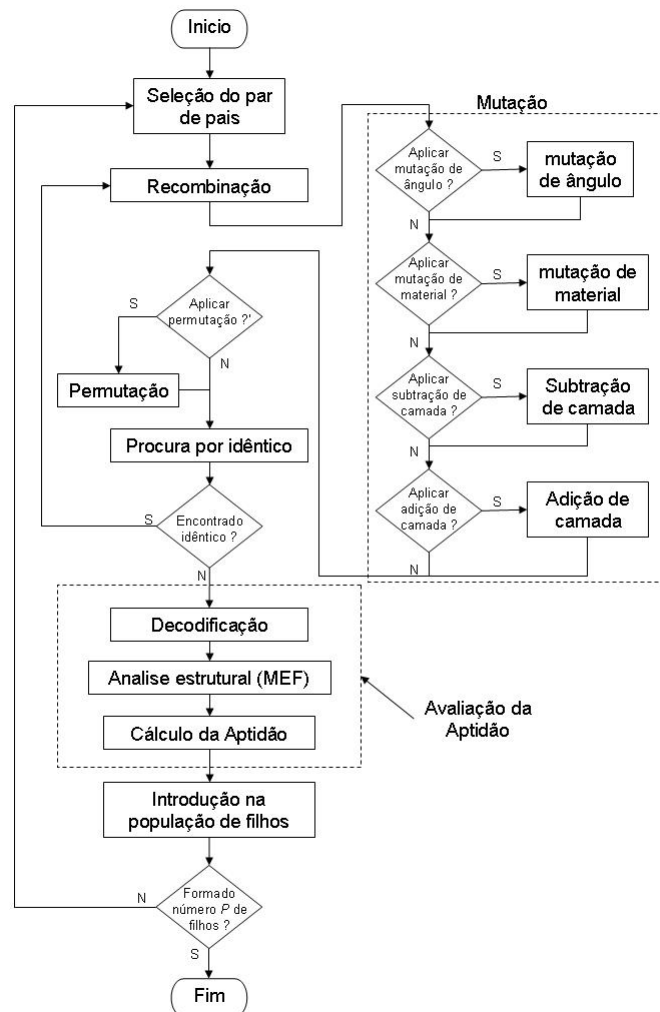


Figura 3.2: Fluxograma da geração da população de filhos

### 3.1 CODIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS

Dentro do processo de otimização por algoritmos genéticos a estrutura é considerada um indivíduo cujas características estão definidas em cromossomos, de maneira análoga ao que ocorre nos organismos vivos. Cada informação armazenada é tratada como um gene, que se refere a uma das camadas do laminado em questão. A representação dos cromossomos se dá computacionalmente através de *strings* contendo uma codificação das propriedades. Nesse trabalho cada laminado de uma estrutura é representado por um par de cromossomos, a exemplo do implementado por Soremekun (1997). No primeiro, denominado “cromossomo de ângulos”, estão armazenadas informações sobre a orientação das fibras nas camadas do laminado. O segundo destina-se a apontar o grupo de propriedades do material constituinte das laminas, sendo chamado de “cromossomo de materiais”. Assim, cada camada do laminado é representada por um par de genes, estando um em cada cromossomo e na mesma posição. O primeiro par refere-se à camada superior do laminado, ficando as inferiores representadas pelos pares subseqüentes. O número total de genes nos cromossomos é proporcional à quantidade máxima de camadas admissível no problema e nos casos de estruturas formadas por mais de um laminado é empregado um número equivalente de pares de cromossomos para representá-las.

As camadas dos laminados podem ser formadas por uma ou mais lâminas com orientações distintas ou não, mas todas com as mesmas propriedades de material. Nesse trabalho a codificação adotada emprega números inteiros positivos para representar tais características. São formados dois alfabetos de codificação, sendo um para cada tipo de cromossomo.

No alfabeto do cromossomo de ângulos cada número indica uma configuração de camada, que pode conter mais de uma lâmina. Assim, seus genes informam quantas lâminas existem numa camada e qual a orientação de fibras das mesmas. As configurações possíveis são fornecidas como parâmetros do AG, sendo vinculado um número/código do alfabeto a cada uma delas.

De forma análoga, os códigos utilizados no segundo cromossomo se referem a cada grupo de propriedades de material empregado na otimização. Como nesse cromossomo existe apenas um gene para cada camada, as propriedades de suas lâminas são idênticas, apontadas pelo número atribuído ao gene correspondente. Numa otimização os grupos de propriedades podem conter tanto informações geométricas, como a espessura da lâmina, quanto características do material, como as constantes elásticas ou os parâmetros de resistência.

Boa parte dos problemas de otimização tratam especificamente de laminados simétricos. Para que se garanta essa condição durante o processo, e não seja necessária a representação de todas as camadas, é adotado um parâmetro que indica a simetria. Nesse caso os cromossomos possuem genes para representar apenas as camadas situadas acima do plano médio do laminado, ficando as demais definidas pela condição imposta.

Utilizando a codificação de estruturas apresentada até aqui o número total de camadas num laminado é fixo, definido pela quantidade de genes nos cromossomos. Como esse parâmetro é igual para todos os indivíduos e não se altera no decorrer do processo, a variação do número de camadas fica impossibilitada. Porém, essa é uma das variáveis mais determinantes no comportamento das estruturas, sendo apropriada para a maioria dos problemas de otimização. Por isso é introduzido um mecanismo que possibilita a retirada de camadas do laminado por meio da adoção de um “código de camada vazia”, representado pelo número “0”. Através de operadores específicos esse código é atribuído ao par de genes que representa uma camada, retirando-a do laminado. Da mesma forma, existem operadores que substituem os códigos “0” por outros que representam camadas com lâminas, incrementando a espessura do laminado. Dessa forma é possível variar o número de camadas desde o número mínimo representado por um único gene até o máximo fixado pela quantidade de genes no cromossomo. Os pares de genes que apresentam o código “0” são sempre deslocados para a região esquerda do cromossomo, já que seria fisicamente incoerente a presença de uma camada vazia no interior do laminado.

A seguir são apresentados dois exemplos que ilustram as formas de codificação das propriedades dos laminados descritas anteriormente. Para tanto são definidos os alfabetos de codificação dos cromossomos de ângulos e de materiais, como é apresentado na Fig 3.3. No primeiro exemplo é utilizada a codificação de ângulos *CA1*, onde cada camada possui apenas uma lâmina orientada segundo um dos quatro ângulos possíveis. Já no segundo emprega-se a codificação *CA2*. Nessa, cada camada contém duas lâminas cuja orientação é dada por uma das três combinações de ângulos. Nos dois exemplos a codificação do material é a mesma, definida por *CM1*, onde cada número indica um material que traz consigo um grupo de propriedades.

Nesse primeiro exemplo é apresentado um indivíduo pertencente a uma otimização que emprega os alfabetos *CA1* e *CM1*, conforme explicado anteriormente. Com 8 genes por cromossomo e a codificação empregada para os ângulos, é possível representar um laminado de 8 lâminas, já que a condição de simetria não é imposta nesse problema. Contudo, é permitida a variação do número de camadas, o que ocorre nesse caso pela

presença de códigos “0” nos dois primeiros pares de genes. A Eq. 3.1 demonstra a decodificação dos cromossomos num laminado com 6 lâminas, que pode então ser avaliado.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = [0^{(ge)}, 90^{(ge)}, \pm 45^{(ke)}, 90^{(ge)}, -45^{(ge)}] \quad (3.1)$$

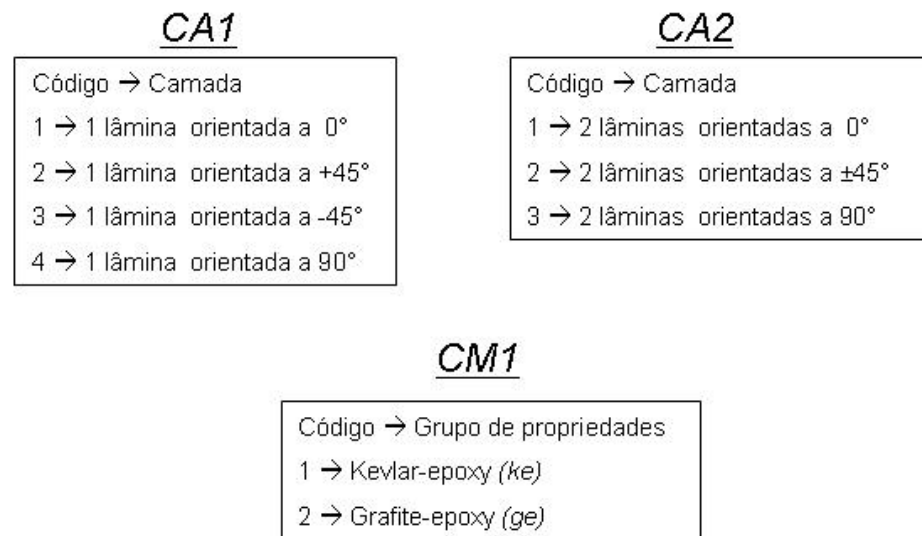


Figura 3.3: Alfabeto de codificação das propriedades dos laminados

A forma de codificação adotada nesse exemplo é das mais simples possíveis, deixando totalmente livre a composição e a seqüência de laminação das estruturas. No entanto muitas vezes é conveniente restringir o modo como o laminado é formado, impondo certas condições, como o que se pretende demonstrar no exemplo a seguir. As condições de simetria e balanceamento da estrutura são impostas aos indivíduos sem que nenhuma modificação no AG seja necessária. Um parâmetro do AG definido no início do processo indica que o cromossomo representa um laminado simétrico, o que possibilita a codificação de todas as camadas utilizando-se uma quantidade de genes reduzida à metade. Já a condição de balanceamento é garantida pela adoção do alfabeto de ângulos CA2, pois suas camadas são formadas por pares de lâminas balanceadas. O mesmo número de genes do exemplo anterior é adotado para cada cromossomo, porém, devido à codificação empregada e a condição de simetria, é possível representar um laminado de 32 lâminas. Na Eq. 3.2 é demonstrada a decodificação de um indivíduo cujo primeiro par de genes apresenta o número zero, levando a um laminado simétrico de 28 lâminas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_S = \left[ \pm 45^{(ge)}, 0_4^{(ge)}, \pm 45_2^{(ke)}, 0_2^{(ge)}, 90_2^{(ge)} \right]_S \quad (3.2)$$

Deve-se ressaltar que os exemplos apresentados são apenas ilustrativos, ficando livre a combinação das mais diversas codificações e condições (simetria e balanceamento) impostas aos cromossomos em cada problema. Essa escolha deve se dar de maneira que os laminados sejam representados da forma mais apropriada a cada otimização. No entanto deve-se ter em vista que a complexidade do problema é proporcional à quantidade de genes dos cromossomos e à extensão dos alfabetos de codificação empregados.

### 3.2 POPULAÇÃO INICIAL

A maioria dos AG trabalham com um número fixo de indivíduos na população ao longo do processo de otimização. Tal característica também ocorre nesse trabalho, o que facilita muito a implementação computacional do algoritmo. Não existe uma regra estabelecida para dimensionar o tamanho da população, sendo essa tarefa uma questão de acertos e erros até o presente momento. Em geral, o número apropriado de indivíduos em cada geração aumenta proporcionalmente à complexidade do problema. Ou seja, otimizações que empregam *strings* pequenas, com poucas variáveis, tendem a requerer populações com menos indivíduos. De maneira oposta, populações maiores são necessárias para tratar problemas envolvendo estruturas representadas por *strings* mais longas.

A população inicial é criada de forma aleatória. Para isso adota-se subrotinas que geram números aleatórios no intervalo (0, 1), seguindo uma distribuição uniforme. Essa tarefa é exigida extensivamente nos AG, como se poderá perceber nos trechos seguintes deste trabalho. Tais geradores de números aleatórios requerem um valor inicial denominado “semente” (*seed*) que determina a seqüência de números gerados. Por isso os números obtidos não são verdadeiramente aleatórios, inclusive sendo chamados de pseudo-aleatórios, embora esse fato não comprometa o funcionamento dos AG (Gürdal, Haftka e Hajela, 1999).

Na formação da população inicial é atribuído um código a cada gene de cada cromossomo de cada indivíduo. Em princípio se dá a geração de um número aleatório, para em seguida, utilizando-se da Eq. 3.3, definir-se o código do gene *i*, que no caso pertence a um cromossomo de ângulos.

$$gene_{i,ang} = CEILING(r \cdot N_{CA}) \quad (3.3)$$

Nesta equação,  $CEILING(a)$  é uma função que retorna o menor inteiro maior que  $a$ . As variáveis  $r$  e  $N_{CA}$  são respectivamente o número aleatório no intervalo (0, 1) e o comprimento do alfabeto de codificação das lâminas. A mesma equação é empregada na geração dos genes do cromossomo de materiais, bastando para isso alterar o comprimento do alfabeto de codificação.

Um detalhe importante é observado nesta etapa do algoritmo. Mesmo nos problemas que contemplam a variação do número de laminas não é atribuído código “0” aos genes na população inicial, pois é conveniente evitar a criação de estruturas muito finas no início da otimização. Elas certamente violariam restrições impostas ao problema e seriam abandonadas na evolução das populações, traduzindo-se em perda de tempo computacional. Além disso, indivíduos com maior diversidade de características são mais interessantes, enriquecendo geneticamente a população.

### 3.3 GERAÇÃO DA POPULAÇÃO DE FILHOS

Uma vez criada a população inicial, é dada a partida no algoritmo de otimização. A cada geração é formada uma população de filhos a partir da existente. Isso se dá pela aplicação de uma série de operadores genéticos conforme fluxograma apresentado na Fig. 3.2, e descrito nas seções a seguir.

#### 3.3.1 Seleção e aptidão

O processo de seleção empregado nos AG imita o biológico, pois dá aos indivíduos mais adaptados às exigências maiores chances de se reproduzirem e transmitirem seus genes às futuras gerações. Em consequência disto os AG precisam atribuir um nível de aptidão (fitness) aos indivíduos, utilizando essa informação para selecionar pares de pais. Estes pais então são envolvidos em processos de reprodução, originando novos indivíduos que comporão a população de filhos e provavelmente passarão para a próxima geração.

A aptidão de um indivíduo é definida através de equações denominadas “função objetivo”. Estas equações contêm todas as características relevantes das estruturas na

otimização. Com isso são considerados os aspectos desejados, os indesejados e as restrições do problema, podendo-se então traduzir a aptidão num número derivado dessa função objetivo. Sua formulação é específica para cada problema abordado, pois não existe um método padrão, o que torna esse assunto tema de fortes debates e pesquisas, principalmente no que se refere à consideração de restrições.

A enunciação clássica de um problema de otimização que inclui restrições pode ser escrita como (Gürdal, Haftka e Hajela, 1999):

$$\text{minimizar } f(x), \quad x \in X \quad (3.4)$$

$$\text{tal que } g_i(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n_g$$

Nesta enunciação  $f(x)$  é a função objetivo e  $g_i(x)$  são as funções que definem as restrições impostas ao problema. Considerando que valores positivos de  $g_i(x)$  indicam violação da restrição  $i$ , pode-se definir a margem de segurança da estrutura através da restrição mais crítica, sendo expressa por  $g_{\max} = \max_j (g_j)$ . Com isso formula-se a função objetivo incrementada ou restrita, que substitui a anterior. A Eq. 3.5 é um exemplo clássico de como as restrições podem ser incorporadas na avaliação da aptidão pela função objetivo.

$$f_{OBJ} = \begin{cases} f + pg_{\max} + \delta, & \text{se } g_{\max} > 0 \\ f - \varepsilon |g_{\max}|, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.5)$$

Este exemplo de formulação para função objetivo incrementada  $f_{OBJ}$  é bastante completo. Isto porque apresenta tanto penalização para os indivíduos inviáveis quanto bonificação para os que não violam as restrições.

Dois parâmetros,  $p$  e  $\delta$  são empregados para penalizar indivíduos inviáveis. O parâmetro  $p$  é utilizado numa penalização proporcional à violação da restrição. Seu valor deve ser grande suficiente para que todos os indivíduos inviáveis apresentem  $f_{OBJ}$  maior que o ótimo. Contudo, valores demasiadamente grandes deste parâmetro são prejudiciais por impedir que indivíduos inviáveis venham a se reproduzir e passar para futuras gerações alguma característica importante, ou que parte de seu cromossomo seja alterado e este se torne viável. O parâmetro  $\delta$  é utilizado para que indivíduos com violações muito pequenas e com valor da função objetivo muito boa não tenham uma aptidão melhor que outros viáveis.



Isso se faz necessário porque as penalidades geradas através do parâmetro  $p$  são proporcionais à violação, tornando-se insuficiente nesse caso.

O parâmetro de bonificação  $\varepsilon$  é muito útil nos problemas em que não existe apenas um único ótimo como solução. Nesses casos busca-se o indivíduo com a melhor função objetivo e maior margem de segurança. Através de uma pequena bonificação proporcional à margem de segurança se garante que o processo de seleção favoreça estas estruturas. Contudo deve ser empregado um valor pequeno o suficiente para o parâmetro  $\varepsilon$  de forma que não seja atribuída a nenhum indivíduo um valor  $f_{OBJ}$  melhor do que a do indivíduo com melhor  $f(x)$ .

Deve-se lembrar que, embora seja desejável maximizar ou minimizar as funções objetivo, os AG usam o conceito de aptidão, cujo valor é maior para os melhores indivíduos. Para contemplar os problemas de minimização é comum definir a aptidão ( $APT$ ) em função de  $f_{OBJ}$  como descrito na Eq 3.6, convertendo o processo em uma maximização capaz de ser executada pelo AG. Nos problemas de maximização a aptidão é dada diretamente pela função objetivo.

$$APT = c - f_{OBJ} \quad \text{ou} \quad APT = \frac{1}{f_{OBJ}} \quad (3.6)$$

Nessas equações  $c$  é uma constante escolhida grande suficiente para que  $APT$  seja sempre positiva, mas sem tornar as variações de  $f_{OBJ}$  imperceptíveis.

Uma vez definida a forma como se avalia a aptidão dos indivíduos dentro de uma população é possível proceder a seleção de pais para reprodução. O método de seleção empregado neste trabalho é bastante difundido na implementação de AG. A estratégia de seleção utilizada baseia-se na classificação relativa dos indivíduos dentro da população, o que normalmente se denomina seleção por ranqueamento (*rank selection*). É atribuído ao  $i$ -ésimo melhor indivíduo da população uma probabilidade de seleção:

$$ps_i = \frac{2(P - i + 1)}{(P + 1)P}, \quad (3.7)$$

onde  $P$  é o número de indivíduos na população.

A seleção de cada pai é realizada então pela simulação de uma roleta. Esta roleta é dividida em setores proporcionais à probabilidade de seleção atribuída a cada indivíduo. Quando a roleta pára, após ser girada, um apontador define qual o setor escolhido.

Em termos computacionais a roleta de seleção é implementada pela geração de um número aleatório  $r$  no intervalo  $(0, 1)$  que aponta o indivíduo  $i$  da população quando

$$R_{i-1} \leq r \leq R_i, \quad (3.8)$$

onde  $R_0 = 0$  e

$$R_i = \sum_{j=1}^i ps_j, \quad i = 1, \dots, P \quad (3.9)$$

Essa forma de seleção tem alguns aspectos vantajosos. Por considerar apenas o ordenamento dos indivíduos não ocorre perda na pressão para escolha do melhor, mesmo nas últimas gerações quando a população é bastante uniforme. Outra característica interessante é a possibilidade de se trabalhar com valores positivos ou negativos de aptidão. Com isso as funções objetivo podem ser formuladas de maneira mais simples.

No algoritmo implementado o par de pais selecionados em cada processo de reprodução não deve ser formado por estruturas idênticas. O segundo indivíduo selecionado deve ter pelo menos um de seus genes diferente do correspondente no cromossomo do primeiro. Esta medida visa evitar a criação de filhos idênticos ou muito semelhantes aos pais.

O processo de reprodução se dá pela aplicação dos operadores genéticos, descritos a seguir, sobre o par de pais selecionados. Em cada geração é criada uma população de filhos do mesmo tamanho que a de pais. A reprodução só se dá com sucesso quando gera um filho diferente de todos os indivíduos componentes da população de pais ou de filhos já criados. Se for encontrado um componente idêntico ao filho gerado os operadores genéticos são novamente aplicados sobre o par de pais selecionados numa nova tentativa. Este processo se repete até que um filho único seja encontrado ou se atinja um limite de tentativas, quando é escolhido um novo par de pais.

### 3.3.2 Recombinação

Recombinação (*ou crossover*) é o primeiro operador genético utilizado no processo de reprodução. Trata-se de um componente fundamental em qualquer AG. Na maioria dos casos esta operação é empregada segundo uma certa probabilidade de ocorrência. No entanto, por ser considerado de fundamental importância, neste trabalho a probabilidade de ocorrência adotada é de 100% para todas as aplicações.

A função desse operador é criar um indivíduo a partir de dois pais através da combinação de parte de seus cromossomos. Inicialmente define-se um ponto de quebra (*crossover point*) nos cromossomos. Este ponto deve estar localizado na região dos cromossomos dos dois pais que não contenham genes de camadas vazias (Soremekun, 1997), ficando sua determinação realizada por:

$$Pq = ngcv_{\max} + CEILING(r(NGC - ngcv_{\max} - 1)), \quad (3.10)$$

onde  $Pq$  é o ponto de quebra,  $ngcv_{\max}$  é o maior número de genes de camadas vazias dentre os dois indivíduos,  $NGC$  é o número total de genes nos cromossomos e  $r$  é um número gerado aleatoriamente.

As *strings* de cada indivíduo são então segmentadas em duas partes, a esquerda, que vai até o ponto de quebra, e a direita, que contém o restante dos genes. Para formar um novo indivíduo são unidas a parte esquerda do primeiro pai à direita do segundo. Um exemplo empregando a codificação *CA1* e *CM1* em cromossomos contendo 8 genes, sendo o quarto definido como ponto de quebra, é representado por

$$\begin{array}{l}
 \text{pai1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
 \text{pai2} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{recombinação}}
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

Ponto de quebra

(3.11a)

sendo os laminados definidos como

$$\begin{array}{l}
 \left[ 0^{(ge)}, 90^{(ge)}, \pm 45^{(ke)}, 90^{(ge)}, -45^{(ge)} \right] \\
 \left[ -45^{(ke)}, \pm 45^{(ge)}, 90^{(ge)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)} \right]
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{recombinação}}
 \left[ 0^{(ge)}, 90_2^{(ge)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)} \right]$$

(3.11b)

Existe a possibilidade de se adotar múltiplos pontos de quebra na operação de recombinação, dividindo os cromossomos em várias partes a serem combinadas. Porém o processo se torna demasiadamente aleatório, acabando por reduzir a eficiência do algoritmo. Uma exceção é o emprego do duplo ponto de quebra para recombinação, onde dois pontos dividem os cromossomos em três trechos (Gürdal, Haftka e Hajela, 1999). Isso vale especialmente para os problemas com cromossomos longos, nos quais uma mescla maior não produz indivíduos tão distintos dos pais. Nesse caso os pontos também devem estar localizados na região livre de genes de camadas vazias. Para a geração do filho o trecho dos cromossomos anterior ao primeiro ponto de quebra e o posterior ao segundo são retirados do primeiro pai, enquanto o central é oriundo do segundo.

Os filhos gerados pelo processo de recombinação têm características de seus dois pais. Como esses pais foram escolhidos por um mecanismo de seleção que leva em conta sua aptidão, existem grandes chances de que o filho também apresente características desejáveis. Porém, o operador de recombinação é incapaz de alterar os genes de indivíduos e introduzir novas características na população. Para suprir essa deficiência tão importante ao funcionamento dos AG existem os diversos tipos de operadores de mutação apresentados a seguir.

### 3.3.3 Mutação

Os operadores de mutação têm o papel de introduzir novas características nos filhos previamente criados pela recombinação, possibilitando assim a busca de soluções bastante distintas das presentes na população. Também são importantes na prevenção da perda de informação genética que ocorre quando indivíduos inferiores, mas com algumas características desejáveis, são descartados ao longo da evolução, levando consigo seus genes bons. Essas ferramentas tão imprescindíveis aos AG atuam através de modificações aleatórias e ocasionais nos genes dos cromossomos. Em casos de AG destinados à otimização de materiais compósitos são adotados operadores de mutação específicos, criados de forma a considerar as características peculiares do problema.

Um operador de mutação padrão para AG atua através da modificação do valor ou código de um gene. Sua aplicação é testada gene por gene, sendo empregado segundo uma probabilidade de ocorrência pequena. Quando se aplica a mutação um novo valor é atribuído de forma aleatória ao gene, sendo esse novo valor qualquer código admitido, desde que diferente do atual. Contudo, é possível incorporar ao operador de mutação o conhecimento que se tem sobre a alteração do comportamento dos compósitos laminados devido a cada modificação de suas propriedades. Isso torna o processo menos aleatório, permitindo um maior direcionamento da evolução.

### 3.3.3.1 Mutação de Ângulos e de Materiais

Pode-se dividir os novos operadores de mutação em dois grupos. O primeiro é formado pela mutação de ângulos e mutação de materiais que atuam de forma quase idêntica ao operador padrão. Porém eles são restritos às regiões dos cromossomos que não contenham genes de camadas vazias e realizam modificações envolvendo apenas códigos pertencentes aos alfabetos empregados. Outra diferença importante é que são aplicados especificamente ao cromossomo de ângulos e de materiais respectivamente. Com isso é possível definir probabilidades de ocorrência distintas para cada um deles ( $p_{ma}$  e  $p_{mm}$  respectivamente). Tal alternativa é bastante útil, pois é comum em muitos problemas a definição do material ideal para cada camada no início do processo, ficando o resto da evolução dedicada ao aprimoramento da orientação das fibras.

Na Eq. 3.12 é demonstrada a aplicação dos dois operadores ao filho criado por recombinação no exemplo da Eq. 3.11. Aqui ocorre mutação no terceiro gene do cromossomo de ângulos e no sexto gene do cromossomo de materiais. É importante salientar que não existe um limite na quantidade de genes que sofrem mutação em um indivíduo. Esse aspecto é definido aleatoriamente, dadas as probabilidades de ocorrência  $p_{ma}$  e  $p_{mm}$  para cada gene.

Cromossomos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & \mathbf{1} & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{mutação}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{3} & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & \mathbf{2} & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.12a)$$

Laminados:

$$\left[0^{(ge)}, 90_2^{(ge)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)}\right] \xrightarrow{\text{mutação}} \left[-45^{(ge)}, 90_3^{(ge)}, \mp 45^{(ge)}\right] \quad (3.12b)$$

### 3.3.3.2 Subtração e Adição de Camadas

O segundo grupo de operadores de mutação tem um objetivo mais específico. Eles se dedicam a introduzir ou retirar camadas do laminado, tornando-o mais fino ou mais espesso. Denominados adição de camada e subtração de camada, sua implementação é mais complexa que a dos anteriores. A primeira diferença está no fato de que esses operadores não são aplicados a cada gene, mas a todo o cromossomo. É definida uma probabilidade de ocorrência  $p_{ac}$  e  $p_{sc}$  para a adição e subtração respectivamente. Quando se aplica um desses operadores sua atuação se restringe a apenas uma camada.

Pelo fato das lâminas mais externas se definirem mais cedo no processo de otimização em que o comportamento da estrutura à flexão é importante, adota-se como ponto de retirada ou introdução de camadas a região central do material. Essa medida faz com que as modificações sejam mais sutis, já que as laminas internas são menos determinantes no comportamento do material (Nagendra, 1996). Assim se impede que as boas características obtidas durante a evolução se percam. Nos problemas em que não é exigida simetria, a região de atuação se encontra na metade do trecho de genes que representam camadas existentes. Já em laminados com imposição de simetria a introdução ocorre no fim dos cromossomos.

A subtração de camada é realizada através substituição do valor de um par de genes, que indicam uma camada, pelo código de camada vazia. Em seguida o cromossomo tem seus genes compactados, agrupando os códigos "0" na região mais à esquerda. A atuação deste operador sob o indivíduo do exemplo apresentado na Eq. 3.11 é dado por:

Cromossomos:

$$\left[0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 4 \ \mathbf{4} \ 3 \ 2\right] \xrightarrow{\text{subtração}} \left[0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 4 \ \mathbf{0} \ 3 \ 2\right], \quad (3.13a)$$

$$\left[0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \ \mathbf{1} \ 2 \ 2\right] \xrightarrow{\text{subtração}} \left[0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \ \mathbf{0} \ 2 \ 2\right],$$

$$\left[0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 4 \ \mathbf{0} \ 3 \ 2\right] \xrightarrow{\text{compactação}} \left[0 \ 0 \ \mathbf{0} \ 1 \ 4 \ 4 \ 3 \ 2\right], \quad (3.13b)$$

$$\left[0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \ \mathbf{0} \ 2 \ 2\right] \xrightarrow{\text{compactação}} \left[0 \ 0 \ \mathbf{0} \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2\right],$$

Laminados:

$$\left[0^{(ge)}, 90_2^{(ge)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)}\right] \xrightarrow{\text{subtração}} \left[0^{(ge)}, 90_2^{(ge)}, \mp 45^{(ge)}\right] \quad (3.13c)$$

Na Eq. 3.13 é descrita a aplicação da subtração de camada para laminados em problemas sem imposição de simetria. Tanto o segundo quanto o terceiro par de genes poderiam ser os retirados já que eles estão posicionados igualmente próximos ao centro do laminado. Quando isso ocorre, o par retirado é escolhido aleatoriamente. Outra possibilidade de atuação está nos casos de otimização de laminados simétricos, quando apenas as camadas superiores do material ficam codificadas. Tendo em vista essa característica, a subtração de camadas também se dá de forma específica, retirando o último par de genes do cromossomo. Para exemplificar esta operação é tomado o laminado da Eq. 3.2 que além de ser simétrico tem codificação para camadas com duas lâminas. Assim, a subtração de camada acaba retirando quatro lâminas, pois nesse exemplo os genes representam um par de lâminas e suas simétricas em relação ao plano médio do laminado, como demonstrado na Eq. 3.14.

Cromossomos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \mathbf{3} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{2} \end{bmatrix}_S \xrightarrow{\text{subtração}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}_S \quad (3.14a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}_S \xrightarrow{\text{compactação}} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_S \quad (3.14b)$$

Laminados:

$$\left[\pm 45^{(ge)}, 0_4^{(ge)}, \pm 45_2^{(ke)}, 0_2^{(ge)}, 90_2^{(ge)}\right]_S \xrightarrow{\text{subtração}} \left[\pm 45^{(ge)}, 0_4^{(ge)}, \pm 45_2^{(ke)}, 0_2^{(ge)}\right]_S \quad (3.14c)$$

Com função oposta ao recém descrito, o operador de adição de camadas atua introduzindo nos cromossomos códigos que representem camadas e retirando um par de códigos "0". Sua aplicação também se localiza na região das *strings* que representam as camadas mais internas do laminado. A operação se dá inicialmente pela retirada de um par de genes de camadas vazias com subsequente translação dos demais à esquerda, abrindo lugar nas *strings* para introdução dos genes representantes da nova camada. Esses novos genes são criados de forma aleatória, como apresentado na Eq. 3.3, podendo assumir qualquer código admissível diferente de "0". A Eq. 3.15 demonstra a aplicação do

procedimento discutido ao mesmo indivíduo da Eq. 3.11. O novo par de genes que representam uma camada com a lâmina  $0^{(ke)}$  é introduzido entre a terceira e quarta posições, ficando exatamente no centro do laminado.

Cromossomos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adição}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 & \mathbf{1} & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.15a)$$

Laminados:

$$\left[ 0^{(ge)}, 90_2^{(ge)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)} \right] \xrightarrow{\text{adição}} \left[ 0^{(ge)}, 90_2^{(ge)}, 0^{(ke)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)} \right] \quad (3.15b)$$

Para exemplificar a atuação desse operador sobre laminados simétricos será utilizado o indivíduo resultante da Eq. 3.14. A existência de pelo menos um par de genes vazios é evidentemente um requisito para a aplicação da adição de camada, já que o comprimento dos cromossomos é fixo. Aqui a operação também envolve quatro lâminas de uma única vez, introduzidas na região central do laminado, como segue:

Cromossomos:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_S \xrightarrow{\text{adição}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \mathbf{2} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{2} \end{bmatrix}_S \quad (3.16a)$$

Laminados:

$$\left[ \pm 45^{(ge)}, 0_4^{(ge)}, \pm 45_2^{(ke)}, 0_2^{(ge)} \right]_S \xrightarrow{\text{adição}} \left[ \pm 45^{(ge)}, 0_4^{(ge)}, \pm 45_2^{(ke)}, 0_2^{(ge)}, \pm 45^{(ge)} \right]_S \quad (3.16b)$$

Na construção do AG deve-se ter cuidado em relação à ordem de aplicação dos operadores de adição e subtração. Como eles têm funções opostas e atuam na mesma posição dos cromossomos existe o risco de uma anulação de seus efeitos quando ambos ocorrem. Numa situação assim, se a adição é efetuada antes da subtração acaba-se introduzindo e em seguida retirando a mesma camada. Portanto é importante que a adição se dê após a subtração, garantindo assim que pelo menos haja uma alteração nos genes da camada mais interna, apesar de ser manter a quantidade total.



A adoção de valores adequados para as probabilidades de ocorrência de adição ou subtração de camada  $p_{ac}$  e  $p_{sc}$  é de fundamental importância para o sucesso dos AG. Deve-se lembrar que na população inicial todos os indivíduos são criados com o número máximo de camadas. A retirada de algumas se dá ao longo da otimização, de forma progressiva até que se atinja uma espessura adequada ao problema. Sendo assim, é desejável que as operações de subtração de camada ocorram mais frequentemente que as de adição. Por isso geralmente se atribui valores para  $p_{sc}$  maiores que para  $p_{ac}$ . A ocorrência da subtração também não deve ser demasiadamente estimulada, pois isso forçaria a redução de camadas além do desejável, comprometendo a convergência do AG.

A probabilidade de ocorrência do operador subtração de camada também serve como parâmetro indicativo da possibilidade de variação do número de lâminas na otimização. Isso se deve ao fato de que tal operador genético é o único mecanismo capaz de alterar o número de camadas dos indivíduos da população inicial. Problemas com número fixo de camadas são tratados através da atribuição de valor 0,0 para  $p_{sc}$ , uma vez que os indivíduos criados inicialmente são formados apenas por genes que representam camadas existentes.

### 3.3.4 Permutação

Essa classe de operadores tem como principal característica a capacidade de alterar a seqüência de laminação (posição das lâminas) do material sem modificar sua composição (característica das laminas independentemente da posição). Dessa forma sua aplicação promove uma modificação nas características relativas à flexão mantendo inalterado o comportamento do material quanto a solicitações no seu plano.

Para uma determinada composição de material existem inúmeras possibilidades de seqüências de laminação. Cada configuração do laminado resulta em propriedades diferentes no que diz respeito ao comportamento à flexão. No entanto todas essas possibilidades apresentam as mesmas características quanto ao comportamento no plano do material. Decorrente disso, observa-se nos AG que otimizam a resposta da estrutura quanto a solicitações dos dois modos mencionados uma convergência inicial para a melhor composição possível. Isso é conseqüência do fato de que existe um grupo de indivíduos com a mesma composição que leva à solução ótima quanto ao comportamento do material no seu plano. No entanto, normalmente apenas um desses indivíduos apresenta a

seqüência de laminação que resulta na solução ótima do material quanto ao comportamento à flexão. Assim, o restante do esforço na otimização acaba sendo dedicado à busca da melhor seqüência de laminação para a composição obtida previamente. As camadas mais externas do laminado exercem maior influência no comportamento à flexão, afetando mais a aptidão da estrutura, e por isso são definidas antes das camadas mais internas. Tendo em vista esse fato, a convergência da solução quanto aos genes referentes à região interna do laminado é mais lenta.

Levando em conta as características mencionadas anteriormente, o operador de permutação destaca-se como uma excelente ferramenta a ser aplicada na fase do processo em que se busca a seqüência de laminação ótima. Nesse trabalho, o operador de permutação implementado segue o modelo do operador *gene-swap* (ou *ply-swap*) vastamente encontrado na literatura (Nagendra, 1996; Soremekun, 1997). Sua atuação consiste na troca mútua de posição entre dois genes selecionados nas *strings* dos cromossomos. Através desta operação é possível acelerar a convergência de trechos dos cromossomos menos influentes na aptidão do indivíduo. Isso se dá pela troca de genes entre uma região já definida do cromossomo e outra em processo de evolução. A aplicação desse operador se dá segundo uma probabilidade de ocorrência  $p_{per}$  definida como parâmetro do AG. Normalmente a probabilidade de ocorrência adotada para a permutação é maior que a atribuída aos operadores de mutação.

O algoritmo implementado nesse trabalho realiza a permutação entre pares de genes, já que as camadas são definidas por dois genes de posição equivalente no par de cromossomos representativos do laminado. Como é característica de quase todos os operadores empregados em AG, define-se de maneira aleatória a posições desses pares. Sua atuação é restrita à região dos cromossomos que não contém códigos "0", garantindo assim eficiência da operação.

A Eq. 3.17 apresenta um exemplo de aplicação do operador de permutação sob o indivíduo criado na Eq. 3.11. Os genes correspondentes da terceira e quinta camadas são selecionados e tem suas posições permutadas nas *strings*, gerando um novo indivíduo com características extremamente semelhantes em relação ao comportamento no plano, mas distintas quanto aos efeitos de flexão.

Cromossomos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & \mathbf{4} & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 2 & \mathbf{2} & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{permutação}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{4} & 4 & \mathbf{1} & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 2 & \mathbf{2} & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.17a)$$

Laminados:

$$\left[0^{(ge)}, 90_2^{(ge)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)}\right] \xrightarrow{\text{permutação}} \left[90_2^{(ge)}, 0^{(ge)}, 90^{(ke)}, \mp 45^{(ge)}\right] \quad (3.17a)$$

### 3.4 FORMAÇÃO DE NOVAS GERAÇÕES

Existem diversas maneiras de se formar as populações das sucessivas gerações de um AG. Nos primeiros algoritmos genéticos a população de uma geração, diferente da inicial, era formada apenas por filhos criados a partir da geração passada. Esse método apresenta muitas desvantagens, pois não existe garantia de que as gerações consecutivas sempre apresentem melhorias ou que pelo menos mantenham a evolução obtida, já que todos os indivíduos são substituídos. Para contornar tais problemas foi introduzida a idéia de elitismo na formação das populações. Esse mecanismo tem por base conservar o melhor indivíduo da população passada e completar o resto da nova geração com filhos criados. Assim se garante que a evolução nunca regrida e que o melhor indivíduo encontrado sempre componha a população final. Contudo, essa forma de elitismo conserva apenas o melhor indivíduo da população anterior descartando até mesmo os que apresentam desempenho próximo do melhor. Informações genéticas importantes podem se perder nessa operação, causando retardo na convergência do algoritmo.

Tendo em vista os aspectos relativos à formação de novas gerações mencionados acima, faz-se necessário o desenvolvimento de novas técnicas para realizar tal tarefa. Soremekun (1997) estudou vários métodos para seleção de novas gerações, avaliando e comparando a influência de cada um sobre a eficiência e confiabilidade dos algoritmos. Dentre os métodos apresentados por Soremekun está o ME1 (*Multiple Elitist 1*), que é adotado nesse trabalho e denominado Elitismo Múltiplo (EM). EM são esquemas de seleção que transferem mais de um indivíduo da geração anterior para a nova, preservando maior quantidade de informação genética desejável.

A aplicação do modelo de EM implementado requer a formação de uma população de filhos com o mesmo número  $P$  de indivíduos da atual. As duas populações são então reunidas em uma única com  $2P$  componentes que são ordenados do melhor para o pior segundo seu valor de aptidão. Feito isso, os melhores  $N_e$  indivíduos ordenados são transferidos para a nova geração, ficando o resto das posições preenchidas pelos melhores indivíduos da população de filhos que não foram introduzidos no primeiro momento.

O número de indivíduos de elite ( $N_e$ ) é definido no início do processo e se mantém constante durante toda a otimização. Ele indica quanta informação deve ser preservada a cada passo da evolução, influenciando diretamente na eficiência e confiabilidade do algoritmo. Não existe uma regra consolidada para sua determinação. A adoção de números muito pequenos leva à perda demasiada de informação e impede a concentração da busca pela solução ótima em regiões promissoras já identificadas no espaço de resposta. Por outro lado, o emprego de  $N_e$  muito grande acarreta em perda da capacidade exploratória do algoritmo já que pouca informação nova é introduzida a cada geração. Embora nenhuma dessas situações seja desejável a segunda é mais problemática que a primeira, pois pode impedir a convergência da solução para o indivíduo ótimo, devendo portanto ser evitada. Cabe a cada problema um ajuste desse parâmetro para obtenção dos melhores resultados.

No exemplo a seguir é demonstrado esquematicamente o processo descrito anteriormente. A população da geração atual, com um número  $P$  de componentes igual a 6, é denominada população de pais. A partir dessa foram criados  $P$  novos indivíduos que compõem uma população de filhos. Na Eq. 3.18 cada indivíduo é representado por uma letra e um número ao seu lado que indica o valor de sua aptidão. No início do processo de formação da nova geração essas duas populações têm seus componentes ordenados do melhor indivíduo para o pior, levando em conta sua aptidão. Em seguida as duas populações são fundidas e reordenadas. Os  $N_e$  melhores indivíduos dessa lista de  $2P$  componentes, assinalados com um asterisco, são então transferidos para a nova geração. Nesse exemplo foi adotado um valor de 3 para  $N_e$ , passando à nova geração os componentes A e B da população de pais e o componente G da população de filhos. O restante das posições são então preenchidas introduzindo-se os indivíduos H, I e J da população de filhos, os quais foram selecionados respeitando-se o ordenamento dos melhores indivíduos dessa população que ainda não compunham a geração seguinte.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} \text{População de pais} \\ \left. \begin{array}{l} A \ 45 \\ B \ 42 \\ C \ 39 \\ D \ 25 \\ E \ 14 \\ F \ 12 \end{array} \right\} \\ \\ \left. \begin{array}{l} G \ 43 \\ H \ 40 \\ I \ 37 \\ J \ 26 \\ K \ 13 \\ L \ 13 \end{array} \right\} \\ \text{População de filhos} \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{l} \text{Populações unidas e ordenadas} \\ \left. \begin{array}{l} A^* \ 45^* \\ G^* \ 43^* \\ B^* \ 42^* \\ H \ 40 \\ C \ 39 \\ I \ 37 \\ J \ 26 \\ D \ 25 \\ E \ 14 \\ K \ 13 \\ L \ 13 \\ F \ 12 \end{array} \right\} \\ \\ \left. \begin{array}{l} A^* \ 45^* \\ G^* \ 43^* \\ B^* \ 42^* \\ H \ 40 \\ I \ 37 \\ J \ 26 \end{array} \right\} \\ \text{Nova geração} \end{array}
 \end{array} \quad (3.18)$$

### 3.5 TÉRMINO E AVALIAÇÃO DAS OTIMIZAÇÕES COM AG

Todas as operações componentes dos AG descritas até o momento fazem parte de um processo iterativo que leva à evolução das soluções a cada passo. Porém nenhum desses mecanismos define um fim para a otimização. O ideal seria que o processo se encerrasse quando o indivíduo ótimo dentre todas as soluções possíveis fosse encontrado. Porém tal momento não pode ser identificado já que essa resposta não é conhecida. Surge então a necessidade da introdução de um critério de parada para o AG. O estabelecimento desse critério é de fundamental importância para o algoritmo, pois um término prematuro do processo pode levar à não convergência à solução ótima, enquanto uma demora na finalização levaria ao desperdício de esforço computacional.

Os AG são fundamentalmente baseados em regras probabilísticas. Essa característica faz com que não haja garantia da obtenção da solução ótima em qualquer otimização realizada. Ao contrário disso, o que existe é uma certa probabilidade de convergência ao melhor resultado possível. Através de análises estatísticas de diversas otimizações é possível avaliar a chance de sucesso, que no caso é denominada confiabilidade do AG. Outro fator importante é o custo computacional de uma otimização. Em relação a essa questão também existem variações a cada execução, restando assim uma avaliação estatística, a exemplo do que ocorre com a confiabilidade.

Todos esses aspectos são discutidos nos seções a seguir, que trazem também as soluções implementadas no presente trabalho.

### 3.5.1 Critério de parada dos AG

Como foi mencionado anteriormente o critério de parada do AG é de fundamental importância para o sucesso das otimizações. Precipitações com relação ao término dos processos podem levar a redução da confiabilidade do algoritmo. Por outro lado, decisões de finalização muito conservadoras podem aumentar demasiadamente o dispêndio de esforço computacional, tornando as otimizações inviáveis.

Diversos critérios podem ser adotados para apontar o fim da otimização por AG. Não existe uma regra estabelecida para esse assunto, ficando a escolha livre em cada caso. Dentre os métodos comumente adotados o mais simples é o estabelecimento de um número limite de gerações para uma otimização ( $N_{LG}$ ). Quando esse limite é atingido o processo se encerra e o melhor indivíduo da última geração é considerado a solução ótima. Não existe um critério estabelecido para determinação do  $N_{LG}$ , ficando essa tarefa a cargo do usuário que se baseia em sua sensibilidade com relação ao problema e sua experiência na utilização do algoritmo. Equívocos quanto ao valor desse parâmetro fatalmente acarretam nos problemas mencionados anteriormente.

Outro método para se definir o final da otimização é o estabelecimento de um número máximo de gerações sem alteração da melhor solução na população ( $N_{MO}$ ). Se durante o processo for atingido um número  $N_{MO}$  de gerações com o mesmo indivíduo ótimo o algoritmo é finalizado e este indivíduo é considerado a solução do problema. Como no método anterior, o parâmetro  $N_{MO}$  é estabelecido pelo usuário sem uma regra consolidada. Existe uma vantagem na adoção desse critério em termos de eficiência computacional. Caso o valor estabelecido para o parâmetro do critério seja adequado ao problema específico, não ocorre perda demasiada de processamento nas otimizações que convergem mais rapidamente. Apesar de este método ser mais flexível que o anterior deve-se tomar o devido cuidado na escolha do  $N_{MO}$ , pois valores demasiadamente pequenos também levam ao término prematuro enquanto os exageradamente altos podem aumentar muito o custo computacional ou mesmo impossibilitar o fim do processo.

Tendo em vista as características apresentadas, optou-se por implementar os dois critérios simultaneamente. Assim, nas otimizações que apresentarem convergência

acelerada é possível reduzir o custo computacional e nas demais limita-lo através da restrição do número máximo de gerações.

### 3.5.2 Confiabilidade e custo computacional do AG

A confiabilidade aparente é um critério importante na avaliação do desempenho de um AG. Através dela é possível estabelecer as chances de se obter a solução ótima em uma única execução do algoritmo. Como já foi discutido anteriormente, os AG são baseados em regras probabilísticas e por isso não é garantida a sua eficácia em todos os momentos. A determinação da confiabilidade aparente ( $R$ ) de um AG para determinado problema é estabelecida dividindo o número de otimizações que encontraram o melhor indivíduo conhecido ( $N_o$ ) pelo número total de otimizações realizadas  $n$ .

$$R = \frac{N_o}{n} \quad (3.19)$$

Como medida da precisão de  $R$  obtida pela Eq. 3.19 pode-se calcular o desvio padrão como segue:

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \quad (3.20)$$

Outro fator a ser considerado na avaliação de um AG é o seu custo computacional. Esse dado informa o valor médio de esforço computacional despendido em cada otimização realizada. Os AG destinados à otimização de compósitos laminados normalmente requerem a execução da análise estrutural de cada indivíduo para a determinação de sua aptidão. Essa tarefa pode se dar por formulações fechadas ou por simulações numéricas, geralmente empregando o MEF, como o que ocorre nesse trabalho. As duas situações são bastante distintas em termos de dispêndio computacional, sendo a primeira drasticamente mais econômica que a última. Esses aspectos tornam difícil a comparação de algoritmo envolvendo ambos os casos. Para que isso se torne possível, a medida de custo computacional é definida como o número médio de análises requeridas em cada otimização, independentemente da forma como foram realizadas.

Sabendo que neste trabalho são necessárias  $P$  análises a cada geração e que em cada uma das  $n$  otimizações decorridas foram criadas um número  $X_g$  de gerações, o custo computacional  $A_n$  do AG pode ser calculado como:

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_g^i P}{n} \quad (3.21)$$

Como são adotados os dois critérios de parada descritos anteriormente o número de gerações  $X_g$  de cada otimização  $i$  é variável.



## 4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Neste capítulo apresentam-se exemplos de aplicação das ferramentas computacionais implementadas no trabalho. Inicialmente são mostrados problemas de análise estática de estruturas de materiais compósitos laminados, começando por um caso de análise linear de placa, passando para casos com não-linearidade geométrica de placas e cascas. Em seguida é estudado o problema de análise de carga de flambagem para placas carregadas axialmente. Por último se desenvolvem aplicações do programa na análise dos deslocamentos concomitantemente com a avaliação das tensões no material. Essas últimas são realizadas tanto para análise linear quanto para análise não-linear geométrica.

Na etapa seguinte três exemplos de aplicação utilizando AG são apresentados. O primeiro consiste em otimizar a orientação das fibras e a espessura das lâminas de uma placa sujeita a carga transversal. O processo é montado de forma que tanto o peso quanto o deslocamento central da placa sejam minimizados. Existem restrições quanto a falha do material, que é detectado nas faces das lâminas pelo cálculo da função de Tsai-Wu. A formulação da função objetivo é própria para problemas de otimização multiobjetiva, permitindo a variação da ênfase dada a cada objetivo através de um parâmetro informado ao algoritmo. No segundo exemplo uma placa sujeita a carregamento axial de compressão tem o número de camadas e seu material constituinte manipulados pelo AG, além da orientação das fibras. Novamente dois objetivos são trabalhados simultaneamente, caracterizando uma otimização multiobjetiva. A função objetivo engloba tanto o peso quanto o custo da estrutura, que devem ser minimizados no processo. O custo pode variar graças à possibilidade de aplicação de dois materiais diferentes, com propriedades mecânicas e custos unitários distintos. As restrições impostas se referem à integridade do laminado, dada pela função de falha, e à estabilidade da estrutura, dada pela carga de flambagem.

O terceiro exemplo de aplicação do AG envolve a otimização da orientação das fibras do laminado que constitui uma casca cilíndrica. Nesse caso apenas a maximização da rigidez entra como objetivo no problema. Através da consideração da não-linearidade geométrica para análise é possível detectar o comportamento complexo da estrutura frente ao carregamento de pressão externa sob sua superfície. Além da restrição quanto à falha do material, também é determinado um número limite de lâminas consecutivas com a mesma orientação de fibras.

## 4.1 ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS

### 4.1.1 Análise estática linear

#### 4.1.1.1 Placa ortotrópica simplesmente apoiada

Esse exemplo apresenta a análise linear dos deslocamentos de uma placa simplesmente apoiada e submetida a um carregamento uniforme de pressão, cujas dimensões estão definidas na Fig. 4.1. O laminado é formado por 4 camadas combinadas segundo a seqüência de laminação  $[0, 90, 0, 90]$ . A Tabela 4.1 traz as propriedades do material e a espessura total da placa.

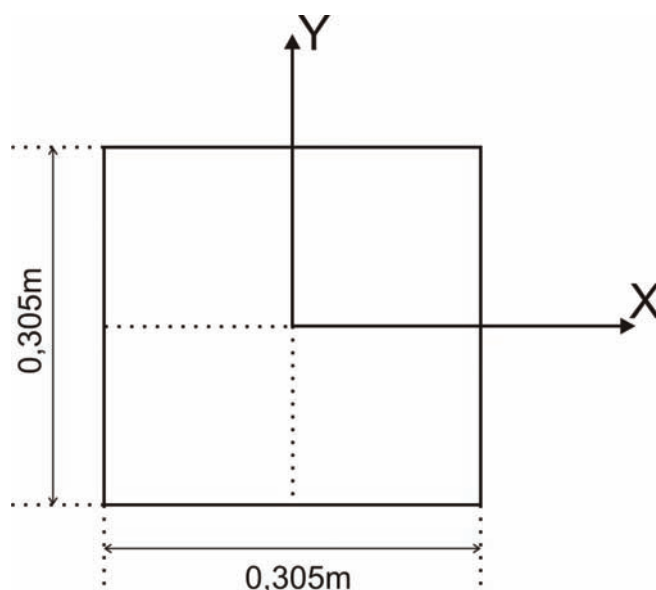


Figura 4.1: Placa laminada quadrada simplesmente apoiada

Devido à simetria do problema, apenas um quarto da placa é modelado. São empregadas duas malhas para que se comparem os resultados obtidos com o apresentado por Liao e Reddy (1987). A primeira malha é bastante pobre, com  $(2 \times 2) \times 2$  elementos, enquanto a segunda é bem mais rica, com  $(10 \times 10) \times 2$  elementos, tendo 25 vezes mais elementos que a anterior. Os resultados obtidos são apresentados e comparados com a referência na Fig. 4.2 e na Tabela 4.2.

Tabela 4.1: Propriedades do material da placa ortotrópica

$E_1$	$20,68 \cdot 10^3$ MPa
$E_2$	$8,83 \cdot 10^3$ MPa
$G_{12}$	$2,55 \cdot 10^3$ MPa
$\nu_{12}$	0,32
$h$	0,0035 m

Tabela 4.2: Deslocamento central da placa ortotrópica simplesmente apoiada

Pressão x100 MPa	Deslocamento central x1000 (m)		
	Malha 2x2	Malha 10x10	Liao e Reddy
8,27	6,968	6,971	6,985
13,8	11,631	11,632	11,557

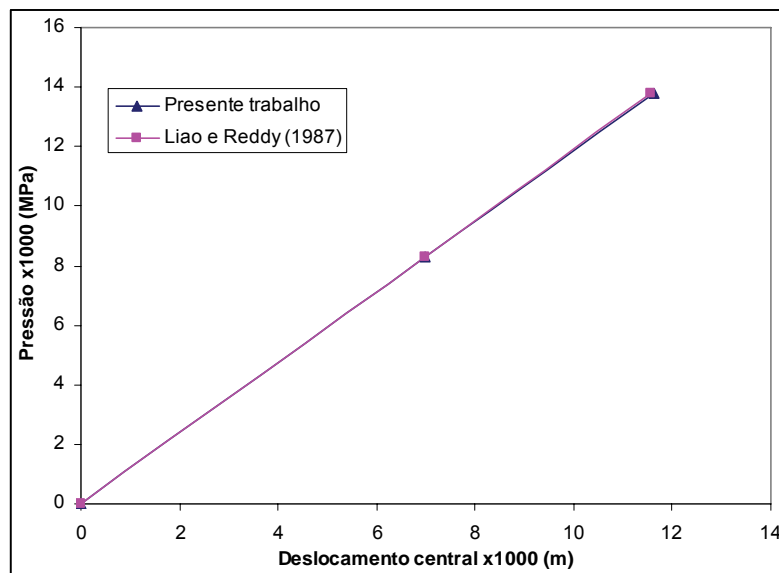


Figura 4.2: Curva pressão-deslocamento da placa ortotrópica simplesmente apoiada

Como se pode observar pela tabela e figura anterior, os resultados apresentam boa concordância com a referência, que utilizou malha de 2x2 elementos degenerados de casca com 9 nós.

## 4.1.2 Análise estática não-linear geométrica

### 4.1.2.1 Placa laminada quadrada submetida a carga de pressão uniforme

Nesse exemplo é apresentada a análise dos deslocamentos de uma placa quadrada laminada submetida a um carregamento de pressão uniformemente distribuído (ver. Fig. 4.3). O laminado é formado por duas camadas  $[90, 0]$ , fabricadas em grafite/epoxy. As propriedades do material e a geometria da placa estão definidas na Tabela 4.3.

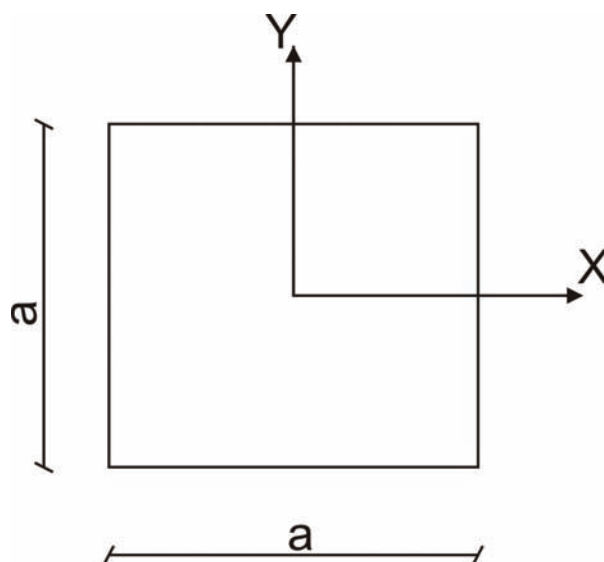


Figura 4.3: Placa laminada quadrada

Tabela 4.3: Propriedades do material e dados geométricos

$E_1$	$1,38 \cdot 10^5$ MPa
$E_2$	$9,65 \cdot 10^3$ MPa
$G_{12}$	$4,83 \cdot 10^3$ MPa
$\nu_{12}$	0,30
$a$	0,23 m
$h$	0,001 m

Três casos diferentes de condições de contorno são considerados:

Engastada – todas as translações e rotações são impedidas nas bordas;

Rotulada – todas as translações são impedidas nas bordas;

Simplesmente apoiada – apenas a translação vertical ( $w$ ) é impedida nas bordas;

Tendo em vista a simetria do problema apenas um quarto da placa foi modelado. Para isso utilizou-se uma malha de  $(10 \times 10) \times 2$ , totalizando 200 elementos. Para o MCDG empregou-se  $\lambda^{(1)} = 0,01$ .

Na Fig. 4.4 está graficado o deslocamento vertical do ponto central da placa para cada condição de contorno. Os resultados obtidos nesse trabalho são comparados com os apresentados por Yeom e Lee (1989). Como pode ser observada na figura, a solução apresenta boa concordância com a referência.

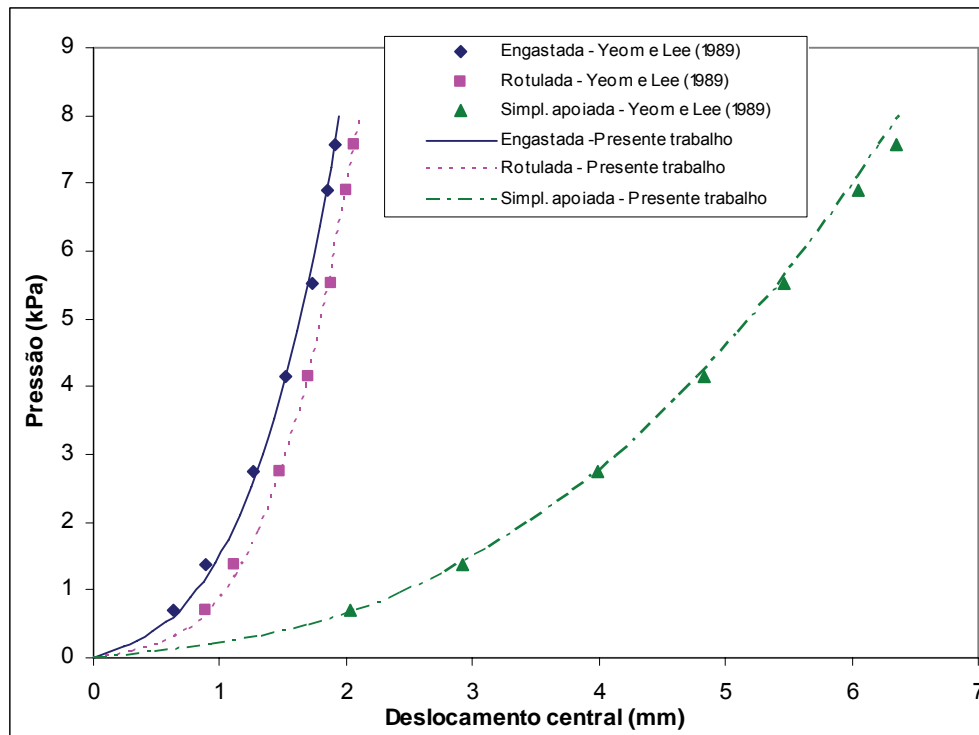


Figura 4.4: Curva pressão-deslocamento central para placa quadrada laminada  $[90, 0]$

#### 4.1.2.2 Casca cilíndrica submetida a carga concentrada no centro

Esse é um exemplo bastante popular em trabalhos que envolvem análise não-linear de estruturas. Ele se torna interessante pela resposta altamente não-linear à carga aplicada, evidenciando os fenômenos de “*snap-through*” e “*snap-back*”. Vários autores o empregaram para demonstrar a eficiência dos métodos de solução ou a precisão de elementos desenvolvidos em seus trabalhos. No entanto, a melhor referência para comparação é o trabalho de Sze, Liu e Lo (2004) que resolveram o problema para compósitos laminados empregando o programa ABAQUS(2004). Nesse trabalho são fornecidos pontos da curva carga-deslocamento, em formato numérico, possibilitando sua reprodução precisamente. Assim é possível realizar a verificação do programa implementado de forma mais eficiente.

O exemplo em questão consiste numa casca cilíndrica articulada nas extremidades retas e livre nas extremidades curvas, como demonstrado na Fig. 4.5. São considerados laminados formados por três lâminas, com dois valores de espessura total (6,35mm e 12,7mm) e duas seqüências de laminação ([90, 0, 90] e [0, 90, 0]), totalizando quatro combinações possíveis. Todas as lâminas possuem a mesma espessura e o ângulo  $0^\circ$  se refere a fibras orientadas na direção longitudinal da casca. As constantes elásticas do compósito estão apresentadas na Tabela 4.4. Como na referência, não são apontadas unidades para as dimensões ou as propriedades do material.

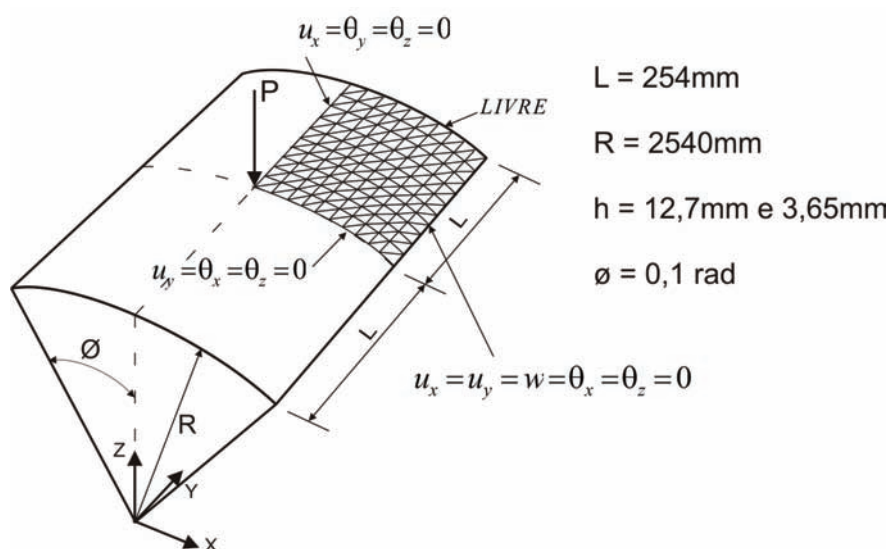


Figura 4.5: Casca cilíndrica sob carga concentrada

Tendo em vista a simetria do problema, apenas um quarto da placa é analisada. Na modelagem do problema é empregada uma malha regular de  $(10 \times 10) \times 2$ , totalizando 200

elementos. O parâmetro de incremento de carga inicial  ${}^1\lambda^{(i)}$ , utilizado pelo MCDG, tem dois valores distintos, acompanhando o nível de não-linearidade dos problemas. Para os laminados com espessura de 12,7mm é adotado  ${}^1\lambda^{(i)} = 0,05$ , enquanto que para espessuras de 6,35mm o valor passa para  ${}^1\lambda^{(i)} = 0,01$ .

Tabela 4.4: Constantes elásticas do compósito

$E_1$	3300,0 MPa
$E_2$	1100,0 MPa
$G_{12}$	660,0 MPa
$\nu_{12}$	0,25

Na Fig. 4.6 estão apresentadas as curvas carga-deslocamento para as duas seqüências de laminação e a espessura de 12,7mm. Para a configuração [0, 90, 0] foram necessários 36 incrementos de carga com um total de 72 iterações. Na outra configuração testada, [90,0,90], foram realizados 93 incrementos de carga ocupando um total de 186 iterações, que, assim como no exemplo anterior, caracteriza uma média de 2 iterações/incremento de carga.

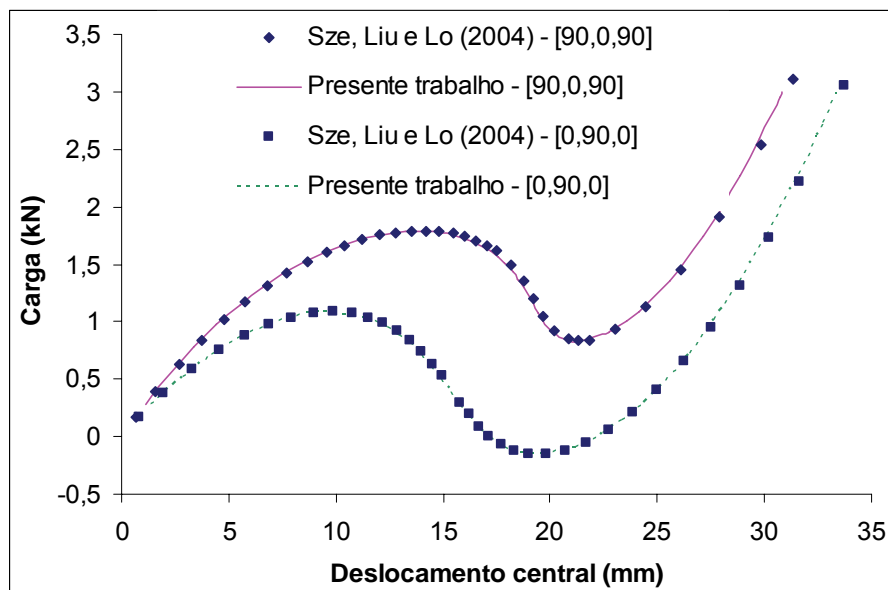


Figura 4.6: Curvas carga-deslocamento para espessura de 12,7mm

Como mencionado anteriormente, as estruturas com 6,35mm de espessura apresentam comportamento bastante complexo e por isso suas curvas carga-deslocamento estão colocadas em duas figuras diferentes, possibilitando uma melhor visualização. A resposta obtida com a configuração [90,0,90] é apresentada na Fig. 4.7. No processo de solução não-linear foram realizados 217 incrementos de carga que requereram um total de 567 iterações, o que leva à média de 2,61 iterações/incremento de carga. Esse número se elevou devido às dificuldades de convergência encontradas na região próxima ao ponto de “*snap back*”, onde a carga é negativa e o deslocamento volta a crescer, na a qual foram necessárias até 36 iterações por incremento de carga.

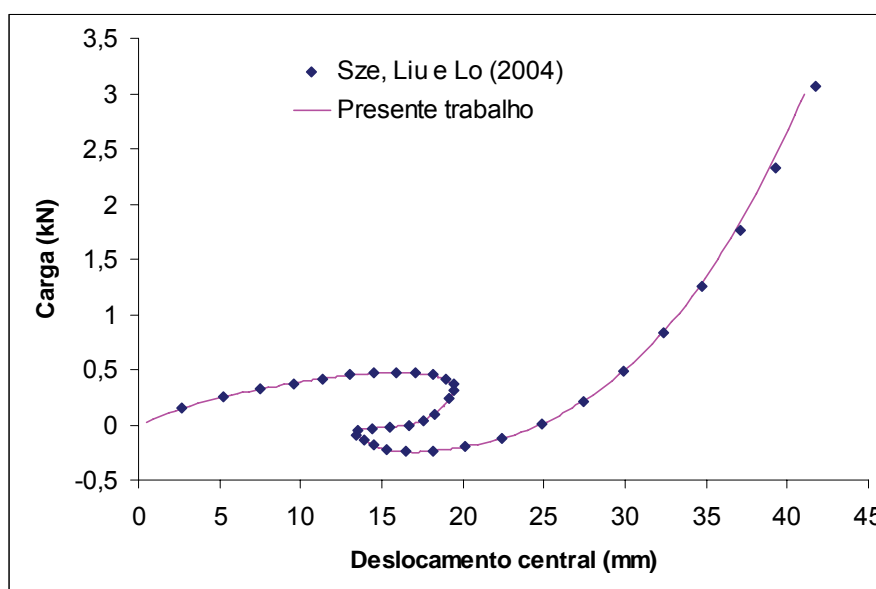


Figura 4.7: Curvas carga-deslocamento para espessura de 6,35mm e laminação [90, 0, 90].

A Fig. 4.8 traz a resposta estrutural obtida para o material constituído pelo laminado [0,90,0]. Neste caso foram necessários 238 incrementos de carga e um total de 477 iterações. Assim como nos exemplos com 12,7mm de espessura, não houve pontos com dificuldade de convergência, sendo realizadas duas iterações em praticamente todos os incrementos de carga.

Em todas as análises realizadas foram obtidos resultados bastante próximos aos apresentados por Sze, Liu e Lo (2004). Vale ressaltar que a malha empregada aqui é relativamente pobre e que os valores do parâmetro de incrementos inicial de carga não são pequenos, demonstrando a eficiência do programa na simulação numérica de estruturas envolvendo grandes deslocamentos.



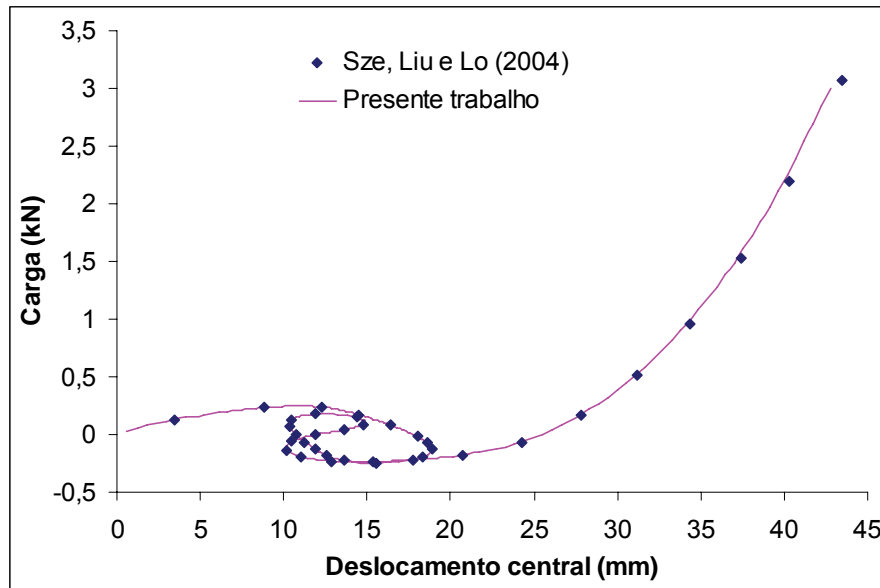


Figura 4.8: Curvas carga-deslocamento para espessura de 6,35mm e laminação [0, 90, 0].

#### 4.1.2.3 Painel cilíndrico submetido a carga pontual

Esse exemplo consiste numa extensão do problema anterior ao analisar um painel com a mesma geometria, porém com as bordas retas engastadas (todos os graus de liberdade restringidos) e não articuladas como foi definido antes (ver Fig. 4.9). A espessura total adotada para o laminado é de 12,6 mm e são consideradas as seqüências de laminação [90, 0, 90], [0, 90, 0] e [45, -45]. Na Tabela 4.5 são apresentadas as propriedades do material.

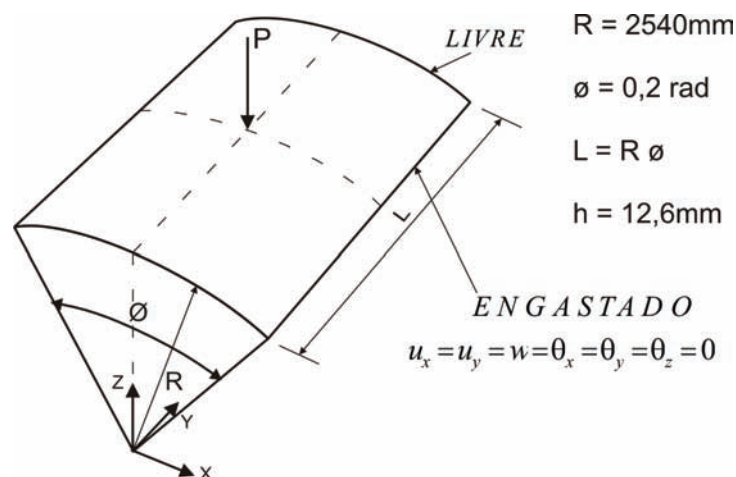


Figura 4.9: Painel cilíndrico submetida a carga pontual

Para os casos de laminados tipo “*cross-ply*”, [90, 0, 90] e [0, 90, 0], apenas um quarto da estrutura é modelada, aproveitando-se a simetria do problema. A malha utilizada é formada por (10 x 10) x 2 elementos. Já no caso do laminado tipo “*angle-ply*” [45, -45] toda a estrutura é modelada pois não existe simetria no que se refere ao material. Para isso é utilizada uma malha (20 x 20) x 2, totalizando 400 elementos. Como parâmetro para o MCDG é adotado  $\lambda^{(1)} = 0,1$ .

A solução obtida é comparada com a apresentada por Yeom e Lee (1989), que utilizou elementos degenerados de casca com nove nós adotando malhas 3x3 e 6x6 para modelar um quarto e toda a estrutura respectivamente. Os resultados demonstram perfeita compatibilidade com a referência, como se pode observar na Fig. 4.10.

Tabela 4.5: Constantes elásticas do compósito

$E_1$	$3,3 \cdot 10^4$ MPa
$E_2$	$1,1 \cdot 10^4$ MPa
$G_{12}$	$6,6 \cdot 10^3$ MPa
$\nu_{12}$	0,25

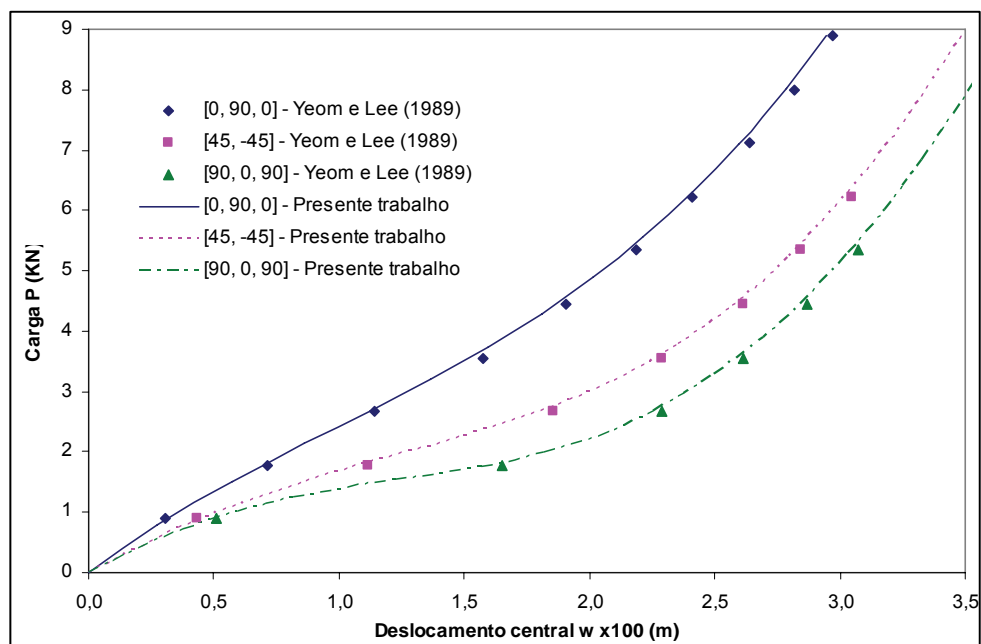


Figura 4.10: Curva carga-deslocamento para painel cilíndrico engastado nas bordas.

### 4.1.3 Análise de flambagem

Para demonstrar o funcionamento do programa na análise da carga de flambagem de estruturas de compósitos laminados são apresentados dois exemplos. Ambos se referem à placas simplesmente apoiadas com carregamento no seu plano. No primeiro a placa é submetida a um carregamento de compressão uniaxial enquanto que no segundo o carregamento é biaxial.

No programa implementado o cálculo da carga e do modo de flambagem (autovalor e autovetor do problema) é realizado iterativamente, segundo procedimento apresentado por Clough e Penzien (1975). Uma vez que os métodos iterativos para cálculo de autovalores em análise de carga de flambagem são bastante conhecidos, esse assunto não é abordado no texto. Os resultados obtidos numericamente são comparados com os apresentados em trabalhos de referência que empregaram formulações matemáticas fechadas.

#### 4.1.3.1 Flambagem de placa carregada uniaxialmente

A carga e o modo de flambagem de uma placa retangular simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniaxial de compressão no seu plano são analisados nesse exemplo. A geometria da estrutura é apresentada na Fig. 4.11, enquanto que a Tabela 4.6 traz as propriedades do material.

Tabela 4.6: Constantes elásticas do compósito kevlar-epoxy

$E_1$	$82,0 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$E_2$	$4,1 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$G_{12}$	$2,75 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$\nu_{12}$	0,25
$t_{\text{lamina}}$	$1,82 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

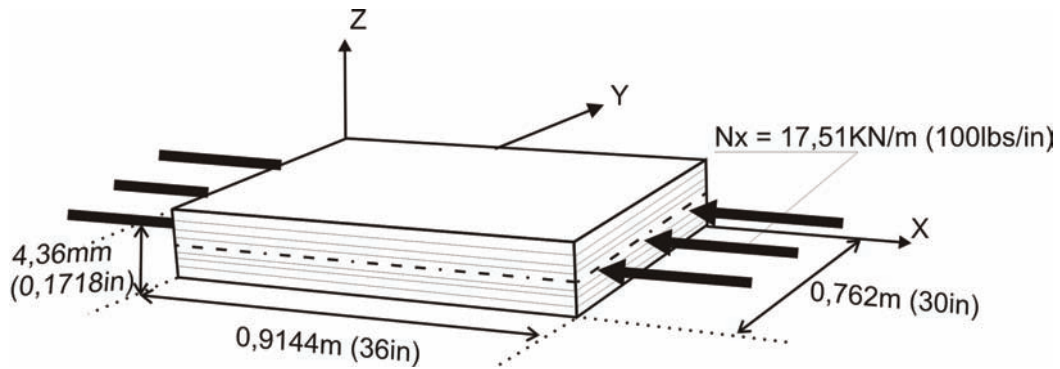


Figura 4.11: Placa apoiada sob carga de compressão uniaxial

O cálculo é executado para um material de 24 lâminas de mesma espessura e com a seqüência de laminação  $[30, 60, -30, -60, 90_8]_S$ . Toda a estrutura foi modelada empregando-se uma malha regular de  $(18 \times 15) \times 2$  elementos. Essa análise determinou um autovalor de 1,002 que corresponde a uma carga de flambagem de 17,55kN/m (100,2 lbs/in). O modo de flambagem da estrutura é apresentado na Fig. 4.12, obtido com o programa GiD, utilizado para o pós-processamento. Através de formulações matemáticas fechadas Sormekun (1997) obteve para essa mesma estrutura uma carga de flambagem de 17,63kN/m (100,72 lbs/in), diferindo em apenas 0,5% do resultado obtido nesse trabalho.

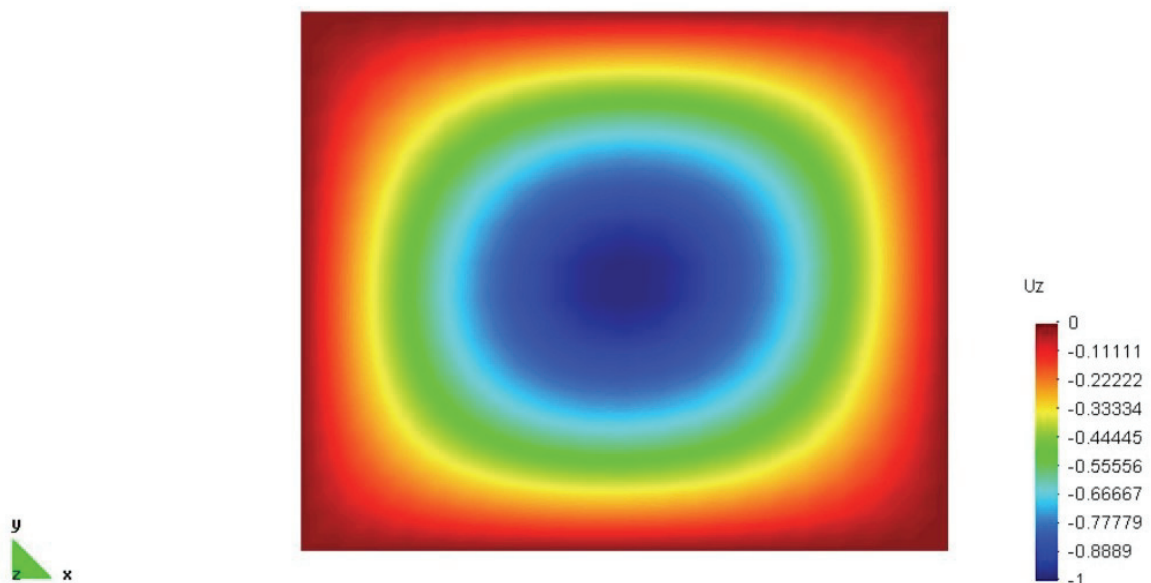


Figura 4.12: Modo de flambagem da placa apoiada sob carga de compressão uniaxial

#### 4.1.3.2 Flambagem de placa carregada biaxialmente

Nesse exemplo é calculada a carga e o modo de flambagem de uma placa simplesmente apoiada submetida a um carregamento de compressão biaxial no seu plano (ver Fig. 4.13). São considerados três laminados com o mesmo número de camadas, mas com diferentes seqüências de laminação.

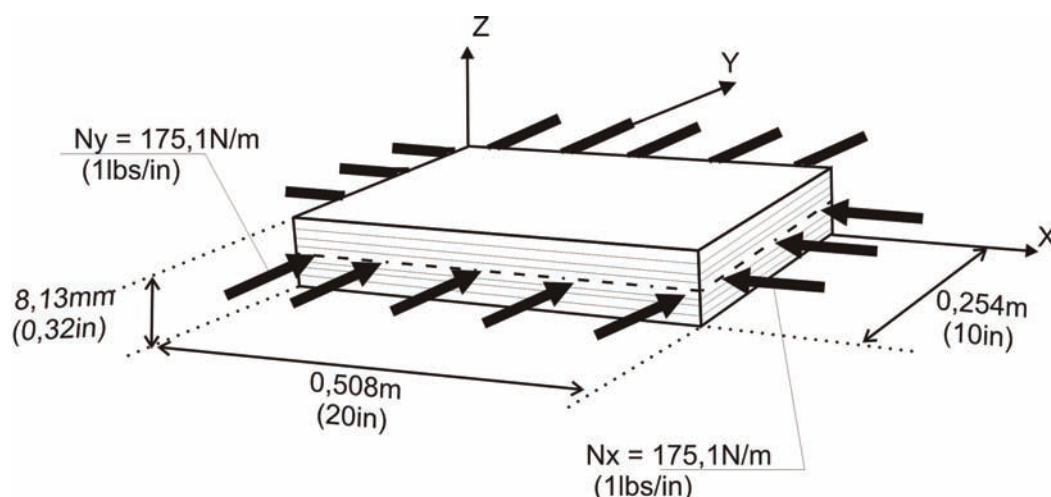


Figura 4.13: Placa apoiada sob carga de compressão biaxial

As propriedades do material constituinte das lâminas estão definidas na Tabela 4.7. São analisadas placas formadas pelos laminados  $[\pm 45, 90_{10}, \pm 45, 90_8, \pm 45, 90_8]_S$ ,  $[90_2, \pm 45, 90_6, \pm 45, 90_8, \pm 45, 90_{10}]_S$  e  $[90_{10}, \pm 45_2, 90_2, \pm 45_3, 90_2, \pm 45_4]_S$ . Os três são formados por 32 lâminas e levam a placa a uma mesma carga de flambagem.

Tabela 4.7: Constantes elásticas do compósito grafite-epoxy

$E_1$	$127,6 \cdot 10^3$ MPa
$E_2$	$13,0 \cdot 10^3$ MPa
$G_{12}$	$6,4 \cdot 10^3$ MPa
$\nu_{12}$	0,3
$t_{\text{lamina}}$	$1,27 \cdot 10^{-4}$ m

A estrutura foi modelada por completo utilizando-se uma malha de  $(10 \times 20) \times 2$  elementos, o que resultou numa carga de flambagem de  $N_x = N_y = 692,1$  kN/m

(3951,77lbs/in). Esse resultado é bastante preciso se comparado com o valor de 695,8 kN/m (3973,01 lbs/in), apresentado por Soremekun (2001). O valor de referência é derivado de uma formulação matemática fechada, apresentando uma diferença de 0,5% em relação ao calculado nesse trabalho. A Fig. 4.14 traz o modo de flambagem da placa carregada biaxialmente.

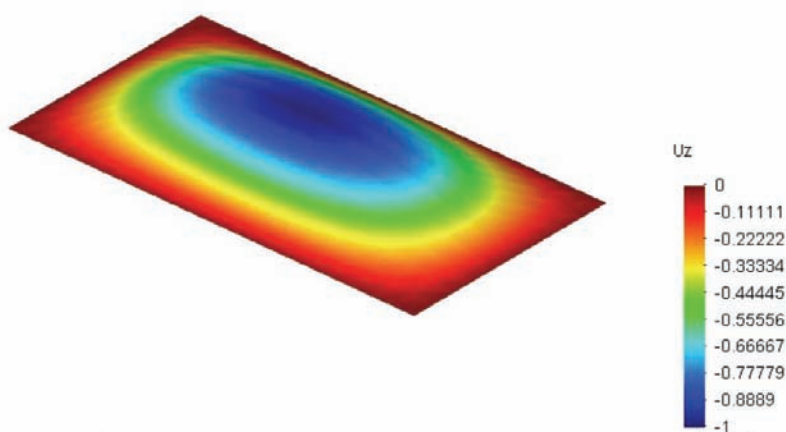


Figura 4.14: Modo de flambagem da placa apoiada sob carga de compressão biaxial

#### 4.1.4 Análise de tensões

Nessa seção são apresentadas aplicações do programa implementado na análise das tensões em estruturas de materiais compósitos laminados. Para tanto são abordados dois exemplos simples, mas que ilustram satisfatoriamente o funcionamento da ferramenta desenvolvida. Em ambos as estruturas consistem em placas submetidas a carregamento de pressão transversal, sendo o primeiro um caso de análise linear e o segundo mais sofisticado, levando-se em conta os efeitos de não-linearidade geométrica.

Dada a dificuldade em se encontrar referência na literatura para comparação dos resultados, os problemas foram executados também no programa ABAQUS(2004), servindo essa solução para validação da análise executada. A modelagem da estrutura no programa comercial também se deu por um elemento finito de casca triangular, que utiliza a mesma teoria do implementado nesse trabalho. São utilizadas as mesmas malhas e as tensões são comparadas diretamente nos pontos de integração. Assim se evita as possíveis diferenças

decorrentes do emprego de diferentes métodos de suavização, utilizados para extrapolar os valores dessas variáveis para os nós da malha.

#### 4.1.4.1 Análise linear de tensões em placa simplesmente apoiada submetida a carga de pressão

Nesse primeiro exemplo a placa retangular simplesmente apoiada apresentada na Fig. 4.15 é submetida a um carregamento de pressão na sua superfície. A partir da análise linear dos deslocamentos são calculadas as tensões na face superior e inferior das lâminas em cada um dos três pontos de integração de todos os elementos.

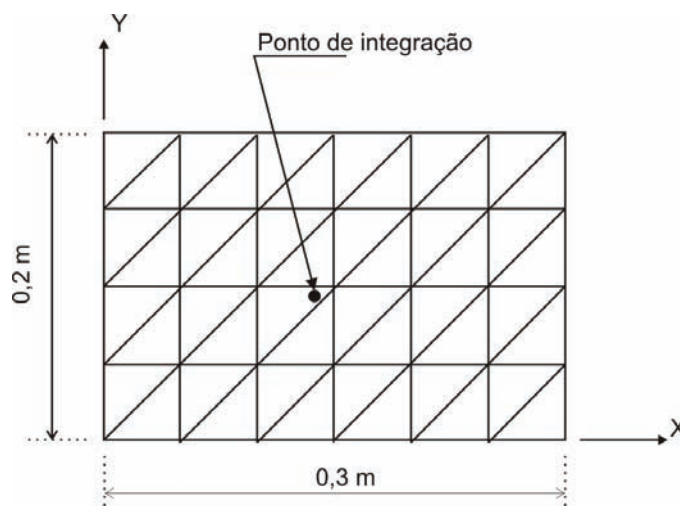


Figura 4.15: Malha de elementos finitos para placa retangular simplesmente apoiada

As propriedades do material constituinte das lâminas estão definidas na Tabela 4.8. O exemplo considera um laminado de 4 camadas com a seqüência de laminação  $[\pm 45_2]$  e uma espessura total de 0,508mm. Toda a extensão da placa foi modelada, pois o material não apresenta planos de simetria. A malha utilizada é de  $(4 \times 6) \times 2$  elementos. As bordas têm as translações restritas e os giros livres enquanto o carregamento de pressão é de  $10^{-3}$  MPa.

Ao se comparar o resultado das componentes de tensões obtidas pelas duas soluções, não foram encontradas diferenças superiores a 0,1%. Tendo em vista impossibilidade de apresentar o enorme número de dados que foram comparados (3 componentes de tensão x 4 lâminas x 2 faces x 3 pontos de integração x 48 elementos =

3560 valores), resume-se a apresentação aos valores obtidos para a face superior e inferior do laminado no ponto indicado pela Fig. 4.15, contidos na Tabela 4.9.

Tabela 4.8: Propriedades do material

$E_1$	$132,4 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$E_2$	$10,75 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$G_{12}$	$5,65 \cdot 10^3 \text{ MPa}$
$\nu_{12}$	0,24
$t_{\text{lamina}}$	$1,27 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Tabela 4.9: Tensões no ponto próximo ao centro da placa para faces superior e inferior

Componente (MPa)	<u>Face superior</u>			<u>Face inferior</u>		
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\tau_{12}$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\tau_{12}$
Presente trabalho	-80,22	-10,09	-3,76	80,25	9,75	-2,91
ABAQUS	-80,22	-10,09	-3,76	80,25	9,75	-2,91

Na Fig. 4.16 são apresentadas as distribuições de tensão nas faces inferior e superior da placa. Essas são originadas de um processo de suavização que extrapola o valor das componentes dos pontos de integração dos elementos para os nós da malha. O deslocamento vertical máximo da placa para esse exemplo é de 17,24 mm.



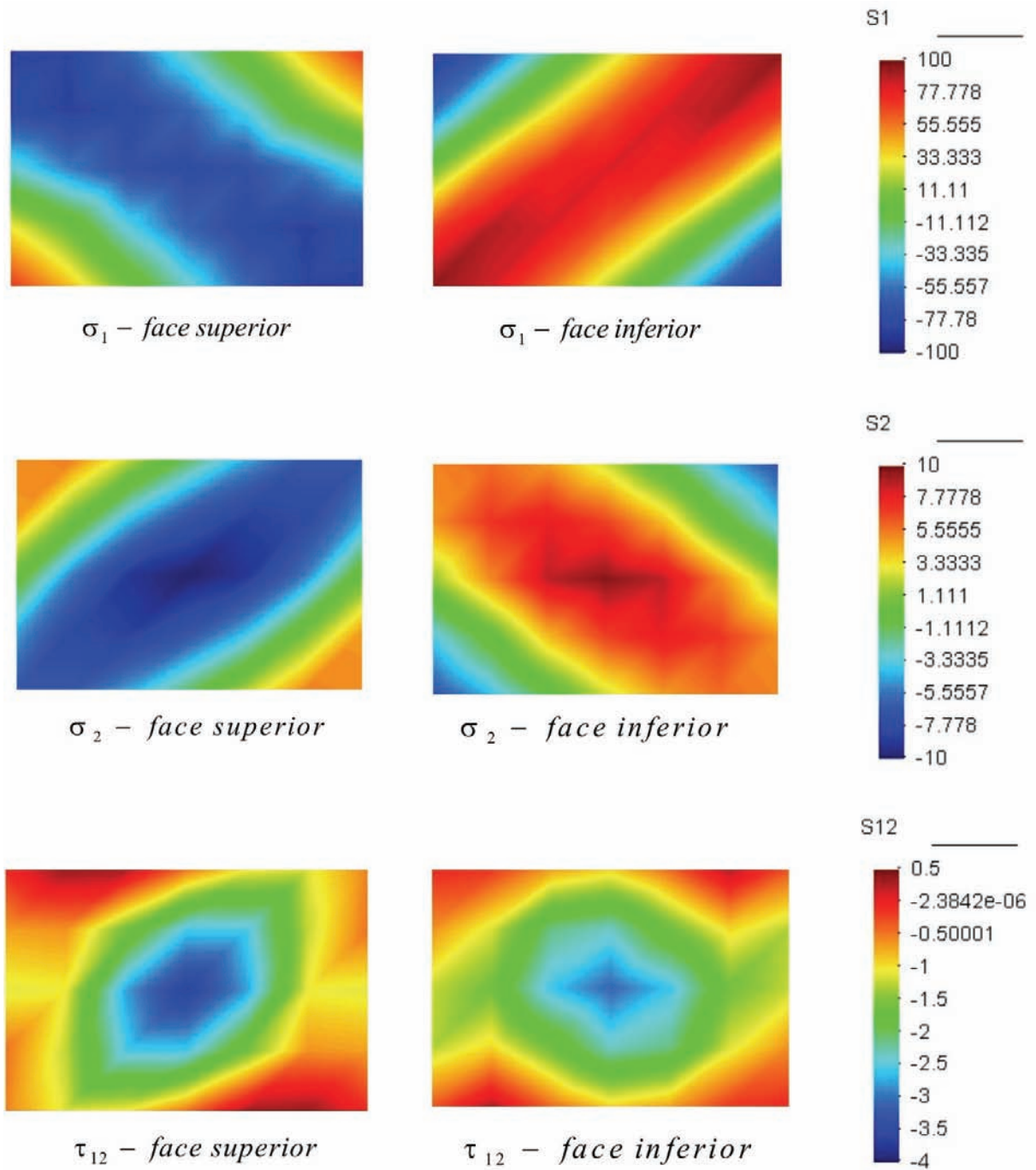


Figura 4.16: Tensões nas faces superior e inferior da placa

#### 4.1.4.2 Análise não-linear de tensões em placa simplesmente apoiada submetida à carga de pressão

Nesse exemplo são apresentados os resultados da análise de tensões da estrutura abordada no exemplo 4.1.2.1. Aqui também são considerados os efeitos de não-linearidade

geométrica na obtenção dos deslocamentos, o que se reflete diretamente nas tensões calculadas para as sucessivas configurações deformadas obtidas a cada passo do método de solução. As propriedades do material e as dimensões da estrutura se mantêm, mas apenas o caso com as bordas engastadas é considerado para o laminado [90, 0]. A modelagem utilizada é a mesma do exemplo anterior, com uma malha de  $(10 \times 10) \times 2$  elementos, conforme se observa na Fig. 4.17. Nessa figura também está indicado o primeiro ponto de integração do elemento 1, local onde serão comparadas as tensões obtidas pelo programa desenvolvido e pela referência.

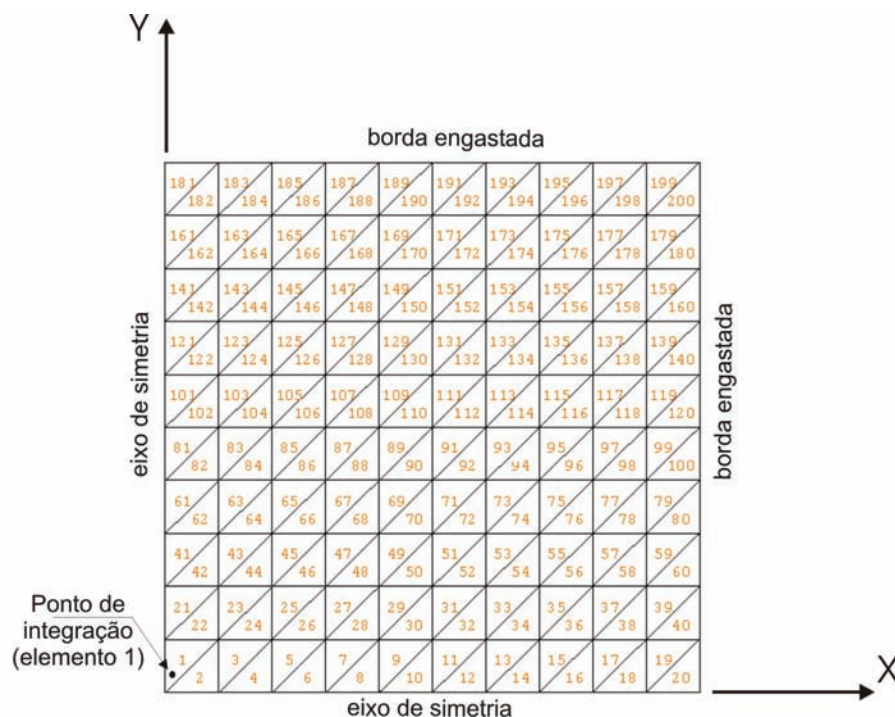


Figura 4.17: Malha de elementos finitos e indicação do ponto de integração onde são comparadas as tensões calculadas

Nas Fig. 4.18, Fig. 4.19 e Fig. 4.20 estão graficadas a evolução das tensões segundo os eixos principais do material para a face superior e inferior no ponto indicado anteriormente. Como o método de solução é diferente em cada programa, as tensões são calculadas para configurações deformadas distintas e por isso só podem ser comparadas através de curvas. A análise é realizada até uma pressão máxima de  $9 \times 10^{-3}$  MPa, sendo esse valor alcançado quando o nível de carga é igual a 1,0. Os resultados apresentaram boa concordância, como se pode observar nas curvas tensão - nível de carga.

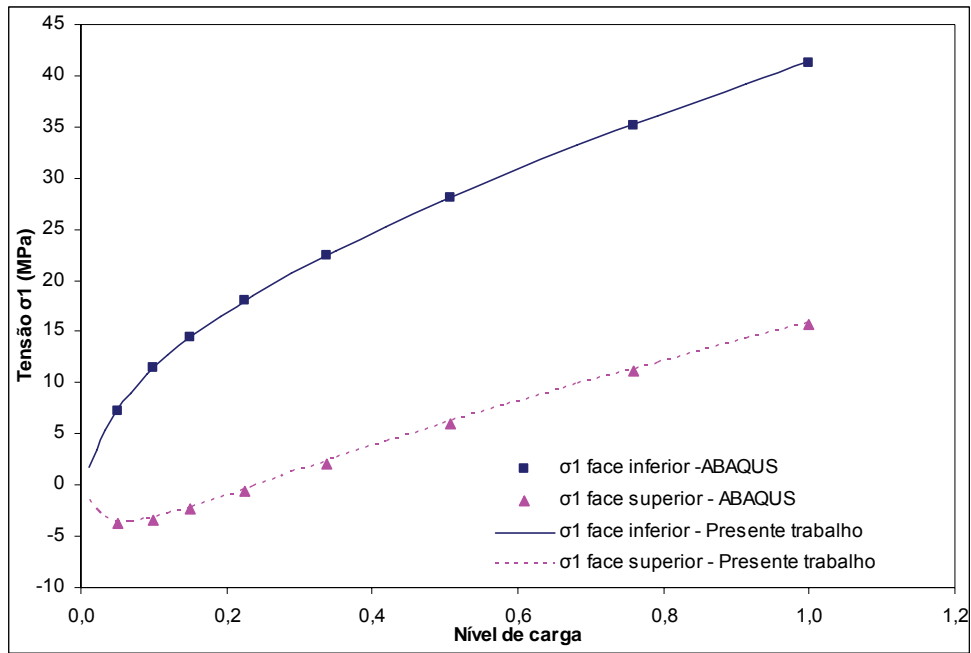


Figura 4.18: Curva tensão  $\sigma_1$  - nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1

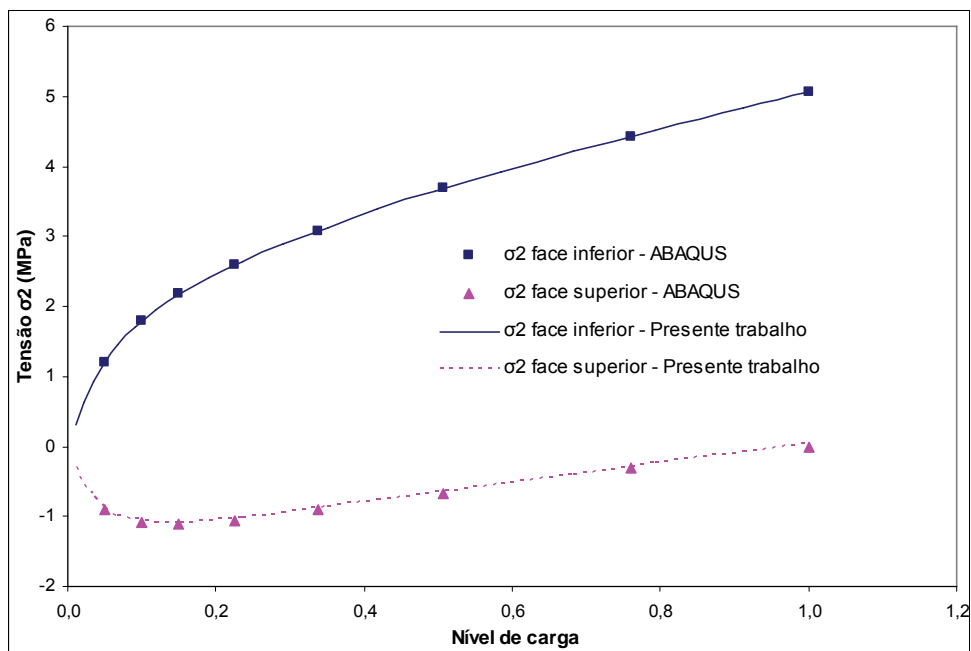


Figura 4.19: Curva tensão  $\sigma_2$  - nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1

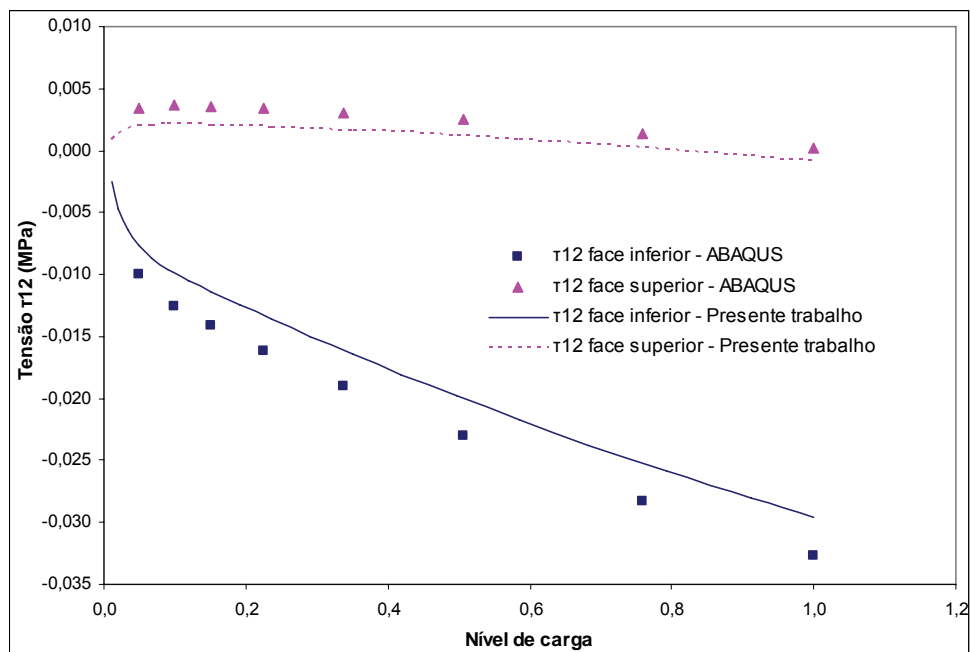


Figura 4.20: Curva tensão  $\tau_{12}$  - nível de carga para faces superior e inferior do laminado no primeiro ponto de integração do elemento 1.

Apesar de visualmente parecerem significativas as diferenças encontradas entre as curvas de tensões  $\tau_{12}$  na Fig. 4.20, os resultados são aceitáveis, considerando-se que os valores são bastante reduzidos se comparados com os das tensões normais.

## 4.2 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS DE COMPÓSITOS LAMINADOS

### 4.2.1 Minimização de peso e deslocamento em placa de compósito laminado sujeita a carga transversal.

Esse exemplo trata da otimização de uma placa quadrada fabricada em compósitos laminados e submetida a um carregamento de pressão uniformemente distribuído sob sua superfície. Dois objetivos, minimização do peso total e do deslocamento máximo, são abordados simultaneamente, caracterizando o processo como otimização multiobjetiva. Tendo em vista que esses objetivos são antagônicos, ou seja, o aprimoramento de um tende a prejudicar o outro, não existe um ponto ótimo, mas sim um conjunto de pontos (*pareto-*

*optimal set*). Na formulação da função objetivo é introduzido um parâmetro que representa a variação da ênfase dada a cada um dos objetivos, permitindo assim a obtenção do conjunto de soluções ótimas (ótimo Pareto). A restrição de integridade do material quando submetido ao carregamento proposto é introduzida no problema através avaliação da função de falha de Tsai-Wu.

A estrutura é apresentada na Fig. 4.21, onde constam as dimensões em planta e as condições de contorno, além da malha de  $(12 \times 12) \times 2$  elementos finitos, utilizada na modelagem de toda a placa. A carga de pressão considerada no dimensionamento é de 0,1 MPa. Os dados referentes ao material que compõem o laminado estão definidos na Tabela 4.10. Nesse problema a condição de simetria é imposta ao laminado, bem como um número fixo de 8 lâminas. Assim, cada seqüência de laminação diferente obtida pelo AG é definida por um par de cromossomos com 4 genes cada, um para cada lâmina localizada acima do plano médio. As variáveis manipuladas na otimização são o ângulo de orientação das fibras, representadas pelos genes do cromossomo de ângulos, e a espessura das lâminas, representadas pelos genes do cromossomo de materiais. São admitidos 4 valores diferentes de ângulo e de espessura, conforme a codificação genética apresentada na Tabela 4.11. Para o número de genes e extensão dos alfabetos de codificação adotados existem  $4^4 * 4^4 = 2^{16} = 65536$  configurações de laminado possíveis.

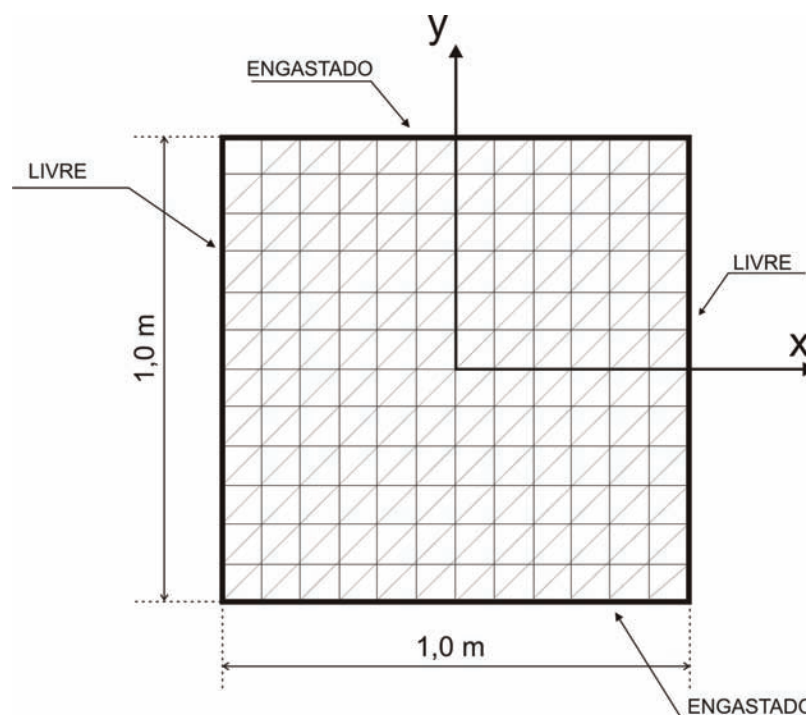


Figura 4.21: Placa quadrada com malha de elementos finitos e condições de contorno

Tabela 4.10: Propriedades do compósito

<u>Constantes elásticas e peso específico</u>		<u>Parâmetros de resistência</u>	
$E_1$	181,0 GPa	$F_{1t}$	1500,0 MPa
$E_2$	10,3 GPa	$F_{1c}$	1500,0 MPa
$G_{12}$	7,17 GPa	$F_{2t}$	40,0 MPa
$\nu_{12}$	0,28	$F_{2c}$	246,0 MPa
$\rho$	15,7 kN/m <sup>3</sup>	$F_6$	68,0 MPa

Tabela 4.11: Alfabeto de codificação dos ângulos e das espessuras

<u>Genes de ângulo</u>		<u>Genes de material</u>	
código	ângulo	código	espessura
1	1 lâmina a 0°	1	0,75mm
2	1 lâmina a -45°	2	1,00mm
3	1 lâmina a +45°	3	1,50mm
4	1 lâmina a 90°	4	2,00mm

São abordadas duas formulações diferentes para a função objetivo, que se distinguem pela forma como são normalizados o peso total da estrutura  $Pt$  e o deslocamento máximo  $W$ . Ambas compreendem uma combinação linear do peso e deslocamento efetuada através do parâmetro  $\alpha$ , que varia de 0, quando é dada ênfase apenas à minimização do peso, até 1, quando apenas o deslocamento é considerado. A primeira formulação, denominada *OBJ1* é definida pela Eq. 4.1, como segue:

$$\begin{cases} OBJ1 = \alpha Pt^* + (1 - \alpha)W^*, & se FF \leq 1 \\ OBJ1 = FF[\alpha Pt^* + (1 - \alpha)W^*], & se FF > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo  $FF$  o valor da função de falha, nesse caso definida pela teoria de Tsai-Wu.  $Pt^*$  e  $W^*$  são respectivamente o peso total e o deslocamento máximo da estrutura normalizados, definidos por:

$$Pt^* = \frac{Pt}{P_{ref}} \quad \text{e} \quad W^* = \frac{W}{W_{ref}} \quad (4.2)$$

onde  $P_{ref}$  e  $W_{ref}$  são valores de peso total e deslocamento máximo da estrutura de referência  $[0_4^{0,75}]_S$ .

A segunda formulação para a função objetivo se define da seguinte forma:

$$\begin{cases} OBJ2 = \alpha Pt^{**} + (1 - \alpha)W^{**}, & \text{se } FF \leq 1 \\ OBJ2 = FF[\alpha Pt^{**} + (1 - \alpha)W^{**}], & \text{se } FF > 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $Pt^{**}$  e  $W^{**}$  são novamente peso total e deslocamento máximo normalizados. Porém essa normalização é realizada de forma mais complexa, como segue:

$$Pt^{**} = \frac{Pt - Pt_{min}}{Pt_{max} - Pt_{min}} + 1 \quad \text{e} \quad W^{**} = \frac{W - W_{min}}{W_{max} - W_{min}} + 1 \quad (4.4)$$

sendo  $Pt_{min}$  e  $Pt_{max}$  o peso mínimo e o máximo da estrutura, respectivamente, obtidos ao considerar todas as lâminas com espessura de 0,75mm ou todas com 2,0mm. De forma análoga,  $W_{min}$  e  $W_{max}$  são o deslocamento mínimo e máximo, respectivamente, dentre as estruturas que não violam a restrição de integridade do material. A obtenção desses valores de deslocamento se dá pela realização de otimizações com valores extremos do parâmetro  $\alpha$  e fixando-se  $W_{min}$  e  $W_{max}$  como 0 e 1, já que não os conhecemos. O deslocamento mínimo é encontrado procedendo-se uma otimização com  $\alpha = 0$ , situação em que o peso não é considerado. Já o deslocamento máximo é obtido da estrutura mais leve possível, encontrada numa otimização quando  $\alpha = 1$ . Nas duas funções dadas na Eq. 4.4 é acrescida uma unidade para que não exista singularidade no valor da aptidão, dada pela Eq. 4.5, devido a denominadores zerados, que seriam encontrados nos casos em que o peso e o deslocamento assumissem seus valores máximos.

O processo de otimização em questão tem como objetivo minimizar as funções objetivo descritas acima. Porém, como já foi dito anteriormente, o AG opera maximizando a aptidão dos indivíduos. Por isso se define a aptidão ( $APT$ ), utilizada no processo, pela da seguinte maneira:

$$APT = \frac{1}{OBJ1} \quad \text{ou} \quad APT = \frac{1}{OBJ2} \quad (4.5)$$

Para que se pudesse avaliar a eficiência do algoritmo de otimização foi efetuada a análise de todas as 65536 soluções possíveis. Na Fig 4.22 estão graficadas os valores peso e deslocamento para todas as estruturas que atendem à restrição imposta ao problema, sendo destacadas aquelas que fazem parte do conjunto de soluções ótimas.

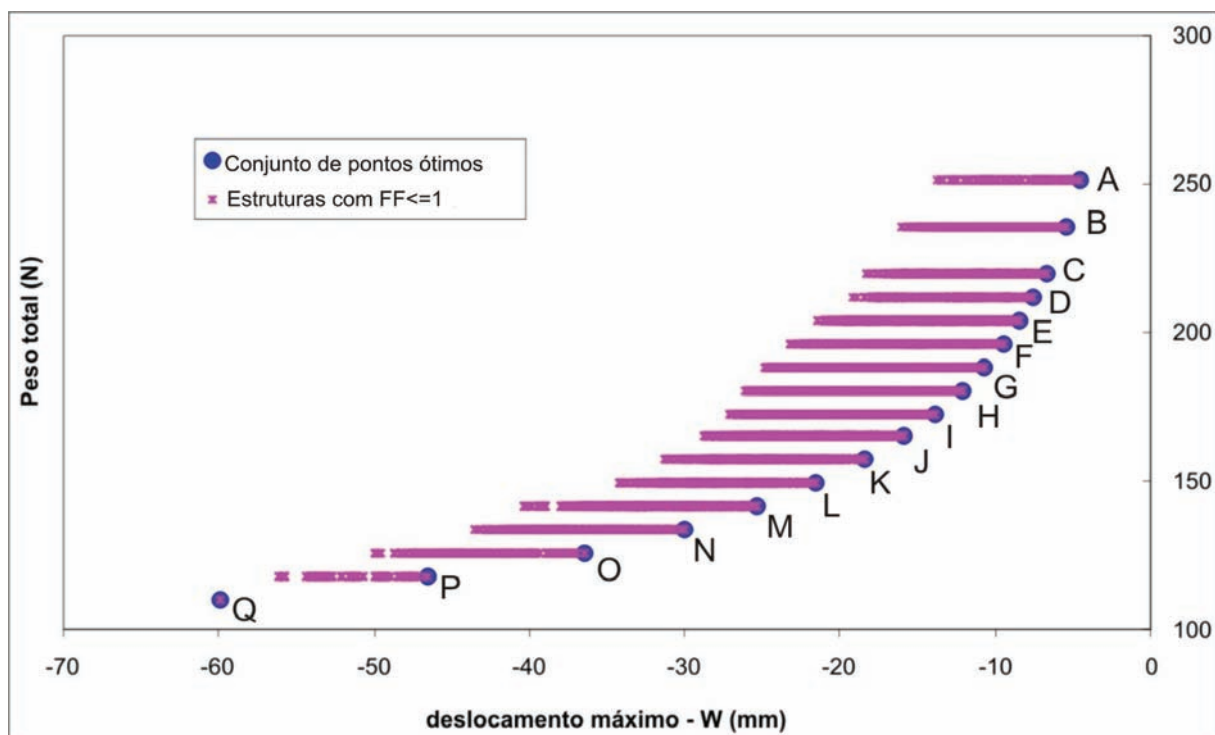


Figura 4.22: Peso e deslocamento central das estruturas que não violam a restrição do problema, considerando pressão de 0,1 MPa

Como se pode notar pela Fig. 4.22, os resultados das diferentes análises se agrupam em faixas de peso, de acordo com a espessura total do laminado. Dependendo da seqüência de laminação de cada ponto dentro de uma faixa de peso se obtém diferentes deslocamentos. Os pontos ótimos, apontados na Fig. 4.22 e definidos na Tabela 4.12, são aqueles que apresentam menor deslocamento para sua faixa de peso, sem violar a restrição de integridade do material.



Tabela 4.12: Conjunto de pontos ótimos

Ponto	laminado	W (mm)	Pt (N)
<b>A</b>	$[90_4^2]_S$	-4,5	251,1
<b>B</b>	$[90^{1,5}, 90_3^2]_S$	-5,5	235,4
<b>C</b>	$[90^1, 90_3^2]_S$	-6,7	219,7
<b>D</b>	$[90^{0,75}, 90_3^2]_S$	-7,5	211,9
<b>E</b>	$[90^1, 90^{1,5}, 90_2^2]_S$	-8,4	204,0
<b>F</b>	$[90^{0,75}, 90^{1,5}, 90_2^2]_S$	-9,5	196,2
<b>G</b>	$[90_2^1, 90_2^2]_S$	-10,7	188,4
<b>H</b>	$[90^{0,75}, 90^1, 90_2^2]_S$	-12,1	180,5
<b>I</b>	$[90_2^{0,75}, 90_2^2]_S$	-13,9	172,7
<b>J</b>	$[90^{0,75}, 90^1, 90^{1,5}, 90^2]_S$	-16,0	164,8
<b>K</b>	$[90_2^{0,75}, 90^{1,5}, 90^2]_S$	-18,5	157,0
<b>L</b>	$[90^{0,75}, 90_2^1, 90^2]_S$	-21,5	149,1
<b>M</b>	$[90_2^{0,75}, 90^1, 90^2]_S$	-25,3	141,3
<b>N</b>	$[90_3^{0,75}, 90^2]_S$	-30,1	133,4
<b>O</b>	$[90_2^{0,75}, 90^{1,5}, -45^1]_S$	-36,4	125,6
<b>P</b>	$[90_2^{0,75}, 45^{0,75}, -45^1]_S$	-46,6	117,7
<b>Q</b>	$[90_2^1, 0_2^{0,75}]_S$	-59,9	109,9

No intuito de obter todos os pontos do conjunto de ótimos através do AG, são realizadas otimizações com valores de  $\alpha$  variando de 0 a 1, em incrementos de 0,05. Para cada valor do parâmetro  $\alpha$  são efetuadas 50 otimizações, utilizando sempre os parâmetros apontados na Tabela 4.13, onde:  $P$  é o número de indivíduos na população,  $Ne$  é o número de indivíduos de elite,  $N_{GL}$  é o número limite de gerações,  $N_{MO}$  é número máximo de gerações sem alteração da melhor solução,  $p_{ma}$  e  $p_{mm}$  são respectivamente a probabilidade de mutação de ângulo e material,  $p_{ac}$  e  $p_{sc}$  são respectivamente a probabilidade adição e subtração de camadas e  $p_{per}$  é a probabilidade de permutação de genes. Esse número elevado de otimizações para um mesmo valor de  $\alpha$  permite a avaliação da confiabilidade do algoritmo para obtenção do melhor resultado.

Tabela 4.13: Parâmetros do AG

$P$	50	$N_{MO}$	50	$p_{ac}$	0%
$Ne$	5	$p_{ma}$	3%	$p_{sc}$	0%
$N_{GL}$	200	$p_{mm}$	3%	$p_{per}$	80%

As soluções encontradas através das otimizações utilizando as funções objetivo  $OBJ1$  e  $OBJ2$  são apresentadas na Fig. 4.23. Ao utilizar a primeira formulação apenas os pontos A, G, K, N, O, P e Q foram encontrados. Já nas otimizações que empregaram a segunda formulação foram encontrados quase todos os pontos ótimos, faltando apenas os pontos D e G. Nenhuma das duas formulações foi capaz de encontrar o ponto D, o que provavelmente seria solucionado realizando-se otimizações em intervalos menores de  $\alpha$ .

Na Tabela 4.14 são apresentadas os valores de  $\alpha$  que levam a cada ponto ótimo ao utilizar-se as formulações descritas anteriormente.

A evolução do peso e do deslocamento máximo referentes à solução ótima obtida para cada valor de  $\alpha$  é apresentada na Fig. 4.24. Variando-se a ênfase dada aos objetivos da otimização, as soluções resultantes da utilização de  $OBJ1$  passam rapidamente da configuração de menor deslocamento para a estrutura de menor peso, sendo incapaz de encontrar as soluções intermediárias. O mesmo não ocorre utilizando-se a função  $OBJ2$ , pois os valores de peso e deslocamento obtidos para as soluções ótimas variam gradativamente, seguindo a modificação de  $\alpha$ .

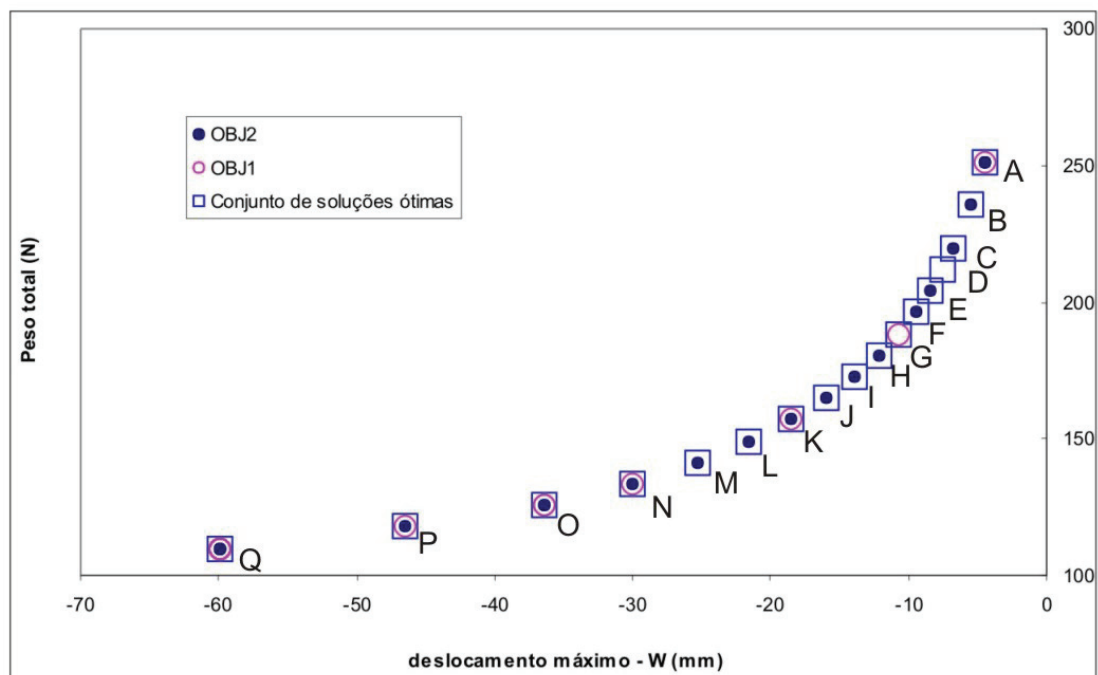


Figura 4.23: Peso e deslocamento máximo das soluções obtidas nas otimizações

Tabela 4.14: Ponto ótimo obtido para cada valor de  $\alpha$

<i>Valores de <math>\alpha</math></i>			<i>Valores de <math>\alpha</math></i>		
Ponto	<i>OBJ1</i>	<i>OBJ2</i>	Ponto	<i>OBJ1</i>	<i>OBJ2</i>
<b>A</b>	0,0	0,0 a 0,1	<b>J</b>	-	0,45
<b>B</b>	-	0,15	<b>K</b>	0,10	0,50
<b>C</b>	-	0,20	<b>L</b>	-	0,55
<b>D</b>	-	-	<b>M</b>	-	0,60
<b>E</b>	-	0,25	<b>N</b>	0,15	0,65
<b>F</b>	-	0,30	<b>O</b>	0,20 e 0,25	0,70 e 0,75
<b>G</b>	0,05		<b>P</b>	0,30	0,80
<b>H</b>	-	0,35	<b>Q</b>	0,35 a 1,0	0,85 a 1,0
<b>I</b>	-	0,40			

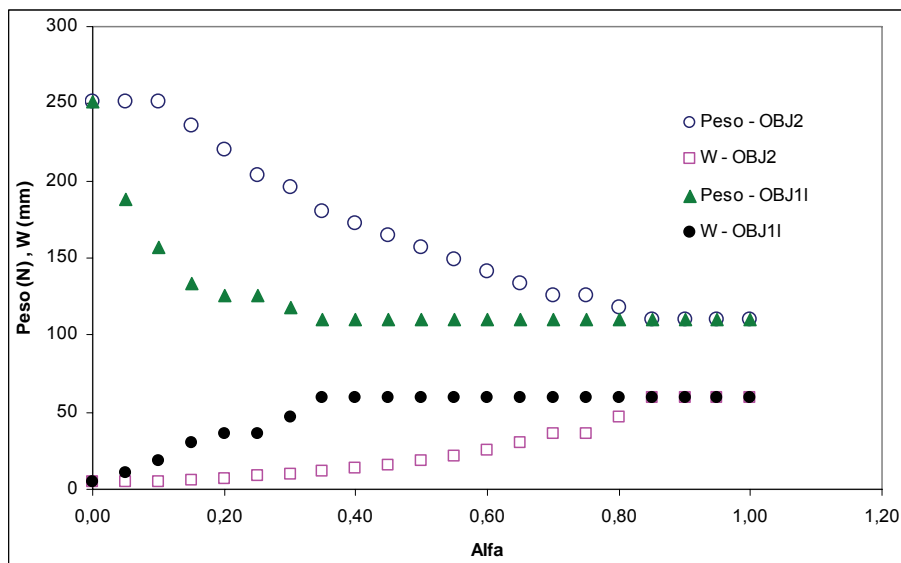


Figura 4.24: Evolução de peso e de deslocamento máximo das soluções ótimas obtidas para consecutivos valores de  $\alpha$

Na Fig. 4.25 estão apresentados os dados relativos ao consumo computacional do algoritmo para realizar as otimizações. Como definido anteriormente, a medida de dispêndio computacional ( $A_n$ ) se dá pelo número médio de análises requeridas para cada otimização, conforme a Eq. 3.21. Esse valor foi calculado a partir do grupo de otimizações realizadas para cada valor de  $\alpha$ . Do gráfico apresentado se observa que além de impossibilitar a obtenção da maior parte dos pontos ótimos, a utilização da função *OBJ1* ainda leva a uma maior demanda de análises por otimização realizada, para uma ampla faixa de  $\alpha$ .

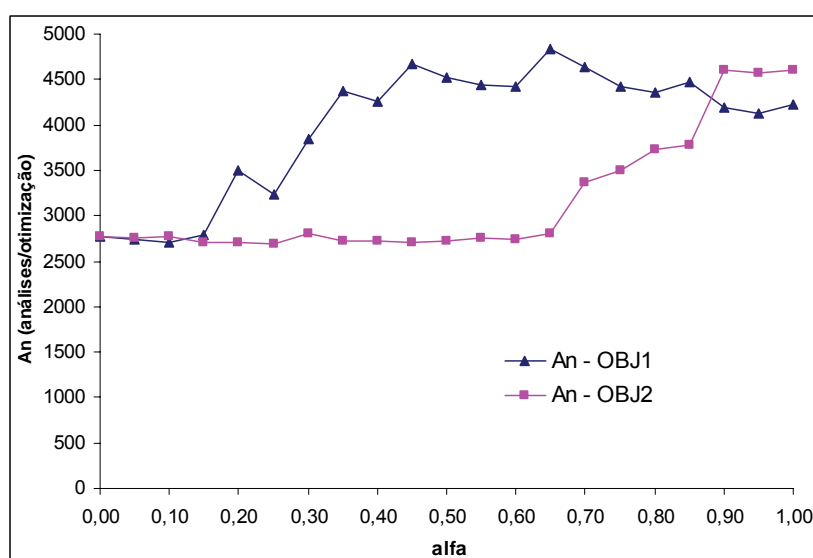


Figura 4.25: Número médio de análises requeridas nas otimizações para cada valor de  $\alpha$

Como dito anteriormente, os AG são baseados em regras probabilísticas, o que torna o processo diferente a cada vez que o algoritmo é executado. Portanto, faz-se necessário definir as chances de uma otimização encontrar a solução desejada. Utilizando-se os resultados obtidos nas 50 execuções do AG, efetuadas para cada valor de  $\alpha$  e para cada formulação da função objetivo, pode-se calcular a confiabilidade aparente (R) da ferramenta implementada. Nas Fig. 4.26 e Fig. 4.27 são apresentados esses percentuais de confiabilidade, incluindo o desvio padrão esperado, calculados conforme as Eq. 3.19 e Eq. 3.20.

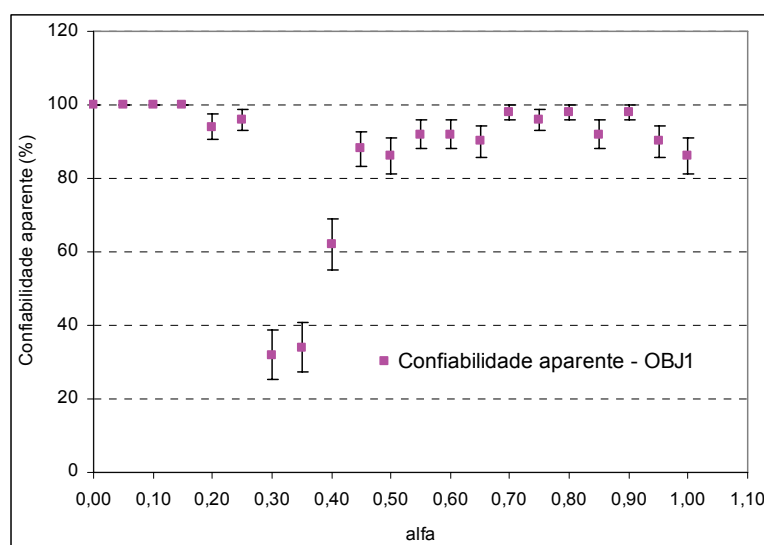


Figura 4.26: Confiabilidade aparente para OBJ1

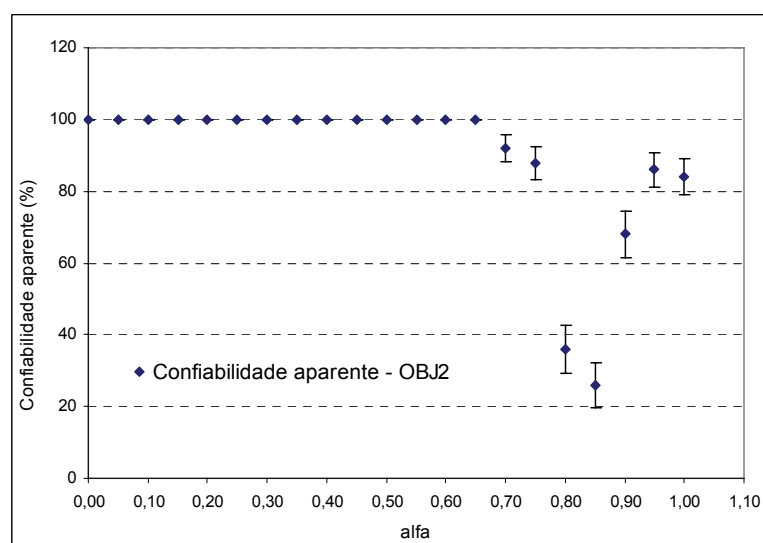


Figura 4.27: Confiabilidade aparente para OBJ2

Nota-se das figuras apresentadas que a confiabilidade aparente varia bastante conforme o valor do parâmetro  $\alpha$ , tanto para a primeira quanto para a segunda formulação da função objetivo. Esse problema pode ter como origem várias causas, dentre elas a adoção de parâmetros inadequados para o AG. Seguindo essa linha de pensamento, realizou-se novamente as otimizações com a função *OBJ2*, tomando-se novos dados para o AG, conforme apresenta a Tabela 4.15.

Tabela 4.15: Parâmetros modificados para o AG

$P$	30	$N_{MO}$	100	$p_{ac}$	0%
$N_e$	4	$p_{ma}$	3%	$p_{sc}$	0%
$N_{GL}$	300	$p_{mm}$	3%	$p_{per}$	80%

As modificações se deram no sentido melhorar as chances de sucesso da otimização por meio do prolongamento da busca. Isso foi realizado através do aumento do número limite de gerações  $N_{GL}$  e do número máximo de gerações com mesmo ótimo  $N_{MO}$ . Para que o consumo computacional requerido no processo se mantenha próximo do exigido anteriormente, o número de indivíduos da população é reduzido. A Fig. 4.28 demonstra os níveis de confiabilidade obtidos para otimizações que utilizam os novos parâmetros. O algoritmo foi executado 20 vezes para cada valor de  $\alpha$ , permitindo a avaliação da confiabilidade, porém de maneira menos precisa que anteriormente. Embora ainda ocorram níveis baixos de confiabilidade, houve melhora substancial na maior parte dos pontos problemáticos observados anteriormente. Com isso constata-se que ajustes nos parâmetros do AG podem influenciar fortemente no sucesso da otimização.

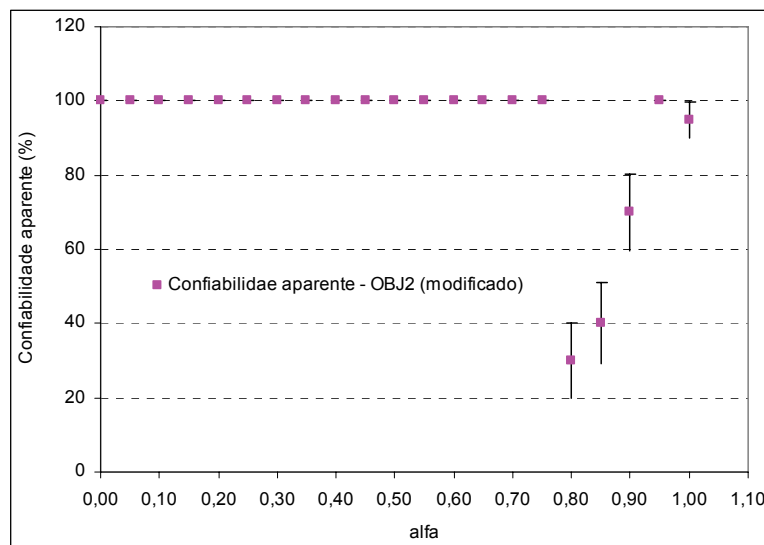


Figura 4.28: Confiabilidade aparente para OBJ2 com parâmetros do AG modificados

#### 4.2.2 Minimização de peso e custo em placa de compósito laminado sujeita a carga no seu plano.

O algoritmo de otimização é empregado neste exemplo com a finalidade de reduzir o peso e o custo de uma placa fabricada em material compósito. A estrutura deve suportar um dado carregamento atuando no seu plano, sem apresentar falha no material ou instabilidade. Para alcançar os objetivos o AG manipula o número total de camadas no laminado, a orientação das fibras e o tipo de material constituinte de cada camada. A combinação adequada dessas variáveis permitem a otimização do peso e custo simultaneamente, o que é realizado no processo dando mais ou menos ênfases a cada objetivo.

As dimensões em planta, condições de contorno e carregamento relativos ao problema em questão são apresentadas na Fig 4.29. Nessa mesma figura também consta a malha de  $(18 \times 12) \times 2$  elementos finitos utilizados para modelar toda a placa. A condição de simetria é imposta ao laminado, que pode ter o número total de lâminas variando de 12 a 24. Dois materiais compósitos podem ser empregados na fabricação da estrutura. Eles apresentam diferentes propriedades, conforme mostra a Tabela 4.16, tornando possível a redução de peso e custo da estrutura não apenas pela variação da espessura total, mas também pela composição de cada uma das camadas. As propriedades  $t$  e  $C$  da tabela se

referem à espessura das lâminas formadas por cada material e ao custo do material por unidade de peso, respectivamente. A última dada em unidades de custo por Newton (uc/N).

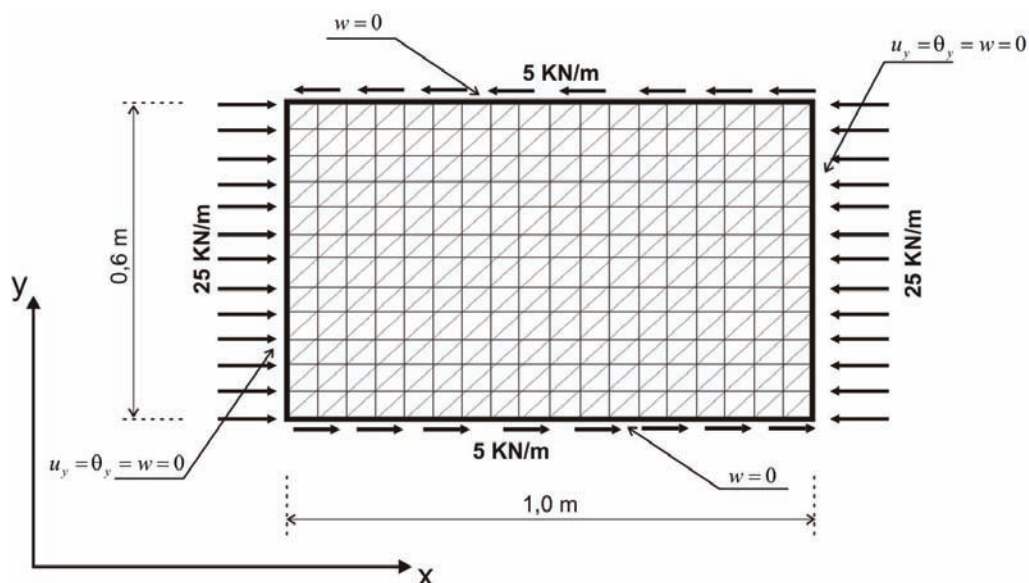


Figura 4.29: Placa de compósito laminado sujeita a carregamento de compressão e cisalhamento no seu plano

Tabela 4.16: Propriedades dos materiais compósitos

Propriedades	<u>Kevlar-epoxy</u>	<u>Grafite-epoxy</u>
$E_1$	87,0 GPa	181,0 GPa
$E_2$	5,5 GPa	10,3 GPa
$G_{12}$	2,2 GPa	7,17 GPa
$\nu_{12}$	0,34	0,28
$t$	0,18 mm	0,13 mm
$\rho$	13,5 kN/m <sup>3</sup>	15,7 kN/m <sup>3</sup>
$C$	1,0 uc/N	3,0 uc/N
$F_{1t}$	1280,0 MPa	1500,0 MPa
$F_{1c}$	335,0 MPa	1500,0 MPa
$F_{2t}$	30,0 MPa	40,0 MPa
$F_{2c}$	158,0 MPa	246,0 MPa
$F_6$	49,0 MPa	68,0 MPa



Na Tabela 4.17 é apresentada a codificação empregada no AG. São admitidas 3 combinações de ângulos para a orientação das fibras e 2 materiais na constituição das camadas. Para representar cada estrutura é utilizado um par de cromossomos de 6 genes. Cada par de genes representam 4 lâminas, compreendidas por um par de lâminas localizadas acima do plano médio e suas correspondentes em posição simétrica na parte inferior. O código “0” é utilizado neste exemplo, permitindo a variação do número de camadas. Essa variação é limitada por um valor superior, fixado pelo total de genes, e por um limite inferior de 12 lâminas, representadas por 3 pares genes. O número de genes nos cromossomos e o tamanho dos alfabetos de codificação implicam em  $\sum_{i=3}^6 3^i * 2^i = 55944$  configurações possíveis para o laminado.

Como no exemplo anterior, foram analisadas as estruturas representadas por todas as configurações possíveis no problema. Com isso é possível comprovar o sucesso nas otimizações e avaliar a eficiência do algoritmo. Na Fig. 4.30 constam o peso e o custo das estruturas cujo fator de segurança à flambagem ( $\lambda_b$ ) e à falha do material ( $\lambda_f$ ) são maiores que 1,0, atendendo às restrições do problema. As letras representam os pontos pertencentes ao conjunto de ótimos que devem ser encontrados pelo AG. Eles estão definidos na Tabela 4.18.

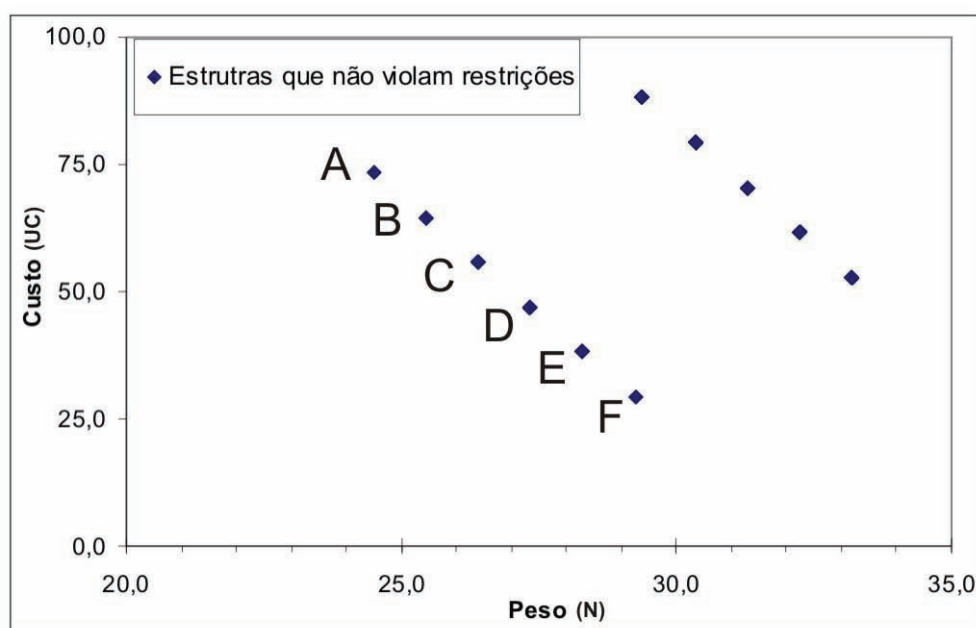


Figura 4.30: Peso e custo de todas as estruturas que não violam as restrições

Tabela 4.17: Alfabeto de codificação dos ângulos e dos materiais

<u>Genes de ângulo</u>		<u>Genes de material</u>	
código	ângulo	código	espessura
1	2 lâminas a 0°	1	Kevlar-epoxy
2	2 lâminas a ±45°	2	Grafite-epoxy
3	2 lâminas a 90°		

Tabela 4.18: Conjunto de pontos ótimos

Ponto	laminado	Peso (N)	Custo (uc)	$\lambda_b$	$\lambda_f$
<b>A</b>	$[\pm 45_3^{ke}, 90_4^{ke}]_S$	24,49	73,46	1,30	16,04
<b>B</b>	$[\pm 45^{ge}, \pm 45^{ke}, 90_4^{ke}, 0_2^{ke}]_S$	25,44	64,62	1,56	17,16
<b>C</b>	$[\pm 45^{ge}, 90_2^{ge}, 0_2^{ke}, \pm 45^{ke}, 90_2^{ke}]_S$	26,39	55,77	1,64	18,00
<b>D</b>	$[90_2^{ge}, 0_2^{ge}, \pm 45^{ge}, \pm 45_2^{ke}]_S$	27,34	46,93	1,50	31,84
<b>E</b>	$[90_2^{ge}, 0_2^{ge}, \pm 45_2^{ge}, 0_2^{ke}]_S$	28,30	38,09	1,30	30,93
<b>F</b>	$[\pm 45^{ge}, 90_2^{ge}, 0_2^{ge}, \pm 45^{ge}, 0_2^{ge}]_S$	29,25	29,25	1,04	55,12

Antes da realização das otimizações é preciso definir a função objetivo do problema. Nesse exemplo ambos os objetivos devem estar contemplados na formulação, bem como as restrições. Inicialmente tentou-se utilizar uma combinação linear do peso e do custo, do mesmo modo com foi realizado no problema anterior para peso e deslocamento. Contudo, essa tentativa foi frustrada, o que se deveu às características do problema. Ao contrário do observado no exemplo anterior, onde o conjunto de pontos ótimos apresenta uma distribuição curva no plano peso-deslocamento, aqui o conjunto de pontos está alinhado. Ao utilizar a função objetivo na forma de uma combinação linear dos valores de interesse, e buscar o valor máximo da mesma, apenas os pontos extremos do conjunto são obtidos. Isso ocorre para qualquer valor de  $\alpha$  testado.

A solução deste problema foi alcançada adotando-se uma função objetivo mais complexa, como segue:

$$\begin{cases} OBJ = 10 - \sqrt{[\alpha(Pt^*)^2]^2 + [(1-\alpha)(C^*)^2]^2} + 10^{-6} \lambda^*, & se \lambda^* \geq 1 \\ OBJ = (\lambda^*)^2 \left\{ 10 - \sqrt{[\alpha(Pt^*)^2]^2 + [(1-\alpha)(C^*)^2]^2} \right\}, & se \lambda^* < 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

onde  $Pt^*$  e  $C^*$  são o peso e custo total da estrutura normalizados. As demais variáveis são  $\alpha$  e  $\lambda^*$ , que representam o parâmetro de controle da ênfase da otimização e o fator de segurança da estrutura. Em vez de trabalhar diretamente com peso e custo normalizados, emprega-se o quadrado dessas variáveis já ponderadas pelo parâmetro  $\alpha$ ,  $\alpha(Pt^*)^2$  e  $(1-\alpha)(C^*)^2$ , o que leva a uma distribuição curva dos pontos no plano peso-custo. Tendo essa nova distribuição, busca-se o ponto mais próximo da origem, sendo essa distância calculada por  $\sqrt{[\alpha(Pt^*)^2]^2 + [(1-\alpha)(C^*)^2]^2}$ .

A obtenção das variáveis utilizadas na Eq. 4.6 se dá pela seguinte forma:

$$Pt^* = \frac{Pt - Pt_{\min}}{Pt_{\max} - Pt_{\min}} + 1, \quad C^* = \frac{C - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}} + 1 \quad (4.7)$$

$$e \quad \lambda^* = \text{minimo}(\lambda_b, \lambda_f)$$

Nas duas primeiras equações são empregados os pesos e custos mínimos e máximos possíveis. Seus valores são facilmente obtidos adotando o número mínimo e máximo de lâminas e utilizando um ou outro material. O menor valor entre  $\lambda_b$  e  $\lambda_f$  define o fator de segurança da estrutura, como fica explícito na última equação. Esse parâmetro, extraído da análise estrutural, serve tanto como penalização para as estruturas que violam a restrição quanto como bonificação para aquelas que apresentam boa segurança em relação ao carregamento. Dessa forma se realiza uma otimização secundária, no sentido de alcançar a maior segurança dentre as estruturas de melhor peso e/ou custo. O valor da função objetivo é utilizado diretamente como valor de aptidão, sem requerer nenhuma operação adicional. Isso porque o valor a ser minimizado é subtraído de “10” na função objetivo, que assim pode ser maximizada pelo AG.

No processo de otimização foram realizadas 25 execuções do algoritmo para cada valor de  $\alpha$ , que foi tomado entre 0 e 1, com intervalos de 0,1. O AG foi ajustado com os parâmetros informados na Tabela 4.19, onde:  $P$  é o número de indivíduos na população,  $Ne$  é o número de indivíduos de elite,  $N_{GL}$  é o número limite de gerações,  $N_{MO}$  é número máximo de gerações sem alteração da melhor solução,  $p_{ma}$  e  $p_{mm}$  são respectivamente a probabilidade de mutação de ângulo e material,  $p_{ac}$  e  $p_{sc}$  são respectivamente a probabilidade adição e subtração de camadas e  $p_{per}$  é a probabilidade de permutação de genes.

Tabela 4.19: Parâmetros para o AG

$P$	30	$N_{MO}$	100	$p_{ac}$	4%
$Ne$	4	$p_{ma}$	4%	$p_{sc}$	8%
$N_{GL}$	300	$p_{mm}$	2%	$p_{per}$	80%

Para todos os valores de  $\alpha$  testados na otimização foram encontrados pontos pertencentes ao conjunto de ótimos do problema. Na Tabela 4.20 estão apresentados os valores do parâmetro que levam a cada ponto identificado anteriormente.

Tabela 4.20: Pontos ótimos para cada valor de  $\alpha$ 

Ponto	$\alpha$	Ponto	$\alpha$
<b>A</b>	0,0 a 0,2	<b>D</b>	0,6
<b>B</b>	0,3 e 0,4	<b>E</b>	0,7
<b>C</b>	0,5	<b>F</b>	0,8 a 1,0

Apesar de ter-se obtido sucesso para todos os valores de  $\alpha$ , nem todas as 25 otimizações realizadas para um mesmo valor alcançaram um dos pontos ótimos. Isso ocorreu porque existem muitas estruturas com o mesmo peso e custo das ótimas, porém apresentando coeficiente de segurança inferior, o que leva a uma aptidão ligeiramente inferior devido ao uso da bonificação prevista na função objetivo. A Fig. 4.31 mostra a

confiabilidade apresentada para o algoritmo tendo-se em vista duas situações. Uma em que se consideram exatamente os pontos ótimos descritos anteriormente e outra em que é considerada como sucesso qualquer solução que apresente o mesmo peso e custo do ponto ótimo. Essa segunda situação é identificada na figura como “pontos semelhantes aos ótimos” e apresenta 100% de eficiência para todos os valores de  $\alpha$  testados, o que mostra a solidez do algoritmo.

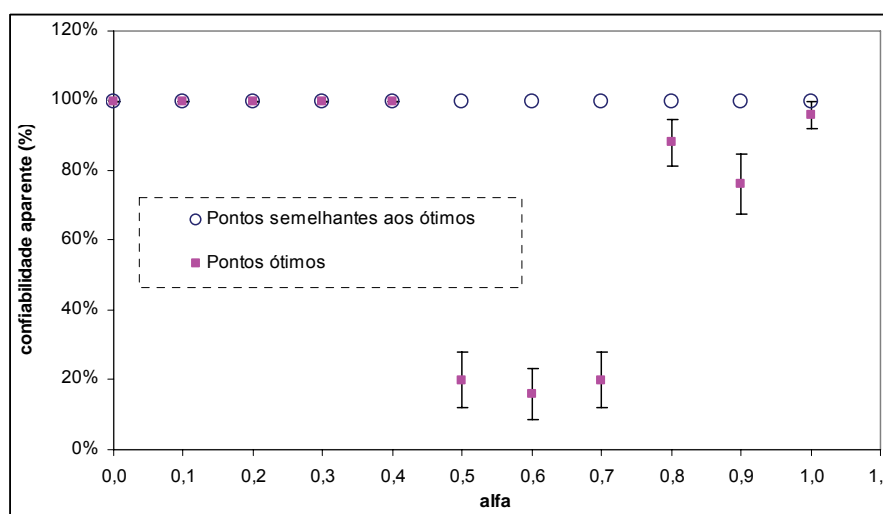


Figura 4.31: Confiabilidade aparente do algoritmo e seu desvio padrão

Nesse exemplo o AG se mostrou bastante eficiente na procura por soluções que apresentam combinação ótima de peso e custo, sem violar restrições. A baixa confiabilidade aparente que ocorreu em valores intermediários de  $\alpha$  se justifica pela forma como a função objetivo foi formulada. A introdução de bonificação por segurança da estrutura leva a uma diferenciação entre as soluções com combinação ótima de peso e custo. No entanto, essa diferença é muito sutil, não exercendo grande influência sobre o AG no sentido buscar soluções com maior fator de segurança. Quando a bonificação é deixada de lado, todas as otimizações se mostram eficientes.

Por último, na Fig. 4.32 é apresentado o número médio de análises requeridas para cada valor de  $\alpha$ , tendo com base as 25 otimizações executadas. A figura também traz, em termos percentuais, a relação entre o número médio de análises requeridas para cada valor de  $\alpha$  e as 55944 análises necessárias para todas as configurações possíveis nesse problema.

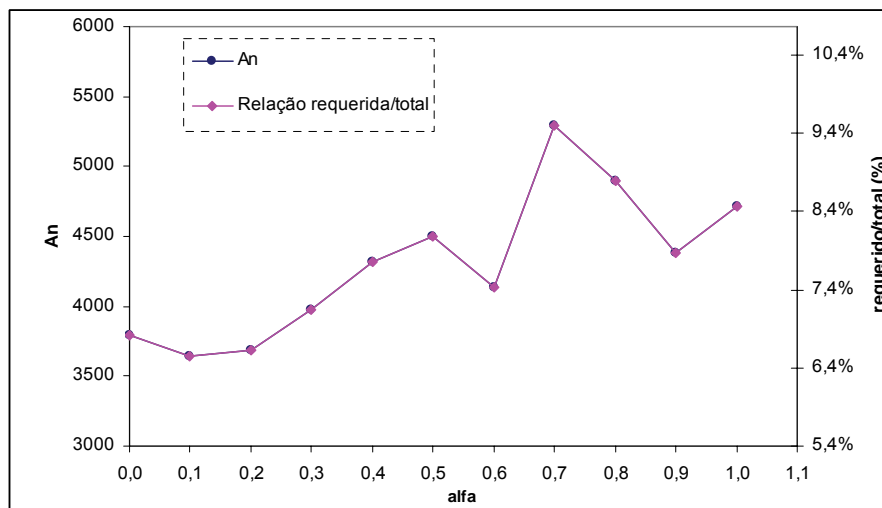


Figura 4.32: Média de análises requeridas em otimizações

O consumo computacional é relativamente alto, variando de 6,5% a 9,5% do universo de possibilidades. Novamente nesse ponto a função objetivo pode exercer grande influência. Com a bonificação por segurança uma pequena modificação na seqüência de laminação da solução ótima em um estágio da otimização pode gerar uma configuração de melhor aptidão, mesmo sem alterar o peso ou custo. Com isso a contagem para o término do processo pelo critério de número máximo de gerações sem alteração da solução ótima se reinicia, conduzindo a um número maior de análises por execução do AG. Estudos focados no ajuste de parâmetros do AG também poderiam auxiliar na redução do dispêndio computacional e no aumento da confiabilidade.

### 4.2.3 Maximização de rigidez em casca de compósito laminado considerando efeitos de não-linearidade geométrica.

O terceiro exemplo de otimização, apresentado nessa seção, difere dos demais em vários aspectos. Primeiramente, não se trata de uma otimização multiobjetiva como ocorreu anteriormente. Apenas a rigidez da estrutura é abordada no problema, tendo-se como foco a sua maximização. Uma casca cilíndrica, conforme mostra a Fig. 4.33, é submetida a um carregamento de compressão uniformemente distribuído sobre sua superfície externa. Através da consideração dos efeitos de não-linearidade geométrica na análise estrutural é possível avaliar mais precisamente a resposta de cada solução proposta à carga aplicada. Todos os parâmetros do laminado são fixos, a não ser pelos ângulos das fibras, que podem variar segundo valores discretos, resultando em diferentes configurações, cada uma com

um comportamento estrutural. Além da restrição à falha do material, comum às aplicações anteriores, também é introduzida uma restrição ao número de lâminas contíguas com fibras orientadas segundo a mesma direção. Isso tem por finalidade evitar situações que favoreçam a falha do laminado por quebra da matriz, sendo adotado em boa parte dos trabalhos científicos que tratam do assunto em questão.

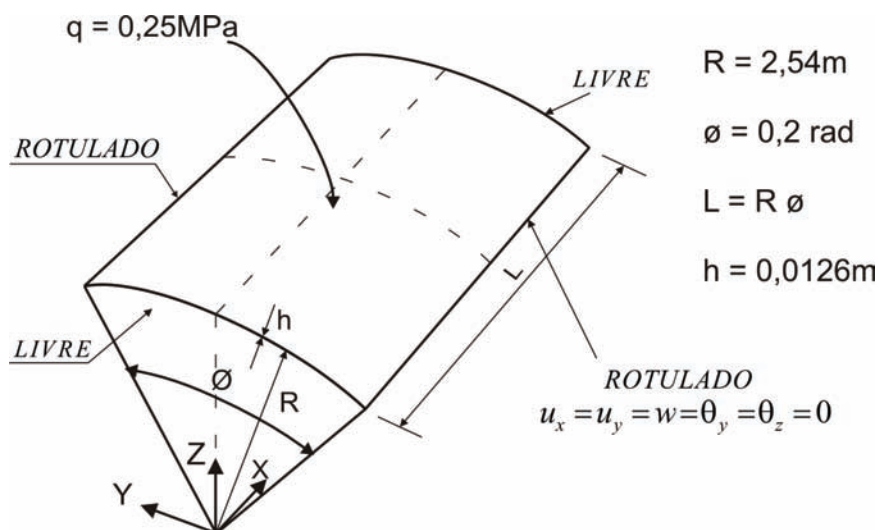


Figura 4.33: Casca cilíndrica submetida à carga uniformemente distribuída

Como dito inicialmente, a estrutura abordada nesse exemplo é uma casca cilíndrica. Seus lados curvos são livres, enquanto os retos são rotulados. A pressão aplicada sobre a placa é de  $0,25\text{MPa}$ , agindo na direção radial em sentido ao centro. A espessura total  $h$  é fixa, sendo formada por 28 lâminas, todas com a mesma espessura, restringindo-se a 4 o número de lâminas contíguas com a mesma orientação de fibras. O laminado é simétrico e balanceado, o que é garantido pela forma de codificação empregada no AG. Apenas um material é utilizado nesse problema, estando suas características definidas na Tabela 4.21. Uma malha regular de  $(20 \times 20) \times 2$  elementos foi utilizada na modelagem de toda a casca, juntamente com o valor do parâmetro de incremento de carga inicial  ${}^1\lambda^{(1)} = 0,05$ , empregado no método de solução do sistema não-linear MCDG. Com isso obtém-se uma modelagem considerada suficientemente precisa para a análise de todo o conjunto de soluções possíveis.

Tabela 4.21: Propriedades do compósito glass-epoxy

<u>Constantes elásticas e peso específico</u>		<u>Parâmetros de resistência</u>	
$E_1$	39,0 GPa	$F_{1t}$	1080,0 MPa
$E_2$	8,6 GPa	$F_{1c}$	620,0 MPa
$G_{12}$	3,8 GPa	$F_{2t}$	39,0 MPa
$\nu_{12}$	0,28	$F_{2c}$	128,0 MPa
$\rho$	20,6 kN/m <sup>3</sup>	$F_6$	89,0 MPa

As estruturas são codificadas no AG pelo alfabeto apresentado na Tabela 4.22, onde cada valor inteiro representa um par de lâminas. A exemplo do problema anterior, associada à condição de simetria, essa codificação permite a representação de 4 lâminas por gene. Desta forma são necessários 7 genes nos cromossomos para representar o total de 28 lâminas. A condição de balanceamento é atendida diretamente nos pares referenciados pelos códigos, e estendendo-se a todo laminado.

Tabela 4.22: Alfabeto de codificação dos ângulos

<u>Genes de ângulo</u>	
<u>código</u>	<u>ângulo</u>
1	2 lâminas a 0°
2	2 lâminas a $\pm 45^\circ$
3	2 lâminas a 90°

Nesse exemplo também foram executadas as análises de todas as configurações possíveis. Com 7 genes e 3 códigos de ângulos, sendo o material inalterável, somam-se 2187 configurações distintas. Esse número é drasticamente menor que os encontrados nos problemas anteriores, o que ocorreu propositalmente, tendo-se em vista o salto expressivo da complexidade na análise estrutural empregada. A redução do espaço de resposta se reflete na dificuldade da busca pela solução ótima, tornando a otimização mais simples que as demais.

Para avaliar a rigidez da casca são utilizados dois dados retirados da análise estrutural. O primeiro é o nível de carga crítico ( $NC_{crit}$ ), determinado quando a curva pressão



x deslocamento central atinge o primeiro ponto de pico. O segundo é o deslocamento central máximo ( $U_{max}$ ), dado no fim do carregamento ou quando se observa falha do material. Para considerar as restrições impostas ao problema são empregados auxiliariamente mais duas variáveis. A primeira é o  $NC_{máx}$ , que consiste no nível de carga máximo suportado pela estrutura sem haver falha. A outra se refere à violação da restrição imposta ao número de lâminas contíguas com a mesma orientação de fibras  $V_{nlc}$ . Para cada lâmina de uma seqüência que supera o valor prescrito é somado 1,0 ao valor de  $V_{nlc}$ .

Na Fig. 4.34 são apresentados  $NC_{crit}$  e  $U_{max}$  de todas as configurações que não violam alguma das restrições impostas.

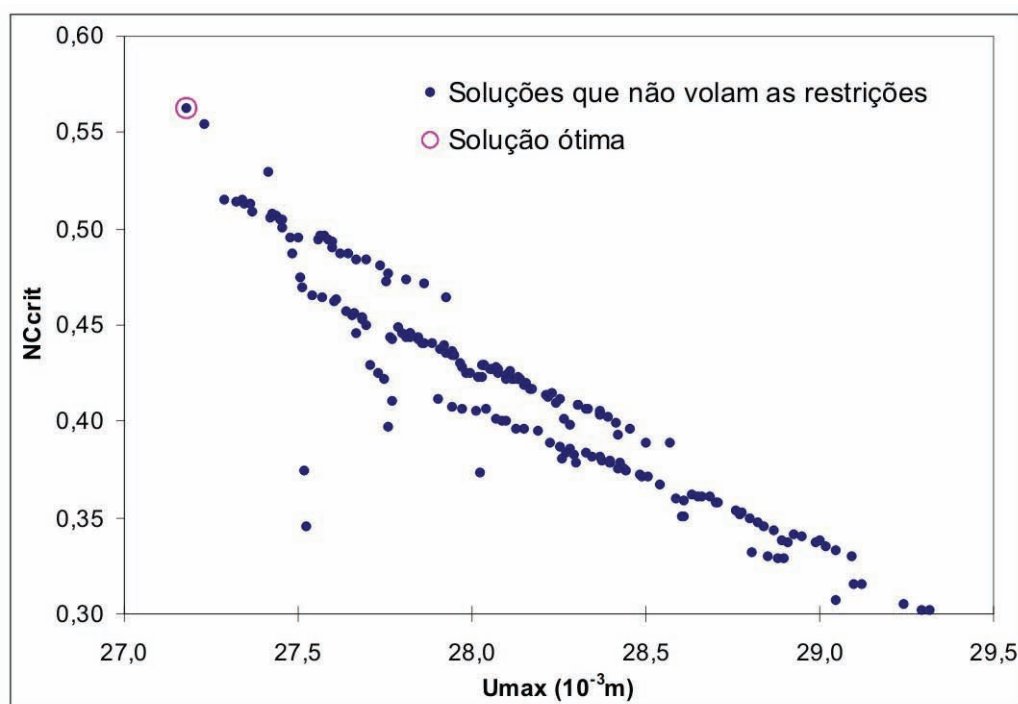


Figura 4.34: Gráfico nível de carga crítico x deslocamento central máximo das soluções que não violam restrições do problema

Nessa otimização pretende-se maximizar a rigidez obtendo-se o maior  $NC_{crit}$  associado ao menor  $U_{max}$  possível. Para tanto a aptidão das estruturas é definida no AG pela função:

$$APT = \left( \frac{NC_{crit} \cdot NC_{max}^2}{U_{max} \cdot (V_{nlc} + 1)} \right) \quad (4.8)$$

Nessa formulação  $NC_{\max}^2$  serve como penalização para as estruturas que falham antes de atingir a carga total, e  $(V_{nlc} + 1)$  serve para penalizar aquelas estruturas que excedem número máximo de lâminas contíguas com fibras de mesma orientação. Através do valor máximo da aptidão é possível identificar a solução ótima  $[(90_4, \pm 45)_2, 90_2]_S$ , contida na Fig. 4.34 com os valores  $NC_{crit} = 0,563$  e  $U_{max} = 27,2 \times 10^{-3} \text{m}$ .

No intuito de avaliar a influência do número limite de gerações ( $N_{LG}$ ) e do número de indivíduos na população ( $P$ ) em relação ao funcionamento do AG, são adotados 5 valores para cada um desses parâmetros e realizadas 50 otimizações para cada uma das 25 combinação dos mesmos. Na Tabela 4.23 são apresentados os valores  $N_{LG}$  e  $P$  estudados, além dos valores do número de indivíduos de elite ( $Ne$ ) e o número máximo de gerações com o mesmo ótimo ( $M_{MO}$ ), associados aos primeiros. Dentre os demais parâmetros do AG, os únicos a serem definidos são a probabilidade de mutação de ângulo ( $p_{ma} = 0,05$ ) e a probabilidade de permutação ( $p_{per} = 0,8$ ). Como só existe um material e não há possibilidade de alteração do número de camadas,  $p_{mm}$ ,  $p_{ac}$  e  $p_{sc}$  são fixados como zero. Deve-se ressaltar que, tendo em vista a extensão dos cromossomos nesse exemplo, as operações de recombinação são realizadas com duplo ponto de quebra.

Tabela 4.23: Parâmetros estudados do AG

$N_{LG}$		$N_{MO}$		$P$		$Ne$
300	→	100		50	→	8
180	→	60		30	→	5
108	→	36		18	→	3
60	→	20		10	→	1
33	→	11		6	→	1

Os dados referentes ao número médio de análises requeridas por otimização e confiabilidade aparente do AG, contidos na Tabela 4.24, são apresentados graficamente na Fig. 4.35.

Tabela 4.24: Combinações dos parâmetros estudados e resultados obtidos pelo AG

Combinação de Parâmetros	$P$	$M_{LG}$	Nº médio de gerações por otimização	An	Nº de otimizações com sucesso	$R$	$\sigma_R$
1	50	300	107,2	5362,0	50	100%	0,00%
2	30	300	109,9	3298,2	50	100%	0,00%
3	18	300	113,0	2033,6	50	100%	0,00%
4	10	300	124,5	1244,6	50	100%	0,00%
5	6	300	132,2	793,0	48	96%	2,77%
-----							
6	50	180	67,1	3354,0	50	100%	0,00%
7	30	180	70,3	2108,4	50	100%	0,00%
8	18	180	76,1	1369,8	50	100%	0,00%
9	10	180	81,6	816,0	49	98%	1,98%
10	6	180	89,8	538,6	46	92%	3,84%
-----							
11	50	108	41,7	2085,0	50	100%	0,00%
12	30	108	43,7	1311,6	50	100%	0,00%
13	18	108	49,6	892,8	50	100%	0,00%
14	10	108	81,6	816,0	49	98%	1,98%
15	6	108	59,3	355,7	40	80%	5,66%
-----							
16	50	60	26,3	1314,0	50	100%	0,00%
17	30	60	29,8	892,8	48	96%	2,77%
18	18	60	31,5	567,0	49	98%	1,98%
19	10	60	33,8	338,0	44	88%	4,60%
20	6	60	36,2	217,4	30	60%	6,93%
-----							
21	50	33	17,9	896,0	47	94%	3,36%
22	30	33	17,2	514,8	40	80%	5,66%
23	18	33	21,9	394,2	46	92%	3,84%
24	10	33	20,0	199,6	23	46%	7,05%
25	6	33	22,6	135,7	21	42%	6,98%

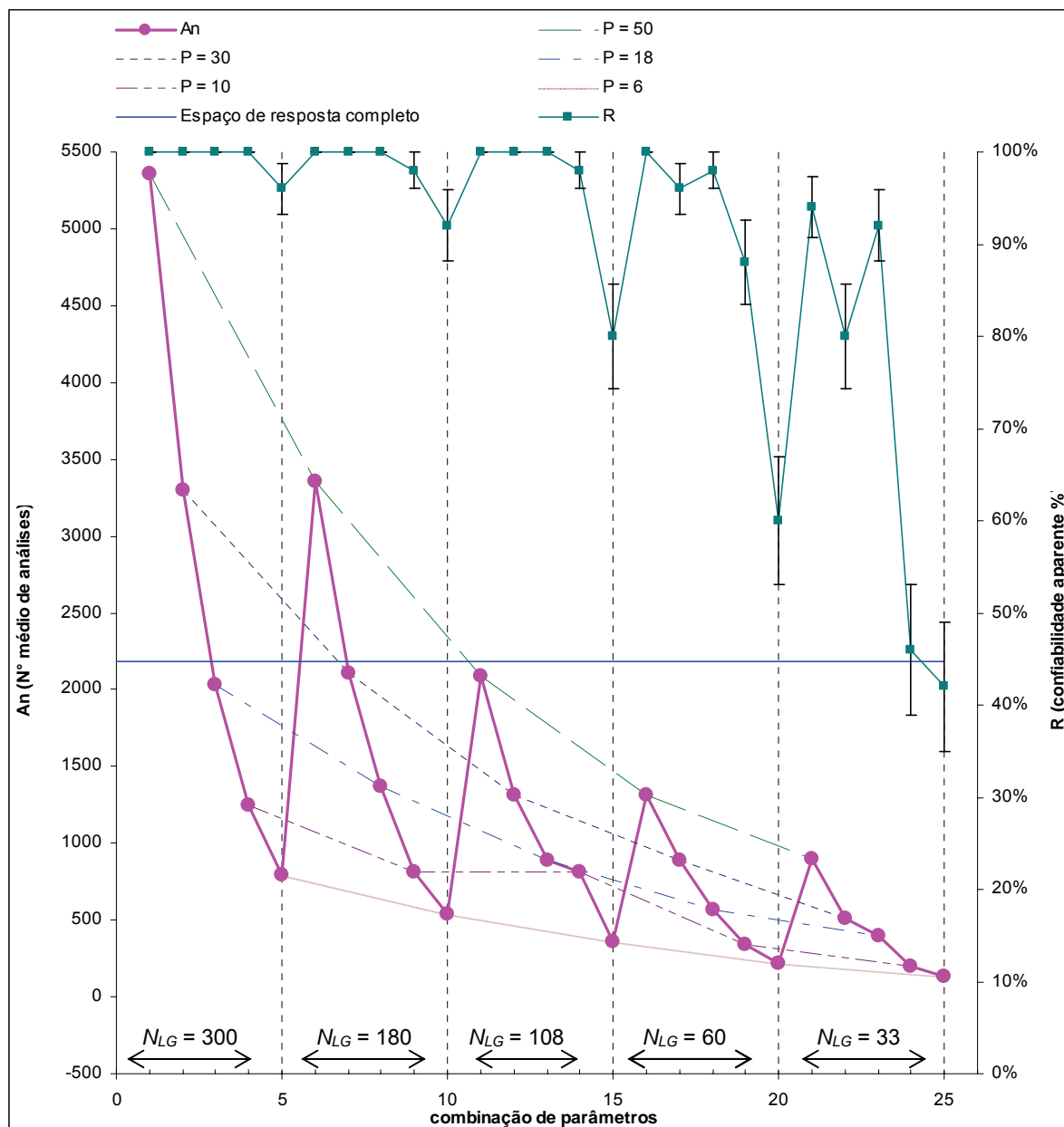


Figura 4.35: Número médio de análises requeridas por otimização e confiabilidade aparente para cada combinação de parâmetros do AG

Nessa figura pode-se observar a tendência esperada para  $An$  e  $R$ , dadas as combinações dos parâmetros do AG. Para  $P$  e  $N_{LG}$  maiores a confiabilidade aparente é boa, mas o custo computacional é alto, invertendo-se essa situação com a redução dos parâmetros. Em todo o gráfico  $An$  e  $R$  evoluem segundo uma mesma tendência, a não ser para a confiabilidade nas otimizações com  $N_{LG} = 60$  e  $N_{LG} = 33$ , onde estranhamente as combinações com  $P = 30$  apresentam desempenho inferior às combinações com  $P = 18$ .

O objetivo primário do exemplo é alcançado, pois a configuração de máxima rigidez que não viola as restrições é obtida pelo AG para as mais variadas combinações de alguns

de seus parâmetros. Adicionalmente, busca-se a combinação de  $P$  e  $N_{LG}$  para a qual o algoritmo exige o mínimo de análises. A resposta para essa questão depende fortemente da confiabilidade mínima desejada no processo, pois o consumo computacional varia proporcionalmente. A Tabela 4.25 traz as configurações que demonstraram o menor consumo computacional para cada valor de  $R$  acima de 90%. Nessa tabela o valor de  $C$  é a relação entre  $An$  e o total de soluções no espaço de resposta.

Tabela 4.25: Melhores combinações segundo ordem crescente de confiabilidade aparente

$R$	Combinação de Parâmetros	$P$	$M_{LG}$	$An$	$J$
92%	23	18	33	394,20	18%
94%	21	50	33	896,00	41%
96%	5	6	300	792,96	36%
98%	18	18	60	567,00	26%
100%	13	18	108	892,80	41%

Como se pode observar, o valor de 18 indivíduos para o tamanho da população é o ideal nesse problema, aparecendo três vezes com os menores valores de  $An$  e os dois melhores valores de  $R$ . Em geral os  $An$  obtidos são elevados se comparados com o número total de soluções possíveis, como demonstra o parâmetro  $J$ . Isso é esperado num problema como este devido ao seu espaço de resposta reduzido. No decorrer da otimização muitas soluções se repetem, contando como uma análise adicional. Para evitar esse desperdício é comum adotar-se um banco de memória que armazena os resultados das análises efetuadas durante o processo. Com isso se reduz drasticamente o valor de  $An$ , principalmente nas otimizações que se estendem por várias gerações. Para a forma como foi tratado a otimização, os valores ideais para  $P$  e  $N_{LG}$  são 18 e 60, respectivamente, dados pela combinação de número 18. Nessa situação a confiabilidade é bastante elevada (98%), enquanto que o número de análises não atinge um valor muito elevado (567).

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Seguindo a tendência de crescente utilização dos compósitos laminados em aplicações de alto desempenho estrutural, o presente trabalho buscou o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de auxiliar no projeto destas estruturas. Através da reunião de um algoritmo genético e um programa de análise estrutural, especialmente desenvolvidos para o material abordado, construiu-se um mecanismo capaz de otimizar propriedades dos compósitos laminados de forma a alcançar os objetivos propostos. Essa ferramenta mostrou-se facilmente adaptável para tratar problemas distintos, sem necessidade de grandes modificações. Uma gama de diferentes variáveis podem ser manipuladas, vários objetivos podem ser tratados, inclusive simultaneamente, além da possibilidade de se abordar estruturas tão complexas quanto um programa de elementos finitos é capaz de analisar.

Inicialmente se desenvolveu o programa de análise estrutural baseado no Método dos Elementos Finitos. Um elemento de placas e cascas triangular plano foi utilizado para a modelagem dos problemas. Sua escolha foi motivada pela simplicidade de implementação e eficiência computacional, apesar de suas limitações com relação à não consideração dos efeitos de cisalhamento e pouca precisão no comportamento de membrana. Tendo em vista o expressivo número de análises a serem realizadas quando da execução dos algoritmos de otimização, essas desvantagens são amplamente superadas pela velocidade obtida, viabilizando o processo. O programa foi implementado de forma a realizar uma gama de análises diferentes, envolvendo cálculo de deslocamentos em problemas estático-lineares e não-lineares. Foram implementadas rotinas para o cálculo de tensões e funções de falha para compósitos laminados, além de algoritmo iterativo para determinação da carga crítica de flambagem. Todas essas habilidades do programa implementado foram testadas e aprovadas através de comparação com exemplos encontrados na literatura ou com resultados obtidos pelo programa ABAQUS(2004).

Posteriormente se apresentou o desenvolvimento do algoritmo genético como mecanismo de otimização. Sua implementação se deu visando a maior generalidade possível, tornando-o capaz de tratar uma série de problemas distintos sem demandar alterações nas suas rotinas básicas. Os operadores genéticos implementados são específicos para tratar problemas que envolvam os compósitos laminados. Eles foram selecionados dentre os mais eficientes apresentados na literatura, contribuindo para o melhor desempenho dos processos de otimização.

Para demonstrar a efetividade da ferramenta construída foram elaborados três problemas de otimização. Em cada um deles uma situação de projeto diferente foi abordada. No primeiro uma placa carregada transversalmente teve a orientação de suas fibras e a espessura de suas camadas manipuladas de forma a atingir o menor peso e deslocamento possível, mantendo-se a integridade do material. O exemplo seguinte tratava de uma placa de compósito laminado carregada axialmente a compressão e cisalhamento. Novas variáveis foram envolvidas na otimização, o que aumentou consideravelmente a complexidade em relação à anterior. Nesse problema, além da orientação das fibras, o material constituinte das lâminas e o número total de camadas puderam ser manipulados para que a estrutura apresentasse o menor peso e custo possível. Adicionalmente à restrição já empregada no primeiro caso, foi incorporada às exigências a segurança com relação à flambagem da placa. Por último, uma casca cilíndrica com carregamento de pressão sobre sua superfície teve a orientação das fibras manipuladas para que sua rigidez fosse maximizada. Nesse problema a complexidade se transferiu do processo de otimização para a análise estrutural. Isso porque apenas um objetivo foi considerado e o número de variáveis manipuladas foi reduzido em relação aos demais exemplos. Em contrapartida, a inclusão da não-linearidade geométrica na análise estrutural introduziu uma grande dificuldade ao problema. Foi inserido também a restrição quanto ao número de lâminas contíguas com a mesma orientação, o que é bastante comum a esse tipo de otimização.

Para que o sucesso do programa na obtenção da solução ótima fosse comprovado, em cada exemplo foram analisadas todas as configurações de estruturas contidas no espaço de resposta. Além disso, foram realizadas séries de otimizações repetidas, com o intuito de avaliar a confiabilidade do algoritmo e sua demanda computacional. Por meio de todas essas avaliações, os três exemplos demonstraram-se bem sucedidos, levando à conclusão de que os objetivos propostos inicialmente foram atingidos. Adicionalmente, o trabalho apresentou estudos a respeito da formulação da função objetivo para os casos que envolviam abordagens multiobjetiva dos problemas. As consequências da adoção de diferentes formulações foram apresentadas, evidenciando a importância dessa questão no sucesso das otimizações. No último exemplo foram realizados testes para demonstrar o impacto que os valores para os parâmetros do AG têm sobre a eficiência do algoritmo. A confiabilidade e a demanda computacional de otimizações com 25 combinações do número máximo de gerações e número de indivíduos na população foram avaliadas. Isso permitiu uma visualização de como esses parâmetros influenciam o processo, além de apontar os valores ideais para o caso estudado.

Tendo em vista o sucesso dos testes apresentados durante o texto, pode-se afirmar que trabalho atingiu seu objetivo, ficando as seguintes sugestões para continuação da pesquisa:

- Paralelização do AG
- Implantação de memória para armazenagem e acesso eficiente dos resultados de análises efetuadas e novamente requisitadas durante o processo de otimização.
- Implantação de genes com valores reais para tratar eficientemente problemas que envolvam otimização da geometria das estruturas.
- Inclusão de análise higrótérmica e dinâmica no programa de elementos finitos.
- Estudo aprofundado da influência dos parâmetros do AG na eficiência e confiabilidade dos processos de otimização.
- Abordagem de estruturas mais complexas, como cascas e placas dotadas de enrijecedores.
- Otimização topológica e de formas
- Combinação de AG com algoritmos baseados em gradientes para reduzir o processo computacional.
- Substituir o elemento finito DKT pelo DKMT ou por outro elemento que considere a teoria de Mindlin.
- Implementar outros critérios de falha para os materiais compósitos laminados.



## REFERÊNCIAS

- ABAQUS, v 6.5-1. **ABAQUS Analysis User's Manual**. ABAQUS Inc. , 2004
- BATHE, K. J. ; HO, L. ; BATOZ, J. A Study of Three-node Triangular Plate Bending Elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 15, p. 1771-1812, 1980
- BATHE, K. J. ; HO, L. A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structures. **Computer & Structures**, vol. 13, p. 673-681, 1981.
- CALLAHAN, K. J. ; WEEKS, G. E. Optimum design of composite laminates using genetic algorithm. **Composites Engineering**, Vol. 2, No. 3, p.149-160. 1992.
- CLOUGH, R. W. ; PENZIEN, J. Dynamics of Structures. McGraw-Hill, 1975.
- DANIEL, I. M. ; ISHAI, O. **Engineering Mechanics of Composite Materials**. Oxford University Press, 1994.
- GID, v 7.2. GiD User Manual, version 7, CIMNE.
- GOLDBERG, D. E. ; **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Addison-Wesley, Reading, MA. 1989.
- GÜRDAL, Z. ; HAFTKA, R. T. ; NAGENDRA, S. Genetic algorithm for the design of laminated composite panels. **SAMPE Journal**, Vol. 30, No. 3, p. 29–35, 1994.
- GÜRDAL, Z. ; HAFTKA, R. T. ; HAJELA, P. **Design and Optimization of Laminated Composite Materials**. Wiley & Sons, 1999.
- HOLLAND. J. H., **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.
- JONES, R. M., **Mechanics of Composite Materials, 2<sup>o</sup>Ed**. Hemisphere, New York, 1999.
- LE RICHE, R ; and HAFTKA, R. T. Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm. **AIAA Journal**, Vol. 31, No. 5, p. 951–956, 1993.
- LE RICHE, R. **Optimization of Composite Structures by Genetic Algorithms**. Ph.D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1994.
- LIAO ; REDDY **An Incremental Total Lagrangian Formulation for General Anisotropic Shell-type Structures**. Research Report. (1987)
- NAGENDRA, S. ; HAFTKA, R. T. ; GÜRDAL, Z. Stacking sequence optimization of simply supported laminates with stability and strain constraints. **AIAA Journal**, Vol. 30, No. 8, p. 2132–2137, 1992.
- NAGENDRA, S. ; HAFTKA, R. T. ; GÜRDAL, Z. Design of a blade stiffened composite panel by genetic algorithm. **Proceedings of the 34th AIAA/ ASME/ASCE/ AHS/ ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, p. 2418–2436, 1993.

NAGENDRA, S. ; JESTIN D. ; GÜRDAL Z. ; HAFTKA R. T. ; WATSON L. T. Improved Genetic Algorithm for the Design of Stiffened Composite Panels. **Computer & Structures**, vol. 58, no. 3, p. 543-555, 1996.

SOREMEKUN, G. A. E. ; GÜRDAL, Z. ; HAFTKA, R. T. ; WATSON L. T. Composite laminate design optimization by genetic algorithm with generalized elitist selection. **Computer & Structures**, vol. 79, p. 131-143, 2001.

SOREMEKUN, G. A. E. **Genetic Algorithms for Composite Laminate Design and Optimization**. Dissertation (Master of Science in Engineering Mechanics) – Polytechnic Institute and State University, Blacksbourg, Virginia – USA. 157 p. 1997.

SZE, K. Y. ; LIU, H. ; LO, S. H. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design* Vol. 40, p. 1551–1569, 2004.

TODOROKI, A. ; HAFTKA, R. T. Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy. *Composite Part B*, 29B, p.277-285, 1998.

YANG, Y. ; SHIEH, M. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA JOURNAL**, vol. 28, no. 12, p. 2110-2116, 1990.

YEOM, C. H. ; LEE, S. W. An Assumed Strain Finite Element Model for Large Deflection Composite shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 28, p. 1749-1768, 1989

ZHANG, Q. ; UM, L. ; WENQI, K. Geometric non-linear analysis of space shell structures using generalized conforming flat shell elements – for space shell structures. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.14, p.941-957, 1998.