

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Miguel Luis Piva**

**LAJES NERVURADAS: ANÁLISE COMPARATIVA DO  
DIMENSIONAMENTO COM AS HIPÓTESES DE LAJE  
MACIÇA DE KIRCHHOFF E ANALOGIA DE GRELHA**

Porto Alegre  
julho 2014

**MIGUEL LUIS PIVA**

**LAJES NERVURADAS: ANÁLISE COMPARATIVA DO  
DIMENSIONAMENTO COM AS HIPÓTESES DE LAJE  
MACIÇA DE KIRCHHOFF E ANALOGIA DE GRELHA**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de  
Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal  
do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Engenheiro Civil

**Orientador: Roberto Domingo Rios**

Porto Alegre  
julho 2014

**MIGUEL LUIS PIVA**

**LAJES NERVURADAS: ANÁLISE COMPARATIVA DO  
DIMENSIONAMENTO COM AS HIPÓTESES DE LAJE  
MACIÇA DE KIRCHHOFF E ANALOGIA DE GRELHA**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, julho de 2014

Prof. Roberto Domingo Rios  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Dra. pelo PPGA/UFRGS  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**Profa. Virgínia Maria Rosito d'Avila Bessa (UFRGS)**  
Dra. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho à minha mãe, Ancila, pelo exemplo de vida e por sempre me apoiar.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, ao Prof. Roberto Domingo Rios, orientador deste trabalho, pelo incentivo, paciência, humildade e conhecimentos repassados ao longo deste.

Agradeço à Profa. Carin Maria Schmitt, pela sua dedicação, profissionalismo e comprometimento com este trabalho.

Agradeço a todos os meus professores do curso de Engenharia Civil, pelo aprendizado, dedicação e excelência no ensino.

Agradeço a toda a minha família, em especial à minha mãe, pelos ensinamentos e valores repassados, os quais serão levados por toda a vida.

Agradeço aos meus amigos, que sempre me incentivaram e compartilharam boas risadas.

Agradeço aos colegas de faculdade, pelo conhecimento compartilhado e por tornar o curso mais fácil e divertido.

Algo só é impossível até que alguém duvide e acabe  
provando o contrário.

*Albert Einstein*

## RESUMO

Este trabalho versa sobre a comparação de dois métodos de dimensionamento de lajes nervuradas em concreto armado, quanto ao momento fletor, esforço cortante e armaduras longitudinal e transversal, para diferentes espaçamentos entre eixos de nervuras. A partir da revisão bibliográfica são apresentadas definições e características das lajes nervuradas, bem como os critérios de dimensionamento exigidos pela Norma de projeto de estruturas de concreto. Para os diferentes vãos de lajes escolhidos são calculados os esforços e armaduras necessárias a partir das hipóteses de Kirchhoff e depois, calculados através do software CAD/TQS®, o qual considera a laje discretizada como uma grelha. São dispostos, ao longo do trabalho, quadros e gráficos com resultados e comparações dos esforços e armaduras resultantes do cálculo através dos modelos propostos. Com isto, percebeu-se que as lajes dimensionadas a partir da analogia de grelha possuem momentos fletores e esforços cortantes superiores aos calculados através das hipóteses de Kirchhoff. Os esforços cortantes se mantiveram com pouca diferença para as duas teorias. Já as diferenças em termos de momentos fletores são consideravelmente grandes, por isso, fez-se uma análise comparativa adicional para a flexão utilizando o método dos elementos finitos. Para este caso, utilizou-se o software CYPECAD®, e notou-se que para os menores espaçamentos entre as nervuras, os momentos fletores se aproximaram daqueles que foram obtidos através das hipóteses de Kirchhoff, enquanto que para espaçamentos maiores os resultados se distanciaram ainda mais dos outros dois métodos.

Palavras-chave: Lajes Nervuradas em Concreto Armado. Espaçamento entre Eixos de Nervuras. Hipóteses de Kirchhoff. Analogia de Grelha. Elementos Finitos.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama das etapas da pesquisa .....	18
Figura 2 – Laje nervurada com nervuras aparentes .....	21
Figura 3 – Laje nervurada com superfície plana .....	21
Figura 4 – Laje nervurada dupla .....	23
Figura 5 – Laje nervurada invertida .....	23
Figura 6 – Laje nervurada normal .....	23
Figura 7 – Coeficientes para cálculo de laje retangular simplesmente apoiada no contorno com carga uniformemente distribuída .....	31
Figura 8 – Fôrma ATEX 600/180 para laje nervurada .....	40
Figura 9 – Fôrma ATEX 900 para laje nervurada .....	41
Figura 10 – Fôrma X 1200 para laje nervurada .....	41
Figura 11 – Planta baixa genérica das lajes estudadas .....	45
Figura 12 – Comparação dos momentos fletores para laje 6,2 m .....	48
Figura 13 – Comparação dos momentos fletores para laje 9,2 m .....	48
Figura 14 – Comparação dos momentos fletores para laje 12,2 m .....	49
Figura 15 – Comparação das armaduras de flexão para laje 6,2 m .....	50
Figura 16 – Comparação das armaduras de flexão para laje 9,2 m .....	51
Figura 17 – Comparação das armaduras de flexão para laje 12,2 m .....	51
Figura 18 – Comparação dos esforços cortantes para laje 6,2 m .....	53
Figura 19 – Comparação dos esforços cortantes para laje 9,2 m .....	53
Figura 20 – Comparação dos esforços cortantes para laje 12,2 m .....	54
Figura 21 – Comparação das armaduras de cisalhamento para laje 6,2 m .....	56
Figura 22 – Comparação das armaduras de cisalhamento para laje 9,2 m .....	56
Figura 23 – Comparação das armaduras de cisalhamento para laje 12,2 m .....	57
Figura 24 – Comparação dos momentos fletores para fôrma ATEX 600 .....	59
Figura 25 – Comparação dos momentos fletores para fôrma ATEX 900 .....	59
Figura 26 – Comparação dos momentos fletores para fôrma X 1200 .....	60



## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Valores mínimos de cargas acidentais .....	27
Quadro 2 – Classes de agressividade ambiental .....	27
Quadro 3 – Taxas mínimas para armadura de flexão .....	42
Quadro 4 – Resumo dos valores obtidos através das hipóteses de laje maciça de Kirchhoff .....	44
Quadro 5 – Resumo dos valores obtidos através da analogia de grelha .....	46
Quadro 6 – Comparação dos momentos fletores .....	47
Quadro 7 – Comparação das armaduras de flexão .....	50
Quadro 8 – Comparação dos esforços cortantes .....	52
Quadro 9 – Comparação das armaduras de cisalhamento .....	55
Quadro 10 – Valores dos momentos fletores .....	58

## LISTA DE SÍMBOLOS

$w$  – deslocamento transversal

$p$  – carga uniformemente distribuída na laje

$D$  – rigidez à flexão da placa

$E$  – módulo de elasticidade do concreto

$h$  – espessura total da laje

$\nu$  – coeficiente de Poisson (aproximadamente 0,2 para o concreto)

$l_x$  – dimensão da laje na direção  $x$

$l_y$  – dimensão da laje no eixo  $y$

$W_c$  – flecha no centro da laje

$M_x$  – momento fletor na direção  $x$  (em torno do eixo  $y$ )

$M_y$  – momento fletor na direção  $y$  (em torno do eixo  $x$ )

$R_x$  – reação de apoio por unidade de comprimento no lado  $l_x$

$R_y$  – reação de apoio por unidade de comprimento no lado  $l_y$

$w_c$  – coeficiente para cálculo da flecha

$m_x$  – coeficiente para cálculo do momento fletor na direção  $x$

$m_y$  – coeficiente para cálculo do momento fletor na direção  $y$

$r_x$  – coeficiente para cálculo da reação no lado  $l_x$

$r_y$  – coeficiente para cálculo da reação no lado  $l_y$

$M_d$  – momento fletor de cálculo

$b_w$  – largura da seção

$x$  – posição da linha neutra

$f_{cd}$  – resistência à compressão de cálculo do concreto

$d$  – altura útil

$A_s$  – área de armadura tracionada

$\sigma_{sd}$  – tensão de cálculo na armadura tracionada

$M_{1d}$  – momento resistente de cálculo proporcionado pela armadura  $A_{s1}$  e mesa comprimida

$M_{2d}$  – momento resistente de cálculo proporcionado pela armadura  $A_{s2}$  e seção retangular

$b_f$  – largura da mesa

$h_f$  – altura da mesa

$A_{s1}$  – área de armadura referente ao momento  $M_{1d}$

$A_{s2}$  – área de armadura referente ao momento  $M_{2d}$

$f_{yd}$  – tensão de cálculo na armadura tracionada

$V_{sd}$  – força cortante solicitante de cálculo

$V_{Rd1}$  – resistência de projeto ao cisalhamento

$V_{Rd2}$  – força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas

$V_{Rd3}$  – força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal

$\tau_{Rd}$  – tensão resistente de cálculo ao cisalhamento

$\kappa$  – coeficiente que depende da porcentagem de elementos da armadura inferior que chegam até o apoio

$\rho_1$  – taxa de armadura

$\alpha_{v2}$  – coeficiente que depende da resistência característica à compressão do concreto

$A_{sw}$  – área de armadura transversal

$s$  – espaçamento entre elementos da armadura transversal

$f_{ywd}$  – tensão na armadura passiva, não superior a 435 MPa

$f_{ctd}$  – resistência à tração de cálculo do concreto

$V_c$  – parcela de força cortante resistida por mecanismos complementares ao modelo em treliça

$V_{sw}$  – parcela de força cortante resistida pela armadura transversal

$V_{c0}$  – valor de referência para  $V_c$

$\alpha$  – ângulo dos estribos em relação a horizontal

$\rho_{sw,min}$  – taxa mínima de armadura transversal

$f_{ywk}$  – resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal

$f_{ct,m}$  – resistência média à tração do concreto

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>2 DIRETRIZES DA PESQUISA</b> .....	16
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA .....	16
2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA .....	16
<b>2.2.1 Objetivo Principal</b> .....	16
<b>2.2.2 Objetivos Secundários</b> .....	16
2.3 DELIMITAÇÕES .....	17
2.4 LIMITAÇÕES .....	17
2.5 DELINEAMENTO .....	17
<b>3 LAJES NERVURADAS</b> .....	20
3.1 CARACTERÍSTICAS .....	20
3.2 UTILIZAÇÃO .....	22
<b>4 MÉTODOS DE CÁLCULO DE LAJES NERVURADAS</b> .....	25
4.1 CRITÉRIOS PARA O DIMENSIONAMENTO .....	25
4.2 HIPÓTESES DE KIRCHHOFF .....	28
<b>4.2.1 Armadura de Flexão</b> .....	32
4.2.1.1 Altura 0,8x menor ou igual a altura da mesa da seção T .....	32
4.2.1.2 Altura 0,8x maior que a altura da mesa da seção T .....	33
<b>4.2.2 Armadura de Cisalhamento</b> .....	34
4.2.2.1 Espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm .....	34
4.2.2.2 Espaçamento entre eixos de nervuras entre 65 e 110 cm .....	35
4.3 ANALOGIA DE GRELHA .....	37
<b>5 DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS E ARMADURAS</b> .....	40
5.1 ESCOLHA DAS CARACTERÍSTICAS DAS LAJES E DOS MATERIAIS .....	40
5.2 CÁLCULO DA ARMADURA MÍNIMA .....	42
<b>5.2.1 Armadura Mínima de Flexão</b> .....	42
<b>5.2.2 Armadura Mínima de Cisalhamento</b> .....	43
5.3 RESULTADOS ATRAVÉS DAS HIPÓTESES DE KIRCHHOFF .....	43
5.4 RESULTADOS ATRAVÉS DA ANALOGIA DE GRELHA .....	44
<b>6 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS</b> .....	47
6.1 COMPARAÇÃO DO MOMENTO FLETOR .....	47
6.2 COMPARAÇÃO DA ARMADURA DE FLEXÃO .....	49
6.3 COMPARAÇÃO DO ESFORÇO CORTANTE .....	52

6.4 COMPARAÇÃO DA ARMADURA DE CISCALHAMENTO .....	54
6.5 ANÁLISE ADICIONAL QUANTO AO MOMENTO FLETOR .....	57
<b>7 ANÁLISE E CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>61</b>
REFERÊNCIAS .....	63



## 1 INTRODUÇÃO

O aprimoramento atual da construção civil brasileira é facilmente observado e, entre os fatores decorrentes deste avanço pode-se destacar o desenvolvimento de novas tecnologias, assim como melhorias nas propriedades físicas do concreto e do aço, os quais são os principais materiais utilizados nesse setor no País. Este cenário moderno conduz a projetos com elementos estruturais mais esbeltos e de maiores vãos livres. Necessita-se, com isto, que sejam propostas soluções estruturais diferentes das convencionais.

Nesse contexto, as lajes nervuradas surgiram como uma alternativa ao uso das lajes maciças, devido à tendência atual de se projetarem estruturas com vãos livres cada vez maiores. Utilizando-se este tipo de laje aliado principalmente às técnicas de protensão, pode-se vencer grandes vãos e reduzir consideravelmente o peso próprio da estrutura. Pelo fato de seu uso ser crescente atualmente, há a importância de um estudo aprofundado sobre este tipo de laje e as maneiras mais adequadas para dimensioná-las, principalmente para vãos consideravelmente grandes.

As lajes nervuradas podem ter seu comportamento estrutural simplificado por certas considerações. Segundo Araújo (2003a, p. 144), a situação mais habitual ocorre quando as nervuras são inferiores e, neste caso, as nervuras funcionam como vigas T para momentos fletores positivos. Entretanto, deve-se ter cuidado especial quando as lajes forem contínuas. Para esta situação, é necessário criar faixas maciças próximas aos apoios intermediários, as quais devem absorver o momento fletor negativo existente nessa região.

Apesar das lajes nervuradas possuírem alturas maiores que as maciças, seu peso próprio é reduzido, em razão de que a zona de tração é substituída por nervuras. Entre essas nervuras podem ser inseridos materiais inertes de pequeno peso próprio ou simplesmente podem ser utilizadas fôrmas plásticas que, quando retiradas, deixam espaços vazios entre as nervuras.

De acordo com a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 67), permite-se que as lajes nervuradas sejam calculadas como lajes maciças de espessura equivalente, quando a distância entre eixos de nervuras não for maior que 110 cm.



Porém, se for ultrapassado este valor, deve-se considerar a mesa como laje maciça apoiada na grelha de vigas.

Portanto, pretende-se com este trabalho comparar os resultados obtidos por dois métodos utilizados no dimensionamento de lajes nervuradas, para diferentes espaçamentos entre nervuras. O cálculo, considerando as hipóteses de Kirchhoff, pode ser feito manualmente com o auxílio de tabelas, já para a analogia de grelha (laje apoiada em vigas) torna-se necessário o uso de uma ferramenta computacional, que neste caso é o *software* CAD/TQS®.

A partir das comparações de esforços e armaduras, avaliou-se a necessidade do uso de outro método de cálculo a fim de balizar os resultados obtidos através das hipóteses de Kirchhoff e analogia de grelha. Então, quando as diferenças de resultados entre as duas teorias foram consideravelmente grandes, utilizou-se também o método dos elementos finitos.

Neste trabalho foi utilizada a NBR 6118/2007, porém cabe destacar que esta Norma teve nova edição em 2014. Esta Norma publicada em 2014 não foi utilizada neste trabalho, tendo em vista que a elaboração deste foi feita durante a vigência da NBR 6118/2007.

## **2 DIRETRIZES DA PESQUISA**

As diretrizes para desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

### **2.1 QUESTÃO DE PESQUISA**

A questão de pesquisa do trabalho é: quais diferenças podem ser observadas nas solicitações e armaduras resultantes do cálculo de lajes nervuradas, ao se comparar a aplicação das hipóteses de laje maciça de Kirchhoff e a analogia de grelha, para diferentes espaçamentos entre nervuras, utilizando, quando necessário, o método dos elementos finitos para balizar os resultados?

### **2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA**

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundários e são descritos a seguir.

#### **2.2.1 Objetivo Principal**

O objetivo principal do trabalho é a comparação dos resultados obtidos pelos métodos de cálculo de lajes nervuradas, um deles utilizando as hipóteses de laje maciça de Kirchhoff e o outro a analogia de grelha, quanto às solicitações e armaduras, para diferentes espaçamentos entre nervuras.

#### **2.2.2 Objetivos secundários**

Os objetivos secundários do trabalho são as descrições do dimensionamento através:

- a) das hipóteses de laje maciça de Kirchhoff;
- b) da analogia de grelha.

## 2.3 DELIMITAÇÕES

O trabalho delimita-se ao estudo de lajes nervuradas, retangulares, com carregamento distribuído e estático.

## 2.4 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho que:

- a) o dimensionamento estrutural de lajes nervuradas através da analogia de grelha é realizado somente utilizando a ferramenta computacional CAD/TQS®;
- b) a análise comparativa se refere apenas às solicitações e áreas de aço necessárias para a flexão e o cisalhamento;
- c) as lajes escolhidas são bidirecionais, isto é, armadas em duas direções.

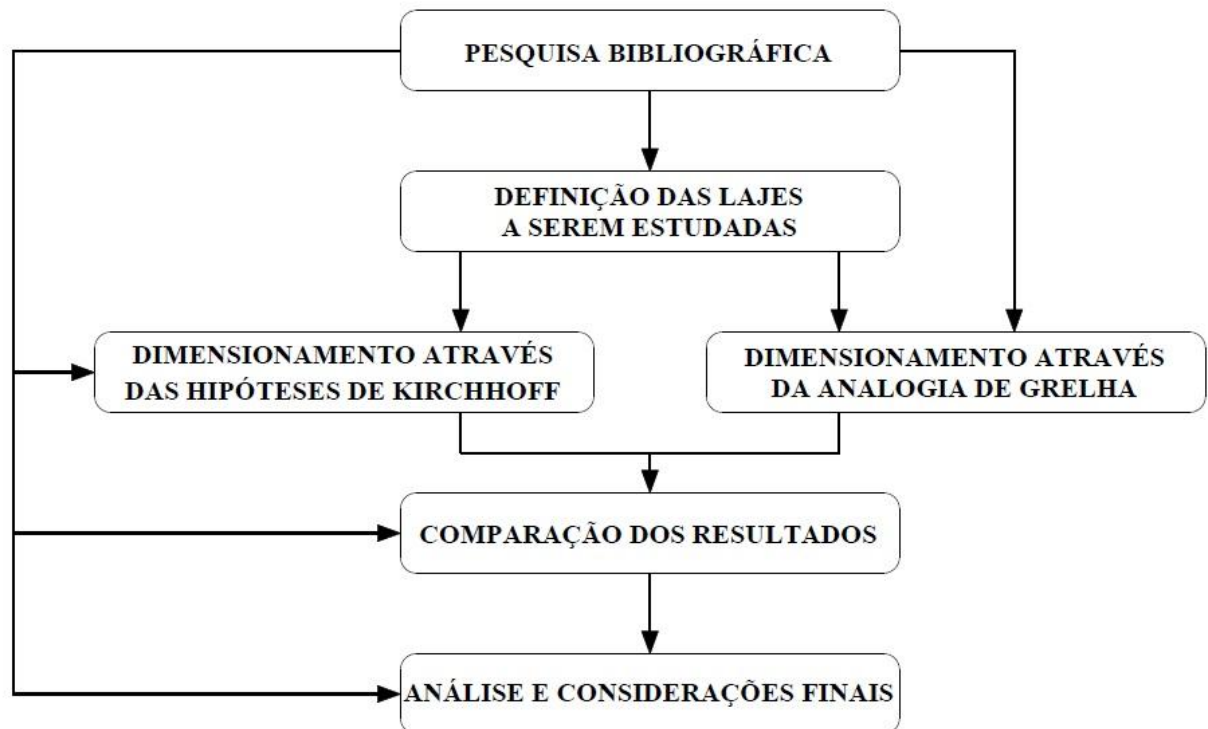
## 2.5 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir, que estão representadas na figura 1, e são descritas nos próximos parágrafos:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) definição das lajes a serem estudadas;
- c) dimensionamento das lajes através dos dois métodos propostos;
- d) comparação dos resultados;
- e) análise e considerações finais.

A **pesquisa bibliográfica**, primeira etapa do trabalho, se estendeu por todo o período de realização deste. Foram utilizados diversos materiais que auxiliam no entendimento do autor sobre o tema lajes nervuradas, dentre eles destacam-se os livros sobre estruturas de concreto armado e metodologias de cálculo, teses de doutorado e Normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas. Primeiramente, foi realizada pesquisa sobre concepção e definição dessas lajes. O passo seguinte consiste na pesquisa dos métodos de cálculo propostos, para posteriormente, serem analisados e comparados os resultados obtidos.

Figura 1 – Diagrama das etapas da pesquisa



(fonte: elaborado pelo autor)

Com os resultados provenientes da pesquisa bibliográfica, parte-se para a **definição das lajes a serem estudadas**. Foram definidos os vãos e cargas utilizados, assim como os espaçamentos entre eixos de nervuras e demais dimensões das lajes. As características dos materiais, como as resistências à compressão do concreto e à tração do aço devem ser declaradas. Portanto, nesta etapa foram coletados os dados utilizados no dimensionamento das lajes.

Definidos os parâmetros a serem utilizados, pode-se realizar o **dimensionamento das lajes através dos dois métodos propostos**. Foi fundamental a pesquisa, também nesta etapa, pois ela forneceu informações importantes sobre os procedimentos adotados por esses métodos. O dimensionamento foi feito, primeiramente, considerando as hipóteses de laje maciça de Kirchhoff e, posteriormente, utilizando a analogia de grelha através da ferramenta computacional CAD/TQS®.

Concluído o dimensionamento das lajes em questão e de posse dos resultados obtidos, pode-se fazer a **comparação dos resultados**, definindo-se quais as diferenças observadas nas solicitações e áreas de aço, calculadas através das hipóteses de Kirchhoff e analogia de grelha.

A comparação dos resultados é feita para as solicitações e armaduras de flexão e cisalhamento.

A última etapa deste trabalho caracteriza-se pela **análise e considerações finais**, quando os resultados oriundos das comparações foram analisados. Esta etapa serviu para o fechamento do trabalho, expondo os resultados obtidos a partir de seu desenvolvimento.

### 3 LAJES NERVURADAS

Fusco (1995, p. 237) define as lajes de concreto armado como placas, sujeitas, na maioria das vezes, à esforços normais ao seu plano médio. Araújo (2003b, p. 7) indica uma classificação das lajes quanto à armação, podendo ser armadas em cruz, isto é, em duas direções, ou em uma direção apenas. As primeiras são aquelas em que o maior vão não é superior a duas vezes o menor vão. Já as lajes armadas em uma direção devem satisfazer a condição de seu vão maior ser superior a duas vezes seu vão menor. Essa classificação, de acordo com a armação das lajes, pode ser estendida para as lajes nervuradas.

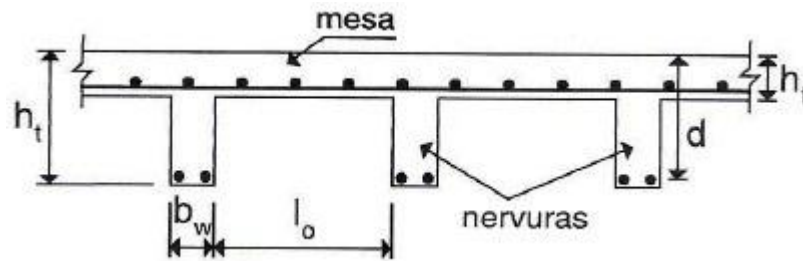
O crescimento da construção civil, aliado a necessidade de racionalização com minimização de custos e prazos, faz das lajes nervuradas uma alternativa cada vez mais utilizada. Nas lajes nervuradas, assim como nos demais tipos de lajes, a mesa de concreto resiste aos esforços de compressão, enquanto que as armaduras aos esforços de tração. A ligação da mesa com a armadura é feita pela nervura de concreto (BOCCHI JÚNIOR, 1995, p. 1).

Neste trabalho, são estudadas as lajes nervuradas e o seu dimensionamento. Portanto, nos próximos itens deste capítulo são apresentadas algumas características e definições relativas às lajes nervuradas. Também são descritas as situações mais habituais de sua utilização, assim como as tipologias mais comuns de lajes nervuradas.

#### 3.1 CARACTERÍSTICAS

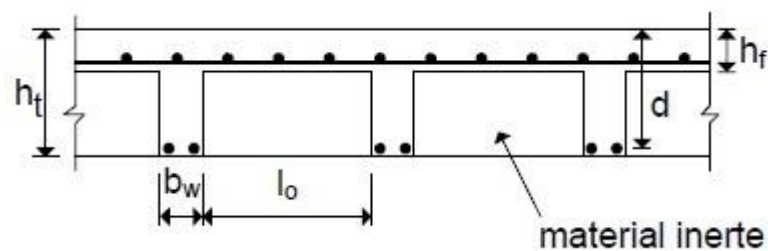
A NBR 6118 indica que “Lajes nervuradas são as lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos está localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte.” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 86). A figura 2 mostra uma seção típica de laje nervurada na qual as nervuras estão aparentes. Para isto, o maciço de concreto é substituído por nervuras intercaladas por espaços vazios. Na figura 3, os espaços vazios existentes entre as nervuras são preenchidos com material inerte, cujo peso específico é significativamente menor que o do concreto. Neste caso, a superfície inferior da laje torna-se plana.

Figura 2 – Laje nervurada com nervuras aparentes



(fonte: ARAÚJO, 2003a, p. 144)

Figura 3 – Laje nervurada com superfície plana



(fonte: ARAÚJO, 2003a, p. 143)

Segundo Araújo (2003a, p. 143):

Para reduzir o peso próprio da estrutura, pode-se adotar a solução em lajes nervuradas. Nessas lajes, a zona de tração é constituída por nervuras entre as quais podem ser colocados materiais inertes, de forma a tornar plana a superfície externa. Os materiais inertes devem ter peso específico reduzido [...]. Alternativamente, os espaços entre as nervuras podem ser preenchidos com formas industrializadas que, após sua retirada, deixam à mostra as nervuras da laje.

Araújo (2003a, p. 147) explica que “[...] se as nervuras apresentam espaçamentos diferentes nas duas direções, a laje é ortotrópica e não mais isotrópica, como se admite para as lajes maciças. O mesmo ocorre quando as nervuras possuem dimensões diferentes nas duas direções.”.

De acordo com Araújo (2003a, p. 144):

Em geral, as lajes nervuradas exigem uma altura  $h_t$  cerca de 50% superior à que seria necessária para as lajes maciças. Entretanto, o peso próprio da laje nervurada (e o consumo de concreto) é inferior ao da laje maciça, resultando em uma solução mais econômica para vãos acima de 8 metros, aproximadamente.

## 3.2 UTILIZAÇÃO

Segundo Araújo (2003b, p. 2):

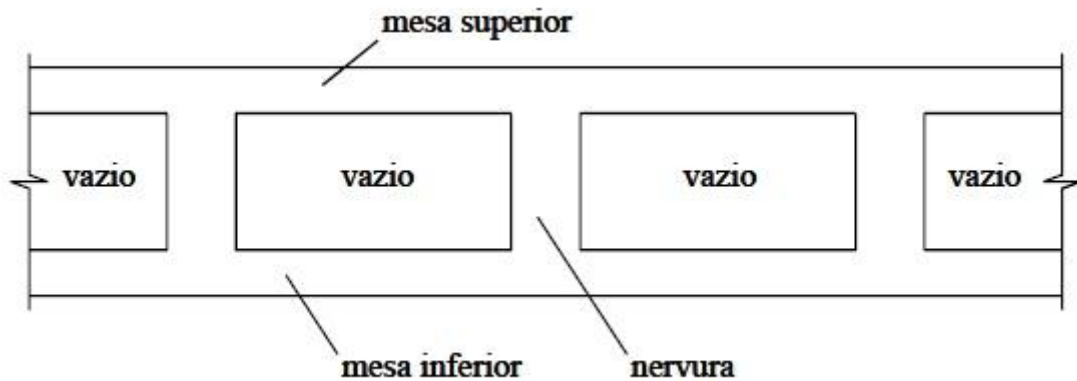
As lajes nervuradas são empregadas para vencer grandes vãos, geralmente superiores a 8 m, sendo constituídas por nervuras, onde são colocadas as armaduras longitudinais de tração. Dessa maneira, consegue-se uma redução do peso próprio da laje, já que se elimina uma parte do concreto que ficaria na zona tracionada, caso fosse adotada a solução em laje maciça. Neste caso, as nervuras ficam aparentes, a menos que a face inferior da laje seja revestida com um forro. Alternativamente, o espaço entre as nervuras pode ser preenchido com algum material inerte de baixo peso específico, para tornar plana a superfície inferior da laje.

De acordo com Silva (2005, p. 64), é comum que as lajes nervuradas moldadas no local sejam classificadas pela posição das nervuras na seção transversal e a quantidade das mesas utilizadas. Estas lajes são então divididas em três tipos: dupla, invertida e normal (direta).

As lajes nervuradas duplas são aquelas que possuem nervuras situadas entre duas mesas de concreto. Entre as mesas inferior e superior podem ser colocados materiais inertes ou utilizadas fôrmas, as quais são perdidas após a concretagem. Este tipo de laje está sendo pouco utilizado, já que é de difícil construção. Nas lajes nervuradas invertidas as nervuras se situam na parte superior e a mesa na inferior. Geralmente, os espaços entre as nervuras permanecem vazios, devido à utilização de fôrmas. Este tipo de laje também está em desuso atualmente, por ser de difícil construção. A laje nervurada normal é formada por nervuras inferiores e mesa de concreto superior. Os espaços entre nervuras podem ser ocupados por materiais inertes ou permanecerem vazios, com a utilização de fôrmas industrializadas. Atualmente, este é o tipo de laje com uso mais frequente (SILVA, 2005, p. 64-65). Por ser o tipo de laje mais utilizado, este trabalho tem como foco o estudo de lajes nervuradas normais. Entretanto, os três tipos de lajes nervuradas mencionados anteriormente estão ilustrados nas figuras 4 a 6.

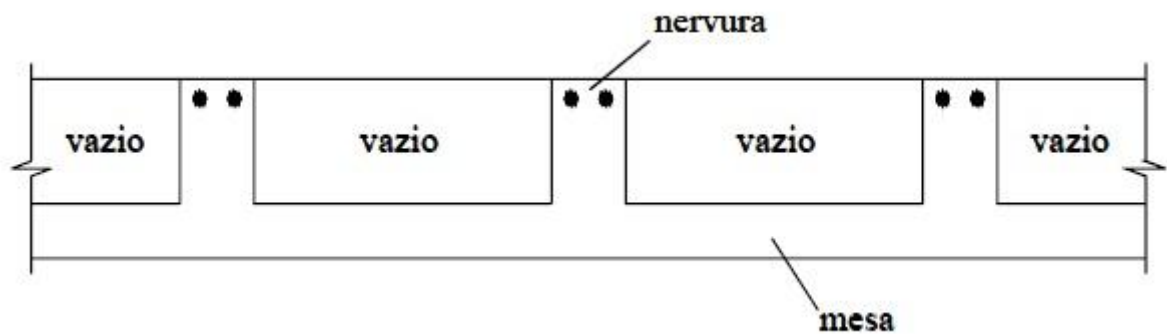


Figura 4 – Laje nervurada dupla



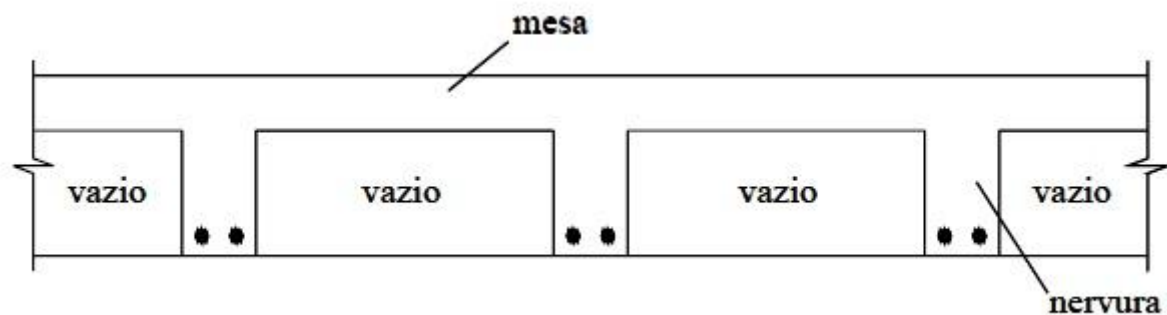
(fonte: SILVA, 2005, p. 64)

Figura 5 – Laje nervurada invertida



(fonte: SILVA, 2005, p. 65)

Figura 6 – Laje nervurada normal



(fonte: SILVA, 2005, p. 65)

A utilização dessas lajes com nervuras inferiores parte do pressuposto que a parte inferior da laje está tracionada. Sendo o concreto um material que não possui grande resistência à tração

(aproximadamente 10% de sua resistência à compressão), pode-se desprezar sua contribuição nessa região da laje. Portanto, os esforços na região inferior da laje devem ser resistidos apenas pelas barras de armadura longitudinal aderidas às nervuras de concreto. Por esta razão, a região inferior não necessita ser maciça de concreto. Já na região superior, faz-se necessária a utilização do concreto para resistir aos esforços de compressão.

De acordo com Bocchi Júnior (1995, p. 9):

[...] recomenda-se, para lajes nervuradas de concreto armado evitar engastes e balanços, visto que, nestes casos têm-se esforços de tração na face superior, onde encontra-se a mesa de concreto, e esforços de compressão na parte inferior, região em que a área de concreto é reduzida. Sabe-se que o concreto é um material que apresenta elevada resistência à compressão e baixa resistência à tração, sendo assim, necessário aumentar-se as seções, ou utilizar-se de uma mesa na parte inferior, implicando em aumento do peso próprio da estrutura e elevação de custos da obra [...]

Segundo Fusco (1995, p. 264), as lajes nervuradas contínuas necessitam de atenção especial. Quando se estuda uma região próxima ao apoio intermediário, apenas as nervuras constituem a seção resistente, sendo que a mesa está na zona tracionada. Por isso, considera-se uma seção retangular para o cálculo, e não mais a seção T utilizada para o meio do vão.

Silva (2005, p. 63) comenta que as lajes nervuradas sofreram grande resistência ao longo do tempo, devido ao elevado consumo de fôrmas necessárias para sua construção. Porém, nos dias atuais, essa visão está modificada. O uso dessas lajes está em grande crescimento, em virtude da criação de novas tecnologias e métodos construtivos. De acordo com Araújo (2003a, p. 143), as lajes que geralmente são utilizadas nos edifícios atuais são maciças. Porém, à medida que os vãos aumentam, sua utilização pode se tornar antieconômica, devido à grande espessura necessária para a laje. Nesse caso, pode-se adotar a solução em lajes nervuradas.

Usualmente, adotam-se nervuras e espaçamentos iguais nas duas direções, já que isto facilita a execução e também o cálculo (ARAÚJO, 2003a, p. 150). Neste trabalho, são analisadas as lajes com essa característica, uma vez que as hipóteses de Kirchhoff são utilizadas.

## 4 MÉTODOS DE CÁLCULO DE LAJES NERVURADAS

Neste capítulo, são apresentados os métodos utilizados para o cálculo das lajes nervuradas, os quais serviram para a análise comparativa. O primeiro deles trata a laje como uma placa, utilizando-se as hipóteses de Kirchoff, enquanto o segundo método considera a laje como uma grelha, por isso se chama analogia de grelha. Para iniciar o capítulo, são apresentados os principais critérios utilizados para dimensionar as lajes nervuradas, segundo as recomendações da NBR 6118/2007 da Associação Brasileira de Normas Técnicas.

Este trabalho trata do comportamento estrutural das lajes nervuradas, sendo estudadas, como já citado, como uma placa ou grelha, dependendo do caso. Esta importante distinção fora mencionada por Bocchi Júnior (1995, p. 26-27):

As lajes nervuradas são constituídas por um conjunto de vigas (nervuras), solidarizadas entre si pela mesa, apresentando um comportamento estático intermediário entre placa e grelha. Os esforços de compressão nas lajes nervuradas devem ser resistidos pela mesa de concreto e parte pela nervura, dependendo da posição da linha neutra, enquanto que os esforços de tração são resistidos pela nervura com a armadura.

### 4.1 CRITÉRIOS PARA O DIMENSIONAMENTO

De acordo com a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 67, 153):

- a) a espessura da mesa, quando não existir tubulações horizontais, deve ser superior ou igual a 3 cm e 1/15 da distância entre nervuras. Para o caso de tubulações de no máximo 12,5 mm, o valor mínimo é 4 cm;
- b) a espessura das nervuras deve ser maior ou igual a 5 cm;
- c) não deve existir armadura de compressão em nervuras de espessura menor que 8 cm;
- d) os estribos, quando necessários, não devem ter espaçamento superior a 20 cm.

A mesma Norma estabelece algumas condições que devem ser atendidas para o projeto de lajes nervuradas (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 67):

- a) para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm, pode ser dispensada a verificação da flexão da mesa, e para a verificação do cisalhamento da região das nervuras, permite-se a consideração dos critérios de laje;
- b) para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras entre 65 cm e 110 cm, exige-se a verificação da flexão da mesa e as nervuras devem ser verificadas ao cisalhamento como vigas; permite-se essa verificação como lajes se o espaçamento entre eixos de nervuras for até 90 cm e a largura média das nervuras for maior que 12 cm;
- c) para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos de nervuras maior que 110 cm, a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

Considerando as condições acima descritas, pode-se afirmar que, para espaçamento entre eixos de nervuras de no máximo 110 cm, as hipóteses de Kirchhoff podem ser utilizadas. Considerando espaçamento superior a este valor, as hipóteses não são mais válidas, sendo necessário considerar a mesa como laje apoiada na grelha de vigas.

Segundo a NBR 6118, o cálculo de esforços solicitantes para as lajes nervuradas bidirecionais pode ser feito com os mesmos critérios utilizados para lajes maciças. Já as lajes unidirecionais devem ser calculadas segundo a direção das nervuras e desprezar a rigidez transversal e à torção (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 86).

Ressalta-se, neste ponto, que nesse trabalho as mesmas hipóteses são consideradas válidas para espaçamento superior a 110 cm, para que se possa realizar a comparação com os resultados obtidos através do método da analogia de grelha, recomendado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas.

Um dado importante a considerar no cálculo, é a carga acidental mínima. De acordo com a NBR 6120, carga acidental é aquela que atua na estrutura, variando ao longo do tempo e geralmente é associada à movimentação de pessoas, móveis, carros e outros materiais diversos (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1980, p. 1). Alguns valores definidos por esta Norma são apresentados no quadro 1.

As estruturas de concreto armado estão submetidas à agressividade do ambiente no qual elas estão expostas. A NBR 6118 comenta que a agressividade do meio ambiente está ligada a fatores físicos e químicos atuantes nas estruturas (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 16). Sua classificação está apresentada no quadro 2.

Quadro 1 – Valores mínimos de cargas acidentais

LOCAL		CARGA (KN/m <sup>2</sup> )
Edifícios Residenciais	Dormitórios, sala, copa, cozinha e banheiro	1,5
	Despensa, área de serviço e lavanderia	2
Escolas	Anfiteatro, corredores e salas de aula	3
Escritório	Salas de uso geral e banheiro	2
Garagens e estacionamento	Para veículos de passageiros ou semelhantes com carga máxima de 25 KN por veículo	3
Ginásio de esportes		5
Lojas		4

(fonte: adaptado de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1980, p. 3-4)

Quadro 2 – Classes de agressividade ambiental

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana <sup>1), 2)</sup>	Pequeno
III	Forte	Marinha <sup>1)</sup>	Grande
		Industrial <sup>1), 2)</sup>	
IV	Muito forte	Industrial <sup>1), 3)</sup>	Elevado
		Respingos de maré	

<sup>1)</sup> Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

<sup>2)</sup> Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) em: obras em regiões de clima seco, com umidade relativa do ar menor ou igual a 65%, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos, ou regiões onde chove raramente.

<sup>3)</sup> Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 16)

## 4.2 HIPÓTESES DE KIRCHHOFF

Segundo Araújo (2003a, p. 147):

Uma vez obedecidas as prescrições da NBR-6118 [(ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003)], o cálculo dos esforços na laje nervurada pode ser feito como se a mesma fosse uma laje maciça de espessura equivalente. Isto é permitido porque, nos casos correntes de pisos de edifícios sujeitos a cargas distribuídas de valor moderado, as espessuras mínimas exigidas são suficientes para conferir à mesa uma rigidez capaz de assegurar o seu funcionamento conjunto com as nervuras. Dessa forma, ficam restabelecidas as hipóteses da teoria de placas de Kirchhoff, o que permite substituir a laje nervurada por uma laje maciça de mesma rigidez à flexão.

Araújo (2003a, p. 147) comenta que “Nos casos de cargas distribuídas elevadas ou de cargas concentradas importantes, é necessário adotar espessuras superiores às mínimas recomendadas.”.

Szilard<sup>1</sup> (1974 apud ARAÚJO, 2003b, p. 37), Timoshenko e Woinowsky-Krieger<sup>2</sup> (1970 apud ARAÚJO, 2003b, p. 37), descrevem as hipóteses básicas na teoria de placas de Kirchhoff:

- a) o material é elástico linear, homogêneo e isotrópico;
- b) as espessuras e rotações da superfície deformada são pequenas;
- c) as deflexões são pequenas e perpendiculares ao plano indeformado inicial;
- d) as tensões normais são pequenas, de modo que possam ser desprezadas;
- e) as seções planas permanecem planas após a deformação, isto é, considera-se a hipótese de Bernoulli.

As hipóteses acima descritas permitem o desenvolvimento da equação diferencial de placas, muito utilizada para o cálculo de lajes maciças. Tendo em vista que não é objetivo deste trabalho a dedução da equação, apenas pontos fundamentais ao entendimento do leitor são comentados.

---

<sup>1</sup> SZILARD, R. **Theory and Analysis of Plates**: classical and numerical methods. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

<sup>2</sup> TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. New York: McGraw-Hill, 1970.

Araújo (2003b, p. 42) explica que “A equação diferencial da placa é obtida considerando-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal ( $dx dy$ ) tomado em uma posição genérica no plano da placa.”. As faces do elemento infinitesimal estão submetidas à ação de momentos fletores, torçores e esforços cortantes nas duas direções do plano considerado.

De acordo com Araújo (2003b, p. 43-44), a partir da aplicação do equilíbrio de momentos em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , e do equilíbrio de forças na direção  $z$  (perpendicular à placa), obtém-se a chamada equação diferencial da placa, dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (\text{equação 1})$$

Onde:

$w$  = deslocamento transversal;

$p(x, y)$  = carga distribuída uniformemente na placa;

$D$  = rigidez à flexão da placa.

Segundo Araújo (2003b, p. 41), a rigidez à flexão é dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{fórmula 1})$$

Onde:

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal do concreto;

$h$  = espessura da placa;

$\nu$  = coeficiente de Poisson do concreto.

Araújo (2003b, p. 49) comenta que “A solução exata da equação diferencial da placa somente pode ser obtida para uns poucos casos particulares. Nos casos mais gerais de carregamento e condições de contorno, as soluções são encontradas adotando-se expansões em série de Fourier.”.

Existem diversas tabelas para o cálculo de esforços e reações de apoio. Porém, ocorrem algumas diferenças entre as tabelas, devido ao valor adotado para o coeficiente de Poisson e aproximações no truncamento das séries de Fourier (ARAÚJO, 2003b, p. 55-56). Segundo Carvalho (1994, p. 19), o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) tem forte influência nos resultados de esforços e deslocamentos. Considerando uma variação de  $\nu = 0,0$  a  $0,4$ , observa-se uma variação da ordem de 16% na flecha e de 40% nos momentos fletores. Por isso, é importante conhecer o valor de  $\nu$  quando se trabalha com tabelas. Cabe destacar que a variação usual deste coeficiente, para o concreto, é de apenas  $\nu = 0,15$  a  $0,25$ .

Neste trabalho, são utilizadas as tabelas disponibilizadas por Araújo (2003b, p. 285-290), as quais foram adaptadas de Kalmanok<sup>3</sup> (1961 apud ARAÚJO, 2003b, p. 56), considerando-se o coeficiente de Poisson igual a 0,2. As tabelas ajustadas fornecem as reações de apoio uniformemente distribuídas, enquanto Kalmanok adotava valores totais para as reações.

As tabelas permitem calcular os momentos fletores positivo e negativo, o momento de torção nos apoios da laje, as reações de apoio, bem como a flecha no centro da laje. Cada tabela corresponde a diferentes condições de apoio, submetidas a uma carga  $p$  uniformemente distribuída. Para acessar os valores da tabela, deve-se calcular a relação entre os vãos da laje. A figura 7 ilustra um exemplo de tabela para cálculo de laje.

Obtidos os coeficientes, pode-se utilizar as fórmulas 2 a 4 para cálculo de momentos, reações de apoio e flechas:

$$W_c = 0,001w_c \frac{pl_y^4}{D} \quad (\text{fórmula 2})$$

$$M_x = 0,001m_x pl_y^2; M_y = 0,001m_y pl_y^2 \quad (\text{fórmula 3})$$

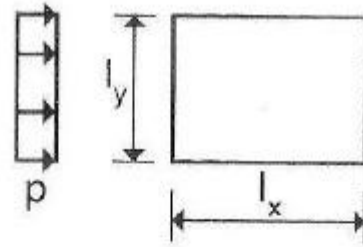
$$R_x = 0,001r_x pl_y; R_y = 0,001r_y pl_y \quad (\text{fórmula 4})$$

---

<sup>3</sup> KALMANOK, A. S. **Manual Para Cálculo de Placas**. Montevideo: Inter Ciencia, 1961.



Figura 7 – Coeficientes para cálculo de laje retangular simplesmente apoiada no contorno com carga uniformemente distribuída



$l_y/l_x$	$w_c$	$m_x$	$m_y$	$m_{xy}$	$r_x$	$r_y$
<b>1,00</b>	4,06	44,2	44,2	37,1	250	250
<b>0,95</b>	4,51	44,7	48,3	39,1	260	253
<b>0,90</b>	4,98	45,0	52,8	41,0	270	256
<b>0,85</b>	5,48	44,9	57,6	42,8	281	259
<b>0,80</b>	6,03	44,6	62,7	44,6	291	261
<b>0,75</b>	6,62	44,2	68,3	46,3	303	263
<b>0,70</b>	7,26	43,5	74,3	47,9	315	265
<b>0,65</b>	7,94	42,3	80,5	49,4	326	266
<b>0,60</b>	8,65	40,7	86,9	50,6	340	267
<b>0,55</b>	9,38	38,8	93,4	51,8	353	268
<b>0,50</b>	10,13	36,7	100,0	52,8	366	269

(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003b, p. 285)

Onde:

$W_c$  = flecha no centro da laje;

$M_x, M_y$  = momentos positivos no centro da laje nas direções dos vãos  $l_x$  e  $l_y$ , respectivamente;

$R_x, R_y$  = reações de apoio por unidade de comprimento nos lados  $l_x$  e  $l_y$ , respectivamente;

$w_c, m_x, m_y, r_x, r_y$  = coeficientes obtidos das tabelas de cálculo das lajes.

Quando algum lado for engastado, os parâmetros acima mencionados recebem ainda o subscrito “e”. Por exemplo,  $R_{xe}$  é a reação de apoio no lado  $l_x$  engastado.

De acordo com Araújo (2003a, p. 150), “Conhecidos os momentos por nervura, calcula-se a armadura longitudinal através do dimensionamento à flexão simples das seções T.”. Para obter os momentos por nervura, basta multiplicar os momentos por metro pelo espaçamento entre eixos de nervuras.

Araújo (2003a, p. 150) comenta que nos casos usuais de utilização de lajes nervuradas pode-se considerar que a largura efetiva da mesa é igual ao espaçamento entre eixos das nervuras. Sendo assim, este fato é importante no momento do dimensionamento da seção T.

Analogamente às considerações que foram feitas para obtenção dos momentos por nervura, pode-se obter as reações em cada nervura multiplicando as reações por metro pelo espaçamento entre eixos de nervuras. Esses valores devem ser verificados quanto à resistência ao esforço cortante (ARAÚJO, 2003a, p. 150-151).

### 4.2.1 Armadura de Flexão

Segundo Bastos (2010, p. 53), no estudo de seções T com a utilização do diagrama retangular simplificado para a distribuição de tensões de compressão no concreto observam-se dois casos particulares, em função da posição da linha neutra ( $x$ ). O primeiro quando a altura  $0,8x$  é menor ou igual a altura da mesa da seção T. No segundo caso, quando  $0,8x$  é superior a altura da mesa da seção. Esses casos são detalhados nos próximos itens.

#### 4.2.1.1 Altura $0,8x$ menor ou igual a altura da mesa da seção T

Quando a altura  $0,8x$  do diagrama retangular simplificado é menor ou igual a altura da mesa da seção T, pode-se calcular essa seção como se fosse retangular, porém considerando a largura da mesa (BASTOS, 2010, p. 53).

As fórmulas para resolução de uma seção retangular são dadas por Bastos (2010, p. 10-11):

$$M_d = 0,68b_w x f_{cd} (d - 0,4x) \quad (\text{fórmula 5})$$

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} (d - 0,4x)} \quad (\text{fórmula 6})$$

Onde:

$M_d$  = momento fletor de cálculo;

$b_w$  = largura da seção;

$x$  = posição da linha neutra;

$f_{cd}$  = resistência à compressão de cálculo do concreto;

$d$  = altura útil;

$A_s$  = área de armadura tracionada;

$\sigma_{sd}$  = tensão de cálculo na armadura tracionada.

As fórmulas 5 e 6 permitem o dimensionamento à flexão de seções T, considerando que apenas a mesa está comprimida e, portanto, o restante da seção está tracionada. Este é o caso mais comum que ocorre na prática e usualmente as variáveis a serem determinadas são a posição da linha neutra ( $x$ ) e a área de armadura tracionada ( $A_s$ ).

#### 4.2.1.2 Altura 0,8x maior que a altura da mesa da seção T

Quando a altura 0,8x é superior a altura da mesa da seção T, a região comprimida é diferente da retangular. Portanto, devem-se formular equações diferentes das já utilizadas. Deve-se considerar a seção comprimida composta pela mesa e por uma parte da seção retangular (BASTOS, 2010, p. 54).

Segundo Bastos (2010, p. 55-56), a seção T deve ser dividida em duas parcelas, as quais geram dois momentos fletores, que somados equivalem ao momento total. Para cada um desses momentos, existe uma área de armadura tracionada, que devem ser somadas para obter a área de armadura total:

$$M_{1d} = (b_f - b_w)h_f 0,85f_{cd} (d - 0,5h_f) \quad (\text{fórmula 7})$$

$$M_{2d} = 0,68b_w x f_{cd} (d - 0,4x) \quad (\text{fórmula 8})$$

$$A_{s1} = \frac{M_{1d}}{f_{yd} (d - 0,5h_f)} \quad (\text{fórmula 9})$$

$$A_{s2} = \frac{M_{2d}}{f_{yd}(d - 0,4x)} \quad (\text{fórmula 10})$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (\text{fórmula 11})$$

Onde:

$M_{1d}$  = momento resistente de cálculo proporcionado pela mesa comprimida;

$M_{2d}$  = momento resistente de cálculo proporcionado pela seção retangular;

$b_f$  = largura da mesa;

$b_w$  = largura da seção retangular;

$h_f$  = altura da mesa;

$x$  = posição da linha neutra;

$d$  = altura útil;

$f_{cd}$  = resistência à compressão de cálculo do concreto;

$A_{s1}$  = área de armadura referente ao momento  $M_{1d}$ ;

$A_{s2}$  = área de armadura referente ao momento  $M_{2d}$ ;

$A_s$  = área total de armadura tracionada;

$f_{yd}$  = tensão de cálculo na armadura tracionada.

## 4.2.2 Armadura de Cisalhamento

A verificação da necessidade de armadura de cisalhamento deve ser feita de acordo com o valor do espaçamento entre eixos de nervuras.

### 4.2.2.1 Espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm

De acordo com a NBR 6118, para esta situação, pode-se verificar o cisalhamento das nervuras considerando os critérios de laje (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 67). Segundo a mesma Norma, não é necessária armadura transversal quando a força cortante de cálculo for menor ou igual à resistência de projeto ao cisalhamento (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 143):

$$V_{Sd} \leq V_{Rd1} \quad (\text{equação 2})$$

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \kappa(1,2 + 40\rho_1) + 0,15\sigma_{cp}] b_w d \quad (\text{fórmula 12})$$

Onde:

$V_{Sd}$  = força cortante solicitante de cálculo;

$V_{Rd1}$  = resistência de projeto ao cisalhamento;

$\tau_{Rd}$  = tensão resistente de cálculo do concreto ao cisalhamento;

$$\tau_{Rd} = 0,25f_{ctd};$$

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c;$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w d}, \text{ não maior que } |0,02|;$$

$\kappa = 1$  para elementos nos quais 50% da armadura inferior não chega até o apoio ou

$\kappa = |1,6 - d|$ , para os demais casos, não sendo menor que 1, com  $d$  em metros;

$A_{s1}$  = área da armadura de tração que se estende até não menos que  $d + l_{b,nec}$ ;

$b_w$  = largura mínima da seção;

$d$  = altura útil considerada;

$\sigma_{cp}$  = parcela devida à protensão.

Tendo em vista que a protensão não é escopo deste trabalho, o valor de  $\sigma_{cp}$  na fórmula 12 foi considerado nulo.

#### 4.2.2.2 Espaçamento entre eixos de nervuras entre 65 e 110 cm

De acordo com a NBR 6118, para esta situação, deve-se verificar o cisalhamento das nervuras considerando os critérios de viga (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 67). Ainda segundo a mesma Norma, um elemento é resistente estruturalmente quando (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 121):

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (\text{equação 3})$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} \quad (\text{equação 4})$$

Onde:

$V_{Sd}$  = força cortante solicitante de cálculo;

$V_{Rd2}$  = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas;

$V_{Rd3}$  = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal.

Considerando o modelo de cálculo I, em que as diagonais comprimidas estão inclinadas de  $45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, a NBR 6118 demonstra que as forças resistentes de cálculo são (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 122):

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_{v2} f_{cd} b_w d \quad (\text{fórmula 13})$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (\text{fórmula 14})$$

Onde:

$$\alpha_{v2} = (1 - f_{ck} / 250);$$

$$V_{sw} = (A_{sw} / s) 0,9 d f_{ywd} (\sin \alpha + \cos \alpha);$$

$V_c = 0$  para elementos estruturais tracionados quando a linha neutra se situa fora da seção;

$V_c = V_{c0}$  na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;

$V_c = V_{c0} (1 + M_o / M_{Sd,máx}) \leq 2V_{c0}$  para flexo-compressão;

$$V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d;$$

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c;$$

$\alpha$  = ângulo de inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural.

De acordo com a NBR 6118, quando o espaçamento entre eixos de nervuras for até 90 cm e a largura média das nervuras maior que 12 cm, pode-se verificar o cisalhamento conforme os critérios de lajes, expostos no item 4.2.2.1 deste trabalho (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 67).

Pode o leitor perguntar qual metodologia utilizar para espaçamento entre eixos de nervuras superior a 110 cm. Como já foi mencionado anteriormente, a Associação Brasileira de Normas Técnicas sugere que, para esta situação, a mesa da laje seja projetada numa grelha de vigas, evitando-se, portanto, calcular a laje nervurada como uma laje maciça. Porém, tratando-se este trabalho de uma comparação de resultados de dimensionamento, se faz necessária a verificação do cisalhamento através de algum critério. O mais prudente é a consideração dos critérios de viga, se estendendo para espaçamentos superiores a 110 cm.

### 4.3 ANALOGIA DE GRELHA

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger<sup>4</sup> (1959 apud SILVA 2005, p. 164), o procedimento da analogia de grelha foi utilizado, pela primeira vez, por Marcus, em 1932, na tentativa de obter os esforços de placas com bordas rígidas que não se deslocavam na vertical. O processo utilizado considerava que a laje seria representada por uma malha de vigas, chamada de grelha equivalente. A ideia inovadora foi estendida para o cálculo de lajes maciças, com ou sem vigas, e lajes nervuradas.

Segundo Carvalho (1994, p. 16, 20), as considerações da analogia de grelha são de fácil aplicação e são úteis para a determinação de esforços e deslocamentos em estruturas de edifícios. O método da analogia de grelha consiste em considerar a laje como uma malha equivalente de vigas.

Araújo (2003a, p. 147) salienta, assim como indica a NBR 6118, que “Quando o espaçamento entre eixos de nervuras for maior que 110 cm, a mesa deve ser projetada como uma laje maciça apoiada na grelha de vigas.”. Bocchi Júnior (1995, p. 30) comenta que:

A grelha pode ser definida como uma estrutura plana, a qual recebe ação normal ao seu plano. Em sua análise estarão envolvidos apenas três esforços internos e consequentemente três deformações provocadas pelas ações previstas. Os esforços internos presentes são: um esforço cortante normal ao plano da grelha, e um momento fletor nesse plano, esse momento fletor pode ser considerado como composto de duas componentes, uma de flexão, normal ao eixo da barra, e uma de torção, axial à barra.

---

<sup>4</sup> TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. New York: McGraw Hill, 1959.

Segundo Bocchi Júnior (1995, p. 29-30), a teoria das grelhas obteve grande sucesso devido ao uso de programas de computador. A grande dificuldade do método era o alto grau de hiperasticidade e deslocabilidade das grelhas, superados com o avanço da informática. Carvalho (1994, p. 20) cita que a grelha pode ser resolvida através da utilização de programas de computador, sendo eficientes para resolver pavimentos com grandes dimensões em planta, com contornos irregulares, grandes aberturas internas, lajes com e sem vigas.

Carvalho (1994, p. 20) ainda indica que:

As cargas distribuídas se dividem entre os elementos da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada elemento. Podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo dos elementos ou mesmo, dentro de certa aproximação, concentradas nos nós. As cargas concentradas da estrutura devem ser aplicadas nos nós, considerando-se, quando a posição das mesmas não coincidir com um nó, valores equivalentes de carga nos nós próximos.

Segundo Carvalho (1994, p. 22-23), o maior inconveniente em representar uma placa com uma grelha equivalente de vigas é a desconsideração da deformação transversal das barras, que é a principal característica presente em uma placa. Desta forma, há uma diferença nos resultados de esforços e deslocamentos, pois o coeficiente de Poisson age de forma diferente na teoria de placa. Para uma viga isolada, o coeficiente de Poisson não influencia nos deslocamentos, entretanto na grelha, este valor altera os deslocamentos. O aumento do coeficiente provoca uma diminuição nos deslocamentos da placa, entretanto, causa um aumento nas flechas da grelha.

Segundo Silva (2005, p. 164):

Dividindo uma laje ou mesmo um pavimento em um número adequado de elementos (barras da grelha equivalente), é possível obter por este processo soluções para praticamente qualquer geometria definida; a exemplo do método dos elementos finitos, este processo possibilita que se faça a análise integrada do pavimento, levando-se em consideração a influência da flexibilidade dos apoios e da rigidez à torção, tanto das lajes como das vigas, sendo ainda possível incluir na análise a não linearidade física do concreto armado.

Quando a determinação dos esforços e deslocamentos é feita através da teoria das grelhas, considera-se toda a estrutura resistente às solicitações, enquanto que no cálculo de vigas isoladas tem-se apenas uma direção como resistente. Devido a este fato, as vigas apresentam maiores esforços solicitantes e maiores dimensões, aumentando o peso próprio da estrutura. A transferência de ações deve ser no plano da laje e as nervuras devem ter rigidezes



semelhantes, pois se as nervuras em uma direção são muito mais rígidas que as outras, elas absorvem maiores valores de esforços solicitantes e, conseqüentemente, os custos são maiores (BOCCHI JÚNIOR, 1995, p. 30-31).

Silva (2005, p. 166) explica que:

Para aplicar o processo de grelha equivalente na análise das lajes nervuradas de concreto armado bidirecionais (armadas em duas direções) é necessário que as nervuras e as vigas sejam substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtendo-se assim uma grelha equivalente que passa a representar o pavimento. As características geométricas que devem ser consideradas para as barras da grelha equivalente são de dois tipos: as do elemento que representa as nervuras e as do elemento que representa as vigas; normalmente adota-se a seção em forma de “T” para o elemento que representa as nervuras, e retangular para àquele que representa as vigas do pavimento.

De acordo com Silva (2005, p. 164), as cargas distribuídas na laje são transferidas para os elementos da grelha, segundo a área de influência de cada um. Se existirem ações concentradas, estas devem ser aplicadas aos nós da grelha. Caso a posição dessas ações não coincida com um nó, deve-se ajustar a malha para que haja a coincidência.

## 5 DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS E ARMADURAS

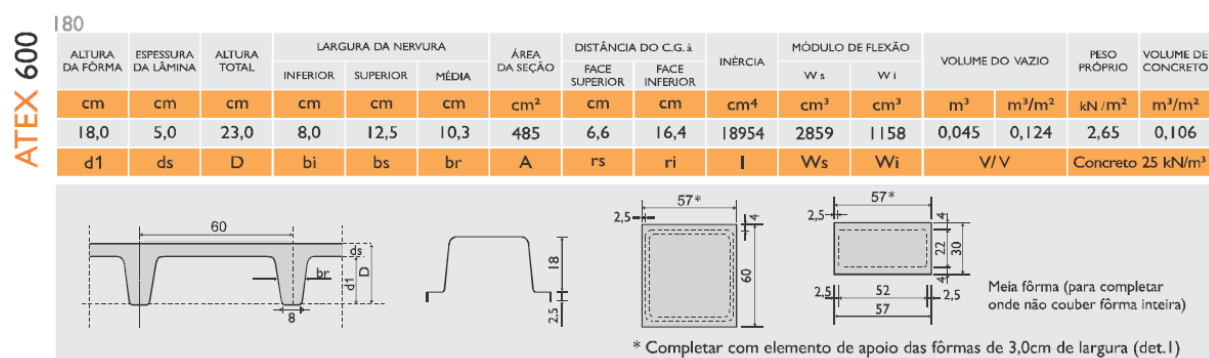
Neste capítulo são apresentados os resultados em termos de momento fletor e esforço cortante, assim como as armaduras necessárias obtidas no cálculo das lajes nervuradas, em função dos vãos e espaçamentos entre eixos de nervuras.

### 5.1 ESCOLHA DAS CARACTERÍSTICAS DAS LAJES E DOS MATERIAIS

Inicialmente, foi definido que as lajes têm vãos de 6,2 m x 6,2 m, 9,2 m x 9,2 m e 12,2 m x 12,2 m. Também foram escolhidos os espaçamentos entre eixos de nervuras em 60 cm, 90 cm e 120 cm. Combinando-se essas duas variáveis, obtém-se 9 casos que foram estudados.

Para escolher as fôrmas que seriam utilizadas, escolheu-se o catálogo de uma empresa do mercado nacional que fornece fôrmas plásticas para lajes nervuradas. A partir deste catálogo, foram escolhidas as fôrmas ATEX 600/180 e ATEX 900, para espaçamentos entre eixos de nervuras de 60 cm e 90 cm, respectivamente. A fôrma ATEX 900 escolhida tem altura total de 40 cm. Para espaçamento entre eixos de nervuras de 120 cm não existe nenhuma fôrma catalogada, portanto foi necessário propor uma nova fôrma, que foi chamada de X 1200. As 3 fôrmas utilizadas estão ilustradas nas figuras 8 a 10.

Figura 8 – Fôrma ATEX 600/180 para laje nervurada



(fonte: ATEX DO BRASIL, 2014)

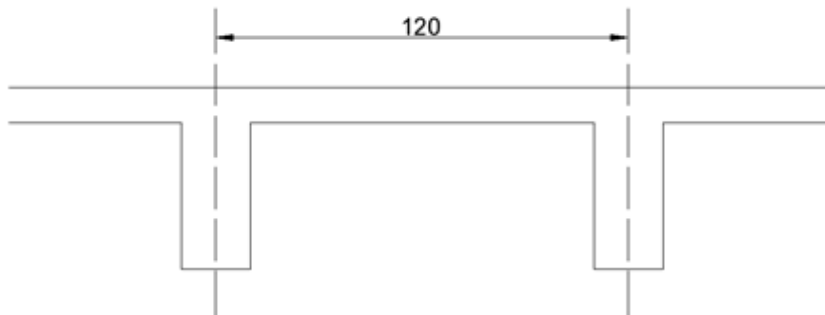
Figura 9 – Fôrma ATEX 900 para laje nervurada

ALTURA DA FÔRMA	ESPESSURA DA LÂMINA	ALTURA TOTAL	LARGURA DA NERVURA			ÁREA DA SEÇÃO	DISTÂNCIA DO C.G. à		INÉRCIA	MÓDULO DE FLEXÃO		VOLUME DO VAZIO		PESO PRÓPRIO	VOLUME DE CONCRETO
			INFERIOR	SUPERIOR	MÉDIA		FACE SUPERIOR	FACE INFERIOR		$W_s$	$W_i$	$m^3$	$m^3/m^2$		
cm	cm	cm	cm	cm	cm	$cm^2$	cm	cm	$cm^4$	$cm^3$	$cm^3$	$m^3$	$m^3/m^2$	$KN/m^2$	$m^3/m^2$
22,5	5,0	27,5				816	8,3	19,2	49561	5971	2581			3,30	0,132
	7,5	30,0	12,5	21,5	17,0	1040	8,7	21,3	65670	7548	3083	0,116	0,143	3,93	0,157
	10,0	32,5				1266	9,5	23,0	84158	8859	3659			4,55	0,182
	5,0	37,5				1043	12,2	25,3	125718	10305	4969			4,33	0,173
32,5	7,5	40,0	12,5	25,5	19,0	1268	12,3	27,7	159245	12947	5749	0,164	0,202	4,95	0,198
	10,0	42,5				1493	12,8	29,7	194449	15191	6547			5,58	0,223
	5,0	47,5				1310	16,5	31,0	255029	15456	8227			5,63	0,225
	7,5	50,0	12,5	29,5	21,0	1536	16,3	33,7	314390	19288	9329	0,203	0,250	6,25	0,250
42,5	10,0	52,5				1761	16,5	36,0	374573	22701	10405			6,88	0,275
	d1	ds	D	bi	bs	br	A	rs	ri	I	Ws	Wi	V/V	Concreto 25 kN/m <sup>3</sup>	

(fonte: adaptado de ATEX DO BRASIL, 2014)

Figura 10 – Fôrma X 1200 para laje nervurada

ALTURA DA FÔRMA	ESPESSURA DA LÂMINA	ALTURA TOTAL	LARGURA DA NERVURA			ÁREA DA SEÇÃO	INÉRCIA	PESO PRÓPRIO
			INFERIOR	SUPERIOR	MÉDIA			
cm	cm	cm	cm	cm	cm	$cm^2$	$cm^4$	$KN/m^2$
42,5	7,5	50	20	20	20	1750	405376	5,1



(fonte: elaborado pelo autor)

Para iniciar o cálculo, algumas considerações foram feitas:

- classe de agressividade ambiental I, sendo o cobrimento de 2 cm;
- concreto com  $f_{ck}$  de 30 MPa e aço CA-50;
- coeficiente de Poisson para o concreto igual a 0,2;

- d) carga permanente de peso-próprio acrescida de 1 KN/m<sup>2</sup> referente ao revestimento, e carga accidental de 4 KN/m<sup>2</sup>;
- e) as lajes são simplesmente apoiadas nos quatro bordos.

## 5.2 CÁLCULO DA ARMADURA MÍNIMA

Para o correto dimensionamento de lajes nervuradas de concreto armado, necessita-se calcular suas armaduras mínimas. Neste trabalho, são calculadas e verificadas as armaduras mínimas para flexão e cisalhamento.

### 5.2.1 Armadura Mínima de Flexão

O cálculo da armadura mínima de flexão é função da resistência característica à compressão do concreto e da área da seção transversal. O quadro 3, mostra as taxas mínimas para a armadura de flexão.

Quadro 3 – Taxas mínimas para armadura de flexão

Forma da seção	Valores de $\rho_{\min}^{1)}$ ( $A_{s,\min}/A_c$ ) %							
	$f_{ck}$ $\omega_{\min}$	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288
T (mesa comprimida)	0,024	0,150	0,150	0,150	0,150	0,158	0,177	0,197
T (mesa tracionada)	0,031	0,150	0,150	0,153	0,178	0,204	0,229	0,255
Circular	0,070	0,230	0,288	0,345	0,403	0,460	0,518	0,575

<sup>1)</sup> Os valores de  $\rho_{\min}$  estabelecidos nesta tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{\min}$  deve ser recalculado com base no valor de  $\omega_{\min}$  dado.

NOTA Nas seções tipo T, a área da seção a ser considerada deve ser caracterizada pela alma acrescida da mesa colaborante.

(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 117)

Para este trabalho, no qual o  $f_{ck}$  é 30 MPa e a seção é do tipo T com mesa comprimida, a taxa mínima de armadura de flexão é 0,15%. Este valor é multiplicado pela área da seção transversal de concreto, para cada fôrma das lajes nervuradas.

### 5.2.2 Armadura Mínima de Cisalhamento

O cálculo da armadura mínima de cisalhamento é função da resistência média à tração do concreto e da resistência característica ao escoamento do aço. A taxa mínima da armadura transversal é calculada através da fórmula 15.

$$\rho_{sw,min} \geq 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (\text{fórmula 15})$$

Onde:

$$f_{ct,m} = 0,3f_{ck}^{2/3};$$

$f_{ywk}$  é a resistência ao escoamento do aço.

Para o caso deste trabalho, em que o  $f_{ck}$  é 30 MPa e o aço da armadura transversal é o CA-50A, a taxa mínima de armadura de cisalhamento é 0,116%. Esse valor é multiplicado pela largura da nervura, para cada cubeta das lajes nervuradas, obtendo-se então a área mínima de aço por centímetro, que é por fim, transformada em área por metro ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ).

## 5.3 RESULTADOS ATRAVÉS DAS HIPÓTESES DE KIRCHHOFF

Para encontrar o momento fletor e esforço cortante atuantes utilizou-se os coeficientes para cálculo de lajes já ilustrados na figura 7, os quais foram substituídos nas fórmulas 3 e 4, juntamente com o vão de cada laje e cargas adotadas.

A partir dos valores obtidos para os esforços, foi feito o cálculo das armaduras longitudinal e transversal necessárias, utilizando-se as fórmulas 5 a 14 já mencionadas. Tendo em vista que a linha neutra se manteve dentro da mesa da seção T, as fórmulas 7 a 11 não foram necessárias. Os resultados estão apresentados no quadro 4.

Quadro 4 – Resumo dos valores obtidos através das hipóteses de laje maciça de Kirchhoff

LAJES CALCULADAS ATRAVÉS DAS HIPÓTESES DE KIRCHHOFF							
Ly x Lx (m x m)	Fôrma	Momento (KNm/nerv)	As (cm <sup>2</sup> )	As,min (cm <sup>2</sup> )	Cortante (KN/nerv)	Asw/s (cm <sup>2</sup> /m)	Asw/s,min (cm <sup>2</sup> /m)
6,2 x 6,2	ATEX 600	7,8	1,27	0,73	7,1	0	0
	ATEX 900	15,2	1,33	1,90	13,8	0	0
	X 1200	20,6	1,42	2,63	18,8	0	2,32
9,2 x 9,2	ATEX 600	17,2	2,85	0,73	10,6	0	0
	ATEX 900	33,4	2,94	1,90	20,6	0	0
	X 1200	45,3	3,12	2,63	27,9	0	2,32
12,2 x 12,2	ATEX 600	30,2	5,12	0,73	14,0	0,22	1,19
	ATEX 900	58,8	5,21	1,90	27,3	0	2,20
	X 1200	79,8	5,53	2,63	37,0	0	2,32

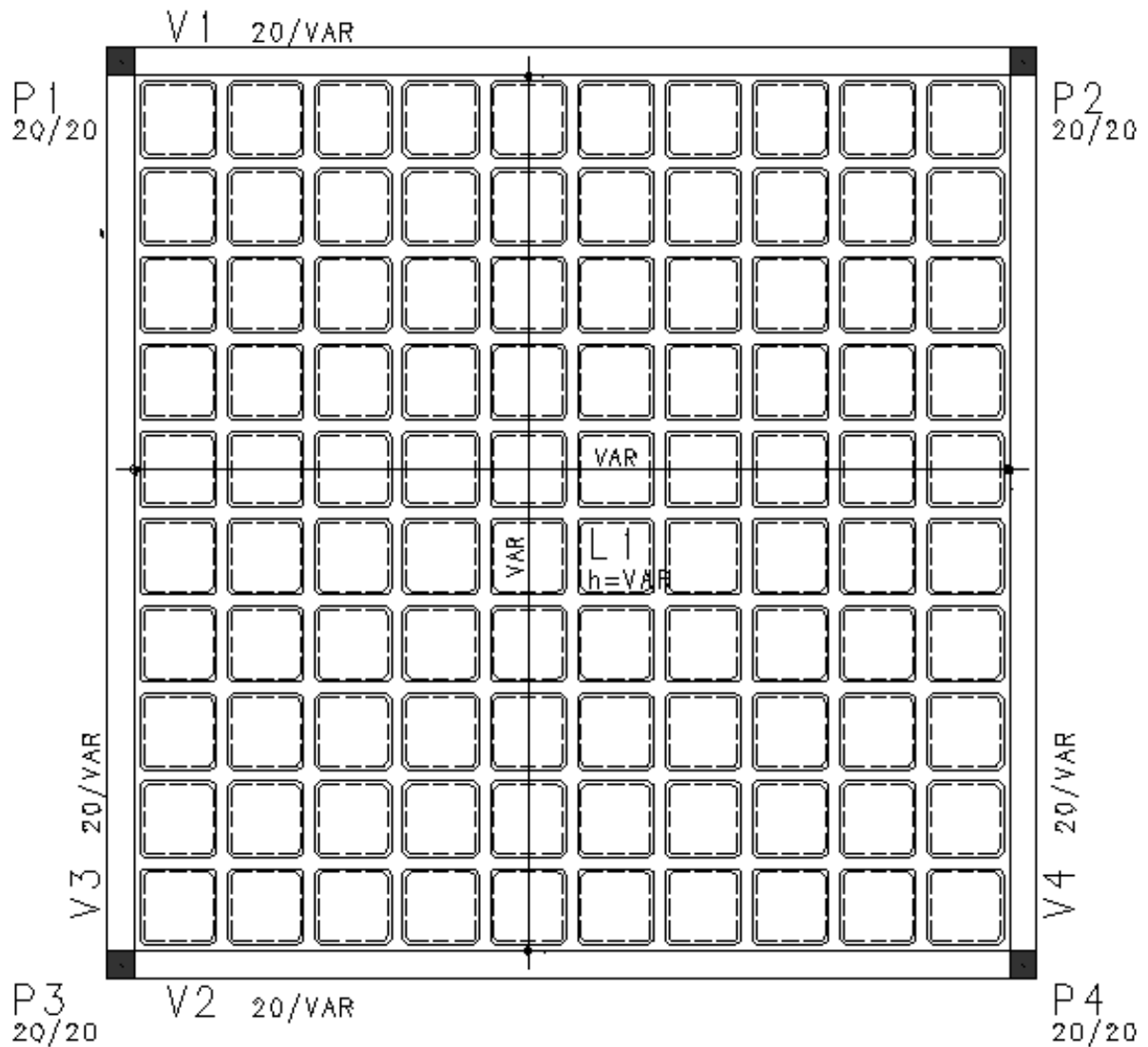
(fonte: elaborado pelo autor)

## 5.4 RESULTADOS ATRAVÉS DA ANALOGIA DE GRELHA

O cálculo das lajes nervuradas através do método da analogia de grelha foi feito com o auxílio do programa CAD/TQS®. Diferentemente do método anterior, no qual bastava definir a vinculação da laje como apoiada, engastada ou livre, a analogia de grelha necessita de maiores detalhes sob esse aspecto, ou seja, as definições das dimensões das vigas e pilares. Para isso, foi feita a modelagem de cada uma das lajes no programa, considerando-se pilares de seção 20 cm x 20 cm e vigas de borda que possuem uma rigidez adequada.

Neste método, há uma dificuldade com relação a forte influência das rigidezes das vigas de borda sobre o momento fletor atuante na laje. Foram modeladas vigas de largura constante em 20 cm e com grandes rigidezes à flexão, tendo alturas variando de 60 a 95 cm, para garantir que os esforços na laje não sofram tanta influência das vigas. Outra dificuldade do método é o fato dos esforços serem diferentes para cada nervura da laje. O que se faz então é considerar o momento fletor na nervura central e o esforço cortante nas nervuras mais próximas dos apoios. Na figura 11 está representada uma planta baixa genérica das lajes nervuradas utilizadas neste trabalho. Nesta, estão fixadas as dimensões dos pilares e larguras das vigas. As demais medidas recebem a denominação “VAR”, pois variam para os diferentes casos estudados, assim como as cubetas.

Figura 11 – Planta baixa genérica das lajes estudadas



(fonte: elaborado pelo autor)

A partir do lançamento no programa, buscaram-se os resultados em termos de momento fletor e esforço cortante, cuidando para obter os valores por nervura, os quais podem ser observados no quadro 5.

Quadro 5 – Resumo dos valores obtidos através da analogia de grelha

LAJES CALCULADAS ATRAVÉS DO CAD/TQS							
Ly x Lx (m x m)	Fôrma	Momento (KNm/nerv)	As (cm <sup>2</sup> )	As,min (cm <sup>2</sup> )	Cortante (KN/nerv)	Asw/s (cm <sup>2</sup> /m)	Asw/s,min (cm <sup>2</sup> /m)
6,2 x 6,2	ATEX 600	13,8	2,27	0,73	9,3	0	0
	ATEX 900	23,8	2,09	1,90	15,4	0	0
	X 1200	33,7	2,32	2,63	24,5	0	2,32
9,2 x 9,2	ATEX 600	29,9	5,07	0,73	13,9	0,20	1,19
	ATEX 900	53,7	4,75	1,90	23,6	0	0
	X 1200	62,1	4,29	2,63	28,7	0	2,32
12,2 x 12,2	ATEX 600	52,4	9,30	0,73	18,6	1,04	1,19
	ATEX 900	87,3	7,82	1,90	28,3	0	2,20
	X 1200	109,4	7,59	2,63	38,3	0	2,32

(fonte: elaborado pelo autor)



## 6 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, são apresentados quadros que indicam os valores de esforços e armaduras obtidos para os diferentes vãos e cubetas utilizados nas lajes nervuradas estudadas. Com o intuito de melhorar a visualização dos resultados e suas comparações, foram elaborados gráficos de barra para cada um dos vãos estudados.

### 6.1 COMPARAÇÃO DO MOMENTO FLETOR

A partir da obtenção dos esforços nas lajes nervuradas, é possível fazer a comparação dos momentos fletores atuantes, calculados através dos modelos em análise. Pode-se visualizar essa comparação no quadro 6, em que, na última coluna, se apresenta a diferença de momentos fletores, expressa em percentual, em relação ao valor obtido através da analogia de grelha.

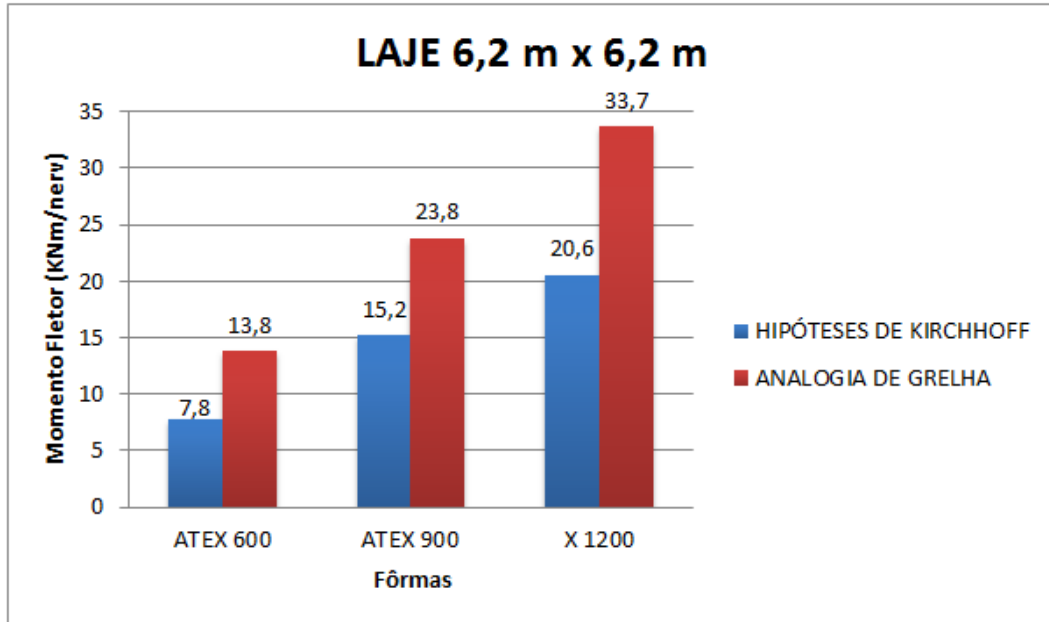
Quadro 6 – Comparação dos momentos fletores

<b>COMPARAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES</b>				
Ly x Lx (m x m)	Fôrma	Momento (KNm/nerv)		Diferença (%)
		HIPÓTESES DE KIRCHHOFF	ANALOGIA DE GRELHA	
6,2 x 6,2	ATEX 600	7,8	13,8	43,5
	ATEX 900	15,2	23,8	36,1
	X 1200	20,6	33,7	38,9
9,2 x 9,2	ATEX 600	17,2	29,9	42,5
	ATEX 900	33,4	53,7	37,8
	X 1200	45,3	62,1	27,1
12,2 x 12,2	ATEX 600	30,2	52,4	42,4
	ATEX 900	58,8	87,3	32,6
	X 1200	79,8	109,4	27,1

(fonte: elaborado pelo autor)

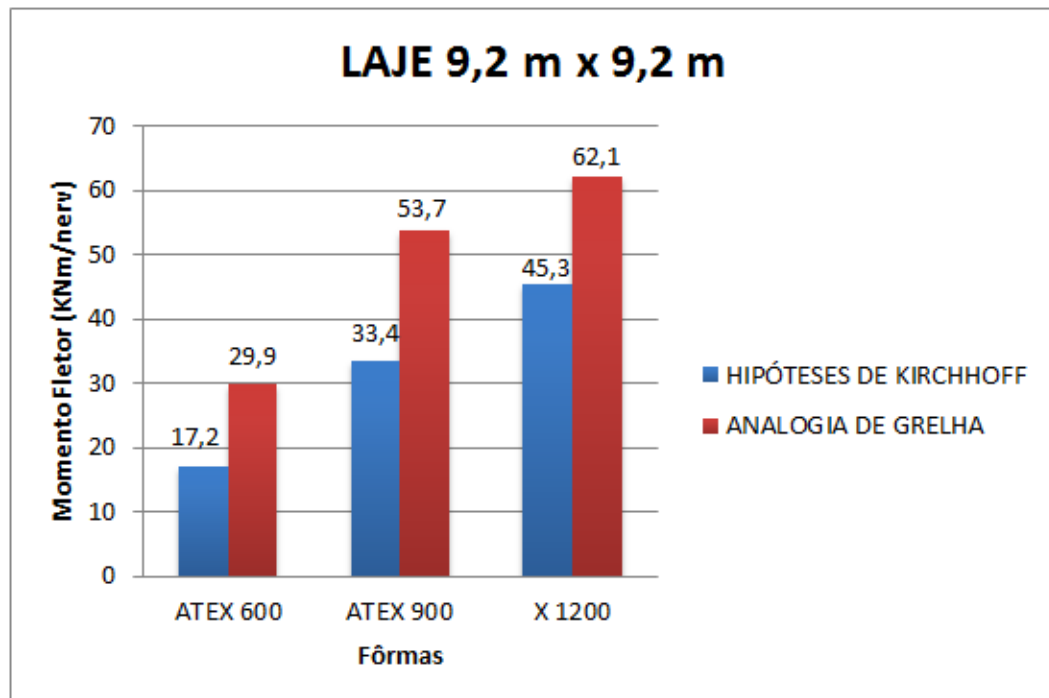
Usando os dados presentes no quadro 6 foi possível elaborar diversos gráficos que ajudam numa melhor visualização dos resultados. Isto pode ser observado nas figuras 12 a 14.

Figura 12 – Comparação dos momentos fletores para laje 6,2 m



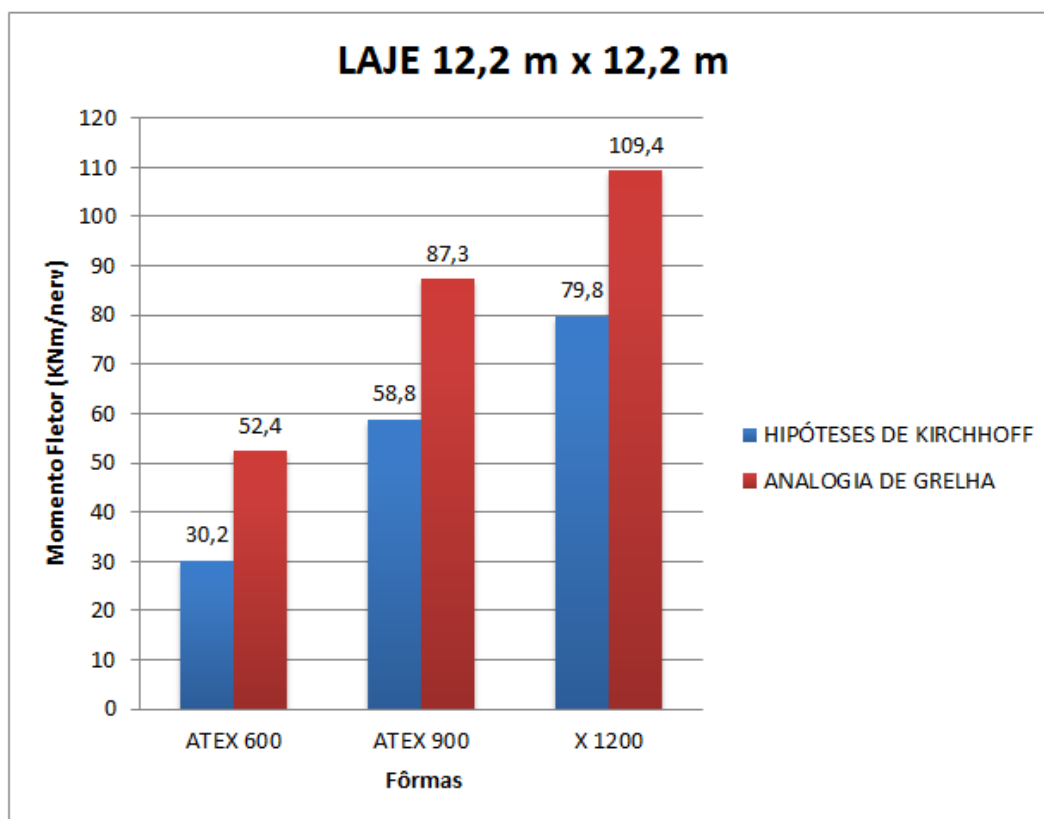
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 13 – Comparação dos momentos fletores para laje 9,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 14 – Comparação dos momentos fletores para laje 12,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

## 6.2 COMPARAÇÃO DA ARMADURA DE FLEXÃO

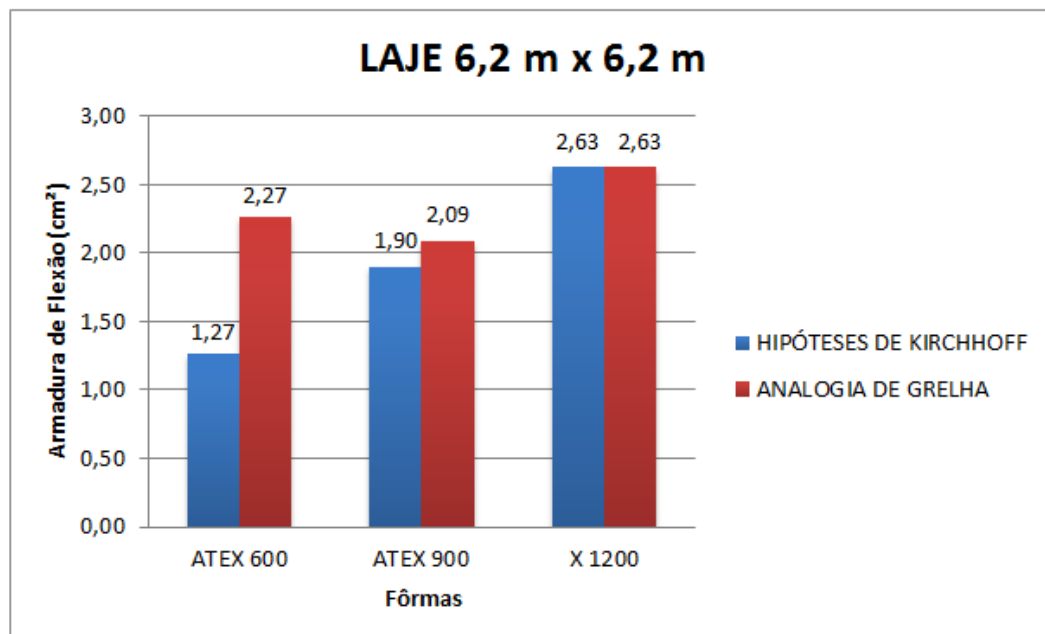
A partir do valor do momento fletor em cada laje, foi calculada qual a armadura necessária para esse esforço. Essa armadura foi comparada com a armadura mínima da seção, escolhendo-se a maior entre elas. O quadro 7 mostra os valores adotados para armaduras de flexão, em que, na última coluna, se apresenta a diferença de armaduras de flexão, em percentual, em relação à armadura calculada através da analogia de grelha. As figuras 15 a 17 mostram as diferenças em termos de armadura.

Quadro 7 – Comparação das armaduras de flexão

<b>COMPARAÇÃO DAS ÁREAS DE AÇO PARA FLEXÃO</b>				
Ly x Lx (m x m)	Fôrma	Área (cm <sup>2</sup> )		Diferença (%)
		HIPÓTESES DE KIRCHHOFF	ANALOGIA DE GRELHA	
6,2 x 6,2	ATEX 600	1,27	2,27	44,1
	ATEX 900	1,90	2,09	9,0
	X 1200	2,63	2,63	0,0
9,2 x 9,2	ATEX 600	2,85	5,07	43,8
	ATEX 900	2,94	4,75	38,1
	X 1200	3,12	4,29	27,3
12,2 x 12,2	ATEX 600	5,12	9,30	44,9
	ATEX 900	5,21	7,82	33,4
	X 1200	5,53	7,59	27,1

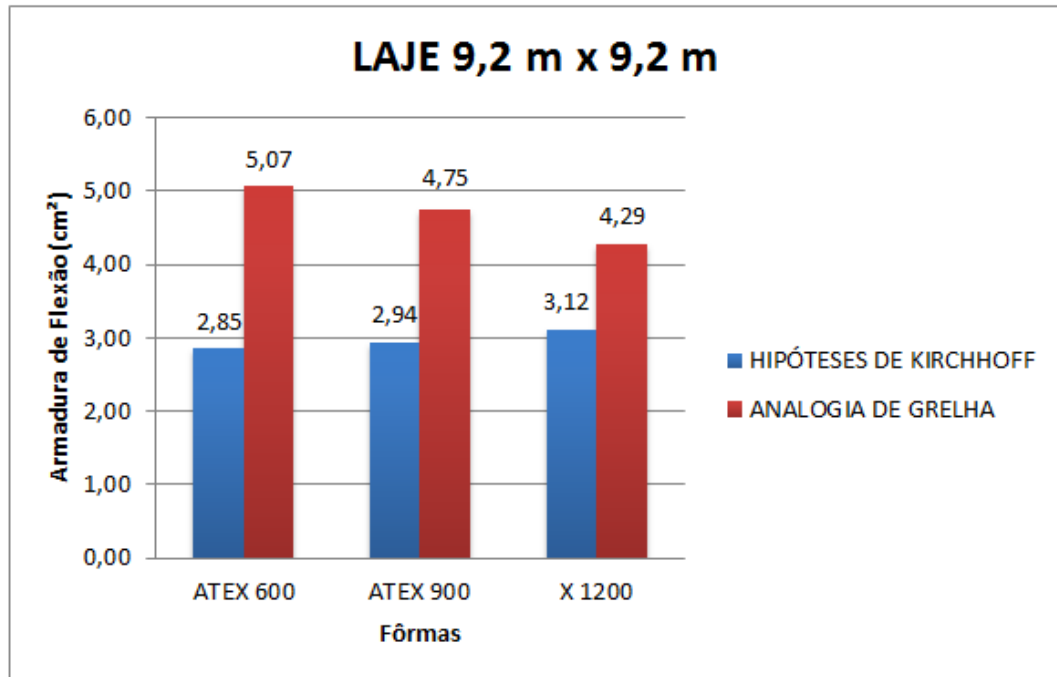
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 15 – Comparação das armaduras de flexão para laje 6,2 m



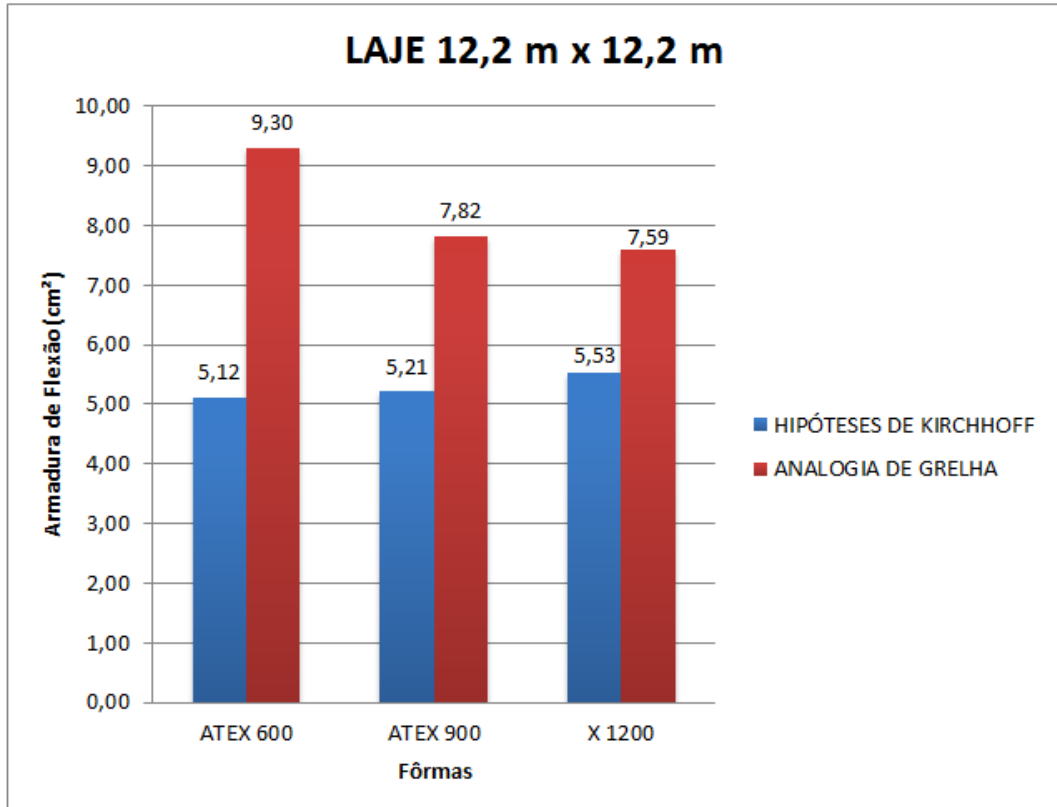
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 16 – Comparação das armaduras de flexão para laje 9,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 17 – Comparação das armaduras de flexão para laje 12,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

### 6.3 COMPARAÇÃO DO ESFORÇO CORTANTE

A partir da obtenção dos esforços nas lajes nervuradas, é possível fazer a comparação dos esforços cortantes atuantes, calculados mediante os modelos em análise. Pode-se visualizar essa comparação no quadro 8, em que, na última coluna, apresenta-se a diferença de esforços cortantes, expressa em percentual, em relação ao valor obtido através da analogia de grelha.

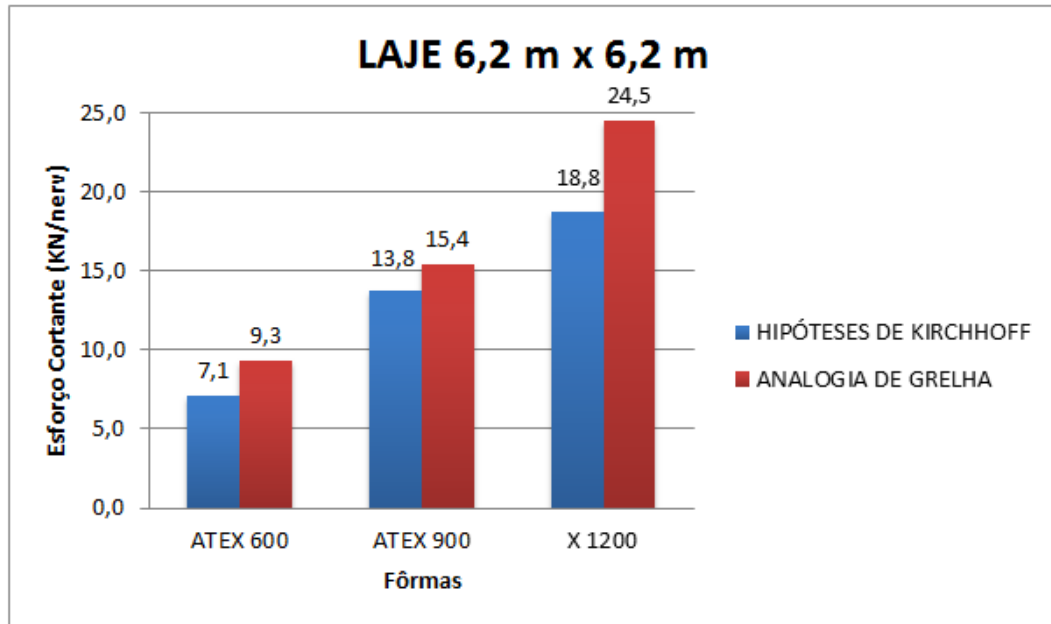
Quadro 8 – Comparação dos esforços cortantes

<b>COMPARAÇÃO DOS ESFORÇOS CORTANTES</b>				
$L_y \times L_x$ (m x m)	Fôrma	Cortante (KN/nerv)		Diferença (%)
		HIPÓTESES DE KIRCHHOFF	ANALOGIA DE GRELHA	
6,2 x 6,2	ATEX 600	7,1	9,3	23,7
	ATEX 900	13,8	15,4	10,4
	X 1200	18,8	24,5	23,3
9,2 x 9,2	ATEX 600	10,6	13,9	23,7
	ATEX 900	20,6	23,6	12,7
	X 1200	27,9	28,7	2,8
12,2 x 12,2	ATEX 600	14,0	18,6	24,7
	ATEX 900	27,3	28,3	3,5
	X 1200	37,0	38,3	3,4

(fonte: elaborado pelo autor)

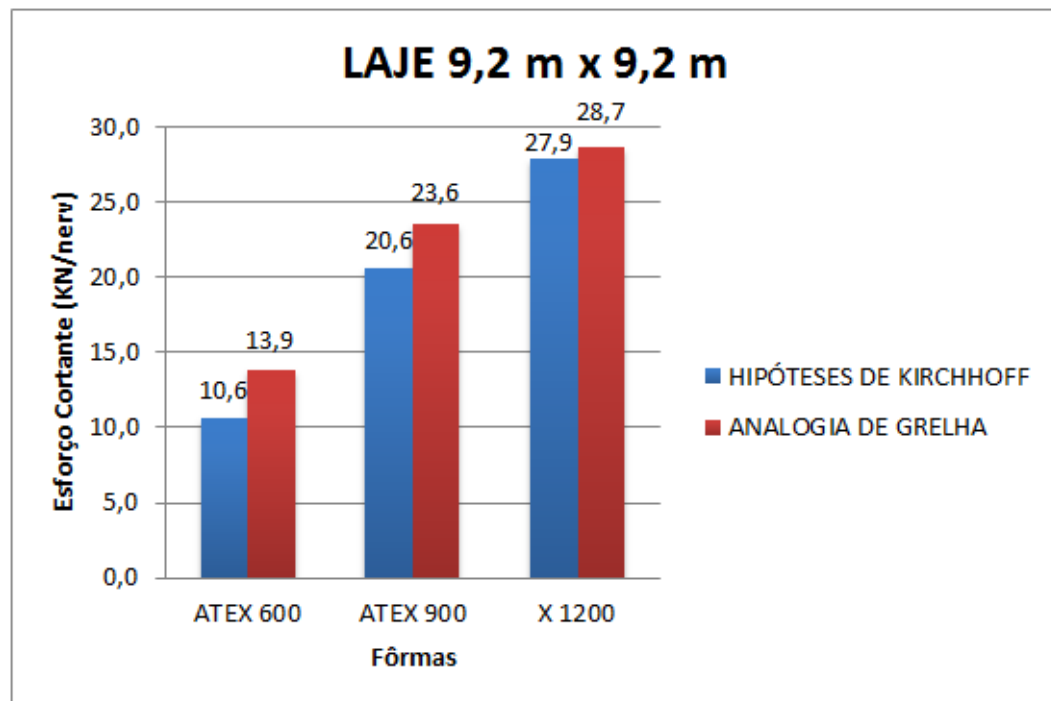
Através do quadro 8 foi possível elaborar diversos gráficos que ajudam numa melhor visualização dos resultados. Isto pode ser observado nas figuras 18 a 20.

Figura 18 – Comparação dos esforços cortantes para laje 6,2 m



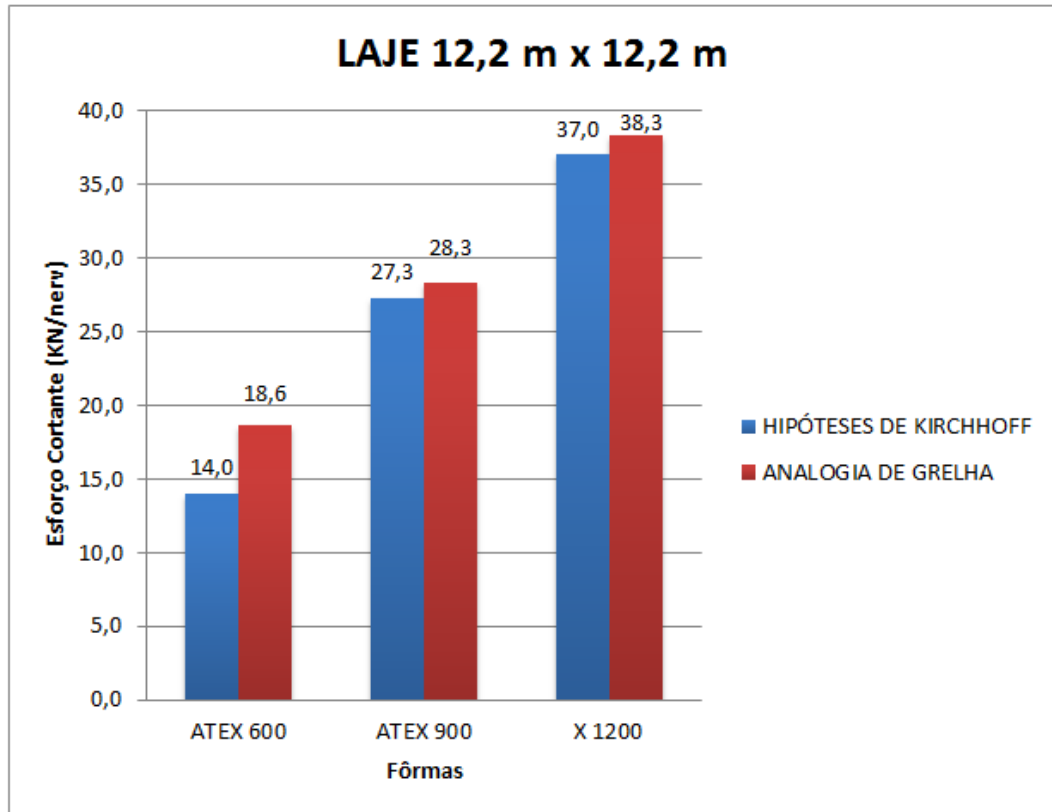
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 19 – Comparação dos esforços cortantes para laje 9,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 20 – Comparação dos esforços cortantes para laje 12,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

#### 6.4 COMPARAÇÃO DA ARMADURA DE CISALHAMENTO

A partir do valor do esforço cortante em cada laje, foi calculada qual a armadura necessária para o mesmo. Essa armadura foi comparada com a armadura mínima da seção, escolhendo-se a maior entre elas. O quadro 9 mostra os valores adotados para armaduras de cisalhamento, em que, na última coluna, se apresenta a diferença de armaduras de cisalhamento, expressa em percentual, em relação à armadura calculada através da analogia de grelha. As figuras 21 a 23 mostram as diferenças em termos de armadura.

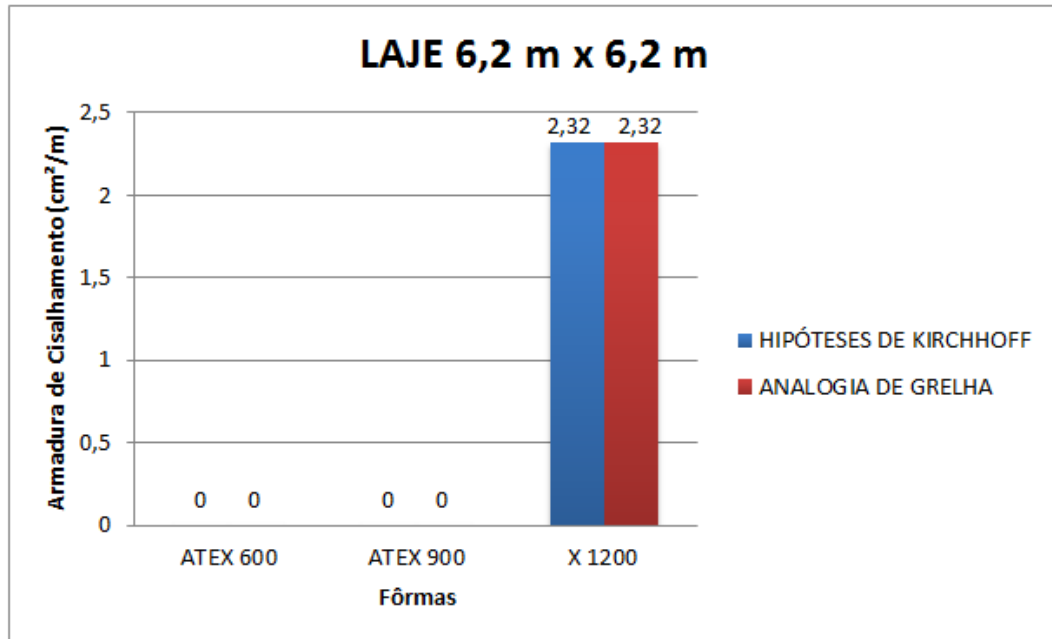


Quadro 9 – Comparação das armaduras de cisalhamento

<b>COMPARAÇÃO DAS ÁREAS DE AÇO PARA CISALHAMENTO</b>				
Ly x Lx (m x m)	Fôrma	Área (cm <sup>2</sup> /m)		Diferença (%)
		HIPÓTESES DE KIRCHHOFF	ANALOGIA DE GRELHA	
6,2 x 6,2	ATEX 600	0	0	0,0
	ATEX 900	0	0	0,0
	X 1200	2,32	2,32	0,0
9,2 x 9,2	ATEX 600	0	1,19	100,0
	ATEX 900	0	0	0,0
	X 1200	2,32	2,32	0,0
12,2 x 12,2	ATEX 600	1,19	1,19	0,0
	ATEX 900	2,2	2,2	0,0
	X 1200	2,32	2,32	0,0

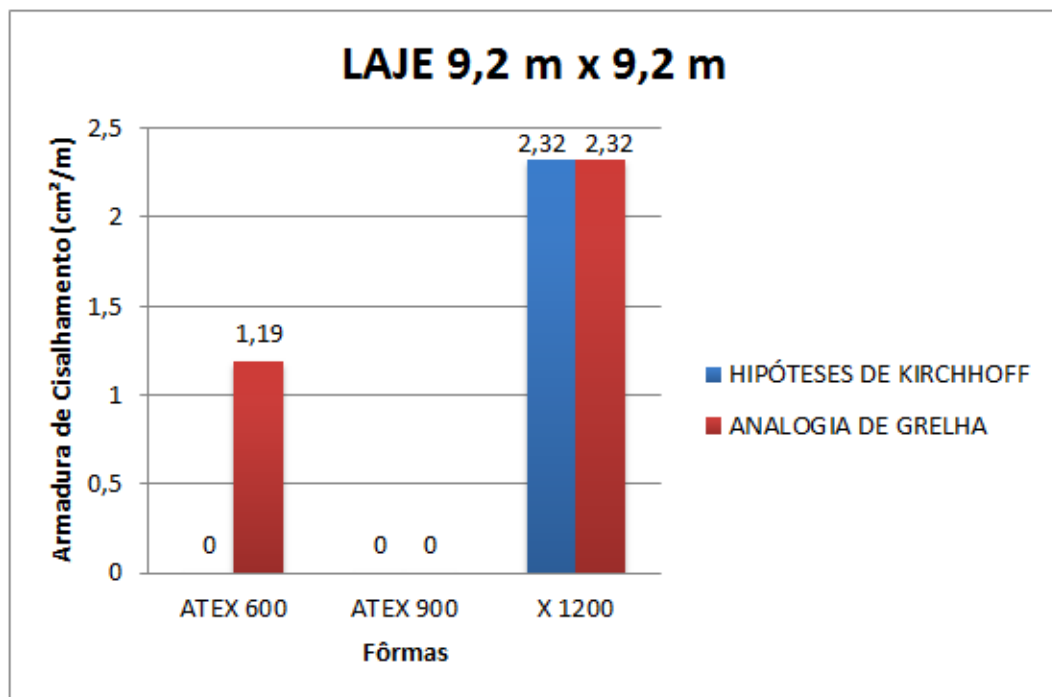
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 21 – Comparação das armaduras de cisalhamento para laje 6,2 m



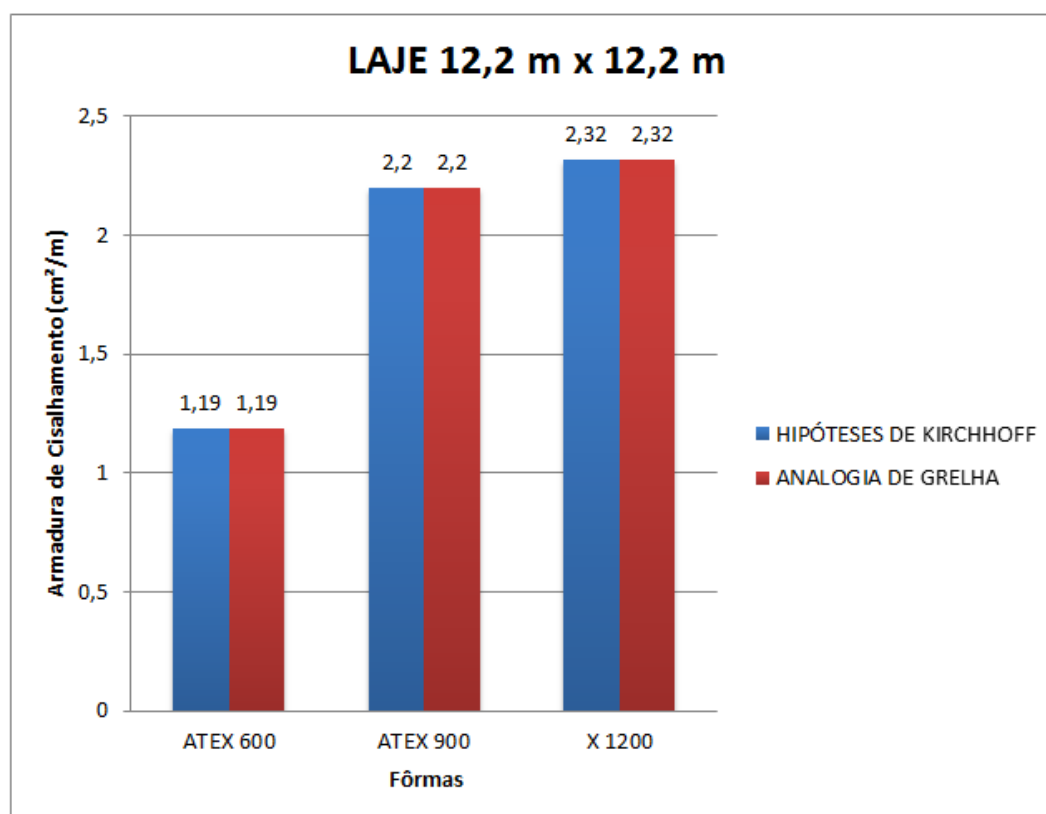
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 22 – Comparação das armaduras de cisalhamento para laje 9,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 23 – Comparação das armaduras de cisalhamento para laje 12,2 m



(fonte: elaborado pelo autor)

## 6.5 ANÁLISE ADICIONAL QUANTO AO MOMENTO FLETOR

Tendo em vista as grandes diferenças obtidas em termos de momentos fletores mostradas no quadro 6, fez-se necessária uma análise adicional para esse esforço. Para tanto, foi necessário escolher outro método de cálculo, de significativa confiabilidade e facilidade de aplicação. Então, como terceira metodologia, escolheu-se o método dos elementos finitos, representado, neste trabalho, pelo software CYPECAD®.

A discretização das lajes nervuradas no programa realiza-se em malhas de elementos tipo barra. Leva-se em conta a deformação por corte e mantém-se a hipótese de diafragma rígido. A rigidez à torção dos elementos é levada em conta.

A partir da análise pelo CYPECAD®, foram obtidos os momentos fletores para as mesmas situações estudadas. O quadro 10 mostra os resultados pelas hipóteses de Kirchhoff e analogia de grelha, e na última coluna apresentam-se os valores obtidos através do CYPECAD®.

Quadro 10 – Valores dos momentos fletores

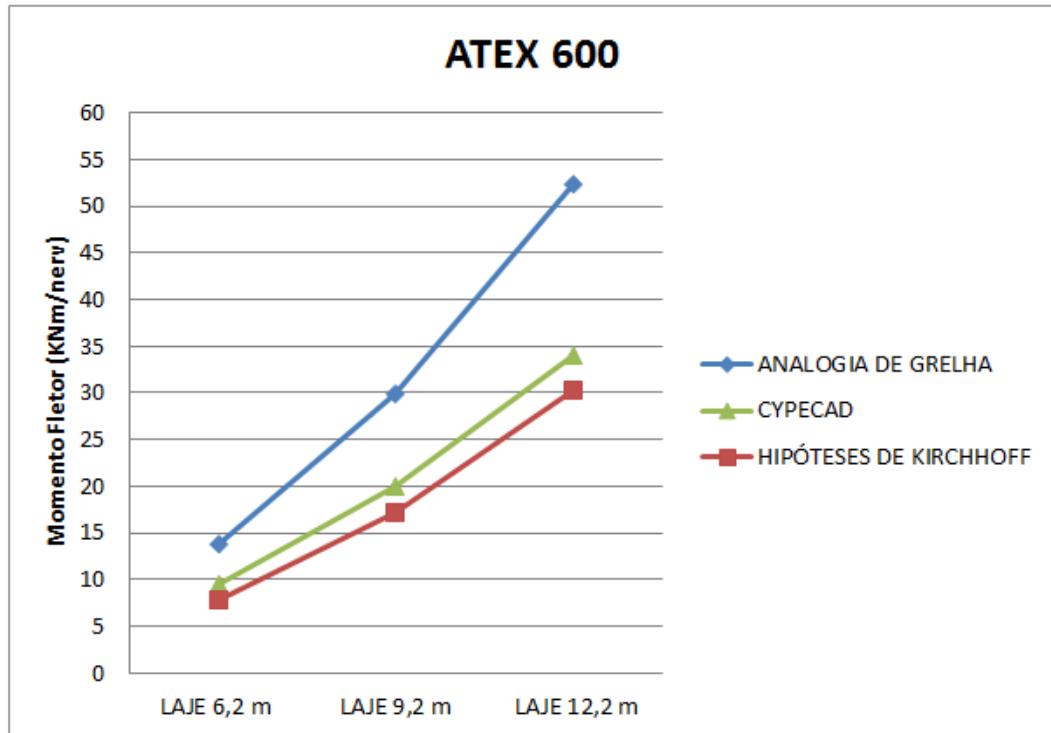
<b>COMPARAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES</b>				
Ly x Lx (m x m)	Fôrma	Momento (KNm/nerv)		
		HIPÓTESES DE KIRCHHOFF	ANALOGIA DE GRELHA	ELEMENTOS FINITOS
6,2 x 6,2	ATEX 600	7,8	13,8	9,5
	ATEX 900	15,2	23,8	24,8
	X 1200	20,6	33,7	39,2
9,2 x 9,2	ATEX 600	17,2	29,9	19,9
	ATEX 900	33,4	53,7	52,0
	X 1200	45,3	62,1	82,0
12,2 x 12,2	ATEX 600	30,2	52,4	34,0
	ATEX 900	58,8	87,3	89,0
	X 1200	79,8	109,4	134,6

(fonte: elaborado pelo autor)

Pode-se perceber, inicialmente, que para a fôrma ATEX 600, os momentos fletores obtidos a partir de elementos finitos se aproximam mais das hipóteses de Kirchhoff. Já para as fôrmas ATEX 900 e X 1200, há maior aproximação com a analogia de grelha.

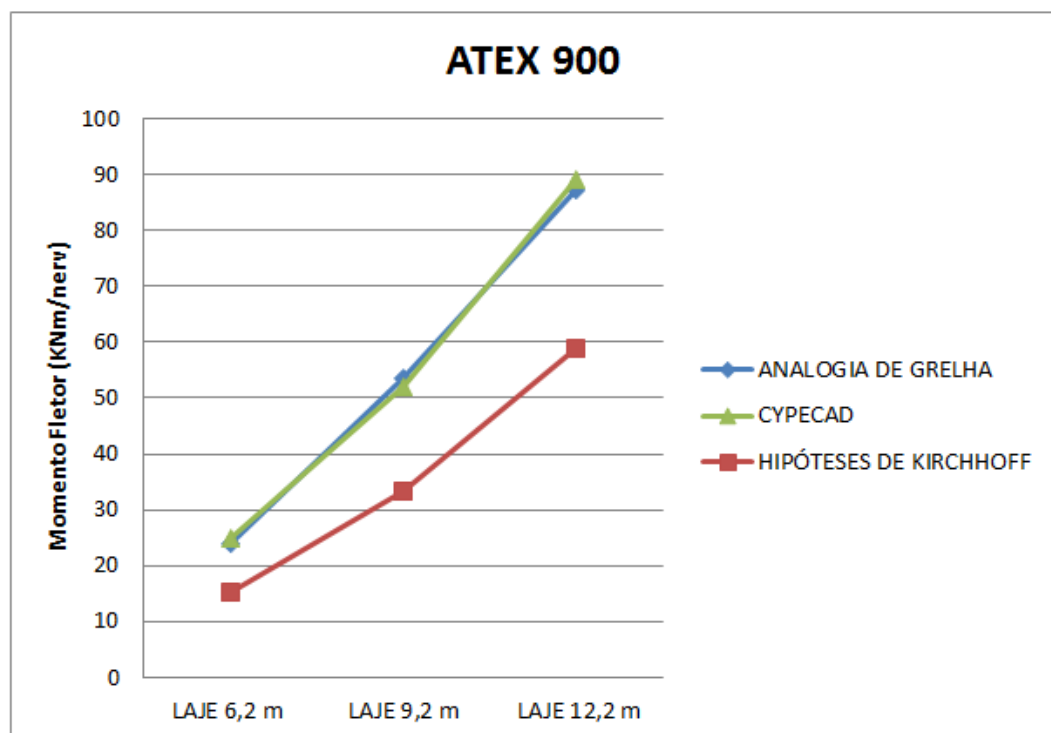
De maneira a facilitar a visualização desses resultados, criaram-se gráficos para cada uma das fôrmas. Tais gráficos estão ilustrados nas figuras 24 a 26.

Figura 24 – Comparação dos momentos fletores para fôrma ATEX 600



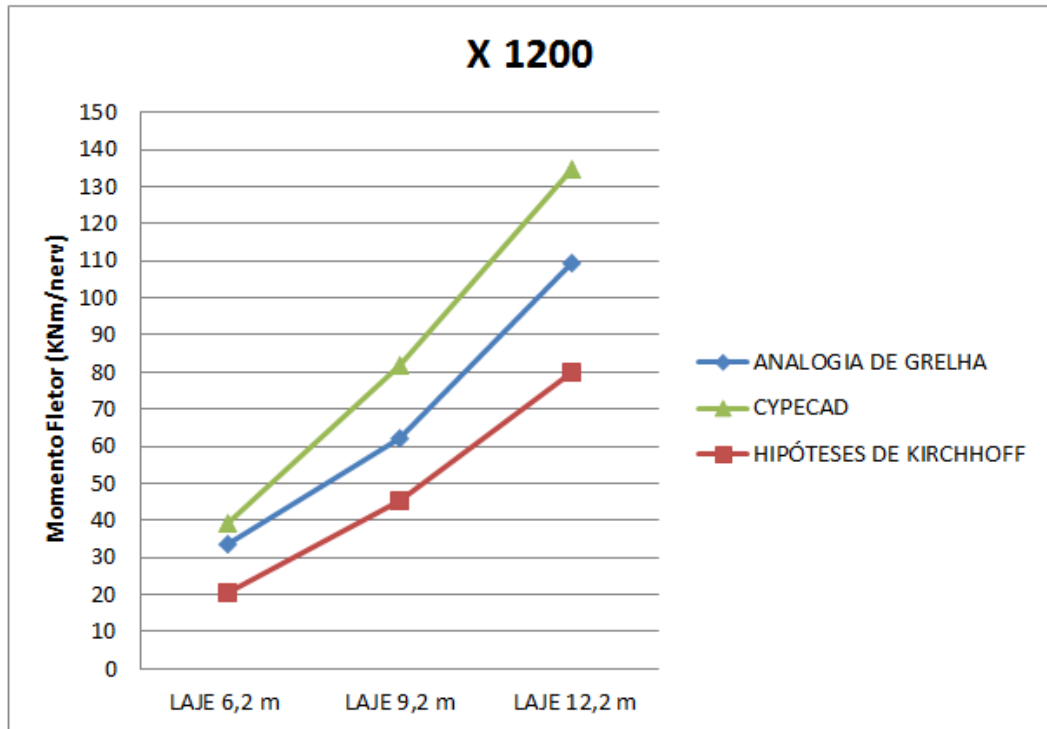
(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 25 – Comparação dos momentos fletores para fôrma ATEX 900



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 26 – Comparação dos momentos fletores para fôrma X 1200



(fonte: elaborado pelo autor)

## 7 ANÁLISE E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos gráficos obtidos para os esforços de flexão e cisalhamento das lajes nervuradas, pode-se observar que o modelo de analogia de grelha apresentou, para todos os casos estudados, valores superiores aos encontrados através das hipóteses de laje maciça de Kirchhoff.

Para o momento fletor, o modelo da analogia de grelha mostrou, já para as lajes com os menores espaçamentos entre nervuras, as maiores diferenças em relação aos resultados obtidos através das hipóteses de Kirchhoff, ou seja, ao contrário do que se previa, não foram os momentos fletores das lajes com nervuras pouco afastadas que apresentaram resultados mais próximos das hipóteses de Kirchhoff. A partir dos resultados obtidos neste trabalho, não é possível afirmar que, como se esperava, a diferença dos momentos fletores obtidos através dos dois modelos aumenta à medida que se aumenta o espaçamento entre nervuras, mas para todos os casos, a diferença entre eles é considerável.

Observa-se que para a armadura de flexão das nervuras houve certa irregularidade na comparação dos resultados, que é explicada pelo incremento da armadura mínima, a qual provoca em alguns casos, a igualdade dos valores para os dois modelos.

Com relação ao esforço cortante, pode-se notar que as maiores diferenças nos resultados estão, novamente, nas lajes com nervuras mais próximas e com menores vãos. Porém, as divergências estão em um nível bem inferior àsquelas obtidas para o caso dos momentos fletores.

As armaduras de cisalhamento calculadas se mostraram homogêneas na comparação dos resultados, exceto para um caso isolado. Apesar das diferenças nos esforços cortantes, as armaduras obtidas foram iguais para os dois métodos, mais uma vez explicado pela introdução do valor da armadura mínima.

O resultado mais expressivo deste trabalho foi a grande diferença obtida a partir da comparação dos valores de momento fletor. Diante deste fato, foi elaborada uma análise comparativa adicional, utilizando um modelo de cálculo diferente dos anteriores, o método

dos elementos finitos. A partir deste terceiro método, notou-se que, para o menor espaçamento de nervuras (fôrma ATEX 600), há uma aproximação dos resultados com as hipóteses de laje maciça de Kirchhoff, o que era esperado já no modelo da analogia de grelha, e que não aconteceu. Para a fôrma ATEX 900, os resultados se aproximaram da analogia de grelha, mostrando que para este caso seria o melhor método a ser utilizado. Para maiores espaçamentos entre nervuras (neste caso, 120 cm), os momentos fletores obtidos a partir do modelo de elementos finitos aumentaram em relação aos outros métodos, o que ressalta as recomendações da NBR 6118/2007, que cita que para espaçamentos entre eixos de nervuras superiores a 110 cm, deve-se considerar a mesa de concreto apoiada sobre a grelha de vigas, e não calcular simplesmente como laje maciça.

Com o desenvolvimento deste trabalho, nota-se que as recomendações da NBR 6118/2007 quanto ao método de cálculo a ser utilizado no dimensionamento de lajes nervuradas são muito brandas e contra a segurança. Sugere-se que a atual Norma brasileira seja mais restritiva, impondo um limite menor a partir do qual se deve calcular a laje como grelha. A partir dos resultados obtidos neste trabalho é possível afirmar que este valor não deve ser superior a 90 cm. Uma sugestão para um futuro trabalho nessa área é um estudo da variabilidade de resultados para outras configurações estruturais e a definição de um novo limite de espaçamento entre eixos de nervuras para a atual Norma.



## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 2. ed. Rio Grande: Dunas, 2003a. v. 4.
- \_\_\_\_\_. **Curso de concreto armado**. 2. ed. Rio Grande: Dunas, 2003b. v. 2.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2007.
- ATEX DO BRASIL, LOCAÇÃO DE EQUIPAMENTOS LTDA. **Produtos**: dados técnicos. [S. l.], 2014. Disponível em <<http://www.atex.com.br/Content/dadosTecnicos.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2014.
- BASTOS, P. S. dos S. **Flexão normal simples**: vigas. Bauru: Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, 2010. Notas de aula da disciplina de Estruturas de Concreto I. Disponível em: <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/FlexaoSimples.pdf>>. Acesso em: 05 jun. 2013.
- BOCCHI JÚNIOR, C. F. **Lajes nervuradas de concreto armado**: projeto e execução. 1995. 183 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.
- CARVALHO, R. C. **Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. 1994. 208 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.
- FUSCO, P. B. **Técnica de armar as estruturas de concreto**. 1. ed. (4. tiragem). São Paulo: Pini, 1995 (tiragem 2002).
- SILVA, M. A. F. da. **Projeto e construção de lajes nervuradas de concreto armado**. 2005. 239 p. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Programa de Pós-Graduação em Construção Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.