

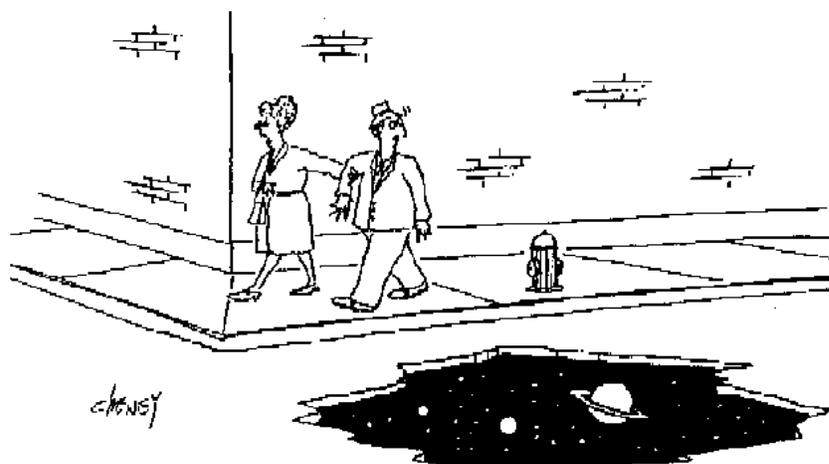
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Estabilização de caos em
universos hiperbólicos compactos**

Karen Fiuza

Dissertação elaborada sob orientação da
Prof^a. Sandra D. Prado, apresentada
ao Instituto de Física da UFRGS como
requisito final à obtenção do título de
Mestre em Física.

PORTO ALEGRE
Setembro 2004



- Oh, pelo amor de Deus! Você age como se nunca tivesse visto um buraco no espaço-tempo anteriormente!

*Se as coisas são inatingíveis - ora,
Não é motivo para não querê-las...
que tristes os caminhos se não fora
a mágica presença das estrelas!*
Mário Quintana

Agradecimentos

Por ter compartilhado seus conhecimentos com tanto entusiasmo, pela disposição e motivação de sempre, agradeço primeiramente a mentora dessa tese, minha orientadora e amiga Sandra Denise Prado.

Agradeço ao grupo de Cosmologia e Gravitação do CBPF (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas), em especial a Mário Novello e Herman Mosquera Cuesta, pelas aulas, colaboração científica e pela excelente hospitalidade carioca. Aos colegas pelas produtivas discussões, em especial a German I. Gomero do CBPF e INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) e Cassius Almeida do IFT (Instituto de Física Teórica) da UNESP (Universidade Estadual de São Paulo). Ao amigo Guilherme Peretti Pezzi, pelo suporte computacional. Aos funcionários do Instituto de Física da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul) que me auxiliaram, de alguma forma, durante minha passagem pelo mestrado. À universidade federal pública, gratuita e de qualidade, e aos órgãos financiadores da pesquisa neste País.

Para Rafael Peretti Pezzi (Pee-Wee) um agradecimento especial com todo meu amor, pelo seu incentivo, zelo e companheirismo mesmo à distância, durante o tempo de realização desse trabalho.

Muito amor e gratidão para minha querida mãe Gelda Barcellos Pinto Ribeiro e meu querido pai Otacílio da Silva Ribeiro, devido ao apoio de sempre. Muito obrigada a meus irmãos e familiares devido ao contínuo interesse pelo meu trabalho.

A presente dissertação é dedicada a minha "mãe de coração" Rosane Pinto Ribeiro, grande guerreira que admiro muito pelas batalhas vencidas.

Namaste Shanti!

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Cosmologia	5
2.1 Universo primordial	6
2.2 Introdução à Relatividade Geral	8
2.3 Geometria e a expansão do Universo	14
2.3.1 Topologia compacta	17
2.4 Radiação cósmica de fundo - digital do universo primordial	19
2.5 Estabilidade em trajetórias de fótons	26
3 Sistemas dinâmicos: caos e estabilidade	31
3.1 Sistemas dinâmicos	31
3.1.1 O pêndulo	33
3.2 Equação dinâmica dos fótons	37
3.3 Caos clássico determinístico	41
3.3.1 Caos em superfícies hiperbólicas	42
4 Resultados numéricos: estabilização de caos	45
4.1 Métodos computacionais	45
4.1.1 Runge-Kutta 4 ^a ordem	46
4.1.2 Verlet	48
4.1.3 Algoritmo	49
4.2 Apresentação dos resultados	50
4.2.1 Análise	51
5 Conclusão e Perspectivas	55
A Aspectos do espaço-tempo curvo	58
A.1 Geometria	58
A.1.1 Curvatura gaussiana	59

A.1.2	Geometrias possíveis	59
A.2	Geometria diferencial	62
A.2.1	Mapas	63
A.2.2	Variedade diferenciável	63
A.2.3	Difeomorfismo	64
A.3	Conceitos físicos com formalismo matemático	65
A.3.1	Álgebra tensorial	65
A.3.2	Espaço de Minkowski	65
A.3.3	Tensor métrico	67
A.3.4	Tensor projeção	68
A.3.5	Conexão: símbolo de Christoffel	69
A.3.6	Tensor de curvatura	70
A.3.7	Tensor energia-momentum	71
A.3.8	Fator de escala	71
A.4	Equação do desvio geodésico	72
A.4.1	Desvio geodésico em gravitação Newtoniana	72
A.5	Equações de Einstein	74
B	Desenvolvimento Matemático	76
B.1	Solução	76
B.1.1	Lado esquerdo	78
B.1.2	Lado direito	79
B.1.3	Solução Final	85
	Referências	86

Lista de Figuras

2.1	Geodésicas em um toro	11
2.2	Relação entre curvatura e destino do Universo	13
2.3	Resultados de observações para a curvatura do Universo	15
2.4	Lei de Hubble	16
2.5	Topologias fechadas equivalentes	18
2.6	Esfera vista em larga e pequena escala	18
2.7	FIRAS e DMR: instrumentos do COBE. Radiação de fundo emite como um corpo negro.	21
2.8	Anisotropias vistas pelo COBE em 1992.	22
2.9	Comparação entre o mapa do COBE e do WMAP.	23
2.10	Radiação de fundo: digital do Universo primordial, por WMAP.	25
3.1	Pêndulo invertido	33
3.2	Espaço de fases para o pêndulo simples	35
4.1	Estabilidade em 3 dimensões: RK	50
4.2	Estabilidade em 3 dimensões: RK	51
4.3	Estabilidade em 2 dimensões: RK	52
4.4	Instabilidade em 3 dimensões: Verlet	52
4.5	Instabilidade em 2 dimensões (espaciais): Verlet	53
4.6	Instabilidade em 3 dimensões: Verlet	54
A.1	Curvatura de Gauss	59
A.2	Possíveis geometrias para o Universo	60
A.3	Sela: exemplo de superfície de curvatura negativa	62
A.4	Cone de luz	67
A.5	Desvio geodésico	73

Lista de Tabelas

2.1	Unificação das quatro forças fundamentais	8
2.2	Relação entre curvatura e matéria do Universo.	12

Resumo

A matéria não é uniformemente distribuída no Universo, mas é organizada em galáxias, aglomerados de galáxias e mesmo em superaglomerados de galáxias. Conseqüentemente, conforme a Relatividade Geral de Einstein, a curvatura do espaço-tempo não permanece constante indefinidamente, mas flutua. Nós mostramos aqui que, surpreendentemente, estas flutuações podem causar estabilização em trajetórias de fótons mesmo em modelos com curvatura negativa constante e topologia compacta, que se caracterizam por serem extremamente caóticas. Essa estocasticidade tem sido usada para explicar a homogeneidade pré-inflacionária, e o fato de que as flutuações na radiação cósmica de fundo são gaussianas, numa margem de 97%. Mostramos analítica e numericamente que flutuações randômicas na curvatura podem levar à estabilização estocástica de trajetórias de fótons. Também mostramos a analogia desse problema com a dinâmica do pêndulo invertido, e discutimos as conseqüências dessa estabilização para a gaussianidade das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo.

Abstract

Matter is not uniformly distributed in Universe but it is organized into galaxies, galaxies clusters and even superclusters of galaxies. Consequently, from the General Relativity of Einstein, the spatial curvature of the universe fluctuates. We show here that these fluctuations can cause stabilization of photon trajectories even in models with constant negative spatial curvature and compact topologies, which imply chaotic photonic dynamics. This has been put forward as an explanation of pre-inflationary homogeneity and to the fact that fluctuations in the cosmic microwave background are close to gaussian. We show here analytically and numerically that random fluctuations in the curvature can lead to stochastic stabilization of photon trajectories. It is also discussed the analogy with the problem of the inverted pendulum dynamics, and the consequences for the gaussianity of temperature fluctuations of the Cosmic Microwave Background.

Capítulo 1

Introdução

*O principal objetivo de um argumento, ou de uma discussão,
não deveria ser a vitória, mas o progresso.*

Joseph Joubert, Pensées

É fascinante perceber os paralelos entre a mitologia de povos antigos e a cosmologia. Praticamente todas as crenças religiosas (cristianismo, judaísmo, etc), e muitas crenças mitológicas (mitologia chinesa, greco-romana, etc) popularmente conhecidas, têm uma explicação própria (singular) para a criação do Universo ou mitos cosmológicos completamente diferentes.

A cosmologia, similarmente às outras ciências, possui uma evolução muito lenta, mas progressiva. Aristóteles ($\sim 350A.C.$) foi o primeiro a formular um modelo físico coerente para o funcionamento da natureza e para a cosmologia. Séculos depois veio Ptolomeu ($\sim 100D.C.$), que expandiu os modelos, geocêntricos, existentes em sua época, e determinou a cosmologia dos 1500 anos seguintes. A grande revolução veio com Nicolai Copérnico (~ 1500 da presente era) com o seu modelo heliocêntrico, o qual ele publicou apenas no final de sua vida, devido à influência da igreja no pensamento da época. As primeiras observações vieram com Tycho Brahe (1546 – 1601) e Johannes Kepler (1571 – 1630). Não podemos deixar de citar Galileo Galilei (1564 – 1642), que fez importantes descobertas

astronômicas através da observação e de cálculos, tendo o seu trabalho importantes contribuições para a física. Não muito depois da morte de Galileo, nasceu Isaac Newton (1643 – 1727), que fez contribuições fundamentais, tanto para a física como para a matemática, criou a primeira teoria completa do movimento, juntamente com a teoria da gravidade. Já no século passado, o brilhante físico Albert Einstein (1879–1955) criou a Teoria da Relatividade Geral (TRG), que foi uma nova Teoria da Gravitação, utilizada até os dias de hoje graças a inúmeras evidências físicas que a corroboram. Porém, é provável que exista um limite de validade para a TRG devido à presença de singularidades. O grande problema da TRG reside no fato de que, sendo o tempo dinâmico e interagente com a matéria, existe uma grande dificuldade em quantizá-la, e assim unificar a *Gravitação* com as outras interações. Muito se tem avançado para resolver esse problema, porém essa questão não será abordada aqui, tendo sido citada unicamente a título de informação histórico-científica.

A cosmologia observacional é um campo de pesquisa mais recente, em rápido desenvolvimento. Graças a dados de experimentos que investigam a *radiação cósmica de fundo* (COBE, MAXIMA, WMAP, etc) tem sido possível determinar alguns parâmetros cosmológicos com grande precisão. Entretanto, muitas questões fundamentais permanecem sem respostas. A curvatura do universo é uma dessas questões, e é a mais importante propriedade em larga escala, pois nos dá informação sobre a quantidade de matéria do Universo e conseqüentemente, permite prever o seu destino [1].

O presente trabalho é baseado nas equações, sem constante cosmológica, da TRG de Einstein [2], utilizando o modelo de Friedmann [3] em um espaço de Minkowski perturbado [4], com curvatura constante negativa. Existe um número considerável de investigações [3,5] em modelos cosmológicos para universos hiperbólicos compactos, isto é, com curvatura negativa constante e topologia compacta. A característica principal de tais modelos com topologia compacta é que as tra-

jetórias de fótons são fortemente caóticas, no sentido que trajetórias vizinhas divergem exponencialmente com o tempo. Se o universo é topologicamente finito, então luz e matéria podem seguir trajetórias caóticas na geometria compacta. Espaços hiperbólicos compactos são conhecidos por induzirem *mixing*¹ caótico de trajetórias, a medida que elas circundam o espaço. O movimento de fótons em um universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker com curvatura negativa e topologia compacta é um problema de dinâmica de fluxos geodésicos em sistemas de Anosov e está diretamente relacionado com caos determinístico [6, 7]. Em um universo hiperbólico compacto, o *mixing* caótico seria o responsável pela homogeneização das flutuações primordiais durante o período pré-inflacionário [8]. A propriedade de *mixing* de sistemas caóticos pode explicar o grau de homogeneidade das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo, a radiação isotrópica que permeia todo o Universo. Essa propriedade pode, portanto, explicar o *problema do horizonte*, que é justamente o fato de que, regiões do céu não conectadas de forma causal tenham as mesmas propriedades.

Acredita-se que a distribuição das flutuações na temperatura da *radiação cósmica de fundo* reproduzam as flutuações na densidade de matéria do início do universo, revelando o universo primordial e a origem das galáxias e de toda a estrutura em larga escala do Universo [9–11].

Nosso principal objetivo nesse trabalho é investigar a influência das flutuações da curvatura espacial na estabilidade das trajetórias de fótons, relacionando os resultados com o entendimento da estrutura em larga escala do Universo. Mostramos a analogia das equações diferenciais de segunda ordem para o presente problema com as *equações de Mathieu*, em particular as que descrevem o problema do pêndulo invertido [12].

No capítulo 2, apresentamos a cosmologia, desde a *Relatividade de Einstein* até a *radiação cósmica de fundo*. Iniciamos com a Teoria da Relatividade Geral,

¹O espaço é homogeneizado em poucas iterações ou em tempos curtos.

passando pela questão da geometria do universo, com ênfase em curvatura negativa (hiperbólica), e chegando na radiação cósmica de fundo. Discutimos à luz da cosmologia, as implicações físicas para geometria hiperbólica, enfatizando as principais características de superfícies com topologia compacta, situação na qual nosso resultado é fisicamente surpreendente. Por fim, mostramos a dinâmica dos fótons no modelo proposto, através da análise da equação da geodésica, que resulta em uma equação muito similar à que descreve um sistema análogo em mecânica clássica: o pêndulo invertido. Os sistemas dinâmicos são definidos no capítulo 3, onde dissertamos sobre o pêndulo, e descrevemos como poderíamos considerar caos nesse sistema, analisando onde os conceitos se encaixam no âmbito da cosmologia. Também analisamos o caso do desvio geodésico dos fótons em universos de curvatura negativa, e sua possível estabilização devido a perturbações geradas pelas flutuações de curvatura que ocorrem na presença de matéria. Isto é análogo à força imposta estocasticamente na base de um pêndulo, que leva à estabilização na posição invertida. No capítulo 4 encontra-se um resumo dos métodos numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Neste capítulo damos ênfase à metodologia computacional utilizada e mostramos os principais resultados da simulação numérica e os dados utilizados.

Finalmente concluímos com o capítulo 5, explicando como do resultado de estabilização de fótons em universos hiperbólicos compactos pode emergir uma nova idéia sobre gaussianidade na distribuição de temperatura da radiação cósmica de fundo, e apresentamos algumas perspectivas futuras para essa pesquisa. No apêndice A, versamos sobre o formalismo matemático básico necessário para o entendimento desse trabalho e tratamos os principais conceitos matemáticos importantes para o entendimento físico do problema, iniciando em geometria chegando nas equações de Einstein. No apêndice B, mostramos detalhadamente o desenvolvimento dos cálculos mais longos utilizados para a conclusão dessa tese.

Capítulo 2

Cosmologia

Cosmologia é o estudo (*logia*) da estrutura e evolução do Universo (*Cosmo*). Desde os tempos mais remotos até os dias de hoje, o Universo fascina o homem tanto de forma científica quanto de forma religiosa.

Graças a dados de satélites obtidos nas duas últimas décadas [13–16], e o estudo da radiação cósmica de fundo na faixa das microondas (*Cosmic Microwave Background*) [17, 18], a cosmologia tem conquistado um papel fundamental na busca de respostas verificáveis sobre nossa origem e destino, sendo uma ciência em promissor desenvolvimento [19]. Ainda não podemos identificar a geometria do Universo, pois mesmo que dados do satélite WMAP [16] apontem para um universo praticamente plano, a aceleração de galáxias distantes [20] e a margem de incerteza dos dados não nos deixa descartar as outras possibilidades.

Discutiremos os pontos relevantes da cosmologia moderna necessários para o entendimento formal desse trabalho, em especial, abordaremos conceitos básicos da Teoria da Gravitação de Einstein e a gaussianidade da radiação cósmica de fundo.

2.1 Universo primordial

Existem várias questões muito fundamentais sobre o Universo que ainda não foram respondidas, sendo que a cosmologia está insistentemente buscando respostas através da observação. Mais recentemente, a radiação cósmica de fundo tem sido a principal fonte de informações sobre os primórdios do universo. Vamos nos concentrar no *Modelo Padrão* da cosmologia [21], (modelo de universo condizente com a teoria do *Big Bang*), cujos quatro principais problemas ainda em aberto são:

- **Problema do horizonte:** Como a radiação cósmica de fundo pode possuir flutuações na temperatura da ordem de uma parte em 100.000 (cem mil), isto é, precisão maior que 1° , se há regiões não conectadas de forma causal em regiões maiores que 1° ?
- **Problema planar:** Imagine uma superfície curva qualquer e expanda-a por um enorme fator. Depois da expansão, a superfície lhe parecerá localmente plana. Então, a inflação prediz um Universo indistingüivelmente plano? Ou ainda, o Universo sempre foi plano?
- **Problema da estrutura em larga escala:** As anisotropias¹ iniciais são consequência de flutuações quânticas durante o período inflacionário? De onde vêm as flutuações da radiação cósmica de fundo? Essas flutuações podem dar origem a estrutura em larga escala do Universo?
- **Problema da relíquia:** Onde estão todas as partículas elementares previstas pelo *Modelo Padrão*? E por que existe mais matéria do que anti-matéria? Existe monopólo magnético?

O problema da relíquia é o resultado teórico de várias teorias de física de partículas, que prevê a existência de partículas massivas que não são observadas. Nosso

¹Anisotropia é a diferença entre duas medidas em duas direções diferentes. As diferenças de temperatura da radiação de fundo possui valiosas informações sobre o universo.

interesse é voltado para o problema do horizonte, que está relacionado com a homogeneidade da radiação de fundo. Apesar disso, é importante compreender o contexto onde essas questões estão relacionadas, isto é, o período em que as quatro forças fundamentais do Universo são apenas uma.

Há quatro forças fundamentais dentro de todos os átomos, e essas forças determinam as interações entre partículas sub-atômicas e o comportamento em larga escala de toda a matéria no Universo. São elas:

- **Interação Forte:** a interação mais forte, mas de curto alcance. Atua a distâncias da ordem de $10^{-13}cm$, e é responsável por manter unidos os constituintes do núcleo atômico, isto é, pela estabilidade nuclear. Sob certas circunstâncias pode ser repulsiva, mas é basicamente atrativa.
- **Interação Fraca:** interação fraca, de curtíssimo alcance. É responsável pelos decaimentos radioativos, tais como o decaimento beta nuclear, e interações de neutrinos.
- **Interação Eletromagnética:** interação de longo alcance, muito mais fraca que a interação forte. É responsável pelos efeitos elétricos e magnéticos, e determina a maneira pela qual as partículas com carga elétrica interagem umas com as outras, e com os campos magnéticos. Pode ser atrativa ou repulsiva, e age somente na matéria carregada de carga elétrica.
- **Interação Gravitacional:** a interação mais fraca, mas de longo alcance. É sempre atrativa, e atua entre absolutamente todas as partículas no Universo.

Atualmente essas quatro forças são distintas umas das outras e possuem características muito diferentes, mas no universo primordial, onde a configuração de temperatura e energia eram bem diferentes, pensa-se que não era assim. Acredita-se muito fortemente que, no universo primordial com temperatura muitíssimo mais alta que a atual, todas as forças eram unificadas, isto é, eram apenas uma

<i>Característica</i>	<i>Forças Unificadas</i>	<i>Tempo</i>	<i>Temperat. (GeV)</i>
Forças unificadas	Forte, fraca, eletromagn. e gravidade	0	∞
Gravidade separada	Forte, fraca, eletromagn.	10^{-43} s	10^{19}
Forte separada	Fraca e eletromagn.	10^{-35} s	10^{14}
Fraca e eletromagn. separadas	Nenhuma	10^{-11} s	100
Universo presente	Nenhuma	10^{15} anos	10^{-12}

Tabela 2.1: Escalas de tempo e temperatura no qual aconteceram a proposta perda seqüencial da unificação das quatro forças fundamentais.

única força. Nas energias que se alcançam hoje, em aceleradores de partículas, da ordem de $10^{15}K$, as forças eletromagnética e força fraca unificam-se na força eletro-fraca, perdendo suas identidades individuais (Tabela 2.1). As teorias conhecidas como Grandes Teorias Unificadas (*Grand Unified Theories* - GUTs) postulam que as forças forte e eletromagnética comportar-se-ão como uma única força unificada em energias e temperaturas que são cerca de um trilhão de vezes mais altas do que os experimentos terrestres alcançam atualmente, e a força gravitacional uniria-se às outras para energias ainda mais altas que isso. Mas a GUT permanece apenas uma especulação teórica, pois a unificação das quatro forças ainda não foi alcançada. Interessante observar como o mundo microscópico das partículas de alta energia e forças fundamentais estão inexoravelmente ligadas ao mundo macroscópico de largas escalas da astrofísica e da cosmologia.

Mesmo sendo a interação gravitacional extremamente fraca, em se tratando de distâncias e massas cosmológicas ela se sobrepõe às outras, sendo portanto, a mais importante força no entendimento do Universo em larga escala.

2.2 Introdução à Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) [2, 22] foi desenvolvida em 1916 por Albert Einstein, um dos maiores cientistas do século XX. Um pouco antes disso, em 1905, ele elaborara a Teoria da Relatividade Especial (TRE) [2, 22], onde os

postulados principais são que a velocidade da luz c é constante no vácuo e não depende da velocidade de movimento da fonte propagadora, e que, tanto c como todas as leis da física, são as mesmas em todos referenciais inerciais. Dessa idéia decorre que, tanto a passagem do tempo como a medida de distância são relativas, daí o nome da teoria. Um princípio importante, decorrente desses postulados, é o *Princípio da Causalidade*, que diz que causa deve sempre preceder o efeito, isto é, nada pode mover-se mais rápido que a luz. Esse mesmo princípio também dificulta a explicação da gaussianidade da radiação de fundo, pois suas flutuações são tão suaves que parece que todo o céu já esteve conectado no passado. Porém, para que isso seja verdade, nas condições dadas a seguir, a luz deve ter viajado com velocidade maior do que a velocidade da luz, c .

Na gravitação vista ao modo de Isaac Newton, existe uma força atrativa entre corpos: *Matéria atrai matéria em qualquer lugar do espaço*. Um novo paradigma instala-se com a TRG, pois a *"gravidade não é mais uma estranha força física transmitida através do espaço e do tempo. É a manifestação da curvatura do espaço-tempo quadridimensional"* [23]. A partir desse momento tem-se em mente que *matéria curva o espaço-tempo, e esse mesmo espaço-tempo diz à matéria como comportar-se*. Expressamos essa idéia através da Equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

onde o lado esquerdo representa a curvatura espacial e o lado direito representa a distribuição de matéria e energia, explicada com mais detalhes no Apêndice A.5.

O princípio fundamental em torno do qual se desenvolve a TRG diz: *"As leis da física são exatamente as mesmas para todos os corpos em movimento, qualquer que seja seu estado de movimento, em relação a um dado referencial, inercial ou em queda livre, e não existe experimento capaz de distingüí-los"* [2]. Mas gravidade e inércia são a mesma coisa? Sabe-se que gravidade é a tendência

de corpos massivos atraírem-se uns aos outros, e que inércia é a resistência de um corpo contra a mudança no seu estado corrente de movimento. Então, são dois conceitos físicos completamente diferentes. Para a força eletromagnética, a fonte (carga Q) e inércia (m) são de fato diferentes, porém para a gravidade elas aparecem ser idênticas. E esse é o *Princípio da Equivalência*, o qual postula que "*gravidade e inércia são duas palavras diferentes para exatamente a mesma coisa*", ou ainda que "*a força da gravidade em um objeto é sempre proporcional à inércia desse mesmo objeto*" [24], isto é $\frac{m_{\text{gravidade}}}{m_{\text{inércia}}} = 1$ (Experimento de Eötvös [25]).

O *Princípio da Equivalência* é válido para laboratórios pequenos (pequenos em comparação às distâncias para as quais o campo gravitacional muda significativamente). Uma importante consequência desse princípio são as *forças de maré*. As *forças de maré* podem fazer com que um pequeno planeta se desintegre se estiver em queda na direção de um corpo muito mais massivo. Forças de maré são exercidas por campos gravitacionais que envolvem os corpos massivos, e não por campos gravitacionais produzidos por aceleração. Não existe um sistema de referência no qual um observador não verá os efeitos de tais forças de maré, ou em outras palavras, não existe um sistema de referência em queda livre no qual a gravidade se anula globalmente, mas existe um sistema de mesmo tipo, no qual a gravidade se anula localmente (o espaço-tempo é localmente plano).

Outro princípio fundamental é o *Princípio de Ação Mínima*, que interpretamos aqui como o fato de que a luz deve viajar em um caminho que minimiza a distância entre dois pontos. Sabemos que para um espaço euclidiano plano, esse caminho é uma linha reta. O caminho que minimiza a distância em uma variedade (Apêndice A.2.2) qualquer, é chamado de geodésica (Fig. 2.1). A variedade aqui é representada pelo espaço-tempo quadridimensional. A geodésica é a distância mais curta entre dois pontos no espaço, e a maior separação entre dois pontos na variedade espaço-temporal.

Para estudar o Universo precisamos adotar determinadas premissas, e a mais

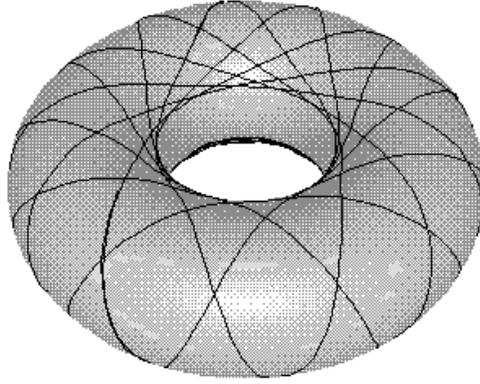


Figura 2.1: Geodésicas em um toro: a trajetória geodésica em um toro nunca cruza o anel interno. As geodésicas são caminhos extremos, de máximo ou de mínimo.

importante delas é o *Princípio Cosmológico* que diz: *Não existe nada de especial no planeta Terra, portanto, nossas observações em larga escala do Universo são as mesmas que as de qualquer outro observador posicionado em outro lugar qualquer do Universo.* Em outras palavras, *o Universo parece ser o mesmo em todas as direções, isto é, é espacialmente homogêneo e isotrópico.* A descrição da evolução do Universo vista desse modo, é descrita pela solução das equações da Relatividade Geral, proposta por Friedmann (1922, 1924) e enriquecida por Lemaître (1927, 1931), Robertson (1929, 1933) and Walker (1935), conhecida como solução de FLRW [26]. O universo pode ser descrito localmente por uma métrica de FLRW:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\tau^2, \quad (2.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $d\tau$ é uma métrica riemanniana com curvatura seccional constante que geralmente é escrita na forma:

$$d\tau^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2),$$

lembrando que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e que k é o parâmetro de curvatura.

<i>Geometria</i>	<i>Curvatura</i>	<i>Matéria</i>	<i>Destino</i>
Euclidiana	$k = 0$	$\Omega = 1$	Expansão desacelerada
Esférica	$k = +1$	$\Omega > 1$	Big Crunch
Hiperbólica	$k = -1$	$\Omega < 1$	Expansão acelerada

Tabela 2.2: Relação entre curvatura e matéria do Universo [27].

O *Modelo Padrão* da cosmologia é dado por essa solução, já que descreve uma distribuição de matéria e radiação completamente isotrópica e homogênea, comportando-se como um fluido perfeito. Friedmann [3] também descobriu uma família de soluções para as equações da TRG com constante cosmológica nula, caracterizadas pelo parâmetro k que pode tomar os valores $+1, 0, -1$, que descrevem três tipos possíveis de geometria (ver Apêndice A.1.2) relacionadas com a densidade de matéria e expansão² do universo:

- **k=1**: Se a densidade de matéria do universo é alta o suficiente ($\Omega > 1$) para reverter a expansão, nós vivemos num *universo fechado*, com geometria esférica. Então o universo recolapsar-se-á.
- **k=0**: Se a densidade de matéria do universo tem um valor crítico ($\Omega = 1$), nós vivemos num *universo plano*, com geometria euclidiana. Ele estará em expansão indefinidamente, mas as velocidades das galáxias diminuirão com a distância, tendendo a zero no infinito.
- **k=-1**: Se a densidade do universo é baixa ($\Omega < 1$), então vivemos num *universo aberto*, com geometria hiperbólica, que se expandirá para sempre.

O destino final do universo [27] é estabelecido portanto por uma densidade crítica (ρ_c), e por sua vez o parâmetro Ω está relacionado com a densidade total (ρ_{tot}) e a densidade crítica da seguinte maneira: $\Omega = \frac{\rho_{tot}}{\rho_c}$. Os modelos propostos para o universo indicam três situações distintas envolvendo uma expansão indefinida acelerada ($k = -1$) caso a densidade total seja menor que a densi-

²O Universo está em expansão. A grande questão cosmológica é se esta expansão continuará para sempre, ou não.

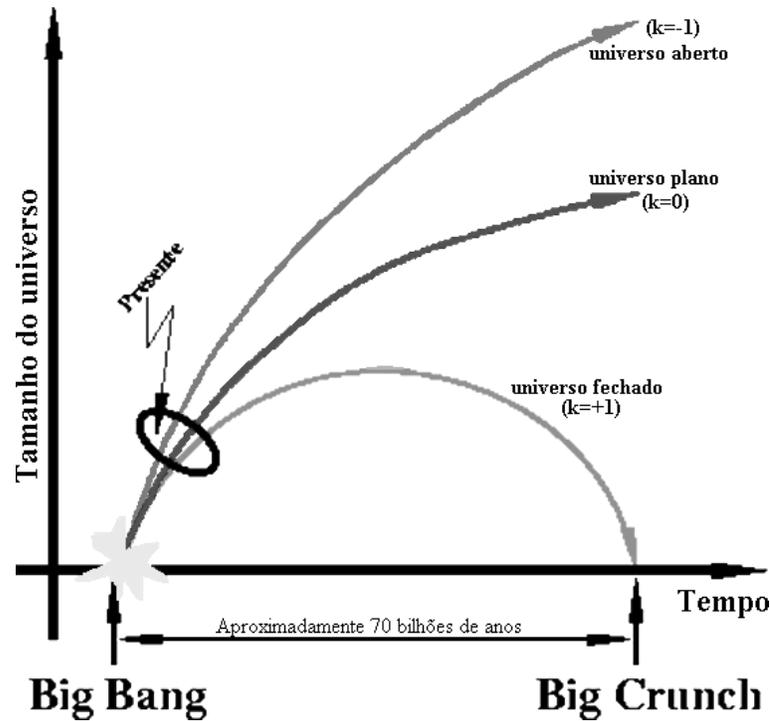


Figura 2.2: Relação entre curvatura e destino do Universo. O eixo vertical indica o raio do universo e o eixo horizontal é o tempo. Nessa figura também percebemos um dos motivos pelos quais é tão difícil decidir por um tipo de geometria.

dade crítica ($\Omega < 1$), ou uma expansão desacelerada que num determinado momento cessará até um universo estacionário ($k = 0$) caso a densidade total seja exatamente igual à densidade crítica ($\Omega = 1$), ou então uma expansão desacelerada indefinidamente, seguida de uma contração ($k = +1$), conhecida como *Big Crunch*, caso a densidade total seja maior que a densidade crítica ($\Omega > 1$) [28]. Com a descoberta de que o universo está em expansão acelerada [20], poderíamos imediatamente supor que vivemos portanto em um universo aberto ($k = -1$), mas a questão não é tão simples assim, pois acredita-se na existência de energia escura [29, 30], assunto o qual não entraremos nos méritos. No momento, nos interessou apenas distinguir as três geometrias possíveis e sua relação com a quantidade de matéria no universo, e o fato de que ele está em expansão (Fig. 2.2).

2.3 Geometria e a expansão do Universo

O Universo de FLRW não muda sua geometria, isto é, o parâmetro k não depende do tempo. Um universo plano sempre foi e sempre será um universo plano, assim como um universo de curvatura negativa teve sempre sua curvatura negativa, e assim permanecerá. E sendo que a curvatura de uma superfície é uma propriedade intrínseca, então é possível determinarmos a curvatura do Universo sem precisarmos sair dele, ou seja, sem precisarmos de uma dimensão extra. Por outro lado, pode ser mais direto medir a quantidade de matéria ou o comportamento de expansão do universo do que medir a sua geometria propriamente dita.

Não existe ainda um consenso científico sobre a geometria do universo, mas as observações recentes indicam que vivemos em um universo plano. É importante lembrar, no entanto, que não há nenhum experimento que tenha resolvido essa questão de forma irrefutável, como se vê na Fig. 2.3 [16,30]. Nesta mesma figura, vê-se que as observações de supernovas [27,30], explosões de estrelas super massivas em outras galáxias muito remotas, indicaram que as galáxias estão sendo aceleradas. E se o universo está em expansão, a luz provinda de galáxias distantes sofre um deslocamento para o vermelho (*redshift*), sendo maior quanto mais distante está a galáxia. O deslocamento para o vermelho z é dado por:

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad (2.2)$$

onde se $z = 0$ a fonte está parada, se $z = 2$ então $v = 0.8c$ e se $z = \infty$, $v = c$.

Utilizando métodos observacionais, Edwin Powell Hubble (1889 – 1953), em 1929, formulou a seguinte lei: "*Quanto mais distante a galáxia, maior sua velocidade de afastamento (recessão)*", isto é, quanto mais longe está a galáxia mais rápida será sua velocidade de recessão devido à expansão do universo [31,32], como se pode ver na Fig. 2.4. Esta foi a primeira evidência de que o universo

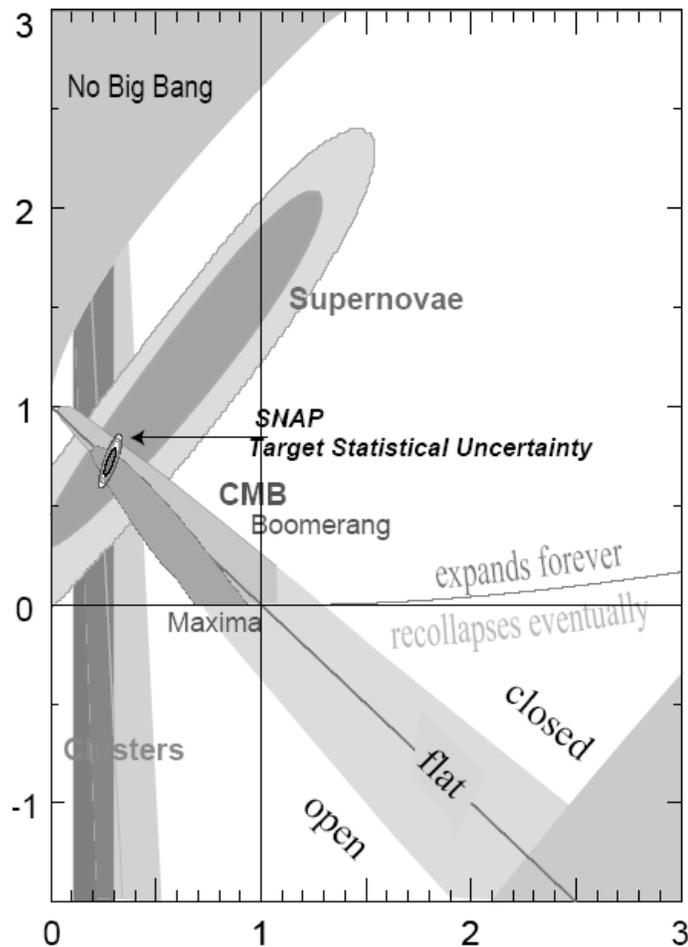


Figura 2.3: Resultados de observações para a curvatura do Universo. O eixo horizontal corresponde à densidade de massa Ω , e o eixo vertical corresponde à constante cosmológica, também chamada de densidade de energia de vácuo. O ponto de encontro das retas horizontal e vertical interna corresponde a um universo plano sem constante cosmológica. Note que os resultados dos experimentos ainda não são suficientes para definir a geometria. [30]

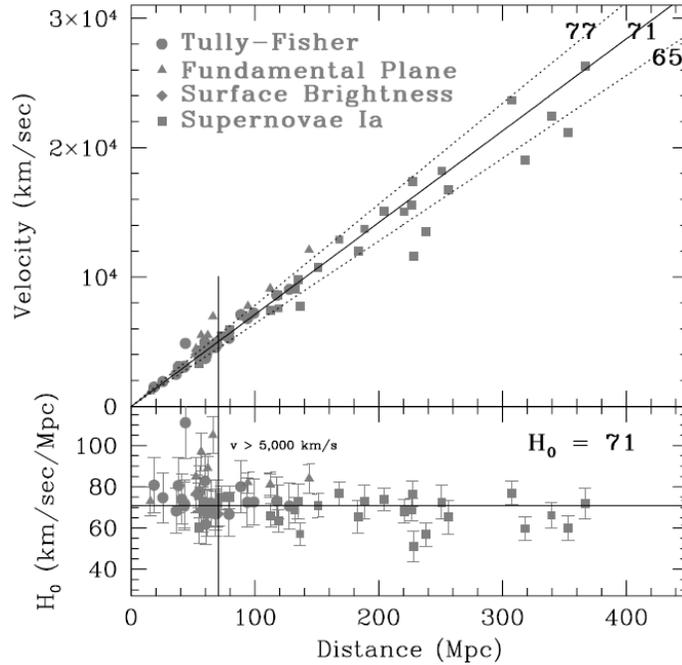


Figura 2.4: Lei de Hubble: diagrama de Hubble da distância versus a velocidade de galáxias, conforme diferentes experimentos. As linhas sólidas são o melhor "fit" possível que leva ao valor da constante de Hubble. Embaixo encontra-se valores residuais para H_0 como função da velocidade. Para maiores detalhes ver o trabalho de revisão de Freedman [34].

está se expandindo, pois fez uma relação entre quão longe uma galáxia está de nós e quão rápido ela está se afastando devido à expansão do universo. A constante de Hubble é um número que mostra a taxa na qual o Universo está se expandindo. A relação entre a velocidade de recessão v e a distância d é uma relação linear $v = H_0 d$, onde H_0 é a constante de Hubble. Existem inúmeros trabalhos recentes para obter um valor mais fidedigno para a constante de Hubble, mas o que iremos utilizar aqui será o valor $H_0 = 71 \text{ km/s/Mpc}$ [16, 33], proveniente das melhores medidas (precisão de 10%, conforme Freedman [34]).

Com o processo de expansão há diminuição de temperatura, pois a energia inicialmente concentrada passa a ser distribuída num volume cada vez maior, isto significa que o universo primordial era denso e quente. O deslocamento para o vermelho condiz com um processo de expansão, e também a temperatura do universo, pois é bem baixa hoje (ver Secção 2.4). A constante de Hubble pode ser

usada para estimar o tamanho e a idade do Universo. Calculando-se o inverso da constante de Hubble estimamos a idade do universo, cujo o valor numérico hoje corresponde entre 12 e 16 bilhões de anos:

$$t_{Hubble} = \frac{d}{v} = \frac{1}{H_0} \approx 14Ga.$$

De forma análoga podemos estimar o tamanho aproximado do Universo:

$$d_{Hubble} = ct_{Hubble} = \frac{c}{H_0} \approx 4,2Gpc,$$

onde $1pc = 1parsec$ corresponde a 3,6 anos-luz.

2.3.1 Topologia compacta

Primeiramente é importante saber que topologia e geometria não são a mesma coisa, isto é, uma não define a outra. A topologia interage com a geometria através da curvatura de superfícies e da torção de curvas. Por exemplo, sabemos que a curvatura constante de uma curva causa o seu fechamento em um círculo e a curvatura constante de uma superfície causa o seu fechamento em uma esfera. A esfera e o torus são ambas superfícies fechadas com curvatura positiva, mas são topologicamente diferentes.

Em geral para cada tipo de curvatura existe uma gama específica de topologias possíveis. No entanto, a topologia não aparece explicitamente nas equações de Einstein, uma vez que essas equações são descrições locais.

Na prática, pode ser mais simples descobrir o tipo de topologia do que o tipo de geometria, pois é muito difícil ver a geometria de forma local, em pequena escala, ao contrário do que acontece se vista de forma global. Para exemplificar, basta olhar a figura 2.6, onde mostra-se que localmente uma esfera pode parecer um plano.

No presente trabalho, estamos interessados em topologia compacta, isto é,

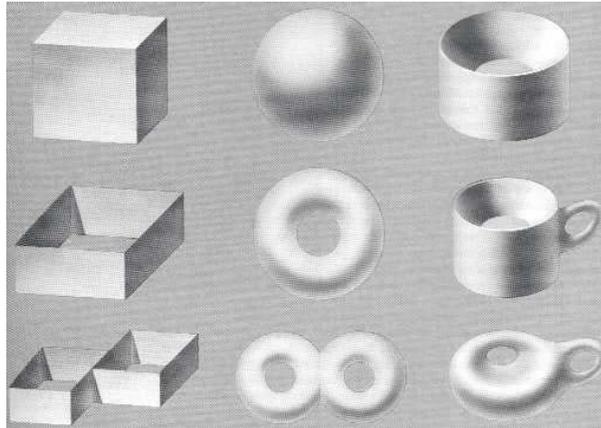


Figura 2.5: Topologias fechadas equivalentes. Todos elementos da primeira linha são topologicamente equivalentes, e assim por diante.

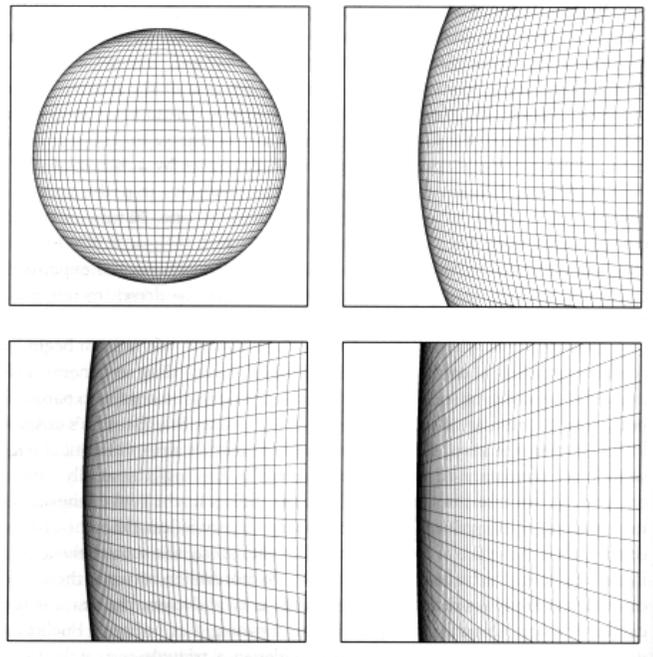


Figura 2.6: Esfera vista em diferentes escalas por um observador externo. De perto, em pequena escala, se parece com um plano.

sem bordas. Nesse tipo de topologia, podemos imaginar um universo finito com $k = -1$, porém sem fronteiras, também chamado de universo fechado ³.

2.4 Radiação cósmica de fundo - digital do universo primordial

The discovery of the cosmic microwave background radiation changed forever the nature of cosmology, from a subject that had many elements in common with theology to a fantastically exciting empirical study of the origins and evolution of the things that populate the physical universe. John Bahcall

Em 1964 Arno Allan Penzias e Robert Woodrow Wilson [35], ao calibrar em uma antena de 6m, dos Laboratórios da Bell em Nova Jersey, detectaram acidentalmente um ruído, que persistia por mais que eles mudassem a antena de posição. No começo pensaram que esse ruído fosse algum problema da antena, mas depois perceberam que era um ruído extra que não conseguiam explicar. Dava-se aí, a descoberta da radiação cósmica de fundo, um reminiscente teoricamente previsto pelo *Big Bang* e a observação cosmológica mais significativa desde Hubble. A importância da descoberta rendeu-lhes o *Prêmio Nobel de Física* em 1978.

A radiação cósmica de fundo, também conhecida como "*A Assinatura de Deus*", é uma forma de radiação eletromagnética que permeia todo o Universo. É tipo radiação de corpo negro, e conforme experimentos atuais [16, 36–38], de temperatura $2,725 \pm 0.002K$ e frequência no intervalo das microondas. Teoriza-se que a radiação cósmica de fundo é o resultado da assimetria de matéria e anti-matéria no fim da era hadrônica e início da era leptônica do universo primordial, onde a matéria se aniquilou resultando em fótons. Inicialmente os fótons interagiam com a matéria devido a alta energia que possuíam, mas devido à expansão

³Neste contexto podemos falar de topologia fechada como sendo a mesma coisa que topologia compacta, embora no contexto matemático sejam conceitos diferentes, no qual não estamos interessados.

e o conseqüente esfriamento do universo, os fótons foram perdendo energia até o momento que a mesma não é mais suficiente para interação com a matéria, basicamente formada por gás . A partir desse momento, na superfície de último espalhamento [16, 33, 37], o universo tornou-se transparente para a luz, isto é, esses fótons passaram a ter livre caminho médio infinito.

No *Modelo Padrão*, as estruturas do Universo são formadas a partir da amplificação gravitacional de pequenas perturbações na distribuição de massa inicial. Seria praticamente impossível haver a formação de estruturas observadas, como galáxias, estrelas e planetas e, portanto, da Terra e de nós mesmos, sem que houvesse anisotropias na temperatura da radiação de fundo do Universo. Isto porque a radiação e a matéria estiveram em equilíbrio térmico no Universo primordial e, então, qualquer irregularidade ocorrida na distribuição inicial de matéria seria refletida na distribuição angular desta radiação. A detecção destas flutuações era o principal ponto que faltava na compreensão da teoria do *Big Bang* [37,39] e da formação e evolução do Universo, antes da descoberta de Penzias e Wilson [35].

Uma das características mais salientes dessa radiação é seu alto grau de homogeneidade. Existe alguma anisotropia, como já dissemos, que são pequenas variações na temperatura (da ordem de $10^{-5}K$) da radiação de fundo de ponto a ponto no céu responsáveis pela formação de grandes estruturas [42]. Mas, como podemos enxergar o universo primordial através dessa radiação? A resposta é um tanto quanto simples. Em $z = 0$ o universo é justamente transparente. E quanto maior o *redshift* (z), mais denso ($\rho = \rho_0(1+z)^3$) e quente ($T = T_0(1+z)$) é o universo [38]. Em $z = 1100$, o universo é tão denso que sua temperatura excede $3000K$. Em uma adequada e estreita transição, o universo torna-se completamente ionizado e opaco à luz visível (última superfície de espalhamento). Nesse momento, o universo tem 300 mil anos de idade. A radiação cósmica de fundo mostra as condições do Universo cerca de 380 mil anos depois do *Big Bang* [33,37, 41], quando o mesmo passou de opaco para transparente, também

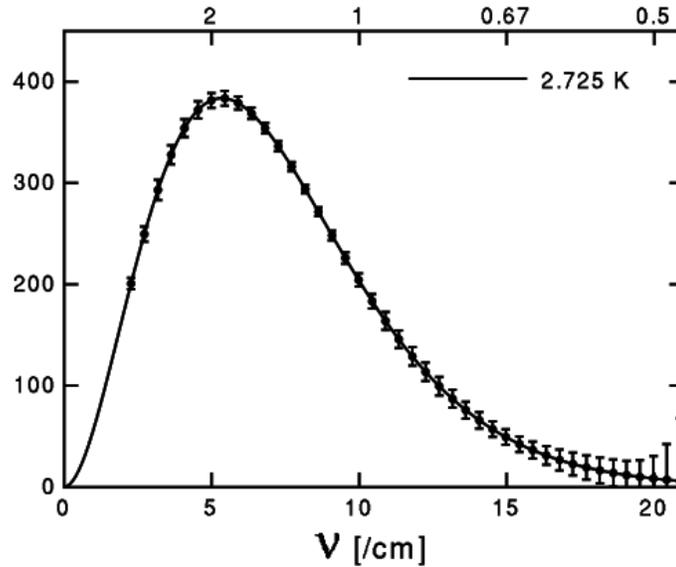


Figura 2.7: FIRAS (Far infrared absolute spectrophotometer) e DMR (Differential Microwave Radiometers): instrumentos do COBE. Radiação de fundo emite como um corpo negro [36, 40] de temperatura $2.728 \pm 0.004K$ [33], com desvio do espectro de um corpo negro maior que 0.25% na intensidade de pico [41]. O eixo superior é o comprimento de onda em mm , o eixo horizontal inferior é a frequência em cm^{-1} , e o eixo vertical é a intensidade medida em mega Joules-ano por esfero-radiano (ângulo sólido).

devido a baixa energia desses fótons. Nesse período a temperatura era suficiente para que os prótons e as partículas alfa, formadas nos três a quatro primeiros minutos, começassem a capturar elétrons e formar átomos de hidrogênio e hélio neutros, na chamada época da recombinação, ou fase de desacoplamento, passando para um universo dominado por matéria.

A radiação cósmica de fundo emite exatamente como um corpo negro (Fig. 2.7), e é caracterizada por obedecer as duas leis seguintes:

- **Lei de Stefan-Boltzmann:** $L \propto T^4 \rightarrow$ um corpo quente brilha mais do que um corpo frio.
- **Lei de Wien:** $\lambda_{max} \propto \frac{1}{T} \rightarrow$ o espectro de um corpo quente é mais azul que o de um corpo frio.

e tem as seguintes características [16, 33, 43]:

- **Temperatura:** $2,725 \pm 0,002K$;

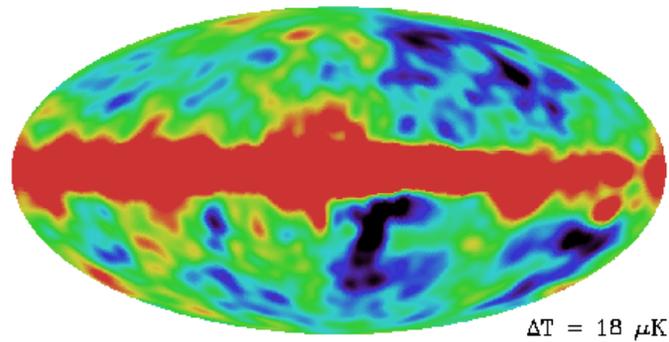


Figura 2.8: Mapa do céu visto pelo COBE, onde as diferentes tonalidades representam diferentes temperaturas. Anisotropias da ordem de $\Delta T = 18\mu K$, e resolução angular de 7° [40].

- **Isotropia:** de 1 parte em 100 mil.

A radiação cósmica de fundo é uma das maiores ferramentas atuais para o estudo da cosmologia. Em 18 de novembro de 1989, a NASA lançou o COBE (*Cosmic Background Explorer - Explorador do Fundo Cósmico*), um satélite operando na faixa de microondas para analisar com detalhes essa radiação, cujos principais objetivos eram medir com precisão a temperatura, e encontrar as flutuações esperadas na radiação cósmica de fundo [33, 37, 41, 44]. O COBE enxergava diretamente a luz que o Universo emitiu após o universo ter ficado transparente para essa faixa do espectro da luz (devido a baixa energia dos fótons desse comprimento de onda). Não podemos esquecer o fato de que os planetas, estrelas, galáxias e nuvens de gás emitem muito pouco nessa faixa de comprimento de onda. O COBE fez uma imagem térmica do céu inteiro, e após devida subtração dos dipolos devido à rotação da Terra e a contribuição da nossa galáxia, o resultado foi um mapa colorido em 1992, como mostrado na Fig. 2.8. As regiões mais quentes estão em rosa e as mais frias em azul, a diferença de temperatura de uma região para outra é dada por: $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-3}K$. A radiação tem uma temperatura média de $2.735K$, em concordância com o valor experimental medido em 1964 por Penzias e Wilson [35], que era $2.9K$.

A radiação medida pelo COBE [36, 37, 40] é muito bem descrita por uma curva

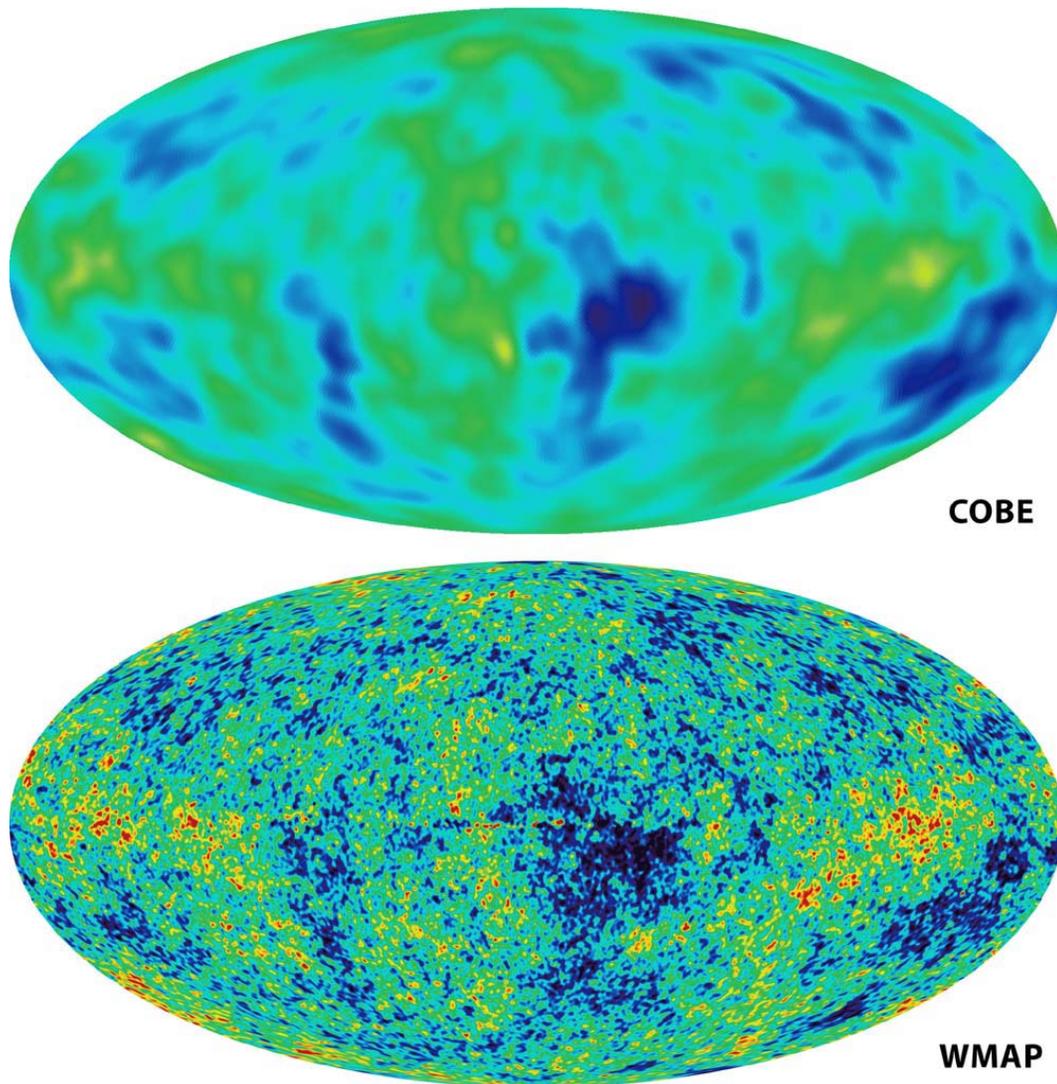


Figura 2.9: Mapa do céu visto pelo COBE (acima) e pelo WMAP (abaixo). O WMAP tem resolução 30 vezes mais fina [43] do que seu antecessor [45].

de radiação de corpo negro (Fig. 2.7) a $2.725K$, valor da radiação predita para o gás quente de quando o Universo se formou, visto com um avermelhamento correspondente; a expansão do Universo dilata o comprimento de onda pelo mesmo fator que o Universo se expande entre o tempo da emissão e da observação. Também mostraram que uma parte do céu tem temperatura de $2.7251K$ enquanto outra parte do céu tem $2.7249K$.

Experimento WMAP

O WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) foi lançado pela NASA em 2001, com o objetivo de medir de diferentes formas a radiação de fundo [46], a fim de testar as teorias sobre a natureza do universo. WMAP criou suas imagens das anisotropias usando a diferença de temperatura da radiação de fundo medidas em direções opostas. É um sucessor do COBE, e tem uma resolução 30 vezes mais fina [43], revelando informações sobre a história e o destino do universo de forma mais precisa (Fig. 2.9). Mediu a temperatura da radiação de fundo cobrindo todo o céu com alta resolução angular ($< 0.3^\circ$) e sensibilidade. Os dados do WMAP mostraram que o universo tem 13.7 bilhões de anos (com erro de 1% [16, 43]), e que o universo se expandirá para sempre.

A grande importância desses dados é que podem revelar o tamanho, o conteúdo material, idade, geometria e destino do universo. Eles também podem revelar sobre a estrutura primordial que evoluiu na forma de galáxias e testar idéias e teorias sobre as origens dessa estrutura primordial.

Em 2007, o satélite Planck [19] entrará em ação, com a perspectiva de medir as flutuações da temperatura da radiação de fundo com ordem de $\Delta T = 10^{-7} K$.

Ainda existem questões fundamentais em aberto no *Modelo Padrão*, que torna relevante o investimento nesses projetos para o estudo da radiação cósmica de fundo. Entre elas, uma das mais interessantes é saber como a radiação de fundo pode ser homogênea com uma precisão maior que 1° , se essas regiões nunca se comunicaram, isto é, são regiões não conectadas de forma causal? Isso decorre do fato que a luz da radiação de fundo foi emitida quando o universo se tornou transparente (superfície de último espalhamento), aproximadamente quando o universo tinha 300 mil anos, em $z = 1300$. O tamanho da área que pode ter conectado-se de forma causal é portanto menor que 300 mil anos-luz, e essa área aparece hoje sob um ângulo um pouco maior de 1° .

Como já referido na Introdução, o alto grau de homogeneidade observado no

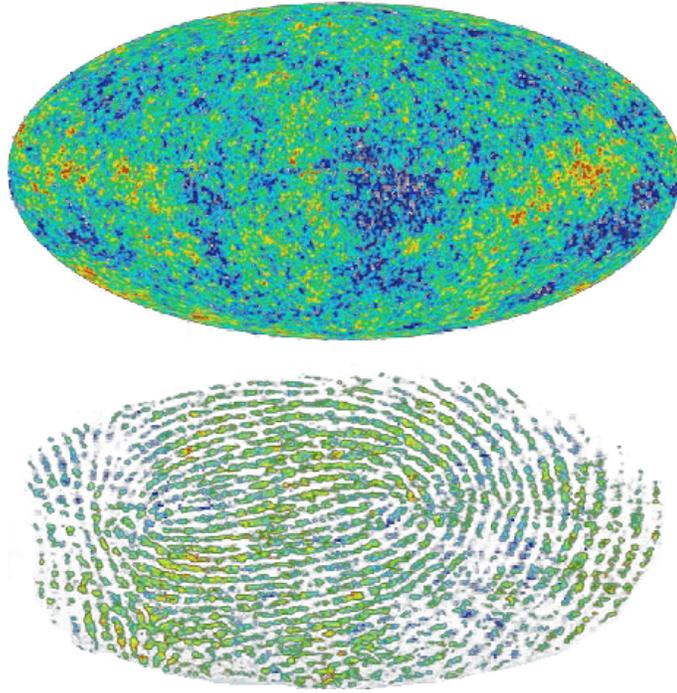


Figura 2.10: Mapa do céu visto pelo WMAP em outra banda de frequência. Novamente aqui as diferentes cores representam diferentes temperaturas [46]. Esse mapa é realmente a digital do Universo primordial [45].

universo tem sido relacionado à dinâmica de fótons em superfícies compactas de curvatura negativa. As trajetórias fotônicas são nesse caso fortemente caóticas e a dinâmica apresenta forte *mixing* [8]. Há uma conjectura de Berry que diz que as funções de onda em sistemas onde a Mecânica Clássica é fortemente caótica, podem ser modeladas por funções randômicas gaussianas (isto é, pela superposição de ondas randômicas) [47], o que explicaria o fato que as flutuações na radiação de fundo teriam uma distribuição gaussiana [10,11]. Esse no entanto, é todo um outro extenso campo de pesquisa chamado de Caos Quântico [7,48], para o qual, um outro capítulo nessa dissertação seria necessário, mas não conveniente.

Dados do WMAP indicam que contribuições de sinais não-gaussianos nas flutuações de temperatura da radiação de fundo, e até mesmo de ruído instrumental, não são significativos [49]. A gaussianidade nas flutuações da temperatura não é um consenso. Há inúmeros trabalhos que investigam possibilidades plausíveis de desvios da gaussianidade nas flutuações primordiais usando os dados

do WMAP [50–52].

2.5 Estabilidade em trajetórias de fótons

Para explicar a gaussianidade da radiação cósmica de fundo em geometria hiperbólica é necessário recorrer à propriedade de instabilidade desse tipo de geometria (visto no Apêndice A.1.2), isto é, duas trajetórias que inicialmente estão juntas em $t = 0$, divergem rapidamente, de forma exponencial para $t > 0$. O presente estudo trata da estabilização de fótons em universos de topologia compacta e curvatura negativa, baseado no artigo de Dettman *et al* [5]. O cálculo baseia-se em um universo descrito por um elemento de linha da forma FLRW (eq. (2.1)), cujo espaço-tempo é descrito por:

$$ds^2 = R^2(\tau) \left[(1 + 2\phi)d\tau^2 - \frac{1 - 2\phi}{1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2 + z^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \right], \quad (2.3)$$

onde $R^2(\tau)$ é o fator de escala (Apêndice A.3.8), também conhecido como raio de curvatura espacial do universo onde $\tau = \int R^{-1}dt$ é o tempo conforme, e R aparece somente nesta definição desde que essas equações permanecem invariantes conformalmente [4].

Nessa formulação a métrica do espaço é perturbada por flutuações de densidade com velocidades não-relativísticas, e essa perturbação é dada pelo potencial gravitacional Newtoniano $\phi \ll 1$. Utiliza-se o sistema conforme de coordenadas tipo Newtoniano, com variáveis espaciais (x, y, z) , comumente chamadas de co-moventes, pois expandem-se uniformemente na mesma taxa de expansão do Universo. As unidades são escolhidas de forma que a constante gravitacional G e a velocidade da luz c são iguais a 1. Também foi desprezadas perturbações no tensor de Weyl, característico de ondas gravitacionais, e flutuações de pressão causadas, por exemplo, por neutrinos relativísticos.

Partimos da *equação de desvio geodésico* (eq. (2.4)) que em espaço curvo,

descreve a separação ξ das trajetórias de duas geodésicas de fótons que inicialmente estão juntos, utilizando o termo de *background* e o termo de perturbação⁴ do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\beta}^{\alpha}$ (detalhes em A.3.6):

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} = (R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} + \delta R_{\mu\nu\beta}^{\alpha})V^\mu V^\nu \xi^\beta \quad (2.4)$$

onde λ é o parâmetro a fim (definido em [53] como sendo o múltiplo do tempo próprio τ mais um deslocamento: $\lambda = a\tau + b$), e V são vetores tangentes, que podem ser interpretados como a quadri-velocidade de um observador co-movente. Essa equação expressa que a aceleração relativa entre duas geodésicas vizinhas é proporcional à curvatura. Fisicamente, a aceleração de geodésicas vizinhas é interpretada como a manifestação das forças gravitacionais de maré, aqui expressos pelo potencial gravitacional ϕ .

De acordo com a TRG, os fótons (luz) descrevem geodésicas nulas (menor distância entre dois eventos) no espaço-tempo. Tomando as seguintes direções para o movimento das trajetórias (geodésicas) que os fótons seguem como:

$$V^\mu = V^\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

e tomando as perturbações, no vetor conexão, como sendo ortogonais a essa

⁴Importante observar que é utilizado o símbolo grego δ para indicar termos perturbativos de quantidades.

direção, isto é, nas direções espaciais x e y :

$$\xi^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Utilizamos o tensor métrico não-perturbado e o tensor métrico perturbado⁵, respectivamente, como segue:

$$g^{\gamma\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f(r) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde, para simplificar a notação, definimos:

$$f(r) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \quad (2.8)$$

e

$$\delta g^{\gamma\epsilon} = \begin{pmatrix} 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\phi f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\phi f(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\phi f(r) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Finalmente, efetuando os cálculos mostrados no Apêndice B, chega-se às seguintes equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, para as componentes

⁵Ambos saem da métrica de FRLW.

de separação entre duas geodésicas de fótons:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k + 2\phi_{\zeta\zeta} & 2\phi_{\zeta\eta} \\ 2\phi_{\zeta\eta} & k + 2\phi_{\eta\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

onde ζ e η são as componentes de separação no plano τ perpendicular à direção de movimento V^α , e temos as derivadas segundas de ϕ , chamadas de forças de maré, que podem ser completamente caracterizadas a partir de um completo conhecimento das flutuações de densidade de matéria. Enquanto se move, um fóton *verá* essa distribuição de matéria como uma força estocástica dependente do tempo. Essa força flutua rapidamente (a velocidade do fóton é grande) e aleatoriamente [5] (estocasticamente) com média temporal nula. A distribuição randômica para a distribuição de matéria em larga escala é razoável para uma primeira investigação do problema, assim como, também nada divergente de resultados recentes na literatura [54].

Para ilustrar o comportamento qualitativo dessa classe de equações, é suficiente considerar uma componente satisfazendo:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = -(k + Af(\tau))u \quad (2.11)$$

onde A é um parâmetro de controle e $f(\tau)$ uma função estocástica com média nula. Esta equação tem uma analogia mecânica: ela também descreve um pêndulo invertido com um pivô móvel livre para oscilar verticalmente, no limite de pequenas oscilações. Nesse caso, u denota o deslocamento angular e o termo $Af(\tau)$ descreve a altura do pivô. A força gravitacional que desestabiliza o pêndulo corresponde a geometria cosmológica hiperbólica suave (não-perturbada), enquanto que o movimento do pivô corresponde as perturbações da métrica induzidas pelas flutuações na densidade de matéria. Embora a equação (2.11) possa parecer simples, suas soluções exibem uma rica variedade de diferentes compor-

tamentos qualitativos, no limite de tempos longos, conforme veremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Sistemas dinâmicos: caos e estabilidade

Freqüentemente, a mecânica clássica é vista como uma área da Física já concretamente estabelecida e estática, onde não se vislumbra mais nenhuma descoberta que possa influenciar outras áreas e onde todas as analogias já foram feitas [55]. Porém essa idéia é equivocada, conforme mostramos aqui.

Trataremos de sistemas dinâmicos com o intuito de mostrar a analogia entre o comportamento randômico clássico de um pêndulo perturbado com as trajetórias de fótons em um universo do tipo FRLW. Encontrar essas analogias é facilitar o entendimento intuitivo de fenômenos complicados à primeira vista.

3.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em n variáveis $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ que em geral, definem um ponto no espaço Euclidiano R^n :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, t) \quad (3.1)$$

Uma solução de um sistema dinâmico é uma função vetorial $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ que sat-

isfaz a equação (3.1) e a condição inicial:

$$\vec{x}(\vec{x}_0, 0) = x_0.$$

Em outras palavras, um sistema dinâmico é um sistema que possui um *estado* em cada instante de tempo, sendo que o *estado* é uma variável, ou conjunto de variáveis, interna ao sistema, que evoluem ao longo do tempo [56]. Um depósito de água onde o nível ou volume de água no interior do depósito é o estado do sistema, ou também, um forno onde o estado é a temperatura em seu interior, são exemplos de sistemas dinâmicos que se encontram em problemas cotidianos.

Um sistema pode ser determinístico ou estocástico, dependendo de como é representado o seu estado. Para estados que tomam valores reais, fixos, o sistema é dito determinístico. Se os estados do sistema forem descritos por uma função de densidade de probabilidade, através de uma variável aleatória, então o sistema é estocástico. Trataremos apenas de sistemas estocásticos, onde é conveniente considerar variáveis estocásticas, devido à existência de perturbações imprevisíveis no sistema [56].

Vamos começar nosso estudo de sistema dinâmico com um sistema Hamiltoniano, descrito por uma função Hamiltonina (H), cujas principais propriedades de nosso interesse são:

- sem dissipação, onde uma ou mais quantidades são conservadas;
- as equações são reversíveis no tempo;
- o volume no espaço de fases é conservado (*teorema de Liouville*);
- a dinâmica ocorre em um espaço de dimensão inteira (não fractal).

O caso que estudaremos é o mais comum e famoso oscilador harmônico: o pêndulo.

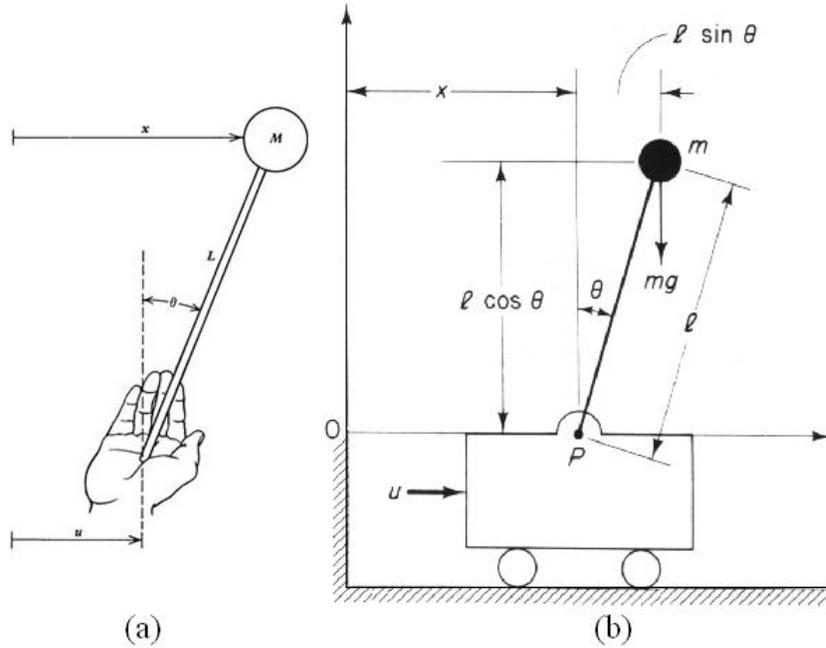


Figura 3.1: Pêndulo invertido. (a) Análogo prático: tentar estabilizar o pêndulo na posição invertida aplicando uma frequência u horizontal, suficientemente alta, com a mão. (b) Análogo experimental: estabilização na posição invertida utilizando um suporte móvel controlado, por exemplo, por computador.

3.1.1 O pêndulo

Um pêndulo ordinário simples consiste de uma massa m , suspensa em uma barra rígida de comprimento l , em um plano suspenso imerso em um campo gravitacional uniforme. Esse é um sistema aparentemente simples, além de ser um modelo físico muito útil e versátil, que possui uma dinâmica clara cuja descrição é acessível inclusive aos alunos principiantes.

O movimento unidimensional é o que nos interessa nessa abordagem do pêndulo (ver Fig 3.1). O Lagrangiano, o momentum e o Hamiltoniano desse sistema são dados, respectivamente, por [57]:

$$L = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(-\cos\theta) \quad (3.2)$$

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2\dot{q} \quad (3.3)$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(-\cos\theta) \quad (3.4)$$

que por sua vez geram a equação de movimento, que é uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0, \quad (3.5)$$

em coordenadas polares, onde θ é a amplitude angular de oscilação, g é a aceleração da gravidade e l é o comprimento do fio inextensível (ou barra rígida). É uma equação não-linear simples e importante, que não possui solução analítica em termos das funções padrões, mas existe uma solução analítica bastante complicada que é dada em termos da inversa de uma função definida por uma integral que não pode ser explicitamente integrada:

$$\text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right) = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{sn}\left[\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0), \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right], \quad (3.6)$$

onde α (amplitude do movimento) e t_0 são constantes determinadas pelas condições iniciais, e $\text{sn}(\mathbf{t}, \mathbf{k})$ é a função seno-elíptica de Jacobi a qual é a inversa da função definida pela seguinte integral:

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}} \quad (3.7)$$

Esta solução explícita é tão complicada que é extremamente difícil extrair as principais características da solução. Alternativamente, usando apenas conservação de energia, pode-se obter uma boa figura geométrica da solução da equação (3.5) no espaço de fases (Fig 3.2). Todas as curvas no espaço de fases são fechadas pois $\theta + 2\pi$ é equivalente a θ , isto é, possui período de 2π , de forma que o espaço de fases é cilíndrico.

No gráfico mostrado na Figura 3.1, podemos ver os pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ com velocidade angular igual a zero, que correspondem aos pontos de equilíbrio estável e instável, respectivamente. Em $\theta = \pi$ do pêndulo está na posição invertida [58].

Portanto, percebemos que, a princípio, a solução da equação (3.5) não exhibe

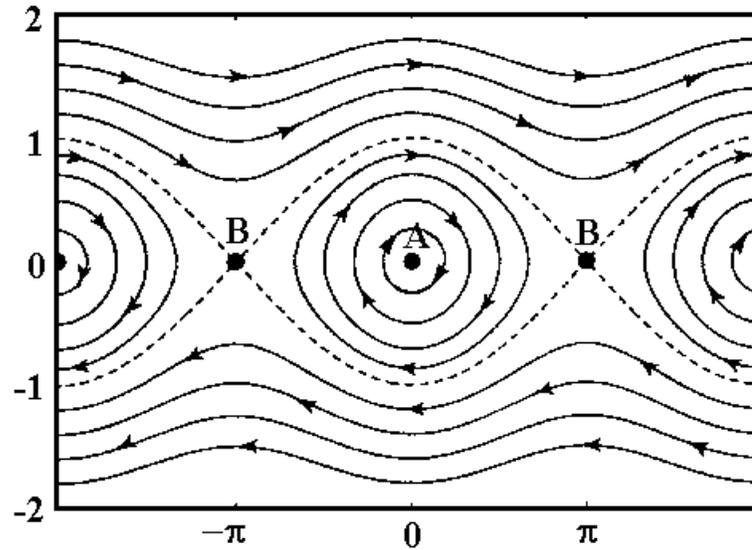


Figura 3.2: Trajetórias no espaço de fases de um sistema tipo o pêndulo. As curvas fechadas são toros. O eixo vertical é a velocidade angular do pêndulo e o eixo horizontal é o ângulo θ . Note que para pequenos valores de velocidade angular (ou energia total), o sistema é aproximadamente um oscilador harmônico. A linha pontilhada que passa através dos pontos instáveis B é o limite entre o movimento periódico constante (curvas fechadas) ao redor do ponto estável A e a região de circulação (curvas contínuas).

qualquer tipo de caos, porém pode-se obter comportamento caótico em pêndulos introduzindo uma ou mais perturbações dependentes do tempo causadas por uma força externa. Isso leva a uma perda de regularidade do diagrama do espaço de fase (caos).

Podemos adicionar mais complexidade na dinâmica desse sistema, adicionando uma vibração vertical com uma certa frequência ω em um certo intervalo, com uma amplitude A . Para diferentes valores de frequência e/ou amplitude, a dinâmica poderá ser irregular, caótica [12], ou ainda, o movimento caótico poderá se tornar puramente oscilatório, sem revoluções.

Conforme mostrado por P. L. Kapitza, a dinâmica do pêndulo é bem rica se considerarmos a estabilização do pêndulo na posição invertida, isto é, com o pêndulo virado para cima (Fig 3.1). Isto é possível aplicando vibrações verticais ao pêndulo, com alta frequência ao longo de um eixo vertical. Quando a frequência e/ou amplitude dessas vibrações são grandes suficientes, o pêndulo invertido não

mostra tendência a cair, isto é, de voltar à posição de equilíbrio estável. Mostra-se que a pequenos e moderados desvios da posição vertical invertida, o pêndulo tende a oscilar em torno dessa posição tal qual um pêndulo simples oscilando voltado para baixo [12, 55]. Essa descoberta feita por Kapitza desperta o interesse ainda hoje entre pesquisadores [59]. A equação mais geral que rege o movimento desse tipo de pêndulo, também conhecido como pêndulo invertido, é [6, 60, 61]:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + ml(g - \epsilon\omega^2 \cos(\omega t)) \sin \theta = 0,$$

onde b é um termo relacionado a forças de atrito e I é o momento de inércia ml^2 , m é a massa, l é o comprimento da haste do pêndulo, θ é o deslocamento angular medido no sentido horário da posição vertical para baixo, e ϵ e ω são as amplitudes e frequência da oscilação vertical. Fazendo uma normalização com $\omega t = 2\pi t$ e $\theta = 2\pi x$, obtemos:

$$\ddot{x} + 2\pi\beta\Omega\dot{x} + 2\pi(\Omega^2 - A \cos(2\pi t)) \sin 2\pi x = 0,$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$, $\beta = \frac{b}{I\omega_0}$, $\Omega = \frac{\omega_0}{\omega}$ e $A = \frac{ml\epsilon}{I}$. Considerando que a posição invertida é em $x = \frac{1}{2}$, e posição não-invertida (estado de equilíbrio estável) é $x = 0$, podemos fazer uma linearização em torno de $x = \frac{1}{2}$, fazendo $x = u + \frac{1}{2}$. Desse modo, a estabilidade linear do estado invertido é determinado pela equação de Mathieu:

$$\ddot{u} + 2\pi\beta\Omega\dot{u} + 4\pi(-\Omega^2 + A \cos(2\pi t))u = 0,$$

Para um sistema conservativo temos $\beta = 0$, e assim, chegamos na equação unidimensional:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = -(k + Af(\tau))u \quad (3.8)$$

onde A é o parâmetro que controla a amplitude de $f(\tau)$, que é uma função forçada estocástica com média igual a zero, descreve a dinâmica do pêndulo invertido no

limite de pequenas oscilações. É a mesma equação que descreve os fótons viajando em um espaço-tempo com curvatura variável, devido a presença de matéria.

3.2 Equação dinâmica dos fótons

As equações diferenciais ordinárias de segunda ordem para as componentes de separação entre duas geodésicas de fótons (equação (2.4)), mostradas no capítulo anterior (2.10), são:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= -(k + 2\phi_{\zeta\zeta})\zeta - 2\phi_{\zeta\eta}\eta \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= -2\phi_{\zeta\eta}\zeta - (k + 2\phi_{\eta\eta})\eta\end{aligned}$$

e podemos reescrevê-las como

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = -(A_{\zeta\zeta}f_{11}(\tau) + k)\zeta - (A_{\zeta\eta}f_{22}(\tau))\eta \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -(A_{\eta\eta}f_{33}(\tau) + k)\eta - (A_{\zeta\eta}f_{22}(\tau))\zeta, \quad (3.10)$$

onde $A_{\zeta\zeta}$, $A_{\eta\eta}$ e $A_{\zeta\eta}$ são amplitudes usadas como parâmetros de controle das componentes acopladas ζ , η e $\zeta\eta$, respectivamente. Os potenciais Newtoniano são representados por funções estocásticas $f_{ii}(\tau)$ com i variando de 1 até 3 com amplitude A , que representam as flutuações da curvatura do espaço-tempo, as quais tomamos como tendo média global igual a zero, assim:

$$\begin{aligned}\phi_{\zeta\zeta} &= A_{\zeta\zeta}f_{11} = A_{\zeta\zeta} \cos(\omega_{11}\tau) \\ \phi_{\zeta\eta} &= A_{\zeta\eta}f_{22} = A_{\zeta\eta} \cos(\omega_{22}\tau) \\ \phi_{\eta\eta} &= A_{\eta\eta}f_{33} = A_{\eta\eta} \cos(\omega_{33}\tau).\end{aligned}$$

Estamos interessados na frequência ω característica das flutuações em $f(\tau)$ com valores altos, isto é, $\omega \rightarrow \infty$, pois os fótons são relativamente rápidos e ω é a

freqüência característica com que o fóton sente a perturbação na curvatura.

A dependência da estabilidade de ω pode ser obtida separando as variáveis ζ e η em componentes assintoticamente rápidas ($\beta(\tau)$, $\gamma(\tau)$) e componentes lentas ($X(\tau)$, $Y(\tau)$) [5], propondo uma substituição desse tipo:

$$\zeta(\tau) = X(\tau) + \omega^{-1}\beta(\tau) \quad (3.11)$$

$$\eta(\tau) = Y(\tau) + \omega^{-1}\gamma(\tau). \quad (3.12)$$

Aqui $X(\tau)$ e $Y(\tau)$ são componentes que variam lentamente, isto é, que descrevem movimentos lentos na escala de tempo de oscilações do pêndulo livre. Já, $\beta(\tau)$ e $\gamma(\tau)$ são quantidades pequenas que variam rapidamente conforme $\omega \rightarrow \infty$, isto é, descrevem movimentos rápidos, que ocorrem em uma taxa muito maior do que as vibrações do suporte do pêndulo invertido.

Substituindo as equações (3.11) e (3.12) em (3.9) e (3.10), respectivamente, temos:

$$\ddot{X} + \omega^{-\alpha}\ddot{\beta} = -(A_{\zeta\zeta}f_{11} + k)(X + \omega^{-\alpha}\beta) - (A_{\zeta\eta}f_{22})(Y + \omega^{-\alpha}\gamma) \quad (3.13)$$

$$\ddot{Y} + \omega^{-\alpha}\ddot{\gamma} = -(A_{\eta\eta}f_{33} + k)(Y + \omega^{-\alpha}\gamma) - (A_{\zeta\eta}f_{22})(X + \omega^{-\alpha}\beta), \quad (3.14)$$

agora, tirando a média e assumindo que:

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\beta} \rangle = \langle \beta \rangle = \langle \ddot{\gamma} \rangle = \langle \gamma \rangle = \langle f_{ii}(\tau) \rangle &= 0 \\ \langle \ddot{X} \rangle &= \ddot{X} \\ \langle \ddot{Y} \rangle &= \ddot{Y} \\ \langle X \rangle &= X \\ \langle Y \rangle &= Y, \end{aligned}$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota média temporal local sob escalas grandes comparadas a ω^{-1} . A

média é definida pela seguinte integral:

$$\langle g(t)h(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp \left[-\frac{1}{2\beta}(t-t')^2 \right] (g(t')h(t')). \quad (3.15)$$

Ainda, sabendo que:

$$\begin{aligned} \langle g(\tau) + h(\tau) \rangle &= \langle g(\tau) \rangle + \langle h(\tau) \rangle \\ \langle \vartheta g(\tau) \rangle &= \vartheta \langle g(\tau) \rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde ϑ é constante, chegamos à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -k \langle X \rangle - A_{\zeta\zeta} \langle f_{11}X \rangle - A_{\zeta\eta} \langle f_{22}Y \rangle - A_{\zeta\zeta}\omega^{-\alpha} \langle f_{11}\beta \rangle - A_{\zeta\eta}\omega^{-\alpha} \langle f_{22}\gamma \rangle \\ \ddot{Y} &= -k \langle Y \rangle - A_{\eta\eta} \langle f_{33}Y \rangle - A_{\zeta\eta} \langle f_{22}X \rangle - A_{\eta\eta}\omega^{-\alpha} \langle f_{33}\gamma \rangle - A_{\zeta\eta}\omega^{-\alpha} \langle f_{22}\beta \rangle. \end{aligned}$$

Assumindo que $\langle f_{11}(\tau)X \rangle = \langle f_{22}(\tau)X \rangle = 0$ e $\langle f_{22}(\tau)Y \rangle = \langle f_{33}(\tau)Y \rangle = 0$, a equação anterior resulta em:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -k \langle X \rangle - A_{\zeta\zeta}\omega^{-\alpha} \langle f_{11}\beta \rangle - A_{\zeta\eta}\omega^{-\alpha} \langle f_{22}\gamma \rangle \\ \ddot{Y} &= -k \langle Y \rangle - A_{\eta\eta}\omega^{-\alpha} \langle f_{33}\gamma \rangle - A_{\zeta\eta}\omega^{-\alpha} \langle f_{22}\beta \rangle. \end{aligned}$$

Colocando-se $\omega^{-\alpha}$ em evidência:

$$\ddot{X} = -kX - \omega^{-\alpha}(A_{\zeta\zeta} \langle f_{11}\beta \rangle + A_{\zeta\eta} \langle f_{22}\gamma \rangle) \quad (3.17)$$

$$\ddot{Y} = -kY - \omega^{-\alpha}(A_{\eta\eta} \langle f_{33}\gamma \rangle + A_{\zeta\eta} \langle f_{22}\beta \rangle). \quad (3.18)$$

Subtraindo a equação anterior de (3.13) e (3.14), termo a termo, e tomando o limite de $\omega \rightarrow \infty$, os termos $\omega^{-\alpha}$ do lado direito da equação vão a zero ($\omega^{-\alpha} \rightarrow 0$),

chegamos a:

$$\begin{aligned}\omega^{-\alpha}\ddot{\beta} &= -A_{\zeta\zeta}f_{11}X - A_{\zeta\eta}f_{22}Y \\ \omega^{-\alpha}\ddot{\gamma} &= -A_{\zeta\eta}f_{22}X - A_{\eta\eta}f_{33}Y.\end{aligned}$$

Estas equações podem ser integradas diretamente, tratando $\langle X \rangle$ e $\langle Y \rangle$ como constantes, pelo fato de que flutuam muito lentamente com $\omega \rightarrow \infty$, levando aos resultados:

$$\begin{aligned}\omega^{-\alpha}\dot{\beta} &= -(A_{\zeta\zeta}X + A_{\zeta\eta}Y) \int_{\tau_1}^{\tau} f_{ii}(\tau')d\tau' = -(A_{\zeta\zeta}X + A_{\zeta\eta}Y)v_{ii}(\tau) \\ \omega^{-\alpha}\dot{\gamma} &= -(A_{\zeta\eta}X + A_{\eta\eta}Y) \int_{\tau_1}^{\tau} f_{ii}(\tau')d\tau' = -(A_{\zeta\eta}X + A_{\eta\eta}Y)v_{ii}(\tau),\end{aligned}$$

com τ_1 tal que $\langle v_{ii}(\tau) \rangle = 0$. Integrando novamente:

$$\omega^{-\alpha}\beta = -(A_{\zeta\zeta}X + A_{\zeta\eta}Y) \int_{\tau_2}^{\tau} v_{ii}(\tau')d\tau' = -(A_{\zeta\zeta}X + A_{\zeta\eta}Y)z_{ii}(\tau) \quad (3.19)$$

$$\omega^{-\alpha}\gamma = -(A_{\zeta\eta}X + A_{\eta\eta}Y) \int_{\tau_2}^{\tau} v_{ii}(\tau')d\tau' = -(A_{\zeta\eta}X + A_{\eta\eta}Y)z_{ii}(\tau), \quad (3.20)$$

de novo escolhendo τ_2 de modo que $\langle z_{ii}(\tau) \rangle = 0$. Multiplicando ambos os lados das equações (3.19) e (3.20) por $A_{ii}f_{ii}(\tau)$ (lembrando que índices repetidos, em diferentes termos, indicam soma), temos:

$$\begin{aligned}\omega^{-\alpha}(A_{\zeta\zeta}f_{11}\beta + A_{\zeta\eta}f_{22}\gamma) &= -(A_{\zeta\zeta}^2X + A_{\zeta\eta}^2Y)f_{ii}(\tau)z_{ii}(\tau) \\ \omega^{-\alpha}(A_{\eta\eta}f_{33}\gamma + A_{\zeta\eta}f_{22}\beta) &= -(A_{\zeta\eta}^2X + A_{\eta\eta}^2Y)f_{ii}(\tau)z_{ii}(\tau).\end{aligned}$$

Tomando-se a média em ambos lados dessa equação, e usando as equações anteriores, chegamos a:

$$\begin{aligned}\omega^{-\alpha}(A_{\zeta\zeta}\langle f_{11}\beta \rangle + A_{\zeta\eta}\langle f_{22}\gamma \rangle) &= -(A_{\zeta\zeta}^2X + A_{\zeta\eta}^2Y)\langle v_{ii}^2(\tau) \rangle \\ \omega^{-\alpha}(A_{\eta\eta}\langle f_{33}\gamma \rangle + A_{\zeta\eta}\langle f_{22}\beta \rangle) &= -(A_{\zeta\eta}^2X + A_{\eta\eta}^2Y)\langle v_{ii}^2(\tau) \rangle.\end{aligned}$$

Por substituição dessas equações anteriores nas equações (3.17) e (3.18), por fim, obtém-se:

$$\frac{d^2 \langle X \rangle}{d\tau^2} = - (A_{\zeta\zeta}^2 \langle v_{11}^2(\tau) \rangle \langle X \rangle + k \langle X \rangle + A_{\zeta\eta}^2 \langle v_{22}^2(\tau) \rangle \langle Y \rangle) \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 \langle Y \rangle}{d\tau^2} = - (A_{\eta\eta}^2 \langle v_{33}^2(\tau) \rangle \langle Y \rangle + k \langle Y \rangle + A_{\zeta\eta}^2 \langle v_{22}^2(\tau) \rangle \langle X \rangle), \quad (3.22)$$

que é uma análise generalizada da equação do desvio geodésico (A.24).

3.3 Caos clássico determinístico

A própria definição da palavra caos nos remete à desordem completa, pois, em princípio é oposta ao conceito de ordem e conseqüentemente, previsibilidade. Lembramos que a aceção do termo "cháos" no seu étimo grego é de *origem* ou *abertura originária de onde vem tudo*, portanto, indeterminada. Apenas com os romanos é que tomou a aceção de *desordem*, como oposição ao "kósmos" (ordem).

Mas a desordem não necessariamente é verdade, pois existe caos determinístico, e podem haver ordem e previsibilidade nesse tipo de caos. E é exatamente disso que trataremos. A *teoria do caos* pode explicar dinâmicas complexas em sistemas simples, isto é, comportamentos aleatórios em sistemas comuns, tal como mostrado no pêndulo invertido perturbado (eq. (3.8)). De uma outra forma, podemos dizer que a *teoria do caos* trata do comportamento de sistemas dinâmicos com equação de movimento não-lineares.

Em resumo, o termo caos é usado quando um sistema dinâmico é muito sensível às condições iniciais. Se uma mudança mínima no arranjo de um experimento leva a resultados dramaticamente diferentes, esta é uma assinatura de caos.

Pensar em caos em uma superfície de curvatura negativa é algo simples, pois trata-se de caos determinístico, onde a principal característica é o fato do com-

portamento do sistema caótico ser extremamente sensível às condições iniciais.

3.3.1 Caos em superfícies hiperbólicas

A descrição intrínseca de um espaço Riemanniano n-dimensional é dada em função das coordenadas $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ e da métrica local ds . A distância entre dois pontos vizinhos é dada por uma função quadrática, sendo dada na forma diferencial como [7]:

$$ds^2 = g_{jk} dq_j dq_k \quad (3.23)$$

onde g_{jk} é o mesmo tensor métrico mostrado no Apêndice A, e é uma função suave das coordenadas q . A integral $\int ds$ ao longo de uma geodésica (Fig. 2.1) define um comprimento, e distâncias em um espaço Riemanniano são medidas ao longo de geodésicas. Mas se queremos medir distâncias entre duas geodésicas, de forma que devemos então, utilizar a equação:

$$\frac{d^2\xi(s)}{ds^2} = -k\xi(s), \quad (3.24)$$

onde $\xi(s)$ é a distância entre duas geodésicas, com parâmetro de distância s , e k é a curvatura gaussiana (ver A.1.1).

É muito fácil perceber que a solução da equação (3.24) para $k = -1$ (geometria hiperbólica - A.1.2) é do tipo exponencial, isto é, a solução diverge. E para $k = +1$ (geometria esférica - A.1.2) a solução é oscilatória, tipo seno ou cosseno. Dessa forma:

$$\frac{d^2\xi(s)}{ds^2} = \xi(s) \longrightarrow \xi_i(s) = Ae^{\pm t} \quad (3.25)$$

$$\frac{d^2\xi(s)}{ds^2} = -\xi(s) \longrightarrow \xi_e(s) = A\cos(t) = A\sin(t), \quad (3.26)$$

onde A é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais ou pelas condições de contorno do sistema, $\xi_i(s)$ é a solução instável e $\xi_e(s)$ é a solução

estável.

As soluções instáveis $\xi_i(s)$, que divergem exponencialmente, são as soluções típicas para superfícies hiperbólicas. No presente contexto, onde estamos estudando o desvio geodésico da trajetória de dois fótons, devemos interpretar esse resultado como o fato de que a distância que separa os fótons, que estão inicialmente muito próximos, diverge exponencialmente. Isto é o resultado da alta sensibilidade às condições iniciais, típica de sistemas caóticos. No âmbito da cosmologia [42], as anisotropias da radiação cósmica de fundo em universos hiperbólicos compactos são explicadas com a propriedade de *mixing*¹ [62], apresentada por sistemas fortemente caóticos. Porém, como mostraremos a seguir, a adição de perturbações na curvatura pode alterar drasticamente esse resultado. Esse é o caso em que a equação (3.24) torna-se similar à equação (3.27):

$$\frac{d^2\xi(s)}{ds^2} = -(k + Af(s))\xi(s). \quad (3.27)$$

Porém, trataremos aqui o caso bidimensional:

$$\frac{d^2}{ds^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2\phi_{\zeta\zeta} - 1 & 2\phi_{\zeta\eta} \\ 2\phi_{\zeta\eta} & 2\phi_{\eta\eta} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

que descreve a separação entre dois fótons em duas coordenadas espaciais, em um universo hiperbólico. A solução analítica é um tanto quanto complexa, e portanto, oferece mais riqueza de interpretação. A fim de facilitar a análise, vamos estudar analiticamente apenas três casos:

- $A_{\zeta\zeta} = A_{\zeta\eta} = A_{\eta\eta} = A$
- $A_{\zeta\zeta} = A_{\eta\eta} = A \rightarrow A_{\zeta\eta} = 2A$
- $A_{\zeta\zeta} = A_{\eta\eta} = A \rightarrow A_{\zeta\eta} = 5A.$

¹Típica de caos clássico. Propriedade vista apenas em tempo infinito.

Para o primeiro caso ($A_{\zeta\zeta} = A_{\zeta\eta} = A_{\eta\eta} = A$), a solução é:

$$\zeta(s) = \eta(s) = \frac{1}{2}e^{\left(\frac{1}{60}\sqrt{-5A^2+3600}\right)s} + \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{1}{60}\sqrt{-5A^2+3600}\right)s}. \quad (3.29)$$

Essa solução obviamente diverge no caso em que $-5A^2 + 3600 > 0$, e converge quando $-5A^2 + 3600 < 0$ pois resulta numa solução cossenoidal², definindo a condição de convergência e divergência para a amplitude A: para $A < 26,83281574$ a solução é instável, e para $A > 26,83281574$ a solução é estável.

No segundo caso ($A_{\zeta\zeta} = A_{\eta\eta} = A \rightarrow A_{\zeta\eta} = 2A$), a solução é da forma:

$$\zeta(s) = \eta(s) = \cos\left(\frac{1}{24}\sqrt{2A^2 - 576}s\right), \quad (3.30)$$

onde a solução diverge no caso em que $2A^2 - 576 < 0$ pois resulta em um cosseno hiperbólico, definindo a condição de convergência para $A > 16,97056274$.

Finalmente, o terceiro caso ($A_{\zeta\zeta} = A_{\eta\eta} = A \rightarrow A_{\zeta\eta} = 5A$) tem como solução:

$$\zeta(s) = \eta(s) = \cos\left(\frac{1}{60}\sqrt{65A^2 - 3600}s\right), \quad (3.31)$$

similar ao caso anterior, onde a solução converge para $65A^2 - 3600 > 0$, resultando na condição de convergência $A > 7,44$. Este é um bom resultado, pois mostramos que podemos estabilizar esse sistema para valores relativamente mais baixos da amplitude da perturbação, em comparação com resultados já existentes na literatura [5].

²Lembrando da relação de Euler: $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$.

Capítulo 4

Resultados numéricos: estabilização de caos

O objetivo básico desse capítulo é a análise numérica do comportamento das duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas:

$$\frac{d^2}{ds^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2\phi_{\zeta\zeta} - 1 & 2\phi_{\zeta\eta} \\ 2\phi_{\zeta\eta} & 2\phi_{\eta\eta} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

mostradas no capítulo anterior. O objetivo analisar a existência de algum padrão sistemático, tipo regularidade, estabilização ou aleatoriedade das equações. Para tanto utilizamos ferramentas computacionais, desenvolvendo um algoritmo e um programa em linguagem C.

Serão apresentados os resultados computacionais do trabalho em forma de gráficos, bem como as conseqüentes interpretações.

4.1 Métodos computacionais

Para resolver as duas equações diferenciais (eq. 4.1) que descrevem a separação das trajetórias de dois fótons ao longo do tempo, em um universo com

geometria hiperbólica, foi necessário utilizar um método numérico de boa resolução, pois não existe solução analítica para esse problema. Para tanto, foi desenvolvido um programa para tal finalidade, utilizando a linguagem de programação C. As unidades arbitrárias envolvidas no problema são tais que $G = c = 1$, onde G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz.

Os métodos numéricos utilizados para resolver as equações diferenciais ordinárias acopladas de segunda ordem foram o *Runge-Kutta 4^a ordem* e o *método de Verlet* [63]. O erro associado ao algoritmo de Runge-Kutta é de quinta ordem, por sua vez o erro de Verlet é de terceira ordem, porém este último é cerca de 10 vezes mais rápido.

Como o processo é estocástico, foi utilizado o gerador de números aleatórios *rand*, empregado em programação em C, geralmente relacionado ao número do processo da máquina, o que garante total aleatoriedade.

4.1.1 Runge-Kutta 4^a ordem

Consideremos novamente um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que escrevemos na forma vetorial

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t) \quad (4.2)$$

Sob o nome métodos Runge-Kutta (RK) de ordem n , incluímos todos os métodos de solução numérica de sistemas representados pela equação acima, que para calcular $x(j + 1)$ usam apenas o conhecimento de $x(j)$. O algoritmo de RK é conhecido como sendo muito acurado e bem conhecido para uma larga gama de problemas. O erro relativo do RK de 4^a ordem é de $\mathcal{O}(4)$ [63], e o erro local deste esquema é $\mathcal{O}(\Delta t^5)$, mas não faremos a demonstração devido a sua complexidade, e também porque não nos interessa esses pormenores.

O erro envolvido em cada ordem de RK é diferente devido, basicamente, a

diferença entre o número de interações utilizadas. O método Runge-Kutta em ordens superiores a um, utiliza médias ponderadas da função f , calculada nos extremos e em pontos intermediários do intervalo $[t_j, t_{j+1}]$. De longe o mais utilizado é o esquema com precisão de quarta ordem, por causa de sua relação de custo e benefício, pois quanto maior a ordem, maior o número de vezes que se necessita calcular f por passo de integração, e portanto mais demorada fica a compilação. Por isso não compensa, na maioria dos problemas, ir além da 4ª ordem. Considerando novamente a eq. (4.2) e definindo $h = \frac{\Delta t}{2}$, o esquema empregado é:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= f(x_j, t_j) \\
 F_2 &= f(x_j + hF_1, t_j + h) \\
 F_3 &= f(x_j + hF_2, t_j + h) \\
 F_4 &= f(x_j + \Delta t F_3, t_j + \Delta t) \\
 x_{j+1} &= x_j + \frac{\Delta t}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4).
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para resolver nossas equações diferenciais de segunda ordem com esse método, precisamos escrevê-las na forma de um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{v} \\
 \frac{d\vec{v}}{dt} &= f(\vec{x}, \vec{v}, t).
 \end{aligned}$$

Para o presente objetivo a desvantagem desse método é exatamente o fato de ser necessário utilizar duas vezes o método, para a derivada primeira e depois para a derivada segunda, e com isso o tempo de execução do programa aumenta. E por razões de comodidade computacional (tempo) resolvemos implementar também o método de Verlet, já que este soluciona equações diferenciais de segunda ordem de forma direta, e assim foi possível fazer também a comparação entre os resultados.

4.1.2 Verlet

As equações diferenciais de segunda ordem no tempo tem grande importância em inúmeros problemas da Física, e possuem a forma:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = f(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad (4.4)$$

O método de Verlet resolve equações diferenciais ordinárias de segunda ordem utilizando o conhecimento de $x(j)$ e $x(j-1)$ para o cálculo de $x(j+1)$ [63]. Para tanto, usamos a seguinte forma discreta para a derivada segunda:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=t_j} = \frac{x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j}{(\Delta t)^2} \quad (4.5)$$

Para o caso de f não depender da velocidade, com a utilização da equação anterior, a solução numérica da equação (4.4) fica:

$$x_{j+1} = f(x_j)(\Delta t)^2 + 2x_j - x_{j-1} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.6)$$

Este é o conhecido *algoritmo de Verlet*, que também utilizamos para fazer as simulações numéricas mostradas a seguir.

Porém existe um problema no momento de calcular x_{j+1} pelo algoritmo de Verlet, pois necessita-se conhecer x em dois instantes de tempo anteriores, isto é, necessita-se conhecer x_j e x_{j-1} . Usualmente (e este também é o caso aqui), as condições iniciais fornecem apenas a posição e a velocidade inicial, de modo que não é possível aplicar diretamente o algoritmo de Verlet. A forma que utilizamos para solucionar esse problema foi utilizar o método de RK 4^a ordem apenas para calcular a primeira iteração, e utilizar o Verlet em seguida. Os resultados foram muito satisfatórios em termos de desempenho, e o erro envolvido é o mesmo erro do RK 4^a ordem para a primeira iteração, e o mesmo erro envolvido no Verlet para as demais iterações.

4.1.3 Algoritmo

Para explicar o procedimento numérico, retomamos as equações diferenciais (4.1), que queremos resolver:

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = -(A_{\zeta\zeta}f_{11}(\tau) + k)\zeta - (A_{\zeta\eta}f_{22}(\tau))\eta \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = -(A_{\eta\eta}f_{33}(\tau) + k)\eta - (A_{\zeta\eta}f_{22}(\tau))\zeta, \quad (4.8)$$

onde $k = -1$ é a curvatura espacial correspondendo à geometria hiperbólica.

Nós simulamos numericamente estas equações acopladas com os algoritmos descritos acima: RK 4^a. ordem e Verlet. Para tanto utilizamos

$$f_{11}(\tau) = f_{\zeta\zeta}(\tau) = \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n^{\zeta\zeta}\tau + \phi_n^{\zeta\zeta}) \quad (4.9)$$

$$f_{22}(\tau) = f_{\zeta\eta}(\tau) = \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n^{\zeta\eta}\tau + \phi_n^{\zeta\eta}) \quad (4.10)$$

$$f_{33}(\tau) = f_{\eta\eta}(\tau) = \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n^{\eta\eta}\tau + \phi_n^{\eta\eta}), \quad (4.11)$$

onde $N = 100$, e as frequências ω_n e as fases ϕ_n são escolhidas de forma aleatória entre $[90, 700]$ e $[-1, 1]$, respectivamente. Foi utilizado um gerador de números aleatórios *srand()*, na seguinte fórmula:

$$nrand = \frac{2.0 \cdot srand() + 1.0}{RAND_MAX + 1.0} - 1.0 \quad (4.12)$$

onde $RAND_MAX$ ¹ é definido pelo sistema computacional, e *nrand* é o número aleatório gerado.

Foi utilizado um passo de 0.001, tempo inicial $t[0] = 0.0$, e posições iniciais $\zeta = \eta = 1.0$. Os valores para as amplitudes A e os valores de frequência mínima ω_{min} e máxima ω_{max} foram colocados manualmente. Logo após as frequências e

¹ $RAND_MAX$ é o limite superior do valor que a função *srand()* retornará, definido pela biblioteca *stdlib.h* da linguagem de programação C.

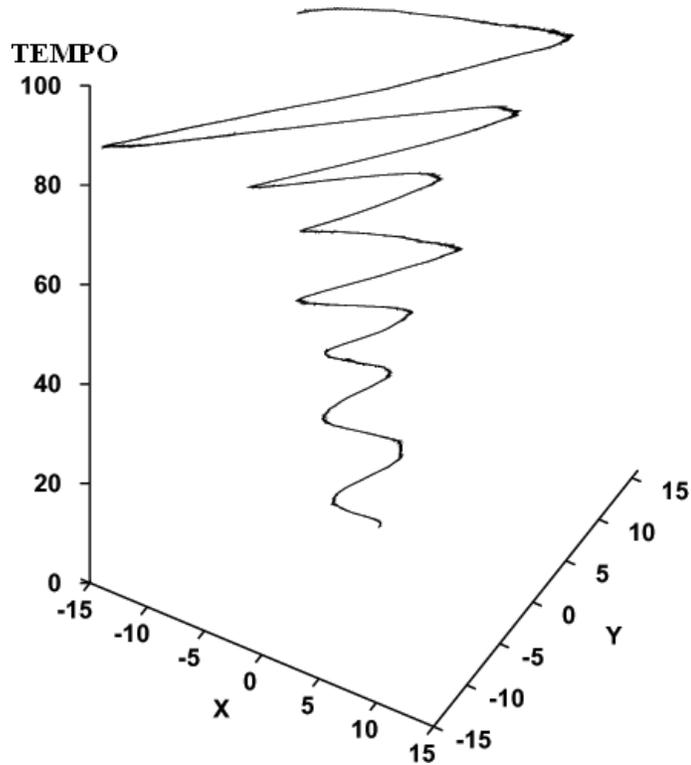


Figura 4.1: Estabilidade em 3 dimensões com parâmetros $A_{xx} = 7$, $A_{xy} = 7$, $A_{yy} = 35$, $\omega_i = 90$ e $\omega_f = 700$. Simulação utilizando o Runge-Kutta 4^a ordem.

fases foram calculadas da seguinte maneira:

$$\omega_n = (\omega_{min} + \omega_{max}) \cdot 0.5 + (\omega_{max} - \omega_{min}) \cdot 0.5 \cdot nrand()$$

$$\phi_n = nrand() \cdot \pi$$

com $\pi = 3.141592653589793$. Depois, basta substituir os resultados obtidos para as equações (4.9), (4.10) e (4.11) nas equações (4.7) e (4.8), e o programa faz o resto, gerando gráficos no formato post-script (ps), apresentados a seguir.

4.2 Apresentação dos resultados

Utilizando os métodos numéricos descritos acima, e depois de inúmeras iterações, chegamos aos resultados esperados. Fizemos simulações em três dimensões, sendo duas espaciais e uma temporal, e temos gráficos que são mostrados em três

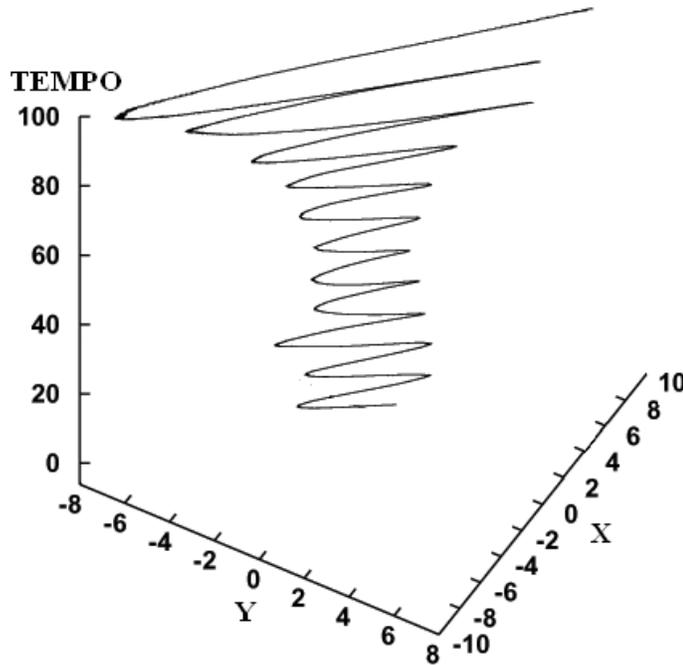


Figura 4.2: Estabilidade em 3 dimensões com parâmetros $A_{xx} = 9$, $A_{xy} = 9$, $A_{yy} = 40$, $\omega_i = 90$ e $\omega_f = 700$. Simulação utilizando o Runge-Kutta 4^a ordem.

dimensões, e também em apenas duas dimensões (espaciais), similar a um gráfico no espaço de fases, a fim de ilustrar a estabilidade encontrada de forma direta.

No caso das estabilidades (soluções estáveis), a distância oscila em torno de baixos valores, como pode-se ver nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3. Enquanto que para o caso das instabilidades (soluções instáveis), nota-se claramente a rápida divergência da distância entre os fótons para valores bastante altos, como mostramos nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6.

4.2.1 Análise

Os resultados numéricos e analíticos apresentados neste trabalho mostram que as flutuações na curvatura espacial estabilizam as trajetórias dos fótons para duas dimensões espaciais, assim como ocorre no caso unidimensional [5], onde o mais marcante progresso foi o uso de uma variável completamente aleatória para gerar as N funções estocásticas.

O resultado de estabilização neste contexto, é novo (mesmo para perturbações

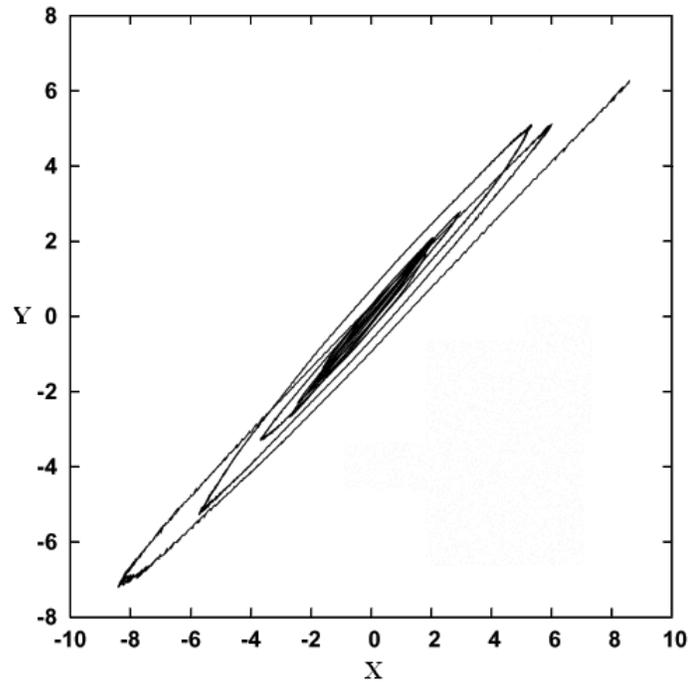


Figura 4.3: Estabilidade em 2 dimensões (espaciais) com parâmetros $A_{xx} = 9$, $A_{xy} = 9$, $A_{yy} = 5$, $\omega_i = 90$ e $\omega_f = 700$. Simulação utilizando o Runge-Kutta 4^a ordem.

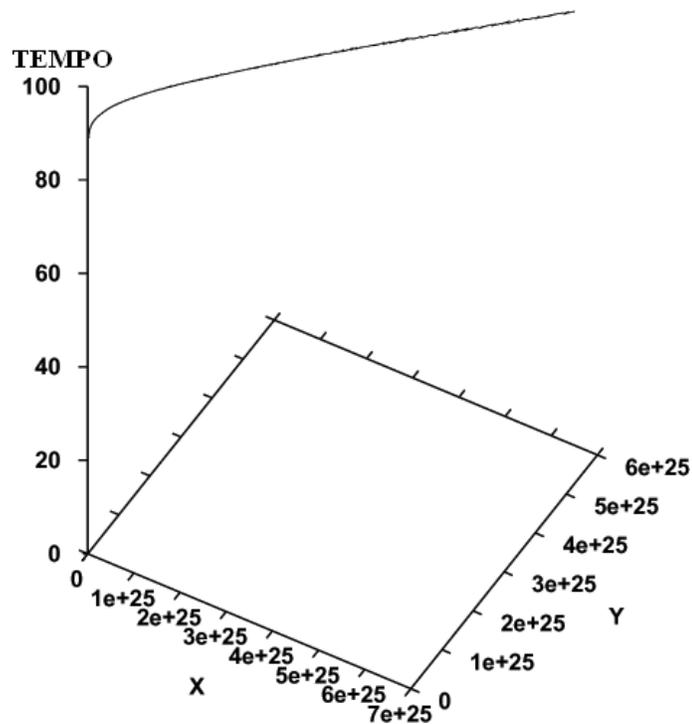


Figura 4.4: Instabilidade em 3 dimensões. Parâmetros $A_{xx} = 7$, $A_{xy} = 7$, $A_{yy} = 30$, $\omega_i = 90$ e $\omega_f = 700$. Simulação utilizando o Runge-Kutta 4^a ordem.

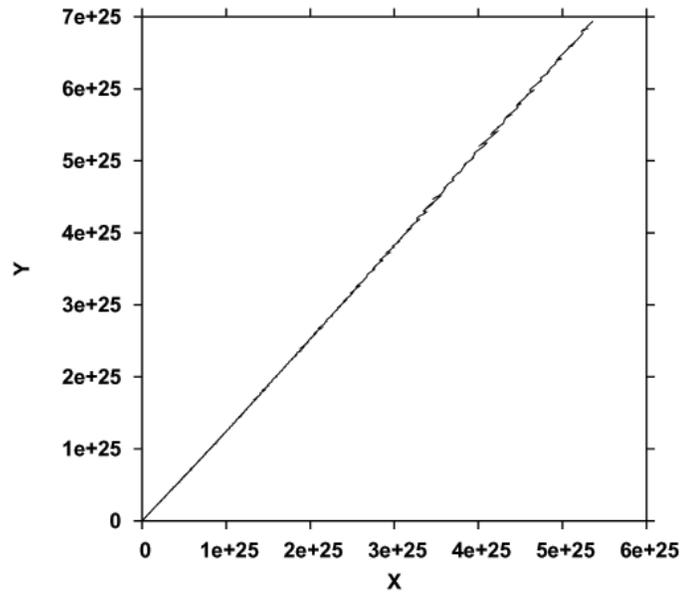


Figura 4.5: Instabilidade em 2 dimensões. Parâmetros $A_{xx} = 7$, $A_{xy} = 7$, $A_{yy} = 30$, $\omega_i = 90$ e $\omega_f = 700$. Simulação utilizando o Runge-Kutta 4^a. ordem.

dessas ordens de grandeza) e surpreendente, pois não esperava-se que superfícies de curvatura negativa e topologia compacta, caracterizadas por serem altamente caóticas, pudessem comportar soluções estáveis.

É interessante salientar o fato de que não houve diferença relevante nas simulações feitas pelo Verlet e pelo Runge-Kutta 4^a. ordem. Ambas resultavam no mesmo tipo de solução: estável ou instável, sob as mesmas condições iniciais. Importante observar também, que pelo fato de ter sido usada uma variável completamente aleatória, para mesmos valores de amplitudes e frequências máxima e mínima, a solução poderia ser tanto estável quanto instável, aumentando a probabilidade de ser estável quanto maiores os valores de amplitudes, e os valores das frequências.

Os menores valores para frequência² ω que utilizamos foi 90, cujos resultados mostramos em todas as figuras, devido ao fato de esse ser um limite inferior. Não há um limite superior definido para a frequência, porém utilizamos o valor igual a 700 por comodidade (tempo). Já para os valores da amplitude A existe um limite

²Importante lembrar que estamos tratando de unidades arbitrárias.

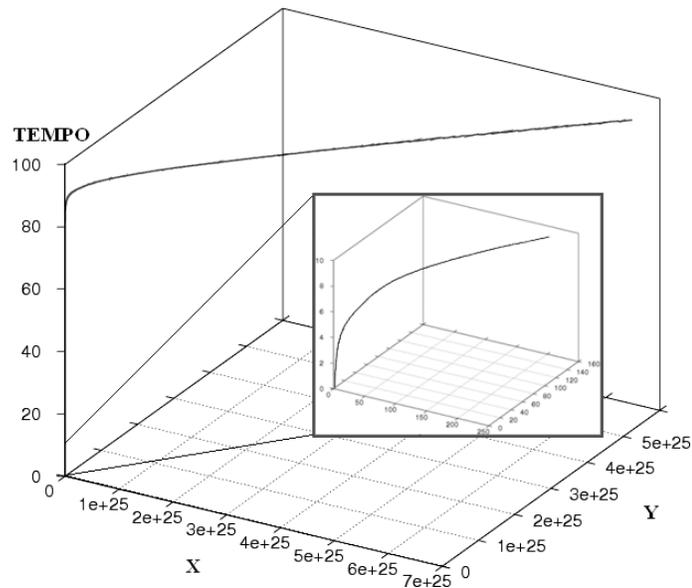


Figura 4.6: Instabilidade em 3 dimensões. Simulação utilizando o método de Verlet.

inferior bem definido, como mostramos no capítulo 3, na secção 3.3.1. Dos casos que analisamos, o valor de $A = 7$ foi o menor encontrado, sendo que a amplitude de acoplamento entre as duas componentes deve ser 5 vezes esse valor, isto é, igual a 35. Para exemplificar, vimos a figura 4.1 que utiliza os parâmetros $A_{xx} = 7$, $A_{xy} = 7$, $A_{yy} = 35$, $\omega_i = 90$ e $\omega_f = 700$, tendo sido o resultado de uma simulação utilizando o Runge-Kutta 4^a. ordem. Já nas figuras 4.4 e 4.5, a amplitude de acoplamento é um pouco menor do que 5 vezes, resultando em instabilidade. Os parâmetros utilizados foram $A_{xx} = 7$, $A_{xy} = 7$, $A_{yy} = 30$, $\omega_i = 90$ e $\omega_f = 700$, e a simulação também foi feita utilizando o Runge-Kutta 4^a. ordem.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas

Estudamos um universo hiperbólico compacto, que se caracteriza por ser extremamente caótico, mas mostramos que na presença de perturbações na curvatura (eq. (2.4)) alguma estabilidade emerge do caos. Fluxos geodésicos em espaços de curvatura negativa são sistemas de Anosov e, como provado por Anosov em 1967 [6], são estruturalmente estáveis, no sentido que são robustos para (pequenas) perturbações. Mostramos contudo que, quando as perturbações não são pequenas, o sinal da curvatura pode mudar cessando o caos, fazendo com que a dinâmica dos fótons possua, genericamente, componentes regulares (estáveis) e irregulares (caóticas).

Sabemos da radiação de fundo, que as flutuações da homogeneidade e isotropia são pequenas, isto é, as perturbações na métrica são pequenas, da ordem de $1/10^5$. Assim, este efeito de estabilização tem maior importância para a radiação de fundo, no período quando os aglomerados de galáxias foram formados ($z=10$), isto é, muito posteriormente aos efeitos do caos devido à curvatura negativa que vem sendo acumulados desde épocas muito anteriores, $z=1100$ [62, 64, 65].

Cosmologicamente, este mecanismo de estabilização pode ter relevância na fase pré-inflacionária, com conseqüências interessantes para a Teoria de Inflação Caótica [8] onde universos com curvatura negativa e topologia compacta expli-

cariam a homogeneidade da radiação de fundo.

Experimentos futuros o qual explorarão completamente a radiação cósmica de fundo no céu tal como PLANCK, possivelmente fornecerão dados com precisão suficiente para se por a prova a gaussianidade ou os desvios da gaussianidade das flutuações da temperatura do *background* [66]. A esperança dos cosmólogos, astrofísicos e pesquisadores das áreas afins, é que os novos dados possam fornecer respostas às várias questões ainda em aberto na Cosmologia, tanto quanto novos meios para se possa distingüir entre as possíveis geometrias para o Universo.

Perspectivas para o futuro próximo

Quando as flutuações da densidade de matéria se tornam não tão pequenas, elas podem influenciar a radiação de fundo, e o Efeito Sunyaev-Zeldovich é um exemplo [67]. Observacionalmente, o efeito de estabilização dos fótons pela presença de aglomerados de galáxias, poderia ser detectado na radiação de fundo, pois mesmo um caos muito fraco (as observações atuais indicam que o universo é aberto) é dramaticamente diferente de estabilidade. Em caos muito fraco, a separação das trajetórias pode ser tão lenta, que poderá não ser observada. Contudo, em sistemas fortemente estáveis, as trajetórias vizinhas oscilam uma em torno da outra. Caos fraco poderia corresponder a uma separação praticamente constante, enquanto que a estabilidade corresponde a oscilações claras e observáveis. Esta é a mesma diferença entre um pêndulo invertido em um campo gravitacional fraco e um pêndulo próximo do ponto de estabilidade: o segundo oscila, o primeiro não. Assim, a estabilização pela perturbação da densidade de matéria, poderia ser observável (mesmo em um universo aberto): ela poderia ser vista pelas oscilações na separação de trajetórias de fótons vizinhos. Nosso próximo passo será o cálculo da contribuição da estabilização para o Efeito Sunyaev-Zeldovich.

Essa mesma análise perturbativa, utilizando o potencial Newtoniano como fonte de perturbação da curvatura, feita no presente trabalho, será feita também

utilizando ondas gravitacionais como a fonte de perturbação. A grande diferença consiste no fato de que ao invés de perturbamos o tensor de Riemann, perturbamos o tensor de Weyl [68]. A idéia é encontrar algum mecanismo onde seja possível detectar a existência de ondas gravitacionais de forma indireta.

Apêndice A

Aspectos do espaço-tempo curvo

O espaço-tempo da Relatividade Geral (Teoria da Gravitação de Einstein) tem a estrutura de uma variedade Riemanniana quadridimensional, com uma métrica localmente Lorentziana. Esses conceitos serão formalizados a seguir, de um modo mais ou menos preciso, e para tanto utilizou-se ampla bibliografia [69–72].

A.1 Geometria

A palavra geometria origina-se de duas palavras gregas: "geo" e "metria", que significam respectivamente, terra e medida. Logo se despreendeu o conceito do estudo de figuras construídas com as formas elementares do espaço: o ponto, a linha e a superfície (figuras geométricas). A geometria compreende a área de medidas de distâncias e ângulos e suas inter-relações. Existem inúmeras implicações importantes da geometria para os sistemas físicos, em especial na TRG. A gravitação de Einstein não é uma teoria de campos, mas sim é uma teoria geométrica, e portanto, a geometria torna-se ainda mais importante neste contexto. O tipo de geometria da variedade de espaço-tempo nas equações de Einstein através da métrica, como será visto posteriormente (eq. (A.7)), e esta por sua vez define a solução das equações do Universo (A.29).

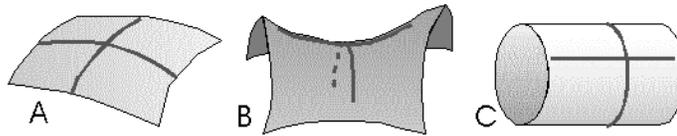


Figura A.1: Forma simples de definir curvatura.

A.1.1 Curvatura gaussiana

A curvatura é o conceito mais importante que caracteriza as curvas, superfícies e espaços de dimensões mais altas. A curvatura é definida como o desvio da horizontal, sendo que nesse caso especificamente, horizontal quer dizer linha reta. A curvatura é, portanto, a medida do desvio a partir de uma linha, e curvatura constante pode dar origem a um círculo em um plano ou uma hélice no espaço, por exemplo.

A curvatura gaussiana de uma superfície é uma medida escalar da razão de mudança de direção do vetor unitário normal à superfície.

A.1.2 Geometrias possíveis

Podemos conhecer a curvatura gaussiana em um ponto P (desde que P não se encontre em uma borda e nem com singularidades ao seu redor) qualquer de uma superfície S , investigando-se as curvas determinadas pela intersecção entre a superfície e planos perpendiculares ao plano tangente a P , procurando as curvaturas bem definidas das mesmas. Primeiramente, fazemos um plano cortar a superfície no ponto P , resultando em uma curva. Acharmos a curvatura dessa curva desenhando o círculo osculante à curva que está contido no plano. Vamos então testando vários planos até acharmos aquele que contém o menor círculo osculante possível, isto é, o círculo de menor raio. Repetimos o processo até achar a curva de menor curvatura. Digamos, então, que a curvatura máxima seja k_1 e a curvatura mínima seja k_2 . O *Princípio da Curvatura* diz que "toma-se o valor máximo dessas curvaturas k_1 , e um mínimo k_2 ". Então a curvatura gaussiana de S é dada por $k_1 * k_2$ e a curvatura média é $\frac{k_1+k_2}{2}$ [7].

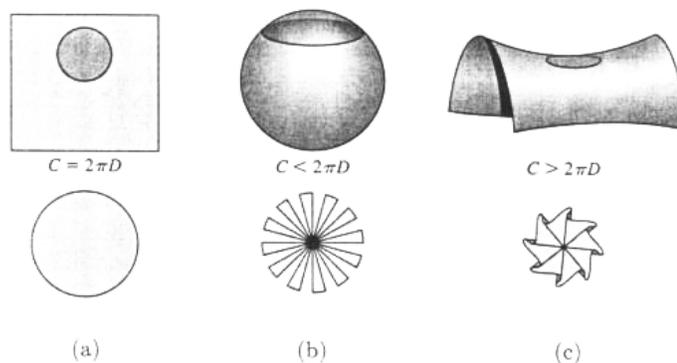


Figura A.2: Possíveis geometrias para o Universo e as principais diferenças: a) Plana; b) Esférica; c) Hiperbólica.

Desse modo, podemos achar a curvatura gaussiana em qualquer ponto da superfície S . Por exemplo, se a superfície for um plano, todas as interseções de planos que passam por P serão retas, logo, terão curvatura nula. A curvatura gaussiana pode ser positiva, negativa ou nula, como mostrado na figura A.1. Será positiva se as curvas de máxima e mínima curvatura forem encurvadas para o mesmo lado. Nesse caso, os dois círculos osculantes ficam no mesmo lado da superfície. Esse é o caso da superfície (A) da figura A.1. Será negativa se uma curva for encurvada para um lado e a outra, para o outro. Isto é, se os círculos osculantes ficam em lados opostos. É o caso da superfície (B) (Fig. A.1), que parece uma sela. E é nula se pelo menos uma das curvas for reta, isto é, tiver curvatura zero. É o caso do cilindro (C), ainda na figura A.1.

Existem três tipos de curvaturas espaciais, com seus respectivos tipos de geometria determinado por Riemann em 1854 (ver figura A.2):

- **nula** ($k=0$): geometria euclidiana;
- **positiva** ($k=1$): geometria esférica;
- **negativa** ($k=-1$): geometria hiperbólica.

Existem quatro postulados em comum entre os três tipos de geometrias, que são:

- É possível traçar uma linha reta de qualquer dado ponto a qualquer outro ponto;
- Uma linha reta de comprimento finito pode ser estendida indefinidamente, e ainda permanecer sendo uma linha reta;
- Um círculo pode ser descrito com qualquer ponto como seu centro, e qualquer distância como seu raio;
- Todos os ângulos retos são iguais;

e ademais, cada geometria tem suas peculiaridades, que as diferenciam.

Postulados da geometria euclidiana

- Dada uma linha e um ponto fora da linha, somente uma linha pode ser traçada sobre o ponto que será paralela à primeira linha.

Os ângulos interiores a um triângulo somam 180° , e que a circunferência de um círculo é igual a $2\pi R$, onde R é o raio desse círculo (fig. A.2 (a)).

Postulados da geometria esférica

- Dada uma linha e um ponto fora da linha, não existe uma linha capaz de ser traçada sobre o ponto que seja paralela à primeira linha.

Nesse tipo de geometria os ângulos interiores a um triângulo somam acima de 180° , e a circunferência de um círculo é menor que $2\pi R$ (fig. A.2 (b)).

Convencionalmente, dizemos que uma esfera tem curvatura positiva porque sua superfície sempre permanece no mesmo lado de seu plano tangente, e sua curvatura é constante. Para uma sela como a da Fig. A.3, a superfície realmente atravessa o plano tangente ao redor de cada ponto e por isso sua curvatura é negativa. Então, se temos curvatura constante negativa, devemos esperar que os

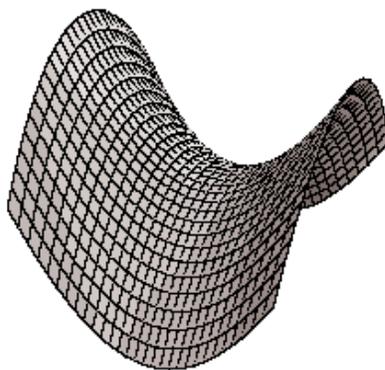


Figura A.3: Sela: exemplo de superfície de curvatura negativa (geometria hiperbólica)

arredores de cada ponto na superfície se assemelhe a uma sela. Porém, diferentemente de uma esfera, essa superfície não se fecha em si mesma, é desconectada e chamada de *pseudoesfera*.

Postulados da geometria hiperbólica

- Dada uma linha e um ponto fora da linha, existem infinitas linhas possíveis de serem traçadas sobre o ponto que sejam paralelas à primeira linha.

Nesse tipo de geometria os ângulos interiores a um triângulo somam menos que 180° , e a circunferência de um círculo é maior que $2\pi R$ (fig. A.2 (c)).

A.2 Geometria diferencial

Vamos introduzir conceitos matemáticos essenciais para o tratamento de geometrias curvas [72].

A.2.1 Mapas

Sejam dois conjuntos de pontos M e N . Uma mapa f é uma relação de M em N ($M \rightarrow N$), quando um ponto de M se relaciona com apenas um ponto de N . O mapa f é $1 : 1$ se sua inversa f^{-1} também é um mapa, *into* se ele está definido em todos os pontos de M , *onto* se, além disso, cobrir todos os pontos de N e uma *bijecção* se for $1 : 1$ e *onto*.

A.2.2 Variedade diferenciável

Uma variedade n -dimensional é definida por:

- um conjunto de pontos M ;
- uma coleção enumerável $\{U_k\}$ de subconjuntos de M , e que cobre M , isto é, $M = \cup_k U_k$;
- para cada U_k existe uma aplicação biunívoca ϕ_k do correspondente U_k em um aberto de \mathfrak{R}^n .

Deste modo, um sistema de coordenadas fica definida sobre cada U_k no sentido de que podemos associar biunivocamente a cada ponto $P \in U_k$, n números reais $\phi_k(P) = (x^1, \dots, x^n)$. U_k é denominado *vizinhança de coordenadas* e cada (U, ϕ) , uma *carta*; (x^1, \dots, x^n) são as coordenadas de P na carta (U_k, ϕ_k) .

- se $U_k \cap U_l$ é não vazio, então a aplicação $\phi_k \circ (\phi_l)^{-1} : \phi_l(U_k \cap U_l) \rightarrow \phi_k(U_k \cap U_l)$ é uma aplicação contínua de um subconjunto aberto de \mathfrak{R}^n em um subconjunto aberto de \mathfrak{R}^n .

Para $U_k \cap U_{\bar{k}}$ não vazio, seja $P \in U_k \cap U_{\bar{k}}$. Correspondendo às duas cartas (k) e (\bar{k}) , P tem coordenadas (x^1, \dots, x^n) e $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$. Essa última propriedade nos diz que no seu domínio de definição as primeiras podem ser expressas como funções

contínuas das últimas, e vice-versa, desse modo:

$$\begin{aligned}\bar{x}^\alpha &= \bar{x}^\alpha(x^\beta) \\ x^\alpha &= x^\alpha(\bar{x}^\beta),\end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta = 1, \dots, n$.

Como exemplo básico de variedades, temos o espaço Euclidiano n-dimensional \mathfrak{R}^n .

A variedade diferenciável que estudaremos será interpretada como o próprio espaço-tempo e seus pontos como eventos neste espaço-tempo. Portanto, essa variedade será quadridimensional, e nela serão definidos os campos físicos, que serão campos tensoriais, haverá uma conexão para que se possa definir derivadas desses campos, e um tensor métrico para se definir distâncias espaciais e intervalos de tempo.

A.2.3 Difeomorfismo

Sejam agora duas variedades diferenciáveis M e M' com seus respectivos atlas Ψ_α e Ψ'_α e um mapa $f : M \rightarrow M'$. Se a função g que leva $U_\alpha \subset \mathfrak{R}^n$ (imagem em \mathfrak{R}^n de um aberto de M pela carta Ψ_α) em $U'_\beta \subset \mathfrak{R}^n$ (imagem em \mathfrak{R}^n de um aberto de M pela carta Ψ'_β) definida por:

$$g \equiv \Psi'_\beta \circ f \circ \Psi_\alpha^{-1}, \tag{A.1}$$

para uma bijeção C^∞ do $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ para cada α, β , então dizer que f é um difeomorfismo de M em M' , que são então chamados de espaços difeomorfos. Por exemplo, uma esfera é difeomorfa a um elipsóide de revolução, mas não a um cubo (que nem é uma variedade diferenciável por problemas de diferenciabilidade de suas cartas nas vizinhanças das arestas).

A.3 Conceitos físicos com formalismo matemático

A.3.1 Álgebra tensorial

Resumidamente, basta dizer que tensores são entidades que se comportam de uma determinada forma sob uma transformação de coordenadas [71–73]. Genericamente um tensor de ordem $m \times n$:

$$T_{b'_1 \dots b'_n}^{a'_1 \dots a'_m} = (A^{-1})_{a'_1}^{a_1} \dots (A^{-1})_{a'_m}^{a_m} A_{b'_1}^{b_1} \dots A_{b'_n}^{b_n} T_{b_1 \dots b_n}^{a_1 \dots a_m}, \quad (\text{A.2})$$

onde m é um índice contravariante e n é um índice covariante, e também que:

$$dx^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} dx^a = (A^{-1})_a^{a'} dx^a. \quad (\text{A.3})$$

A.3.2 Espaço de Minkowski

Como se observou na Teoria da Relatividade Especial (TRE), intervalos de tempo, comprimento e simultaneidade não são absolutos e dependem da velocidade relativa do observador; a velocidade conecta tempo e espaço, isto é, não é mais possível separar tempo e espaço. Assim, a partir desse momento fala-se de espaço-tempo, um contínuo de quatro dimensões, sendo três dimensões de espaço mais uma dimensão de tempo [2]. O espaço plano quadridimensional de Minkowski, como é chamado, também é uma solução das equações de Einstein (eq. (A.29)) e é descrito pelo elemento de linha de Minkowski, que nada mais é do que um intervalo geométrico, sendo dado por¹:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.4})$$

¹Lembrando que índices repetidos indicam soma, conforme a notação de Einstein.

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, e na nossa notação será:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Os sinais dos elementos diagonais dessa matriz são chamados de *assinatura da métrica*, também mostrados desta forma: $(+, -, -, -)$. Note que a forma desse elemento de linha é basicamente,

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2, \quad (\text{A.6})$$

e é importante saber que Δs^2 é um invariante sob transformações de Lorentz, e para partículas movendo-se com a velocidade da luz diz-se que movem-se em geodésicas nulas (por ex., os fótons):

$$\Delta s^2 = 0 \rightarrow c\Delta t = \Delta x.$$

Características de intervalos de espaço-tempo

Existem três denominações para intervalos no espaço-tempo, que são:

- **Tipo tempo** $\Delta s^2 > 0$: para partículas com velocidade menor que a da luz; distância espacial pode ser percorrida pela luz; existe um referencial inercial no qual dois eventos acontecem na mesma posição, mas nunca ocorrem simultaneamente;
- **Tipo Espaço** $\Delta s^2 < 0$: para partículas com velocidade maior que a da luz; distância espacial não pode ser percorrida pela luz; existe um referencial inercial no qual dois eventos acontecem simultaneamente, mas nunca ocorrem na mesma posição;

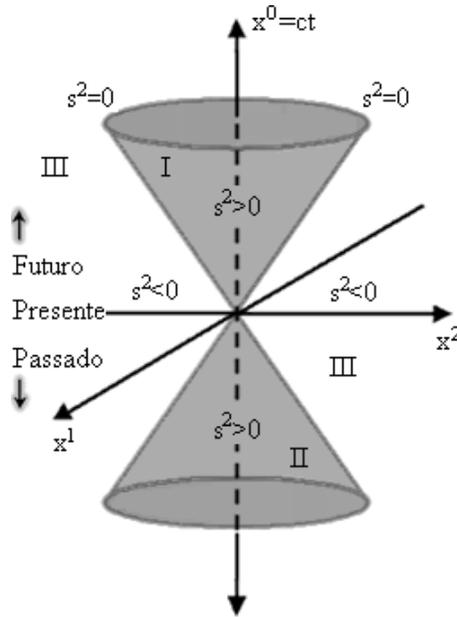


Figura A.4: Cone de luz, representando o passado $t < 0$ (todas causas na região II), o presente $t = 0$ e o futuro $t > 0$ (todos efeitos na região I). $s^2 = 0$ é exatamente a borda do cone, é o limite entre o intervalo tipo tempo $s^2 > 0$ (regiões I e II) e o intervalo tipo espaço $s^2 < 0$ (região III). O observador encontra-se na origem do cone.

- **Tipo Luz** $\Delta s^2 = 0$: para partículas com a velocidade da luz.

Podemos visualizar essas situações de forma mais clara com o cone de luz, mostrado na Figura A.4.

A.3.3 Tensor métrico

O tensor métrico é um campo tensorial que podemos definir sobre a variedade, que associa dois vetores a um número real, que fornece o ângulo entre eles. Tratando-se do mesmo vetor, podemos associar tal número a sua magnitude. Neste trabalho, consideraremos a métrica simétrica. Para dois eventos separados pelo vetor infinitesimal dx^μ , o elemento de linha infinitesimal será dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.7})$$

Note que para um espaço euclidiano n -dimensional em coordenadas cartesianas, recuperamos o espaço-tempo de Minkowski, onde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (eqs. (A.4) e (A.5)).

Os tensores métricos g^{ab} e g_{ab} permitem estabelecer uma "equivalência" entre vetores contravariantes e vetores covariantes, isto é, se v^a é um vetor contravariante, então define-se o vetor covariante associado como $v_a = g_{ab}v^b$, e vice-versa. Isso ocorre graças a uma importante propriedade do tensor métrico:

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a \quad (\text{A.8})$$

A.3.4 Tensor projeção

Vamos definir o *operador projeção* h_b^a simétrico, em um espaço tri-dimensional ortogonal a V^a , em um campo normalizado $V^aV_a = 1$, como sendo dado por:

$$h_b^a = g_b^a - V^aV_b, \quad (\text{A.9})$$

possuindo as propriedades:

$$\begin{aligned} h_b^a V^b &= 0 \\ A^b V_b = 0 &\rightarrow h_b^a A^b = A^a \\ h_a^a &= 3. \end{aligned}$$

Agora, vamos definir o *vetor conexão ortogonal*, que é a projeção ortogonal do *vetor conexão*, entre geodésicas vizinhas. Ele é dado por:

$$\eta^a = h_b^a \xi^b, \quad (\text{A.10})$$

satisfazendo $\eta^a V_a = 0$ e $\eta^a \perp V_a$. O vetor tangente V^a pode ser interpretado fisicamente como a quadri-velocidade de um observador que tem sua linha de mundo como sendo a geodésica C (Fig. A.5).

A.3.5 Conexão: símbolo de Christoffel

Ao se definir um determinado tipo de espaço-tempo, se escolhe também os coeficientes do *Símbolo de Christoffel*, isto é, da *conexão*, e conseqüentemente, se define a *lei de transporte paralelo* [71, 72].

Existe uma noção de transporte de tensores que exige tão somente a definição dessa quantidade chamada conexão, que conecta vetores de espaços tangentes diferentes através do chamado transporte paralelo. As componentes do vetor transportado paralelamente são dadas por:

$$A^{\parallel\alpha}(x^\gamma + dx^\gamma) = A^\alpha(x^\gamma) - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha(x^\gamma)A^\lambda(x^\lambda)dx^\mu. \quad (\text{A.11})$$

A escolha dos coeficientes de conexão $\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$, que caracterizam a lei de transporte paralelo, pode ser efetuada de modo a preservar a norma dos vetores transportados. Pode-se mostrar que isto equivale à condição $g_{\lambda\mu,\alpha} = 0$.

A conexão, também chamada de afinidade, é dada também em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ por²:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(g_{\beta\delta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}), \quad (\text{A.12})$$

e a partir das propriedades do tensor métrico, chegamos às seguintes propriedades para a conexão:

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2g_{ii}}g_{ii,j} \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma_{ii}^j = -\frac{1}{2g_{jj}}g_{ii,j} \quad (\text{A.14})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^i = \delta\Gamma_{ji}^i = \frac{1}{2g_{ii} + \delta g_{ii}}\delta g_{ii,j} \quad (\text{A.15})$$

$$\delta\Gamma_{ii}^j = -\frac{1}{2g_{jj} + \delta g_{jj}}\delta g_{ii,j}. \quad (\text{A.16})$$

²Utilizamos a seguinte notação para denotar derivada comum: $\frac{\partial x_\beta^\alpha}{\partial \delta} = x_{\beta,\delta}^\alpha$ e $\frac{\partial^2 x_\beta^\alpha}{\partial \delta^2} = x_{\beta,\delta\delta}^\alpha$.

A.3.6 Tensor de curvatura

O tensor de curvatura que descreve a dinâmica da curvatura do espaço-tempo, também conhecido como *tensor de Riemann* $R_{\mu\nu\beta}^\alpha$, é dado por:

$$R_{\mu\nu\beta}^\alpha = \Gamma_{\mu\beta,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^\alpha + \Gamma_{\epsilon\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\epsilon - \Gamma_{\epsilon\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\epsilon. \quad (\text{A.17})$$

Pode-se mostrar que ele é proporcional à mudança sofrida por um vetor quando este é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada [71, 72]. O tensor de curvatura também está relacionado com uma quantidade muito importante: o desvio geodésico (A.4).

O tensor de curvatura satisfaz as chamadas *identidades de Bianchi* [71, 72], que quando a torção é nula, se escreve como:

$$R_{\mu\nu\beta,\epsilon}^\alpha + R_{\mu\epsilon\nu,\beta}^\alpha + R_{\mu\beta\epsilon,\nu}^\alpha = 0. \quad (\text{A.18})$$

Nos espaços de Riemann, o tensor de curvatura $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ é anti-simétrico na troca de índices nos primeiro e segundo pares, simétrico na troca global do primeiro pelo segundo par e ainda satisfaz uma propriedade cíclica nos últimos 3 índices. Isto faz com que ele tenha somente 20 componentes independentes, permitindo a definição, sem ambiguidade, do tensor de Ricci [71, 72], que resulta da contração de dois índices,

$$R_{\mu\beta} \equiv R_{\mu\alpha\beta}^\alpha, \quad (\text{A.19})$$

do *escalar de curvatura*:

$$R \equiv g^{\mu\beta} R_{\mu\beta}, \quad (\text{A.20})$$

e do *tensor de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.21})$$

que satisfaz, das *identidades de Bianchi* (equação (A.18)):

$$G_{\nu,\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (\text{A.22})$$

No espaço plano o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\beta}^{\alpha}$ é nulo em todos os pontos, em qualquer sistema de coordenadas.

A.3.7 Tensor energia-momentum

O tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$ descreve a distribuição de energia no universo, ou simplesmente uma distribuição local de energia e momentum. Considerando um fluido perfeito como sendo fonte da geometria, podemos escrever:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu}, \quad (\text{A.23})$$

onde $V^{\mu} = \delta_0^{\mu}$, o qual representa o observador co-movente. Também pode-se escrevê-lo como:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_{\mu} V_{\nu} - p(g_{\mu\nu} - V_{\mu} V_{\nu}),$$

onde p representa a pressão e ρ é a densidade total de energia. Esse tensor é a fonte de curvatura da geometria.

A.3.8 Fator de escala

Quando tratamos de um universo em expansão, precisamos de uma expressão que muda conforme o espaço-tempo se expande (eq. (2.3)). O termo dependente do tempo, $R(t)$ ou $a(t)$ conforme o autor, é conhecido como fator de escala do Universo, que pode ser constante ou dependente do tempo conforme o modelo [21]. Para um universo com curvatura positiva, o fator de escala seria essencialmente o raio do universo no tempo t .

Todos os objetos astronômicos sujeitos apenas a um campo gravitacional cosmológico segue, portanto, as geodésicas da geometria, e têm coordenadas espaciais constantes ao longo de sua história (as chamadas coordenadas co-moventes). Assim, a distância espacial entre dois objetos astronômicos entre t_1 e t_2 só varia através do fator de escala $R(t)$.

A.4 Equação do desvio geodésico

Em espaços curvos, a equação do desvio geodésico (Fig. A.5) contém informações sobre as forças de maré na curvatura do espaço-tempo, onde as partículas seguem geodésicas. No nosso caso, as partículas são fótons e a aceleração de duas geodésicas vizinhas, que diferem uma da outra apenas por uma pequena diferença nas suas condições iniciais, é dada por:

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu \xi^\beta. \quad (\text{A.24})$$

No lado direito desta expressão temos o tensor de curvatura de Riemann³, e V^ν é o vetor tangente à trajetória do fóton. No lado esquerdo, λ é o parâmetro afim, ξ é o vetor de conexão que vai de uma geodésica a outra, conectando pontos a intervalos iguais em λ .

A fim de adquirirmos um pouco mais de intuição sobre o assunto, faremos a seguir uma análise Newtoniana de uma situação similar para duas partículas não-relativísticas.

A.4.1 Desvio geodésico em gravitação Newtoniana

Considerando um potencial gravitacional Newtoniano $\Phi = \Phi(x^\alpha)$, e duas curvas C_1 e C_2 de parâmetro t (por exemplo a coordenada temporal) para descrever

³Note que o tensor de curvatura é um tensor e não pode ser anulado por uma transformação de coordenadas.

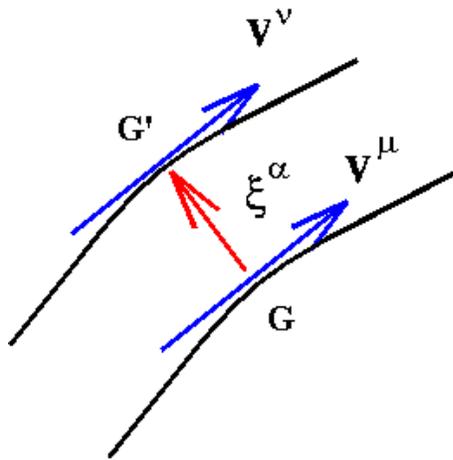


Figura A.5: Desvio geodésico ξ^α entre duas geodésicas G e G' , e seus correspondentes vetores tangentes V^μ e V^ν .

o movimento de duas partículas testes P e Q não-relativísticas em um potencial gravitacional Φ . Num dado tempo t , as duas partículas terão posições x^a e z^a , as quais variarão no tempo. Além disso, deixe $\eta^a(t)$ ser as componentes do trivetor separando as duas partículas (trivetor de conexão) a qualquer tempo, isto é:

$$z^a = z^a(t) = x^a(t) + \eta^a(t). \quad (\text{A.25})$$

Porque existe apenas uma força sendo aplicada (força gravitacional), as equações de movimento serão particularmente simples, na forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^a(t) &= -(\partial^a \Phi)_P \\ \ddot{z}^a(t) &= -(\partial^a \Phi)_Q = \ddot{x}^a(t) + \ddot{\eta}^a(t), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

onde $(\partial^a \Phi)_{P,Q}$ são forças gravitacionais atuando em P e Q no tempo t . Nós podemos agora expandir em série de Taylor o potencial gravitacional Φ em Q em termos do trivetor de conexão:

$$(\Phi)_Q = (\Phi)_P + \eta^b (\partial^a \Phi)_P + \mathcal{O}(\eta^a \eta_a), \quad (\text{A.27})$$

de forma que as equações (A.26) podem ser reescritas como:

$$\ddot{x}^a + \ddot{\eta}^a = -(\partial^a \Phi)_Q = -\partial^a [(\Phi)_P + \eta^b (\partial^a \Phi)_P] = (\partial^a \Phi)_P - \eta^b (\partial^a \partial_b \Phi)_P,$$

ou equivalentemente:

$$\ddot{\eta}^a = -(\partial^a \partial_b \Phi) \eta^b = -K_b^a \eta^b, \quad (\text{A.28})$$

onde $K_b^a \equiv \partial^a \partial_b \Phi$.

A equação (A.28) representa a *equação da geodésica* na física Newtoniana e expressa o fato que a distância entre duas partículas em queda livre irá variar se elas se moverem em um campo gravitacional não-uniforme. Além disso, desde que $\ddot{\eta}^a = 0$, se $K_b^a = 0$, a equação (A.28) destaca como a aceleração relativa entre as duas partículas não é capaz de distinguir entre um campo gravitacional uniforme $\partial^a \Phi = 0$ e um campo nulo $\Phi = 0$, pelo menos em princípio. É sabido da teoria da gravitação de Newton e de observações astronômicas que na, gravidade de Newton, $\Phi \sim \frac{1}{r}$ e então, $K_b^a \sim 0$, somente a grandes distâncias da fonte do potencial Φ , onde $\Phi \rightarrow 0$.

A.5 Equações de Einstein

Na variedade quadridimensional, que é o espaço-tempo, serão definidos os campos físicos, que serão campos tensoriais, haverá uma conexão para que se possa definir derivadas desses campos, e um tensor métrico para se definir distâncias espaciais e intervalos de tempo.

Nas equações de Einstein, o universo inteiro pode ser descrito em uma única linha:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.29})$$

onde $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ (sendo G a constante gravitacional de Newton, e c a velocidade da luz), o tensor $G_{\mu\nu}$ (eq. (A.21)) é quem descreve a geometria do espaço-tempo

através do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ (eq. (A.19)) e do escalar de curvatura R (eq. (A.20)),

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (\text{A.30})$$

e o tensor $T_{\mu\nu}$ (tensor energia-momentum), descreve a distribuição de matéria e energia no universo. Quando $T_{\mu\nu} = 0$ temos que $R_{\mu\nu} = 0$, e nesse caso a estrutura fundamental do espaço-tempo é o espaço de Minkowski. Esse tipo de espaço-tempo é usualmente utilizado pelos cosmólogos como *background*, ou plano de fundo, para os problemas cosmológicos.

A Relatividade Geral é uma teoria conceitualmente complicada, pois envolve conceitos complexos e idéias não muito intuitivas, tais como a própria relatividade do espaço e do tempo, e também a curvatura do espaço-tempo. A equação (A.29) na verdade, é um conjunto de 10 equações diferenciais parciais acopladas, não-lineares (isto é, não é válido o *Princípio da Superposição*), onde o espaço e o tempo são parte da solução, e a exata solução é conhecida apenas em alguns poucos casos simples.

No presente trabalho utilizamos uma solução bem conhecida para as equações de Einstein, considerando uma distribuição isotrópica e homogênea de massa onde, assim como na dinâmica newtoniana, a gravidade é sempre atrativa. Essa solução é a solução de Friedmann (apresentada no capítulo 2) para o Universo em expansão. Não trataremos da constante cosmológica nas equações de Einstein, pois remete a um universo tipo *de Sitter*, no qual não estamos interessados aqui.

Apêndice B

Desenvolvimento Matemático

Este apêndice é dedicado ao desenvolvimento do cálculo que leva a equação (2.4), apresentada no capítulo 2:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\lambda^2} = (R'_{\mu\nu\beta} + \delta R_{\mu\nu\beta})V^\mu V^\nu \xi^\beta \quad (\text{B.1})$$

até às equações (2.10):

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k + 2\phi_{\zeta\zeta} & 2\phi_{\zeta\eta} \\ 2\phi_{\zeta\eta} & k + 2\phi_{\eta\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

B.1 Solução

Neste apêndice, resolvemos a equação (B.1), também conhecida como *Equação do Desvio Geodésico*. A fim de tornar a demonstração mais didática, dividimos os cálculos em três partes: uma para o lado esquerdo da equação, e duas para o lado direito da equação, a saber, para o termo não-perturbado, e para o termo perturbado.

Assim como mostrado nas equações (2.7) e (2.9) do capítulo 2, estes são o tensor métrico não-perturbado e o tensor métrico perturbado, respectivamente,

como segue:

$$g^{\gamma\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f(r) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

onde, para simplificar a notação, definimos:

$$f(r) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \quad (\text{B.4})$$

e

$$\delta g^{\gamma\epsilon} = \begin{pmatrix} 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\phi f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\phi f(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\phi f(r) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Também, conforme visto no capítulo 3, tomamos as seguintes direções para o movimento:

$$V^\mu = V^\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

e as seguintes componentes de conexão, ortogonais às direções de movimento:

$$\xi^\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

B.1.1 Lado esquerdo

Primeiramente é necessário projetar o vetor conexão ξ^α no plano tangente τ perpendicular à direção de movimento. Para tal, usamos o operador projeção definido como (detalhes em A.3.4):

$$h_\alpha^\rho = g_\alpha^\rho - V^\rho V_\alpha. \quad (\text{B.8})$$

O tensor covariante de velocidade pode ser contraído com o tensor métrico [71–73], de forma que ficamos com:

$$h_\alpha^\rho = \delta_\alpha^\rho - V^\rho g_{\alpha\gamma} V^\gamma. \quad (\text{B.9})$$

Resolvendo essa equação, na forma matricial, temos:

$$h_\alpha^\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -f(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -f(r) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f(r) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 + f(r) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

e multiplicando essa matriz com o vetor de conexão ξ^α :

$$\xi^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

chegamos à:

$$\xi^\rho = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

que depende agora do parâmetro τ , e portanto:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} \implies \frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

B.1.2 Lado direito

Este é o lado que refere-se ao comportamento da curvatura do espaço-tempo devido às perturbações na distribuição de matéria¹ que ocorrem por causa da presença de estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, etc.

O lado direito da equação (B.1) é dado por:

$$(R'_{\mu\nu\beta} + \delta R_{\mu\nu\beta}^\alpha) V^\mu V^\nu \xi^\beta, \quad (\text{B.16})$$

onde aqui, o tensor de Riemann é a soma de duas componentes: a não perturbada $R'_{\mu\nu\beta}$, conhecida como *background*, e a perturbada $\delta R_{\mu\nu\beta}^\alpha$. Aplicando a

¹Lembre-se que o tensor de Riemann está diretamente relacionado ao tensor energia-momentum através das equações de Einstein.

propriedade distributiva, temos:

$$(R'_{\mu\nu\beta} + \delta R'_{\mu\nu\beta})V^\mu V^\nu \xi^\beta = R'_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu \xi^\beta + \delta R'_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu \xi^\beta. \quad (\text{B.17})$$

Resolveremos primeiramente a parte sem perturbação (*background*).

Termo Sem Perturbação

Da análise detalhada das componentes válidas, obtém-se:

$$R'_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu \xi^\beta = R'_{001} + R'_{002} + R'_{031} + R'_{032} + R'_{301} + R'_{302} + R'_{331} + R'_{332} \quad (\text{B.18})$$

onde, sabemos da definição do tensor de Riemann (A.17) que:

$$R^\alpha_{\mu\nu\beta} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\beta}. \quad (\text{B.19})$$

Para resolver a equação (B.18) usando a equação (B.19), utilizamos as propriedades dos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2g_{ii}}g_{ii,j} \quad (\text{B.20})$$

$$\Gamma^j_{ii} = -\frac{1}{2g_{jj}}g_{ii,j} \quad (\text{B.21})$$

$$\delta\Gamma^i_{ij} = \delta\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2g_{ii} + \delta g_{ii}}\delta g_{ii,j} \quad (\text{B.22})$$

$$\delta\Gamma^j_{ii} = -\frac{1}{2g_{jj} + \delta g_{jj}}\delta g_{ii,j}, \quad (\text{B.23})$$

e os valores do tensor métrico, dados no início deste apêndice. Desenvolvendo os

cálculos, temos:

$$\begin{aligned}
R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta &= \Gamma_{00,1}^\alpha - \Gamma_{01,0}^\alpha + \Gamma_{\rho 1}^\alpha \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{\rho 0}^\alpha \Gamma_{01}^\rho + \Gamma_{00,2}^\alpha - \Gamma_{02,0}^\alpha + \Gamma_{\rho 2}^\alpha \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{\rho 0}^\alpha \Gamma_{02}^\rho \\
&+ \Gamma_{03,1}^\alpha - \Gamma_{01,3}^\alpha + \Gamma_{\rho 1}^\alpha \Gamma_{03}^\rho - \Gamma_{\rho 3}^\alpha \Gamma_{01}^\rho + \Gamma_{03,2}^\alpha - \Gamma_{02,3}^\alpha + \Gamma_{\rho 2}^\alpha \Gamma_{03}^\rho - \Gamma_{\rho 3}^\alpha \Gamma_{02}^\rho \\
&+ \Gamma_{33,1}^\alpha - \Gamma_{31,3}^\alpha + \Gamma_{\rho 1}^\alpha \Gamma_{33}^\rho - \Gamma_{\rho 3}^\alpha \Gamma_{31}^\rho + \Gamma_{33,2}^\alpha - \Gamma_{32,3}^\alpha + \Gamma_{\rho 2}^\alpha \Gamma_{33}^\rho - \Gamma_{\rho 3}^\alpha \Gamma_{32}^\rho \\
&+ \Gamma_{30,1}^\alpha - \Gamma_{31,0}^\alpha + \Gamma_{\rho 1}^\alpha \Gamma_{30}^\rho - \Gamma_{\rho 0}^\alpha \Gamma_{31}^\rho + \Gamma_{30,2}^\alpha - \Gamma_{32,0}^\alpha + \Gamma_{\rho 2}^\alpha \Gamma_{30}^\rho - \Gamma_{\rho 0}^\alpha \Gamma_{32}^\rho.
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Na notação de Einstein, os índices repetidos indicam soma, de forma que a equação (B.24) resulta em:

$$\begin{aligned}
R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta &= \Gamma_{00,1}^\alpha - \Gamma_{01,0}^\alpha + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{21}^\alpha \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{31}^\alpha \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{01}^0 \\
&- \Gamma_{10}^\alpha \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{20}^\alpha \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{30}^\alpha \Gamma_{01}^3 + \Gamma_{00,2}^\alpha - \Gamma_{02,0}^\alpha + \Gamma_{02}^\alpha \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{00}^1 \\
&+ \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{32}^\alpha \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{10}^\alpha \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{20}^\alpha \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{30}^\alpha \Gamma_{02}^3 \\
&+ \Gamma_{03,1}^\alpha - \Gamma_{01,3}^\alpha + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{03}^1 + \Gamma_{21}^\alpha \Gamma_{03}^2 + \Gamma_{31}^\alpha \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{03}^\alpha \Gamma_{01}^0 \\
&- \Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{23}^\alpha \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{01}^3 + \Gamma_{03,2}^\alpha - \Gamma_{02,3}^\alpha + \Gamma_{02}^\alpha \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{03}^1 \\
&+ \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{03}^2 + \Gamma_{32}^\alpha \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{03}^\alpha \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{23}^\alpha \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{02}^3 \\
&+ \Gamma_{33,1}^\alpha - \Gamma_{31,3}^\alpha + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{21}^\alpha \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{31}^\alpha \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{03}^\alpha \Gamma_{31}^0 \\
&- \Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{23}^\alpha \Gamma_{31}^2 - \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{33,2}^\alpha - \Gamma_{32,3}^\alpha + \Gamma_{02}^\alpha \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{33}^1 \\
&+ \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{32}^\alpha \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{03}^\alpha \Gamma_{32}^0 - \Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{32}^1 - \Gamma_{23}^\alpha \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{32}^3 \\
&+ \Gamma_{30,1}^\alpha - \Gamma_{31,0}^\alpha + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{30}^1 + \Gamma_{21}^\alpha \Gamma_{30}^2 + \Gamma_{31}^\alpha \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{31}^0 \\
&- \Gamma_{10}^\alpha \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{20}^\alpha \Gamma_{31}^2 - \Gamma_{30}^\alpha \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{30,2}^\alpha - \Gamma_{32,0}^\alpha + \Gamma_{02}^\alpha \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{30}^1 \\
&+ \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{30}^2 + \Gamma_{32}^\alpha \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{32}^0 - \Gamma_{10}^\alpha \Gamma_{32}^1 - \Gamma_{20}^\alpha \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{30}^\alpha \Gamma_{32}^3. \tag{B.25}
\end{aligned}$$

Do tensor métrico não-perturbado e perturbado, respectivamente representa-

dos pelas equações (B.3) e (B.5), temos que:

$$\begin{aligned}
g_{00,i} &= 0 \\
g_{ii,0} = g_{ii,2} = g_{ii,3} &= 0 \\
\delta g_{jj,0} &= 0
\end{aligned} \tag{B.26}$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 0, 1, 2, 3$. Como os tensores métricos (eqs. (B.3) e (B.5)) são dados por matrizes diagonais, a partir das propriedades do tensor de Christoffel, as seguintes simplificações podem ser feitas:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jj}^0 &= \Gamma_{jj}^2 = \Gamma_{jj}^3 = 0 \\
\Gamma_{j0}^0 &= \Gamma_{0j}^0 = 0 \\
\Gamma_{0i}^i &= \Gamma_{i0}^i = \Gamma_{2i}^i = \Gamma_{i2}^i = \Gamma_{3i}^i = \Gamma_{i3}^i = 0 \\
\Gamma_{00}^i &= \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0 \\
\Gamma_{jk}^i &= 0 (i \neq j \neq k) \\
\delta \Gamma_{jj}^0 &= 0 \\
\delta \Gamma_{0j}^j &= \delta \Gamma_{j0}^j = 0,
\end{aligned} \tag{B.27}$$

e a equação (B.25) se resume em:

$$R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta = \Gamma_{33,1}^\alpha + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{30,1}^\alpha - \Gamma_{30}^\alpha \Gamma_{31}^3.$$

Atribuindo valores para α , e deixando apenas os termos não-nulos, obtemos:

$$R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 + 2\Gamma_{12}^2 \Gamma_{33}^1.$$

Reescrevendo esse resultado em termos dos valores do tensor métrico, obtemos:

$$R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{33,1}}{g_{11}} \right)_{,1} + \frac{1}{2} \frac{g_{22,1}}{g_{22}} \frac{g_{33,1}}{g_{11}},$$

onde finalmente, substituindo-se os valores para o tensor métrico, encontramos:

$$R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{f(r),1}{f(r)} \right)_{,1} + \frac{1}{2} \frac{(f(r),1)^2}{(f(r))^2}, \quad (\text{B.28})$$

onde $f(r),1$ é a derivada em r de $f(r)$:

$$f(r),1 = -\frac{kr}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^3} = -\frac{kr}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)} f(r), \quad (\text{B.29})$$

substituindo (B.4) e (B.29) em (B.28), e calculando outra derivada similar, obtemos:

$$R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta = -\frac{k}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)} + \frac{k^2 r^2}{2 \left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} - \frac{2k^2 r^2}{(4 + kr^2)^2}, \quad (\text{B.30})$$

e no limite de $r \rightarrow 0$, a solução final é, simplesmente:

$$R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Termo Perturbado

O cálculo para as perturbações na curvatura é feito partindo do tensor de Riemann perturbado:

$$\delta R'_{\mu\nu\beta}{}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta = \delta R'_{001}{}^\alpha + \delta R'_{002}{}^\alpha + \delta R'_{031}{}^\alpha + \delta R'_{032}{}^\alpha + \delta R'_{301}{}^\alpha + \delta R'_{302}{}^\alpha + \delta R'_{331}{}^\alpha + \delta R'_{332}{}^\alpha. \quad (\text{B.32})$$

De forma completamente análoga ao que foi feito para a solução da equação (B.18), porém utilizando o tensor de Christoffel (Apêndice A.3.5) perturbado, chegamos à:

$$\begin{aligned}
\delta R_{001}^\alpha &\Rightarrow \delta R_{001}^1 = -2\phi_{,11} \\
\delta R_{002}^\alpha &= 0 \\
\delta R_{031}^\alpha &= 0 \\
\delta R_{032}^\alpha &= 0 \\
\delta R_{301}^\alpha &\Rightarrow \delta R_{301}^0 = -2\phi_{,31} \\
\delta R_{302}^\alpha &= 0 \\
\delta R_{331}^\alpha &\Rightarrow \delta R_{331}^1 = -2\phi_{,33} \\
&\Rightarrow \delta R_{331}^3 = -2\phi_{,31} \\
\delta R_{332}^{\prime\alpha} &= 0,
\end{aligned}$$

onde associamos:

$$\begin{aligned}
\phi_{,11} &\rightarrow \phi_{,\zeta\zeta} \\
\phi_{,31} &\rightarrow \phi_{,\eta\zeta} \\
\phi_{,33} &\rightarrow \phi_{,\eta\eta} \\
\phi_{,31} &\rightarrow \phi_{,\eta\zeta}
\end{aligned}$$

lembrando que $\phi_{,\eta\zeta} = \phi_{,\zeta\eta}$. E simplificando o tensor de Riemann, chegamos na forma final:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2\phi_{,\zeta\zeta} & -2\phi_{,\zeta\eta} & 0 \\
0 & -2\phi_{,\zeta\eta} & -2\phi_{,\eta\eta} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{B.33}$$

B.1.3 Solução Final

Juntando todas as partes do lado direito, ficamos com:

$$(R'_{\mu\nu\beta} + \delta R_{\mu\nu\beta}) V^\mu V^\nu \xi^\beta = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\phi_{,\zeta\zeta} & 2\phi_{,\zeta\eta} & 0 \\ 0 & 2\phi_{,\zeta\eta} & 2\phi_{,\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

E substituindo (B.34) na equação (B.1), chegamos nas equações diferenciais ordinárias para as componentes de separação entre duas geodésicas de fótons:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k + 2\phi_{,\zeta\zeta} & 2\phi_{,\zeta\eta} \\ 2\phi_{,\zeta\eta} & k + 2\phi_{,\eta\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.35})$$

que são o cerne do presente trabalho.

Referências

- [1] AURICH, R.; STEINER, F. Dark energy in a hyperbolic universe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Oxford, v. 334, p. 735–742, May 2002.
- [2] EINSTEIN, A. *La teoria de la relatividad al alcance de todos*. Buenos Aires: Editorial Alda, 1946.
- [3] FRIEDMANN, A. On the possibility of a world with constant negative curvature of space. *Z. Phys.*, Berlin, v. 21, p. 326–332, Jan. 1924.
- [4] MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.*, v. 215, n. 5-6, p. 203–333, June 1992.
- [5] DETTMANN, C. P.; KEATING, J. P.; PRADO, S. D. Stochastic stabilization of cosmological chaos. *J. Phys. A*, Bristol, v. 37, n. 056, p. L377–L381, 2003.
- [6] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer, 1978.
- [7] GUTZWILLER, M. C. *Chaos in classical and quantum mechanics*. New York: Springer, 1990.
- [8] CORNISH, N. J.; SPERGEL, D. N.; STARKMAN, G. D. Does chaotic mixing facilitate $\omega < 1$ inflation? *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 77, p. 215–218, 1996.
- [9] HELLER, E. J. Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems: Scars of periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 53, p. 1515–1518, Oct 1984.
- [10] LEVIN, J.; BARROW, J. D. Fractals and scars on a compact octagon. *Class. Quantum Gravity*, Bristol, v. 17, p. L61–L68, 2000.
- [11] LEVIN, J. Topology and the cosmic microwave background. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 365, n. 4, p. 251–333, Aug 2002.
- [12] BUTIKOV, E. I. On the dynamic stabilization of an inverted pendulum. *Am. J. Phys.*, v. 69, n. 6, p. 13, June 2001.
- [13] FOWLER, J. W. et al. CMB observations with a compact heterogeneous 150 ghz interferometer in Chile. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0403137>>. Acesso: 03 agosto 2004.

- [14] PAGE, L. et al. The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph?0306381>>. Acesso: 01 agosto 2004.
- [15] RABII, B. et al. Maxima: A balloon-borne cosmic microwave background anisotropy experiment. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph?0309414>>. Acesso: 02 agosto 2004.
- [16] SPERGEL, D. N. et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters. *Astrophys. J. Suppl.*, Chicago, v. 148, n. 175, p. 51, Feb 2003.
- [17] JAFFE, A. H. et al. Recent results from the maxima experiment. *New Astron. Rev.*, v. 47, p. 727–732, Feb 2003.
- [18] LEVIN, J. Missing lorentz-boosted circles in the sky. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph?0403036>>. Acesso: 04 agosto 2004.
- [19] BERSANELLI, M.; MAINO, D.; MENNELLA, A. Current status and perspectives of cosmic microwave background observations. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310089>>. Acesso: 26 agosto 2004.
- [20] EISENSTEIN, D. J.; HU, W. T. M. Cosmic complementarity: Joint parameter estimation from cosmic microwave background experiments and redshift surveys. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 518, n. 1, p. 2–23, June 1999.
- [21] BERRY, M. V. *Principles of cosmology and gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [22] LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A. M. H. *O princípio da relatividade*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1958.
- [23] CIUFOLINI, I.; WHEELER, J. A. *Gravitation and inertia*. Princeton: Princeton Series in Physics, 1995.
- [24] GARDNER, M. *Relativity simply explained*. New York: Dover Publications, 1997.
- [25] EÖTVÖS, R. V.; PEKAR, D.; EUGEN, F. Contributions to the law of proportionality of inertia and gravity. *Annalen Phys.*, Berlin, v. 68, p. 11–66, 1922.
- [26] KRASINSKI, A. *Inhomogeneous cosmological models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [27] CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M. Expansion, geometry, and gravity. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph?0403003>>. Acesso: 22 outubro 2003.
- [28] GLEISER, M. What we know and what we don't know about the universe. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph?0401213>>. Acesso: 23 janeiro 2004.

- [29] WHITEHOUSE, S. B.; KRANIOTIS, G. V. A possible explanation of galactic velocity rotation curves in terms of a cosmological constant. *RHCPP*, v. 20T, p. 24, Nov. 1999.
- [30] SAHNI, V. Dark matter and dark energy. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph?0403324>>. Acesso: 15 agosto 2004.
- [31] BELL, M. B.; COMEAU, S. P. Intrinsic redshifts and the Hubble constant. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph?0305060>>. Acesso: 18 agosto 2004.
- [32] TURNER, M. S. Cosmology: From Hubble to HST. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9703174>>. Acesso: 19 agosto 2004.
- [33] FIXSEN, D. J. et al. The cosmic microwave background spectrum from the full COBE/FIRAS data set. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 473, p. 576–608, May 1996.
- [34] FREEDMAN, W. L. The Hubble constant and the expansion age of the universe. *Phys. Rep.*, v. 333, p. 13–31, Jan. 2000.
- [35] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 142, p. 419–421, July 1965.
- [36] MATHER, J. C. et al. Calibrator design for the COBE far infrared absolute spectrophotometer (FIRAS). Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9810373>>. Acesso: 26 agosto 2004.
- [37] MATHER, J. C. COBE looks back to the Big Bang. *Aerospace America*, Washington, v. 31, n. 1, p. 26–30, Jan. 1993.
- [38] BURIGANA, C.; SALVATERRA, R. Mapping the thermal history of the universe with the new generation of CMB spectrum space experiments. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0309509>>. Acesso: 26 agosto 2004.
- [39] BEVIS, N.; HINDMARSH, M.; KUNZ, M. WMAP constraints on inflationary models with global defects 9pg. *Phys. Rev. D*, Chicago, v. 70, p. 043508, Mar. 2004.
- [40] FIXSEN, D. J. et al. The spectrum of the CMB anisotropy from the combined COBE/FIRAS and DMR observations. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 486, p. 15, Sept 1997.
- [41] BENNETT, C. L. et al. Scientific results from COBE. *Adv. Space Research*, Bern, v. 13, n. 12, p. 409–423, Dec 1993.
- [42] GURZADYAN, V. G.; KOCHARYAN, A. A. Scale-invariant spectrum of cosmic background radiation as a feature of the universe with negative curvature. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9401048>>. Acesso: 25 agosto 2004.

- [43] BENNETT, C. L. et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results. *Astrophys. J. Suppl.*, Chicago, v. 148, p. 1, Feb 2003.
- [44] BENNETT, C. L. et al. Cosmic temperature fluctuations from two years of COBE DMR observations. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 436, p. 423–442, Jan. 1994.
- [45] Goddard Space Flight Center Link. - NASA (National Aeronautics and Space Administration). The first detailed full sky picture of the oldest light in the universe. Disponível em: <http://map.gsfc.nasa.gov/m_mm.html>. Acesso: 20 agosto 2004.
- [46] de OLIVEIRA-COSTA, A. et al. The significance of the largest scale CMB fluctuations in WMAP. *Phys.Rev. D*, New York, v. 69, n. 6, p. 063516, Mar. 2004.
- [47] BERRY, M. V. Regular and irregular semiclassical wavefunctions. *J. Phys. A*, v. 10, p. 2083–2091, 1977.
- [48] ALMEIDA, A. M. O. *Sistemas hamiltonianos: caos e quantização*. Campinas: Ed. Unicamp, 1995.
- [49] KOMATSU, E. et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: tests of gaussianity. *Astrophys. J. Suppl.*, Chicago, v. 148, p. 119–134, Feb 2003.
- [50] GUPTA, S. Non-gaussianity from warm inflation in the weak dissipative regime. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310460>>. Acesso: 18 agosto 2004.
- [51] VIELVA, P. et al. Detection of non-gaussianity in the WMAP 1-year data using spherical wavelets. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310273>>. Acesso: 26 agosto 2004.
- [52] PARK, C. Non-gaussian signatures in the temperature fluctuation observed by the wilkinson microwave anisotropy probe. *Mont. Not. Roy. Astron. Soc.*, Chicago, v. 349, p. 313–320, 2004.
- [53] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. New York: W. H. Freeman, 1973.
- [54] SASLAW, W. C. *The distribution of the galaxies: gravitational clustering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [55] TRETIAKOV, N. P.; SILVA, T. L.; FERNANDES, H. A. Pêndulo invertido: dinâmica complexa num sistema mecânico simples. *Rev. Bras. Ens. Fís.*, São Paulo, v. 21, p. 48–52, Mar. 1999.

- [56] BARÃO, M. J. S. Sistemas dinâmicos em espaço de estados (teoria). Disponível em: <<http://todi.est.ips.pt/rlargo/SD/sd-Teo.pdf>>. Acesso: 3 junho 2004.
- [57] BERRY, M. V. Topics in nonlinear dynamics - a tribute to Sir Edward Bullard. In: JORNA, S. (Ed.) *AIP Conference Proceedings - Number 46*. New York: American Institute of Physics, 1978. p. 16–28.
- [58] MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical dynamics of particles and systems*. CA: Belmont, 666.
- [59] RAHAV, S.; GILARY, I.; FRISHMAN, S. Time independent description of rapidly oscillating potentials. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 91, n. 11, p. 110404, Sept 2003.
- [60] MUKHANOV, V. F. Bifurcations and transition to chaos in inverted pendulum. *Phys. Rev. E*, v. 58, p. 3028–3035, June 1998.
- [61] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. Oxford: Pergamon, 1960.
- [62] GURZADYAN, V. G.; KOCHARYAN, A. A. Scale-invariant spectrum of cosmic background radiation as a feature of the universe with negative curvature. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/9401048>>. Acesso: 27 agosto 2004.
- [63] PRESS, W. H. et al. Numerical recipes. Disponível em: <<http://www.nr.com>>. Acesso: 22 julho 2003.
- [64] Gurzadyan, V. G. et al. Ellipticity analysis of the BOOMERANG CMB maps. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 12, p. 1859–1874, 2003.
- [65] GURZADYAN, V. G.; TORRES, S. Testing the effect of geodesic mixing with COBE data to reveal the curvature of the universe. *Astron. Astrophys.*, Paris, v. 321, n. 1, p. P 19–23, May 1997.
- [66] BROMLEY, B. C.; TEGMARK, M. Is the cosmic microwave background really non-gaussian? *Astrophys. J.*, Chicago, v. 524, n. 2, p. L79–L82, Oct 1999.
- [67] FUKUSHIGE, T.; MAKINO, J.; EBISUZAKI, T. The effect of gravitational scattering on the anisotropy of the cosmic background radiation. *Astrophys. J.*, v. 436, p. L111, Sept 1994.
- [68] NOVELLO, M.; SALIM, J. M. Non-equilibrium relativistic cosmology. *Fund. Cosmic Phys.*, v. 8, n. 3, p. 201–341, Nov. 1983.
- [69] Anais da IV Escola do CBPF. *Iv escola do cbpf*. Rio de Janeiro: Ligia MCS Rodrigues et al, 2002.
- [70] NOVELLO, M. E. A. *Cosmology and gravitation II*. Gif-sur-Yvette Cedex: Editions Frontières, 1996.

- [71] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- [72] NOVELLO, M. et al. Palestras de todas as escolas brasileiras de cosmologia e gravitação. Disponível em: http://www.cbpf.br/%7Ecosmogra/Escolas/indice_portugues.html. Acesso: 20 outubro 2003.
- [73] JOSHI, A. W. *Matrices and tensors in physics*. Delhi: John Wiley & Sons, 1995.