Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Teoremas de Comparação e uma Aplicação a Estimativa do Primeiro Autovalor

Dissertação de Mestrado

Adilson da Silva Nunes

Porto Alegre, 20 Março de 2014

Dissertação submetida por Adilson da Silva Nunes[1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:
Profª. Drª. Patrícia Kruse Klaser

Banca examinadora:
Profª. Drª. Patrícia Kruse Klaser (IM - UFRGS, ORIENTADORA)
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (IM - UFRGS)
Profª. Drª. Miriam Telichevesky (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Gregório Pacelli Bessa (UFC)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, o qual abriu as portas para que eu tivesse a oportunidade de estar vivendo mais essa experiência em minha vida. Sem Ele eu não ultrapassaria nem a primeira das dificuldades que eu tive durante esse projeto. A Ele todo o louvor por me fazer vitorioso.

Agradeço aos meus pais, Elço e Marilene, por sempre acreditarem em mim e por todo incentivo e apoio que me deram nesse período. Aos meus irmãos, Edison e Giovanni, por toda formação matemática que me deram, pelo exemplo que sempre foram em minha vida e por não medirem esforços para me ajudar no que fosse necessário. As minhas cunhadas, Kátia e Lisandra, por todo cuidado que tiveram comigo desde a minha infância. As minhas sobrinhas Lóren e Anne por, mesmo sem se darem conta, serem minha motivação em momentos de dificuldade e fazerem minha alegria sempre que estamos juntos.

Aos membros da banca por se disporem a estar na apresentação e por suas valiosas sugestões.

Ao professor Jaime por sua orientação acadêmica no início do mestrado e valiosas dicas dos caminhos a serem traçados nesse período.

A todos colegas da pós, dentre os quais não posso deixar de citar o Álvaro, Éverton, Leonardo e Marília, por todo companheirismo.

A minha orientadora Patrícia Klaser pelos desafios propostos nesse período os quais, mesmo quando minha falta de maturidade os julgavam sem propósito, sempre me fizeram crescer na matemática e foram essenciais para elaboração desta dissertação. Também por sempre se mostrar disposta a me ajudar e por toda paciência que ela teve durante este trabalho.

Em especial a minha noiva, Juliana, a qual esteve ao meu lado em todos momentos sempre de maneira encorajadora e incansável. Obrigado pelo apoio incondicional que você me deu nesse período, por me fortalecer quando tudo estava difícil e principalmente por fazer eu acreditar em mim. Essa conquista é nossa pois sonhamos juntos e realizamos juntos.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho trata de estimativas inferiores para o primeiro autovalor do problema de Dirichlet para o Laplaciano para domínios relativamente compactos contidos em variedades riemannianas. Essas estimativas são obtidas com hipóteses sobre a curvatura seccional ou a curvatura de Ricci radial e a curvatura do bordo do domínio.
Palavras-chave: Primeiro Autovalor; Variedades Rotacionalmente Simétricas; Teoremas de Comparação.

Abstract

This paper deals of lower estimates for the first eigenvalue of the Dirichlet problem for the Laplacian for relatively compact domains contained in Riemannian manifolds. These estimates are obtained with assumptions on the sectional or Ricci radial curvature and the curvature of the boundary of the domain.
Key-words: First Eigenvalue; Rotationally Symmetric Manifolds; Comparison Theorems.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação iremos tratar de estimativas por baixo para o primeiro autovalor do Problema de Dirichlet para o operador Laplaciano em variedades riemmanianas compactas com bordo. A formulação desse problema é dada por resolver

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u \text{ em } M \\ u = 0 \text{ em } \partial M. \end{cases}$$

onde M é uma variedade riemanniana compacta com bordo. Denomina-se por *autofunção* toda solução u não identicamente nula desse problema enquanto que o λ associado a solução u é chamado de *autovalor*.

Uma motivação física para essa situação vem do problema da membrana vibrante. A formulação matemática deste problema é dada por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

onde Δ é o Laplaciano do $\mathbb{R}^n$, $f(x,t)$ depende da posição $x \in \Omega$, do tempo $t \in \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é o formato inicial da membrana quando está em repouso. Ao aplicarmos o método de separação de variáveis para resolver o problema fazendo a substituição

$$f(x,t) = u(x)v(t),$$

somos levados a estudar a equação $\Delta u(x) = -\lambda u(x)$. Nesse caso temos que λ é a frequência de vibração da membrana enquanto a função u associada a tal λ representa o modo de vibração da mesma.

Uma das questões que podem ser abordadas por esse problema é encontrar a menor frequência vibração da membrana, isto é, o menor número real λ para o qual existe solução u deste problema. Denotamos esse menor valor por λ_1 e o denominamos *primeiro autovalor de Dirichlet para o Laplaciano.*

É possível mostrar, através do princípio do máximo por exemplo, que para existir solução não trivial do problema é necessário que λ seja positivo. Também é conhecido da literatura matemática que λ_1 é dado pelo quociente de Rayleigh

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_M |\mathrm{grad}\, u|^2}{\int_M |u|^2} \mid u \in C^\infty(M), u\big|_{\partial M} = 0, u \neq 0 \right\}.$$

Na realidade esse ínfimo é um mínimo e é realizado pela primeira autofunção. Embora exista essa expressão explícita para λ_1, no geral é muito difícil calculá-la. Nesse momento é que se torna importante termos teoremas que nos permitem, com base em informações fornecidas pela geometria da variedade, fazer estimativas do quão grande ou pequeno λ_1 será. Por se tratar de ínfimo, o quociente de Rayleigh é um bom caminho para tentarmos estimar λ_1 por cima.

Em nossa dissertação, tratamos de uma estimativa por baixo para λ_1 feita em [KR], inspirada no seguinte teorema

Teorema 1.0.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfazendo*

$$\Delta u = f \ \text{em } \Omega.$$

Então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de Ω, tal que

$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |f|.$$

Esse teorema se apresenta em uma forma mais geral em [GT], a saber, substituindo Δ por um operador eliptico qualquer. Como vamos tratar do problema de Dirichlet para Laplaciano, basta nos preocuparmos com o operador Δ.

Uma vez provado esse teorema, consideramos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u \ \text{ em } \ \Omega \\ u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega \end{cases}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo um domínio limitado. Então substituindo essas informações no Teorema 1.0.1 obtemos

$$\begin{aligned} \sup_\Omega |u| &\leq 0 + C \sup_\Omega |-\lambda u| \\ &= \lambda C \sup_\Omega |u| \end{aligned}$$

logo,

$$\lambda \geq \frac{1}{C}.$$

Portanto se provado este teorema para domínios, mesmo que em uma variedade M, teremos um caminho para estimar $\lambda_1(\Omega)$, onde $\Omega \subset M$. Nesse caso, a fim de que se obtenha a melhor estimativa possível, não se busca apenas uma constante C como em [GT] e sim o C que nos dê a melhor estimativa possível.

Na prova do Teorema 1.0.1 apresentada em [GT], utiliza-se da coordenada x_1 para criar uma função auxiliar v que é essencial na demonstração. O que os autores perceberam em [KR] é que uma maneira de adaptar a demonstração para M era pensar em x_1 como sendo a distância ao hiperplano $\{x_2 = ... = x_n = 0\}$ e trocar esse hiperplano por outra subvariedade que se conheça a função distância a ela. Então com as devidas adaptações, como veremos no capítulo 4, consegue-se obter a tese do Teorema 1.0.1 e com isso obter uma estimativa para o primeiro autovalor de um domínio de variedade riemanniana.

Um dos teoremas que vamos mostrar no capítulo 4 é

Teorema 1.0.2. *Seja M uma variedade riemanniana e $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$ dimensional. Considere Ω uma vizinhança normal de N e $d : M \to \mathbb{R}_+$ a função distância a N. Suponha que exista $f : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1 satisfazendo:*

$$\frac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \frac{f'(d(x))}{f(d(x))},$$

para todo $x \in \Omega$. Se

$$C = \int_0^R \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)} dt$$

então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |\Delta u|,$$

para toda $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Veremos a definição de *vizinhança normal* na Definição 2.1.9.

A hipótese do teorema acima nos motiva a buscar maneiras de estimar Δd e é baseado nisso que o capítulo 3 desta dissertação se desenrola. Para realizar tais estimativas vamos, ainda no capítulo 3, comparar Δd em M com Δd em variedades rotacionalmente simétricas que são definidas da seguinte maneira

Definição 1.0.3. *Uma* variedade rotacionalmente simétrica com métrica associada á f *é uma variedade* $\tilde{M} = [0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ *com métrica dada por* $ds^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$ *onde* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+, f \in C^\infty$, $f(0) = 0$ *e* $f'(0) = 1$.

Apresentamos um breve estudo a respeito dessas variedades, pois elas nos permitem realizar cálculos importantes, como curvatura por exemplo, de maneira explícita apenas em função da função f, que aparece na definição.

É essencialmente o fato de se conhecer tais curvaturas para variedades rotacionalmente simétricas que permite que procedimentos semelhantes aos que demonstram o Teorema de Comparação do Laplaciano para variedades de curvatura seccional constante sejam, em um certo sentido, aplicados para mostrar o teorema

Teorema 1.0.4. *Seja* Ω *uma vizinhança normal de* $N \subset M$ *de largura* R. *Assuma que* $f : [0, R] \to (0, \infty)$ *é* $C^2([0, R])$ *satisfazendo*

$$\Lambda(\Omega) \leq -\frac{f'(0)}{f(0)}.$$

Considere, $\gamma : [0, R] \to M$ *uma geodésica qualquer, parametrizada pelo comprimento de arco tal que* $\gamma(0) \in N$ *e* $\gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$, *onde* η *é o vetor normal de* N *apontando para* Ω. *Assuma também que, para todo* $t \in (0, R]$ *e todo vetor* $v \in \{\gamma'(t)\}^\perp$ *unitário, seja válida a propriedade*

$$K_M(\gamma'(t), v) \leq -\frac{f''(t)}{f(t)},$$

onde $K_M(\gamma'(t), v)$ *é a curvatura seccional de* M *em* $\gamma(t)$ *sobre o plano determinado por* γ' *e* v. *Então* $\forall t \in [0, R]$

$$\frac{\Delta d(\gamma(t))}{n-1} \geq \frac{f'(t)}{f(t)},$$

onde d *é a função distância à* N.

O Teorema acima será mostrado no capítulo 3 dessa dissertação. Convém notar que o Teorema de Comparação do Laplaciano para variedades de curvatura seccional constante exige que uma das variedades tenha curvatura seccional constante. O teorema acima recupera esse resultado, já que essas podem ser vistas como variedades rotacionalmente simétrica desde que escolhamos uma f adequada, a saber $f(t) = S_K(t)$, onde K representa a curvatura seccional e

$$S_K(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{senh}(\sqrt{-K}t)}{\sqrt{-K}}, \text{ se } K < 0 \\ t, \text{ se } K = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}}, \text{ se } K > 0. \end{cases}$$

Os teoremas que vamos provar no capítulo 3 têm essencialmente suas hipóteses sobre as curvaturas de Ricci e seccional da variedade riemanniana M em questão. Embora esses Teoremas não nos forneçam diretamente nenhuma estimativa para λ_1, com eles conseguimos fazer com que as hipóteses dos Teoremas principais do capítulo 4 sejam satisfeitas. Como tais Teoremas são os que garantem a estimativa que buscamos para o primeiro autovalor, vemos que os resultados do capítulo 3 são de grande utilidade se queremos obter uma estimativa para λ_1 em variedades que possuem suas curvaturas de Ricci e seccional bem conhecidas.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo pretendemos familiarizar o leitor com os principais pré- requisitos de geometria riemanniana que essa dissertação irá abordar. Ao longo do texto, M denotará uma variedade riemanniana de dimensão n, com conexão riemanniana ∇. Admitiremaos também que M é completa, i.e., para todo ponto $p \in M$, qualquer geodésica $\gamma(t)$ que parte de p está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

2.1 Definições

Definição 2.1.1. *Um* campo de vetores X *em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que a cada ponto* $p \in M$ *associa um vetor* $X(p) \in T_pM$. *O conjunto dos campos de vetores diferenciáveis de uma variedade* M *será denotado por* $X(M)$.

Definição 2.1.2. *Uma* métrica riemanniana *em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que associa a cada ponto* p *de* M *um produto interno* $\langle\ ,\ \rangle_p$, *no espaço tangente* T_pM, *que varia diferenciavelmente no seguinte sentido. Se* $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *é um sistema de coordenadas locais em torno de* p, *com* $\phi(x_1, ...x_n) = q \in \phi(U)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\phi(0, ..., 1, ..., 0)$, *então* $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ *é uma função diferenciável em* U.

Observação 2.1.3. *Uma variedade diferenciável com uma métrica riemanniana é dita* variedade riemanniana. *Não daremos a definição explícita de conexão* ∇ *de uma variedade(o leitor interessado pode consultar [dC]).*

Existem vários objetos matemáticos para os quais atribuímos o nome de *curvatura*. Por isso é importante darmos um "sobrenome" para tais objetos, guardando assim a exclusividade do nome *curvatura* para

Definição 2.1.4. *A* curvatura *R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in X(M)$ aplicação $R(X,Y) : X(M) \to X(M)$ definida por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z; Z \in X(M)$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

Em geral, as curvaturas possuem significados geométricos distintos. Algumas delas, como *curvatura seccional*, são generalizações de curvaturas estudadas em geometria das superfícies.

Nesta dissertação, estaremos interessados em resultados que dependem de hipóteses sobre algumas dessas curvaturas, pois com elas vamos mostrar alguns teoremas de comparação que irão nos auxiliar na busca da estimativa desejada. Para que não se torne enfadonha a leitura deste texto, vamos definir tais objetos no momento em que for necessário utilizá-los.

No próximo exemplo definimos um tipo de variedade que é fundamental para o desenvolvimento do trabalho. Nele iremos calcular a curvatura seccional e a segunda forma fundamental, que passamos a definir agora.

Definição 2.1.5. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - (\langle x, y\rangle)^2}$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional *de σ em p.*

Observação 2.1.6. *A proposição* 3.1 *do capítulo* 4 *de [dC], mostra que se $x, y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes, então $K(x,y)$ não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$, ou seja, curvatura seccional está bem definida.*

Definição 2.1.7. *Sejam $N \subset M$ uma subvariedade, $p \in N$ e $u \in T_pN$. Dado $\eta \in (T_pN)^\perp$, considere X uma extensão local de η normal a N. Então a* segunda forma fundamental *em p, associada ao vetor η é a aplicação:*

$$S_\eta : T_pN \to T_pN$$

$$S_\eta(u) = -(\nabla_u X)^T.$$

Note que S_η é uma transformação linear e portanto possui uma forma bilinear associada que é $B_\eta : T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$, definida por $B_\eta(u,v) = \langle S_\eta(u), v\rangle$. Algumas vezes será mais conveniente nos referirmos a segunda forma fundamental de N em p, segundo o vetor η como sendo $B_\eta(u,u)$.

Exemplo 2.1.8. *Uma* variedade rotacionalmente simétrica com métrica associada a f, *é uma variedade* $\tilde{M} = [0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ *com métrica dada por* $ds^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$ *onde* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+, f \in C^\infty$, $f(0) = 0$ *e* $f'(0) = 1$. *Neste exemplo, vamos calcular a curvatura seccional radial em um ponto* $p \in \tilde{M}$.

Considere a parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \tilde{M}$ *definida por,*

$$\phi(t, x_1, ..., x_{n-1}) = (t, \theta(x_1, ..., x_{n-1})),$$

onde θ *é uma parametrização de* $\mathbb{S}^{n-1}$ *e* U *um aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Precisamos agora de uma geodésica radial que liga* p *a* $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$*(que neste caso se reduz a um ponto pois* $f(0) = 0$*), i.e., uma geodésica* $\tilde{\gamma} : [0, b] \to \tilde{M}$, $\tilde{\gamma}(0) = 0$, $\tilde{\gamma}(b) = p$ *tal que* $\tilde{\gamma}$ *seja parametrizada pelo comprimento de arco e que realiza a distância. Podemos escolher* $\tilde{\gamma}(t) = \phi(t, \theta)$. *Calcular a curvatura seccional radial* K *consiste em escolher o plano* σ *que contenha* $\tilde{\gamma}'$, *onde* $\tilde{\gamma}$ *é uma geodésica radial, e calcular a curvatura seccional dele.*

Agora, consideremos a subvariedade $N_b = \{x; d(x) = b\}$, *onde* d *é a função distância á* $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$. *Nessas condições teremos* $\tilde{\gamma}'(b) \perp N_b$, *e portanto, dado* $Y \in T_p N_b$ *teremos que* $\langle \nabla_V \tilde{\gamma}'(b), Y \rangle$ *é a segunda forma fundamental de* N_b. *Essa expressão aparece no cálculo da curvatura radial portanto vamos explicitá-la.*

Sem perda de generalidade, vamos escolher $Y \in \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right\}$, *que é a base de* $T_p N_b$, *associada a parametrização* ϕ. *Com isso, podemos escolher* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \tilde{\gamma}'(b) \right\}$ *como base de* $T_p \tilde{M}$. *Assim, a expressão da métrica de* $\tilde{M}$, *associada a essa parametrização será*

$$\begin{cases} g_{ij} = f^2(t) \hat{g}_{ij} & \text{se } i, j < n \\ g_{nn} = 1 & \\ g_{in} = g_{ni} = 0 & \text{se } i < n \end{cases}$$

onde $\hat{g}_{ij}$ *é a expressão da métrica de* $\mathbb{S}^{n-1}$ *associada a parametrização* θ, *e* $g_{ni} = g_{kn} = 0$ *para todo* $i, k < n$, *já que* $\tilde{\gamma}'(b)$ *é ortogonal a cada* $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Logo,

$$\langle \nabla_Y \tilde{\gamma}', Y \rangle = \langle \nabla_{X_i} X_n, X_i \rangle = \langle \sum_k \Gamma_{in}^k X_k, X_i \rangle = \sum_k \Gamma_{in}^k g_{ki}, \tag{2.1}$$

onde Γ_{in}^k *são os símbolos de Christoffel da conexão* ∇, X_i *é um dos elementos da base e* $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ *são os coeficientes da métrica.*

Sabemos que:

$$\Gamma_{in}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m}\{X_i g_{nm} + X_n g_{mi} - X_m g_{in}\}g^{mk} = \frac{1}{2}\sum_{m} X_n(g_{mi})g^{mk}, \qquad (2.2)$$

onde a última igualdade se deve ao fato de que $g_{ni} = g_{kn} = 0$ *para todo* $i, k < n$ *e* g^{kn} *são os coeficientes da inversa da matriz* (g_{kn})*. Derivando* g_{mi} *obtemos*

$$X_n(g_{mi}) = 2f(b)f'(b)(\hat{g})_{mi}. \qquad (2.3)$$

Ainda temos que

$$g^{mk} = f^{-2}(t)\hat{g}^{mk}, \qquad (2.4)$$

se m *ou* k *é diferente de* n*, e também,* $g^{nn} = 1$*. Para ver isso, basta olharmos para a matriz da métrica* g *como dois blocos, um com* $(\hat{g}_{ij})$ *que é* $n-1 \times n-1$ *dimensional e o outro unidimensional com o* 1*. Assim podemos inverter* (g_{ij}) *por blocos e concluir o resultado citado.*

Portanto

$$\Gamma_{in}^{k} = \sum_{m} f(b)f'(b)(\hat{g})_{mi}f^{-2}(b)\hat{g}^{mk} = \frac{f'(b)}{f(b)}\delta_{ik}, \qquad (2.5)$$

onde $\delta_{ik} = 0$*, se* $i \neq k$ *e* $\delta_{ii} = 1$

Concluimos então que:

$$\langle \nabla_Y \tilde{\gamma}', Y\rangle = \sum_{k} \Gamma_{in}^{k} g_{ki} = \sum_{k} \frac{f'(t)}{f(t)}\delta_{ik}g_{ki} = \frac{f'(t)}{f(t)}g_{ii} = \frac{f'(t)}{f(t)}\langle X_i, X_i\rangle, \qquad (2.6)$$

Além disso, se $Y = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \neq \dfrac{\partial}{\partial x_j}$*, teremos:*

$$\left\langle \nabla_Y \tilde{\gamma}', \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle = \sum_{k} \Gamma_{in}^{k} g_{kj} = \sum_{k} \frac{f'(t)}{f(t)}\delta_{ik}g_{kj} = \frac{f'(t)}{f(t)}g_{ij},$$

onde a última igualdade se dá pelo fato de $i \neq j$*. Logo,* $\nabla_{X_i}\tilde{\gamma}' = \dfrac{f'(t)}{f(t)}X_i$*, o que implica que* $S_{\tilde{\gamma}'(b)}X_i = -\dfrac{f'(t)}{f(t)}X_i$

Temos que $[\tilde{\gamma}', Y] = 0$*, já que são provenientes da parametrização.*

Portanto a curvatura seccional radial em um ponto $p \in \tilde{M}$ *é dada por:*

$$
\begin{aligned}
K(\tilde{\gamma}', Y)(p) &= \left\langle \nabla_Y \nabla_{\tilde{\gamma}'}\tilde{\gamma}' - \nabla_{\tilde{\gamma}'}\nabla_Y \tilde{\gamma}' + \nabla_{[\gamma', Y]}\tilde{\gamma}', Y \right\rangle (p) \\
&= \langle \nabla_Y 0 - \nabla_{\tilde{\gamma}'}\nabla_Y \tilde{\gamma}' + \nabla_0 \tilde{\gamma}', Y \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{\tilde{\gamma}'(b)} \frac{f'(b)}{f(b)} Y, Y \right\rangle (p) \\
&= \left\langle -\frac{f''f - f'^2}{f^2} Y - \frac{f'}{f}\nabla_{\tilde{\gamma}'} Y, Y \right\rangle (p) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Como vimos, $[Y, \tilde{\gamma}'] = 0$, logo, $\nabla_{\tilde{\gamma}'} Y = \nabla_Y \tilde{\gamma}'$. Portanto segue de, (2.6) e (2.7) que

$$
K(\tilde{\gamma}', Y) = -\frac{f''(b)f(b) - f'^2(b)}{f^2(b)} - \frac{f'^2(b)}{f^2(b)} = -\frac{f''(b)}{f(b)}.
$$

As estimativas, para o primeiro autovalor, que vamos conseguir através do teorema 1.0.2, em geral não são válidas se consideramos o problema de Dirichet em toda variedade M. Entretanto, no próximo capítulo veremos alguns teoremas que nos auxiliam na busca dessas estimativas e esses teoremas são válidos para domínios contidos em M chamados de vizinhanças normais, que definiremos precisamente abaixo.

Definição 2.1.9. *Seja M uma variedade riemanniana completa simplesmente conexa e seja $N \subset M$ uma subvariedade $n-1$ dimensional compacta, simplesmente conexa e orientável. Fixe uma orientação em N de modo que para cada $x \in N$, $\eta(x)$ seja o vetor normal unitário.*

Seja $R > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
E &: N \times [0, R] \to M \\
E(x, t) &= exp_x t\eta(x),
\end{aligned}
$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Definimos o interior da imagem deste difeomorfismo como vizinhança normal de N na direção η de largura R. *Em geral vamos denotar as vizinhanças normais por Ω.*

Considere

$$
\Lambda = \sup_N \{\sup_v \{\langle S_\eta v, v\rangle \mid v \in T_pN, |v| = 1\}\},
$$

denominamos Λ como curvatura principal máxima (cpm) de Ω. Como N é compacta, tal supremo sempre existe.

Observação 2.1.10. *Note que, como S_η é uma transformação linear auto adjunta e portanto diagonalizável, esse supremo será atingido na direção de um autovetor, consequentemente Λ será uma curvatura principal o que justifica o nome dado para Λ.*

2.2 Campos e N-campos de Jacobi

Vamos definir agora uma classe de campos de vetores, que são úteis para estimar o Laplaciano da função distância, pois como veremos no próximo lema, esses campos são os responsáveis por minimizar a forma índice de uma geodésica. Devido as suas propriedades, os campos de Jacobi são úteis para estimar o Laplaciano da distância ao ponto enquanto os $N-$campos de Jacobi servem para estimar o Laplaciano da distância à subvariedade.

Definição 2.2.1. *Dizemos que um campo de vetores J ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, b] \to M$ é um* campo de Jacobi *se ele satisfaz, ao longo de γ*

$$\frac{D^2 J(t)}{dt^2} + R(\gamma', J)\gamma' = 0.$$

Definição 2.2.2. *Seja M uma variedade riemanniana e $\gamma : [0, b] \to M$ uma geodésica. Dados V, W campos de vetores C^∞ por partes ao longo de γ, definimos*

$$I_b(V, W) = \int_0^b \{\langle V', W'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W\rangle\}(t)dt,$$

como a forma índice *da geodésica γ aplicada nos campos V e W.*

Definição 2.2.3. *Seja $\gamma : [0, b] \to M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, b]$ é dito conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ não identicamente nulo com $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$.*

Ponto conjugados possuem uma importante relação com pontos críticos da aplicação exponencial como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.2.4. *Seja $\gamma : [0, b] \to M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$. O ponto $\gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, b]$ é conjugado de p ao longo de γ se, e somente se, $v_0 = t_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico de $\exp_p$.*

Proof. Sejam $v = \gamma'(0)$ e $w = J'(0)$. É fácil ver que $J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw),\ t \in (0, b]$ é um campo de Jacobi. Note ainda que J é não nulo se e só se $w \neq 0$. Portanto $q = \gamma(t_0)$ é conjugado se e só se

$$0 = J(t_0) = (d\exp_p)_{t_0 v}(t_0 w), \quad w \neq 0,$$

ou seja, se e somente se $t_0 v$ é um ponto crítico de $\exp_p$. □

Lema 2.2.5. *Seja $\gamma : [0,b] \to M$ uma geodésica sem pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $(0,b]$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de γ, com $\langle J, \gamma' \rangle = 0$, e seja V um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de γ, com $\langle V, \gamma' \rangle = 0$. Suponhamos que $J(0) = V(0) = 0$ e que $J(t_0) = V(t_0)$, $t_0 \in (0,b]$. Então*

$$I_{t_0}(J,J) \leq I_{t_0}(V,V)$$

e a igualdade ocorre se e só se $V = J$ em $[0,t_0]$.

Proof. Ver Lema 2.2 do capíulo 10 de [dC]. □

Agora vamos conhecer uma generalização dos campos de Jacobi, os chamados $N-$campos de Jacobi. Eles são campos de Jacobi mas ainda têm de satisfazer algumas propriedades relacionadas a uma subvariedade $N \subset M$ e a geodésica sobre a qual eles estarão definidos.

Definição 2.2.6. *Seja $N \subset M$ uma subvariedade e $\gamma : [0,b] \to M$ uma geodésica partindo de $p \in N$ tal que $\gamma'(0) \in (T_{\gamma(0)}N)^{\perp}$. Se é J um campo de Jacobi ao longo de γ tal que:*

1. $\langle J, \gamma' \rangle \equiv 0$
2. $J(0) \in T_{\gamma(0)}N$
3. $S_{\gamma'(0)}J(0) + J'(0) \in (T_{\gamma(0)}N)^{\perp}$

*dizemos que J é um $N-$*campo de Jacobi.

Exemplo 2.2.7. *Seja $\tilde{M}$ uma variedade rotacionalmente simétrica e $\tilde{N} = N_b \subset \tilde{M}$ uma esfera geodésica N_b de $\tilde{M}$, como a definida em 2.1.8. Seja $\tilde{\gamma} : [0,b] \to \tilde{M}$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, com $\tilde{\gamma}(b) \in \tilde{N}$ e $\tilde{\gamma}'(b)$ ortogonal a $T_{\tilde{\gamma}(b)}\tilde{N}$, então*

$$\tilde{Y}(t) = \frac{f(t)}{f(b)}\tilde{V}(t),$$

são $\tilde{N}-$ campos de Jacobi assocciados a $\tilde{\gamma}$, com $|\tilde{Y}(b)| = 1$, onde $\tilde{V}$ é um campo de vetores paralelo e unitário ao longo de $\tilde{\gamma}$ tal que $V(0) \in T_{\tilde{\gamma}(b)}\tilde{N}$.

De fato, nesse caso, como vimos no exemplo 2.1.8, temos

$$K(\tilde{\gamma}', X_i) = -\frac{f''(b)}{f(b)},$$

para todo X_i pertencente a base de T_pN_b. Como isso é válido para qualquer ponto no intervalo $(0,b]$, temos que

$$K(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{X}) = -\frac{f''(t)}{f(t)},$$

para todo $\tilde{X} \in X(M)$ *tal que* $\tilde{X} \in T_{\gamma(\tilde{t})}N_t$ *e* $|\tilde{X}| = 1$.

Portanto, a curvatura em um ponto $p \in S_t$ *é dada por*

$$R(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{Y})\tilde{\gamma}'(t) = -\frac{f''(t)}{f(t)}\tilde{Y}.$$

Logo,

$$\tilde{Y}''(t) + R(\tilde{\gamma}', \tilde{Y})\tilde{\gamma}'(t) \;\; = \;\; -\frac{f''(t)}{f(t)}\tilde{Y} + \frac{f''(t)}{f(t)}\tilde{Y} = 0$$

como queríamos mostrar.

Assim como campos de Jacobi minimizam a forma índice, temos que os $N-$campos de Jacobi minimizam a *forma índice generalizada* que definiremos agora.

Definição 2.2.8. *Seja* $N \subset M$ *uma subvariedade e* $\gamma : [0, b] \to M$ *uma geodésica partindo de* $p \in N$ *tal que* $\gamma'(0) \in (T_{\gamma(0)}N)^{\perp}$*. Dados* V, W *campos de vetores* C^{∞} *por partes ao longo de* γ*, definimos*

$$L_b(V, W) = \int_0^b \{\langle V, W\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W\rangle\}(t)dt - \langle S_{\gamma'(0)}V(0), W(0)\rangle$$

como a forma índice generalizada *da geodésica* γ *aplicada nos campos* V *e* W.

Para enunciar o lema que generaliza 2.2.5, precisamos da generalização de ponto conjugado, que são os chamados pontos focais.

Definição 2.2.9. *Seja* $N \subset M$ *uma subvariedade de* M*. Dizemos que* $q \in M$ *é um* ponto focal *de* N *se existe uma geodésica* $\gamma : [0, b] \to M$*, com* $\gamma(0) = p \in N$*,* $\gamma'(0) \in (T_pN)^{\perp}$*,* $\gamma(b) = q$*, e um* $N-$*campo de Jacobi* J *não nulo ao longo de* γ*, tal que* $J(b) = 0$*.*

Considere N e P subvariedades de M e $\gamma : [0, b] \to M$ um segmento geodésico perpendicular a N e P em seus extremos $\gamma(0) \in N$ e $\gamma(b) \in P$. Seja

$$\mathcal{L} = \{V \mid V \text{ é um campo de vetores } C^{\infty} \text{ por partes ao longo de } \gamma \text{ com } V(0) \in T_{\gamma(0)}N \text{ e } V(b) \in T_{\gamma(b)}P\}.$$

Teorema 2.2.10. *Suponha que* N *não tem pontos focais ao longo da geodésica* $\gamma : [0, b] \to M$*. Dados* $V \in \mathcal{L}$ *e* Y *um* N*-campo de Jacobi ao longo de* γ*, tal que* $Y(b) = V(b)$*, tem-se que* $L_b(V, V) \geq L_b(Y, Y)$ *e a igualdade ocorre se, e somente se,* $V \equiv Y$*.*

Proof. Ver [dC]. □

Capítulo 3

Teoremas de comparação

O objetivo principal deste capítulo é mostrar que com alguma hipótese de limitação sobre a curvatura de Ricci radial em um domínio e curvatura média no bordo desse domínio ou uma limitação sobre a curvatura seccional e c.p.m. é possível obter estimativas para Δd onde d é a função distância.

Na primeira seção mostramos lemas que vão nos auxiliar na demonstrações dos principais resultados, os quais são enunciados e demonstrados nas seções 2 e 3. Reservamos a seção 2 para as estimativas relacionadas ao Laplaciano da função distância à subvariedade enquanto a seção subsequente, trata do Laplaciano da distância ao ponto.

3.1 Lemas

Vejamos algumas definições que iremos utilizar no decorrer desse capítulo.

Dada uma variedade M e $p \in M$ definimos a função distância ao ponto p como

$$d : M \to \mathbb{R},$$
$$d(x) = |\exp_p^{-1}(x)|.$$

A distância de um ponto $x \in M$ a uma subvariedade $N \subset M$ é dado por

$$d(x) = \inf_{p \in N} |\exp_p^{-1}(x)|.$$

Definição 3.1.1. *Dada $f \in C^1(M)$, definimos o* gradiente de f em p *como o campo vetorial* $\operatorname{grad} f$ *em M definido por*

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle = dfp(v), \ p \in M, \ \forall v \in T_pM.$$

Definição 3.1.2. *Dado $X \in X(M)$, definimos* divergente do campo X *como a função $divX : M \to \mathbb{R}$ dada por $divX(p) =$ traço da aplicação linear $Y(p) \to \nabla_Y X(p)$, $p \in M$.*

Definição 3.1.3. *Seja $f \in C^2(M)$. O* Laplaciano de f*, é definido como*

$$\Delta f = div(\text{grad}\, f).$$

Definição 3.1.4. *Dado $q \in M$ e $f \in C^2(M)$, o hessiano da função f em q é definido por*

$$\text{Hess}(f)_q : T_qM \times T_qM \to \mathbb{R}$$
$$\text{Hess}(f)_q(u, v) = \langle \nabla_u \text{grad}\, f, v\rangle.$$

Observação 3.1.5. *Se considerarmos uma base ortonormal de T_pM formada por $\{E_1, ..., E_{n-1}, E_n = \text{grad}\, d\}$ é fácil ver que:*

$$\Delta d = div(\text{grad}\, d) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \text{grad}\, d, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Hess}\; d(E_i, E_i) = tr\text{Hess}(d).$$

3.1.1 Lemas para distância à subvariedade

Lema 3.1.6. *Seja M uma variedade riemanniana e $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$ dimensional. Considere d a função distância à N. Suponha que Ω é uma vizinhança normal de N e tome $p \in \Omega$. Seja $\gamma : [0, b] \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(0) \in N$, $\gamma(b) = p$ e γ realiza a distância á N, i.e., $d(\gamma(t)) = t \quad \forall\; t \in [0, b]$. Dado $V \in T_{\gamma(b)}M \cap \{\gamma'(b)\}^{\perp}$, considere J um N-campo de Jacobi ao longo de γ com $J(b) = V$. Então*

$$\langle \nabla_V \gamma', V\rangle = \langle J(b), J'(b)\rangle.$$

Proof. Primeiramente observe que tal $N-$campo de Jacobi existe, pois a definição de vizinhança normal faz com que γ não tenha pontos focais, já que pontos focais são pontos críticos da $\exp_p$, como vimos no Teorema 2.2.4 e esta por sua vez é um difeomorfismo em Ω. Adaptando o teorema 3.9 do capítulo 5 de [dC], podemos mostrar que a ausência de pontos focais ao longo de γ, garante a existência e unicidade de tal $N-$campo de Jacobi. Para mostrarmos a igualdade do teorema note que:

$$\langle \nabla_V \gamma', V\rangle = \langle \nabla_{J(b)} \gamma', J(b)\rangle = \langle \nabla_{\gamma'} J(b), J(b)\rangle = \langle J(b), J'(b)\rangle.$$

A primeira igualdade se dá pois $J(b) = V$. A segunda se deve ao fato de que $[\gamma', J] = 0$ e isto ocorre pois, pelo lema 4.1 do capítulo 10 de [dC] temos que: Se J é um N-campo de Jacobi ao longo da geodésica γ com $\gamma(0) = p \in N$, existe uma variação por geodésicas de γ definida por $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)} tV(s), s \in (-\epsilon, \epsilon), t \in [0,a]$ onde $\alpha(s)$ é uma curva em N com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = J(0)$, $V(s) \in (T_{\alpha(s)}N)^{\perp}$, tal que $J(t)$ o campo varacional de f, isto é, $J(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(0,t)$. Por construção de f, teremos que $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,t) = \gamma'(t)$. Tal f, é localmente uma superfície parametrizada, portanto $[f_s, f_t] = \dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(s,t) = 0$. Assim ficamos com $[\gamma', J] = 0$.

A última igualdade é imediata. $\square$

Lema 3.1.7. *Seja M uma variedade riemanniana e $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$ dimensional. Considere d a função distância à N. Suponha que Ω é uma vizinhança normal de N e tome $p \in \Omega$. Seja $\gamma : [0,b] \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(0) \in N$, $\gamma(b) = p$ e γ realiza a distância á N. Seja J um N-campo de Jacobi ao longo de γ. Então $\langle J(b), J'(b) \rangle = L_b(J,J)$.*

Proof. Como J é um $N-$campo de Jacobi vale que $\langle S_{\gamma'(0)}J(0) + J'(0), J(0) \rangle = 0$, e assim,

$$\langle J'(0), J(0) \rangle = -\langle S_{\gamma'(0)}J(0), J(0) \rangle.$$

Ainda, temos que

$$J''(t) + R(\gamma', J)\gamma' = 0,$$

e portanto $J''(t) = -R(\gamma', J)\gamma'$. Com esses fatos podemos inferir as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\langle J(b), J'(b) \rangle &= \int_0^b (\langle J(t), J'(t) \rangle)' dt + \langle J(0), J'(0) \rangle \\
&= \int_0^b \{|J'|^2 - \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle\}(t) dt - \langle S_{\gamma'(0)}J(0), J(0) \rangle \\
&= L_b(J,J)
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 3.1.8. *Juntando as informações obtidas através dos Lemas anteriores podemos obter uma importante informação a respeito do Laplaciano da função distância à subvariedade. Nos próximos passos, utilizaremos a igualdade* $\operatorname{grad} d = \gamma'$, *e mostraremos tal fato no Teorema 3.2.1.*

Considere a função distância à subvariedade N e γ nas condições dos Lemas anteriores. Assim temos que:

$$\Delta d(\gamma(b)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\, d(\gamma(b)), E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\, d(\gamma(b)), E_i \rangle \qquad (3.1)$$

onde $\{E_i, ..., E_{n-1}, E_n = \mathrm{grad}\, d(\gamma(b))\}$ *é uma base ortonormal de* T_pM.

Pelos Lemas 3.1.6 e 3.1.7 temos que dado $F \in T_pM \bigcap \gamma'(b)^{\perp}$ *unitário vale que:*

$$\langle \nabla_F \mathrm{grad}\, d, F \rangle = \langle Y(b), Y'(b) \rangle = L_b(Y, Y), \qquad (3.2)$$

onde Y *é um* $N-$*campo de Jacobi ao longo de* γ *tal que* $Y(b) = F$. *Portanto temos que*

$$\Delta d(p) = \sum_{i=1}^{n-1} L_b(Y_i, Y_i),$$

onde cada Y_i *é um* $N-$*campo de Jacobi ao longo de* γ *tal que* $Y_i(b) = E_i(b)$.

3.1.2 Lemas para distância ao ponto

Dado $p \in M$, seja B uma bola normal centrada em p. Considere

$$\begin{aligned} d:\ & B \to \mathbb{R}, \\ & d(x) = \text{distância de } x \text{ a } p = |\exp_p^{-1} x|. \end{aligned}$$

Assim teremos que d é diferenciável em $B \backslash \{p\}$ pois $d(x) = |\exp_p^{-1} x| = \sqrt{\langle \exp_p^{-1} x, \exp_p^{-1} x \rangle}$ e exp é um difeomorfismo no domínio de d.

Lema 3.1.9. *Seja* $B \subset M$ *uma bola normal. Dado* $q \in B \backslash \{p\}$, *seja* $b = d(q)$. *Seja* $\gamma : [0, b] \to B$ *uma geodésica ligando* p *a* q, $\gamma(0) = p$ *e* $\gamma(b) = q$. *Seja* $F \in T_qM \cap \{\gamma'(b)\}^{\perp}$. *Considere* Y *um campo de Jacobi ao longo de* γ *com* $Y(0) = 0$ *e* $Y(b) = F$. *Então,*

$$\mathrm{Hess}(d)_q(F, F) = I_b(Y, Y),$$

onde I *é a forma índice para campos de Jacobi que se anulam na origem.*

Proof. Note que

$$\mathrm{Hess}(d)_{\gamma(b)}(F, F) = \langle \nabla_F \mathrm{grad}\, d, F \rangle = \langle \nabla_Y \gamma', Y \rangle = \langle \nabla_{\gamma'} Y, Y \rangle.$$

A última igualdade se deve ao fato de

$$[Y, \gamma'] = 0,$$

já que Y é um campo de Jacobi ao longo de γ. Também por Y ser campo de Jacobi vale que $J'' = -R(\gamma', Y)\gamma'$.

Para facilitar a notação, vamos denotar $\nabla_{\gamma'} Y$ por Y'. Assim teremos

$$\begin{aligned}\langle Y', Y\rangle &= \int_0^b \langle Y', Y\rangle'(t)dt = \int_0^b \langle Y', Y'\rangle(t) + \langle Y'', Y\rangle(t)dt \\ &= \int_0^b \langle Y', Y'\rangle(t) - \langle R(\gamma', Y)\gamma', Y\rangle(t)dt = I_b(Y, Y).\end{aligned}$$

□

Observação 3.1.10. *Os Lemas 3.1.6 e 3.1.7 também são válidos, com algumas adaptações, para o caso da distância ao ponto. Por se tratar da distância ao ponto, precisamos fixar um ponto $q \in \Omega$, e então a geodésica que estamos interessados é a que realiza a distância de p á q. No caso do Lema 3.1.6, precisamos que: $\gamma(0) = p$, $\gamma(b) = q$ e J um campo de Jacobi satisfazendo as mesmas hipóteses e tal que $J(0) = 0$.*

Já no Lema 3.1.7, além das mudanças feitas acima, precisamos trocar $L_b(J, J)$ por $I_b(J, J)$. Naturalmente a hipótese sobre J também deve ser trocada para campo de Jacobi tal que $J(0) = 0$.

Consequentemente, a observação 3.1.8, vale na sua versão,

$$\Delta d(q) = \sum_{i=1}^{n-1} I_b(J_i, J_i)$$

com J_i campo de Jacobi ao longo de γ, tal que $J_i(b) = E_i(b)$.

O próximo lema mostra uma relação entre hessiano da função distância ao ponto e a forma índice.

3.2 Estimativas relacionadas à subvariedade

Como mencionamos na introdução, um dos nossos objetivos é obter estimativas para o primeiro autovalor do Laplaciano em uma vizinhança normal Ω da subvariedade $N \subset M$. Sendo assim, o teorema abaixo tem grande importância, pois nos teoremas 4.1.2 e 4.1.5 vamos ver que uma maneira de se obter uma estimativa por baixo do primeiro autovalor, depende apenas de uma estimativa para Δd, onde d é a função distância à subvariedade N. Portanto, uma estimativa para tal autovalor seguirá como consequência imediata de

Teorema 3.2.1. *Seja Ω uma vizinhança normal de $N \subset M$ de largura R. Suponha que exista uma função $f : [0,R] \to (0,\infty)$ de classe $C^2([0,R])$ satisfazendo*

$$\Lambda(\Omega) \leq -\frac{f'(0)}{f(0)}.$$

Considere, $\gamma : [0,R] \to M$ uma geodésica qualquer, parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) \in N$ e $\gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$, onde η é o vetor normal de N apontando para Ω. Assuma também que, para todo $t \in (0,R]$ e todo vetor $v \in \{\gamma'(t)\}^\perp$ não nulo, seja válida a propriedade

$$K_M(\gamma'(t), v) \leq -\frac{f''(t)}{f(t)},$$

onde $K_M(\gamma'(t), v)$ é a curvatura seccional de M em $\gamma(t)$ sobre o plano determinado por γ' e v. Então $\forall t \in [0,R]$

$$\frac{\Delta d(\gamma(t))}{n-1} \geq \frac{f'(t)}{f(t)},$$

onde d é a função distância à N.

Proof. A função distância está relacionada a uma geodésica que é minimizante e o gradiente de uma função está relacionado com derivada dessa função. Nesse caso, é natural intuirmos que, com algumas hipóteses sobre a geodésica γ, tenhamos $\operatorname{grad} d = \gamma'$, ao longo de γ.

Para mostramos que nossa intuição é verdadeira considere $q \in \Omega$ tal que $d(q) = b$, onde d é a função distância à N, e seja $\gamma : [0,b] \to M$ uma geodésica minimizante parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$ e $\gamma(b) = q$. Afirmamos que $\operatorname{grad} d(q) = \gamma'(b)$.

De fato,

$$d(\gamma(t)) = |\exp_p^{-1}(\exp_p(t\eta(p)))| = |t\eta(p)| = |t| = t,$$

e derivando ambos termos da igualdade acima teremos

$$\langle \operatorname{grad} d(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 1. \tag{3.3}$$

Com isso e o fato de ambos serem unitários, segue que $\operatorname{grad} d(t) = \gamma'(t)$.

Já que, nessas hipóteses, $\gamma'(t)$ é normal à subvariedade N_t, teremos que $\operatorname{grad} d(\gamma(t))$ também é normal a N_t. Por esse motivo muitas vezes é útil utilizar $\operatorname{grad} d(\gamma(t))$ como uma extensão de $\gamma'(t)$ ao longo de $\gamma(t)$.

Agora, como o ponto $q \in \Omega$, escolhido acima, é qualquer, basta que mostremos o teorema para tal ponto.

Com base na observação 3.1.8 podemos nos concentrar em analisar estimativas para $L_b(Y,Y)$, onde Y é um $N-$campo de Jacobi ao longo de γ tal que $Y(b) \in T_qM \bigcap \{\gamma'(b)\}^{\perp}$ e $|Y(b)| = 1$, já que temos

$$(\Delta d)_q = \sum_{i=1}^{n-1} L_b(Y,Y) \tag{3.4}$$

Apesar de não ficar explícito na equação acima, lembre que à cada índice i está associado um $N-$campo de Jacobi Y, ou seja, Y está em função de i.

Calculando $L_b(Y,Y)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
L_b(Y,Y) &= \int_0^b \{|Y'|^2 - \langle R(\gamma',Y)\gamma',Y\rangle\}(t)dt - \langle S_{\gamma'(0)}Y(0),Y(0)\rangle \\
&= \int_0^b \left\{|Y'(t)|^2 - |Y(t)|^2 K\left(\gamma'(t), \frac{Y(t)}{|Y(t)|}\right)\right\} dt \\
&- |Y(0)|^2 \left\langle S_{\gamma'(0)}\frac{Y(0)}{|Y(0)|}, \frac{Y(0)}{|Y(0)|}\right\rangle \\
&\geq \int_0^b \left\{|Y'(t)|^2 + |Y(t)|^2\frac{f''(t)}{f(t)}\right\} dt + \frac{f'(0)}{f(0)}|Y(0)|^2 \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a primeira hipótese do Teorema.

Formas espaciais (variedades completas simplesmente conexas de curvatura seccional constante) ou variedades rotacionalmente simétricas nos permitem calcular explicitamente expressões que envolvam apenas $N-$campos de Jacobi ou curvatura pois eles são conhecidos em tais variedades. Já que nesse teorema a curvatura seccional varia em função de t não podemos considerar uma variedade de curvatura constante para comparar os resultados. Entretanto podemos considerar uma variedade rotacionalmente simétrica $\tilde{M}$ e tentar levar o problema para tal variedade através de uma função Φ que relacionará os campos em M com os campos em $\tilde{M}$.

Para tal, considere a variedade rotacionalmente simétrica $\tilde{M} = [0,R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ com métrica riemanniana $ds^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$ e $\tilde{N} = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ e $\tilde{\gamma} : [0,b] \to \tilde{M}$ uma geodésica ortogonal a $\tilde{N}$ e parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\tilde{\gamma}(0) \in \tilde{N}$ e $\tilde{\gamma}'(0)$ é ortogonal a $T_{\tilde{\gamma}(0)}\tilde{N}$. Defina $\{\tilde{E}_1(t), ..., \tilde{E}_n(t)\}$ campos ortonormais paralelos ao longo de $\tilde{\gamma}$, com $\tilde{E}_n(t) = \tilde{\gamma}'(t)$.

Sabemos pelo exemplo 2.2.7 que um $\tilde{N}-$ campo de Jacobi $\tilde{Y}$ ao longo de $\tilde{\gamma}$ tal que $\tilde{E}_i(b) = \tilde{Y}(b)$ possui a seguinte expressão:

$$\tilde{Y}(t) = \frac{f(t)}{f(b)}\tilde{V}(t)$$

onde $\tilde{V}$ é um campo de vetores paralelo e unitário sobre γ tal que $\tilde{V}(0) \in T_{\tilde{\gamma}(0)}\tilde{N}$ e $\tilde{V}(b) = \dfrac{\tilde{Y}(b)}{|\tilde{Y}(b)|}$.

Sabemos que dado um campo de vetores V ao longo de γ e uma base ortonormal de vetores paralelos $\{E_1, ..., E_n = \gamma'\}$, podemos escrever

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)E_i(t)$$

onde $g_1, ..., g_n : [0, b] \to \mathbb{R}$, são diferenciáveis.

Defina ΦV ao longo de $\tilde{\gamma}$ como

$$\Phi V = \sum_{i=1}^{n} g_i(t)\tilde{E}_i(t).$$

Como $\{\tilde{E}_1(t), ..., \tilde{E}_n(t)\}$ são ortonormais e cada $\tilde{E}_i$ é paralelo, teremos que ΦV satisfaz :

1. $\langle V, W\rangle = \langle \Phi V, \Phi W\rangle$
2. $\Phi(V') = (\Phi V)'\ \forall\ V$ ao longo de γ.

Portanto por, (3.5) e as igualdades citadas acima temos,

$$\begin{aligned}
L_b(Y,Y) &\geq \int_0^b \left\{|(\Phi Y)'|^2 + \frac{f''(t)}{f(t)}|\Phi Y|^2\right\}(t)dt + \frac{f'(0)}{f(0)}|\Phi Y(0)|^2 \\
&= \int_0^b \left\{|(\Phi Y)'|^2\right\} - \langle R_f(\tilde{\gamma}', \Phi Y)\tilde{\gamma}', \Phi Y\rangle\}(t)dt \\
&- \langle S_{\gamma'(0)}\Phi Y(0), \Phi Y(0)\rangle \\
&= L_b(\Phi Y, \Phi Y), \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

onde $R_f(X,Y)Z$ é a curvatura da variedade $\tilde{M}$ associada aos campos X e Y. Nas igualdades acima, usamos o fato de que a curvatura da variedade rotacionalmente simétrica $\tilde{M}$ com métrica associada a f é igual a $-\dfrac{f''(t)}{f(t)}$ e também que $S_{\gamma'(0)}\Phi Y(0) = -\dfrac{f'(0)}{f(0)}\Phi V$, como vimos no exemplo 2.1.8.

Temos ainda, pelo Teorema 2.2.10 que, se $\tilde{Y}$ é um $\tilde{N}$-campo de Jacobi ao longo de $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{Y}(b) = \tilde{E}_i(b)$ vale que

$$L_b(\Phi Y, \Phi Y) \geq L_b(\tilde{Y}, \tilde{Y}) \qquad (3.7)$$

Logo por (3.7) e (3.6) ficamos com

$$L_b(\tilde{Y},\tilde{Y}) \leq L_b(\Phi Y,\Phi Y) \leq L_b(Y,Y) \tag{3.8}$$

Para concluir a demonstração do teorema, basta calcularmos $L_b(\tilde{Y},\tilde{Y})$ e utilizarmos (3.8) e (3.4).

Em geral calculamos $L_b(\tilde{Y},\tilde{Y})$ através da definição porém como nesse caso $\tilde{Y}$ é um $N-$campo de Jacobi, temos pelo Lema 3.20 que

$$L_b(\tilde{Y},\tilde{Y}) = \left\langle \tilde{Y}(b), \tilde{Y}'(b) \right\rangle = \left\langle \frac{f(b)}{f(b)}\tilde{V}(b), \frac{f'(b)}{f(b)}\tilde{V}(b) \right\rangle = \frac{f'(b)}{f(b)}$$

Com esses resultados concluímos que

$$\Delta d(q) = \sum_{i=1}^{n-1} L_b(Y,Y) \geq \sum_{i=1}^{n-1} L_b(\tilde{Y},\tilde{Y}) = (n-1)\frac{f'(b)}{f(b)},$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Com algumas observações, como trocar curvatura principal máxima por curvatura principal mínima, o teorema que foi demonstrado pode ter todas as desigualdades da hipótese invertidas que a tese será verdadeira com a desigualdade invertida. Entretanto o teorema abaixo mostra que para obtermos a estimativa por cima para o Laplaciano, podemos enfraquecer mais ainda essas hipóteses, colocando apenas restrições nas médias. Embora a tese do próximo teorema se diferencie da anterior apenas por inverter a desigualdade, ele é em um certo sentido, um teorema mais forte que o primeiro(rigorosamente os resultados não são comparáveis pois tem hipóteses opostas).

Vejamos agora as definições dos elementos que serão utilizados no próximo teorema.

Definição 3.2.2. *Seja $N^{n-1} \subset M$ uma hipersuperfície. Tome $p \in N$ e $\eta \in (T_pN)^{\perp}$. Dizemos que $H_N(p) = \dfrac{trS_\eta}{n-1}$ é a* curvatura média *de N em p na direção do vetor η.*

Observação 3.2.3. *Considerando $N \subset M$, uma subvariedade $n-1$ dimensional e a função distância d a tal subvariedade teremos que a curvatura média de $N_t = \{x \in M \mid d(x) = t\}$ possui uma relação importante com o Laplaciano da função distância. Para ver isso considere um ponto $\gamma(t) \in N_t$*

onde γ é uma geodésica tal que $\gamma(0) \in N$ e uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$ $\{E_1, ..., E_{n-1}, E_n = \operatorname{grad} d\}$. Assim teremos as seguintes igualdades:

$$H_{N_t}(\gamma(t)) = \frac{trS_\eta}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\langle -\nabla_{E_i}\operatorname{grad} d, E_i\rangle}{n-1} = \frac{-div\operatorname{grad} d}{n-1} = \frac{-\Delta d(\gamma(t))}{n-1}$$

Além disso, fazendo t tender a zero em ambos lados da igualdade concluímos que $\lim_{t\to 0}\Delta d(\gamma(t)) = -H_{N_{\gamma(0)}}(n-1) = -H_N(n-1)$.

Definição 3.2.4. *Seja v um vetor unitário de T_pM. Considere uma base ortonormal $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a v. A* curvatura de Ricci *no ponto $p \in M$ na direção de v é dada por*

$$Ric_p(v, v) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle R(v, u_i)v, u_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} K(v, u_i),$$

onde K é a curvatura seccional do plano gerado por v , u_i.

Observação 3.2.5. *Denominamos por curvatura de Ricci radial, quando calculamos o Ricci do vetor γ' onde γ é uma geodésica radial, que nesse caso particular é uma geodésica que realiza a distância entre dois pontos quaisquer que estão sobre ela.*

Definição 3.2.6. *Seja um ponto $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p. Se $E_1, ..., E_n \in X(U)$ são ortonormais em cada ponto de U, tais que, em p, vale $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0 \forall\ i, j = 1, ..., n$, dizemos que a família $\{E_1, ..., E_n\}$ é um referencial geodésico local em p.*

Observação 3.2.7. *Dada uma variedade riemanniana, sempre é possível obter um referencial geodésico local.*

A demonstração do próximo lema é apenas um longo cálculo e portanto vamos omitir do nosso texto.

Lema 3.2.8. *(Identidade de Ricci) Dada uma variedade M, um referencial geodésico $\{E_1, ..., E_n\}$ e $f \in C^\infty(M)$, temos que para quaisquer $1 \le i, j, k \le n$, vale que*

$$f_{ikl} = f_{ilk} + R_{klsi}f_s,$$

onde $R_{klsi} = \langle R(E_k, E_l)E_s, E_i\rangle$ e $f_i = E_i(f)$.

Lema 3.2.9. *(Fórmula de Bochner) Seja $f \in C^3$ uma função definida sobre M. Então tem-se:*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\operatorname{grad} f|^2) = |\operatorname{Hess} f|^2 + \langle \operatorname{grad}(\Delta f), \operatorname{grad} f\rangle + Ric(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$$

.

Proof. Seja $E_1, ..., E_n$ um referencial geodésico em um ponto $p \in M$. Nessa base temos que $\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i(p)$. Com isso, $|\operatorname{grad} f|^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^2(f)$. Sendo assim, utilizando a notação, $f_i = X_i(f) = \langle \operatorname{grad} f, X_i \rangle$, podemos constatar que:

$$E_j(\frac{1}{2}|\operatorname{grad} f|^2) = \frac{1}{2}E_j\left(\sum_{i=1}^{n} E_i^2(f)\right)) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_j(E_i(f)) = \sum_{i=1}^{n} f_i f_{ij},$$

$\forall \quad j = 1, ..., n.$

Como o referencial é geodésico

$$\Delta f(p) = \sum_i E_i(E_i(f))(p),$$

e temos

$$\frac{1}{2}\left(\Delta(|\operatorname{grad} f|^2)\right) = \sum_j E_j(E_j((\frac{1}{2}|\operatorname{grad} f|^2)))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E_j(\sum_{i=1}^{n} f_i f_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}).$$

Note que existe uma relação entre f_{ij} e a Hessiana de f. De fato,

$$f_{ij} = E_i(f_j) = E_i\langle \operatorname{grad} f, E_j \rangle = \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle + \langle \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i} E_j \rangle$$

$$= \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_j \rangle$$

Como a Hessiana é uma forma bilinear simétrica vemos que

$$f_{ijj} = f_{jij}.$$

Com isso e com a identidade de Ricci, concluímos que

$$f_i f_{ijj} = f_i f_{jij} = f_i f_{jji} + f_i R_{ijjs} f_s.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\Delta(|\operatorname{grad} f|^2)\right) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + f_i f_{jji} + f_i R_{ijjs} f_s \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} + \sum_{i,j=1}^{n} f_i R_{ijjs} f_s. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} f_i R_{ijjs} f_s &= \sum_{i,j=1}^{n} Ric(E_s,E_i) f_s f_i = Ric\left(\sum_s f_s E_s, \sum_i f_i E_i\right)\\ &= Ric(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Também

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 = |\mathrm{Hess} f|^2 \tag{3.11}$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} = \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)\rangle. \tag{3.12}$$

Assim concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\Delta(|\operatorname{grad} f|^2)\right) &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + f_i f_{jji} + f_i R_{ijjs} f_s\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_{jji} + \sum_{i,j=1}^{n} f_i R_{ijjs} f_s\\ &= Ric(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + |\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)\rangle.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.10. *Seja $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$ dimensional. Considere uma vizinhança normal Ω de N de largura R. Seja η um vetor normal e unitário de N apontando para Ω. Suponha que existe uma função $f : [0,R] \to (0,+\infty) \in C^2([0,R])$ satisfazendo:*

1. *A curvatura média de N com respeito a η satisfaz*

$$H_N \geq -\frac{f'(0)}{f(0)}$$

2. *A curvatura de Ricci radial de M associada á N satisfazendo*

$$Ric_M(\gamma'(t),\gamma'(t)) \geq -(n-1)\frac{f''(t)}{f(t)},$$

para todo γ onde γ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) \in N$ e $\gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$.

Então

$$\frac{\Delta d(\gamma(t))}{n-1} \leq \frac{f'(t)}{f(t)}$$

onde d é a distância á N.

Proof. Considere $\{E_1, ..., E_{n-1}, E_n = \operatorname{grad} d\}$ uma base ortonormal de T_pM.

Pela fórmula de Bochner temos

$$\frac{\Delta|\operatorname{grad} d|^2}{2} = |\mathrm{Hess} d|^2 + \langle \operatorname{grad} d, \operatorname{grad} \Delta(d)\rangle + \mathrm{Ric}(\operatorname{grad} d, \operatorname{grad} d)$$

já que $|\operatorname{grad} d|$ é constante e portanto possui Laplaciano igual a 0, ficamos com

$$0 = |\mathrm{Hess} d|^2 + \langle \operatorname{grad} d, \operatorname{grad} \Delta(d)\rangle + \mathrm{Ric}(\operatorname{grad} d, \operatorname{grad} d) \tag{3.13}$$

Pela definição de hessiano e Laplaciano temos que $\Delta d = tr\mathrm{Hess}\ d$ e também temos que Hess d é uma forma bilinear simétrica e portanto diagonalizável. Como Hess $d(\operatorname{grad} d, \operatorname{grad} d) = 0$ teremos que essa aplicação possui um autovalor igual a 0.

Para toda matriz diagonal é válido que o número de elementos da diagonal vezes a norma da matriz ao quadrado é maior ou igual ao traço da matriz ao quadrado.

Logo, basta olharmos para a matriz associada ao Hess$d$, em uma base ortonormal, e concluímos que,

$$|\mathrm{Hess} d|^2 \geq \frac{(\Delta d)^2}{n-1},$$

já que um desses elementos da diagonal vale 0.

Também pela hipótese temos $Ric_M(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq -(n-1)\dfrac{f''(t)}{f(t)}$. Com essas informações e olhando para equação (3.13) obtemos

$$0 \geq \frac{(\Delta d)^2}{n-1} + \frac{d}{dt}(\Delta d) - (n-1)\frac{f''(t)}{f(t)} \tag{3.14}$$

Dado $q \in \Omega$, $d(q) = b$, seja $p \in N$ tal que $d(p,q) = b$. Considere uma geodésica minimizante $\gamma : [0,b] \to \Omega$, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(b) = q$.

Defina $\Psi(t) := \Delta d(\gamma(t))$. Assim, pela equação acima teremos

$$0 \geq \frac{\Psi^2(t)}{n-1} + \Psi'(t) - (n-1)\frac{f''(t)}{f(t)} \quad \forall\, t \in (0,b]. \tag{3.15}$$

Novamente temos a intenção de levar o problema para uma variedade rotacionalmente simétrica $\tilde{M}$, pois além de nos oferecer a igualdade na equação (3.14), quando consideramos a função distância à subvariedade $\tilde{N} \subset \tilde{M}$, temos que

$$\Delta d_{\tilde{M}}(\gamma(\tilde{t})) = (n-1)\frac{f'(t)}{f(t)}$$

que é a expressão buscada no lado direito da desigualdade a ser mostrada. Essa igualdade decorre dos seguinte fatos que são válidos para variedades rotacionalmente simétricas

$$\Delta d_{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(t)) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} d, E_i \rangle = (n-1)\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Para verificar a última igualdade basta aplicar (2.6) do exemplo 2.1.8 $(n-1)$ vezes(lembre que $\operatorname{grad} d = \tilde{\gamma}'$).

Portanto considere $\tilde{M} = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ uma variedade rotacionalmente simétrica com métrica $ds^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$. Defina $\tilde{N} = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ e $\tilde{\gamma} : [0, b] \to \tilde{M}$ sendo a geodésica minimizante ortogonal a $\tilde{N}$ conectando $\tilde{\gamma}(0) \in \tilde{N}$ à $\tilde{q}$, onde $\tilde{q}$ é tal que $d(\tilde{q}, \tilde{\gamma}(0)) = b$.

Então definimos

$$\Psi_f(t) = \Delta d_{\tilde{M}} \tilde{\gamma}(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{(\Psi_f(t))^2}{n-1} + \Psi_f' - (n-1)\frac{f''(t)}{f(t)} \\
&= (n-1)\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)^2 + (n-1)\frac{(f''(t)f(t) - f'(t)f'(t))}{f^2} + \frac{(n-1)f''(t)}{f(t)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comparando (3.15) e (3.2) temos:

$$\frac{\Psi_f^2(t)}{n-1} + \Psi_f'(t) \geq \frac{\Psi^2(t)}{n-1} + \Psi'(t) \tag{3.16}$$

Defina $g(t) = \Psi_f(t) - \Psi(t)$. Então se $g(t) \geq 0$ para todo t teremos que $\Psi_f(t) \geq \Psi(t)$ e isso é suficiente para o que queremos mostrar.

Basta então mostramos que $g(t) \geq 0$ para todo t.

De fato, temos por (3.16) que

$$\Psi_f' - \Psi' \geq \frac{\Psi^2 - \Psi_f^2}{n-1} = \frac{(\Psi - \Psi_f)(\Psi + \Psi_f)}{n-1}$$

Denotando $\phi(t) = \Psi_f(t) + \Psi(t)$ teremos,

$$g(t)\frac{\phi(t)}{n-1} + g'(t) \geq 0.$$

Multiplicando os dois lados da inequação acima por $e^{\left(\int \frac{\phi dt}{n-1}\right)}$ teremos

$$g(t)\frac{\phi(t)}{n-1}\left(e^{\int \frac{\phi dt}{n-1}}\right) - g'(t)\left(e^{\int \frac{\phi dt}{n-1}}\right) \geq 0.$$

A igualdade acima é equivalente a:

$$(g(t)(e^{\int \frac{\phi dt}{n-1}}))' \geq 0$$

portanto $g(t)e^{\int \frac{\Phi dt}{n-1}}$ é crescente.

Vimos que $\lim_{t\to 0}\Psi(t) = -H_N(\gamma(0))(n-1)$. Também, por hipótese, $-H_N \leq \dfrac{f'(0)}{f(0)}$ donde decorre que

$$\psi(0) = -H_N(\gamma(0))(n-1) \leq \frac{f'(0)}{f(0)}(n-1) = \psi_f(0).$$

Sendo assim $g(0) \geq 0$. Com isso e o fato de $g(t)e^{\int \frac{\Phi dt}{n-1}}$ ser crescente, segue que

$$g(t)e^{\int \frac{\phi dt}{n-1}} \geq 0$$

e portanto $g(t) \geq 0 \; \forall \, t \in [0, b]$.

$\square$

3.3 Estimativas relacionadas ao ponto

Teorema 3.3.1. *Considere d a função distância ao ponto p definida em uma bola normal B de centro p em uma variedade riemanniana M, e uma função $f : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ tal que $f \in C^2[0, R]$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Seja γ uma geodésica em B tal que $\gamma(0) = p$. Suponha que para todo $t \in (0, R]$ e todo vetor $v \in \{\gamma'(t)\}^\perp$ não nulo, seja válida a propriedade*

$$K_M(\gamma', v) \leq -\frac{f''(t)}{f(t)},$$

onde $K_M(\gamma', v)$ é a curvatura seccional de M em $\gamma(t)$.

Então, se $q \in B\backslash\{p\}$,

$$\Delta d(q) \geq (n-1)\frac{f'(d(q))}{f(d(q))}$$

Proof. Considere uma base ortonormal de T_qM $\{E_1, ..., E_{n-1}, E_n = \operatorname{grad} d\}$, onde d é a função distância a um ponto. Assim dado um ponto $q \in B\backslash\{p\}$ vale que:

$$\Delta d(q) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} d, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} d, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Hess} d(E_i, E_i) \tag{3.17}$$

Pelo Lema 3.1.9, $\operatorname{Hess} d(E_i, E_i) = I(J_i, J_i)$ onde J_i é um campo de Jacobi, tal que $J_i(0) = 0, J_i(b) = E_i(b)$, ao longo da geodésica $\gamma : [0, b] \to B$, parametrizada pelo comprimento de arco, que realiza a distância de p à q. Nesse caso, decorre da definição de distância que, $d(q) = b$.

De posse dessas igualdades, vamos nos concentrar em estimar $I_b(J, J)$, onde J é um campo de Jacobi ao longo de γ.

Como $\gamma'(t) \perp J(t)$, e notando $|\frac{J(t)}{|J(t)|}| = 1$ temos pela definição de curvatura seccional que

$$K\left(\gamma', \frac{J(t)}{|J(t)|}\right) = \left\langle R\left(\gamma', \frac{J(t)}{|J(t)|}\right)\gamma', \frac{J(t)}{|J(t)|}\right\rangle,$$

portanto

$$|J(t)|^2 K\left(\gamma'(t), \frac{J(t)}{|J(t)|}\right) = \langle R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), J(t)\rangle$$

por isso temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} I_b(J, J) &= \int_0^b \{\langle J', J'\rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', J\rangle\}(t)dt \\ &= \int_0^b \left\{|J'(t)|^2 - |J(t)|^2 K\left(\gamma'(t), \frac{J(t)}{|J(t)|}\right)\right\} dt \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pelo mesmo motivo do teorema 3.2.1, consideremos uma variedade rotacionalmente simétrica $\tilde{M} = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ com métrica riemanniana $ds^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$, $\tilde{N} = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ e $\tilde{\gamma} : [0, b] \to \tilde{M}$ uma geodésica ortogonal a $\tilde{N}$ e parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{N}$ e $\tilde{\gamma}'(0)$ é ortogonal a $T_{\tilde{\gamma}(0)}\tilde{N}$. Nesse caso $\tilde{N}$ se reduz a um ponto pois $f(0) = 0$.

Um campo de Jacobi $\tilde{J}$ ao longo de $\tilde{\gamma}$ tal que $|\tilde{J}(b)| = 1$ possui a seguinte expressão:

$$\tilde{J}(t) = \frac{f(t)}{f(b)} V(t)$$

onde V é um campo de vetores paralelo e unitário sobre $\tilde{\gamma}$ tal que $V(0) \in T_{\tilde{\gamma}(0)}N$.

Defina $\{\tilde{E}_1(t), ..., \tilde{E}_n(t)\}$ campos ortonormais paralelos ao longo de $\tilde{\gamma}$, com $\tilde{E}_n(t) = \tilde{\gamma}'(t)$. Sabemos que dado um campo de vetores V ao longo de γ podemos escrever

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t) E_i(t)$$

onde $g_1, ..., g_n : [0, b] \to \mathbb{R}$.
Defina ΦV ao longo de $\tilde{\gamma}$ como

$$\Phi V = \sum_{i=1}^{n} g_i(t) \tilde{E}_1(t)$$

Assim Φ satisfaz:

1. $\langle V, W\rangle = \langle \Phi V, \Phi W\rangle$
2. $\Phi(V') = (\Phi V)'$ $\forall$ V ao longo de γ.

Podemos então voltar à equação (3.18) e, utilizando a hipótese do Teorema, obter agora a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} I_b(J, J) &= \int_0^b \left\{ |J'(t)|^2 - |J(t)|^2 K(\gamma', \frac{J(t)}{|J(t)|}) \right\} (t)dt \\ &\geq \int_0^b \left\{ |J'(t)|^2 + |J(t)|^2 \frac{f''(t)}{f(t)} \right\} dt \\ &= \int_0^b \left\{ |(\Phi J)'|^2 + \frac{f''}{f} |\Phi J|^2 \right\} (t)dt \\ &= \int_0^b \{|(\Phi J)'|^2\} - \langle R_f(\tilde{\gamma}', \Phi J)\tilde{\gamma}', \Phi Y\rangle\}(t)dt \\ &= I_b(\Phi J, \Phi J) \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde usamos que curvatura dessa variedade rotacionalmente simétrica é igual á $-\frac{f''(t)}{f(t)}$.

Sabemos pelo Lema 2.2.5 que, se $\tilde{J}$ é um campo de Jacobi ao longo de $\tilde{\gamma}$ com $\tilde{J}(b) = \tilde{E}_1(b)$ ocorre a seguinte desigualdade:

$$I_b(\Phi(J), \Phi(J)) \geq I_b(\tilde{J}, \tilde{J}). \tag{3.20}$$

Logo por (3.20) e por (3.19) ficamos com

$$I_b(\tilde{J}, \tilde{J}) \leq I_b(\Phi J, \Phi J) \leq I_b(J, J). \tag{3.21}$$

Agora é suficiente que calculemos $I_b(\tilde{J},\tilde{J})$ e teremos a desigualdade que buscamos.

Como vimos na observação 3.1.10

$$I_b(\tilde{J},\tilde{J}) = \langle \tilde{J}(b), \tilde{J}'(b)\rangle = \langle \frac{f(b)}{f(b)}V, \frac{f'(b)}{f(b)}V\rangle = \frac{f'(b)}{f(b)}.$$

Com isso concluímos que,

$$\Delta d(q) = \sum_{i=1}^{n-1} I_b(J,J) \geq \sum_{i=1}^{n-1} I_b(\tilde{J},\tilde{J}) = (n-1)\frac{f'(b)}{f(b)}$$

□

Analisando as equivalências citadas no texto que relacionam hessiano da distância com forma índice vemos que na realidade o que foi mostrado nesse teorema é algo muito semelhante ao teorema da comparação do hessiano da distância. Entretanto o teorema acima é mais geral pois não é exigido que uma das variedades tenha curvatura constante, apenas que seja rotacionalmente simétrica. Além do mais, como estamos interessados no Δd, expressamos ele como somatório adequado de hessianos e comparamos esta soma, ao invés de comparar cada hessiano.

Teorema 3.3.2. *Seja $B \subset M$ uma bola normal de centro p. Considere a função distância d ao ponto p. Seja γ uma geodésica em B. Suponha que existe uma $f : [0,R] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e para todo $t \in (0,R]$ e todo vetor $v \in \{\gamma'(t)\}^{\perp}$ não nulo, seja válida a propriedade*

$$Ric(\gamma'(t),\gamma'(t)) \geq -(n-1)\frac{f''(t)}{f(t)}.$$

Então, se $q \in B \backslash \{p\}$,

$$\Delta d(q) \leq (n-1)\frac{f'(d(q))}{f(d(q))}$$

Proof. Dado $q \in B\backslash\{p\}$, seja b tal que $d(q) = b$.

Considere $\gamma : [0,b] \to B$, uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco que liga p á q.

Então definimos:

$$\Psi(t) = \Delta(d(\gamma(t))).$$

Pelo mesmo argumento utilizado no início do teorema 3.2.10 concluímos que

$$0 \geq \frac{(\Delta d)^2(\gamma(t))}{n-1} + \frac{d}{dt}(\Delta d) - (n-1)\frac{f''(t)}{f(t)} \;\forall\; t \in (0,b].$$

Assim teremos

$$0 \geq \frac{\Psi^2(t)}{n-1} + \Psi'(t) - (n-1)\frac{f''(t)}{f(t)} \ \forall\, t \in (0,b] \tag{3.22}$$

Considerando também a variedade rotacionalmente simétrica $\tilde{M} = [0,R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ com métrica $dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$ e $\tilde{N} = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ teremos que $\tilde{N}$ será um ponto, já que $f(0) = 0$.

Considere $\tilde{\gamma} : [0,b] \to \tilde{M}$ uma geodésica minimizante, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\tilde{\gamma}(0) \in \tilde{N}$ e $\tilde{\gamma}'(0) \perp T_{\tilde{\gamma}(0)}\tilde{N}$. Seja

$$\Psi_f(t) = \Delta(d_{\tilde{M}})(\gamma(t)).$$

Já que $\tilde{M}$ é rotacionalmente simétrica, vimos no exemplo 2.1.8 que dados $E_1, ...E_{n-1}, E_n = \operatorname{grad} d$, campos ortonormais numa vizinhança de $q = \tilde{\gamma}'(b)$, tem-se:$\langle S_\eta E_i, E_i\rangle = \dfrac{f'(b)}{f(b)}$, logo:

$$\begin{aligned}
\Delta d_{\tilde{M}}(q) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} d, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i}(-\eta), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle S_\eta(E_i), E_i\rangle = (n-1)\frac{f'(b)}{f(b)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{(\Psi_f(t))^2}{n-1} + \Psi_f' - (n-1)\frac{f''(t)}{f(t)} = \\
(n-1)\frac{f'^2}{f} &+ (n-1)\frac{(f''f - f'f')}{f^2} + \frac{(n-1)f''}{f} = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Comparando (3.22) e (3.23) temos:

$$\frac{\Psi_f^2(t)}{n-1} + \Psi_f' \geq \frac{\Psi^2}{n-1} + \Psi'$$

Definindo $g(t) = \Psi_f(t) - \Psi(t)$, com $t \in (0,b]$, a demonstração segue as mesmas linhas do teorema 3.2.10, basta observar que

$\lim_{t\to 0} t\psi_f(t) = (n-1)$ e ainda $\lim_{t\to 0} t\psi(t) = (n-1)$. Portanto $\lim_{t\to 0}(\psi_f - \psi)(t) = 0$

$\square$

Capítulo 4

Estimativas para o primeiro autovalor

O objetivo principal deste capítulo é mostrar que se considerarmos uma variedade riemanniana M, uma subvariedade N, um domínio $\Omega \subset M$ adequado e colocarmos uma certa limitação no Δd, onde d é a função distância à subvariedade N, conseguimos garantir que para toda função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tem-se $\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |\Delta u|$ onde C é uma constante que só depende de Ω. Esse resultado é a base para que possamos obter a estimativa por baixo para $\lambda_1(\Omega)$ que procuramos.

Na primeira seção vamos tratar de domínios Ω tais que $\Omega \cap N = \emptyset$ enquanto na segunda seção, vamos abordar o caso em que $N \subset \Omega$.

4.1 Estimativas em vizinhanças normais

O princípio fraco do máximo para equação de Laplace é um resultado bem conhecido da matemática. Por essa razão não iremos demonstrá-lo. Entretanto utilizaremos ele em todas as estimativas que faremos no decorrer desta seção, por isso vamos enunciá-lo agora.

Teorema 4.1.1. *(Princípio fraco do máximo para variedades) Seja M uma variedade riemanniana compacta com bordo. Seja $f \in C^\infty(M)$ tal que $\Delta f \geq 0$, i.e., f é subharmônica em M. Então,* $\sup_M f = \sup_{\partial M} f$.

Teorema 4.1.2. *Seja M uma variedade riemanniana e $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$ dimensional. Seja d a função distância à N. Considere Ω uma vizinhança normal de N. Suponha que exista uma função $f : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1 satisfazendo:*

$$\frac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \frac{f'(d(x))}{f(d(x))}.$$

Se
$$C = \int_0^R \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt$$
então
$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |\Delta u|,$$
para toda $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Proof. Seja d a função distância à subvariedade N. Defina $v : \Omega \to \mathbb{R}$, por

$$v(y) = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(d(y)) \sup_\Omega |\Delta u|,$$

onde $g \in C^2(0, R) \cap C^0[0, R]$ é uma função que será determinada com base na seguinte necessidade: garantir que

$$|u| \leq v \tag{4.1}$$

em Ω.

Uma vez que tenhamos esse resultado, basta que tomemos o supremo dos módulos em ambos lados da igualdade de (4.1) e o teorema estará demonstrado.

Uma maneira de garantirmos $u < v$ e $-u < v$ é utilizando o Princípio fraco do Máximo para $v - u$ e $v + u$ em Ω, já que com ele é possível mostrar que se $v - u \geq 0$ em $\partial\Omega$ e $\Delta(v - u) \leq 0$ em Ω teremos $v - u \geq 0$ em Ω. De forma análoga podemos concluir que $-u < v$.

Seguindo essa estratégia, vamos buscar uma função g que coloque u e v nas hipóteses acima.

Para escolhermos tal g, vamos analisar o comportamento das funções $v-u$ e $u - v$ na fronteira de Ω e o Laplaciano dessas funções interior de Ω.

Para todo $y \in \partial\Omega$, vale que:

$$v(y) - u(y) = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(d(y)) \sup_\Omega |\Delta u| - u(y),$$

logo, se $g \geq 0$ teremos
$$v(y) - u(y) \geq 0.$$
Também,
$$v(y) + u(y) = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(d(y)) \sup_\Omega |\Delta u| + u(y),$$
logo, mesmo nesse caso basta que $g \geq 0$ para termos

$$v(y) + u(y) \geq 0.$$

Também vale que:

$$\Delta(v-u) = \Delta(g \circ d) \sup_{\Omega} |\Delta u| - \Delta u \leq (\Delta(g \circ d) + 1) \sup_{\Omega} |\Delta u|,$$

logo, se $\Delta(g \circ d) \leq -1$, vamos ficar com $\Delta(v-u) \leq 0$. Ainda,

$$\Delta(v+u) = \Delta(g \circ d) \sup_{\Omega} |\Delta u| + \Delta u \leq (\Delta(g \circ d) + 1) sup_{\Omega} |\Delta u|,$$

novamente se $\Delta(g \circ d) \leq -1$, teremos $\Delta(v+u) \leq 0$.

Como

$$\Delta(g \circ d)(y) = g'(d(y))\Delta d(y) + g''(d(y))$$

buscamos uma g que seja não negativa no intervalo $[0, R]$ e que satisfaça a desigualdade $g'(d(y))\Delta d(y) + g''(d(y)) \leq -1$.

Por hipótese temos que

$$\Delta d(y) \geq (n-1) \frac{f'(d(y))}{f(d(y))}.$$

Então se a função g for tal que $g' \leq 0$ o segundo item decorrerá de

$$g'(d(y))(n-1) \frac{f'(d(y))}{f(d(y))} + g''(d(y)) \leq -1. \tag{4.2}$$

Multiplicando a desigualdade acima por f^{n-1} concluímos que (4.2) é equivalente a

$$(g' f^{n-1})' \leq -f^{n-1} \tag{4.3}$$

Assim se g for não negativa e satisfizer

$$\begin{cases} (g' f^{n-1})' \leq -f^{n-1} \\ g' \leq 0 \end{cases}$$

teremos $u \leq v$ em Ω como queremos.

É importante o leitor notar que a escolha dessa g está diretamente ligada a constante C ao qual o teorema faz referência. Este C será escolhido como o supremo de g no intervalo $[0, R]$. Como veremos mais tarde, a intenção desse teorema é dar suporte para obtermos uma estimativa inferior para λ_1, então, a fim de obtermos a melhor estimativa possível, desejamos que tal C seja o menor possível. Sendo assim, buscamos a g com menor supremo possível, em $[0, R]$, que satisfaça as condições citadas acima.

Já que $g' \leq 0$ temos que g é não crescente. Assim, integrando (4.2) no intervalo $[0, t]$ obtemos

$$g'(t) f^{n-1}(t) - g'(0) f^{n-1}(0) \leq -\int_0^t f^{n-1}(s) ds \tag{4.4}$$

No intuito de que g seja a de menor supremo no intervalo $[0, R]$ vamos pedir que $g'(0) = 0$ e $g(R) = 0$. Assim vemos que (4.2) ainda é satisfeito. Fazendo isso, obtemos

$$g'(t)f^{n-1}(t) \leq -\int_0^t f^{n-1}(s)ds$$

Integrando novamente no intervalo $[x, R]$ ficamos com,

$$g(R) - g(x) \leq \int_x^R \frac{-\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt \tag{4.5}$$

Como $g(R) = 0$, vale que

$$g(x) \geq \int_x^R \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt \tag{4.6}$$

Podemos tomar então

$$g(x) = \int_x^R \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt$$

que as hipóteses pedidas são satisfeitas.

Como g é não crescente temos que

$$\sup g = g(0) = \int_0^R \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt$$

Escolhendo $C = g(0)$ o resultado segue.

□

Corolário 4.1.3. *Seja $N \subset M$ uma subvariedade $n-1$ dimensional e a função distância definida anteriormente. Considere Ω uma vizinhança normal de N. Se existe $f : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1 satisfazendo*

$$\frac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \frac{f'(d(x))}{f(d(x))},\ x \in \Omega$$

então

$$\lambda_1(\Omega) \geq \Gamma_f$$

onde $\Gamma_f = \left\{ \int_0^R \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt \right\}^{-1}$

Proof. Seja u solução não nula da equação

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda_1 u \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

Com a hipótese desse corolário temos pelo teorema anterior que:

$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |\Delta u|,$$

onde $C = \displaystyle\int_0^R \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)} dt$. Como $u = 0$ em $\partial\Omega$ e $\Delta u = -\lambda_1 u$, a equação acima se reduz a:

$$\sup_\Omega |u| \leq C \sup_\Omega |-\lambda_1 u|.$$

Como λ_1 é uma constante e maior que zero, podemos tirá-lo do supremo e do módulo, e dividindo essa equação por $\sup_\Omega |u|$(já que esse é diferente de 0) obtemos

$$1 \leq C\lambda_1.$$

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{C} = \Gamma_f.$$

□

Corolário 4.1.4. *Seja Ω uma vizinhança normal de $N \subset M$ de largura R. suponha que exista uma função $f : [0, R] \to (0, \infty)$ de classe $C^2([0, R])$ satisfazendo*

$$\Lambda(\Omega) \leq -\frac{f'(0)}{f(0)}.$$

Considere $\gamma : [0, R] \to M$ uma geodésica qualquer, parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) \in N$ e $\gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$, onde η é o vetor normal de N apontando para Ω. Assuma também que, para todo $t \in (0, R]$ e todo vetor $v \in \{\gamma'(t)\}^\perp$ não nulo, seja válida a propriedade

$$K_M(\gamma'(t), v) \leq -\frac{f''(t)}{f(t)},$$

onde $K_M(\gamma'(t), v)$ é a curvatura seccional de M em $\gamma(t)$ sobre o plano determinado por γ' e v. Então $\lambda_1 \geq \Gamma_f$, onde Γ_f é o mesmo definido no corolário acima.

Proof. Pelo Teorema 3.2.1 teremos

$$\frac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \frac{f'(d(x))}{f(d(x))}.$$

Com isso, podemos utilizar o corolário 4.1.3 e concluir que $\lambda_1 \geq \Gamma_f$. □

Teorema 4.1.5. *Sejam M uma variedade riemanniana e $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$ dimensional. Considere Ω uma vizinhança normal de N e $d : M \to \mathbb{R}_+$ a função distância à subvariedade N. Suponha que exista $f : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1 satisfazendo:*

$$\frac{\Delta d(x)}{n-1} \leq \frac{f'(d(x))}{f(d(x))},$$

para todo $x \in \Omega$. Se

$$C = \int_0^R \frac{\int_t^R f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)} dt$$

então

$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |\Delta u|,$$

para toda $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

Proof. A ideia dessa demontração é a mesma do Teorema 4.1.3. Basicamente o que temos de diferente aqui são as condições que obtemos sobre a função g.

Vamos considerar a função v definida por

$$v(y) = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(d(y)) \sup_\Omega \Delta u$$

e buscar uma função g que torne u e v nas seguinte condições:

$$\begin{cases} \Delta(v-u) \leq 0 & \text{em } \Omega \\ v - u \geq 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Com isso teremos pelo princípio do máximo que $v - u \geq 0$ em Ω. Como anteriormente, também temos que garantir que $v + u \geq 0$ para que possamos tomar o supremos e concluir a demonstração do teorema. Vamos nos deter ao caso $v - u$.

Seguindo as linhas iniciais da demonstração do Teorema 4.1.2 chegamos que g precisa ser positiva e $\Delta(g \circ d) \leq -1$.

Se $g'(d) \geq 0$ teremos então

$$\Delta(g \circ d) = g''(d) + g'(d)\Delta d \leq g''(d) + g'(d)(n-1)\frac{f'(d(x))}{f(d(x))},$$

já que $\Delta d(x) \leq (n-1)\dfrac{f'(d(x))}{f(d(x))}$.

Portanto a função g que buscamos agora é

$$\begin{cases} (g'f^{n-1})' \leq -f^{n-1} \\ \\ g' \geq 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Nesse caso a função g deve ser não decrescente. Pelo fato de procurarmos a que possui o menor supremo possível, vamos escolher uma função que comece valendo 0 e tenha derivada no final valendo 0(note que é o oposto do que pedimos no Teorema 4.1.2), ou seja, $g(0) = 0,\ g'(R) = 0$.

Com essas restrições é natural que, ao contrário do que fizemos anteriormente, a integração de 4.7 se de no intervalo $[t, R]$. Procedendo assim obtemos,

$$g'(t) \geq \frac{\int_t^R f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt.$$

Logo,

$$g(x) \geq \int_0^x \frac{\int_t^R f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt.$$

Podemos então definir g como

$$g(x) = \int_0^x \frac{\int_t^R f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt.$$

Tomando $C = \sup g = g(R) = \displaystyle\int_0^R \frac{\int_t^R f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt$, o resultado segue.

□

Corolário 4.1.6. *Sejam $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$dimensional Ω uma vizinhança normal de N. Considerando as funções d e f do Teorema 4.1.5, temos que se $\dfrac{\Delta d(x)}{n-1} \leq \dfrac{f'(d(x))}{f(d(x))}$ então*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \Phi_f,$$

onde $\Phi_f = \left\{ \displaystyle\int_0^R \frac{\int_t^R f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)}dt \right\}^{-1}.$

Proof. A prova é a mesma do Corolário 4.1.3. □

Corolário 4.1.7. *Seja $N \subset M$ uma subvariedade $(n-1)$ dimensional. Considere uma vizinhança normal Ω de N de largura R. Seja η um vetor unitário de N apontando para Ω. Assuma que existe uma função $f : [0, R] \to (0, +\infty)$ $\in C^2([0, R])$ satisfazendo:*

1. A curvatura média de N com respeito a η satisfaz

$$H_N \geq -\frac{f'(0)}{f(0)}$$

2. A curvatura de Ricci radial de M associada á N satisfazendo

$$Ric_M(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq -(n-1)\frac{f''(t)}{f(t)},$$

$\forall$ γ onde γ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) \in N, \gamma'(0) = \eta(\gamma(0))$.

Então,

$$\lambda_1 \geq \Phi_f,$$

onde Γ_f é o mesmo definido acima.

Proof. Com essas hipóteses o Teorema 3.2.10, nos garante que $\dfrac{\Delta d(x)}{n-1} \leq \dfrac{f'(d(x))}{f(d(x))}$. Assim, o resultado segue do Corolário 4.1.6. □

Observação 4.1.8. *Todos os teoremas que foram provados nesta seção podem ter a hipótese do Ω ser vizinhança normal trocadas por Ω ser um aberto relativamente compacto de M, tal que $N \cap \Omega = \emptyset$ e d seja diferenciável em Ω. Nesse caso o resultado equivalente ao Teorema 4.1.3 tem o seguinte enunciado:*

Teorema 4.1.9. *Seja M uma variedade riemanniana completa de dimensão $n \geq 0$ e $N \subset M$ uma subvariedade de dimensão k com $0 \leq k < n$.Seja d a função distância em N. Seja Ω um aberto relativamente compacto de M tal que $d|_{\Omega \ N}$ é diferenciável. Suponha que $\Omega \cap N = \emptyset$ e defina*

$$0 \leq r := \inf\{d(x) \mid x \in \Omega\} < \sup\{d(x) \mid x \in \Omega)\} =: r + R.$$

Se existe uma função $f : [r, r+R] \to \mathbb{R}_+$ que é de classe C^1 satisfazendo

$$\frac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \frac{f'(d(x))}{f(d(x))}, \quad x \in \Omega$$

e se

$$C = \int_r^{r+R} \frac{\int_r^t f(s)^{n-1} ds}{f(t)^{n-1}} dt,$$

então

$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_\Omega |u| + C \sup_\Omega |\Delta u|$$

para toda $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Na realidade é desse modo que ele está enunciado em [RK]. A prova dos teoremas com essa mudança de hipótese é feita da mesma forma que procedemos nesse texto.

Nos exemplos que mostraremos na seção 4.3 pode-se utilizar os teoremas tanto na forma que consta nessa dissertação quanto na forma do artigo original, depende de como vamos olhar nosso domínio em relação à subvariedade. Esse fato ficará mais claro no decorrer dos exemplos.

Daremos um exemplo agora que ilustra o caso particular de aplicarmos essas estimativas quando a variedade tem curvatura seccional menor que uma certa constante negativa, como o espaço hiperbólico por exemplo. Nesse caso basta obtermos uma funcão que quando computamos a segunda derivada resulta nela mesma a menos de uma constante, pois assim podemos utilizar o corolário 4.1.4.

Exemplo 4.1.10. *Seja $N \subset M$ uma subvariedade e Ω uma vizinhança normal de N. Suponha que $\Lambda(N) < -K_0$ e $K_M \leq -(K_0)^2$, onde K_0 é uma constante positiva. Considere*

$$f(t) = \frac{\sinh(K_0(r_0 + t))}{K_0},$$

com $r_0 = \frac{1}{K_0} arccoth\left(\frac{-\Lambda}{K_0}\right)$. Tal f torna as hipóteses do colorário 4.1.4 verdadeira. Então aplicando este corolário obtemos

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left\{ \int_{r_0}^{r_0+R} \frac{\int_{r_0}^{s} \sinh^{n-1}(K_0 u) du}{\sinh^{n-1}(K_0 s)} ds \right\}^{-1}.$$

4.2 Estimativas em domínios que contém a subvariedade

O que fizemos na primeira seção foi mostrar que com uma limitação adequada para Δd vale que $\sup_\Omega |u| \leq \sup_\Omega |u| + C \sup_\Omega |\Delta u|$ e com isso consegue-se uma boa estimativa para $\lambda_1(\Omega)$. Entretanto aplicavamos esse resultado em domínios Ω não intersectavam a subvariedade N para a qual a função distância estava definida. A partir de agora nós iremos obter estimativas para domínios que contém N.

O leitor pode ter em mente a seguinte situação. Considere $M = \mathbb{S}^2$ e um grande círculo dessa variedade como sendo a subvariedade em questão. Seja Ω o conjunto de todos ponto de $\mathbb{S}^2$ que estão a uma distância menor ou igual a R desse grande círculo. Nesse caso, Ω não é mais uma vizinhança normal de N. No geral, vamos exigir apenas que ele seja um aberto relativamente compacto de M, ou seja, que seu fecho seja um compacto de M, tal que d seja diferenciável em $\Omega \backslash N$.

Outro caso particular, é quando a subvariedade N tem dimensão 0, ou seja, é um ponto. Vamos usar um conceito mais geral de funções superharmônicas e provar o seguinte

Teorema 4.2.1. *Seja $B \subset M$ uma bola normal de centro $p \in M$, raio R e d a função distância ao centro. Se existe uma função $f : [0, R] \to R_+$ de classe C^1 tal que $\dfrac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \dfrac{f'(d(x))}{\tilde{f}(d(x))}$ então*

$$\lambda_1(B) \geq \Gamma_f,$$

onde $\Gamma_f = \left\{ \displaystyle\int_0^R \frac{\int_0^s f^{n-1}(x)dx}{f^{n-1}(s)} ds \right\}^{-1}$

Se olharmos para o caso particular que $\tilde{M}$ é uma variedade rotacionalmete simétrica, p é a origem dessa variedade e f é a função associada a métrica de $\tilde{M}$ obtemos a mesma estimativa que em [BB], a saber:

Teorema 4.2.2. *Seja $M = [0, R) \times \mathbb{S}^{n-1}$ uma variedade riemanniana esfericamente simétrica com métrica $dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$, $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f(t) > 0$ se $t \in (0, R]$. Seja $B(r) \subset M$ uma bola geodésica de raio r, centrada em $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ então:*

$$\lambda_1(r) \geq \frac{1}{\displaystyle\int_0^r \frac{\int_0^t f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)} dt} = \frac{1}{\displaystyle\int_0^r \frac{V(s)}{S(s)} ds},$$

onde $V(s)$ é o volume n-dimensional da bola geodésica de raio s e $S(s)$ o volume $(n-1)$-dimensional de $\partial B(s)$.

Usualmente funções superharmônicas são definidas do seguinte modo: Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é superharmônica em Ω se $\Delta u \leq 0$.

Agora passaremos a definir funções superharmônicas no caso em que elas são de classe $C^0(M)$. Afim de diferenciar as duas definições vamos nos referir a próxima como superharmônica generalizada.

Definição 4.2.3. *Dizemos que uma função $u \in C^0(M)$ é superharmônica em M se para todo conjunto $V \subset\subset M$ e para toda função h harmônica em V com $u \geq h$ em ∂V, tem-se $u \geq h$ em V.*

Observação 4.2.4. *Se $u \in C^2(\Omega)$, pode-se mostrar que a definição acima é equivalente a dizer que $\Delta u \leq 0$ em Ω. Também é válido o Princípio fraco do máximo para funções $u \in C^0$ superharmônicas.*

Com essa definição e sabendo que o princípio do máximo é válido para funções superharmônicas generalizada, estamos aptos a mostrar o próximo teorema. Reforçamos que o grande diferencial dele para os que foram vistos na seção anterior consiste no fato do domínio Ω conter a subvariedade para a qual a função distância será considerada.

Teorema 4.2.5. *Seja $N \subset M$ uma subvariedade. Seja Ω um aberto relativamente compacto de M. Suponha que $N \subset \Omega$ e defina $R = \sup\{d(x) \mid x \in \Omega\}$, onde d é a função distância à subvariedade definida em M. Se existe uma função $f : [0, R] \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1 satisfazendo $\dfrac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \dfrac{f'(d(x))}{f(d(x))}$ para todo $x \in \Omega \backslash N$. Se $C = \displaystyle\int_0^R \frac{\int_0^s f^{n-1}(x)dx}{f^{n-1}(s)} ds$ então*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |\Delta u|,$$

para toda $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Na prova do teorema faremos uso do seguinte lema

Lema 4.2.6. *Seja $\Omega \subset M$ e $\omega : \Omega \to \mathbb{R}_+$ contínua. Considere $N = \{x \in \Omega \mid \omega(x)$ não é duas vezes derivável$\}$. Suponha que N é fechado em Ω. Suponha que para todo x pertencente a N tenha-se que $\omega(x) = \sup_\Omega \omega$ e para todo x pertencente a Ω que não pertence a N tenha-se $\Delta\omega(x) \leq 0$. Então ω é superharmônica generalizada.*

Proof. Suponha que ω não é superharmônica. Então existem $U \subset\subset \Omega$, e $h \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ harmônica com $\omega \geq h$ em ∂U e $p_0 \in U$ tal que $h(p_0) > \omega(p_0)$.

Seja $l = \sup_U(h - \omega)$. Claramente l é finito e positivo, já que h , ω são contínuas e em p_0 temos $h(p_0) > \omega(p_0)$.

Considere $\bar{h} = h - l$. Note que $\bar{h} = h - l \leq h - (h - \omega) = \omega$, logo $\bar{h} \leq \omega$. Ainda, $\bar{h}$ é harmônica pois h é harmônica e l é constante.

Como h e ω são funções contínuas no $\bar{U}$ temos que o supremo de $h - \omega$ é atingido em algum ponto $p_1 \in \bar{U}$. Assim temos $(h - \omega)(p_1) = l$ donde $\omega(p_1) = h(p_1) - l = \bar{h}(p_1)$.

Seja $U' = \{x \in \bar{U} \mid \omega(x) = \bar{h}\}$. Já que $\bar{h} \in C^2(\bar{U})$, vale que $N \cap U' = \emptyset$. Sendo assim, existe uma vizinhança V de U' tal que $V \cap N = \emptyset$ e $U' \subset\subset V$.

Note que, em V, ω é superharmônica no sentido clássico, pois $\Delta\omega \leq 0$, já que nenhum ponto de V pertence a N.

Pela construção de U' e V, $\bar{h} < \omega$ em ∂V. Seja $a = \inf_{\partial V}(\omega - \bar{h})$ e considere a função harmônica $\bar{h} + \frac{a}{2}$. Note que

$$\bar{h} + \frac{a}{2} < \omega \quad \text{em } \partial V \quad \text{e} \quad \bar{h}(p_0) + \frac{a}{2} > \omega(p_0).$$

Logo, ω não é superharmônica generalizada em V.

Chegamos então em uma contradição, já que o fato de ser superharmônica no sentido clásico implica nela ser ser superharmônica generalizada. $\square$

Proof. do teorema A ideia desta demonstração é a mesma que usamos no Teorema 4.1.5. Queremos considerar a função

$$v(x) = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(d(x)) \sup_{\Omega} |\Delta u|,$$

e encontrar uma função g que coloque $v - u$ nas hipóteses necessárias para aplicarmos o Pricípio fraco do máximo e garantir que $v - u \geq 0$ em Ω. Como antes, também precisamos que $v + u \geq 0$, porém vamos nos deter ao primeiro caso.

Para começar, vemos de forma análoga ao Teorema 4.1.5, que se g é positiva, então a condição de fronteira é satisfeita, ou seja, $v - u \geq 0$.

Sabemos que a função distância não é diferenciãvel na origem, isto é, em x_0 tal que $d(x_0) = 0$, então diferentemente dos outros casos, $v - u$ não é diferenciável em Ω, já que a função distância d não será diferenciável em N. Isso nos impossibilita de calcular $\Delta(v - u)$ em todo interior de Ω e portanto, não faz sentido querer que $\Delta(v - u) \leq 0$ como foi feito no Teorema 4.1.5.

Sendo assim, para que possamos usar o princípio do máximo, precisamos garantir que $v - u$ é superharmônica generalizada.

Seja $\omega = v - u$ e

$$g(t) = \int_t^R \frac{\int_0^s f^{n-1}(x)dx}{f^{n-1}(s)} ds.$$

Como g é decrescente e $d(x, N) = 0$ para todo $x \in N$, temos que $\sup_\Omega \omega = \sup_\Omega(v - u) = (v - u)|_N$.

Portanto pelo Lema 4.2.6 concluímos que $\omega = v - u$ é superharmônica em Ω. Logo como é válido o princípio fraco do máximo para essa função podemos concluir a prova do teorema exatamente como nos outros casos. $\square$

Corolário 4.2.7. *Sejam Ω e f nas hipóteses do Teorema 4.2.5 então*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left\{ \int_0^R \frac{\int_0^s f^{n-1}(x)dx}{f^{n-1}(s)} ds \right\}^{-1}.$$

Proof. A prova é análoga a do Corolário 4.1.3. □

Observação 4.2.8. *O Teorema 4.2.1 é um caso particular do Corolário 4.2.7. Basta considerarmos N como um ponto e Ω uma bola normal com centro em N.*

4.3 Exemplos

No capítulo 3 vimos que dadas uma variedade riemanniana M e uma vizinhança normal nessa variedade, e se tivermos uma limitação, em termos de uma certa função f e suas derivadas, para curvatura seccional e c.p.m. ou para curvatura de Ricci e média no bordo dessa vizinhança, podemos obter $\dfrac{\Delta d(x)}{n-1} \geq \dfrac{f'(d(x))}{f(d(x))}$ ou $\dfrac{\Delta d(x)}{n-1} \leq \dfrac{f'(d(x))}{f(d(x))}$ onde d é a função distância a subvariedade N. Uma vez obtida essa desigualdade e estando no domínio adequado, estamos aptos a aplicar os Teoremas mostrados nessa seção, que nos fornecem uma estimativa para λ_1.

Destacamos que o grande diferencial nesses resultados, se dá pelo fato destas estimativas depender em apenas de conhecermos a curvatura de Ricci radial de M associada à N e a curvatura média em N(subvariedade que é a origem da vizinhança normal) ou a curvatura seccional radial de M e $\Lambda(N)$.

Vamos começar com um exemplo básico em $\mathbb{R}^2$. O segundo exemplo, mostra que é possível aplicar simultaneamente as 3 estimativas feitas nos Corolários 4.1.3, 4.1.6 e 4.2.7. Depois vamos analizar o caso das variedades rotacionalmente simétricas e por último vamos estimar o primeiro autovalor em cilindros.

Exemplo 4.3.1. *Considere $\Omega = A_{1,2}(0,0)$, o anel que tem raios 1 e 2 $\mathbb{R}^2$ centrado na origem. Seja N a bola geodésica com centro na origem e raio 1, com vetor normal apontando para Ω. Nesse caso teremos que $K_{\mathbb{R}^2} = 0$ e $\Lambda(N) = -1$. Assim podemos considerar $f(t) = t+1$ para que estejamos nas hipóteses do Corolário 4.1.4 e concluímos que:*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left\{ \int_0^1 \frac{\int_0^t (s+1)ds}{(t+1)} dt \right\}^{-1} = \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^{-1}.$$

Exemplo 4.3.2. *Embora as hipóteses dos Teoremas 4.1.5, 4.1.2 e 4.2.5 sejam distintas, é possível que elas sejam satisfeitas simultaneamente, e portanto podemos aplicar as três estimativas obtidas ao longo do texto como veremos agora.*

Considere a variedade $\tilde{M} = [0,\pi] \times \mathbb{S}^1$ com métrica $ds^2 = dt^2 + f^2(t)d\theta^2$ e $f(t) = \operatorname{sen}(t)$. Nesse caso temos que $\tilde{M} = \mathbb{S}^2$. Considere a subvariedade $\tilde{N} = \{0\} \times \mathbb{S}^1 = p$ onde p é o pólo norte da esfera.

Vamos estimar o primeiro autovalor de Dirichlet do seguinte domínio, $\Omega = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \frac{\pi}{2} - R \leq d(x,p) \leq \frac{\pi}{2} + R\}$, com $R \in (0, \frac{\pi}{2})$ e d a função distância ao pólo norte. Nesse caso $\tilde{N} \cap \Omega = \emptyset$ e ainda, Ω não é uma vizinhança normal de $\tilde{N}$ mas é um domínio relativamente compacto de $\tilde{M}$ e d é diferenciável em Ω. Estamos então com Ω dentro das hipóteses que mencionamos na observação 4.1.8.

Entretanto, poderíamos pensar em Ω como sendo uma vizinhança normal da subvariedade $L = \{\frac{\pi}{2} - R\} \times \mathbb{S}^1$, bastaria definir a função distância a L como $\phi(x) = d(x) - R$ onde d é a função distância ao pólo norte. Formalmente teríamos que $\Omega = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid 0 \leq \phi(x) \leq 2R\}$. Assim poderíamos aplicar exatamente os teoremas que constam nesse texto.

Nas duas primeiras estimativas desse exemplo vamos considerar a distância ao pólo norte e faremos menção aos corolários desse texto mas sempre assumindo que eles estão com as adaptações mencionadas na observação 4.1.8. No último caso vamos considerar a distância ϕ mencionada acima.

Sabemos que as variedades rotacionalmente simétricas possuem Laplaciano do distância ao ponto igual a $(n-1)\frac{f'(t)}{f(t)}$, onde n é a dimensão da variedade onde a função distância está definida. Portanto, nesse caso, teremos que

$$\Delta d(\gamma(t)) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \operatorname{cotg}(t).$$

Sendo assim estamos nas hipóteses do Corolário 4.1.3, o que nos dá a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Omega) &\geq \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}-R}^{\frac{\pi}{2}+R} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}-R}^{t} \operatorname{sen}(s)ds}{\operatorname{sen}(t)} dt \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}-R}^{\frac{\pi}{2}+R} \frac{-(\cos(t) - \cos(\frac{\pi}{2} - R))}{\operatorname{sen}(t)} dt \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \int_{\frac{\pi}{2}-R}^{\frac{\pi}{2}+R} -\operatorname{cotg}(t)dt + \cos(\frac{\pi}{2} - R) \int_{\frac{\pi}{2}-R}^{\frac{\pi}{2}+R} \operatorname{cossec}(t)dt \right\}^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - R\right)\ln\left|\frac{\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}+R\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}{\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-R\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}\right| - ln\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}\right|\right\}^{-1} \\
&= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - R\right)\ln\left|\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}\right| - \ln\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}\right|\right\}^{-1} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(R)}\left\{ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(R)}{1-\operatorname{sen}(R)}\right|\right\}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Aplicando esse resultado para $R = \dfrac{\pi}{6}$ *teremos que* $\lambda_1(\Omega) \geq 1.8204$.

Também estamos nas hipóteses do Corolário 4.1.6. Então, teremos

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(\Omega) &\geq \left\{\int_{\frac{\pi}{2}-R}^{\frac{\pi}{2}+R} \frac{\int_t^{\frac{\pi}{2}+R}\operatorname{sen}(s)ds}{\operatorname{sen}(t)}dt\right\}^{-1} \\
&= \left\{-\cos\left(\frac{\pi}{2} + R\right)\ln\left|\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}\right| - \ln\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+R\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-R\right)}\right|\right\}^{-1} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}(R)}\left\{\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(R)}{1-\operatorname{sen}(R)}\right|\right\}^{-1}
\end{aligned}
$$

Note que essa é a mesma estimativa do primeiro caso.

Podemos também olhar para Ω *como uma vizinhança de* $\tilde{A} = \{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{S}^1$, *do seguinte modo:* $\Omega = \{x \in \mathbb{S}^2 \,|d(x, \tilde{A}) < R\}$

Nesse caso, $\tilde{A} \subset \Omega$, *o Laplaciano da função distância à subvariedade* $\tilde{A}$, *é dado por* $\Delta d(q) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - d(q)\right)$. *Podemos então escolher* $f(t) = \cos(d(t))$ *para aplicarmos o Corolário 4.2.7. Assim, obtemos que*

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(\Omega) &\geq \left\{\int_0^R \frac{\int_0^s \cos(x)dx}{\cos(s)}ds\right\}^{-1} = \left\{\int_0^R \operatorname{tg}(s)ds\right\}^{-1} \\
&= \{\ln|\sec(R)|\}^{-1}
\end{aligned}
$$

Aplicando essa estimativa para $R = \dfrac{\pi}{6}$ *obtemos* $\lambda_1(\Omega) \geq 6.9521$. *Nesse caso, esta é a melhor dentre as estimativas que obtemos.*

Exemplo 4.3.3. *Seja* $\tilde{M}$ *uma variedade rotacionalmente simétrica com métrica associada a* f *de dimensão* n, *como a definida no exemplo 2.1.8. Considere o anel* $\Omega = \{x \in \tilde{M} \mid r \leq d(x) \leq r + R\}$, *onde* d *é a função distância a origem de* $\tilde{M}$.

Vamos escolher r *e* $r + R$ *de forma que a função distância seja diferenciável em* Ω.

Uma parametrização de $\tilde{M}$ é dada por

$$\phi(t,\theta) = (t,\theta),$$

onde θ é a parametrização de $\mathbb{S}^{n-1}$.

É fácil ver que as geodésicas que realizam a distância ao ponto p, que é a origem de $\tilde{M}$, são da forma

$$\gamma_\theta(t) = \phi(t,\theta).$$

Logo $d(x) = |\exp^{-1}(x)| = |\phi^{-1}(x)| = |\phi^{-1}(t,\theta)|$ se $x = (t,\theta)$.

Portanto, como ϕ é um difeomorfismo local, vemos que d é diferenciável em todo domínio de ϕ, fora da origem. Então, podemos escolher $r > 0$ qualquer e $R \geq 0$ qualquer desde que $r + R$ seja menor que a primeira raíz positiva da função f.

Como $\tilde{M}$ é uma variedade rotacionalmente simétrica, sabemos que

$$\frac{\Delta d(x)}{n-1} = \frac{f'(d(x))}{f(d(x))}.$$

Então, para estimarmos o primeiro autovalor em Ω, podemos aplicar tanto o Corolário 4.1.6 quanto o Corolário 4.1.3. Com isso concluímos que

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left\{ \int_r^{r+R} \frac{\int_t^{r+R} f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)} dt \right\}^{-1}$$

e também que

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left\{ \int_r^{r+R} \frac{\int_r^{t} f^{n-1}(s)ds}{f^{n-1}(t)} dt \right\}^{-1}$$

As variedades: $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{S}^n$, podem ser vistas como variedades rotacionalmente simétricas. Para isso, basta que escolhamos as funções adequadas associadas a métrica, a saber: $f_H(t) = \operatorname{senh}(t)$ para $\mathbb{H}^n$, $f_R(t) = t$ para $\mathbb{R}^n$ e $f_S(t) = \operatorname{sen}(t)$ para $\mathbb{S}^n$.

Isso nos possibilita a obtermos estimativas para λ_1 em anéis contidos nessas variedades. O Exemplo anterior é um caso particular dessa situação.

Exemplo 4.3.4. *Considere em $\mathbb{R}^3$o cilindro de $\mathbb{R}^3$ $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\}$. Vamos calcular uma estimativa para o primeiro autovalor de Dirichlet em $\Omega = \{p \in C \mid 0 < d(p,N) < R\}$, onde $N = \{(x,y,0) \ |x^2+y^2 = 1\}$, e d a função distância à subvariedade N.*

Uma parametrização para este cilindro é dada por

$$\phi(t,\theta) = (\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), t).$$

Logo N pode ser visto como a subvariedade $N = \phi(0,\theta) = (\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0)$. As geodésicas que partem de N obedecem a seguinte equação $\gamma_v(t) = \phi_v(t,\theta) = (\operatorname{sen}(at), \cos(at), bt)$ onde $a^2 + b^2 = 1$. Com isso vemos que, em particular, a função distância é realizada por geodésicas da forma $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), t)$, logo d é diferenciável em $\Omega \backslash N$ para todo $R > 0$.

Agora, para utilizarmos o Corolário 4.2.7 basta que encontremos uma função f satisfazendo $\Delta d(x) \geq \dfrac{f'(d(x))}{f(d(x))}$.

Pela observação 3.2.3 temos que $\Delta d(q) = -H_{N_t}(q)$, onde N_t é a superfície equidistante à N que passa por q. Note que toda N_t é uma geodésica em C e portanto $H_{N_t}(q) = 0$. Logo $\Delta d(q) = 0$ para todo ponto $q \in \Omega$. Sendo assim, podemos escolher nossa f como a função constante 1.

Portanto,

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left\{ \int_0^R \frac{\int_0^t ds}{1} dt \right\}^{-1} \quad = \quad \left\{ \int_0^R t \; dt \right\}^{-1} = \frac{2}{R^2}$$

Nesse exemplo específico é fácil obtermos o primeiro autovalor para o anel Ω de raio R, pois é possível obter explicitamente a primeira autofunção. Basta escolhermos $u(x,y,z) = \cos(\frac{z\pi}{2R})$ e teremos

$$\Delta u(x,y,z) = u_{zz} = \frac{-\pi^2}{4R^2} u(z)$$

e ainda $u(x,y,R) = 0 = u(x,y,-R)$ o que mostra que u é autofunção. Para ver que é a primeira autofunção basta notar que ela não muda de sinal, no caso, é sempre positiva. Logo, $\lambda_1(\Omega) = \dfrac{\pi^2}{4R^2}$.

Comparando com o valor obtido pela estimativa percebe-se que a mesma apresenta uma boa aproximação do primeiro autovalor já que ambas possuem o denominador na mesma ordem de crescimento.

Referências Bibliográficas

[BB] Barroso, C. S., Bessa, G. P.: "*Lower Bounds for the First Laplacian Eigenvalue of Geodesic Balls of Spherically Symmetric Manifolds*" ArXiv: math/0601180v4 math.DG, 2006.

[BC] Bishop, R., Crittenden, R.: "*Geometry of manifolds*" Academic Press, New York, 1964.

[dC] do Carmo, M.: "*Geometria Riemmanina*" 3ed. IMPA (2005).

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.: "*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*", Springer-Verlag (1998).

[KR] Rippol, J., Klaser, P.:"*Lower estimates for the first eigenvalue of the Laplace operator on doubly connected domains in a Riemannian manifold*",Geom Dedicata (2012), Vol 160, pp.199-217