

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DE SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Evolução não linear de ondas eletrostáticas e eletromagnéticas
no contexto da teoria de turbulência fraca em plasmas**

Larissa Teixeira Petruzzellis

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Porto Alegre, 19 de dezembro de 2014

Agradecimentos

Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado e me deram todo amor e apoio. Esse título também é de vocês! Amo vocês!

Ao meu namorado Thiago, pelo apoio moral, emocional e financeiro. Sem ti, as coisas ficariam sensivelmente mais difíceis e absurdamente sem graça. Te amo com todo o coração!

Ao meu orientador, pelas discussões, pelo apoio, pela paciência, pela enorme generosidade e pela grande disposição em ajudar. É extremamente gratificante e enriquecedor ser tua orientanda. Muito obrigada por tudo!

À Stefânia: minha amiga, minha irmã. Tu fazes meus dias melhores! À Sabrina, por toda ajuda. À Nicole, por sempre saber o que dizer. À Ana, por todo apoio e carinho. A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que esse trabalho fosse concluído.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal fazer uma revisão da teoria de turbulência fraca em plasmas e caracterizar o efeito dos diferentes termos associados aos efeitos eletrostáticos e eletromagnéticos sobre a evolução temporal das intensidades das ondas e da função distribuição das partículas que compõem o plasma. Para tanto, será apresentada uma revisão da teoria cinética de plasmas, desde seus aspectos fundamentais. A seguir será discutido o sistema de equações Vlasov-Maxwell na abordagem quase-linear, enfatizando quais as principais características da teoria. Depois, será feita uma revisão de uma formulação relativamente recente, apresentando as bases para a teoria de turbulência fraca, mencionando termo a termo as principais características. Primeiramente será apresentado com detalhe o caso eletrostático, apresentando as equações cinéticas para as ondas tanto para os modos lineares, quanto para os modos não lineares de excitação. A seguir, a generalização da teoria, incluindo os efeitos das ondas eletromagnéticas nas equações cinéticas das ondas e das partículas. Por fim serão apresentados alguns resultados obtidos de uma análise numérica do sistema de equações acopladas que leva em conta tanto ondas eletrostáticas quanto eletromagnéticas, com o objetivo de caracterizar, para os tempos iniciais da evolução, os efeitos associados a cada um dos termos que contribuem para a equação de evolução temporal das ondas eletromagnéticas. A ênfase será dada a esses termos, uma vez que os efeitos associados à evolução das ondas eletrostáticas já têm sido bastante investigados na literatura recente. Para o futuro imediato, a intenção é continuar desenvolvendo o código numérico, visando aplicação a situações em que ocorrem plasmas não térmicos, como é o caso da interação feixe-plasma. A ideia é utilizar o programa bidimensional para a turbulência fraca para investigar a geração de ondas transversas por efeitos não lineares associados com a instabilidade feixe-plasma, para diferentes valores dos parâmetros que caracterizam o plasma de fundo e os feixes de partículas.

Abstract

This work has as main objective to review the theory of weak turbulence in plasmas and characterize the effect of various terms associated with electrostatic and electromagnetic effects on the time evolution of the wave intensities and of the distribution function of particles composing the plasma. With this objective, a review of plasmas kinetic theory will be presented, starting from fundamental aspects. The sequence will discuss the system of Vlasov-Maxwell equations in quasilinear approach, with emphasis on the main features of theory. Then, a review will be made of a relatively recent formulation, presenting the foundations for the theory of weak turbulence, describing the main characteristics of each term. First will be presented in detail the kinetic equations for the electrostatic case, including mechanisms of excitation of waves in linear modes as well as waves in nonlinear modes. Following, there is a generalization of the theory, including the effects of electromagnetic waves in the kinetic equations of waves and particles. Finally, some results of a numerical analysis of the system of coupled equations including both electrostatic and electromagnetic waves will be presented, with the objective of characterization of the effects associated to each of the terms contributing to the time evolution of electromagnetic waves, for the initial stages of time evolution. Emphasis will be given to such terms, since the effects associated with the evolution of electrostatic waves have been quite investigated in recent literature. For the immediate future, the intention is to continue developing the numerical code, aiming at application to situations where non thermal plasmas occur, as is the case of the beam-plasma interaction. The idea is to use the two dimensional program for weak turbulence to investigate the generation of transverse waves by non-linear effects associated with the beam-plasma instability, for different values of the parameters that characterize the background plasma and the particle beams.

Lista de Figuras

2.1	Contorno de integração no plano de p complexo.	24
2.2	Contorno de Landau	25
3.1	Função distribuição para os elétrons levando em conta o tempo inicial $t = 0$ e o tempo final $t = \infty$, tanto para as partículas ressonantes, como para as não ressonantes [1].	46
4.1	Espectro das ondas T para $\tau = 1$ (coluna da esquerda) e para $\tau = 50$ (coluna da direita). (a) e (b) Levando em conta apenas o termo $TdLL$; (c) e (d) Levando em conta apenas o termo $TdSL$; (e) e (f) Levando em conta apenas o termo $TsTL$	73

Sumário

1	Introdução	8
2	Teoria Cinética de Plasmas e a Aproximação Linear	11
2.1	Descrição Estatística de um Plasma	11
2.2	Equação de Vlasov e suas Características	16
2.2.1	Conservação do Número de Partículas	16
2.2.2	Probabilidades Permanecem Positivas	17
2.2.3	Admite Múltiplas Soluções	17
2.2.4	Conservação da Entropia	18
2.3	Sistema de Equações Vlasov-Maxwell	19
2.4	Linearização do Sistema Vlasov-Maxwell	19
2.4.1	Solução da Equação de Vlasov Linearizada para o Caso Eletrostático	20
2.4.2	Consequências do Tratamento Linear: <i>Landau Damping</i>	23
2.5	Contribuição dos Íons na Abordagem Linear	28
3	Teoria Quase-Linear	31
3.1	Sistema de Equações Vlasov-Maxwell na Aproximação Quase-Linear	31
3.2	Equação de Difusão Quase-Linear	33
3.2.1	Coefficiente de Difusão Quase-Linear	35
3.2.2	Densidade Espectral	36
3.3	Leis de Conservação na Teoria Quase-Linear	38
3.3.1	Conservação do Número de Partículas	39
3.3.2	Conservação da Quantidade de Movimento	39
3.3.3	Conservação de Energia	40
3.4	Propriedades do Coeficiente de Difusão Quase-Linear	41
3.5	Aplicação da Teoria Quase-Linear: Instabilidade <i>Bump-in-tail</i>	42
3.5.1	Troca de Energia entre Partículas Ressonantes e Não Ressonantes	43
3.5.2	O comportamento da Função Distribuição de Partículas	44
4	Teoria de Turbulência Fraca em Plasmas	48
4.1	Generalização das Equações Cinéticas na Abordagem da Teoria de Turbulência Fraca para o Caso Eletrostático	48
4.1.1	Equação Cinética das Partículas e a Aproximação de Duas Escalas de Tempo	48
4.1.2	Equação Cinética das Ondas para os Modos Lineares	51
4.1.3	Equação Cinética das Ondas para os Modos Não Lineares	57
4.1.4	Equação Cinética das Partículas	62
4.2	Generalização da Teoria de Turbulência Fraca no Caso Eletromagnético	67

4.2.1	Equação Cinética das Partículas	68
4.2.2	Equação Cinética das Ondas dos Tipo L, S e T	68
4.2.3	Análise Numérica	71
5	Comentários finais	74

Capítulo 1

Introdução

Física de plasmas é essencialmente o estudo dos gases ionizados de baixa densidade. O termo “*plasma*” foi utilizado pela primeira vez por Lewi Tonks e Irving Langmuir em 1929 no artigo *Oscillations in Ionized Gases* para descrever "uma coleção de partículas carregadas" no estudo de oscilações em descargas elétricas. No entanto, a maior característica do estado de plasma, a saber o longo alcance da força de Coulomb e conseqüentemente o comportamento coletivo exibido por partículas carregadas, já tinha sido anteriormente conhecida e descrita por Lord Rayleigh em 1906, em sua análise sobre oscilações eletrônicas no modelo de Thomson para o átomo [1, 2, 3].

A denominação de “*quarto estado da matéria*” foi inventada por William Crookes, em 1879, e provém da seguinte ideia: quando um material sólido é aquecido esse sofre uma transição de fase, geralmente para a fase líquida. Se a esse líquido for adicionado mais calor, em algum momento, passará para o estado gasoso. Caso for acrescido a esse gás mais energia, alguns átomos serão ionizados e em temperaturas acima de $100000K$ a maior parte dessa matéria está em um estado ionizado e esse é denominado como o quarto estado. O estado de plasma pode existir abaixo dessa temperatura, desde que haja um mecanismo de ionização do gás e se a densidade for baixa o suficiente para que a recombinação não seja tão rápida. Outros fatores de existência e parâmetros importantes serão considerados a seguir [2, 3].

Embora 99,9% do universo que conhecemos exista no estado de plasma, pelo menos no que se refere à matéria bariônica, muito pouco é encontrado naturalmente na Terra. Isso deve-se ao fato das baixas temperaturas e altas densidades que nosso planeta exhibe. Os poucos plasmas com os quais temos contato são produzidos artificialmente, por meio de fortes descargas elétricas em gases confinados, como nas lâmpadas fluorescentes que iluminam nossas residências, ou naturalmente, em chamas ou nas imediações do canal de descarga de um raio na atmosfera.

Naturalmente, todo gás ionizado não pode ser considerado um plasma, pois sempre há um certo grau de ionização em qualquer gás. A definição mais comum é a seguinte: *um plasma é um gás quase-neutro dotado de partículas positivas e negativas, que exhibe um comportamento coletivo*. Uma definição mais profunda dos termos “quase-neutro” e “comportamento coletivo” se faz necessária.

O gás em questão deve ser quase-neutro, ou seja, a densidade de partículas carregadas deve ser suficientemente grande para que em um elemento de volume do sistema a diferença entre as densidades de partículas positivas e negativas seja considerada apenas uma flutuação. É importante notar que, embora não tenham limites, essas partículas não são "livres".

As cargas elétricas produzem campos elétricos, mesmo quando em repouso, e quando se movem representam correntes elétricas, que geram campos magnéticos associados. Como resultado, cada uma é afetada pelos campos das outras. Isto determina o comportamento coletivo com muitos graus de liberdade. O gás ionizado deve também apresentar o que se chama de “blindagem”, em outras palavras, qualquer carga de um determinado sinal vai atrair cargas do sinal oposto e repelir cargas do mesmo sinal, de modo que a efetividade da força elétrica dessa carga acaba limitada a uma determinada distância, conhecida como *comprimento de Debye*. Mesmo assim, a interação entre as partículas ocorre à distância, não dependendo apenas de colisões diretas, como acontece em gases neutros. Para um plasma que contenha elétrons e íons o comprimento de Debye é definido, no sistema CGS gaussiano, da seguinte forma [2, 4, 3]

$$\lambda_D = \left(\frac{T}{8\pi n q_e^2} \right)^{1/2},$$

onde n é a densidade ou dos íons ou dos elétrons, T é a temperatura, à qual foi incorporada a constante de Boltzman e está em unidades de energia, e q_e é a carga de um elétron.

Outro parâmetro importante é o chamado parâmetro do plasma g , que é proporcional ao inverso do número de partículas contidas em uma esfera de Debye (esfera cujo raio é λ_D) e é definido como

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3}.$$

Com o propósito da blindagem eletrônica ocorrer e a descrição estatística ter validade o número de partículas nessa esfera deve ser enorme, ou seja, $g \ll 1$ e essa suposição chama-se de *aproximação do plasma*. O parâmetro do plasma é sem dúvida o mais importante parâmetro adimensional associado com o plasma e pode ser interpretado como a medida do grau em que o plasma ou os efeitos coletivos influenciam no comportamento das partículas individualmente [1].

Neste trabalho será apresentada uma revisão a respeito do estudo da evolução não linear de ondas eletrostáticas e eletromagnéticas no contexto da teoria de turbulência fraca, e serão apresentados alguns resultados preliminares de soluções numéricas do conjunto de equações auto-consistentes que é resultante da teoria. O objetivo é futuramente utilizar essa abordagem para estudar a evolução numérica da interação feixe-plasma, incorporando efeitos não lineares de forma mais rigorosa do que pode ser encontrado na literatura.

A chamada teoria de turbulência fraca é uma abordagem que incorpora efeitos não lineares de baixa ordem, constituindo-se em um conjunto de equações acopladas para a evolução das funções de distribuição de velocidades das partículas e para a evolução das intensidades dos diferentes tipos de ondas levadas em consideração, bem como relações de dispersão lineares para essas ondas.

A formulação da teoria de turbulência fraca foi em grande parte desenvolvida entre o final dos anos 1950 e o início dos anos 1970, na sua grande maioria por cientistas da antiga União Soviética [5, 6, 7, 8]. A maioria dos estudos encontrados na literatura dizem respeito a problemas envolvendo oscilações eletrostáticas em plasmas não magnetizados e efeitos eletromagnéticos são usualmente incorporados à teoria apenas no sentido formal. Em período relativamente recente, a teoria de turbulência fraca foi abordada a partir de primeiros princípios, de forma sistemática, inicialmente apenas incorporando efeitos eletrostáticos [9], depois incorporando ao formalismo efeitos de emissão espontânea e depois estendendo o formalismo para incluir efeitos de interações eletromagnéticas [10, 11, 12, 13]. Como bons exemplos desses tipos de interação

na natureza podem ser mencionados os fenômenos de emissão de radiação solar dos tipos II e III (type II and III radio bursts).

Este trabalho tem por objetivo principal caracterizar os diferentes termos associados aos efeitos eletrostáticos e magnéticos na evolução das intensidades das ondas e está dividido em cinco capítulos. O capítulo 2 abordará a teoria cinética, apresentando o sistema de equações Vlasov-Maxwell e evidenciando seu caráter auto-consistente.

No mesmo capítulo, serão apresentados, para uma situação relativamente simples, os procedimentos que levam à relação de dispersão na aproximação linear. Como aplicação, será obtida a relação de dispersão para ondas de Langmuir, em um plasma Maxwelliano, e a caracterização do amortecimento de Landau, tanto para os elétrons, quanto para os íons.

No capítulo 3 será apresentada a aplicação do formalismo quase-linear ao sistema de equações Vlasov-Maxwell, sendo deduzida a equação de difusão quase-linear, o coeficiente de difusão que aparece nessa equação, a expressão para a variação temporal da amplitude espectral e as principais propriedades dessa formulação. A dedução será acompanhada por uma discussão sobre as diferenças entre a teoria quase-linear e a abordagem linear apresentada no capítulo anterior, bem como os seus limites de validade. Como aplicação, serão obtidas as principais características da instabilidade do tipo *bump-in-tail*, que formarão as bases para a teoria de turbulência fraca, a qual será abordada posteriormente.

O capítulo 4 versará sobre as bases da teoria de turbulência fraca, sobre a evolução dos conceitos e sobre a atual formulação generalizada. Serão apresentados também os resultados dos efeitos de cada termo na evolução das partículas e das ondas. Por fim, no capítulo 5 será realizado um sumário do trabalho, apontando as principais conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Teoria Cinética de Plasmas e a Aproximação Linear

Determinar como a posição e a velocidade variam ao longo do tempo é fundamental para que se possa obter informações completas sobre um sistema físico, e em um plasma isso não é diferente. Entretanto, a tamanha quantidade e variedade de componentes impossibilita a determinação desses parâmetros partícula a partícula. Outra dificuldade é a correlação que existe entre seus componentes. Por serem partículas carregadas e em movimento, campos elétricos e magnéticos são gerados e, através desse processo, uma partícula é capaz de afetar outras à distância, que por sua vez também geram seus próprios campos, afetando as demais partículas, e assim sucessivamente. O objetivo aqui é estudar um plasma quente e de baixa densidade, e, sendo assim, podemos desconsiderar efeitos de colisões entre as partículas. Essas características definem um sistema com comportamento coletivo, auto-consistente e com interações de médio alcance, no qual, além de não haver efeitos colisionais, o campo gerado por uma partícula induz ou alimenta o campo gerado por outras, sem a necessidade de qualquer intervenção externa.

Os plasmas podem ser descritos por meio de abordagens hidrodinâmicas, em que as variáveis dinâmicas são quantidades médias, como densidade de partículas e velocidade média das partículas, e por uma abordagem cinética, que leva em conta a distribuição de velocidades das partículas. O objetivo deste capítulo é apresentar de forma concisa a teoria cinética, explorar suas principais propriedades e, com o auxílio da aproximação linear, obter características sobre o sistema. O conteúdo a ser apresentado tem um caráter de revisão, baseado em abordagem da literatura [1, 2, 3, 4, 14].

2.1 Descrição Estatística de um Plasma

Uma descrição completa de um plasma seria conhecer, para cada partícula, sua posição e velocidade em função do tempo. Desta forma, a função:

$$N_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{N_{\alpha}^T} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)], \quad (2.1)$$

descreve inteiramente o sistema microscópico das partículas da espécie α . Temos também que a quantidade

$$N_\alpha^T = \int N_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v,$$

é definida como o número total de partículas da espécie α . É conveniente definir a variável \mathbf{X} hexadimensional no espaço de fases de maneira que $\mathbf{X} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Assim temos que $N_\alpha^T = \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6\mathbf{X}$ e $d^6\mathbf{X} = d^3x d^3v$. Para descrever os campos elétricos e magnéticos temos as equações de Maxwell no sistema CGS de unidades:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}^M &= 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6\mathbf{X}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}^M &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}^M &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^M}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B}^M &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^M}{\partial t} + \frac{4\pi}{m_\alpha c} \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde m_α e q_α são, respectivamente, a massa e a carga da partícula da espécie α . O índice M indica que os campos elétrico e magnético contidos nas equações de Maxwell são microscópicos. Os campos macroscópicos são obtidos através de uma média dos campos microscópicos.

As equações de movimento para cada partícula são dadas por:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad (2.3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}^M}{c} \right), \quad (2.4)$$

onde $i = 1, \dots, N_\alpha^T$. Supondo que há conservação do número de partículas no espaço de fase, podemos escrever:

$$\frac{dN_\alpha(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.5)$$

a qual é chamada de *equação de Klimontovich-Dupree* [1]. Uma abordagem estatística trabalha com funções que dão a probabilidade da partícula ser encontrada em um volume infinitesimal do espaço de fase. Podemos definir uma função distribuição F_N que contenha toda informação estatística do sistema:

$$F_N(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T}, \mathbf{X}_{\beta 1}, \dots, \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T}; \dots, t) \times \prod_\gamma d^6\mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6\mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}. \quad (2.6)$$

Dessa forma, a expressão (2.6) é a probabilidade de que, no tempo t , as partículas das espécies α, β, \dots estejam em torno dos pontos $\mathbf{X}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T}; \mathbf{X}_{\beta 1}, \dots, \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} \dots$ no espaço de fase. Temos que F_N deve ser normalizada, então:

$$\int F_N(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \dots, \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T}; \mathbf{X}_{\beta 1}, \dots, \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T}, t) \prod_\gamma d^6\mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6\mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T} = 1, \quad (2.7)$$

sendo γ todas as espécies de partículas do sistema. Como já mencionado, a função distribuição F_N detém todas as informações estatísticas do sistema. A probabilidade de se encontrar uma

certa partícula da espécie α em torno do ponto \mathbf{X}_α no espaço de fases sofre influência de todas as outras partículas do sistema, e uma descrição estatística completa exigiria o total conhecimento das correlações entre as partículas, o que torna inviável uma formulação a partir da distribuição de todas as partículas. No entanto, podemos obter distribuições reduzidas. Por exemplo, a distribuição de uma partícula qualquer da espécie α é obtida integrando a função distribuição completa sobre todas as outras coordenadas, exceto as da partícula em questão. A saber:

$$f_\alpha(\mathbf{r}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 1}, t) = V \int F_N d^6 \mathbf{X}_{\alpha 2} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} \prod_\gamma d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}, \quad (2.8)$$

onde V é o volume total do sistema. Então temos que a quantidade $\left(\frac{1}{V}\right) f_\alpha(\mathbf{r}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 1}, t) d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1}$ é a probabilidade de encontrar uma partícula do tipo α em um elemento de volume $d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1}$ do espaço de fases, em torno de $(\mathbf{r}_{\alpha 1}, \mathbf{v}_{\alpha 1})$, no instante t . Entretanto, a probabilidade de se encontrar esta mesma partícula é afetada pela presença de outra partícula, de mesma espécie ou não, nas suas proximidades, e essa informação não está contida em f_α , pois essa distribuição é a mais reduzida possível. A fim de incluir esta influência, podemos definir a distribuição para duas partículas (de espécies α e β), analogamente à distribuição de partícula única:

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \mathbf{X}_{\beta 1}, t) = V^2 \int F_N d^6 \mathbf{X}_{\alpha 2} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 2} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} \prod_\xi d^6 \mathbf{X}_{\xi 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\xi N_\xi^T}, \quad (2.9)$$

a quantidade $\left(\frac{1}{V^2}\right) f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}_{\alpha 1}, \mathbf{X}_{\beta 1}, t) d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1}$ é a probabilidade de encontrarmos simultaneamente as partículas $\alpha 1$ e $\beta 1$ nos elementos de volume $d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1}$ e $d^6 \mathbf{X}_{\beta 1}$ em torno dos pontos $\mathbf{X}_{\alpha 1}$ e $\mathbf{X}_{\beta 1}$ no espaço de fases, respectivamente. Caso as partículas α e β sejam independentes, teremos $f_{\alpha\beta} = f_\alpha f_\beta$. A função (2.9) carrega mais informações que a (2.8), no entanto, continua incompleta. Como já mencionado, a inclusão de outras partículas altera a configuração original, assim, a probabilidade de $\alpha 1$ estar em $\mathbf{X}_{\alpha 1}$ e $\beta 1$ estar em $\mathbf{X}_{\beta 1}$ é alterada pela presença de uma terceira partícula, por exemplo $\gamma 1$ localizada em $\mathbf{X}_{\gamma 1}$, nas proximidades de $\mathbf{X}_{\alpha 1}$ e $\mathbf{X}_{\beta 1}$. Esta contribuição está inclusa na função distribuição, ainda reduzida, de três partículas $f_{\alpha\beta\gamma}$

$$f_{\alpha\beta\gamma} = V^3 \int \frac{F_N d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}}{d\mathbf{X}_{\alpha 1} d\mathbf{X}_{\beta 1} d\mathbf{X}_{\gamma 1}}. \quad (2.10)$$

Podemos obter a função distribuição para quatro partículas de maneira similar, essa irá conter mais informações que (2.10), porém permanece sendo reduzida.

Agora, uma vez que cada termo de $N_\alpha = \sum_i \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)$ descreve a localização da partícula em termos das condições iniciais e que F_N nos dá a probabilidade de termos um determinado conjunto de C.I's, então podemos descrever as distribuições reduzidas em termos das médias dos produtos de N_α sobre todas as possibilidades de condições iniciais. Essas médias são definidas como:

$$\langle G(N_\alpha(\mathbf{X}), \dots, N_\gamma(\mathbf{X})) \rangle \equiv \int F_N G(N_\alpha(\mathbf{X}), \dots, N_\gamma(\mathbf{X})) d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}.$$

Assim, o valor médio de $N_\alpha(\mathbf{X}, t)$ é em termos da função distribuição reduzida para partícula única:

$$\begin{aligned} \langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) \rangle &= \int F_N N_\alpha(\mathbf{X}, t) d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T} \\ &= n_\alpha f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $n_\alpha = \frac{N_\alpha^T}{V}$ é a densidade média de partículas do tipo α . Cabe notar que em meios não homogêneos, a densidade em cada ponto pode ser obtida integrando sobre as velocidades, e denotada como $n_\alpha(\mathbf{x}, t)$,

$$n_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{v} n_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t),$$

de modo que é frequente o uso de um símbolo diferente para indicar a densidade média, como \bar{n}_α , por exemplo. Entretanto, como trataremos apenas de meios homogêneos neste trabalho, sem uso do conceito de densidade como função da posição, usaremos por simplicidade o símbolo n_α para a densidade média, sem risco de confusão.

Para a média envolvendo duas partículas, pode-se mostrar [1]:

$$\langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t) \rangle = n_\alpha n_\beta f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) + \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') f_\alpha(\mathbf{X}, t). \quad (2.12)$$

Além disso, se a interação entre as partículas é nula, teremos $\langle N_\alpha N_\beta \rangle \rightarrow \langle N_\alpha \rangle \langle N_\beta \rangle = n_\alpha n_\beta f_\alpha f_\beta$. Os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} macroscópicos são determinados através das médias das equações de Maxwell microscópicas (2.2). Assim, quando feitas, teremos os campos em função da distribuição de uma partícula f_α :

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}^M \rangle = \int F_N \mathbf{E}^M d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T},$$

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}^M \rangle = \int F_N \mathbf{B}^M d^6 \mathbf{X}_{\alpha 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\alpha N_\alpha^T} d^6 \mathbf{X}_{\beta 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\beta N_\beta^T} d^6 \mathbf{X}_{\gamma 1} \dots d^6 \mathbf{X}_{\gamma N_\gamma^T}.$$

O sistema físico é totalmente descrito pela evolução temporal da função de distribuição completa, F_N , e essa equação é chamada de *equação de Liouville*. A determinação de todas as condições de contorno iniciais para a função distribuição completa é muito difícil de ser obtida. Por isso, faremos uso de distribuições reduzidas, com as quais ao mesmo tempo é viável obter informações relevantes do sistema e é possível a determinação das condições iniciais. Para obter uma equação para a distribuição reduzida de uma partícula começamos por tomar a média espacial de (2.5) e juntamente com a definição obtida em (2.11) teremos

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{n_\alpha m_\alpha} \left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (2.13)$$

Embora não seja explícita a correlação entre as partículas na equação acima, ela existe. Para melhor visualizarmos, utilizamos o exemplo mais simples: a aproximação de Coulomb. Nesta supomos que efeitos retardados e contribuições do campo magnético, $\mathbf{B}^M = 0$, são negligenciados. Sendo assim, podemos escrever o campo elétrico em função de um potencial escalar $\mathbf{E}^M = -\nabla \phi^M$, e juntamente com a equação de Poisson obtemos:

$$\phi^M(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int \frac{N_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'. \quad (2.14)$$

Reescrevemos a equação (2.13) como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \\ & - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right) \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial n_\alpha \mathbf{v}} \right\rangle - \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para partículas não interagentes, pode-se mostrar que o lado direito dessa equação é nulo. A partir das equações (2.14) e (2.15) pode-se mostrar que ela não é fechada para f_α , pois envolve a média do produto $\langle N_\alpha N_\beta \rangle$ e, portanto, depende da distribuição de duas partículas. Deve-se determinar então uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha\beta}$, e ao fazer isso, mostra-se que essa equação também não é independente, porque nela aparece a distribuição de três partículas $f_{\alpha\beta\gamma}$. Genericamente, pode-se mostrar que na equação de evolução temporal para a distribuição de $n - 1$ partículas ($n < N$) aparecerá a distribuição para n partículas, formando uma hierarquia de equações, denominada de hierarquia BBGKY (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon). Uma maneira conveniente de expressar as distribuições de mais de uma partícula é em termos de produtos de funções distribuição de partícula única. Por exemplo, as distribuições de duas e três partículas podem ser escritas como:

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) = f_\alpha(\mathbf{X}, t)f_\beta(\mathbf{X}', t) + g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'', t) &= f_\alpha(\mathbf{X}, t)f_\beta(\mathbf{X}', t)f_\gamma(\mathbf{X}'', t) \\ &+ f_\alpha(\mathbf{X}, t)g_{\beta\gamma}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'', t) \\ &+ f_\beta(\mathbf{X}', t)g_{\alpha\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'', t) \\ &+ f_\gamma(\mathbf{X}'', t)g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) \\ &+ g_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'', t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta\gamma}$ são, respectivamente, as correlações de ordem dois e três [1, 2, 3, 4]. Em um sistema no qual as partículas são independentes, as correlações de qualquer ordem serão nulas.

Assim como uma descrição estatística com a função de distribuição completa F_N é inviável, determinar todas as correlações de um sistema com muitas partículas também o é. Entretanto, aproximações podem ser feitas para as correlações, gerando assim, um conjunto fechado de equações para as distribuições reduzidas. Considerando um gás neutro e rarefeito, por exemplo, o comprimento r_0 , parâmetro associado às interações entre partículas, é muito menor que a distância média entre elas, dada por $n^{-1/3}$, no qual n é a densidade de partículas. Sendo assim, é razoável supor que as correlações nesse caso são da ordem de $(nr_0^3)^{k-1}$, onde k é a ordem da correlação (para partículas completamente independentes, $nr_0^3 = 0$ ou $g_{\alpha\beta} = 0$). Dessa maneira, teríamos $g_{\alpha\beta} \sim nr_0^3$ e $g_{\alpha\beta\gamma} \sim (nr_0^3)^2$, o que nos mostra que (considerando $nr_0^3 \ll 1$) a correlação de terceira ordem $g_{\alpha\beta\gamma}$ será muito menor que a de segunda ordem $g_{\alpha\beta}$, que por sua vez será muito menor que o produto das distribuições independentes $f_\alpha f_\beta$.

O parâmetro que estamos interessados nesse caso é $g = 1/n\lambda_D^3 \ll 1$ e pode-se mostrar que as correlações do tipo $g_{\alpha\beta}$ são pequenas quando comparadas com $f_\alpha f_\beta$ no caso de $g \ll 1$ [1]. E a razão disso é que a distribuição conjunta $f_{\alpha\beta}$ em um volume pequeno V , bem maior do que o volume ocupado por uma partícula ($\sim n^{-1}$) mas bem menor do que o volume de uma esfera de Debye, é determinada por muitas partículas no exterior de V , e não pela separação entre as partículas, de modo que a distribuição $f_{\alpha\beta}$ para uma boa aproximação é aquela que independe da interação entre duas partículas $f_{\alpha\beta} \approx f_\alpha f_\beta$. Essa aproximação torna-se exata para $g \rightarrow 0$. Então, podemos fechar a cadeia de equações desprezando as correlações de mais alta ordem. Na próxima sessão será apresentada a equação de *Vlasov*, que é a equação cinética de ordem zero, na qual todas as correlações são desprezadas.

2.2 Equação de Vlasov e suas Características

A descrição mais simples da cadeia de equações estatísticas é aquela que despreza todas as correlações. Dessa forma, a equação que descreve a evolução temporal das partículas, denominada de equação de Vlasov, é:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (2.18)$$

onde $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ e $\nabla_{\mathbf{v}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$.

Podemos ainda adicionar um termo à equação acima referente às colisões entre as partículas. Ao perturbarmos o estado de equilíbrio de um plasma (injetando um feixe de partículas, por exemplo), este leva um tempo característico até que volte novamente ao equilíbrio (mediante colisões), esse parâmetro é chamado de *tempo de relaxação*. Se o plasma for suficientemente "quente" e rarefeito, o tempo de relaxação será maior do que o tempo característico de muitos fenômenos ondulatórios que podem ocorrer no plasma, e só é interessante levá-lo em conta no caso de estudo de fenômenos de longa duração. Como estamos interessados em fenômenos ondulatórios cujos períodos são bem menores do que o intervalo de tempo típico entre colisões, podemos desconsiderar o termo colisional.

A (2.18), também chamada *Equação de Boltzmann não colisional*, apresenta algumas propriedades interessantes, as quais serão discutidas a seguir.

2.2.1 Conservação do Número de Partículas

Característica também das equações exatas, a equação de Vlasov conserva o número total de partículas, em outras palavras, a variação temporal do número total de partículas é nula. Multiplicando a equação (2.18) por n_α e integrando sobre todo o intervalo temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n_\alpha f_\alpha d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int n_\alpha \left[-\mathbf{v} \cdot \nabla - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_\alpha d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (2.19)$$

Sabendo que a função distribuição deve se anular nos limites de integração, temos do primeiro termo

$$\int \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \sum_i \int v_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i dx_j dx_k d\mathbf{v} = 0.$$

Do segundo, uma vez que o campo elétrico \mathbf{E} é função apenas de \mathbf{x} e t , mas não de \mathbf{v} , e usando novamente a propriedade da f_α nos limites

$$\int \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \sum_i \int E_i \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_i} dv_i dv_j dv_k d\mathbf{x} = 0.$$

De maneira similar, no terceiro termo temos

$$\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \int v_i B_j \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k} dv_i dv_j dv_k d\mathbf{x} = 0.$$

Assim, temos que a equação (2.19) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0.$$

E, portanto, conclui-se que o número de partículas é constante.

2.2.2 Probabilidades Permanecem Positivas

Se no instante inicial a função distribuição de uma partícula é positiva, $f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t = 0) > 0$, então para qualquer instante posterior ela também o será, $f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) > 0$. Para mostrar isso vamos pensar caso a conclusão não fosse essa: em um certo instante t_0 a função f_{α} se tornaria negativa para algum ponto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ do espaço de fases. Como $f_{\alpha} > 0$ para qualquer outro ponto (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , então temos que os termos $\left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0}$ e $\left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0}$ são nulos. Pela equação de Vlasov (2.18), nesse caso teríamos $\left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0} = 0$, o que significa que f_{α} não pode se tornar negativa, pois isso exigiria que $\left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0} < 0$.

2.2.3 Admite Múltiplas Soluções

Em contraste com as equações exatas que admitem apenas uma solução de equilíbrio, a equação de Vlasov admite inúmeras soluções. Os chamados estados de metaequilíbrio são aqueles estados possíveis apenas para escalas de tempo muito menores do que o tempo entre colisões. A solução $f_{\alpha 0}$ deve satisfazer a condição $\partial f_{\alpha 0} / \partial t = 0$:

$$\left[\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0. \quad (2.20)$$

Tendo os campos elétrico e magnético \mathbf{E} e \mathbf{B} podemos escrever as seguintes equações de movimento para uma dada partícula:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \mathbf{v}' \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}}{dt'} \right), \quad (2.21)$$

cujas soluções são $\mathbf{x}'(t)$ e $\mathbf{v}'(t)$. Dentre a família de soluções escolhemos aquela que satisfaz a condição $(\mathbf{x}', \mathbf{v}') = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ no instante $t' = t$. Se as quantidades $a'(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ e $b'(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ forem constantes de movimento dessa partícula, elas devem satisfazer

$$\begin{aligned} \frac{da'}{dt'} &= \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{v}'} = 0, \\ \frac{db'}{dt'} &= \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{v}'} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Supondo uma função arbitrária $f = f(a', b')$ e levando em conta as equações (2.21) e as condições (2.22), vemos que esta deverá satisfazer a equação de Vlasov no equilíbrio

$$\begin{aligned}
& \left[\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f(a', b') = \\
& \mathbf{v}' \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial f}{\partial b'} \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{x}'} \right] + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{v}'} + \frac{\partial f}{\partial b'} \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{v}'} \right] = \\
& \frac{\partial f}{\partial a'} \left[\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \frac{\partial a'}{\partial \mathbf{v}'} \right] + \frac{\partial f}{\partial b'} \left[\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \frac{\partial b'}{\partial \mathbf{v}'} \right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Como $(\mathbf{x}', \mathbf{v}') = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ para todo instante $t' = t$, temos que a função $f(a', b')$ satisfaz à condição de ser solução estacionária da equação de Vlasov. Em outras palavras, soluções que são funções de constantes de movimento assumem valores constantes ao longo de trajetórias reais no espaço de fase e, assim, satisfazem a equação de Vlasov.

2.2.4 Conservação da Entropia

Seja a definição usual de entropia

$$S = - \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \ln(f_{\alpha}) d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \tag{2.24}$$

Calculando a variação temporal da equação acima e utilizando as equações (2.18) e (2.19) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= - \sum_{\alpha} \int \left[\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \\
\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{n_{\alpha}} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int n_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \\
\frac{dS}{dt} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Ou seja, na aproximação que usa a equação de Vlasov, a entropia permanece constante.

Vamos agora supor sistemas em que a função distribuição pode ser decomposta em uma soma de uma função distribuição de ordem zero e de uma perturbação,

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0}(t) + f_{\alpha 1}(t),$$

sendo que $f_{\alpha 0}$ é constante ou varia lentamente no tempo em relação a $f_{\alpha 1}$ [1, 14]. Para tais sistemas, é conveniente definir a entropia da seguinte maneira

$$S^* = - \int f_{\alpha 0}(t) \ln[f_{\alpha 0}(t)] d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

Com essa nova definição, levando-se em conta a evolução da $f_{\alpha 0}$ sob efeito das perturbações, pode-se mostrar que a entropia não mais é constante e pode ser usada para mensurar o crescimento da desordem do sistema [1].

2.3 Sistema de Equações Vlasov-Maxwell

Juntamente com as equações de Maxwell formamos o seguinte sistema:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0, \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}, \quad (2.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v}, \quad (2.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.30)$$

que é denominado *sistema de Vlasov-Maxwell*.

A densidade de carga do plasma ρ e a densidade da corrente \mathbf{J} são dadas pelas seguintes expressões:

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

e

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

nas quais a soma em α leva em conta as diferentes espécies de partículas carregadas, com $\alpha = i$, para íons e $\alpha = e$, para elétrons. Os fenômenos descritos por esse sistema (estados estacionários do plasma, ondas em plasmas, instabilidades,...) ocorrem em escalas de tempos muito menores que o tempo típico entre colisões ($\tau_{coletivo} \ll \tau_{colisional}$) [1, 4].

As expressões (2.26) a (2.30) formam um conjunto completo e auto-consistente de equações, no qual fica explícito que, embora não haja colisões entre as partículas, elas interagem entre si através de campos eletromagnéticos gerados e modificados internamente não só pelo seu próprio deslocamento e pelo deslocamento de outras partículas carregadas através do plasma, mas também apenas pela presença de carga [3].

2.4 Linearização do Sistema Vlasov-Maxwell

O conjunto de equações Vlasov-Maxwell é não-linear, devido aos produtos dos campos e das distribuições e, conseqüentemente, difícil de solucionar. No entanto, muitos fenômenos podem ser caracterizados como pequenas perturbações da solução de equilíbrio de Vlasov e podem ser tratados pelo método da *linearização*. As equações geradas são muito mais simples de resolver e formam a base de muitos estudos teóricos que tratam de variados fenômenos em plasmas, como aqueles relacionados com ondas e instabilidades [1, 2, 4].

Escrevemos os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} e a função distribuição f_{α} como uma soma de seus valores no equilíbrio mais uma perturbação,

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \epsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde $\epsilon \ll 1$ é um parâmetro utilizado para indicar que a perturbação tem módulo bem menor do que a parte não perturbada, caso em que a teoria linear pode ser utilizada como uma boa aproximação. O índice "0" indica o valor da grandeza no equilíbrio e o "1", da perturbação. Inserindo as quantidades (2.31) no sistema Vlasov-Maxwell (2.26)-(2.30), desprezando termos de ordem ϵ^2 e separando o sistema de equações de acordo com os termos de ordem ϵ^0 e ϵ^1 obtemos respectivamente,

ϵ^0 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{\alpha 0} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} &= 0, \\
 \nabla \cdot \mathbf{E}_0 &= 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v}, \\
 \nabla \times \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v}, \\
 \nabla \times \mathbf{E}_0 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B}_0 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

ϵ^1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 1}, \\
 = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v}, \\
 \nabla \times \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 1} d\mathbf{v}, \\
 \nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B}_1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Um ponto importante a salientar é que o conjunto de equações obtido serve para descrever perturbações de pequena amplitude que ocorrem no plasma, com tempos característicos bem menores do que tempo médio entre colisões. Na próxima subseção será explorada como exemplo a solução mais simples do conjunto de equações para as perturbações: o caso eletrostático.

2.4.1 Solução da Equação de Vlasov Linearizada para o Caso Eletrostático

Seja um plasma espacialmente homogêneo e não magnetizado, por simplicidade. Se, no instante $t = 0$, uma pequena quantidade de carga for deslocada, a perturbação inicial pode ser descrita como

$$f(t = 0) = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z) + \epsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t = 0).$$

E, considerando que o campo elétrico no equilíbrio é nulo, teremos

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \epsilon \mathbf{E}_1 = \epsilon \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \mathbf{B}_1 = 0.$$

Naturalmente as condições acima nos levam a

$$\rho_0 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{J}_0 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0.$$

Sabemos que no caso puramente eletrostático, $\mathbf{B}_1 = 0$, o campo elétrico está diretamente relacionado à variação espacial do potencial elétrico, com seu vetor sendo oposto à direção de crescimento do potencial. Ou seja, o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial:

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \Phi_1,$$

e também temos que

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0.$$

A função de distribuição de equilíbrio $f_{\alpha 0}$ é admitida como constante no tempo, então o termo que leva sua derivada temporal é nulo. E, como é pressuposto o plasma homogêneo, o termo referente à sua derivada espacial, dado por $\nabla f_{\alpha 0}$, também o é. Feita a aproximação eletrostática, o sistema de equações lineares é reduzido a

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = 0, \quad (2.34)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v}. \quad (2.35)$$

Para resolver o sistema de equações Vlasov-Maxwell linearizado, vamos escrever as quantidades $f_{\alpha 1}$ e Φ_1 em termos de suas transformadas de Fourier no espaço e de Laplace no tempo

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_{\alpha 1} dt, \\ \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, p) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \Phi_1 dt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

É importante notar que a transformada de Laplace só estará definida para $\text{Re}(p) \geq p_0$, no qual p_0 é suficientemente grande e garante a convergência da integral. A vantagem dessa representação é que a propriedade de derivadas da transformada de Fourier nos permite substituir as derivadas espaciais, ∇ , e temporais, $\frac{\partial}{\partial t}$, por $i\mathbf{k}$ e $-i\omega$ respectivamente. Uma vez conhecida $\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}$, podemos inverter as integrais (2.36) e assim determinar $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ e $\Phi_1(\mathbf{x}, t)$. As transformadas inversas são definidas como

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} dp, \\ \Phi_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} dp. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aplicando as transformadas de Fourier e de Laplace nas equações (2.34) e (2.35) e lembrando que $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$ temos o seguinte sistema de equações:

$$(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}} = f_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t = 0) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}(i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}f_{\alpha 0})\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}, \quad (2.38)$$

$$k^2\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha}q_{\alpha} \int \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}d\mathbf{v}. \quad (2.39)$$

Substituindo (2.38) em (2.39) e, eliminando $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$ obtemos uma expressão para $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$:

$$k^2\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha}q_{\alpha} \int \frac{f_{\alpha\mathbf{k}}(t=0)d\mathbf{v}}{p+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}}{1 + 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}f_{\alpha 0}d\mathbf{v}}{ip-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}}, \quad (2.40)$$

onde temos ainda que $\text{Re}(p) \geq p_0$. A fim de simplificar a apresentação desta equação para $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$, vamos introduzir a componente da velocidade paralela a \mathbf{k} , que vamos denotar como u ,

$$u = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{k}|}.$$

Usamos a notação u ao invés de u_{\parallel} , para não sobrecarregar a notação. Essa quantidade, nesse contexto, não deve ser confundida com o módulo do vetor velocidade.

Sendo assim, temos

$$F_{\alpha 0}(u) \equiv \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v})\delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right)d\mathbf{v},$$

$$\tilde{F}_{\alpha\mathbf{k}} \equiv \int \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}\delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right)d\mathbf{v}.$$

Definimos também a frequência angular do plasma para partículas do tipo α como

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_{\alpha}q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}.$$

De modo que podemos definir a função dielétrica $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{k}, ip)$ de um plasma para ondas eletrostáticas de frequência $\omega = ip$:

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0}/\partial u}{u - ip/|\mathbf{k}|} du. \quad (2.41)$$

Utilizando as definições recém feitas, substituindo (2.41) em (2.40), temos as seguintes expressões para $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$ e para $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$ respectivamente:

$$\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \frac{1}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left[f_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t = 0) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}}(i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}f_{\alpha 0})\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} \right], \quad (2.42)$$

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{-i}{|k^3| |\mathbf{D}(\mathbf{k}, ip)} \sum_{\alpha} 4\pi n_{\alpha}q_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(u, t = 0)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du. \quad (2.43)$$

Para resolver este sistema, precisamos determinar as transformadas inversas, e com isso, começamos pela expressão de Φ_1 , pois a dependência temporal da transformada de Fourier do potencial que aparece em $f_{\alpha 1}$ é consequência do mesmo. Então, seja a transformada inversa de Laplace definida em (2.37) para o potencial,

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-\infty}^{p_0+\infty} \frac{e^{pt} dt}{D(\mathbf{k}, ip)} 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}}{k^2} \int \frac{F_{\alpha \mathbf{k}}(u, t=0)}{(p+i|k|u)} du. \quad (2.44)$$

Tomamos um valor de p_0 com $p > p_0$ de modo a garantir a convergência das integrais que definem as transformações de Laplace, de tal forma que todas as singularidades de $\Phi_{\mathbf{k}}(p)$ devem estar à esquerda do contorno de integração. De maneira geral, não é possível calcular analiticamente estas integrais. No entanto, é possível determinar soluções para tempos muito distantes da perturbação inicial, fazendo uma deformação no contorno de integração. Com esse procedimento, o comportamento assintótico do sistema é determinado pelos modos normais de oscilação do plasma, e não pelo resultado obtido após o estado de transição ocasionado pela perturbação inicial.

2.4.2 Consequências do Tratamento Linear: *Landau Damping*

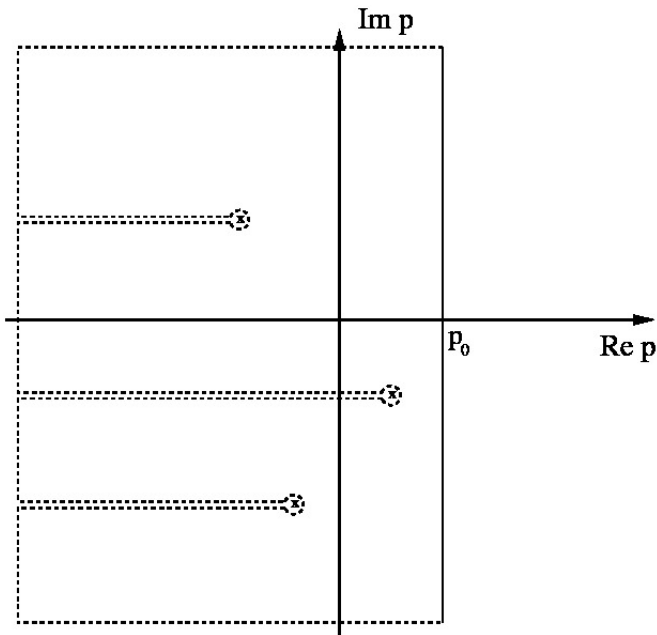
O procedimento para obtenção de uma solução assintótica da equação (2.44) pode ser brevemente descrito da forma seguinte. O contorno é levado para o lado de $\text{Re } p < 0$, mas sendo deformado de modo a não passar sobre os polos de $\Phi_{\mathbf{k}}(p)$, conforme mostra a figura 2.1. Com a mudança dos valores de p decorrente da deformação do contorno de integração, ocorre deslocamento também dos polos que aparecem nas integrais na variável velocidade, que aparecem na equação (2.44), explicitamente e como parte da expressão de $D(\mathbf{k}, ip)$. O contorno dessas integrais deve ser também deformado e deve ficar sempre abaixo dos polos, conforme mostrado na Figura 2.2. Esse contorno é chamado de *contorno de Landau*, após Landau, em 1946, ter solucionado o sistema de Vlasov-Maxwell como um problema de valor inicial, desenvolvendo tal técnica [15].

Com a mudança do contorno de integração no plano p , que é levado para o lado de $\text{Re}(p) < 0$ mas mantido sempre à direita dos pólos do integrando, resulta um caminho de integração que contorna todas as singularidades do integrando, que são os zeros da função $D(\mathbf{k}, ip)$. Sendo R_j o resíduo nos pólos do integrando, com $R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p)$, e fazendo a integração ao longo de todo caminho, ficamos com as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(t) = & \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+p_0}^{-i\infty-\sigma} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{+i\infty-\sigma}^{+i\infty+p_0} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde $D[\mathbf{k}, ip_j(\mathbf{k})] = 0$. Na equação (2.45), o segundo e o quarto termos são pequenos, se a $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p)$ for a zero rapidamente com $|p| \rightarrow \infty$ [1].

Já o terceiro, torna-se exponencialmente menor que os termos referentes às contribuições dos pólos para $t \rightarrow \infty$. No caso de termos $\text{Re}(p_j) < 0$, ou seja, no caso dos pólos estarem todos à esquerda do eixo, então todas as contribuições para $\Phi_{\mathbf{k}}$ são amortecidas. No entanto, se tivermos polos localizados à direita do eixo, $\text{Re}(p_j) > 0$, então teremos o surgimento de


 Figura 2.1: Contorno de integração no plano de p complexo.

instabilidades. Assim a solução assintótica para a equação de Vlasov é dada por,

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = \sum_{j=1}^N R_j e^{p_j(\mathbf{k})t}, \quad (2.46)$$

onde p_j são as singularidades de $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$, em número de N .

Podemos escrever de uma maneira mais familiar, em termos de uma frequência dividida em parte real e imaginária, definida por $p_j = -i\omega_j = -i\omega_{rj} + i\omega_{ij}$. E a solução em termos da frequência

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = \sum_{j=1}^N R_j e^{i(-\omega_{rj} + \omega_{ij})t}.$$

Assim, as singularidades que têm $\omega_{ij} < 0$, representam oscilações amortecidas, já as que têm $\omega_{ij} > 0$, oscilações que são amplificadas. Em outras palavras, o comportamento assintótico das perturbações fica determinado pelos pontos nos quais $D(\mathbf{k}, \omega)$ é zero.

A equação resultante

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_L \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial \mathbf{u}}{\mathbf{u} - \omega / |\mathbf{k}|} d\mathbf{u} = 0, \quad (2.47)$$

é chamada de *relação de dispersão do plasma*, pois fornece uma expressão para a frequência de oscilação do plasma ω em função do número de onda k característico. É importante notar que tal relação de dispersão só existe para tempos inferiores ao tempo médio entre colisões. O índice L no limite de integração representa o caminho de integração no plano complexo, contorno de Landau, mencionado anteriormente.

O sistema mais simples que podemos considerar é ondas de alta frequência em um plasma livre de campos elétrico e magnético e em equilíbrio termodinâmico. Como vamos considerar oscilações de alta frequência e velocidade de fase muito maior que a velocidade térmica das

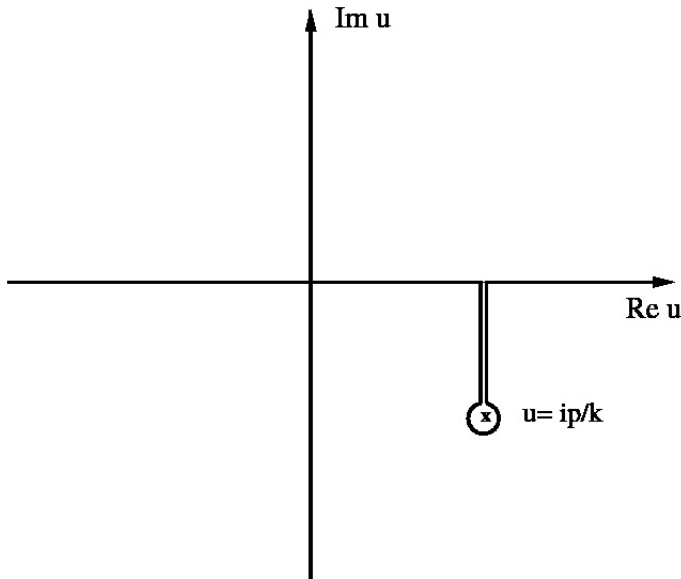


Figura 2.2: Contorno de Landau

partículas do plasma, isto é, $\omega/k \gg v_{\text{térmica}}$, onde $v_{\text{térmica}} = \sqrt{2T/m}$, podemos considerar os íons como estando em repouso. Para os elétrons, supomos uma função distribuição do tipo maxwelliana

$$F_{e0} = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{m_e v^2}{2T_e} \right)}, \quad (2.48)$$

onde T_e , n_e e m_e são a temperatura, na qual foi incorporada a constante de Boltzmann e está em unidades de energia, a densidade de equilíbrio e a massa dos elétrons, e a função está normalizada à unidade. Temos também que a velocidade está separada em componente paralela u e componente perpendicular v_{\perp} ao vetor de onda \mathbf{k} de tal forma que $v^2 = u^2 + v_{\perp}^2$.

Substituindo a expressão para a função distribuição inicial (2.48) na relação de dispersão (2.47) e introduzindo as variáveis $z = \omega/\sqrt{2}ku_e$, $y = u/\sqrt{2}u_e$ e $u_e = \sqrt{T_e/m_e}$ teremos

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_L \frac{e^{-y^2}}{z - y} dy \right] = 0. \quad (2.49)$$

Podemos reescrever a equação de dispersão (2.49) em termos da chamada função de dispersão do plasma,

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L \frac{e^{-y^2}}{y - z} dy.$$

Essa função foi bastante estudada por *Fried & Conte*, em 1961, e tem propriedades bem conhecidas e tabeladas [16]. Assim teremos

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} [1 + zZ(z)] = 0.$$

Essa relação de dispersão pode ser resolvida de forma numérica. No entanto, para certos casos, podemos fazer uso de algumas propriedades da função $Z(z)$ e assim obter um resultado analítico. Como estamos considerando ondas de altas frequências, com $\omega/k \gg u_e$, é

razoável supor $|z| \gg 1$, e, uma vez que podemos escrever a variável z em parte real e imaginária $z = x + iy$, e que $|\text{Im}(z)| \ll 1$, a função $Z(z)$ pode ser escrita de forma analítica [1]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L \frac{e^{-z^2}}{y-z} dy = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \frac{15}{8z^6} + \dots \right) + i\sqrt{\pi}e^{-z^2}.$$

Considerando apenas os três primeiros termos da expansão temos

$$D(\mathbf{k}, \omega) \simeq 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} \left[-\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{4z^4} + iz\sqrt{\pi}e^{-z^2} \right] = 0. \quad (2.50)$$

Separando a relação de dispersão em parte real D_r e parte real D_i , e se $|\omega_i| \ll |\omega_r|$, então podemos expandir a relação de dispersão em torno da frequência ω_r

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega) &\simeq D(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \left. \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} \\ &= D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r) + \omega_i \left[i \left. \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} - \left. \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Da equação (2.51) temos que a parte real da relação de dispersão é

$$D_r(\mathbf{k}, \omega)|_{\omega=\omega_r} - \omega_i \left. \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} = 0,$$

e como $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ podemos aproximar a parte real da relação de dispersão na seguinte forma

$$D_r(\mathbf{k}, \omega)|_{\omega=\omega_r} \simeq 0.$$

E assim, da equação (2.50) e, utilizando a definição de z feita anteriormente, temos

$$\omega^4 - \omega_{pe}^2 \omega^2 - 3\omega_{pe}^2 k^2 u_e^2 = 0,$$

equação que pode ser facilmente resolvida,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + 12k^2 u_e^2 / \omega_{pe}^2} \right], \\ \omega^2 &\simeq \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[1 \pm \left(1 + 6 \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

O último passo é justificado porque $k^2 u_e^2 / \omega_{pe}^2 \ll 1$. São obtidas duas soluções matemáticas para ω_r , no entanto, a raiz negativa de (2.52) fornece uma frequência imaginária, o que não nos interessa. A raiz positiva resulta em

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right).$$

Essa raiz é consistente, uma vez que já é sabido da teoria de fluidos que para tais condições a frequência real ω_r é bem próxima da frequência natural do plasma ω_{pe} , logo a condição $k^2 u_e^2 / \omega_{pe}^2 \ll 1$ é condizente com a aproximação inicial $(\omega/k) \gg u_e$. Portanto, para as

ondas eletrostáticas de alta frequência, também conhecidas como *ondas de Langmuir*, podemos escrever

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + 3 \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \simeq \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 u_e^2}{\omega_{pe}^2} \right).$$

Considerando a parte imaginária da equação (2.51), obtemos

$$\omega_i = - \frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega) / \partial \omega|_{\omega_r}},$$

e com o uso da expressão (2.50) chegamos à seguinte expressão para a parte imaginária da frequência angular da onda,

$$\omega_i = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3 u_e^3} e^{-\left(\frac{\omega^2}{2k^2 u_e^2}\right)}. \quad (2.53)$$

Em termos do comprimento de Debye λ_{De} , as frequências, real e imaginária, ficam respectivamente

$$\begin{aligned} \omega_r &= \omega_{pe} \left(1 + k^2 \lambda_{De}^2 \right)^{1/2}, \\ \omega_i &\simeq - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{De}^3} e^{-\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2}\right)}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde em ω_i utilizamos o fato de que podemos substituir $\omega_r \simeq \omega_{pe}$ sem perda de precisão, exceto no argumento da exponencial, pois esse é mais sensível a pequenas diferenças. As equações obtidas (2.54) são válidas para oscilações de grandes comprimentos de onda $\lambda \gg \lambda_{De}$ e, como dito anteriormente, isso condiz com o fato de que assumimos que a velocidade de fase é bem acima da velocidade térmica.

O significado físico do amortecimento de Landau

O avanço teórico do amortecimento de ondas sem dissipação de energia por colisões é, talvez, o resultado mais surpreendente da pesquisa em física de plasmas até meados da primeira metade do século 20. O amortecimento de Landau é uma característica de plasmas não colisionais, mas também pode ter aplicação em outras áreas da física, como por exemplo na abordagem cinética para a formação de galáxias [17]. Estrelas podem ser consideradas como átomos que interagem gravitacionalmente em um plasma, em vez de interagirem via forças eletromagnéticas.

Instabilidades do gás das estrelas formam os braços em forma de espiral das galáxias, e esse processo é controlado pelo amortecimento de Landau [2].

O amortecimento não colisional das ondas de Langmuir é predito pela teoria de Vlasov, ao passo que está completamente fora de alcance da teoria de fluidos [1].

O amortecimento não colisional das ondas, e por consequência do potencial eletrostático associado, é um fenômeno de ressonância, proporcional à inclinação da função distribuição, entre os elétrons que se movem próximos à velocidade de fase do plasma. O amortecimento é caracterizado pela parte imaginária e negativa da frequência, cuja magnitude é pequena se comparada à parte real da frequência normal de oscilação do plasma (2.54).

Em distribuições nas quais a amplitude decresce com o aumento do módulo da velocidade, a exemplo das distribuições Maxwellianas, existem mais partículas com velocidades menores do que com velocidades maiores que a velocidade de fase das ondas no plasma. Portanto, há mais partículas que podem ser aceleradas pela onda do que freadas, o que significa mais partículas ganhando energia da onda do que perdendo, o que tem como consequência a diminuição da energia da onda.

De (2.54) observamos que o tempo do amortecimento de Landau $1/\omega_i$ é muito maior do que o tempo de uma oscilação $2\pi/\omega_{pe}$ para modos de oscilação com comprimentos de ondas bastante longos ($k\lambda_{De} \rightarrow 0$). À medida que consideremos ondas com comprimentos de onda menores, tendendo a aproximar-se do comprimento de onda de Debye λ_{De} , o amortecimento é acentuado, e a oscilação do plasma não pode mais ser considerada como um modo normal.

Como foi visto anteriormente, devido à derivada negativa, plasmas com distribuições Maxwellianas só podem dar origem a efeitos de amortecimento, o que elimina efeitos de instabilidades nesses sistemas. Entretanto, quando adicionamos um feixe de elétrons ao plasma, a função distribuição pode apresentar um pico na região de velocidades correspondente à velocidade do feixe, grande o suficiente para que exista uma região de derivada positiva, originando instabilidades. Pode-se dizer que nesse caso ocorre um efeito oposto ao amortecimento de Landau [4], pois há uma amplificação de ondas nessa região. O acompanhamento da variação da amplitude das ondas ao longo do tempo requer a inclusão de efeitos não-lineares, não pode ser tratado com o uso da aproximação linear do sistema Vlasov-Maxwell, e será tratado no próximo capítulo.

2.5 Contribuição dos Íons na Abordagem Linear

A fim de incluir os efeitos dos íons no sistema, vamos considerar novamente um plasma não magnetizado, com oscilações eletrostáticas e em equilíbrio termodinâmico. As características dessas ondas serão determinadas através dos zeros da função $D(\mathbf{k}, \omega)$ quando incluso o termo referente aos íons. Da equação (2.47) temos

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} [1 + z_e Z(z_e)] + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 u_i^2} [1 + z_i Z(z_i)] = 0, \quad (2.55)$$

onde o índice e refere-se aos elétrons e o i , aos íons. Considerando o caso em que tanto a temperatura dos elétrons quanto a dos íons tenham a mesma ordem de grandeza $T_e \simeq T_i$ e, uma vez que a massa de um elétron é muito menor que a de um íon, teremos que $u_i \ll u_e$ e consequentemente que $|z_i| \gg |z_e|$.

Supondo que $|z_e| \gg 1$, as expansões das funções $Z(z_\alpha)$, no qual $\alpha = e, i$, tomam a seguinte forma

$$Z(z_\alpha) \simeq i\sqrt{\pi}e^{-z_\alpha^2} - \frac{1}{z_\alpha} \left(1 - \frac{1}{2z_\alpha^2} - \frac{3}{4z_\alpha^4} \right),$$

$$[1 + z_\alpha Z(z_\alpha)] \simeq i\sqrt{\pi}e^{-z_\alpha^2} - \frac{1}{2z_\alpha^2} - \frac{3}{4z_\alpha^4}.$$

A relação de dispersão fica então dada por:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} \left[i\sqrt{\pi}e^{-z_e^2} - \frac{1}{2z_e^2} - \frac{3}{4z_e^4} \right] + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 u_i^2} \left[i\sqrt{\pi}e^{-z_i^2} - \frac{1}{2z_i^2} - \frac{3}{4z_i^4} \right] = 0. \quad (2.56)$$

E utilizando a condição de que $n_e \simeq n_i$, visto que $T_e \simeq T_i$, teremos

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi n_e q_e^2}{k^2 T_e} \left[i\sqrt{\pi} (z_e e^{-z_e^2} + z_i e^{-z_i^2}) - \frac{1}{2z_e^2} - \frac{3}{4z_e^4} - \frac{1}{2z_i^2} - \frac{3}{4z_i^4} \right] = 0. \quad (2.57)$$

Podemos concluir que a inclusão dos íons, para $|z_e| \gg 1$, resulta apenas em uma pequena correção na relação de dispersão e, portanto, da frequência.

Supondo agora que os elétrons possuem uma temperatura muito maior que os íons $T_e \gg T_i$, então podemos considerar ondas cuja frequência, a qual será solução da relação de dispersão, estará no seguinte intervalo

$$\sqrt{\frac{T_i}{m_i}} < \frac{\omega}{k} < \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}.$$

Podemos escrever então a expansão da função $Z(z_\alpha)$ para as duas populações [1]:

Para os elétrons

$|z_e| \ll 1$:

$$Z(z_e) \simeq i\sqrt{\pi} e^{-z_e^2} - 2z_e \left(1 - \frac{2z_e^2}{3} + \frac{4z_e^4}{15} \dots \right), \quad (2.58)$$

e para os íons:

$|z_i| \gg 1$:

$$Z(z_i) \simeq i\sqrt{\pi} e^{-z_i^2} - \frac{1}{z_i} \left(1 - \frac{1}{2z_i^2} - \frac{3}{4z_i^4} \dots \right). \quad (2.59)$$

Substituindo as relações (2.58) e (2.59) na relação de dispersão (2.55) teremos

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega) \simeq & 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} \left(i\sqrt{\pi} z_e e^{-z_e^2} + 1 - 2z_e^2 + \frac{4z_e^4}{3} \right) \\ & + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 u_i^2} \left(i\sqrt{\pi} z_i e^{-z_i^2} - \frac{1}{2z_i^2} - \frac{3}{4z_i^4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Como feito anteriormente em (2.51) podemos separar a relação de dispersão em parte real e parte imaginária, mas antes algumas considerações: sabendo que $\frac{\omega^2}{k^2 u_e^2} \ll 1$ e também que $\frac{\omega^2}{k^2 u_i^2} \gg 1$, é possível desprezar, na contribuição dos elétrons, os termos com ω^2 e ω^4 frente a 1, e, na dos íons, o termo envolvendo ω^4 frente ao termo com ω^2 . Com isso, para a parte real temos:

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) \simeq 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} = 0. \quad (2.61)$$

Considerando a densidade de equilíbrio $n_i = n_e$, resolvendo para ω_r e utilizando a definição do comprimento de Debye $\lambda_{De} = (T_e/8\pi n_e q_e^2)^{1/2}$ podemos escrever

$$\omega_r^2 = \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (2.62)$$

onde $C_s = (T_e/m_i)^{1/2}$ é chamada de *velocidade íon-acústica*. Para $k^2\lambda_{De}^2 \ll 1$ teremos $\omega_r/k = C_s$, ou seja, para o limite de grandes comprimentos de onda, a velocidade de fase das ondas íons-acústicas torna-se constante para qualquer comprimento de onda. Em contraste, as ondas de Langmuir, que vimos na seção anterior, tem a mesma frequência para qualquer comprimento de onda, na região de grandes comprimentos de onda.

Para a parte imaginária de $D(\mathbf{k}, \omega)$ temos:

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{\sqrt{2}u_e^3 k^3} \omega_r e^{-\left(\frac{\omega_r^2}{2k^2 u_e^2}\right)} + \sqrt{\pi} \frac{\omega_{pi}^2}{\sqrt{2}u_i^3 k^3} \omega_r e^{-\left(\frac{\omega_r^2}{2k^2 u_i^2}\right)}. \quad (2.63)$$

E fazendo uso da relação para ω_i , determinada anteriormente em (2.53), obtemos a seguinte frequência

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{|\omega_r|}{(1 + k^2\lambda_{De}^2)^{3/2}} \left[\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} e^{-\left(\frac{T_e/T_i}{2(1+k^2\lambda_{De}^2)}\right)} + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right]. \quad (2.64)$$

É importante observar que as ondas íon-acústicas são também amortecidas e, a menos que $|\omega_i/\omega_r| \ll 1$, tais ondas não podem ser consideradas modos normais de oscilação. Olhando novamente para o intervalo de frequências no qual ω/k faz parte, é revelado que $|\omega_r| \gg |\omega_i|$ é equivalente à condição de que os elétrons são mais quentes que os íons, logo, para a existência das ondas íon-acústicas é necessário que $T_e \gg T_i$.

Outra propriedade interessante de ser observada é a respeito do amortecimento. O termo envolvendo o amortecimento de Landau pelos elétrons, a saber o termo com $\sqrt{m_e/m_i}$, é sempre pequeno para as ondas íon-acústicas. Isso se deve ao fato de que embora muitos elétrons tenham a mesma velocidade que essas ondas, a declividade da função distribuição dos elétrons é pequena. Assim, quase o mesmo número de elétrons possuem velocidades além e aquém da velocidade da onda. E, uma vez que a condição $T_e \gg T_i$ força para que a velocidade das ondas íon-acústicas supere a velocidade termal dos íons, é pequena a população de íons para amortecer tais ondas de baixa frequência [1].

Capítulo 3

Teoria Quase-Linear

Teorias que são baseadas em modelos lineares tem grande vantagem, pois contam com o princípio da superposição: uma poderosa ferramenta que, em conjunto com autovalores e autovetores, fornecem as bases para que se forme um sistema auto consistente de equações, descrevendo inúmeros fenômenos. Entretanto, existem muitos outros fenômenos, igualmente importantes, nos quais esse princípio é quebrado parcial ou totalmente. A quebra parcial ou total desse princípio significa que modos normais com diferentes valores próprios já não são mais ortogonais entre si e começam, portanto, a interagir uns com os outros. Tais interações resultam em termos não lineares no sistema de equações que descrevem o sistema, ou em outras palavras, em termos que envolvem o produto de variáveis dependentes [18].

A gama de efeitos não lineares é tão grande que uma classificação se faz necessária. Uma maneira de categorizar é conforme se a não linearidade é forte ou fraca. Em situações nas quais os efeitos não lineares são demasiados fracos, é razoável supor a teoria linear como primeira aproximação e a partir dela construir um modelo não linear para o sistema, como por exemplo, adicionando alguma perturbação de baixa amplitude. Já para os efeitos mais fortes, a teoria linear falha completamente e o comportamento não linear deve ser incorporado à formulação diretamente.

Este capítulo tratará de como ondas em plasmas podem afetar a função distribuição de velocidades das partículas na abordagem da teoria quase-linear. A formulação a ser apresentada abordará exemplos relativamente simples, visando dar um caráter didático e auto-contido ao presente texto, resumindo procedimentos que podem ser encontrados em livros texto bem conhecidos, como as Refs. [1], [19] e [14].

3.1 Sistema de Equações Vlasov-Maxwell na Aproximação Quase-Linear

Na aproximação linear supomos que tanto as funções distribuição quanto os campos são compostos por uma contribuição de equilíbrio e uma perturbação de pequena amplitude. Consideramos também que as contribuições de ordem zero são independentes do tempo e, a partir das equações para as perturbações, as quais são de ordem um, obtemos a relação de dispersão (2.47). Por exemplo, supondo oscilações eletrostáticas e considerando a distribuição

de equilíbrio do tipo Maxwelliana, obtivemos a parte real e imaginária da frequência das ondas de Langmuir, conforme equações (2.54).

A teoria em plasma que leva em conta os efeitos das oscilações na parte não oscilante da função distribuição, mas ainda assume a validade do princípio da superposição, é chamada de teoria quase-linear e esse tipo de aproximação para estudar oscilações em plasma é chamada de aproximação quasi-linear. Quando obtivemos a aproximação linear da equação de Vlasov, supusemos que a função de equilíbrio, $f_{\alpha 0}$, era independente do tempo. Agora na aproximação quase-linear, vamos admitir que a $f_{\alpha 0}$ possa variar com o tempo, embora de forma bem mais lenta que a variação das perturbações, e também que $|f_{\alpha 1}| \ll f_{\alpha 0}$.

Seja um plasma não magnetizado. Supomos uma pequena perturbação na distribuição e no campo elétrico do plasma

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1.$$

Partimos da equação de Vlasov para o caso eletrostático para partículas do tipo α

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = 0. \quad (3.2)$$

O campo elétrico \mathbf{E} pode ser obtido através da Lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.3)$$

Para obter as equações para a evolução temporal das quantidades de ordem zero e de ordem um, vamos introduzir médias espaciais das quantidades de interesse. A média espacial da função de distribuição de velocidades é expressa da seguinte forma:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) \rangle + \langle f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle, \quad (3.4)$$

onde a média de f_{α} é dada por

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}. \quad (3.5)$$

As flutuações relacionadas a $f_{\alpha 1}$ são aleatórias, sendo assim, sua média é nula e, conseqüentemente, a média da função de distribuição será a própria função de equilíbrio:

$$\langle f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t). \quad (3.6)$$

O termo de primeira ordem na expressão do potencial elétrico tende a zero nas extremidades, então a média espacial do campo elétrico de primeira ordem também será nula:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = -\frac{1}{V} \int \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = 0. \quad (3.7)$$

A média espacial da equação de Vlasov é dada pela seguinte equação

$$\frac{\partial \langle f_\alpha \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \langle f_\alpha \rangle}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (3.8)$$

Estamos considerando $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$, assim o campo elétrico terá apenas a contribuição de ordem um e será denotado como \mathbf{E}_1 . Substituindo (3.1) ficamos com:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}) \right\rangle + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\langle \mathbf{E}_1 \rangle \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \left\langle \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right] = 0. \quad (3.9)$$

Temos que o segundo termo é anulado, pois tanto a derivada espacial de $f_{\alpha 0}$ quanto a média da derivada de $f_{\alpha 1}$ são zeros. No terceiro, a exemplo de $\langle f_{\alpha 1} \rangle$, a média espacial de \mathbf{E}_1 também vai a zero e obtemos, portanto, uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (3.10)$$

A equação (3.10) pode ser substituída no termo referente à derivada temporal de $f_{\alpha 0}$ na equação (3.2), resultando em

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \underbrace{\left[\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} - \left\langle \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \right]}_{\text{termos de segunda ordem}} = 0. \quad (3.11)$$

Os termos de flutuações de segunda ordem, assinalados em (3.11), tornam o sistema de equações Vlasov-Maxwell aberto. Dessa maneira, sempre precisaremos adicionar termos de ordem $n + 1$ para obter equações que descrevem a evolução temporal do sistema, envolvendo flutuações de ordem n . Entretanto, nessa aproximação, esses termos são muito menores do que as flutuações de primeira ordem e podem ser desprezados. Com essa aproximação, obtemos uma equação que é formalmente igual à equação obtida na aproximação linear, com a diferença de que agora a $f_{\alpha 0}$ varia no tempo:

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.12)$$

Assim, temos um sistema acoplado constituído pelas equações (3.3), (3.10) e (3.12). A aproximação quase linear é então baseada em duas escalas de tempo: a escala de tempo das flutuações $f_{\alpha 1}$ está associada ao período das ondas, enquanto que a evolução temporal da $f_{\alpha 0}$ ocorre muito lentamente em relação às variações de $f_{\alpha 1}$, e essa evolução é descrita pela equação (3.10). Na próxima seção será discutido quais as consequências dessa mudança na distribuição de partículas do plasma.

3.2 Equação de Difusão Quase-Linear

O nosso objetivo com a aproximação quase-linear é obter resultados para instabilidades geradas por efeitos não lineares, então trataremos somente o caso em que existe região com $\partial f_{\alpha 0} / \partial \mathbf{v} > 0$.

Supondo que a solução tanto para $f_{\alpha 1}$ quanto \mathbf{E}_1 seja tipo ondas planas,

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1} &= f_{\alpha \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

E aplicando na equação (3.12), assim pode-se rescrevê-la em termos de \mathbf{k} e ω ,

$$f_{\alpha \mathbf{k}} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}. \quad (3.14)$$

Da Lei de Gauss,

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} d\mathbf{v}, \quad (3.15)$$

podemos escrever o campo elétrico em função do potencial $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, então

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \Phi_{\mathbf{k}} d\mathbf{v}. \quad (3.16)$$

E, supondo o caso unidimensional, do mesmo modo que foi feito na aproximação linear, chegamos à equação de dispersão

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_L \frac{\partial f_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega / |k|} du = 0. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) tem a mesma estrutura que a encontrada na aproximação linear (2.47), a diferença é que agora $f_{\alpha 0}$ representa a média espacial da função de distribuição de velocidades e varia lentamente com o tempo de acordo com (3.10). Por conta dessa lenta evolução temporal, o uso dessa relação é válido somente para o caso em que o número de partículas ressonantes é muito menor do que o número total de partículas do sistema [19].

O objetivo agora é obter a equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$. De (3.10), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \int \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{x} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1}) - f_{\alpha 1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{E}_1 \right) \\ &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1}) = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d\mathbf{x} \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde levamos em conta que o campo elétrico independe da velocidade.

Podemos também rescrever \mathbf{E}_1 e $f_{\alpha 1}$ em termos das transformadas

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} d\mathbf{k}, \\ f_{\alpha \mathbf{k}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha \mathbf{k}}(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e, utilizando (3.19) em (3.18), obtemos

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int_V \left[\frac{1}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{k}}(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} d\mathbf{k} \int \frac{1}{(2\pi)^3} f_{\alpha \mathbf{k}'}(\omega) e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}'} t)} d\mathbf{k}' \right] d\mathbf{x}. \quad (3.20)$$

Integrando em todo o espaço e usando a representação integral da delta de Dirac,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

podemos escrever

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(\omega) f_{\alpha \mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}})t} d\mathbf{k}. \quad (3.21)$$

3.2.1 Coeficiente de Difusão Quase-Linear

Na aproximação quase-linear as interações não-lineares não são levadas em conta nas equações para as perturbações, no entanto são mantidas na equação para a evolução temporal da função de distribuição de velocidades de ordem zero [5]. Esses efeitos são observados em $f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t)$ como mudanças na sua forma e essas mudanças se devem a efeitos de difusão no espaço de velocidades. A intensidade e a forma dessa difusão é dada pelo coeficiente de difusão quase-linear.

A fim de expressar (3.21) em termos de $f_{\alpha 0}$, é preciso verificar algumas propriedades de $E_{\mathbf{k}}$ e $\omega(\mathbf{k})$ no espaço de Fourier [18]. Seja a transformada de Fourier unidimensional do campo elétrico

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \quad (3.22)$$

note que o lado esquerdo da equação deve ser real pois representa uma quantidade física. Tomando agora seu complexo conjugado temos

$$E^*(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}^*(k) e^{i(-kx + \omega^*(k)t)} dk, \quad (3.23)$$

Determinamos as propriedades de paridade determinando uma nova variável de integração $k' = -k$ e notando que $\int_{-\infty}^{+\infty} dk$ corresponde a $\int_{-\infty}^{+\infty} dk'$, uma vez que $dk' = -dk$ e que os limites da variável k $(-\infty, +\infty)$ correspondem aos limites $(+\infty, -\infty)$ variável k' [18]. Com isso, a equação (3.23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}^*(-k') e^{i(k'x + \omega^*(-k')t)} dk' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}^*(-k) e^{i(k'x + \omega^*(-k)t)} dk, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde utilizamos o fato de que $E(x, t) = E^*(x, t)$.

As equações (3.22) e (3.24) são idênticas no lado esquerdo, então o lado direito das duas também devem ser. Então, $\tilde{E}(k)$ e $\omega(k)$ devem satisfazer condições de paridade, que em três dimensões podem ser expressas, respectivamente, como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}^*(-\mathbf{k}),$$

$$\omega(-\mathbf{k}) = -\omega^*(\mathbf{k}),$$

onde o superíndice * denota o complexo conjugado, e onde passamos a usar $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ ao invés de $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$, por simplicidade. A exemplo do que foi feito na aproximação linear, a frequência $\omega(k)$

pode ser escrita como uma soma das partes real e imaginária: $\omega(\mathbf{k}) = \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})$. Dessa forma, a condição de simetria fica

$$\begin{aligned}\omega_r(-\mathbf{k}) + i\omega_i(-\mathbf{k}) &= -[\omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})]^* \\ &= -\omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Com isso, conclui-se que $\omega_r(-\mathbf{k}) = -\omega_r(\mathbf{k})$ e também que $\omega_i(-\mathbf{k}) = \omega_i(\mathbf{k})$, ou seja, a parte real da frequência $\omega(k)$ é uma função ímpar, enquanto que a parte imaginária é uma função par em \mathbf{k} [18]. Com base nessas conclusões, podemos rescrever o argumento da exponencial da equação (3.21), e em conjunto com a equação (3.14), teremos uma equação para a evolução temporal de $f_{\alpha 0}$ em termos da amplitude do campo elétrico,

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{k}.\quad (3.26)$$

O campo elétrico pode ser relacionado com o potencial da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{k}} &= -i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} &= i\mathbf{k}\Phi_{-\mathbf{k}}, \\ \Phi_{\mathbf{k}}\Phi_{-\mathbf{k}} &= \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{k^2},\end{aligned}\quad (3.27)$$

de forma que a equação (3.26) pode ser escrita como

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int \frac{\Phi_{-\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{k}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \mathbf{k} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{k}.\quad (3.28)$$

É importante lembrar que, pelas propriedades de simetria no espaço de Fourier, temos $\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \Phi_{-\mathbf{k}}(t)$. Expressando os produtos escalares de (3.28) em forma de somatórios e utilizando as relações de (3.27) obtemos uma equação diferencial de segunda ordem, conhecida como "equação de difusão quase-linear":

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right],\quad (3.29)$$

onde D_{ij} é o coeficiente de difusão quase-linear, o qual tem a seguinte forma

$$D_{ij} = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)k^2} k_i k_j d\mathbf{k}.\quad (3.30)$$

Conclui-se, portanto, que a teoria quase-linear leva à difusão lenta de $f_{\alpha 0}$ devido às ondas do plasma.

3.2.2 Densidade Espectral

Uma questão importante a ser abordada diz respeito à conexão entre a evolução das ondas devida aos efeitos não lineares e a evolução da função de distribuição de velocidades. Já vimos que a difusão das partículas no espaço de velocidades depende do coeficiente D_{ij} , que por

sua vez depende da amplitude dos campos das ondas, mas ainda não conhecemos em detalhe a dependência entre a evolução das ondas e a da função distribuição.

Tomando a média do quadrado do campo elétrico, dividida por 8π , temos:

$$\left\langle \frac{E_k^2}{8\pi} \right\rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_{k'} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}'. \quad (3.31)$$

Utilizando a representação integral da função delta de Dirac, temos

$$\left\langle \frac{E_k^2}{8\pi} \right\rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_k^* = \int \mathcal{E}_k(t) d\mathbf{k}, \quad (3.32)$$

em que

$$\mathcal{E}_k(t) \equiv \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{|\mathbf{E}_k(t)|^2}{(2\pi)^3}, \quad (3.33)$$

é conhecida como densidade espectral do campo elétrico associada com o vetor de onda k [14].

Sabemos que $\mathcal{E}_k(t)$ varia com o tempo, conforme as ondas vão sendo amplificadas ou absorvidas. Devemos lembrar que essa quantidade representa a intensidade espectral das flutuações que ocorrem no plasma, ou seja, essas ondas oscilam com a parte real da frequência determinada pela relação de dispersão e tem uma amplitude lentamente variável, dependendo da parte imaginária da frequência [6, 20]. As amplitudes dessas ondas são proporcionais a $e^{\omega_i t}$, de modo que podemos escrever

$$\mathcal{E}_k(t) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{8\pi^3} e^{2\omega_i(\mathbf{k})t} = \mathcal{E}_k e^{2\omega_i(\mathbf{k})t}. \quad (3.34)$$

Podemos também escrever na forma de uma equação diferencial,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_k(t). \quad (3.35)$$

Substituindo (3.32) em (3.30), obtemos uma expressão que relaciona a amplitude do espectro das ondas geradas por efeitos não-lineares à difusão da função de distribuição de velocidades:

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{\mathcal{E}_k}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)k^2} k_i k_j d\mathbf{k}. \quad (3.36)$$

A expressão (3.36) é bastante simples; no entanto, temos um denominador o qual depende da frequência ω , que é uma quantidade complexa, e, portanto, não tem a forma mais interessante. Para buscar uma expressão mais conveniente, é preciso multiplicar e dividir o coeficiente D_{ij} de (3.36) pelo complexo conjugado de $\omega(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{\mathcal{E}_k k_i k_j}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)k^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega^*)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega^*)} d\mathbf{k} \\ &= 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{\mathcal{E}_k k_i k_j [\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})]}{ik^2 |\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega|^2} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Agora, separando essa última em dois limites de integração, de $-\infty$ até 0 e de 0 até $+\infty$, invertendo os limites de integração e, fazendo a troca de $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ ficamos com a seguinte expressão para o coeficiente de difusão:

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_\mathbf{k} k_i k_j}{ik^2} \frac{[-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(-\mathbf{k}) + i\omega_i(-\mathbf{k})]}{[(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(-\mathbf{k}))^2 + \omega_i^2(-\mathbf{k})]} d\mathbf{k} \right. \\ \left. + \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_\mathbf{k} k_i k_j}{ik^2} \frac{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})]}{[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k}))^2 + \omega_i^2(\mathbf{k})]} d\mathbf{k} \right\}. \quad (3.38)$$

Usando a simetria de $\omega(\mathbf{k})$, é fácil verificar que D_{ij} pode ser escrito da seguinte forma:

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_\mathbf{k}(t)}{k^2 [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r(\mathbf{k}))^2 + \omega_i^2(\mathbf{k})]} k_i k_j d\mathbf{k}. \quad (3.39)$$

Considerando que, no contexto de validade da teoria quase-linear, a parte imaginária da frequência deve ser pequena a fim de garantir evolução temporal lenta, podemos usar a seguinte propriedade matemática:

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0} \frac{\omega_i}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r)^2 + \omega_i^2} = \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega). \quad (3.40)$$

Dessa forma, obtemos um conjunto completo de equações auto-consistentes da aproximação quase-linear:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left[D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right], \quad (3.41)$$

onde

$$D_{ij} = 8\pi \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \frac{k_i k_j}{k^2} \mathcal{E}_\mathbf{k} \pi \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) d\mathbf{k}, \quad (3.42)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\mathbf{k}(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_\mathbf{k}(t). \quad (3.43)$$

Cabe lembrar que a parte imaginária da frequência das ondas, ω_i , que aparece na equação para a evolução do espectro das ondas, é obtida através da solução da relação de dispersão, que, como vimos, depende da distribuição $f_{\alpha 0}$. O conjunto de equações obtidas (3.41)-(3.43) através das suposições (3.6) e (3.7), além da hipótese que $|\omega_r| \gg |\omega_i|$, obviamente contém menos informação que o conjunto original de equações (3.2) e (3.3), e, além disso, tem uma região de validade mais limitada.

No entanto, tais deficiências são compensadas pela simplicidade do sistema final de equações da teoria quase-linear [7].

3.3 Leis de Conservação na Teoria Quase-Linear

Um aspecto importante a ser destacado da aproximação quase-linear é a presença de leis de conservação. Tais relações são extremamente fortes na física e são consequências naturais do conjunto original de equações. Nas próximas subseções os argumentos de $f_\alpha(\mathbf{v}, t)$, $\mathcal{E}_\mathbf{k}(t)$ e $D_{ij}(\mathbf{v}, t)$ serão suprimidos para uma notação mais compacta.

3.3.1 Conservação do Número de Partículas

Diretamente da variação temporal do número de partículas, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n_{\alpha} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = \int n_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} d\mathbf{v}. \quad (3.44)$$

E, substituindo $\partial f_{\alpha 0}/\partial t$ diretamente de (3.41)

$$\begin{aligned} \int n_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} d\mathbf{v} &= \int n_{\alpha} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) d\mathbf{v} \\ &= \sum_{ij} \int dv_j \int dv_k \int \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) dv_i \\ &= \sum_{ij} \int dv_j \int dv_k \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Temos, assim, que o número total de partículas de uma mesma espécie é constante. Consequentemente, a densidade de probabilidade para cada componente do plasma mantém sua normalização a unidade em qualquer instante de tempo.

3.3.2 Conservação da Quantidade de Movimento

O momentum total das partículas pode ser obtido considerando a definição do momentum de uma partícula do tipo α , e somando sobre o índice α :

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \int n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v}. \quad (3.46)$$

Fazendo a variação temporal da componente k de \mathbf{P} e, novamente fazendo uso da equação (3.41) para $\partial f_{\alpha 0}/\partial t$, e escrevendo a expressão explicitamente em termos das componentes escalares obtemos

$$\frac{dP_k}{dt} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \int d\mathbf{v} v_k \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right).$$

Uma das variáveis de integração será igual a v_k , e na soma em i, j podemos separar o termo com $i = k$ e os termos com $i \neq k$,

$$\frac{dP_k}{dt} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \int d^2v \int dv_k \sum_j \left[\underbrace{v_k \frac{\partial}{\partial v_k} D_{kj} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i \neq k} v_k \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j}}_{(2)} \right]. \quad (3.47)$$

Temos que o termo (2) dentro dos colchetes é nulo, pois tende a zero nos limites de integração, quando feita a integração na variável v_i . Já o termo (1), quando integrado por partes, toma a

seguinte forma

$$\begin{aligned} \int v_k \left(\frac{\partial}{\partial v_k} D_{kj} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) dv_k &= v_k D_{kj} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int D_{kj} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} dv_k \\ &= - \int D_{kj} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} dv_k. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Agora, substituindo o resultado obtido em (3.48) em (3.47) e, substituindo a expressão (3.36) para D_{ij} , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dP_k}{dt} &= - \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \int D_{kj} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \\ &= - \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{8\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \sum_i \int d\mathbf{v} \int \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}} k_i k_j}{i k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} d\mathbf{k} \\ &= -2 \sum_{\alpha} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} d\mathbf{k} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_{j0} / \partial \mathbf{v}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

usando a relação de dispersão (3.17) ficamos com uma expressão bastante simples para a variação temporal do momento médio

$$\frac{dP_k}{dt} = 2i \sum_{\alpha} \int \mathbf{k} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = 0. \quad (3.50)$$

Observando o integrando e utilizando a propriedade de simetria $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \mathcal{E}_{-\mathbf{k}}$ pode-se concluir que a equação (3.50) é ímpar em \mathbf{k} e, portanto, a integral é nula e a quantidade de movimento é conservada.

No entanto, cabe notar que, embora \mathbf{P} seja constante, cada \mathbf{P}_{α} pode variar, existindo uma troca de momento entre as componentes do plasma, e um exemplo desse mecanismo são as interações onda-partícula [14].

3.3.3 Conservação de Energia

Por fim, temos que a densidade de energia cinética das partículas somada à energia das ondas é conservada. Para mostrar tal propriedade, fazemos a variação temporal da energia cinética das partículas e, já substituindo $\partial f_{\alpha 0} / \partial t$ de (3.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \int v^2 f_{\alpha 0} d\mathbf{v} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \sum_{ij} \int \left(\sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 \right) \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) d\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \sum_{ij} \int \left[v_i^2 \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) + \sum_{\mathbf{k} \neq i} v_{\mathbf{k}}^2 \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} \right) \right] d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

O segundo termo é nulo, pois vai a zero nos limites da integração em v_i . Realizando a integração por partes do primeiro termo, ficamos com

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = - \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \sum_{ij} \int v_i D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} d\mathbf{v}, \quad (3.52)$$

onde E_p é a energia cinética associada às partículas. Substituindo a expressão (3.36) para o coeficiente de difusão quase-linear obtemos:

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = -2i \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \sum_i \int \frac{k_i \mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2} d\mathbf{k} \int \frac{v_i \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v}. \quad (3.53)$$

Reescrevendo como um produto escalar e adicionando o termo $(+\omega - \omega)$ no numerador da integral em \mathbf{v} temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial t} &= 2i \int \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2} d\mathbf{k} \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega + \omega) \mathbf{k}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} \\ &= 2i \int \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2} d\mathbf{k} \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \left[\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\omega \mathbf{k} \cdot \partial f_{\alpha 0} / \partial \mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} \right] d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

O primeiro termo dentro dos colchetes é nulo e, usando a relação de dispersão (3.17) no segundo teremos

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = 2i \int [\omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})] \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}. \quad (3.55)$$

E, uma vez que $\omega_r(\mathbf{k})$ é uma função ímpar em k e $\omega_i(\mathbf{k})$ par, apenas o termo envolvendo ω_i será diferente de zero na integração em k . Então temos

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \int 2\omega_i(\mathbf{k}) \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = 0. \quad (3.56)$$

Fazendo uso da relação (3.43)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[E_p + \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right] &= 0, \\ E_p + E_{\omega} &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Esse resultado nos mostra que é conservada a soma das energias das partículas e das ondas, $E_p + E_{\omega}$. Em outras palavras, pode ocorrer troca de energia entre ondas e partículas, de modo que nem E_p nem E_{ω} são conservadas, mas a soma se conserva [18].

3.4 Propriedades do Coeficiente de Difusão Quase-Linear

Até agora foi sempre assumido que $\omega_i(t) \geq 0$; sendo assim, diretamente da função obtida para o coeficiente de difusão quase-linear em (3.39), fica claro que o tensor associado a ele

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{a} \geq 0,$$

é uma quantidade positiva, onde \mathbf{a} é um vetor real tridimensional. Quanto ao tensor $\mathbf{D}(\mathbf{v}, t)$, podemos dividi-lo em duas regiões do espaço de velocidades: *ressonante* e *não ressonante* [14]. É denominada região ressonante aquela na qual a velocidade das partículas satisfaz a seguinte condição:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_r,$$

onde \mathbf{k} e $\omega_{\mathbf{k}}$ compõem o espectro das ondas. A região dita não ressonante é aquela na qual a velocidade das partículas obedece a relação:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)^2 \gg \omega_i^2.$$

Para pequenas instabilidades, é possível aproximar o coeficiente de difusão quase-linear na região ressonante $D(\mathbf{v}, t) \simeq D^r(\mathbf{v}, t)$, onde

$$D^r(\mathbf{v}, t) \equiv \frac{8\pi^2 q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) \frac{k_i k_j}{k^2} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{k}, \quad (3.58)$$

no qual $\omega = \omega_r$ e foi utilizado o limite (3.40). Para a região não ressonante, o coeficiente de difusão toma a seguinte forma:

$$D^{nr}(\mathbf{v}, t) \equiv \frac{8\pi q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) \frac{\omega_i k_i k_j}{k^2 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} d\mathbf{k}. \quad (3.59)$$

Na seção subsequente, a qual versará sobre instabilidades entre ondas e partículas ressonantes, serão utilizados os coeficientes definidos em (3.58) e (3.59). Será visto que a difusão no espaço de velocidades descrita por cada uma dessas equações é de natureza muito distinta uma da outra.

A difusão das partículas não ressonantes, descrita por $D^{nr}(\mathbf{v}, t)$, é um processo reversível: isso decorre das equações (3.41) e (3.59), visto que (3.43) modifica seu sinal quando a reversão temporal é realizada. Essa característica é chamada de "falsa difusão", ou do inglês "*fake diffusion*", e descreve o ajuste da função distribuição de partículas não ressonantes às alterações na densidade espectral $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)$. Em contrapartida, a difusão das partículas ressonantes, descrita pelo coeficiente $D^r(\mathbf{v}, t)$ é um processo irreversível [14].

3.5 Aplicação da Teoria Quase-Linear: Instabilidade *Bump-in-tail*

A incidência de um feixe de elétrons em um plasma pode dar início a processos turbulentos que envolvem a geração e amplificação de ondas eletrostáticas de alta frequência através de efeitos lineares e não lineares relacionados à interação onda-partícula. A interação das partículas do feixe incidente com as ondas presentes no plasma ocorre via ressonância, levando a alterações na função de distribuição de velocidades dos elétrons e no espectro das ondas, um processo conhecido como "instabilidade bump-in-tail". Esse nome está relacionado à existência de um segundo pico na distribuição de velocidades, na região do feixe de partículas, criando uma região onde a derivada da função de distribuição é positiva, condição propícia ao aparecimento de instabilidades.

Quando a instabilidade é pequena e o crescimento das ondas é lento, emprega-se, como uma primeira aproximação, a teoria quase-linear para descrever como as ondas afetam a distribuição de velocidades de equilíbrio do plasma. A transferência de energia entre partículas e ondas continua até que o sistema atinja um estado estacionário [19, 20]. Efeitos não lineares relacionados à interação onda-partícula e a interações onda-onda, de ordem mais alta, podem levar à geração da chamada "turbulência de Langmuir", e também à emissão de ondas eletromagnéticas, através de processos conhecidos como decaimento e espalhamento de ondas. Essas interações são observadas na natureza como, por exemplo, fenômenos de emissão de radiação solar dos tipos II e III, além de ser uma ocorrência comum em plasmas de laboratório, como foi demonstrado experimentalmente em [21].

3.5.1 Troca de Energia entre Partículas Ressonantes e Não Ressonantes

Na seção 3.3 vimos que a soma da energia associada às partículas com a energia proveniente do campo elétrico das ondas é constante. No entanto, para uma melhor compreensão do comportamento das partículas, é preciso distingui-las entre ressonantes e não ressonantes.

Seja um plasma Maxwelliano unidimensional, considerando ondas de Langmuir. Temos que a variação temporal da energia cinética das partículas pode ser dividida na soma da variação de energia associada às partículas ressonantes E_{pr} e às não ressonantes E_{pnr} ,

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} + \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t}. \quad (3.60)$$

E, a partir da equação (3.52), analisando primeiramente a variação de energia cinética das partículas ressonantes, temos

$$\frac{\partial E_{pr}}{\partial t} = - \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \int v D^r \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} dv. \quad (3.61)$$

O termo D^r corresponde ao coeficiente de difusão quase linear associado às partículas ressonantes o qual, em uma dimensão, tem a seguinte forma

$$D^r = \frac{8\pi^2 q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int \mathcal{E}_k \frac{1}{|k|} \delta(v - \omega_r / |k|) dv. \quad (3.62)$$

Sabendo que para ondas de Langmuir as partes real e imaginária da frequência são dadas por

$$\omega_r = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) \approx \omega_{pe}, \quad (3.63)$$

$$\omega_i = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{2 k^2} \left. \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/|k|}. \quad (3.64)$$

E usando a definição da frequência ω_{pe} , a equação (3.61) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} &= -2\pi\omega_{pe}^2 \int \mathcal{E}_k dk \int v \frac{1}{|k|} \delta\left(v - \frac{\omega_r}{|k|}\right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} dv \\ &= -2\pi\omega_{pe}^2 \int \mathcal{E}_k \frac{\omega_r}{|k|^2} \left. \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/|k|} dk \\ &= -2 \int 2\omega_i \mathcal{E}_k dk \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \mathcal{E}_k dk \right] \\ \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} &= -2 \frac{\partial E_{\omega}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Um aspecto interessante a ser observado é que as partículas ressonantes do plasma ganham duas vezes a energia perdida pelas ondas. Foi visto na seção anterior que a energia cinética

de todas as partículas permanece constante, sendo assim, partículas não ressonantes deveriam ceder energia às ressonantes. De acordo com (3.56), (3.60) e (3.65) temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_p}{\partial t} &= \frac{\partial E_{pr}}{\partial t} + \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_\omega}{\partial t} &= -2\frac{\partial E_\omega}{\partial t} + \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t} \\ \frac{\partial E_{pnr}}{\partial t} &= \frac{\partial E_\omega}{\partial t}.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Como resultado obtemos que, quando a energia das partículas que estão fora da região de ressonância aumenta (ou diminui), a energia das ondas também aumenta (ou diminui) e isso se dá às custas (em benefício) das partículas ressonantes.

3.5.2 O comportamento da Função Distribuição de Partículas

Partículas ressonantes

Podemos definir f_{e0r} como a distribuição inicial dos elétrons ressonantes, isto é, elétrons os quais estejam com velocidades próximas à região de ressonância $v \simeq \omega/k$, e uma amplitude espectral $\mathcal{E}(k, t)$ finita. Para essas partículas temos a seguinte equação de difusão quase-linear unidimensional:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{e0r}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} D^r \frac{\partial f_{e0}}{\partial v} \\ &= \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\int \mathcal{E}_k \frac{1}{|v|} \delta\left(k - \frac{\omega_r}{v}\right) \frac{\partial f_{e0r}}{\partial v} dk \right] \\ &= \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}_{k=\omega_r/|v|}}{|v|} \frac{\partial f_{e0r}}{\partial v} \Big|_{k=\omega_r/|v|} \right),\end{aligned}\tag{3.67}$$

onde foi utilizado D^r , o coeficiente de difusão associado às partículas ressonantes já mencionado anteriormente em (3.62).

Na ressonância, podemos substituir $\partial f_{e0r}/\partial v$ de (3.64)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{e0r}}{\partial t} &= \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\mathcal{E}_{k=\omega_r/|v|}}{|v|} \left(\frac{2k^2 \omega_i^2}{\pi \omega_{pe}^2 \omega_r} \right) \Big|_{k=\omega_r/|v|} \right] \\ &= \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2\omega_i \mathcal{E}_k}{|v|^3} \right),\end{aligned}\tag{3.68}$$

onde na última linha foi utilizado a seguinte aproximação: $\omega_r \approx \omega_{pe}$, de acordo com (3.63). Com (3.56) a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f_{e0r} - \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}_k}{|v|^3} \right) \right] = 0.$$

Realizando a integração com respeito ao tempo obtemos

$$f_{e0r}(v, t) - f_{e0r}(v, 0) = \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mathcal{E}_k}{|v|^3} \right).\tag{3.69}$$

Por definição $\mathcal{E}_k(\frac{\omega_r}{v}, t)$ é nula para qualquer valor de velocidade v que não esteja dentro dos limites de ressonância $v_r^{min} < v < v_r^{max}$, pois fora desse alcance, não existem ondas para as quais as partículas podem entrar em ressonância. Admitindo que $n_{er}(t)$ corresponde ao número de partículas ressonantes no instante t , integrando, agora, a equação (3.69) em relação à velocidade e dentro dos limites da ressonância podemos verificar que

$$\int_{v_r^{min}}^{v_r^{max}} f_{e0r}(v, t) dv = \int_{v_r^{min}}^{v_r^{max}} f_{e0r}(v, 0) dv$$

$$n_{er}(t \rightarrow \infty) = n_{er}(t = 0).$$

Dessa forma, o número de partículas ressonantes permanece inalterado com o passar do tempo. A equação (3.65) revela que a energia associada às partículas ressonantes não é conservada e pode ser transformada em energia para as ondas; no entanto, acabamos de observar que o número de partículas é constante. Uma mudança na energia dessas partículas sem alterar seu número só é possível ajustando o número das que estão um pouco mais lentas e rápidas do que ω/k . Por exemplo, caso haja uma diminuição no número de partículas com velocidade $v \simeq (\omega/k)_-$, deve haver, obrigatoriamente, um correspondente aumento no número de partículas ressonantes com velocidade $v \simeq (\omega/k)_+$ e esse processo promove uma transferência líquida de energia da onda para as partículas, o que caracteriza o amortecimento de Landau e requer $\partial f_{e0r}/\partial v < 0$. O produto do aumento do número de partículas com $v \simeq (\omega/k)_+$ e o decréscimo das partículas com $v \simeq (\omega/k)_-$ nivela f_{e0r} e forma um platô [18].

Partículas não ressonantes

Assim como para a parte ressonante, podemos atribuir uma função distribuição de velocidades associada às partículas não ressonantes f_{e0nr} , em outras palavras, àquelas que satisfazem $(kv - \omega_r) \neq 0$. A equação de difusão associada a essas partículas é dada por

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D^{nr} \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial v}$$

$$= \frac{2\omega_{pe}^2}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \int \mathcal{E}_k \frac{\omega_i}{(kv - \omega)^2} \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial v} dk. \quad (3.70)$$

A grande maioria das partículas não ressonantes possui velocidade muito menor que a onda $v \ll \omega_r/k$, de forma que podemos assumir $\omega^2 \approx \omega_{pe}^2$. Assim temos

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} = \frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial v} \int 2\mathcal{E}_k \omega_i \frac{\partial f_{e0nr}}{\partial v} dk. \quad (3.71)$$

Substituindo (3.43) e integrando em relação ao tempo

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} = \frac{1}{n_e m_e} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}(k, t) dk \right] \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}$$

$$f_{e0nr}(v, t) - f_{e0nr}(v, 0) = \frac{1}{m_e n_e} \left[\int (\mathcal{E}(k, t) - \mathcal{E}(k, 0)) dk \right] \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}. \quad (3.72)$$

O lado direito da equação acima é nulo para velocidades fora da região não ressonante. Sendo assim, se integarmos em dv dos dois lados, é fácil verificar que o número de partículas

não ressonantes também permanece inalterado com o passar do tempo. Podemos assumir que, para um tempo suficientemente longo, o espectro inicial de ondas é totalmente absorvido e, assim, escrever

$$f_{e0nr}(v, \infty) = f_{e0nr}(v, 0) - \frac{1}{m_e n_e} \left[\int \mathcal{E}(k, 0) dk \right] \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}. \quad (3.73)$$

É importante notar que na região de velocidades onde $\frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2} > 0$ haverá uma queda no número de partículas não ressonantes e na região $\frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2} < 0$, um aumento. Em distribuições do tipo Maxwellianas desenvolver-se-ão dois platôs, conforme mostrado na Figura 3.1: na região de baixas velocidades e outro na região de altas velocidades com um gradiente acentuado entre eles. O platô mais baixo irá se fundir com o platô formado em virtude das partículas ressonantes e a função distribuição ficará mais "fria".

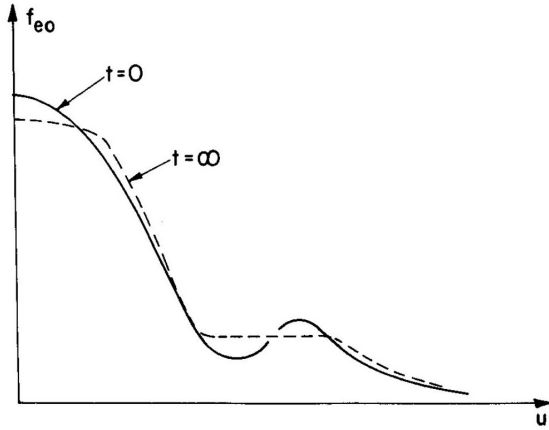


Figura 3.1: Função distribuição para os elétrons levando em conta o tempo inicial $t = 0$ e o tempo final $t = \infty$, tanto para as partículas ressonantes, como para as não ressonantes [1].

A fim de verificar tal fenômeno, podemos definir uma temperatura efetiva T_{ef} (em unidades de energia) e sua variação no tempo como

$$\frac{d(T_{ef})}{dt} = \frac{2}{n_e} \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}(k, t) dk, \quad (3.74)$$

A expressão então pode ser integrada

$$T_{ef}(t) = T_0 + \frac{2}{n_e} \int \mathcal{E}(k, t) dk, \quad (3.75)$$

e assim obter uma expressão para a temperatura em função do tempo e da amplitude espectral. Atente que T_0 é a temperatura na qual o espectro de ondas é nulo. Utilizando as expressões (3.72) e (3.74) obtemos

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{T_{ef}}{2m} \right) \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}. \quad (3.76)$$

E se a função distribuição f_{e0nr} for considerada como função de T_{ef} ao invés de t , a equação (3.76) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_{e0nr}}{\partial (T_{ef})} = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 f_{e0nr}}{\partial v^2}, \quad (3.77)$$

e tem a seguinte solução

$$f_{e0nr} = n_e \sqrt{\frac{m}{2\pi T_{ef}(t)}} e^{-\left(\frac{mv^2}{2T_{ef}(t)}\right)}. \quad (3.78)$$

Ao substituir o termo $T_{ef}(t)$ pela expressão encontrada em (3.75) e obtemos uma relação direta entre a função distribuição das partículas não ressonantes e a amplitude espectral

$$f_{e0nr} = n_e \sqrt{\frac{m/2\pi}{T_0 + \frac{2}{n_e} \int \mathcal{E}(k, t) dk}} e^{-\left(\frac{mv^2/2}{T_0 + \frac{2}{n_e} \int \mathcal{E}(k, t) dk}\right)}. \quad (3.79)$$

Assim, o amortecimento da onda, isto é, a absorção do espectro $\mathcal{E}(k, t)$ corresponde a um resfriamento efetivo das partículas não ressonantes. Como mostrado em (3.56) e (3.66), essa redução da energia cinética das partículas não ressonantes e da energia associada ao campo elétrico corresponde a uma transferência para as partículas ressonantes [18]. Da mesma forma, um aumento da energia das ondas, como ocorre na instabilidade *bump-in-tail*, corresponde a um aquecimento efetivo das partículas não ressonantes [1].

Capítulo 4

Teoria de Turbulência Fraca em Plasmas

Como tratado no capítulo anterior, a característica de excitação e saturação de ondas eletrostáticas por um feixe energético de partículas, por exemplo a instabilidade *bump-in-tail*, é um problema clássico e tratado anteriormente na literatura [14, 8, 22, 23], que pode ser descrito pela teoria quase-linear. Entretanto, processos não lineares são fundamentais em muitos problemas físicos que envolvem interação feixe-plasma. Nesses processos ocorre interação entre ondas de mesmo tipo e diferentes comprimentos de onda e também interações de diferentes tipos de ondas. Podem ser geradas, por exemplo, ondas eletrostáticas retroespalhadas, harmônicos da frequência fundamental, com frequência próxima a $2\omega_{pe}$, e ondas eletromagnéticas (ondas transversais), fenômenos que não são previstos pela teoria quase-linear. Quando os efeitos não lineares são levados em conta apenas em baixa ordem, temos a chamada *teoria de turbulência fraca*.

A formulação da teoria de turbulência fraca teve início entre o fim dos anos 1950 e início dos anos 1970, na sua grande maioria por cientistas da antiga União Soviética, como por exemplo A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, R.Z. Sagdeev, N. V. Tsytovich entre outros [8, 7, 22, 24, 5, 6, 25, 21, 9, 13, 12]. A maior parte da teoria encontrada na literatura é concentrada no estudo do caso eletrostático em plasmas não magnetizados e, quando efeitos eletromagnéticos são incorporados às análises, frequentemente aparecem apenas no sentido formal. Entretanto, a inclusão de efeitos eletromagnéticos e a generalização da teoria é de suma importância para caracterizar, por exemplo, fenômenos de emissão de radiação solar dos tipos II e III.

4.1 Generalização das Equações Cinéticas na Abordagem da Teoria de Turbulência Fraca para o Caso Eletrostático

4.1.1 Equação Cinética das Partículas e a Aproximação de Duas Escalas de Tempo

Por simplicidade o presente desenvolvimento será feito considerando apenas o caso eletrostático em um plasma não magnetizado, e será baseado em abordagem da literatura [9]. A generalização para o caso eletromagnético já foi feita e será mencionada posteriormente [11, 13]. Apresentaremos aqui apenas alguns aspectos básicos do desenvolvimento, sem entrar em muitos detalhes, que são bastante complexos. Embora os conteúdos a serem apresentados aqui possam

ser encontrados na literatura, sua presença neste texto vem dar um caráter de completicidade a este trabalho, constituindo-se em parte importante da revisão da abordagem cinética de plasmas.

Seja um plasma espacialmente homogêneo. Desconsiderando o efeito das colisões, iniciamos com o sistema de equações Vlasov-Maxwell na ausência de campo externo,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 4\pi n \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde f_α representa a distribuição de partícula única da espécie α (e para elétrons e i para os íons), m_α e q_α respectivamente a massa e a carga da partícula da espécie α , $n = n_e = n_i$ a densidade de partículas do plasma e \mathbf{E} o campo elétrico. O procedimento padrão é reescrever tanto o campo elétrico quanto a função distribuição em uma soma da média espacial com a flutuação de maneira que

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= F_\alpha(\mathbf{v}, t) + \delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

A aproximação de duas escalas de tempo considera que, em relação às transformadas de Fourier-Laplace, as flutuações das quantidades físicas de interesse possuem uma escala de tempo muito mais rápidas quando comparada à média da distribuição de partículas e aos coeficientes espectrais [9]. Aplicando tal aproximação ao sistema descrito em (4.1) obtêm-se o seguinte conjunto de equações hierárquicas

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d\mathbf{k} d\omega \int \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^\alpha \rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i(\omega+\omega')t} d\mathbf{k}' d\omega' \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \left(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^\alpha &= -i \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} - i \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d\mathbf{k}' d\omega' \\ &\times \left[\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^\alpha - \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^\alpha \rangle \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = -4\pi n i \sum_\alpha q_\alpha \int \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^\alpha d\mathbf{v}, \quad (4.4)$$

onde $\langle \dots \rangle$ indica a média sobre as fases das perturbações. A equação (4.2) representa a equação cinética das partículas da espécie α , a equação (4.3) descreve a evolução temporal da perturbação da distribuição de velocidades e a última, equação (4.4), é a equação para a perturbação no campo elétrico. O conjunto de equações (4.2)-(4.4) não é um conjunto fechado, pois a solução de $\delta f_{\mathbf{k}, \omega}^\alpha$ requer o conhecimento do termo de correlação entre duas partículas $\langle \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^\alpha f_{\mathbf{k}', \omega'}^\alpha \rangle$ que por sua vez depende do termo de correlação de terceira ordem $\langle \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^\alpha f_{\mathbf{k}', \omega'}^\alpha f_{\mathbf{k}'', \omega''}^\alpha \rangle$ e assim por diante.

Uma forma de enxergar a aproximação de duas escalas de tempo é supor que o termo de evolução lenta $i\partial/\partial t$ é absorvido em uma "nova" definição da frequência angular $\omega \rightarrow \omega + i\partial/\partial t$, assim a equação para $\delta f_{\mathbf{k}, \omega}^\alpha$ poderá ser resolvida de forma iterativa até a terceira ordem para a intensidade de $\delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$ [9]. Logo após ser obtida, essa solução então é inserida na equação para a perturbação do campo elétrico, e então é obtida a média sobre as fases aleatórias associada as

flutuações. Disso resultará a equação não linear espectral de equilíbrio e nesse ponto o termo $i\partial/\partial t$ é reintroduzido. O resultado é a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} &+ \frac{i}{2} \frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{\partial t} + 2 \int \left[\left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \right\}^2 \right. \\
 &\times \left(\frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} + \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \\
 &- \left. \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} \right] d\mathbf{k}' d\omega' \\
 &- 2 \int \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \omega' | -\mathbf{k}', -\omega' | \mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k}' d\omega' = 0.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

na qual $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \chi(\mathbf{k}, \omega)$ é a chamada função resposta dielétrica linear, $\chi(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$ é a susceptibilidade dielétrica linear, $\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2)$ é a susceptibilidade não linear de segunda ordem e $\bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2 | \mathbf{k}_3, \omega_3) = \sum_{\alpha} \bar{\chi}_{\alpha}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2 | \mathbf{k}_3, \omega_3)$ é a susceptibilidade parcial de terceira ordem [9]. As funções para as susceptibilidades citadas acima são dadas por

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{4\pi q_{\alpha} n_{\alpha}}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega} F_{\alpha} d\mathbf{v}, \\
 \chi_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2) &= -\frac{1}{2} \frac{4\pi i q_{\alpha} n_{\alpha}}{k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \int \mathbf{g}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_1 + \omega_2} [\mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2, \omega_2}) + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_1, \omega_1})] F_{\alpha} d\mathbf{v}, \\
 \bar{\chi}_{\alpha}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2 | \mathbf{k}_3, \omega_3) &= \frac{1}{2} \frac{4\pi q_{\alpha} n_{\alpha}}{k_1 k_2 k_3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|} \int (\mathbf{g}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \cdot \mathbf{k}_1) \\
 &\times \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3} \cdot [\mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_3, \omega_3}) + \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2, \omega_2})] F_{\alpha} d\mathbf{v},
 \end{aligned}$$

onde o operador $\mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega}$ é definido como

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot.$$

O resultado obtido em (4.5) é bem conhecido da literatura e forma a base para a teoria de turbulência fraca. No entanto, é um resultado formal e ainda de pouca aplicabilidade. A relação de dispersão das ondas é alcançada da parte real da equação (4.5), e da parte imaginária obtemos de que maneira as intensidades das ondas variam ao longo do tempo.

A maioria das discussões encontradas na literatura adota a equação de difusão quasilinear como equação cinética para a evolução da função distribuição das partículas, mas é possível obter uma equação mais formal e geral, na qual vários termos não lineares acoplados são incorporados ao mesmo grau da expansão na perturbação, como na equação cinética de onda [9]. Da solução iterativa para $\delta f_{\mathbf{k}, \omega}^{\alpha}$ é construída a quantidade $\langle \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^{\alpha} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \rangle$, presente na equação (4.2). O resultado é a equação generalizada para a evolução temporal da função distribuição

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} &= -\frac{i q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{k^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega} \right. \\
 &+ i \int \frac{M(\mathbf{k}, \omega | \mathbf{k}', \omega')}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot [\mathbf{k}' (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}') (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}', \omega'})] d\mathbf{k}' d\omega' \\
 &- \left. \int \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{k^2 k'^2} (\mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{g}_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} \cdot [\mathbf{k}' (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega}) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}', -\omega'})] \right\} F_{\alpha} d\mathbf{k} d\omega,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde o coeficiente $M(\mathbf{k}, \omega | \mathbf{k}', \omega')$ é dado por

$$M(\mathbf{k}, \omega | \mathbf{k}', \omega') = \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \left(\frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega)} + \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} - \frac{\chi^{(2)*}(\mathbf{k}', \omega | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}. \quad (4.7)$$

Conforme mencionado no início do parágrafo anterior, é frequente em aplicações da teoria de turbulência fraca que apenas o primeiro termo do lado direito da equação (4.6) seja mantido [9]. Essa aproximação leva a uma equação que corresponde à equação de difusão obtida na teoria quase-linear. Embora, de um ponto vista formal, o uso dessa aproximação junto com a manutenção de termos não lineares nas equações para as ondas não seja inteiramente consistente, ela pode ser de grande utilidade, e vem sendo usada, por exemplo, em recentes estudos envolvendo a interação feixe plasma [26, 27, 28].

4.1.2 Equação Cinética das Ondas para os Modos Lineares

Na teoria de turbulência fraca é suposto que os efeitos dos campos alterados na relação de dispersão podem ser ignorados e, como consequência disso, a determinação dos modos normais fica a cargo da resposta linear do plasma, enquanto que as interações entre ondas e partículas são determinadas pelas equações cinéticas não lineares da partícula e da onda. A relação de dispersão para o modo linear é obtida a partir da seguinte condição

$$\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = 0,$$

a qual se refere à parte real do primeiro termo do lado direito da equação (4.5). Definimos que $\omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ seja a solução da equação $\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ e que $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} [\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})]$ é a amplitude espectral da onda, com α representando o modo normal. No caso eletrostático em um plasma não magnetizado podemos ter $\alpha = L$ para ondas de Langmuir e $\alpha = S$ para as ondas íon-acústicas. Após algumas considerações e manipulações algébricas chega-se à seguinte equação para a evolução temporal da intensidade espectral no modo linear [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = & -\frac{2 \text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega)}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int A_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} d\mathbf{k}' + 4\pi \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_{\sigma''=\pm 1} \\ & \times \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \left(\frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} + \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})} \right. \\ & \left. - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}) d\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

O coeficiente $A_{\alpha, \beta}$ da equação acima é dado por

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = & \frac{4}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \text{Im} \left(2 \left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right\}^2 \right. \\ & \left. \times \mathcal{P} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | -\mathbf{k}', -\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde \mathcal{P} representa o valor principal da integral onde o coeficiente é inserido, e onde foi utilizada a seguinte notação

$$\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) = \frac{\partial [\text{Re } \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})]}{\partial \sigma\epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}.$$

O primeiro termo da equação (4.8) representa o processo de emissão induzida, o segundo, de espalhamento induzido, ambas interações não lineares entre ondas e partículas, e o terceiro descreve o processo, também não linear mas agora envolvendo apenas ondas de diferentes comprimentos de onda, de decaimento. Nesse último processo fica explícita a condição de ressonância, envolvendo três ondas distintas, a partir da função delta $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})$; no entanto, nos outros dois processos, de emissão induzida e de espalhamento, também aparecem condições semelhantes, a saber $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ e $\delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})]$, respectivamente, e ficam evidentes à medida que as susceptibilidades forem sendo calculadas.

A equação (4.8) é bem conhecida na literatura e pode descrever a evolução de diferentes tipos de ondas. Para determinar equações específicas tanto para o caso de ondas do tipo Langmuir ($\alpha = L$) quanto para íon-acústicas ($\alpha = S$), algumas considerações sobre as susceptibilidades são necessárias. No exemplo de ondas de alta frequência, ou seja o modo de Langmuir, dizemos que as quantidades $\omega_{\mathbf{k}}^L/kv_{th}^e$ e $\omega_{\mathbf{k}}^L/kv_{th}^i$ são muito maiores que a unidade, e assim a susceptibilidade $\chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$, tanto para elétrons quanto para íons ($a = e, i$ respectivamente), pode ser aproximada da seguinte maneira [9]

$$\chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) \approx -\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 T_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega^2} \right) - i\pi \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Usando esta aproximação na equação $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$, obtemos a já conhecida relação de dispersão para ondas L

$$\omega_{\mathbf{k}}^L = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right),$$

com a condição de simetria $\omega_{-\mathbf{k}}^L = -\omega_{\mathbf{k}}^L$. $\lambda_{De} = (T_e/4\pi n e^2)^{1/2}$ é o comprimento de Debye e T_e a temperatura dos elétrons. No caso das ondas íon-acústicas S , a aproximação feita em (4.10) é válida para os íons, uma vez que

$$\omega_{\mathbf{k}}^S/kv_{th}^i \gg 1,$$

mas não para os elétrons, pois

$$\omega_{\mathbf{k}}^S/kv_{th}^e \ll 1.$$

Para esses, a aproximação mais adequada para a susceptibilidade é dada por

$$\chi_e(\mathbf{k}, \omega) \approx \frac{2\omega_{pe}^2}{k^2 v_{th}^e{}^2} - i\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (4.11)$$

o que nos leva então à relação de dispersão das ondas íon-acústicas

$$\omega_{\mathbf{k}}^S = kC_s \sqrt{\frac{1 + 3\frac{T_i}{T_e}}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}},$$

com $\omega_{-\mathbf{k}}^S = -\omega_{\mathbf{k}}^S$, e onde $C_s = \sqrt{T_e/m_i}$ a velocidade íon acústica. Lembrando o fato de que a existência de ondas do tipo S está atrelada à condição de que a temperatura dos elétrons seja bem maior que a dos íons $T_e \gg T_i$.

Considerando o termo de emissão induzida da equação (4.8), tanto para ondas L, quanto para S e, utilizando as aproximações de (4.10) e (4.11) as variações temporais das intensidades são dadas por

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{emissão induzida}} = \pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^L d\mathbf{v}, \quad (4.12)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^S}{\partial t} \right|_{\text{emissão induzida}} = \pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S) \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^S d\mathbf{v}. \quad (4.13)$$

A fim de analisar o termo referente ao fenômeno de decaimento na equação (4.8), vamos introduzir a seguinte quantidade

$$\mu_{\mathbf{k}} = k^3 \lambda_{De}^3 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}.$$

Vamos também fazer algumas considerações sobre a condição de ressonância envolvendo três comprimentos de ondas diferentes:

$$\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma''\omega_{\mathbf{k}''}^\gamma = 0.$$

Verificamos que, para tal condição, na abordagem dos modos lineares, há apenas uma possibilidade: duas ondas de Langmuir e uma íon-acústica, todas as outras possibilidades, a saber três ondas do mesmo tipo e duas ondas do tipo íon-acústica e uma Langmuir, não satisfazem a ressonância. Note que o coeficiente de decaimento envolvendo três ondas é dominado pela resposta não linear dos elétrons, assim a contribuição dos íons pode ser ignorada [9].

Seja a aproximação para a susceptibilidade de segunda ordem para as ondas L e S respectivamente [9]

$$|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 \approx \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}, \quad (4.14)$$

$$|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2 \approx \frac{e^2}{4T_e^2} \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}. \quad (4.15)$$

E inserindo as relações (4.14) e (4.15) no terceiro termo da equação (4.8) obtemos, respectivamente

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}} = -2 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \int V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S I_{\mathbf{k}}^L - \sigma''\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^L) d\mathbf{k}', \quad (4.16)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^S}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}} = - \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sigma\mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L \int V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{k}'} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) (\sigma\mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^S - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^S) d\mathbf{k}', \quad (4.17)$$

onde o coeficiente $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ é dado por

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi}{4} \frac{e^2}{T_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}.$$

Tal resultado está de acordo com resultados obtidos em abordagens anteriores, como aqueles descritos na Ref. [14], por exemplo.

Um aspecto interessante a ser mencionado é que as quantidades $N_{\mathbf{k}}^L = I_{\mathbf{k}}^L / \hbar \omega_{\mathbf{k}}^L$ e $N_{\mathbf{k}}^S = I_{\mathbf{k}}^S / \hbar \mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^S$ podem ser consideradas como densidades de partículas associadas às perturbações no plasma, de forma similar ao que se faz com a ideia de *fóton* no caso de ondas eletromagnéticas. Essas entidades associadas às perturbações no plasma recebem o nome de *plasmons*, e as quantidades $N_{\mathbf{k}}^L$ e $N_{\mathbf{k}}^S$ são então as densidades de número de *plasmons* [9]. Muito embora a teoria de turbulência fraca seja totalmente baseada nos limites clássicos, essa abordagem introduzindo o conceito de *plasmons* é muitas vezes utilizada na literatura, com $N_{\mathbf{k}}^L$ e $N_{\mathbf{k}}^S$ sendo utilizadas como quantidades fundamentais em vez de $I_{\mathbf{k}}^L$ e $I_{\mathbf{k}}^S$. Cabe também observar que existe conservação das densidades de número de *plasmons*, no que se refere aos processos descritos pelos termos relacionados ao decaimento de três ondas nas equações de turbulência fraca,

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}} \int \left(\frac{I_{\mathbf{k}}^L}{\omega_{\mathbf{k}}^L} + \frac{2I_{\mathbf{k}}^S}{\mu_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^L} \right) d\mathbf{k} = 0. \quad (4.18)$$

Vamos agora considerar os processos não lineares de espalhamento induzido e, para tanto, é necessário determinar os coeficientes de espalhamento para cada um deles. O primeiro caso a ser abordado será de uma onda de Langmuir espalhar outra onda também de Langmuir, e o coeficiente, que é parte determinante nesse processo, é $A_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$, com $\alpha = \beta = L$, definido na expressão (4.9).

Estamos interessados em situações nas quais $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \sim |(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}|$. Deve-se notar que a diferença das frequências das ondas espalhadas é diferente da frequência da onda do tipo íon-acústica $|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \neq |\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S|$, uma vez que o processo de espalhamento não envolve o termo de ressonância de decaimento que envolve três ondas.

Dessa maneira, a situação de interesse é aquela em que, para os elétrons, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}^L &\gg kv_{th}^e, \\ \omega_{\mathbf{k}'}^L &\gg k'v_{th}^e, \end{aligned}$$

e

$$\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^e$$

e algumas aproximações podem ser feitas. É sabido que os efeitos de espalhamento só tornam-se relevantes quando as instabilidades lineares atingem a saturação e, no contexto destes efeitos, podemos fazer as seguintes aproximações

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} &\approx \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^L} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{(\omega_{\mathbf{k}}^L)^2} + \dots, \\ \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}'}^L - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})} &\approx \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}'}^L} + \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}}{(\omega_{\mathbf{k}'}^L)^2} + \dots \end{aligned}$$

Além disso, a interação não linear onda-partícula é importante para o intervalo de velocidades ressonantes e números de onda que são inacessíveis do ponto de vista da interação linear de onda-partícula. Por exemplo, a condição de ressonância para ondas de Langmuir e elétrons é dada por $\omega_{\mathbf{k}}^L = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ e a respectiva velocidade de ressonância $v_{res} \sim \pm\omega_{pe}/k$, ou equivalentemente, o número de onda ressonante $k_{res} = \pm\omega_{pe}/v$. Já a interação não linear envolvendo duas ondas de Langmuir é governada pela condição $\omega_{\mathbf{k}}^L \pm \omega_{\mathbf{k}'}^L = \pm(\mathbf{k} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})$ e a velocidade ressonante associada é dada por $v_{res} \sim \pm(3\omega_{pe}/2)(k^2 - k'^2)\lambda_{De}/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$, que é muito menor que a velocidade ressonante para a interação linear [9].

Para os íons é esperado que

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_{th}^i,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'}^L \gg kv_{th}^i,$$

e que

$$|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^i.$$

Considerações meticolosas revelam que a resposta dos íons pode ser muito importante quando comparada à dos elétrons, conforme se vê na Ref. [9], que menciona artigos anteriores da literatura [29, 30]. Com base nas aproximações e considerações feitas, pode-se mostrar que [9] o coeficiente de espalhamento envolvendo duas ondas de Langmuir é dado por

$$\begin{aligned} A_{LL}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') &\approx -\frac{e^2}{m_e^2} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}{\omega_{\mathbf{k}}^L \omega_{\mathbf{k}'}^L} \left[(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) \text{Im} \chi_e(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_e}{m_i} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \text{Im} \chi_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) \right] \\ &= \frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \int (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) F_e - \frac{m_e}{m_i} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L F_i \right] \\ &\quad \times \delta \left[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}) \right] d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.19)$$

A seguir, vamos considerar o caso de espalhamento de uma onda de Langmuir com uma íon-acústica. O coeficiente de espalhamento é o $A_{LS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ e, nesse caso, temos que

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_{th}^e,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'}^S \ll k'v_{th}^e,$$

e

$$|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^S| \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^e,$$

para os elétrons e

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg kv_{th}^i,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'}^S > k'v_{th}^i,$$

e

$$|\omega_{\mathbf{k}}^L - \omega_{\mathbf{k}'}^S| \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^i,$$

para os íons. Podemos verificar, sem muitos detalhes, que a condição de ressonância do tipo $\sigma'\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} = 0$ não é significativa para os elétrons [9] e após algumas considerações e

aproximações é possível chegar ao seguinte coeficiente de espalhamento A_{LS}

$$\begin{aligned}
 A_{LS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &\approx \frac{e^2}{6m_e^2} \frac{1}{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L)^3} \frac{1}{k^2} \frac{[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \lambda_{De}^4} \\
 &= - \frac{\pi}{6\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e m_i} \frac{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \lambda_{De}^4}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Na literatura, muitas vezes esse tipo de interação é desconsiderada sem nenhuma justificativa. Para o caso contrário, o de uma onda do tipo íon-acústica espalhar uma onda do tipo Langmuir, o coeficiente apropriado é dado por $A_{SL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ e temos que

$$\omega_{\mathbf{k}}^S \ll kv_{th}^e,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'} \gg k'v_{th}^e,$$

e

$$|\omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^e,$$

para os elétrons e

$$\omega_{\mathbf{k}}^S > kv_{th}^i,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_{th}^i,$$

e

$$|\omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^L| \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^i,$$

para os íons. Tais desigualdades mostram que a interação não linear é caracterizada pela seguinte condição de ressonância

$$\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Esse tipo de interação é semelhante à interação linear que envolve ondas do tipo íon acústica, no entanto, considerando o fato de que o coeficiente $A_{SL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ aparece no lado direito da equação cinética para as ondas íon-acústicas, esse termo pode apenas representar uma correção de ordem superior no termo linear [9]. Dessa forma, por definição, esse termo é pequeno e pode ser ignorado. Essa situação é totalmente diferente quando comparado com o termo $A_{LS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. O termo de interação linear é controlado pela condição de ressonância $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$, enquanto que o coeficiente $A_{LS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ contém o fator $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})$ e de forma semelhante, o coeficiente $A_{LL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ é controlado pela condição de ressonância $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} = 0$.

Assim, as condições de ressonância dos termos lineares e não lineares não se sobrepõem umas às outras [9].

Por último, temos o caso de uma onda do tipo íon-acústica espalhar outra do mesmo tipo. O coeficiente que rege tal fenômeno é $A_{SS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ e esse caso deve satisfazer as seguintes desigualdades

$$\omega_{\mathbf{k}}^S \ll kv_{th}^e,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'}^S \ll k'v_{th}^e,$$

$$|\omega_{\mathbf{k}}^S - \omega_{\mathbf{k}'}^S| \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^e,$$

para os elétrons e

$$\omega_{\mathbf{k}}^S > kv_{th}^i,$$

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{k}'}^S &> k' v_{th}^i, \\ |\omega_{\mathbf{k}}^S - \omega - \mathbf{k}^S| &> |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^i,\end{aligned}$$

para os íons.

Após cuidadosas considerações para esse tipo de processo, o coeficiente de espalhamento de duas ondas S é dado pela seguinte expressão [9]

$$\begin{aligned}A_{SS}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= \mu_{\mathbf{k}} (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{e^2}{T_e^2} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^4 k'^4} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} \text{Im} \chi_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S) \\ &= -\mu_{\mathbf{k}} (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \frac{\pi}{\omega_{pe}} \frac{e^2}{m_e m_i} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^4 k'^4} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} \int (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \\ &\quad \times \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] d\mathbf{v},\end{aligned}\quad (4.21)$$

onde o termo $W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'}$ é dado por

$$W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} = \sigma \sigma' \frac{k'}{k} + \left[\frac{k^2 + k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma \sigma' k k'}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma \sigma' k k' + (\sigma k - \sigma' k')^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^2 / 2} \right]^2. \quad (4.22)$$

Coletando todos resultados obtidos em (4.19), (4.20) e (4.21), a expressão para a variação temporal da intensidade espectral, para o processo de espalhamento induzido das ondas L e S respectivamente, é dado por

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{espalhamento induzido}} &= -\frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \left\{ \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L) F_e \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m_e}{m_i} (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) F_e \right] \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] I_{\mathbf{k}'}^L - \frac{m_e}{m_i} \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')']^2}{6k^2 k'^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^4} \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \delta (\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}'}^S \right\} I_{\mathbf{k}}^L,\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^S}{\partial t} \right|_{\text{espalhamento induzido}} &= \frac{\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e m_i} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \mu_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^4 k'^4 \lambda_{De}} (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \\ &\quad \times \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] I_{\mathbf{k}}^S I_{\mathbf{k}'}^S,\end{aligned}\quad (4.24)$$

onde o coeficiente $W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'}$ é definido em (4.22).

4.1.3 Equação Cinética das Ondas para os Modos Não Lineares

Outra situação de interesse é quando o plasma torna-se suficientemente turbulento em decorrência da excitação dos modos lineares. Se a amplitude das ondas de Langmuir fica

suficientemente alta, então os termos não lineares de acoplamento na equação das ondas (4.5) tornam-se importantes e o plasma turbulento apresenta um novo modo próprio denominado de modo não linear [9].

Para descrever tal situação, partimos da parte real da expressão (4.5) sem ignorar termo algum. O resultado é uma expressão muito complicada que não representa uma equação do tipo dispersão, uma vez que envolve o acoplamento de diferentes componentes espectrais. Entretanto, dentro do contexto de validade da teoria de turbulência fraca, pode-se considerar que termos associados com o acoplamento não linear de segunda ordem, bem como o termo não linear de terceira ordem, sejam de amplitude muito pequena e portanto possam ser desprezados [9]. Nesse caso, a equação resultante ainda poderá manter interações não lineares entre modos lineares e modos não lineares, constituindo-se portanto em uma relação de dispersão linear para descrição de modos de oscilação intrinsecamente não lineares.

Indicaremos a solução da relação de dispersão e a intensidade espectral associada por

$$\omega = \omega_{\mathbf{k}}^N,$$

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = I_{\mathbf{k}}^N \left[\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^N) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^N) \right],$$

respectivamente. No presente contexto, assumiremos que as amplitudes espectrais das ondas representadas por $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}$ e $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}$ na equação (4.5) pertencem às seguintes ondas de Langmuir

$$\begin{aligned} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} &= I_{\mathbf{k}'}^L \left[\delta(\omega' - \omega_{\mathbf{k}'}^L) + \delta(\omega' + \omega_{\mathbf{k}'}^L) \right], \\ \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} &= I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \left[\delta(\omega - \omega' - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) + \delta(\omega - \omega' + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A partir dessas considerações e ignorando o acoplamento não linear entre os modos não lineares, podemos expressar a parte real da equação (4.5) da seguinte forma

$$\text{Re} \left(\epsilon(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^N) - 4 \sum_{\sigma'=\pm 1} \int \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)|^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)} I_{\mathbf{k}'}^L \right) I_{\mathbf{k}}^N d\mathbf{k}' = 0 \quad (4.26)$$

onde $\sigma = \pm 1$. Desde o início é esperado que o modo não linear tenha frequência próxima a $2\omega_{pe}$ e, utilizando a seguinte aproximação para a susceptibilidade de segunda ordem,

$$\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L) \approx \frac{i}{8\omega_{pe}^2} \frac{e}{m_e} a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'},$$

$$a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{k}')^2 + 3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')] }{kk' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|},$$

é possível reduzir a equação de dispersão não linear (4.26) para a forma seguinte [9]

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^{N2}} \left(1 + 3k^2 \lambda_{De}^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^{N2}} \right) - \frac{1}{\omega_{pe}^4} \frac{e^2}{(4m_e)^2} \int \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^2 (\omega_{\mathbf{k}}^N - \omega_{\mathbf{k}'}^L)^2}{(\omega_{\mathbf{k}}^N - \omega_{\mathbf{k}'}^L)^2 - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{L2}} I_{\mathbf{k}'}^L d\mathbf{k}' = 0. \quad (4.27)$$

Pode-se resolver essa equação primeiramente ignorando os efeitos térmicos. Considerando $T_e = 0$ obtém-se a solução de mais baixa ordem, a saber

$$\omega_{\mathbf{k}}^N = \omega_{pe}(2 + \epsilon_{\mathbf{k}}), \quad (4.28)$$

com $\epsilon_{\mathbf{k}}$ dado por

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{2}{3\omega_{pe}^4} \frac{e^2}{(4m_e)^2} \int a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^2 I_{\mathbf{k}'}^L.$$

De fato, a frequência associada ao novo modo próprio é próxima ao segundo harmônico da frequência de plasma. A fim de incluir os efeitos térmicos, fazemos um *ansatz* na solução do tipo

$$\omega_{\mathbf{k}}^N = \omega_{pe}(2 + \epsilon_{\mathbf{k}} + f k^2 \lambda_{De}^2).$$

O objetivo agora é determinar a constante f e, para tanto, vamos inserir a nova frequência $\omega_{\mathbf{k}}^N$ na relação de dispersão (4.27). Como resultado obtemos

$$1 - \frac{2}{3\omega_{pe}^4} \frac{e^2}{(4m_e)^2} \int \frac{a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^2 I_{\mathbf{k}'}^L}{\epsilon_{\mathbf{k}} + (f - 3/2)k^2 \lambda_{De}^2 + 3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - k'^2) \lambda_{De}^2} d\mathbf{k}' = 0 \quad (4.29)$$

O vetor de onda associado com o modo não linear pode ser considerado aproximadamente duas vezes o vetor de onda de Langmuir $\mathbf{k} \sim 2\mathbf{k}'$ e, em decorrência disso, o termo $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - k'^2)$ do denominador da equação acima pode ser aproximado por

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - k'^2) \sim k'^2 \sim k^2/4$$

Assim a equação (4.29) fica

$$1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}} + (f - 3/4)k^2 \lambda_{De}^2} = 0 \quad (4.30)$$

Assim, temos que $f = 3/4$ e a relação de dispersão para o modo não linear é dado por

$$\omega_{\mathbf{k}}^N = \omega_{pe}(2 + \epsilon_{\mathbf{k}} + 3/4 k^2 \lambda_{De}^2) \quad (4.31)$$

A solução acima mostra que, de fato, um plasma turbulento pode apresentar um modo próprio não linear eletrostático de frequência aproximadamente duas vezes a de Langmuir, e serve para dar suporte teórico a resultados de simulações numéricas obtidos em estudos anteriores [9].

A validade desse novo modo, o modo não linear (4.31), está condicionada ao fato de que as intensidades das ondas $I_{\mathbf{k}}^L$ são diferentes de zero (para um $\epsilon_{\mathbf{k}}$ finito), caso contrário, a presente discussão não tem validade. No entanto, essa possibilidade, de haver intensidade nula dos modos lineares, não é fisicamente relevante, pois flutuações térmicas espontâneas sempre estão presentes no plasma. O formalismo apresentado até o momento nesta revisão, que é fortemente baseado no trabalho "Generalized weak turbulence theory"[9], ignora os efeitos de emissão e espalhamento espontâneos, mas sabemos que esses efeitos existem e garantem a existência das ondas do modo linear ($I_{\mathbf{k}}^L$ não nulo). Efeitos espontâneos foram incluídos em trabalhos posteriores, que serão revisados mais adiante neste texto.

Concluimos que o modo não linear pode ser sempre considerado presente em um plasma, mesmo quando esse seja suficientemente quiescente, ou seja, para um $\epsilon_{\mathbf{k}}$ pequeno, porém finito. Entretanto, embora a relação de dispersão (4.31) prediga que é possível um plasma ter como soluções os modos não lineares, no regime linear as intensidades associadas são consideradas muito pequenas, e podem ser desprezadas. Essa é então a interpretação física para o modo $2\omega_{pe}$ não linear em um plasma de equilíbrio [9], razão pela qual ele é frequentemente desprezado.

A fim de discutir as intensidades das ondas do modo não linear, vamos considerar termo a termo da equação cinética seguinte. Com o intuito de ser consistente com a formulação da relação de dispersão, as interações entre modos próprios não lineares foram desconsideradas. Utilizando as relações (4.25) no contexto da equação (4.8), obtemos como resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^N}{\partial t} = & -\frac{2 \operatorname{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N)}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N)} I_{\mathbf{k}}^N - \sum_{\sigma'=\pm} \int A_{NL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^N d\mathbf{k}' + \frac{4\pi}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N)} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm} \int d\mathbf{k}' \\ & \times |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L)|^2 \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\ & \times \left(\frac{I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^N}{\epsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L)} + \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^N}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}}^L)} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde o coeficiente $A_{NL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ é referente ao processo de espalhamento induzido e está definido em (4.9) com $\alpha = N$ e $\beta = L$. Os termos representam os mesmos processos antes definidos, mas agora para os modos não lineares: o primeiro termo representa o processo de emissão/absorção induzido, o segundo, de espalhamento induzido e o terceiro, de decaimento/união.

Para os modos não lineares as seguintes desigualdades são válidas

$$\omega_{\mathbf{k}}^N \gg kv_{th}^e,$$

$$\omega_{\mathbf{k}'}^L \gg k'v_{th}^e,$$

e

$$\omega_{\mathbf{k}}^N - \omega_{\mathbf{k}'}^L \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|v_{th}^e.$$

Pode-se observar que todas as três ondas envolvidas nos processos não lineares são de alta frequência e sob tais circunstâncias, na aproximação de mais baixa ordem, a susceptibilidade de segunda ordem é puramente imaginária. Com o intuito de examinar apropriadamente a equação cinética das ondas no modo não linear é necessário conservar um termo de ordem superior na aproximação da susceptibilidade. Analisando as diferentes condições de ressonância envolvendo as ondas de alta velocidade de fase, percebe-se que aquela envolvendo a interação não linear entre ondas e partículas $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L \simeq (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$ pode levar a ressonâncias mais significativas com a função distribuição de partículas (pode ocorrer em velocidades de fase não tão altas quanto as outras ressonâncias), de modo que a susceptibilidade de segunda ordem pode ser expressa na seguinte forma aproximada [9]

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) \simeq & \frac{i}{2} \frac{e}{m_e} \frac{1}{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L)(\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L)} \frac{1}{kk'|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L)} \right. \\ & \times \left. \left(\frac{k^2}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N} [\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')] + \frac{k'^2}{\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L} [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')] \right) - |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \chi_e(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Procedendo de forma similar, obtemos a susceptibilidade de terceira ordem. Considerando a onda $(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L)$ como arbitrária e $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N$ e $\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L$ como rápidas, podemos utilizar a seguinte expressão aproximada [9]

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L | -\mathbf{k}', -\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N) \simeq & -\frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e^2} \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N)^3 (\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L)} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \\ & \times \operatorname{Im} \chi_e(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Inserindo as aproximações adequadas para as susceptibilidades de segunda e terceira ordem no coeficiente A_{NL} temos a seguinte expressão

$$A_{NL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \approx -\frac{\pi}{9\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e^2} (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N) b_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^2 \int (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}],$$

na qual o coeficiente $b_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ é dado por

$$b_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}}{[k^2 - 4(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}'] \lambda_{De}^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}/3},$$

e os coeficientes $a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ e $\epsilon_{\mathbf{k}}$ foram definidos anteriormente.

Assim, finalmente obtemos a equação cinética para as ondas dos modos não lineares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^N}{\partial t} &= 4\pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^N d\mathbf{v} + \frac{\pi}{16\omega_{pe}^4} \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^N \int a_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^2 \\ &\times (\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^L) I_{\mathbf{k}}^N d\mathbf{k}' + \frac{\pi}{9\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma'=\pm} \int d\mathbf{k}' \int (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N) b_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \\ &\times \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^N d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como já mencionado anteriormente, o primeiro termo do lado direito da expressão representa o processo de emissão/absorção induzido, envolvendo elétrons e o modo não linear. O segundo define o processo de decaimento/união, o qual envolve duas ondas do tipo L e uma do tipo N . Por fim, o terceiro e último termo representa o processo de espalhamento induzido do modo próprio não linear com uma onda de Langmuir [9].

É interessante notar que da condição de ressonância não linear associada ao terceiro termo, $(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}) = 0$, é esperado que o vetor de onda associado ao modo não linear, \mathbf{k} , seja aproximadamente duas vezes o tamanho do vetor associado às ondas de Langmuir excitadas no modo normal, $(\mathbf{k} \sim 2\mathbf{k}')$, para que a instabilidade do tipo onda-partícula seja mais eficiente possível. Se, de fato, tivermos $(\omega_{\mathbf{k}}^N \sim 2\omega_{\mathbf{k}'}^L)$ e $(\mathbf{k} \sim 2\mathbf{k}')$, então podemos ver que as regiões de velocidades ressonantes que envolvem as condições linear e não linear de ressonância entre onda-partícula, $(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = 0$ e $(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}) = 0$ respectivamente, quase se sobrepõem. Realmente, muitos resultados de simulações numéricas, citados como exemplos da literatura na Ref. [9], mostram que o modo próprio não linear é excitado em intervalos próximos aos harmônicos da frequência de plasma $\omega_{\mathbf{k}}^N \sim 2\omega_{\mathbf{k}'}^L$, assim como os números de onda $\mathbf{k} \sim 2\mathbf{k}'$.

Modificação na Equação Cinética das Ondas

É sabido que os modos não lineares são excitados a partir das interações entre elétrons e ondas de Langmuir [9]. Dessa forma, é de se esperar que haja efeitos, posteriores às excitações dos modos não lineares, sobre as ondas de Langmuir dos modos lineares, os quais devem ser incorporados à equação cinética das ondas a fim de obtermos uma descrição mais adequada à situação. Tais efeitos podem ser discutidos a partir de uma análise da equação (4.5). Segundo

apresentado na Ref. [9], essas considerações levam à seguinte forma aproximada para incorporar os efeitos dos modos não lineares na equação cinética das ondas de Langmuir

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{modificado}} &= - \sum_{\sigma'=\pm 1} \int A_{LN}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}}^L d\mathbf{k}' + \frac{8\pi}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L)} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \\
 &\times |\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^N | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^N)|^2 \left(\frac{I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}}^L}{\epsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L)} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L)} \right) \\
 &\times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^N - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L).
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Podem ser feitas as mesmas hipóteses anteriormente utilizadas no modo não linear para o coeficiente de espalhamento, A_{NL} , e para a susceptibilidade de segunda ordem, $\chi^{(2)}$, e dessa forma, a equação final que ilustra de forma adequada a modificação na equação cinética das ondas de Langmuir é dada por [9]

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} \right|_{\text{modificado}} &= - \frac{\pi}{8\omega_{pe}^4} \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \int d\mathbf{k}' a_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^2 (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^N I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}}^L) \\
 &\times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^N - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) + \frac{\pi}{9\omega_{pe}^2} \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) b_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^2 \\
 &\times (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^N - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}}^L.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

4.1.4 Equação Cinética das Partículas

Efeitos dos Fenômenos Associados aos Modos Lineares

Esta subseção versará sobre os termos da equação cinética das partículas associados aos efeitos de emissão induzida, decaimento e espalhamento. Uma das aproximações mais utilizadas é a aproximação de difusão quase-linear, a qual é equivalente a uma equação que descreve o efeito de emissão induzida sobre as partículas. Essa equação pode ser obtida se ignorarmos os efeitos não lineares entre ondas e ondas e partículas na equação (4.6). O resultado obtido é [9]

$$\left. \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\text{emissão induzida}} = \pi \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{\alpha=L,S} \sum_{\sigma=\pm 1} \int \frac{k_i k_j}{k^2} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial v_j} d\mathbf{k}. \tag{4.38}$$

É interessante salientar que para os elétrons, tanto a turbulência de Langmuir quanto a íon-acústica contribuem para a difusão. No entanto, para os íons a turbulência de Langmuir pode ser desprezada, uma vez que a frequência dessas ondas é muito alta e os íons não conseguem responder.

A seguir, vamos considerar a influência do fenômeno de decaimento envolvendo três ondas na equação para a evolução das partículas. Tal efeito provém do segundo termo do lado direito da equação (4.6) e, em particular, o processo de decaimento envolve apenas as contribuições dos resíduos do inverso das funções dielétricas lineares. As contribuições da parte

principal dizem respeito principalmente aos processos não lineares de espalhamento induzido. Vamos primeiro considerar os efeitos de decaimento que envolvem apenas os modos lineares [9]

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}} &= -\text{Re} \frac{\pi q_\alpha^3}{3 m_\alpha^3} \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{\sigma, \sigma', \sigma'' = \pm 1} \sum_{\alpha, \beta, \gamma = L, S} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{k_i k'_j (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_k}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \\
 &\times \frac{\text{Im} \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^\gamma)}{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left(\frac{I_{\mathbf{k}'}^\beta I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^\gamma}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha)} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^\beta I_{\mathbf{k}}^\alpha}{\epsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^\gamma)} \right. \\
 &\times \left. - \frac{I_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^\gamma I_{\mathbf{k}}^\alpha}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta)} \right) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^\gamma) \\
 &\times \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\sigma'' \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}^\gamma - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{1}{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) F_\alpha.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Sem entrar nos detalhes, no entanto, pode-se argumentar que o processo de decaimento não deve ter efeitos sobre as partículas, de modo que

$$\left. \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}} = 0.$$

O argumento a ser utilizado pode ser encontrado na Ref. [9] e pode ser expresso da seguinte forma: uma vez que não há troca de momentum e ou energia entre as partículas e as ondas, é esperado que o decaimento não influencie a evolução das partículas. Para mostrar que esse resultado está correto, primeiramente devemos lembrar quais as possibilidades de decaimento envolvendo três ondas no modo linear: $(\alpha, \beta, \gamma) = (L, L, S); (L, S, L)e(S, L, L)$. Em seguida, note que a interação (L, S, L) pode ser expressa em termos de (L, L, S) , apenas inserindo um fator de 2. Então, pode-se empregar a mesma aproximação na susceptibilidade feita na expressão (4.14). Para os elétrons, as seguintes condições se aplicam

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg k v_{th}^e,$$

e

$$\omega_{\mathbf{k}}^S \ll k v_{th}^e.$$

Os elétrons que estão em ressonância com as ondas de Langmuir e com as íon-acústicas são descritos pela equação de difusão quase-linear. Aqui estamos principalmente interessados no intervalo do espaço de velocidades que é inacessível do ponto de vista da ressonância linear entre ondas e partículas. Como resultado, podemos fazer as seguintes aproximações para os denominadores ressonantes

$$\mathcal{P} \left[\frac{1}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \right] \approx \frac{1}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L)},$$

e

$$\mathcal{P} \left[\frac{1}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \right] \approx -\frac{1}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}.$$

Já para os íons, temos a condição

$$\omega_{\mathbf{k}}^S > \mathbf{k} \cdot \mathbf{v},$$

e é possível fazer a seguinte aproximação

$$\mathcal{P} \left[\frac{1}{(\sigma\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \right] \approx \frac{1}{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S)}.$$

Com essas aproximações, pode-se mostrar que o lado direito da equação (4.39) é nulo. Assim, o processo de decaimento não tem influência na evolução temporal das partículas.

A seguir, vamos considerar os efeitos do espalhamento induzido na evolução das partículas. Tais efeitos estão associados com a parte principal do segundo e terceiro termos da equação cinética das partículas (4.6) e, levando em conta apenas os modos lineares L e S , podemos obter a seguinte equação [9]:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right|_{esp\ ind} &= -\text{Re} \frac{q_\alpha^3}{3m_\alpha^3} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} \int \frac{k_i k'_j (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_k}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \\ &\times \mathcal{P} \left\{ \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \sum_{\alpha, \beta} \frac{2\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta)}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta)} \right. \\ &\times \frac{I_{\mathbf{k}'}^\beta I_{\mathbf{k}}^\alpha}{\sigma \omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{1}{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) \\ &- \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sum_{\beta, \gamma} \chi^{(2)*}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma) \frac{I_{\mathbf{k}'}^\beta I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma) \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \\ &\left. \times \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{1}{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) \right\} F_\alpha d\mathbf{k}' \\ &+ \text{Im} \frac{q_\alpha^4}{m_\alpha^4} \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \sum_{\alpha, \beta} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{k_i k'_j k'_k k_l}{k^2 k'^2} \frac{I_{\mathbf{k}'}^\beta I_{\mathbf{k}}^\alpha}{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial v_k} \frac{1}{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_l} - \frac{\partial}{\partial v_l} \frac{1}{\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_k} \right) F_\alpha. \end{aligned} \quad (4.40)$$

É possível mostrar que o segundo termo do lado direito da equação acima é nulo, pois se revela, sob as mesmas aproximações já feitas até aqui, ser de caráter puramente imaginário. Dessa forma, a evolução temporal da função distribuição de partículas é dada pelos outros dois termos.

A fim de obter uma equação mais adequada para a evolução temporal dos elétrons e dos íons, algumas considerações sobre os denominadores ressonantes fazem-se necessárias. Esperamos que a expressão (4.40) exerça um papel maior em regiões nas quais o termo de ressonância linear entre ondas e partículas seja menos eficaz. Como consequência disso, os denominadores tais como

$$\frac{1}{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}$$

e

$$\frac{1}{\sigma_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}},$$

que aparecem nessa equação, irão contribuir apenas com a parte principal na integração. Nas interações caracterizadas por denominadores do tipo

$$\frac{1}{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}}$$

ou

$$\frac{1}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}},$$

podemos reduzi-los a condições de ressonância linear,

$$\frac{1}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}}$$

e

$$\frac{1}{-\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}},$$

respectivamente, pois a condição

$$\omega_{\mathbf{k}}^L \gg \omega_{\mathbf{k}}^S,$$

é aplicável. No entanto, não é interessante, porque as regiões em que essas condições são válidas se sobrepõem com os termos lineares, de modo que os termos não lineares devem representar apenas uma correção de pequena magnitude.

A seguir, vamos fazer algumas considerações sobre os elétrons e os íons. Para os elétrons temos que, no contexto da parte principal associada aos denominadores ressonantes do tipo

$$\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}},$$

e

$$\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}},$$

as condições $\omega_{\mathbf{k}}^L \gg \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ e $\omega_{\mathbf{k}}^S \ll \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ são aplicáveis e assim podemos ver que apenas os termos que envolvem duas ondas de Langmuir $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} = 0$ ou duas ondas íon acústicas $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} = 0$ sobrevivem. Lembrando que $\omega_{\mathbf{k}}^S \ll \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, vemos que a condição de ressonância é satisfeita para velocidades muito abaixo da velocidade térmica, onde a derivada da distribuição é muito pequena. Dessa forma, o espalhamento envolvendo ondas S , por elétrons, pode ser desprezado em comparação com o espalhamento envolvendo ondas L .

Para os íons, mesmo que a desigualdade $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S > \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ seja válida para a população térmica, a ressonância não linear do tipo $\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S \approx (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$ pode ser satisfeita. A base dessa consideração é que a ressonância não linear que envolve a parte principal $\mathcal{P} [1/(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]$ pode ser aproximada por $1/(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S)$ e, assim, o termo de turbulência íon-acústica é dominante sobre o termo da turbulência de Langmuir, já que para os elétrons tal condição não pode ser satisfeita. Levando todas as considerações em conta, podemos obter a seguinte equação para a evolução temporal dos elétrons [9]

$$\left. \frac{\partial F_e}{\partial t} \right|_{esp\ ind} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} M_{ijk}^e \frac{\partial F_e}{\partial v_k} - \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} H_{ijkl}^e \frac{\partial^2 F_e}{\partial v_k \partial v_l}, \quad (4.41)$$

onde os coeficientes M_{ijk}^e e H_{ijkl}^e são dados por

$$\begin{aligned} M_{ijk}^e &= \frac{\pi}{6\omega_{pe}^4} \frac{e^4}{m_e^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k^2 k'^2} [(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] k_i k'_j (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_k \\ &\times \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \delta [\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^L, \end{aligned} \quad (4.42)$$

e

$$H_{ijkl}^e = \frac{\pi}{2\omega_{pe}^4} \frac{e^4}{m_e^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{k_i k_j k'_k k'_l}{k^2 k'^2} [(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]^2 \times \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (k - k') \cdot v] I_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^L, \quad (4.43)$$

respectivamente. Para os íons, podemos obter a seguinte equação [9]

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial t} \right|_{esp \text{ ind}} = - \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} M_{ijk}^i \frac{\partial F_i}{\partial v_k} - \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} H_{ijkl}^i \frac{\partial^2 F_i}{\partial v_k \partial v_l}, \quad (4.44)$$

onde os coeficientes M_{ijk}^i e H_{ijkl}^i são dados por

$$M_{ijk}^i = \frac{\pi}{6\omega_{pe}^4} \frac{e^4}{m_e m_i^3} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' k_i k_j k'_k k'_l (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_k \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{k^2 k'^2} \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \left\{ [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L] I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^L \times \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] + \frac{m_i}{m_e} \frac{I_{\mathbf{k}'}^S I_{\mathbf{k}}^S}{k^2 k'^2 \lambda_{De}^4} \left(\frac{k^2 + k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma \sigma' k k'}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma \sigma' k k' + (\sigma k - \sigma' k') |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 \lambda_{De}^2 / 2} \right) \times (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S) \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \right\}, \quad (4.45)$$

e

$$H_{ijkl}^i = \frac{\pi}{2\omega_{pe}^4} \frac{e^4}{m_i^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{k_i k_j k'_k k'_l}{k^2 k'^2} \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \left\{ (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)^2 I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^L \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \times \frac{2 I_{\mathbf{k}'}^S I_{\mathbf{k}}^S}{k^2 k'^2 \lambda_{De}^4} \delta [\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \right\}, \quad (4.46)$$

respectivamente.

Efeitos dos Fenômenos Associados aos Modos Não Lineares

Por fim, vamos considerar os efeitos da excitação dos modos não lineares na evolução das partículas. Note que como estamos considerando que apenas ondas de Langmuir são excitadas, e os íons não sofrem nenhuma correção na equação de evolução temporal. A equação que melhor descreve os efeitos dos modos não lineares sobre os elétrons é similar àquela já discutida para o efeito de espalhamento induzido (4.40) [9]. Uma vez que a excitação dos modos não lineares decorre da interação das ondas de Langmuir dos modos lineares e oscilações não lineares de alta frequência é apropriado apenas considerar duas combinações na equação acima mencionada: $(\alpha = L, \beta = N)$ e $(\alpha = N, \beta = L)$. O procedimento geral é semelhante ao aplicado no caso do termo de espalhamento induzido e, assim como anteriormente, a contribuição da parte imaginária surge do resíduo do denominador ressonante não linear, enquanto que os outros denominadores ressonantes contribuem apenas com as respectivas partes principais. Tendo em vista esses fatos, o resultado final fica [9]

$$\left. \frac{\partial F_e}{\partial t} \right|_{NL} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} M_{ijk}^{NL} \frac{\partial F_e}{\partial v_k} - \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} H_{ijkl}^{NL} \frac{\partial^2 F_e}{\partial v_k \partial v_l}, \quad (4.47)$$

onde os coeficientes M_{ijk}^{NL} e H_{ijkl}^{NL} são dados por

$$\begin{aligned}
M_{ijk}^{NL} &= \frac{\pi}{72\omega_{pe}^6} \frac{e^4}{m_e^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{k_i k_j (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_k}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} [(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]^3 \\
&\times \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \sigma \sigma' \left\{ b_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta \left[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right] I_{\mathbf{k}}^N I_{\mathbf{k}'}^L \right. \\
&\left. + b_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \delta \left[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^N - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right] I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}}^L \right\}, \tag{4.48}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H_{ijkl}^{NL} &= \frac{\pi}{8\omega_{pe}^4} \frac{e^4}{m_e^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{k_i k_j k_k k_l}{k^2 k'^2} [(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]^2 \\
&\times \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} \left\{ \delta \left[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^N - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right] I_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^N \right. \\
&\left. + \delta \left[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^N - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v} \right] I_{\mathbf{k}'}^N I_{\mathbf{k}}^L \right\}, \tag{4.49}
\end{aligned}$$

respectivamente.

Um dos aspectos mais importantes do formalismo generalizado apresentado aqui é a incorporação do harmônico das ondas de Langmuir, que é solução da relação de dispersão não linear para um plasma turbulento (o modo não linear) [9]. O conjunto de equações mostrado aqui é auto consistente e os efeitos de emissão e espalhamento espontâneos são ignorados, bem como os eletromagnéticos. No entanto, tais efeitos já foram incluídos no formalismo e são bem conhecidos na literatura [11, 10, 13, 12, 31, 32], e serão mencionados na próxima seção.

4.2 Generalização da Teoria de Turbulência Fraca no Caso Eletromagnético

A teoria de turbulência fraca foi, predominantemente, como mencionado anteriormente, formulada entre o fim dos anos 1950 e início da década de 1970 por cientistas da extinta União Soviética. A maior parte dos estudos da literatura que empregam a teoria de turbulência fraca, particularmente aqueles que tentam estudar a auto consistência da evolução temporal das ondas e das partículas, são dedicados à problemas que envolvem oscilações eletrostáticas em plasmas não magnetizados. Efeitos eletromagnéticos, quando incorporados, usualmente aparecem apenas no sentido formal.

Como visto na seção anterior, em período relativamente recente uma nova formulação da teoria de turbulência fraca foi desenvolvida a partir de primeiros princípios, primeiramente para o caso eletrostático não magnetizado, e chegou a expressões detalhadas para todos os coeficientes e as quantidades físicas envolvidas [9]. Em trabalhos posteriores [10, 11, 12, 13], foram incorporados ao formalismo não só efeitos de emissão e espalhamento espontâneos para as ondas dos tipos L e S , como também os efeitos de espalhamento e decaimento envolvendo ondas eletromagnéticas (T). Tal formalismo tem sido empregado em inúmeros estudos numéricos computacionais, em uma e duas dimensões, em sua grande maioria voltados para o estudo da instabilidade feixe-plasma, como se pode ver, por exemplo, na lista de referências de recente artigo de revisão [12].

Incorporar na teoria as ondas T significa não só obter uma equação cinética para tais ondas, como também incluir os efeitos das interações dessas com ondas do tipo L e S . Nesta seção será apresentada primeiramente a equação de evolução temporal das partículas. Vamos considerar o termo de emissão induzida e desprezar as contribuições associadas aos termos de espalhamento induzido e aos modos não lineares, discutidos na seção anterior, e vamos incluir o termo associado às flutuações espontâneas, incorporado à teoria em artigo de 2005 [10]. A seguir, serão apresentadas as equações cinéticas para as ondas S e L , com a inclusão dos termos associados às interações com as ondas T . Logo após, será abordada a equação cinética para as ondas T , apresentando e discutindo os novos termos. Por fim, será apresentado o resultado de uma análise numérica computacional, ainda preliminar, da evolução temporal dos termos das ondas T para tempos curtos.

4.2.1 Equação Cinética das Partículas

A equação para as partículas do tipo $\alpha = e, i$ é dada por [11]:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \frac{\pi q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L,S} \int \mu_{\mathbf{k}}^\alpha \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{m_\alpha \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L}{4\pi^2 k} F_\alpha(\mathbf{v}) + \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \mathbf{k}}{\mu_{\mathbf{k}}^\alpha k} \frac{\partial F_\alpha(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right] \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{k}, \quad (4.50)$$

onde os coeficientes $\mu_{\mathbf{k}}^\alpha$ são dados por

$$\mu_{\mathbf{k}}^L = 1, \quad \mu_{\mathbf{k}}^T = 1,$$

e

$$\mu_{\mathbf{k}}^S = |k|^3 \lambda_{De}^3 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e} \right)^{1/2}.$$

Também temos que $I_{\mathbf{k}}^{\sigma\beta} = \langle (E_{\mathbf{k}}^{\sigma\beta})^2 \rangle$, com $\beta = L, S, T$, representa a densidade de energia espectral das ondas, onde $E_{\mathbf{k}}^{\sigma L}$, $E_{\mathbf{k}}^{\sigma S}$ e $E_{\mathbf{k}}^{\sigma T}$ são as componentes espectrais do campo elétrico para as ondas L , S e T respectivamente, onde $\sigma = \pm 1$ é o sinal da velocidade de fase.

O segundo termo do lado direito da equação (4.50) refere-se ao efeito de difusão quase-linear, o mesmo já discutido no capítulo 3 e também mencionado na seção 4.1. O primeiro termo do lado direito da equação está associado às flutuações espontâneas e é proporcional à função distribuição.

4.2.2 Equação Cinética das Ondas dos Tipo L, S e T

Equação das Ondas de Langmuir

Para as ondas do tipo L , temos a seguinte equação cinética [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} &= \mu_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \left[n e^2 F_e(\mathbf{v}) + \pi(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right] \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ &+ LdLS + LdLT + LdST + LdTT + LsLL + LsLT. \end{aligned} \quad (4.51)$$

O segundo termo do lado direito da equação acima representa o fenômeno de emissão induzida, apresentado na seção 4.1, e o primeiro termo, o fenômeno de emissão espontânea. Os

termos de decaimento estão indicados da seguinte forma: por exemplo, o termo $LdLS$, também discutido na seção referida, representa o termo de decaimento envolvendo duas ondas do tipo L e uma do tipo S , e assim por diante. Já os termos $LsLL$ e $LsLT$ denotam, respectivamente, os fenômenos de espalhamento envolvendo duas ondas L , mencionado anteriormente, e uma onda L e uma onda T .

Seja o termo de decaimento envolvendo uma onda de Langmuir e duas ondas transversais:

$$\begin{aligned}
 LdT T &= +\pi\sigma\omega_{\mathbf{k}} \frac{e^2}{4m_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{k^2}{(\omega_{\mathbf{k}'}^T)^2 (\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^T)^2} \left(1 + \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \right) \\
 &\times \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'T} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''T}}{2} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^T \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''T}}{2} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^T \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'T}}{2} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^T - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^T).
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Sobre os sinais σ' e σ'' temos: se eles forem iguais, a condição de ressonância é possível apenas para frequências $\omega_{\mathbf{k}}^L$ próximas ou acima de $2\omega_{pe}$, onde o espectro das ondas L não é relevante. Se forem diferentes, a condição de ressonância pode ser satisfeita para valores de número de onda em que o espectro é relevante, no caso de \mathbf{k} e \mathbf{k}' serem próximos e de pequeno módulo. Devido à simetria $\omega_{-\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}$, tais considerações sobre σ' e σ'' são revertidas se \mathbf{k}' ou $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ mudam de sinal. O termo $LdT T$ é inicialmente nulo, no entanto, uma vez que o espectro das ondas T é inexistente no instante inicial. Os outros termos das ondas L e S podem ser analisados de maneira similar.

Equação das Ondas Íon Acústicas

Para as ondas do tipo S , temos a seguinte equação cinética [11]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} &= \mu_{\mathbf{k}}^S \frac{\omega_{pe}}{k^2} \int \left[ne^2 [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] + \pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right] \\
 &\times \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{v} + SdLL + SdLT + SsSS.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

O segundo termo do lado direito da equação acima refere-se ao fenômeno de emissão induzida, já mencionado na seção 4.1; o primeiro, ao fenômeno de emissão espontânea. O terceiro e o quarto termos estão associados ao efeito de decaimento envolvendo uma onda do tipo S e duas do tipo L , mencionado também na referida seção, e uma do tipo S em uma do tipo L e outra do tipo T , respectivamente. O último termo refere-se ao termo de espalhamento envolvendo duas ondas do tipo íon-acústica.

Equação das Ondas Transversais

Considerando os efeitos de espalhamento e decaimento, para as ondas transversais temos a seguinte equação para a evolução temporal do espectro [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{\mu_{\mathbf{k}}^T} = TdLL + TdLS + TdTL + TsTL. \tag{4.54}$$

Os três primeiros termos referem-se aos efeitos de decaimento envolvendo uma onda T e duas ondas L , uma onda T , uma onda L e uma onda S e duas ondas T e uma onda L , respectivamente. O quarto termo denota o efeito de espalhamento envolvendo duas ondas T e uma onda L . Tal fenômeno envolve as partículas também. A relação de dispersão para as ondas T é bem conhecida na literatura e é dada por

$$\omega_{\mathbf{k}}^T = \omega_{pe} \left(1 + \frac{c^2 k^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2}.$$

Efeitos de natureza quase-linear são caracterizados por apresentarem condições de ressonância características. Para as ondas transversais, a velocidade de fase associada com as ondas é maior que a velocidade da luz e, portanto, a condição de ressonância não é satisfeita e fenômenos dessa natureza não existem aqui.

A seguir serão abordadas as principais características de cada termo da equação (4.54). Seja o termo de decaimento envolvendo uma onda T e duas ondas L :

$$\begin{aligned} TdLL = & -\pi\sigma\mu_{\mathbf{k}}^T\omega_{\mathbf{k}}^T \frac{e^2}{32m_e^2\omega_{pe}^2} \sum_{\sigma',\sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}'}^L\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L(\mathbf{k}\times\mathbf{k}')^2}{k'^2k''^2|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2} \left(\frac{k'^2}{\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L} - \frac{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2}{\sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L} \right)^2 \\ & \times \left(\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L 2\mu_{\mathbf{k}}^T} + \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L 2\mu_{\mathbf{k}}^T} - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^T \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L} \right) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L). \end{aligned} \quad (4.55)$$

O termo acima descreve as interações entre as ondas T e as ondas L . O espectro das ondas L é significativo para valores de k tais que $kv_e/\omega_{pe} < 1$, com $\omega \geq \omega_{pe}$. Sobre a condição de ressonância observamos que se σ' for igual a σ'' teremos $|\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L + \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L| \geq 2\omega_{pe}$; já se tivermos σ' diferente de σ'' , a condição de ressonância não pode ser satisfeita. Devido à simetria $\omega_{-\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}$, as considerações acima feitas acerca de σ' e σ'' são revertidas se \mathbf{k}' ou $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ mudam de sinal.

A condição de ressonância será satisfeita para as ondas T cuja frequência angular seja próxima a $2\omega_{pe}$ que, devido ao fator c^2/v_e^2 , na relação de dispersão, significa ter k significativamente menor que k' . Por outro lado, o fator $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$ no denominador indica que o efeito do termo é maximizado para \mathbf{k} próximos a \mathbf{k}' , mas o termo $\mathbf{k} \times \mathbf{k}'$ no numerador requer que esses dois vetores não sejam paralelos. A situação é complexa. Qualitativamente, podemos dizer que para cada vetor de onda \mathbf{k} haverá algum outro vetor de onda \mathbf{k}' na integração sobre todos \mathbf{k}' , não paralelo à \mathbf{k} , com módulo consideravelmente maior do que k , no qual o integrando será mais significativo. É também previsto que o efeito do termo $TdLL$ será mais significativo para valores relativamente pequenos de k .

Seja agora o termo correspondente ao espalhamento envolvendo uma onda T e uma onda L :

$$\begin{aligned} TsTL = & +\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T \frac{e^2}{2m_e^2\omega_{pe}^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{\mu_{\mathbf{k}}^T\mu_{\mathbf{k}'}^L(\mathbf{k}\times\mathbf{k}')^2}{k^2k'^2} \left[\frac{ne^2}{\omega_{pe}^2} \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L}}{\mu_{\mathbf{k}'}^L} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2\mu_{\mathbf{k}}^T} \right) \right. \\ & \left. \times [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] + \pi \frac{m_e}{m_i} \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma T}}{2\mu_{\mathbf{k}}^T} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right] \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^T - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A condição de ressonância só é satisfeita se tivermos $\sigma' = \sigma$ [28]. Partículas com baixas velocidades, que são dominantes na função distribuição, estão em ressonância com as ondas de tal modo que $\omega_{\mathbf{k}}^T \simeq \omega_{\mathbf{k}'}^L$ e, para cada \mathbf{k} existe algum valor de \mathbf{k}' que será ressonante para algum valor pequeno de v .

O termo induzido é muito pequeno por conta do fator $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$. Quanto às contribuições dos termos de emissão espontânea, é possível ter uma noção aproximada do seu comportamento supondo que as funções de distribuição são do tipo Maxwelliana e fazendo a integração sobre $d\mathbf{v}$. A análise do integrando resultante mostra que para os instantes iniciais da evolução, para os quais a intensidade das ondas T é ainda desprezível frente à intensidade das ondas L , o termo $TsTL$ é proporcional a $(\omega_{\mathbf{k}}^T)^3 I_{\mathbf{k}'}^L \simeq (\omega_{\mathbf{k}}^T)^3 g/2 / (\omega_{\mathbf{k}}^T)^2 = (\omega_{\mathbf{k}}^T g/2)$. Dessa forma, o termo é aproximadamente parabólico em \mathbf{k} , para valores pequenos de módulo de \mathbf{k} , o que é observado em resultados numéricos.

Resultados numéricos preliminares sugerem que, ao longo da evolução temporal, a evolução para grandes valores do módulo de \mathbf{k} estabiliza logo que o espectro das ondas T cresce o suficiente (efeito estabilizador do segundo termo na contribuição espontânea). A região de grandes comprimentos de onda (pequenos valores do módulo de \mathbf{k}) continua a crescer, até que o espectro atinge um valor máximo em $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (de forma semelhante ao espectro das ondas L). É possível obter uma solução analítica assintótica, aproximada, que mostra, com efeito, que um espectro de ondas T pode ser gerado devido aos processos de espalhamento, mesmo para plasmas térmicos [33]. A solução assintótica aproximada oferece um valor máximo em $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Recentemente, também foi produzida uma solução numérica, partindo de uma situação de equilíbrio térmico, que mostrou a geração de um espectro de ondas do tipo T geradas por processos não lineares, que corroborou a previsão teórica aproximada [28].

O termo de decaimento envolvendo uma onda transversal, uma onda de Langmuir e uma onda íon-acústica $TdLS$ pode ser analisado de maneira similar. O termo $TdTL$ depende do produto das intensidades de duas ondas T e também do produto das intensidades de uma onda T e uma onda L , e é nulo no instante inicial, quando o espectro das ondas T é nulo.

4.2.3 Análise Numérica

No âmbito do grupo de Física de Plasmas da UFRGS, o formalismo desenvolvido nos trabalhos recentes [9, 10, 11, 13, 12] vem sendo utilizado para o estudo da interação entre um feixe de elétrons e um plasma, interação essa que possui muitas aplicações em plasmas espaciais e de laboratório.

Nos primeiros estudos foi utilizada a aproximação unidimensional, tanto para o espectro das ondas, quanto para a função distribuição de partículas, sendo consideradas apenas ondas eletrostáticas do tipo L e S [32, 34]. Mesmo mais recentemente, a abordagem unidimensional ainda vem sendo utilizada [27]. Posteriormente, foi iniciada a análise em duas dimensões, ainda considerando apenas o caso eletrostático, inicialmente considerando os efeitos quase-lineares, decaimentos de ondas e flutuações espontâneas e, em seguida, de espalhamento [31, 26]. Nessas abordagens numéricas, as equações diferenciais foram aproximadas por equações de diferenças finitas, considerando velocidades paralelas e perpendiculares à direção do movimento do feixe, bem como componentes do vetor de onda paralelas e perpendiculares à direção do movimento do feixe. O código numérico resultante mostrou-se eficiente e com boas propriedades de estabilidade.

Mais recentemente, o estudo foi ampliado a fim de incluir ondas eletromagnéticas no tratamento numérico do problema [13]. Esse desenvolvimento pode ser motivado considerando que a interação feixe-plasma é caracterizada não só pela turbulência de Langmuir, mas também por emissão de radiação eletromagnética. O desenvolvimento é recente e já foi utilizado para obtenção de resultados relacionados a efeitos não lineares em um plasma térmico, ou seja, um plasma onde as populações de partículas são descritas por distribuições Maxwellianas [28]. No que segue, apresentaremos alguns resultados obtidos com esse código numérico, voltados para a análise do efeito dos diferentes mecanismos que contribuem para a evolução temporal das ondas T . Para esse análise, vamos considerar um plasma térmico em que a razão entre a temperatura dos elétrons e a temperatura dos íons é $T_e/T_i = 7.0$, e no qual o parâmetro do plasma é $(n\lambda_D^3)^{-1} \simeq 5.0 \times 10^{-3}$. A razão T_e/T_i foi escolhida consideravelmente maior do que a unidade para que possa haver um nível significativo de ondas do tipo S . Para a solução numérica utilizamos condições que já vem sendo usadas em outros trabalhos produzidos no âmbito do grupo: Grade de 51×51 pontos para as componentes perpendicular e paralela do vetor de onda (q_x, q_z) , com $0 < q_x < 0.6$, $0 < q_z < 0.6$ e grade de 51×101 pontos para as componentes perpendicular e paralela do vetor velocidade (u_x, u_z) , ambos vetores normalizados. Para a evolução temporal com passo fixo, consideramos $\Delta\tau = 0.1$.

As equações de diferenças finitas obtidas a partir das equações para partículas e para ondas, equações (4.50), (4.51), (4.53) e (4.54), são resolvidas numericamente usando o método de *splitting* para lidar com as derivadas parciais da equação para as partículas e o método de Runge-Kutta de quarta ordem para as equações para as ondas, partindo de um estado inicial em que os espectros de ondas L e S são obtidos do equilíbrio entre os efeitos de emissão induzida e espontânea. Entretanto, como já mencionado, a análise numérica que segue tem por objetivo a análise separada de cada termo que contribui para a equação das ondas T , para tempos curtos, a fim de observar o efeito de cada termo e determinar se há algum termo predominante. Dessa forma, embora a solução numérica envolva a evolução simultânea da distribuição de partículas e dos espectros de ondas L , S e T , vamos mostrar apenas resultados associados a ondas T . A Figura 4.1 mostra o espectro normalizado das ondas T , como função de q_x e q_z , obtido levando em conta apenas um termo da equação de evolução, de cada vez, para dois valores do tempo normalizado τ , dentro do período inicial da evolução temporal. Os resultados mostrados na Figura 4.1 foram recentemente apresentados em encontro nacional dedicado à área de Física de Plasmas [35].

Na coluna da esquerda está ilustrada a solução obtida em $\tau = 1$, que representa um estágio bastante inicial da evolução temporal, e na coluna da direita a solução obtida em $\tau = 50$. A primeira linha representa o termo de decaimento envolvendo uma onda transversal e duas ondas de Langmuir, $TdLL$. A segunda linha está associada também ao efeito de decaimento, mas agora envolvendo uma onda T , uma onda L e uma onda S . Ou seja, o termo $TdLS$. A terceira e última linha denota a evolução temporal das ondas sob a ação do termo de espalhamento entre uma onda transversal e uma onda de Langmuir. Quando todos os termos são levados em conta, a evolução do espectro das ondas T é basicamente a mesma que o obtido quando só o termo $TsTL$ é considerado. Assim, o termo de espalhamento parece ser dominante na evolução das ondas transversais, a princípio para um plasma térmico. Esse tipo de consideração mostrou-se verdadeiro mesmo levando em conta a evolução temporal de longo prazo, como evidenciado pelos resultados obtidos na Ref. [28].

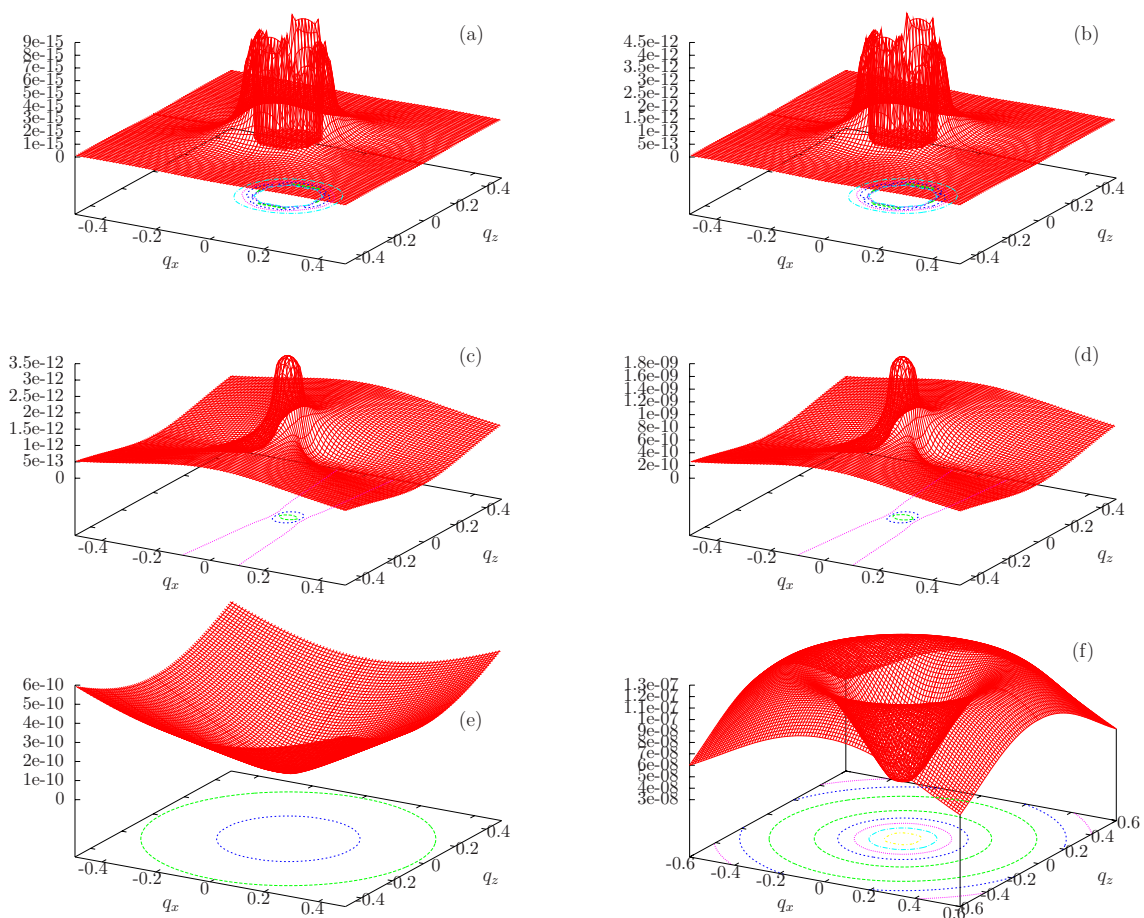


Figura 4.1: Espectro das ondas T para $\tau = 1$ (coluna da esquerda) e para $\tau = 50$ (coluna da direita). (a) e (b) Levando em conta apenas o termo $TdLL$; (c) e (d) Levando em conta apenas o termo $TdSL$; (e) e (f) Levando em conta apenas o termo $TsTL$.

Capítulo 5

Comentários finais

Este trabalho teve como objetivo principal fazer uma revisão da teoria de turbulência fraca em plasmas e caracterizar o efeito dos diferentes termos associados aos efeitos eletrostáticos e eletromagnéticos sobre a evolução temporal das intensidades das ondas e da função distribuição das partículas que compõem o plasma.

Para atingir o objetivo, apresentamos uma revisão da teoria cinética de plasmas, desde seus aspectos fundamentais. Começamos no capítulo 2, onde foi apresentado o sistema de equações de Vlasov-Maxwell e foram discutidas suas principais características. Nesse capítulo, como exemplo, foi obtida a relação de dispersão para as ondas de Langmuir e caracterizado o amortecimento de Landau. No capítulo 3 o sistema de equações Vlasov-Maxwell foi discutido na abordagem quase-linear, enfatizando quais as principais características da teoria. A revisão mostrou que a função distribuição que caracteriza o plasma evolui ao longo do tempo, em uma escala mais lenta do que a escala das flutuações que ocorrem no plasma, segundo uma equação de difusão no espaço de velocidades. Foram mostrados os procedimentos para obtenção do coeficiente de difusão quase-linear, bem como para obtenção da densidade espectral associada às ondas. Também foi abordado o caráter auto-consistente das equações e as leis de conservação que são obtidas a partir delas. Como aplicação, foi apresentada e caracterizada a instabilidade *bump-in-tail*, com base em desenvolvimentos clássicos da literatura, analisando o comportamento da evolução temporal das partículas ressonantes e das partículas não ressonantes, bem como a evolução temporal do espectro das ondas excitadas pela instabilidade.

Depois, no capítulo 4, fazendo uma revisão de uma formulação relativamente recente, foram apresentadas as bases para a teoria de turbulência fraca, mencionando termo a termo as principais características. Primeiramente, foi abordado com detalhe o caso eletrostático, apresentando as equações cinéticas para as ondas tanto para os modos lineares, quanto para os modos não lineares de excitação. A seguir, foi abordada a equação cinética das partículas e apontadas as principais modificações que devem ser introduzidas em virtude da excitação dos modos não lineares. Em seguida, foi apresentada a generalização da teoria, incluindo os efeitos das ondas eletromagnéticas nas equações cinéticas das ondas e das partículas. Por fim, foram apresentados alguns resultados obtidos de uma análise numérica do sistema de equações acopladas que leva em conta tanto ondas eletrostáticas quanto eletromagnéticas, com o objetivo de caracterizar, para os tempos iniciais da evolução, os efeitos associados a cada um dos termos que contribuem para a equação de evolução temporal das ondas eletromagnéticas. A ênfase foi dada a esses termos, uma vez que os efeitos associados à evolução das ondas eletrostáticas já têm sido bastante investigados na literatura recente.

Para o futuro imediato, a intenção é continuar desenvolvendo o código numérico, visando aplicação a situações em que ocorrem plasmas não térmicos, como é o caso da interação feixe-plasma. A ideia é utilizar o programa bidimensional para a turbulência fraca para investigar a geração de ondas transversas por efeitos não lineares associados com a instabilidade feixe-plasma, para diferentes valores dos parâmetros que caracterizam o plasma de fundo e os feixes de partículas.

Referências Bibliográficas

- [1] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [2] A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko, and K. N. Stepanov. *Plasma Electrodynamics, vol. 1, Linear Theory*. Pergamon, New York, 1975.
- [3] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. INPE-FAPESP, São José dos Campos, 3rd. edition, 2003.
- [4] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Vol. 1: Plasma Physics, 2nd. ed.* Plenum, New York, 2nd. edition, 1984.
- [5] V. N. Tsytovich. *Nonlinear Effects in a Plasma*. Plenum, New York, 1970.
- [6] V. N. Tsytovich. *An Introduction to the Theory of Plasma Turbulence*. Pergamon, New York, 1977.
- [7] A. A. Vedenov. Quasi-linear theory of a plasma (theory of a weakly turbulent plasma). *Translated from Atomnaya Energiya*, 13(1):5–24, July 1962. Original article submitted Jan. 26, 1962.
- [8] A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, and R. Z. Sagdeev. Nonlinear oscillations of rarified plasma. *Nuclear Fusion*, 1(2):82–100, 1961.
- [9] Peter H. Yoon. Generalized weak turbulence theory. *Phys. Plasmas*, 7(12):4858–4871, Dec. 2000.
- [10] P. H. Yoon. Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory. *Physics Of Plasmas*, 12:042306, 2005.
- [11] Peter H. Yoon. Statistical theory of electromagnetic weak turbulence. *Physics of Plasmas*, 13:022302, 15p., 2006.
- [12] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, R. P. Lin, and L. Wang. Langmuir turbulence and suprathermal electrons. *Space Science Reviews*, 173(1-4):459–489, Nov. 2012.
- [13] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and J. Pavan. Electromagnetic weak turbulence theory revisited. *Phys. Plasmas*, 19(10):102303, 9pp, Oct. 2012.
- [14] R. C. Davidson. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Academic Press, New York, 1972.
- [15] L. D. Landau. On the vibration of the electronic plasma. *J. Phys. U.S.S.R.*, 10(1):10–25, 1946.

- [16] B. D. Fried and S. D. Conte. *The Plasma Dispersion Function*. Academic Press, New York, 1961.
- [17] D. Lynden-Bell. The stability and vibrations of a gas of stars. *Mon. Not. R. astr., Soc.* 124(4):279–296, 1962.
- [18] P. M. Bellan. *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge, São José dos Campos, 2006.
- [19] A. I. Akhiezer, I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko, and K. N. Stepanov. *Plasma Electrodynamics, vol. 2, Non-Linear Theory and Fluctuations*. Pergamon, New York, 1975.
- [20] D. B. Melrose. *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*. Cambridge, New York, 1986.
- [21] D. M. Karfidov, A. M. Rubenchik, K. F. Sergeichev, and I. A. Sychev. Strong Langmuir turbulence excited in a plasma by an electron beam. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 98(5):1592–1604, Nov 1990. In Russian. *Physics of Plasmas*, 12:042306, 2005.
- [22] A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, and R. Z. Sagdeev. Quasi-linear theory of plasma oscillations. *Nuclear Fusion*, (2):465–475, 1962.
- [23] W. E. Drummond and D. Pines. Non-linear stability of plasma oscillations. *Nucl. Fusion Suppl.*, 3:1049–1057, 1962.
- [24] R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev. *Nonlinear Plasma Theory*. Benjamin, New York, 1969.
- [25] V. N. Tsytovich. *Lectures on Nonlinear Plasma Kinetics*. Springer, New York, 1995.
- [26] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, and P. H. Yoon. Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability. *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 50:085011, 15p., 2008.
- [27] R. Gaelzer, L. F. Ziebell, A. Figueroa-Viñas, P. H. Yoon, and C.-M. Ryu. Asymmetric solar wind electron superthermal distributions. *Astrophys. J.*, 677:676–682, Apr. 2008.
- [28] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, R. Gaelzer, and J. Pavan. Transition from thermal to turbulent equilibrium with a resulting electromagnetic spectrum. *Phys. Plasmas*, 21(1):012306, Jan 2014.
- [29] C. T. Dum and R. N. Sudan. Nonlinear beam-plasma interactions and stochastic acceleration. *Phys. Fluids*, 14(2):414–423, Feb. 1971.
- [30] L. Muschietti and C. T. Dum. Nonlinear wave scattering and electron beam relaxation. *Phys. Fluids B*, 3(8):1968–1982, Aug. 1991.
- [31] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and P. H. Yoon. Dynamics of Langmuir wave decay in two-dimensions. *Phys. Plasmas*, 15(1):032303, 11p., Mar. 2008.
- [32] L. F. Ziebell, R. Gaelzer, and Peter H. Yoon. Nonlinear development of weak beam-plasma instability. *Phys. Plasmas*, 8(9):3982–3995, Sept. 2001.
- [33] L. F. Ziebell, P. H. Yoon, F. J. R. Simões Jr., R. Gaelzer, and J. Pavan. Spontaneous emission of electromagnetic radiation in turbulent plasmas. *Phys. Plasmas*, 21(1):010701, Jan 2014.
- [34] R. Gaelzer, L. F. Ziebell, and Peter H. Yoon. Generation of harmonic Langmuir mode by beam plasma instability. *Phys. Plasmas*, 9(1):96–110, Jan. 2002.

- [35] Larissa T. Petruzzellis, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, J. Pavan, and P. H. Yoon. Discussion on different wave-wave and wave-particle interactions which are described in a self-consistent formulation of the weak turbulence equations in unmagnetized plasmas. In *XII Encontro Brasileiro de Física de Plasmas*, pages 20–, Brasília, DF, Brasil, 01 dezembro - 05 dezembro 2013. SBF, SBF. Poster presentation.