

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

A Equação de Boltzmann e a Modelagem de Fluidos em Micro e Macroescalas

por

João Francisco Prolo Filho

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Liliane Basso Barichello
Orientadora

Porto Alegre, julho de 2007.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Prolo Filho, João Francisco

A Equação de Boltzmann e a Modelagem de Fluidos em Micro e Macroescalas / João Francisco Prolo Filho.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2007.

156 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2007.

Orientadora: Barichello, Liliane Basso

Dissertação: Matemática Aplicada
Dinâmica de Gases, Modelos Cinéticos, Equação de Boltzmann, Ordenadas Discretas

A Equação de Boltzmann e a Modelagem de Fluidos em Micro e Macroescalas

por

João Francisco Prolo Filho

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria de Transporte e Transformadas Integrais

Orientadora: Prof. Dr. Liliane Basso Barichello

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renato Machado Cotta
DEM/COPPE/UFRJ-RJ

Prof. Dr. Volnei Borges
PROMEC/UFRGS-RS

Prof. Dr. Dagoberto Adriano Rizzotto Justo
PPGMAp/UFRGS-RS

Dissertação apresentada e aprovada em
julho de 2007.

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, por sempre terem me incentivado nos estudos, acreditando em minhas capacidades e torcendo pelo meu sucesso. À minha noiva Patrícia, pelo seu carinho, por sua torcida e compreensão nos momentos de ausência.

Agradeço também à professora Liliane Barichello, pela enorme paciência e dedicação que tem tido comigo desde a graduação, pelo seu entusiasmo e competência na condução deste trabalho.

Aos meus colegas Caio, Carmo, Cleber, Flávia, Janice, Jean, Patrícia e Rosenei, agradeço pelo companheirismo e por todo apoio recebido.

Ao PPGMAp agradeço pela infraestrutura oferecida e ao CNPq pela bolsa concedida.

Conteúdo

AGRADECIMENTOS	iv
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
LISTA DE ABREVIATURAS	xvi
RESUMO	xvii
ABSTRACT	xviii
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÕES MODELO	15
2.1 Equação Linearizada de Boltzmann	15
2.2 Modelo de Esferas Rígidas	17
2.3 Livre Caminho Médio	19
2.4 Núcleos Sintéticos	21
2.5 Modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS	22
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	27
3.1 Problemas Clássicos de Fluxo em Dinâmica de Gases Rarefeitos	27
3.2 Formulação Vetorial para os Problema de Fluxo	29
3.3 Alguns Problemas Clássicos	32
3.3.1 Fluxo de Poiseuille	32
3.3.2 Problema de <i>Creep</i> Térmico	33
3.3.3 Fluxo de Couette	34
3.3.4 O Coeficiente de Deslizamento Térmico	34

3.3.5	O Coeficiente de Deslizamento Viscoso	35
3.4	Soluções Particulares	35
3.5	Solução em Ordenadas Discretas	37
3.6	Quantidades de Interesse	41
3.6.1	Fluxo de Poiseuille e <i>Creep</i> Térmico	41
3.6.2	Fluxo de Couette	43
3.6.3	Deslizamento Térmico e Viscoso	45
3.7	Problema de Transferência de Calor	46
3.7.1	Formulação Vetorial para o Problema de Transferência	48
3.7.2	Unicidade do Problema	51
3.7.3	Solução em Ordenadas Discretas	52
3.7.4	Quantidades de Interesse	55
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	58
4.1	Considerações Gerais	58
4.2	Problemas Clássicos de Fluxo em Dinâmica de Gases Rarefeitos	60
4.2.1	Fluxo de Couette	60
4.2.2	Fluxo de Poiseuille	72
4.2.3	Problema de <i>Creep</i> Térmico	80
4.2.4	Deslizamento Térmico	89
4.2.5	Deslizamento Viscoso	96
4.2.6	Problema de Transferência de Calor	101
5	COMENTÁRIOS FINAIS	116
	BIBLIOGRAFIA	119
	APÊNDICE A DEMAIS RESULTADOS	134

A.1 Fluxo de Poiseuille	134
A.2 Problema de <i>Creep</i> Térmico	138
A.3 Deslizamento Viscoso	139
A.4 Deslizamento Térmico	140
APÊNDICE B MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN	141
B.1 Introdução	141
B.2 Discretização da Equação de Boltzmann	143
B.3 Discretização do Tempo	144
B.4 Cálculo dos Momentos Hidrodinâmicos	148
B.5 Cálculo da Função Distribuição de Equilíbrio	149
APÊNDICE C UMA APLICAÇÃO DE LATTICE BOLTZMANN	151

Lista de Figuras

Figura 1.1	Típicas aplicações em MEMS e nanotecnologia avaliados com relação ao número de Knudsen [42].	4
Figura 1.2	Modelos para fluxo molecular e contínuo [42].	5
Figura 1.3	Ludwig Boltzmann [24].	7
Figura 4.1	Evolução do erro relativo (em escala logarítmica) conforme o valor de N aumenta.	59
Figura 4.2	Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de velocidade no fluxo de Couette.	63
Figura 4.3	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade para o fluxo de Couette.	64
Figura 4.4	Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de fluxo de calor no fluxo de Couette.	68
Figura 4.5	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de fluxo de calor para o fluxo de Couette.	69
Figura 4.6	Efeitos que a variação do coeficiente de acomodação α causa às taxas de fluxo U_C e de fluxo de calor Q_C para o fluxo de Couette.	71
Figura 4.7	Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de velocidade no fluxo de Poiseuille.	74
Figura 4.8	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no fluxo de Poiseuille.	75
Figura 4.9	Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de fluxo de calor no fluxo de Poiseuille.	78
Figura 4.10	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de fluxo de calor no fluxo de Poiseuille.	79
Figura 4.11	Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de velocidade no problema de <i>Creep</i> Térmico.	83
Figura 4.12	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no problema de <i>Creep</i> Térmico.	84
Figura 4.13	Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de fluxo de calor no problema de <i>Creep</i> Térmico.	87

Figura 4.14	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de fluxo de calor no problema de <i>Creep</i> Térmico.	88
Figura 4.15	Coefficientes de Deslizamento Térmico utilizando os parâmetros ε_p (à esquerda) e ε_t (à direita).	91
Figura 4.16	Figura que ilustra a relação entre $u_S(\tau)$ e A_S	92
Figura 4.17	Efeitos que a variação do parâmetro α causa ao perfil de velocidade no problema de Deslizamento Térmico.	93
Figura 4.18	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no problema de Deslizamento Térmico.	94
Figura 4.19	Efeitos que a variação do parâmetro α causa ao perfil de velocidade no problema de Deslizamento Viscoso, considerando o modelo MRS e as Tabs. 4.47 à 4.49.	98
Figura 4.20	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no problema de Deslizamento Viscoso.	98
Figura 4.21	Variação do coeficientes de Deslizamento Viscoso A_K utilizando o parâmetro ε_p	100
Figura 4.22	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de perturbação de densidade no problema de Transferência de Calor.	112
Figura 4.23	Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de perturbação de temperatura no problema de Transferência de Calor.	112
Figura 4.24	Efeitos que a variação dos coeficientes de acomodação α_1 e α_2 causam aos perfis de perturbação de densidade e temperatura no problema de Transferência de Calor.	113
Figura 4.25	Efeitos que a variação da largura do canal $2a$ causa aos perfis de perturbação de densidade e temperatura no problema de Transferência de Calor.	114
Figura 4.26	Efeitos que a variação da temperatura δ_1 causa aos perfis de perturbação de densidade e temperatura no problema de Transferência de Calor.	114
Figura C.1	A geometria do fluxo no canal plano.	151

Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$. . .	61
Tabela 4.2	Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$. . .	62
Tabela 4.3	Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$. . .	62
Tabela 4.4	Couette, $u_w = 1.0$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$. .	63
Tabela 4.5	Couette, $u_w = 5.0$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$. .	64
Tabela 4.6	Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	65
Tabela 4.7	Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$.	66
Tabela 4.8	Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.	66
Tabela 4.9	Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$.	67
Tabela 4.10	Couette, $u_w = 1.0$; perfil de velocidade $q_C(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$. .	67
Tabela 4.11	Couette, $u_w = 5.0$; perfil de velocidade $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$. .	68
Tabela 4.12	Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	69
Tabela 4.13	Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo U_C , $\alpha = 1.0$	70
Tabela 4.14	Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo U_C , $\alpha = 0.5$	70
Tabela 4.15	Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo U_C , $\alpha = 0.1$	70
Tabela 4.16	Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo de calor Q_C , $\alpha = 1.0$	71
Tabela 4.17	Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo de calor Q_C , $\alpha = 0.5$	71
Tabela 4.18	Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo de calor Q_C , $\alpha = 0.1$	71
Tabela 4.19	Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$	73
Tabela 4.20	Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$	73
Tabela 4.21	Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$	74
Tabela 4.22	Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$	75
Tabela 4.23	Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$. .	76

Tabela 4.24	Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$	77
Tabela 4.25	Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$	77
Tabela 4.26	Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$	79
Tabela 4.27	Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$	79
Tabela 4.28	Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	80
Tabela 4.29	<i>Creep</i> Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$	81
Tabela 4.30	<i>Creep</i> Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$	81
Tabela 4.31	<i>Creep</i> Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$	82
Tabela 4.32	<i>Creep</i> Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$	82
Tabela 4.33	<i>Creep</i> Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	84
Tabela 4.34	<i>Creep</i> Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$	85
Tabela 4.35	<i>Creep</i> Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$	86
Tabela 4.36	<i>Creep</i> Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$	86
Tabela 4.37	<i>Creep</i> Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$	87
Tabela 4.38	<i>Creep</i> Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	88
Tabela 4.39	Deslizamento Térmico; coeficientes A_S	90
Tabela 4.40	Deslizamento Térmico; coeficientes A_S , $\varepsilon = \varepsilon_t$	90
Tabela 4.41	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 1.0$	92
Tabela 4.42	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	93
Tabela 4.43	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.6$	94
Tabela 4.44	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.6$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	95
Tabela 4.45	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.1$	95
Tabela 4.46	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.1$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	96
Tabela 4.47	Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 1.0$	97
Tabela 4.48	Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.6$	97

Tabela 4.49	Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.1$	99
Tabela 4.50	Deslizamento Viscoso; coeficientes A_K	99
Tabela 4.51	Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.6$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	100
Tabela 4.52	Casos de transferência de calor analisados.	101
Tabela 4.53	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_p$	102
Tabela 4.54	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_t$	102
Tabela 4.55	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_p$	103
Tabela 4.56	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_t$	103
Tabela 4.57	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_p$	103
Tabela 4.58	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_t$	104
Tabela 4.59	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_p$	105
Tabela 4.60	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_t$	105
Tabela 4.61	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_p$	105
Tabela 4.62	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_t$	106
Tabela 4.63	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_p$	106
Tabela 4.64	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_t$	106
Tabela 4.65	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_p$	107
Tabela 4.66	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_t$	107
Tabela 4.67	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_p$	108
Tabela 4.68	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_t$	108
Tabela 4.69	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_p$	108
Tabela 4.70	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_t$	109
Tabela 4.71	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_p$	109
Tabela 4.72	Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_t$	110
Tabela 4.73	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_p$	110

Tabela 4.74	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_t$. . .	110
Tabela 4.75	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_p$. . .	111
Tabela 4.76	Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_t$. . .	111
Tabela 4.77	Fluxo de calor normalizado q para os casos I à VI.	115
Tabela 5.1	Tabela Comparativa: Modelo \times ELB.	116
Tabela A.1	Fluxo de Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	134
Tabela A.2	Fluxo de Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	134
Tabela A.3	Fluxo de Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	135
Tabela A.4	Fluxo de Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	135
Tabela A.5	Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo U_P , $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	135
Tabela A.6	Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo U_P , $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	136
Tabela A.7	Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo U_P , $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	136
Tabela A.8	Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo de calor Q_P , $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	136
Tabela A.9	Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo de calor Q_P , $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	137
Tabela A.10	Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo de calor Q_P , $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	137
Tabela A.11	<i>Creep</i> Térmico; taxa de fluxo de calor Q_T , $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	138
Tabela A.12	<i>Creep</i> Térmico; taxa de fluxo de calor Q_T , $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	138
Tabela A.13	<i>Creep</i> Térmico; taxa de fluxo de calor Q_T , $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	139
Tabela A.14	Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	139
Tabela A.15	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$	140
Tabela A.16	Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_t$	140

LISTA DE SÍMBOLOS

a_*	Comprimento característico
\mathbf{c} e \mathbf{v}	Vetores velocidade
E	Energia
$f_n(c', c)$	Componente do núcleo sintético de espalhamento
$f_0(\mathbf{c})$	Distribuição Maxwelliana absoluta
f^{eq}	Função distribuição de equilíbrio
$f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$	Função distribuição de partículas
$\mathbf{F}(c', c)$	Núcleo sintético de espalhamento
$h(\xi, \mathbf{c})$ e $g(\xi, \mathbf{c})$	Perturbação causada a Maxwelliana absoluta
J	Operador de colisão Maxwelliano
$k_n(c', c)$	Componente do núcleo exato de espalhamento
$\mathbf{K}(c', c)$	Núcleo exato de espalhamento
Kn	Número de Knudsen
l	Livre caminho médio
$N(\tau)$	Perturbação de densidade
P_{xy}	Componente do tensor pressão
P_n^m	Função normalizada de Legendre
Pr	Número de Prandtl
P_n	Polinômio de Legendre
p	Pressão
Q_x	Fluxo de calor
q	Fluxo de calor normalizado
$q(\tau)$	Perfil de fluxo de calor
Q	Taxa de fluxo de calor
T	Temperatura
T_w	Temperatura dimensional da parede

$T(\tau)$	Perturbação de temperatura
$u(\tau)$	Perfil de velocidade
U	Taxa de fluxo de partículas
\mathbf{u}	Velocidade
W	Operador de frequência de espalhamento diferencial
w_k	Peso de quadratura
α	Coefficiente de acomodação
δ	Temperatura adimensional da parede
δt	Distância entre os nodos
λ_*	Condutividade térmica
μ_*	Viscosidade
ν_j	Constante de separação
$\nu(\mathbf{c})$	Frequência de colisão das partículas
ρ	Densidade
ξ_k	Ponto de quadratura
ξ_i	Nodos do modelo FHP

LISTA DE ABREVIATURAS

ADO	Método de Ordenadas Discretas
BGK	Modelo de Bhatnagar-Gross-Krook
CFD	Dinâmica de Fluidos Computacional
CNANO	Centro de Nanociência e Nanotecnologia
DSMC	Método de Simulação Direta de Monte Carlo
DVM	Modelo de Velocidades Discretas
EDO	Equação Diferencial Ordinária
ELB	Equação Linearizada de Boltzmann
GJ	Modelo de Gross-Jackson
LBGK	Modelo de Lattice Boltzmann BGK
LGA	Método <i>Lattice-Gas Automata</i>
MD	Dinâmica Molecular
MEMS	Sistemas Microeletromecânicos
MLB	Método Lattice Boltzmann
MST	Microsistemas Tecnológicos
N-S	Navier-Stokes
RGD	Dinâmica de Gases Rarefeitos

RESUMO

Neste trabalho, uma versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO) é utilizada no desenvolvimento de soluções para uma ampla classe de problemas de gases rarefeitos em semi-espaco e canal plano. A modelagem dos problemas baseada em modelos cinéticos derivados da equação linearizada de Boltzmann, tais como os modelos **BGK**, o **S**, o **Gross-Jackson** e o **MRS**. Em particular, resultados para o modelo **MRS** são originais. A solução ADO se mostrou eficiente e precisa e uma série de resultados são apresentados no sentido de estabelecer uma comparação entre os modelos propriamente ditos e resultados obtidos a partir da **ELB**. Além disso, uma análise da influência de alguns parâmetros é apresentada, para todos os problemas.

ABSTRACT

In this work, an analytical version of the discrete-ordinates method (the ADO method) is used to develop solutions for a wide class of rarefied gas problems in half-space and plane channel. The modelling of the problems is based on kinetic models of the linearized Boltzmann equation, such that the **BGK**, the **S**, the **Gross-Jackson** and the **MRS** models. In particular, results for the **MRS** model are originals. The ADO solution was founded to be efficient and accurate and a series of results are presented in order to establish a comparison between the kinetic models themselves and results provided by the **ELB**. In addition, an analysis of the influence of some parameters was presented, for all problems.

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, os fenômenos referentes à dinâmica de gases rarefeitos tem despertado um grande interesse dos pesquisadores, principalmente por suas aplicações no estudo de escoamentos em microcanais.

Isto se deve ao grande interesse da indústria em desenvolver e miniaturizar os mais diversos dispositivos. De fato, esse processo de fabricar dispositivos em escalas cada vez menores pode conter vários obstáculos, que podem resultar no desenvolvimento de novas técnicas de produção ou até mesmo na utilização de novos materiais (ligas). Por exemplo: a miniaturização de um componente eletrônico pode acarretar em problemas associados ao superaquecimento, sendo necessário o uso de um dispositivo de refrigeração ou então produzir esse componente utilizando ligas que dissipem o calor mais rapidamente.

Expressões do tipo, sistemas microeletromecânicos (MEMS) e microsistemas tecnológicos (MST) têm sido muito utilizadas para descrever o modelo e a metodologia no processo de fabricação desses microcomponentes. O entendimento da importância dos MEMS e MST fez com que países industrializados, como Estados Unidos e Japão, criassem e financiassem uma grande quantidade de programas de pesquisa relacionados a essa área.

Apesar dos primeiros resultados analíticos baseados no fluxo de um gás estável ao longo de um canal ter sido publicado na década de 30, os trabalhos científicos em microfluidos eram raros até 1990 [33]. Kennard em 1938 [60] desenvolveu uma expressão simples para a taxa do fluxo de massa num longo tubo circular através de um canal de placas paralelas. Seguindo uma cronologia, outros trabalhos que podem ser citados são os de Cercignani [20], Loyalka e Ferziger [74], Loyalka [72], Williams [133], Cercignani [21], Lo, Loyalka e Storvick [70], Cercignani [22], Loyalka e Hickey [75] e Van der Pol e Branebjerg [88]. No entanto, a partir dos anos 90, houve um

crescimento no número de publicações, destacando-se Gravesen, Branebjerg e Jensen [48] e Shoji e Eshashi [107] que dedicaram dois artigos à componentes básicos em microfluidos (microbombas, microválvulas, microsensores, etc.).

Segundo Rostami [94], em 1991 haviam cerca de trezentas companhias e institutos que trabalhavam com tecnologia de MEMS. Depois de quatro anos, graças ao investimento governamental em universidades e institutos de pesquisa, esse número aumentou rapidamente para oito mil [39].

Atualmente, os microsistemas são utilizados em diversas áreas [94], dentre elas se encontram a medicina, biotecnologia, aviação, telecomunicações, metrologia, utensílios domésticos e aerossóis, tecnologia de computadores, robótica, engenharia automotiva e aeroespacial. Dispositivos como cabeçotes de impressoras, acelerômetros de airbags, marcapassos do coração, sensores de pressão, sistemas de deposição de medicamentos, micromotores, microcanal de reatores, microbombas e sistema de injeção automotiva são alguns dos microdispositivos que já são comercialmente usados ou que serão usados num futuro próximo.

A maioria dos microsistemas envolve, de uma forma ou de outra, fluxos de fluidos. Quando se trabalha com fluxos em pequena escala, a aproximação contínua pode não ser válida e alguns fenômenos passam a ter de ser levados em consideração, tais como viscosidade, compressibilidade, forças intermoleculares [42]. Esses efeitos e mais os de superfície têm um papel mais importante nos fluxos de gases e líquidos em microsistemas do que nos macrosistemas [136]. Em microescala, deve-se considerar também para o fluxo de líquidos os efeitos de eletrocinética [58] e o efeito mecânico polar [129], enquanto que para o fluxo de gases, o estado de rarefação é mais importante. Em simulações numéricas, nem todos os fluxos podem ser modelados pela equação de Navier-Stokes, principalmente em MEMS, devido à pequena escala de comprimento característico. A relação deste comprimento característico com o livre caminho médio l das moléculas de gás é o que determina se o fluxo pode ou não ser modelado usando as hipóteses do contínuo. No caso negativo, a equação

de Boltzmann passa a ser considerada para se entender e calcular o fluxo nesses dispositivos [22, 23, 25].

No caso específico do comportamento de um gás, isto é, o perfil de velocidade, perfil de fluxo de calor, desvio de temperatura, desvio de densidade, dependem das propriedades do gás, regidas por leis de forças interatômicas e também pelas interações do gás com a superfície da parede. De um modo geral, os problemas de dinâmica de gases são baseados no estado de rarefação do gás [133, 105]. Este estado pode ser classificado pelo valor do número de Knudsen Kn , definido como a razão entre o livre caminho médio l (distância média percorrida por uma molécula de gás entre as colisões) e algum comprimento característico a_* (por exemplo, a largura de um canal),

$$Kn = \frac{l}{a_*}. \quad (1.1)$$

O valor do número de Knudsen de um determinado fluxo, além de determinar o grau de rarefação do gás, pode ser usado para analisar a validade das equações de Navier-Stokes para a modelagem do fluxo. Se o número de Knudsen é muito pequeno ($Kn \leq 10^{-3}$), então o livre caminho médio também é pequeno, nos permitindo considerar o meio como sendo contínuo, onde as equações clássicas da hidrodinâmica e as equações de Navier-Stokes podem ser aplicadas no escoamento do gás (regime hidrodinâmico). Quando o número de Knudsen é muito grande ($Kn \geq 10$), as colisões das moléculas do gás com o contorno são mais frequentes do que as colisões entre as próprias moléculas e pode-se considerar que as moléculas movimentam-se independentes umas das outras (regime molecular livre). Quando o número de Knudsen tem um valor intermediário, alguns cuidados devem ser tomados. Se ($10^{-1} \leq Kn < 10$), encontra-se o chamado regime de transição, onde não se considera o gás como ou meio contínuo e nem se desconsidera as colisões intermoleculares. Nesse regime as equações de Navier-Stokes não podem ser usadas, sendo necessário o uso de outras formulações baseadas na equação de Boltzmann ou equações cinéticas (modelos). Se ($10^{-3} \leq Kn < 10^{-1}$) ainda se pode considerar o

meio como sendo contínuo, mas faz-se necessário o uso de condições do tipo *slip-flow*, de forma que efeitos de deslizamento próximos a parede são considerados [42].

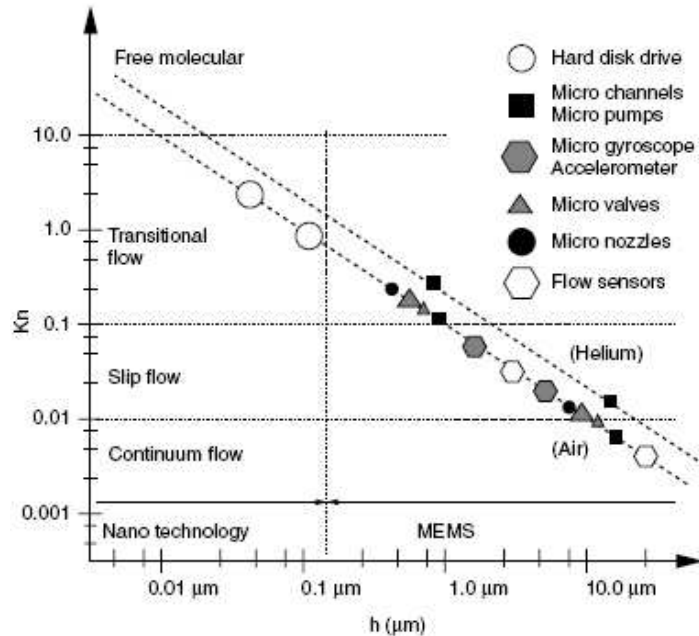


Figura 1.1: Típicas aplicações em MEMS e nanotecnologia avaliados com relação ao número de Knudsen [42].

Para ilustrar como determinadas condições podem alterar a natureza do fenômeno, Gad-el-Hak [42] cita o seguinte exemplo: ao considerar ar à uma temperatura e pressão padrões ($T = 288K$ e $p = 1.01 \times 10^5 N/m^2$), um cubo de $1\mu m$ de lado contém 2.54×10^7 moléculas separadas por uma distância média de $0.0034\mu m$. Para este exemplo, o livre caminho médio é $l = 0.065\mu m$. Agora repare que, dado um dispositivo com comprimento característico de $1\mu m$ com $Kn = 0.065$ indicaria que o problema estaria em um regime de *slip-flow*. Sabendo que o número de Knudsen cresce quando a pressão diminui, se for considerado então uma pressão de $0.1atm$ e a temperatura for mantida constante, se terá $Kn = 0.65$ para o mesmo dispositivo de $1\mu m$ e o fluxo estará então no regime de transição. Além disso, podem existir mais de dois milhões de moléculas no interior desse mesmo cubo de $1\mu m$, e a distância média entre elas seria de $0.0074\mu m$. O mesmo dispositivo à $100Km$ de altitude teria

$Kn = 3 \times 10^4$, onde o fluxo passa a estar no regime molecular livre. No caso de um gás leve como o hélio, o número de Knudsen é cerca de três vezes maior do que para o fluxo de ar nas mesmas condições.

Ainda relacionado com gases, segundo Gad-el-Hak [42], a mecânica dos microfluidos tem sido estudada incorporando condições de contorno de deslizamento, *creep* térmico e dissipação viscosa, bem como efeitos de compressibilidade nas equações de movimento. Os modelos baseados na dinâmica molecular tem sido testados para uma infinidade de parâmetros e o seu uso pode ser feito desde a teoria cinética dos gases representada pela equação de Boltzmann até o método de simulação direta tal como o método de Monte Carlo. Ainda por Gad-el-Hak [42], a mecânica de microfluidos para líquidos é mais complicada. As moléculas ficam muito mais próximas a temperatura e pressão padrões, e a força de atração entre as moléculas do líquido bem como as moléculas do líquido e de um sólido tem um papel mais importante se o comprimento característico do fluxo é pequeno o suficiente. Gad-el-Hak [42] afirma que, no caso de se optar pela simulação direta quando o modelo contínuo tradicional falha, concluí-se que o método ainda não representa de forma eficiente fluxos reais com uma grande quantidade de moléculas por causa do grande custo computacional. Como conseqüência, a mecânica dos microfluidos para líquidos é muito menos desenvolvida do que para gases.

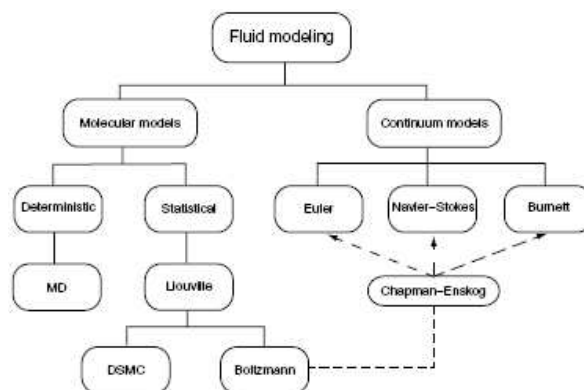


Figura 1.2: Modelos para fluxo molecular e contínuo [42].

Normalmente os resultados experimentais em microcanais apresentados na literatura são referentes apenas as medidas de taxa de fluxo. Fato que não é surpreendente, uma vez que só a fabricação por si só dessas estruturas já é complicada, dificultando ainda mais medir esses fluxos nestas microestruturas. Nesses casos, só o modo de colocar um medidor em um microdispositivo de forma que não atrapalhe ou modifique o fluxo passa a ser um desafio. A comunidade científica reconhece que a área de microfluidos é carente de informações mais detalhadas, tanto na área computacional quanto na área experimental. Liu, Tai, Pong e Ho [69, 89] integraram sensores de pressão para medir a distribuição de pressão ao longo de um microduto. Meinhart, Wereley e Santiago [82] usaram velocidade de imagem de partículas para mapear o campo de velocidade de fluxos de líquidos através de microcanais. Shih, Ho, Liu e Tai [106] fizeram experimentos em microcanais para medir o fluxo de massa e distribuição de pressão axial para os gases hélio e nitrogênio.

No Brasil, a pesquisa em micro e nanotecnologia ainda é muito recente, o número de profissionais qualificados é baixo e o investimento em pesquisa ainda é modesto. Contudo, buscando promover o desenvolvimento científico e econômico do país, especialistas brasileiros já estão traçando estratégias afim de usar a nanotecnologia como fonte de inovação tecnológica, buscando desenvolver produtos e processos úteis tanto em setores de alta tecnologia quanto nos setores mais tradicionais. O governo brasileiro, buscando desenvolver uma tecnologia própria, destinou em 2006 cerca de R\$ 14 milhões para laboratórios e centros de pesquisa em nanotecnologia, sendo que atualmente existem dez centros com pesquisadores em todas as regiões e nas principais universidades brasileiras.

Como consequência desse empenho, além da criação de setores como o de Micro e Nanotecnologia vinculado ao Ministério da Ciência e Tecnologia, criou-se também o Centro de Nanociência e Nanotecnologia da UFRGS (CNANO - UFRGS), tendo como parte dos objetivos o desenvolvimento de projetos de pesquisa, a troca de conhecimentos e a iteração com empresas. Pouco tempo depois, graças ao empenho

do conselho administrativo do CNANO, houve a 1ª Mostra de Nanociência e Nanotecnologia da UFRGS, onde nosso grupo de pesquisa também participou, buscando mostrar, além de alguns exemplos de aplicações, resultados referentes a utilização da versão linearizada da equações de Boltzmann no tratamento de problemas na dinâmica de gases rarefeitos [5].

A teoria desenvolvida para a Eq. Boltzmann faz parte de uma das mais importantes áreas de equações diferenciais parciais, abrangendo teoria cinética, mecânica dos fluidos e mecânica estatística. Ela foi criada no século XIX por Ludwig Boltzmann, um dos pais da mecânica estatística, em seus estudos em teoria cinética dos gases [11]. Tendo a função de descrever estatisticamente a distribuição de partículas em um gás, a equação de Boltzmann é utilizada no estudo de como um gás transporta determinadas quantidades físicas, como calor e massa.



Figura 1.3: Ludwig Boltzmann [24].

Durante sua vida, além da sua enorme contribuição na área da física, Boltzmann também influenciou algumas áreas da matemática. Segundo [24], em 1912, o matemático David Hilbert indicou como obter soluções aproximadas da equação de Boltzmann. O método usado por Hilbert em seguida foi generalizado por David Enskog [24]. Além disso, a teoria ergótica, que é baseada nos conceitos de Boltzmann em mecânica estatística, se tornou uma área importante na matemática.

Após a morte de Boltzmann, uma versão linearizada de sua equação passou a ser aplicada em outros ramos da física, como por exemplo na astrofísica no estudo de fenômenos de transferência radiativa em meios estelares. A tão conhecida equação de transporte de partículas pode ser encontrada na literatura na forma integro-diferencial [43], na forma integral e na forma integral de superfície [95]. Em particular, diz-se que a equação de transporte integro-diferencial fornece uma descrição qualitativa das distribuições espacial, direcional, energética e temporal das partículas em meios materiais.

No início dos anos 60, a equação de Boltzmann foi intensamente estudada com o objetivo de resolver problemas de fluxo de gases rarefeitos. Contudo, mesmo com o uso de métodos semi-analíticos ou puramente numéricos, o tratamento de problemas de fluxo via equação de Boltzmann não é fácil. Em 1960, Gross [49] já havia manifestado seu interesse na equação de transporte integro-diferencial (que é uma versão linear da equação de Boltzmann) uma vez que, aliada a distribuições discretas de velocidade, era possível obter um sistema acoplado de equações diferenciais parciais, tornando viável sua aplicação no campo de transferência radiativa.

Devido ao crescente interesse em estudar os fenômenos relacionados com a teoria cinética, muitos estudos relacionados ao tratamento da equação de Boltzmann propriamente dita tem sido feitos [118, 119, 75, 127, 128]. Muitos dos resultados teóricos existentes na literatura se devem à pesquisadores do campo da matemática, sendo Cercignani um dos mais conhecidos por sua contribuição na área de teoria cinética [21, 23, 26]. Por causa da grande dificuldade no tratamento da equação

de Boltzmann, devido principalmente à complexidade do núcleo de colisão, que faz parte do termo integral, foram definidas equações modelo, que nada mais são do que equações onde o termo integral de colisão é simplificado e que mantém as características matemáticas e físicas fundamentais da equação de Boltzmann [116, 103, 104, 6, 137]. Sendo assim, para a resolução dos diferentes problemas propostos, foram criadas diversas equações modelo, dentre elas, tem-se o modelo **BGK** proposto por Bhatnagar, Gross e Krook [8], o modelo **S** proposto por Shakhov [101, 105], o modelo **Gross-Jackson** proposto por Gross e Jackson [50] e discutido por Scherer em [97], o modelo **MRS** proposto por Garcia e Siewert [46], o modelo **CLF** proposto por Cercignani [20] e Loyalka e Ferziger [74] e abordado por Siewert [113] e por Williams [133], os modelos **CES** e **CEBS** proposto por Barichello e Siewert [4]. Os modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** além de serem os modelos que serão utilizados nesse trabalho, possuem em comum o fato de serem modelos que consideram constante a frequência de colisão das partículas. Observa-se também que o modelo **CLF** pode ser considerado como um caso particular do modelo **CES** e que ambos modelos têm frequência de colisão variável. Ainda relacionado a modelos com frequência de colisão variável, encontra-se o modelo de **McCormack** [78], o qual é aplicado nos casos de misturas de dois gases.

Segundo Siewert [115], o estudo teórico de problemas clássicos que modelam escoamentos de gases em canais planos (fluxo de Poiseuille, fluxo de Couette, *Creep* Térmico,...) é importante pois ajuda na definição de novos modelos matemáticos bem como no desenvolvimento de novas técnicas computacionais. Dessa forma, é possível acompanhar o crescente desenvolvimento científico e obter resultados satisfatórios em tempo hábil de problemas mais complexos que possam ser comparados com resultados experimentais.

Com relação aos métodos de resolução dos modelos cinéticos e da ELB, ao longo dos anos alguns métodos foram propostos para a equação linear. Dentre eles, pode-se citar o método de solução aproximada *two-stream* [99, 100], o método de esféricos

harmônicos [59], o método de ordenadas discretas [132, 27], um método exato de solução chamado de método de Case [19], o método de velocidades discretas [102] e o método de ordenadas discretas analítico [110, 2]. Chama-se a atenção aqui que o método de Case, apesar de exato, só é válido em casos onde o termo integral é bem simples.

A versão de ordenadas discretas proposta por Wick [132] consiste em aproximar o termo integral da equação de transporte integro-diferencial por uma fórmula de quadratura, transformando a equação em um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser resolvido analiticamente. Esse método foi aplicado posteriormente por Chandrasekhar [27] em problemas de transferência radiativa. Já a versão de ordenadas discretas analítico proposta por Barichello e Siewert [2] para a solução de problemas de transporte em geometria plana difere do método original por possibilitar o uso de um esquema de quadratura mais arbitrário, do tipo *half-range*, pela determinação de constantes de separação que são obtidas na resolução de um problema de autovalores e pelo fato de se trabalhar com a variável espacial analiticamente.

O método de ordenadas discretas analítico (ADO)[2] tem-se mostrado um ferramenta muito útil na resolução dos vários problemas de dinâmica de gases rarefeitos [111, 112, 115, 123, 3, 114], principalmente pela possibilidade de se construir soluções unificadas para os diferentes modelos cinéticos, como por exemplo os já citados **BGK** [6], **S** [16], **Gross-Jackson** [97, 50] e **MRS** [46]. Resultados satisfatórios também foram encontrados na resolução de problemas como o do fluxo de Poiseuille, *Creep* Térmico, fluxo de Couette e deslizamento viscoso com a utilização dos modelos **BGK** [6], **S** [15, 16] e de modelos com frequência de colisão variável [17, 18]. Também podem ser citados outros trabalhos, como a resolução dos problemas de fluxo de Poiseuille, *Creep* Térmico e fluxo de Couette [115] e salto de temperatura [121] baseados no modelo **CES**, o problema de deslizamento viscoso com a aplicação do modelo **CLF** [113, 17, 18] e de problemas de misturas de gases

baseados no modelo **McCormack** [122, 124, 125, 44]. Destaca-se também o uso do método ADO na resolução de problemas de fluxo associado à diferentes condições de contorno [61, 62] e problemas relacionados à equação de Boltzmann propriamente dita, sem a aplicação de equações modelo [118, 120]. Observa-se aqui que em [15, 16] o problema de deslizamento térmico também foi abordado.

O modelo associado a equação de Boltzmann para o tratamento de fluidos também em macroescala surgiu a mais de uma década, como uma alternativa na área da dinâmica dos fluidos computacional (CFD). Existe uma grande quantidade de trabalhos baseados no método de lattice Boltzmann, dentre monografias, artigos e *reviews* pode-se citar [5, 1, 64, 9, 10, 36, 37, 38, 66, 7, 84, 85, 30]. O método de lattice Boltzmann tem tido muito sucesso em simulações de aplicações de fluxos de fluidos envolvendo contornos complicados e/ou fluxos mais complexos, como por exemplo o turbulento sobre a parte externa de uma estrutura com complicadas geometrias [130], a instabilidade de Rayleigh-Taylor entre dois fluidos [55, 53], suspensão de partículas em fluidos [90, 91, 92], fluxos de reações químicas [31] e combustão [40], magnetohidrodinâmica [32] e cristalização [83].

Antes do método de lattice Boltzmann (**MLB**) ser criado, existiam modelos similares, por exemplo os modelos de velocidade discreta (DVM)[13, 12] e o esquema de feixes [96]. Apesar desses modelos mais teóricos terem uma conexão muito próxima a equação de lattice Boltzmann, não eram interessantes para o uso computacional ou como ferramenta de simulação. Eles eram comumente utilizados como uma forma de estudar certas propriedades de gases e líquidos analiticamente, tais como soluções analíticas da equação de Boltzmann para fluxos simples [12], choques [13] ou propriedades mecânica estatísticas de fluidos bidimensionais, tais como a divergência dos coeficientes de transporte bidimensionais [51, 52].

Em 1988, a primeira tentativa de usar a equação de lattice Boltzmann para simular dinâmica de fluidos foi feita por [57, 81]. O fato de que modelos simples como a equação de lattice Boltzmann podiam simular problemas hidrodinâmicos,

propiciou um grande avanço no campo da física computacional e em particular, na dinâmica de fluidos computacionais.

Segundo Luo [76], o que diferencia o **MLB** de outros métodos convencionais em CFD é a natureza cinética do método. Alguns dos fatores que justificam esse destaque são:

- o operador de convecção do **MLB** é linear no espaço de fase, similar à equação de Boltzmann e diferente das equações de Euler e Navier-Stokes;
- a pressão é obtida de uma equação de estado, o oposto de resolver a equação de Poisson das equações de Navier-Stokes incompressível;
- o **MLB** é capaz de incluir modelos iterativos que possam simular fluidos mais complexos;
- o **MLB** utiliza um conjunto de velocidades discretas mínimo, de forma que o valor das quantidades é computado até a exatidão da máquina;
- o **MLB** é facilmente paralelizável, possibilitando que a divisão de uma tarefa entre vários processadores reduza o tempo de processamento;
- o **MLB** é capaz de manipular contornos complexos sem comprometer a velocidade computacional.

As vantagens teóricas do **MLB** são ainda pouco conhecidas no campo do CFD e ainda são dependentes do problema se comparado com outros métodos convencionais utilizados na resolução das equações de Navier-Stokes. Infelizmente, devido à falta de esforços em pesquisa nesta área, não existe evidência numérica que comprove as vantagens teóricas do **MLB**, especialmente nas áreas onde os métodos convencionais do CFD são amplamente utilizadas, como no campo da aerodinâmica.

Neste trabalho, todo o estudo é feito através da equação integro-diferencial de Boltzmann, com a qual pretende-se dar uma visão global dos modelos cinéticos e da **ELB** no tratamento de problemas em RGD.

Tendo constatado a eficiente aplicabilidade do método de ordenadas discretas analítico utilizando os modelos **BGK**[6] e **S**[16], decidiu-se desenvolver uma nova formulação que englobasse outros modelos cinéticos, tais como o **Gross-Jackson**[97] e o **MRS**[46], possibilitando escrever soluções de forma unificada e permitindo uma análise mais detalhada dos efeitos de determinados parâmetros nos fenômenos.

Para a resolução dos problemas propostos (fluxo de Couette e de Poiseuille, problemas de *Creep* Térmico, de deslizamento Térmico, de deslizamento Viscoso e de transferência de calor), utilizou-se condições de contorno do tipo difuso-especular (onde é considerado que uma porção α das partículas é refletida difusamente pela parede enquanto a porção restante $(1 - \alpha)$ é refletida especularmente), fazendo com que todas as propriedades físicas dependam apenas de um tipo de coeficiente de acomodação. Além disso, nos problemas de fluxo de Couette, fluxo de Poiseuille e de *Creep* Térmico são considerados que as duas paredes possuem o mesmo coeficiente de acomodação.

Assim, para a realização deste trabalho, seguiu-se os seguintes passos:

- implementou-se os problemas propostos aqui segundo Cabrera e Barichello [16];
- de forma diferente da utilizada por Cabrera e Barichello [16], definiu-se uma formulação genérica em relação ao parâmetro β e ϖ para os problemas propostos, englobando os modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS**;
- baseado na implementação descrita no primeiro item, desenvolveu-se um programa que resolve todos os problemas descritos no primeiro item, podendo utilizar qualquer um dos quatro modelos citados, gerando resultados originais;

- implementou-se o problema de transferência de calor segundo Scherer [97] também possibilitando o uso de qualquer um dos quatro modelos citados.

Outro tópico superficialmente abordado neste trabalho se refere ao método lattice Boltzmann, onde buscou-se iniciar um estudo da aplicação da equação de Boltzmann em macrosistemas. Como primeira parte deste estudo, além de um apanhado geral sobre o método, sua história e suas áreas de aplicação, também mostrou-se passo a passo como obter a equação evolutiva da função distribuição $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ a partir da equação de Boltzmann aproximada pelo modelo **BGK**. Em um segundo momento, trabalhou-se especificamente no problema de Poiseuille, usando uma malha com estrutura triangular, onde todos os passos para o processo também são indicados. Este estudo é apresentado nos apêndices B e C.

Assim, este trabalho foi estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 apresenta-se uma modelagem da equação linearizada de Boltzmann e formulações para os quatro modelos cinéticos aqui descritos. O capítulo 3 trata da apresentação e formulação matemática dos problemas propostos, apresentando suas formulações vetoriais, as soluções em ordenadas discretas e considerando as condições de contorno do tipo difuso-espectral. No capítulo 4 tem-se os resultados numéricos obtidos a partir das simulações. Resultados adicionais obtidos ao longo do trabalho para os problemas de fluxo, os quais não foram utilizados para análise de resultados mas podem servir para posterior consulta, são apresentados no apêndice A. No capítulo 5, são feitas as considerações finais a respeito às investigações feitas nos problemas em RGD.

2 EQUAÇÕES MODELO

Devido a grande dificuldade de se trabalhar com o termo integral da Equação de Boltzmann (termo que representa as colisões entre as partículas), tem sido propostas alternativas para substituir esse termo por expressões mais simples e que conservem certas propriedades do fenômeno físico de interação das partículas. Essas expressões simplificadas são chamadas de modelos de colisão e a equação de Boltzmann (após a substituição do termo integral por um modelo de colisão) é chamada de modelo cinético ou equação cinética.

2.1 Equação Linearizada de Boltzmann

Em se tratando de um gás rarefeito monoatômico, seu estado estacionário é descrito por uma função distribuição de partículas $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, onde \mathbf{r} é um vetor de coordenadas espaciais e $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ é o vetor velocidade das partículas. Essa função distribuição satisfaz a equação integro-diferencial não linear de Boltzmann [134]

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = J(f', f), \quad (2.1)$$

onde J representa o operador de colisão, definido por

$$J(f', f) = \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_2') \cdot [f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1')f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2') - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2)], \quad (2.2)$$

em que f e f' são respectivamente as funções de distribuição de partículas “antes” e “depois” das colisões e W é a função de frequência de espalhamento diferencial para a colisão entre dois corpos.

Através de $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ podem ser determinadas [134] todas as grandezas físicas macroscópicas de interesse relativas ao fluxo do gás, tais como: velocidade, fluxo de calor, temperatura, densidade, etc.

De forma mais geral, de acordo com Knackfuss e Barichello [62], para situações fracamente fora do equilíbrio, escreve-se a função distribuição relativa a pequenas perturbações ($|h| \ll 1$) causada à distribuição Maxwelliana absoluta $f_0(\mathbf{v})$ como

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(v)[1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{v})]. \quad (2.3)$$

Ainda seguindo [62], a forma da função distribuição Maxwelliana absoluta $f_0(v)$ é dada por

$$f_0(v) = n_0 \left[\frac{m}{2\pi kT_0} \right]^{3/2} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT_0} \right], \quad (2.4)$$

onde v é a magnitude da velocidade da partícula, m é a massa molecular, k é a constante de Boltzmann, n_0 é a densidade de equilíbrio das partículas e T_0 é uma temperatura de referência.

Assim, partindo-se da Eq. (2.3), a determinação da função distribuição f se dará em termos da função perturbação h . Para isso, substituindo a linearização dada pela Eq. (2.3) na Eq. (2.1), considerando também algumas propriedades do operador de colisão J [133], desprezando termos de ordem $O(h^2)$ e fazendo a seguinte adimensionalização

$$c = v \left[\frac{m}{2kT_0} \right]^{1/2}, \quad (2.5)$$

obtém-se a equação linearizada de Boltzmann em termos da função perturbação h

$$c_x \frac{\partial}{\partial x^*} h(x^*, \mathbf{c}) = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} \mathcal{L}\{h\}(x^*, \mathbf{c}), \quad (2.6)$$

onde σ_0 é o diâmetro de colisão das partículas de gás (na aproximação de esferas rígidas) e o operador de colisão é descrito por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h\}(x^*, \mathbf{c}) = & -\nu(c)h(x^*, \mathbf{c}) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} \mathbf{K}(\mathbf{c}', \mathbf{c}) h(x^*, \mathbf{c}') dc_x dc_y dc_z, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde x^* é a variável espacial, $\mathbf{K}(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é chamado de núcleo de espalhamento, \mathbf{c} é o vetor velocidade adimensional e $\nu(c)$ é a frequência de colisão das partículas, que depende da adimensionalização dada pela Eq. (2.5) e que será tratada na próxima seção.

Escrevendo o vetor velocidade em coordenadas esféricas $(c, \arccos \mu, \chi)$, ou seja,

$$c_x = c\mu, \quad c_y = c(1 - \mu^2)^{1/2} \sin \chi, \quad c_z = c(1 - \mu^2)^{1/2} \cos \chi, \quad (2.8)$$

a Eq. (2.6) pode ser escrita na forma

$$c\mu \frac{\partial}{\partial x^*} h(x^*, \mathbf{c}) = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} \mathcal{L}\{h\}(x^*, \mathbf{c}), \quad (2.9)$$

e reescreve-se o operador de colisão como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h\}(x^*, \mathbf{c}) = & -\nu(c)h(x^*, \mathbf{c}) + \\ & + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} \mathbf{K}(\mathbf{c}', \mathbf{c}) h(x^*, \mathbf{c}') d\chi' d\mu' dc'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Na literatura, é grande a quantidade de trabalhos desenvolvidos com a finalidade de obter equações modelo para aplicação na dinâmica de gases rarefeitos [15]. Essas metodologias precisam considerar de alguma forma dados essenciais na resolução do problema como, por exemplo, o livre caminho médio e a frequência de colisão de partículas. Barichello e Siewert em [4] apresentam um método sistemático para construção de expressões aproximadas do núcleo de colisão exato. Estas expressões são chamadas de núcleos sintéticos e também servem para definir o livre caminho médio e a frequência de colisão própria para cada modelo, como veremos a seguir para o caso do modelo de esferas rígidas.

2.2 Modelo de Esferas Rígidas

Segundo Barichello e Siewert em [4], o núcleo exato de espalhamento que descreve as iterações entre as partículas, baseado no modelo de esferas rígidas de Pekeris e Alterman [87], é definido por

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1)(2-\delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) k_n(c', c) \cos[m(\chi' - \chi)], \quad (2.11)$$

onde $P_n^m(\mu)$ são funções normalizadas de Legendre definidas por

$$P_n^m(\mu) = \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu), \quad n \geq m \quad (2.12)$$

e $P_n(\mu)$ são os polinômios de Legendre. Os elementos básicos $k_n(c', c)$ foram avaliados primeiramente por Pekeris e Alterman [87] usando $n=1$ e 2 e depois por Loyalka e Hickey [75] para $n=0$ e 3 . Barichello e Siewert [4] também apresentaram esses elementos para os mesmos valores de n . Considerando a simetria $k_n(c', c) = k_n(c, c')$, temos para $c' < c$

$$-(1/2)c'ck_0(c', c) = (2/3)c'^3 + 2c'^2 - 4P(c'), \quad (2.13)$$

$$-(1/2)c'^2c^2k_1(c', c) = (2/15)c'^5 - 4c' - (2/3)c'^3c^2 - 4(c'^2 - 1)P(c'), \quad (2.14)$$

$$-(1/2)c'^3c^3k_2(c', c) = a_2(c', c) + b_2(c', c)P(c') \quad (2.15)$$

e

$$-(1/2)c'^4c^4k_3(c', c) = a_3(c', c) + b_3(c', c)P(c'), \quad (2.16)$$

onde

$$a_2(c', c) = (2/35)c'^7 - 3c'^3 + 18c' - [(2/15)c'^5 - 3c']c^2, \quad (2.17)$$

$$b_2(c', c) = -6c'^4 + 15c'^2 - 18 + [2c'^2 - 3]c^2, \quad (2.18)$$

$$a_3(c', c) = (2/63)c'^9 - 5c'^5 + 20c'^3 - 150c' - [(2/35)c'^7 - c'^3 + 30c']c^2 \quad (2.19)$$

e

$$b_3(c', c) = -10c'^6 + 45c'^4 - 120c'^2 + 150 + [6c'^4 - 21c'^2 + 30]c^2, \quad (2.20)$$

com

$$P(c) = e^{c^2} \int_0^c e^{-x^2} dx. \quad (2.21)$$

Ainda por [4], para que se tenha conservação de massa, momento e energia, o núcleo de espalhamento $\mathbf{K}(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ na Eq. (2.10) deve satisfazer

$$\nu(c)\mathbf{S}(c, \mu, \chi) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-c'^2} \mathbf{S}(c', \mu', \chi') \mathbf{K}(\mathbf{c}', \mathbf{c}) c'^2 d\chi' d\mu' dc', \quad (2.22)$$

onde

$$\mathbf{S}(c, \mu, \chi) = \begin{bmatrix} 1 \\ c\mu \\ c(1 - \mu^2)^{1/2} \cos \chi \\ c(1 - \mu^2)^{1/2} \sin \chi \\ c^2 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Assim, fazendo uso das Eqs. (2.11) e (2.22), obtêm-se as seguintes condições que devem ser satisfeitas por $\nu(c)$

$$\nu(c) = \int_0^\infty e^{-c'^2} k_0(c', c) c'^2 dc', \quad (2.24)$$

$$\nu(c)c = \int_0^\infty e^{-c'^2} k_1(c', c) c'^3 dc', \quad (2.25)$$

e

$$\nu(c)c^2 = \int_0^\infty e^{-c'^2} k_0(c', c) c'^4 dc'. \quad (2.26)$$

Agora substituindo as Eqs. (2.13) e (2.14) nas Eqs. (2.24) à (2.26), obtemos a expressão para a frequência de colisão em esferas rígidas

$$\nu(c) = \frac{2c^2 + 1}{c} \int_0^c e^{-x^2} dx + e^{-c^2}. \quad (2.27)$$

2.3 Livre Caminho Médio

O livre caminho médio l representa a distância média percorrida por uma partícula antes de sofrer uma colisão. Segundo Barichello e Siewert [4], define-se a variável adimensional $\tau = x^*/l$, de forma que pode-se reescrever a versão homogênea da Eq. (2.9) como

$$c\mu \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \mathcal{L}\{h\}(\tau, \mathbf{c}), \quad (2.28)$$

onde o operador \mathcal{L} é dado pela Eq. (2.10) e

$$\varepsilon = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} l. \quad (2.29)$$

Neste ponto, o livre caminho médio é um parâmetro a ser determinado. Na literatura existem definições do livre caminho médio em função da viscosidade e da condutividade térmica. Essa escolha depende do tipo de problema que estamos lidando. Loyalka e Hichey [75] propõe para problemas como o Poiseuille que o livre caminho médio em função da viscosidade μ_* seja

$$l = l_p = (\mu_*/p_0)(2kT_0m)^{1/2}, \quad (2.30)$$

onde $p_0 = n_0 k T_0$ é a pressão, m é a massa molecular, k é a constante de Boltzmann e T_0 é uma temperatura de referência. Fazendo uso da definição de viscosidade proposta por Pekeris e Alterman [87]

$$\mu_* = \frac{8(2mkT_0)^{1/2}}{15\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} b(c) c^6 dc, \quad (2.31)$$

com $b(c)$ definida em [4] como sendo a solução da equação integral de Chapman-Enskog para viscosidade

$$\nu(c) c^2 b(c) - \int_0^\infty e^{-c'^2} b(c') k_2(c', c) c'^4 dc' = c^2 \quad (2.32)$$

e da Eq. (2.29), tem-se

$$\varepsilon = \varepsilon_p = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-c^2} b(c) c^6 dc. \quad (2.33)$$

Por outro lado, Loyalka e Ferziger [73] propõe para problemas como o de salto de temperatura, que o livre caminho médio em função da condutividade térmica λ_* seja

$$l = l_t = [4\lambda_*/(5n_0k)][m/(2kT_0)]^{1/2}, \quad (2.34)$$

onde, também fazendo uso da proposta de condutividade térmica feita por Pekeris e Alterman [87]

$$\lambda_* = \frac{4k(2kT_0/m)^{1/2}}{3\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{c^2} a(c) c^6 dc, \quad (2.35)$$

com $a(c)$ definida em [4] como sendo solução da equação integral de Chapman-Enskog para a condutividade térmica

$$\nu(c) c a(c) - \int_0^\infty e^{-c'^2} a(c') k_1(c', c) c'^3 dc' = c(c^2 - 5/2), \quad (2.36)$$

juntamente com a condição de normalização

$$\int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^4 dc = 0, \quad (2.37)$$

tem-se da Eq. (2.29) que

$$\varepsilon = \varepsilon_t = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^6 dc. \quad (2.38)$$

As expressões para ε representadas pelas Eqs. (2.33) e (2.38) são utilizadas na adimensionalização dos problemas que virão a seguir. Além disso, ε_p e ε_t dependem do modelo cinético que será trabalhado e são úteis na aquisição dos resultados numéricos.

2.4 Núcleos Sintéticos

Devido a dificuldade de se trabalhar com estes núcleos exatos $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$, foram desenvolvidos núcleos aproximados (sintéticos) que tem por finalidade simplificar o tratamento analítico e numérico do termo de espalhamento da ELB. A elaboração desses núcleos sintéticos não se restringem apenas ao truncamento das expansões do núcleo exato, uma vez que poucos termos da série ainda causam dificuldades no ponto de vista numérico. As maiores dificuldades estão localizadas nas funções $k_n(c', c)$ que possuem derivadas descontínuas nos pontos $c' = c$ mesmo para pequenos valores de n . Assim, novas abordagens tem sido propostas na teoria cinética com a finalidade de simplificar e linearizar as expansões do núcleo de espalhamento sem mudar suas características, as mantendo ainda na categoria de equações modelo. Assim, com a finalidade de se obter resultados numéricos, alguns modelos foram propostos, tais como: **BGK** [8], **S** [101], **Gross-Jackson** [50] e o **MRS** [46], onde as frequências de colisão são constantes; os modelos **CLF** [20], **CES** [4], **CEBS** [4] que são caracterizados por sua frequência de colisão ser variável; e ainda existem os modelos que são aplicados ao caso de mistura de gases, como o modelo de **McCormack** [78].

Segundo [4], para construção de um núcleo sintético baseado na Eq. (2.11), não basta apenas truncar o somatório, é preciso também trocar as componentes exatas $k_n(c', c)$ por aproximações $f_n(c', c)$ que preservam as propriedades físicas do núcleo

de espalhamento original. Dessa forma, tem-se

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (2n+1)(2-\delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) f_n(c', c) \cos[m(\chi' - \chi)], \quad (2.39)$$

com $n \leq N$. Assim, podemos escrever a Eq. (2.28) já na forma adimensionalizada

$$c\mu \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \mathcal{L}^*(\tau, \mathbf{c}), \quad (2.40)$$

onde $\mathcal{L}^*\{h\}$ depende do núcleo sintético $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$

$$\mathcal{L}^*\{h\}(\tau, \mathbf{c}) = -\nu(c)h(\tau, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-c'^2} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) c'^2 d\chi' d\mu' dc', \quad (2.41)$$

com $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ sendo dado pela Eq. (2.39). Para garantir que o núcleo sintético mantenha as mesmas características do núcleo exato, as componentes $f_0(c', c)$, $f_1(c', c)$ e $f_2(c', c)$, que substituem $k_0(c', c)$, $k_1(c', c)$ e $k_2(c', c)$, também devem satisfazer as Eqs. (2.24) à (2.26), (2.32), (2.36) e (2.37). Essas componentes $f_n(c', c)$ dependem do modelo como será mostrado a seguir.

2.5 Modelos BGK, S, Gross-Jackson e MRS

Depois de definidas, as Eqs. (2.40) e (2.41) serão usadas na construção das equações modelo para a ELB, bem como outras expressões necessárias, como por exemplo, as funções de Chapman-Enskog e os parâmetros ε . Segundo Cabrera [15], para o desenvolvimento matemático dos modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** baseado no modelo de esferas rígidas, toma-se as relações entre coordenadas esféricas e cartesianas dadas pela Eq. (2.8), obtendo-se novamente o vetor velocidade \mathbf{c} em coordenadas retangulares (c_x, c_y, c_z) e a ELB é escrita de uma forma semelhante à da Eq. (2.6) como

$$c_x \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) = \varepsilon \mathcal{L}^*\{h\}(\tau, \mathbf{c}), \quad (2.42)$$

onde agora

$$\mathcal{L}^*\{h\}(\tau, \mathbf{c}) = -\nu(c)h(\tau, \mathbf{c}) + \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) dc'_x dc'_y dc'_z. \quad (2.43)$$

As componentes $f_n(c', c)$ foram determinadas por Barichello e Siewert [4] para o modelo **BGK** como um caso particular do modelo **CES**. Após isso, Siewert e Sharipov [126] também as obtiveram usando os modelos **BGK** e **S** em conjunto. O modelo de **Gross-Jackson** foi definido nos trabalhos [97, 50] e o modelo **MRS** foi obtido como um caso particular do modelo de **McCormack** em [32] utilizando se de apenas uma única espécie de gás para o modelo de esferas rígidas. Segundo Garcia e Siewert [46] e Scherer [97], o núcleo de espalhamento destes quatro modelos tem um mesmo formato e podem ser descritos pela expressão

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = 1 + 2(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}) + (2/3)(c'^2 - 3/2)(c^2 - 3/2) + \beta M(\mathbf{c}', \mathbf{c}) + \varpi N(\mathbf{c}', \mathbf{c}), \quad (2.44)$$

onde β e ϖ são parâmetros que vão depender do modelos em que estamos trabalhando e

$$M(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = (4/5)(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c})(c'^2 - 5/2)(c^2 - 5/2), \quad (2.45)$$

$$N(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = 2(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c})^2 - (2/3)c'^2 c^2, \quad (2.46)$$

com

$$\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = c' c \sum_{m=0}^1 (2 - \delta_{0,m}) P_1^m(\mu') P_1^m(\mu) \cos[m(\chi' - \chi)]. \quad (2.47)$$

Para que o núcleo definido pela equação (2.44) corresponda a um determinado modelo, certos valores para os parâmetros β e ϖ são considerados. Por exemplo:

- modelo **BGK**: $\beta = 0$ e $\varpi = 0$;
- modelo **S**: $\beta = 1/3$ e $\varpi = 0$;
- modelo **Gross-Jackson** [97]: $\beta = 5/9$ e $\varpi = 1/3$;
- modelo **MRS** [46]: $\beta = 1 - (16/15)2^{1/2}$ e $\varpi = 1 - (8/5)2^{1/2}$.

Segundo Garcia e Siewert [46], para escrever o núcleo de espalhamento dado pela Eq. (2.44) no formato da Eq. (2.39), define-se as componentes $f_n(c', c)$ como

$$f_0(c', c) = 4\pi^{-1/2} \left[1 + \frac{2}{3} \left(c'^2 - \frac{3}{2} \right) \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \right], \quad (2.48)$$

$$f_1(c', c) = \frac{8}{3}\pi^{-1/2} c' c \left[1 + \frac{2}{5} \beta \left(c'^2 - \frac{5}{2} \right) \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \right], \quad (2.49)$$

$$f_2(c', c) = \frac{16}{15}\pi^{-1/2} \varpi c'^2 c^2 \quad (2.50)$$

e

$$f_n(c', c) = 0, \quad n > 2. \quad (2.51)$$

Além disso, de acordo com Garcia e Siewert [46], as componentes $f_n(c', c)$ devem satisfazer as condições integrais dadas pelas Eqs. (2.24) à (2.26) (que resultam das condições de conservação de massa, momento e energia). Assim, substituindo as Eqs. (2.48) e (2.49) nas Eqs. (2.24) à (2.26), conseguimos determinar que a frequência de colisão $\nu(c) = 1$ para os quatro modelos. Ainda, substituindo as Eqs. (2.49) e (2.50) nas Eqs. (2.32), (2.36) e (2.37), determina-se as funções de Chapman-Enskog $a(c)$ e $b(c)$ próprias para cada modelo.

Observadas as funções de Chapman-Enskog obtidas seguindo o procedimento acima, é possível escrevê-las de uma forma mais geral, dependendo apenas dos parâmetros β e ϖ . Assim, Garcia e Siewert em [46], definem

$$a(c) = \varepsilon_t (c^2 - 5/2), \quad (2.52)$$

$$b(c) = \varepsilon_p, \quad (2.53)$$

onde

$$\varepsilon_t = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1 - \varpi}. \quad (2.55)$$

Dessa forma, ao substituir as expressões (2.52) e (2.53) em (2.33) e (2.38) consegue-se determinar os valores de ε para os quatro modelos. Para o modelo

BGK tem-se

$$\varepsilon_t = 1, \quad \varepsilon_p = 1, \quad a(c) = (c^2 - 5/2), \quad b(c) = 1. \quad (2.56)$$

Para o modelo **S** tem-se

$$\varepsilon_t = 3/2, \quad \varepsilon_p = 1, \quad a(c) = (3/2)(c^2 - 5/2), \quad b(c) = 1. \quad (2.57)$$

Para o modelo **Gross-Jackson** tem-se

$$\varepsilon_t = 9/4, \quad \varepsilon_p = 3/2, \quad a(c) = (9/4)(c^2 - 5/2), \quad b(c) = 3/2. \quad (2.58)$$

E para o modelo **MRS** tem-se

$$\varepsilon_t = (15/32)2^{1/2}, \quad \varepsilon_p = (5/16)2^{1/2}, \quad a(c) = (15/32)(c^2 - 5/2)2^{1/2}, \quad b(c) = (5/16)2^{1/2}. \quad (2.59)$$

Vale lembrar ainda, segundo [4], que para a ELB tem-se

$$\varepsilon_t = 0.679630049\dots, \quad \varepsilon_p = 0.449027806\dots \quad (2.60)$$

A partir dos valores de ε_p e ε_t encontrados para os modelos acima, pode-se avaliar o número de Prandtl. Esse parâmetro é seguidamente usado em teoria cinética para determinar a relação entre ε_p e ε_t , podendo ser expresso por

$$Pr = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_t}. \quad (2.61)$$

Substituindo a Eq. (2.60) em Eq. (2.61), verifica-se que para a ELB o parâmetro $Pr = 0.660694457\dots$, sendo este um valor próximo de $2/3$ e que, segundo [22, 105], $Pr = 2/3$ é o valor normalmente utilizado na teoria cinética.

Avaliando esse parâmetro para os outros modelos citados anteriormente, tem-se $Pr = 1$ para o modelo **BGK**, enquanto para os demais modelos (**S**, **Gross-Jackson**, **MRS**) tem-se $Pr = 2/3$. Assim, a literatura [105] considera uma vantagem o uso dos modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** sobre o uso do modelo **BGK**, apesar de todos estarem relacionados à frequência de colisão constante, uma vez que podemos conseguir o valor correto para o número de Prandtl quando avaliada a razão $\varepsilon_p/\varepsilon_t$.

Outro elemento indispensável na resolução de problemas de dinâmica de gases são as condições de contorno, cuja função é descrever o comportamento do gás próximo as paredes. Esse processo de iteração entre as partículas do gás e a parede podem ser descritas pela lei de Cercignani-Lampis (discutida por Knackfuss em [61]) e pela lei Difuso-Especular (introduzida por Williams em [133] e que será adotada nesse trabalho) onde é considerado que uma fração das partículas é refletida difusamente enquanto a fração restante é refletida especularmente.

Nos próximos capítulos serão apresentadas, além de formulações matemáticas para o problema de transferência de calor em um canal plano e problemas clássicos de fluxo de gás em domínios finitos e semi-infinitos, condições de contorno específicas definidas para o tratamento destes problemas, nos quais pretende-se aplicar os modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** conjuntamente com o método ADO.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Após a apresentação de uma formulação em esferas rígidas da ELB e de expressões importantes na definição do livre caminho médio em função das equações de Chapman-Enskog para a viscosidade e para a condutividade térmica, neste capítulo serão formulados problemas clássicos de fluxo e um problema de transferência de calor utilizando cada um dos modelos cinéticos citados anteriormente.

3.1 Problemas Clássicos de Fluxo em Dinâmica de Gases Rarfeitos

Os problemas em dinâmica de gases rarefeitos em regime de transição podem ser modelados tanto pela ELB quanto por modelos cinéticos, com suas condições de contorno apropriadas. Seguindo Barichello em [4], considera-se a equação cinética já escrita em termos de uma perturbação $h(\tau, \mathbf{c})$ da função distribuição

$$\begin{aligned} c_x \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, \mathbf{c}) + \varepsilon h(\tau, \mathbf{c}) = \\ = \varepsilon \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} h(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) dc'_x dc'_y dc'_z + S(\mathbf{c}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $S(\mathbf{c})$ é um termo fonte e $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é o mesmo núcleo de espalhamento sintético abordado anteriormente pela Eq. (2.44), onde é mantida a dependência de β e ϖ pois é com a escolha apropriada do valor destes parâmetros que se define o núcleo para cada um dos modelos cinéticos citados anteriormente (dentro os modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS**). Considera-se também $M(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ e $N(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ como sendo os mesmos definidos anteriormente pelas Eqs. (2.45) e (2.46).

Ainda em consideração a Eq. (3.1), sendo $\tau = x^*/l$ uma variável adimensional escrita em termos do livre caminho médio l (que a princípio será considerado ar-

bitrário), \mathbf{c} é o vetor velocidade adimensional em coordenadas retangulares (c_x, c_y, c_z) e ε é o mesmo definido pela Eq. (2.29).

Assim como foi feita para a Eq. (2.1), ao tomar as condições de contorno que consideram os efeitos de reflexão difusa e espectral [16], e nessas condições for aplicada a Eq. (2.3), consegue-se condições de contorno em termos da perturbação $h(\tau, \mathbf{c})$. Sendo que para problemas de canais planos, $\tau \in [-a, a]$, as condições de contorno associadas a Eq. (3.1) são dadas por

$$\begin{aligned} h(-a, c_x, c_y, c_z) - (1 - \alpha)h(-a, -c_x, c_y, c_z) = \\ = (2\alpha/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(-a, -c'_x, c'_y, c'_z) c'_x dc'_x dc'_y dc'_z \end{aligned} \quad (3.2)$$

e

$$\begin{aligned} h(a, -c_x, c_y, c_z) - (1 - \alpha)h(a, c_x, c_y, c_z) = \\ = (2\alpha/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(a, c'_x, c'_y, c'_z) c'_x dc'_x dc'_y dc'_z, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\alpha \in (0, 1]$ representa o coeficiente de acomodação das paredes e $c_x > 0$.

Para problemas de semi-espço, $\tau \in [0, \infty)$, tem-se para a Eq. (3.1) uma condição de contorno no infinito juntamente com uma condição semelhante a equação (3.2), que é definida por

$$\begin{aligned} h(0, c_x, c_y, c_z) - (1 - \alpha)h(0, -c_x, c_y, c_z) = \\ = (2\alpha/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(0, -c'_x, c'_y, c'_z) c'_x dc'_x dc'_y dc'_z. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dentre as quantidades de interesse que serão avaliadas neste trabalho, destacam-se o perfil de velocidade $u(\tau)$ e a perfil de fluxo de calor $q(\tau)$. Estas grandezas são definidas em termos da função $h(\tau, \mathbf{c})$ [16] como segue

$$u(\tau) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) c_y dc_x dc_y dc_z, \quad (3.5)$$

$$q(\tau) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) (c^2 - 5/2) c_y dc_x dc_y dc_z. \quad (3.6)$$

Outra quantidade de interesse a ser avaliada, mas esta restrita apenas ao problema de fluxo de Couette, é a componente do tensor pressão P_{xy} dado por

$$P_{xy} = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) c_x c_y dc_x dc_y dc_z. \quad (3.7)$$

Devido ao fato de essas quantidades serem integrais dependentes da função $h(\tau, \mathbf{c})$, faz-se uso de projeções adequadas para simplificação do problema e subsequente resolução pelo método ADO. Mais adiante será visto que as projeções utilizadas nos problemas clássicos de fluxo de gases rarefeitos são diferentes das projeções utilizadas nos problemas de transferência de calor.

3.2 Formulação Vetorial para os Problema de Fluxo

Tendo em vista que as quantidades de interesse são definidas em termos de momentos (integrais) da função $h(\tau, \mathbf{c})$, ao invés de se trabalhar diretamente com a Eq. (3.1) são criados problemas auxiliares. Isso acarreta na diminuição do número de variáveis envolvidas, simplificando a avaliação das quantidades de interesse.

Os problemas auxiliares são obtidos mediante projeções estabelecidas a partir das próprias quantidades de interesse. Assim, escolhe-se

$$\phi_1(c_y, c_z) = (c_y/\pi) e^{-c_y^2 - c_z^2} \quad (3.8)$$

e

$$\phi_2(c_y, c_z) = [c_y/(\pi\sqrt{2})](c_y^2 + c_z^2 - 2) e^{-c_y^2 - c_z^2} \quad (3.9)$$

e define-se

$$h_1(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z \quad (3.10)$$

e

$$h_2(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z, \quad (3.11)$$

de forma que consegue-se reescrever as Eqs. (3.5), (3.6) e (3.7) como

$$u(\tau) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_x^2} h_1(\tau, c_x) dc_x, \quad (3.12)$$

$$q(\tau) = \pi^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_x^2} (c_x^2 - 1/2) h_1(\tau, c_x) dc_x + 2^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_x^2} h_2(\tau, c_x) dc_x \right) \quad (3.13)$$

e

$$P_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_x^2} h_1(\tau, c_x) c_x dc_x. \quad (3.14)$$

Posteriormente será visto que reescrever essas expressões dessa forma facilita a formulação vetorial do problema.

Agora, multiplica-se a Eq. (3.1) pela Eq. (3.8), integra-se esse produto em c_y e c_z em $(-\infty, \infty)$ e considera-se a nova notação $c_x = \xi$, não esquecendo das Eqs. (3.10) e (3.11), encontra-se

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} h_1(\tau, \xi) + \varepsilon h_1(\tau, \xi) = \varepsilon \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} [f_{11}(\xi', \xi) h_1(\tau, \xi') + f_{12}(\xi', \xi) h_2(\tau, \xi')] d\xi' + a_1(\xi), \quad (3.15)$$

onde

$$f_{11}(\xi', \xi) = 1 + 2\varpi \xi' \xi + (2\beta/5)(\xi^2 - 1/2)(\xi'^2 - 1/2), \quad (3.16)$$

$$f_{12}(\xi', \xi) = (2\sqrt{2}\beta/5)(\xi^2 - 1/2) \quad (3.17)$$

e

$$a_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(c_y, c_z) S(\xi, c_y, c_z) dc_y dc_z. \quad (3.18)$$

De forma equivalente, multiplica-se a Eq. (3.1) pela Eq. (3.9) e integra-se esse produto em c_y e c_z em $(-\infty, \infty)$ ainda considerando $c_x = \xi$ e não esquecendo das Eqs. (3.10) e (3.11), encontra-se

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} h_2(\tau, \xi) + \varepsilon h_2(\tau, \xi) = \varepsilon \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} [f_{21}(\xi', \xi) h_1(\tau, \xi') + f_{22}(\xi', \xi) h_2(\tau, \xi')] d\xi' + a_2(\xi), \quad (3.19)$$

onde

$$f_{21}(\xi', \xi) = (2\sqrt{2}\beta/5)(\xi'^2 - 1/2), \quad (3.20)$$

$$f_{22}(\xi', \xi) = 4\beta/5 \quad (3.21)$$

e

$$a_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(c_y, c_z) S(\xi, c_y, c_z) dc_y dc_z. \quad (3.22)$$

Assim, usando as Eqs. (3.10) a (3.22), consegue-se reescrever vetorialmente o problema como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{H}(\tau, \xi) = \varepsilon \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi'^2} \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{H}(\tau, \xi') d\xi' + \mathbf{A}(\xi) \quad (3.23)$$

onde os termos da Eq. (3.23) são dados por

$$\mathbf{K}(\xi', \xi) = \begin{bmatrix} f_{11}(\xi', \xi) & f_{12}(\xi', \xi) \\ f_{12}(\xi', \xi) & f_{22}(\xi', \xi) \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{A}(\xi) = \begin{bmatrix} a_1(\xi) \\ a_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e

$$\mathbf{H}(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} h_1(\tau, \xi) \\ h_2(\tau, \xi) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Para definir as condições de contorno apropriadas à Eq. (3.23), as Eqs. (3.2) a (3.4) devem passar pelo mesmo processo que a Eq. (3.1). O resultado é que, para problemas de canais planos, as condições de contorno associadas a Eq. (3.23) são

$$\mathbf{H}(-a, \xi) = (1 - \alpha) \mathbf{H}(-a, -\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{H}(a, -\xi) = (1 - \alpha) \mathbf{H}(a, \xi), \quad \xi \in (0, \infty). \quad (3.28)$$

Para os problemas de semi-espço, além de uma condição no infinito, é associada a Eq. (3.23) uma condição de contorno do tipo

$$\mathbf{H}(0, \xi) = (1 - \alpha) \mathbf{H}(0, -\xi), \quad \xi \in (0, \infty). \quad (3.29)$$

Com esse procedimento, também é possível reescrever as Eqs. (3.12), (3.13) e (3.14) em função de $\mathbf{H}(\tau, \xi)$, como segue

$$u(\tau) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{H}(\tau, \xi) d\xi, \quad (3.30)$$

$$q(\tau) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}^T \mathbf{H}(\tau, \xi) d\xi \quad (3.31)$$

e

$$P_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{H}(\tau, \xi) \xi d\xi. \quad (3.32)$$

3.3 Alguns Problemas Clássicos

O procedimento desenvolvido neste trabalho até o momento é válido para todos os modelos cinéticos já citados e para todos os problemas de fluxo de gases rarefeitos que serão apresentados a seguir. Também serão descritas especificações de cada um dos problema, cuja resolução será feita pelo método ADO e cujas formulações já foram discutidas anteriormente [133, 16].

Os três primeiros problemas que serão apresentados são referentes a fluxos em canais planos, onde vamos considerar o canal definido entre duas paredes localizadas em $\tau = \pm a$. Os últimos dois problemas se referem a meios semi-infinitos, cujas soluções são utilizadas na avaliação dos coeficientes de deslizamento que são úteis quando aplicados em problemas hidrodinâmicos associados à condições de contorno de deslizamento.

3.3.1 Fluxo de Poiseuille

Segundo Williams [133], o problema denominado fluxo de Poiseuille se caracteriza por manter um gás rarefeito confinado entre duas placas paralelas infinitas,

separadas a uma distância $2a$, sujeito a um gradiente de pressão (constante) ortogonal à direção do fluxo. Segundo [4], tem-se na Eq (3.1) que

$$S(\mathbf{c}) = -k_p c_y, \quad (3.33)$$

onde, para obtenção de resultados numéricos neste trabalho, será tomado $k_p = 1$. Usando as Eqs. (3.8), (3.9), (3.18) e (3.22), encontra-se para a Eq. (3.23)

$$\mathbf{A}(\xi) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Ainda com relação a Eq. (3.23), usa-se a condição de contorno

$$\mathbf{H}(a, -\xi) = (1 - \alpha)\mathbf{H}(a, \xi), \quad \xi \in (0, \infty) \quad (3.35)$$

aliada a uma condição de simetria

$$\mathbf{H}(\tau, \xi) = \mathbf{H}(-\tau, -\xi). \quad (3.36)$$

3.3.2 Problema de *Creep* Térmico

Segundo [134], o problema de *Creep* Térmico trata do movimento de um gás entre duas placas paralelas, separadas a uma distância $2a$, provocado por um gradiente (constante) de temperatura paralelo às placas que cercam o gás. Normalmente este fenômeno se refere a pequenas partículas suspensas em um gás se movendo na direção em que a temperatura decresce. Para este problema tem-se para Eq. (3.1) que

$$S(\mathbf{c}) = -c_y(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 5/2)k_t, \quad (3.37)$$

onde escolheu-se $k_t = 1$ para obtenção de resultados numéricos. Fazendo o mesmo procedimento utilizado para o problema de Poiseuille, obtém-se

$$\mathbf{A}(\xi) = -1/2 \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Para completar a definição do problema de *Creep* Térmico, associamos à Eq. (3.23) as condições definidas pelas Eqs. (3.35) e (3.36).

3.3.3 Fluxo de Couette

Para o problema do fluxo de Couette, considera-se que duas placas paralelas infinitas, separadas a uma distância $2a$, se movimentam em direções opostas, com velocidade $\pm u_w$. Parte-se então da Eq. (3.23) com $S(\mathbf{c}) = 0$ e associa-se a condição de contorno não homogênea

$$\mathbf{H}(a, -\xi) = (1 - \alpha)\mathbf{H}(a, \xi) - \alpha u_w \Phi_1, \quad \xi \in (0, \infty), \quad (3.39)$$

onde

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Além disso, usa-se também a condição anti-simétrica

$$\mathbf{H}(\tau, \xi) = -\mathbf{H}(-\tau, -\xi). \quad (3.41)$$

3.3.4 O Coeficiente de Deslizamento Térmico

Considera-se novamente o fluxo de um gás causado por um gradiente (constante) de temperatura paralelo à parede do canal. Segundo Williams [134], tem-se para Eq. (3.1)

$$S(\mathbf{c}) = -c_y(c_x^2 + c_z^2 + c_y^2 - 5/2)k_l. \quad (3.42)$$

Como consequência da definição da Eq. (3.42), juntamente com as Eqs. (3.18) e (3.22) e fazendo $k_l = 1$ (para obtenção de resultados numéricos), tem-se

$$\mathbf{A}(\xi) = -1/2 \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Em consideração a condição de contorno, com a expressão

$$\mathbf{H}(0, \xi) = (1 - \alpha)\mathbf{H}(0, -\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \quad (3.44)$$

espera-se que o comportamento da quantidade velocidade no infinito seja

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_S(\tau) = (1/2)A_S, \quad (3.45)$$

o que define A_S como o coeficiente de Deslizamento Térmico a ser avaliado.

3.3.5 O Coeficiente de Deslizamento Viscoso

Por [61], o problema de Deslizamento Viscoso descreve o deslocamento de um gás em um domínio semi-infinito, com um gradiente de velocidade ortogonal a parede. Segundo [134], considera-se para este problema

$$S(\mathbf{c}) = -2c_x c_y k_0, \quad (3.46)$$

onde, faz-se $k_0 = 1$ e com o mesmo procedimento aplicado nos problemas anteriores, obtém-se para a Eq. (3.41)

$$\mathbf{A}(\xi) = \begin{bmatrix} -\xi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

A condição de contorno associada à Eq. (3.41) é a mesma referida anteriormente pela Eq. (3.44) e espera-se que o comportamento da quantidade velocidade no infinito é dado por

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} u_K(\tau) = A_K. \quad (3.48)$$

Porém, para este problema em específico, a quantidade perfil de velocidade é definido por

$$u_K(\tau) = A_K \tau + \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{H}(\tau, \xi) d\xi. \quad (3.49)$$

Como relatado anteriormente, é de interesse determinar o coeficiente de Deslizamento Viscoso A_K , dado por

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{H}^h(\tau, \xi) = A_K. \quad (3.50)$$

3.4 Soluções Particulares

Levando em consideração o termo fonte que aparece na Eq. (3.23), torna-se necessário determinar soluções particulares, onde essas soluções dependem do problema a ser resolvido. Assim, seguindo Cabrera e Barichello [16], propõe-se uma

forma geral para a solução particular

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = [\mathbf{B}\tau^2 + \mathbf{C}\tau\xi + \mathbf{D}\xi^2 + \mathbf{E}\xi + \mathbf{F}], \quad (3.51)$$

que será aplicada à todos os problemas, exceto ao de Couette por ser homogêneo. Considera-se também que \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} e \mathbf{F} são vetores constantes. Dessa forma, substituindo (3.51) em (3.23) e usando as Eqs. (3.34), (3.38), (3.43) e (3.47), encontra-se para o problema de Poiseuille

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon(1-\varpi)\tau^2}{2} - \tau\xi + \frac{(5-4\beta)\xi^2}{5\varepsilon(1-\beta)} \\ \frac{\sqrt{2}\beta}{5\varepsilon(1-\beta)} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

para os problemas de *Creep* Térmico e Deslizamento Térmico

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = \frac{1}{2\varepsilon(\beta-1)} \begin{bmatrix} \xi^2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

e para o problema de Deslizamento Viscoso

$$\mathbf{H}^p(\tau, \xi) = \frac{\xi}{\varepsilon(\varpi-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Uma vez conhecidas as soluções particulares, propõe-se para o problema em função de $\mathbf{H}(\tau, \xi)$ uma solução na forma

$$\mathbf{H}(\tau, \xi) = \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \mathbf{H}^p(\tau, \xi), \quad (3.55)$$

onde $\mathbf{H}^p(\tau, \xi)$ é a solução particular mencionada anteriormente e $\mathbf{H}^h(\tau, \xi)$ é a solução do problema homogêneo definido a partir da Eq. (3.23) como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{H}^h(\tau, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, \xi') d\xi', \quad (3.56)$$

sendo

$$\Psi(\xi) = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2} \quad (3.57)$$

e, para os problemas de Poiseuille e *Creep* Térmico, as condições de contorno são dadas por

$$\mathbf{H}^h(a, -\xi) - (1-\alpha)\mathbf{H}^h(a, \xi) = \mathbf{R}(\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \quad (3.58)$$

com

$$\mathbf{R}(\xi) = (1 - \alpha)\mathbf{H}^p(a, \xi) - \mathbf{H}^p(a, -\xi). \quad (3.59)$$

Para os problemas de Deslizamento Térmico e Viscoso, as condições são dadas por

$$\mathbf{H}^h(0, \xi) - (1 - \alpha)\mathbf{H}^h(0, -\xi) = \mathbf{R}(\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \quad (3.60)$$

onde

$$\mathbf{R}(\xi) = (1 - \alpha)\mathbf{H}^p(0, -\xi) - \mathbf{H}^p(0, \xi). \quad (3.61)$$

Para o problema de Couette, a condição de contorno é dada pela Eq. (3.39) por se tratar de um problema homogêneo.

3.5 Solução em Ordenadas Discretas

Verificando que a Eq. (3.57) corresponde a uma função par, podemos reescrever a Eq. (3.56) como

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}^h(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{H}^h(\tau, \xi) &= \\ &= \varepsilon \int_0^\infty \Psi(\xi') [\mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, \xi') + \mathbf{K}(-\xi', \xi) \mathbf{H}^h(\tau, -\xi')] d\xi' \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde, aplicando o método ADO, reescreve-se a Eq. (3.62) como

$$\begin{aligned} \pm \xi_i \frac{d}{d\tau} \mathbf{H}^h(\tau, \pm \xi_i) + \varepsilon \mathbf{H}^h(\tau, \pm \xi_i) &= \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) [\mathbf{K}(\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{H}^h(\tau, \xi_k) + \mathbf{K}(-\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{H}^h(\tau, -\xi_k)], \end{aligned} \quad (3.63)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$. Os pares $\{\xi_k, w_k\}$ para $k = 1, 2, \dots, N$ correspondem respectivamente aos N pontos e pesos obtidos pelo método ADO quando avaliada a integral no intervalo $[0, \infty)$.

Seguindo Scherer [97], para resolução do problema definido pela Eq. (3.63), busca-se soluções do tipo

$$\mathbf{H}^h(\tau, \xi) = \Phi(\nu, \xi) e^{-\varepsilon \tau / \nu}, \quad (3.64)$$

onde

$$\mathbf{\Phi}(\nu, \xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1(\nu, \xi) \\ \mathbf{\Phi}_2(\nu, \xi) \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Substituindo a Eq. (3.64) na Eq. (3.63), encontra-se

$$(\nu \mp \xi_i)\mathbf{\Phi}(\nu, \pm\xi_i) = \nu \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) [\mathbf{K}(\xi_k, \pm\xi_i)\mathbf{\Phi}(\nu, \xi_k) + \mathbf{K}(-\xi_k, \pm\xi_i)\mathbf{\Phi}(\nu, -\xi_k)]. \quad (3.66)$$

Fazendo $i = 1, \dots, N$, pode-se escrever uma versão matricial da Eq. (3.66)

como

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\mathbf{\Phi}_+(\nu) = \mathbf{W}(+,+)\mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{W}(-,+)\mathbf{\Phi}_-(\nu), \quad (3.67)$$

$$\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\nu}\mathbf{M}\right)\mathbf{\Phi}_-(\nu) = \mathbf{W}(+,-)\mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{W}(-,-)\mathbf{\Phi}_-(\nu), \quad (3.68)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão $2N \times 2N$, \mathbf{M} é a matriz de dimensão $2N \times 2N$ definida como

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}, \quad (3.69)$$

$\mathbf{\Phi}_+(\nu)$ e $\mathbf{\Phi}_-(\nu)$ são vetores de dimensão $2N$ dados por

$$\mathbf{\Phi}_\pm(\nu) = [\mathbf{\Phi}_1(\nu, \pm\xi_1), \dots, \mathbf{\Phi}_1(\nu, \pm\xi_N), \mathbf{\Phi}_2(\nu, \pm\xi_1), \dots, \mathbf{\Phi}_2(\nu, \pm\xi_N)] \quad (3.70)$$

e $\mathbf{W}(\pm, \pm)$ são matrizes de dimensão $2N \times 2N$ definida como

$$\mathbf{W}(\pm, \pm) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(\pm, \pm) & \mathbf{W}_{12}(\pm, \pm) \\ \mathbf{W}_{21}(\pm, \pm) & \mathbf{W}_{22}(\pm, \pm) \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

cujos elementos são as seguintes sub-matrizes de dimensão $N \times N$

$$[\mathbf{W}_{mn}(\pm, \pm)]_{ij} = w_j \Psi(\xi_j) f_{mn}(\pm\xi_j, \pm\xi_i), \quad (3.72)$$

para $m, n = 1, 2$ e $i, j = 1, \dots, N$. Além disso, observando as Eqs. (3.16), (3.17), (3.20) e (3.21), nota-se que a matriz definidas na Eq. (3.24) apresenta a seguinte simetria com relação aos sinais de ξ e ξ'

$$\mathbf{K}(+\xi', +\xi) = \mathbf{K}(-\xi', -\xi), \quad (3.73)$$

$$\mathbf{K}(-\xi', +\xi) = \mathbf{K}(+\xi', -\xi). \quad (3.74)$$

E essa simetria se mantém nas matrizes $\mathbf{W}(\pm, \pm)$, portanto

$$\mathbf{W}(+, +) = \mathbf{W}(-, -), \quad (3.75)$$

$$\mathbf{W}(-, +) = \mathbf{W}(+, -). \quad (3.76)$$

Ainda por Scherer [97], define-se então

$$\mathbf{W}_+ = \mathbf{W}(+, +) = \mathbf{W}(-, -), \quad (3.77)$$

$$\mathbf{W}_- = \mathbf{W}(+, -) = \mathbf{W}(-, +), \quad (3.78)$$

possibilitando reescrever as Eqs. (3.67) e (3.68) como

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_+(\nu) = \mathbf{W}_+ \Phi_+(\nu) + \mathbf{W}_- \Phi_-(\nu), \quad (3.79)$$

$$\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\nu} \mathbf{M} \right) \Phi_-(\nu) = \mathbf{W}_- \Phi_+(\nu) + \mathbf{W}_+ \Phi_-(\nu). \quad (3.80)$$

Por Scherer [97], se for definido

$$\mathbf{U} = \Phi_+(\nu) + \Phi_-(\nu), \quad (3.81)$$

com $\Phi_+(\nu)$ e $\Phi_-(\nu)$ sendo os vetores definidos por (3.70), pode-se somar e subtrair as Eqs. (3.79) e (3.80), sem esquecer de usar a Eq. (3.81), e chegar ao seguinte problema de autovalores

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X} = 0, \quad (3.82)$$

onde \mathbf{A} é a matriz de dimensão $2N \times 2N$ definida por

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{W}_+ + \mathbf{W}_-) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-) \mathbf{M}^{-1}, \quad (3.83)$$

com \mathbf{X} e λ sendo, respectivamente, o autovetor e o autovalor associado, de forma que

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{U}, \quad (3.84)$$

$$\lambda = \nu^{-2} \quad (3.85)$$

e estes autovalores são todos reais e distintos.

O problema de autovalores definido pela Eq. (3.82) fornece um conjunto de $2N$ constantes de separação ν_j associadas a $2N$ vetores $X(\nu_j)$ de dimensão $2N$ que, aplicados nas Eqs. (3.79) e (3.80), determinam as seguintes soluções elementares

$$\Phi_+(\nu_j) = (1/2)\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} - \nu_j(\mathbf{I} - \mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-)]\mathbf{U}_j \quad (3.86)$$

e

$$\Phi_-(\nu_j) = (1/2)\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} + \nu_j(\mathbf{I} - \mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-)]\mathbf{U}_j \quad (3.87)$$

Assim, após determinadas as constantes de separação ν_j e as soluções elementares $\Phi_{\pm}(\nu_j)$, pode-se então escrever a solução em ordenadas discretas do problema dado pela Eq. (3.56) como

$$\mathbf{H}^h(\tau, \pm\xi_i) = \sum_{j=1}^{2N} [A_j\Phi(\nu_j, \pm\xi_i)e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j\Phi(\nu_j, \mp\xi_i)e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}]. \quad (3.88)$$

Contudo, sendo este um problema conservativo [6], uma das constantes de separação, por exemplo ν_{2N} , torna-se ilimitada quando $n \rightarrow \infty$. Assim, afim de escrever a solução geral do problema em termos de soluções elementares adequadas e linearmente independentes, despreza-se esta constante de separação e acrescenta-se à Eq. (3.88) duas novas soluções linearmente independentes (soluções exatas) da Eq. (3.56). Portanto, a forma final da solução para o problema homogêneo relacionado a canais planos é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^h(\tau, \pm\xi_i) = & A_1^*\Phi^1 + B_1^*\Phi^2(\tau, \pm\xi_i) + \\ & + \sum_{j=1}^{2N-1} [A_j\Phi(\nu_j, \pm\xi_i)e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j\Phi(\nu_j, \mp\xi_i)e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \end{aligned} \quad (3.89)$$

e com relação a problemas em semi-espaço, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^h(\tau, \pm\xi_i) = & A_1^*\Phi^1 + B_1^*\Phi^2(\tau, \pm\xi_i) + \\ & + \sum_{j=1}^{2N-1} [A_j\Phi(\nu_j, \pm\xi_i)e^{-\varepsilon\tau/\nu_j} + B_j\Phi(\nu_j, \mp\xi_i)e^{-\varepsilon\tau/\nu_j}] \end{aligned} \quad (3.90)$$

As soluções exatas da Eq. (3.56) consideradas são

$$\Phi^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

e

$$\Phi^2(\tau, \pm\xi) = \begin{bmatrix} \varepsilon\tau \mp \xi/(1 - \varpi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

3.6 Quantidades de Interesse

Nesta seção todos os esforços serão concentrados na determinação dos coeficientes A_1^* , B_1^* , A_j e B_j necessários para determinação das soluções dadas pelas Eqs. (3.89) e (3.90) e que também serão necessárias para obtenção das quantidades de interesse. A determinação destes coeficientes será feita considerando as soluções do problema homogêneo dadas pelas Eqs. (3.89) e (3.90), as soluções particulares dadas pelas Eqs. (3.52) à (3.54) e as Eqs. (3.39) e (3.58) à (3.61).

Outras quantidades de interesse a serem analisadas neste trabalho são as taxas de fluxo de partículas U e de fluxo de calor Q . Essas grandezas dependem diretamente de das Eqs. (3.30) e (3.31) e do tipo de problema envolvido. Para os problemas de Poiseuille e *Creep* Térmico, essas grandezas são dadas por

$$U = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a u(\tau) d\tau \quad (3.93)$$

e

$$Q = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a q(\tau) d\tau. \quad (3.94)$$

Já no problema de Couette, por causa da maneira com que o problema foi construído, essas grandezas são definidas da mesma forma, porém com a integral sendo de 0 a a .

3.6.1 Fluxo de Poiseuille e *Creep* Térmico

Para esses problemas, aplica-se na Eq. (3.89) a condição de simetria dada pela Eq. (3.36), de onde conclui-se que $B_1^* = 0$ e $A_j = B_j$ para $j = 1, \dots, 2N - 1$. Dessa

forma, podemos reescrever a solução pelo método ADO como

$$\mathbf{H}^h(\tau, \pm\xi_i) = A_1^* \Phi^1 + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [\Phi(\nu_j, \pm\xi_i) e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + \Phi(\nu_j, \mp\xi_i) e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}]. \quad (3.95)$$

Substituindo a Eq. (3.95) na Eq. (3.58) e usando ainda as Eqs. (3.52) e (3.53), encontra-se o seguinte sistema linear

$$\sum_{j=1}^{2N-1} A_j [\Phi(\nu_j, \xi)(1 + (\alpha - 1)e^{-2a\varepsilon/\nu_j}) + \Phi(\nu_j, -\xi)(\alpha - 1 + e^{-2a\varepsilon/\nu_j})] + \alpha A_1^* \Phi^1 = \mathbf{R}(\xi), \quad (3.96)$$

com dimensão $2N \times 2N$, de onde obtém-se o valor dos coeficientes A_1^* e A_j sendo que, para o problema de Poiseuille, tem-se

$$\mathbf{R}(\xi) = \begin{bmatrix} -\alpha\varepsilon(1 - \varpi)a^2/2 - (2 - \alpha)a\xi - \alpha(5 - 4\beta)\xi^2/5\varepsilon(1 - \beta) \\ -\alpha\sqrt{2}\beta/5\varepsilon(1 - \beta) \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

e para o problema de *Creep* Térmico

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{-\alpha}{2\varepsilon(\beta - 1)} \begin{bmatrix} \xi^2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

Assim, substituindo a Eq. (3.95) nas Eqs. (3.30) e (3.31), não esquecendo da Eq. (3.55), obtém-se para o problema de Poiseuille o perfil de velocidade

$$u_P(\tau) = A_1^* + \left[\frac{\varepsilon(1 - \varpi)\tau^2}{2} + \frac{(5 - 4\beta)}{10\varepsilon(1 - \beta)} \right] + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{N}_1(\nu_j) \quad (3.99)$$

e o perfil de fluxo de calor

$$q_P(\tau) = \left[\frac{1}{2\varepsilon(1 - \beta)} \right] + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{N}_2(\nu_j). \quad (3.100)$$

Para o problema de *Creep* Térmico, obtém-se o perfil de velocidade

$$u_T(\tau) = A_1^* + \left[\frac{1}{4\varepsilon(\beta - 1)} \right] + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{N}_1(\nu_j) \quad (3.101)$$

e perfil de fluxo de calor

$$q_T(\tau) = \left[\frac{5}{4\varepsilon(\beta - 1)} \right] + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{N}_2(\nu_j), \quad (3.102)$$

onde

$$\mathbf{N}_1(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T [\Phi(\nu_j, \xi_k) + \Phi(\nu_j, -\xi_k)] \quad (3.103)$$

e

$$\mathbf{N}_2(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}^T [\Phi(\nu_j, \xi_k) + \Phi(\nu_j, -\xi_k)] \quad (3.104)$$

Aplicando as Eqs. (3.99) à (3.104) nas Eqs. (3.93) e (3.94), encontra-se para o problema de Poiseuille a taxa de fluxo de partículas

$$U_P = \frac{1}{2a^2} \left\{ 2aA_1^* + \left[\frac{\varepsilon(1-\varpi)a^3}{3} + \frac{(5-4\beta)a}{5\varepsilon(1-\beta)} \right] + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \nu_j [1 - e^{-2a\varepsilon/\nu_j}] \mathbf{N}_1(\nu_j) \right\} \quad (3.105)$$

e taxa de fluxo de calor

$$Q_P = \frac{1}{2a^2} \left\{ \left[\frac{a}{\varepsilon(1-\beta)} \right] + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \nu_j [1 - e^{-2a\varepsilon/\nu_j}] \mathbf{N}_2(\nu_j) \right\}. \quad (3.106)$$

E para o problema de *Creep* Térmico, tem-se a taxa de fluxo de partículas

$$U_T = \frac{1}{2a^2} \left\{ 2aA_1^* + \left[\frac{a}{2\varepsilon(\beta-1)} \right] + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \nu_j [1 - e^{-2a\varepsilon/\nu_j}] \mathbf{N}_1(\nu_j) \right\} \quad (3.107)$$

e taxa de fluxo de calor

$$Q_T = \frac{1}{2a^2} \left\{ \left[\frac{5a}{2\varepsilon(\beta-1)} \right] + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \nu_j [1 - e^{-2a\varepsilon/\nu_j}] \mathbf{N}_2(\nu_j) \right\}. \quad (3.108)$$

3.6.2 Fluxo de Couette

Aplicando na Eq. (3.89) à condição de anti-simetria descrita pela Eq. (3.41), encontra-se $A_1^* = 0$ e $B_j = -A_j$ para $j = 1, \dots, 2N - 1$. Assim, pode-se reescrever

a solução pelo método ADO como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^h(\tau, \pm\xi_i) = & B_1^* \Phi^2(\tau, \pm\xi) + \\ & + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [\Phi(\nu_j, \pm\xi_i) e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} - \Phi(\nu_j, \mp\xi_i) e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}]. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Substituindo a Eq. (3.109) na Eq. (3.39) e considerando $u_w = 1$, encontra-se o sistema linear

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [\Phi(\nu_j, \xi) ((\alpha - 1) e^{-2a\varepsilon/\nu_j} - 1) + \\ + \Phi(\nu_j, -\xi) (1 - \alpha + e^{-2a\varepsilon/\nu_j})] + \alpha B_1^* \Phi_2 = -\alpha u_w \Phi_1, \end{aligned} \quad (3.110)$$

com dimensão $2N \times 2N$, de onde obtém-se o valor dos coeficientes B_1^* e A_j , sendo Φ_1 dado pela Eq. (3.40) e Φ_2 definido por

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \alpha a \varepsilon + \xi(2 - \alpha)/(1 - \varpi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Substituindo a Eq. (3.109) nas Eqs. (3.30) à (3.32), encontra-se para este problema o perfil de velocidade

$$u_C(\tau) = B_1^* \varepsilon \tau + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} - e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{N}_1(\nu_j), \quad (3.112)$$

o perfil de fluxo de calor

$$q_C(\tau) = \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} - e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{N}_2(\nu_j) \quad (3.113)$$

e a pressão

$$P_{xy} = \frac{B_1^* \sqrt{\pi}}{2(\varpi - 1)}. \quad (3.114)$$

Ainda para esse problema, substituindo as Eqs. (3.112) e (3.113) nas Eqs. (3.93) e (3.94) (não esquecendo que para o problema do fluxo de Couette, a integral é de $(0, a)$), encontra-se para esse problema a taxa de fluxo de partículas

$$U_C = \frac{1}{2a^2} \left\{ B_1^* \varepsilon a - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \nu_j (e^{-2a\varepsilon/\nu_j} - 1)^2 \mathbf{N}_1(\nu_j) \right\} \quad (3.115)$$

e a taxa de fluxo de calor

$$Q_C = \frac{1}{2a^2} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \nu_j (e^{-2a\varepsilon/\nu_j} - 1)^2 \mathbf{N}_2(\nu_j) \right\}, \quad (3.116)$$

onde os vetores \mathbf{N}_1 e \mathbf{N}_2 são os mesmos definidos anteriormente pelas Eqs. (3.103) e (3.104).

3.6.3 Deslizamento Térmico e Viscoso

Baseado nas condições dadas pelas Eqs. (3.45) e (3.48), não se deseja que a solução para esses problemas representada pela Eq. (3.90) cresça sem limite quando $\tau \rightarrow \infty$. Dessa forma, faz-se necessário que $B_1^* = 0$ e $B_j = 0$ para $j = 1, \dots, 2N - 1$. Assim, a solução em ordenadas discretas para esses problemas passa a ser reescritas como

$$\mathbf{H}^h(\tau, \pm\xi_i) = A_1^* \Phi^1 + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \Phi(\nu, \pm\xi_i) e^{-\varepsilon\tau/\nu_j} \quad (3.117)$$

Substituindo a Eq. (3.117) na condição de contorno dada pela Eq. (3.60), encontra-se o sistema linear

$$\sum_{j=1}^{2N-1} A_j [\Phi(\nu_j, \xi) + (\alpha - 1)\Phi(\nu_j, -\xi)] + \alpha A_1^* \Phi^1 = \mathbf{R}(\xi), \quad (3.118)$$

com dimensão $2N \times 2N$, onde obtém-se o valor dos coeficientes A_1^* e A_j sendo que, para o problema de Deslizamento Térmico, tem-se que

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{-\alpha}{2\varepsilon(\beta - 1)} \begin{bmatrix} \xi^2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

e para o problema de Deslizamento Viscoso tem-se

$$\mathbf{R}(\xi) = \frac{\xi(\alpha - 2)}{\varepsilon(\varpi - 1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.120)$$

Substituindo a Eq. (3.117) na Eq. (3.30) juntamente com a Eq. (3.55), encontra-se para o problema de Deslizamento Térmico o perfil de velocidade

$$u_S(\tau) = A_1^* + \left[\frac{1}{4\varepsilon(\beta - 1)} \right] + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j e^{-\varepsilon\tau/\nu_j} \mathbf{N}_1(\nu_j) \quad (3.121)$$

e substituindo a Eq. (3.121) na Eq. (3.45), é encontrada a expressão para o coeficiente de Deslizamento Térmico

$$A_S = 2A_1^* + 1/2\varepsilon(\beta - 1). \quad (3.122)$$

Da mesma forma para o problema de Deslizamento Viscoso, substituindo a Eq. (3.117) nas Eqs. (3.49) e (3.50), é encontrado como perfil de velocidade

$$u_K(\tau) = \tau + A_1^* + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j e^{-\varepsilon\tau/\nu_j} \mathbf{N}_1(\nu_j) \quad (3.123)$$

e como coeficiente de Deslizamento Viscoso

$$A_K = A_1^*, \quad (3.124)$$

onde os vetores \mathbf{N}_1 e \mathbf{N}_2 são os mesmos definidos anteriormente.

Uma observação importante a ser feita é de que, para fazer comparações de resultado com outros trabalhos, os valores do perfil de velocidade $u_S(\tau)$ devem ser multiplicados por 2.

3.7 Problema de Transferência de Calor

Considerando o problema de transferência de calor no regime de transição em um canal plano, sua modelagem pode ser feita de forma análoga a feita para os problemas clássicos de fluxo de gases rarefeitos [97]. Então, da mesma forma que na Eq. (3.1), o problema pode ser descrito por

$$\begin{aligned} c_x \frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau, \mathbf{c}) + \varepsilon g(\tau, \mathbf{c}) = \\ = \varepsilon \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} g(\tau, \mathbf{c}') F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) dc'_x dc'_y dc'_z, \end{aligned} \quad (3.125)$$

onde aqui também é considerado que $g(\tau, \mathbf{c})$ é uma perturbação da função distribuição de partículas, ε dada pelas Eqs. (2.33) e (2.38) dependendo de como se deseja trabalhar com o livre caminho médio e $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é o núcleo de espalhamento

do modelo a ser utilizado, sendo escrito na mesma forma das Eq. (2.44) fazendo uso também das Eqs. (2.45) e (2.46). Note que, diferente da Eq. (3.1), a Eq. (3.125) não possui termo fonte.

Para esse problema, segundo Scherer [97], as condições de contorno associadas à Eq. (3.125) são dadas por

$$g(-a, c_x, c_y, c_z) = \alpha_1 \delta_1 (c^2 - 2) + (1 - \alpha_1) g(-a, -c_x, c_y, c_z) + 2\alpha_1 / \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} g(-a, -c'_x, c'_y, c'_z) c'_x dc'_x dc'_y dc'_z, \quad c_x > 0 \quad (3.126)$$

e

$$g(a, c_x, c_y, c_z) = \alpha_2 \delta_2 (c^2 - 2) + (1 - \alpha_2) g(a, -c_x, c_y, c_z) + 2\alpha_2 / \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} g(a, c'_x, c'_y, c'_z) c'_x dc'_x dc'_y dc'_z, \quad c_x < 0, \quad (3.127)$$

onde α_1 e α_2 são valores entre 0 e 1 que representam os coeficientes de acomodação do gás que há entre as paredes, δ_1 e δ_2 representam as temperaturas adimensionais dessas paredes e são dadas por

$$\delta_1 = \frac{T_{w_1} - T_0}{T_0} \quad (3.128)$$

e

$$\delta_2 = \frac{T_{w_2} - T_0}{T_0}, \quad (3.129)$$

com T_{w_1} e T_{w_2} representando, respectivamente, as temperaturas dimensionais nas paredes localizadas em $\tau = -a$ e $\tau = a$.

Ainda segundo Scherer [97], as quantidades de interesse físico deste problema a serem determinadas são as perturbações de densidade, de temperatura e o fluxo de calor entre as paredes, dadas respectivamente por

$$N(\tau) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} g(\tau, \mathbf{c}) dc_x dc_y dc_z, \quad (3.130)$$

$$T(\tau) = (2/3) \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} \left[c^2 - \frac{3}{2} \right] g(\tau, \mathbf{c}) dc_x dc_y dc_z \quad (3.131)$$

e

$$Q_x = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2} \left[c^2 - \frac{5}{2} \right] g(\tau, \mathbf{c}) c_x dc_x dc_y dc_z. \quad (3.132)$$

Repare que a Eq. (3.132) foi escrita independente de τ , isso porque ao multiplicar a Eq. (3.125) por $c^n e^{-c^2}$ com $n = 0, 2$, integrar o resultado em c_x , c_y e c_z em $(-\infty, \infty)$ e ainda usar as informações contidas nas condições de contorno, obtém-se a independência do fluxo de calor da variável τ .

3.7.1 Formulação Vetorial para o Problema de Transferência

Da mesma forma que nos problemas de fluxo, utilizar de projeções para criar problemas auxiliares ao invés de se trabalhar diretamente com a Eq. (3.125), torna mais simples o processo de avaliar as quantidades de interesse. Como foi dito anteriormente, uma vez que as quantidades de interesse são diferentes, as projeções a serem usadas aqui também serão diferentes. Assim, como foi feito anteriormente, ao escolher

$$\phi_1(c_y, c_z) = (1/\pi) e^{-c_y^2 - c_z^2} \quad (3.133)$$

e

$$\phi_2(c_y, c_z) = (1/\pi)(c_y^2 + c_z^2 - 1) e^{-c_y^2 - c_z^2} \quad (3.134)$$

e definir

$$g_1(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z \quad (3.135)$$

e

$$g_2(\tau, c_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(c_y, c_z) h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc_y dc_z, \quad (3.136)$$

consegue-se reescrever as Eqs. (3.130), (3.131) e (3.132) como

$$N(\tau) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_x^2} g_1(\tau, c_x) dc_x, \quad (3.137)$$

$$T(\tau) = (2/3)\pi^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_x^2} (c_x^2 - 1/2) g_1(\tau, c_x) dc_x + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_x^2} g_2(\tau, c_x) dc_x \right) \quad (3.138)$$

e

$$T(\tau) = \pi^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} c_x e^{-c_x^2} (c_x^2 - 3/2) g_1(\tau, c_x) dc_x + \int_{-\infty}^{\infty} c_x e^{-c_x^2} g_2(\tau, c_x) dc_x \right). \quad (3.139)$$

Seguindo o mesmo processo feito para os problemas anteriores: multiplicar a Eq. (3.125) pela Eq. (3.133), integrar esse produto em c_y e c_z em $(-\infty, \infty)$ e considerar a notação $c_x = \xi$ sem esquecer das Eqs. (3.135) (3.136), obtém-se

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} g_1(\tau, \xi) + \varepsilon g_1(\tau, \xi) = \varepsilon \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi'^2} [f_{11}(\xi', \xi) g_1(\tau, \xi') + f_{12}(\xi', \xi) g_2(\tau, \xi')] d\xi', \quad (3.140)$$

onde agora será considerado que

$$f_{11}(\xi', \xi) = 1 + 2\varpi \xi' \xi + (2/3)(\xi^2 - 1/2)(\xi'^2 - 1/2) + (4\beta \xi \xi' / 5)(\xi^2 - 3/2) \cdot (\xi'^2 - 3/2) + 2\varpi [(2/3)\xi^2 \xi'^2 - (1/3)(\xi^2 + \xi'^2) + (1/6)] \quad (3.141)$$

e

$$f_{12}(\xi', \xi) = (2/3)(\xi^2 - 1/2) + (4\beta \xi \xi' / 5)(\xi^2 - 3/2) + 2\varpi [(1/6) - (1/3)\xi^2] \quad (3.142)$$

O mesmo vale se os mesmos passos forem seguidos para a Eq. (3.125) com relação a Eq. (3.134), resultando em

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} g_2(\tau, \xi) + \varepsilon g_2(\tau, \xi) = \varepsilon \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi'^2} [f_{21}(\xi', \xi) g_1(\tau, \xi') + f_{22}(\xi', \xi) g_2(\tau, \xi')] d\xi', \quad (3.143)$$

com

$$f_{21}(\xi', \xi) = (2/3)(\xi'^2 - 1/2) + (4\beta \xi \xi' / 5)(\xi'^2 - 3/2) + 2\varpi [(1/6) - (1/3)\xi'^2] \quad (3.144)$$

e

$$f_{22}(\xi', \xi) = (2/3) + (4\beta \xi \xi' / 5) + (\varpi / 3). \quad (3.145)$$

Dessa forma, usando as Eqs. (3.135) à (3.145), consegue-se escrever vetorialmente o problema como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{G}(\tau, \xi) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{G}(\tau, \xi') d\xi', \quad (3.146)$$

onde a Eq. (3.146) tem o mesmo formato da Eq. (3.56) dada anteriormente, $\mathbf{K}(\xi', \xi)$ é expressa da mesma forma que a Eq. (3.24), $\Psi(\xi)$ é o mesmo dado pela Eq. (3.57) e $\mathbf{G}(\tau, \xi)$ é dado por

$$\mathbf{G}(\tau, \xi) \begin{bmatrix} g_1(\tau, \xi) \\ g_2(\tau, \xi) \end{bmatrix}. \quad (3.147)$$

Seguindo os mesmos passos, é possível também reescrever as Eqs. (3.137), (3.138) e (3.139) vetorialmente e em termos de $\mathbf{G}(\tau, \xi)$, assim

$$N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi, \quad (3.148)$$

$$T(\tau) = (2/3) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi \quad (3.149)$$

e

$$Q_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \xi \begin{bmatrix} \xi^2 - 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi. \quad (3.150)$$

Para a definição de condições de contorno apropriadas à Eq. (3.146), as Eqs. (3.126) e (3.127) devem passar pelo mesmo processo que a Eq. (3.125), resultando que para o problema de transferência de calor, as condições de contorno associadas a Eq. (3.146) são

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(-a, \xi) = (1 - \alpha_1) \mathbf{G}(-a, -\xi) + 2\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int_0^{\infty} \mathbf{G}(-a, -\xi') e^{-\xi'^2} \xi' d\xi' + \\ + \alpha_1 \delta_1 \begin{bmatrix} \xi^2 - 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.151)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(a, -\xi) = (1 - \alpha_2)\mathbf{G}(a, \xi) + 2\alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int_0^\infty \mathbf{G}(a, \xi') e^{-\xi'^2} \xi' d\xi' + \\ + \alpha_2 \delta_2 \begin{bmatrix} \xi^2 - 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Segundo Scherer, para a comparação dos resultados obtidos para o fluxo de calor deste trabalho com outros da literatura, é necessário computar o chamado fluxo de calor normalizado q que, segundo Siewert [117], é dado por

$$q = \frac{Q_x}{Q_{fm}}, \quad (3.153)$$

onde Q_{fm} é o fluxo de calor adimensional em condições de moléculas livres. Ainda por [117], usa-se

$$Q_{fm} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\delta_1 - \delta_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) \pi^{1/2}}. \quad (3.154)$$

Assim, substituindo as Eqs. (3.154) e (3.150) na Eq. (3.153) obtém-se a expressão para o fluxo de calor normalizado

$$q = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) \pi^{1/2}}{\alpha_1 \alpha_2 (\delta_1 - \delta_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \xi \begin{bmatrix} \xi^2 - 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi. \quad (3.155)$$

3.7.2 Unicidade do Problema

Um fato importante que deve ser ressaltado é a seguinte questão: esse problema tem ou não tem uma solução única? O fato de que o problema definido pelas Eqs. (3.146), (3.151) e (3.152) não tem uma única solução é relativamente simples de se verificar, uma vez que se $\mathbf{G}(\tau, \xi)$ é solução desse problema, então

$$\hat{\mathbf{G}}(\tau, \xi) = \mathbf{G}(\tau, \xi) + \mathcal{K} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

também o será para qualquer escolha de \mathcal{K} . Segundo Siewert [117, 109] e Garcia e Siewert [45], para definir a constante \mathcal{K} é necessário usar uma condição de normalização sobre a densidade, como

$$\int_{-a}^a N(\tau) d\tau = 0. \quad (3.157)$$

Ao substituir a Eq. (3.156) na Eq. (3.148) e o resultado for substituído na Eq. (3.157), obtém-se

$$\mathcal{K} = -(1/2a) \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (3.158)$$

Para verificar quais são os efeitos da constante \mathcal{K} nas outras quantidades de interesse, basta substituir a Eq. (3.156) nas Eqs. (3.149) e (3.155), de onde constata-se que essa constante não exerce qualquer influência na perturbação de temperatura e fluxo de calor normalizado. Sendo assim, a única quantidade de interesse que necessariamente precisa levar em consideração a constante \mathcal{K} é a perturbação de densidade, que passa a ser reescrita como

$$N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi + \mathcal{K}. \quad (3.159)$$

3.7.3 Solução em Ordenadas Discretas

A forma como o método de ordenadas discretas será aplicado a Eq. (3.146) para resolver o problema de transferência de calor é a mesma de como foi aplicada na Eq. (3.56) para a resolução da parte homogênea dos problemas de fluxo de gases. Isso se deve ao fato de as duas equações serem semelhantes apesar de representarem problemas diferentes. Assim, sendo $\Psi(\xi)$ a mesma função par dada pela Eq. (3.57), reescreve-se a Eq. (3.146) usando no termo integral metade do seu domínio

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(\tau, \xi) + \varepsilon \mathbf{G}(\tau, \xi) &= \\ &= \varepsilon \int_0^{\infty} \Psi(\xi') [\mathbf{K}(-\xi', \xi) \mathbf{G}(\tau, -\xi') + \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{G}(\tau, \xi')] d\xi'. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Ao aplicar o método ADO na Eq. (3.160), encontra-se um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \pm \xi_i \frac{d}{d\tau} \mathbf{G}(\tau, \pm \xi_i) + \varepsilon \mathbf{G}(\tau, \pm \xi_i) = \\ = \varepsilon \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) [\mathbf{K}(-\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{G}(\tau, -\xi_k) + \mathbf{K}(\xi_k, \pm \xi_i) \mathbf{G}(\tau, \xi_k)], \end{aligned} \quad (3.161)$$

que é similar ao sistema dado pela Eq. (3.63). Neste ponto, ao definir $\mathbf{G}(\tau, \xi)$ como uma solução do tipo

$$\mathbf{G}(\tau, \xi) = \Phi(\nu, \xi) e^{-\varepsilon\tau/\nu}, \quad (3.162)$$

a Eq. (3.161) passa a ser reescrita como a Eq. (3.66) e a partir daqui, todos os passos a serem dados até a obtenção de um solução em ordenadas discretas são os mesmos dados da Eq. (3.66) à Eq. (3.88), sendo esta última dada por

$$\mathbf{G}(\tau, \pm \xi_i) = \sum_{j=1}^{2N} [A_j \Phi(\nu_j, \pm \xi_i) e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j \Phi(\nu_j, \mp \xi_i) e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}]. \quad (3.163)$$

Uma observação importante a ser feita é que, apesar da formulação para a obtenção da solução em ordenadas discretas ser a mesma, as condições de contorno, o núcleo de espalhamento e até o número de constantes de separação a ser consideradas para este problema não são iguais aos dos problemas de fluxo de gases.

Os problemas de transferência de calor, assim como os problemas de fluxo de gases, também são conservativos. Portanto é esperado que algumas das constantes de separação ν_j sejam ilimitadas conforme j cresce, mas diferente dos problemas de fluxo de gases, para este problema de transferência de calor foram encontrados duas constantes de separação referentes à dois autovalores degenerados. Dessa forma, para evitar perdas significativas ao desconsiderar esses termos problemáticos, em seus lugares são introduzidas as chamadas soluções exatas. Aqui serão introduzidas um total de quatro soluções exatas. Assim, a solução do problema de transferência de calor em ordenadas discretas pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\tau, \pm \xi_i) = \sum_{j=1}^{2N-2} [A_j \Phi(\nu_j, \pm \xi_i) e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j \Phi(\nu_j, \mp \xi_i) e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] + \\ + \mathbf{G}^*(\tau, \pm \xi_i), \end{aligned} \quad (3.164)$$

onde

$$\mathbf{G}^*(\tau, \xi) = A_1^* \mathbf{G}_1 + A_2^* \mathbf{G}_2(\xi) + B_1^* \mathbf{G}_3(\xi) + B_2^* \mathbf{G}_4(\tau, \xi). \quad (3.165)$$

Por Scherer [97], baseado no trabalho de Garcia e Siewert [45], essas soluções exatas são

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3(\xi) = \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

e

$$\mathbf{G}_4(\tau, \xi) = \tau \mathbf{H}(\xi) + \mathbf{F}(\xi), \quad (3.167)$$

com

$$\mathbf{H}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^2 - 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

e $\mathbf{F}(\xi)$ ainda é uma função a ser determinada afim de descobrir a forma de $\mathbf{G}_4(\tau, \xi)$.

Para isso, substitui-se a Eq. (3.167) na Eq. (3.146), de onde é obtido

$$\mathbf{F}(\xi) = -(\xi/\varepsilon) \mathbf{H}(\xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{K}(\xi', \xi) \mathbf{F}(\xi') d\xi'. \quad (3.169)$$

Baseado em Siewert [122], a função $\mathbf{F}(\xi)$ pode ser expressa como

$$\mathbf{F}(\xi) = \sum_{i=0}^3 P_i(\xi) \mathbf{F}_i, \quad (3.170)$$

onde

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad P_2(\xi) = \xi^2 - 1/2, \quad P_3(\xi) = \xi (\xi^2 - 3/2). \quad (3.171)$$

Agora, ao substituir a Eq. (3.170) na Eq. (3.169), multiplicar a expressão resultante por $\Psi(\xi) P_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$ e integrar em ξ em $(-\infty, \infty)$, é obtido um sistema linear de dimensão oito, de onde são determinadas as componentes dos vetores \mathbf{F}_i analiticamente. Como resultado deste sistema, obtém-se

$$\mathbf{F}(\xi) = -\frac{\xi}{\varepsilon(1-\beta)} \begin{bmatrix} \xi^2 - 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

e portanto

$$\mathbf{G}_4(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} \tau(\xi^2 - 3/2) - \frac{\xi}{\varepsilon(1-\beta)}(\xi^2 - 3/2) \\ \tau - \frac{\xi}{\varepsilon(1-\beta)} \end{bmatrix}. \quad (3.173)$$

3.7.4 Quantidades de Interesse

Uma vez conhecida a solução do problema de transferência de calor, o próximo passo é determinar os $4N$ coeficientes A_1^* , A_2^* , B_1^* , B_2^* , A_j e B_j , $j = 1, \dots, 2N-2$ que aparecem na Eq. (3.164). Para isso, faz-se necessário o uso da versão em ordenadas discretas das condições de contorno indicadas pelas Eqs. (3.151) e (3.152), que são

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(-a, \xi_i) = (1 - \alpha_1)\mathbf{G}(-a, -\xi_i) + 2\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sum_{k=1}^N \omega_k \xi_k \mathbf{G}(-a, -\xi_k) e^{-\xi_k^2} + \\ + \alpha_1 \delta_1 \begin{bmatrix} \xi_i^2 - 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.174)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(a, -\xi_i) = (1 - \alpha_2)\mathbf{G}(a, \xi_i) + 2\alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sum_{k=0}^N \mathbf{G}(a, \xi_k) e^{-\xi_k^2} + \\ + \alpha_2 \delta_2 \begin{bmatrix} \xi_i^2 - 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Contudo, verificou-se que a solução exata dada por \mathbf{G}_1 satisfaz a porção homogênea da condição de contorno, impossibilitando a determinação do coeficiente A_1^* . Mas mesmo assim, se for substituída a Eq. (3.164) nas Eqs. (3.174) e (3.175), é obtido um sistema linear de dimensão $4N \times 4N - 1$, representado por

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2N-2} B_j \left\{ \Phi(\nu_j, -\xi_i) - (1 - \alpha_1)\Phi(\nu_j, \xi_i) - 2\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}_+(\nu_j) \right\} e^{-2a\varepsilon/\nu_j} + \\ + \sum_{j=1}^{2N-2} A_j \left\{ \Phi(\nu_j, \xi_i) - (1 - \alpha_1)\Phi(\nu_j, -\xi_i) - 2\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}_-(\nu_j) \right\} + \\ + \alpha_1 \begin{bmatrix} \xi_i^2 - 1 \\ 1 \end{bmatrix} A_2^* + \begin{bmatrix} (2 - \alpha_1)\xi_i + \alpha_1\pi^{1/2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} B_1^* + \\ + \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1-2}{\varepsilon(1-\beta)}\xi_i(\xi_i^2 - 3/2) - \alpha_1 a(\xi_i^2 - 1) \\ \frac{\alpha_1-2}{\varepsilon(1-\beta)}\xi_i - \alpha_1 a \end{bmatrix} B_2^* = \alpha_1 \delta_1 \mathbf{R}(\xi_i) \end{aligned} \quad (3.176)$$

e

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{2N-2} A_j \left\{ \Phi(\nu_j, -\xi_i) - (1 - \alpha_2)\Phi(\nu_j, \xi_i) - 2\alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}_+(\nu_j) \right\} e^{-2a\varepsilon/\nu_j} + \\
& + \sum_{j=1}^{2N-2} B_j \left\{ \Phi(\nu_j, \xi_i) - (1 - \alpha_2)\Phi(\nu_j, -\xi_i) - 2\alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}_-(\nu_j) \right\} + \\
& + \alpha_2 \begin{bmatrix} \xi_i^2 - 1 \\ 1 \end{bmatrix} A_2^* + \begin{bmatrix} (\alpha_2 - 2)\xi_i - \alpha_2\pi^{1/2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} B_1^* + \\
& + \begin{bmatrix} \frac{2-\alpha_2}{\varepsilon(1-\beta)}\xi_i(\xi_i^2 - 3/2) + \alpha_2 a(\xi_i^2 - 1) \\ \frac{2-\alpha_2}{\varepsilon(1-\beta)}\xi_i + \alpha_2 a \end{bmatrix} B_2^* = \alpha_2 \delta_2 \mathbf{R}(\xi_i), \tag{3.177}
\end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq 2N$ com $\Phi(\nu_j, \pm\xi_i)$ sendo os vetores de dimensão 2×1 dados pela Eq. (3.66) avaliados nos pontos de quadratura e constantes de separação e ainda

$$\mathbf{S}_-(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \xi_k e^{-\xi_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \Phi(\nu_j, -\xi_k), \tag{3.178}$$

$$\mathbf{S}_+(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \xi_k e^{-\xi_k^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \Phi(\nu_j, \xi_k) \tag{3.179}$$

e

$$\mathbf{R}(\xi_i) = \begin{bmatrix} \xi_i^2 - 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.180}$$

Não tendo sido possível determinar o coeficiente A_1^* pelas Eqs. (3.176) e (3.177), em seu lugar é utilizado o coeficiente \mathcal{K} . Para acrescentar \mathcal{K} como incógnita a ser determinada no sistema acima, substitui-se a Eq. (3.164) na Eq. (3.158) e discretiza-se o termo integral da expressão resultante em ξ , resultando em

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = & -\frac{1}{2a\varepsilon} \sum_{j=1}^{2N-2} \nu_j (1 - e^{-2a\varepsilon/\nu_j}) (A_j + B_j) \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \cdot \\
& \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T [\Phi(\nu_j, \xi_k) + \Phi(\nu_j, -\xi_k)]. \tag{3.181}
\end{aligned}$$

Ao adicionar a Eq. (3.181) ao sistema linear formado pelas Eqs. (3.176) e (3.177), é obtido um outro sistema linear, agora de dimensão $4N + 1 \times 4N$, que pode ser

resolvido pelo método de mínimos quadrados e de onde provém os coeficientes necessários.

Para a obtenção das perturbações de densidade e temperatura e o fluxo de calor normalizado (nesta ordem), substitui-se a Eq. (3.164) nas Eqs. (3.159), (3.149) e (3.155), resultando em

$$N(\tau) = \mathcal{K} - B_2^* \tau + \sum_{j=1}^{2N-2} [A_j e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{V}(\nu_j), \quad (3.182)$$

$$T(\tau) = A_2^* + B_2^* \tau + (2/3) \sum_{j=1}^{2N-2} [A_j e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{Y}(\nu_j) \quad (3.183)$$

e

$$q = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) \pi^{1/2}}{\alpha_1 \alpha_2 (\delta_1 - \delta_2)} \left\{ \sum_{j=1}^{2N-2} [A_j e^{-\varepsilon(a+\tau)/\nu_j} - B_j e^{-\varepsilon(a-\tau)/\nu_j}] \mathbf{Z}(\nu_j) - \frac{5B_2^*}{4\varepsilon(1-\beta)} \right\}, \quad (3.184)$$

onde

$$\mathbf{V}(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T [\Phi(\nu_j, \xi_k) + \Phi(\nu_j, -\xi_k)], \quad (3.185)$$

$$\mathbf{Y}(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \begin{bmatrix} \xi_k^2 - 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}^T [\Phi(\nu_j, \xi_k) + \Phi(\nu_j, -\xi_k)] \quad (3.186)$$

e

$$\mathbf{Z}(\nu_j) = \sum_{k=1}^N w_k \Psi(\xi_k) \begin{bmatrix} \xi_k^2 - 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}^T [\Phi(\nu_j, \xi_k) - \Phi(\nu_j, -\xi_k)]. \quad (3.187)$$

No capítulo a seguir, será feita uma breve descrição do procedimento utilizado na implementação computacional dos problemas, bem como do método ADO e de resultados numéricos obtidos para os problemas clássicos de fluxo de gases rarefeitos e transferência de calor apresentados.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Considerações Gerais

Para a obtenção dos resultados numéricos correspondentes as quantidades de interesse definidas para os problemas mostrados anteriormente, deve-se primeiramente definir o esquema de quadratura que será aplicado conjuntamente com o método de ordenadas discretas analítico. Baseado nos trabalhos de Siewert [114, 115, 121], Barichello [6], Camargo e Barichello [18] e Cabrera e Barichello [16], o procedimento a seguir mostrou-se adequado no que diz respeito ao tratamento do termo integral da equação integro-diferencial de transporte.

Afim de mapear os pontos ξ do intervalo $[0, \infty)$ para os pontos $u(\xi)$ do intervalo $[0, 1]$, costuma-se fazer uso da transformação não linear

$$u(\xi) = \exp(-\xi) \quad (4.1)$$

para, em seguida, utilizar o esquema de quadratura de Gauss-Legendre [14] no intervalo $[0, 1]$. Uma vez definido o esquema de quadratura, são computadas as constantes de separação (obtidas indiretamente do problema de autovalores dado pela Eq. (3.82)), as soluções elementares (definidas pelas Eqs. (3.86) e (3.87)) e os coeficientes necessários para avaliação das quantidades de interesse (obtidos a partir da resolução do sistema formado pelas condições de contorno). Note que este procedimento é padrão tanto para os problemas de fluxo de gases quanto para o problema de transferência de calor. A implementação computacional foi feita baseada na linguagem FORTRAN, fazendo uso de subrotinas dos pacotes LINPACK [35] e EISPACK [108].

A seguir, são apresentados resultados numéricos das quantidades de interesse para cada problema proposto neste trabalho e, quando possível, comparados com outros trabalhos já existentes na literatura. Salienta-se que os resultados obtidos

através dos modelos **Gross-Jackson** e **MRS** (no caso de problemas de fluxo) e **MRS** (no caso do problema de transferência de calor) são originais [98].

Com relação a confiabilidade dos resultados, alguns critérios foram estabelecidos. Dentre estes, está a constatação de que ao aumentar o número de pontos de quadratura do método ADO, mais dígitos significativos dos resultados são conservados, dando uma noção de convergência numérica. Além disso, os resultados obtidos aqui para os modelos **BGK** e **S** mostram-se corretos se comparados com os da literatura. O fato de ter sido usado o mesmo programa pra simular todos os modelos para cada problema aumenta a confiabilidade nos resultados.

Para ilustrar a forma com que o aumento do número de pontos na quadratura influencia na convergência numérica dos resultados, analisou-se o comportamento do erro relativo (comparado a $N = 100$) para o perfil de velocidade $u_P(\tau)$ do problema do Fluxo de Poiseuille (usando $2a = 2$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_p$ e o modelo **MRS**). Na Fig. 4.1, o gráfico do erro relativo (na cor azul) mostra que realmente o erro relativo diminui conforme é aumentado o número de pontos na quadratura. Já o gráfico em vermelho, que representa a reta obtida a partir da aplicação do método de mínimos quadrados ao gráfico do erro relativo, indicando a taxa média com que o erro relativo decai conforme são acrescentados mais pontos à quadratura.

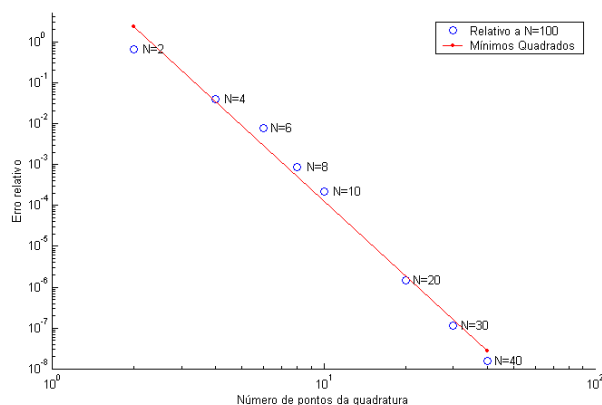


Figura 4.1: Evolução do erro relativo (em escala logarítmica) conforme o valor de N aumenta.

Outro dado que é de interesse salientar é o tempo de processamento. Usando um Desktop Dell Dimension Dim4500 (Pentium 4, 2GHZ, 384MB RAM), o tempo computacional estimado na obtenção de todo um perfil usando $N = 50$ é de 4.5s (incluindo o tempo gasto na obtenção dos pontos e pesos da quadratura de Gauss).

4.2 Problemas Clássicos de Fluxo em Dinâmica de Gases Rarefeitos

Afim de relacionar com a literatura [16] os resultados obtidos a partir dos modelos cinéticos, aumentando também a confiabilidade no programa desenvolvido, uma série de tabelas foram geradas a partir de parâmetros definidos anteriormente, como por exemplo a largura do canal $2a$, o coeficiente de acomodação α e a posição (normalizada) τ/a no canal em que ocorre o fenômeno, possibilitando a comparação dos modelos cinéticos entre si e com resultados da literatura. Os resultados que são apresentados foram obtidos considerando o parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_p$ e utilizando $N = 50$, sendo que dos dezesseis dígitos significativos que a implementação em FORTRAN utiliza, de cinco a sete se conservam ao aumentar o valor de N . Para valores menores de N , como por exemplo para $N = 10$, até três dígitos se conservam.

4.2.1 Fluxo de Couette

Nas Tabs. 4.1 à 4.12 são apresentados os resultados obtidos para o fluxo de **Couette**, sendo que nas Tabs. 4.1 à 4.6 constam os perfis de velocidade $u_C(\tau)$ para os quatro modelos cinéticos, para **ELB** [119] (no caso da Tab. 4.1) e para o modelo **CES** [115], considerando a largura do canal $2a = 1$, diferentes valores de α e diferentes valores de u_w . O mesmo é feito com relação as Tabs. 4.7 à 4.12 com relação ao perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, onde também tem-se da literatura perfis obtidos a partir da **ELB** [119] (no caso da Tab. 4.7) e do modelo **CES** [115].

Outras quantidades de interesse verificadas aqui são referentes as taxas de fluxo U_C e taxa de fluxo de calor Q_C , dadas pelas Tabs. 4.13 à 4.18, nas quais é possível comparar os resultados obtidos por essa metodologia com a literatura em relação a **ELB** e aos modelos **BGK**, **S** e **CES**.

Na avaliação dos perfis de velocidade $u_C(\tau)$, pôde-se constatar que a diferença mais significativa entre os perfis obtidos para os diferentes modelos cinéticos ocorre próximo aos contornos ($\tau/a \approx \pm 1$), independente da largura do canal, do coeficiente de acomodação ou da velocidade das placas.

Com relação as Tabs. 4.1 e 4.3, a concordância dos perfis obtidos a partir do modelo **CES** e da **ELB** pode chegar a cinco dígitos significativos (Tab. 4.3 para $\tau/a = 0.2$), e a mesma concordância foi obtida ao comparar entre si os modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** (Tab. 4.1 para $\tau/a = 0.1$). Além disso, dentre os modelos cinéticos aqui estudados, o perfil obtido a partir modelo **MRS** é o que mais se aproxima do obtido pela **ELB**, cuja concordância pode chegar a três dígitos significativos (Tab. 4.1 para $\tau/a = 0.7$).

Tabela 4.1: Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$.

τ/a	BGK[17]	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-4.44498(-2) ¹	-4.46405(-2)	-4.421891(-2)	-4.410134(-2)	-4.29400(-2)	-4.3188(-2)
0.2	-8.90639(-2)	-8.94424(-2)	-8.863464(-2)	-8.830049(-2)	-8.60736(-2)	-8.6559(-2)
0.3	-1.34020(-1)	-1.34580(-1)	-1.334611(-1)	-1.327025(-1)	-1.29611(-1)	-1.3031(-1)
0.4	-1.79526(-1)	-1.80258(-1)	-1.789511(-1)	-1.774288(-1)	-1.73802(-1)	-1.7469(-1)
0.5	-2.25845(-1)	-2.26734(-1)	-2.254282(-1)	-2.226302(-1)	-2.18965(-1)	-2.1998(-1)
0.6	-2.73338(-1)	-2.74364(-1)	-2.733452(-1)	-2.685106(-1)	-2.65547(-1)	-2.6662(-1)
0.7	-3.22559(-1)	-3.23689(-1)	-3.234027(-1)	-3.153727(-1)	-3.14241(-1)	-3.1525(-1)
0.8	-3.74467(-1)	-3.75655(-1)	-3.768460(-1)	-3.637318(-1)	-3.66275(-1)	-3.6704(-1)
0.9	-4.31190(-1)	-4.32349(-1)	-4.364870(-1)	-4.146943(-1)	-4.24420(-1)	-4.2461(-1)
1.0	-5.03723(-1)	-5.04599(-1)	-5.174254(-1)	-4.737175(-1)	-5.03454(-1)	-5.0206(-1)

Para as Tabs. 4.2 à 4.4, foi verificado que o perfil gerado com o modelo **MRS** é o que mais se aproxima do perfil gerado com o modelo **CES**, podendo coincidir

¹Lê-se -4.444980×10^{-2} .

em até quatro dígitos significativos (Tab. 4.2 para $\tau/a = 0.1$ e Tab. 4.3 para $\tau/a = 0.3$). Também observou-se que o perfil obtido com modelo **S** concorda em até quatro dígitos com o modelo **BGK** (Tab. 4.3 para $\tau/a = 0.1$), ou então com o modelo **MRS** (Tab. 4.4 para $\tau/a = 0.6$). Pela Tab. 4.5 observou-se que o perfil gerado com modelo **S** tem uma concordância um pouco menor com os perfis gerados com os outros modelos, podendo chegar a 3 dígitos se comparado ao modelo **BGK** ($\tau/a = 0.1$) e ao modelo **Gross-Jackson** ($\tau/a = 0.2$).

Tabela 4.2: Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-2.183115(-2)	-2.197123(-2)	-2.202530(-2)	-2.106077(-2)	-2.10475(-2)
0.2	-4.377579(-2)	-4.405463(-2)	-4.418889(-2)	-4.218782(-2)	-4.22286(-2)
0.3	-6.595703(-2)	-6.637184(-2)	-6.664146(-2)	-6.345256(-2)	-6.36889(-2)
0.4	-8.851954(-2)	-8.906581(-2)	-8.956177(-2)	-8.493784(-2)	-8.56013(-2)
0.5	-1.116476(-1)	-1.123186(-1)	-1.131803(-1)	-1.067474(-1)	-1.08189(-1)
0.6	-1.355971(-1)	-1.363830(-1)	-1.378217(-1)	-1.290224(-1)	-1.31765(-1)
0.7	-1.607601(-1)	-1.616464(-1)	-1.639916(-1)	-1.519743(-1)	-1.56821(-1)
0.8	-1.878265(-1)	-1.887908(-1)	-1.925965(-1)	-1.759655(-1)	-1.84230(-1)
0.9	-2.183336(-1)	-2.193369(-1)	-2.257002(-1)	-2.017805(-1)	-2.15983(-1)
1.0	-2.603471(-1)	-2.612790(-1)	-2.745635(-1)	-2.333290(-1)	-2.62841(-1)

Tabela 4.3: Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$.

τ/a	BGK	S [16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-4.354317(-3)	-4.39057(-3)	-4.468924(-3)	-4.084538(-3)	-4.21138(-3)	-4.2247(-3)
0.2	-8.736125(-3)	-8.80842(-3)	-8.971976(-3)	-8.184771(-3)	-8.45518(-3)	-8.4806(-3)
0.3	-1.317529(-2)	-1.32832(-2)	-1.354642(-2)	-1.231763(-2)	-1.27668(-2)	-1.2802(-2)
0.4	-1.770706(-2)	-1.78499(-2)	-1.823660(-2)	-1.650286(-2)	-1.71885(-2)	-1.7229(-2)
0.5	-2.237652(-2)	-2.25533(-2)	-2.309997(-2)	-2.076526(-2)	-2.17748(-2)	-2.1814(-2)
0.6	-2.724657(-2)	-2.74558(-2)	-2.821780(-2)	-2.513874(-2)	-2.66031(-2)	-2.6632(-2)
0.7	-3.241419(-2)	-3.26537(-2)	-3.371745(-2)	-2.967440(-2)	-3.17943(-2)	-3.1799(-2)
0.8	-3.805094(-2)	-3.83173(-2)	-3.982838(-2)	-3.446030(-2)	-3.75661(-2)	-3.7525(-2)
0.9	-4.454147(-2)	-4.48290(-2)	-4.707658(-2)	-3.968798(-2)	-4.44157(-2)	-4.4293(-2)
1.0	-5.392470(-2)	-5.42197(-2)	-5.836631(-2)	-4.631930(-2)	-5.50626(-2)	-5.4771(-2)

Um fato que facilita a análise gráfica dos resultados é que independente do modelo utilizado para representar o fenômeno, o perfil de velocidade obtido tem o mesmo formato, permitindo que se opte por um dos modelos para verificar como

Tabela 4.4: Couette, $u_w = 1.0$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-3.150273(-2)	-3.171887(-2)	-3.110734(-2)	-3.204531(-2)
0.2	-6.314602(-2)	-6.357734(-2)	-6.237397(-2)	-6.418272(-2)
0.3	-9.508386(-2)	-9.572818(-2)	-9.397556(-2)	-9.651201(-2)
0.4	-1.275005(-1)	-1.283540(-1)	-1.261250(-1)	-1.291502(-1)
0.5	-1.606368(-1)	-1.616929(-1)	-1.591049(-1)	-1.622464(-1)
0.6	-1.948357(-1)	-1.960838(-1)	-1.933262(-1)	-1.960063(-1)
0.7	-2.306398(-1)	-2.320618(-1)	-2.294527(-1)	-2.307448(-1)
0.8	-2.690352(-1)	-2.705987(-1)	-2.687212(-1)	-2.670133(-1)
0.9	-3.123027(-1)	-3.139428(-1)	-3.140806(-1)	-3.060338(-1)
1.0	-3.732125(-1)	-3.747065(-1)	-3.830016(-1)	-3.541501(-1)

a variação de certos parâmetros podem modificar o perfil de velocidade. Para isso escolheu-se o modelo **MRS**, uma vez que os resultados obtidos através dele aqui neste trabalho são originais e são os que mais se aproximam da **ELB**. Nos gráficos a seguir, será ilustrado como a variação de determinados parâmetros afetam o perfil de velocidade, tomando como base as Tabs. 4.1 à 4.5.

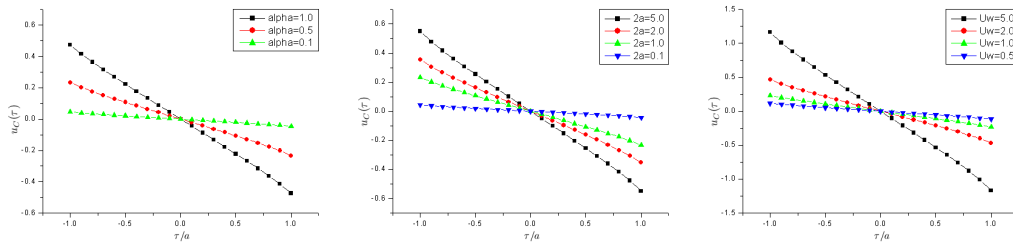


Figura 4.2: Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de velocidade no fluxo de Couette.

Na Fig. 4.2 são apresentados perfis de velocidade para o problema de Couette, onde são consideradas variações no coeficiente de acomodação α , na largura do canal $2a$ ou na velocidade das placas u_w . A partir dos gráficos, verifica-se que as maiores variações do perfil de velocidade ocorrem no uso de maiores coeficientes de acomodação ($\alpha = 1.0$), em canais mais largos ($2a = 5.0$) ou ainda quando as placas estão a uma maior velocidade ($u_w = 5.0$).

Tabela 4.5: Couette, $u_w = 5.0$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-1.091557(-1)	-1.098561(-1)	-1.101265(-1)	-1.053038(-1)
0.2	-2.188789(-1)	-2.202731(-1)	-2.209444(-1)	-2.109391(-1)
0.3	-3.297851(-1)	-3.318592(-1)	-3.332073(-1)	-3.172628(-1)
0.4	-4.425977(-1)	-4.453290(-1)	-4.478088(-1)	-4.246892(-1)
0.5	-5.582382(-1)	-5.615933(-1)	-5.659017(-1)	-5.337372(-1)
0.6	-6.779855(-1)	-6.819151(-1)	-6.891085(-1)	-6.451123(-1)
0.7	-8.038005(-1)	-8.082323(-1)	-8.199583(-1)	-7.598715(-1)
0.8	-9.391327(-1)	-9.439544(-1)	-9.629825(-1)	-8.798278(-1)
0.9	-1.091668	-1.096684	-1.128501	-1.008902
1.0	-1.301735	-1.306395	-1.372817	-1.166645

Outro parâmetro que pode ser usado para o estudo do comportamento dos perfis é o parâmetro ε . Como foi visto anteriormente, este parâmetro pode depender da viscosidade ($\varepsilon = \varepsilon_p$) ou da condutividade térmica ($\varepsilon = \varepsilon_t$), ou como Garcia e Siewert propuseram em [46], baseados nos parâmetros β e ϖ que são utilizados na definição dos modelos.

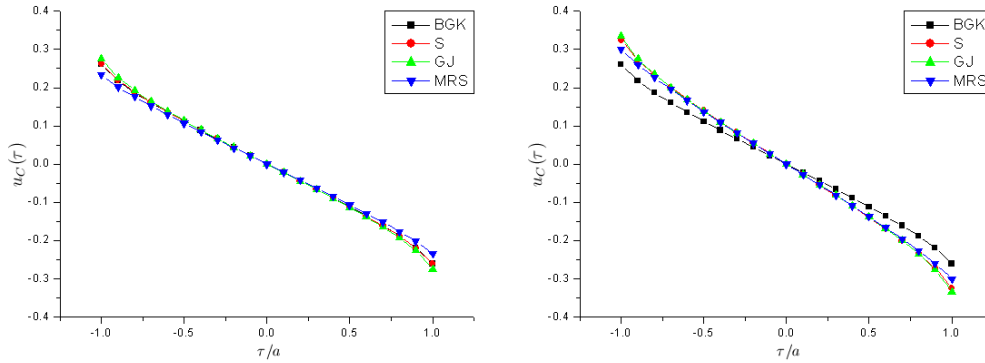


Figura 4.3: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade para o fluxo de Couette.

Na Fig. 4.3 são apresentados perfis baseados nas Tabs. 4.2 e 4.6. No caso de $\varepsilon = \varepsilon_p$ (à esquerda), observa-se que o perfil traçado com o modelo **BGK** é intermediário aos demais modelos (e muito próximo ao do modelo **S**), enquanto para $\varepsilon = \varepsilon_t$ (à direita), os perfis obtidos pelos modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS**

aparecem bem separados do obtido pelo **BGK**. Uma vez que para o modelo **BGK** tem-se que $\varepsilon_p = \varepsilon_t$, o perfil gerado por esse modelo pode servir de referência para se verificar a influência do parâmetro ε nos modelos. Um fato que fica mais visível de verificar pelas tabelas é que os perfis gerados pelos modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** são muito mais próximos entre si quando se utiliza $\varepsilon = \varepsilon_t$.

Tabela 4.6: Couette, $u_w = 1$; perfil de velocidade $u_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S [16]	GJ	MRS
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-2.183115(-2)	-2.732893(-2)	-2.697399(-2)	-2.710932(-2)
0.2	-4.377579(-2)	-5.478841(-2)	-5.410231(-2)	-5.430057(-2)
0.3	-6.595703(-2)	-8.252069(-2)	-8.155418(-2)	-8.166225(-2)
0.4	-8.851954(-2)	-1.106944(-1)	-1.095326(-1)	-1.092977(-1)
0.5	-1.116476(-1)	-1.395271(-1)	-1.383034(-1)	-1.373374(-1)
0.6	-1.355971(-1)	-1.693247(-1)	-1.682474(-1)	-1.659603(-1)
0.7	-1.607601(-1)	-2.005636(-1)	-1.999695(-1)	-1.954376(-1)
0.8	-1.878265(-1)	-2.340968(-1)	-2.345765(-1)	-2.262394(-1)
0.9	-2.183336(-1)	-2.718644(-1)	-2.746529(-1)	-2.593960(-1)
1.0	-2.603471(-1)	-3.244274(-1)	-3.349368(-1)	-3.001566(-1)

Da mesma forma que para o perfil de velocidade, a maior variação entre os perfis de fluxo de calor $q_C(\tau)$ obtidos a partir dos diferentes modelos cinéticos ocorre próximo aos contornos ($\tau/a \approx \pm 1$). Porém, diferente da Tab. 4.1, na Tab. 4.7 o perfil gerado pela **ELB** mostra uma variação menor do que o perfil gerado pelo modelo **MRS**.

Com relação as Tabs. 4.7 e 4.9, observa-se que dentre os modelos cinéticos apresentados, o perfil gerado pelo modelo **MRS** é o que possui maior concordância com relação ao gerado com a **ELB**, podendo coincidir em até quatro dígitos significativos (Tab. 4.9 para $\tau/a = 0.1$, $\tau/a = 0.8$, $\tau/a = 0.9$ e $\tau/a = 1.0$). Comparando os modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS**, a concordância entre os perfis não passa de dois dígitos ($\tau/a = 0.1$).

Para as Tabs. 4.8 à 4.9, verificou-se que o perfil gerado com o modelo **BGK** é o que mais se aproxima ao perfil gerado com o modelo **CES**, podendo chegar a

Tabela 4.7: Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$.

τ/a	BGK[17]	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-	0.0
0.1	5.27864(-3)	6.07574(-3)	7.096357(-3)	4.352015(-3)	4.92200(-3)	4.0656(-3)
0.2	1.06394(-2)	1.22242(-2)	1.427309(-2)	8.758192(-3)	9.88757(-3)	8.1681(-3)
0.3	1.61712(-2)	1.85236(-2)	2.161678(-2)	1.327680(-2)	1.49428(-2)	1.2347(-2)
0.4	2.19779(-2)	2.50653(-2)	2.922795(-2)	1.797531(-2)	2.01395(-2)	1.6648(-2)
0.5	2.81910(-2)	3.19638(-2)	3.723291(-2)	2.293790(-2)	2.55397(-2)	2.1125(-2)
0.6	3.49916(-2)	3.93759(-2)	4.580481(-2)	2.827847(-2)	3.12236(-2)	2.5855(-2)
0.7	4.26555(-2)	4.75392(-2)	5.520736(-2)	3.416677(-2)	3.73061(-2)	3.0946(-2)
0.8	5.16636(-2)	5.68672(-2)	6.590536(-2)	4.089174(-2)	4.39767(-2)	3.6587(-2)
0.9	6.30785(-2)	6.82756(-2)	7.895052(-2)	4.907242(-2)	5.16363(-2)	4.3192(-2)
1.0	8.23988(-2)	8.65722(-2)	1.001713(-1)	6.173518(-2)	6.23423(-2)	5.2963(-2)

quatro dígitos significativos (Tab. 4.8 para $\tau/a = 0.1$ e Tab. 4.9 para $\tau/a = 0.1$, $\tau/a = 0.2$, $\tau/a = 0.4$ e $\tau/a = 0.5$). Também foi observado que o perfil obtido com o modelo **BGK** concorda em até três dígitos com o modelo **MRS** (Tab. 4.10 para $\tau/a = 0.1$) ou em até 3 dígitos com o modelo **S** (Tab. 4.12 para $\tau/a = 0.1$).

Tabela 4.8: Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	3.297881(-3)	3.860358(-3)	4.751532(-3)	2.538391(-3)	3.25143(-3)
0.2	6.652510(-3)	7.773605(-3)	9.565602(-3)	5.112136(-3)	6.53651(-3)
0.3	1.012543(-2)	1.179695(-2)	1.450983(-2)	7.759358(-3)	9.89106(-3)
0.4	1.378899(-2)	1.599736(-2)	1.966335(-2)	1.052437(-2)	1.33558(-2)
0.5	1.773535(-2)	2.045967(-2)	2.512654(-2)	1.346280(-2)	1.69806(-2)
0.6	2.209238(-2)	2.530106(-2)	3.103847(-2)	1.665036(-2)	2.08311(-2)
0.7	2.705619(-2)	3.070061(-2)	3.761329(-2)	2.020059(-2)	2.50037(-2)
0.8	3.297171(-2)	3.697317(-2)	4.523233(-2)	2.430800(-2)	2.96616(-2)
0.9	4.060756(-2)	4.482264(-2)	5.476688(-2)	2.939186(-2)	3.51587(-2)
1.0	5.399663(-2)	5.800039(-2)	7.111505(-2)	3.751783(-2)	4.33653(-2)

Para a analisar a influência que determinados parâmetros exercem sobre o fenômeno, novamente escolheu-se o modelo **MRS** para gerar a Fig. 4.4, onde os gráficos ilustram como a variação de alguns parâmetros afetam o perfil de fluxo de calor, baseados nos perfis apresentados nas Tabs. 4.7 à 4.11.

Tabela 4.9: Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$.

τ/a	BGK	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	7.475070(-4)	8.86758(-4)	1.139676(-3)	5.467317(-4)	7.67912(-4)	5.7604(-4)
0.2	1.508758(-3)	1.78677(-3)	2.295891(-3)	1.101642(-3)	1.54464(-3)	1.1590(-3)
0.3	2.298691(-3)	2.71442(-3)	3.486579(-3)	1.673566(-3)	2.33962(-3)	1.7563(-3)
0.4	3.134922(-3)	3.68660(-3)	4.732825(-3)	2.272803(-3)	3.16366(-3)	2.3767(-3)
0.5	4.040001(-3)	4.72482(-3)	6.061553(-3)	2.912328(-3)	4.03012(-3)	3.0311(-3)
0.6	5.045373(-3)	5.85900(-3)	7.510332(-3)	3.609881(-3)	4.95687(-3)	3.7347(-3)
0.7	6.199532(-3)	7.13514(-3)	9.137422(-3)	4.392186(-3)	5.97051(-3)	4.5105(-3)
0.8	7.588259(-3)	8.63462(-3)	1.104727(-2)	5.305220(-3)	7.11669(-3)	5.3996(-3)
0.9	9.403871(-3)	1.05406(-2)	1.348020(-2)	6.448515(-3)	8.49586(-3)	6.4950(-3)
1.0	1.266583(-2)	1.38401(-2)	1.780122(-2)	8.315263(-3)	1.06484(-2)	8.3205(-3)

Tabela 4.10: Couette, $u_w = 1.0$; perfil de velocidade $q_C(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	2.670450(-3)	3.473046(-3)	4.170367(-3)	2.336860(-3)
0.2	5.411181(-3)	7.016559(-3)	8.428118(-3)	4.721250(-3)
0.3	8.299185(-3)	1.070703(-2)	1.286750(-2)	7.204910(-3)
0.4	1.142663(-2)	1.463454(-2)	1.759826(-2)	9.849045(-3)
0.5	1.491382(-2)	1.891433(-2)	2.275878(-2)	1.273223(-2)
0.6	1.893238(-2)	2.370729(-2)	2.853966(-2)	1.596432(-2)
0.7	2.375353(-2)	2.926292(-2)	3.523332(-2)	1.971472(-2)
0.8	2.987028(-2)	3.602783(-2)	4.336157(-2)	2.428226(-2)
0.9	3.842313(-2)	4.502669(-2)	5.413476(-2)	3.033095(-2)
1.0	5.579713(-2)	6.206090(-2)	7.483981(-2)	4.127390(-2)

Na Fig. 4.4 são apresentados perfis de fluxo de calor para o fluxo de Couette, onde também é estudado os efeitos das variações no coeficiente de acomodação α , na largura do canal $2a$ ou na velocidade das placas u_w . Da mesma forma que na Fig. 4.2, verifica-se que as maiores variações do perfil de fluxo de calor ocorrem no uso de maiores coeficientes de acomodação ($\alpha = 1.0$), em canais mais largos ($2a = 5.0$) ou ainda quando as placas estão a uma maior velocidade ($u_w = 5.0$).

Avaliando também a influência do parâmetro ε , investigou-se o comportamento do perfil de fluxo de calor baseado nos modelos cinéticos apresentados nas Tabs. 4.8 e 4.12. A Fig. 4.5 apresenta os perfis gerados pelos modelos cinéticos considerando

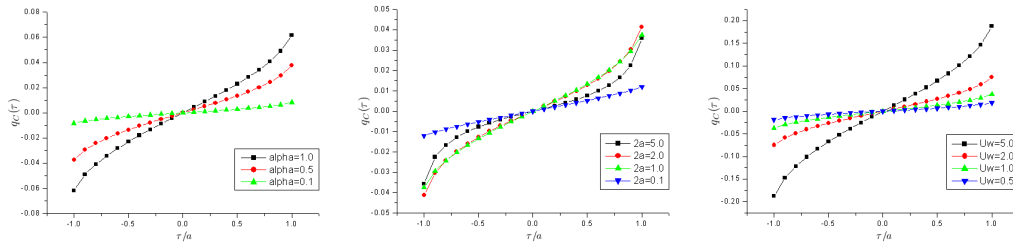


Figura 4.4: Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de fluxo de calor no fluxo de Couette.

Tabela 4.11: Couette, $u_w = 5.0$; perfil de velocidade $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	1.648940(-2)	1.930179(-2)	2.375766(-2)	1.269195(-2)
0.2	3.326255(-2)	3.886802(-2)	4.782801(-2)	2.556068(-2)
0.3	5.062716(-2)	5.898478(-2)	7.254918(-2)	3.879679(-2)
0.4	6.894497(-2)	7.998681(-2)	9.831678(-2)	5.262189(-2)
0.5	8.867677(-2)	1.022983(-1)	1.256327(-1)	6.731404(-2)
0.6	1.104619(-1)	1.265053(-1)	1.551923(-1)	8.325181(-2)
0.7	1.352809(-1)	1.535030(-1)	1.880664(-1)	1.010029(-1)
0.8	1.648585(-1)	1.848658(-1)	2.261616(-1)	1.215400(-1)
0.9	2.030378(-1)	2.241132(-1)	2.738344(-1)	1.469593(-1)
1.0	2.699831(-1)	2.900019(-1)	3.555752(-1)	1.875891(-1)

$\varepsilon = \varepsilon_p$ (à esquerda) e $\varepsilon = \varepsilon_t$ (à direita). O que se observa é que, diferente do que ocorre para $u_C(\tau)$, para $q_C(\tau)$ a diferença entre os gráficos é muito pequena. Essa pequena diferença pode ser melhor analisada via comparação das Tabs. 4.8 e 4.12, de onde se verifica que para um determinado modelo, os perfis concordam em até três dígitos significativos na média. Casos especiais seriam o modelo MRS apresentando uma concordância de quatro dígitos ($\tau/a = 0.5$) e o modelo S com uma concordância de seis dígitos ($\tau/a = 0.7$).

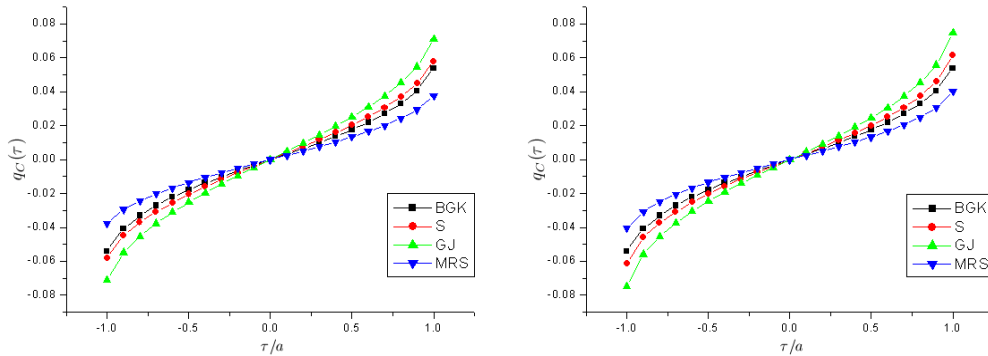


Figura 4.5: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de fluxo de calor para o fluxo de Couette.

Tabela 4.12: Couette, $u_w = 1$; perfil de fluxo de calor $q_C(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	3.297881(-3)	3.751830(-3)	4.578773(-3)	2.493141(-3)
0.2	6.652510(-3)	7.567114(-3)	9.233997(-3)	5.029406(-3)
0.3	1.012543(-2)	1.151462(-2)	1.404820(-2)	7.655523(-3)
0.4	1.378899(-2)	1.567511(-2)	1.911766(-2)	1.042630(-2)
0.5	1.773535(-2)	2.015145(-2)	2.456409(-2)	1.341134(-2)
0.6	2.209238(-2)	2.508659(-2)	3.055567(-2)	1.670671(-2)
0.7	2.705619(-2)	3.070088(-2)	3.735116(-2)	2.045856(-2)
0.8	3.297171(-2)	3.738578(-2)	4.541285(-2)	2.492111(-2)
0.9	4.060756(-2)	4.602972(-2)	5.580859(-2)	3.065090(-2)
1.0	5.399663(-2)	6.152967(-2)	7.478745(-2)	4.045102(-2)

Com relação a taxa de fluxo U_C , tem-se as Tabs. 4.13 à 4.15, de onde verifica-se novamente que, dentre os modelos cinéticos aqui estudados, o **MRS** é o que fornece o perfil mais próximo do obtido a partir da **ELB**, chegando a concordar em até três dígitos (Tabs. 4.13 e 4.15 para $2a = 10.0$). Concordâncias maiores, de até quatro dígitos, foram obtidas na comparação do modelo **CES** com a **ELB** (Tab. 4.13 para $2a = 10.0$ e Tab. 4.15 para $2a = 1.0$ e $2a = 10.0$).

Tabela 4.13: Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo U_C , $\alpha = 1.0$.

$2a$	BGK[115]	S[16]	GJ	MRS	CES [115]	ELB[119]
0.01	-1.29070	-1.29080	-1.635522	-8.235778(-1)	-1.53426	-
0.10	-6.85780(-1)	-6.86397(-1)	-7.803548(-1)	-5.293759(-1)	-7.41991(-1)	-7.2929(-1)
1.00	-2.32188(-1)	-2.32965(-1)	-2.333535(-1)	-2.262053(-1)	-2.26777(-1)	-2.2737(-1)
10.0	-4.22811(-2)	-4.23132(-2)	-4.211409(-2)	-4.277584(-2)	-4.21424(-2)	-4.2192(-2)

Tabela 4.14: Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo U_C , $\alpha = 0.5$.

$2a$	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]
0.01	-4.775504(-1)	-4.776164(-1)	-6.148316(-1)	-2.958241(-1)	-5.75403(-1)
0.10	-2.749263(-1)	-2.752393(-1)	-3.223689(-1)	-2.016654(-1)	-3.04586(-1)
1.00	-1.161200(-1)	-1.167387(-1)	-1.188589(-1)	-1.092178(-1)	-1.13676(-1)
10.0	-3.266363(-2)	-3.270740(-2)	-3.247434(-2)	-3.323140(-2)	-3.24470(-2)

Tabela 4.15: Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo U_C , $\alpha = 0.1$.

$2a$	BGK[115]	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.01	-8.00320(-2)	-8.00534(-2)	-1.039470(-1)	-4.875231(-2)	-9.71553(-2)	-
0.10	-4.81420(-2)	-4.82051(-2)	-5.748455(-2)	-3.426569(-2)	-5.41084(-2)	-5.3191(-2)
1.00	-2.34756(-2)	-2.36446(-2)	-2.452195(-2)	-2.135814(-2)	-2.31248(-2)	-2.3115(-2)
10.0	-1.17090(-2)	-1.17390(-2)	-1.164261(-2)	-1.194974(-2)	-1.15560(-2)	-1.1584(-2)

Para a taxa de fluxo de calor Q_C , cujos resultados são dados pelas Tabs. 4.16 à 4.18, também se verificou uma concordância de até quatro dígitos entre o modelo **CES** e a **ELB** (Tab. 4.18 para $2a = 10.0$) e uma concordância um pouco menor, de até três dígitos, entre o modelo **MRS** e a **ELB** (Tabs 4.16 e 4.18 para $2a = 10.0$).

Usando as Tabs. 4.13 à 4.18, gerou-se a Fig. 4.6 baseada no modelo **MRS**, com a qual foi possível verificar graficamente os efeitos da variação do coeficiente de acomodação às taxas de fluxo U_C e fluxo de calor Q_C .

Tabela 4.16: Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo de calor Q_C , $\alpha = 1.0$.

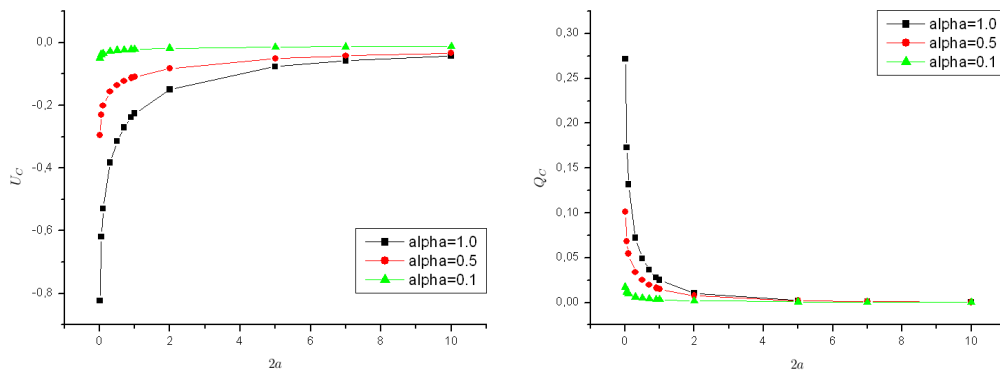
$2a$	BGK[115]	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.01	5.05490(-1)	5.06169(-1)	6.801447(-1)	2.715025(-1)	3.15754(-1)	-
0.10	2.12309(-1)	2.15086(-1)	2.681916(-1)	1.316221(-1)	1.44794(-1)	1.1892(-1)
1.00	3.13629(-2)	3.47258(-2)	4.030937(-2)	2.493126(-2)	2.69864(-2)	2.2451(-2)
10.0	3.62529(-4)	4.95270(-4)	4.792207(-4)	4.614865(-4)	2.85980(-4)	3.0697(-4)

Tabela 4.17: Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo de calor Q_C , $\alpha = 0.5$.

$2a$	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]
0.01	1.918964(-1)	1.921932(-1)	2.614569(-1)	1.009111(-1)	1.19086(-1)
0.10	9.171721(-2)	9.311179(-2)	1.195006(-1)	5.438092(-2)	6.22276(-2)
1.00	1.997154(-2)	2.251894(-2)	2.759074(-2)	1.478506(-2)	1.81577(-2)
10.0	4.298612(-4)	6.092611(-4)	6.128665(-4)	5.224104(-4)	3.64077(-4)

Tabela 4.18: Couette, $u_w = 1$; taxa de fluxo de calor Q_C , $\alpha = 0.1$.

$2a$	BGK[115]	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.01	3.26004(-2)	3.26557(-2)	4.472210(-2)	1.693786(-2)	2.01604(-2)	-
0.10	1.66805(-2)	1.69599(-2)	2.215206(-2)	9.639672(-3)	1.12938(-2)	9.3667(-3)
1.00	4.58954(-3)	5.24981(-3)	6.726165(-3)	3.221723(-3)	4.34898(-3)	3.2993(-3)
10.0	1.98991(-4)	2.91222(-4)	3.040643(-4)	2.330397(-4)	1.79134(-4)	1.7731(-4)

Figura 4.6: Efeitos que a variação do coeficiente de acomodação α causa às taxas de fluxo U_C e de fluxo de calor Q_C para o fluxo de Couette.

4.2.2 Fluxo de Poiseuille

Referentes ao problema de **Fluxo de Poiseuille**, tem-se as Tabelas 4.19 à 4.28, onde são considerados resultados obtidos a partir dos quatro modelos cinéticos abordados neste trabalho, além de resultados para o modelo **CES** [115] e para a **ELB** [119]. Nas Tabelas 4.19 à 4.23 são apresentados perfis de velocidade $u_P(\tau)$ para canais de diferentes larguras, diferentes coeficientes de acomodação e levando em consideração o parâmetro ε . Nas tabelas 4.24 à 4.28 tem-se resultados para o perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, também considerando diferentes larguras de canal, diferentes coeficientes de acomodação e a utilização do parâmetro ε_t .

Resultados adicionais, gerados no decorrer do trabalho e que, apesar de não terem sido utilizados na análise de resultados podem servir para consultas posteriores, foram colocadas no Apêndice A. Dentre estes, tem-se as Tabs. A.1 e A.2 são referentes ao perfil de velocidade $u_P(\tau)$, para um canal de largura $2a = 2$ e considerando diferentes valores de α . O mesmo é feito nas Tabs. A.3 e A.4 com relação ao perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$. As Tabs. A.5 à A.7 são referentes a taxa de fluxo U_P para canais de diferentes larguras e diferentes coeficientes de acomodação. Com relação a taxa de fluxo de calor Q_P , tem-se as Tabs. A.8 à A.10 onde também são considerados resultados para canais de larguras diferentes e diferentes coeficientes de acomodação.

Ao avaliar o perfil de velocidade $u_P(\tau)$, verificou-se que para cada ponto τ/a , o valor de $u_P(\tau)$ obtido pelo modelo **MRS** é significativamente maior do que o obtido através dos outros modelos (em módulo). Observou-se também que a diferença mais significativa entre os perfis gerados a partir dos modelos ocorre nos pontos próximos ao centro do canal ($\tau/a \approx 0$).

Com relação as Tabs. 4.19 à 4.21 verificou-se que, dentre os modelos cinéticos aqui estudados, o perfil obtido a partir do modelo **Gross-Jackson** é o que mais se aproxima do obtido pela **ELB**, cuja concordância pode chegar a três dígitos

significativos (Tab. 4.19 para $\tau/a = 0.5$). Nas demais tabelas essa concordância é um pouco menor, podendo chegar a dois dígitos (Tab. 4.20 para $\tau/a = 0.0$ e $\tau/a = 0.4$, Tab. 4.21 para $\tau/a = 0.0$, $\tau/a = 0.1$ e $\tau/a = 0.3$). O modelo **Gross-Jackson** também tem uma boa concordância com o modelo **CES**, podendo chegar a três dígitos (Tabs. 4.19 e 4.20 para $\tau/a = 0.9$).

Tabela 4.19: Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	-8.718816(-1)	-8.811016(-1)	-8.564498(-1)	-9.530798(-1)	-8.42636(-1)	-8.5378(-1)
0.1	-8.691746(-1)	-8.783448(-1)	-8.537125(-1)	-9.503272(-1)	-8.40049(-1)	-8.5117(-1)
0.2	-8.610075(-1)	-8.700279(-1)	-8.454500(-1)	-9.420303(-1)	-8.32242(-1)	-8.4327(-1)
0.3	-8.472357(-1)	-8.560054(-1)	-8.315038(-1)	-9.280659(-1)	-8.19060(-1)	-8.2994(-1)
0.4	-8.275952(-1)	-8.360118(-1)	-8.115830(-1)	-9.082096(-1)	-8.00220(-1)	-8.1090(-1)
0.5	-8.016581(-1)	-8.096164(-1)	-7.852148(-1)	-8.821002(-1)	-7.75264(-1)	-7.8568(-1)
0.6	-7.687446(-1)	-7.761355(-1)	-7.516437(-1)	-8.491673(-1)	-7.43460(-1)	-7.5357(-1)
0.7	-7.277351(-1)	-7.344429(-1)	-7.096156(-1)	-8.084803(-1)	-7.03591(-1)	-7.1335(-1)
0.8	-6.766011(-1)	-6.824982(-1)	-6.568361(-1)	-7.583738(-1)	-6.53440(-1)	-6.6281(-1)
0.9	-6.108240(-1)	-6.157550(-1)	-5.881233(-1)	-6.951963(-1)	-5.88008(-1)	-5.9696(-1)
1.0	-5.075012(-1)	-5.111458(-1)	-4.764740(-1)	-6.010263(-1)	-4.81439(-1)	-4.8979(-1)

Tabela 4.20: Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	-1.778827	-1.792544	-1.756357	-1.919092	-1.74191	-1.7574
0.1	-1.776314	-1.789989	-1.753761	-1.916653	-1.73946	-1.7549
0.2	-1.768733	-1.782284	-1.745925	-1.909303	-1.73209	-1.7475
0.3	-1.755959	-1.769301	-1.732701	-1.896952	-1.71965	-1.7350
0.4	-1.737759	-1.750808	-1.713815	-1.879429	-1.70188	-1.7172
0.5	-1.713756	-1.726425	-1.688820	-1.856459	-1.67835	-1.6936
0.6	-1.683349	-1.695547	-1.656996	-1.827612	-1.64836	-1.6635
0.7	-1.645540	-1.657172	-1.617137	-1.792178	-1.61078	-1.6258
0.8	-1.598502	-1.609463	-1.567009	-1.748886	-1.56347	-1.5785
0.9	-1.538115	-1.548275	-1.501478	-1.694926	-1.50156	-1.5167
1.0	-1.442924	-1.451986	-1.392838	-1.616319	-1.39899	-1.4143

Para estudar como o perfil de velocidade se comporta diante alterações de determinados parâmetros, usou-se o modelo **Gross-Jackson** para a geração de gráficos. Isso porque, além dos perfis obtidos através desse modelo serem os mais próximos dos obtidos pela **ELB**, tem também a questão da originalidade dos resultados. A

Tabela 4.21: Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	-8.896269	-8.918156	-8.865360	-9.138366	-8.84866	-8.8693
0.1	-8.893960	-8.915824	-8.862927	-9.136271	-8.84637	-8.8671
0.2	-8.887000	-8.908792	-8.855585	-9.129966	-8.83948	-8.8602
0.3	-8.875278	-8.896953	-8.843195	-9.119387	-8.82784	-8.8486
0.4	-8.858596	-8.880107	-8.825505	-9.104414	-8.81122	-8.8320
0.5	-8.836627	-8.857928	-8.802099	-9.084859	-8.78923	-8.8101
0.6	-8.808847	-8.829894	-8.772304	-9.060419	-8.76122	-8.7822
0.7	-8.774382	-8.795131	-8.734983	-9.030599	-8.72612	-8.7473
0.8	-8.731619	-8.752030	-8.688006	-8.994500	-8.68192	-8.7035
0.9	-8.676872	-8.696906	-8.626408	-8.950130	-8.62395	-8.6461
1.0	-8.590514	-8.610104	-8.522683	-8.887406	-8.52657	-8.5499

figura a seguir ilustra como a variação de determinados parâmetros afetam o perfil de velocidade, tomando como base as Tabs. 4.19 à 4.22.

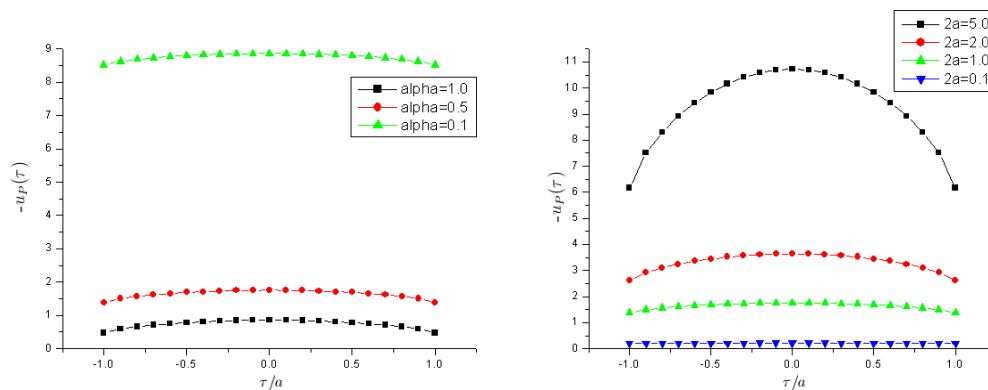


Figura 4.7: Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de velocidade no fluxo de Poiseuille.

A partir da Fig. 4.7, verifica-se que o problema de fluxo de Poiseuille desenvolve maiores velocidades em canais mais largos ($2a = 5.0$) ou com o uso de coeficientes de acomodação menores ($\alpha = 0.1$). Além disso, verificou-se também que a velocidade mais alta é atingida no centro do duto ($\tau/a = 0$). O perfil parabólico obtido também condiz com resultados obtidos por outras metodologias para problemas de escoamentos contínuos.

Tabela 4.22: Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.0	-3.652222	-3.676046	-3.641848	-3.820594
0.1	-3.644836	-3.668546	-3.634417	-3.813142
0.2	-3.622577	-3.645940	-3.612007	-3.790710
0.3	-3.585117	-3.607901	-3.574244	-3.753056
0.4	-3.531852	-3.553821	-3.520432	-3.699743
0.5	-3.461789	-3.482705	-3.449422	-3.630056
0.6	-3.373321	-3.392939	-3.359331	-3.542857
0.7	-3.263726	-3.281800	-3.246929	-3.436263
0.8	-3.127917	-3.144185	-3.106052	-3.306842
0.9	-2.954020	-2.968215	-2.921968	-3.146873
1.0	-2.676407	-2.688084	-2.608772	-2.916553

Para a análise do efeito que o parâmetro ε tem sobre os perfis obtidos a partir dos modelos cinéticos aqui trabalhados, gerou-se a Fig. 4.8 baseada nas Tabs. 4.20 e 4.23, onde se verifica que os perfis obtidos usando $\varepsilon = \varepsilon_t$ (à direita) são mais próximos entre si do que os obtidos usando $\varepsilon = \varepsilon_p$ (à esquerda). Contudo, apesar do perfil gerado a partir do modelo **MRS** ser mais próximos dos demais usando $\varepsilon = \varepsilon_t$, sua concordância com os outros modelos não chega a um dígito decimal.

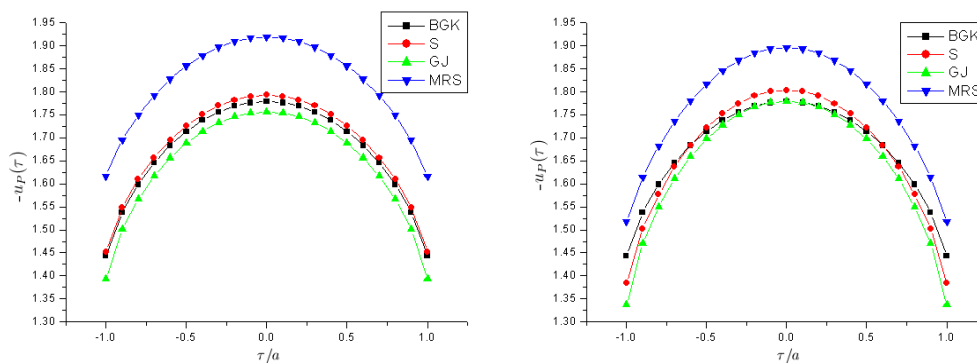


Figura 4.8: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no fluxo de Poiseuille.

Ainda com relação a parâmetro ε , a concordância entre os modelos **BGK**, **S** e **Gross-Jackson** pode ser melhor analisada a partir das Tabs. 4.20 e 4.23, uma vez que via gráfico os efeitos desse parâmetro parecem pouco significantes. Nestas

tabelas é verificado que a concordância entre esses modelos não passa de um dígito se usado $\varepsilon = \varepsilon_p$. Porém, se considerado $\varepsilon = \varepsilon_t$, a concordância entre os modelos pode chegar a três dígitos significativos, como no caso dos modelos **BGK** e **Gross-Jackson** (Tab. 4.23 para $\tau/a = 0.1$) e para os modelos **BGK** e **S** (Tab. 4.23 para $\tau/a = 0.6$).

Tabela 4.23: Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	-1.778827	-1.803725	-1.780048	-1.896357
0.1	-1.776314	-1.800559	-1.776880	-1.893264
0.2	-1.768733	-1.791014	-1.767320	-1.883951
0.3	-1.755959	-1.774942	-1.751199	-1.868309
0.4	-1.737759	-1.752070	-1.728198	-1.846142
0.5	-1.713756	-1.721952	-1.697797	-1.817133
0.6	-1.683349	-1.683873	-1.659149	-1.780774
0.7	-1.645540	-1.636632	-1.610818	-1.736234
0.8	-1.598502	-1.578005	-1.550102	-1.682006
0.9	-1.538115	-1.502892	-1.470658	-1.614732
1.0	-1.442924	-1.383813	-1.336808	-1.517380

Analisando o perfil de fluxo de calor $q_p(\tau)$, verificou-se que a diferença mais significativa entre os perfis gerados a partir dos modelos cinéticos também ocorre nos pontos próximos ao centro do canal ($\tau/a \approx 0$). Também foi observado que para cada ponto τ/a , o valor de $q_p(\tau)$ obtido pelo modelo **BGK** é significativamente menor do que o obtido através dos outros modelos.

Com relação as Tabs. 4.24 à 4.26, verificou-se que o perfil obtido a partir do modelo **Gross-Jackson** é o que mais se aproxima do obtido pela **ELB**, cuja concordância pode chegar a três dígitos significativos (Tab. 4.25 para $\tau/a = 0.3$). E a mesma concordância também ocorre na comparação dos modelos **S** e **MRS** (Tab. 4.25 para $\tau/a = 0.8$). Concordâncias menores, dois dígitos, também foram encontradas relacionando o modelo **Gross-Jackson** com os modelos **MRS** (Tabs. 4.24 e 4.25 para $\tau/a = 0.8$), **S** (Tabs. 4.24 e 4.25 para $\tau/a = 0.9$) e **CES** (Tabs. 4.24 e 4.26 para $\tau/a = 0.1$ e $\tau/a = 0.2$).

Tabela 4.24: Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	1.778878(-1)	2.193560(-1)	2.374943(-1)	2.008668(-1)	2.40862(-1)	2.2669(-1)
0.1	1.771593(-1)	2.184503(-1)	2.363845(-1)	2.002241(-1)	2.39884(-1)	2.2590(-1)
0.2	1.749507(-1)	2.157090(-1)	2.330272(-1)	1.982773(-1)	2.36927(-1)	2.2348(-1)
0.3	1.711899(-1)	2.110559(-1)	2.273347(-1)	1.949676(-1)	2.31918(-1)	2.1938(-1)
0.4	1.657446(-1)	2.043522(-1)	2.191473(-1)	1.901876(-1)	2.24727(-1)	2.1348(-1)
0.5	1.584010(-1)	1.953734(-1)	2.082069(-1)	1.837642(-1)	2.15142(-1)	2.0559(-1)
0.6	1.488193(-1)	1.837641(-1)	1.941049(-1)	1.754240(-1)	2.02833(-1)	1.9539(-1)
0.7	1.364396(-1)	1.689408(-1)	1.761699(-1)	1.647197(-1)	1.87262(-1)	1.8239(-1)
0.8	1.202476(-1)	1.498497(-1)	1.531848(-1)	1.508501(-1)	1.67475(-1)	1.6567(-1)
0.9	9.798401(-2)	1.241476(-1)	1.224205(-1)	1.320578(-1)	1.41371(-1)	1.4322(-1)
1.0	5.819761(-2)	7.991669(-2)	6.961365(-2)	9.974392(-2)	9.84408(-2)	1.0463(-1)

Tabela 4.25: Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	2.107978(-1)	2.766992(-1)	2.928121(-1)	2.572475(-1)	2.99576(-1)	2.8922(-1)
0.1	2.101661(-1)	2.759242(-1)	2.918382(-1)	2.567374(-1)	2.98793(-1)	2.8860(-1)
0.2	2.082508(-1)	2.735782(-1)	2.888911(-1)	2.551927(-1)	2.96425(-1)	2.8673(-1)
0.3	2.049886(-1)	2.695954(-1)	2.838915(-1)	2.525687(-1)	2.92417(-1)	2.8355(-1)
0.4	2.002636(-1)	2.638558(-1)	2.766939(-1)	2.487836(-1)	2.86667(-1)	2.7899(-1)
0.5	1.938873(-1)	2.561643(-1)	2.670624(-1)	2.437057(-1)	2.79013(-1)	2.7288(-1)
0.6	1.855588(-1)	2.462104(-1)	2.546199(-1)	2.371263(-1)	2.69196(-1)	2.6501(-1)
0.7	1.747789(-1)	2.334802(-1)	2.387393(-1)	2.287038(-1)	2.56798(-1)	2.5499(-1)
0.8	1.606351(-1)	2.170351(-1)	2.182664(-1)	2.178238(-1)	2.41066(-1)	2.4212(-1)
0.9	1.410666(-1)	1.947554(-1)	1.905552(-1)	2.031331(-1)	2.20325(-1)	2.2482(-1)
1.0	1.053460(-1)	1.555159(-1)	1.411566(-1)	1.779382(-1)	1.85908(-1)	1.9460(-1)

Para verificar o comportamento do perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$ frente à alterações de determinados parâmetros, também utilizou-se o modelo **Gross-Jackson** na geração dos gráficos. Com esses gráficos, é possível ilustrar os efeitos que essas alterações causam nos perfis, tomando como base as Tabs. 4.24 à 4.27.

Com base na Fig. 4.9, verifica-se que os maiores fluxos de calor ocorrem em canais com menor coeficiente de acomodação ($\alpha = 0.1$) ou em canais mais largos ($2a = 5.0$). Além disso, os maiores valores de fluxo também são atingidos no centro do duto ($\tau/a = 0.0$). Observou-se também que para canais muito largos, o fluxo de calor próximo a parede pode ter sinal contrário ao resto do perfil.

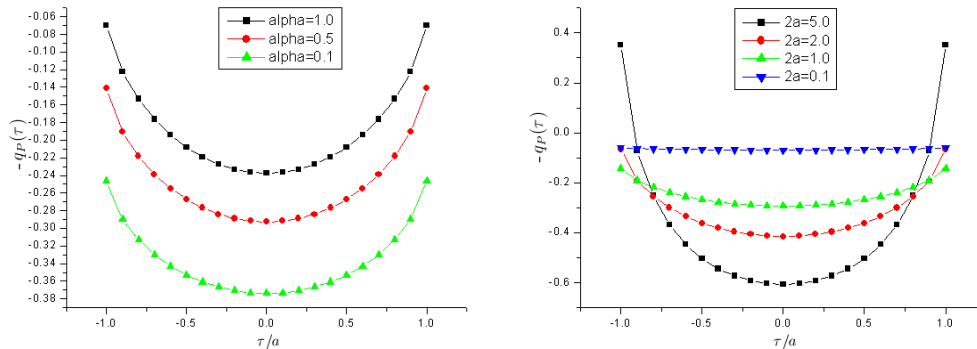


Figura 4.9: Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de fluxo de calor no fluxo de Poiseuille.

Na análise dos efeitos que a modificação do parâmetro ε causa nos perfis de fluxo de calor obtidos a partir dos modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS**, gerou-se a Fig. 4.10 com base nas Tabs. 4.25 e 4.28, de onde se constata que usando $\varepsilon = \varepsilon_t$ (à direita), os perfis gerados com os modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** se aproximam muito mais do gerado com o modelo **BGK** do que usando $\varepsilon = \varepsilon_p$ (à esquerda). Um fato que fica mais claro a partir da figura é que, além da variação dos perfis à direita ser menor, os perfis estão mais próximos entre si. Via tabelas, o que se consegue verificar é que os modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** concordam em até dois dígitos significativos com o modelo **BGK** para $\varepsilon = \varepsilon_t$ (Tab. 4.28 para $\tau/a = 0.8$), enquanto essa concordância não passa de um dígitos se considerado $\varepsilon = \varepsilon_p$ (Tab. 4.25).

Outro fato que vale a pena salientar é de que dentre os modelos cinéticos aqui apresentados, os modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** possuem uma concordância entre si de até dois dígitos significativos (Tabs. 4.24 à 4.28 para $\tau/a = 0.8$), podendo ocorrer uma concordância de até quatro dígitos se comparados os modelos **S** e **Gross-Jackson** (Tab. 4.27 para $\tau/a = 0.8$).

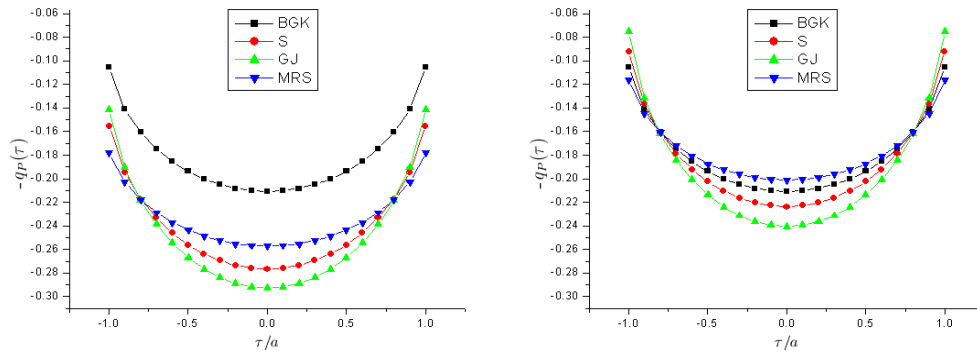


Figura 4.10: Efeitos que a variação do parâmetro ϵ causa aos perfis de fluxo de calor no fluxo de Poiseuille.

Tabela 4.26: Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	2.549102(-1)	3.633109(-1)	3.738073(-1)	3.464464(-1)	3.78635(-1)	3.7272(-1)
0.1	2.543809(-1)	3.626959(-1)	3.730177(-1)	3.460670(-1)	3.78092(-1)	3.7231(-1)
0.2	2.527756(-1)	3.608339(-1)	3.706276(-1)	3.449186(-1)	3.76451(-1)	3.7106(-1)
0.3	2.500399(-1)	3.576714(-1)	3.665700(-1)	3.429684(-1)	3.73675(-1)	3.6895(-1)
0.4	2.460738(-1)	3.531100(-1)	3.607215(-1)	3.401571(-1)	3.69698(-1)	3.6592(-1)
0.5	2.407141(-1)	3.469896(-1)	3.528807(-1)	3.363884(-1)	3.64413(-1)	3.6188(-1)
0.6	2.336991(-1)	3.390534(-1)	3.427230(-1)	3.315098(-1)	3.57651(-1)	3.5667(-1)
0.7	2.245917(-1)	3.288729(-1)	3.297024(-1)	3.252710(-1)	3.49135(-1)	3.5006(-1)
0.8	2.125852(-1)	3.156566(-1)	3.127980(-1)	3.172200(-1)	3.38362(-1)	3.4160(-1)
0.9	1.958368(-1)	2.975897(-1)	2.896223(-1)	3.063557(-1)	3.24197(-1)	3.3022(-1)
1.0	1.645328(-1)	2.648733(-1)	2.466259(-1)	2.876757(-1)	3.00538(-1)	3.1004(-1)

Tabela 4.27: Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S[16]	GJ	MRS
0.0	2.789951(-1)	3.819458(-1)	4.147296(-1)	3.360037(-1)
0.1	2.778026(-1)	3.803740(-1)	4.127431(-1)	3.349999(-1)
0.2	2.741731(-1)	3.756033(-1)	4.067149(-1)	3.319516(-1)
0.3	2.679429(-1)	3.674606(-1)	3.964298(-1)	3.267436(-1)
0.4	2.588103(-1)	3.556282(-1)	3.814945(-1)	3.191638(-1)
0.5	2.462789(-1)	3.395882(-1)	3.612716(-1)	3.088667(-1)
0.6	2.295448(-1)	3.185106(-1)	3.347453(-1)	2.952986(-1)
0.7	2.072483(-1)	2.910084(-1)	3.002272(-1)	2.775377(-1)
0.8	1.768427(-1)	2.545136(-1)	2.545965(-1)	2.538937(-1)
0.9	1.323942(-1)	2.030982(-1)	1.905994(-1)	2.205530(-1)
1.0	4.108812(-2)	1.038975(-1)	6.611860(-2)	1.579308(-1)

Tabela 4.28: Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	2.107978(-1)	2.236631(-1)	2.405356(-1)	2.010663(-1)
0.1	2.101661(-1)	2.228725(-1)	2.395351(-1)	2.005569(-1)
0.2	2.082508(-1)	2.204761(-1)	2.365036(-1)	1.990121(-1)
0.3	2.049886(-1)	2.163968(-1)	2.313470(-1)	1.963800(-1)
0.4	2.002636(-1)	2.104936(-1)	2.238933(-1)	1.925656(-1)
0.5	1.938873(-1)	2.025370(-1)	2.138633(-1)	1.874147(-1)
0.6	1.855588(-1)	1.921600(-1)	2.008108(-1)	1.806816(-1)
0.7	1.747789(-1)	1.787520(-1)	1.839936(-1)	1.719610(-1)
0.8	1.606351(-1)	1.611886(-1)	1.620395(-1)	1.605168(-1)
0.9	1.410666(-1)	1.368990(-1)	1.317720(-1)	1.447077(-1)
1.0	1.053460(-1)	9.197686(-2)	7.522138(-2)	1.162584(-1)

4.2.3 Problema de *Creep* Térmico

Com relação ao problema de **Creep** Térmico, os resultados podem ser encontrados nas Tabs. 4.29 à 4.38, sendo que as Tabs. 4.29 à 4.33 correspondem aos valores do perfil de velocidade $u_T(\tau)$ para diferentes larguras de canal e coeficientes de acomodação. O mesmo ocorre com as Tabs. 4.34 à 4.38 com relação ao perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$. Resultados obtidos na literatura referentes ao modelo **CES** e a **ELB** também são apresentados.

Ainda sobre este problema, resultados adicionais podem ser encontrados no Apêndice A, onde as Tabs. A.11 e A.13 são apresentados resultados para a taxa de fluxo de calor Q_T também para diferentes larguras de canal e coeficientes de acomodação.

Baseando-se nos resultados obtidos para o perfil de velocidade $u_T(\tau)$, verificou-se que o perfil gerado usando o modelo **BGK** possui valores significativamente menores dos obtidos a partir dos outros modelos cinéticos e que, mantendo o parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_p$ fixo e variando o valor de α , essa diferença tende a aumentar. Também foi observado que a diferença mais significativa entre os perfis gerados a partir dos modelos aqui apresentados ocorre para $\tau/a \approx 0$.

Baseado nas Tabs. 4.29 à 4.31 e considerando apenas os modelos cinéticos apresentados neste trabalho, verifica-se que o perfil gerado com o modelo **Gross-Jackson** é o que mais se aproxima do obtido a partir da **ELB**, cuja concordância pode chegar a dois dígitos significativos (Tab. 4.29 para $\tau/a = 0.5$ e $\tau/a = 0.6$; Tab. 4.30 para $\tau/a = 0.2$ e $\tau/a = 0.3$). Na Tab. 4.31 essa concordância é um pouco menor, não passando de um dígito. Considerando os resultados obtidos na literatura para o modelo **CES**, verifica-se que a concordância do perfil obtido por este modelo ao obtido pela **ELB** é maior, sendo de até três dígitos (Tabs. 4.29 e 4.31 para $\tau/a = 0.9$) ou de dois dígitos para quase todos os pontos τ/a na Tab. 4.30.

Tabela 4.29: *Creep* Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	1.699817(-1)	2.122226(-1)	2.290942(-1)	1.953903(-1)	2.35639(-1)	2.2268(-1)
0.1	1.694342(-1)	2.114861(-1)	2.281859(-1)	1.948766(-1)	2.34795(-1)	2.2199(-1)
0.2	1.677755(-1)	2.092578(-1)	2.254391(-1)	1.933211(-1)	2.32240(-1)	2.1987(-1)
0.3	1.649546(-1)	2.054788(-1)	2.207852(-1)	1.906787(-1)	2.27914(-1)	2.1629(-1)
0.4	1.608787(-1)	2.000415(-1)	2.140996(-1)	1.868674(-1)	2.21700(-1)	2.1113(-1)
0.5	1.553980(-1)	1.927727(-1)	2.051815(-1)	1.817551(-1)	2.13417(-1)	2.0422(-1)
0.6	1.482754(-1)	1.833989(-1)	1.937143(-1)	1.751332(-1)	2.02776(-1)	1.9530(-1)
0.7	1.391231(-1)	1.714735(-1)	1.791804(-1)	1.666623(-1)	1.89310(-1)	1.8391(-1)
0.8	1.272435(-1)	1.561936(-1)	1.606483(-1)	1.557357(-1)	1.72188(-1)	1.6927(-1)
0.9	1.110983(-1)	1.357877(-1)	1.360484(-1)	1.410290(-1)	1.49586(-1)	1.4960(-1)
1.0	8.301685(-2)	1.013553(-1)	9.474415(-2)	1.161063(-1)	1.12398(-1)	1.1581(-1)

Tabela 4.30: *Creep* Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	1.974209(-1)	2.637227(-1)	2.768469(-1)	2.483357(-1)	2.89736(-1)	2.8169(-1)
0.1	1.970988(-1)	2.632585(-1)	2.762580(-1)	2.480390(-1)	2.89204(-1)	2.8126(-1)
0.2	1.961235(-1)	2.618543(-1)	2.744772(-1)	2.471414(-1)	2.87598(-1)	2.7996(-1)
0.3	1.944665(-1)	2.594743(-1)	2.714603(-1)	2.456193(-1)	2.84878(-1)	2.7775(-1)
0.4	1.920757(-1)	2.560532(-1)	2.671266(-1)	2.434294(-1)	2.80974(-1)	2.7457(-1)
0.5	1.888669(-1)	2.514853(-1)	2.613459(-1)	2.405025(-1)	2.75774(-1)	2.7032(-1)
0.6	1.847070(-1)	2.456037(-1)	2.539115(-1)	2.367293(-1)	2.69099(-1)	2.6484(-1)
0.7	1.793770(-1)	2.381337(-1)	2.444828(-1)	2.319317(-1)	2.60660(-1)	2.5785(-1)
0.8	1.724818(-1)	2.285786(-1)	2.324398(-1)	2.257917(-1)	2.49936(-1)	2.4886(-1)
0.9	1.631428(-1)	2.158304(-1)	2.163829(-1)	2.176138(-1)	2.35775(-1)	2.3677(-1)
1.0	1.468959(-1)	1.941861(-1)	1.888667(-1)	2.039968(-1)	2.12264(-1)	2.1573(-1)

Tabela 4.31: *Creep* Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	2.356156(-1)	3.429189(-1)	3.477315(-1)	3.338783(-1)	3.62774(-1)	3.6061(-1)
0.1	2.355384(-1)	3.427978(-1)	3.475750(-1)	3.338061(-1)	3.62638(-1)	3.6050(-1)
0.2	2.353048(-1)	3.424317(-1)	3.471020(-1)	3.335876(-1)	3.62229(-1)	3.6018(-1)
0.3	2.349082(-1)	3.418117(-1)	3.463007(-1)	3.332178(-1)	3.61535(-1)	3.5963(-1)
0.4	2.343370(-1)	3.409215(-1)	3.451500(-1)	3.326874(-1)	3.60539(-1)	3.5883(-1)
0.5	2.335720(-1)	3.397346(-1)	3.436155(-1)	3.319815(-1)	3.59215(-1)	3.5777(-1)
0.6	2.325829(-1)	3.382092(-1)	3.416423(-1)	3.310766(-1)	3.57516(-1)	3.5640(-1)
0.7	2.313199(-1)	3.362761(-1)	3.391395(-1)	3.299342(-1)	3.55370(-1)	3.5466(-1)
0.8	2.296924(-1)	3.338096(-1)	3.359400(-1)	3.284858(-1)	3.52645(-1)	3.5242(-1)
0.9	2.274979(-1)	3.305263(-1)	3.316623(-1)	3.265809(-1)	3.49047(-1)	3.4941(-1)
1.0	2.236910(-1)	3.249405(-1)	3.242251(-1)	3.234784(-1)	3.43035(-1)	3.4411(-1)

Em comparação à outros modelos, a velocidade $u_T(\tau)$ obtida com o modelo **Gross-Jackson** pode concordar em até três dígitos se comparada com a obtida a partir do modelo **S** (Tab. 4.31 para $\tau/a = 1.0$). Concordâncias menores, de até dois dígitos, foram obtidas na comparação do modelo **Gross-Jackson** com os modelos **S** e **MRS** (Tabs. 4.30 e 4.32 para $\tau/a = 0.9$ e Tab. 4.31 para $\tau/a = 1.0$).

Tabela 4.32: *Creep* Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.0	2.439084(-1)	3.441850(-1)	3.674717(-1)	3.111374(-1)
0.1	2.434617(-1)	3.434690(-1)	3.665695(-1)	3.106905(-1)
0.2	2.421049(-1)	3.412986(-1)	3.638341(-1)	3.093356(-1)
0.3	2.397858(-1)	3.376035(-1)	3.591750(-1)	3.070288(-1)
0.4	2.364086(-1)	3.322554(-1)	3.524279(-1)	3.036894(-1)
0.5	2.318176(-1)	3.250471(-1)	3.433286(-1)	2.991870(-1)
0.6	2.257644(-1)	3.156501(-1)	3.314610(-1)	2.933142(-1)
0.7	2.178377(-1)	3.035240(-1)	3.161445(-1)	2.857304(-1)
0.8	2.072854(-1)	2.876877(-1)	2.961488(-1)	2.758193(-1)
0.9	1.924101(-1)	2.659330(-1)	2.686979(-1)	2.622150(-1)
1.0	1.643019(-1)	2.265443(-1)	2.185769(-1)	2.380830(-1)

Para analisar o efeito que a modificação de certos parâmetros causam ao perfil de velocidade, os gráficos a seguir foram gerados a partir do modelo **Gross-Jackson**, devido a sua proximidade nos resultados com a **ELB**. A figura a seguir ilustra estes efeitos, tomando como base as Tabs. 4.29 à 4.32.

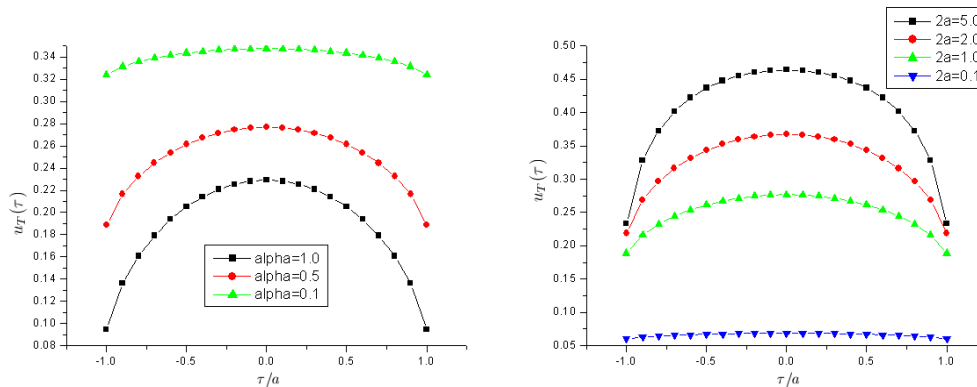


Figura 4.11: Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de velocidade no problema de *Creep* Térmico.

Com base na Fig. 4.11 é possível observar que, equivalente ao problema do fluxo de Poiseuille, o perfil de velocidade obtido para o problema de *Creep* Térmico é parabólico, onde as maiores velocidades se desenvolvem em canais mais largos ($2a = 5.0$) ou com o uso de coeficientes de acomodação menores ($\alpha = 0.1$).

Com base nas Tabs. 4.30 e 4.33, gerou-se a Fig. 4.12 como forma de ilustrar o efeito que o parâmetro ε tem sobre os perfis de velocidade, indicando mais uma vez que os perfis obtidos a partir de $\varepsilon = \varepsilon_t$ (à direita) são muito mais próximos entre si do que os obtidos a partir de $\varepsilon = \varepsilon_p$ (à esquerda). Tal proximidade pode ser verificada via tabela, onde é constatada uma concordância de até dois dígitos significativos para os quatro modelos cinéticos (Tab. 4.33 para $\tau/a = 0.9$) e uma concordância de até três dígitos entre o modelo BGK (cujo perfil não concorda em nenhum dígito com os demais modelos no uso de ε_p) e S (Tab. 4.33 para $\tau/a = 0.9$).

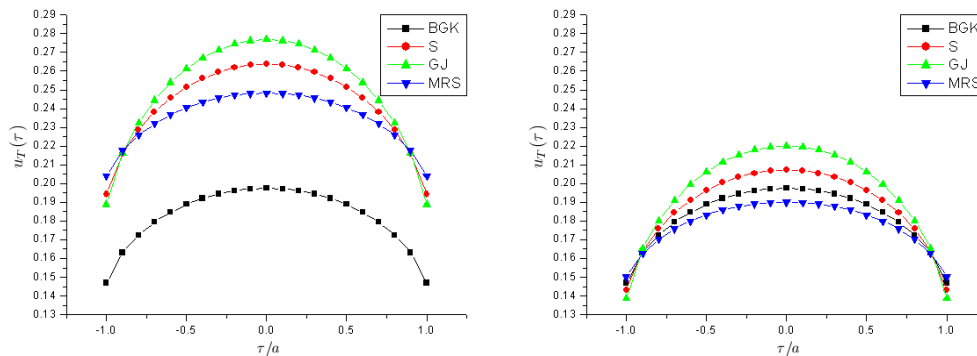


Figura 4.12: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no problema de *Creep* Térmico.

Tabela 4.33: *Creep* Térmico; perfil de velocidade $u_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	1.974209(-1)	2.072228(-1)	2.200633(-1)	1.900734(-1)
0.1	1.970988(-1)	2.068150(-1)	2.195450(-1)	1.898182(-1)
0.2	1.961235(-1)	2.055802(-1)	2.179758(-1)	1.890453(-1)
0.3	1.944665(-1)	2.034829(-1)	2.153108(-1)	1.877318(-1)
0.4	1.920757(-1)	2.004581(-1)	2.114686(-1)	1.858360(-1)
0.5	1.888669(-1)	1.964008(-1)	2.063176(-1)	1.832903(-1)
0.6	1.847070(-1)	1.911447(-1)	1.996500(-1)	1.799883(-1)
0.7	1.793770(-1)	1.844161(-1)	1.911241(-1)	1.757554(-1)
0.8	1.724818(-1)	1.757188(-1)	1.801196(-1)	1.702779(-1)
0.9	1.631428(-1)	1.639392(-1)	1.652331(-1)	1.628652(-1)
1.0	1.468959(-1)	1.432429(-1)	1.388530(-1)	1.500994(-1)

Com relação ao perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$ verificou-se que, ao contrário do que ocorre para o perfil $u_T(\tau)$, o perfil gerado usando o modelo **BGK** possui valores significativamente maiores dos obtidos a partir dos demais modelos cinéticos e, além disso, uma vez fixado o parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_p$ e diminuindo o valor de α , essa diferença tende a aumentar ainda mais.

Agora, levando em consideração as Tabs. 4.34 à 4.36 e considerando apenas os modelos trabalhados aqui, verifica-se que o perfil gerado a partir do modelo **Gross-Jackson** é o que melhor se aproxima do obtido a partir da **ELB**. Isso porque, apesar

do modelo **MRS** possuir uma concordância maior em dígitos, a proximidade dos perfis gerados a partir do modelo **Gross-Jackson** e da **ELB** é mais uniforme.

Em relação a concordância, dentre os modelos cinéticos aqui estudados, o perfil gerado pelo modelo **MRS** pode concordar em até dois dígitos com o obtido a partir da **ELB** (Tabs. 4.34 e 4.35 para $\tau/a = 0.4$ e Tab. 4.36 para $\tau/a = 1.0$). A concordância passa a ser de um dígito se comparado o modelo **Gross-Jackson** com a **ELB** (onde essa concordância é obtida para quase todos os pontos τ/a).

Acrescentando o modelo **CES** às comparações, verifica-se que este modelo é o que gera os perfis que mais se aproximam dos gerados pela **ELB** pois, além da grande proximidade entre os perfis, a concordância pode chegar a três dígitos significativos (Tab. 4.36 para $\tau/a = 0.5$ e $\tau/a = 0.6$).

Tabela 4.34: *Creep* Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 1.0$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	-7.821325(-1)	-9.739447(-1)	-9.856726(-1)	-9.878355(-1)	-1.01920	-9.9636(-1)
0.1	-7.804260(-1)	-9.715919(-1)	-9.829413(-1)	-9.860081(-1)	-1.01629	-9.9383(-1)
0.2	-7.752453(-1)	-9.644620(-1)	-9.746661(-1)	-9.804690(-1)	-1.00749	-9.8616(-1)
0.3	-7.663985(-1)	-9.523311(-1)	-9.605922(-1)	-9.710402(-1)	-9.92531(-1)	-9.7312(-1)
0.4	-7.535353(-1)	-9.347917(-1)	-9.402563(-1)	-9.573978(-1)	-9.70952(-1)	-9.5425(-1)
0.5	-7.360898(-1)	-9.111874(-1)	-9.129122(-1)	-9.390202(-1)	-9.41998(-1)	-9.2884(-1)
0.6	-7.131666(-1)	-8.804838(-1)	-8.773844(-1)	-9.150863(-1)	-9.04486(-1)	-8.9575(-1)
0.7	-6.833007(-1)	-8.409960(-1)	-8.317572(-1)	-8.842608(-1)	-8.56489(-1)	-8.5313(-1)
0.8	-6.438649(-1)	-7.897146(-1)	-7.726039(-1)	-8.441679(-1)	-7.94564(-1)	-7.9763(-1)
0.9	-5.891062(-1)	-7.200660(-1)	-6.924079(-1)	-7.896532(-1)	-7.11177(-1)	-7.2182(-1)
1.0	-4.910621(-1)	-5.999699(-1)	-5.539307(-1)	-6.960879(-1)	-5.69111(-1)	-5.8837(-1)

Com base nas Tabs. 4.34 à 4.37 foram gerados gráficos para a análise do comportamento do perfil de fluxo de calor frente à alterações dos parâmetros largura de canal ($2a$) e coeficiente de acomodação (α). O modelo utilizado para a geração destes perfis foi o modelo **Gross-Jackson** devido a proximidade de seus resultados com os da **ELB**.

Tabela 4.35: *Creep* Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	-9.660223(-1)	-1.288279	-1.292917	-1.306050	-1.33088	-1.3193
0.1	-9.650962(-1)	-1.286901	-1.291241	-1.305090	-1.32909	-1.3178
0.2	-9.622862(-1)	-1.282727	-1.286165	-1.302183	-1.32368	-1.3132
0.3	-9.574940(-1)	-1.275633	-1.277538	-1.297244	-1.31449	-1.3054
0.4	-9.505396(-1)	-1.265393	-1.265085	-1.290118	-1.30124	-1.2942
0.5	-9.411329(-1)	-1.251643	-1.248360	-1.280557	-1.28348	-1.2790
0.6	-9.288155(-1)	-1.233811	-1.226664	-1.268170	-1.26051	-1.2593
0.7	-9.128379(-1)	-1.210962	-1.198851	-1.252325	-1.23118	-1.2340
0.8	-8.918582(-1)	-1.181426	-1.162862	-1.231904	-1.19340	-1.2011
0.9	-8.629387(-1)	-1.141540	-1.114145	-1.204489	-1.14263	-1.1561
1.0	-8.117762(-1)	-1.073269	-1.029709	-1.158605	-1.05592	-1.0763

Tabela 4.36: *Creep* Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.1$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.0	-1.179286	-1.715751	-1.718318	-1.716055	-1.74575	-1.7429
0.1	-1.179084	-1.715421	-1.717897	-1.715853	-1.74531	-1.7425
0.2	-1.178471	-1.714423	-1.716625	-1.715240	-1.74396	-1.7414
0.3	-1.177427	-1.712728	-1.714464	-1.714202	-1.74167	-1.7395
0.4	-1.175915	-1.710286	-1.711348	-1.712707	-1.73836	-1.7368
0.5	-1.173875	-1.707015	-1.707168	-1.710712	-1.73395	-1.7332
0.6	-1.171214	-1.702785	-1.701754	-1.708141	-1.72824	-1.7284
0.7	-1.167777	-1.697386	-1.694827	-1.704877	-1.72096	-1.7223
0.8	-1.163289	-1.690439	-1.685883	-1.700713	-1.71161	-1.7144
0.9	-1.157148	-1.681116	-1.673797	-1.695202	-1.69907	-1.7036
1.0	-1.146416	-1.665290	-1.652806	-1.686237	-1.67762	-1.6844

A partir da Fig. 4.13, verifica-se que o perfil de fluxo de calor assume maiores valores para canais mais estreitos ($2a = 0.1$) ou para canais com maiores coeficientes de acomodação ($\alpha = 1.0$). Além disso, quanto menores a largura do canal e o coeficiente de acomodação, menor é a diferença entre o maior e o menor valor assumido pelo fluxo.

Com base nas Tabs. 4.35 e 4.38, foram computados os perfis de fluxo de calor para os diferentes modelos cinéticos aqui trabalhados como forma de ilustrar a influência do parâmetro ε no comportamento do fenômeno. Para isso, gerou-se a Fig. 4.14, onde foi possível verificar que quando é utilizado o parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_p$ os perfis

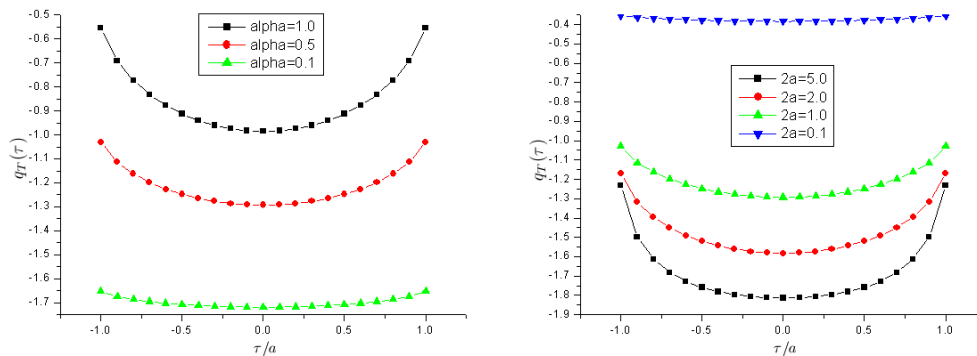


Figura 4.13: Efeitos que a variação de certos parâmetros causam ao perfil de fluxo de calor no problema de *Creep* Térmico.

Tabela 4.37: *Creep* Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.5$.

τ/a	BGK	S[16]	GJ	MRS
0.0	-1.110495	-1.560345	-1.582064	-1.543710
0.1	-1.109416	-1.558495	-1.579824	-1.542448
0.2	-1.106123	-1.552869	-1.573012	-1.538613
0.3	-1.100449	-1.543234	-1.561335	-1.532051
0.4	-1.092080	-1.529164	-1.544260	-1.522485
0.5	-1.080508	-1.509968	-1.520924	-1.509462
0.6	-1.064913	-1.484546	-1.489960	-1.492265
0.7	-1.043927	-1.451090	-1.449118	-1.469715
0.8	-1.015042	-1.406330	-1.394332	-1.439697
0.9	-9.726268(-1)	-1.343005	-1.316529	-1.397571
1.0	-8.883954(-1)	-1.224549	-1.168819	-1.321009

obtidos a partir dos modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** são próximos entre si mas bem distantes do obtido através do modelo **BGK**. Contudo, no uso do parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_t$ se observa que os perfis baseados nos quatro modelos cinéticos aparecerem bem mais próximos entre si, podendo concordar em até dois dígitos significativos (Tab. 4.38 para $\tau/a = 0.4$). Gráficamente essa mudança brusca nos perfis fica mais evidente quando se usa o perfil obtido pelo modelo **BGK** como referência, uma vez que para este modelo tem-se que $\varepsilon_p = \varepsilon_t$.

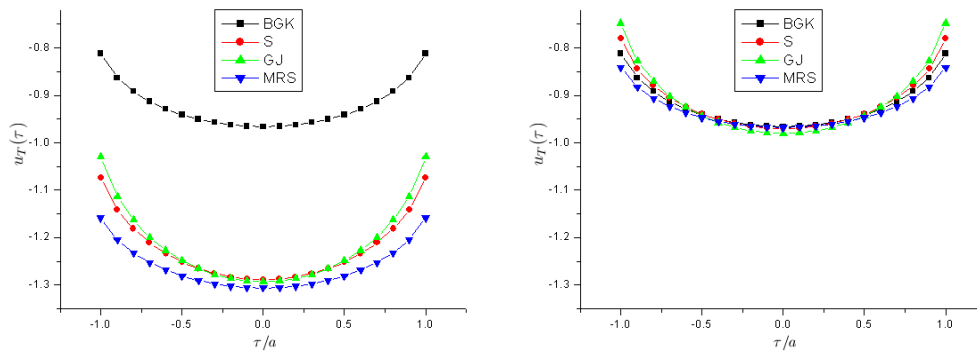


Figura 4.14: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de fluxo de calor no problema de *Creep* Térmico.

Tabela 4.38: *Creep* Térmico; perfil de fluxo de calor $q_T(\tau)$, $2a = 1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
0.0	-9.660223(-1)	-9.699611(-1)	-9.804895(-1)	-9.677033(-1)
0.1	-9.650962(-1)	-9.688382(-1)	-9.791209(-1)	-9.669356(-1)
0.2	-9.622862(-1)	-9.654309(-1)	-9.749671(-1)	-9.646066(-1)
0.3	-9.574940(-1)	-9.596180(-1)	-9.678786(-1)	-9.606358(-1)
0.4	-9.505396(-1)	-9.511789(-1)	-9.575822(-1)	-9.548759(-1)
0.5	-9.411329(-1)	-9.397570(-1)	-9.436375(-1)	-9.470900(-1)
0.6	-9.288155(-1)	-9.247883(-1)	-9.253477(-1)	-9.369039(-1)
0.7	-9.128379(-1)	-9.053494(-1)	-9.015710(-1)	-9.237078(-1)
0.8	-8.918582(-1)	-8.797795(-1)	-8.702487(-1)	-9.064141(-1)
0.9	-8.629387(-1)	-8.444160(-1)	-8.268079(-1)	-8.826597(-1)
1.0	-8.117762(-1)	-7.810083(-1)	-7.478445(-1)	-8.411594(-1)

4.2.4 Deslizamento Térmico

As Tabs. 4.39 à 4.46 se referem ao problema de **Deslizamento Térmico**, sendo que nas Tabelas 4.39 e 4.40 são apresentados os coeficientes A_S para diferentes valores de α , considerando o parâmetro ε . Já nas Tabs. 4.41 à 4.46 tem-se os perfis de velocidade $u_S(\tau)$ para diferentes valores de α onde também é levado em conta o parâmetro ε . Mais resultados referentes a $u_S(\tau)$ podem ser consultados nas Tabs. A.15 e A.16 do Apêndice A.

Com relação as Tabs. 4.39 e 4.40 se verifica que, no uso do parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_p$, os valores dos coeficientes A_S obtidos a partir do modelo **BGK** são significativamente menores se comparados com os obtidos através dos outros modelos. Além disso, a taxa com que esses coeficientes aumentam conforme a variação do α também é menor para o modelo **BGK**. Os coeficientes A_S obtidos pelos modelos **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** são muito próximos quando são considerados pequenos valores de α (concordância de dois dígitos na Tab. 4.39 para $\alpha = 0.01$) e, conforme o valor de α aumenta, a diferença entre esses coeficientes para estes modelos também aumenta, permitindo uma concordância de no máximo um dígito entre os modelos **S** e **MRS** (Tab. 4.39 para $\alpha = 1.0$).

Já com o uso do parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_t$ (Tab. 4.40), o que se verifica é que a diferença entre os coeficientes obtidos a partir o modelo **BGK** e dos demais modelos é bem menor, fazendo com que o perfil gerado pelo modelo **BGK** seja intermediário aos demais.

Tabela 4.39: Deslizamento Térmico; coeficientes A_S .

α	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.01	5.028545(-1)	7.548846(-1)	7.556476(-1)	7.538043(-1)
0.10	5.283566(-1)	7.981907(-1)	8.052203(-1)	7.879864(-1)
0.20	5.563021(-1)	8.449652(-1)	8.577742(-1)	8.258535(-1)
0.30	5.838476(-1)	8.903832(-1)	9.078469(-1)	8.636132(-1)
0.40	6.110039(-1)	9.345014(-1)	9.556074(-1)	9.012769(-1)
0.50	6.377813(-1)	9.773733(-1)	1.001209	9.388561(-1)
0.60	6.641898(-1)	1.019050	1.044795	9.763623(-1)
0.70	6.902391(-1)	1.059578	1.086492	1.013806
0.80	7.159384(-1)	1.099005	1.126419	1.051200
0.90	7.412966(-1)	1.137374	1.164687	1.088554
1.00	7.663225(-1)	1.174724	1.201394	1.125880

Tabela 4.40: Deslizamento Térmico; coeficientes A_S , $\varepsilon = \varepsilon_t$.

α	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS	CES[126] ²	ELB[119] ²
0.01	5.028545(-1)	5.032564(-1)	5.037651(-1)	5.025362(-1)	-	-
0.10	5.283566(-1)	5.321271(-1)	5.368135(-1)	5.253242(-1)	5.343452(-1)	5.3153(-1)
0.20	5.563021(-1)	5.633101(-1)	5.718494(-1)	5.505690(-1)	5.540462(-1)	5.4890(-1)
0.30	5.838476(-1)	5.935888(-1)	6.052313(-1)	5.757421(-1)	5.728368(-1)	5.6580(-1)
0.40	6.110039(-1)	6.230009(-1)	6.370716(-1)	6.008512(-1)	5.907804(-1)	5.8225(-1)
0.50	6.377813(-1)	6.515822(-1)	6.674732(-1)	6.259041(-1)	6.079346(-1)	5.9827(-1)
0.60	6.641898(-1)	6.793664(-1)	6.965300(-1)	6.509082(-1)	6.243522(-1)	6.1388(-1)
0.70	6.902391(-1)	7.063856(-1)	7.243281(-1)	6.758710(-1)	6.400810(-1)	6.2909(-1)
0.80	7.159384(-1)	7.326703(-1)	7.509466(-1)	7.008002(-1)	6.551652(-1)	6.4394(-1)
0.90	7.412966(-1)	7.582491(-1)	7.764581(-1)	7.257030(-1)	6.696452(-1)	6.5842(-1)
1.00	7.663225(-1)	7.831497(-1)	8.009295(-1)	7.505868(-1)	6.835580(-1)	6.7256(-1)

Baseada nas Tabs. 4.39 e 4.40, a Fig. 4.15 ilustra como os coeficientes de deslizamento térmico A_S variam conforme o coeficiente de acomodação α aumenta e o que acontece quando é variado o parâmetro ε . O perfil gerado a partir do modelo **BGK** pode ser usado como uma referência para comparação entre os perfis, uma vez que para este modelo tem-se que $\varepsilon_p = \varepsilon_t$.

²Os valores são o dobro do apresentado na literatura.

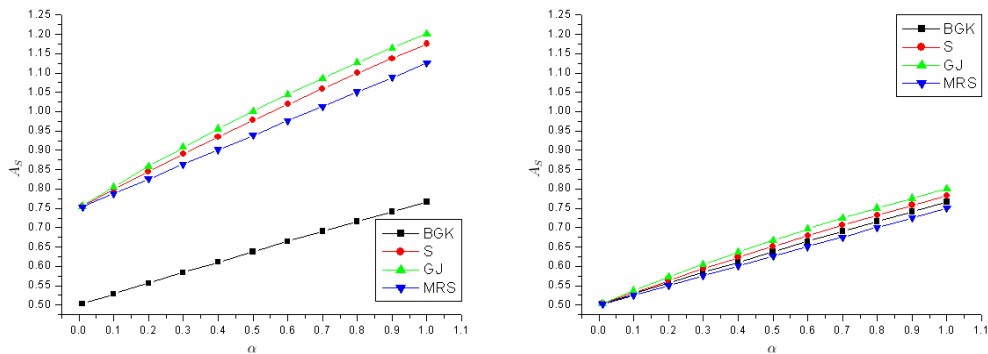


Figura 4.15: Coeficientes de Deslizamento Térmico utilizando os parâmetros ε_p (à esquerda) e ε_t (à direita).

Além disso, se comparados os coeficientes A_S obtidos a partir dos modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** com os obtidos a partir do modelo **CES** e da **ELB**, o que se percebe é que apesar dos modelos **S** e **Gross-Jackson** possuírem uma concordância de até dois dígitos com a **ELB** (Tab. 4.40 para $\alpha = 0.1$), o modelo **CES** é o que melhor se aproxima da **ELB**, concordando em um ou dois dígitos em todo o perfil (Tab. 4.40). Contudo, devido a dificuldades em sua utilização, como a avaliação de algumas equações integrais e o grande esforço computacional que sua implementação envolve, o modelo **CES** não é o mais indicado, uma vez que o ganho obtido com o seu uso é de no máximo um dígito com relação ao modelo **MRS**.

Ainda em se tratando do coeficiente A_S , tem-se o perfil de velocidade $u_S(\tau)$, cuja relação é dada pela Eq. 3.45 e ilustrada pela Fig. 4.16. Pelos resultados apresentados nas Tabs. 4.39 à 4.46, verifica-se que $u_S(\tau)$ tende a A_S conforme o valor de τ aumenta.

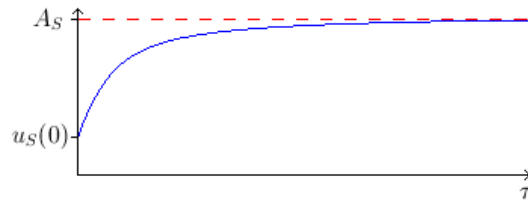


Figura 4.16: Figura que ilustra a relação entre $u_S(\tau)$ e A_S .

Com relação ao perfil de velocidade $u_S(\tau)$, foi possível perceber com a análise das Tabs. 4.41 à 4.46 que, conforme o coeficiente de acomodação α diminui, também diminui a variação de $u_S(\tau)$ independente de qual parâmetro ε é utilizado, isto é, a diferença entre $u_S(0)$ e A_S fica cada vez menor.

Tabela 4.41: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 1.0$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.00	2.185558(-1)	2.952344(-1)	2.633391(-1)	3.610030(-1)
0.20	3.875591(-1)	5.300430(-1)	5.427391(-1)	5.237434(-1)
0.40	4.695371(-1)	6.541118(-1)	6.890021(-1)	6.110737(-1)
0.60	5.255086(-1)	7.429497(-1)	7.920608(-1)	6.747119(-1)
0.80	5.670040(-1)	8.111668(-1)	8.695000(-1)	7.247727(-1)
1.00	5.991177(-1)	8.654474(-1)	9.295804(-1)	7.657759(-1)
1.40	6.453593(-1)	9.460954(-1)	1.015258	8.297272(-1)
1.80	6.765404(-1)	1.002307	1.071405	8.777389(-1)
2.00	6.884206(-1)	1.024153	1.092158	8.975715(-1)
2.50	7.108100(-1)	1.066028	1.129760	9.383575(-1)
3.00	7.260418(-1)	1.095092	1.153705	9.698709(-1)
5.00	7.537610(-1)	1.149395	1.190988	1.044826
7.00	7.619180(-1)	1.165793	1.198847	1.080361
10.0	7.652814(-1)	1.172616	1.201038	1.105089
15.0	7.662061(-1)	1.174491	1.201376	1.119481
20.0	7.663071(-1)	1.174694	1.201393	1.123708

Em relação a **ELB**, não foi possível identificar qual dos modelos cinéticos a melhor representa. De fato, o que se observa é que dependendo do valor de τ e do valor de α um modelo se sobressai com relação aos demais.

Tabela 4.42: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS	ELB[119] ²
0.00	2.185558(-1)	1.968229(-1)	1.755594(-1)	2.406687(-1)	2.0938(-1)
0.20	3.875591(-1)	3.987145(-1)	4.154414(-1)	3.809868(-1)	3.9228(-1)
0.40	4.695371(-1)	4.952998(-1)	5.280405(-1)	4.498079(-1)	4.7484(-1)
0.60	5.255086(-1)	5.598452(-1)	6.009044(-1)	4.974797(-1)	5.2782(-1)
0.80	5.670040(-1)	6.064056(-1)	6.514146(-1)	5.334908(-1)	5.6450(-1)
1.00	5.991177(-1)	6.413382(-1)	6.876700(-1)	5.619695(-1)	5.9088(-1)
1.40	6.453593(-1)	6.892317(-1)	7.340919(-1)	6.044339(-1)	-
1.80	6.765404(-1)	7.192656(-1)	7.604118(-1)	6.345972(-1)	-
2.00	6.884206(-1)	7.300615(-1)	7.691367(-1)	6.465806(-1)	6.5034(-1)
2.50	7.108100(-1)	7.491448(-1)	7.832715(-1)	6.702480(-1)	-
3.00	7.260418(-1)	7.609279(-1)	7.909090(-1)	6.875257(-1)	-
5.00	7.537610(-1)	7.785089(-1)	7.997193(-1)	7.241072(-1)	-
7.00	7.619180(-1)	7.820331(-1)	8.007564(-1)	7.383408(-1)	-
10.0	7.652814(-1)	7.829943(-1)	8.009179(-1)	7.463206(-1)	-
15.0	7.662061(-1)	7.831420(-1)	8.009293(-1)	7.497216(-1)	-
20.0	7.663071(-1)	7.831492(-1)	8.009294(-1)	7.503877(-1)	-

Como forma de ilustrar como a variação do parâmetro α afeta o perfil de velocidade $u_S(\tau)$ tem-se a Fig. 4.17, que foi gerada a partir do modelo **MRS**, utilizando-se das Tabs. 4.42, 4.44 e 4.46.

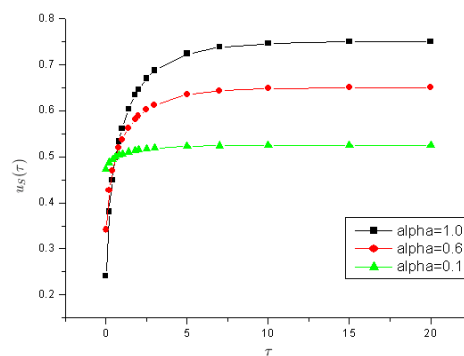


Figura 4.17: Efeitos que a variação do parâmetro α causa ao perfil de velocidade no problema de Deslizamento Térmico.

E assim como foi feito para os outros problemas de fluxo, também foram gerados gráficos que ilustram como a variação do parâmetro ε modifica o perfil de velocidade. Para isto, a Fig. 4.18 foi gerada a partir das Tabs. 4.43 e 4.44.

Tabela 4.43: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.6$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.00	3.225358(-1)	4.538591(-1)	4.222834(-1)	5.121441(-1)
0.20	4.304719(-1)	6.104791(-1)	6.156257(-1)	6.122305(-1)
0.40	4.816888(-1)	6.906419(-1)	7.127744(-1)	6.654514(-1)
0.60	5.164243(-1)	7.474742(-1)	7.804412(-1)	7.041232(-1)
0.80	5.420738(-1)	7.908598(-1)	8.309577(-1)	7.344914(-1)
1.00	5.618698(-1)	8.252436(-1)	8.699820(-1)	7.593342(-1)
1.40	5.902961(-1)	8.761244(-1)	9.254002(-1)	7.980293(-1)
1.80	6.094128(-1)	9.114521(-1)	9.615742(-1)	8.270405(-1)
2.00	6.166854(-1)	9.251517(-1)	9.749151(-1)	8.390146(-1)
2.50	6.303740(-1)	9.513650(-1)	9.990440(-1)	8.636213(-1)
3.00	6.396728(-1)	9.695207(-1)	1.014376	8.826164(-1)
5.00	6.565604(-1)	1.003343	1.038181	9.277295(-1)
7.00	6.615180(-1)	1.013522	1.043180	9.490770(-1)
10.0	6.635590(-1)	1.017747	1.044570	9.639116(-1)
15.0	6.641194(-1)	1.018906	1.044784	9.725338(-1)
20.0	6.641805(-1)	1.019031	1.044794	9.750638(-1)

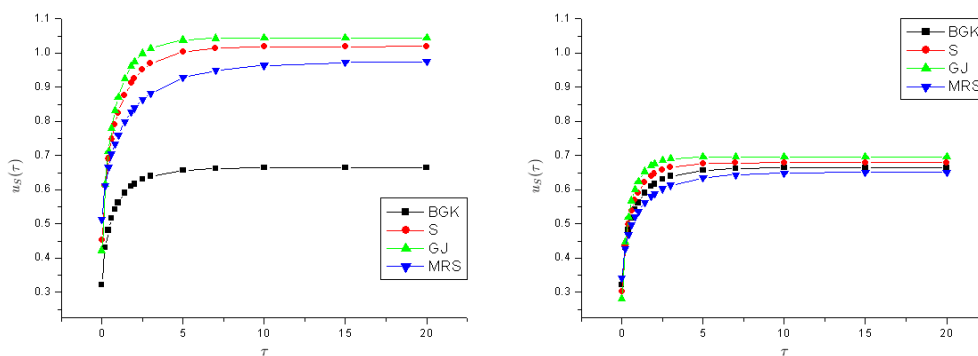
Figura 4.18: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no problema de Deslizamento Térmico.

Tabela 4.44: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.6$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.00	3.225358(-1)	3.025727(-1)	2.815223(-1)	3.414294(-1)
0.20	4.304719(-1)	4.363758(-1)	4.461538(-1)	4.275646(-1)
0.40	4.816888(-1)	4.983161(-1)	5.202941(-1)	4.694155(-1)
0.60	5.164243(-1)	5.393276(-1)	5.677780(-1)	4.983259(-1)
0.80	5.420738(-1)	5.687560(-1)	6.005104(-1)	5.201285(-1)
1.00	5.618698(-1)	5.907572(-1)	6.239194(-1)	5.373501(-1)
1.40	5.902961(-1)	6.208173(-1)	6.537883(-1)	5.629962(-1)
1.80	6.094128(-1)	6.396059(-1)	6.706666(-1)	5.811891(-1)
2.00	6.166854(-1)	6.463471(-1)	6.762511(-1)	5.884109(-1)
2.50	6.303740(-1)	6.582453(-1)	6.852845(-1)	6.026639(-1)
3.00	6.396728(-1)	6.655789(-1)	6.901566(-1)	6.130595(-1)
5.00	6.565604(-1)	6.764952(-1)	6.957630(-1)	6.350386(-1)
7.00	6.615180(-1)	6.786769(-1)	6.964206(-1)	6.435756(-1)
10.0	6.635590(-1)	6.792706(-1)	6.965227(-1)	6.483558(-1)
15.0	6.641194(-1)	6.793617(-1)	6.965299(-1)	6.503909(-1)
20.0	6.641804(-1)	6.793661(-1)	6.965300(-1)	6.507892(-1)

Tabela 4.45: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.1$.

τ	BGK	S	GJ	MRS
0.00	4.684645(-1)	6.950839(-1)	6.861890(-1)	7.092697(-1)
0.20	4.879469(-1)	7.249721(-1)	7.250771(-1)	7.265478(-1)
0.40	4.969426(-1)	7.396900(-1)	7.436651(-1)	7.356234(-1)
0.60	5.029921(-1)	7.499958(-1)	7.564246(-1)	7.421922(-1)
0.80	5.074366(-1)	7.578051(-1)	7.658712(-1)	7.473382(-1)
1.00	5.108548(-1)	7.639625(-1)	7.731283(-1)	7.515406(-1)
1.40	5.157457(-1)	7.730274(-1)	7.833781(-1)	7.580742(-1)
1.80	5.190236(-1)	7.792900(-1)	7.900341(-1)	7.629635(-1)
2.00	5.202681(-1)	7.817119(-1)	7.924817(-1)	7.649792(-1)
2.50	5.226067(-1)	7.863350(-1)	7.968982(-1)	7.691173(-1)
3.00	5.241923(-1)	7.895283(-1)	7.996967(-1)	7.723077(-1)
5.00	5.270643(-1)	7.954547(-1)	8.040250(-1)	7.798692(-1)
7.00	5.279047(-1)	7.972301(-1)	8.049294(-1)	7.834382(-1)
10.0	5.282501(-1)	7.979649(-1)	8.051799(-1)	7.859137(-1)
15.0	5.283447(-1)	7.981658(-1)	8.052184(-1)	7.873499(-1)
20.0	5.283550(-1)	7.981874(-1)	8.052202(-1)	7.877707(-1)

Tabela 4.46: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.1$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ	BGK	S	GJ	MRS	ELB[119] ²
0.00	4.684645(-1)	4.633892(-1)	4.574593(-1)	4.728465(-1)	4.7754(-1)
0.20	4.879469(-1)	4.887304(-1)	4.902524(-1)	4.876791(-1)	5.0022(-1)
0.40	4.969426(-1)	4.999972(-1)	5.042830(-1)	4.947948(-1)	5.0968(-1)
0.60	5.029921(-1)	5.073703(-1)	5.131510(-1)	4.996917(-1)	5.1564(-1)
0.80	5.074366(-1)	5.126254(-1)	5.192198(-1)	5.033762(-1)	5.1970(-1)
1.00	5.108548(-1)	5.165364(-1)	5.235393(-1)	5.062817(-1)	5.2262(-1)
1.40	5.157457(-1)	5.218563(-1)	5.290257(-1)	5.106008(-1)	-
1.80	5.190236(-1)	5.251671(-1)	5.321124(-1)	5.136591(-1)	-
2.00	5.202681(-1)	5.263522(-1)	5.331311(-1)	5.148718(-1)	5.2912(-1)
2.50	5.226067(-1)	5.284397(-1)	5.347757(-1)	5.172626(-1)	-
3.00	5.241923(-1)	5.297234(-1)	5.356605(-1)	5.190043(-1)	-
5.00	5.270643(-1)	5.316284(-1)	5.366754(-1)	5.226796(-1)	-
7.00	5.279047(-1)	5.320076(-1)	5.367939(-1)	5.241038(-1)	-
10.0	5.282501(-1)	5.321105(-1)	5.368122(-1)	5.248999(-1)	-
15.0	5.283447(-1)	5.321263(-1)	5.368135(-1)	5.252383(-1)	-
20.0	5.283550(-1)	5.321270(-1)	5.368135(-1)	5.253045(-1)	-

4.2.5 Deslizamento Viscoso

Os resultados para o problema de **Deslizamento Viscoso** podem ser observados nas Tabs. 4.47 à 4.50, onde as Tabs. 4.47 à 4.51 tratam do perfil de velocidade $u_K(\tau)$ para diferentes valores de α , considerando também resultados obtidos da literatura para a **ELB**. A Tab. 4.50 apresenta os coeficientes A_K obtidos para vários valores de α , considerando os modelos aqui estudados e outros resultados obtidos a partir da literatura. Outro resultado referente à $u_K(\tau)$ aparece na Tab. A.16 do Apêndice A.

Segundo a análise das Tabs. 4.47 à 4.51, verificou-se que quanto menor o coeficiente de acomodação α , maior a magnitude do perfil de velocidade $u_K(\tau)$, independente do parâmetro ε utilizado. Também foi observado que, da mesma forma que no problema de Deslizamento Térmico, não é possível identificar para o problema de Deslizamento Viscoso o modelo que melhor representa o perfil de velocidade se comparado com a **ELB**.

Tabela 4.47: Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 1.0$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS	ELB[119]
0.00	7.071068(-1)	7.043622(-1)	7.016371(-1)	7.098626(-1)	7.1553(-1)
0.20	1.027415	1.023037	1.045767	9.858921(-1)	1.0463
0.40	1.276161	1.271763	1.297946	1.223688	1.2922
0.60	1.506903	1.502820	1.529126	1.450350	1.5189
0.80	1.728463	1.724809	1.750097	1.670839	1.7363
1.00	1.944445	1.941256	1.965089	1.887306	1.9484
1.40	2.366367	2.364080	2.384718	2.312398	-
1.80	2.780389	2.778897	2.796537	2.730728	-
2.00	2.985559	2.984416	3.000703	2.938160	2.9752
2.50	3.495016	3.494617	3.507970	3.453161	-
3.00	4.001214	4.001393	4.012405	3.964460	-
5.00	6.011854	6.013302	6.018974	5.990059	-
7.00	8.014746	8.016648	8.020292	8.001339	-
10.0	1.101587(1)	1.101798(1)	1.102065(1)	1.100867(1)	-
15.0	1.601616(1)	1.601833(1)	1.602070(1)	1.601261(1)	-
20.0	2.101619(1)	2.101837(1)	2.102070(1)	2.101367(1)	-

Tabela 4.48: Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.6$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.00	1.805584	1.799554	1.793105	1.811218
0.20	2.182908	2.175729	2.208064	2.122927
0.40	2.453793	2.447136	2.485026	2.377855
0.60	2.698309	2.692475	2.730920	2.616453
0.80	2.929448	2.924506	2.961758	2.846041
1.00	3.152488	3.148423	3.183794	3.069776
1.40	3.584033	3.581564	3.612635	3.505874
1.80	4.004171	4.003044	4.029995	3.932191
2.00	4.211588	4.211038	4.236113	4.142849
2.50	4.725143	4.725800	4.746784	4.664336
3.00	5.234016	5.235599	5.253293	5.180502
5.00	7.249226	7.252795	7.262929	7.217052
7.00	9.253350	9.257619	9.264860	9.233117
10.0	1.225495(1)	1.225953(1)	1.226538(1)	1.224354(1)
15.0	1.725536(1)	1.726004(1)	1.726546(1)	1.724913(1)
20.0	2.225540(1)	2.226009(1)	2.226547(1)	2.225064(1)

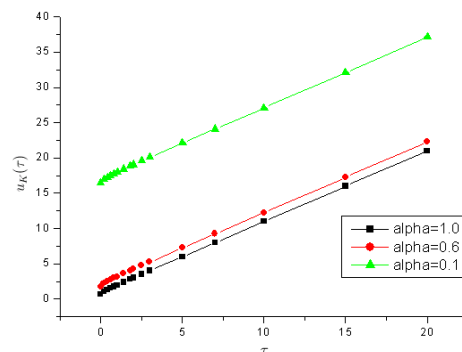


Figura 4.19: Efeitos que a variação do parâmetro α causa ao perfil de velocidade no problema de Deslizamento Viscoso, considerando o modelo **MRS** e as Tabs. 4.47 à 4.49.

Com relação ao parâmetro ε , o que se observa na comparação das Tabs. 4.48 e 4.51 é que, diferente do que ocorre para os outros problemas de fluxo, os perfis gerados pelos modelos cinéticos são mais próximos entre si quando usado $\varepsilon = \varepsilon_p$. Como forma de ilustrar esse efeito, segue a Fig 4.20.

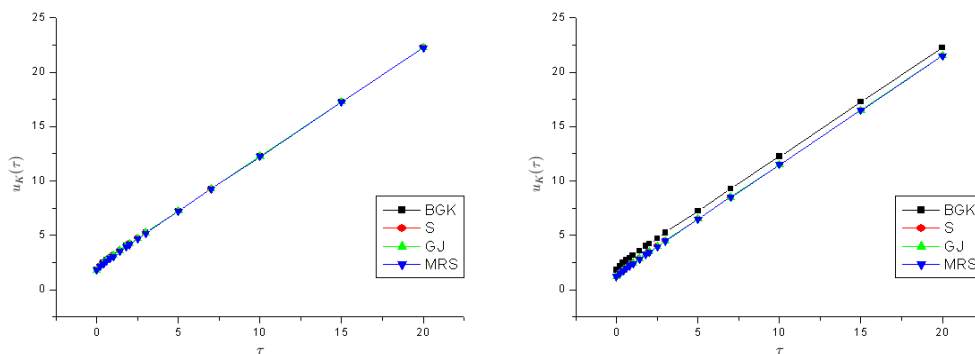


Figura 4.20: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de velocidade no problema de Deslizamento Viscoso.

Tabela 4.49: Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.1$.

τ	BGK	S	GJ	MRS	ELB[119]
0.00	1.646106(1)	1.644817(1)	1.643291(1)	1.647205(1)	1.6472(1)
0.20	1.691820(1)	1.690632(1)	1.695074(1)	1.683340(1)	1.6956(1)
0.40	1.721927(1)	1.720927(1)	1.726299(1)	1.711166(1)	1.7252(1)
0.60	1.748240(1)	1.747432(1)	1.752976(1)	1.736638(1)	1.7507(1)
0.80	1.772641(1)	1.772015(1)	1.777458(1)	1.760820(1)	1.7743(1)
1.00	1.795891(1)	1.795430(1)	1.800659(1)	1.784166(1)	1.7968(1)
1.40	1.840328(1)	1.840152(1)	1.844848(1)	1.829243(1)	-
1.80	1.883155(1)	1.883206(1)	1.887369(1)	1.872935(1)	-
2.00	1.904194(1)	1.904342(1)	1.908257(1)	1.894428(1)	1.9023(1)
2.50	1.956091(1)	1.956437(1)	1.959806(1)	1.947434(1)	-
3.00	2.007331(1)	2.007825(1)	2.010750(1)	1.999691(1)	-
5.00	2.209453(1)	2.210258(1)	2.212147(1)	2.204782(1)	-
7.00	2.410027(1)	2.410939(1)	2.412426(1)	2.407013(1)	-
10.0	2.710249(1)	2.711209(1)	2.712502(1)	2.708457(1)	-
15.0	3.210306(1)	3.211280(1)	3.212514(1)	3.209230(1)	-
20.0	3.710312(1)	3.711288(1)	3.712514(1)	3.709438(1)	-

Com relação ao coeficiente de Deslizamento Viscoso A_K , a Tab. 4.50 mostra que os coeficientes obtidos a partir dos modelos **BGK**, **S** e **MRS** são bem próximos entre si, podendo concordar em até dois dígitos significativos ($\alpha = 0.9$ e $\alpha = 1.0$). Porém, ao se comparar os resultados obtidos a partir da **ELB**, verifica-se que dentre todos os modelos, o **CES** é o que mais se aproxima, mantendo uma concordância de dois dígitos em quase todo o perfil. Contudo, pelo mesmo motivo descrito para o problema de Deslizamento Térmico, o modelo **CES** não é computacionalmente

Tabela 4.50: Deslizamento Viscoso; coeficientes A_K .

α	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS	CES[126]	ELB[119]
0.01	1.766386(2)	1.766495(2)	1.766635(2)	1.766299(2)	-	-
0.10	1.710313(1)	1.711289(1)	1.712514(1)	1.709536(1)	1.704462(1)	1.70478(1)
0.20	8.224902	8.233445	8.243968	8.217986	8.169615	8.17248
0.30	5.255116	5.262546	5.271532	5.248992	5.203049	5.20563
0.40	3.762619	3.769046	3.776671	3.757241	3.713778	3.71609
0.50	2.861190	2.866704	2.873130	2.856499	2.815562	2.81761
0.60	2.255410	2.260100	2.265470	2.251353	2.211984	2.21478
0.70	1.818667	1.822617	1.827062	1.815195	1.779429	1.78098
0.80	1.487654	1.490942	1.494581	1.484717	1.451586	1.45292
0.90	1.227198	1.229898	1.232837	1.224746	1.194279	1.19540
1.00	1.016191	1.018372	1.020709	1.014179	9.864009(-1)	9.87328(-1)

vantajoso, fazendo com que se opte pelo modelo **MRS**, cuja concordância com a **ELB** não ultrapassa de um dígito significativo.

Tabela 4.51: Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.6$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ	BGK	S	GJ	MRS
0.00	1.805584	1.199702	1.195403	1.207478
0.20	2.182908	1.544109	1.568212	1.502168
0.40	2.453793	1.794983	1.820613	1.744302
0.60	2.698309	2.024849	2.049091	1.972341
0.80	2.929448	2.244610	2.266771	2.192913
1.00	3.152488	2.458518	2.478520	2.408796
1.40	3.584033	2.876347	2.892473	2.831789
1.80	4.004171	3.286791	3.299843	3.247554
2.00	4.211588	3.490399	3.502195	3.453668
2.50	4.725143	3.996574	4.005904	3.965457
3.00	5.234016	4.500244	4.507848	4.473789
5.00	7.249226	6.505453	6.510024	6.490420
7.00	9.253350	8.506435	8.510272	8.496345
10.0	1.225495(1)	1.150669(1)	1.151031(1)	1.149942(1)
15.0	1.725536(1)	1.650673(1)	1.651031(1)	1.650062(1)
20.0	2.225540(1)	2.150673(1)	2.151031(1)	2.150084(1)

Também a partir da Tab. 4.50, gerou-se a Fig. 4.21, onde pode ser visto como o coeficiente A_K decai conforme o valor de α aumenta.

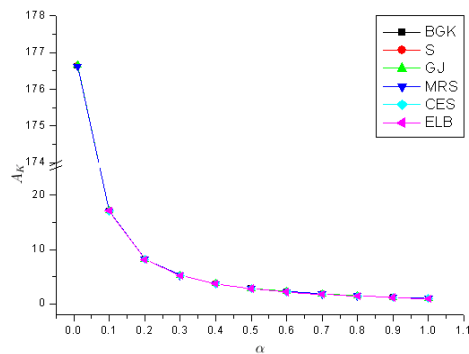


Figura 4.21: Variação do coeficientes de Deslizamento Viscoso A_K utilizando o parâmetro ε_p .

4.2.6 Problema de Transferência de Calor

Desejando comparar os resultados obtidos, não só a partir de modelos cinéticos [109, 97], mas também considerando a **ELB** [117] quando possível, foram geradas tabelas de resultados considerando os casos abaixo

Tabela 4.52: Casos de transferência de calor analisados.

Casos	$2a$	α_1	α_2	δ_1	δ_2
I	2.0	0.7	0.3	1.0	-1.0
II	5.0	1.0	0.5	1.0	-1.0
III	1.0	0.7	0.3	1.0	-1.0
IV	1.0	0.7	0.3	2.0	-1.0
V	1.0	0.9	0.1	1.0	-1.0
VI	1.0	0.5	0.5	1.0	-1.0

onde a variação de parâmetros como da largura do canal $2a$, dos coeficientes de acomodação α_1 e α_2 , da temperatura nas paredes δ_1 e δ_2 e até mesmo do parâmetro ε serão usados para a comparação entre os modelos e a **ELB** e na verificação da sensibilidade do fenômeno à variação destes parâmetros.

Para a comparação com a literatura, os resultados obtidos para o problema de Transferência de Calor foram obtidos utilizando $N = 30$, sendo que dos dezesseis dígitos significativos utilizados, de cinco a seis se conservam ao aumentar mais o valor de N . Para valores menores de N , como para $N = 10$, até três dígitos se conservam.

Nas Tabs. 4.53 à 4.60 são apresentados resultados obtidos para o problema de **Transferência de Calor** referentes as quantidades perturbação de densidade $N(\tau)$ e perturbação de temperatura $T(\tau)$, baseados nos parâmetros definidos pelos casos I à VI na Tab. 4.52, onde é possível fazer uma comparação entre os modelos cinéticos aqui estudados e os relacionar com a **ELB**. Já nas Tabs. 4.61 à 4.68 são apresentados outros resultados presentes na literatura, possibilitando a comparação destes com os obtidos a partir do modelo **MRS**. Por fim, as Tabs. 4.69 à 4.76 são

referentes aos casos V e VI que, aliados aos casos anteriores, auxiliaram na análise gráfica dos resultados. A Tab. 4.77 se refere ao fluxo de calor normalizado q para os seis casos, considerando a **ELB**, os quatro modelos cinéticos e o parâmetro ε .

Tabela 4.53: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	-2.645891(-1)	-2.161697(-1)	-2.178725(-1)	-2.050896(-1)
-0.8	-1.930967(-1)	-1.531382(-1)	-1.479868(-1)	-1.533952(-1)
-0.6	-1.411904(-1)	-1.109823(-1)	-1.061460(-1)	-1.127890(-1)
-0.4	-9.347171(-2)	-7.328989(-2)	-6.981796(-2)	-7.483912(-2)
-0.2	-4.744219(-2)	-3.739778(-2)	-3.565354(-2)	-3.799481(-2)
0.0	-1.940454(-3)	-2.068213(-3)	-2.185608(-3)	-1.479117(-3)
0.2	4.387489(-2)	3.359561(-2)	3.160752(-2)	3.529652(-2)
0.4	9.091894(-2)	7.056904(-2)	6.684001(-2)	7.296939(-2)
0.6	1.406371(-1)	1.103927(-1)	1.053410(-1)	1.125005(-1)
0.8	1.963821(-1)	1.566399(-1)	1.515845(-1)	1.559703(-1)
1.0	2.797634(-1)	2.323430(-1)	2.369868(-1)	2.152371(-1)

Tabela 4.54: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS	ELB[117]
-1.0	-2.645891(-1)	-2.682733(-1)	-2.675544(-1)	-2.621666(-1)	-2.5368(-1)
-0.8	-1.930967(-1)	-1.905462(-1)	-1.827593(-1)	-1.963678(-1)	-1.8265(-1)
-0.6	-1.411904(-1)	-1.385100(-1)	-1.318669(-1)	-1.445493(-1)	-1.3342(-1)
-0.4	-9.347171(-2)	-9.152498(-2)	-8.688809(-2)	-9.593145(-2)	-8.8300(-2)
-0.2	-4.744219(-2)	-4.652590(-2)	-4.412745(-2)	-4.863251(-2)	-4.4787(-2)
0.0	-1.940454(-3)	-2.154736(-3)	-2.082200(-3)	-1.729698(-3)	-1.7756(-3)
0.2	4.387489(-2)	4.254529(-2)	4.024419(-2)	4.546905(-2)	4.1504(-2)
0.4	9.091894(-2)	8.861857(-2)	8.394339(-2)	9.371546(-2)	8.5893(-2)
0.6	1.406371(-1)	1.377655(-1)	1.308993(-1)	1.441594(-1)	1.3278(-1)
0.8	1.963821(-1)	1.941117(-1)	1.860468(-1)	1.993490(-1)	1.8556(-1)
1.0	2.797634(-1)	2.866885(-1)	2.883261(-1)	2.746166(-1)	2.6933(-1)

Tabela 4.55: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_p$

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	-5.787381(-1)	-4.935455(-1)	-4.898606(-1)	-4.969416(-1)
-0.8	-4.371448(-1)	-3.637638(-1)	-3.525300(-1)	-3.799420(-1)
-0.6	-3.238811(-1)	-2.680410(-1)	-2.591909(-1)	-2.818122(-1)
-0.4	-2.155265(-1)	-1.782201(-1)	-1.721746(-1)	-1.877737(-1)
-0.2	-1.089826(-1)	-9.057606(-2)	-8.731025(-2)	-9.534969(-2)
0.0	-2.944756(-3)	-3.540280(-3)	-3.068027(-3)	-3.319555(-3)
0.2	1.035007(-1)	8.398549(-2)	8.152315(-2)	8.925722(-2)
0.4	2.113987(-1)	1.732575(-1)	1.675859(-1)	1.834432(-1)
0.6	3.225774(-1)	2.664737(-1)	2.572804(-1)	2.809276(-1)
0.8	4.418259(-1)	3.693916(-1)	3.569852(-1)	3.855860(-1)
1.0	6.075009(-1)	5.281250(-1)	5.273068(-1)	5.223868(-1)

Tabela 4.56: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS	ELB[117]
-1.0	-5.787381(-1)	-5.777093(-1)	-5.744557(-1)	-5.830264(-1)	-5.6834(-1)
-0.8	-4.371448(-1)	-4.302270(-1)	-4.207801(-1)	-4.472924(-1)	-4.2825(-1)
-0.6	-3.238811(-1)	-3.183011(-1)	-3.114257(-1)	-3.321508(-1)	-3.1770(-1)
-0.4	-2.155265(-1)	-2.117074(-1)	-2.071454(-1)	-2.212273(-1)	-2.1140(-1)
-0.2	-1.089826(-1)	-1.069900(-1)	-1.044396(-1)	-1.119563(-1)	-1.0661(-1)
0.0	-2.944756(-3)	-2.814972(-3)	-2.185462(-3)	-3.118206(-3)	-2.2547(-3)
0.2	1.035007(-1)	1.017004(-1)	1.002668(-1)	1.062069(-1)	1.0237(-1)
0.4	2.113987(-1)	2.075761(-1)	2.036785(-1)	2.170628(-1)	2.0807(-1)
0.6	3.225774(-1)	3.167049(-1)	3.096569(-1)	3.311494(-1)	3.1637(-1)
0.8	4.418259(-1)	4.344377(-1)	4.235511(-1)	4.524960(-1)	4.3158(-1)
1.0	6.075009(-1)	6.101076(-1)	6.081653(-1)	6.089209(-1)	5.9529(-1)

Tabela 4.57: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	6.74583(-1)	6.53158(-1)	6.59872(-1)	6.36187(-1)
-0.8	5.96369(-1)	5.82962(-1)	5.81170(-1)	5.80153(-1)
-0.6	5.39983(-1)	5.36032(-1)	5.33329(-1)	5.36700(-1)
-0.4	4.88603(-1)	4.94437(-1)	4.92103(-1)	4.96422(-1)
-0.2	4.39292(-1)	4.55047(-1)	4.53554(-1)	4.57493(-1)
0.0	3.90626(-1)	4.16345(-1)	4.15850(-1)	4.18977(-1)
0.2	3.41552(-1)	3.77207(-1)	3.77659(-1)	3.80162(-1)
0.4	2.90926(-1)	3.36417(-1)	3.37536(-1)	3.40281(-1)
0.6	2.36995(-1)	2.92103(-1)	2.93201(-1)	2.98197(-1)
0.8	1.75848(-1)	2.40098(-1)	2.39380(-1)	2.51519(-1)
1.0	8.40673(-2)	1.55442(-1)	1.42126(-1)	1.87370(-1)

Tabela 4.58: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso I com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS	ELB [117]
-1.0	6.74583(-1)	6.80154(-1)	6.84732(-1)	6.66768(-1)	6.7606(-1)
-0.8	5.96369(-1)	5.93935(-1)	5.89609(-1)	5.95632(-1)	5.9100(-1)
-0.6	5.39983(-1)	5.36942(-1)	5.32607(-1)	5.40741(-1)	5.3593(-1)
-0.4	4.88603(-1)	4.86226(-1)	4.83114(-1)	4.89780(-1)	4.8692(-1)
-0.2	4.39292(-1)	4.38055(-1)	4.36583(-1)	4.40467(-1)	4.4033(-1)
0.0	3.90626(-1)	3.90692(-1)	3.91002(-1)	3.91666(-1)	3.9450(-1)
0.2	3.41552(-1)	3.42882(-1)	3.44960(-1)	3.42521(-1)	3.4824(-1)
0.4	2.90926(-1)	2.93259(-1)	2.96912(-1)	2.92111(-1)	3.0025(-1)
0.6	2.36995(-1)	2.39670(-1)	2.44341(-1)	2.39046(-1)	2.4843(-1)
0.8	1.75848(-1)	1.77127(-1)	1.81134(-1)	1.80319(-1)	1.8785(-1)
1.0	8.40673(-2)	7.35788(-2)	6.43816(-2)	9.89676(-2)	8.4272(-2)

Com relação a **ELB**, foi verificado que, apesar do perfil gerado a partir do modelo **Gross-Jackson** ser indiscutivelmente o que mais se aproxima da **ELB** na Tab. 4.54 (concordando em até três dígitos para $\tau/a = -0.8$ e $\tau/a = -0.2$), para as demais tabelas o modelo **S** foi o que se mostrou mais eficiente, com uma concordância de até três dígitos significativos (Tab. 4.56 para $\tau/a = -0.4$, $\tau/a = -0.2$, $\tau/a = 0.0$ e $\tau/a = 0.6$; Tab. 4.58 para $\tau/a = -0.4$; Tab. 4.60 para $\tau/a = -0.6$). Além disso, na maioria dos casos em que os perfis gerados a partir dos modelos **S** e **Gross-Jackson** apresentam a mesma concordância com a **ELB**, foram os valores gerados a partir do modelo **S** que se mostraram mais próximos (a exceção da Tab. 4.54 como mencionado anteriormente).

Tabela 4.59: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	8.26728(-1)	7.91686(-1)	7.93644(-1)	7.84177(-1)
-0.8	6.75739(-1)	6.50609(-1)	6.43283(-1)	6.59063(-1)
-0.6	5.58060(-1)	5.49579(-1)	5.43763(-1)	5.57213(-1)
-0.4	4.46817(-1)	4.56286(-1)	4.52939(-1)	4.60622(-1)
-0.2	3.38030(-1)	3.65945(-1)	3.65298(-1)	3.66124(-1)
0.0	2.29936(-1)	2.76436(-1)	2.78586(-1)	2.72165(-1)
0.2	1.21266(-1)	1.86236(-1)	1.91260(-1)	1.77563(-1)
0.4	1.05785(-2)	9.36106(-2)	1.01545(-1)	8.09886(-2)
0.6	-1.04577(-1)	-4.38745(-3)	6.24753(-3)	-1.96601(-2)
0.8	-2.30311(-1)	-1.15102(-1)	-1.03170(-1)	-1.29156(-1)
1.0	-4.10298(-1)	-2.91041(-1)	-2.95335(-1)	-2.76398(-1)

Tabela 4.60: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso II com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS	ELB [117]
-1.0	8.26728(-1)	8.27698(-1)	8.28658(-1)	8.23802(-1)	8.2333(-1)
-0.8	6.75739(-1)	6.68739(-1)	6.61561(-1)	6.79791(-1)	6.6684(-1)
-0.6	5.58060(-1)	5.52586(-1)	5.47358(-1)	5.61587(-1)	5.5223(-1)
-0.4	4.46817(-1)	4.43689(-1)	4.40718(-1)	4.48797(-1)	4.4421(-1)
-0.2	3.38030(-1)	3.37426(-1)	3.36628(-1)	3.38118(-1)	3.3853(-1)
0.0	2.29936(-1)	2.31937(-1)	2.33290(-1)	2.28012(-1)	2.3353(-1)
0.2	1.21266(-1)	1.25965(-1)	1.29598(-1)	1.17338(-1)	1.2815(-1)
0.4	1.05785(-2)	1.80643(-2)	2.42503(-2)	4.80829(-3)	2.1165(-2)
0.6	-1.04577(-1)	-9.43996(-2)	-8.53560(-2)	-1.11684(-1)	-8.8946(-2)
0.8	-2.30311(-1)	-2.18552(-1)	-2.07026(-1)	-2.37151(-1)	-2.1157(-1)
1.0	-4.10298(-1)	-4.12022(-1)	-4.14296(-1)	-4.04401(-1)	-4.0267(-1)

Tabela 4.61: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	-1.778868(-1)	-1.485249(-1)	-1.547073(-1)	-1.314027(-1)
-0.8	-1.296852(-1)	-1.057447(-1)	-1.059560(-1)	-9.833716(-2)
-0.6	-9.458135(-2)	-7.653020(-2)	-7.580675(-2)	-7.223567(-2)
-0.4	-6.259044(-2)	-5.053978(-2)	-4.986146(-2)	-4.791603(-2)
-0.2	-3.189521(-2)	-2.589131(-2)	-2.564398(-2)	-2.435224(-2)
0.0	-1.597160(-3)	-1.654203(-3)	-1.970171(-3)	-1.012722(-3)
0.2	2.897711(-2)	2.286899(-2)	2.203015(-2)	2.251116(-2)
0.4	6.055567(-2)	4.843234(-2)	4.730000(-2)	4.665912(-2)
0.6	9.424390(-2)	7.618071(-2)	7.530148(-2)	7.207884(-2)
0.8	1.324566(-1)	1.086151(-1)	1.093301(-1)	1.001219(-1)
1.0	1.890710(-1)	1.601085(-1)	1.694222(-1)	1.379236(-1)

Tabela 4.62: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	-1.778868(-1)	-1.851828(-1)	-1.888197(-1)	-1.710837(-1)
-0.8	-1.296852(-1)	-1.312964(-1)	-1.283976(-1)	-1.279338(-1)
-0.6	-9.458135(-2)	-9.504775(-2)	-9.189817(-2)	-9.401490(-2)
-0.4	-6.259044(-2)	-6.275901(-2)	-6.042218(-2)	-6.237304(-2)
-0.2	-3.189521(-2)	-3.209101(-2)	-3.096348(-2)	-3.168637(-2)
0.0	-1.597160(-3)	-1.925169(-3)	-2.149253(-3)	-1.282907(-3)
0.2	2.897711(-2)	2.856185(-2)	2.700185(-2)	2.934964(-2)
0.4	6.055567(-2)	6.026330(-2)	5.755702(-2)	6.076456(-2)
0.6	9.424390(-2)	9.456500(-2)	9.122114(-2)	9.378793(-2)
0.8	1.324566(-1)	1.345951(-1)	1.320067(-1)	1.301802(-1)
1.0	1.890710(-1)	1.994866(-1)	2.062686(-1)	1.796355(-1)

Tabela 4.63: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	-2.668302(-1)	-2.227873(-1)	-2.320610(-1)	-1.971040(-1)
-0.8	-1.945278(-1)	-1.586171(-1)	-1.589340(-1)	-1.475057(-1)
-0.6	-1.418720(-1)	-1.147953(-1)	-1.137101(-1)	-1.083535(-1)
-0.4	-9.388566(-2)	-7.580967(-2)	-7.479219(-2)	-7.187405(-2)
-0.2	-4.784282(-2)	-3.883697(-2)	-3.846597(-2)	-3.652836(-2)
0.0	-2.395740(-3)	-2.481305(-3)	-2.955257(-3)	-1.519083(-3)
0.2	4.346567(-2)	3.430349(-2)	3.304524(-2)	3.376674(-2)
0.4	9.083351(-2)	7.264851(-2)	7.095000(-2)	6.998868(-2)
0.6	1.413658(-1)	1.142710(-1)	1.129522(-1)	1.081182(-1)
0.8	1.986850(-1)	1.629228(-1)	1.639951(-1)	1.501829(-1)
1.0	2.836066(-1)	2.401628(-1)	2.541333(-1)	2.068855(-1)

Tabela 4.64: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	-2.668302(-1)	-2.777742(-1)	-2.832295(-1)	-2.566255(-1)
-0.8	-1.945278(-1)	-1.969446(-1)	-1.925964(-1)	-1.919007(-1)
-0.6	-1.418720(-1)	-1.425716(-1)	-1.378472(-1)	-1.410223(-1)
-0.4	-9.388566(-2)	-9.413852(-2)	-9.063328(-2)	-9.355956(-2)
-0.2	-4.784282(-2)	-4.813652(-2)	-4.644523(-2)	-4.752956(-2)
0.0	-2.395740(-3)	-2.887753(-3)	-3.223879(-3)	-1.924361(-3)
0.2	4.346567(-2)	4.284277(-2)	4.050279(-2)	4.402446(-2)
0.4	9.083351(-2)	9.039496(-2)	8.633553(-2)	9.114684(-2)
0.6	1.413658(-1)	1.418475(-1)	1.368317(-1)	1.406819(-1)
0.8	1.986850(-1)	2.018926(-1)	1.980101(-1)	1.952703(-1)
1.0	2.836066(-1)	2.992299(-1)	3.094029(-1)	2.694532(-1)

Com relação aos modelos cinéticos propriamente ditos, verificou-se que os resultados gerados a partir dos modelos **S** e **Gross-Jackson** possuem uma boa concordância, podendo chegar a até quatro dígitos (Tab. 4.66 e 4.68 para $\tau/a = -0.8$ e Tab. 4.69 $\tau/a = 0.0$). Concordâncias menores (de até três dígitos) foram encontradas em boa parte das tabelas, principalmente para $\tau/a = 0.0$. Com relação ao modelo **MRS** as tabelas mostraram que, de um modo geral, os perfis gerados por este modelo são muito próximos dos gerados a partir do modelo **BGK**, mantendo uma concordância de até três dígitos para a maioria das tabelas em que o parâmetro $\varepsilon = \varepsilon_t$ é utilizado.

Tabela 4.65: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	6.26834(-1)	6.13506(-1)	6.23102(-1)	5.93453(-1)
-0.8	5.73818(-1)	5.65740(-1)	5.67949(-1)	5.57592(-1)
-0.6	5.34979(-1)	5.32657(-1)	5.32761(-1)	5.29333(-1)
-0.4	4.99668(-1)	5.03228(-1)	5.02314(-1)	5.03095(-1)
-0.2	4.65847(-1)	4.75342(-1)	4.73843(-1)	4.77731(-1)
0.0	4.32481(-1)	4.47927(-1)	4.45978(-1)	4.52630(-1)
0.2	3.98780(-1)	4.20166(-1)	4.17692(-1)	4.27322(-1)
0.4	3.63897(-1)	3.91180(-1)	3.87874(-1)	4.01302(-1)
0.6	3.26568(-1)	3.59661(-1)	3.54842(-1)	3.73838(-1)
0.8	2.84110(-1)	3.22829(-1)	3.14924(-1)	3.43442(-1)
1.0	2.21848(-1)	2.65487(-1)	2.46971(-1)	3.02571(-1)

Tabela 4.66: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso III com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	6.26834(-1)	6.35763(-1)	6.43869(-1)	6.16986(-1)
-0.8	5.73818(-1)	5.75646(-1)	5.75659(-1)	5.70178(-1)
-0.6	5.34979(-1)	5.34932(-1)	5.33463(-1)	5.33669(-1)
-0.4	4.99668(-1)	4.98837(-1)	4.97114(-1)	4.99825(-1)
-0.2	4.65847(-1)	4.64672(-1)	4.63165(-1)	4.67120(-1)
0.0	4.32481(-1)	4.31102(-1)	4.29962(-1)	4.34762(-1)
0.2	3.98780(-1)	3.97127(-1)	3.96288(-1)	4.02143(-1)
0.4	3.63897(-1)	3.61665(-1)	3.60822(-1)	3.68608(-1)
0.6	3.26568(-1)	3.23078(-1)	3.21518(-1)	3.33200(-1)
0.8	2.84110(-1)	2.77799(-1)	2.73774(-1)	2.93931(-1)
1.0	2.21848(-1)	2.05323(-1)	1.89421(-1)	2.40400(-1)

Tabela 4.67: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	1.44025	1.42026	1.43465	1.390180
-0.8	1.36072	1.34861	1.35192	1.336389
-0.6	1.30246	1.29898	1.29914	1.293999
-0.4	1.24950	1.25484	1.25347	1.254643
-0.2	1.19877	1.21301	1.21076	1.216596
0.0	1.14872	1.17189	1.16896	1.178945
0.2	1.09817	1.13024	1.12653	1.140983
0.4	1.04584	1.08677	1.08181	1.101953
0.6	9.89852(-1)	1.03949	1.03226	1.060757
0.8	9.26165(-1)	9.84244(-1)	9.72387(-1)	1.015163
1.0	8.32773(-1)	8.98231(-1)	8.70458(-1)	9.538565(-1)

Tabela 4.68: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso IV com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS
-1.0	1.44025	1.45364	1.46580	1.425479
-0.8	1.36072	1.36347	1.36349	1.355267
-0.6	1.30246	1.30239	1.30019	1.300504
-0.4	1.24950	1.24825	1.24567	1.249737
-0.2	1.19877	1.19701	1.19474	1.200680
0.0	1.14872	1.14665	1.14494	1.152143
0.2	1.09817	1.09569	1.09443	1.103214
0.4	1.04584	1.04249	1.04123	1.052912
0.6	9.89852(-1)	9.84618(-1)	9.82277(-1)	9.998004(-1)
0.8	9.26165(-1)	9.16699(-1)	9.10661(-1)	9.408968(-1)
1.0	8.32773(-1)	8.07985(-1)	7.84132(-1)	8.606005(-1)

Tabela 4.69: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	-7.081865(-2)	-5.758682(-2)	-5.961147(-2)	-5.125546(-2)
-0.8	-5.265972(-2)	-4.201736(-2)	-4.210200(-2)	-3.893465(-2)
-0.6	-3.886827(-2)	-3.087757(-2)	-3.069067(-2)	-2.887885(-2)
-0.4	-2.608248(-2)	-2.075778(-2)	-2.062543(-2)	-1.937824(-2)
-0.2	-1.367021(-2)	-1.101681(-2)	-1.106310(-2)	-1.008281(-2)
0.0	-1.301100(-3)	-1.319628(-3)	-1.578210(-3)	-8.007828(-4)
0.2	1.129267(-2)	8.605427(-3)	8.167921(-3)	8.626734(-3)
0.4	2.442366(-2)	1.907533(-2)	1.857242(-2)	1.838335(-2)
0.6	3.859134(-2)	3.059670(-2)	3.028398(-2)	2.875324(-2)
0.8	5.491672(-2)	4.430650(-2)	4.480397(-2)	4.034546(-2)
1.0	7.994769(-2)	6.684585(-2)	7.141751(-2)	5.642483(-2)

Tabela 4.70: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	-7.081865(-2)	-7.351126(-2)	-7.452623(-2)	-6.832496(-2)
-0.8	-5.265972(-2)	-5.343333(-2)	-5.227418(-2)	-5.187430(-2)
-0.6	-3.886827(-2)	-3.924769(-2)	-3.806420(-2)	-3.848424(-2)
-0.4	-2.608248(-2)	-2.635112(-2)	-2.551596(-2)	-2.581950(-2)
-0.2	-1.367021(-2)	-1.393073(-2)	-1.358402(-2)	-1.342070(-2)
0.0	-1.301100(-3)	-1.575779(-3)	-1.765669(-3)	-1.040426(-3)
0.2	1.129267(-2)	1.104170(-2)	1.032915(-2)	1.152527(-2)
0.4	2.442366(-2)	2.430707(-2)	2.316111(-2)	2.451379(-2)
0.6	3.859134(-2)	3.885041(-2)	3.750620(-2)	3.829815(-2)
0.8	5.491672(-2)	5.613243(-2)	5.523822(-2)	5.369539(-2)
1.0	7.994769(-2)	8.523936(-2)	8.888023(-2)	7.527719(-2)

Ainda com relação aos modelos cinéticos, também foi constatado que os perfis gerados a partir desses modelos cinéticos apresentam uma maior diferença nos contornos e que, dependendo do parâmetro ε utilizado, os perfis tendem a ser mais próximos entre si. Nas Tabs. 4.71, 4.72, 4.75 e 4.76 verificou-se que quando os coeficientes de acomodação α são iguais nas duas paredes, as quantidades $N(\tau)$ e $T(\tau)$ apresentam as mesmas propriedades de anti-simetria observadas no problema de **Couette**.

Tabela 4.71: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	-2.216856(-1)	-1.877386(-1)	-1.969750(-1)	-1.643100(-1)
-0.8	-1.584268(-1)	-1.304439(-1)	-1.308923(-1)	-1.211102(-1)
-0.6	-1.141321(-1)	-9.294054(-2)	-9.188486(-2)	-8.807814(-2)
-0.4	-7.443885(-2)	-6.023916(-2)	-5.908548(-2)	-5.772480(-2)
-0.2	-3.679724(-2)	-2.967898(-2)	-2.899251(-2)	-2.860447(-2)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	3.679724(-2)	2.967898(-2)	2.899251(-2)	2.860447(-2)
0.4	7.443885(-2)	6.023916(-2)	5.908548(-2)	5.772480(-2)
0.6	1.141321(-1)	9.294054(-2)	9.188486(-2)	8.807814(-2)
0.8	1.584268(-1)	1.304439(-1)	1.308923(-1)	1.211102(-1)
1.0	2.216856(-1)	1.877386(-1)	1.969750(-1)	1.643100(-1)

Tabela 4.72: Perturbação de densidade $N(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	-2.216856(-1)	-2.320261(-1)	-2.381258(-1)	-2.121217(-1)
-0.8	-1.584268(-1)	-1.604628(-1)	-1.570423(-1)	-1.561701(-1)
-0.6	-1.141321(-1)	-1.144468(-1)	-1.104502(-1)	-1.136440(-1)
-0.4	-7.443885(-2)	-7.426021(-2)	-7.116576(-2)	-7.451910(-2)
-0.2	-3.679724(-2)	-3.661360(-2)	-3.496639(-2)	-3.693859(-2)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	3.679724(-2)	3.661360(-2)	3.496639(-2)	3.693859(-2)
0.4	7.443885(-2)	7.426021(-2)	7.116576(-2)	7.451910(-2)
0.6	1.141321(-1)	1.144468(-1)	1.104502(-1)	1.136440(-1)
0.8	1.584268(-1)	1.604628(-1)	1.570423(-1)	1.561701(-1)
1.0	2.216856(-1)	2.320261(-1)	2.381258(-1)	2.121217(-1)

Tabela 4.73: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	9.029105(-1)	9.015279(-1)	9.041017(-1)	8.960466(-1)
-0.8	8.829299(-1)	8.841108(-1)	8.842199(-1)	8.826912(-1)
-0.6	8.676896(-1)	8.715016(-1)	8.708853(-1)	8.718226(-1)
-0.4	8.535869(-1)	8.600461(-1)	8.590575(-1)	8.615877(-1)
-0.2	8.399095(-1)	8.490220(-1)	8.477899(-1)	8.515922(-1)
0.0	8.262747(-1)	8.380411(-1)	8.365872(-1)	8.416159(-1)
0.2	8.123686(-1)	8.267851(-1)	8.250473(-1)	8.314760(-1)
0.4	7.978278(-1)	8.148852(-1)	8.127018(-1)	8.209636(-1)
0.6	7.820834(-1)	8.017647(-1)	7.988030(-1)	8.097610(-1)
0.8	7.638952(-1)	7.861656(-1)	7.816759(-1)	7.972042(-1)
1.0	7.363672(-1)	7.610936(-1)	7.515092(-1)	7.798794(-1)

Tabela 4.74: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso V com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	9.029105(-1)	9.054485(-1)	9.076619(-1)	9.001866(-1)
-0.8	8.829299(-1)	8.830618(-1)	8.825611(-1)	8.823631(-1)
-0.6	8.676896(-1)	8.671735(-1)	8.661897(-1)	8.679849(-1)
-0.4	8.535869(-1)	8.527860(-1)	8.517316(-1)	8.544632(-1)
-0.2	8.399095(-1)	8.389590(-1)	8.379830(-1)	8.412644(-1)
0.0	8.262747(-1)	8.251999(-1)	8.243344(-1)	8.280955(-1)
0.2	8.123686(-1)	8.111094(-1)	8.102984(-1)	8.147149(-1)
0.4	7.978278(-1)	7.962223(-1)	7.953033(-1)	8.008446(-1)
0.6	7.820834(-1)	7.797970(-1)	7.784163(-1)	7.860571(-1)
0.8	7.638952(-1)	7.601736(-1)	7.574817(-1)	7.694414(-1)
1.0	7.363672(-1)	7.276523(-1)	7.190814(-1)	7.461547(-1)

Tabela 4.75: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	2.445790(-1)	2.116305(-1)	2.282948(-1)	1.775319(-1)
-0.8	1.750112(-1)	1.477516(-1)	1.536278(-1)	1.307193(-1)
-0.6	1.259128(-1)	1.052350(-1)	1.080374(-1)	9.492077(-2)
-0.4	8.203144(-2)	6.816291(-2)	6.949537(-2)	6.214157(-2)
-0.2	4.052250(-2)	3.356672(-2)	3.409971(-2)	3.077338(-2)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	-4.052250(-2)	-3.356672(-2)	-3.409971(-2)	-3.077338(-2)
0.4	-8.203144(-2)	-6.816291(-2)	-6.949537(-2)	-6.214157(-2)
0.6	-1.259128(-1)	-1.052350(-1)	-1.080374(-1)	-9.492077(-2)
0.8	-1.750112(-1)	-1.477516(-1)	-1.536278(-1)	-1.307193(-1)
1.0	-2.445790(-1)	-2.116305(-1)	-2.282948(-1)	-1.775319(-1)

Tabela 4.76: Perturbação de temperatura $T(\tau)$ para o caso VI com $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ/a	BGK	S	GJ	MRS
-1.0	2.445790(-1)	2.595547(-1)	2.735947(-1)	2.278491(-1)
-0.8	1.750112(-1)	1.796699(-1)	1.818409(-1)	1.671744(-1)
-0.6	1.259128(-1)	1.278116(-1)	1.276851(-1)	1.213260(-1)
-0.4	8.203144(-2)	8.276234(-2)	8.211561(-2)	7.941731(-2)
-0.2	4.052250(-2)	4.075464(-2)	4.029467(-2)	3.932763(-2)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	-4.052250(-2)	-4.075464(-2)	-4.029467(-2)	-3.932763(-2)
0.4	-8.203144(-2)	-8.276234(-2)	-8.211561(-2)	-7.941731(-2)
0.6	-1.259128(-1)	-1.278116(-1)	-1.276851(-1)	-1.213260(-1)
0.8	-1.750112(-1)	-1.796699(-1)	-1.818409(-1)	-1.671744(-1)
1.0	-2.445790(-1)	-2.595547(-1)	-2.735947(-1)	-2.278491(-1)

Assim como foi feito para os outros problemas, gráficos foram gerados considerando as tabelas apresentadas como forma de auxiliar a análise do comportamento dos perfis frente à modificação de certos parâmetros. Para a geração destes perfis o modelo utilizado foi o **S**, devido a sua proximidade com a **ELB**.

Com relação ao parâmetro ε , usou-se na geração das Figs. 4.22 e 4.23 as Tabs. 4.61, 4.62, 4.65 e 4.66 para ilustrar a influência deste parâmetro nos perfis $N(\tau)$ e $T(\tau)$. Com o uso destas figuras, foi mais fácil verificar que os perfis gerados a partir de $\varepsilon = \varepsilon_t$ são mais próximos entre si, principalmente se o perfil gerado a partir do modelo **BGK** for usado como referência. E este comportamento é observado em todos os casos, tanto para a perturbação de densidade quanto para a perturbação de temperatura.

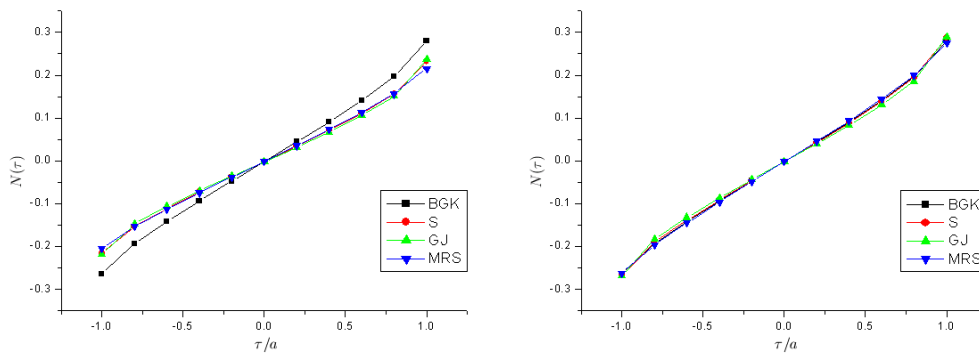


Figura 4.22: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de perturbação de densidade no problema de Transferência de Calor.

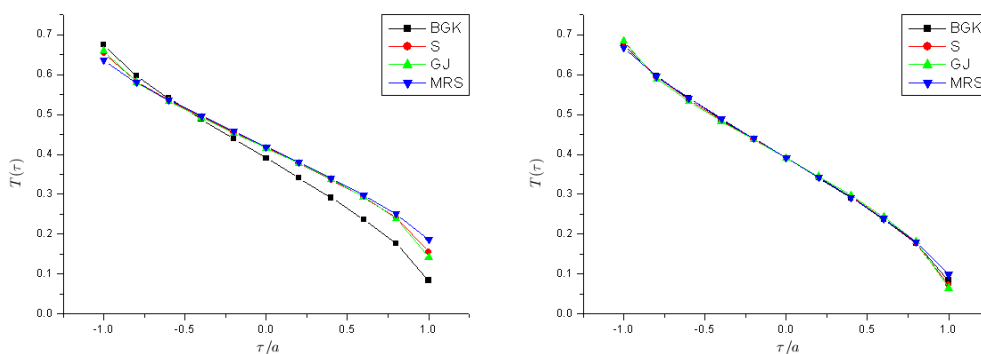


Figura 4.23: Efeitos que a variação do parâmetro ε causa aos perfis de perturbação de temperatura no problema de Transferência de Calor.

Para a avaliação da influência do parâmetro α nos perfis de perturbação de densidade e de temperatura, a Fig. 4.24 foi obtida a partir das Tabs. 4.62, 4.66, 4.70, 4.72, 4.74 e 4.66, de onde se verifica que quanto menor a diferença entre α_1 e α_2 , maiores são as variações de $N(\tau)$ e $T(\tau)$. Além disso, foi observado que $N(\tau)$ (considerando $\alpha_1 = 0.7$ e $\alpha_2 = 0.3$) é igual a $-N(-\tau)$ (considerando $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0.7$). Também foi verificado que, apesar da variação da perturbação de temperatura ser a mesma usando $\alpha_1 = 0.7$ e $\alpha_2 = 0.3$ ou o contrário, os valores obtidos para $T(\tau)$ são maiores quando o maior α é utilizado na parede mais quente.

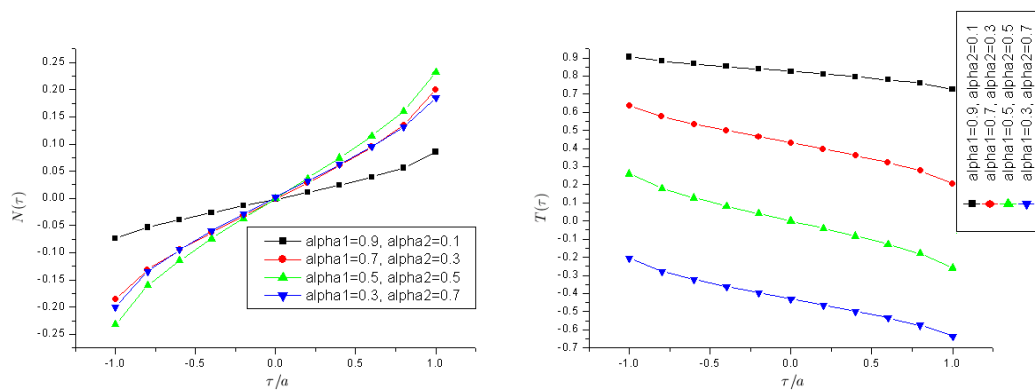


Figura 4.24: Efeitos que a variação dos coeficientes de acomodação α_1 e α_2 causam aos perfis de perturbação de densidade e temperatura no problema de Transferência de Calor.

Para a análise gráfica do efeito da variação da largura do canal $2a$ nos perfis de perturbação de densidade e de temperatura, a Fig. 4.25 foi gerada a partir das Tabs. 4.54, 4.58, 4.62 e 4.66. Com o uso desta figura foi possível verificar que com o aumento da largura do canal também ocorre um aumento da variação dos perfis $N(\tau)$ e $T(\tau)$. Além disso, verifica-se que a variação da perturbação de densidade é mínima no centro do duto para qualquer largura de canal, enquanto que no gráfico da perturbação de temperatura, o ponto de intersecção dos três perfis se encontra mais próximo de $\tau/a = -1.0$ pois é nesta parede que a temperatura e o coeficiente de acomodação são maiores (aumentando o valor de α_1 esse ponto de intersecção tenderia a ser mais próximo ainda da parede).

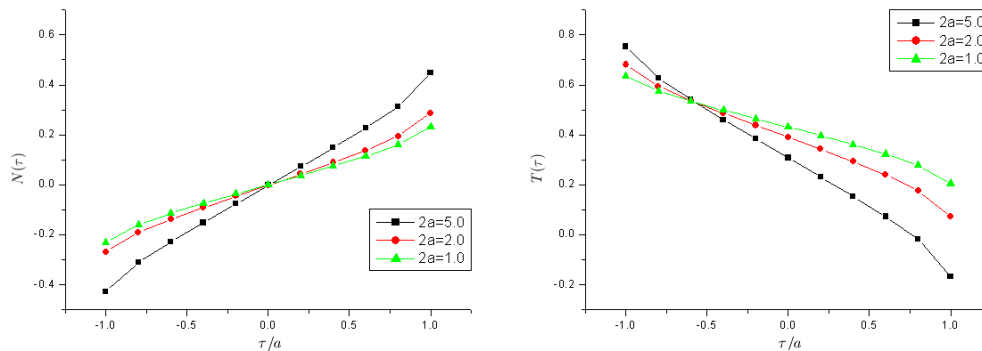


Figura 4.25: Efeitos que a variação da largura do canal $2a$ causa aos perfis de perturbação de densidade e temperatura no problema de Transferência de Calor.

Com relação aos efeitos da variação da temperatura na parede, obteve-se a Fig. 4.26 a partir das Tabs. 4.62, 4.64, 4.66 e 4.68, de onde verificou-se que quanto maior a temperatura δ_1 , maiores são as variações de $N(\tau)$ e $T(\tau)$. Além disso, é possível verificar que quanto maior o valor de δ_1 , maiores são os valores obtidos para o perfil de $T(\tau)$.

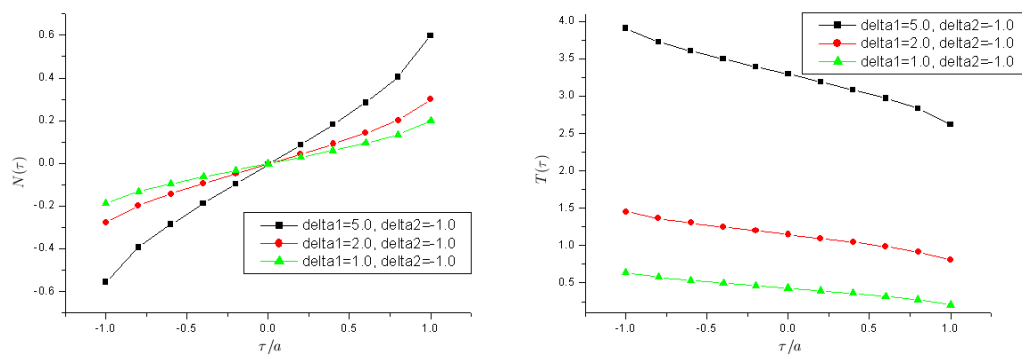


Figura 4.26: Efeitos que a variação da temperatura δ_1 causa aos perfis de perturbação de densidade e temperatura no problema de Transferência de Calor.

Com relação a Tab. 4.77, é verificado que os resultados obtidos a partir dos modelos cinéticos são mais próximos entre si utilizando $\varepsilon = \varepsilon_t$. Além disso, pode ser observado que as maiores concordâncias foram obtida entre os modelos **S** e **Gross-Jackson** (chegando a três dígitos para o Caso II utilizando ε_t) e entre os modelos **BGK** e **MRS** (chegando a dois dígitos para os Casos I à V utilizando ε_t). Com relação a **ELB**, o modelo que se mostrou mais próximo foi o **BGK**, apresentando uma concordância de até três dígitos (Caso V para ε_t).

Tabela 4.77: Fluxo de calor normalizado q para os casos I à VI.

Casos	ε	BGK[97]	S[97]	GJ[97]	MRS	ELB [117]
I	ε_p	7.722926(-1)	8.231404(-1)	8.177086(-1)	8.354383(-1)	-
I	ε_t	7.722926(-1)	7.677320(-1)	7.640570(-1)	7.777936(-1)	7.75502(-1)
II	ε_p	4.472267(-1)	5.376703(-1)	5.363627(-1)	5.428485(-1)	-
II	ε_t	4.472267(-1)	4.465040(-1)	4.460350(-1)	4.488278(-1)	-
III	ε_p	8.622379(-1)	8.930329(-1)	8.858598(-1)	9.059575(-1)	-
III	ε_t	8.622379(-1)	8.556544(-1)	8.492411(-1)	8.687018(-1)	8.61658(-1)
IV	ε_p	8.622379(-1)	8.930329(-1)	8.858598(-1)	9.059575(-1)	-
IV	ε_t	8.622379(-1)	8.556544(-1)	8.492411(-1)	8.687018(-1)	8.61658(-1)
V ³	ε_p	9.435911(-1)	9.570281(-1)	9.538968(-1)	9.626274(-1)	-
V ³	ε_t	9.435911(-1)	9.406100(-1)	9.376895(-1)	9.465221(-1)	9.43315(-1)
VI ³	ε_p	8.333606(-1)	8.697085(-1)	8.612374(-1)	8.850121(-1)	-
VI ³	ε_t	8.333606(-1)	8.256886(-1)	8.182300(-1)	8.408886(-1)	-

Segundo Scherer [97], o fato do fluxo de calor normalizado q não depender da temperatura das paredes se deve a característica do fluxo de calor Q_x dado pela Eq. 3.150 ser proporcional a diferença de temperatura entre as paredes do canal, concordando com a lei de Fourier para difusão [133]. Para o fluxo de calor em moléculas livres Q_{fm} dado pela Eq. 3.154 também tem-se a mesma proporcionalidade, fazendo com que o termo $(\delta_1 - \delta_2)$ presente em Q_x e Q_{fm} seja cancelado na Eq. 3.153, resultando no fluxo de calor normalizado q que independe da temperatura das paredes.

³Este caso não consta na Ref. [97].

5 COMENTÁRIOS FINAIS

Com este trabalho, foi possível investigar a utilização de um método espectral, o método ADO, no tratamento de equações cinéticas de gases rarefeitos para diferentes modelos cinéticos utilizando condições de contorno do tipo difuso-especular.

O método ADO mostrou-se muito eficiente, uma vez que foi possível utilizá-lo na resolução de uma ampla classe de problemas, principalmente por auxiliar na construção de soluções unificadas para os diferentes modelos cinéticos. Também foi possível obter-se resultados com uma precisão de até sete dígitos significativos, sendo a variável espacial trabalhada analiticamente em todas as quantidades de interesse avaliadas aqui.

De modo geral, os modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** mostraram ser boas alternativas no que diz respeito à aproximar o núcleo de colisão da **ELB**. Além disso, a solução unificada, obtida pelo método de ordenadas discretas analítico para os diferentes modelos cinéticos, é concisa e de fácil implementação computacional. Também verificou-se por essa metodologia a relação de Onsager, onde tem-se que $Q_P = U_T$ (Tabs. A.8 à A.10).

Contudo, não é possível eleger um modelo como o melhor em todas as situações (comparando com a **ELB**). O que foi observado é que para cada problema um modelo pode mostrar um melhor desempenho do que outro (conforme Tab. 5.1).

Tabela 5.1: Tabela Comparativa: Modelo \times ELB.

Problema	Método
Fluxo de Couette	MRS
Fluxo de Poiseuille	GJ
Creep Térmico	GJ
Deslizamento Térmico	MRS
Deslizamento Viscoso	MRS
Transferência de Calor	S

Apesar de alguns resultados obtidos apontarem o modelo **CES** como a melhor aproximação da **ELB** para alguns problemas, o grande esforço computacional que a sua implementação envolve e a avaliação de algumas equações integrais não justificam seu uso, isso porque ganho constatado foi de no máximo um dígito significativo com relação aos outros modelos cinéticos.

Outro aspecto importante a ser salientado com base nos resultados obtidos, é a influência de certos parâmetros nas quantidades de interesse. Com relação ao parâmetro ε foi observado que, com exceção dos problemas de Deslizamento Viscoso e de Fluxo de Couette, os perfis gerados a partir dos modelos **BGK**, **S**, **Gross-Jackson** e **MRS** tendem a ser muito mais próximos entre si quando utilizado o parâmetro ε_t . Além disso, os modelos **Gross-Jackson** e **MRS** apresentaram um melhor desempenho, independente do parâmetro ε .

Dentre outros parâmetros, também investigou-se os efeitos de superfície causados pelo coeficiente de acomodação. Para problemas como os de Fluxo de Poiseuille e de *Creep* Térmico por exemplo, verificou-se que quanto menor o valor de α , menores são os efeitos da superfície no centro do duto (efeitos difusivos), fazendo com que o fluxo atinja velocidades cada vez maiores. Efeitos semelhantes são observados se, invés de diminuir o valor de α , é aumentada a largura do canal. Claro que os efeitos destes parâmetros dependem da natureza do problema. Para problemas como o de Fluxo de Couette por exemplo, verifica-se que tanto o aumento do valor de α quanto o aumento da largura do canal contribuem para o aumento da variação dos perfis de velocidade.

Assim, pode-se considerar que o objetivo deste trabalho foi alcançado, uma vez que foram obtidas soluções em ordenadas discretas de forma unificada para os problemas aqui trabalhados. Também como contribuição, conseguiu-se resolver problemas da dinâmica de gases rarefeitos, fornecendo resultados ainda não existentes na literatura, utilizando os modelos **Gross-Jackson** e **MRS**. Além disso, iniciou-se

a discussão à respeito do método de lattice Boltzmann, incentivando a aplicação da equação de Boltzmann para problemas em CFD.

Como continuidade dos trabalhos realizados até agora, deseja-se trabalhar no desenvolvimento de soluções para modelos cinéticos não-lineares ou multidimensionais em RGD via métodos espectrais.

Bibliografia

- [1] Alves, A. S., Discrete models of fluid dynamics, **World Scientific**, Singapura, 1991.
- [2] Barichello, L. B., Siewert, C. E., A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution, **JQSRT**, vol. 62, pp. 665-675, 1999.
- [3] Barichello, L. B., Siewert, C. E., The temperature-jump problem in rarefied-gas dynamics, **European Journal of Applied Mathematics**, vol. 11, pp. 353-364, 2000.
- [4] Barichello, L. B., Siewert, C. E., Some comments on modeling the linearized Boltzmann Equation, **JQSRT**, vol. 77, pp. 43-59, 2003.
- [5] Barichello, L. B., Cabrera, L. C., Golbert, D. R., Kamphorst, C., Prolo, J. F., Reichert, J. T., Scherer, C. S., Micro and nanoflows: An analysis based on the Boltzmann equation, 1^a Mostra de Nanociência e Nanotecnologia da UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- [6] Barichello, L. B., Camargo, M., Rodrigues, P., Siewert, C. E., Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model, **Z. Angew. Math. Phys.**, vol. 52, pp. 517-534, 2001.
- [7] Benzi, R., Succi, S., Vergassola, M., The lattice Boltzmann equation: Theory and applications, **Phys. Rep.**, vol. 222, pp. 145-197, 1992.
- [8] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., Krook, M. A., A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, **Phys. Rev.**, vol. 94, pp. 511-525, 1954.

- [9] Boghosian, B. M., Proceedings of the 7th international conference on the discrete simulation of fluids, **Int. J. Mod. Phys. C**, vol. 9, pp. 1123-1617, 1998.
- [10] Boghosian, B. M., Alexander, F. J., Coveney, P. V., Proceedings of 1996 conference on discrete models for fluid mechanics, **Int. J. Mod. Phys. C**, vol. 8, pp. 637-1011, 1997.
- [11] Boltzmann, L., Weitere Studien über das wärme Gleichgewicht unter gasmolekülen, **Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften**, vol. 60, pp. 275-376, 1872.
- [12] Broadwell, J. E., Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method, **J. Fluid. Mech.**, vol. 19, pp. 401-414, 1964.
- [13] Broadwell, J. E., Shock structure in a simple discrete velocity gas, **Phys. Fluids**, vol. 7, pp. 1243-1247, 1964.
- [14] Burden, R. L., Faires, J. D., Numerical analysis, **Brooks/Cole Publishing Company**, Boston, 1997.
- [15] Cabrera, L. C., Derivação e solução de equações modelo da dinâmica de gases rarefeitos, Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- [16] Cabrera, L. C., Barichello, L. B., Unified solutions to some classical problems in rarefied gas dynamics based on the one-dimensional linearized S-model equations, **Z. Angew. Math. Phys.**, vol. 57, pp. 285-312, 2006.
- [17] Camargo, M., Soluções unificadas para modelos com frequência de colisão variável da dinâmica de gases rarefeitos, Tese de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2003.

- [18] Camargo, M., Barichello, L. B., Unified approach for variable collision frequency models in rarefied gas dynamics, **TTSP**, vol. 33, pp. 227-260, 2004.
- [19] Case, K. M., Elementary solutions of the transport equation and their applications, **Annals of Physics**, vol. 9, pp. 1-23, 1960.
- [20] Cercignani, C., The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency, **Annals of Physics**, vol. 40, pp. 469-481, 1966.
- [21] Cercignani, C., Theory and application of the Boltzmann equation, **Elsevier**, New York, 1975.
- [22] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications. **Springer-Verlag**, New York, 1988.
- [23] Cercignani, C., Mathematical methods in kinetic theory, **Plenum Press**, New York, 1990.
- [24] Cercignani, C., Ludwig Boltzmann, the man who trusted atoms, **University of Milan**, Italy, 1998.
- [25] Cercignani, C., Rarefied gas dynamics, Cambridge Texts in Applications Mathematics, **Cambridge University Press**, 2000.
- [26] Cercignani, C., Illner, R., Pulvirenti, M., The mathematical theory of dilute gases, **Springer**, 1994.
- [27] Chandrasekhar, S., Radiative transfer, **Oxford University Press**, London, 1950.
- [28] Chapman, S., Cowling, T. G., The mathematical theory of non-uniform gases, **Cambridge University Press**, 1970.

- [29] Chen, H., Chen, S., Matthaeus, W. H., Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method, **Phys. Rev. A**, vol. 45, pp. R5339-R5342, 1992.
- [30] Chen, S., Doolen, G. D., Lattice Boltzmann method for fluid flows, **Annu. Rev. Fluid Mech.**, vol. 30, pp. 329-364, 1998.
- [31] Chen, S., Dawson, S. P., Doolen, G. D., Janecky, D. R., Lawniczak, A., Lattice methods and their applications to reacting systems, **Comput. Chem. Eng.**, vol. 19, pp. 617-646, 1995.
- [32] Chen, S., Chen, H., Martínez, D., Matthaeus, W. H., Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics, **Phys. Rev. Lett.**, vol. 67, pp. 3776-3779, 1991.
- [33] Colin, S., Aubert, C., Caen, R., Unsteady gaseous flows in rectangular microchannels: frequency response of one or two pneumatic lines connected in series, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 17, pp. 79-104, 1998.
- [34] Cooper, J., Introduction to partial differential equation with MATLAB, **Birkhäuser**, Boston, 1998.
- [35] Dongarra, J. J., Bunch, J. R., Moler, C. B., Stewart, G. W., LINPACK user's guide, **SIAM**, Philadelphia, 1979.
- [36] Doolen, G. D., Proceedings of workshop on large nonlinear systems, **Complex Systems**, vol. 1, pp. 545-851, 1987.
- [37] Doolen, G. D., Lattice gas methods for partial differential equations, **Addison-Wesley**, California, 1990.
- [38] Doolen, G. D., Lattice gas method: Theory, applications, and hardware, **Physica D**, vol. 47, pp. 1-339, 1991.

- [39] Fatikow, S., Rembold, U., *Microsystem technology and microrobotics*, **Springer**, New York, 1997.
- [40] Filippova, O., Hänel, D., A novel lattice BGK approach for low mach number combustion, **J. Comput. Phys.**, vol. 158, pp. 139-160, 2000.
- [41] Frisch, U., Hasslacher, B., Pomeau, Y., Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation, **Phys. Rev. Lett.**, vol. 56, pp. 1505-1508, 1986.
- [42] Gad-el-Hak, M., *The MEMS handbook: introduction and fundamentals*, **CRC Press**, 2006.
- [43] Garcia, R. D. M., Métodos para solução da equação de transporte de partículas integro-diferencial, Escola de Verão em Teoria de Transporte de Partículas Neutras, Puc - Porto Alegre - RS, 2002.
- [44] Garcia, R. D. M., Siewert, C. E., The McCormack model for gas mixtures: Heat transfer in a microtube, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 40, pp. 3251-, 2004.
- [45] Garcia, R. D. M., Siewert, C. E., The McCormack model for gas mixtures: Heat transfer in a plane channel, **Physics of Fluids**, vol. 16, pp. 3393-3402, 2004.
- [46] Garcia, R. D. M., Siewert, C. E., The linearized Boltzmann equation: Sound-wave propagation in a rarefied gas, **Z. Angew. Math. Phys.**, vol. 57, pp. 94-122, 2006.
- [47] Ginzbourg, I., Adler, P. M., Boundary flow condition analysis for the three-dimensional lattice Boltzmann model, **J. Phys. II France**, vol. 4, pp. 191-214, 1994.
- [48] Gravesen, P., Branebjerg, J., Jensen, O. S., Microfluidics: A review, **Journal of Micromechanics Microengineering**, vol. 3, pp. 168-182, 1993.

- [49] Gross, E. P., Recent investigations of the Boltzmann equation, Rarefied Gas Dynamics, Proceedings of the First International Symposium held at Nice, **Pergamon Press**, New York, pp. 139, 1960.
- [50] Gross, E. P., Jackson, E. A., Kinetic models and the linearized Boltzmann equation. **The Physics of Fluids**, vol. 2, pp. 432-441, 1959.
- [51] Hardy, J., Pomeau, Y., Pazzis, O., Time evolution of a two-dimensional classical lattice system, **Phys. Rev. Lett.**, vol. 31, pp. 276-279, 1973.
- [52] Hardy, J., Pomeau, Y., Pazzis, O., Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions, **J. Math. Phys.**, vol. 14, pp. 1746-1759, 1973.
- [53] He, X., Chen, S., Zhang, R., A lattice Boltzmann scheme for incompressible multiphase flow and its applications in simulation of Rayleigh-Taylor instability, **J. Comput. Phys.**, vol. 146, pp. 282-300, 1999.
- [54] He, X., Luo, L. S., Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation, **Phys. Rev. E**, vol. 56, pp. 6811-6817, 1997.
- [55] He, X., Zhang, R., Chen, S., Doolen, G. D., On the three-dimensional Rayleigh-Taylor instability, **Phys. Fluids**, vol. 11, pp. 1143-1152, 1999.
- [56] Henon, M., Viscosity of a lattice gas, **Complex Systems**, vol. 1, pp. 763-789, 1987.
- [57] Higuera, F. J., Succi, S., Benzi, R., Lattice gas-dynamics with enhanced collisions, **Europhys. Lett.**, vol. 9, pp. 345-349, 1989.
- [58] Hunter, R. J., Zeta potential in colloid science: principles and applications, **Academic Press**, London, 1981.

- [59] Jeans, J. H., The equations of radiative transfer of energy, **Mon. Not. Royal Astron. Soc.**, vol. 78, pp. 28-36, 1917.
- [60] Kennard, E. H., Kinetic theory of gases, **McGraw-Hill Book Company**, New York, 1938.
- [61] Knackfuss, R. F., Efeitos de superfície na dinâmica de gases rarefeitos: uma análise baseada no núcleo de espalhamento de Cercignani-Lampis, Tese de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2005.
- [62] Knackfuss, R. F., Barichello, L. B., On the temperature-jump problem in rarefied gas dynamics: The effect of the Cercignani-Lampis boundary condition, **Siam J. Appl. Math.**, vol. 66, pp. 2149-2186, 2006.
- [63] Koleman, J. M. V. A., A simple lattice Boltzmann scheme for Navier-Stokes fluid flow, **Europhys. Lett.**, vol. 15, pp. 603-607, 1991.
- [64] Lawniczak, A. T., Kapral, R., Pattern formation and lattice gas automata, **Fields Inst. Commun.**, vol. 6, pp. 1-346, 1996.
- [65] Lebowitz, J. L., Orszag, S. A., Qian, Y. H., Special issue on lattice-based models and related topics, **J. Stat. Phys.**, vol. 81, pp. 1-2, 1995.
- [66] Lebowitz, J. L., Orszag, S. A., Qian, Y. H., Proceedings of the 5th international conference on discrete models for fluid mechanics, **J. Stat. Phys.**, vol. 81, pp. 1-538, 1995.
- [67] Levermore, C. D., Moment closure hierarchies for kinetic theories, **J. Stat. Phys.**, vol. 83, pp. 1021-1065, 1996.
- [68] Liboff, R. L., Kinetic theory, **Prentice Hall**, New Jersey, 1990.

- [69] Liu, J. Q., Tai, Y. C., Pong, K. C., Ho, C. M., Micromachined channel/pressure sensor systems for micro flow studies, **Proc. 7th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators** (Transducer'93), pp. 995-997, 1993.
- [70] Lo, S. S., Loyalka, S. K., Storvick, T. S., Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. V. Flow of polyatomic gases in a cylindrical tube with arbitrary accommodation at the surface, **J. Chem. Phys.**, vol. 81, pp. 2439-2449, 1984.
- [71] Lord, R. G., Tangential momentum accommodation coefficients of rare gases on polycrystalline metal surfaces, **10th Symposium in Rarefied Gas Dynamics**, Nova York, pp. 531-538, 1976.
- [72] Loyalka, S. K., Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. I, **J. Chem. Phys.**, vol. 55, pp. 4497-4503, 1971.
- [73] Loyalka, S. K., Ferziger, J. H., Model dependence of the slip coefficient, **Physics of Fluids**, vol. 10, pp. 1833-1938, 1967.
- [74] Loyalka, S. K., Ferziger, J. H., Model dependence of the temperature slip coefficient, **Physics of Fluids**, vol. 11, pp. 1668-1671, 1968.
- [75] Loyalka, S. K., Hickey, K. A., Plane Poiseuille flow: Near continuum results for a rigid sphere gas, **Physica A**, vol. 160, pp. 395-408, 1989.
- [76] Luo, L. S., The lattice-gas and lattice Boltzmann methods: past, present and future, **The 4th International Conference on Applied Computational Fluid Dynamics**, pp. 52-83, 2000.
- [77] Luo, L. S., Chen, H., Chen, S., Doolen, G. D., Lee, Y. C., Generalized hydrodynamic transport in lattice-gas automata, **Phys. Rev. A**, vol. 43, pp. 7097-7100, 1991.

- [78] McCormack, F. J., Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases, **The Physics of Fluids**, vol. 16, pp. 2095-2105, 1973.
- [79] McNamara, G., Alder, B. J., Analysis of the lattice Boltzmann treatment of hydrodynamics, **Physica A**, vol. 194, pp. 218-228, 1993.
- [80] McNamara, G., Garcia, A. L., Alder, B. J., Stabilization of thermal lattice Boltzmann models, **J. Stat. Phys.**, vol. 81, pp. 395-408, 1995.
- [81] McNamara, G., Zanetti, G., Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata, **Phys. Rev. Lett.**, vol. 61, pp. 2332-2335, 1988.
- [82] Meinhart, C. D., Wereley, S. T., Santiago, J. G., PIV measurements of a microchannel flow, **Exps. Fluids**, vol. 27, pp. 414-419, 1999.
- [83] Miller, W., Succi, S., Mansutti, D., A lattice Boltzmann model for anisotropic liquid/solid phase transition, **Phys. Rev. Lett.**, vol. 86, pp. 3578-3581, 2001.
- [84] Monaco, R., Proceedings of the workshop on discrete kinetic theory, lattice gas dynamics and foundations of hydrodynamics, **World Scientific**, Singapura, 1989.
- [85] Monaco, R., Preziosi, L., Fluid dynamics applications of the discrete Boltzmann equation, **World Scientific**, Singapura, 1991.
- [86] Paiva, M. F., Philippi, P. C., Simulação de escoamentos de fluidos imiscíveis usando lattice Boltzmann, Relatório de Iniciação Científica, 2005.
- [87] Pekeris, C. L., Alterman, Z., Solution of the Boltzmann-Hilbert integral equation. II. The coefficients for viscosity and heat conduction, **Processing National Academic Science**, vol. 43, pp. 998-1007, 1957.

- [88] Pol, F. C. M. V. D., Branebjerg, J., Micro liquid-handling devices: A review, **MST**, Berlin, 1990.
- [89] Pong, K. C., Ho, C. M., Liu, J. Q., Tai, Y. C., Non-linear pressure distribution in uniform microchannels, **A.S.M.E. Winter Annu. Meet.**, Chicago, pp. 51-56, 1994.
- [90] Qi, D., Non-spherical colloidal suspensions in three-dimensional space, **Int. J. Mod. Phys. C**, vol. 8, pp. 985-997, 1998.
- [91] Qi, D., Lattice Boltzmann simulations of particles in nonzero Reynolds number flows, **J. Fluid Mech.**, vol. 385, pp. 41-62, 1999.
- [92] Qi, D., Joyce, M., Fleming, D., Analysis of microstructure of coating suspensions, **Powder Tech.**, vol. 104, pp. 50-55, 1999.
- [93] Qian, Y. H., d'Humières, D., Lallemand, P., Lattice BGK models for Navier-Stokes equation, **Europhys. Lett.**, vol. 17, pp. 479-484, 1992.
- [94] Rostami, A. A., Mujumdar, A. S., Saniei, N., Flow and heat transfer for gas flowing in microchannels: a review, **Heat and Mass Transfer**, vol. 38, pp. 359-367, 2002.
- [95] Sanchez, R., McCormick, N. J., A review of neutron transport approximations, **Nucl. Sci. Eng.**, vol. 80, pp. 481-535, 1982.
- [96] Sanders, R. H., Prendergast, K. H., The possible relation of the 3-kiloparsec arm to explosions in the galactic nucleus, **Astrophys. J.**, vol. 188, pp. 489-500, 1974.
- [97] Scherer, C. S., Modelos cinéticos da equação linearizada de Boltzmann em um problema de transferência de calor em microescala, Dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2005.

- [98] Scherer, C. S., Prolo Filho, J. F., Barichello, L. B., An analytical approach to the unified solution of kinetic equations in the rarefied gas dynamics, em preparação.
- [99] Schuster, A., Radiation through a foggy atmosphere, **Astrophysics**, vol. 21, pp. 1-, 1905.
- [100] Schwarzschild, K., Über das gleichgewicht der sonnenatmosphäre, **Göttinger Nachrichten Math.-Phys. Klasse**, vol. 1, pp. 41-53, 1906.
- [101] Shakhov, E. M., Method of investigation of rarefied gas flows. **Nauka**, Moscow, 1974.
- [102] Sharipov, F., Rarefied gas flow through a long rectangular channel, **Journal of Vacuum Science and Technology A**, vol. 17, pp. 3062-3066, 1999.
- [103] Sharipov, F., Application of Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flow. I. Plane flow between two parallel plates, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 21, pp. 113-123, 2002.
- [104] Sharipov, F., Application of Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flow. II. Slip and jump coefficients, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 22, pp. 133-143, 2003.
- [105] Sharipov, F., Seleznev, V., Data on internal gas flows, **J. Phys. Chem. Ref. Data**, vol. 27, pp. 657-706, 1998.
- [106] Shih, J. C., Ho, C. M., Liu, J., Tai, Y. C., Monoatomic and polyatomic gas flow through uniform microchannels, **National Heat Transfer Conference**, vol. 59, pp. 197-203, 1996.
- [107] Shoji, S., Eshashi, M., Microflow devices and systems, **Journal of Micromechanics Microengineering**, vol. 4, pp. 157-171, 1994.

- [108] Smith, B. T., Boyle, J. M., Dongarra, J. J., Garbow, B. S., Ikebe, Y., Klema, V. C., Moler, C. B., Matrix eigensystem routines - EISPACK guide, **Springer-Verlag**, Berlin, 1976.
- [109] Siewert, C. E., A discrete-ordinates solution for heat transfer in a plane channel, **Journal of Computational Physics**, vol. 152, pp. 251-263, 1999.
- [110] Siewert, C. E., A concise and accurate solution to Chandrasekhar's basic problem in radiative transfer, **JQSRT**, vol. 64, pp. 109-130, 2000.
- [111] Siewert, C. E., Poiseuille and thermal-creep flow in a cylindrical tube, **Journal Computational Physics**, vol. 160, pp. 470-480, 2000.
- [112] Siewert, C. E., Couette flow for a binary gas mixture, **JQSRT**, vol. 70, pp. 321-332, 2001.
- [113] Siewert, C. E., Kramers problem for a variable collision frequency model. **European Journal of Applied Mathematics**, vol. 12, pp. 179-191, 2001.
- [114] Siewert, C. E., Generalized boundary conditions for the S-model kinetic equations basic to flow in a plane channel, **JQSRT**, vol. 72, pp. 75-88, 2002.
- [115] Siewert, C. E., Poiseuille, thermal creep and Couette flow: results based on the CES model of the linearized Boltzmann equation, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 21, pp.579-597, 2002.
- [116] Siewert, C. E., Two half-space problems based on a synthetic-kernel model of the linearized Boltzmann equation, **JQSRT**, vol. 75, pp. 21-38, 2002.
- [117] Siewert, C. E., Heat transfer and evaporation/condensations problems based on the linearized Boltzmann equation, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 22, pp. 391-408, 2003.

- [118] Siewert, C. E., The linearized Boltzmann equation: A concise and accurate solution of the temperature-jump problem, **JQSRT**, vol. 77, pp. 417-432, 2003.
- [119] Siewert, C. E., The linearized Boltzmann equation: Concise and accurate solution to basic flow problems, **Z. Angew. Math. Phys.**, vol. 54, pp. 273-303, 2003.
- [120] Siewert, C. E., Viscous-slip, thermal-slip and temperature jump coefficients as defined by linearized Boltzmann equation and the Cercignani-Lampis boundary conditions, **Physics of Fluids**, vol. 15, pp. 1696-1701, 2003.
- [121] Siewert, C. E., The temperature-jump problem based on the CES model of the linearized Boltzmann equation, **Z. Angew. Math. Phys.**, vol. 55, pp. 92-104, 2004.
- [122] Siewert, C. E., The McCormack model for gas mixture: The temperature-jump problem, **Z. Angew. Math. Phys.**, vol. 56, pp. 273-292, 2005.
- [123] Siewert, C. E., Valougeorgis, D., An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube, **JQSRT**, vol. 72, pp. 531-550, 2002.
- [124] Siewert, C. E., Valougeorgis, D., Concise and accurate solutions to half-space binary-gas flow problems defined by the McCormack model and specular-diffuse wall conditions, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 23, pp. 709-726, 2004.
- [125] Siewert, C. E., Valougeorgis, D., The McCormack model: Channel flow of a binary gas mixture driven by temperature, pressure and density gradients, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 23, pp. 645-664, 2004.

- [126] Siewert, C. E., Sharipov, F., Model equations in rarefied gas dynamics: Viscous-slip and thermal slip coefficients, **Physics of Fluids**, vol. 14, pp. 4123-4129, 2002.
- [127] Sone, Y., Ohwada, T., Aoki, K., Temperature jump and Knudsen layer in a rarefied gas over a plane wall: Numerical analysis of the linearized Boltzmann equation of hard-sphere molecules, **Physics of Fluids A**, vol. 1, pp. 363-370, 1989.
- [128] Sone, Y., Takata, S., Ohwada, T., Numerical analysis of the plane couette flow of rarefied gas on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 9, pp. 273-288, 1990.
- [129] Stokes, V. K., Theories of fluids with microstructure, **Springer**, New York, 1984.
- [130] Strumolo, G., Viswanathan, B., New directions in computational aerodynamics, **Physics World**, vol. 10, pp. 45-49, 1997.
- [131] Succi, S., Amati, G., Benzi, R., Challenges in lattice Boltzmann computing, **J. Stat. Phys.**, vol. 81, pp. 5-16, 1995.
- [132] Wick, G. C., Über ebene diffusions problem, **Zeitschrift für Physik**, vol. 120, pp. 702-718, 1943.
- [133] Williams, M. M. R., Mathematical methods in particle transport theory, **Butterworth**, London, 1971.
- [134] Williams, M. M. R., A review of the rarefied gas dynamics theory associated with some classical problems in flow and heat transfer, **Z. Angew. Math. Phys.**, vol. 52, pp. 500-516, 2001.

- [135] Wolf, F. G., Santos, L. O. E., Philippi, P. C., Formação e dinâmica da interface líquido-vapor simulada pelo método lattice Boltzmann, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n°. 2, pp. 167-175, 2006.
- [136] Zohar, Y., Lee, S. Y. K., Lee, W. Y., Jiang, L., Tong, P., Subsonic gas flow in a straight and uniform microchannel, **J. Fluid Mech.**, vol. 472, pp. 125-151, 2002.
- [137] Zou, Q., Hou, S., Doolen, G. D., Analytical solutions of the lattice Boltzmann BGK model, **Journal of Statistical Physics**, vol. 81, pp. 319-334, 1995.

Apêndice A DEMAIS RESULTADOS

A.1 Fluxo de Poiseuille

Tabela A.1: Fluxo de Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.0	-1.874577	-1.895706	-1.861204	-2.000217
0.1	-1.867059	-1.888047	-1.853723	-1.992353
0.2	-1.844401	-1.864966	-1.831166	-1.968674
0.3	-1.806271	-1.826129	-1.793173	-1.928899
0.4	-1.752062	-1.770921	-1.739081	-1.872518
0.5	-1.680778	-1.698341	-1.667801	-1.798703
0.6	-1.590822	-1.606779	-1.577562	-1.706142
0.7	-1.479519	-1.493545	-1.465374	-1.592675
0.8	-1.341927	-1.353676	-1.325622	-1.454395
0.9	-1.166756	-1.175838	-1.145204	-1.282629
1.0	-8.939247(-1)	-8.996835(-1)	-8.512282(-1)	-1.033696

Tabela A.2: Fluxo de Poiseuille; perfil de velocidade $u_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.0	-2.319616	-2.341697	-2.307505	-2.459851
0.1	-2.312148	-2.334097	-2.300041	-2.452141
0.2	-2.289638	-2.311191	-2.277535	-2.428924
0.3	-2.251759	-2.272647	-2.239620	-2.389936
0.4	-2.197901	-2.217854	-2.185620	-2.334693
0.5	-2.127072	-2.145810	-2.114422	-2.262412
0.6	-2.037666	-2.054903	-2.024209	-2.171846
0.7	-1.926991	-1.942425	-1.911895	-2.060938
0.8	-1.790039	-1.803354	-1.771645	-1.925961
0.9	-1.615281	-1.626121	-1.589705	-1.758594
1.0	-1.340372	-1.348126	-1.288014	-1.516546

Tabela A.3: Fluxo de Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK	S[16]	GJ	MRS
0.0	2.627695(-1)	3.466887(-1)	3.876549(-1)	2.935165(-1)
0.1	2.615106(-1)	3.449750(-1)	3.855308(-1)	2.923697(-1)
0.2	2.576815(-1)	3.397760(-1)	3.790886(-1)	2.888874(-1)
0.3	2.511166(-1)	3.309108(-1)	3.681090(-1)	2.829384(-1)
0.4	2.415118(-1)	3.180487(-1)	3.521939(-1)	2.742822(-1)
0.5	2.283701(-1)	3.006544(-1)	3.307028(-1)	2.625273(-1)
0.6	2.108920(-1)	2.778771(-1)	3.026270(-1)	2.470487(-1)
0.7	1.877404(-1)	2.483129(-1)	2.663172(-1)	2.268109(-1)
0.8	1.564446(-1)	2.094052(-1)	2.187923(-1)	1.999274(-1)
0.9	1.113588(-1)	1.553891(-1)	1.533397(-1)	1.621803(-1)
1.0	2.244345(-2)	5.576944(-2)	3.341906(-2)	9.229594(-2)

Tabela A.4: Fluxo de Poiseuille; perfil de fluxo de calor $q_P(\tau)$, $2a = 2$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ/a	BGK	S[16]	GJ	MRS
0.0	2.687023(-1)	3.593151(-1)	3.975111(-1)	3.084161(-1)
0.1	2.674682(-1)	3.576529(-1)	3.954365(-1)	3.073238(-1)
0.2	2.637136(-1)	3.526092(-1)	3.891432(-1)	3.040072(-1)
0.3	2.572737(-1)	3.440059(-1)	3.784130(-1)	2.983412(-1)
0.4	2.478449(-1)	3.315164(-1)	3.628486(-1)	2.900964(-1)
0.5	2.349301(-1)	3.146111(-1)	3.418091(-1)	2.788995(-1)
0.6	2.177275(-1)	2.924450(-1)	3.142804(-1)	2.641533(-1)
0.7	1.948898(-1)	2.636174(-1)	2.785933(-1)	2.448665(-1)
0.8	1.639141(-1)	2.255600(-1)	2.317034(-1)	2.192293(-1)
0.9	1.190348(-1)	1.724266(-1)	1.666658(-1)	1.831800(-1)
1.0	2.908039(-2)	7.269124(-2)	4.464548(-2)	1.160868(-1)

Tabela A.5: Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo U_P , $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.05	-2.302256	-2.307195	-2.145846	-2.664196	-	-
0.10	-2.032714	-2.039548	-1.901129	-2.356908	-1.9259	-1.9499
0.30	-1.702474	-1.713106	-1.616887	-1.953127	-	-
0.50	-1.601874	-1.614453	-1.538521	-1.815119	-	-
0.70	-1.559186	-1.572999	-1.509846	-1.747837	-	-
0.90	-1.541800	-1.556450	-1.502225	-1.712531	-	-
1.00	-1.538678	-1.553646	-1.502952	-1.702083	-1.4863	-1.5067
2.00	-1.594857	-1.611101	-1.579397	-1.714351	-	-
5.00	-1.990767	-2.005429	-1.986473	-2.068017	-	-
7.00	-2.294932	-2.308077	-2.291762	-2.361047	-	-
9.00	-2.609254	-2.621081	-2.606672	-2.668026	-	-

Tabela A.6: Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo U_P , $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.05	-3.089711	-3.097846	-2.871335	-3.605982
0.10	-2.707741	-2.718471	-2.528141	-3.162418
0.30	-2.244771	-2.259815	-2.133380	-2.583784
0.50	-2.102266	-2.118965	-2.022178	-2.383892
0.70	-2.038767	-2.056251	-1.977833	-2.282943
0.90	-2.009241	-2.027095	-1.961399	-2.226183
1.00	-2.001867	-2.019813	-1.959133	-2.207674
2.00	-2.041385	-2.058900	-2.025320	-2.180238
5.00	-2.438234	-2.452641	-2.437714	-2.513151
7.00	-2.746112	-2.758929	-2.747261	-2.805586
9.00	-3.063464	-3.075045	-3.065281	-3.113774

Tabela A.7: Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo U_P , $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.05	-5.223296	-5.242765	-4.852529	-6.144830	-	-
0.10	-4.556406	-4.580089	-4.266326	-5.339655	-4.3156	-4.3868
0.30	-3.778472	-3.806140	-3.615479	-4.321463	-	-
0.50	-3.544371	-3.571767	-3.433126	-3.975999	-	-
0.70	-3.437669	-3.464010	-3.356022	-3.799162	-	-
0.90	-3.383887	-3.409028	-3.321627	-3.695611	-	-
1.00	-3.368218	-3.392768	-3.313354	-3.659894	-3.2959	-3.3264
2.00	-3.376574	-3.396464	-3.359342	-3.551541	-	-
5.00	-3.774402	-3.788425	-3.779950	-3.845856	-	-
7.00	-4.088108	-4.100498	-4.096345	-4.137139	-	-
9.00	-4.410190	-4.421533	-4.419360	-4.447203	-	-

Tabela A.8: Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo de calor Q_P , $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.05	8.452893(-1)	8.726031(-1)	8.127809(-1)	1.011312(-1)	-	-
0.10	6.949271(-1)	7.326778(-1)	6.911764(-1)	8.368888(-1)	7.9087(-1)	7.9928(-1)
0.30	4.841992(-1)	5.408308(-1)	5.322607(-1)	5.819973(-1)	-	-
0.50	3.984992(-1)	4.629360(-1)	4.689861(-1)	4.760695(-1)	-	-
0.70	3.463780(-1)	4.146525(-1)	4.288656(-1)	4.118093(-1)	-	-
0.90	3.097001(-1)	3.798075(-1)	3.988653(-1)	3.669751(-1)	-	-
1.00	2.948999(-1)	3.654556(-1)	3.861453(-1)	3.490244(-1)	4.0456(-1)	3.8908(-1)
2.00	2.062428(-1)	2.740809(-1)	2.984435(-1)	2.439765(-1)	-	-
5.00	1.142597(-1)	1.639865(-1)	1.779373(-1)	1.400651(-1)	-	-
7.00	8.850228(-2)	1.295007(-1)	1.389442(-1)	1.112540(-1)	-	-
9.00	7.218664(-2)	1.068076(-1)	1.135590(-1)	9.270794(-2)	-	-

Tabela A.9: Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo de calor Q_P , $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK	S[16]	GJ	MRS
0.05	1.080865	1.126604	1.046378	1.313809
0.10	8.659804(-1)	9.262419(-1)	8.725215(-1)	1.061047
0.30	5.712072(-1)	6.527348(-1)	6.416194(-1)	7.013608(-1)
0.50	4.551663(-1)	5.423717(-1)	5.476142(-1)	5.573891(-1)
0.70	3.864581(-1)	4.747735(-1)	4.882096(-1)	4.723302(-1)
0.90	3.392428(-1)	4.267657(-1)	4.446139(-1)	4.142153(-1)
1.00	3.205049(-1)	4.072612(-1)	4.264843(-1)	3.912642(-1)
2.00	2.129203(-1)	2.884905(-1)	3.097824(-1)	2.611884(-1)
5.00	1.116569(-1)	1.617243(-1)	1.736044(-1)	1.414748(-1)
7.00	8.533480(-2)	1.256771(-1)	1.338234(-1)	1.103297(-1)
9.00	6.907720(-2)	1.027228(-1)	1.086335(-1)	9.084000(-1)

Tabela A.10: Fluxo de Poiseuille; taxa de fluxo de calor Q_P , $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.05	1.653688	1.765080	1.643992	2.053106	-	-
0.10	1.266441	1.401214	1.328600	1.586520	1.5426	1.5680
0.30	7.580823(-1)	9.094469(-1)	8.988866(-1)	9.585860(-1)	-	-
0.50	5.705722(-1)	7.155058(-1)	7.220610(-1)	7.249331(-1)	-	-
0.70	4.649665(-1)	6.004731(-1)	6.136016(-1)	5.932632(-1)	-	-
0.90	3.953836(-1)	5.216112(-1)	5.374411(-1)	5.064594(-1)	-	-
1.00	3.685434(-1)	4.904286(-1)	5.068999(-1)	4.729514(-1)	5.3760(-1)	5.2876(-1)
2.00	2.245046(-1)	3.143404(-1)	3.297997(-1)	2.924944(-1)	-	-
5.00	1.075322(-1)	1.578737(-1)	1.660710(-1)	1.440395(-1)	-	-
7.00	8.036290(-2)	1.193804(-1)	1.251136(-1)	1.090310(-1)	-	-
9.00	6.421908(-2)	9.606501(-2)	1.003145(-1)	8.803635(-2)	-	-

A.2 Problema de *Creep* Térmico

Tabela A.11: *Creep* Térmico; taxa de fluxo de calor Q_T , $\alpha = 1.0$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.05	-4.680041	-4.831144	-4.504804	-5.543146	-	-
0.10	-3.845970	-4.054605	-3.799749	-4.629225	-3.8509	-3.9037
0.30	-2.593221	-2.895432	-2.772281	-3.208985	-	-
0.50	-2.060460	-2.391702	-2.326588	-2.587427	-	-
0.70	-1.735295	-2.074602	-2.041635	-2.203032	-	-
0.90	-1.508664	-1.846710	-1.833057	-1.932746	-	-
1.00	-1.418245	-1.753750	-1.746809	-1.824313	-1.8018	-1.7830
2.00	-8.998178(-1)	-1.189527	-1.205465	-1.194010	-	-
5.00	-4.350602(-1)	-6.166694(-1)	-6.261105(-1)	-6.061538(-1)	-	-
7.00	-3.234888(-1)	-4.661777(-1)	-4.718413(-1)	-4.583449(-1)	-	-
9.00	-2.573167(-1)	-3.742993(-1)	-3.779330(-1)	-3.686551(-1)	-	-

Tabela A.12: *Creep* Térmico; taxa de fluxo de calor Q_T , $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK	S[16]	GJ	MRS
0.05	-6.081104	-6.338332	-5.892720	-7.314524
0.10	-4.868631	-5.207173	-4.871609	-5.963964
0.30	-3.106981	-3.549437	-3.398417	-3.927408
0.50	-2.393757	-2.850572	-2.772062	-3.075803
0.70	-1.973510	-2.421921	-2.380635	-2.565992
0.90	-1.688579	-2.120914	-2.100772	-2.216497
1.00	-1.576897	-2.000095	-1.987054	-2.078552
2.00	-9.609408(-1)	-1.295901	-1.306131	-1.305258
5.00	-4.476423(-1)	-6.406427(-1)	-6.470887(-1)	-6.340642(-1)
7.00	-3.300867(-1)	-4.789028(-1)	-4.827555(-1)	-4.738794(-1)
9.00	-2.613438(-1)	-3.820983(-1)	-3.845659(-1)	-3.784606(-1)

Tabela A.13: *Creep* Térmico; taxa de fluxo de calor Q_T , $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

$2a$	BGK	S[16]	GJ	MRS	CES[115]	ELB[119]
0.05	-9.463246	-1.010061(1)	-9.393505	-1.166465(1)	-	-
0.10	-7.209772	-7.976847	-7.492182	-9.076200	-7.6317	-7.7797
0.30	-4.154572	-4.983364	-4.806069	-5.424814	-	-
0.50	-3.030553	-3.798980	-3.715732	-4.031978	-	-
0.70	-2.408873	-3.108894	-3.066598	-3.246699	-	-
0.90	-2.006798	-2.644884	-2.623204	-2.731767	-	-
1.00	-1.853778	-2.463996	-2.448744	-2.534087	-2.5170	-2.5138
2.00	-1.059690	-1.478801	-1.482609	-1.488727	-	-
5.00	-4.668760(-1)	-6.789398(-1)	-6.817272(-1)	-6.764930(-1)	-	-
7.00	-3.401030(-1)	-4.990292(-1)	-5.006854(-1)	-4.970621(-1)	-	-
9.00	-2.674430(-1)	-3.943911(-1)	-3.954490(-1)	-3.929535(-1)	-	-

A.3 Deslizamento Viscoso

Tabela A.14: Deslizamento Viscoso; perfil de velocidade $u_K(\tau)$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.00	1.109556	1.105374	1.101067	1.113607
0.20	1.457664	1.451978	1.479487	1.407057
0.40	1.717270	1.711784	1.743722	1.653260
0.60	1.954782	1.949830	1.982066	1.885789
0.80	2.181057	2.176739	2.207842	2.110757
1.00	2.400515	2.396848	2.426265	2.330804
1.40	2.827181	2.824734	2.850382	2.761323
1.80	3.244222	3.242822	3.264901	3.183594
2.00	3.450500	3.449557	3.470018	3.392619
2.50	3.961982	3.961999	3.978943	3.910825
3.00	4.469502	4.470262	4.484389	4.424530
5.00	6.482403	6.484772	6.492453	6.455548
7.00	8.485905	8.488845	8.494070	8.469199
10.0	1.148726(1)	1.149046(1)	1.149451(1)	1.147806(1)
15.0	1.648761(1)	1.649089(1)	1.649457(1)	1.648282(1)
20.0	2.148765(1)	2.149093(1)	2.149458(1)	2.148411(1)

A.4 Deslizamento Térmico

Tabela A.15: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_p$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.00	2.692240(-1)	3.711238(-1)	3.379211(-1)	4.359399(-1)
0.20	4.086951(-1)	5.691342(-1)	5.777813(-1)	5.676998(-1)
0.40	4.756064(-1)	6.720966(-1)	7.007845(-1)	6.380890(-1)
0.60	5.211386(-1)	7.454564(-1)	7.869566(-1)	6.893105(-1)
0.80	5.548278(-1)	8.016237(-1)	8.514985(-1)	7.295695(-1)
1.00	5.808647(-1)	8.462270(-1)	9.014658(-1)	7.625245(-1)
1.40	6.183047(-1)	9.123643(-1)	9.725741(-1)	8.138899(-1)
1.80	6.435172(-1)	9.583741(-1)	1.019082	8.524274(-1)
2.00	6.531161(-1)	9.762356(-1)	1.036253	8.683400(-1)
2.50	6.711948(-1)	1.010443	1.067338	9.010527(-1)
3.00	6.834851(-1)	1.034161	1.087112	9.263171(-1)
5.00	7.058284(-1)	1.078411	1.117858	9.863653(-1)
7.00	7.123957(-1)	1.091750	1.124326	1.014806
10.0	7.151015(-1)	1.097294	1.126128	1.034585
15.0	7.158449(-1)	1.098816	1.126405	1.046088
20.0	7.159260(-1)	1.098980	1.126419	1.049466

Tabela A.16: Deslizamento Térmico; perfil de velocidade $u_S(\tau)$, $\alpha = 0.8$, $\varepsilon = \varepsilon_t$.

τ	BGK[6]	S[16]	GJ	MRS
0.00	2.692240(-1)	2.474159(-1)	2.252807(-1)	2.906266(-1)
0.20	4.086951(-1)	4.171159(-1)	4.303557(-1)	4.041281(-1)
0.40	4.756064(-1)	4.969709(-1)	5.246377(-1)	4.595403(-1)
0.60	5.211386(-1)	5.500899(-1)	5.853359(-1)	4.978726(-1)
0.80	5.548278(-1)	5.883074(-1)	6.272958(-1)	5.268052(-1)
1.00	5.808647(-1)	6.169303(-1)	6.573594(-1)	5.496727(-1)
1.40	6.183047(-1)	6.561058(-1)	6.957869(-1)	5.837490(-1)
1.80	6.435172(-1)	6.806325(-1)	7.175382(-1)	6.079385(-1)
2.00	6.531161(-1)	6.894408(-1)	7.247419(-1)	6.175447(-1)
2.50	6.711948(-1)	7.049990(-1)	7.364035(-1)	6.365105(-1)
3.00	6.834851(-1)	7.145970(-1)	7.426990(-1)	6.503499(-1)
5.00	7.058284(-1)	7.289012(-1)	7.499523(-1)	6.796311(-1)
7.00	7.123957(-1)	7.317642(-1)	7.508046(-1)	6.910144(-1)
10.0	7.151015(-1)	7.325443(-1)	7.509371(-1)	6.973925(-1)
15.0	7.158449(-1)	7.326640(-1)	7.509464(-1)	7.001093(-1)
20.0	7.159260(-1)	7.326699(-1)	7.509466(-1)	7.006412(-1)

Apêndice B **MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN**

Nos capítulos anteriores foram apresentados problemas de transferência de calor e de fluxo de gases rarefeitos usando o método ADO para resolução de modelos cinéticos derivados da ELB. Os próximos dois capítulos são referentes ao método de lattice Boltzmann, método que tem sido cada vez mais utilizado na área de dinâmica de fluidos computacional, relacionando o uso da equação de Boltzmann para problemas em regime contínuo (macroescala).

Este capítulo tem caráter introdutório, onde será feito um panorama do método, descrevendo suas origens e apontando possíveis aplicações [54]. Também será abordada uma detalhada derivação da equação de lattice Boltzmann a partir da equação de Boltzmann, através de um procedimento geral.

B.1 Introdução

Segundo McNamra [81] e Lebowitz [65], testemunhou-se nos últimos anos o rápido desenvolvimento do método conhecido como Método de Lattice Boltzmann (**MLB**). Desde o início, esse método se mostrou capaz de simular os mais diversos sistemas, principalmente por sua habilidade de tratar problemas de fluxo com condições de fronteira complicados. Dentre as possíveis aplicações do **MLB**, temos os problemas hidrodinâmicos [81, 7] e os magneto-hidrodinâmicos [32]. No estudo dos fenômenos de transporte, esse método computacional foi empregado como uma nova alternativa, de onde foram obtidas algumas soluções analíticas para fluxos não uniformes em problemas bi e tridimensionais [56, 47].

Diferente dos esquemas numéricos tradicionais (baseados na discretização das equações), o **MLB** é baseado em modelos microscópicos e equações cinéticas [30],

onde basicamente é considerado que o comportamento do fluido é o resultado do comportamento coletivo de uma grande quantidade de partículas microscópicas e que o comportamento desse fluido não é sensível à pequenas perturbações de nível microscópico.

Segundo Doolen em [30], a idéia principal do método é construir um modelo cinético simplificado que incorpore a física essencial dos processos microscópicos de forma que as propriedades macroscópicas obtidas satisfaçam as equações macroscópicas desejadas. Dessa forma, evita-se resolver diretamente equação cinéticas mais complicadas, tais como a equação de Boltzmann não-linear, uma vez que é evitado seguir cada partícula como em simulações de dinâmica molecular.

Além disso, aliando o fato desse método ser totalmente paralelizável com a utilização de computadores mais modernos e de vários processadores em paralelo, tornou o **MLB** uma ferramenta poderosa no estudo de vários sistemas complexos.

Historicamente, os modelos de Lattice Boltzmann evoluíram diretamente dos modelos de “lattice-gas automata”(LGA) [41]. Enquanto os modelos LGA são booleanos, os modelos **MLB** correspondem a parte numérica dos modelos LGA - uma partícula no modelo LGA (representada por um número booleano) é substituída pela função distribuição de uma única partícula (representada por um número real). Embora a conexão entre os modelos **MLB** e a equação de Boltzmann serem discutidas em vários lugares [63, 79], até agora não existem resultados teóricos nessa direção.

Mesmo faltando um estudo mais rigoroso do método, existem algumas imediatas implicações. Por exemplo, o método **MLB** não tem tido muito sucesso em simulações de sistemas termo-hidrodinâmicos [79, 80], nem tem sido capaz de ser implementado em malhas arbitrárias [7, 131], apesar do considerável esforço que tem sido aplicado nessa direção.

O modelo cinético que será utilizado aqui é o **BKG** com uma única relaxação no tempo [8, 68]. Apesar do modelo **BGK** ter algumas limitações inerentes, tais como o número de Prandtl fixo, o modelo pode ser generalizado para remediar essas falhas [67]. Dessa forma, é suficiente usar o modelo **BGK** no estudo de problemas hidrodinâmicos para um único fluido.

Nas seções seguintes, a notação que será seguida é a mais usual dentro desta metodologia.

B.2 Discretização da Equação de Boltzmann

Para a análise seguinte, após feita uma aproximação pelo modelo **BGK** [8, 68], a equação de Boltzmann fica escrita na forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda}(f - g), \quad (\text{B.1})$$

onde $f = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ é a função distribuição de uma única partícula, $\boldsymbol{\xi}$ é a velocidade microscópica, $-1/\lambda$ é a frequência de colisão e $g = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ representa a função distribuição Maxwelliana

$$g = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})^2}{2RT}\right) \quad (\text{B.2})$$

onde R é a constante de gases ideais, D é a dimensão do espaço, e ρ , \mathbf{u} e T são, respectivamente, densidade macroscópica, velocidade e temperatura. Repare que a expressão dada por g pela Eq. (B.2) tem a mesmo papel da expressão dada por f_0 pela Eq. (2.4).

Segundo He [54], define-se também as variáveis macroscópicas, ρ , \mathbf{u} e T como sendo os momentos da função distribuição f

$$\rho = \int f d\boldsymbol{\xi}, \quad (\text{B.3})$$

$$\rho \mathbf{u} = \int \boldsymbol{\xi} f d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{B.4})$$

e

$$\rho E = \frac{1}{2} \int (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})^2 f d\boldsymbol{\xi}. \quad (\text{B.5})$$

A energia também pode ser escrita em termos da temperatura T [54]

$$E = \frac{D_0}{2} RT = \frac{D_0}{2} N_A k_B T, \quad (\text{B.6})$$

onde D_0 , N_A e k_B são, respectivamente, o número de graus de liberdade de uma partícula, o número de Avogadro e a constante de Boltzmann.

B.3 Discretização do Tempo

Para encontrar a equação evolutiva da função distribuição f , supõe-se que $f = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$, $g = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Dessa forma, consegue-se reescrever a Eq. (B.1) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} g &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{\lambda} f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{\lambda} f \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde, multiplicando por $\exp(t/\lambda)$, resulta em

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} g &= \left[\exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} f \right] + \\ &+ \left[\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(f \exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right) + \dots + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f \exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Definindo

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t), \quad (\text{B.9})$$

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \exp\left(\frac{t}{\lambda}\right) g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \quad (\text{B.10})$$

e substituindo na Eq. (B.8), obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{\lambda} G. \quad (\text{B.11})$$

Ao ser utilizado o método das características na resolução da Eq. (B.11), tem-se que toda a informação que F possui é carregada ao longo das curvas características. Em circunstâncias mais gerais, a restrição de F sob uma curva característica é a de que ela satisfaça uma EDO em t . Sendo assim

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \right) = \frac{1}{\lambda} G. \quad (\text{B.12})$$

Comparando as Eqs. (B.11) e (B.12), verifica-se que

$$\frac{dx_1}{dt} = \xi_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \xi_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = \xi_3. \quad (\text{B.13})$$

Portanto, tem-se que

$$x_1(t) = \xi_1 t + K_1, \quad x_2(t) = \xi_2 t + K_2, \quad x_3(t) = \xi_3 t + K_3 \quad (\text{B.14})$$

onde, usando a definição feita para \mathbf{x} e $\boldsymbol{\xi}$ no início dessa seção, juntamente com $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$, conclui-se que

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi} t + \mathbf{K}. \quad (\text{B.15})$$

Ainda da Eq. (B.12), usando a Eq. (B.15) e trocando a notação t por τ , tem-se

$$\frac{dF}{d\tau}(\boldsymbol{\xi}\tau + \mathbf{K}, \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{1}{\lambda} G(\boldsymbol{\xi}\tau + \mathbf{K}, \boldsymbol{\xi}, \tau). \quad (\text{B.16})$$

Além disso, ao integrar a Eq. (B.16) em τ de t a $t + \delta t$, substituindo $\mathbf{K} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} t$, encontra-se

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(t + \delta t - t), \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) &= \int_t^{t+\delta t} \frac{1}{\lambda} G(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\tau - t), \boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau + \\ &+ F(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(t - t), \boldsymbol{\xi}, t). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Agora, substituindo na Eq. (B.17) as definições feitas para F e G , tem-se

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) &= \exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\delta t} \exp\left(\frac{\tau - t}{\lambda}\right) g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\tau - t), \boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau + \\ &+ \exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Assim, fazendo uma mudança de variável de integração $t' = \tau - t$, a solução representada pela Eq. (B.18) fica na forma

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) &= \exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} \int_0^{\delta t} \exp\left(\frac{t'}{\lambda}\right) g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t') dt' + \\ &+ \exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Note que, independente de que unidade f venha a ter, $\boldsymbol{\xi}$ precisa ser uma unidade de velocidade [34]. Assim, $\boldsymbol{\xi}$ pode ser chamada de velocidade de propagação e a solução da Eq. (B.19) representa sinais ou ondas se propagando em uma determinada direção com velocidade $|\boldsymbol{\xi}|$.

Repare também que as curvas características indicadas pela Eq. (B.15) representam retas onde, para cada i , ξ_i representa a velocidade com que a função evolui no tempo na direção x_i e $1/\xi_i$ indica com que inclinação é feito isso.

Sendo assim, uma vez que é conhecida velocidade com que a função se propaga em cada direção e a posição inicial, para qualquer instante de tempo em que o fenômeno evolui, sabemos exatamente para que posição a função evoluirá.

Agora, assumindo δt pequeno o suficiente, g suficientemente suave e que g também evolua sobre as curvas características, pode-se usar o Teorema do Valor Médio e escrever

$$g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) + g'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}m\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + m\delta t)\delta t, \quad 0 < m < 1 \quad (\text{B.20})$$

onde, tomando $0 < m < 1$ (ou $0 < m\delta t < \delta t$) e isolando o termo da derivada, tem-se

$$g'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}m\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + m\delta t) = \frac{g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}{\delta t} \quad (\text{B.21})$$

Convencionando $t_0 = t + m\delta t$ e $t' = m\delta t$ (implicando que $t_0 = t + t'$) e usando a hipótese de que g é suficientemente suave e contínua localmente (em t_0), pode-se expressar g em uma vizinhança de t_0 por uma série de Taylor, isto é

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) &= g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t') + g'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t')(t - t - t') + \\ &+ O((t - t - t')^2), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

que resulta em

$$g'(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t') = \frac{g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t') - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}{t'} + O(t'). \quad (\text{B.23})$$

Substituindo na Eq. (B.21) a Eq. (B.23), tem-se como resultado

$$\frac{g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}{\delta t} = \frac{g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t') - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)}{t'} + O(t'). \quad (\text{B.24})$$

Assim, da Eq. (B.24) chega-se em

$$g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t') = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) + \frac{t'}{\delta t} (g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)) + O(t'^2). \quad (\text{B.25})$$

Além disso, pode-se considerar que $t' = O(\delta t)$ uma vez que $t' = m\delta t$. Assim

$$g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}t', \boldsymbol{\xi}, t + t') = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \left(1 + \frac{t'}{\delta t}\right) + \frac{t'}{\delta t} g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) + O(\delta t^2). \quad (\text{B.26})$$

Substituindo a Eq. (B.26) na Eq. (B.19) e negligenciando os termos $O(\delta t^2)$, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) \exp\left(\frac{\delta t}{\lambda}\right) &= \\ &= g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) \left\{ \exp\left(\frac{\delta t}{\lambda}\right) - \frac{\lambda}{\delta t} \left[\exp\left(\frac{\delta t}{\lambda}\right) - 1 \right] \right\} + \\ &+ g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \left\{ -1 + \frac{\lambda}{\delta t} \left[\exp\left(\frac{\delta t}{\lambda}\right) - 1 \right] \right\} + f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t). \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Assim

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) &= \\ &= [g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)] \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\delta t} \left[\exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) - 1 \right] \right\} + \\ &+ [f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)] \left\{ \exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) - 1 \right\} + f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t). \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Agrupando os termos da Eq. (B.28), chega-se em

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) &= \\ &= [g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)] \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\delta t} \left[\exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) - 1 \right] \right\} + \\ &+ [f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)] \left\{ \exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Agora, usando a série de Taylor centrada na origem de $\exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right)$, escreve-se

$$\exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) = 1 - \frac{\delta t}{\lambda} + O(\delta t^2) \implies \exp\left(\frac{-\delta t}{\lambda}\right) - 1 = -\frac{\delta t}{\lambda} + O(\delta t^2) \quad (\text{B.30})$$

que, se for substituída na Eq. (B.29), desconsiderando os termos $O(\delta t^2)$ e fazendo $\tau = \frac{\lambda}{\delta t}$, tem-se

$$f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = -\frac{1}{\tau} [f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) - g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)], \quad (\text{B.31})$$

onde τ é a relaxação adimensional do tempo. Desta forma, a Eq. (B.31) é de primeira ordem em δt e é a equação evolutiva da função distribuição f com tempo discreto. Vale salientar ainda que a Eq. (B.31) é a equação básica do método de lattice Boltzmann.

Por He [54], apesar de g ter sido explicitamente escrita como uma função de t , essa dependência no tempo ficará apenas nas variáveis hidrodinâmicas ρ , \mathbf{u} e T , ou seja, $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \rho, \mathbf{u}, T)$. Além disso, como a função g dada pela Eq. (B.2) é dependente das variáveis ρ , \mathbf{u} e T , o cálculo dessas quantidades passa a ser importante. A função g também é importante, pois é a partir dela que se constrói a função distribuição de equilíbrio f^{eq} , usada na versão discretizada da Eq. (B.1).

B.4 Cálculo dos Momentos Hidrodinâmicos

Uma vez obtida a equação evolutiva da função distribuição f , a próxima etapa passa a ser a avaliação numérica dos momentos hidrodinâmicos. Para isso, segundo He [54], faz-se uma discretização apropriada da integral que aparece nas Eqs. (B.3) à (B.5). Uma vez escolhida a quadratura, essas quantidades são computadas por

$$\rho = \sum_i w_i f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i, t), \quad (\text{B.32})$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_i w_i \boldsymbol{\xi}_i f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i, t) \quad (\text{B.33})$$

e

$$\rho E = \frac{1}{2} \sum_i w_i (\boldsymbol{\xi}_i - \mathbf{u})^2 f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i, t), \quad (\text{B.34})$$

onde as $\boldsymbol{\xi}_i$ são as velocidades discretas (as abscissas da quadratura) e os w_i são os coeficientes peso relacionados com os pontos $\boldsymbol{\xi}_i$.

B.5 Cálculo da Função Distribuição de Equilíbrio

Já obtidas as quantidades ρ , \mathbf{u} e T , o próximo passo é definir a função distribuição de equilíbrio f^{eq} . Segundo He [54], a função f^{eq} é obtida através do truncamento da série de Taylor do termo exponencial da função g . Assim, partindo da Eq. (B.2), consegue-se mostrar que

$$g \approx \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp(-\boldsymbol{\xi}^2/2RT) \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})}{RT} + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT} \right] + O(\mathbf{u}^3), \quad (\text{B.35})$$

de onde obtém-se

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp(-\boldsymbol{\xi}^2/2RT) \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})}{RT} + \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2RT} \right]. \quad (\text{B.36})$$

Para a construção da Eq. (B.36) foram preservados termos até $O(\mathbf{u}^2)$. Contudo, se houver a necessidade de manter termos de mais alta ordem, o mesmo argumento pode ser repetido.

Uma vez descoberta a função de distribuição de equilíbrio f^{eq} , ao invés de se usar a Eq. (B.31) escrita em termos de g , ela passa a ser escrita em termos de f^{eq} . Dessa forma, consegue-se finalmente a equação evolutiva para o método de lattice Boltzmann

$$f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}\delta t, \boldsymbol{\xi}, t + \delta t) - f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = -\frac{1}{\tau} [f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) - f^{eq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)], \quad (\text{B.37})$$

De um modo geral, na utilização do método de lattice Boltzmann (para cada passo de tempo) são seguidos os seguintes passos: construção da f^{eq} ; a utilização da f^{eq} na determinação das $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i, t)$; avaliação das quantidades de interesse a partir

dos resultados obtidos para as $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i, t)$; a utilização das quantidades de interesse para atualizar o valor de f^{eq} .

A partir das informações apresentadas aqui, o próximo capítulo será baseado no trabalho de Zuo, Hou e Doolen [137] e tratará de uma aplicação desse método na resolução do problema de Poiseuille utilizando malhas triangulares.

Apêndice C UMA APLICAÇÃO DE LATTICE BOLTZMANN

Considerando-se aqui o modelo lattice Boltzmann para um problema de fluxo em uma malha triangular (também chamado de modelo FHP [41]) como mostra a Fig. (6.1). Para este modelo, existem dois tipos de partículas em cada nodo: as partículas estáticas (tipo 0) com $\boldsymbol{\xi}_0 = 0$ e as partículas em movimento (tipos 1 à 6) com velocidades unitárias $\boldsymbol{\xi}_i = (\cos[(i-1)\pi/3], \sin[(i-1)\pi/3])$, $i = 1, \dots, 6$, ao longo das 6 direções. Considera-se também as funções distribuição de partículas $f_i(\mathbf{x}, t)$, que representam a probabilidade de encontrar uma partícula no nodo $\mathbf{x} = (x, y)$ e tempo t com velocidade $\boldsymbol{\xi}_i$. Assim, o modelo lattice Boltzmann **BGK** dado pela Eq. (B.31) para a evolução de f_i é dado por

$$f_i(\mathbf{x} + \delta t \boldsymbol{\xi}_i, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{(0)}(\mathbf{x}, t)], \quad i = 0, \dots, 6, \quad (\text{C.1})$$

onde $f_i^{(0)}(\mathbf{x}, t)$ é a distribuição de equilíbrio da partícula do tipo i em \mathbf{x} e t ($f_i^0(\mathbf{x}, t)$

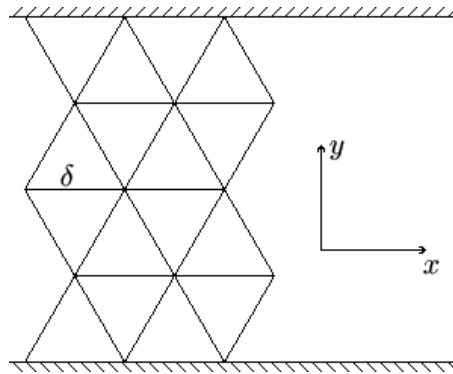


Figura C.1: A geometria do fluxo no canal plano.

tem o mesmo papel da função $f^{eq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ do capítulo anterior). O lado direito representa o termo de colisão, e τ é uma relaxação simples no tempo que controla a taxa de aproximação do equilíbrio. A densidade ρ em cada nodo e a velocidade macroscópica do fluxo \mathbf{u} foram definidas anteriormente pelas Eqs. (B.32) e (B.33) e

para este problema são escritas na forma

$$\sum_{i=0}^6 f_i = \rho, \quad \sum_{i=0}^6 f_i \boldsymbol{\xi}_i = \rho \mathbf{u}. \quad (\text{C.2})$$

Na literatura, em trabalhos como os de Wolf [135] e Paiva [86], é relatado que a função distribuição de equilíbrio pode ser deduzida a partir de considerações no processo de colisão, como a conservação de massa e quantidade de movimento, e também que, a partir da função f^{eq} , é possível recuperar as equações governantes do fenômeno fazendo uso do método multi-escala de Chapman-Enskog [28].

Segundo Qian [93], a função distribuição de equilíbrio adequada para este problema (aplicada ao modelo FHP) deve depender apenas da densidade e da velocidade, sendo escrita como

$$f_0^{(0)} = d_0 - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{C.3})$$

$$f_i^{(0)} = d + (\rho/3)[(\boldsymbol{\xi}_i \cdot \mathbf{u}) + 2(\boldsymbol{\xi}_i \cdot \mathbf{u})^2 - 1/2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})], \quad i = 1, \dots, 6, \quad (\text{C.4})$$

onde $d = (\rho - d_0)/6$, ρ é a densidade e $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ é o vetor velocidade.

Segundo Zou [137], a partir de uma modificação da Eq. (C.1), o problema do fluxo de Poiseuille pode ser descrito (via modelo **LBGK**) por

$$f_i(\mathbf{x} + \delta t \boldsymbol{\xi}_i, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}[f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{(0)}(\mathbf{x}, t)] + h_i \delta t, \quad (\text{C.5})$$

onde h_i é escolhido como

$$h_0 = 0, \quad h_i = G/4, \quad i = 1, 2, 6; \quad h_i = -G/4, \quad i = 3, 4, 5, \quad (\text{C.6})$$

tal que

$$\sum_i h_i = 0, \quad \sum_i h_i \boldsymbol{\xi}_i = 0, \quad \sum_i h_i \xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} = 0 \quad (\text{C.7})$$

e G é definido por

$$G = 2\rho\nu u_0/L^2, \quad (\text{C.8})$$

onde $\nu = [(2\tau - 1)/8]\delta t$ é a viscosidade, u_0 uma velocidade de referência e $2L$ a largura do canal. O termo $h_i\delta t$ que aparece ao lado direito da Eq. (C.7) representa o gradiente de pressão que caracteriza o fluxo de Poiseuille.

Agora, supondo $f_i(\mathbf{x}, t)$ uma solução da Eq. (C.5) e que representa exatamente o fluxo de Poiseuille, algumas considerações devem ser feitas [137]

1. $f_i(\mathbf{x}, t)$ é estacionário (independente de t);
2. $f_i(\mathbf{x}, t)$ é independente de \mathbf{x} , conseqüentemente é apenas uma função de y , denotada por $f_i(y)$;
3. $f_2(y) = f_6(-y)$ e $f_3(y) = f_5(-y)$ devido a simetria do fluxo;
4. $\sum_i f_i(y) = \rho$ é constante;
5. $\sum_i f_i(y)\xi_{ix} = \rho u_x(y)$, onde $u_x(y) = u_0(1 - y^2)$;
6. $\sum_i f_i(y)\xi_{iy} = 0$.

Ainda, de acordo com as Eqs. (C.3) e (C.4) e usando a definição de ξ_i feita anteriormente, obtém-se as seguintes funções distribuição de equilíbrio

$$f_0^{(0)} = d_0 - \rho u^2, \quad (\text{C.9})$$

$$f_1^{(0)} = d + \frac{\rho u}{3} + \frac{\rho u^2}{2}, \quad (\text{C.10})$$

$$f_2^{(0)} = d + \frac{\rho u}{6}, \quad (\text{C.11})$$

$$f_3^{(0)} = d - \frac{\rho u}{6}, \quad (\text{C.12})$$

$$f_4^{(0)} = d - \frac{\rho u}{3} + \frac{\rho u^2}{2}, \quad (\text{C.13})$$

$$f_5^{(0)} = d - \frac{\rho u}{6}, \quad (\text{C.14})$$

$$f_6^{(0)} = d + \frac{\rho u}{6}, \quad (\text{C.15})$$

onde $u = u_x(y)$ e $d = (\rho - d_0)/6$. Usando as restrições 1 e 2 na Eq. (C.5) para $i=0,1,4$, obtém-se

$$f_0(y) = d_0 - \rho u^2, \quad (\text{C.16})$$

$$f_1(y) = d + \frac{\rho u}{3} + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\delta\tau G}{4} \quad (\text{C.17})$$

e

$$f_4(y) = d - \frac{\rho u}{3} + \frac{\rho u^2}{2} - \frac{\delta\tau G}{4}. \quad (\text{C.18})$$

O procedimento que determina as distribuições $f_2(y)$, $f_3(y)$, $f_5(y)$ e $f_6(y)$ é um pouco diferente. Como as distribuições $f_i^{(0)}$ são funções apenas de u (ou seja são funções de y^2 pela restrição 5, propõe-se que

$$f_i(y) = a_i + b_i y + c_i y^2, \quad i = 2, 3, 5, 6, \quad (\text{C.19})$$

onde os 12 coeficientes desconhecidos a_i , b_i e c_i vão depender das quantidades de fluxo τ e dy e não de y . Usando a restrição 3, obtém-se

$$a_2 + b_2 y + c_2 y^2 = a_6 - b_6 y + c_6 y^2, \quad a_3 + b_3 y + c_3 y^2 = a_5 - b_5 y + c_5 y^2, \quad (\text{C.20})$$

para todo y . Portanto

$$a_2 = a_6, \quad a_3 = a_5, \quad b_2 = -b_6, \quad b_3 = -b_5, \quad c_2 = c_6, \quad c_3 = c_5. \quad (\text{C.21})$$

Da mesma forma, usando a restrição 6, encontra-se

$$2b_2 y + 2b_3 y = 0, \quad (\text{C.22})$$

de onde conclui-se que

$$b_2 = -b_3. \quad (\text{C.23})$$

Usando a restrição 4 juntamente com as Eqs. (C.21) e (C.23), chega-se em

$$2(a_2 + a_3) + 2(c_2 + c_3)y^2 + f_0(y) + f_1(y) + f_4(y) = \rho, \quad (\text{C.24})$$

onde, aplicando as Eqs. (C.16) à (C.18) juntamente com a expressão de d , encontra-se

$$a_2 + a_3 = \frac{1}{2}(\rho - d_0 - 2d) = 2d, \quad c_2 + c_3 = 0, \quad (\text{C.25})$$

que resulta em

$$c_2 = -c_3, \quad a_3 = 2d - a_2 \quad (\text{C.26})$$

Da mesma forma, usando a restrição 5 aliada às Eqs. (C.16) à (C.18), chega-se em

$$a_2 = d + \frac{\rho u_0}{6} - \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad c_2 = -\frac{\rho u_0}{6}. \quad (\text{C.27})$$

Nesse ponto, o único coeficiente ainda desconhecido é o b_2 . Assim, usando a Eq. (C.5) para $i=2$, tem-se

$$f_2(y + dy) - f_2(y) = -\frac{1}{\tau} \left(f_2(y) - f_2^{(0)}(y) \right) + \frac{\delta t G}{4}, \quad (\text{C.28})$$

onde dy se caracteriza por ser o espaçamento entre duas linhas da malha que é dado por $dy = (\sqrt{3}/2)\delta t$. Usando na Eq. (C.28) na expressão de $f_2^{(0)}$, pode-se obter

$$\begin{aligned} c_2 [y^2 + 2ydy + (dy)^2] + b_2 y + b_2 dy + a_2 &= \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) [c_2 y^2 + b_2 y + a_2] + \\ &+ \frac{1}{\tau} \left[d + \frac{1}{6} \rho u_0 (1 - y^2) \right] + \frac{\delta t G}{4}, \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

resultando do balanço dos termos lineares em y que

$$b_2 = \frac{\tau \rho u_0 dy}{3} \quad (\text{C.30})$$

e as equações para os coeficientes de y^2 e y^0 também são satisfeitas bem como as equações evolutivas para f_3 , f_5 e f_6 para as escolhas de a_i , b_i e c_i feitas acima.

Dessa forma, obteve-se as quantidades

$$f_0(y) = d_0 - \rho u^2, \quad (\text{C.31})$$

$$f_1(y) = d + \frac{\rho u}{3} + \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.32})$$

$$f_2(y) = d - \frac{\rho u_0 y^2}{6} + \frac{\tau \rho u_0 y dy}{3} + \frac{\rho u_0}{6} - \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.33})$$

$$f_3(y) = d + \frac{\rho u_0 y^2}{6} - \frac{\tau \rho u_0 y dy}{3} - \frac{\rho u_0}{6} + \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.34})$$

$$f_4(y) = d - \frac{\rho u}{3} + \frac{\rho u^2}{2} - \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.35})$$

$$f_5(y) = d + \frac{\rho u_0 y^2}{6} + \frac{\tau \rho u_0 y dy}{3} - \frac{\rho u_0}{6} + \frac{\delta t \tau G}{4} \quad (\text{C.36})$$

$$f_6(y) = d - \frac{\rho u_0 y^2}{6} - \frac{\tau \rho u_0 y dy}{3} + \frac{\rho u_0}{6} - \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.37})$$

que satisfazem as restrições 1-6 e que, juntas com a distribuição de equilíbrio dada pelas Eqs. (C.9) à (C.15), satisfazem a equação **LBGK** dada pela Eq. (C.5). Por isso, a Eq. (C.5) é uma representação do fluxo de Poiseuille na região $y \in [-1, 1]$.

Para finalizar, é necessário verificar quais condições de contorno correspondem a solução das Eqs. (C.31) à (C.37). Para isso, será feita uma análise do contorno inferior (para o contorno superior o processo é equivalente).

Assim, tomando $y = -1$ e $u = 0$, tem-se

$$f_0(y) = d_0, \quad (\text{C.38})$$

$$f_1(y) = d + \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.39})$$

$$f_2(y) = d - \frac{\tau \rho u_0 dy}{3} - \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.40})$$

$$f_3(y) = d + \frac{\tau \rho u_0 dy}{3} + \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.41})$$

$$f_4(y) = d - \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.42})$$

$$f_5(y) = d - \frac{\tau \rho u_0 dy}{3} + \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.43})$$

$$f_6(y) = d + \frac{\tau \rho u_0 dy}{3} - \frac{\delta t \tau G}{4}, \quad (\text{C.44})$$

Baseado nas Eqs. (C.39) à (C.44), nota-se que quando se está trabalhando em nodos sobre o contorno, tem-se $f_2 = f_5 - 2\delta t \tau G/4$ e $f_3 = f_6 + 2\delta t \tau G/4$. Dessa forma, segundo Zou [137], condições do tipo *bounce-back* onde $f_2 = f_5$ e $f_3 = f_6$ são recomendadas para extrapolação do domínio, uma vez que o erro causado é pequeno (da ordem de δt).

Outro fato importante que deve ser salientado é que, para qualquer ponto $y \in [-1, 1]$, o perfil de velocidade obtido pela Eq. (C.2) é da forma $u_0(1 - y^2)$, e que esse caráter parabólico para o problema de fluxo de Poiseuille já foi verificado por outras metodologias.