

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

CHANTÓS GUILHERME ANTUNES MARIANI

ENSAIOS SOBRE DECISÃO, INCERTEZA E ESCOLHA SOCIAL NO
CONTEXTO POLÍTICO

Porto Alegre

2014

CHANTÓS GUILHERME ANTUNES MARIANI

**ENSAIOS SOBRE DECISÃO, INCERTEZA E ESCOLHA SOCIAL NO
CONTEXTO POLÍTICO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Flavio Vasconcellos
Comim

Porto Alegre

2014

CIP - Catalogação na Publicação

Mariani, Chantós Guilherme Antunes
Ensaio sobre Decisão, Incerteza e Escolha Social
no Contexto Político / Chantós Guilherme Antunes
Mariani. -- 2014.
84 f.

Orientador: Flavio Vasconcellos Comim.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2014.

1. Escolha Social. 2. Eleições. 3. Incerteza. 4.
Liberdade de Escolha. 5. Entropia. I. Vasconcellos
Comim, Flavio, orient. II. Título.

CHANTÓS GUILHERME ANTUNES MARIANI

**ENSAIOS SOBRE DECISÃO, INCERTEZA E ESCOLHA SOCIAL NO
CONTEXTO POLÍTICO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em: Porto Alegre, 14 de Outubro de 2014

Banca Examinadora

Prof. Dr. Flavio Vasconcellos Comim - Orientador
UFRGS

Prof. Dr. Sabino da Silva Porto Júnior - UFRGS
UFRGS

Prof. Dr. Giácomo Balbinotto Neto - UFRGS
UFRGS

Prof. Dr. Cristiano Aguiar de Oliveira - FURG
FURG

RESUMO

A presente dissertação apresenta dois ensaios sobre decisão, incerteza e escolha social no contexto eleitoral. O primeiro ensaio aborda de modo teórico o tema da ambiguidade nos discursos de campanha dos políticos, relacionando-o com a teoria da decisão sob incerteza, e trazendo os seus efeitos para a tomada de decisão individual e coletiva. O segundo ensaio trata de uma análise teórica acerca da liberdade de escolha dos indivíduos durante o processo eleitoral quando há incerteza a respeito das características dos candidatos, utilizando como base duas abordagens axiomáticas de liberdade de escolha presentes na literatura.

Palavras-chave: Eleições. Incerteza. Escolha social. Liberdade de escolha.

ABSTRACT

This dissertation presents two essays on decision, uncertainty and social choice in the electoral context. The first essay theoretically approaches the topic of ambiguous campaign discourses, relating it to the decision theory under uncertainty, and showing what effects it can have on individual and social decision-making processes. The second essay analyzes the freedom of choice aspects of the electoral process when there is uncertainty about the characteristics of candidates, using two axiomatic approaches of freedom that are present in the literature.

Keywords: Elections. Uncertainty. Social choice. Freedom of choice.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	CAMPANHAS ELEITORAIS AMBÍGUAS E SEUS EFEITOS NO COM- PORTAMENTO DO ELEITOR E NAS ESCOLHAS SOCIAIS	8
2.1	INTRODUÇÃO	9
2.2	ASPECTOS TEÓRICOS	12
2.2.1	Comportamento do eleitor, competição eleitoral e ambiguidade	12
2.2.2	Loterias, probabilidades subjetivas e entropia	19
2.2.3	Racionalidade, regras de votação e escolhas sociais	26
2.3	MODELO	31
2.3.1	Preferências pré-eleitorais	31
2.3.2	Preferências eleitorais	40
2.3.3	Consequências da ambiguidade das campanhas eleitorais nas preferências in- dividuais	48
2.3.4	Consequências da ambiguidade das campanhas eleitorais nas preferências co- letivas	49
2.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
3	APPRAISING FREEDOM OF CHOICE DURING POLITICAL ELEC- TIONS: A THEORETICAL APPROACH	54
3.1	INTRODUCTION	55
3.2	MEASURES OF FREEDOM OF CHOICE	57
3.3	Freedom and Elections	62
3.4	MODELS	65
3.4.1	The Simple Cardinality-Based Approach	66
3.4.2	The Known-Options-Based Rule	67
3.4.3	The “Known-Unknown” Problem: A Proposal	68
3.5	RESULTS	70
3.6	CONCLUDING REMARKS	74
4	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

Controvérsias acerca do comportamento dos políticos, da mecânica das campanhas eleitorais, e do que se entende por liberdade e democracia são comumente observadas na maioria das sociedades. De modo geral, os indivíduos não parecem totalmente indiferentes a esses temas; mesmo que as opiniões emitidas sejam muitas vezes superficiais, algum sentimento - seja positivo ou negativo - parece emergir quando o assunto “política” é abordado. Entretanto, discutir o tema de maneira sóbria e pouco contaminada por julgamentos e crenças pessoais parece uma tarefa muitas vezes inviável: para muitos, verdades universais a respeito dos assuntos já estão estabelecidas, sendo impossível refutá-las não importando o quão contundentes possam ser evidências. Nesses casos, a política vira uma questão de fé, e não um tema a ser discutido com racionalidade e razoabilidade.

Dessa forma, essa dissertação busca contribuir para o desenvolvimento de uma discussão mais sóbria sobre o tema, abordando algumas questões que parecem pertinentes, tais como:

- a. como a incerteza a respeito das opiniões, qualidades e defeitos dos candidatos em uma eleição pode afetar a escolha efetivada pelos indivíduos e pela sociedade como um todo?;
- b. de que modo essa incerteza é originada, ou agravada?;
- c. como a noção de liberdade de escolha é afetada quando as opções que se tem são pouco claras ou ambíguas?

Tendo em mente tais perguntas, são propostos dois ensaios. O primeiro busca contribuir para a discussão acerca dos efeitos da ambiguidade dos discursos de campanha dos políticos, utilizando como base teórica a tradição dos modelos espaciais do voto, fundamentados em Downs (1957) e em Shepsle (1972). Nesse ensaio, assumindo que os indivíduos votam ideologicamente, e que candidatos são vistos como loterias determinadas de modo subjetivo em um espaço ideológico, explora-se a possibilidade de obtermos ordenamentos sociais que não levam a escolhas bem definidas, fato decorrente de uma situação na qual os eleitores sentem-se indiferentes entre todas as opções apresentadas. Nesse ensaio, também abordamos o *princípio da máxima entropia* de Jaynes (1957), sugerindo que este pode ser útil para a determinação de probabilidades subjetivas que dependam dos conjuntos de informações que os indivíduos dispõem.

Após, o segundo ensaio busca explorar como a liberdade de escolha dos eleitores pode ser afetada em um contexto de incerteza sobre os candidatos. Nesse ensaio, a discussão se dá com enfoque em duas abordagens específicas, conhecidas como as abordagens de “cardinalidade simples” de Pattanaik e Xu (1990), e de “opções conhecidas”, de Arlegi e Dimitrov

(2005).¹ As duas abordagens são comparadas no que diz respeito aos efeitos da incerteza na liberdade de escolha; ademais, sugere-se, para a abordagem de Arlegi e Dimitrov (2005), uma regra para diferenciar opções “conhecidas” e “desconhecidas” baseada na entropia das distribuições de probabilidade associadas às alternativas. Dessa forma, imagina-se que os indivíduos toleram uma certa “quantidade” de incerteza, ou *entropia*, de modo que, mesmo com algum grau de incerteza a respeito de uma determinada opção, essa pode ser considerada como “conhecida” pelo indivíduo, assim ampliando a liberdade de escolha proporcionada.

Por fim, apresentamos algumas conclusões gerais dessa dissertação, salientando os principais pontos levantados, os pontos omissos, e linhas de pesquisa a serem exploradas para a continuidade e o aprofundamento do debate.

¹Do original em inglês, “simple cardinality-based approach” e “known-option-based rule”, respectivamente.

2 CAMPANHAS ELEITORAIS AMBÍGUAS E SEUS EFEITOS NO COMPORTAMENTO DO ELEITOR E NAS ESCOLHAS SOCIAIS

Resumo. Durante a campanha eleitoral, candidatos podem encontrar incentivos para adotar opiniões pouco claras a respeito de uma série de assuntos relevantes para a tomada de decisão do eleitor (Shepsle (1972), Page (1976), Glazer (1990), e outros). Nesse caso, os eleitores podem representar os candidatos não como alternativas bem definidas, mas através de loterias em um espaço de resultados, o que pode trazer problemas para o processo de escolha social e a aplicabilidade da regra da maioria, como apontado em Zeckhauser (1969). Esse ensaio busca verificar, através de construção de um modelo teórico fundamentado em Downs (1957) e Shepsle (1972), como a adoção de discursos ambíguos nas campanhas eleitorais pode afetar a utilidade dos modelos espaciais do voto, não somente para o estabelecimento de relações de preferência entre candidatos, como também para a obtenção de um conjunto de preferências dito *single-peaked*, como proposto em Black (1948). Assume-se que os eleitores são maximizadores de utilidade esperada, e candidatos são *loterias* no espaço de competição; entretanto, ao invés de imaginarmos que as medidas subjetivas de probabilidade são inferidas através do padrão de escolhas dos agentes (que caracteriza a abordagem de Savage (1954)), supõe-se que a construção de tais probabilidades subjetivas segue a lógica do princípio da máxima entropia de Jaynes (1957), que descreve como o fator informacional pode afetar a atribuição de probabilidades aos potenciais resultados. Dado esse contexto, e assumindo que a competição eleitoral ocorre em um espaço euclidiano unidimensional chamado de *dimensão ideológica*, é possível mostrar que a adoção de uma estratégia definida como de *máxima ambiguidade* pelos candidatos pode levar a uma situação onde eleitores tornam-se indiferentes entre quaisquer dois competidores. Consequentemente, mesmo que eleitores possuam preferências ditas *single-peaked* no conjunto de ideologias, a existência de um conjunto de preferências individuais que também seja *single-peaked* no conjunto dos candidatos não pode mais ser garantida apenas assumindo que eleitores votam ideologicamente.

Palavras-chave e Frases. Probabilidades subjetivas. Máxima entropia. Escolha social.

Classificação JEL D71, D81.

2.1 INTRODUÇÃO

Assumir que indivíduos votam de acordo com critérios ideológicos é uma suposição comum nas teorias que abordam do comportamento dos eleitores. De forma geral, imagina-se que indivíduos possuem “visões de mundo”, sendo uma ideologia uma mera representação de tal visão, e que eles buscam escolher os candidatos que possuam uma visão de mundo similar. O pioneirismo desse estilo de análise deve-se ao trabalho de Hotelling (1929), que estabeleceu as bases para os modelos de competição espacial, e Downs (1957), que aplicou essa ideia especificamente ao contexto político. Além disso, a ideia do voto ideológico tem uma implicação interessante no contexto da teoria da escolha social, visto que, se os eleitores votam ideologicamente, suas preferências eleitorais formam um conjunto de preferências dito *single-peaked*, conforme proposto em Black (1948), o que, no contexto da aplicabilidade de uma regra de votação tal como a *regra da maioria*, evita a possibilidade dessa regra resultar em preferências sociais cíclicas.

Entretanto, buscar um instrumento para a obtenção de preferências sociais que possa refletir as reais preferências dos indivíduos a respeito das alternativas apresentadas não é algo simples. Desde o influente trabalho de Arrow (1950), considerado por muitos como a principal raiz da teoria da escolha social moderna, um grande número de pesquisadores busca quais condições e propriedades esses métodos de agregação de preferências devem respeitar para serem úteis às escolhas coletivas, tais como May (1952), Inada (1964), Sen (1966), e outros. Adicionalmente, o método aplicado pode estar sujeito a ainda mais inconsistências quando há algum grau de incerteza a respeito das alternativas factíveis. Em outras palavras, se *loterias* também são objetos de escolha, então há a possibilidade de ordenamentos sociais cíclicos, mesmo quando as preferências sobre as alternativas originais (i.e., as alternativas *certas*) respeitam propriedades que impedem a ciclicidade. Nesse sentido, o trabalho de Zeckhauser (1969) tornou-se um importante marco para a discussão do tema.

Ademais, se essas opções do conjunto de escolha não estão definidas de uma maneira objetiva, então como os indivíduos irão ordenar tais alternativas de acordo com seus gostos e opiniões a respeito delas? Se as escolhas sociais devem ser uma expressão das preferências dos indivíduos, como a subjetividade durante o processo de tomada de decisão individual pode perturbar a tomada de decisão coletiva? Contribuir para a resposta desses questionamentos são parte dos objetivos deste trabalho.

No contexto político, quando, por exemplo, eleitores devem decidir qual candidato será o próximo presidente de um país, a existência de algum grau de incerteza a respeito das qualidades e intenções dos competidores parece acontecer com substancial frequência. Citando Anthony Downs, pessoas normalmente sentem que os políticos “[...] becloud their policies in a fog of ambiguity”¹ (DOWNS, 1957, p. 136), dificultando o processo de escolha dos

¹ “[...] obscurecem suas políticas em uma neblina de ambiguidade”. (Tradução nossa).

eleitores, visto que já não é trivial discernir com clareza quais candidatos são “bons” ou “ruins”, de acordo com critérios ideológicos, quando não se conhecem as características relevantes dos mesmos. Uma certa ambiguidade no discurso dos candidatos pode ser uma das razões que levam pessoas ao sentimento de descrença no sistema político, tornando comum jargões como “políticos são mentirosos”, ou “todos os políticos são iguais”. Entretanto, ao mesmo tempo em que há um grupo de pessoas que compartilha dessa descrença, outros indivíduos sentem-se engajados e motivados a participar da política, o que reflete um alto grau de subjetividade na avaliação que cada eleitor faz em relação aos candidatos, como também a importância da informação acerca desses políticos para determinar o sentimento que um cidadão tem em relação ao sistema político da sociedade em que vive.

Portanto, esse ensaio busca contribuir para a literatura que trata do comportamento do eleitor e das escolhas sociais, trazendo elementos da teoria da probabilidade subjetiva e o princípio da máxima entropia para a discussão, visando explorar como a incerteza, a ausência de informações relevantes a respeito do posicionamento ideológico dos candidatos - devido ao estilo de estratégia de campanha adotada - e como eleitores processam as informações disponíveis, podem afetar suas preferências em relação a tais candidatos, explorando as consequências na tomada de decisão individual e coletiva. Especificamente, é proposto um modelo teórico para verificar os efeitos de uma estratégia política de *máxima ambiguidade* nos ordenamentos dos eleitores, e seus impactos na utilidade do voto através de critérios ideológicos para a obtenção de um conjunto de preferências dos indivíduos que seja *single-peaked*, conforme proposto em Black (1948). Tratando das decisões individuais, estratégias de campanha que não clarificam qual posicionamento ideológico os candidatos possuem, i.e., que priorizam a ambiguidade nos discursos durante o período em que estão sendo avaliados pelos eleitores, podem levar a um elevado grau de incerteza no processo de decisão. Logo, mesmo que esses agentes possuam preferências *single-peaked* no conjunto de ideologias, a existência de um conjunto de preferências com a mesma propriedade no conjunto de candidatos não pode mais ser garantida através da mera suposição de voto via critérios ideológicos (ou critérios espaciais), trazendo implicações para as escolhas sociais.

Na construção do arcabouço teórico, inicialmente segue-se a tradição dos modelos espaciais de competição e voto (e.g., Hotelling (1929), Black (1948), Downs (1957), Enelow e Hinich (1981, 1982, 1984)), onde assume-se que cada indivíduo vota ideologicamente, i.e., vota para o candidato que sente mais próximo ao seu próprio posicionamento ideológico, o que, conforme o trabalho de Black (1948), leva os indivíduos (no caso, os eleitores) a terem preferências ditas *single-peaked* no conjunto hipotético de posicionamentos ideológicos. Após, seguindo o modelo de Shepsle (1972), é sugerido que os eleitores podem não observar o posicionamento ideológico dos candidatos (que assume-se como a única informação necessária para o estabelecimento do voto), levando-os a associar a cada competidor uma distribuição de probabilidade no conjunto de ideologias, onde cada probabilidade reflete o

quão provável o eleitor acredita naquela ideologia como a específica do candidato.

Para modelar o comportamento do eleitor sob incerteza, utiliza-se a teoria da utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern, assumindo que os eleitores são maximizadores de utilidade esperada. Entretanto, as probabilidades são dadas de maneira subjetiva, e não objetiva.² Em outras palavras, a ausência de informação a respeito do posicionamento ideológico (assumido como a única informação relevante para o voto) dos candidatos leva os eleitores a representá-los através de uma distribuição de probabilidade que incorpora elementos subjetivos ao processo de atribuição de probabilidades. Contudo, visto que o interesse desse trabalho é analisar o impacto das restrições na quantidade de informação relevante geradas pelas estratégias de campanha dos candidatos, ao invés de assumirmos a teoria da probabilidade subjetiva de Savage (1954) como marco teórico, onde tais probabilidades são inferidas através do padrão de escolhas dos indivíduos, adota-se aqui uma abordagem alternativa, baseada no princípio da máxima entropia proposto em Jaynes (1957, 1968) para obter as probabilidades que descrevem os candidatos, onde se estabelece uma relação entre a quantidade de informação disponível e as representações probabilísticas.³

Seguindo a literatura que estuda a ambiguidade na política (e.g. Shepsle (1972), Page (1976), Alesina e Cukierman (1990), Glazer (1990) e outros), a incerteza é incorporada no modelo supondo que ela surge como consequência da ambiguidade na plataforma política apresentada pelos candidatos durante a campanha eleitoral. Supõe-se que a informação oriunda da campanha política entra como um argumento no processo de atribuição de probabilidades, dado que essa informação é utilizada para determinar qual é o posicionamento ideológico do candidato. Após, são exploradas as consequências de um tipo especial de estratégia, que definimos como de *máxima ambiguidade*, que demanda a ausência de qualquer informação relevante acerca do posicionamento ideológico do candidato durante sua campanha eleitoral. Nesse caso, a estratégia de campanha leva os eleitores a experimentarem o maior grau de incerteza possível durante o processo de escolha, levando-os a uma situação de indiferença entre quaisquer dois competidores. Além disso, observado esse resultado de total indiferença, sugere-se que a ocorrência desse grau máximo de incerteza inviabiliza o critério ideológico como ferramenta útil para determinar o voto, como também para a construção de um conjunto de preferências que seja *single-peaked* em relação aos candidatos, conforme proposto em Black (1948), mesmo quando há tal conjunto de preferências

²O tópico da subjetividade e objetividade das probabilidades será abordado com mais clareza na seção seguinte. Por hora, cabe comentar que supor a existência de probabilidades não vinculadas a frequências - uma vez que estamos trabalhando em um espaço teórico no qual fica inviabilizada a obtenção de probabilidades por esse modo - nos leva a assumir que essas são, portanto, subjetivas.

³É importante ressaltar que a associação entre os temas “eleições” e “princípio da máxima entropia” não é algo inédito. Por exemplo, no trabalho de Sewell, MacKay e McLean (2009), é proposta uma regra de votação chamada “sistema de votação de máxima entropia” cujo intuito é conciliar uma sociedade democrática na qual as opiniões dos indivíduos são muito distintas, com a proteção dos direitos desses mesmos indivíduos. Contudo, apesar de compartilhar o tema da entropia e das eleições e voto, o contexto no qual o princípio da máxima entropia foi utilizado no trabalho desses autores difere substancialmente do aqui proposto.

single-peaked no conjunto de ideologias, que estabelecem o critério para a eleição do melhor candidato.⁴ Finalmente, ressalta-se que os resultados aqui apresentados descrevem uma situação particular, ou uma possibilidade lógica, e não uma situação geral; ou seja, visto que uma série de restrições devem ser respeitadas para que os resultados efetivamente ocorram, parece pouco provável que eles sejam observados na realidade.

Dessa forma, além dessa introdução, esse ensaio está dividido em três seções: a seção 2.2 apresenta a literatura que forma o arcabouço teórico utilizado para a construção do modelo; a seção 2.3 desenvolve o modelo, analisando os resultados principais, enquanto a seção 2.4 conclui e sugere possíveis áreas a serem futuramente exploradas dentro desse campo de pesquisa.

2.2 ASPECTOS TEÓRICOS

Na presente seção iremos explorar o arcabouço teórico que fundamenta a construção do modelo utilizado nesse trabalho.

2.2.1 Comportamento do eleitor, competição eleitoral e ambiguidade

A suposição que indivíduos votam ideologicamente segue a tradição dos *modelos espaciais de competição eleitoral*, que são largamente influenciados pelo modelo de competição espacial de Hotelling (1929), e a contribuição posterior de Downs (1957), que propôs uma aplicação da ideia de competição espacial ao contexto político.⁵ Os modelos que seguem essa tradição buscam explicar aspectos de sistemas eleitorais democráticos, investigando como candidatos se comportam estrategicamente, e também como se determina o voto, e os motivos que levam os agentes a votar. Usando uma descrição concisa dada em Enelow e Hinich (1984), nessa classe de modelos

Electoral competition is viewed as taking place in a multidimensional Euclidean space that represents the issues of the campaign. Voters are represented in this space by ideal points denoting their most preferred positions on the issues. Each candidate is commonly perceived by the voter as a point in the same space, corresponding to the positions taken by the candidate on these issues.⁶ (ENELOW; HINICH, 1984, p. 459)

⁴A inexistência de incerteza também poderia levar ao mesmo resultado, mas apenas quando os candidatos são ideologicamente idênticos. De modo contrário, um grau elevado, mas que não seja a situação de máxima incerteza, poderia não gerar esse resultado, i.e, o voto ideológico seria útil como mecanismo de escolha individual e escolha social. Porém, nesse caso, é de se questionar qual a *qualidade* da escolha realizada quando pouco se sabe acerca das opções que se tem.

⁵Parte da literatura chama a abordagem espacial clássica como o “modelo Hotelling-Downs”.

⁶“A competição eleitoral é vista ocorrendo em um espaço Euclidiano multidimensional que representa os assuntos da campanha. Eleitores são representados nesse espaço por seus pontos ideais que denotam suas posições preferidas a respeito de cada assunto. Cada candidato é comumente percebido pelos eleitores como um ponto no mesmo espaço, correspondendo à posição adotada pelo candidato nos assuntos de campanha.” (Tradução nossa).

É válido mencionar que a abordagem espacial geralmente considera não apenas um espaço Euclidiano unidimensional como o ambiente de competição eleitoral, mas também espaços multidimensionais, onde cada assunto discutido durante a campanha eleitoral denota uma dimensão. Normalmente, quando se assume um espaço unidimensional, o que está sendo realizada é uma simplificação de um espaço Euclidiano n -dimensional em um espaço unidimensional, que pode representar as posições adotadas por eleitores e candidatos nos assuntos relevantes à política. Em um trabalho anterior, Enelow e Hinich (1981) modelam o comportamento de eleitores e candidatos apenas utilizando uma dimensão, a qual chamam de *dimensão ideológica*, argumentando que tal dimensão pode ser vista como um atalho para poder prever a posição dos candidatos a respeito de outros tópicos discutidos em campanha, bem como o posicionamento que cada um irá adotar caso seja eleito. (ENELOW; HINICH, 1981, p. 483)

Contudo, ao assumirmos essa tradição teórica, também é necessário considerar um aspecto importante: as características dos candidatos que os eleitores necessitam saber para ordená-los de acordo com suas preferências não são diretamente observáveis, ou passíveis de serem descobertas apenas sabendo quais candidatos estão competindo. Em outras palavras, do modo como os modelos estão estruturados, percebe-se que o objetivo principal do voto não é a escolha do candidato x ou y especificamente, i.e., os nomes não tem importância intrínseca para o voto⁷; o fator realmente importante é o que cada competidor efetivamente representa em termos de posicionamentos, ações e opiniões a respeito dos temas relevantes para uma sociedade, o que dificilmente pode ser determinado de maneira clara e objetiva. Dessa forma, dado que eleitores não escolhem diretamente tais opiniões e posicionamentos - ou, utilizando o modelo de Enelow e Hinich (1981), a melhor posição na dimensão ideológica -, para concluir que um candidato x é melhor que um outro y , uma primeira etapa do processo de decisão, onde os eleitores avaliam os candidatos de acordo com o que eles percebem destes, se fará necessária.⁸

Além disso, parece razoável imaginar que algum grau de incerteza a respeito de tais avaliações e julgamentos pode ocorrer. Enelow e Hinich (1981) sugerem que uma fonte em potencial de incerteza acerca do posicionamento dos candidatos na dimensão ideológica é a dificuldade dos eleitores para coletar e processar informações. Os autores sugerem que⁹

⁷Essa ideia relaciona-se com o axioma da *neutralidade*. Em linhas gerais, a neutralidade é uma propriedade que requer o tratamento simétrico das alternativas no contexto das escolhas coletivas, de modo que a escolha social resultante dependa apenas das preferências dos indivíduos em relação a elas. (UBEDA, 2004, p.196)

⁸De fato, esse tipo de comportamento ocorre na maioria dos processos de decisão, visto que parece plausível imaginar que os agentes, grupos e organizações inicialmente buscam avaliar cada alternativa disponível para assim tomar a melhor decisão possível, o que pode ser visto como o *estágio de avaliação* da tomada de decisão. (DANAN, 2010, p. 503). Portanto, buscar atribuir ideologias aos candidatos pode ser considerado como esse estágio no processo de decisão do voto, pois é justamente isso que irá determinar a melhor decisão para o eleitor.

⁹É importante dizer que não apenas o problema informacional pode gerar incerteza. De acordo com os autores, o reducionismo dos candidatos a predicados como “liberal” ou “conservador moderado”, que são comuns nas

In a world of imperfect information, a world in which there are costs associated with gathering and evaluating new information, the voter, faced with a serious decision such as deciding which candidate would make a better president, is forced to utilize a shortcut method to arrive at his choice.¹⁰ (ENELLOW; HINICH, 1981, p. 489)

Analisando a citação acima, é possível inferir que existe algum nível de *informação assimétrica* na relação entre candidatos e eleitores, uma vez que cada competidor sabe quais suas reais intenções e opiniões, ao passo que tal informação geralmente não é disponibilizada para os eleitores em geral. Decisões tomadas com base em um fraco conjunto de informações é um tópico bastante discutido na literatura que relaciona economia e psicologia, onde Tversky e Kahneman (1974) argumentam que nesse tipo de situação, onde o indivíduo não observa a característica que é crucial para a avaliação das alternativas e para a escolha final (no contexto presente, o posicionamento de cada candidato na dimensão ideológica), o estágio de avaliação irá ocorrer sob a influência dos *princípios heurísticos* de cada agente, que reduzem a alta complexidade dos julgamentos realizados, mas também viabiliza a ocorrência de severos erros de percepção dos indivíduos. Conforme salientado pelos autores,

Many of the probabilistic questions with which people are concerned belong to one of the following types: What is the probability that object A belongs to class B? What is the probability that event A originates from process B? What is the probability that process B will generate event A? In answering such questions, people typically rely on the representativeness heuristic, in which probabilities are evaluated by the degree to which A is representative of B, that is, by the degree to which A resembles B.¹¹ (TVERSKY; KAHNEMAN, 1974, p. 1124)

De fato, a tentativa de identificar se “o objeto A pertence à classe B” pode ser vista como uma forma geral do questionamento “o candidato A representa o posicionamento B na dimensão ideológica?”. Então, usando Tversky e Kahneman (1974) como referência, buscar representar os candidatos por posições em uma dimensão ideológica, ou em um espaço Euclidiano n -dimensional, i.e., o estágio de avaliação do processo de decisão, é nada mais que uma operação sujeita a uma série de princípios heurísticos; princípios esses que visam suprir a lacuna aberta pela ausência de informação acerca das características relevantes de cada candidato.

discussões gerais de política, são também uma das fontes geradoras de incerteza.

¹⁰“Em um mundo de informação imperfeita, um mundo no qual existem custos associados à coleta e avaliação de novas informações, o eleitor, confrontado com uma importante decisão tal como qual candidato irá ser um presidente melhor, é forçado a utilizar um critério simplificado para tomar a decisão.” (Tradução nossa).

¹¹“Muitas das questões probabilísticas com as quais as pessoas se preocupam pertencem a um dos seguintes tipos: qual a probabilidade do objeto A pertencer à classe B? Qual a probabilidade que um evento A seja originado de um processo B? Qual a probabilidade do processo B originar o evento A? Para responder tais questionamentos, as pessoas tipicamente irão se basear na heurística representativa, na qual as probabilidades são avaliadas através da intensidade que A é representativo de B, ou seja, que A reflete B.” (Tradução nossa).

Entretanto, supor que há informação assimétrica na relação entre candidatos e eleitores é algo plausível? Na abordagem espacial, a presença de assimetria na informação não parece somente plausível, mas sim algo provável de ocorrer na realidade. Uma das explicações possíveis está na própria natureza da competição eleitoral. Wittman (1983) diz que a maior parte da literatura que aborda a competição entre candidatos e o comportamento do eleitor assume que o principal objetivo dos competidores é vencer a eleição, isto é, candidatos veem a adoção de determinadas opiniões e posicionamentos no espaço de assuntos de campanha como meios para atingir a vitória. Em outras palavras, analisando a competição eleitoral supondo um espaço Euclidiano unidimensional - por exemplo, uma dimensão ideológica - candidatos buscarão adotar o posicionamento ideológico que, de acordo com as expectativas, irá garantir ou maximizar as chances de vitória nas eleições. Esse comportamento estratégico pode ser considerado como um dos elementos que agrava o problema de informação assimétrica.

Um resultado bastante conhecido que emerge da competição eleitoral em um espaço unidimensional é o *teorema do eleitor mediano*, proposto em Black (1948)¹² onde conclui-se que, em uma competição com apenas dois candidatos, e assumindo que cada um candidato é motivado para ganhar as eleições, o vencedor será aquele cujo posicionamento está mais próximo da posição preferida pelo eleitor mediano dessa sociedade. Obviamente, esse posicionamento não necessariamente refletirá as opiniões do candidato, i.e., o real posicionamento do candidato na dimensão ideológica. Outro fator que também pode auxiliar na explicação da existência de informação assimétrica é a atratividade de ideologias que estão no “centro” do espaço de competição. No trabalho de Enelow e Hinich (1981), é apresentado um modelo onde não apenas os candidatos irão buscar posições próximas a do eleitor mediano, como essa posição irá provavelmente estar no centro da dimensão ideológica. Portanto, se os competidores buscam estratégias que aumentam a chance de vitória, é pouco provável que eles estejam dispostos a adotar opiniões que sejam classificadas como de “direita” ou “esquerda”.

Porém, a utilidade do teorema do eleitor mediano para descrever a competição eleitoral tem sido questionada dados os pré-requisitos bastante específicos que devem ser satisfeitos para que os resultados sejam efetivamente válidos. Em Osborne (1993) salienta-se que a conclusão acerca da atratividade da posição do eleitor mediano é bastante sensível a suposição de uma eleição com apenas dois candidatos; ou seja, no momento em que se permitem múltiplos competidores, já não há mais como garantir que os mesmos resultados possam eventualmente ocorrer. Contudo, alguns outros trabalhos, como Palma et al. (1985) e Sengupta e Sengupta (2008), buscam propor novos modelos de competição espacial que restauram a ideia de mínima diferenciação entre os candidatos, como também as vantagens

¹²Esse teorema também é atribuído a Downs (1957). Veja Downs, A. (1957) *An Economic Theory of Democracy*. Harper & Row, New York.

da posição do eleitor mediano na estratégia eleitoral, mesmo em um ambiente com mais de dois competidores.

Dessa forma, visto que a “estratégia vencedora” para o candidato pode ser não revelar a sua real opinião a respeito dos assuntos discutidos, o tema da *ambiguidade* emergiu como um interessante tópico de pesquisa, uma vez que a adoção de um discurso ambíguo também pode ser parte de uma estratégia eleitoral que visa a vitória. O problema da ambiguidade nos discursos dos políticos já estava presente no trabalho de Hotelling (1929), onde após desenvolver seu pioneiro modelo de competição espacial, o autor descreve o sistema eleitoral norte-americano, que é dominado por dois partidos maiores - Democratas e Republicanos - como um arranjo que gera uma competição que

[...] does not lead to a clear drawing of issues, an adoption of two strongly contrasted positions between which the voter may choose. Instead, each party strives to make its platform as much like the other's as possible. Any radical departure would lose many votes, even though it might lead to stronger commendation of the party by some who would vote for it anyhow. Each candidate ‘pussyfoots’, replies ambiguously to questions, refuses to take a definite stand in any controversy for fear of losing votes.¹³ (HOTELLING, 1929, p. 54)

Em um importante trabalho que explora o tópico da ambiguidade na política, Shepsle (1972) mostra como podemos compreender a adoção de discursos ambíguos como uma estratégia objetiva de campanha. No modelo proposto, a competição eleitoral ocorre em um espaço unidimensional, que o autor chama de *contínuo de políticas*¹⁴; contudo, ao invés de descrever a posição de cada candidato como um ponto específico nesse contínuo, os competidores podem ser vistos como *distribuições de probabilidade*, incorporando novos elementos à análise da competição eleitoral. Dessa forma, Shepsle (1972) busca generalizar o modelo de Downs (1957), visto que, mesmo se os candidatos sejam efetivamente pontos no espaço de competição eleitoral, isso equivaleria a dizer que as distribuições de probabilidade associadas a esses candidatos são degeneradas nesse intervalo (SHEPSLE, 1972, p. 559). Ao justificar essa abordagem probabilística, o autor diz que ela permite incorporar incerteza ao processo decisão, dado que “[...] possessing neither complete nor perfect information, the voter is simply uncertain of the policies a candidate represent.”¹⁵(SHEPSLE, 1972, p. 559).

¹³ “[...] não leva a uma clara definição de temas, nem a adoção de duas posições fortemente contrastantes dentre as quais o eleitor pode escolher. Muito pelo contrário, cada partido busca manter sua plataforma tão parecida quanto possível à plataforma do oponente. Qualquer distinção radical iria levar a perda de vários votos, muito embora também leve a fortes elogios de alguns eleitores. Cada candidato evita comprometer-se, responde ambigualmente às questões, recusa a adotar uma opinião definida em qualquer controvérsia devido ao medo de perder votos.” (Tradução nossa).

¹⁴ Do original em inglês, *policy continuum*.

¹⁵ “[...] não possuindo informação completa ou perfeita, o eleitor acaba por ter dúvidas quanto às políticas que o candidato representa.” (Tradução nossa).

No modelo de Shepsle (1972), supõe-se que eleitores são maximizadores de utilidade esperada e votam de acordo com as suas preferências individuais¹⁶. Adicionalmente, o autor mostra que, se a maioria desses eleitores possui gosto pelo risco, adotar a posição do eleitor mediano nesse espaço pode não ser a melhor estratégia para um candidato que visa vencer a disputa eleitoral, sendo preferível a construção de uma estratégia que aumenta a incerteza e a ambiguidade. Portanto, nesse caso os candidatos motivados pela vitória serão incentivados a adotar posicionamentos ambíguos durante a campanha eleitoral (SHEPSLE, 1972, p. 563), i.e., há uma tendência a termos representações probabilísticas não-degeneradas dos candidatos.¹⁷

Representar candidatos como loterias também é um artifício presente no modelo de McKelvey (1980). Nesse modelo, a competição se dá em um espaço euclidiano n -dimensional de tópicos de campanha, onde cada competidor pode escolher qual a distribuição de probabilidade que irá adotar durante o processo eleitoral dentre um conjunto Π de distribuições disponíveis; sendo a ambiguidade diretamente relacionada com a variância da distribuição escolhida (McKELVEY, 1980, p. 388). O autor mostra que a introdução de ambiguidade no modelo não afeta o posicionamento de equilíbrio competitivo dos candidatos, i.e., o posicionamento escolhido pelos candidatos, na presença de ambiguidade, será o mesmo escolhido por eles caso esse fator seja excluído da análise.¹⁸

Page (1976) analisa o modelo de Shepsle, o qual ele chama de “abordagem da loteria”, e sugere outra teoria para explicar a existência de ambiguidade, chamada de teoria da “alocação de ênfase”.¹⁹ De acordo com essa outra abordagem, o candidato escolhe alguns assuntos para serem melhor explorados durante a campanha eleitoral, o que pode levar a uma ênfase excessiva a alguns tópicos que não são efetivamente úteis para identificar o seu posicionamento ideológico, ou a sua real opinião a respeito dos tópicos que são relevantes para os eleitores. Por exemplo, o autor diz que em muitas dimensões no espaço de assuntos de campanha, tais como igualdade racial ou paz mundial, os eleitores tendem a convergir para a mesma opinião, de modo que elas não são relevantes para indicar o estilo do candidato, ou sua opinião em relação a assuntos mais polêmicos. Portanto, se os competidores exploram excessivamente o debate nesses assuntos onde há pouca controvérsia, então é possível imaginar que os eleitores irão classificar os discursos de tais candidatos como vagos e pouco esclarecedores, o que leva à ambiguidade. Para concluir, o autor diz que a ambiguidade é algo difícil de prevenir na política, e que as maneiras de mitigar o problema estão intimamente relacionadas à mudança nos incentivos “either by persuading the public to react

¹⁶Em outras palavras, eleitores não votam estrategicamente.

¹⁷Ressalta-se que no modelo de Shepsle (1972) o resultado acima é sensível à hipótese de gosto pelo risco. Se a maioria dos eleitores é avessa ao risco, uma estratégia que não privilegia a ambiguidade irá aumentar as chances de vitória.

¹⁸Entretanto, o autor diz que esse modelo apresenta um caso bastante especial, e não pode ser tomado como uma explicação geral do contexto político.

¹⁹Do original em inglês, *emphasis allocation theory*.

more negatively to ambiguity (...) or by structural changes such as legal requirements of legislative question periods, face-to-face debates, or written answers to specific questions”.²⁰ (PAGE, 1976, p. 750)

Glazer (1990) justifica a ambiguidade abordando o problema da assimetria de informação, mas no sentido contrário ao já comentado, i.e., o foco não está na incerteza dos eleitores em relação às características políticas do candidato, mas sim na incerteza dos candidatos em relação às preferências políticas dos eleitores. Na visão do autor, em uma competição com dois candidatos, a falta de informação a respeito das preferências políticas dos eleitores pode levar à incerteza quanto à posição preferida pelo eleitor mediano nessa sociedade, levando os competidores a adotar discursos políticos ambíguos para evitar um comprometimento efetivo com uma plataforma de campanha que não leve à vitória, ou que seja pouco popular. A falta de conhecimento a respeito das preferências do eleitorado já havia sido explorada no trabalho de Ferejohn e Noll (1978), onde os autores, novamente assumindo uma eleição com dois competidores, sustentam que esse tipo de incerteza pode alterar a estrutura da campanha eleitoral de tal forma a levar à não-adoção da posição do eleitor mediano, como imaginado tradicionalmente na literatura. Além disso, conforme os competidores creem ser o perfil do eleitorado, alguns assuntos relevantes à discussão política acabam por receber pouca atenção, mesmo que eles tenham interesse popular. Nesse sentido, apesar dos autores não tratarem especificamente do problema da ambiguidade, se assumirmos uma noção de ambiguidade relacionada ao trabalho de Page (1976), ao evitar tais assuntos durante a campanha eleitoral, os candidatos estariam alocando pouca ênfase à tópicos relevantes para a decisão dos eleitores, tornando-se um fato gerador de incerteza e levando ao sentimento de ambiguidade no discurso político.

Em Alesina e Cukierman (1990) são estudadas as potenciais consequências da existência de um *trade-off* enfrentado pelos políticos entre a adoção de opiniões e políticas que maximizam a chance de vitória, e as políticas que de fato representam os seus posicionamentos ideológicos. Diferentemente do modelo de Shepsle (1972), onde o objetivo primário é vencer e o objetivo secundário é a maximização dos votos, no modelo de Alesina e Cukierman (1990) os candidatos também valorizam a possibilidade de escolher estratégias que realmente sejam aquelas de seu interesse e estejam de acordo com suas visões de mundo, mesmo que essa estratégia possa dificultar a obtenção da vitória no pleito eleitoral. A ambiguidade, de acordo com o modelo dos autores, é definida como

[...] the variance of the ‘noise’ between the policy outcome observed by voters and the policy instrument chosen by politicians. The incumbent may choose procedures that are less precise than what is technologically feasible. Higher ambiguity or less precision enables the policymaker to exploit the trade-off

²⁰“ou persuadindo o público a reagir mais negativamente à ambiguidade (...) ou por mudanças estruturais tais como exigências legais em relação às seções legislativas, debates presenciais, ou respostas escritas a perguntas específicas.” (Tradução nossa).

between his ideology and the likelihood of reappointment.²¹ (ALESINA; CUKIERMAN, 1990, p. 831)

Então, os formuladores de políticas usam a ambiguidade como um instrumento útil na tarefa de lidar com esse *trade-off*, dado que a ausência de ambiguidade iria obrigá-los a assumir apenas posições que estão de acordo com aquelas que efetivamente refletem os seus interesses e opiniões pessoais, menosprezando o fator político e o interesse em vencer as eleições também. Uma ideia relacionada é explorada em Aragonès e Neeman (2000), onde argumenta-se que a adoção de posições ambíguas pode ser resultante de uma preferência por flexibilidade; i.e., se o candidato propõe uma plataforma política ambígua, então, apesar de possivelmente estar perdendo um determinado número de votos, caso ele seja o vencedor da eleição, durante seu governo ele terá mais flexibilidade para empregar diferentes políticas, uma vez que não terá se comprometido na época de campanha com nenhuma plataforma específica de ações.²²

2.2.2 Loterias, probabilidades subjetivas e entropia

Conforme visto nos trabalhos de Shepsle (1972) e McKelvey (1980), a teoria da decisão sob incerteza parece ter algumas contribuições importantes para o problema do eleitor, onde representar candidatos como loterias pode ser uma maneira adequada para lidar com o problema. Normalmente, assume-se que as alternativas são *arriscadas*, no sentido de que os resultados incertos são passíveis de serem descritos por probabilidades determinadas de maneira objetiva e exógena ao processo de decisão. No problema do eleitor, isso seria equivalente a dizer que candidatos são loterias no espaço de assuntos de campanha, ou na dimensão ideológica.

Para ilustrar, imagine um candidato x e dois posicionamentos ideológicos, L e R . Suponha, por exemplo, que x , durante sua campanha eleitoral, afirma ser um candidato do tipo L . Se o eleitor acredita na campanha eleitoral desse candidato, ou seja, se esse indivíduo acredita que x está sendo completamente sincero, então esse eleitor pode associar ao candidato x uma loteria no espaço (L, R) que paga L com probabilidade 1, e R com probabilidade 0. Entretanto, se esse eleitor não acredita na honestidade da fala do candidato, x será associado a uma loteria com que paga L com probabilidade p , R com probabilidade $(1 - p)$, sendo $0 < p < 1$. Incorporando essas representações no contexto da decisão do eleitor, então é

²¹“[...] a variância do 'ruído' entre o resultado da política observado pelos eleitores, e o instrumento de política escolhido pelos políticos. O governante pode escolher procedimentos que são menos precisos que os tecnicamente factíveis. Maior ambiguidade, ou menor precisão, possibilita o formulador de políticas a explorar o *trade-off* entre a sua ideologia e a verossimilhança da reeleição.” (Tradução nossa).

²²Além disso, a ambiguidade pode facilitar a campanha do governante no caso de uma tentativa de reeleição. Em outras palavras, o governante não será responsabilizado por desvios e contradições em relação a uma plataforma política inicialmente proposta, visto que a própria plataforma política durante a campanha não era específica.

possível analisar esse processo de decisão de acordo com os preceitos da *teoria da utilidade esperada* de von Neumann-Morgenstern.

Porém, é necessário questionar se as probabilidades associadas aos resultados em potencial são realmente determinadas de maneira objetiva. Quando é dita a sentença “se o eleitor acredita”, de certo modo está sendo sugerido que as probabilidades não são objetivas; por exemplo, é difícil de conceber que alguém possa efetivamente determinar que um candidato possui “80% de chance” de assumir um posicionamento do tipo L . Na realidade, como estamos tratando de um aparato teórico que visa representar o comportamento de candidatos e eleitores, não há maneira de determinar probabilidades objetivas visto que o próprio espaço no qual as loterias irão ser determinadas - um espaço Euclidiano multidimensional, ou um espaço unidimensional chamado de dimensão ideológica, e etc. - irá sofrer com algum grau de arbitrariedade. Dessa forma, assumindo que é factível representar candidatos por probabilidades em um espaço teórico de assuntos de campanha, parece razoável imaginar que as probabilidades sejam determinadas de modo *subjetivo*, o que significa que duas pessoas diferentes podem denotar o mesmo candidato através de distintas representações probabilísticas.

Um modo de ver a distinção entre probabilidades objetivas e subjetivas é sugerida em Knight (1921), onde o autor diz que, se as probabilidades são determinadas objetivamente, então estamos em um ambiente de decisão na presença de *risco*; mas se as probabilidades são subjetivas, então o processo de decisão ocorre sob *incerteza*.²³ Voltando ao exemplo anterior, no sentido proposto pelo autor, o ambiente de incerteza viabiliza situações onde um indivíduo a está plenamente confiante que o candidato x é do tipo L , enquanto outro indivíduo b está tão confiante quanto a que x na verdade é do tipo R : nesse caso, imagina-se que esses elevados “níveis de confiança” se reflitam em altas probabilidades para L no caso de a , e R no caso de b , indicando a discordância de opiniões entre esses eleitores. Para Castro e Faro (2005), incerteza e risco se diferenciam através do modo de determinação - se endógeno ou exógeno - das probabilidades, onde “é o fato de termos probabilidades dadas de maneira exógena que caracteriza uma situação de escolha sob risco”. (CASTRO; FARO, 2005, p.70)

A teoria das probabilidades subjetivas de Savage (1954), cujo trabalho é considerado como um dos mais influentes nesse campo de pesquisa, explora o comportamento dos indivíduos frente à existência de tais probabilidades subjetivas, sugerindo que, se o comportamento dos indivíduos está de acordo com um determinado grupo de axiomas, então seria possível inferir um conjunto de probabilidades subjetivas que refletem o quão provável o agente considera cada resultado. Nesse caso, esse indivíduo se comporta tal como um “maximizador de utilidade esperada”, mas considerando as probabilidades como algo subjetivo ao invés de objetivo. Conforme Zanetti (2008), o modelo de Savage “também se trata de

²³Eventualmente, aqui utilizaremos os termos risco e incerteza de modo indistinto.

um modelo de Utilidade Esperada e se resume ao modelo de von Neumann-Morgenstern, porém agora as probabilidades são subjetivas e endógenas, ao invés de objetivas e exógenas” (ZANETTI, 2008, p. 55). Anscombe e Aumann (1963), também propõem um teorema para provar a existência dessas probabilidades subjetivas, mostrando que o aparato tradicional da teoria da utilidade esperada pode ser utilizada nessas condições. Em outras palavras, se o padrão de escolha de um indivíduo em relação às loterias satisfaz algumas restrições, então será viável reduzir incerteza a risco através do estabelecimento de uma relação equivalente entre *crença* e *probabilidade*, e então associar a cada possível resultado uma medida numérica de probabilidade. Após a construção da representação probabilística subjetiva, o critério usado para ordenar loterias seguirá o mesmo observado na análise tradicional da utilidade esperada.

Apesar da praticidade dessa abordagem, é importante notar que a teoria das probabilidades subjetivas não é plenamente aceita no ramo acadêmico. Um dos exemplos mais famosos a demonstrar as falhas da teoria de Savage, como também das outras “abordagens probabilísticas” em descrever o real comportamento dos indivíduos frente à incerteza, é o proposto em Ellsberg (1961). Inicialmente, o autor diz que, ao reduzirmos toda incerteza a risco, assume-se também que as pessoas agem “como se” probabilidades estivessem envolvidas no processo de decisão, sendo essas probabilidades atribuídas aos resultados potenciais pelo próprio tomador de decisão. Então, se isso ocorre de fato, apenas assim a abordagem de Savage (1954) poderia ser considerada como uma precisa descrição do comportamento humano.

Contudo, frequentemente as pessoas não agem “como se” estivessem atribuindo probabilidades. Através do seguinte exemplo, conhecido como *O Paradoxo de Ellsberg*, o autor mostra que os indivíduos não necessitam de probabilidades para assim tomar decisões sob incerteza: suponha que existam duas urnas, cada uma contendo 100 bolas. A primeira urna contém 50 bolas vermelhas e 50 bolas pretas, enquanto a única coisa que se sabe a respeito da segunda urna é que ela também contém apenas bolas vermelhas e pretas, mas em uma proporção desconhecida. Uma bola é retirada da primeira urna, e pergunta-se a um indivíduo se ele prefere apostar que a cor dessa bola é vermelha ou preta. Visto que o número de bolas vermelhas e bolas pretas é o mesmo, espera-se que o indivíduo seja indiferente entre apostar em vermelho ou preto. A mesma indiferença é tipicamente observada se, em vez de retirar a bola da primeira urna, essa bola é retirada da segunda.

Agora, suponha que é perguntado ao tomador de decisão se ele prefere apostar em vermelho (preto) na primeira urna, ou vermelho (preto) na segunda. Ellsberg argumenta que a maioria dos indivíduos irá preferir apostar em vermelho (preto) na primeira urna, onde as probabilidades de 50% para vermelho e 50% para preto são efetivamente conhecidas, ao invés de apostar na segunda urna, onde, digamos, uma chance vitória de 0% é um resultado teoricamente possível. Porém, se esse é o caso, os axiomas propostos por Savage (1954)

não levam a um conjunto de probabilidades consistentes: se apostar em “vermelho - primeira urna” é preferível a uma aposta em “vermelho - segunda urna”, e se apostar em “preto - primeira urna” é preferível a uma aposta em “preto - segunda urna”, então ambas probabilidades subjetivas associadas às apostas “vermelho - segunda urna” e “preto - segunda urna” devem ser menores que 50%, e portanto a soma dessas probabilidades não poderá ser 100%, o que viola um dos axiomas fundamentais da teoria da probabilidade.²⁴ Uma explicação plausível para esse comportamento pode estar em uma espécie de *aversão à ambiguidade* no processo de escolha. Ou seja, indivíduos preferem loterias com probabilidades conhecidas, ao invés de enfrentar loterias onde há uma chance ambígua de vitória.²⁵

Além disso, o fato da abordagem de Savage (1954) resultar em probabilidades determinadas endogenamente acaba tornando-a pouco adequada para os objetivos do presente trabalho. Visto que as probabilidades dependeriam do padrão de escolha dos indivíduos, pouco poderia se dizer a respeito do impacto da falta de informação, do emprego de estratégias de campanha que privilegiem discursos ambíguos, e da ocorrência de viés no julgamento realizado pelos eleitores. Dessa forma, torna-se necessário encontrar um método que seja capaz de vincular a atribuição de probabilidades subjetivas aos fatores informacionais que buscamos explorar.

Uma maneira de lidar com a falta de informação e seus efeitos na operação de atribuir probabilidades a resultados incertos é aplicando a ideia *entropia*. Esse conceito, usualmente associado com o estudo da termodinâmica, foi introduzido na análise de sistemas de comunicação e informação por Shannon (1948). De acordo com Ihara (1993), a *entropia* pode ser vista como uma medida de incerteza, ou aleatoriedade de um fenômeno aleatório (IHARA, 1993, p. 2). Então, dizer que alguém está mais (ou menos) incerto a respeito de algo seria equivalente a dizer que a entropia associada ao fenômeno é maior (ou menor); e dado que a incerteza se reflete na atribuição de probabilidades para cada resultado em potencial, então a entropia torna-se uma característica da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória.

Observada a relação entre entropia, incerteza e informação, o *princípio da máxima entropia*, proposto por Jaynes (1957), tornou-se um aparato teórico bastante útil para atribuir probabilidades ditas subjetivas. O autor sugere que, ao resolvermos um problema de maximização de entropia sujeito à restrições que denotam a informação disponível e conhecida, obtemos um

[...] unique, unambiguous criterion for the “amount of uncertainty” represented by a discrete probability distribution, which agrees with our intuitive notions that a broad distribution represents more uncertainty than does a sharply peaked one, and satisfies all other conditions which make it reasonable.²⁶

²⁴Assumindo a definição de probabilidade axiomática de Kolmogorov.

²⁵Para maior aprofundamento no assunto, ver Fox e Tversky (1995)

²⁶“[...] único, inequívoco critério para a ‘quantidade de incerteza’ representada por uma distribuição de proba-

(JAYNES, 1957, p. 622)

Além disso, o autor determina em qual sentido devemos entender o papel da subjetividade nesse contexto, quando é dito que

[...] a prior probability assignment not based on frequencies is necessarily subjective in the sense that it describes a state of knowledge, rather than anything which could be measured in an experiment.²⁷ (JAYNES, 1968 p. 3)

Dado que, no contexto eleitoral aqui discutido, parece difícil conceber probabilidades sendo determinadas através da observação das frequências de ocorrência de cada resultado - o que levaria a probabilidades objetivas pela definição de Jaynes - o princípio da máxima entropia parece ter alguma utilidade para a representação de candidatos através de loterias subjetivas. E se tal princípio é assumido como o critério que leva à construção das probabilidades, estamos também supondo que a distribuição de probabilidade resultante maximiza a incerteza do eleitor em relação ao posicionamento do candidato no espaço, além de relegar um papel importante ao fator informacional. Dessa forma, o princípio de Jaynes se distancia da abordagem das probabilidades subjetivas de Savage. Para esse último autor, as probabilidades subjetivas dependem do padrão observado de *escolhas* dos agentes; ou seja, tais medidas de probabilidade são definidas de modo *endógeno* ao processo de escolha. Ao utilizarmos os conceitos propostos por Jaynes, as probabilidades subjetiva irão depender da quantidade de informação que o indivíduo possui, e serão obtidas de forma *exógena* ao processo de decisão, i.e., antes da tomada de decisão, o indivíduo já terá estabelecido o conjunto de probabilidades que irá descrever cada uma das alternativas.

Ilustrando o funcionamento do princípio da máxima entropia, novamente imagine que cada eleitor deve classificar os candidatos em L e R de acordo com as informações que estão disponíveis e são relevantes para tal julgamento. Porém, imagine que, além da informação que “o indivíduo x é candidato nessa eleição”, os eleitores não tem nenhuma outra informação a respeito de x ; ou seja, não há nada que possa auxiliar na determinação do tipo de x . Dada essa situação, o quão forte um indivíduo em particular irá acreditar em L ou R como o posicionamento de x ? Se não há nenhuma informação que viabilize um julgamento mais sofisticado, é razoável pensar que esse eleitor irá associar a mesma probabilidade de ocorrência para os dois resultados, i.e., o agente irá acreditar que tanto L quanto R são igualmente prováveis de serem o tipo do candidato x . Tal resultado, que parece intuitivamente factível, também é obtido via a aplicação do princípio da máxima entropia, uma vez que associar a

bilidade discreta, que concorda com nossa noção intuitiva que uma distribuição mais ampla representa mais incerteza que uma distribuição com um pico, e satisfaz todas as outras condições que a faz razoável.” (Tradução nossa).

²⁷ “[...] uma atribuição de probabilidade *a priori* não baseada em frequências é necessariamente subjetiva, no sentido que ela descreve um estado de conhecimento, ao invés de qualquer outra coisa que pudesse ser mensurada em um experimento.” (Tradução nossa).

mesma probabilidade para ambos os resultados seria a única distribuição de probabilidade razoável, ou a que menos demanda dada a quantidade de informação disponível: qualquer resultado diferente implicaria em afirmar que há mais informação sendo utilizada no processo de atribuição de probabilidades.

Esse resultado, que parece concordar com a intuição dos indivíduos, tornou-se conhecido como o *Princípio da Razão Insuficiente*. Keynes (1921), ao criticá-lo, sugeriu chamar tal princípio de *Princípio da Indiferença*, descrevendo-o da seguinte maneira:²⁸

The Principle of Indifference asserts that if there is no *known* reason for predicating of our subject one rather than another of several alternatives, then relatively to such knowledge the assertions of each of these alternatives have an *equal* probability. Thus *equal* probabilities must be assigned to each of several arguments, if there is an absence of positive ground for assigning *unequal* ones.²⁹ (KEYNES, 1921, p. 45)

Em geral, o que o princípio da indiferença prega é que a quantidade de informação disponível afeta as probabilidades percebidas pelos agentes, o que, por sua vez, impacta no formato da distribuição de probabilidades, i.e., se uma pessoa tem razões fortes para crer que um resultado é mais provável que outro, então essa crença deve refletir-se nas probabilidades associadas a esses resultados.

Uma situação que está conectada com a ideia acima é o estado de *completa ignorância* dos indivíduos. Em Sinn (1980), um situação de completa ignorância é definida quando um agente não tem a mínima ideia a respeito do quão provável cada resultado em potencial é; o que se relaciona com a total falta informações acerca da plausibilidade dos resultados, ou, na terminologia proposta pelo autor, “estados da natureza”. Nesse caso, se as pessoas estão em uma situação de completa ignorância, então elas devem comportar-se como se todos os potenciais resultados fossem igualmente prováveis de maneira *objetiva*: seria racional um comportamento que assume probabilidades conhecidas com precisão e objetividade. O exemplo clássico de jogar “cara-ou-coroa” pode ajudar a clarificar a ideia por trás de tal princípio: se não há razões para imaginar que a moeda não é “justa”, então também não há razões para imaginar que o resultado “cara” é mais (ou menos) provável que o resultado “coroa”, o que leva a atribuição de uma probabilidade de 50% para a ocorrência de cada resultado.

Diversas abordagens “não-probabilísticas” de decisão sob incerteza também exploram a ideia de completa ignorância. Para citar algumas, em Maskin (1979) um “estado de com-

²⁸No seu *A Treatise on Probability* de 1921, Keynes criticou a ideia do princípio da razão insuficiente, dizendo que, tal como definido, o princípio pode levar a conclusões paradoxais e contraditórias. (KEYNES, 1921, p. 45)

²⁹“O Princípio da Indiferença diz que se não há razões *conhecidas* para privilegiar uma alternativa dentre as diversas existentes, então, relativo a tal conhecimento, as alternativas irão ter a mesma probabilidade. Portanto, probabilidades *iguais* devem ser atribuídas a cada uma das opções, se não há argumentos para assinalar probabilidades *diferentes*.” (Tradução nossa).

pleta ignorância” é caracterizado pela situação onde o tomador de decisão não consegue associar nenhuma probabilidade aos resultados factíveis, i.e., não há nenhuma distribuição de probabilidade que possa descrever o seu estado de conhecimento. Essa concepção de completa ignorância difere fortemente daquela proposta em Sinn (1980), onde a ausência de informação relevante levaria à atribuição de iguais probabilidades para cada resultado, implicando em uma distribuição de probabilidade uniforme. O mesmo entendimento é explorado em Bossert, Pattanaik e Xu (2000), que define “incerteza completa” o estágio onde o agente conhece “[...] the set of possible outcomes, but has no information about the probabilities of those outcomes or about their likelihood rankings”.³⁰ (BOSSERT; PATTANAİK; XU, 2000, p. 195). Os autores dizem que há uma série de regras de decisão sob incerteza, tais como a regra min-max e a regra lexicográfica min-max, que podem ser utilizadas para analisar os processos de decisão sem apelar para o uso de probabilidades.

Também é importante ressaltar uma consequência interessante da consideração de probabilidades subjetivas no contexto da decisão. Suponha que um eleitor a normalmente vote para os candidatos que são do tipo L , enquanto um outro eleitor b vote para o candidato do tipo R ; então, se esse é o caso, e se um candidato x é avaliado por a como L , e por b como R , então há uma elevada chance de ambos eleitores votarem para o *mesmo* candidato, mesmo possuindo preferências políticas opostas. Apesar da óbvia simplicidade do exemplo apresentado, ele mostra um dos potenciais efeitos negativos gerados pela presença de informação assimétrica: se a informação fosse simétrica entre candidatos e eleitores, no sentido de possibilitar que os eleitores possam conhecer o real tipo de cada candidato, então, no exemplo, poderíamos esperar a ou b votando para x , mas não ambos. Em Bartels (1996), o autor busca testar empiricamente como a ausência de informação pode impactar nos resultados eleitorais, utilizando dados das eleições presidenciais dos Estados Unidos. Nesse trabalho, compara-se a situação real - onde as pessoas não possuem informação completa - com uma situação hipotética onde os eleitores são plenamente informados, mostrando que há mudanças significativas no comportamento dos indivíduos de acordo com a quantidade de informação que eles possuem, o que, por sua vez, afeta o resultado do certame eleitoral. Em suma, no exemplo anterior, provavelmente um dos eleitores iria votar “errado”, isto é, não estaria votando de acordo com suas reais preferências políticas.

A confiança dos eleitores nas estratégias adotadas pelos candidatos através da campanha eleitoral é outro elemento que deve ser considerado. Por exemplo, em Shepsle (1972) e Alesina e Cukierman (1990), assume-se que os competidores tem o poder de determinar precisamente o “grau de ambiguidade” da sua plataforma política; ou seja, seria possível a adoção de uma estratégia de “zero ambiguidade”, caso isso esteja de acordo com os objetivos de campanha. Essa elevada capacidade de influenciar o eleitorado parece superestimar a

³⁰ “[...] o conjunto de possíveis resultados, mas não tem informação alguma acerca das probabilidades desses resultados, ou a respeito dos seus rankings de probabilidade.” (Tradução nossa).

realidade, visto que ela demanda candidatos perfeitamente capazes de determinar objetivamente as probabilidades que irão representá-los. Em outras palavras, sugerimos que não só as probabilidades não são objetivas, como também elas não podem ser escolhidas de forma precisa durante a campanha eleitoral.

Alguns estudos, como Lodge, Steenbergen e Brau (1995), e Dalanger (1996), buscam avaliar até que ponto a informação disponibilizada pelas campanhas eleitorais pode afetar a opinião dos eleitores, mas sem atingir nenhum tipo de consenso. Entretanto, mesmo assumindo que candidatos podem influenciar o eleitorado através da informação de campanha, não parece plausível negligenciar o fato que cada eleitor pode - ou não - acreditar nessas informações, ou pode processá-las utilizando suas capacidades de julgamento. Em resumo, um candidato x não tem garantias de que seus esforços para convencer os eleitores que seu tipo é L ou R serão efetivos; e visto que os eleitores não tem certeza a respeito do tipo do candidato, então há a possibilidade de não estarem realizando a melhor escolha possível.

2.2.3 Racionalidade, regras de votação e escolhas sociais

O conceito de racionalidade dos indivíduos possui papel fundamental no desenvolvimento da teoria econômica moderna. Se definido como *racional* um agente que possui relações de preferência que respeitam as propriedades da *completude* e *transitividade*³¹ (MAS-COLELL; WHINSTON; GREEN, 1995, p.6), podemos assegurar que o indivíduo, frente à necessidade de escolher uma opção dado um conjunto finito de opções existentes, será capaz de tomar tal decisão, mesmo que essa não seja única³².

De modo geral, essa capacidade de decisão é uma propriedade bastante desejável, seja no âmbito da escolha individual ou se tratando de escolhas coletivas, i.e. escolhas de um conjunto de indivíduos frente a uma determinada matéria. Contudo, as escolhas coletivas - ou escolhas *sociais* - necessitam do emprego de algum instrumento para identificar o *ordenamento social* das opções, onde recorre-se normalmente a algum tipo de regra de votação, que busca ser “[...] a method of arriving at social choices derived from the preferences of individuals”³³ (ARROW, 1950, p.330). Dessa forma, além de traduzir as preferências individuais, a regra de votação adotada também deverá ser *decisiva* - propriedade conhecida como *decisiveness* na literatura - cujo objetivo é assegurar que, ao final do processo de votação, uma única opção seja a escolha social (MAY, 1952, p.681).³⁴

³¹De acordo com Mas-Colell, Whinston e Green (1995), a completude implica que o indivíduo tem uma preferência bem definida entre quaisquer duas opções que se apresentem, enquanto transitividade implica que é impossível que hajam “ciclos” nas preferências. Dado o conjunto de alternativas $\{x, y, z\}$, uma preferência cíclica é caracterizada, por exemplo, pela situação na qual o agente prefere x a y , y a z , mas z a x .

³²Formalmente, defina X como um conjunto finito de opções, $B \neq \emptyset$ um subconjunto não-vazio de X , e $C(B)$ a escolha feita pelo indivíduo dadas as opções em B . Então, se as preferências são racionais, temos que $C(B) \neq \emptyset$.

³³“[...] um método para obter escolhas sociais derivadas das preferências dos indivíduos.” (Tradução nossa).

³⁴A suposição do “único escolhido” pode ser relaxada para “múltiplos escolhidos”, a depender do caso. Porém,

Diversos autores buscaram estudar quais regras de votação que satisfazem essa e outras propriedades desejáveis para um instrumento de representação de preferências coletivas. Dessas regras, destaca-se a *regra da maioria*, que tem recebido grande interesse acadêmico desde o final do século XVIII³⁵ (SEN; PATTANAIK, 1969, p. 178). Por essa regra, um candidato x é escolhido se, para todos os outros candidatos y no conjunto das opções viáveis, mais indivíduos preferem x a y do que y a x (DASGUPTA; MASKIN, 2008, p. 950). Nesse sentido, surge a indagação: é possível obter uma regra de votação que reflita as preferências dos indivíduos, e ao mesmo tempo seja consistente com o conceito de racionalidade? E tal regra irá possuir a propriedade do *decisiveness*? Em outras palavras, preferências completas e transitivas são características de ordenamentos sociais, quando esses são construídos tendo como base uma regra de votação e as preferências individuais? No resultado conhecido como *Teorema da Impossibilidade de Arrow*³⁶, mostra-se que

[...] for any method of deriving social choices by aggregating individual preference patterns which satisfies certain natural conditions, it is possible to find individual preference patterns which give rise to a social choice pattern which is not a linear ordering.³⁷ (ARROW, 1950, p. 330)

Em resumo, se não há regra de votação que evite a possibilidade lógica de um ordenamento social não-linear (i.e., não-transitivo), então não é possível que a propriedade de racionalidade dos indivíduos sempre implique em racionalidade das preferências coletivas. Isso, por sua vez, significa que a regra de votação pode não ser útil para realizar a função para a qual ela foi concebida: a escolha da opção socialmente preferível. Entretanto, é necessário salientar que a importância da racionalidade coletiva enfrenta alguma resistência em determinados autores. Buchanan (1954), criticando o trabalho de Arrow (1950), diz que imaginar a existência de “racionalidade coletiva” implica também assumir uma *existência orgânica* desse coletivo, que independe dos seus componentes individuais. Nesse sentido, a ideia de “valores e fins” são propriedades da sociedade como um ente, e apenas quando assumimos essa abordagem é que poderíamos testar racionalidade ou irracionalidade coletiva (BUCHANAN, 1950, p. 116). Ademais, as ideias de escolhas potencialmente inconsistentes são importantes no sentido de assegurar a possibilidade de mudança; ou seja, se as preferências dos indivíduos mudam com o tempo, o conceito de inconsistência torna-se

em ambas situações a existência de uma *escolha*, seja única ou múltipla, é algo imprescindível.

³⁵Não se negligencia aqui a existência de diversas outras regras de votação, como a regra da pluralidade e a votação por *rankings*. Contudo, utilizando o trabalho de Dasgupta e Maskin (2008) como referência, onde mostra-se que a regra da maioria é mais robusta frente as outras regras, podemos encontrar parte da justificativa do maior interesse acadêmico por essa regra em específico.

³⁶É válido mencionar que o trabalho original nomeia o teorema como um teorema de *possibilidade*. Porém, dado o seu conteúdo, o resultado tornou-se conhecido como o “Teorema da Impossibilidade de Arrow”. Ver Arrow, K. (1950). A Difficulty in the Concept of Social Welfare. *Journal of Political Economy*. v. 58, n. 4.

³⁷“[...] para qualquer método que deriva escolhas sociais através da agregação de preferências individuais que satisfaz certas condições naturais, é possível encontrar padrões de preferências individuais que leva a um padrão de escolha social que não é um ordenamento linear.” (Tradução nossa).

vago, uma vez que as escolhas sociais em um determinado período podem ser diferentes daquelas feitas nos períodos antecessores.

A validade do teorema da impossibilidade necessita da suposição de *domínio irrestrito das preferências*, ou seja, da hipótese que os agentes podem ter qualquer tipo de ordenamento das opções disponíveis, o que equivale a dizer que nenhuma suposição *a priori* é realizada acerca da natureza dos ordenamentos individuais³⁸ (ARROW, 1950, p. 342). Contudo, em Dasgupta e Maskin (2008), ao ser abordada a hipótese de domínio irrestrito, aponta-se que alguns tipos de preferências individuais são altamente improváveis na prática; em alguns casos poderíamos supor qual a lógica que permeia a construção dos ordenamentos individuais, o que nos levaria a trabalhar em domínios *restritos* de preferências, onde a ideia de ordenamento social que respeita a propriedade da racionalidade possa ser factível.³⁹

Sen (1966) buscou explorar que características as preferências individuais devem ter para assegurar a consistência das decisões sociais pela regra da maioria, propondo uma classe de preferências chamada de *value-restricted*.⁴⁰ No modelo de Sen, os indivíduos são separados em dois grupos: os indivíduos *engajados*, que não são indiferentes entre as alternativas apresentadas, e os indivíduos *não-engajados*, que são indiferentes em relação a todas as alternativas.⁴¹ Ademais, os elementos do conjunto de alternativas são tomados em trios, sendo cada alternativa de cada possível trio avaliada pelos indivíduos conforme os valores “melhor”, “médio” e “pior”, onde um conjunto de preferências individuais será *value-restricted* se, dado um trio de alternativas, houver uma alternativa e um valor tal que a alternativa não está associada a este valor, em nenhuma das preferências dos indivíduos desse grupo (SEN, 1966, p. 492).⁴² Nesse caso, o autor mostra que, se o conjunto de preferências dos indivíduos *engajados* possui essa característica para cada trio de alternativas (e se o número desses indivíduos é ímpar), então a decisão social via o emprego da regra da maioria será consistente.

³⁸Um exemplo clássico de preferências que geram inconsistências (pela regra da maioria) é o obtido no *Paradoxo do Voto*: imagine uma situação onde três indivíduos $\{1,2,3\}$ devem ordenar três opções $\{A,B,C\}$ conforme suas preferências. Se 1 prefere A em relação a B, e B em relação a C, logo prefere A à C. Se 2 prefere B em relação a C, e C em relação a A, logo prefere B a A. E se 3 prefere C em relação a A, e A em relação a B, logo prefere C a B. Como uma maioria prefere A a B, e B a C, então, por transitividade, A é preferível a C; contudo, uma maioria também prefere C a A, e assim falhamos em obter uma escolha.

³⁹De fato, Sen e Pattanaik (1969) apontam que, dada a potencial inconsistência das regras de votação - e especificamente da regra de maioria - é útil indagar quais são as condições necessárias e suficientes que as preferências individuais devem satisfazer para que se fundamente uma base para uma escolha social consistente.

⁴⁰Em tradução livre, “restrita por valores”.

⁴¹O artigo original nomeia o primeiro grupo de indivíduos *concerned*, e o segundo de indivíduos *unconcerned*. (SEN, 1966, p. 491)

⁴²Para exemplificar, imagine três alternativas $\{x, y, z\}$ e quatro indivíduos, $\{1, 2, 3, 4\}$. O indivíduo 1 prefere x a y , e y a z , enquanto 2 prefere y a z , e z a x , 3 prefere x a z e z a y , e 4 prefere y a x , e x a z . No esquema dos valores de Sen, a alternativa x é a “melhor” duas vezes, a “média” uma vez, e a pior uma vez, e a alternativa y é a “melhor” duas vezes, a “média” uma vez, e a “pior” uma vez. Entretanto, a alternativa z é a “média” duas vezes, e a “pior” outras duas vezes, mas nenhuma vez z foi avaliada como a “melhor”. Nesse caso, o conjunto formado pelas preferências dos quatro indivíduos será *value-restricted*.

Um conjunto de preferências individuais menos geral que o proposto em Sen (1966), e que assegura a propriedade do *decisiveness* da regra da maioria é o dito *single-peaked*, ou “pico único”, conforme proposto em Black (1948).⁴³ Nessa classe de preferências, imagina-se inicialmente que haja uma escala na qual todas as opções viáveis possam ser classificadas. Após, o indivíduo avalia as opções, atribuindo a cada uma delas um nível de “satisfação”. Graficamente, isso seria equivalente a representar cada opção como um elemento no eixo horizontal, e o grau de satisfação do agente no eixo vertical, o que torna possível traçar uma curva que relaciona as opções à níveis de satisfação.⁴⁴ Dado esse contexto, por *single-peakedness* entende-se uma curva com formato de “U” invertido; ou seja, quanto mais distante uma determinada opção estiver daquela opção que o indivíduo considera a melhor, menor será a sua satisfação com essa opção.

Esse tipo especial de preferências tem uma aplicação importante no contexto político e eleitoral, que se relaciona diretamente à hipótese do voto via critérios ideológicos. Considere o exemplo dado em Dasgupta e Maskin (2008): se imaginarmos uma situação onde a regra da maioria é utilizada para obter a escolha de um governante (como no caso de uma eleição presidencial, por exemplo), e que os indivíduos votam de acordo com suas preferências ideológicas, poderíamos, por simplicidade, representar cada opção (candidato) como um ponto em uma escala ideológica no intervalo “esquerda-direita”. Nesse caso, é factível que o voto realizado por critérios ideológicos implique em preferências *single-peaked* - ou seja, se existe um “ponto ótimo” no espectro “esquerda-direita” na visão do eleitor, quanto mais longe o candidato estiver de tal ponto, pior posição no ordenamento ele terá - eliminando a possibilidade lógica de ordenamentos sociais não-transitivos e a falha da regra da maioria na satisfação da propriedade de *decisiveness*.

Entretanto, ao incorporarmos incerteza ao processo de escolha social, i.e., ao tornarmos possível que os objetos de escolha da sociedade sejam tanto alternativas *certas*, como também *loterias não-degeneradas*⁴⁵, alguns resultados tradicionais tornam-se não tão óbvios. Zeckhauser (1969) buscou explorar justamente esse ponto, mostrando que, a depender do conjunto de preferências existente - e da intensidade das preferências individuais - a inclusão de alternativas incertas (loterias não-degeneradas) ao processo de escolha social pode levar à intransitividade no ordenamento obtido pela regra da maioria. O autor salienta que, mesmo com preferências *single-peaked* em relação as alternativas *certas*, a regra da maioria poderia levar a ciclos, sendo necessário identificar que outras características as preferências *single-peaked* devem satisfazer para não permitir que uma loteria possa derrotar a alternativa *certa*

⁴³Na realidade, preferências *single-peaked* podem ser vistas como um caso específico das preferências *value-restricted* de Sen (1966).

⁴⁴Uma caracterização completa de preferências *single-peaked* é dada em Ballester e Haeringer (2011).

⁴⁵Visto que, conforme já discutido, uma loteria degenerada configura uma alternativa sem incerteza, ao nos referirmos a uma alternativa *certa*, estaremos implicitamente assumindo que ela equivale a uma loteria degenerada, com probabilidade “1” para o resultado certo, e “0” para os demais.

universalmente vencedora, ao compararmos em pares as alternativas.

Para ilustrar, apresentamos o seguinte exemplo, baseado no caso apresentado por Zeckhauser (1969)⁴⁶: considere três alternativas *certas*, e loterias formadas por essas alternativas, avaliadas pelos indivíduos de acordo com a análise tradicional da utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern. Suponha que as três alternativas sejam “esquerda” (*E*), “centro” (*C*) e “direita” (*D*), e que existam três indivíduos, *X*, *Y* e *Z*, cujos ordenamentos sejam, respectivamente,

$$E P_X C P_X D$$

$$C P_Y D P_Y E$$

ou

$$C P_Y E P_Y D$$

e

$$D P_Z C P_Z E$$

onde $a P_i b$ pode ser lido como “o indivíduo *i* prefere *a* a *b*”. As preferências desses indivíduos são *single-peaked* no conjunto das alternativas, dada a ordem *E-C-D*. Nesse caso, a regra da maioria aplicada às opções certas resultaria em *C* como a escolha social, i.e., $C P E P D$ ou $C P D P E$.⁴⁷

Porém, suponha agora que uma loteria no conjunto (*E, C*) seja formada. Denote-a por $L(E, C)$. Para qualquer probabilidade positiva associada à *E*, o indivíduo *X* irá preferir a loteria $L(E, C)$ à alternativa *C* (pois a utilidade esperada de $L(E, C)$ é maior), mas *Y* e *Z* continuarão a preferir *C*. Logo, $C P L(E, C)$. O mesmo ocorre caso a loteria seja formada por *D* no lugar de *E*: o indivíduo *Z* irá preferir a loteria $L(D, C)$ à alternativa *C*, mas *X* e *Y* continuarão a preferir *C*. Logo, $C P L(D, C)$. Para uma loteria dada por $L(E, D)$, ao analisarmos em pares as alternativas certas, caso *E* seja socialmente preferível a *D*, então $E P L(E, D)$. Do contrário, caso *D* seja socialmente preferível a *E*, então $D P L(E, D)$. Em suma, comparando uma loteria às alternativas certas que a compõem, a loteria nunca será socialmente preferível a uma dessas alternativas certas.⁴⁸

Agora, incorpore à análise a *intensidade* das preferências. Imagine que *X* seja “radicalmente de esquerda”, e que não perceba muita diferença entre o “centro” e a “direita”. Da mesma maneira, suponha que *Z* seja “radicalmente de direita”, e que não perceba muita

⁴⁶No exemplo original, o autor cita o caso do “Clube 101”, onde há um grupo de 50 fãs de futebol, 50 fãs de balé, e 1 fã de comédia musical decidindo qual a forma de entretenimento para todos os membros do clube. Ainda que bastante criativo, durante o exemplo o autor pouco esclarece alguns pontos do raciocínio, de modo que optou-se aqui por detalhar melhor algumas passagens através de uma abordagem mais genérica, para fins de simplicidade da notação.

⁴⁷A falta do subscrito na relação *P* indica a relação de preferência social.

⁴⁸Omitimos aqui o caso de uma loteria $L(E, C, D)$, mas é possível mostrar que essa loteria será derrotada por uma loteria com duas alternativas, e que, por sua vez, é derrotada por uma alternativa certa.

diferença entre o “centro” e a “esquerda”. Nesse caso, uma loteria que atribua 50% de chance tanto para E quanto para D será preferível à C para os indivíduos X e Y , visto que a utilidade esperada dessa loteria será maior que a utilidade esperada de C . Contudo, conforme visto, qualquer loteria $L(E, D)$ irá ser socialmente derrotada por E , ou D (a depender da preferência do indivíduo Y) o que gera um ciclo no ordenamento social: C é preferível a D e a E , mas dependendo da intensidade das preferências, uma loteria $L(E, D)$ pode ser preferível a C ; porém, se esse é o caso, sabe-se que, ou E ou D será preferível a $L(E, D)$, gerando a intransitividade.⁴⁹

O trabalho de Zeckhauser (1969), ainda que com foco distinto, relaciona-se com a discussão que está sendo proposta na presente dissertação. Para o autor, preferências *single-peaked* no conjunto de alternativas certas não asseguram a eficácia da regra da maioria quando alternativas incertas, representadas por loterias no espaço de alternativas, são viabilizadas no processo de escolha. Uma nova condição geral para garantir a impossibilidade de ciclos seria a existência de preferências *single-peaked* não somente no conjunto de alternativas certas, mas também no conjunto de *loterias* (ZECKHAUSER, 1969, p. 703), i.e., ordenando as loterias de acordo com uma “ordem comum” a todos os indivíduos, em relação a essa ordem o profile de preferências individuais deve ser *single-peaked*.

Contudo, como podemos garantir que essas preferências em relação às loterias tenham essa propriedade, em um contexto de restrição informacional, e probabilidades formadas de modo subjetivo pelos indivíduos? Como gerar ordenamentos sociais em um ambiente onde as alternativas (os candidatos em uma eleição) são loterias com igual - e elevado - grau de incerteza? Em outras palavras, ao discutirmos a esfera política, assumindo que os candidatos se apresentam de modo ambíguo aos seus eleitores, estamos também imputando ao processo de escolha social a problemática das alternativas *incertas*, e todas as suas potenciais consequências.

2.3 MODELO

Nessa seção serão apresentadas as definições utilizadas para descrever as preferências no contexto *pré-eleitoral* e *eleitoral*, como também os resultados desse trabalho.

2.3.1 Preferências pré-eleitorais

Por *pré-eleitoral* entende-se o período anterior ao estabelecimento dos candidatos que irão competir nessa eleição. Visto que não existem candidatos nesse momento, seguindo a terminologia de Enelow e Hinich (1981), as preferências irão existir apenas na *dimensão ideológica*, e no conjunto de *ideologias*, que denota o espaço de competição eleitoral. Assuma que existam I indivíduos nessa sociedade, cada um indexado por $i = 1, \dots, I$.

⁴⁹Mais formalmente: ou teremos $C P E P D P L(E, D) P C$, ou $C P D P E P L(E, D) P C$.

Definição 2.1 A “dimensão ideológica” é dada pelo intervalo $X = [0, 1] \in \mathbb{R}$, onde cada ponto $x \in X$ chama-se “posição ideológica”. Uma “ideologia” é um elemento de um conjunto finito de nomes, onde cada nome é denotado por $\alpha_k \in \mathfrak{A}$, com $k \in \{1, \dots, K\}$, tal que $\forall i \in \{1, \dots, I\}$, o nome $\alpha_k \in \mathfrak{A}$ descreve a mesma posição ideológica $x^k \in X$. Finalmente, a “dimensão ideológica restrita” é dada pelo conjunto $X_{\mathfrak{A}} = \{x^k \in X : \alpha_k \in \mathfrak{A}\}$.

Ao adotarmos o intervalo $X = [0, 1]$ para representar a dimensão ideológica, estamos seguindo o modelo de Anderson e Gloom (1992), que analisa qual será a locação de equilíbrio dos candidatos, i.e., as *posições ideológicas* que eles irão adotar durante a competição eleitoral, assumindo que todas as posições factíveis são dadas pelo intervalo contínuo $[0, 1]$.⁵⁰ Porém, é importante ressaltar que a utilização do intervalo específico $X = [0, 1]$, ou nomeá-lo de “dimensão ideológica”, não são determinantes para a construção do modelo, mas sim maneiras de simplificar o seu desenvolvimento. Conforme já mencionado, no modelo de Shepsle (1972) o espaço de alternativas é um subintervalo $[A, B]$ dos números reais, onde A e B não são necessariamente 0 e 1, e o nome atribuído a tal intervalo não é “dimensão ideológica”, mas sim “contínuo de políticas”.⁵¹

Diferenciando os conceitos de *ideologia* e *posição ideológica*, adotamos uma abordagem semelhante a de Hinich e Pollard (1981) e Enelow e Hinich (1982). Nos modelos propostos pelos autores, existe uma *dimensão preditiva*, que é dada pela ideologia que descreve o candidato - ou seja, um nome utilizado para denotar suas posições políticas - e através desse nome se associa uma plataforma esperada de ações caso o candidato seja eleito. Adaptando esses conceitos ao contexto do modelo aqui desenvolvido, uma *ideologia* representa apenas um nome, ou descrição, dado por todos os membros da sociedade para uma específica posição ideológica em X . Essa posição, por sua vez, descreve um conjunto de ações e opiniões em relação a diversos assuntos que serão adotados pelo candidato vencedor da disputa, e é justamente a incerteza quanto a esse fator que dificulta o processo de decisão dos eleitores. Por notação, x^1 e x^2 irão denotar, respectivamente, as posições das ideologias α_1 e α_2 em $X = [0, 1]$.⁵²

É importante notar que, na presente formulação teórica, sugere-se que cada ideologia tem uma única posição ideológica - sendo essa a *única* informação necessária para definir a ideologia - mas nem toda posição representa uma ideologia específica. Por exemplo, se os indivíduos, quando dotados da informação “essa é a ideologia cujo nome é *liberal*”,

⁵⁰Conforme D’Agostino e Dardoni (2009), os modelos espaciais do voto normalmente assumem o intervalo $[0, 1]$, o conjunto dos números reais positivos \mathbb{R}_+ , ou o conjunto dos reais \mathbb{R} , como o espaço das alternativas.

⁵¹Outros nomes também já foram utilizados para descrever o espaço onde se dá a competição eleitoral, tal como “espaço de políticas” (Milyo (1999), D’Agostino e Dardanoni (2009)), ou “espaço ideológico” (Henry e Mourifié (2013)).

⁵²Aqui são utilizados nomes genéricos como α_1 and α_2 por simplicidade, mas cada elemento em \mathfrak{A} pode ser considerado como uma das diversas descrições comumente utilizadas nas discussões sobre política. Para ilustrar, α_1 e α_2 poderiam representar, respectivamente, *liberal* e *conservador*, e assim por diante.

podem entender essa sentença como “a ideologia cuja posição em X é 0.75”, então *liberal* é uma ideologia; do mesmo modo, se dotados da informação “posição ideológica 0.75”, os indivíduos também devem ser capazes de associar essa posição à ideologia cujo nome é *liberal*.

Nos modelos de Hinich e Pollard (1981) e Enelow e Hinich (1982), essa distinção se faz necessária com o objetivo de analisar como a existência de incerteza quanto aos elementos da dimensão preditiva - ou seja, incerteza a respeito do real significa de cada ideologia - pode afetar como os eleitores julgam as ações esperadas dos candidatos, i.e., a posição ideológica que cada candidato irá adotar caso seja o vitorioso. No contexto dos autores, se as pessoas podem discordar quanto às características dos candidatos, por qual razão não seria possível observar o mesmo tipo de discordância se tratando das características de uma ideologia? Imagine que um eleitor associe à ideologia *liberal* o número 0.10 na dimensão ideológica, enquanto outro indivíduo relacione à essa ideologia o número 0.90. Então, se ambos indivíduos, ao avaliarem um determinado candidato, associam-no à ideologia *liberal*, então seríamos levados a acreditar que ambos eleitores percebem esse candidato da mesma maneira, i.e., descrevem-no pelo mesmo conjunto de características e acreditam que esse candidato irá adotar a mesma plataforma política caso seja eleito, o que claramente é uma inverdade visto que cada agente entende o conceito *liberal* de modo distinto. Porém, dado que o propósito deste trabalho é lidar com o problema da incerteza apenas na relação candidato-eleitor, para evitar controvérsias neste primeiro estágio, é imposta a necessidade de um consenso sobre as características de cada ideologia; características essas sintetizadas no posicionamento dessa ideologia no conjunto X . A *dimensão ideológica restrita* será o conjunto das posições em X que representam uma ideologia no conjunto \mathcal{A} .⁵³

Além disso, é importante perceber que o conceito *ideologia* não é algo simples de ser definido. Aqui seguimos o modelo de Enelow e Hinich (1981), assumindo que uma ideologia nada mais é que um atalho com o qual é possível rotular os indivíduos, e através do qual é possível identificar suas opiniões a respeito dos mais diversos assuntos que permeiam as esferas econômicas, sociais, éticas, ambientais, e outras relacionadas. Naturalmente, o dispositivo matemático usado para representar elementos tão imateriais pode ser visto como excessivamente vago por alguns; entretanto, para os propósitos deste trabalho, isso não parece ser um problema relevante, visto que não se busca uma discussão sobre o real significado de ideologia, ou quais características qualitativas elas devem ter para serem classificadas em, por exemplo, “direita” ou “esquerda”.

Supõe-se que cada agente possui uma relação de preferência racional \succsim_i na dimensão

⁵³Dadas as restrições impostas, salvo nas situações onde explicitar a distinção é necessária, eventualmente nesse trabalho os termos “ideologia” e “posição ideológica” serão utilizados como sinônimos, uma vez que, ao falar sobre uma ideologia em específico, também estamos assumindo que há apenas uma posição ideológica que pode descrevê-la.

ideológica X .⁵⁴ Por simplicidade, denote x, x' e x'' como posições genéricas nesse conjunto.

Definição 2.2 Para qualquer indivíduo i , uma “alternativa ótima” em X é um $x' \in X$ tal que $x' \succ_i x, \forall x \in X, e x \neq x'$. Nesse caso, x' será denotado por $x(i)$.

A definição acima apenas diz que cada indivíduo tem um “ponto ideal” na dimensão ideológica. Essa suposição fez-se necessária em Black (1948) para a sua descrição de *single-peakedness*, onde ele chama de *ótimo*, ou *pico*, essa alternativa mais preferível dentre as disponíveis. Por exemplo, o autor diz que em uma série de problemas, e.g. a precificação de um produto em uma firma, a taxa de salários, a definição da alíquota de um imposto, que normalmente estão associados a respostas numéricas, podemos assumir que os tomadores de decisão

[...] in arriving at an opinion on the matter, would often try initially to judge which size is for him the optimum. Once he had arrived at his view of the optimum size, the farther any proposal departed from it on the one side or the other, the less he would favor it.⁵⁵ (BLACK, 1948, p. 24)

Supor a existência de uma alternativa com essa propriedade é prática comum nos modelos espaciais do voto, dado que a maneira usual de expressar as preferências dos eleitores nessa classe de modelos é assumindo que os indivíduos tem *preferências euclidianas*. No nosso modelo, assumir que preferências são euclidianas equivale a dizer que cada posição ideológica nesse conjunto é avaliada de acordo com a distância entre ela e a opção $x(i)$. Adaptando de Bogomolnaia e Laslier (2007) para a notação aqui apresentada, esse tipo de preferências é definido como segue.

Definição 2.3 Uma relação de preferência \succsim_i em X é *Euclidiana* se

$$\forall x, x', x(i) \in X, x \succsim_i x' \iff \|x - x(i)\| \leq \|x' - x(i)\|$$

onde $\|\cdot\|$ denota a distância euclidiana. Dado que X é um espaço euclidiano unidimensi-

⁵⁴Seguindo Mas-Colell, Winston e Greene (1995) uma relação de preferência \succsim_i em X é dita racional se é: i) completa, se $\forall x, x' \in X$, temos que $x \succsim_i x'$ ou $x' \succsim_i x$; e ii) transitiva, se $\forall x, x', x'' \in X$, se $x \succsim_i x'$ e $x' \succsim_i x''$, então $x \succsim_i x''$, enquanto uma relação de preferência \succsim_i em X é estritamente convexa se $\forall x \in X$, o conjunto do contorno superior $S^> = \{x' \in X : x' \succ x\}$ é convexo. Uma relação de preferência \succsim_i em X é também chamada de *ordenamento fraco* em X , onde $x \succsim_i x'$ significa que i prefere (ou fracamente prefere) x a x' , enquanto se temos $x \succ_i x'$, então i *estritamente* prefere x a x' , e se $x \sim_i x'$, diz-se que o indivíduo está completamente indiferente em relação a x e x' . A propriedade da convexidade estrita sustenta que se duas alternativas $x, x' \in X$ são preferíveis a uma outra alternativa $x'' \in X$, então uma combinação convexa de x e x' também será estritamente preferível a x'' , i.e. para um $\lambda \in (0, 1)$, $\lambda x + (1 - \lambda)x' \succ x''$.

⁵⁵“[...] ao chegar a uma opinião sobre o assunto, irá normalmente tentar julgar qual o tamanho para ele é o ótimo. Uma vez que chegando ao seu julgamento do que é a opção ótima, quanto mais distante qualquer proposta estiver dessa opção, menos valiosa essa alternativa será.” (Tradução nossa).

onal, essa relação é equivalente a

$$\forall x, x', x(i) \in X, x \succsim_i x' \iff |x - x(i)| \leq |x' - x(i)|$$

Portanto, essa propriedade estabelece que as alternativas são avaliadas considerando um ponto que é utilizado como uma espécie de referência, e de acordo com essa referência as outras alternativas serão julgadas; o que reflete a intuição básica que sustenta os modelos espaciais do voto. Nesse caso, esse ponto é a alternativa ótima para o indivíduo i no conjunto X , indicando que, quanto mais próxima da alternativa ótima uma opção em X estiver, melhor avaliada essa opção será.

Axioma 1 Cada agente $i \in \{1, \dots, I\}$ possui preferências euclidianas em X e um $x(i) \in X$ que simboliza a sua alternativa ótima.

Assumir preferências euclidianas no espaço de competição é condição suficiente para obtermos preferências *single-peaked* nesse espaço, dado que o primeiro tipo de preferências é um caso particular do segundo. (BOGOMOLNAYA; LASLIER, 2007, p. 88).⁵⁶ Contudo, os dois tipos de preferências tem algumas diferenças fundamentais, que irão culminar em *profiles* de preferências *single-peaked* do tipo *ordinal* e/ou *cardinal*. Para definirmos formalmente preferências *single-peaked*, adaptamos a definição dada em Ballester e Haeringer (2011). Denote \mathfrak{L}_X como o conjunto de todos os ordenamentos lineares possíveis⁵⁷ em X , e por L um elemento genérico de \mathfrak{L}_X . Então, preferências *single-peaked* são definidas da seguinte forma.

Definição 2.4 Uma relação de preferência \succsim_i em X é *single-peaked* se, para um ordenamento linear $L \in \mathfrak{L}_X$ em X , e para cada $x(i), x, x' \in X$, tal que ou $x(i)LxLx'$, ou $x'LxLx(i)$, temos $x \succsim_i x'$.

Para a existência dessa propriedade, não se faz necessário assumir “distâncias”, ou representações numéricas que possam representar as alternativas. O importante para a existência de preferências desse tipo é a relação estabelecida entre a *ordem* das alternativas, e as preferências dos indivíduos considerando essa ordem.

O segundo axioma trata das preferências dos indivíduos no conjunto *finito* de ideologias, ou seja o conjunto \mathfrak{A} .

Axioma 2 Cada agente $i \in \{1, \dots, I\}$ é dotado de uma relação de preferências racional $\succsim_i^{\mathfrak{A}}$ em \mathfrak{A} com as seguintes propriedades: $\forall \mathfrak{a}_a, \mathfrak{a}_b \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}_a \succsim_i^{\mathfrak{A}} \mathfrak{a}_b$ se, e somente se, existir

⁵⁶Pelo Axioma 1, também é possível inferir que as preferências são racionais na dimensão ideológica X .

⁵⁷Um ordenamento linear L em X é uma relação binária com as seguintes propriedades: i) anti-simetria (para todo $x, x' \in X$, e $x \neq x'$, se xLx' então $x'Lx$ não deve valer); ii) transitividade (para todo $x, x', x'' \in X$, se xLx' e $x'Lx''$, então xLx''); e iii) totalidade (para qualquer $x, x'' \in X$, ou xLx' ou $x'Lx$), onde xLx' significa que x vem antes de x' no ordenamento L .

$x^a, x^b \in X_{\mathfrak{A}}$ tal que $x^a \succsim_i x^b$.

Portanto, o axioma acima estabelece uma relação entre as preferências em X e \mathfrak{A} . Dadas duas ideologias α_a and α_b , se um indivíduo prefere α_a a α_b , então ele também prefere a posição ideológica de α_a à posição ideológica de α_b . A justificativa para esse comportamento segue diretamente da primeira definição; não seria razoável ter um padrão de preferências $x^a \succsim_i x^b$ em X , mas $\alpha_b \succsim_i^{\mathfrak{A}} \alpha_a$ on \mathfrak{A} . Se isso fosse possível, equivaleria a dizer que o nome dado a uma posição ideológica tem importância em como os eleitores a avaliam, e então essa posição ideológica, por si só, não contém toda a informação relevante para sua própria caracterização.

Novamente adaptando a notação de Bogomolnaia e Laslier (2007), denote o vetor $\mathcal{R}_{\mathfrak{A}} = \{\succsim_1^{\mathfrak{A}}, \succsim_2^{\mathfrak{A}}, \dots, \succsim_I^{\mathfrak{A}}\}$ como um *profile*, ou conjunto, de preferências, i.e., o conjunto de todas as preferências individuais em \mathfrak{A} , e $\mathfrak{R}_{\mathfrak{A}, I}$ como o conjunto de *todos* os conjuntos de preferências possíveis com I indivíduos em \mathfrak{A} . Utilizando Brams, Jones e Kilgour (2002) como referência, introduzimos agora a definição de um profile de preferências que seja *single-peaked ordinal*.

Definição 2.5 Um conjunto de preferências $\mathcal{R}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{A}, I}$ é *single-peaked ordinal* em \mathfrak{A} se $\exists L \in \mathcal{L}_X$ tal que $\forall i \in \{1, \dots, I\}$, se $x(i)Lx^aLx^b$, ou $x^bLx^aLx(i)$, temos $\alpha_a \succ_i^{\mathfrak{A}} \alpha_b$.

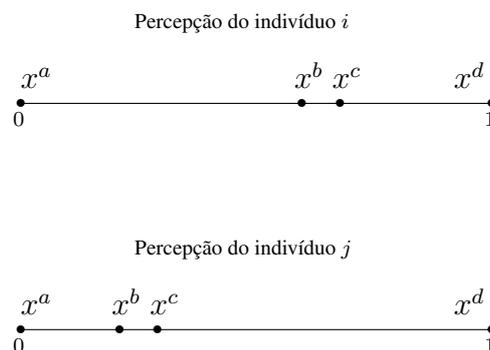
Outro conceito importante é o de um profile de preferências *single-peaked cardinal*. Novamente utiliza-se como referência Brams, Jones e Kilgour (2002), mas introduz-se a ideia de uma *função de percepção* à definição original .

Definição 2.6 Um conjunto de preferências $\mathcal{R}_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{A}, I}$ é *single-peaked cardinal* se: i) ele é *single-peaked ordinal*, e; ii) $\forall i \in \{1, \dots, I\}$, e $\forall \alpha_k \in \mathfrak{A}$, existe uma função $\phi_i : \mathfrak{A} \rightarrow X$ tal que $\phi_i(\alpha_k) = x^k$, onde $\phi_i(\cdot)$ denota qual posição ideológica o indivíduo percebe como a correspondente à ideologia α_k .

Em palavras: *single-peaked ordinal* é a propriedade usual tal como definido tradicionalmente, e aqui já comentado, cuja existência não depende de uma medida comum de distância, ou de qualquer representação numérica. Isso significa que os indivíduos podem concordar apenas quanto à *ordem* na qual as alternativas estão dispostas em um espaço comum, i.e., dado o ordenamento linear L , os agentes compartilham da mesma percepção que, por exemplo, x^a vem antes de x^b , e x^b vem antes de x^c , sem qualquer outra suposição sobre o “quão antes” uma opção vem da outra. Por exemplo, dois indivíduos i e j devem concordar quanto à ordem de x^a , x^b , e x^c , mas i pode sentir que x^a e x^b são próximos, enquanto x^c parece distante, ao passo que o indivíduo j pode acreditar que x^b e x^c são próximos, enquanto x^a é distante.

Entretanto, *single-peaked cardinal* é uma propriedade muito mais restritiva, assumindo

Figura 1: Diferenças na percepção individual de posições ideológicas.



Fonte: Adaptado de Brams, Jones e Kilgour (2002).

que a percepção de distância entre as alternativas é a mesma para todos os agentes. Conforme dito em Brams, Jones e Kilgour (2002), quando preferências são *single-peaked* cardinal, a existência de uma única representação espacial das alternativas “[...] indicates that the players have similar perceptions of the distances between players’ positions”⁵⁸ (BRAMS; JONES; KILGOUR, 2002, p. 361). Portanto, para representar a ideia de percepção individual, é introduzido o aparato teórico da *função de percepção*, que irá denotar a posição ideológica que cada indivíduo associa às ideologias existentes. Por exemplo, no caso ordinal, sabendo que $x^a, x^b \in X$ e $x^a < x^b$, para algum $x^b > 0$, há um número infinito de posições ideológicas que x^a poderia assumir e ainda assim respeitar a restrição $x^a < x^b$; ou seja, x^a poderia ser qualquer ponto no intervalo $[0, x^b)$. No caso cardinal, há apenas um valor possível para x^a , como também apenas um valor possível para x^b , cada um sendo conhecido pelos indivíduos.

Para clarificar a distinção entre *single-peaked* ordinal e cardinal, adapta-se o seguinte exemplo, apresentado em Brams, Jones e Kilgour (2002), para o contexto de posições ideológicas e ideologias.⁵⁹ Suponha que há quatro ideologias: $\{a_a, a_b, a_c, a_d\}$; um indivíduo i ordena as ideologias (da mais preferível para a menos) na ordem $a_b \succ_i a_c \succ_i a_d \succ_i a_a$, enquanto um indivíduo j ordena essas ideologias na ordem $a_c \succ_j a_b \succ_j a_a \succ_j a_d$. Suponha agora que as percepções de i e j a respeito das posições em X dessas ideologias possam ser ilustradas de acordo com a Figura ???. É possível notar que ambos agentes ordenam essas posições ideológicas na forma $x^a < x^b < x^c < x^d$. Também, ambos agentes possuem preferências *single-peaked* em $\{a_a, a_b, a_c, a_d\}$, que leva a um conjunto de preferências *single-peaked* ordinal nesse conjunto. Porém, eles claramente divergem

⁵⁸ “[...] indica que os jogadores tem uma percepção similar quanto às distâncias entre as posições desses jogadores.” (Tradução nossa).

⁵⁹ O exemplo original trata de como cada “jogador” de um determinado jogo avalia a posição dos seus oponentes, quando o espaço de competição é unidimensional. Para o caso dessa dissertação, optamos por usar o mesmo exemplo, mas contextualizando-o para o caso das eleições aqui apresentado.

quanto a percepção de distância entre as alternativas. O indivíduo i acredita que x^b e x^c estão muito mais próximos de 0, enquanto o outro indivíduo percebe as duas posições ideológicas como números próximos de 1. Formalmente, dado o ordenamento de i , temos $|x^c - x^d| < |x^b - x^d| < |x^a - x^b|$, mas de acordo com o ordenamento de j , obtemos $|x^a - x^b| < |x^a - x^c| < |x^c - x^d|$. Portanto, ambos agentes concordam quanto à ordem das alternativas, mas discordam a respeito da representação numérica de cada uma delas, levando a um profile de preferências *single-peaked* ordinal, e não cardinal.

Um dos fatores que pode levar à existência da ordinalidade, mas não cardinalidade do profile de preferências, é a incerteza quanto às opções disponíveis. Caso os indivíduos sejam munidos de informações precisas quanto à posição das opções dentro da escala na qual está se trabalhando, então espera-se que o impacto da percepção seja mínimo. Contudo, ao assumirmos que os indivíduos possuem diferentes níveis de informação, e interpretam tais informações de maneiras distintas, então o problema da percepção acaba sendo agravado. Nesses casos, a depender da qualidade, quantidade e capacidade de processamento da informação, um conjunto de preferências pode deixar de ser *single-peaked* cardinal, ou até mesmo *single-peaked* ordinal, caso o consenso quanto à ordem das alternativas deixe de ser respeitado. Tais questões tem efeito nos modelos de Downs (1957), Shepsle (1972), e na discussão proposta em Zeckhauser (1969). Ao assumirmos a inexistência de incerteza nos resultados ditos “pré-eleitorais”, também estamos viabilizando a construção de um profile *single-peaked* cardinal (e, por sua vez, ordinal), o que estaria de acordo com o modelo de Downs (1957); entretanto, ao incorporarmos incerteza na análise, quando forem discutidos os resultados das “preferências eleitorais”, i.e., quando o conjunto de escolha é formado por candidatos que são vistos como loterias no espaço de competição, a obtenção de um profile *single-peaked* cardinal ou ordinal já não será uma tarefa trivial, como visto em Zeckhauser (1969), o que por sua vez tem suas implicações no contexto das escolhas individuais e coletivas.

Dado que definimos \succsim_i em X como uma preferência euclidiana, logo ela será *single-peaked*. E, pelo Axioma 2, os agentes também irão ter preferências *single-peaked* no conjunto de ideologias \mathfrak{A} , observada a relação que foi imposta entre as preferências nos dois conjuntos. A prova desse resultado é dada abaixo.

Proposição 1 *Se o Axioma 2 vale, e \succsim_i em X é *single-peaked*, então $\succsim_i^{\mathfrak{A}}$ também é *single-peaked*.*

Prova: Denote duas ideologias quaisquer por $\alpha_a, \alpha_b \in \mathfrak{A}$, onde suas posições ideológicas são, respectivamente, dadas por $x^a, x^b \in X_{\mathfrak{A}}$. Suponha que a posição ideológica mais preferível para o indivíduo i seja denotada por $x(i) \in X$, e $\alpha(i) \in \mathfrak{A}$ seja a correspondente ideologia, tal que $x(i) < x^a < x^b$. Então, essa ordem pode ser utilizada para definir um or-

denamento linear L em \mathfrak{A} , implicando em $\alpha(i)L\alpha_a L\alpha_b$. Dadas as propriedades de \succsim_i , temos que $x(i) \succ_i x^a \succ_i x^b$, o que, pelo Axioma 2, implica em $\alpha_a \succ_i^{\mathfrak{A}} \alpha_b$. Agora, suponha que $x(i) > x^a > x^b$. Neste caso, $\alpha_b L\alpha_a L\alpha(i)$, e ainda assim $x^a \succ_i x^b$, o que também implica em $\alpha_a \succ_i^{\mathfrak{A}} \alpha_b$. Logo, tanto $\alpha(i)L\alpha_a L\alpha_b$ quanto $\alpha_b L\alpha_a L\alpha(i)$ implicam em $\alpha_a \succ_i^{\mathfrak{A}} \alpha_b$, caracterizando preferências *single-peaked* em \mathfrak{A} . \square

É notório que a construção de um conjunto de preferências *single-peaked* não é uma tarefa trivial, visto que estamos, ao menos implicitamente, assumindo que existe uma ordem que reflete como as pessoas veem o arranjo das opções, ou que, não apenas a ordem, mas as posições efetivas das alternativas nessa escala teórica, são conhecidas por todos os indivíduos. Se as opções fossem apresentadas de modo objetivo, o “problema da percepção” poderia ser mitigado, ou até mesmo eliminado. Por exemplo, suponha que há um grupo de pessoas que divide uma sala, e a eles cabe decidir coletivamente qual será a temperatura do ar-condicionado (em °C), onde as possibilidades são dadas pelo intervalo dos números naturais $\{15, \dots, 30\}$. Nesse caso, cada alternativa está sendo objetivamente apresentada, e quando confrontado com, por exemplo, a alternativa “20°C”, todos os indivíduos serão capazes de entender essa opção como “ajustar o sistema de ar-condicionado para a temperatura de 20°C”. Obviamente há distintas noções de calor e frio, i.e., uma pessoa pode achar os 20°C uma temperatura fria, enquanto outra acredita que 20°C é quente. Entretanto, como apresentado, o problema de decisão não demanda responder ao questionamento “o quão quente ou frio você gostaria que essa sala estivesse?”, o que abriria espaço para considerações subjetivas sobre calor e frio, mas sim demanda uma resposta objetiva a um problema objetivamente formulado.

Retomando o trabalho de Page (1976), buscar apresentar de modo mais claro e objetivo as alternativas - no caso, os candidatos - pode ser uma ferramenta no intuito de, não só minimizar os problemas técnicos ao processo de decisão democrático decorrentes da subjetividade, como também para a o desenvolvimento da democracia e de uma atuação fiscalizatória mas assertiva da sociedade em relação ao seu governo, dado que, onde a *ambiguidade* a respeito dos candidatos impera, “[...] we can hardly hope that political leaders will educate their citizens about the workings of government or the merits of contending policy proposals.”⁶⁰ (PAGE, 1976, p. 750)

Contudo, mesmo que os candidatos fossem observados de modo mais objetivo, até que ponto é razoável imaginar essa objetividade no contexto de posições ideológicas e ideologias, que são meros artifícios teóricos para auxiliar na representação de preferências dos indivíduos? Na Definição 2.1 distinguiu-se *ideologia* e *posição ideológica*, onde é dito que, para um nome α_k ser considerado uma ideologia, cada indivíduo nessa sociedade deve

⁶⁰ “[...] nós dificilmente poderemos esperar que os líderes políticos irão educar seus cidadãos a respeito dos trabalhos do governo ou dos méritos de questionar as propostas de políticas públicas.” (Tradução nossa).

concordar que α_k representa a *mesma* posição ideológica x^k . Portanto, por construção, essa definição impõe a objetividade necessária para atingir um conjunto de preferências que seja *single-peaked* cardinal. Formalmente, esse resultado está explicitado na seguinte proposição.

Proposição 2 *O conjunto de preferências $\mathcal{R}_{\mathfrak{A}} = \{\succsim_1^{\mathfrak{A}}, \succsim_2^{\mathfrak{A}}, \dots, \succsim_I^{\mathfrak{A}}\}$ é *single-peaked* cardinal.*

Prova: A prova segue diretamente da definição de ideologia. Dado que $\mathcal{R}_{\mathfrak{A}}$ é um profile de preferências no conjunto \mathfrak{A} , pela Definição 2.1 sabemos que, para ser considerada uma ideologia, cada agente deve concordar que há apenas uma posição ideológica que descreve o nome $\alpha_k \in \mathfrak{A}$. Então, em termos da função de percepção, $\phi_i : \mathfrak{A} \rightarrow X$, isso equivale a dizer que $\phi_i(\alpha_k) = x^k$, para todo $i \in \{1, \dots, I\}$, o que implica em um conjunto de preferências *single-peaked* cardinal. \square

Entretanto, tal profile de preferências é *single-peaked* cardinal apenas no conjunto de alternativas *certas*. Conforme visto no trabalho de Zeckhauser (1969), quando alternativas *incertas* são acrescentadas no conjunto de escolha (loterias não-degeneradas), apenas garantindo *single-peakedness* no conjunto de alternativas certas não bastará para garantir uma escolha social consistente. Dessa forma, a próxima seção aborda justamente o caso quando as loterias - no caso, os candidatos - são as alternativas dispostas para a escolha social, descrevendo uma situação na qual, mesmo com preferências *single-peaked* no conjunto de alternativas *certas*, o conjunto das preferências desses indivíduos em relação aos candidatos não pode ser visto como *single-peaked* cardinal ou ordinal.

2.3.2 Preferências eleitorais

Nessa seção começamos a explorar como as preferências se dão quando os candidatos que irão concorrer em uma eleição já estão definidos, sendo estes as efetivas alternativas apresentadas aos indivíduos. Conforme discutido, em uma eleição é razoável pensar que eleger um candidato em particular não é o principal objetivo de um processo de escolha político, mas sim uma plataforma de opiniões sobre questões econômicas, sociais, ambientais e em demais áreas que irá doutrinar as ações governamentais durante um determinado período de tempo. Modelos de competição eleitoral e voto baseiam-se nessa ideia, visto que a escolha do eleitor não é incondicional ou imutável; ou seja, a escolha realizada não é independente da opinião do candidato escolhido, sendo perfeitamente possível eleger um novo candidato caso o anterior já não pareça mais a melhor opção, i.e., não pareça mais o

candidato mais próximo ao eleitor em termos ideológicos.⁶¹

Definições e Axiomas

O seguinte axioma define quais são os possíveis resultados de um processo político eleitoral.

Axioma 3 *A dimensão ideológica restrita $X_{\mathfrak{A}}$ é o conjunto de possíveis resultados de uma eleição, onde cada posição ideológica $x^k \in X_{\mathfrak{A}}$ é um resultado em potencial.*

Com o axioma acima, define-se um resultado eleitoral como uma alternativa *certa*, i.e., uma posição na dimensão ideológica restrita, visto que cada posição ideológica na realidade está descrevendo um conjunto de ações possível de ser adotado durante um governo. Além disso, supõe-se que o candidato eleito irá adotar uma - e apenas uma - posição ideológica como plataforma política.⁶² E observado que indivíduos não escolhem diretamente as ideologias ou posições ideológicas no processo do voto, o problema do eleitor é mapear candidatos em posições no conjunto $X_{\mathfrak{A}}$, na tentativa de ordená-los do melhor para o pior candidato.

A existência de um intermediário entre o voto e a ideologia que esse eleitor quer eleger como plataforma de governo faz com que o processo de decisão possa ocorrer sob incerteza, o que acontece quando os eleitores não conhecem qual é a plataforma política que cada candidato irá realmente adotar caso vença o certame. Nesse caso, é válido representar opções incertas através de *loterias* no espaço de resultados. Usando a definição dada em Mas-Colell, Winston e Green (1995), uma loteria pode ser definida como segue.

Definição 2.7 *Uma loteria simples na dimensão ideológica restrita é uma função $\mathcal{P} : X_{\mathfrak{A}} \rightarrow [0, 1]$, onde $\mathcal{P}(x^k) = p(x^k)$ denota a probabilidade do resultado x^k ocorrer, tal que $\forall x^k \in X_{\mathfrak{A}}, p(x^k) \geq 0$ e $\sum_{k=1}^K p(x^k) = 1$. Também, defina \mathbb{P} como o conjunto de todas as loterias possíveis no conjunto de resultados $X_{\mathfrak{A}}$.*

Então, cada loteria é uma distribuição de probabilidade na dimensão ideológica restrita. Supõe-se que existam $M \geq 3$ candidatos na disputa eleitoral, onde cada candidato é denotado por $m \in \mathfrak{M}$. Seguindo a abordagem de Shepsle (1972) e McKelvey (1980), assumimos que cada eleitor vê os candidatos como loterias - degeneradas ou não - na dimensão ideológica restrita.

Axioma 4 *Do ponto de vista do eleitor i , a posição ideológica que cada candidato $m \in \mathfrak{M}$*

⁶¹Para citar novamente Buchanan (1954), essa ideia relaciona-se com a discussão proposta pelo autor, onde se salienta que a inexistência de imutabilidade dos valores individuais durante o processo de decisão é um ponto a ser explorado em uma democracia, tida como “governo por discussão”, onde os indivíduos são livres para escolher e mudar de opinião se assim acharem razoável.

⁶²Um possível refinamento desse modelo é tornar viável a adoção de múltiplas posições ideológicas pelos candidatos, o que parece ser mais consistente com o comportamento real dos políticos.

irá adotar caso seja eleito é uma variável aleatória U_m^i com suporte em $X_{\mathfrak{A}}$. Então, cada competidor pode ser representado por uma loteria simples $\mathcal{P}_m^i = \{p_m^i(x^1), \dots, p_m^i(x^K)\}$ em $X_{\mathfrak{A}}$, com $p_m^i(x^k) \geq 0$ e $\sum_{k=1}^K p_m^i(x^k) = 1$, onde $P(U_m^i = x^k) = p_m^i(x^k)$.

Conforme discutido anteriormente, representar candidatos através de loterias tem algumas vantagens pois permite descrever não somente as situações de incerteza, como também os casos onde o eleitor não tem nenhum grau de incerteza a respeito do valor de U_m^i . Por exemplo, suponha que $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, e que existam dois candidatos, m e m' , tal que o eleitor i está certo que m representa α_1 , ao mesmo que tempo que acredita que as três ideologias possuem a mesma chance de serem a plataforma de governo do candidato m' . Logo, para esse indivíduo i , as loterias que descrevem m and m' são, na respectiva dimensão ideológica restrita, $\mathcal{P}_m^i = \{1, 0, 0\}$ e $\mathcal{P}_{m'}^i = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$. Em outras palavras, o eleitor está certo que, ao selecionar m , ele estará na realidade votando para o resultado x^1 , e, consequentemente, para a ideologia α_1 , enquanto ele está incerto a respeito das características do candidato m' .

Outro elemento que deve ser salientado é a adição do subscrito i em \mathcal{P}_m^i . Nesse caso, estamos admitindo ser possível que cada eleitor represente o mesmo candidato por uma loteria diferente. Então, dados dois indivíduos i e j , e o conjunto $\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, é factível que o primeiro eleitor atribua ao candidato m a loteria $\mathcal{P}_m^i = \{1, 0, 0\}$ no conjunto $X_{\mathfrak{A}} = \{x^1, x^2, x^3\}$, ao mesmo tempo que o segundo eleitor represente esse candidato através da loteria $\mathcal{P}_m^j = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ na dimensão ideológica restrita. No exemplo, equivaleria a dizer que o indivíduo i está certo quanto à ideologia de m e o que ele irá efetivamente implementar caso esse candidato seja eleito, enquanto j tem algum nível de incerteza quanto a esse aspecto.⁶³

O seguinte axioma estabelece a existência de preferências dos indivíduos em relação às loterias possíveis de serem construídas em $X_{\mathfrak{A}}$.

Axioma 5 Cada indivíduo $i \in \{1, \dots, I\}$ é um maximizador de utilidade esperada do tipo von Neumann-Morgenstern, e possui uma relação de preferências $\succsim_i^{\mathbb{P}}$ racional no conjunto \mathbb{P} , de modo que há uma função de utilidade $U_i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{P}_m^i \succsim_i^{\mathbb{P}} \mathcal{P}_n^i \iff \sum_{k=1}^K u_k^i p_m^i(x^k) \geq \sum_{k=1}^K u_k^i p_n^i(x^k)$$

onde u_k^i denote o índice de utilidade do indivíduo i em relação às opções do conjunto $X_{\mathfrak{A}}$.

Pelo Axioma 5 estamos assumindo, tal como no modelo de Shepsle (1972), que cada indivíduo age como um maximizador de utilidade esperada, e tem preferências completas e

⁶³Nesse ponto nos distanciamos de Shepsle (1972), dado que o modelo do autor não contempla essa possibilidade.

transitivas sobre o conjunto de todas as loterias possíveis de serem formadas na dimensão ideológica restrita $X_{\mathfrak{M}}$. O índice de utilidade u_k^i representa o nível de satisfação que o indivíduo i associa à posição ideológica x^k como o resultado final da eleição. Portanto, quanto maior esse índice, maior é a atratividade dessa posição ideológica para o eleitor, admitindo que existe um nível máximo de satisfação quando uma das posições ideológicas é equivalente à alternativa ótima $x(i)$ do agente. Claramente, o índice de utilidade u_k^i de uma alternativa irá depender de quão perto ela está dessa alternativa ótima.

Defina $\succsim_i^{\mathfrak{M}}$ como uma relação racional de preferências no conjunto de candidatos \mathfrak{M} . Para simplificar a notação, denote m, m' e m'' como candidatos genéricos em \mathfrak{M} . Dado que cada candidato pode ser representado por uma loteria com probabilidades subjetivas, o eleitor usa suas preferências em relação a essas loterias para estabelecer as preferências no conjunto \mathfrak{M} , conforme dado no seguinte axioma.

Axioma 6 *Dados quaisquer dois candidatos $m, m' \in \mathfrak{M}$, para todo indivíduo $i \in \{1, \dots, I\}$, $m \succsim_i^{\mathfrak{M}} m'$ se, e somente se, $\mathcal{P}_m^i \succsim_i^{\mathbb{P}} \mathcal{P}_{m'}^i$.*

É plausível imaginar que a cardinalidade de \mathfrak{M} , i.e., o número de candidatos que estão na disputa eleitoral, seja dado de forma exógena por convenções de partidos, coalizões, alianças políticas e outros fatores relacionados às estratégias de campanha. Mas visto que estamos assumindo algum grau de subjetividade na construção das loterias em $X_{\mathfrak{M}}$ que representam os competidores em \mathfrak{M} , então o número de loterias distintas que serão necessárias para representar os candidatos pode ser menor que $\#\mathfrak{M}$, que assumimos anteriormente ser maior ou igual a 3, observada a possibilidade de associar uma mesma loteria a dois ou mais candidatos distintos. A seguinte definição trata justamente dessa possibilidade.

Definição 2.8 *O conjunto $\mathbb{F}_{\mathfrak{M}}^i \subset \mathbb{P}$ é o conjunto de loterias onde cada $\mathcal{P}_m^i \in \mathbb{F}_{\mathfrak{M}}^i$ é uma loteria que descreve um candidato $m \in \mathfrak{M}$ para o eleitor i .*

Dessa forma, faz-se necessário definir como as probabilidades subjetivas são obtidas, dado o contexto de restrições informacionais devido às campanhas eleitorais ambíguas. Nesse caso, nos valem do *Princípio da Máxima Entropia*, proposto em Jaynes (1957).

O Princípio da Máxima Entropia de Jaynes (1957)

Com o objetivo de analisar os efeitos da ambiguidade dos discursos eleitorais no comportamento do eleitor, utilizaremos o *princípio da máxima entropia*, formulado em Jaynes (1957). Conforme já mencionado, o princípio descreve um método estatístico onde o conhecimento *a priori* existente sobre a distribuição de probabilidade que representa a variável aleatória estudada é traduzido em *restrições de momento*, que serão posteriormente utilizadas para obter uma distribuição de probabilidade *subjetiva* no conjunto de possíveis resul-

tados. Ao aplicarmos tal princípio ao contexto das preferências eleitorais nos modelos de competição espacial, estamos assumindo que o conhecimento que o eleitor possui sobre o candidato irá determinar as probabilidades - na visão desse eleitor - desse candidato assumir cada uma das posições ideológicas restritas como plano de governo.

Formalmente, a entropia de uma distribuição de probabilidade \mathcal{P}_m^i é dada por

$$h(\mathcal{P}_m^i) = - \sum_{k=1}^K p_m^i(x^k) \log p_m^i(x^k) \quad (2.1)$$

Adicionalmente, temos $\Theta_m^i = \{F_1, \dots, F_R\}$ como o conjunto de informações *a priori* a priori sobre essa distribuição, de modo que

$$F_r = \sum_{k=1}^K f_r(x^k) p_m^i(x^k), r = 1, 2, \dots, R. \quad (2.2)$$

Pelo princípio de Jaynes, a distribuição de probabilidade mais adequada dado o conjunto de informações existente será o resultado do problema

$$\max h(\mathcal{P}_m^i) = - \sum_{k=1}^K p_m^i(x^k) \log p_m^i(x^k) \quad (2.3)$$

sujeito à restrição

$$\sum_{k=1}^K p_m^i(x^k) = 1 \quad (2.4)$$

e as restrições de momento do conjunto Θ_m ,

$$\sum_{k=1}^K f_r(x^k) p_m^i(x^k) = F_r, \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (2.5)$$

Resolvendo o problema acima, obtemos probabilidades da forma

$$\mathcal{P}_m^i(U_m^i = x^k | \Theta_m^i) = \frac{e^{-\sum_{r=1}^R \lambda_r f_r(x^k; \theta_m)}}{\sum_{k=1}^K e^{-\sum_{r=1}^R \lambda_r f_r(x^k; \theta_m)}} \quad (2.6)$$

sendo $P_m^i(U_m^i = x^k | \Theta_m^i) = p_m^i(x^k)$, ou seja, no contexto desse trabalho, a probabilidade do candidato m adotar a posição ideológica x^k como plano de governo, na visão do eleitor i . Variando k em (2.6) de 1 até K e computando as probabilidades, obteremos um conjunto de K probabilidades que denotam a loteria \mathcal{P}_m^i na dimensão ideológica restrita que maximiza a entropia da distribuição, dadas as restrições formadas pela quantidade de informação relevante que o eleitor possui, ou seja, as restrições de momento do conjunto Θ_m .

Estratégia de Campanha dos Candidatos

A campanha dos candidatos está relacionada ao conjunto de informações relevantes que está disponível aos eleitores na tomada de decisão. Defina $\Theta_m^i = \{F_1, \dots, F_R\}$ como o conjunto de informações que o eleitor tem sobre a posição ideológica que o candidato m irá assumir caso seja eleito. Em outras palavras, assume-se que toda a informação relevante que o eleitor possui considerando a posição ideológica do candidato m pode ser traduzida em restrições de momento, caracterizando o conjunto Θ_m^i .

Assumimos agora como a estratégia de campanha dos candidatos é vista pelos eleitores. Em vez de seguir a abordagem de Shepsle (1972) e supor que cada competidor pode determinar precisamente as probabilidades da loteria que o representa, sugerimos aqui uma pequena mudança na definição da função $f_r(x^k)$, com o objetivo de capturar a ideia que candidatos conseguem influenciar apenas *parcialmente* as probabilidades através da informação de campanha.

Axioma 7 *Uma estratégia de campanha para um candidato $m \in \mathfrak{M}$ é um parâmetro θ_m de informações relevantes a respeito da posição ideológica que o candidato irá adotar caso seja eleito, tal que $f_r(x^k) = f_r(x^k; \theta_m)$.*

Então, o que está sendo proposto aqui é uma limitação do impacto da estratégia de campanha nas probabilidades, introduzindo tal estratégia - a quantidade de informações relevantes disponibilizadas pelo candidato - apenas como um argumento genérico na construção das restrições de momento. Tal parâmetro pode não existir, caso o competidor não tenha interesse em revelar informações precisas sobre sua plataforma de governo. Nenhuma suposição adicional considerando o formato das funções resultantes é feita, de modo a incorporar as diferentes maneiras de processar a informação que existem entre os eleitores, e a consequente tradução dessa informação em restrições de momento. Ou seja, os candidatos podem revelar uma quantidade determinada de informações relevantes através do parâmetro θ_m , mas o modo que esse parâmetro irá afetar as restrições de momento irá depender do julgamento realizado por cada eleitor. Por exemplo, imagine que a dimensão ideológica restrita seja dada por $\{x^1, x^2, x^3\}$, e que um candidato m explicitamente adote durante a campanha eleitoral posições firmes em favor dos elementos que x^3 - e, consequentemente, α_3 - representa. Um eleitor pode incorporar essa informação de tal modo que as probabilidades resultantes sejam dadas por $\{0, 0, 1\}$, isto é, esse eleitor pode acreditar no argumento e nas informações que o candidato está revelando sobre ser do “tipo α_3 ”. Enquanto isso, embora admitindo que haja bons argumentos para crer nos argumentos do candidato, outro eleitor pode não ter tanta certeza a respeito da plataforma política apresentada na campanha, representando-o pela loteria $\{1/4, 1/4, 1/2\}$, igualmente influenciada pelo parâmetro θ_m , mas onde esse parâmetro tem uma influência distinta.

Nesse contexto, o problema da ambiguidade nos discursos políticos e nas campanhas eleitorais deve, de alguma forma, ser refletido no parâmetro θ_m . Dado que esse parâmetro está definido em termos genéricos, sugere-se que o nível máximo de ambiguidade considerando a plataforma política do candidato, ou seja, a posição ideológica desse candidato, seja aquele atingido quando *não há* nenhuma informação relevante divulgada por esse competidor. O axioma abaixo traduz o papel da ambiguidade no modelo aqui apresentado.

Axioma 8 *Se não há θ_m que possa descrever as informações relevantes divulgadas pelo candidato m a respeito de sua posição ideológica em $X_{\mathcal{X}}$, então a estratégia de campanha de m é a de máxima ambiguidade.*

Interpretando tal estratégia de acordo com a literatura, em Glazer (1990) esse estilo de campanha estaria de acordo com uma situação onde o candidato não tem ideia alguma a respeito da posição do eleitor mediano nessa sociedade, o que torna válido não comprometer-se com nenhuma posição ideológica em específico e assim não assumir o risco de empregar uma estratégia que não vá levar à vitória. Em Aragonès e Neeman (2000) a estratégia de máxima ambiguidade seria decorrente de uma preferência total por flexibilidade, ao invés de estabelecer algum comprometimento com uma plataforma política única. Nesse caso proposto pelos autores, caso o candidato seja eleito, ele teoricamente poderá ter total liberdade para estabelecer as ações do seu governo.

Os axiomas a seguir assumem que o parâmetro θ_m deve ser consistente com as equações em dois diferentes sentidos, conforme será argumentado.

Axioma 9 *Se $f_r(x^k) = f_r(x^k; \theta_m)$, e os eleitores não observam θ_m , então $\Theta_m^i = \{\emptyset\}$.*

Axioma 10 *Não há inconsistências lógicas entre os elementos de Θ_m^i .*

Introduzimos o primeiro axioma de consistência baseando-nos na intuição por trás das restrições de momento. Na abordagem de Jaynes, as restrições de momento devem traduzir tudo aquilo que é conhecido e relevante; então, se um dos parâmetros que determina as equações é desconhecido, ou inexistente, então as restrições de momento não podem ser conhecidas pelo indivíduo, uma vez que dependem desse parâmetro. Logo, elas não podem ser argumentos do conjunto de informações *a priori* Θ_m^i . O segundo axioma é derivado diretamente de Jaynes, e consiste em um argumento de caráter técnico. Assumimos que eleitores não podem formular uma restrição de momento que leve a uma contradição com outra já existente, dado que essa inconsistência tornaria o princípio da máxima entropia inútil para acessar probabilidades subjetivas. (JAYNES, 1968, p. 9)

Finalmente, o conceito de completa ignorância é definido conforme abaixo.

Definição 2.9 *Um indivíduo está em uma situação de completa ignorância a respeito de um candidato m se $\Theta_m^i = \{\emptyset\}$.*

A ideia de completa ignorância utilizada nesse modelo segue a proposta de Sinn (1980). No caso, esse estágio de conhecimento ocorre quando o eleitor não possui nenhuma informação relevante que possa ajudá-lo a determinar as restrições de momento. Isso não significa que o eleitor desconhece a existência desse candidato; uma situação de completa ignorância considera apenas as informações que são relevantes - o parâmetro θ_m - no contexto ideológico. Por exemplo, se um candidato m tem entre suas propostas “melhorar as condições da saúde, educação, emprego e segurança pública”, então provavelmente essa sentença venha a ser de pouca ajuda na tarefa de estimar uma posição ideológica para esse candidato, considerando que tal discurso é excessivamente vago e genérico. Entretanto, se esse candidato estabelecesse uma plataforma política onde afirma ser necessário impor limites aos lucros das empresas, então tal informação provavelmente seria de maior utilidade na avaliação do candidato na dimensão ideológica restrita.

Esse entendimento do papel da informação e sua relação com o conhecimento dos indivíduos sobre as alternativas segue da abordagem de Arlegi e Dimitrov (2005). Discutindo os aspectos da liberdade de escolha proporcionada pelos conjuntos de oportunidade quando indivíduos estão incertos a respeito das características das opções existentes, os autores introduzem a ideia de informação relevante para classificar as opções nas categorias “alternativas conhecidas” e “alternativas desconhecidas”, dizendo que

[...] an option could be labelled as ‘unknown’ even if the decision maker has big pieces of information about it, but not sufficiently relevant: an employer may have a very detailed information about certain aspects of a candidate, such as information about his private life, but will label the candidate as unknown if the employer has not the necessary information about what is relevant for her choice, namely, the information about the candidate’s labor skills”.⁶⁴ (ARLEGI; DIMITROV, 2005, p. 5)

É importante notar que, no modelo aqui desenvolvido, eleitores não conseguem incorporar informações relevantes por outras fontes que não a campanha do candidato. Claramente tal suposição não está adequada com a maioria dos casos da realidade, visto que informações relevantes sobre a posição ideológica dos competidores podem ser absorvidas através de diversas outras fontes, sendo essas fontes muitas vezes até mais relevantes para estabelecer o conhecimento dos eleitores em relação aos candidatos. Além disso, no caso dos competidores que estão buscando reeleição, as políticas empregadas durante o período em que estiveram no governo certamente são uma fonte óbvia de informação relevante. Porém, como o interesse desse trabalho está concentrado apenas nos efeitos da informação de cam-

⁶⁴ “[...] uma opção poderia ser rotulada como ‘desconhecida’ mesmo que o tomador de decisão tenha uma grande quantidade de informação sobre ela, mas que não seja suficientemente relevante: um empregador pode ter informações detalhadas sobre certos aspectos de um candidato, tais como informações sobre sua vida privada, mas irá rotular esse candidato como desconhecido se não possuir a informação necessária a respeito do que é relevante para sua escolha, ou seja, a informação sobre as habilidades de trabalho do postulante ao emprego.” (Tradução nossa).

panha, e no impacto das estratégias eleitorais empregadas pelos competidores, seguiremos com a suposição inicial para poder analisar especificamente esse tema no contexto do voto.

2.3.3 Consequências da ambiguidade das campanhas eleitorais nas preferências individuais

Nessa seção exploraremos as consequências da ambiguidade nas campanhas eleitorais, dada a formulação de probabilidades subjetivas conforme o princípio da máxima entropia.

A seguinte proposição é derivada do trabalho de Jaynes (1957), e uma prova formal pode ser encontrada em Cover e Thomas (1991). Em palavras, o resultado mostra que o valor máximo que a entropia de uma distribuição de probabilidade em $X_{\mathfrak{A}}$ pode atingir é quando essa distribuição é uniforme.

Proposição 3 *Dado o conjunto de resultados $X_{\mathfrak{A}}$, $\forall \mathcal{P}_m^i \in \mathbb{P}$, $h(\mathcal{P}_m^i) \leq \log K$, com igualdade se, e somente se, \mathcal{P}_m^i é uma distribuição uniforme.*

Tal resultado, no contexto do modelo aqui apresentado, pode ser interpretado da seguinte maneira. Caso os indivíduos, em um contexto de incerteza a respeito da posição ideológica do candidato, se comportem de tal modo que probabilidades subjetivas sejam “criadas” para representar os candidatos na chamada dimensão ideológica, e se tais probabilidades são construídas de acordo com o princípio da máxima entropia, então a situação de maior entropia - ou maior incerteza quanto ao posicionamento ideológico do candidato - é obtida quando todas as posições em $X_{\mathfrak{A}}$ tem igual probabilidade de se tornar a plataforma política adotada pelo candidato, no caso de vitória deste na eleição.

Na proposição seguinte, explora-se os efeitos de uma estratégia de máxima ambiguidade adotada pelos candidatos.

Proposição 4 *Se um candidato $m \in \mathfrak{M}$ adota uma estratégia de máxima ambiguidade, então \mathcal{P}_m^i é uma distribuição uniforme em $X_{\mathfrak{A}}$, i.e., $\forall x^k \in X_{\mathfrak{A}}$, $p_m^i(x^k) = \frac{1}{K}$, que é a distribuição de probabilidade com a maior entropia em $X_{\mathfrak{A}}$.*

Prova: A prova que segue é bastante simples. Pelo Axioma 8, uma estratégia de máxima ambiguidade implica na inexistência de informações relevantes divulgadas pelo candidato, o que, pela propriedade da consistência dada no Axioma 9, determina um conjunto de informações *a priori* igual a $\Theta_m = \{\emptyset\}$. Se esse é o caso, então não existem restrições de momento F_r , implicando em $\lambda_1 = \dots = \lambda_R = 0$. Tomando a equação (2.6), obtemos

$$p_m^i(x^k) = \frac{e^0}{\sum_{k=1}^K e^0} \quad (2.7)$$

para todo $x^k \in X_{\mathfrak{X}}$, o que pode ser simplificado em

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^K 1} = \frac{1}{K} \quad (2.8)$$

Portanto, \mathcal{P}_m^i é uma distribuição uniforme em $X_{\mathfrak{X}}$, o que, pela Proposição 3, denota a distribuição de probabilidade com o maior nível de entropia no conjunto de resultados possíveis de uma eleição $X_{\mathfrak{X}}$. \square

Na ausência de informações relevantes, a distribuição de probabilidade que maximiza a entropia é a distribuição uniforme em $X_{\mathfrak{X}}$. Esse é o mesmo resultado discutido de maneira intuitiva em Knight (1921), onde a falta de razões para acreditar que um resultado é mais provável que outro também levaria à atribuição de probabilidades iguais para cada possível resultado.

Em outras palavras, se o eleitor não possui nenhuma informação relevante a respeito da plataforma política que o candidato irá adotar caso seja eleito - o que descreve uma situação de completa ignorância - então a posição ideológica do candidato pode ser qualquer $x^k \in X_{\mathfrak{X}}$ com probabilidade $1/K$; independente de quão contraditórias duas ideologias parecem ser, esse competidor pode adotar uma ou outra com a mesma probabilidade, na visão do eleitor.

Por exemplo, suponha que existem duas ideologias, α_1 e α_2 , onde em α_1 o tópico “casamento de pessoas do mesmo sexo” seja considerado algo ofensivo, enquanto em α_2 um posicionamento favorável a esse tema seja adotado; então, se um candidato, para um determinado eleitor, possui $1/2$ de chance de adotar x^1 ou x^2 como posição ideológica, i.e., se esse candidato é representado por uma loteria uniforme em $X_{\mathfrak{X}}$, então o eleitor estará completamente incerto a respeito de qual é a real posição ideológica desse candidato, e, conseqüentemente, qual a opinião desse candidato a respeito do matrimônio entre pessoas do mesmo sexo.

2.3.4 Consequências da ambigüidade das campanhas eleitorais nas preferências coletivas

Denote $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}} = \{\succsim_1^{\mathfrak{M}}, \succsim_2^{\mathfrak{M}}, \dots, \succsim_I^{\mathfrak{M}}\}$ como um conjunto de preferências no conjunto de candidatos \mathfrak{M} , e $\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}, I}$ como o conjunto de *todos* os conjuntos de preferências possíveis de serem formados com I indivíduos em \mathfrak{M} .

Proposição 5 *Se, para todo $m \in \mathfrak{M}$, θ_m é uma estratégia de máxima ambigüidade, então $\forall i \in \{1, \dots, I\}, \#\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^i = 1$. Nesse caso, cada eleitor será indiferente entre quaisquer dois candidatos em \mathfrak{M} , i.e., $\forall m, m' \in \mathfrak{M}$ e $\forall i \in \{1, \dots, I\}, m \sim_i^{\mathfrak{M}} m'$.*

Prova: Se, para todo $m \in \mathfrak{M}$, θ_m é uma estratégia de máxima ambiguidade, então $\forall i \in \{1, \dots, I\} \ \& \ m \in \mathfrak{M}$, $\Theta_m^i = \{\emptyset\}$. Pela Proposição 4, cada candidato será representado por uma loteria onde $\forall x^k \in X_{\mathfrak{A}}, p_m^i(x^k) = \frac{1}{K}$, levando à $\#\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^i = 1$. Pelo Axioma 6, $m \succsim_i^{\mathfrak{M}} m'$ se, e somente se $\mathcal{P}_m^i \succsim_i^{\mathbb{P}} \mathcal{P}_{m'}^i$. Usando o teorema da utilidade esperada, isso equivale a dizer que $m \succsim_i^{\mathfrak{M}} m' \iff \sum_{k=1}^K u_k^i p_m^i(x^k) \geq \sum_{k=1}^K u_k^i p_{m'}^i(x^k)$. Dado que, para todo $x^k \in X_{\mathfrak{A}}$ e para qualquer candidato $m, m' \in \mathfrak{M}$, temos $p_m^i = p_{m'}^i = \frac{1}{K}$, então $\sum_{k=1}^K u_k^i p_m^i(x^k) = \sum_{k=1}^K u_k^i p_{m'}^i(x^k) = \sum_{k=1}^K u_k^i \frac{1}{K}$, o que implica em $m \sim_i^{\mathfrak{M}} m'$ e completa a prova. \square

Utilizando os conceitos dados na Definição 2.5, um profile de preferências $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{M}, I}$ pode ser *single-peaked* ordinal se existir um ordenamento linear L tal que, para todo eleitor, $i \in \{1, \dots, I\}$, se $m(i)LmLm'$, ou $m'LmLm(i)$, então $m \succ_i^{\mathfrak{M}} m'$, onde $m(i)$ denota a alternativa ótima no conjunto \mathfrak{M} para o eleitor i , ou seja, para todo $m \in \mathfrak{M}$ e $m(i) \neq m$, temos $m(i) \succ_i^{\mathfrak{M}} m$.⁶⁵ A proposição a seguir mostra justamente que não há como construir um conjunto de preferências que seja *single-peaked* ordinal ou cardinal, dado o contexto de indiferença entre as alternativas.

Proposição 6 *Se a Proposição 5 vale, então o conjunto de preferências $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}} = \{\succsim_1^{\mathfrak{M}}, \succsim_2^{\mathfrak{M}}, \dots, \succsim_I^{\mathfrak{M}}\}$ não é *single-peaked* cardinal nem *single-peaked* ordinal.*

Prova: Para que $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ seja *single-peaked*, necessitamos encontrar um ordenamento linear L onde, se $m(i)LmLm'$, ou $m'LmLm(i)$, então $m \succ_i^{\mathfrak{M}} m'$. Considerando que, para todo $m \in \mathfrak{M}$, e, para todo indivíduo $i \in \{1, \dots, I\}$, temos $m \sim_i^{\mathfrak{M}} m'$, então $\nexists m \in \mathfrak{M}$ tal que $m \succ_i^{\mathfrak{M}} m', \forall m' \in \mathfrak{M}$; i.e., para nenhum eleitor existe um candidato considerado como a alternativa ótima no conjunto \mathfrak{M} , tornando impossível achar um ordenamento linear com a propriedades desejadas. Então, $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ não pode ser *single-peaked* ordinal, e visto que um profile de preferências *single-peaked* cardinal é, obrigatoriamente, *single-peaked* ordinal, então esse conjunto de preferências também não pode ser *single-peaked* cardinal. \square

Em resumo, se os candidatos adotam a mesma estratégia de máxima ambiguidade durante a campanha, então todos eles irão parecer o *mesmo* candidato em termos de probabilidades. É claro que, na realidade, cada competidor possui características que o difere dos outros, mas dado que o discursos de campanha são parecidos, o eleitor acaba por não conseguir distingui-los em termos de posicionamento ideológico, que é o único critério relevante para a tomada de decisão nesse modelo. Portanto, chegamos ao resultado preconizado em Zeckhauser (1969): mesmo que os eleitores tenham preferências ditas *single-*

⁶⁵Lembrando que mLm' pode ser lido como “o candidato m vem antes do candidato m no ordenamento linear L ”.

peaked no conjunto teórico de posições ideológicas - que são as alternativas *certas* -, já não é possível garantir que a utilização do critério ideológico aplicado ao voto também implique em preferências que sejam *single-peaked* no conjunto dos candidatos que concorrem em uma eleição - no conjunto de loterias, as alternativas *incertas* -. Dessa forma, o que se sugere aqui é que a relação entre preferências *single-peaked* e o voto por critérios ideológicos - ou, mais genericamente, o voto conforme arbitrado pelos modelos espaciais - pode ser perturbada se há incerteza a respeito da real natureza das alternativas.⁶⁶

Para clarificar esse ponto, utilizamos a estrutura do exemplo dado em Dasgupta e Maskin (2008), mas adaptando-o para o Brasil. Dado o cenário da eleição presidencial do ano 2010, e assumindo que os indivíduos votam ideologicamente em um espaço unidimensional de “esquerda-direita”, quatro candidatos se destacaram no pleito eleitoral: Dilma Rousseff (PT), José Serra (PSDB), Marina Silva (PV) e Plínio Arruda (PSOL). Ao arranjarmos esse quatro candidatos no espaço “esquerda-direita”, assumindo o que usualmente se entende como “esquerda” e “direita” no que diz respeito a ideologias de governo, um arranjo provável poderia ser o seguinte (do candidato mais à esquerda para o candidato mais à direita em termos ideológicos): Plínio (PSOL), Dilma (PT), Marina (PV), Serra (PSDB). Assim sendo, um eleitor que favorecia a então candidata Dilma Rousseff, ou seja, que tinha a candidata como a alternativa ótima no conjunto, iria provavelmente ordenar os candidatos na ordem

$$PT \succ_i^m PV \succ_i^m PSOL \succ_i^m PSDB$$

ou talvez

$$PT \succ_i^m PSOL \succ_i^m PV \succ_i^m PSDB$$

Ambos ordenamentos descrevem preferências *single-peaked*, sendo pouco razoável pensar que um ordenamento dado por

$$PT \succ_i^m PSDB \succ_i^m PV \succ_i^m PSOL$$

que não é *single-peaked*, possa ser factível. Entretanto, sugere-se que essa conclusão pode ser obtida apenas se também se supõe que não há incerteza quanto à ordem “Plínio, Dilma, Marina, Serra” como a mais apropriada para descrever a posição relativa de cada candidato em relação aos seus concorrentes na dimensão ideológica, ou se se imagina que, mesmo com incerteza, os indivíduos não irão ordenar os candidatos de modo diferente, ainda que, cardinalmente, existam diferenças. Através do modelo desenvolvido, mesmo que a ordem

⁶⁶Também poderíamos chegar ao mesmo resultado através do teorema de Sen (1966) a respeito das preferências *value-restricted*, pelo fato do padrão *single-peaked* ser um caso específico das preferências de Sen. Se todos os indivíduos são indiferentes em relação a todas as alternativas, então eles são da classe de indivíduos *não-engajados*. Nesse caso, dada a ausência de indivíduos *engajados*, torna-se inviável encontrar no *profile* das preferências desses agentes as condições necessárias para que o teorema de possibilidade de Sen seja válido.

real dos candidatos na dimensão ideológica seja “Plínio, Dilma, Marina, Serra”, caso esses competidores adotem uma estratégia de máxima ambiguidade, os indivíduos provavelmente irão ter preferências na forma

$$PSOL \sim_i^m PT \sim_i^m PV \sim_i^m PSDB$$

formando um conjunto de preferências que não é *single-peaked*.

Claramente esse cenário parece bastante restritivo, ou até mesmo improvável de ocorrer. No mundo real, a maioria dos indivíduos não parece ser completamente indiferente entre todos os candidatos, e esses candidatos também não parecem adotar discursos políticos que sejam completamente ambíguos. Entretanto, imagine que os eleitores de fato não sejam completamente indiferentes, mas os candidatos seguem adotando estratégias de máxima ambiguidade, o que, conforme o nosso modelo, culminaria no resultado de indiferença. Se esse é o caso, então isso pode indicar que o critério ideológico unidimensional não é apropriado para descrever o espaço de competição eleitoral. Em outras palavras, eleitores podem estar baseando o voto em outros tipos de critérios que não estão relacionados com “ideologias”, ou opiniões a respeito das questões econômicas, sociais e outras relevantes à sociedade. Dessa forma, outros fatores como gastos de campanha, a aparência de cada competidor, além de outros elementos vinculados à publicidade de cada candidato podem estar desempenhando um papel fundamental para as escolhas tomadas pelo eleitorado, levando-nos a discutir sobre quais aspectos e quais informações são realmente decisivas para o eleitor na hora da tomada de decisão.

2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse ensaio foram apresentadas algumas consequências do discurso eleitoral ambíguo nas preferências dos eleitores em relação aos candidatos em uma eleição, através da construção de um modelo teórico. Especificamente, incerteza a respeito da plataforma política dos candidatos pode levar os eleitores a tornarem-se indiferentes entre quaisquer dois competidores, dado que cada candidato é visto pelo eleitor como uma loteria em um espaço teórico, chamado de dimensão ideológica, com probabilidades formadas de maneira subjetiva, sendo tais probabilidades afetadas de maneira direta pelas estratégias de campanha que cada candidato na disputa adota durante o processo de competição. Sugere-se que o princípio da máxima entropia de Jaynes (1957) pode ser uma ferramenta teórica importante como um método para obter tais probabilidades e relacioná-las à quantidade de informação relevante que cada eleitor tem disponível.

Os principais resultados podem ser descritos da seguinte forma. Inicialmente, mostrou-se que se os indivíduos estão em uma situação onde sentem-se indiferentes entre dois competidores quaisquer, então é possível que essa indiferença seja resultado da total falta de

informações relevantes a respeito das posições ideológicas dos candidatos durante a campanha; posições essas que refletem as plataformas políticas dos competidores a serem adotadas em caso de vitória na eleição. Conforme a construção teórica, tal resultado deve-se ao fato dos competidores adotarem estratégias ditas de máxima ambiguidade, o que, por sua vez, caracteriza a situação onde os eleitores estão totalmente incertos quanto a qual posição cada candidato irá adotar. Após, se de fato há essa indiferença, demonstrou-se que o conjunto dessas preferências individuais não poderá ser *single-peaked*, tanto na forma ordinal quanto na cardinal, mesmo que as preferências dos eleitores no espaço teórico da dimensão ideológica seja *single-peaked* cardinal. Entretanto, salienta-se que as conclusões obtidas descrevem um caso bastante específico, e não um resultado geral. Em outras palavras, são resultados possíveis, mas improváveis, dado que demandam uma série de pré-requisitos. Ao menos algum número de eleitores parece encontrar diferenças entre os candidatos, significando que as suposições feitas durante a construção do modelo podem ser excessivamente restritivas, tal como a ideia que os competidores irão dar total prioridade à discursos ambíguos durante a campanha. Por outro lado, isso também poderia indicar que a dimensão ideológica no formato unidimensional pode não ser adequada para descrever o espaço de competição eleitoral, levando à discussão sobre quais informações são relevantes para a tomada de decisão do eleitor.

Também salienta-se que estudos futuros podem explorar outros elementos que não foram propriamente desenvolvidos na construção do modelo. Primeiro, a possibilidade de um processo de tomada de decisão onde existe a atribuição de probabilidades subjetivas, mas sem a ideia de maximização da utilidade esperada. Nesse caso, eleitores poderiam utilizar as probabilidades que representam os candidatos na dimensão ideológica para fazer um “sorteio” de uma posição ideológica, usando a posição sorteada para verificar o quão perto ou longe esse competidor está da sua alternativa ótima nessa dimensão. Segundo, uma discussão mais aprofundada sobre o parâmetro θ_m poderia buscar sugerir a utilidade dessa abordagem como descrição do impacto da informação de campanha na atribuição das probabilidades. O próprio princípio da máxima entropia pode ser questionado, e a análise de outras fontes de informação relevante que não apenas as de campanha também deve ser considerada. Finalmente, apesar das dificuldades na obtenção de dados, estudos empíricos também podem ser desenvolvidos nesse campo de pesquisa, visando mensurar o grau de incerteza dos eleitores e suas consequências nos resultados eleitorais.

3 APPRAISING FREEDOM OF CHOICE DURING POLITICAL ELECTIONS: A THEORETICAL APPROACH

Abstract. The present essay explores how uncertainty can affect voters' perception of freedom of choice during political elections using two different axiomatic approaches of freedom: the *simple cardinality-based* ordering of Pattanaik and Xu (1990) and the *known-option-based* rule of Arlegi and Dimitrov (2005). Since the former disregards uncertainty about alternatives, while the later introduces it explicitly as a relevant factor for the perception of freedom, both approaches are compared and some results are proposed. It is supposed that candidates are seen as lotteries over the space of issues (Shepsle (1972), McKelvey (1980)), named "ideological space", and that the entropy associated to these lotteries can be used to classify candidates into "known" and "unknown", i.e., the two distinct groups proposed in the known-option-based rule, depending on how tolerant voters are regarding uncertainty about candidates. Also, it is suggested that the principle of maximum entropy of Jaynes (1957) can be a useful tool to determine those lotteries. The main conclusions are: a) both freedom approaches converge to the same results only if individuals are completely tolerant about uncertainty during the choice procedure, or if there is no uncertainty regarding candidates' positions on issues; b) the absence of complete tolerance, associated to a campaign strategy adopted by candidates that do not reveal any relevant information, lead electors to enjoy the minimum degree of freedom of choice while deciding the vote; and c) the total priority to "known" candidates in Arlegi and Dimitrov's rule may lead to a counterintuitive result, where an election with only one candidate may provide higher freedom of choice to voters compared to an election with many candidates.

Keywords and phrases. Freedom of choice. Uncertainty. Elections.

JEL Classifications. D72, D83.

3.1 INTRODUCTION

One important element of human behavior and decision-making theory is the concept of *freedom of choice*. As synthesized in Gaertner and Xu (2011), representing individuals' choices by sets of indifference curves (that is, in the usual microeconomic sense), may not be adequate to reflect accurately the richness of opportunities that these agents are experiencing while consummating the choice. In other words, besides the chosen set of goods, the *choice set*, which is composed by all available options in the choice process, and the freedom that it provides to the individual, is also a valuable aspect to decision-makers.¹ In the bottom line, the freedom of choice literature contradicts some results present in Neary and Roberts (1980), where it is developed the basis of consumer's behavior under rationing, i.e., when at least one of the goods is quantity constrained. In the theoretical framework of these authors, it is not considered the influence of the freedom of choice element, meaning that a rationing situation can generate the same level of "satisfaction" to the consumer observed that the offered bundle under rationing is the same one that he would naturally choose (given his budget constraint) in a non-rationing situation.

In some extent, this literature criticizes the pure utilitarian approach to welfare economics. Sen (1991) points out that Utilitarianism can be factorized into three different aspects: *welfarism*, which denotes the evaluation of any social state exclusively in terms of the utilities generated in this state; *sum ranking*, that sums individuals' utilities to aggregate them, and *consequentialism*, where outcomes are exclusively assessed in terms of this consequences. In this context, many variables that may be pertinent to an appropriate understanding of "welfare", or "social welfare" are not being considered, which is the case of freedom of choice in the present discussion. Hence, the process that leads an individual or a society to reach a certain goal or social state is relevant in the evaluation of this final result.

Thus, the idea that motivates the majority of the freedom of choice literature is that freedom has *intrinsic importance* to human beings. And if this statement is true, when analyzing political elections, not only the possibility of choosing an adequate candidate, or having several alternatives of choice, are valuable to electors, but the process of choice itself can be a source of well-being to individuals in the extend that it can provide larger freedom of choice. Hence, this essay aims to discuss the freedom of choice aspects during political elections, focusing on the impacts of uncertainty regarding candidates to the de-

¹To exemplify, the authors imagine a situation where there is only two goods (x_1 e x_2), and that, after realized the utility maximization process subject to the budget constraint, an individual concludes that the optimal bundle is given by one unit of each good. In this scenario there at, at first, infinite feasible consumption bundles given the budget constraint, and observed all this options is that is given the choice process. Nevertheless, imagine that the individual do not have infinite possibilities of combinations between x_1 e x_2 , and for him is offered directly the bundle $x^* = (1, 1)$. In this case, according to the traditional literature, both first and second situations are equivalent to this individual, while the freedom of choice literature would say that the first situation is preferable to the second one. (GAERTNER; XU, 2011, p. 718)

gree of freedom experienced by voters, where candidates are seen as lotteries on an issue space, called *ideological space*, following the spatial models of voting with uncertainty (e.g. Shepsle (1972), McKelvey (1980)). To put forward our analysis, two approaches are used: the simple cardinality-based approach of Pattanaik and Xu (1999), and the known-option-based rule of Arlegi and Dimitrov (2005). The first theoretical formulation do not give any role to the uncertainty aspect, while the latter can be seen as a reformulation of the simple cardinality-based rule when individuals consider the uncertainty about alternatives as a factor that can constrain their freedom to choose. Both rules are compared, and it is suggested an entropy-based rule to classify alternatives as “known” and “unknown”; categories which are needed to rank sets of alternatives in terms of freedom of choice in accordance to the approach of Arlegi and Dimitrov (2005), where we suggest that an alternative will be “known” if it lies within a certain range of “tolerable entropy”, which can be translated as “tolerable uncertainty” as well.

Some conclusions are then presented:

- a. both approaches yield the same results only if all candidates are considered as “known” by voters, which can be the case if all voters are completely tolerant towards uncertainty;
- b. if the competitors are highly ambiguous about their political platforms (Shepsle (1972), Page (1976), Alesina and Cukierman (1990), Glazer (1990), and others) then it is possible to reach an election procedure where all candidates are considered as “unknown”, leading to a severe constraint in the freedom of choice experienced by voters during the choice procedure;
- c. the rule of Arlegi and Dimitrov (2005) invoking total priority to known candidates may lead to a counterintuitive result, where an election with only one candidate provides more freedom than an election with many candidates, observed that in the former election the only runner is “known”, while in the later all candidates are “unknown”.

Besides this introduction, this essay is divided as follows: section 3.2 presents an overview of freedom of choice approaches that already have been proposed in the literature, while in section 3.3 those approaches are discussed and compared, highlighting their relevant aspects. During section 3.4, the models of Pattanaik and Xu (1999) and Arlegi and Dimitrov (2005) are detailed within the context of elections, and some discussion about the “known-unknown” problem is also made, where it is also presented the idea of using the entropy of the lottery representations of candidates to classify them into these two labels, and the main results of this essay as well. Finally, some conclusions and ideas for future work are explored in the final section.

3.2 MEASURES OF FREEDOM OF CHOICE

Different measures of freedom of choice have been proposed by the literature in the past three decades. As said in Bavetta (2004), most of these measures is rooted in the idea of *positive* and *negative* liberties; concepts that were first introduced by Berlin (1969). Sen (1988) associates negative liberty to “the absence of a class of restraints that one person may exercise over another, or indeed the state may exercise over the individual” (SEN, 1988, p. 272). Thus, while the negative liberty is concerned with the constraints faced by the individual, the concept of positive liberty is related to the possibility of acting. For Berlin (1969),

The ‘positive’ sense of the world liberty derives from the wish on the part of the individual to be his own master. I wish my life and decisions to depend on myself, not on external forces of whatever kind. I wish to be the instrument of my own, not of other men’s acts of will. I wish to be a subject, not an object; to be moved by reasons, by conscious purposes, which are my own, not by causes which affect me, as it were, from outside. I wish to be somebody, not nobody; a doer - deciding, not being decided for, self-directed and not acted upon by external nature or by other men as if I were a thing, or an animal, or a slave incapable of playing a human role, that is, of conceiving goals and policies of my own and realizing them. [...] (BERLIN, 1969, 131)

Thus, according to Bavetta (2004), when measures of freedom are related to the amount of alternatives available to the decision maker, then the idea of positive liberty is being used as the philosophical basis of the concept of freedom.

One approach that takes into account opportunities as a signal of freedom, and that sounds intuitively appealing at first glance, is the *simple cardinality-based* approach, given in Pattanaik and Xu (1990) where it is adopted a pure quantitative view of freedom, i.e., the greater is the number of available options to the individual, the wider is the freedom that he can experience. Formally, suppose that there are two sets of alternatives, A and B ; if the set A possesses more elements than the set B (that is, the cardinality of A is greater than the cardinality of B), then it is possible to conclude that A is preferable to B in terms of freedom. Despite the evident importance of this theoretical formulation to the discussion of the role of freedom and its measurement, one cannot avoid noticing that the cardinal approach is rather simple - as said by the authors themselves, “the simple cardinality-based rule is a rather naive or trivial rule for judging the degree of freedom of choice” (PATTANAIAK; XU, 1990, p. 389) - since it does not take into account some elements that may affect peoples’ perception about opportunities, such as the degree of similarity among the options in a choice set.

To illustrate this point, the authors give the following example: assume that distinct modes of transport are being evaluated, e.g. {train} and {blue car}. If freedom of choice is interpreted in accordance to the simple cardinality-based rule, we have that the individual

must be indifferent between both sets, observed that either have the same number of options, meaning that they provide the same degree of freedom. Now, suppose that the option sets are given by {train, red car} and {blue car, red car}. Again, since both sets have the same cardinality, by this axiomatic formulation the individual must be indifferent between both option sets. However, it is plausible to imagine that the individual feels the set {train, red car} as a more “freedom-providing” set than the {blue car, red car} set, even observed that they have the same cardinality, since the former provides more diversity to the decision-maker. Hence, if that is the case, the simple cardinality-based approach cannot describe accurately peoples’ feelings toward liberty, and there are other factors that must be considered in order to reach a proper theory.

In another paper, Pattanaik and Xu (2000) refine their simple cardinality-based approach to incorporate the similarity between alternatives on an opportunity set as a relevant factor to judge in which extent this set provides freedom of choice. This new theoretical formulation was named as *simple similarity-based* ordering of sets in terms of freedom. In the axiomatic characterization proposed by these authors, adding new alternatives to the opportunity set that are similar to the already existing ones do not increase the degree of freedom experienced by the decision maker. To illustrate, they present the following example: if a set of alternatives given by {red bus} is enlarged by the option {blue bus}, then it would be plausible to imagine that the resulting {red bus, blue bus} set offers the same degree of freedom that the one provided by the {red bus} set, observed the similarity between traveling by a red or a blue bus; but if instead of {blue bus} the option {red train} appears, then, given the dissimilarity between the new and the previous existent alternative, we can expect the set {red bus, red train} to provide a larger amount of freedom than the one provided by the {red bus} set. Nevertheless, there are no considerations about the intensity of the similarity and dissimilarity between objects, i.e., their axiomatic characterization only classifies alternatives as “similar” or “dissimilar”, without exploring how much (dis)similarity exists among options. Moreover, one must inquire how is defined similarity within this context. According to the authors, similarity of options is a matter of social judgment or norms, implying a “non-personalistic” view of similarity; that is, even if the decision maker judges {red bus} and {blue bus} as totally distinct options, the social norm that judges both options similar will prevail upon this individual’s perception.

The notion of diversity and similarity, and their relations with freedom of choice, are also examined in Bervoets and Nicolas (2007), where their diversity ranking is constructed in order to allow more than two possible classifications of similarity. In their formulation, to state that a set A is more dissimilar than a set B , it would be necessary to compare the dissimilarity of A ’s most dissimilar alternatives to B ’s most dissimilar alternatives; additionally, to say that one set is more diverse than another would amount to say that this set provides more freedom of choice as well (BERVOETS; NICOLAS, 2007, p. 268). In order

to clarify this perception of freedom, the authors use another transportation example, where the set of conceivable transportation modes between two cities is given by {bike, car, foot, train}. If we imagine that there are more differences between taking a train and walking than, say, between any other pair of alternatives that can be formed by the elements of the set {bike, car, train}, then it is plausible to conclude that the subset {foot, train} is more dissimilar than the set {bike, car, train}. However, it is worth noting that, focusing on the most dissimilar objects, this criterion would also state that the set {foot, train} provides the same diversity degree as the one given by the set {bike, car, foot, train}, what seems counterintuitive at first glance since the latter set offers more alternatives to the decision maker than the former.

Besides the importance of diversity to freedom of choice, not much has been said in these models about the decision maker's preferences over the alternatives on the opportunity set. Sen (1988, 1993) broadens the freedom concept incorporating individuals' preferences as a relevant element to the measurement of freedom. According to him,

the evaluation of the freedom I enjoy from a certain menu of achievements must depend to a crucial extent on how I value the elements included in that menu. The 'size' of a set, or the 'extent' of freedom enjoyed by a person, cannot, except in very special cases, be judged without reference to the person's value and preferences. (SEN, 1993, p. 528)

Thus, according to Sen, the simple cardinality-based, or the simple-similarity based approaches would be feasible only in "very special cases", when the individual feels that there are no qualitative considerations to be made about the presented options. Thus, Sen suggests that qualitative factors play an important role in determining freedom. To illustrate how important is the quality factor in the analytical process of freedom of choice, Sen states that a pure cardinal view would lead people to accept that "three alternative achievements that are seen as 'bad', 'terrible', and 'disastrous' gives us exactly as much freedom as a choice over another three alternative achievements which are seen as 'good', 'terrific' and 'wonderful'" (SEN, 1993, p. 529). In other words, besides the number of alternatives that an agent can access, any measure of liberty must also look at how this agent ranks these available alternatives considering his preferences among them.

Peragine and Romero-Medina (2006) elaborate a model where both diversity of options and preferences over them are significant factors to measure the freedom of choice that an individual experiences. The authors use the binary notion of similarity present in Pattanaik and Xu (2000) and introduce individual's preferences over these alternatives as an additional information to create two possible ranking rules in terms of freedom. In the first ranking, priority is given to the opportunity aspect, characterizing the relation between freedom, diversity and preferences in a cardinal fashion, while the second ranking gives priority to the diversity aspect. In other words, in the first ranking it is imagined that the individual first

selects the options that are considered as the most relevant (given all feasible preferences over them) and then count them disregarding similar options as different options, while in the second ranking the first step would be filtering options using as a parameter the diversity among them, to then focus on the remaining relevant alternatives in terms of the individual's preferences.

Other relation that has been object of investigation is between freedom, uncertainty and entropy. Some authors, as Suppes (1996) and Erlander (2010), relate the freedom of choice provided by a procedure to its effective results. Analyzing elections outcomes, for example, Suppes (1996) suggests that the greatest freedom of election would be achieved when the number of candidates is high and each one receives almost the same number of votes. As said by the author, "it would be surprising to have a high measure of freedom for the process and a low one for the result" (SUPPES, 1996, p. 188). Moreover, the entropy can be used to measure the diversity of opportunities as well. To exemplify, the author resorts to the following example: suppose that there are two candidates and m relevant characteristics that are relevant for a candidate in an election. Consequently, there are $t = 2^m$ possible types of candidates given those m characteristics, where each candidate can assume one of this t types during an election campaign. Hence, if both candidates assume the same type, the entropy of this election is zero, culminating in a sharp decrease of freedom of choice.

Jones and Sudgen (1982) explore the concept of *significant choice*. In their conceptual framework, a choice set would offer significant choices to the extent that it helps the development of intellectual and moral aspects of the individual, and provides a wide diversity of alternatives. Then, one sort of choice that is not significant in this sense is when the decision maker do not have any reason for choosing a specific option instead of choosing any other available alternative. As argued by the authors, the decision maker "knows immediately that he might as well choose at random, and has no need to tax his mental faculties any further" (JONES; SUDGEN, 1982, p. 59). The concept of significant choice is linked with freedom by the idea of *autonomous choice*. A decision maker is autonomous when he consciously decides which option is the most valuable to him, which can be loosely stated as using his mental faculties to put forward the decision process. In the voter decision problem, it is plausible to imagine that the lack of relevant information affects his autonomy, since there is no reasonable judgment to be made that can help him to effectively access a decision that reflects his real preferences among the candidates. As Jones and Sudgen (1982) argue, "it is not simply that the chooser is indifferent between the two options: one cannot conceive of a reasonable person in the position of the chooser being anything but indifferent". (JONES; SUDGEN, 1982, p. 59)

The same concept of "reasonable person" and its relations to autonomous choice was addressed in Pattanaik and Xu (1998), where it is considered an *autonomous agent* the individual that chooses on basis of his preference pattern, but that could easily have chosen

differently using as parameter another perfectly reasonable preference pattern that he could eventually hold. The authors give an interesting example to illustrate how a “reasonable person” concept may (or may not) work: imagine an opportunity set that is expanded by adding the option “beheaded at dawn”, then, it is feasible that the freedom experienced by an agent though this set is not increased at all, even observed that this expanded set has more alternatives than the previous one. The reason do not depend much on the fact that this individual probably prefers the already existing options than the new one; according to the authors, it “lies in our presumption that, given the circumstances of the agent, no *reasonable* person would prefer the option of being beheaded at dawn over the other options” (PATTANAİK; XU, 1998, p. 179). Nevertheless, suppose now that the former set was given solely by the option “spend the rest of his life in a solitary cell” (which could be, for instance, 50 years); then, the authors say that adding the alternative “beheaded at dawn” to this opportunity set may now increase freedom of choice, since one can reasonably prefers being beheaded at dawn to spent 50 years in a solitary cell. (PATTANAİK; XU, 1998, p. 179)

Another interesting feature that can be used in the freedom of choice analysis is the concept of *reference point*. The idea of reference point is well explored in the psychology and economics literature; as Rabin (1998) points out, there are several studies that show that individuals are more sensitive to how their actual situation diverge in relation to a certain “reference point”, than in relation to absolute characteristics of that situation. A typical example is the temperature: the same temperature that feels cold when one is adapted to the heat can seem hot when one is adapted to the cold (RABIN, 1998, p. 13). Gaertner and Xu (2011) develop a model where individuals can evaluate each opportunity set in terms of the freedom that they offer using as a parameter a reference point, which symbolizes an option that permits a “minimum level of achievements”, where any alternative that do not allows at least the achievement of this minimum level will make the individual’s life unpleasant or miserable (GAERTNER; XU, 2011, p. 718). In their axiomatic formulation, to a certain set of options A be preferable to another set B - in the freedom of choice sense - it is not only necessary the cardinality of A to be greater than the cardinality of B , or that A , in absolute terms, offers better options than B ; it is also necessary that, among A ’s options, exist one that is considered the “reference point”, and that in terms of this point the options of A are judged more valuable than the available options of B .

So far, all freedom approaches already presented do not incorporate explicitly uncertainty or the lack of information as relevant elements to the analysis of freedom of choice. Arlegi and Dimitrov (2005) propose an axiomatic approach to represent freedom of choice under the influence of this informational constraint. First, it is distinguished between the alternatives that are “known” from the ones considered “unknown”, where “known” options are those “whose relevant characteristics in order to be evaluated and compared with other

options are known by the agent” (ARLEGI; DIMITROV, 2005, p. 4), while the “unknown” alternatives are the remaining ones. The authors suggest that incorporating an “unknown” option into the opportunity set may not increase the freedom of choice enjoyed by this individual, justifying this sort of behavior through the existence of a preference for *easy choices*, i.e., since it would be hard to define precisely the characteristics of an unknown alternative, decision under such circumstances would become a difficult task to the individual, culminating in this kind of aversion to alternatives whose relevant characteristics are not well stated. Hence, freedom of choice is enhanced to individuals only if “known” alternatives are added to the opportunity set.

3.3 Freedom and Elections

Many different conclusions can be reached about freedom of choice in political elections, depending on which approach of freedom one relies. As already said, our main focus during this work will be the approaches of Pattanaik and Xu (1990), and Arlegi and Dimitrov (2005), that will be explicitly studied in the next section; nevertheless, it seems interesting to discuss how the other proposals for measuring freedom can be convenient, and which points remain uncovered by them. To illustrate, imagine a presidential election with $N > 0$ distinct candidates, i.e., there are N different persons that are running in this election. As a starting point, let us assume the Pattanaik and Xu (1990) simple cardinality-based approach. Then, there is little to say about preferences among candidates, uncertainty, autonomy or any other factor, leading us to conclude that this election provides more freedom of choice than any hypothetical election with, say, $M < N$ competitors. Hence, enlarging N would be equivalent to enhance freedom.

If we assume the point of view adopted in Sen (1988, 1993), or if the reference point concept of Gaertner and Xu (2011) is used, then some considerations about how agents perceive the N options must be made. Imagine that one “leftist” voter, after analyzing the profile of the N available candidates, judges them as “rightists” candidates. Then, even if there is one candidate which is closer to a “leftist” ideological position, the degree of freedom experienced by this voter will be very low, since all competitors are seen as bad options given that no one can represent this voter’s ideological opinion, or, put in other terms, the reference point of this voter is not an element of the options’ set. In such a situation, comparing this N ideologically equal candidates’ election to another hypothetical one with $M < N$ competitors, but where at least one of the M candidates represents his most preferred ideological position, would probably lead this voter to the conclusion that the M candidates’ election provides more freedom of choice than the other with more competitors. Some similar conclusion can be reached if diversity is taken into account, that is, an election with fewer candidates can perform better in terms of freedom if all competitors are ideolo-

gically distinct, meaning that improvements in freedom are only possible when are added new distinct options - in relation to the previous existent ones - to the set of candidates.

All notions of freedom but simple cardinality-based need some sort of judgment of alternatives in terms of how similar they appear to be, or in terms of their potential quality. Then, incorporating uncertainty into the decision process, as well incomplete information and other information processing problems, seems to be justifiable. In Tversky and Kahneman (1974) it is explored the idea that individuals, when face decision problems under uncertainty and informational constraints, use a limited number of *heuristic principles* to put forward the judgmental operations that are needed in the decision process, which can lead the individual to severe errors of judgment. Back to the election example, this means that the existence of a similarity problem among the N available candidates may not be due to “real” similarity, i.e., each of them really having the same ideological position; instead, the origins of these problems may be rooted in how poor informed voters are to judge precisely which are the ideological positions of the candidates.

The implications of this poor judgments depend on which idea of freedom one relies: if a “leftist” voter concludes that all N candidates are also “leftist”, and his interpretation of freedom relates to Sen’s approach, or the reference point idea of Gaertner and Xu (2011), then he will probably feel that his freedom of choice is being restrained, but certainly in a slighter intensity than if compared to a situation where all candidates were judged as “rightists”. On the other hand, if this “leftist” have considered all N candidates as “rightists”, and assuming this left-wing ideological position as a reference point - that is, the minimum level of achievements acceptable - then this impossibility of choosing a candidate that has an attractive ideological position as him not only diminishes his freedom, but also can make the decision process something “painful”.² Notwithstanding, both situations would be indistinguishable if freedom were associated only to the diversity of alternatives that an option set offers. That is, using the simple similarity-based approach of Pattanaik and Xu (2000), since the diversity given by a set of only “right-wing” candidates is the same observed in a “left-wing” candidates set, then both sets should provide the same freedom to an individual, regardless this individual’s political preferences.

Considering the autonomy approach of Jones and Sudgen (1982), and Pattanaik and Xu (1998), as one pertinent factor for freedom of choice, then one can become skeptical about Suppes (1996) approach, where the result of the election can (with a reliable degree of accuracy) measure of the freedom that voters experienced during the choice procedure.

²The german word *weltschmerz* can help in the understanding of this idea. This term, created by the writer Jean Paul Richter between the XVIII and XIX centuries, can be comprehended as the depression that one experiences when compares the real world to a hypothetical idealized world, realizing that this real world do not - and maybe never will - fulfill his idealized world characteristics. In this example it would be the felling that the voter experiences when he recognizes that his ideal world (the reference point, his left-wing ideological position) is inviable given that no available candidate represents it.

We suggest the following example in order to clarify this point. Suppose that there are two candidates, called A and B , and N voters, each one indexed by $i = 1, \dots, N$, with N being a large number.³ Also, assume that, during the electoral campaign, voters do not enjoyed any relevant information that would help to conclude that one candidate is better than others. Then, it is feasible to imagine that voters will be indifferent between these candidates, since they do not have any reason to believe that one is better than the other, leading them to choose randomly which candidate would receive the vote. Imagine that the voting procedure, for every $i = 1, \dots, N$, is the following: the voter tosses a fair coin and observes the side that appears; if it is heads, he votes for A , but if is tails, he votes for B . Consequently, the expected share of votes for A and for B is 50%, which also implies in the larger entropy measure and the wider degree of liberty as well. But can we say that these voters *experienced* real freedom when decided to vote for A or B ? Would not they prefer to conscientiously vote for A (or B), after a deep analysis of the relevant characteristics, such as historical background and the political platform that is being purposed, instead of choosing this candidate using such a naive procedure? Or, put in another words, do voters fell that their choices are *significant*, in the sense of Jones and Sudgen (1982), in such an environment? If one has in mind the relation between freedom and autonomy, then probably the final expected outcome of 50% of votes to each candidate will have little to say about freedom.

But the argument of autonomy can also provide some counterintuitive results. Let us use the “beheaded at dawn” example of Pattanaik and Xu (1998), adapting it to our discussion about freedom of choice during elections. Suppose that there is an already known number of candidates running for president, and that this existent set is enlarged by adding a new option, that is considered as “undesirable” by voters. Hence, it is plausible to expected a little contribution of this alternative to voters’ freedom of choice, since no reasonable person would vote for someone who has “undesirable” as a main adjective. However, imagine that all other alternatives were judged as, say, “incredibly undesirable”. In this case, the same conclusion reached on Pattanaik and Xu’s example is valid here: voting for the less “undesirable” alternative, among all bad options that are unfortunately available, seems the only reasonable thing to do; and since we are adding a *reasonable* alternative to the opportunity set, we may also expect freedom of choice to be increased. But what if the original candidates were judged as “excellent” alternatives, while the new one were considered as “incredible excellent”? If that was the case, then one can expect voters to have many reasonable voting options at first, i.e, they could vote for any specific “excellent” candidate, at the same time that they could reasonably choose any other of the “excellent” group. However, adding an “incredible excellent” option to the opportunity set would presumably reduce the number of reasonable choices to just *one* - this new “incredible excellent” candidate - since

³This example could typically describe the second round of a runoff voting to elect a president, for instance.

voting for “excellent” instead of “incredibly excellent”, by this qualitative logic, would be an unreasonable behavior.

After this discussion, we may now present the two approaches that are going to be described in more details during this essay: the *simple cardinality-based* approach of Pattanaik and Xu (2000), and the *known-options-based* rule of Arlegi and Dimitrov (2005).

3.4 MODELS

First, let us expose the basic notation that will be used during this section, following the works of Pattanaik and Xu (1990), and Arlegi and Dimitrov (2005). Denote by \mathcal{I} the set of individuals in this society, where each individual is indexed by $i \in \{1, \dots, \#\mathcal{I}\}$. Each individual is assumed to vote, but may also be a candidate running in the election; hence, every individual $i \in \mathcal{I}$ is a potential alternative for office.

Let \mathfrak{Z} be the set of all non-empty subsets of $i \in \mathcal{I}$, i.e., the set of all possible subsets of individuals that can be formed with $\#\mathcal{I}$ agents, and define $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z} \cup \{\emptyset\}$. Note that $\mathcal{I} \in \mathfrak{Z}$ as well. An election is a set $\mathfrak{M} \in \mathfrak{Z}$ of voters that are also candidates in a certain period of time.⁴ Hence, the set \mathfrak{Z} is interpreted here as the set of all possible elections that can be formed with $\#\mathcal{I}$ voters, with cardinality equal to $2^{\#\mathcal{I}} - 1$. We distinguish a voter from a candidate in the following sense: an individual i such that $i \in \mathcal{I}$, but $i \notin \mathfrak{M} \cap \mathcal{I}$, will be called as *voter*, and still denoted by $i \in \mathcal{I}$, while an individual i such that $i \in \mathcal{I}$, and $i \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{I}$, will be called as *candidate*, and then denoted by $m \in \mathcal{I}$. Denote by $\mathfrak{R}_i \in \mathfrak{Z}$ the set of individuals that are “known” to the specific individual $i \in \mathcal{I}$, and by define the set Θ_m^i as the set of *relevant* information that voter i has gathered about candidate a $m \in \mathfrak{M}$.

Following the tradition of spatial models of voting (Shepsle (1972), Enelow and Hinich (1982, 1984)) it is assumed that individuals vote ideologically, and denote by $X_{\mathfrak{M}} = \{x^1, x^2, \dots, x^K\} \in \mathbb{R}$ a finite set of K distinct ideological positions that individuals (voters and candidates) can assume.⁵ Define \mathbb{P} as the set of all possible finite lotteries over X , where, for all $i \in \mathcal{I}$ and $m \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{P}_m^i \in \mathbb{P}$ denotes the lottery, i.e., the set of probabilities that express individual i 's beliefs towards candidate m 's ideological position on the set $X_{\mathfrak{M}}$. Additionally, define $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^i \subset \mathbb{P}$ as the set of lotteries used to describe candidates for the i voter, and, using the concept presented in Shannon (1948), $h(\mathcal{P}_m^i)$ as the *entropy* of the probability distribution \mathcal{P}_m^i .

⁴Thus, an election here symbolizes the set of alternatives presented to individuals, and not the voting rule that is being used.

⁵Some models, such as Anderson and Gloom (1991) and Shepsle (1972), assume that the “ideological spectrum”, or the “policy space”, are a continuum. However, it is not possible to affirm that the continuum assumption have more desirable features than the discrete case. Moreover, if one assumes that K is a sufficient large number, then it possible to approximate the discrete to the continuum case.

3.4.1 The Simple Cardinality-Based Approach

Let us follow Pattanaik and Xu (1990) and analyze freedom of choice on political elections within a purely cardinal view. Assume that $\succsim_i^{\mathfrak{Z}}$ is a binary relation over \mathfrak{Z} , that is, over all possible elections that can be formed with $\#\mathfrak{I}$ individuals, where, for any $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{M} \succsim_i^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{M}'$ may be read as “the feasible election \mathfrak{M} offers at least as much freedom of choice to the voter i than the feasible election \mathfrak{M}' ”, while $\mathfrak{M} \succ_i^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{M}'$ and $\mathfrak{M} \sim_i^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{M}'$ denote the asymmetric and symmetric relations, respectively. In order to describe preferences that only take into account the cardinal element, the authors introduce the following properties.

Definition 3.1 *Indifference between No-choice Situations.*

$$\forall m, m' \in \mathfrak{I}, \{m\} \sim_i^{\mathfrak{Z}} \{m'\} \quad (3.1)$$

Definition 3.2 *Strict Monotonicity.*

$$\forall m, m' \in \mathfrak{I}, \& m \neq m', \{m, m'\} \succ_i^{\mathfrak{Z}} \{m\} \quad (3.2)$$

Definition 3.3 *Independence.*

$$\forall \mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}, \& \forall m \in \mathfrak{I} - (\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'), [\mathfrak{M} \succsim_i^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{M}' \longleftrightarrow \mathfrak{M} \cup \{m\} \succsim_i^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{M}' \cup \{m\}] \quad (3.3)$$

Definition 3.4 *Simple Cardinality-Ordering.*

$$\forall \mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}, \mathfrak{M} \succsim_i^{\mathfrak{Z}} \mathfrak{M}' \longleftrightarrow \#\mathfrak{M} \geq \#\mathfrak{M}' \quad (3.4)$$

The main result of Pattanaik and Xu (1990) is given in the following theorem.

Theorem 1 (Pattanaik and Xu (1990)) $\succsim_i^{\mathfrak{Z}}$ is the simple cardinality-based ordering if and only if $\succsim_i^{\mathfrak{Z}}$ satisfies indifference between no-choice situations, strict monotonicity and independence.⁶

Each of these properties have interesting implications on individuals’ understanding of freedom of choice. If we assume a pure quantitative view of freedom, then the property given in Definition 3.1 seems intuitively plausible. For instance, suppose two possible electoral scenarios: in the first one, the candidate $m \in \mathfrak{I}$ is the only competitor, and hence $\mathfrak{M} = \{m\}$, while in the second, another individual $m' \in \mathfrak{I}$, with $m' \neq m$, is the unique candidate, defining the election $\mathfrak{M}' = \{m'\}$. In this case, since it is not being given any role to preferences, voters must not encounter differences in terms of freedom in both elections,

⁶To a formal proof, see (Pattanaik and Xu (1990)).

no matter how “good” or “bad” a voter may feel m in relation to m' . The strict monotonicity property, as the authors argue, “embodies the principle that, in terms of freedom, a situation where the agent has some choice is better than a situation where the agent has no choice” (PATTANAIK; XU, 1990, p. 387), or, put in other words, the greater the number of alternatives, the larger is the degree of freedom. Hence, an election $\mathfrak{M} = \{m, m'\}$ will be better, in terms of freedom, than another election $\mathfrak{M}' = \{m'\}$. Finally, the independence property states that, given two possible elections \mathfrak{M} or \mathfrak{M}' , incorporating a candidate m to both elections must not change how individuals perceive freedom in \mathfrak{M} or \mathfrak{M}' . For instance, a voter cannot feel \mathfrak{M} as an election with higher freedom of choice degree than \mathfrak{M}' , but at the same time believe that $\mathfrak{M}' \cup m$ provides greater freedom than $\mathfrak{M} \cup m$.

3.4.2 The Known-Options-Based Rule

In this section we present the approach of Arlegi and Dimitrov (2005). This theoretical formulation is interesting to our purposes since it establishes a simple criterion to determine the role of information to freedom during choice processes, allowing a direct application of the entropy concept to the measurement of this freedom, as we suggest latter. Using their axiomatic formulation, freedom of choice would be increased in political elections only if “known” candidates are added to the opportunity set. In order to be considered as a “known” option, the individual must have enough *relevant information* about the alternative, where a piece of information is considered relevant if it helps the agent during the choice procedure.

Freedom of choice is measured comparing *extended opportunity sets*, which are given by $(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}_i) \in \mathfrak{Z}^* \times \mathfrak{Z}$.⁷ Contextualizing into the political elections scenario, an extended opportunity set is given by a set of effective options (that is, candidates) denoted by the election \mathfrak{M} , upon which a decision must be made, and a set of known options (i.e., voters and candidates that the individual i considers as “know”) \mathfrak{R}_i that will help this individual to perform his decisions over \mathfrak{M} . For notation simplicity, define $\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}^* \times \mathfrak{Z}$, where $\succsim_i^{\mathfrak{P}}$ denotes a complete and transitive binary relation on \mathfrak{P} . To formalize, they suggest the following set of properties.

Definition 3.5 *Empty Choice.*

$$\forall \mathfrak{R}_i, \mathfrak{R}'_i \in \mathfrak{Z}, (\emptyset, \mathfrak{R}_i) \sim_i^{\mathfrak{P}} (\emptyset, \mathfrak{R}'_i) \quad (3.5)$$

Definition 3.6 *Simple Monotonicity.*

$$\forall m \in \mathfrak{M} \ \& \ m' \in \mathfrak{R}_i \in \mathfrak{Z}, (\{m, m'\}, \mathfrak{R}_i) \succ_i^{\mathfrak{P}} (\{m\}, \mathfrak{R}_i) \quad (3.6)$$

⁷It is worth noticing that, in opposite to the previous approach, the authors here consider the empty set as a possible opportunity set.

Definition 3.7 *Simple Neutrality.*

$$\forall m \in \mathfrak{M} \ \& \ m' \notin \mathfrak{K}_i \in \mathfrak{Z}, (\{m, m'\}, \mathfrak{K}_i) \sim_i^{\mathfrak{P}} (\{m\}, \mathfrak{K}_i) \quad (3.7)$$

Definition 3.8 *Independence.*

$$\begin{aligned} \forall (\mathfrak{M}, \mathfrak{K}_i), (\mathfrak{M}', \mathfrak{K}'_i) \in \mathfrak{P}, \ \& \ \forall m \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{K}_i, m' \in \mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{K}'_i, \ \& \ m \in \mathfrak{K}_i \iff m' \in \mathfrak{K}'_i \\ (\mathfrak{M}, \mathfrak{K}_i) \succsim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathfrak{K}'_i) \iff (\mathfrak{M} \cup \{m\}, \mathfrak{K}_i) \succsim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}' \cup \{m'\}, \mathfrak{K}'_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Definition 3.9 *Known-Options-Based Rule*

$$\forall (\mathfrak{M}, \mathfrak{K}_i), (\mathfrak{M}', \mathfrak{K}'_i) \in \mathfrak{P}, (\mathfrak{M}, \mathfrak{K}_i) \succsim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathfrak{K}'_i) \iff \#(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_i) \geq \#(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{K}'_i) \quad (3.9)$$

Given the above definitions, Arlegi and Dimitrov (2005) state the following theorem.

Theorem 2 (Arlegi and Dimitrov (2005)) $\succsim_i^{\mathfrak{P}}$ is the known-option-based rule if and only if $\succsim_i^{\mathfrak{P}}$ satisfies empty choice, independence, strict monotonicity and strict neutrality.⁸

The rule proposed states that an opportunity set will provide more freedom of choice to individuals if it has more known alternatives. The main difference between this ordering and the simple cardinality-based approach is due to the axioms of *simple monotonicity* and *simple neutrality*. While simple monotonicity in Pattanaik and Xu (1990) states that freedom is always increased no matter which sort of alternative is added to the opportunity set, in the known-option-based approach the decision-maker's freedom is conditional to an informational factor, that is, if an additional alternative is considered as “known”, then the simple monotonicity axiom states that the freedom of choice provided by this set will be increased; however, if this new option is classified as “unknown”, then, by the simple neutrality axiom, there are no changes in the decision-maker's perception of freedom. In what concern the others properties, the *empty choice* axiom states that individuals must be indifferent between two empty opportunity sets, whatever is the known set of options (however, since we are assuming that elections must have at least one competing candidate, this property will be of little interest here), while the *independence* axiom follows the same logic presented in Pattanaik and Xu (1990).

3.4.3 The “Known-Unknown” Problem: A Proposal

In order to reach a more precise understanding of freedom of choice during electoral periods within this theoretical framework, it is important to examine how candidates become “known” or “unknown” (what is closely related to the idea of relevant information to

⁸To a formal proof, see Arlegi and Dimitrov (2005).

voters' decisions). So, if electors only need to know candidates' parties to reach a coherent decision, and assumed that each candidate cannot run for office without being linked to a political party, then, since this piece of information is presumably available to voters without any sort of restriction, one can expect the known-option-based rule to perform the same results presented by the simple-cardinality approach. In this case, each new candidate will inevitably increase freedom of choice, and an election will reach the maximum "degree of freedom" in the unlikely scenario of each voter becoming a candidate. However, if more information is needed to reach a decision, and, more importantly, information that is not directly observable, or collected so easily as candidates' parties, then the known-option-based rule may lead to the conclusion that freedom of choice is severely constrained by the lack of a solid basis of relevant information, despite the number of running candidates.

Assuming that individuals vote according to their ideological preferences, and that each voter represents candidates by lotteries over a theoretical "ideological space"⁹, could be a useful manner to deal with the "known-unknown" problem. That is, it is supposed that the only relevant information to the voting decision is the ideological position that each candidate assumes, and that voters are uncertain about this information, leading to lottery representations in the ideological space. Since we are supposing the existence of these probabilistic representations of candidates - which are subjectively defined considering any informational basis available - then one can expect candidates to be considered as "known" only when their respective lotteries representations are degenerated, that is, to a "known candidate", voters would assign a probability 1 for a certain outcome in $X_{\mathfrak{A}_i}$, and 0 to the others. However, this would probably lead our analysis toward a trivial result, when all candidates are considered as "unknown" by definition. Then, we suggest here that there is a certain "range" of uncertainty, or lack of relevant information, that voters tolerate, which amounts to say that, even without being represented by a degenerated lottery, a candidate may be considered as "known" by electors.

We now introduce our first assumption about the "known-unknown" classification.

Axiom 1 For all $i \in \mathfrak{I}$, $m \in \mathfrak{M}$, and $\mathfrak{K}_i \in \mathfrak{Z}$,

$$m \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}_i) \longleftrightarrow h(\mathcal{P}_m^i) \leq \tau_i$$

where $\tau_i \in [0, h_{max}]$.

In words: the voter i feels that he knows a specific candidate m when the entropy of the probability distribution used to represent this candidate on the set $X_{\mathfrak{A}_i}$ is lower than a certain level of "tolerable" entropy, or uncertainty regarding candidate's ideological position. By the properties of the entropy function, this level of uncertainty must lie between 0 and the

⁹As discussed in the previous essay.

maximum entropy achievable by a probability distribution in the set $X_{\mathfrak{M}}$, which is associated to an uniform \mathcal{P}_m^i .

It is important to note that no considerations are being made about how accurate are voters' evaluations, or if "known" candidates are those whose *real* ideological preferences are known to voters. For instance, let us say that there are two ideologies, "left" and "right", upon which voters evaluate candidates. Then, it is possible a situation where one voter feels that a candidate m is "known", attributing to him a the "left" ideology, while other voter also considers this candidate as "known", but assigning to him the "right" ideology; and since this candidate must be "left", or "right", but cannot be both at the same time, then one of these voters has wrong beliefs about this competitor ideology, regardless the fact that he is sure about them.

3.5 RESULTS

First, let us use the simple-cardinality based approach, where the following proposition becomes obvious.

Proposition 1 *If for all $i \in \mathfrak{I}$, $\succ_i^{\mathfrak{I}}$ is the simple cardinality-based ordering, then an election $\mathfrak{M} \in \mathfrak{Z}$ such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{I}$ and $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{M}$ is the one that provides the highest degree of freedom of choice.*

Proof: Suppose that there is an election $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}$, with $\#\mathfrak{M}' = n$, where n is any natural number of the interval $0 < n < \#\mathfrak{I}$. By definition, it is known that $\nexists m \in \mathfrak{M}'$, but $m \notin \mathfrak{I}$, which means that there are $\#\mathfrak{I} - n$ individuals $i \in \mathfrak{I}$ that are not in \mathfrak{M}' , that is, the cardinality of the set $\mathfrak{I} \setminus \mathfrak{M}'$ is $\#\mathfrak{I} - n$. Hence, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{I}$, but $\mathfrak{I} \not\subseteq \mathfrak{M}'$. Take an alternative election $\mathfrak{M}'' \in \mathfrak{Z}$ and a nonempty subset of individual $A \subset \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{M}'$ such that $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}' \cup \{A\}$. Clearly, $\#\mathfrak{M}'' = n + \#A > \#\mathfrak{M}'$, implying in $\mathfrak{M}'' \succ_i^{\mathfrak{I}} \mathfrak{M}'$. For clarity, let us write $\#\mathfrak{I} = n + \#\mathfrak{I} - n$; then, since $\#A < \#\mathfrak{I} - n$, we have that $\#\mathfrak{M}'' = n + \#A < n + \#\mathfrak{I} - n$, and hence there are $\#\mathfrak{I} - n - \#A$ individuals $i \in \mathfrak{I}$ that are not in \mathfrak{M}'' , which means that the cardinality of the set $\mathfrak{I} \setminus \mathfrak{M}''$ is $\#\mathfrak{I} - n - \#A$, and $\mathfrak{M}'' \subseteq \mathfrak{I}$, but $\mathfrak{I} \not\subseteq \mathfrak{M}''$.

Assume now that $A' = \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{M}''$, and that there is an election $\mathfrak{M} \in \mathfrak{Z}$ such that $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'' \cup A'$. Then, $\#\mathfrak{M} = \#\mathfrak{M}'' + \#A'$, which can be written as $\#\mathfrak{M} = n + \#A + (\#\mathfrak{I} - n - \#A)$, that finally yields $\#\mathfrak{M} = \#\mathfrak{I}$. Since, for any n in the interval $0 < n < \#\mathfrak{I}$, we have $\#\mathfrak{M} > \#\mathfrak{M}'' > \#\mathfrak{M}'$, then $\mathfrak{M} \succ_i^{\mathfrak{I}} \mathfrak{M}'' \succ_i^{\mathfrak{I}} \mathfrak{M}'$, i.e., \mathfrak{M} provides more freedom of choice than any other election with cardinality less than $\#\mathfrak{I}$. Also, observed that $\nexists m \in \mathfrak{M}'$, but $m \notin \mathfrak{I}$, then $\mathfrak{I} \setminus \mathfrak{M}'' = \{\emptyset\}$. Thus, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{I}$ and $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{M}$, and there is no subset of individuals in the set \mathfrak{I} that can be added to the set \mathfrak{M} , meaning that $\nexists \mathfrak{M} \in \mathfrak{Z}$ with $\#\mathfrak{M} > \#\mathfrak{I}$, and that the \mathfrak{M} provides more freedom than any other election in the set \mathfrak{Z} .

□

In words: the Proposition 1 above states that the most freedom-providing election would be the one where each individual postulates his candidacy for office. This result emerges since any additional factors are being considered than the cardinal one. That is, the cardinal argument do not take into account preferences over candidates and their opinions on issues, the potential uncertainty that can arise regarding the characteristics of those candidates, or even the similarity among options. In the simple-cardinality based approach, increasing the number of alternatives not only increases freedom of choice, but also does it at a “constant rate”, i.e., every new candidate enhances freedom by the same amount enhanced by the previous candidate that entered in the competition.

Uncertainty would only affect the perception of freedom if voters were not sure about how many alternatives they have for choice, or if they do not have this information. For instance, imagine that, when comparing two elections $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}$, the voter i is informed that \mathfrak{M} has 10 candidates, and the number of candidates in \mathfrak{M}' is an element of the set $\{9, 10, 11\}$. If this elector perceives freedom of choice according to the simple cardinality-based rule, then he knows that \mathfrak{M}' can provide greater, equal or less freedom in comparison to \mathfrak{M} (depending if the number of candidates is, respectively, 11, 10 and 9), but does not know which one is the real case. Note that uncertainty in this case is not about the nature of candidates, but it is only related to the cardinality of the sets that are being compared, no matter which are the alternatives that they present.

The authors themselves suggest that this approach is not a convenient measure of freedom for many different situation. However, measuring freedom only on basis of the cardinality of the opportunity set has an obvious empirical advantage, since the number of candidates is an easily observable variable, while in voters' preferences, uncertainty regarding alternatives and the majority of the other factors that have been suggest in the literature demand much more effort to be gathered, or are impossible to be measured.

Let us analyze the effects of uncertainty about alternatives using the known-option-based rule, already considering our suggestion of an entropy-based classification of “known” and “unknown” on freedom of choice. Denote by \mathcal{U}_m^i a random variable that, for elector i , denote the ideological position of candidate m . Assuming that individuals assign probabilities in accordance to the principle of *maximum entropy* of Jaynes (1957, 1968), then the probability of a candidate $m \in \mathfrak{M}$ adopts the ideological position x_k is given by

$$\mathcal{P}_m^i(\mathcal{U}_m^i = x^k \mid \Theta_m^i) = \frac{e^{-\sum_{r=1}^R \lambda_r f_r(x^k; \theta_m)}}{\sum_{k=1}^K e^{-\sum_{r=1}^R \lambda_r f_r(x^k; \theta_m)}} \quad (3.10)$$

where $\mathcal{P}_m^i(\mathcal{U}_m^i = x^k \mid \Theta_m^i)$ also considers the amount of relevant information that elector i has gathered about this candidate ideological position.

Proposition 2 *If, for all $i \in \mathcal{I}$, $m \in \mathfrak{M}$, and $\mathfrak{R}_i \in \mathfrak{Z}$, we have that $\tau_i < \log K$, and $\Theta_m^i = \{\emptyset\}$, then $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_i) = \{\emptyset\}$.*

Proof: It is known that $h_{max} = \log K$, and that the maximum entropy level occurs when the probability distribution is uniform.¹⁰ Given that the maximum entropy principle is used to assign probabilities, we have that $\Theta_m^i = \{\emptyset\}$ implies in a lottery over the set $X_{\mathfrak{M}}$ that is uniform. If for all $i \in \mathcal{I}$, $\tau_i < \log K$, then $\nexists m \in \mathfrak{M}$ with $h(\mathcal{P}_m^i) < \tau_i$, which, by Assumption 1 implies in $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_i) = \{\emptyset\}$. □

Proposition 2 states that the absence of relevant information about candidates lead to an election without any “known” candidate. One first implication of this situation to freedom of choice is given in the following proposition.

Proposition 3 *If $\succsim_i^{\mathfrak{P}}$ is the known-option-based ordering, and $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_i) = \{\emptyset\}$, then*

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}_i) \sim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathfrak{R}'_i)$$

for all $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}$ & $(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{R}'_i) = \{\emptyset\}$.

Proof: The proof follows directly from the definition of the known-option-based rule. Since $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_i) = \{\emptyset\}$, and $(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{R}'_i) = \{\emptyset\}$ then $\#(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_i) = \#(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{R}'_i)$, and hence $(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}_i) \sim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathfrak{R}'_i)$. □

The above proposition says that individuals are indifferent between any possible non-empty election with only “unknown” candidates. In other words, the cardinality of the opportunity set does not play any role on individuals’ perception of freedom if the uncertainty regarding their ideological positions are above the tolerable limit.

One implication of this result is that the freedom of choice enjoyed by voters when there is only one “unknown” candidate will be the same that they will experience when there are many “unknown” competitors. That is, given that freedom is enhanced only when new alternatives can be properly evaluated, and that the absence of relevant information restrains the capacity of evaluating candidates with a certain degree of accuracy, one must note that an electoral system that is only concerned with providing a large number of candidates will not be an ideal system to enlarge freedom of choice, unless this system also gives conditions for candidates to spread their campaign information properly, reducing voters’ uncertainty about the relevant issues to the decision-making process. However, as already discussed earlier, spreading relevant information, i.e., revealing which are their real opinions on issues of

¹⁰To a formal proof of this result, see Cover and Thomas (1991).

campaign, may not be an interesting strategy for candidates during the electoral period. As seen in Shepsle (1972), Page (1976), Glazer (1990), and others, candidates have incentives to adopt ambiguous positions on the matters that are relevant for voters' decision, which can be one of the reasons for the existence of an election with only "unknown" candidates. In this case, the factors that lead to freedom of choice constraining would be mainly linked to the strategies adopted by candidates - that is, the lack of their interest in revealing information and avoiding ambiguous discourses - and not with the potential absence of instruments to reveal it.

The following proposition explores which results can be expected when the tolerance level of voters are at their maximum levels.

Proposition 4 *If, for all $i \in \mathcal{I}$, $\tau_i = \log K$, then $\nexists \mathfrak{R}_i \in \mathfrak{Z}$ with $\mathfrak{R}_i \subseteq \mathcal{I}$ but $\mathcal{I} \not\subseteq \mathfrak{R}_i$. Consequently, $(\mathfrak{M}, \mathcal{I}) \succsim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathcal{I}) \iff \#\mathfrak{M} \geq \#\mathfrak{M}'$.*

Proof: It is known that $\exists \mathcal{P}_m^i \in \mathbb{P}$ such that $h(\mathcal{P}_m^i) > \log K$. Take the election \mathcal{I} , where every voter is also a candidate. Then, $\forall m \in \mathcal{I}$, $\tau_i \geq h(\mathcal{P}_m^i)$, and, by Assumption 1, $\forall m \in \mathcal{I}$ it is also true that $m \in (\mathcal{I} \cap \mathfrak{R}_i)$, which implies in $\mathfrak{R}_i \subseteq \mathcal{I}$, and $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{R}$. Since all individuals are "known", for any $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}$, $(\mathfrak{M} \cap \mathcal{I}) = \mathfrak{M}$, and $(\mathfrak{M}' \cap \mathcal{I}) = \mathfrak{M}'$, which, by the known-option-based rule, results in $(\mathfrak{M}, \mathcal{I}) \succsim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathcal{I}) \iff \#\mathfrak{M} \geq \#\mathfrak{M}'$. \square

What is being said through Proposition 4 is that, when voters' tolerance levels are maximal, i.e., when their tolerance level is equal to the entropy of an uniform distribution on $X_{\mathcal{I}}$, then all individuals will be regarded as "known". Consequently, all candidates also will be "known", leading us to the conclusion that the informational factor do not play any direct role to the comparisons of opportunity sets in terms of the freedom of choice they provide. In this case, the rule of Arlegi and Dimitrov (2005) reaches the same results of the axiomatic approach of Pattanaik and Xu (1990), where the only relevant information to the establishment of comparisons among sets is their cardinalities.

Nevertheless, this theoretical formulation also make possible the following result, which seems to contradict a primal notion of liberty, i.e., that it depends on the existence of alternatives to be chosen.

Proposition 5 *If $\succsim_i^{\mathfrak{P}}$ is the known-option-based ordering, then, for any $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{Z}$ such that $(\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{R}'_i) = \{\emptyset\}$,*

$$(\{m\}, \mathfrak{R}_i) \succ_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathfrak{R}'_i)$$

for any $m \in \mathfrak{R}$.

Proof: Take two elections with only one candidate, $\{m\}, \{m'\} \in \mathfrak{Z}$ such that $m \in \mathfrak{R}_i$

and $m' \notin \mathcal{R}'_i$. Then, $(\{m\} \cap \mathcal{R}_i) = \{m\}$, and $(\{m'\} \cap \mathcal{R}'_i) = \{\emptyset\}$, which means that $\#(\{m\} \cap \mathcal{R}_i) > \#(\{m'\} \cap \mathcal{R}'_i)$, and hence, $(\{m\}, \mathcal{R}_i) \succ_i^{\mathfrak{P}} (\{m'\}, \mathcal{R}'_i)$. Since $(\{m'\} \cap \mathcal{R}'_i) = \{\emptyset\}$, then the set $\mathcal{I} \setminus (\mathcal{R}'_i \cup \{m'\})$ denotes the set of all individuals that are “unknown” to individual i when he knows \mathcal{R}'_i , and that are not candidates in the election $\{m'\}$. Define $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{I} \setminus (\mathcal{R}'_i \cup \{m'\})$ as any non-empty subset of individuals with this characteristics, and an election \mathfrak{M}' such that $\mathfrak{M}' = (\{m'\} \cup \mathfrak{B})$. The cardinality of $(\mathfrak{M}' \cap \mathcal{R}'_i)$ can be written as $\#(\mathfrak{M}' \cap \mathcal{R}'_i) = \#(\{m'\} \cap \mathcal{R}'_i) + \#(\mathfrak{B} \cap \mathcal{R}'_i)$, but since $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{I} \setminus (\mathcal{R}'_i \cup \{m'\})$, then, for any \mathfrak{B} , $(\mathfrak{B} \cap \mathcal{R}'_i) = \{\emptyset\}$ will hold, and hence $\#(\mathfrak{M}' \cap \mathcal{R}'_i) = \#(\{m'\} \cap \mathcal{R}'_i)$, which implies in $(\{m'\}, \mathcal{R}'_i) \sim_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathcal{R}'_i)$. But if that is the case, by transitivity we have that $(\{m\}, \mathcal{R}_i) \succ_i^{\mathfrak{P}} (\mathfrak{M}', \mathcal{R}'_i)$, which completes the proof. \square

The above proposition states that any one-candidate election, observed that this candidate is “known”, will provide more freedom of choice than any other possible election with only “unknown” competitors, no matter how many “unknown” alternatives those elections provide. This seems as a counterintuitive result at first glance, since a singleton election, regardless the informational factor, does not seem to provide any freedom of choice *at all* given that voters have only one alternative for choice. For instance, imagine a country that is being ruled by the same cruel dictator for the last twenty years, and, in order to claim that his regime is democratic, this dictators decides to convoke presidential elections. It is reasonable to believe that, for the majority of voters in this country, this dictator will be considered as “known”. Assume now that, afraid of a possible retaliation, or imagining that the elections result will be manipulated to corroborate the actual government, the opposition to the regime decides to not launch any candidate, culminating in an election with only candidate. Given this situation, would people really experience more freedom of choice through this election than in a hypothetical one with many “unknown” candidates? In such a situation, it seems plausible to imagine that people would prefer the second election, loosing their strict preference for “known” candidates.

3.6 CONCLUDING REMARKS

During this essay were discussed some approaches of freedom of choice, focusing in two simple rules that have been proposed in the literature: the simple cardinality-based approach of Pattanaik and Xu (1999), and the known-option-based rule of Arlegi and Dimitrov (2005). Both rules are compared and their results analyzed within the context of political elections, where it is assumed that the electorate can be unsure about the ideological positions of candidates, i.e., the political platform that each competitor will adopt when in office, leading each voter to represent every available candidate as a lottery in this issue space.

To contribute to this discussion, it is suggested here that the entropy of the probability

distribution used to describe each candidate in the issue space can be an useful theoretical apparatus to access if this competitor is seen as “known” or “unknown” to the voter. Also, it is assumed that voters can tolerate some amount of uncertainty and still consider the candidate as “known”. Then, it is shown that the simple cardinality-based and the known-option-based rules will converge to the same results only if all candidates are “known”, situation that can be feasible if the entropy of their probabilistic representations are small enough, or if voters have the highest degree of tolerance as possible, configuring a situation where information do not play any specific role to freedom of choice considerations. To the contrary, if voters are not completely tolerant with uncertainty regarding candidates’ ideological positions, and if those candidates adopt some sort of maximum ambiguity strategy, where no relevant information is revealed by candidates to facilitate voters’ choice, then all competitors will be classified as “unknown”, culminating in an election with the smallest degree of freedom. Also, it is explored the counterintuitive possibility of an election with only one “known” candidate to provide more freedom than another election with multiple “unknown” competitors, leading to the discussion of how appropriate a total priority to knowledge can be to describe peoples’ feelings toward liberty in political elections.

Clearly, both approaches are simple and do not depict the general case, but they introduce some interesting foundations to the freedom of choice and social choice discussion, and the role of uncertainty about alternatives to individuals’ perception of freedom as well. Many further developments can be done, incorporating other features to the discussion, such as diversity, autonomous choice under uncertainty, and a deeper analysis of the idea of degrees of uncertainty, also trying to explore empirically the freedom concept and its consequences on politics and voters behavior.

4 CONCLUSÃO

Durante essa dissertação, buscamos explorar alguns tópicos que nos parecem relevantes para as sociedades democráticas em geral. No primeiro ensaio, foram exploradas as consequências da ambiguidade nas campanhas eleitorais para o processo de decisão individual e coletiva, usando como base um modelo teórico que alia pontos distintos das literaturas que tratam do comportamento dos eleitores, das escolhas sociais, e das decisões sob incerteza. Como resultados, obtemos a possibilidade teórica de os eleitores sentirem-se indiferentes em relação a todos os candidatos, o que, por sua vez, gera uma série de problemas para o processo de escolha social, dentre os quais abordamos especificamente o gerado para a aplicabilidade da regra da maioria.

Após, abordamos um tema bastante sensível para as pessoas: a liberdade de escolha. Como a incerteza em relação às alternativas - e, especificamente, em relação aos candidatos em uma eleição - pode afetar o sentimento de efetiva liberdade? Para discutir esse tópico, buscou-se analisar diferentes abordagens de liberdade de escolha, mas focando em duas em específico. Sugeriu-se uma regra para a definição de “conhecido” ou “desconhecido”, que pode auxiliar para o refinamento dessa linha de pesquisa, baseada no conceito de *entropia*. Ademais, em condições de excessiva incerteza acerca dos candidatos, podemos chegar a uma situação de extrema constrição da liberdade de escolha, o que também fere o desenvolvimento de uma sociedade democrática.

Sabidamente, os temas abordados nessa dissertação são bastante amplos, de modo que aqui não se procura exaurir a larga gama de possibilidades de pesquisa. Muitos outros tópicos, como uma abordagem não-probabilística de incerteza e suas consequências nos processos de decisão, a mensuração efetiva do grau de liberdade de escolha, ou do grau de incerteza dos indivíduos, como também o desenvolvimento de pesquisas empíricas que abordem esses temas, são agendas de pesquisa a serem continuamente desenvolvidas, visando ampliar - principalmente no Brasil - o entendimento acerca desses aspectos das escolhas dos indivíduos em um ambiente coletivo.

REFERÊNCIAS

ALESINA, A.; CUKIERMAN, A. The politics of ambiguity. *The Quarterly Journal of Economics*, Cambridge, v. 105, p. 829-850, 1990. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2937875>>. Acesso em: 21 jan. 2014.

ANDERSON, S. P.; GLOMM, G. Alienation, indifference and the choice of ideological position. *Social Choice and Welfare*, v. 9, p. 17-31, 1992. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00177667#page-1>>. Acesso em: 5 abr. 2013.

ANSCOMBE, F. J.; AUMANN, R. J. A definition of subjective probability. *The annals of mathematical statistics*, v. 34, n. 1, p. 199-205, 1963. Disponível em: <<http://www.jstor.org/discover/10.2307/2991295?uid=3737664&uid=2&uid=4&sid=21104657931391>>. Acesso em: 8 out. 2013.

ARAGONÈS, E.; NEEMAN, Z. Strategical ambiguity in electoral competition. *The Journal of Theoretical Politics*, v. 12, p. 183-204, 2000. Disponível em: <<http://jtp.sagepub.com/content/12/2/183>>. Acesso em: 11 dez. 2013.

ARKELOF, G. A. The Market for “Lemons”: Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *The Quarterly Journal of Economics*, Cambridge, v. 84, n. 3, p. 488-500, 1970. Disponível em: <www.jstor.org/stable/1879431>. Acesso em: 5 abr. 2013.

ARLEGI, R.; DIMITROV, D. On freedom, lack of information and the preference of easy choices. Institut fur Mathematische Wirtschaftsforschung Working Papers, 2005. Disponível em: <http://www.soc.uoc.gr/asset/accepted_papers/paper446>. Acesso em: 14 jan. 2014.

ARROW, K. J. A difficulty in the concept of social welfare. *Journal of Political Economy*, v. 58, n. 2, p. 328-346, 1950. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1828886>>. Acesso em: 12 set. 2012.

BALLESTER, M. A.; HAERINGER, G. A characterization of single-peaked domain. *Social Choice and Welfare*, v. 36, n. 2, p. 305-322, 2011. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00355-010-0476-3>>. Acesso em: 22 out. 2013.

BARTELS, L. M. Uninformed votes: Information effects in presidential elections. *American Journal of Political Science*, v. 40, n. 1, p. 194-230, 1996. Disponível em: <<http://www.jstor.org/discover/10.2307/2111700?uid=3737664&uid=2&uid=4&sid=21104666914971>>. Acesso em: 2 dez. 2013.

BAVETTA, S. Measuring freedom of choice: An alternative view of a recent literature. *Social Choice and Welfare*, v. 22, n. 1, p. 29-48, 2004. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00355-003-0275-1#page-1>>. Acesso em: 10 jan. 2014.

BERLIN, I. *Four essays on liberty*. Oxford University Press, 1969.

BERVOETS, S.; GRAVEL, N. Appraising diversity with an ordinal notion of similarity: An axiomatic approach. *Mathematical Social Sciences*, v. 53, p. 259-273, 2007. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165489607000054>>. Acesso em: 14 jan. 2014.

BLACK, D. On the rationale of group decision-making. *The Journal of Political Economy*, v. 56, n. 1, p. 23-34, 1948. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1825026>>. Acesso em: 24 abr. 2013.

BOGOMOLNAIA, A.; LASLIER, J. Euclidean Preferences. *Journal of Mathematical Economics*, v. 43, n. 2, p. 87-98, 2007. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030440680600111X>>. Acesso em: 22 out. 2013.

BOSSERT, W.; PATTANAIK, P. K.; XU, Y. Choice under complete uncertainty: axiomatic characterizations of some decision rules. *Economic Theory*, v. 16, n. 2, p. 295-312, 2000. Disponível em: <www.jstor.org/stable/25055326>. Acesso em: 2 out. 2013.

BRAMS, S.; JONES, M; KILGOUR, M. Single-peaked and disconnected coalitions. *Journal of Theoretical Politics*, v. 14, p. 359-383, 2002. Disponível em: <<http://jtp.sagepub.com/content/14/3/359.abstract>>. Acesso em: 22 out. 2013.

BUCHANAN, J, M. Social Choice, Democracy and Free Markets. *Journal of Political Economy*, v. 62, n. 2, p. 114-123, 1954. Disponível em: <www.jstor.org/stable/1825570>. Acesso em: 10 out. 2013.

CASTRO, L, I, de; FARO, J, H. *Introdução à Teoria da Escolha*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2005.

COVER, T. M.; THOMAS, J. A. Entropy, relative entropy and mutual information. *Elements of Information Theory*, John Wiley; Sons, Inc., p. 12-49, 1991.

D'AGOSTINO, M.; DARDONI, V. What's so special about Euclidean distance? A characterization with applications to mobility and spatial voting *Social Choice and Welfare*, v. 33, p. 211- 233, 2009. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00355-008-0353-5>>. Acesso em: 25 out. 2013.

DALAGER, J. K. Voters, issues and elections: Are the candidates' messages getting through? *The Journal of Politics*, v. 58, p. 486-515, 1996. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2960236>>. Acesso em: 21 jan. 2014.

DANAN, E. Randomization vs. selection: How to choose in the absence of preference? *Management Science*, v. 56, n. 3, p. 503-518, 2010. Disponível em: <<http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.1090.1116>>. Acesso em: 19 set. 2013.

DASGUPTA, P.; MASKIN, E. On the robustness of majority rule. *Journal of the European Economic Association*, v. 6, n. 5, p. 949-973, 2008. Disponível em: <<http://www.princeton.edu/econtheorycenter/pdf/Maskin.pdf>>. Acesso em: 13 jan. 2013.

DOWNS, A. *An Economic Theory of Democracy*. Harper and Row, 1957.

ELLSBERG, D. Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The Quarterly Journal of Economics*, Cambridge, v. 75, n. 4, p. 643-669, 1961. Disponível em: <<http://qje.oxfordjournals.org/content/75/4/643.abstract>>. Acesso em: 7 out. 2013.

ENELOW, J.; HINICH, M. Probabilistic voting and the importance of centrist ideologies in democratic elections. *Journal of Politics*, v. 46, n. 2, p. 459-478, 1984. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2130970>>. Acesso em: 11 abr. 2013.

ENELOW, J.; HINICH, M. A new approach to voter uncertainty in the downsian spatial model. *American Journal of Political Science*, v. 25, n. 3, p. 483-493, 1981. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2110815>>. Acesso em: 11 dez. 2013.

ENELOW, J.; HINICH, M. Ideology, Issues, and the Spatial Theory of Elections. *The American Political Science Review*, Cambridge, v. 76, n. 3, p. 493-501, 1982. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1963727>>. Acesso em: 9 mar. 2014.

ERLANDER, S. *Cost-Minimizing Choice Behavior in Transportation Planning*. [S.l.]: Springer, 2010.

FEREJOHN, J. A.; NOLL, R. G. Uncertainty and the formal theory of political campaigns. *The American Political Science Review*, Cambridge, v. 72, n. 2, p. 492-505, 1978. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1954106>>. Acesso em: 21 jan. 2014.

FOX, C. R.; TVERSKY, A. Ambiguity aversion and comparative ignorance. *The Quarterly Journal of Economics*, Cambridge, v. 110, n. 3, p. 585-603, 1995. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2946693>>. Acesso em: 22 jan. 2014.

GAERTNER, W.; XU, Y. Reference-dependent rankings of sets in characteristics space. *Social Choice and Welfare*, v. 37, p. 717-728, 2011. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00355-011-0569-7>>. Acesso em: 5 abr. 2013.

GLAZER, A. The Strategy of Candidate Ambiguity. *The American Political Science Review*, Cambridge, v. 84, n. 1, p. 237-241, 1990. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1963640>>. Acesso em: 21 jan. 2014.

HOTELLING, H. Stability in competition. *The Economic Journal*, v. 39, n. 153, p. 41-57, 1929. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2224214>>. Acesso em: 14 mai. 2013.

HENRY, M.; MOURIFIÉ, I. Euclidean revealed preferences: testing the spatial voting model. *Journal of Applied Econometrics*, v. 28, p. 650-666, 2013. Disponível em: <<http://www3.grips.ac.jp/econseminar/20111102henry.pdf>>. Acesso em: 19 set. 2013.

HINICH, M. J.; POLLARD, W. A New Approach to the Spatial Theory of Electoral Competition. *American Journal of Political Science*, v. 25, n. 2, p. 323-341, 1981. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/2110856> >. Acesso em: 19 mar. 2013.

IHARA, S. *Information Theory for Continuous Systems*. World Scientific Publisher, 1993.

INADA, K. A note on the simple majority decision rule. *Econometrica*, v. 32, n. 4, p. 525-531, 1964. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1910176>>. Acesso em: 11 mai. 2013.

JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, v. 106, n. 4, p. 620-630, 1957. Disponível em: <<http://bayes.wustl.edu/etj/articles/theory.1.pdf>>. Acesso em: 11 jul. 2013.

JAYNES, E. T. Prior probabilities. *Systems Science and Cybernetics*, v. 4, n. 3, p. 227-241, 1968. Disponível em: <<http://bayes.wustl.edu/etj/articles/prior.pdf> >. Acesso em: 31 jul. 2013.

JONES, P.; SUDGEN, R. Evaluating choice. *International Review of Law and Economics*, v. 2, p. 47-65, 1982. Disponível em: <<http://libra.msra.cn/Publication/35213827/evaluating-choice> >. Acesso em: 14 jan. 2014.

KEYNES, J. M. *A Treatise on Probability*. [S.1.]: Macmillan and Co. Limited, 1921.

KNIGHT, F. H. *Risk, Uncertainty and Profit*. [S.1.]: Sentry Press, 1921.

LODGE, M.; STEENBERGEN, M.; BRAU, S. The Responsive Voter: Campaign Information and the Dynamics of Candidate Evaluation. *The American Political Science Review*, Cambridge, v. 89, n. 2, p. 309-326, 1995. Disponível em: <<http://www.jstor.org/discover/10.2307/2082427?uid=3737664&uid=2&uid=4&sid=21104667637821> >. Acesso em: 2 dez. 2013.

MAS-COLELL, A., WHINSTON, M.; GREEN, J. *Microeconomic Theory*. [S.1.]: Oxford University Press, 1995.

MASKIN, E. Decision-making under ignorance with implications for social choice. *Theory and Decision*, v. 11, 319-337, 1979. Disponível em: < <http://scholar.harvard.edu/maskin/publications/decision-making-under-ignorance-implications-social-choice> >. Acesso em: 8 jul. 2013.

MAY, K. A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision. *Econometrica*, v. 20, n. 4, p. 680-684, 1952. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/1907651> .>. Acesso em: 27 set. 2012.

MILYO, J. A problem with Euclidean preferences in spatial models of politics. *Economic Letters*, v. 66, p. 179-182, 2000. Disponível em: < <http://ase.tufts.edu/econ/papers/9920.pdf> >

>. Acesso em: 22 out. 2013.

MCKELVEY, R, D. Ambiguity in spatial models of policy formation. *Public Choice*, v. 35, p. 385-402, 1980. Disponível em: < <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00128118> >. Acesso em: 21 jan. 2014.

NEARY, J.; ROBERTS, K. The Theory of Household Behavior under Rationing. *European Economic Review*, Vol. 13, 1980. Disponível em: <www.sciencedirect.com/science/article/pii/0014292180900458 >. Acesso em: 14 abr. 2012.

OSBORNE, M. J. Candidate positioning and entry in a political competition. *Games and Economic Behavior*, v. 5, n. 1, p. 133-151, 1993. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825683710079> >. Acesso em: 25 set. 2013.

PAGE, B. The theory of political ambiguity. *The American Political Science Review*, Cambridge, v. 70, n. 3, p. 742-752, 1976. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1959865> >. Acesso em: 20 jan. 2014.

PALMA, A. *et al.* The principle of minimum differentiation holds under sufficient heterogeneity. *Econometrica*, v. 53, n. 4, p. 767-781, 1985. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/1912653> >. Acesso em: 21. nov. 2013.

PATTANAİK, P.; XU, Y. On ranking opportunity sets in terms of freedom of choice. *Louvain Economic Review*, v. 56, n. 3/4, p. 383-390, 1990. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/40723933>>. Acesso em: 1 nov. 2012.

PATTANAİK, P.; XU, Y. On preferences and freedom. *Theory Decision*, v. 44, p. 173-198, 1998. Disponível em: < link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1004924211553 >. Acesso em: 14 jan. 2014.

PATTANAİK, P.; XU, Y. On diversity and freedom of choice. *Mathematical Social Sciences*, v. 40, p. 123-130, 2000. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165489699000438> >. Acesso em: 14 jan. 2014.

PERAGINE, V.; ROMERO-MEDINA, A. On preference, freedom and diversity. *Social Choice and Welfare*, v. 27, p. 29-40, 2006. Disponível em: < <https://ideas.repec.org/p/bai/series/wp0003.html> >. Acesso em: 14 jan. 2014.

RABIN, M. Psychology and Economics. *Journal of Economic Literature*. Vol. 36, No. 1, 1998. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/2564950> >. Acesso em: 1 abr. 2013.

SAVAGE, L. *The foundations of statistics*. [S.1]: Dover Publications, 1954.

SEN, A. Freedom of choice: concept and content. *European Economic Review*. v. 32, n. 2, p. 269-294, 1988. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0014292188901730> >. Acesso em: 14 mai. 2013.

SEN, A. Welfare, preference and freedom. *Journal of Econometrics*, v. 50, n. 1, p. 15-29, 1991. Disponível em: <<http://scholar.harvard.edu/sen/publications/welfare-preference-and-freedom>>. Acesso em: 13 mai. 2013.

SEN, A.; PATTANAIK, P. Necessary and sufficient conditions for rational choice under majority decision. *Journal of Economic Theory*, v. 1, n. 2, p. 178-202, 1969. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053169900209>>. Acesso em: 1 nov. 2013.

SEN, A. A possibility theorem on majority decisions. *Econometrica*, v. 34, n. 2, p. 491-499, 1966. Disponível em: <http://darp.lse.ac.uk/PapersDB/Sen_%28Econometrica_66%29.pdf>. Acesso em: 14 mai. 2013.

SENGUPTA, A.; SENGUPTA, K. A hotelling-downs model of electoral competition with the option to quit. *Games and Economic Behavior*, v. 62, n. 2, p. 661-674, 2008. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825607001170>>. Acesso em: 25 set. 2013.

SEWELL, R.; MACKAY, D.; MCLEAN, I. Probabilistic electoral methods, representative probability, and maximum entropy. *Voting Matters*, v. 26, n. 2, p. 16-38, 2009. Disponível em: <citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.132.4896>. Acesso em: 6 mai. 2014.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, New York, v. 27, n. 3, p. 379-423, 1948. Disponível em: <<http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf>>. Acesso em: 27 set. 2013.

SHEPSLE, K. A. The strategy of ambiguity: Uncertainty and electoral competition. *The American Political Science Review*, Cambridge, v. 66, n. 2, p. 555-568, 1972. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1957799>>. Acesso em: 6 dez. 2013.

SINN, H. W. . A rehabilitation of the principle of insufficient reason. *The Quarterly Journal of Economics*, Cambridge, v. 94, n. 3, p. 493-506, 1980. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1884581>>. Acesso em: 30 set. 2013.

SUPPES, P. The nature and measurement of freedom. *Social Choice and Welfare*, v. 13, p. 183-200, 1996. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/BF00183350>>. Acesso em: 10 jan. 2014.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, v. 185, n. 4157, p. 1124-1131, 1974. Disponível em: <http://psiexp.ss.uci.edu/research/teaching/Tversky_Kahneman_1974.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2013.

UBEDA, L. Neutrality in arrow and other impossibility theorems. *Economic Theory*, v. 23, o. 195-204, 2004. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00199-002-0353-0>>. Acesso em: 6 mai. 2014.

WITTMAN, D. Candidate motivation: A synthesis of alternative theories. *The American Political Science Review*, Cambridge, v. 77, n. 1, p. 142-157, 1983. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/1956016> >. Acesso em: 21 jan. 2014.

ZANETTI, C. B. *Utilidade Esperada Subjetiva com Descrição Imperfeita das Consequências*, 2008, Tese (doutorado em Economia), Departamento de Economia, Faculdade de Administração, Economia e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

ZECKHAUSER, R. Majority Rule with Lotteries on Alternatives. *The Quarterly Journal of Economics*, Cambridge, v. 83, n. 4, p. 696-703, 1969. Disponível em: < <http://www.jstor.org/stable/1885458> >. Acesso em: 10 mai. 2014.