

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Análise Física de Curvas de Luz de Estrelas Anãs Brancas e Pré-Anãs Brancas Pulsantes \*

José Eduardo da Silveira Costa

Tese realizada sob orientação do Dr. Kepler de Souza Oliveira Filho e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre  
2004

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Dedico este trabalho aos meus pais,  
Eduardo Costa e  
Paulina Aline da Silveira Costa.



“Se as coisas são inatingíveis... Ora!  
Não é motivo para não querê-las...  
Que tristes os caminhos, se não fora  
A presença distante das estrelas.”

— Mário Quintana —

# Agradecimentos

- Ao Kepler, que me sempre me permitiu trabalhar de forma independente, mas ao mesmo tempo sempre esteve pronto para me auxiliar e orientar nos momentos em que precisei. Foram longos anos. Durante todo esse tempo, sempre pude contar com sua compreensão e paciência. Me orgulho de ter sido seu aluno.
- Ao meu pai e minha mãe, que dedicaram suas vidas à mim e aos meus irmãos e permitiram que cada um de nós pudesse seguir o caminho que escolheu. Hoje, mais do que nunca, tenho consciência do papel deles em nossas vidas. Gostaria que soubessem o quanto sou grato e que os amo muito. Muito obrigado!
- À Tia Dinda... por tudo! Aos meus irmãos.
- A todos os professores e funcionários do Instituto de Física da UFRGS que, em algum momento, me ajudaram. Um agradecimento especial vai para o Prof. Horácio Dottori que, entre outras coisas, cedeu o micro onde escrevi minha tese.
- Aos amigos e colegas, Henrique Fraquelli, Moisés Razeira, Cássio Moura, Marcelo Trevisan, Márcio Ramos de Oliveira, Carlos Dutra, Arlei Antunes, e a antiga “turma do café”, pelos incontáveis bons momentos e pelo apoio nos momentos difíceis.
- À todos os outros colegas e amigos que encontrei no IF (são tantos), pela amizade: Virgínia M. Alves, Cristiano Mariotto, Antônio Nóbrega, Ângelo Fausti, Fausto K. Barbosa, Leandro Kerber, Fabrício Ferrari, Mauro Rickes, e tantos outros.
- À Isabel, pelo amor, pelo carinho, pelo companheirismo, e por ter dado um sentido *maior* à minha vida. Eu te amo!

# Resumo

As estrelas anãs brancas e pré-anãs brancas pulsantes apresentam pulsações não-radiais, multi-periódicas. Os períodos dos modos de pulsação dependem de parâmetros físicos da estrela, como a massa, a temperatura efetiva da superfície, a luminosidade, e da sua estrutura interna. À medida que a estrela evolui, os períodos de pulsação mudam em resposta às alterações em sua estrutura interna. O estudo dos modos de pulsação nos permite estimar parâmetros físicos da estrela, como a massa, por exemplo, e a medida das variações nos períodos dos modos de pulsação revelam as escalas de tempo de evolução.

Nesse trabalho, estudamos duas estrelas: a PG 1159-035 e a G117-B15A. Cada uma delas está próxima de um dos extremos da trilha evolutiva das estrelas anãs-brancas. A PG 1159-035 é uma pré-anã branca, prestes a se tornar uma anã-branca e é o protótipo de uma classe de estrelas com características espectrais similares, as estrelas PG 1159. A temperatura efetiva em sua superfície é muito alta, cerca de  $130\,000\text{ K}$ . Por ser tão quente, a PG 1159-035 está evoluindo rapidamente a ponto das variações em seus períodos de pulsação poderem ser medidas diretamente em um intervalo de poucos anos. A construção de modelos adequados para estrelas PG 1159 é um desafio para a astronomia moderna, pois o número de estrelas conhecidas desse tipo é muito pequeno e pouco se sabe sobre sua história pregressa imediata e sua estrutura interna.

A G117-B15A é uma anã branca que já percorreu a seqüência evolutiva das anãs brancas e está esfriando lentamente. É uma representante da classe das DAVs. O período de 215 s de seu principal modo de pulsação está variando 1 segundo a cada 8 milhões de anos, o que faz da G117-B15A um dos mais estáveis relógios conhecidos.

A partir da análise dos periodogramas das curvas de luz da PG 1159-035 obtidas entre 1983 e 2002 identificamos 198 modos de pulsação, 76 modos a mais do que os encontrados em trabalhos anteriores. Com base no espaçamento médio entre períodos, calculamos a massa da estrela,  $M/M_{\odot} = 0.586 \pm 0.001$ . O estudo do espaçamento médio também revelou a presença de *modos amarrados*, o que sugere que o interior da estrela já apresenta um certo grau de estratificação e nos possibilitou calcular a posição da zona de transição na composição interna da estrela,  $r_c/R_{\star} = 0.83 \pm 0.05$ . Adicionalmente, foi feita a medida da variação temporal,  $\dot{P}$ , dos sete mais estáveis períodos de pulsação (e de dezenas de outros, porém com uma precisão menor). Até então, apenas o  $\dot{P}$  do modo de maior amplitude da PG 1159-035 (516 s) era conhecido. Os valores encontrados para os  $\dot{P}$  estão entre  $10^{-11}$  e  $10^{-10}\text{ ss}^{-1}$ , sugerindo que a escala de tempo de evolução da PG 1159-035 é de  $\sim 1.4 \times 10^6$  anos, de acordo com as previsões teóricas. Os resultados obtidos trazem alguns *insights* e oferecem restrições para futuros modelos para estrelas da classe PG 1159.

Para a G117-B15A, calculamos a taxa de variação temporal do modo principal de 215 s e dos dois outros modos de maior amplitude (270 s e 390 s). Para o modo de 215 s, obtivemos  $\dot{P} = (+4.72 \pm 0.80) \times 10^{-15}\text{ ss}^{-1}$ . Para os modos de 270 s e 390 s os resultados foram:  $\dot{P} = (+36.0 \pm 7.2) \times 10^{-15}\text{ ss}^{-1}$  e  $\dot{P} = (+74.3 \pm 15.2) \times 10^{-15}\text{ ss}^{-1}$ , respectivamente, ou seja, 10 a 20 vezes mais rápido.

# Abstract

The pulsating white dwarf and pre-white dwarf stars show non-radial multi-periodic pulsations. The periods of the pulsation modes depend on physical parameters of the star, such as mass, effective temperature on its surface, luminosity, and internal structure. As the star evolves, the pulsation periods change in response to the changes in the internal structure. The study of pulsation modes allows us to estimate physical stellar parameters of the star, like the mass, for example, and the measurement of the secular periods variation determinates the evolutionary timescales.

In this work, two stars are studied: PG 1159-035 and G117-B15A. Each of them is near one of the extreme points of the white dwarfs evolutionary path. PG 1159-35 is a pre-white dwarf, a future white dwarf, and is the prototype of a class of stars with similar spectral features, the PG 1159 class. Its effective temperature is very high, around of 130 000  $K$  and, for this reason, it is rapidly evolving, to the point that the changes of its pulsation periods can be directly measured in a few years interval. The construction of adequate models for PG 1159 stars is a challenge for modern astronomy, due to the fact that few stars of this class are known and that its early immediate history and internal structure are scantily known.

G117-B15A is a white dwarf that has already passed through the evolutionary sequence of the white dwarfs and is cooling slowly for almost a Gyear. Its is a member of the DAV class of stars. The period of 215 s of its main pulsation mode is changing 1 second each 8 million years; this makes the G117-B15A one of the most stable clocks known.

From the analysis of the periodograms of the light curves of PG 1159-035 obtained between 1983 and 2002, 198 pulsation modes were identified, 76 more modes than found in previous works. Based on the average spacing between periods, the stellar mass was calculated,  $M/M_{\odot} = 0.586 \pm 0.001$ . The study of the average spacing also revealed the presence of *trapped modes*, which suggest that the inside of the star is stratified and allowed the calculation of the position of the compositional transition zone in the interior of the star:  $r_c/R_{\star} = 0.83 \pm 0.05$ . Additionally, we measured the secular change,  $\dot{P}$ , of the seven more stable pulsation periods (and tens of others, but with smaller precision). Until now, only the  $\dot{P}$  of the mode with highest amplitude of PG 1159-035 (516 s) was known. The values found for  $\dot{P}$  are between  $10^{-11}$  and  $10^{-10} \text{ ss}^{-1}$ , suggesting that the PG 1159-035 evolutionary timescale is of  $\sim 1.4 \times 10^6$  years, in accordance with the predictions of the current models for PG 1159 stars. The results give us some insights and constraints for future models of stars of this class.

For G117-B15A, we calculated the  $\dot{P}$  of the main pulsation mode of 215 s and of two other modes (270 s and 304 s). For the 215 s mode, we obtained  $\dot{P} = (+4.72 \pm 0.80) \times 10^{-15} \text{ ss}^{-1}$ . The results for the modes of 270 s and 304 s are:  $\dot{P} = (+36.0 \pm 7.2) \times 10^{-15} \text{ ss}^{-1}$  and  $\dot{P} = (+74.3 \pm 15.2) \times 10^{-15} \text{ ss}^{-1}$ , respectively, i.e., 10 to 20 times higher.

# Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 Introdução	1
1.2 Anãs Brancas	3
1.3 Classificação Espectral	9
1.4 Diagrama H-R	10
1.5 A Evolução até o Ramo Assintótico das Gigantes	12
1.6 Evolução Pós-Ramo Assintótico das Gigantes	15
1.7 Renascimento	16
1.8 Evolução na Seqüência das Anãs Brancas	17
1.9 Esfriamento	21
1.10 Estrelas Pulsantes	26
1.11 Pré-Anãs Brancas Pulsantes	26
1.12 Anãs Brancas Pulsantes	27
1.13 O que causa as pulsações?	28
1.14 O Mecanismo $\kappa - \gamma$	28
1.15 Objetivos deste Trabalho	30
1.16 Estrutura desta Tese	31
<b>2. A ESTRELA PG 1159-035</b>	32
2.1 Introdução	32
2.2 Variabilidade	33
2.3 Estrelas Similares à PG 1159-035	33
<b>3. DADOS FOTOMÉTRICOS</b>	37
3.1 Introdução	37
3.2 Fotômetros	37
3.3 Filtros	38
3.4 Tempo de Observação	38
3.5 Base de Tempo	39
3.6 WET - Whole Earth Telescope	40
3.7 Dados Fotométricos da PG 1159-035	40
<b>4. TRATAMENTO DE DADOS</b>	49
4.1 Introdução	49
4.2 Redução de Dados Fotométricos	50
4.3 Defeitos em Curvas de Luz	59

4.4	O Problema das Baixas Freqüências com Altas Amplitudes . . . . .	63
4.5	Efeito de Modulação . . . . .	64
4.6	Origem dos Picos de Baixas Freqüências e Altas Amplitudes . . . . .	66
4.7	Correção para a Diferença de Cor . . . . .	67
4.8	Filtros Passa-Altas . . . . .	68
4.9	Semelhança de Cores . . . . .	69
<b>5.</b>	<b>PULSAÇÕES NÃO-RADIAIS . . . . .</b>	<b>70</b>
5.1	Introdução . . . . .	70
5.2	A Função de Brilho para Modos-g . . . . .	71
5.3	Harmônicos Esféricos . . . . .	71
5.4	Zonas Quentes e Frias . . . . .	73
5.5	Parte Real da Função de Brilho . . . . .	73
5.6	Representação Gráfica . . . . .	75
5.7	Evolução Temporal . . . . .	77
5.8	Integral de Brilho . . . . .	78
5.9	Rotação da estrela . . . . .	85
5.10	Inclinação do Eixo de Rotação . . . . .	87
5.11	Modelo dos Eixos Não-Alinhados . . . . .	87
5.12	Campo Magnético . . . . .	88
5.13	Efeitos sobre $\dot{P}$ . . . . .	89
<b>6.</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS DE PULSAÇÃO . . . . .</b>	<b>91</b>
6.1	Introdução . . . . .	91
6.2	Espaçamento em Período . . . . .	92
6.3	Modos Amarrados . . . . .	93
6.4	Detecção x Identificação . . . . .	94
6.5	Análise de Fourier . . . . .	94
6.6	Periodogramas . . . . .	95
6.7	Transformada de Fourier . . . . .	96
6.8	Harmônicos . . . . .	100
6.9	Janela Espectral . . . . .	103
6.10	Interferência entre Freqüências . . . . .	103
6.11	Pré-Branqueamento . . . . .	104
6.12	Limite de Detecção . . . . .	105
6.13	Refinamento . . . . .	107
6.14	Pesos dos Dados . . . . .	107
6.15	Periodogramas da PG 1159-035 . . . . .	110
6.16	Períodos Detectados na PG 1159-035 . . . . .	115
6.17	Estimativa de $\Delta P_\ell$ . . . . .	117
6.18	Cálculo de $P_{ol}$ . . . . .	123
6.19	Identificação dos Períodos de Pulsação . . . . .	124



<b>7. ASTEROSISMOLOGIA DA PG 1159-035</b>	142
7.1 Introdução	142
7.2 $\Delta P_\ell$ e a Frequência de Brunt-Väisälä	142
7.3 O Modelo KB	144
7.4 <b>Cálculo da Massa da Estrela</b>	145
7.5 Diagrama $\Delta P$	147
7.6 Análise Preliminar	150
7.7 Localização da Zona de Transição	154
<b>8. VARIAÇÕES DOS PERÍODOS DE PULSAÇÃO</b>	159
8.1 Introdução	159
8.2 Definição de $\dot{P}$	159
8.3 Escalas de Tempo de Evolução	160
8.4 Previsões Teóricas	161
8.5 $\dot{P}$ , Segundo os Modelos KB	163
8.6 Técnicas de Determinação de $\dot{P}$	165
8.7 Variações dos Períodos de Pulsação da PG 1159-035	169
8.8 Medidas diretas das variações dos períodos da PG1159-035	171
8.9 Aplicando o Diagrama (O-C) à PG 1159-035	190
8.10 Diagramas (O-C)	191
8.11 Resultados do Ajuste Não-Linear para a PG 1159-035	199
8.12 Comparando os Resultados	200
<b>9. A ESTRELA G117-B15A</b>	202
9.1 Introdução	202
9.2 Variações nos Períodos de Pulsação	204
9.3 Novas Medidas para as Variações em Período da G117-B15A	205
9.4 Dados Observacionais	206
9.5 Pós-redução dos dados	210
9.6 Períodos de Pulsação	211
9.7 Medida Direta	212
9.8 Diagramas (O-C)	213
9.9 Variação do Período de 215 s	214
9.10 Variação do Período de 270 s	215
9.11 Variação do Período de 304 s	215
9.12 Análise dos Resultados	219
<b>10. RESUMO E CONCLUSÕES</b>	222
10.1 Redução dos Dados Fotométricos	222
10.2 O Problema das Baixas Frequências	222
10.3 Limite de Detecção	223
10.4 Peso dos Dados	223
10.5 Ajuste Simultâneo de Senóides	224
10.6 Períodos de Pulsação da PG 1159-035	224
10.7 Espaçamento em Período na PG 1159-035	225

10.8	Identificação dos Modos $m = 0$	225
10.9	Combinações Lineares de Freqüências	225
10.10	Massa da Estrela	226
10.11	Modos Amarrados	226
10.12	Localização da Zona de Transição	227
10.13	Variações dos Períodos de Pulsação da PG 1159-035	227
10.14	Variações nos Períodos da G117-B15A	228
10.15	Conclusões	229
10.16	Sugestões para Trabalhos Futuros	231
<b>A.</b>	<b>Função Sinusoidal com Período Variável</b>	232
A.1	Definição de Período	232
A.2	Tempos de Máximo	233
A.3	Condição 1	234
A.4	Número de Ciclos	235
A.5	Variação Linear do Período	236
A.6	Função Sinusoidal com Período Variável	237
A.7	Paradoxo do $\dot{P}$	238
<b>B.</b>	<b>MULTIF Tutorial</b>	240
B.1	The fitted function	240
B.2	Starting <b>multif</b>	241
B.3	Project name	241
B.4	The light curve	242
B.5	File format	243
B.6	Time Unit	245
B.7	Checking the time series	246
B.8	Starting time	246
B.9	Frequencies	246
B.10	Lambda factor: a slowest convergence	248
B.11	Calculating the initial guess	249
B.12	Final results	249
B.13	The output files	250
B.14	End of work	251
B.15	Running <b>multif</b> in background	251
	<b>REFERÊNCIAS</b>	252

# Lista de Figuras

1.1	A Terra é estratificada em camadas concêntricas com diferentes gradientes de densidade. As ondas sísmicas provocadas perto da superfície se propagam através do planeta. O gradiente de densidade afeta a velocidade e a direção de propagação da frente de onda. . . . .	2
1.2	Comparação entre os tamanhos típicos de estrelas anãs brancas e pré-anãs brancas com o tamanho do Sol e da Terra. . . . .	5
1.3	Relação Massa-Raio para anãs brancas ( $M_o$ e $R_o$ são a massa e o raio do Sol). . . . .	9
1.4	Diagrama H-R. A posição de cada estrela no diagrama H-5, representada por pontos, depende de sua luminosidade (em $L_{\odot}$ ) e temperatura superficial efetiva (em Kelvins). Note que a temperatura decresce para a direita no eixo horizontal inferior. As classes espectrais (O-M) correspondentes a intervalos de temperatura são mostrados no eixo horizontal superior. A escala de magnitudes absolutas correspondente à escala de luminosidade é mostrada no eixo vertical direito. O diagrama H-R mostra duas seqüências: a seqüência principal (à direita) e a seqüência de esfriamento das anãs brancas (à esquerda). O raio da estrela é representado pelo tamanho de cada ponto. A posição do Sol na seqüência principal é indicada pela seta. . . . .	11
1.5	O diagrama H-R mostra a evolução de uma estrela com $1 M_{\odot}$ a partir da seqüência principal. . . . .	13
1.6	Nebulosa planetária. A estrela central é uma pré-anã branca (PNN). Imagem obtida pelo HST-NASA/ESA. . . . .	15
1.7	Diagrama $\log g - \log T_{eff}$ ( $g$ em unidades cgs) com as posições das estrelas PWDs conhecidas. As barras de erro não são mostradas no diagrama por causa de sua grande extensão: tipicamente $\pm 0.5$ em $\log g$ e $\pm 10\,000 - 20\,000 K$ em $T_{eff}$ . As linhas mostram as posições teóricas para estrelas com massas de 0.6, 0.7, 0.76 e 0.89 $M_{\odot}$ . (Dreizler <i>et al.</i> 1998). . . . .	18
1.8	Diagrama HR mostrando as posições das faixas de instabilidade. . . . .	26
1.9	Periodogramas de pré-anãs brancas pulsantes: os três de cima pertencem a estrelas PNNVs e os três de baixo a DOVs (Kawaler 1996). As amplitudes são dadas em $mma$ ( $10^{-3} \times$ modulação em amplitude). As temperaturas efetivas (em Kelvins) estão indicadas em cada periodograma, exceto para a NGC 1501, cuja temperatura ainda não foi determinada. . . . .	27
2.1	Espectros das DOVs PG 1707+427 e PG 1159-035. As linhas de absorção mais fortes são devido ao C IV e He II. Fluxo em $erg/cm^2/s/\text{\AA}$ (Bond <i>et al.</i> 1984). . . . .	34

2.2	Espectros IUE de três estrelas DOVs. O símbolo “X” indica que a linha não é uma linha de absorção real (Bond <i>et al.</i> 1984). O fluxo está em $\text{erg}/\text{cm}^2/\text{s}/\text{\AA}$ .	35
3.1	O instante em que o sinal de uma estrela chega à Terra depende da posição orbital da Terra. . . . .	39
3.2	Na figura acima, as faixas representam a cobertura durante uma campanha com duração de 10 horas feita por dois telescópios. A curva de luz obtida será dividida em 3 partes. Há uma interrupção de 2 horas e uma sobreposição de 1 hora nos dados dos dois telescópios (parte 2/parte 3). . . . .	42
4.1	Perda devido ao tempo morto do sistema. . . . .	52
4.2	O comprimento do caminho ótico depende da distância zenital, $z$ . . . . .	54
4.3	Efeito de extinção atmosférica. O gráfico da esquerda mostra como o índice de transmissão da atmosfera para as bandas U, B e V varia em função da distância zenital $z$ . O gráfico da direita, mostra a razão entre a extinção no visível e a extinção na banda B, em função da distância zenital. A atmosfera é mais transparente para a luz visível do que para a ultravioleta. . . . .	54
4.4	Efeito de extinção atmosférica sobre as estrelas PG 1159-035 (gráfico da esquerda) e G117-B15A (gráfico da direita), em função do ângulo horário para diferentes observatórios. . . . .	55
4.5	Ajuste de polinômios de ordens 2, 3 e 4 à curva de extinção atmosférica. . . . .	56
4.6	Aspecto de uma curva de luz bem reduzida. . . . .	59
4.7	Curva com pontos espúrios. . . . .	60
4.8	Correção de uma curva de luz com média diferente de zero. . . . .	61
4.9	Correção de uma curva de luz com uma linha média irregular. . . . .	61
4.10	Discrepâncias entre curvas de luz. . . . .	62
4.11	Periodograma de uma curva de luz mostrando um pico de baixa frequência, com alta amplitude. . . . .	63
4.12	À esquerda, vemos uma curva de luz modulada e à direita, seu periodograma. . . . .	65
4.13	Sinal após demodulação. . . . .	66
4.14	Sinal após a subtração da frequência moduladora. . . . .	67
4.15	Comparando a demodulação com a subtração da frequência moduladora. . . . .	68
5.1	Esquematização das coordenadas angulares ( $\theta$ , $\phi$ ) usadas nos harmônicos esféricos. O ângulo $\theta$ é medido em relação ao semi-eixo positivo $z$ . O ângulo $\phi$ é medido sobre o plano $xy$ a partir do semi-eixo positivo $x$ . . . . .	72
5.2	Os planos definem círculos sobre a superfície da estrela, sobre os quais a temperatura é igual à temperatura efetiva média. As zonas entre os círculos têm gradientes com temperaturas acima da média (zonas quentes) ou abaixo da média (zonas frias). Na figura da esquerda, a esfera foi cortada por 4 planos, 3 paralelos e 1 meridional, portanto, o modo de pulsação é $\ell = 4$ e $ m  = 1$ . Já as quatro esferas da direita são cortadas por 3 planos, mas o número de planos meridionais são 0, 1, 2 e 3. Todas têm modo com $\ell = 3$ , mas com diferentes valores de $ m $ . . . . .	74

5.3	Projeções com construção direta: (a) ortográfica. (b) estereográfica. (c) gnômica. . . . .	75
5.4	Projeções: os mapas são projeções dos pontos de uma superfícies tridimensional sobre um plano de projeção. Planos de projeção: (a) plano azimutal, (b) plano cônico, e (c) plano cilíndrico. . . . .	76
5.5	A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 1$ e $m = 0$ ). O brilho é mapeado através da escala de cores mostrada na parte de baixo. . . . .	79
5.6	A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 1$ e $m = +1$ ). . . . .	80
5.7	A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 1$ e $m = -1$ ). Note que as manchas térmicas se deslocam no sentido oposto ao do modo ( $\ell = 1$ e $m = 1$ ). . . . .	81
5.8	A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 2$ e $m = 0$ ). . . . .	82
5.9	A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 2$ e $m = +1$ ). . . . .	83
5.10	A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 2$ e $m = +2$ ). . . . .	84
5.11	Somente a componente do brilho na direção do observador pode ser detectada. . . . .	85
5.12	Uma curva sinusoidal. . . . .	85
5.13	Periodogramas para os modo $\ell = 1$ (esquerda) e $\ell = 2$ . O periodograma superior é o de uma estrela em repouso (ou em rotação muito lenta). Como todos os modos $m$ têm a mesma freqüência de pulsação, seus picos se sobrepõe. Com a rotação da estrela, cada modo $m$ adquire uma freqüência <i>aparente</i> diferente e aparece no periodograma como membro de um tripleto ( $\ell = 1$ ) ou como um multipletto ( $\ell = 2$ ). Quanto maior for a velocidade angular de rotação, maior será o espaçamento entre os picos. . . . .	87
5.14	Periodogramas para os modo $\ell = 1$ (esquerda) e $\ell = 2$ (direita) de uma mesma estrela com diferentes inclinações $i$ (em graus) para o eixo de simetria, assumindo que as amplitudes sobre a estrela são iguais. . . . .	88
5.15	Periodogramas para o modo $\ell = 1$ de uma estrela, cujo eixo de simetria não está alinhado com o eixo de rotação, para diferentes inclinações do eixo de rotação, $i$ , e para diferentes ângulos de nutação, $\beta$ (representado na figura por $b$ ). Tanto $i$ quanto $\beta(= b)$ são dados em graus. Os índices $m$ e $m'$ de cada pico estão indicados na parte inferior da figura. . . . .	89
6.1	Dados os valores de $\omega_i$ , $A_i$ e $\phi_i$ , podemos compor a função $y(t)$ através de um somatório de senóides. A Transformada de Fourier faz o caminho inverso: dada uma função $y(t)$ , ela a decompõe em suas componentes $\omega_i$ , $A_i$ e $\phi_i$ . . . . .	95
6.2	A série de tempo acima é formada pelo somatório das senóides mostradas na tabela. O gráfico duplo mostras as funções $A(f)$ (amplitude) e $\phi(f)$ (constante de fase) calculadas a partir da TF da série de tempo. As posições dos picos sobre o eixo-x no gráfico de $A \times f$ indicam as freqüências presentes na série de tempo. A altura de cada pico é a amplitude. As constantes de fase estão indicadas no gráfico inferior por asteriscos. . . . .	96
6.3	O gráfico mostra o plano complexo: no eixo-x temos a parte real da TF, $a(\omega)$ , no eixo-y a parte imaginária, $b(\omega)$ . O módulo do vetor é a amplitude e o ângulo que forma com o eixo-x, a fase. . . . .	97
6.4	Num periodograma ideal, as freqüências de pulsação apareceriam como picos de largura desprezível. . . . .	98

6.5	Efeito da duração da curva de luz sobre o periodograma. Quanto maior é a extensão da curva de luz, $T$ , maior é a resolução do periodograma. Os picos menores ao lado do pico central são chamados de <i>lóbulos laterais</i> (sidelobes).	99
6.6	Periodograma da função janela $J(t)$ .	100
6.7	Periodogramas da mesma curvas de luz com resolução temporal diferentes. As curvas são praticamente idênticas, contudo, quanto maior for a amostragem na curva de luz, menor será o erro na determinação das frequências, amplitudes e tempos de máximo do sinal.	101
6.8	A curva de luz nos gráficos do lado esquerdo contém uma única frequência ( $f = 1000 \mu Hz$ ) e é formada por duas séries de $T = 16\,000$ segundos cada uma. Em cada caso, o intervalo entre as duas é diferente: $0, 1T, 2T, 4T$ e $8T$ (de cima para baixo). Como efeito, os periodogramas se tornam mais intrincados e fica mais difícil identificar o pico central.	102
6.9	Ampliação da região central do periodograma inferior da figura anterior. Note que os três picos centrais têm quase a mesma altura. Isso dificulta a detecção de frequências de pulsação. A dificuldade pode ser ainda maior se houver interferência da janela espectral de outras frequências presentes no espectro. Neste caso, é comum haver quebra de simetria.	102
6.10	Periodograma de um sinal periódico triangular de frequência $f_o = 0.01 Hz$	103
6.11	Seqüência de pré-branqueamento.	104
6.12	O gráfico mostra a distribuição das amplitudes no periodograma dos dados de 1985, randomizados.	106
6.13	Os gráficos mostram o periodograma dos dados de 1985 da PG-1159-035 (escuro) junto com o periodograma do mesmo conjunto de dados, randomizados (claro). A randomização destrói todo o sinal. As linhas horizontais no gráfico da esquerda mostram $\langle A \rangle$ e $\langle A_{max} \rangle$ ; enquanto que as linhas horizontais tracejadas no gráfico da direita mostram os limites de detecção segundo dois critérios diferentes: $4 \langle A \rangle$ e $\langle A_{max} \rangle + 3.5\sigma$ . A flecha indica um pico que não é detectado quando se usa o limite de $4 \langle A \rangle$ .	107
6.14	Sobreposição de curvas de luz obtidas a partir de diferentes telescópios.	108
6.15	Pesos normalizados dos dados de nove telescópios diferentes. Os pesos foram normalizados de modo que o peso médio dos dados dos telescópios de $1 m$ fosse igual a 1. No mesmo gráfico vemos a curva de $1/D^2$ , proporcional à área do espelho.	109
6.16	Relação S/N para a PG 1159-035. A curva sinusoidal representa o modo de pulsação de maior amplitude (período de 516 s) se sobrepondo à curva de luz da estrela.	109
6.17	Periodogramas da PG 1159-035 para os anos de 1983, 1985, 1989, 1993 e 2002. As respectivas janelas espectrais são mostradas à direita.	110
6.18	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE I	111
6.19	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE II	111
6.20	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE III	112
6.21	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE IV	112
6.22	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE V	113
6.23	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE VI	113

6.24	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE VII . . . . .	114
6.25	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE VIII . . . . .	114
6.26	Periodogramas da PG 1159-035: PARTE IX . . . . .	115
6.27	Periodogramas limpos - os picos indicam as frequências detectadas nos dados de cada ano e suas respectivas amplitudes. A figura superior mostra os periodogramas limpos dos dados de cada ano, sendo que no último gráfico temos uma superposição de todos os gráficos anteriores. Na parte de baixo, o gráfico à esquerda mostra como fica um tripleto em um periodograma limpo. A largura dos picos é igual à resolução espectral no periodograma real. No gráfico à direita vemos uma sobreposição de picos presentes em anos diferentes, para uma pequena janela de frequências. . . . .	116
6.28	Transformada em período (PT) dos dados de 1989 da PG 1159-035. Os picos de 21.5 e 12.7 s indicam os espaçamentos para períodos com $\ell = 1$ e $\ell = 2$ , respectivamente. O pico de 10.6 s é o primeiro harmônico do pico de 21.5 s. . . . .	117
6.29	A transformada em período (PT) no gráfico mostra que mesmo numa série aleatória de um grande número de picos aparecem regularidades casuais nos espaçamentos entre os picos. . . . .	118
6.30	Análise dos espaçamentos entre os períodos de pulsação através da técnica PT. Os picos de $\sim 21$ s correspondem à $\Delta P_1$ e os de $\sim 12$ s à $\Delta P_2$ . . . . .	119
6.31	Comparação entre o teste K-S usando duas estatísticas diferentes: K-S (curva mais clara) e KP (curva mais escura). Em geral, os vales no teste K-S usando estatística KP ficam melhor definidos facilitando a determinação de $\Delta P$ . . . . .	121
6.32	Teste K-S para os 556 períodos detectados em todas as curvas de luz da PG 1159-035. . . . .	122
6.33	Distâncias possíveis entre componentes de dois tripletos. . . . .	123
6.34	Os pontos de mínimo indicam os melhores valores para $P_{o1}$ e $P_{o2}$ . . . . .	124
6.35	Seqüências de períodos para os modos $\ell = 1$ e $\ell = 2$ . . . . .	126
6.36	Sobreposição de dois multipletos ( $\ell = 2$ ). Para períodos até 600 s, os multipletos não se sobrepõe. Entre 600-750 s, ocorre a sobreposição de um pico e acima de 750 s, a sobreposição de dois picos. . . . .	127
6.37	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE I . . . . .	132
6.38	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE II . . . . .	132
6.39	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE III . . . . .	133
6.40	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE IV . . . . .	133
6.41	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE V . . . . .	134
6.42	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE VI . . . . .	134
6.43	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE VII . . . . .	135
6.44	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE VIII . . . . .	135
6.45	Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE IX . . . . .	136
7.1	Diagrama $\Delta P$ para a PG 1159-035, onde o valor de $\Delta P$ para um período $k$ da seqüência $\ell = 1$ (ou $\ell = 2$ ) é o espaçamento entre este período e o período seguinte da seqüência: $\Delta P = P_{k+1} - P_k$ . As linhas tracejadas na seqüência para $\ell = 2$ indicam as regiões onde há ausência de pontos. . . . .	149
7.2	Diagrama $\Delta P$ para a seqüência $\ell = 1$ da PG 1159-035. . . . .	151

7.3	Periodograma do diagrama $\Delta P$ . Os picos indicam os melhores valores para o período do ciclo de amarramento. . . . .	152
7.4	Gráfico de $r_c/R$ como uma função de $R$ (em $R_\odot$ ). . . . .	156
7.5	Modelo para a PG 1159-035 calculado por Paul Bradley. . . . .	157
8.1	Valor médio de $\dot{P}/P$ em função da $T_{eff}$ para modos $\ell = 1$ e diferentes massas. Todos os modelos têm $q_Y = 0.0185$ . Note que $T_{eff}$ aumenta para a esquerda (Kawaler & Bradley 1994). . . . .	163
8.2	O gráfico de cima mostra $\dot{P}/P$ como uma função do período, $P$ , para um modelo com massa igual a $0.59 M_\odot$ , $\log T_{eff} = 5.115$ e $q_Y = 0.0023$ . O gráfico de baixo mostra os espaçamentos em período para os modos $\ell = 1$ do mesmo modelo. . . . .	164
8.3	Os gráficos mostram $\dot{P}/P$ como uma função do período, $P$ , para um modelo com massa igual a $0.59 M_\odot$ , $T_{eff} = 130\,000 K$ para diferentes valores de $q_Y$ . . . . .	165
8.4	O gráfico mostra $\dot{P}/P$ como uma função da temperatura efetiva, $T_{eff}$ , para os modos $k = 22$ e $k = 23$ ( $\ell = 1$ ) para um modelo com massa igual a $0.59 M_\odot$ e $q_Y = 0.0023$ . . . . .	166
9.1	Efeitos das técnicas de pós-redução em três curvas de luz. . . . .	211
9.2	Gráficos do período contra o tempo, para os períodos de 215.2 s, 270.9 s e 304.2 s, para cada conjunto de dados. Cada barra equivale a uma variação de $1\sigma$ para cima e para baixo. . . . .	212
9.3	Gráficos do período contra o tempo, para os períodos de 215.2 s, 270.9 s e 304.2 s, para dados anuais. Cada barra equivale a uma variação de $1\sigma$ para cima e para baixo. . . . .	213
9.4	O gráfico mostra $\chi^2$ em função do período usado como valor inicial, para o ajuste do pico de 215 s. O valor mínimo, indicado pela flecha, corresponde à localização da solução real. . . . .	214
9.5	O primeiro gráfico (de cima para baixo) mostra $\chi^2$ em função do valor inicial do período no ajuste do pico de 215 s. Os gráficos seguintes, mostram os valores obtidos através do ajuste para $T_o$ (em 244 0000+ BCT), $P_o$ (em segundos) e $\dot{P}$ para cada valor inicial de período. . . . .	215
9.6	Diagrama (O-C) para o período de 215.2 s. . . . .	216
9.7	O gráfico mostra $\chi^2$ em função do período inicial, no ajuste para o pico de 270 s. . . . .	216
9.8	O primeiro gráfico (de cima para baixo) mostra $\chi^2$ em função do valor inicial do período no ajuste do pico de 270 s. Os gráficos seguintes, mostram os valores obtidos através do ajuste para $T_o$ (em 2440000+ BCT), $P_o$ (em segundos) e $\dot{P}$ para cada valor inicial de período. . . . .	217
9.9	Diagrama (O-C) para o período de 270 s. . . . .	217
9.10	O gráfico mostra $\chi^2$ em função do período inicial, no ajuste para o pico de 390 s. . . . .	218



9.11	O primeiro gráfico (de cima para baixo) mostra $\chi^2$ em função do valor inicial do período no ajuste de pico de 304 s. Os gráficos seguintes, mostram os valores obtidos através do ajuste para $T_o$ (em 2440000+ BCT), $P_o$ (em segundos) e $\dot{P}$ quando se para cada valor inicial de período. . . . .	218
9.12	Diagrama (O-C) para o período de 304 s. . . . .	219
9.13	Esfriamento da G117-B15A, assumindo que $\dot{P}$ é constante. O gráfico superior mostra a curva de esfriamento ao longo do tempo. No gráfico do meio vemos a variação do período de pulsação e no gráfico inferior a variação na taxa de esfriamento, $\dot{T}$ . O retângulo tracejado vertical indica o intervalo de tempo dentro do qual a estrela deve cruzar a borda vermelha da faixa de instabilidade. Os retângulos horizontais indicam os intervalos correspondentes nas escalas verticais. . . . .	221

# Lista de Tabelas

2.1	Estrelas PG 1159 pulsantes (DOV). . . . .	34
2.2	Estrelas PG 1159-035 não-pulsantes. . . . .	36
2.3	Núcleos Pulsantes de Nebulosas Planetárias (PNNVs). . . . .	36
3.1	Observatórios participantes do WET. . . . .	40
3.2	Campanhas observacionais da PG 1159-035. . . . .	41
3.3	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1979. . . . .	42
3.4	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1980. . . . .	42
3.5	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1981. . . . .	42
3.6	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1983. . . . .	42
3.7	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1985. . . . .	43
3.8	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1989. . . . .	43
3.9	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1993. . . . .	44
3.10	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 2000. . . . .	46
3.11	Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 2002. . . . .	46
4.1	Comparando a demodulação com a subtração da frequência moduladora. . . . .	66
5.1	Número de zonas quentes/frias para modos com $\ell \leq 5$ . . . . .	74
6.1	Senóides presentes na curva de luz da Fig.6.2. . . . .	95
6.2	Diferentes tipos de periodogramas e como são chamados. . . . .	97
6.3	Limites de detecção para os dados de cada ano. . . . .	106
6.4	Valores calculados pela técnica PT. . . . .	119
6.5	Periodicidades encontradas pelo Teste K-S. . . . .	122
6.6	Períodos Identificados - Modo $\ell = 1$ . . . . .	128
6.7	Períodos Identificados - Modo $\ell = 2$ : PARTE I. . . . .	129
6.8	Períodos Identificados - Modo $\ell = 2$ : PARTE II. . . . .	130
6.9	Períodos Identificados - Modo $\ell = 2$ : PARTE III. . . . .	131
6.10	Frequências detectadas no periodograma de 1983. . . . .	137
6.11	Frequências detectadas no periodograma de 1985. . . . .	138
6.12	Frequências detectadas no periodograma de 1989. . . . .	139
6.13	Frequências detectadas no periodograma de 1993. . . . .	140
6.14	Frequências detectadas no periodograma de 2002. . . . .	141
7.1	Pontos do diagrama $\Delta P$ . O asterisco indica detecção incerta. . . . .	150
7.2	Modos amarrados na PG 1159-035. . . . .	151

7.3	Ciclo de amarramento da PG 1159-035: melhores valores. . . . .	153
7.4	Resultados para diferentes composições da zona de transição . . . . .	153
7.5	Coeficientes de amarramento para modelos de anãs brancas. Fontes: <i>PG1159</i> : Kawaler & Bradley (1990); <i>DB</i> : Bradley <i>et al.</i> (1993); <i>DA<sub>1</sub></i> : Kawaler & Bra- dley (1990); <i>DA<sub>2</sub></i> : Brassard <i>et al.</i> (1992) . . . . .	155
7.6	Razões entre os períodos amarrados observados . . . . .	155
7.7	Razões $\lambda_i/\lambda_j$ , com $i > j$ . As razões dentro dos retângulos são as que melhor se ajustam às razões entre os períodos amarrados observados, mostrados na Tab.7.7. . . . .	155
7.8	Valores encontrados para $r_c$ para cada modo amarrado. . . . .	156
8.1	Tempo necessário para que o período varie 1 segundo. . . . .	161
8.2	Modos presentes em dois ou mais anos. . . . .	170
8.3	Períodos com 3 ou mais pontos, aos quais foi aplicada a técnica do diagrama (O-C). . . . .	190
8.4	Resultados da técnica do diagrama (O-C) para todos os modos com 3 ou mais pontos. . . . .	200
8.5	Modos para os quais o resultado obtido pela técnica do diagrama (O-C) é consistente com a medida direta de $\dot{P}$ . . . . .	201
8.6	Modos para os quais o resultado obtido pela técnica do diagrama (O-C) e pelo ajuste não-linear (nls) são consistentes com a medida direta (MD) de $\dot{P}$ . . . . .	201
9.1	Períodos de pulsação detectados por Kepler <i>et al.</i> (1995) para a G117-B15A a partir dos dados do WET de 1990. A tabela da esquerda mostra os picos considerados possíveis períodos de pulsação. O sete picos de maior amplitude estão listados na tabela da direita. . . . .	204
9.2	Medidas do $\dot{P}$ do período de 215.2 s da G117-B15A. . . . .	205
9.3	Número de pontos por ciclo para diferentes tempos de integração. . . . .	206
9.4	(continuação) . . . . .	207
9.4	(continuação) . . . . .	208
9.4	(continuação) . . . . .	209
9.4	Dados da G117-B15A obtidos entre 1974 e 2003. . . . .	210
9.5	Períodos da G117-B15A usados no ajuste. . . . .	212
10.1	Variações dos períodos de pulsação da PG 1159-35. . . . .	228

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

### 1.1 Introdução

Uma das melhores maneiras de se obter informações sobre a estrutura interna de um objeto é através da análise dos seus modos normais de oscilação. Fazemos isso de forma natural quando, por exemplo, percutimos um objeto fazendo-o vibrar e de acordo com o som produzido, podemos dizer se o mesmo é maciço ou oco, se é feito de madeira ou metal, se é fino ou espesso, etc.

A análise da propagação de ondas sísmicas provocadas por causas naturais (como o movimento repentino de placas tectônicas) ou pelo homem (através de explosões) permite aos sismologistas fazer uma descrição precisa, em alta resolução. Através da sismologia, sabemos que a Terra é formada por camadas concêntricas, conforme mostra a Fig.1.1. O que distingue uma camada da camada adjacente é uma mudança acentuada em sua composição química e/ou densidade.

O *núcleo* da Terra é composto basicamente por Ferro e Níquel (e alguns constituintes menos densos, como Enxofre e Silício) e tem cerca de  $\sim 3470$  km de espessura (a partir do centro). A parte mais interna do núcleo tem  $\sim 1215$  km, é sólida e sua densidade varia suavemente de  $13.6$  (no centro) até  $13.3 \text{ g/cm}^3$  (na borda) enquanto que a parte mais externa é líquida. Na região de transição entre a parte sólida e a parte líquida ocorre uma mudança abrupta de densidade: a densidade varia de  $13.3 \text{ g/cm}^3$  (metal sólido) para  $12.3 \text{ g/cm}^3$  (metal líquido), como pode ser visto no gráfico à esquerda na Fig.1.1. Essa variação acentuada na densidade se deve muito mais à mudança de fase da matéria no núcleo do que à mudança na composição química da mesma.

Uma variação ainda mais abrupta na densidade ocorre na região de transição entre a parte mais externa do núcleo e a camada que está logo acima, chamada *camada intermediária*<sup>1</sup> ao manto inferior e a metade inferior da zona de transição, enquanto que o *manto* corresponde. Desta vez, a grande variação na densidade — de  $\sim 10.5 \text{ g/cm}^3$  para  $\sim 5.5 \text{ g/cm}^3$  — se deve à diferença na composição química das duas camadas. A camada intermediária é composta por sulfetos e óxidos, tem uma espessura de  $\sim 2100$  km e ao longo de sua

---

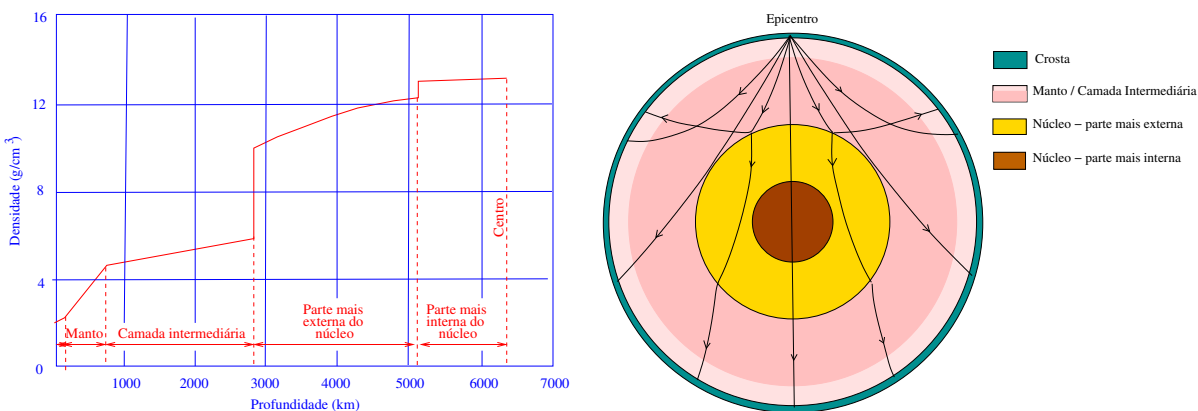
<sup>1</sup> O número e denominação das zonas entre o núcleo e a crosta varia um pouco de autor para autor. Por exemplo, alguns autores dividem esta região em *manto inferior*, *zona de transição* e *manto superior*, mas sempre com base nas mudanças de fase e/ou na composição química. A *camada intermediária* corresponde à metade superior da zona de transição mais o manto superior.

extensão a densidade varia gradualmente de  $\sim 5.5 \text{ g/cm}^3$  (na borda inferior) até  $4.3 \text{ g/cm}^3$  (na borda superior).

Acima da camada intermediária, vem o *manto*, composto por silicatos e ferro e com uma espessura de  $\sim 700 \text{ km}$ . Desta vez, a densidade não muda abruptamente na passagem de uma camada para outra, mas varia rapidamente.

A camada mais superficial é chamada de *crosta* (ou litosfera) sendo dividida em *crosta superior*, composta de sedimentos e granitos, com uma espessura variando de 15 a 25 km, e *crosta inferior*, composta de rochas basálticas, cuja espessura chega a atingir  $\sim 75 \text{ km}$ . Apenas a crosta é acessível à observação direta.

Quando ocorre, por exemplo, o deslocamento repentino de uma placa tectônica na crosta terrestre, o atrito entre ela e as placas adjacentes provoca uma onda sísmica que se propaga através do planeta. O gradiente de densidade afeta a velocidade e a direção de propagação da frente de onda; as regiões onde há uma mudança abrupta na densidade do meio podem refletir a onda, como é mostrado na Fig.1.1. Sismômetros, posicionados em diversos pontos da superfície terrestre fazem medidas contínuas da intensidade das ondas sísmicas e os dados obtidos são usados como base para modelar a estrutura interna da Terra.



**Fig. 1.1:** A Terra é estratificada em camadas concêntricas com diferentes gradientes de densidade. As ondas sísmicas provocadas perto da superfície se propagam através do planeta. O gradiente de densidade afeta a velocidade e a direção de propagação da frente de onda.

Tal como a Terra, a estrutura interna das *anãs brancas* também é estratificada em camadas concêntricas, como resultado de processos termodinâmicos e da precipitação gravitacional, que faz com que os constituintes mais densos se precipitem para as camadas mais profundas fazendo com que os mais leves se concentrem nas camadas mais superficiais.

Perturbações locais no equilíbrio hidrostático (causadas por um acúmulo de energia) podem provocar ondas sísmicas que se propagam através da estrela e se manifestam na superfície, fazendo com que o brilho da estrela varie ao longo do tempo. Do mesmo modo que se usam sismômetros para monitorar os tremores naturais da Terra, podemos monitorar a atividade sísmica das estrelas através da fotometria. A análise dos dados fotométricos

(curvas de luz) nos permite identificar seus modos naturais de oscilação e, a partir daí, construir modelos para a estrutura interna das estrelas.

A parte da astronomia que estuda a sismologia das estrelas chama-se *asterosismologia*, irmã mais nova da *heliosismologia*, uma ciência que se dedica exclusivamente ao estudo da sismologia do Sol. Devido a sua proximidade, a superfície do Sol pode ser estudada com detalhes, possibilitando a detecção de milhões de modos de pulsação (Harvey *et al.* 1996) e uma descrição em alta resolução de sua estrutura interna, o que seria praticamente impossível se o Sol estivesse tão distante quanto as outras estrelas.

No decorrer de sua evolução, as estrelas passam pelas chamadas *faixas de instabilidade do diagrama H-R*, conforme será explicado nas seções seguintes, quando as instabilidades termodinâmicas provocam oscilações de grandes amplitudes — muito maiores do que as observadas no Sol — causando uma variabilidade detectável no brilho da estrela. Essas estrelas são chamadas de *estrelas variáveis* e são os objetos de estudo da asterosismologia.

Nos estágios finais de sua evolução, cerca de 98% de todas as estrelas tornam-se anãs brancas e, à medida que vão esfriando, passam por faixas de instabilidade tornando-se (temporariamente) estrelas pulsantes, sendo que a primeira das faixas de instabilidade ocorre ainda no estágio de pré-anã branca<sup>2</sup>. Os modos de pulsação apresentam períodos da ordem de minutos (entre  $\sim 50$  e  $\sim 1500$  segundos) e alguns modos apresentam períodos extremamente estáveis.

A identificação dos modos de pulsação nos possibilita entender melhor como é a estrutura interna dessas estrelas e, como os períodos de pulsação variam em resposta às mudanças na estrutura interna da estrela, através do estudo da variação dos períodos de pulsação podemos também entender melhor como essas estrelas estão evoluindo. Esses são os objetivos desse trabalho. Para isso, estudamos duas estrelas: a PG 1159-035 (uma pré-anã branca) e a G117-B15A (uma anã branca).

Nas seções que seguem, fazemos uma introdução à teoria de anãs brancas, e de pré-anãs brancas e de sua história evolutiva, para depois tratarmos das causas físicas das pulsações.

## 1.2 Anãs Brancas

A história do estudo das estrelas anãs brancas começa com o descobrimento de Sírius B, companheira de Sírius. Sírius faz parte da constelação do Cão Maior (Canis Major) e, por ser muito luminosa e estar apenas a nove anos luz de distância da Terra, é a estrela mais brilhante do céu. Sírius é uma espécie de Sol em larga-escala, tendo cerca de duas vezes a sua massa e 25 vezes sua luminosidade.

No século XIX, Sírius atraiu a atenção de Friedrich W. Bessel. Analisando medidas da posição de Sírius feitas entre 1834 e 1844, ele notou que Sírius apresentava um leve movimento de vai-e-vem como se um objeto que não pudesse ser visto estivesse orbitando

---

<sup>2</sup> Este estágio precede o estágio final de anã branca. Contudo, as estrelas não passam necessariamente por todas as faixas de instabilidade, como será explicado mais adiante.

ao seu redor e fazendo com que Sírius tivesse um movimento circular em torno do centro de massa do sistema.

Apesar dos inúmeros esforços de Bessel e de outros astrônomos, o objeto que faz companhia a Sírius só foi descoberto em 1862. Neste ano, um dos mais importantes construtores de telescópios da época, Alvan Graham Clark, estava testando as lentes da objetiva de um novo telescópio refrator de 45.3 cm (18.5 polegadas) quando, inesperadamente, ele enxergou um pequeno ponto brilhante perto de Sírius: era a companheira de Sírius, hoje conhecida como Sírius B ou *Pup*. O atraso na descoberta de Sírius B é facilmente explicável: em 1844, quando as pesquisas começaram, Sírius B estava a apenas 3 segundos de arco da estrela primária, mas em 1862 a separação entre o par tinha atingido 9.5 segundos de arco (Kawaler 1987). A observação também era dificultada pela grande diferença entre os brilhos das duas estrelas: o brilho de *Pup* é 10 000 vezes mais fraco que Sírius A.

Cerca de meio século mais tarde, em 1914, Walter Sydney Adams descobriu que o espectro de Sírius B era o de uma estrela “branca”, sugerindo uma temperatura superficial efetiva,  $T_{eff}$ , da ordem de 30 000 K (Kawaler 1987). Sua luminosidade foi calculada a partir do fluxo observado,  $F$ , e da distância,  $d$ , calculada por paralaxe:  $L = F \cdot 4\pi d^2$ . Explicar a baixa luminosidade de Sírius B ( $L \simeq 2.5 \times 10^{-3} L_{\odot}$ ) foi o primeiro grande desafio envolvendo anãs brancas porque para uma estrela ser tão quente e ao mesmo tempo ter uma luminosidade tão baixa, ela deveria ser quase do tamanho da Terra!

Usando a definição de temperatura efetiva,  $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$ , Adams estimou que o raio,  $R$ , de Sírius B era de apenas<sup>3</sup> 18 000 km (Kepler & Saraiva 2000), um pouco maior que o raio da Terra. A situação tornou-se ainda mais bizarra quando o movimento orbital do sistema binário mostrou que a massa de Sírius B era levemente maior que a do Sol ( $1.053 M_{\odot}$ ).

Sírius B parecia ser um caso anômalo, mas nos três anos seguintes, duas outras estrelas com características semelhantes — *40 Eridani B* e *van Maanen 2* — foram encontradas, mostrando que Sírius B não era um caso “patológico” e, sim fazia parte de uma classe de estrelas recém descobertas, todas com baixa luminosidade<sup>4</sup>, massas da ordem de uma massa solar<sup>5</sup> e tamanhos comparáveis com o tamanho da Terra, como pode ser visto na Fig.1.2. Por serem todas pequenas e apresentarem uma cor branca<sup>6</sup>, as estrelas dessa classe foram chamadas de “*anãs brancas*”.

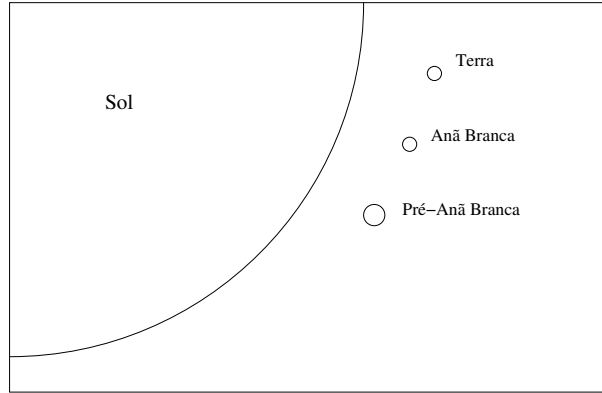
As primeiras tentativas de analisar as condições no interior das anãs brancas encontraram sérias dificuldades. O material que as constituía devia ter uma densidade enorme, algo entre  $10^6$  e  $10^7$  g/cm<sup>3</sup>. Para comparação, a densidade da região central do Sol é  $\rho_c = 160$  g/cm<sup>3</sup>. Na época em que as primeiras anãs brancas foram descobertas, sabia-se que o que impedia que as estrelas entrassem em colapso devido à auto-gravitação era a pressão do gás. A partir desta condição para o equilíbrio hidrostático, pode-se estimar a temperatura central da estrela,  $T_c$ , em função de sua densidade média,  $\bar{\rho}$ , de sua massa,  $M_{\star}$ , e de seu raio,  $R_{\star}$ :

<sup>3</sup> Este valor é cerca de quatro vezes maior que o valor atualmente aceito.

<sup>4</sup> A luminosidade da maioria das anãs brancas conhecidas também é menor do que  $1 L_{\odot}$ .

<sup>5</sup> Hoje sabemos que a distribuição de massa das anãs brancas se concentra ao redor de  $\sim 0.6 M_{\odot}$ , podendo chegar até  $\sim 1.2 M_{\odot}$ .

<sup>6</sup> Mais tarde, seriam descobertas estrelas anãs de outras cores — anãs azuis, por exemplo — mas, por contingência histórica, o termo *anã branca* permaneceu como o nome dessas classe de estrelas, independente da cor.



**Fig. 1.2:** Comparação entre os tamanhos típicos de estrelas anãs brancas e pré-anãs brancas com o tamanho do Sol e da Terra.

$$T_c \simeq \frac{2\bar{\rho} GM_\star}{\rho_c AR_\star} \quad (1.1)$$

com  $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{s}^2 \cdot \text{g}$  e  $A = 8.32 \times 10^7 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ . A razão  $\bar{\rho}/\rho_c$  tem valores típicos da ordem de  $10^{-2}$  para estrelas na seqüência principal e depende da estrutura interna da estrela. Como  $T_c$  é inversamente proporcional ao raio da estrela, no caso das anãs brancas, a temperatura central deveria ser da ordem de  $10^8 \text{ K}$ . Em tais temperaturas, uma quantidade exorbitante de energia nuclear deveria estar sendo liberada a partir do núcleo. A maior parte desta energia chegaria até a superfície e seria emitida para o meio inter-estelar, fazendo com que a luminosidade da estrela fosse excepcionalmente alta. Isto entra em *contradição* com as baixas luminosidades observadas. Conseqüentemente, a Eq.1.1 não pode ser aplicada às anãs brancas. Mas, por que? Que tipo de matéria tão densa constituía esses estranhos objetos recém descobertos?

O fato da Eq.1.1 não poder ser aplicada às anãs brancas sugeria que pelo menos uma das hipóteses nas quais ela se baseia não se aplica às anãs brancas. A Eq.1.1 é baseada em duas hipóteses: (1) que a estrela estava em equilíbrio hidrostático e (2) que a força que impedia que a estrela entrasse em colapso gravitacional era a força da pressão do gás que a constituía. A estrela, de fato, *está* em equilíbrio hidrostático pois o tempo dinâmico é menor que uma hora. Logo, a hipótese (2) é que devia estar errada, pois a pressão do gás, sozinha, não podia impedir o colapso gravitacional. Portanto, deveria existir alguma outra força. Mas que força era esta?

Esta questão desafiou os físicos da primeira metade do século XX durante quase duas décadas, até que Ralph H. Fowler em 1926 e mais tarde Chandrasekhar<sup>7</sup> em 1939, encontraram a resposta: o que impedia que uma anã branca entrasse em colapso gravitacional era a *pressão de degenerescência eletrônica*. A Eq.1.1 assume que a matéria no interior de estrelas se comporta como um gás ideal e que isto pode ser válido para estrelas “comuns”, mas não para o caso das anãs brancas cuja matéria está em um estado altamente condensado.

<sup>7</sup> Subrahmanyan Chandrasekhar ganhou o premio Nobel de Física em 1983 por este esforço.



É fácil mostrar que a matéria não poderia estar em um estado líquido ou sólido. Nesses estados, os átomos mantêm contato uns com os outros através das camadas eletrônicas. Isso limita a distância mínima entre os núcleos atômicos a  $10^{-8} \text{ cm}$ , fazendo com que a densidade média de sólidos e líquidos não possa ser maior do que  $20 \text{ g/cm}^3$ , como ocorre com a platina, o mais denso dos metais. Como a densidade em anãs brancas é milhares de vezes superior a este limite, isto sugeria que as distâncias entre os núcleos atômicos devia ser muito menor do que  $10^{-8} \text{ cm}$ . Nessas condições, as camadas eletrônicas se sobrepõem, despiando os núcleos de seus elétrons. Portanto, a matéria no interior das anãs brancas não é um gás ideal, nem é sólida, nem é líquida e sim um *plasma*, um plasma muito denso.

Mas um plasma é antes de tudo um gás, um estado da matéria no qual a distância entre as partículas que o constituem é muito maior que as dimensões das próprias partículas. No caso, os núcleos atômicos deveriam estar separados uns dos outros por pelo menos  $10^{-10} \text{ cm}$ , enquanto que o raio de um núcleo é da ordem de  $10^{-12} \text{ cm}$ . Logo, a matéria no interior das anãs brancas é um gás muito denso e ionizado, com propriedades físicas diferentes das de um gás ideal.

Com a proximidade dos núcleos atômicos uns dos outros, as funções de onda se sobrepõem e o movimento dos elétrons já não fica confinado aos níveis eletrônicos de um único átomo. De forma muito semelhante ao que ocorre com os metais, os elétrons passam a constituir um gás fermiônico, preenchendo todos os níveis de energia — dois elétrons de spins contrários, por nível — até o nível de Fermi, de acordo com o *princípio de exclusão* de Pauli. Dizemos, então, que a matéria está em um *estado degenerado*.

Quanto mais alta a energia de um nível, mais alta é a velocidade<sup>8</sup> e o momentum linear,  $p$ , do elétron que o ocupa, já que  $E = p^2/2m_e = m_e v^2/2$ , onde  $m_e$  é a massa do elétron em repouso. Como em anãs brancas a energia de Fermi é altíssima, as velocidades dos elétrons também atingirão valores muito altos, fazendo com que a pressão do gás de elétrons — *pressão de degenerescência eletrônica* — seja extremamente elevada, já que a pressão é a transferência de *momentum* para uma superfície (real ou imaginária). É essa pressão que se contrapõe à força gravitacional impedindo que a estrela colapse.

Quando a temperatura de um gás ideal é reduzida, sua pressão também diminui, pois a pressão é proporcional à temperatura,  $P \propto \rho T$ . No caso de um gás degenerado a energia cinética dos elétrons *não pode* diminuir com a redução da temperatura, pois como todos os níveis mais baixos estão populados, se a energia de um elétron diminuísse, este passaria para um nível inferior, já ocupado, violando o princípio de Pauli. De fato, a mecânica quântica mostra que a pressão em um gás altamente degenerado independe da temperatura e é proporcional a uma potência da densidade<sup>9</sup>:

$$P = 1.004 \times 10^{13} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (\text{em dinas/cm}^2) \quad (1.2)$$

---

<sup>8</sup> Os elétrons podem ter velocidades relativísticas, mas vamos adotar uma abordagem clássica apenas para simplificar as explicações.

<sup>9</sup> Para um gás altamente relativístico,  $P \propto \rho^{4/3}$ .

onde a pressão  $P$  é expressa em  $dinas/cm^2$ , a constante  $K = 3 \times 10^6 cm^3 \cdot g^{-1} \cdot atm$ , a densidade  $\rho$ , em  $g/cm^3$  e  $\mu_e$  é o número médio de massas atômicas por elétron, sendo adimensional. Para núcleos de estrelas, onde a fração de hidrogênio é pequena,  $\mu_e \simeq 2$  e a equação acima pode ser reescrita como:

$$P \simeq K \rho^{5/3} \quad (1.3)$$

com  $K = 3.16 \times 10^{12} dinas \cdot cm^3 \cdot g^{-5/3}$ .

Uma anã branca pode esfriar continuamente até atingir temperaturas próximas do zero absoluto, entrando em equilíbrio térmico com o meio inter-estelar, sem que as velocidades dos elétrons no gás degenerado que a constitui sejam reduzidas, mantendo praticamente constante a pressão de degenerescência eletrônica, e impedindo o colapso gravitacional.

As altas velocidades dos elétrons também podem ser previstas a partir do *princípio da incerteza* de Heisenberg, que estabelece que o produto das incertezas nas determinações da posição,  $\Delta x$ , e do momentum linear,  $\Delta p$ , de um elétron não pode ser menor do que  $h$ , a constante de Planck:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \quad (1.4)$$

A incerteza na posição de um elétron é sempre menor ou da ordem de grandeza da distância média,  $\bar{d}$ , entre as partículas que o constituem,  $\Delta x < \bar{d}$ . Em um gás altamente condensado, a distância média  $\bar{d}$  é muito pequena ( $\bar{d} < 10^{-8}$  cm), o que implica que  $\Delta p$  deve ser grande. Estatisticamente, isto significa que deve haver uma larga dispersão dos momentos lineares em torno de seu valor médio. Para que isso ocorra, grande parte dos elétrons deve ter velocidades altas.

A Eq.1.3 passa a substituir a equação de estado para os gases ideais,  $P = A\rho T/\mu$ , quando as velocidades térmicas dos elétrons são pequenas comparadas com as velocidades devido à degenerescência, fazendo com que a pressão de degenerescência eletrônica se torne maior que a pressão térmica:

$$K\rho^{5/3} > \frac{A}{\mu}\rho T \quad (1.5)$$

ou seja, para densidades maiores que

$$\rho_{limite} > \left( \frac{A}{\mu K} T \right)^{3/2} \quad (1.6)$$

onde  $A = 8.32 \times 10^7 cm^2 \cdot s^{-2} K^{-1}$  e  $\mu$  é o peso molecular médio. Para temperaturas representativas das temperaturas centrais das estrelas (algo em torno de  $10^7 K$ ),  $\rho > 1000 g/cm^3$ . A densidade no centro de estrelas comuns é bem menor do que  $1000 g/cm^3$  (10 a  $200 g/cm^3$

na seqüência principal) e, portanto, o gás em seu interior obedece à equação de estado dos gases ideais. Em anãs brancas, a densidade central é muito maior que  $1000\text{ g/cm}^3$  ( $\bar{\rho}_{wd} \simeq 10^6\text{ g/cm}^3$ ) e, por isso, a equação de estado para os gases ideais não pode ser aplicada.

Se por um lado a estrutura de uma anã branca não depende de sua temperatura, por outro, a temperatura determina a luminosidade da estrela (por exemplo, em uma estrela normal, a temperatura controla a taxa de reações nucleares). Isso implica que a estrutura também não depende da luminosidade. Logo, a relação massa-luminosidade válida para as demais estrelas não vale para as anãs brancas.

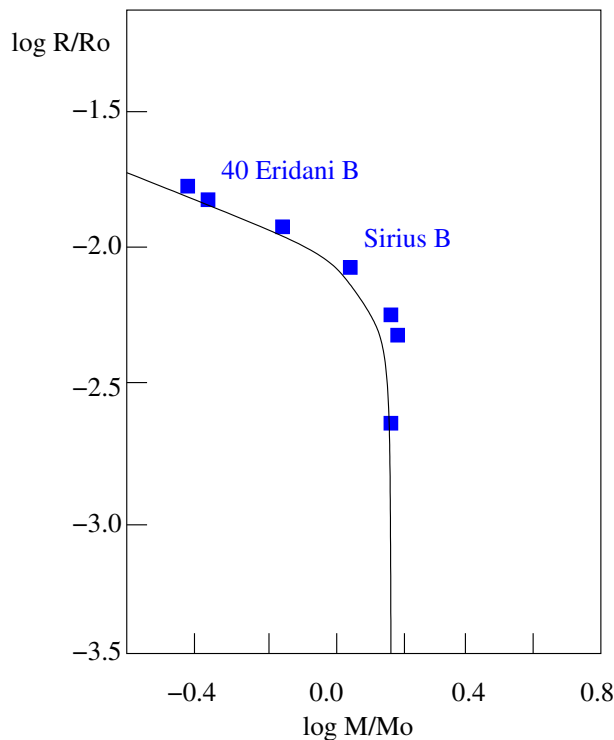
As anãs brancas, contudo, possuem sua própria *relação massa-raio*. Da mesma maneira que duas esferas maciças de mesma massa, feitas de um mesmo metal, devem ter diâmetros iguais, anãs brancas de mesma massa também devem ter o mesmo tamanho. Esta regra não é válida para as outras estrelas: uma gigante vermelha e uma estrela da seqüência principal, por exemplo, podem ter massas iguais, mas seus tamanhos são diferentes.

A relação massa-raio para anãs brancas (para temperatura zero) é mostrada na Fig.1.3 em escala logarítmica. Os quadrados escuros mostram a posição de algumas anãs brancas para as quais o raio e a massa são conhecidas. Essa relação tem duas propriedades curiosas. Em primeiro lugar, quanto mais massiva uma anã branca é, menor é o seu raio (ao contrário do que ocorre com as esferas de metal). Segundo, as massas das anãs brancas não podem ser maiores que um certo limite. A teoria de evolução estelar prediz que não podem existir na natureza anãs brancas com massa superior a 1.43 massas solares<sup>10</sup>. Para massas acima deste valor crítico, a pressão de degenerescência eletrônica não pode mais suportar a força da gravidade e a estrela colapsaria catastroficamente (como acredita-se ocorrer com supernovas do tipo I).

Um plasma degenerado possui alta transparência e alta condutividade térmica, pois os elétrons e fótons têm um longo livre caminho médio dentro dele. Isso impede que o plasma degenerado tenha grandes gradientes de temperatura. Os grandes gradientes de temperatura ocorrem na fina camada externa que envolve o núcleo da estrela, a *atmosfera* (ou *envelope*) da estrela. Essa atmosfera é formada por matéria em estado não-degenerado e sua espessura corresponde a uma fração considerável do raio da estrela (30%). A temperatura efetiva na superfície é da ordem de  $10^3 - 10^5\text{ K}$  enquanto que na base da atmosfera, onde ela faz contato com o núcleo da estrela, a temperatura é da ordem de  $10^7\text{ K}$ .

Qual é a fonte da radiação? No núcleo das anãs brancas praticamente não existe hidrogênio, o principal combustível nuclear das estrelas. Quase todo o hidrogênio que existia foi queimado nos estágios anteriores da vida da estrela. Entretanto, observações espectroscópicas mostram que na superfície da maioria das anãs brancas ainda existe hidrogênio. Este hidrogênio pode não ter sido queimado ou então pode ser parte da matéria do meio interestelar acretada sobre a superfície da estrela. Se a quantidade de hidrogênio na camada externa for maior do que  $10^{-4} M_{\odot}$ , a temperatura na base seria alta o suficiente para iniciar a queima do hidrogênio e esta poderia ser a fonte de radiação das anãs brancas.

<sup>10</sup> Este limite cai para  $1.2 M_{\odot}$  quando se faz a correção para a neutralização da matéria sem correções relativísticas e quânticas, e para  $1.3 M_{\odot}$ , dependendo da composição química, quando incluímos outras correções, como o efeito da interação com os íons (Hamada & Salpeter 1961).



**Fig. 1.3:** Relação Massa-Raio para anãs brancas ( $M_o$  e  $R_o$  são a massa e o raio do Sol).

Mesmo quando a queima de hidrogênio termina por inteiro, as anãs brancas podem manter uma alta temperatura superficial apenas por condução térmica; elas irradiam o calor armazenado em seu interior nas etapas anteriores de reações termo-nucleares e como resultado, esfriam. A quantidade de calor contido em uma anã branca é muito grande e está principalmente na forma de energia cinética dos íons.

### 1.3 Classificação Espectral

O desenvolvimento de todos os campos da ciência, da astronomia à zoologia, geralmente passa por fases bem conhecidas. Os novos fenômenos são primeiro catalogados e separados em classes que partilham características ou propriedades em comum. Inicialmente, cada classe pode ser estudada isoladamente, mas à medida que as informações vão se acumulando, as inter-relações entre as classes vão sendo melhor compreendidas até que surja uma teoria unificada que explique de forma coerente os fenômenos observados. A classificação, portanto, pode ser o primeiro passo na direção da unificação.

Diversos *sistemas de classificação espectral* de anãs brancas já foram propostos. O sistema atualmente em uso foi proposto por Sion *et al.* (1983) e substituiu o sistema anterior, elaborado por Greenstein (1960) a partir de um outro sistema proposto por Luyten (1952). No atual sistema, as classes são denotadas por um D maiúsculo seguido por três letras e um número:

$$Dxyzn$$

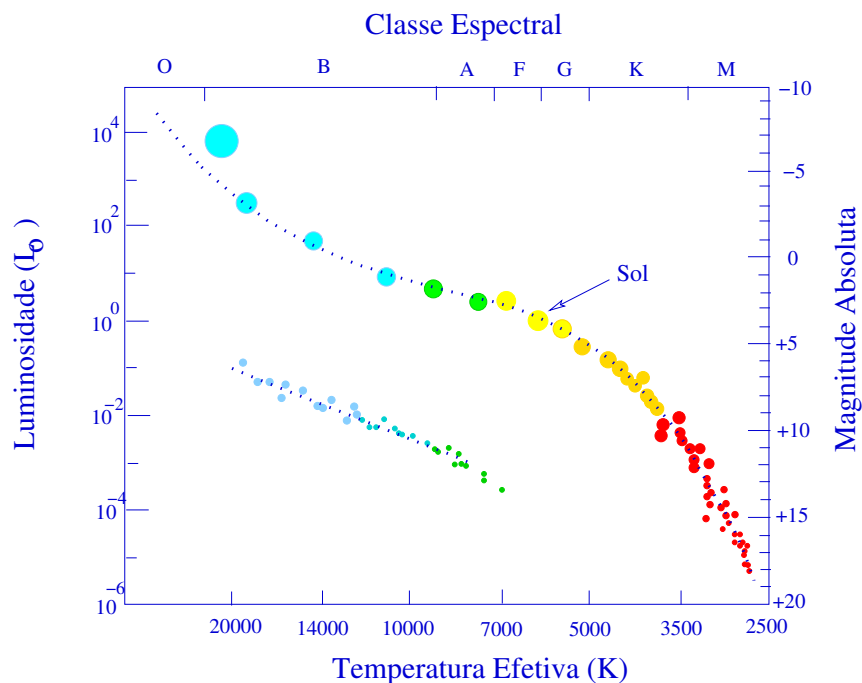
onde,

- $D$  indica que o objeto é *degenerado*.
- $x$  tipo espectroscópico primário ou dominante:  
 A - somente linhas de Balmer; ausência de He I e metais  
 B - linhas de He I; ausência de H e metais  
 C - espectro contínuo; nenhuma linha mais profunda que 5%  
 O - linhas fortes de He II; presença de He I ou H  
 Z - somente linhas de metais; nenhum He ou H  
 Q - linhas características de C (atômico ou molecular)
- $y$  característica espectroscópica secundária, *se existir*;  
 mesmas regras de  $x$
- $z$  V - estrela variável  
 P - estrelas magnéticas  
 H - estrelas magnéticas sem polarização detectável  
 X - espectros peculiares ou inclassificáveis
- $n$  0-9 — índice de temperatura (opcional)  
 $n \equiv \text{int}[50\,040\text{ K}/T_{eff}]$

Por exemplo,  $DA1$  indica uma estrela anã branca com apenas linhas de H I em seu espectro e uma  $T_{eff} \simeq 30\,000\text{ K}$ , enquanto  $DBAP3$  indica uma estrela degenerada magnética, polarizada, com linhas de hélio e hidrogênio, mas com hélio dominante e uma  $T_{eff}$  da ordem de  $20\,000\text{ K}$ . O índice de temperatura,  $n$ , é opcional e, devido à sua baixa precisão, geralmente é omitido. Uma estrela com temperatura igual a  $15\,000\text{ K}$  teria índice  $n = 3$ . Todos os objetos com temperatura menor que  $5\,000\text{ K}$  têm índice  $n = 9$  e os objetos com mais de  $100\,000\text{ K}$  têm índice  $n = 0$ .

## 1.4 Diagrama H-R

As propriedades físicas fundamentais de uma estrela são: sua temperatura superficial efetiva,  $T_{eff}$ , sua luminosidade,  $L$ , sua massa total,  $M$ , seu raio,  $R$  e sua composição química. Dessas cinco propriedades, a luminosidade (se sua distância é conhecida) e a temperatura efetiva



**Fig. 1.4:** Diagrama H-R. A posição de cada estrela no diagrama H-R, representada por pontos, depende de sua luminosidade (em  $L_{\odot}$ ) e temperatura superficial efetiva (em Kelvins). Note que a temperatura decresce para a direita no eixo horizontal inferior. As classes espectrais (O-M) correspondentes a intervalos de temperatura são mostrados no eixo horizontal superior. A escala de magnitudes absolutas correspondente à escala de luminosidade é mostrada no eixo vertical direito. O diagrama H-R mostra duas seqüências: a seqüência principal (à direita) e a seqüência de esfriamento das anãs brancas (à esquerda). O raio da estrela é representado pelo tamanho de cada ponto. A posição do Sol na seqüência principal é indicada pela seta.

são as que mais facilmente se podem medir. Usando  $L$  e  $T_{eff}$  podemos representar cada estrela num gráfico da luminosidade contra a temperatura efetiva, conhecido como *diagrama H-R*.

Numa das diversas apresentações do diagrama H-R, temos  $\log L$  no eixo vertical contra  $T_{eff}$  no eixo horizontal. Detalhe: a escala de temperatura quase sempre aparece invertida, decrescendo para a direita, como podemos ver na Fig.1.4. A característica mais marcante em um diagrama H-R é a faixa aproximadamente diagonal que vai do canto superior esquerdo até o canto inferior direito, conhecida como *seqüência principal* (SP). Quando uma estrela entra em equilíbrio hidrostático, depois de se formar a partir de uma nuvem primordial, ela estará em algum ponto da seqüência principal, de acordo com sua massa (quanto mais massiva, mais próxima estará da extremidade superior). As estrelas da seqüência principal, como é o caso do Sol, queimam hidrogênio e permanecem na seqüência principal enquanto

estiverem queimando hidrogênio no núcleo. A queima do hidrogênio é sua fonte de energia.

As estrelas do diagrama H-R que estão fora da seqüência principal geram sua luminosidade de algum outro modo. Mas todas elas um dia estiveram na seqüência principal e depois de esgotarem o hidrogênio em seus núcleos, saíram da SP atrás de algum outro meio de manter o equilíbrio hidrostático e impedir o colapso gravitacional. A natureza do mecanismo para manter o equilíbrio hidrostático combinado com os métodos pelos quais a energia é transportada até a superfície é que determina a posição de uma estrela com uma dada massa no diagrama H-R.

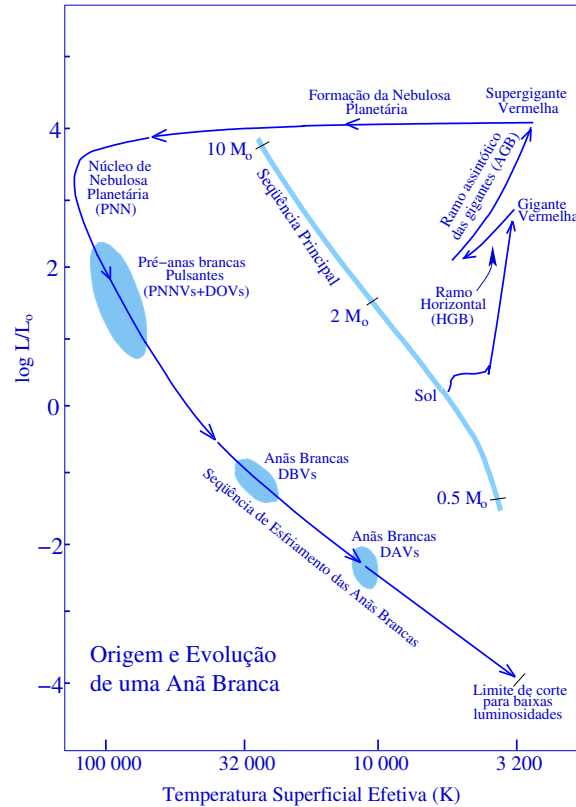
## 1.5 A Evolução até o Ramo Assintótico das Gigantes

Quando uma estrela da SP extingue seu hidrogênio nuclear, ela não pode mais manter um gradiente de pressão que seja suficiente para se contrapor à força da gravidade. Seu núcleo começa, então, a se contrair relativamente rápido, enquanto que sua energia potencial gravitacional vai se convertendo em calor e aumentando a temperatura interna da estrela. A estrela deixa a SP mantendo sua luminosidade aproximadamente constante enquanto sua  $T_{eff}$  diminui mais e mais (veja a Fig.1.5). Esta redução na temperatura cessa quando a convecção no envelope da estrela se estende até as camadas mais internas, permitindo que o calor do núcleo seja transportado de forma muito mais eficiente até a superfície. A partir deste ponto, a estrela evolui, aumentando sua luminosidade mas mantendo constante sua  $T_{eff}$  ao longo do “ramo das gigantes vermelhas” (RGB) do diagrama H-R. Agora, a superfície da estrela é mais fria, mas é mais luminosa e muito maior do que era quando estava na SP. Neste ponto, coisas diferentes podem acontecer, dependendo da massa da estrela.

Em estrelas com massa inicial maior que  $\simeq 10 M_{\odot}$ , a temperatura central eventualmente torna-se alta o suficiente para queimar hélio em carbono e oxigênio, parando a contração do núcleo. Quando o hélio termina, o núcleo de C/O se contrai até se tornar quente suficiente para queimar elementos mais pesados. O processo continua, até que a estrela explode na forma de uma super-nova Tipo II. Estrelas com massas acima de  $\simeq 10 M_{\odot}$ , portanto, não formam anãs brancas. Vejamos o que acontece com as  $\sim 98\%$  restantes.

O que acontece com estrelas com menos de  $10 M_{\odot}$  quando a temperatura no núcleo torna-se alta suficiente para queimar He depende do tipo de mecanismo necessário para suportar a força da gravidade. Em estrelas acima de  $2.2 - 2.3 M_{\odot}$  a pressão do gás ideal é o que impede o colapso (Iben & Renzini 1983). A contração do núcleo pára em resposta à nova fonte de energia, a queima de He, e a estrela entra em uma nova fase, relativamente estável, de queima nuclear similar a da queima de H na SP. Quando todo o He disponível no núcleo foi convertido em C e O, o núcleo novamente se contrai, o envelope se expande, e a estrela sai do ramo horizontal, subindo no diagrama H-R. Este estágio é chamado de *ramo assintótico das gigantes* (AGB). Com a contração do núcleo, a luminosidade da estrela se torna maior do que durante a fase anterior, no RGB (ver Fig.1.5).

Em estrelas com massas abaixo de  $2.2 - 2.3 M_{\odot}$ , o que suporta o colapso gravitacional, ainda no ramo das gigantes, é a pressão de degenerescência eletrônica. Quando a ignição



**Fig. 1.5:** O diagrama H-R mostra a evolução de uma estrela com  $1 M_{\odot}$  a partir da seqüência principal.

do He começa, o rápido aumento na energia liberada não pode (pelo menos inicialmente) produzir a expansão do núcleo, porque a pressão de degenerescência eletrônica depende muito fracamente da temperatura. O núcleo se mantém compacto à medida que a taxa de geração de energia aumenta. Em resposta, a temperatura também aumenta, aumentando ainda mais as taxas de reações nucleares, e assim por diante, até que reações termo-nucleares não controladas produzem uma quantidade intensa de radiação e energia, conhecida como *flash de hélio*.

O *flash* de hélio não destrói a estrela. Sabemos disso porque observamos estrelas de baixa massa que devem ter passado pela fase de gigante e pelo flash de He e sobreviveram. Isso foi possível porque, provavelmente, o excesso de energia produzido pelo flash de He foi transportado eficientemente até a superfície via convecção. A emissão de neutrinos esfria o núcleo, induzindo uma inversão de temperatura. Logo, a queima de He deve ocorrer em uma camada ao redor da região central, próxima ao envelope convectivo.

Depois do *flash* de hélio, a temperatura eventualmente se torna alta suficiente para fazer com que o gás saia do estado degenerado e sua pressão passe a controlar o mecanismo que regula o equilíbrio hidrostático do núcleo. A queima de He continua mais ou menos como no caso das estrelas de mais alta massa, discutido anteriormente, com uma camada de H, gerando uma quantidade extra de energia na região de transição entre o núcleo e o envelope. Nesta fase, a estrela está no *ramo horizontal* (HGB) do diagrama H-R.



As estrelas, em geral, não evoluem ao longo do HGB durante a queima de He. Elas seguem uma trajetória abaixo do HGB e sua posição no diagrama H-R depende da massa do envelope de H existente em cima do núcleo de He. Quanto menor for o envelope, maior será a  $T_{eff}$  e mais para a esquerda as estrelas estarão sobre o HGB.

As estrelas passam menos tempo nesta seqüência onde o He é queimado do que na SP, porque a energia gerada pela queima de He é menor e a luminosidade da estrela é maior do que na SP. Por exemplo, uma estrela típica de  $1 M_{\odot}$  passa  $10^{10}$  anos na SP, mas apenas  $10^8$  anos no HGB. Quando o He do núcleo termina, as estrelas do HB entram no ramo assintótico das gigantes (AGB).

A evolução de estrelas no AGB é complexa. O cenário é um núcleo de C/O, coberto por uma camada de quase puro He que, por sua vez, é coberto por um envelope rico em H. Em geral, as temperaturas são altas o suficiente para que ainda exista queima de He e H nas duas camadas. A maior parte da luminosidade vem da queima de H no envelope mais externo, enquanto que a queima de He produz mais C e O, que vão se precipitando para o núcleo, aumentando a massa do mesmo.

Eventualmente, a base da camada de He torna-se levemente degenerada, causando uma espécie de mini-flash de He, conhecido como *pulso térmico*. A expansão resultante e o esfriamento das camadas mais externas reduz temporariamente a queima de H, enquanto que a luminosidade total é aumentada por um período breve de tempo. Logo em seguida, a luminosidade diminui e a estrela volta a queimar He como antes. As camadas contraem, o H volta a ser queimado, até que um novo pulso térmico aconteça.

Um outro ponto importante na evolução das estrelas ao longo do AGB é a *perda de massa* observada em taxas altíssimas, como  $\simeq 10^{-5} M_{\odot}/ano$  (Loup *et al.* 1993). Provavelmente, durante os pulsos térmicos alguma massa é perdida. Bowen & Willson (1991) conseguiram construir modelos de pulsação que reproduzem as perdas de massas observadas em estrelas variáveis *Mira* do AGB.

Há muita coisa que ainda não se sabe sobre a evolução ao longo do AGB. Por exemplo, não se sabe exatamente qual é a proporção C:O no núcleo por que a incerteza na taxa da reação  $^{12}C(\alpha, \gamma)^{16}O$  é muito grande (Metcalf *et al.* 2001). Por isso, *restrições* vindas de considerações observacionais são importantes.

O mecanismo, ou mecanismos, responsáveis pela perda de massa em estrelas AGBs muitas vezes fazem com que parte das camadas mais externas dessas estrelas seja *ejetada* para o meio inter-estelar. O pouco H que resta ( $\simeq 10^{-2} M_{\odot}$ ) queima rapidamente (cerca de  $10^4$  anos) atingindo temperaturas mais e mais altas, mas mantendo a luminosidade praticamente constante. Aos poucos, o núcleo mais interno da estrela vai sendo revelado.

O núcleo da estrela agora é brilhante o suficiente para ionizar o gás que foi ejetado para o meio circumstelar, formando uma *nebulosa planetária* (ver Fig.1.6). No núcleo da nebulosa planetária está uma estrela, chamada de PNN (*planetary nebulae nuclei*), que se tornará uma pré-anã branca.



**Fig. 1.6:** *Nebulosa planetária. A estrela central é uma pré-anã branca (PNN). Imagem obtida pelo HST-NASA/ESA.*

## 1.6 Evolução Pós-Ramo Assintótico das Gigantes

A aparência inicial de uma pré-anã branca (PWB) depende da fase do ciclo de pulso térmico na qual ela deixou o AGB. Se a estrela deixar o AGB durante o período de queima estável de H, entre camadas de *flashes*, então esta queima continuará durante o estágio de PNN (Schönberner 1981, 1986). Quando o que é deixado do envelope de H torna-se tão fino e tão frio que as reações de H finalmente pararão de vez, a estrela começará a esfriar e se tornará uma DA, uma anã branca com atmosfera de H.

Se a estrela deixar o AGB *durante* um pulso térmico, enquanto a camada de queima de H está em extinção, então ela pode perder todo o envelope de H, deixando à mostra a camada inferior de He. Esta estrela será uma provável progenitora de uma DB, uma anã branca rica em He.

As anãs brancas são estrelas bastante estratificadas quanto à composição química. A estratificação decorre de sua história evolutiva e da precipitação gravitacional que faz que, com o tempo, os elementos mais pesados fiquem em camadas mais profundas e os mais leves em camadas mais acima. Isto faz com que a maioria das anãs brancas tenham um espectro muito simples, mostrando linhas de um ou dois elementos, como se pode concluir pelo modo como são classificadas, discutido na Sec.1.3. Ao contrário do que acontece com a classificação espectral usada para as estrelas da SP, as classes DA-DB/DO não possuem qualquer relação (simples) com a temperatura efetiva.

Se a perda de massa fosse constante, a razão esperada entre DAs e não-DAs resultantes da evolução ao longo do AGB deveria corresponder aproximadamente ao tempo gasto durante cada fase do pulso térmico. Infelizmente, a perda de massa provavelmente muda rapidamente próximo ao final do AGB (Bowen & Willson 1991). O problema fica pior quando se leva em conta a possibilidade de formação de anãs brancas a partir do *ramo horizontal*

*estendido* (EHB), um prolongamento do ramo horizontal (HGB) que levaria uma estrela na fase de gigante vermelha diretamente à fase de anã branca, sem a formação de uma nebulosa planetária (Bergeron *et al.* 1994). Este processo envolveria algum mecanismo de perda de massa. Observacionalmente, cerca de 80% de todas as anãs brancas são DAs e a maioria das restantes são DBs. Um problema fundamental é que a razão exata entre DAs e não-DAs depende da temperatura efetiva, como veremos a seguir.

## 1.7 Renascimento

Parece que nem todas as estrelas que ejetam a nebulosa planetária seguem adiante seu caminho evolutivo até a fase de anãs brancas, tal como foi descrito acima. Há evidências de que algumas estrelas passam por um último flash que provoca grandes mudanças em suas propriedades físicas, como luminosidade, temperatura e raio, bem como em sua composição superficial, fazendo com que a estrela saia subitamente da posição que ocupava no diagrama H-R retornando para o ramo assintótico das gigantes. É como se a estrela estivesse renascendo e por isto, este processo pode ser chamado de *renascimento* (*born-again*) da estrela. Após o renascimento, é possível que a estrela retorne à fase de nebulosa planetária.

Em 1900, a estrela *FG Sge* era uma estrela com um fraco brilho azulado, com características muito parecidas às estrelas encontradas no núcleo de nebulosas planetárias (PNN). Hoje, cerca de 100 anos depois, ela é uma luminosa gigante vermelha (Herbig & Boyarchuk 1968, Smolinski *et al.* 1976 e Montesinos *et al.* 1990). Desde da década de 1930, a estrela tem mostrado pulsações irregulares e seu *quase-período* variou de  $\sim 5$  dias em 1934 até  $\sim 120$  dias em 1990 (van Genderen 1994). Em 1992 ela começou a mostrar um comportamento típico de estrelas RCB<sup>11</sup> (Jurcsik 1992). Na mesma época o espectro da estrela tornou-se muito rico em carbono (Iijima & Strafella 1993). Atualmente, as camadas mais superficiais parecem ser pobres em hidrogênio e mostram os produtos de muitos processos de reações nucleares (Gonzales *et al.* 1998). Estas evidências sugerem que a *FG Sge* pode ser uma estrela RCB, recém nascida.

A estrela *V605 Aql* hoje é a estrela central da nebulosa planetária *Abell 58*, mas em 1919 ela brilhava como uma supernova fraca e, segundo van den Bergh (1971), seu espectro em algum momento lembrava o de uma estrela RCB. Uma nuvem na forma de nó na parte mais interna da nebulosa foi ejetada por volta de 1919 (Bond *et al.* 1993).

Em 1996, uma estrela azulada de brilho fraco de repente começou a ficar brilhante e, dentro de três anos tinha se tornado uma estrela de carbono, luminosa e fria, hoje conhecida como *objeto de Sakurai* ou V4334Sgr (Nakano *et al.* 1996 e Duerbeck *et al.* 1997). A estrela passou por uma rápida expansão e a convecção em seu envelope começou a “dragar” os materiais processados em seu interior para a superfície da estrela, alterando a composição

---

<sup>11</sup> Estrelas RCB (R Coronae Borealis) é uma classe de estrelas com cor amarela e com uma atmosfera muito rica em Carbono. Em temperaturas suficientemente baixas, esse carbono condensa em imensas nuvens de fuligem que bloqueiam grande parte da luz emitida pela estrela. O movimento e alterações nas nuvens tornam variável o brilho da estrela.

da superfície como têm mostrado as observações da estrela (Asplund *et al.* 1999). As similaridades de algumas razões de abundância química sugerem que a V4334Sgr também pode ter passado pelo renascimento (*born-again*) e renascido como uma estrela RCB. Contudo, a evolução continuada (mesmo com uma baixa temperatura efetiva), a alta taxa de perda de massa (Kerber *et al.* 1999), a presença de uma fotosfera na forma de nebulosa planetária (Benetti *et al.* 1996) e a provável presença de um núcleo quente emitindo ventos fortes (Eyres *et al.* 1999) podem ser um presságio de uma nova ejeção de matéria, seguida de um rápido retorno à fase de nebulosa planetária.

A estranha evolução dessas três estrelas tem sido explicada pelo *modelo do flash final*. A similaridade com estrelas RCB pode eventualmente explicar a origem das estrelas RCB. Por outro lado, o fato de que a *V605 Aql* se contraiu até se tornar uma PNN tão rápido quanto se tornou uma gigante, enquanto que as estrelas RCB não mudaram significativamente nos últimos 200 anos, pode significar que essas três estrelas tenham seguido caminhos evolutivos completamente independentes.

Pelo modelo do *flash final*, uma estrela pode deixar o AGB pouco depois de iniciada a fase de flashes, e o flash final ocorrer durante ou mesmo *depois* da fase de PNN, causando um breve retorno ao AGB antes de que uma perda repentina de massa acabe com todo o seu envelope de H e talvez com parte de seu envelope de He, deixando a estrela coberta por uma atmosfera rica em He, com uma quantidade significativa de C/O. Este processo, pode produzir uma estrela DO (Iben 1984, Werner & Rauch 1994).

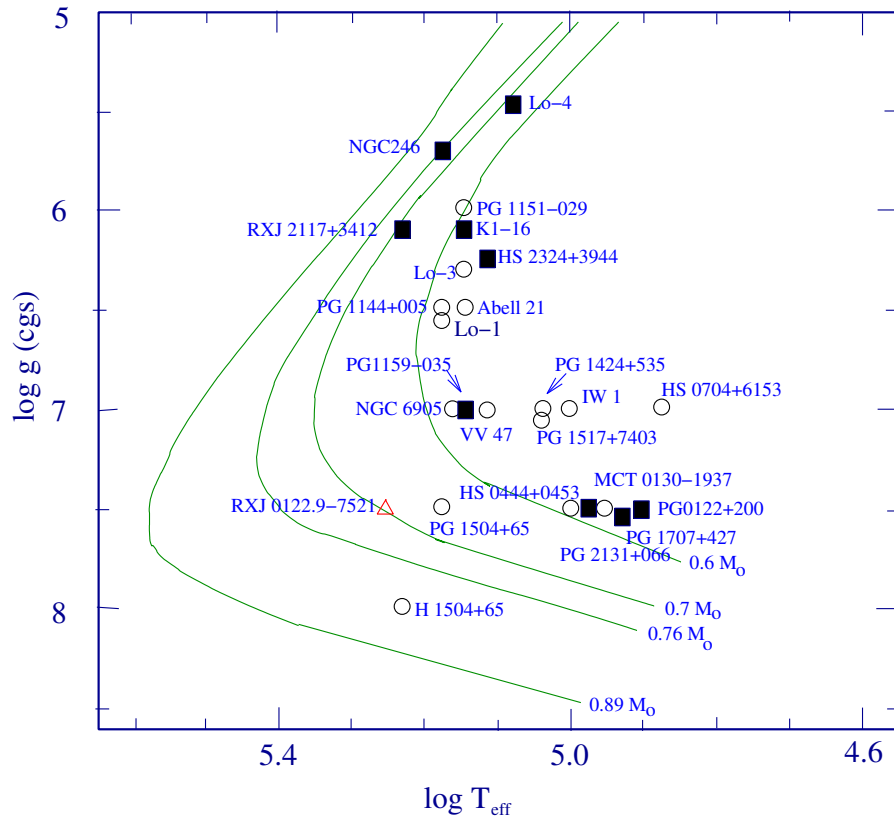
## 1.8 Evolução na Sequência das Anãs Brancas

Com o último remanescente da queima nuclear em estrelas pós-AGB, as estrelas entram em seu estágio final de esfriamento e contração. Nesta fase, as temperaturas superficiais atingem os maiores limites conhecidos para estrelas<sup>12</sup> (a mais quente tem  $T_{eff} > 170\,000\,K$ ). Sua luminosidade também é alta, mais de  $1000 L_{\odot}$ , mas sem ajuda de queima nuclear, elas irão esfriar continuamente.

A figura Fig.1.7 mostra um diagrama  $\log g - \log T_{eff}$  para uma amostra de estrelas próximas ao assim chamado “joelho” da trilha evolutiva pós-AGB. As linhas representam os caminhos dos modelos estelares seguidos após deixarem o AGB. Por suas gravidades na superfície serem já altas ( $\log g = 7$  para a máxima  $T_{eff}$ ), as PWD continuam encolhendo até que a degenerescência pare sua contração em cerca de  $\log g = 8$ . Inicialmente, a evolução durante esta fase é rápida: dentro de cerca de 500 000 anos, a  $T_{eff}$  cai pela metade, e  $L$  fica menor do que  $1 L_{\odot}$ . As regiões internas da nova estrela anã branca formada são agora completamente degeneradas, envoltas por um envelope não-degenerado.

A distribuição de massas de anãs brancas está centrada próxima ao valor médio de  $0.56 - 0.58 M_{\odot}$  (Bergeron *et al.* 1992, Weidemann & Koester 1984, Giovannini 1996). A razão principal para uma distribuição tão estreita de massa — apesar do vasto intervalo de massa para os progenitores — envolve as características básicas da evolução no AGB: alta

<sup>12</sup> Exceto para estrelas de nêutrons, cuja  $T_{eff}$  está entre  $700\,000\,K$  e  $1.5\,MK$ .



**Fig. 1.7:** Diagrama  $\log g - \log T_{eff}$  ( $g$  em unidades  $cgs$ ) com as posições das estrelas PWDs conhecidas. As barras de erro não são mostradas no diagrama por causa de sua grande extensão: tipicamente  $\pm 0.5$  em  $\log g$  e  $\pm 10\,000 - 20\,000\,K$  em  $T_{eff}$ . As linhas mostram as posições teóricas para estrelas com massas de  $0.6$ ,  $0.7$ ,  $0.76$  e  $0.89 M_{\odot}$ . (Dreizler et al. 1998).

$L$  e alta taxa de perda de massa,  $\dot{M}$ . A luminosidade de uma estrela AGB é muito sensível à massa do núcleo (Paczynsky 1970). A perda de massa é maior quando a massa do núcleo,  $M_c$ , atinge aproximadamente  $0.6 M_{\odot}$ , sendo que uma estrela AGB mais massiva perde massa mais lentamente que uma estrela AGB menos massiva com a mesma luminosidade. O limite teórico para a massa máxima dos núcleos de AGBs – e portanto de estrelas anãs brancas — é  $1.4 M_{\odot}$ . Isto representa a maior quantidade de massa que é possível suportar via degenerescência eletrônica (Chandrasekhar 1939). Estrelas com  $M_c < 0.53 M_{\odot}$  jamais atingem o AGB (Dorman et al. 1993), contudo, existem anãs brancas com massas menores.

Até duas décadas atrás, a localização de estrelas na região de transição entre o caminho das PNNs e a extremidade superior da seqüência de esfriamento das anãs brancas era problemático. Isto se devia principalmente à rapidez com que as estrelas passavam por esta fase de transição (tornando difícil a detecção de exemplos observacionais) mas também devido à dificuldade de especificar  $\log g$  e a  $T_{eff}$  para esses objetos. A determinação dessas quantidades a partir do espectro requer que um modelo razoável para a atmosfera estelar

seja construído. Isto é muito difícil para estrelas compactas com  $T_{eff}$  acima de 50 000  $K$ . A hipótese de um equilíbrio térmico local (LTE), tão útil no modelamento de estrelas mais frias, falha para temperaturas e gravidades altas.

A evolução de PWDs pode ser controlada pela perda de energia devido à interações dos neutrinos no núcleo. Ao contrário dos neutrinos solares, esses não decorrem da fusão nuclear, mas resultam dos processos de espalhamento dos elétrons em regiões quentes e densas do núcleo das PWD. E ao contrário da energia de fótons, neutrinos criados perto do centro das PWD escapam diretamente. Esta luminosidade de neutrino esfria o centro da estrela, mantendo a inversão de temperatura similar àquela dentro das estrelas no final do ramo das gigantes vermelhas. A importância das reações de neutrinos na evolução de PWD foi reconhecida pela primeira vez nos anos de 1960 por Savedoff *et al.* (1969). Cálculos das taxas de reações relevantes foram inicialmente feitas por Beaudet *et al.* (1967) baseadas na teoria das interações fracas propostas por Feynman & Gell-Mann (1958). Mais tarde, Dicus (1972) e Dicus *et al.* (1976) recalcularam essas taxas segundo a teoria unificada eletrofraca de Weinberg e Salam (Weinberg 1967, Salam 1968). Todos esses cálculos são teóricos, contudo. Nós não temos nenhuma confirmação experimental ou observacional das taxas de produção de neutrinos sobre condições apropriadas para os interiores PWD.

Felizmente, a amostra conhecida de estrelas ocupando esta fase do cenário evolutivo tem crescido nas últimas duas décadas. A descoberta mais importante foi a de uma nova classe espectral, conhecida como estrelas PG 1159. Cerca de duas dúzias são conhecidas, com temperaturas variando de 170 000 – 80 000  $K$ . Cerca de metade são estrelas centrais de nebulosas planetárias (PNNs). Num diagrama  $\log g \times T_{eff}$  há uma região onde as estrelas PWD (do tipo PG 1159) mais evoluídas se misturam com as anãs brancas (normais) mais quentes. Esta classe, portanto, forma uma seqüência evolutiva das PNNs até a trilha de esfriamento das anãs brancas (Werner 1995, Dreizler & Heber 1998).

Contudo, as estrelas PG 1159 provavelmente não são as precursoras da maioria das anãs brancas. Primeiro, todas, exceto uma das PG 1159 PWDs, não mostram evidência de H em seu espectro. Embora não se possa observar linhas de H em temperaturas da ordem de 100 000  $K$ , a presença de hidrogênio provoca um alargamento nas linhas de He. É improvável que elas evoluam até se tornarem estrelas DAs, sendo mais provável que elas evoluam para anãs brancas DOs e DBs.

Segundo, cerca de metade das estrelas PG 1159 são estrelas variáveis pulsantes, espalhadas sobre um intervalo inteiro de  $\log g$  e  $T_{eff}$  ocupado pelos membros desta classe espectral. Isto representa a mais larga faixa de instabilidade no diagrama H-R. As estrelas variáveis no centro de nebulosas planetárias são denotadas por PNNV. Estrelas variáveis PG 1159 sem nenhuma nebulosa são as estrelas GW Virginis (ou simplesmente GW Vir ou DOVs). A estrela PG 1159 serve como protótipo tanto para a classe espectroscópica quanto para a classe de estrelas variáveis. Mais adiante, ao longo da seqüência das anãs brancas, encontramos mais duas faixas de instabilidade. Com temperaturas superficiais entre 20 000 – 25 000  $K$  (Koester *et al.* 1985; Liebert *et al.* 1986; Thejll *et al.* 1991, Beauchamp *et al.* 1999) encontramos as estrelas DBVs (variáveis DBs). Ainda mais frias são as estrelas ZZ Ceti (DAVs), com  $T_{eff}$  entre 11 000 – 13 000  $K$  (Greenstein 1984; Weidemann & Koester 1984; Bergeron *et al.* 1992, 1995, 2004, Giovannini 1996, Costa 1999). A variabilidade nessas três faixas

resulta em modos-g de pulsação. Os períodos de pulsação nos fornecem uma interessante maneira de testar a estrutura das estrelas anãs brancas e PWDs.

As pulsações podem ajudar a responder a questão de se as estrelas PG 1159 e as anãs brancas DBs são fases de uma trilha evolutiva comum. Por exemplo, Winget *et al.* (1994) e Bradley & Winget (1994) usaram a análise dos períodos de pulsação da estrela GD 358 para medir a espessura de sua camada de He e obtiveram  $M_{He} \simeq 10^{-6} M_{\odot}$ . A mesma técnica aplicada aos períodos da PG 1159 calculou que a massa da camada de He era de  $10^{-3} M_{\odot}$ . Isto representa um problema se as duas estrelas estão relacionadas. Contudo, Dehener & Kawaler (1995) mostram que difusão na base da camada de He pode causar um deslocamento na localização aparente da base, consistente com as medidas, durante a evolução de 140 000 K da PG 1159 aos 23 000 K da GD358.

Um outro problema que surge quando se tenta fazer uma conexão evolutiva entre as estrelas PG 1159 e as anãs brancas DBVs é que nenhuma estrela DB foi observada nas proximidades do intervalo de temperatura 30 000 – 45 000 K (Greenstein 1986, Sion 1984). Esta ausência de DBs representa uma interrupção no caminho evolutivo ligando a PG 1159 à GD 358. Como os espectros das DBs são caracterizados pela presença de linhas de He I e ausência de linhas de H (e de metais), Fontaine & Wesemael (1987) propuseram que todas as estrelas DBs possuem uma pequena quantidade de H em sua camada mais externa, que aos poucos iria subindo e cobrindo a superfície, fazendo com que o He deixe de ser espectralmente visível, por volta de 45 000 K. O He permaneceria coberto até que, por volta de 30 000 K, a convecção se encarregaria de misturar o H novamente fazendo com que a película de H que cobre a estrela desaparecesse. Neste ponto, a estrela teria as características espectrais de uma DB. Contudo, Dehner (1995) mostrou que a quantidade de H envolvida nesse processo ( $10^{-14} M_{*}$ ) se espalharia na superfície tão rapidamente que deveria ser visível já no estágio de PG 1159. Dehner (1995) também chamou a atenção de que uma pequena perda de massa poderia mascarar esta quantidade de H nas estrelas PG 1159, mas cálculos detalhados deste processo não teriam sido feitos. Como há perda de massa em estrelas PNNs, esta parece uma boa solução para o problema. Contudo, observações recentes com o SDSS mostraram a presença de algumas DBs no intervalo 30 000 – 45 000 K (Nitta, comunicação privada).

A espessura das camadas superficiais tanto nas DAs quanto nas DBs e nas PWDs é importante por uma outra razão. Uma vez que seus núcleos estão completamente degenerados, as anãs brancas esfriam mantendo o raio praticamente constante, enquanto que  $L$  e  $T_{eff}$  tornam-se cada vez menores. Devido à alta condutividade da matéria degenerada e ao desaparecimento da emissão de neutrinos para temperaturas menores que 20 000 K, o núcleo torna-se rapidamente isotérmico. A camada superficial de He (e camada H em DAs) então atua como um cobertor, controlando a taxa na qual a energia vai embora para o espaço e, portanto, a taxa de evolução estelar. Desde que a camada de He comprime a base do envelope, mesmo em estrelas DAs, sua massa excedente é um importante fator que determina a velocidade na qual a estrela anã branca viaja ao longo do caminho de esfriamento (Wood 1992, Winget & Van Horn 1987).

A escala de tempo para um anã branca esfriar pode fornecer uma robusta determinação da idade do disco e do halo da galáxia (Winget *et al.* 1987; Hansen *et al.* 2002). Desde que anãs brancas esfriam mais suavemente quando suas temperaturas diminuem, nós observamos

mais anãs brancas de baixas temperaturas do que anãs brancas de temperaturas mais altas. Contudo, abaixo de cerca de  $4000\text{ K}$  ( $L \simeq 10^{-4.4} L_{\odot}$ ), de repente são encontradas menos estrelas do que o esperado. Isto é devido à idade finita da galáxia: simplesmente, nenhuma anã branca é velha o suficiente para ter esfriado além das  $10^{-4.4} L_{\odot}$ . A posição exata desta linha de corte junto com o conhecimento do tempo que uma estrela leva para chegar até ali, nos dão um limite inferior para a idade da galáxia. Um ingrediente especial nesta medida é a massa da camada de He das anãs brancas e — por extensão — das PWDs (Wood 1992, Winget & Van Horn 1987).

## 1.9 Esfriamento

O calor específico de um gás de elétrons degenerados é controlado pelos íons. Aos íons corresponde a maior parte da capacidade térmica do núcleo da estrela, onde está concentrada quase toda a massa da estrela. A produção de energia por reações nucleares e por contração gravitacional (se ainda existem) contribuem muito pouco para a luminosidade da estrela, e o núcleo é praticamente isotérmico devido à alta eficiência da condução térmica pelos elétrons degenerados. O núcleo da estrela se comporta como uma simples fonte de calor, cuja energia está armazenada na forma de energia cinética dos íons e à medida que vai perdendo energia na forma de radiação, a luminosidade da estrela vai decaindo exponencialmente. Mestel (1952) encontrou que a relação entre a idade da estrela e sua luminosidade obedece a uma lei de potência (Kepler & Saraiva 2000):

$$t_{\text{esfriar}} \propto L^{-5/7} \quad (1.7)$$

A luminosidade,  $L$ , é igual à razão com que a energia armazenada na estrela na forma de energia térmica,  $E_{th}$ , é irradiada:

$$L(t) = -\frac{dE_{th}}{dt} \quad (1.8)$$

e define a *taxa de esfriamento* da anã branca. Como a maior parte da anã branca é isotérmica, podemos recorrer à seguinte aproximação:

$$L(t) = -\left(\frac{dE_{th}}{dT_c}\right) \left(\frac{dT_c}{dt}\right) \quad (1.9)$$

Nessa aproximação, os pequenos ajustes da densidade interna devido ao esfriamento são desprezados, já que a energia gravitacional liberada é completamente absorvida pelos elétrons degenerados, que são forçados para níveis de energia mais altos.

Se desprezarmos os processos nucleares e de emissão de neutrinos, bem como a liberação da energia gravitacional residual ( $\partial\rho/\partial t = 0$ ), a luminosidade da anã branca passa a ser diretamente proporcional à taxa de decréscimo da temperatura da estrela.



Para um gás de elétrons degenerados e não-relativísticos, a contribuição eletrônica para o calor específico por unidade de massa,  $c_V^e$ , derivada por Chandrasekhar (1939), é:

$$c_V^e = \frac{3}{2} \frac{k}{AH} \frac{\pi^2}{3} Z \frac{kT}{E_F} \quad (1.10)$$

onde  $H$  é a unidade de massa atômica ( $H = 1,66 \times 10^{-24} \text{g}$ ),  $k$  é a constante de Boltzmann ( $k = 1.38 \times 10^{-16} \text{erg/K}$ ),  $Z$  é a carga média dos íons e  $A$  é o número atômico médio,  $T$  é a temperatura (em Kelvins). A *energia de Fermi* dos elétrons,  $E_F$ , pode ser calculada por:

$$E_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2} \frac{1}{m_e} \left( \frac{\rho}{\mu_e H} \right)^{2/3} \quad (1.11)$$

onde  $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-27} \text{erg/s}$ . Como o gás está altamente degenerado,  $kT$  é muito menor do que a *energia de Fermi* dos elétrons, e podemos desprezar  $c_V^e$  por ser muito pequeno quando comparado com o calor específico dos íons. Fisicamente, os elétrons não contribuem para o reservatório de energia, porque partículas degeneradas já ocupam seu estado de energia mais baixo e, portanto, não podem esfriar. Para um gás (de íons) ideal,

$$c_V^{ion} = \frac{3}{2} \frac{k}{AH} \quad (1.12)$$

A equação básica de evolução estelar para a conservação de energia é:

$$L = \int_0^M \left( \varepsilon - T \frac{\partial s}{\partial t} \right) dM_r \quad (1.13)$$

O produto da temperatura pela variação temporal da *entropia*,  $T \partial s / \partial t$ , representa a troca de calor (perda) por unidade de massa, e  $\varepsilon$  é a taxa de geração ou perda de energia por unidade de massa devido a reações nucleares ou emissão de neutrinos. Como em anãs brancas, a contribuição das reações nucleares e emissão de neutrinos é muito pequena, o termo  $\varepsilon$  pode ser desprezado:

$$L = - \int_0^M T \frac{\partial s}{\partial t} dM_r \quad (1.14)$$

A alta degenerescência do núcleo da anã branca produz uma alta eficiência de condução térmica pelos elétrons, tornando o núcleo praticamente isotérmico. Como

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = c_V \frac{\partial T}{\partial t} - \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.15)$$

a Eq.1.14 pode ser escrita como:

$$L \approx -\frac{3kM}{2AH} \frac{\partial T_c}{\partial t} \quad (1.16)$$

onde  $T_c$  é a temperatura do núcleo da estrela.

Para calcular  $T_c$ , precisamos levar em conta a transferência de energia pelo envelope fino e não-degenerado. Se o envelope está em equilíbrio radiativo, e pudermos utilizar a *lei de opacidade de Kramers*:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_o \rho T^{-3,5} \quad (1.17)$$

onde  $\mathcal{K}_o$  é o coeficiente da lei de Kramers.

Levando-se conta as equações básicas:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (\text{continuidade da massa}) \quad (1.18)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}, \quad (\text{equilíbrio hidrostático}) \quad (1.19)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\mathcal{K} \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2}, \quad (\text{equilíbrio radiativo}) \quad (1.20)$$

onde  $L_r$  é a energia emitida para fora da casca de raio  $r$ ,  $M_r$  é a massa contida dentro deste raio,  $c$  é a velocidade da luz e  $a$  é uma constante que depende da densidade central, podemos dividir a equação do equilíbrio radiativo pela equação do equilíbrio hidrostático, obtendo:

$$\frac{dT}{dP} = \frac{3}{4ac} \frac{L_r}{4\pi GM_r} \frac{\mathcal{K}}{T^3} \quad (1.21)$$

Tendo em vista que a base do envelope ocorre a aproximadamente  $10^{-4}M_\star$ , podemos aproximar  $L_r \simeq L_\star$  e  $M_r \simeq M_\star$  no envelope. Usando

$$P = \frac{k}{\mu H} \rho T \longrightarrow \rho = \frac{\mu H}{k} \frac{P}{T} \quad (1.22)$$

podemos usar a lei de opacidade de Kramers (1.17) para obter:

$$T^{7,5} dT = \frac{3}{4ac} \frac{L_\star}{4\pi GM_\star} \frac{\mathcal{K}_o \mu H}{k} P dP \quad (1.23)$$

que pode ser integrada usando-se a condição de contorno zero para a superfície ( $P = 0$  para  $T = 0$ ), resultando em:

$$\frac{1}{8.5} T^{8.5} = \frac{3}{4ac} \mathcal{K}_o \frac{\mu H}{k} \frac{L_\star}{4\pi G M_\star} \frac{1}{2} P^2 \quad (1.24)$$

onde  $\mu$  é o peso molecular médio no envelope ( $\mu = 1$  para hidrogênio e 2 para o hélio) e  $P$  é a pressão.

Na borda entre o núcleo isotérmico degenerado e o envelope, a pressão e a temperatura estão relacionadas por

$$P_{\text{ideal}} = \frac{k}{\mu H} \rho T = P_{\text{nr}} = \kappa \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (1.25)$$

e, como  $P_{\text{ideal}}$  é a pressão de um gás não-relativístico, podemos igualar a equação acima à Eq.1.3:

$$\frac{k}{\mu H} \rho T = K \rho^{5/3} = \kappa \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (1.26)$$

Usando  $\kappa = K/\mu_e^{5/3}$  e  $\mu_e = A/Z$  igual ao peso molecular médio por elétron, podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{k}{\mu H} \rho T = \kappa \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (1.27)$$

de onde se obtém

$$\frac{\rho}{\mu_e} = \left( \frac{kT}{\mu H} \right)^{3/2} \left( \frac{\mu_e}{\kappa} \right)^{3/2} \quad (1.28)$$

e

$$P = \kappa^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{kT \mu_e}{\mu H} \right)^{5/2} \quad (1.29)$$

Substituindo a expressão para a pressão dada pela Eq.1.29 na Eq.1.24, esta se reduz à relação entre a luminosidade e a temperatura:

$$L_\star = \frac{2}{8.5} \frac{4ac}{3} \frac{4\pi G M_\star}{K_o} \left( \frac{\mu H}{k} \right)^4 \frac{\kappa^3}{\mu_e^5} T^{3.5} \quad (1.30)$$

ou

$$\frac{L}{L_\odot} \simeq 1.7 \times 10^{-3} \frac{M}{M_\odot} \left( \frac{4 \times 10^{23}}{K_o} \right) \frac{\mu}{\mu_e^2} \left( \frac{T_c}{10^7 \text{K}} \right)^{3.5} \quad (1.31)$$

Podemos, agora, integrar a Eq.1.16 diretamente para obter a relação idade–luminosidade:

$$t_{\text{esfriar}} \simeq 6,3 \times 10^6 \left(\frac{A}{12}\right)^{-1} \left(\frac{K_o}{4 \times 10^{23}}\right)^{2/7} \left(\frac{\mu}{\mu_e^2}\right)^{-2/7} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/7} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-5/7} \text{ anos.} \quad (1.32)$$

Essa é a lei de esfriamento de Mestel.

As aproximações usadas para derivar a lei de esfriamento de Mestel foram:

1. desprezar fontes e sumidouros de energia (energia nuclear e esfriamento por neutrinos:  $\varepsilon = 0$ );
2. desprezar contração gravitacional ( $\partial\rho/\partial t = 0$ );
3. desprezar a capacidade térmica dos elétrons ( $c_V \simeq c_V^{ion}$ );
4. usar lei do gás perfeito para os íons ( $c_V^{ion} \simeq 3k/2AH$ );
5. assumir que o núcleo é isotérmico ( $T(r) \equiv T_c$ );
6. assumir equilíbrio radiativo no envelope;
7. assumir uma lei de opacidade de Kramers no envelope.

Como a energia média ( $kT$ ) de uma anã branca com  $0.4 M_\odot$  é maior do que  $0.1 E_F$ , para  $T > 2 \times 10^7$  K, não podemos desprezar o efeito de contração gravitacional residual para massas baixas. Também não podemos desprezar a contribuição eletrônica ao calor específico, já que os elétrons podem contribuir com até 30–50% ao calor específico de estrelas quentes, com núcleos de carbono.

Resultados mais precisos podem ser obtidos incluindo-se os seguintes processos, desprezados na teoria de Mestel:

- esfriamento por neutrinos ( $L_\nu$ ), importante para  $L > 10^{-1.5} L_\odot$ ;
- liberação de calor latente de cristalização, importante para  $L < 10^{-4} L_\odot$ ;
- geração de energia nuclear pelo processo próton-próton ( $L_{\text{nuclear}}$ ), importante quando  $M_H \gtrsim 10^{-4} M_\star$ ;
- liberação de energia gravitacional para as camadas externas.

Uma fórmula aproximada que inclui esses efeitos é:

$$t_{\text{esfriar}} = 8.8 \times 10^6 \left(\frac{A}{12}\right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/7} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-2/7} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-5/7} \text{ anos} \quad (1.33)$$

A dependência da luminosidade indica que as anãs brancas mais quentes — e mais luminosas — esfriam mais rápido. A idade das anãs brancas menos luminosas observadas (com  $L = 10^{-4.5} L_\odot$ ) é cerca de  $10^{10}$  anos, comparável com a idade das estrelas mais frias da nossa Galáxia.

## 1.10 Estrelas Pulsantes

Ao longo de sua evolução, as estrelas podem passar por *faixas de instabilidade* e tornarem-se estrelas pulsantes. Temos então as estrelas  $\delta$ -Scuti, as *roAps* (estrelas apeliadas, rapidamente oscilantes), as *RR Lyrae*, as *Cefeidas* clássicas, as estrelas *Mira*, as  $\beta$ -*Cefeidas*, as estrelas degeneradas variáveis. As pulsações podem ser radiais ou não-radiais, dependendo do tipo de força restauradora que atua na oscilação e os períodos de pulsação dependem das características físicas da estrela. A Fig.1.8 mostra a localização no diagrama H-R de diversas classes de estrelas variáveis.

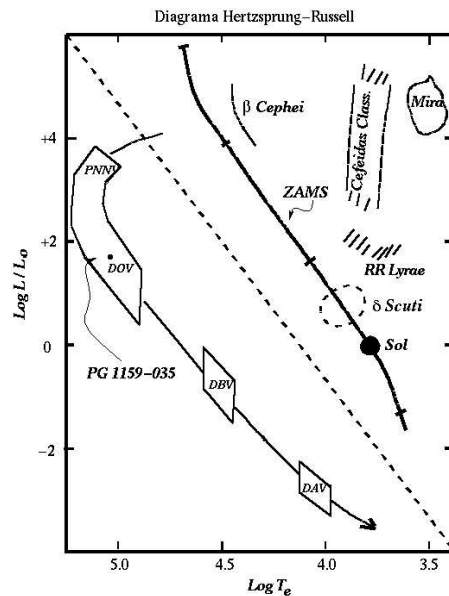


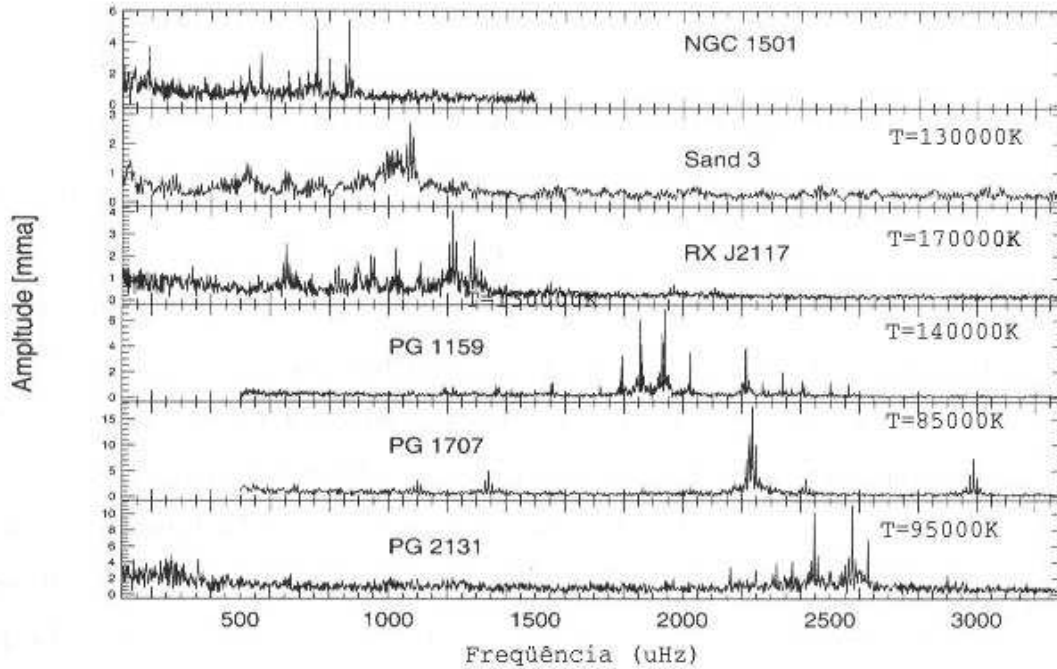
Fig. 1.8: Diagrama HR mostrando as posições das faixas de instabilidade.

## 1.11 Pré-Anãs Brancas Pulsantes

Entre 170 000 e 80 000 K temos a faixa de instabilidade onde estão as pré-anãs brancas pulsantes. Existem dois tipos diferentes de estrelas pré-anãs brancas que ocupam esta faixa de instabilidade: núcleos de nebulosas planetárias (PNNVs) e as estrelas DOVs. A extremidade mais fria da faixa de instabilidade é chamada de *borda vermelha*, enquanto que a extremidade mais quente é chamada de *borda azul*.

As PNNVs têm períodos entre 1000 e 3000 segundos, enquanto que os períodos das DOVs, em geral, não passam de 1000 segundos, como mostra a Fig.1.9. Na Fig.1.9 podemos ver os periodogramas (espectro de frequências de pulsação) de seis estrelas PWDs com diferentes  $T_{eff}$ : três PNNVs (NGC 1501, Sanduleak 3 e RXJ 2117+3412) e três DOVs (PG 1159-035, PG 1707+427 e PG 2131+066). As amplitudes são dadas em *mma* ( $10^{-3} \times$  modulação em amplitude).

A razão disso é que dos dois tipos de PWD pulsantes, as DOVs têm gravidade maior ( $\log g > 7$ ) e, por definição, não têm nebulosa planetária, o que as faz parecer pouco mais evoluídas do que as PNNVs. O fundamental de pulsação,  $P_o$ , é inversamente proporcional à densidade da estrela,  $P_o \propto 1/\sqrt{\rho}$ . Como as DOVs têm maior  $\log g$ , sua densidade também deve ser maior e, portanto, seus períodos de pulsação devem ser menores (frequências maiores) que os das PNNVs.



**Fig. 1.9:** *Periodogramas de pré-anãs brancas pulsantes: os três de cima pertencem a estrelas PNNVs e os três de baixo a DOVs (Kawaler 1996). As amplitudes são dadas em mma ( $10^{-3} \times$  modulação em amplitude). As temperaturas efetivas (em Kelvins) estão indicadas em cada periodograma, exceto para a NGC 1501, cuja temperatura ainda não foi determinada.*

## 1.12 Anãs Brancas Pulsantes

A faixa de instabilidade onde estão as DBVs cobre a faixa de temperaturas efetivas entre  $\simeq 27\,000$  K e  $\simeq 21\,500$  K (Beachamp et al. 1999). As DBVs são bem menos luminosas que as pré-anãs brancas DOVs, possuindo luminosidades entre  $\sim 0.10 - 0.03 L_{\odot}$  (O'Brien 1998). Seus períodos de pulsação estão no intervalo entre 100 e 1000 segundos.

Um pouco mais adiante, ao longo da seqüência das anãs brancas, temos uma terceira faixa de instabilidade onde estão as estrelas DAVs, também chamadas de ZZ Ceti. São

estrelas mais frias que as DBVs, com temperaturas efetivas entre 12 500–11 500 K (Bergeron et al. 2004) com luminosidades menores que  $0.01 L_{\odot}$ . Apresentam períodos de pulsação entre de 70 a 1500 segundos.

### 1.13 O que causa as pulsações?

Em todo o sistema oscilante, existe uma força restauradora que atua sobre o sistema tentando trazê-lo de volta para a situação de equilíbrio, cuja intensidade é proporcional ao desvio em relação à condição de equilíbrio.

Numa estrela, a causa e o controle das pulsações envolve um jogo entre as variações locais de temperatura e opacidade. Quando um elemento de volume de gás da estrela é comprimido, normalmente, sua temperatura aumenta, enquanto sua opacidade diminui. Um aumento de temperatura implica um maior fluxo de radiação para fora enquanto que a redução na opacidade do gás faz com que sua capacidade de absorver radiação diminua. Como resultado, o gás perde energia. Esta perda de energia é compensada pela energia que é estocada no gás quando a vizinhança exerce um trabalho sobre ele durante o processo de compressão.

Por outro lado, quando o elemento de volume se expande, sua temperatura diminui enquanto sua opacidade aumenta. A diminuição da temperatura implica menor emissão de radiação e o aumento da opacidade torna mais eficiente a absorção de radiação. Como resultado, o gás ganha energia compensando a energia perdida ao realizar o processo de expansão.

Pela *primeira lei da termodinâmica*, a variação da energia interna do gás será o resultado do balanço entre o calor ganho ou perdido e a energia ganha ou perdida na forma de trabalho durante o processo de compressão ou expansão. Para que o sistema seja estável, o gás deve perder calor quando está sendo comprimido e ganhar calor quando está sendo expandido. Quando essa condição de equilíbrio é quebrada, o sistema torna-se instável, afastando-se da situação de equilíbrio e as perturbações microscópicas podem crescer, dando origem às oscilações observadas em estrelas pulsantes.

### 1.14 O Mecanismo $\kappa - \gamma$

Sob certas circunstâncias, a opacidade,  $\kappa$ , pode *aumentar* quando o volume de gás é comprimido fazendo com que o gás *ganhe* calor, ao invés de perder. Esse ganho de calor não contrabalança a energia líquida ganha pelo gás durante sua compressão. Durante a expansão ocorrerá o contrário: o gás perderá energia. Quando essas instabilidades locais ocorrem de forma sincronizada sobre parte substancial da estrela: quando um elemento de volume está se expandindo, ele comprime os volumes laterais e ao mesmo tempo absorve calor dos mesmos até um limite máximo. Neste ponto, o ciclo se inverte e ele começa a transferir calor para os elementos laterais enquanto é contraído com a expansão dos mesmos. Desta

forma, o fluxo de calor pode realizar um trabalho mecânico, e este trabalho é convertido nas pulsações que nós observamos.

Este mecanismo é chamado *mecanismo  $\kappa$*  e ele ocorre quando a derivada da opacidade satisfaz a condição

$$\frac{d}{dr} \left( \kappa_T + \frac{\kappa_\rho}{\Gamma_3 - 1} \right) > 0 \quad (1.34)$$

onde  $\kappa_T$  e  $\kappa_\rho$ , por definição, são as derivadas parciais

$$\kappa_T \equiv \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_\rho \quad (1.35)$$

$$\kappa_\rho \equiv \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho} \right)_T \quad (1.36)$$

e

$$\Gamma_3 - 1 \equiv \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S \quad (1.37)$$

onde  $S$  é a entropia específica,  $\kappa$  é a opacidade (em  $cm^2/g$ ),  $r$  é posição radial,  $\rho$  é densidade específica e  $T$  é a temperatura em Kelvins (Cox 1980).

Normalmente, a Eq.1.34 é satisfeita quando existe uma camada de gás parcialmente ionizado. Numa camada de gás parcialmente ionizado,  $\kappa_T$  aumenta quando  $r$  diminui, ou seja,  $\kappa_T$  é maior na base da camada, e vai diminuindo à medida que  $r$  se aproxima da borda mais externa e mais fria da camada de gás parcialmente ionizado. Isto permite que a parte mais interna da zona de ionização parcial gere as pulsações enquanto que as partes mais externas tendem a amortecer as mesmas.

O fator  $\Gamma_3 - 1$ , chamado de *expoente adiabático*, é sempre positivo, mas seu valor mínimo ocorre quando o gás está parcialmente ionizado, tornando o mecanismo  $\kappa$  mais intenso. Essa intensificação do mecanismo  $\kappa$  é chamado de *mecanismo  $\gamma$* .

Quando um gás é comprimido sua ionização aumenta, porque parte da energia transferida para o gás durante o processo de contração é convertida em energia de ionização, o que facilita a contração, aumentando ainda mais a instabilidade. Durante o processo de expansão, essa energia é liberada, o que também aumenta a instabilidade. Dessa forma, o mecanismo  $\gamma$  contribui com o mecanismo  $\kappa$  e os dois juntos fazem parte do chamado *mecanismo  $\kappa - \gamma$* .

O mecanismo  $\kappa - \gamma$  é o responsável pelas pulsações nas Cefeidas e estrelas RR Lyrae. Nessas estrelas, a zona de ionização parcial é formada por uma mistura proporcional de HeI e HeII e, ao que parece, o mesmo ocorre com as DBVs.

Nas DAVs, a zona de ionização parcial é formada por H, existindo uma zona de ionização parcial do He mais interna. Goldreich & Wu (1998) mostraram que as pulsações observadas nas DAVs podem ser produzidas por um outro mecanismo envolvendo a zona de convecção, que tem como base a zona de ionização parcial. Talvez esta teoria também se aplique às



DBVs, mas certamente não se aplica às DOVs e PNNVs, pois estas estrelas, em geral, não possuem zona de convecção superficial.

O mecanismo causador das pulsações em DOVs e PNNVs ainda não é bem entendido. Acredita-se que a zona de ionização parcial, onde as pulsações das DOVs e PNNVs tem sua origem, seja formada por uma mistura de C e O parcialmente ionizados (Starrfield *et al.* 1983). Um problema que os modelos teóricos para DOVs e PNNs enfrentam, é o que se chama de *envenenamento por He*, pois quando se acrescenta uma quantidade mínima de He à zona de ionização parcial de C e O, o modelo simplesmente pára de pulsar. Entretanto, estrelas DOVs apresentam linhas de He em seu espectro.

Saio (1996) e Gautschy (1997) propuseram que o mecanismo que gera as pulsações em pré-anãs brancas envolveria apenas o mecanismo  $\kappa$ , sem a necessidade de uma zona de ionização parcial. Cox (2003) propõe que o mecanismo  $\kappa$  devido ao Fe seja suficiente para contrabalançar o envenenamento por He.

## 1.15 Objetivos deste Trabalho

Que tipo de mecanismo ou mecanismos geram as pulsações em pré-anãs brancas, não se sabe ao certo, mas podemos testar os modelos propostos confrontando suas implicações e previsões com medidas observacionais.

As dificuldades na compreensão dos mecanismos de pulsação, da estrutura interna e da evolução de estrelas pré-anãs brancas pulsantes — principalmente das DOVs — em grande parte se deve ao fato de que o número de objetos deste tipo conhecidos é bastante reduzido quando comparado com o número de DAVs ou mesmo de DBs.

Até o início de 2004 eram conhecidas apenas cinco DOVs, enquanto que o número de DAVs é em torno de 70 (Bergeron *et al.* 2004, Mukadam *et al.* 2003). Em 2004 foi publicado o primeiro catálogo (Data Release 1) de anãs brancas e pré-anãs brancas com base no SDSS (Sloan Digital Sky Survey), com 2551 estrelas catalogadas. Destas, 1888 (91%) são DAs, 171 (8%) são DBs e 13 (0.6%) são DOs (Kleinmann 2004). Como as pré-anãs brancas estão evoluindo rapidamente, sua passagem pela faixa de instabilidade tem uma duração muito curta, da ordem de alguns milhões de anos. Enquanto novas DOVs não são descobertas e estudadas, devemos extrair o máximo de informações das estrelas conhecidas.

Nosso trabalho se concentra no estudo da estrela PG 1159-035, o protótipo da classe DOV. Essa estrela vem sendo observada há mais de vinte anos. Nossos objetivos são: (1) fazer medidas de parâmetros físicos relacionados com as pulsações; (2) usar essas medidas para obter informações sobre a estrela e (3) confrontá-las com os modelos de pulsação e, principalmente, os modelos de evolução estelar.

Os modelos de evolução estelar prevêem que quando a estrela evolui, seus períodos de pulsação mudam em resposta às mudanças em sua estrutura interna. As variações temporais dos diversos períodos de pulsação da estrela dependem fortemente de sua estrutura interna e dos mecanismos físicos envolvidos nas pulsações e são indicadores de quão realistas os modelos evolutivos são.

Também temos como objetivo estender o estudo das variações dos períodos de pulsação à uma outra estrela no extremo oposto da seqüência das anãs brancas: a DAV G117-B15A.

## 1.16 Estrutura desta Tese

Uma descrição mais detalhada da PG 1159-035 é apresentada no Cap.2 e as informações pertinentes sobre as observações e dados fotométricos utilizados neste trabalho são apresentadas no Cap.3.

Para identificar com precisão os modos de pulsação da estrela, se fez necessário reavaliar todo o procedimento de redução de dados fotométricos e desenvolver técnicas para melhorar a qualidade do processo de redução de dados e tratamento de dados já reduzidos, sem as quais, boa parte deste trabalho não teria sido possível. Uma discussão minuciosa sobre o assunto é feita no Cap.4.

O Cap.5 discute os modos-g de pulsação e apresenta conceitos e definições que serão usadas nos capítulos seguintes.

O Cap.6 trata da identificação dos modos de pulsação da estrela PG 1159-035. Com base nos modos identificados, foi feito um estudo asterosismológico da PG 1159-035, comparando os resultados obtidos com modelos de pulsação. Este estudo é apresentado no Cap.7.

O Cap.8 discute à medida da variação dos períodos de pulsação da PG 1159-035 e confronta os valores medidos com os valores previstos pelos modelos evolutivos de DOVs.

Aplicamos as técnicas usadas no tratamento dos dados da PG 1159-035 para estudar as variações dos períodos de pulsação de uma outra estrela pulsante, a anã branca DAV G117-B15A. Essa estrela vem sendo estudada há cerca de 30 anos e várias medidas da variação de seu principal período de pulsação de 215 s foram feitas, mas, pela primeira vez, conseguimos determinar a taxa de variação de seu dois outros períodos de maior amplitude. Este estudo é apresentado no Cap.9.

Por fim, um resumo e uma discussão dos resultados é apresentada no Cap.10.

\* \* \* \* \*

## Capítulo 2

# A ESTRELA PG 1159-035

### 2.1 Introdução

A estrela PG 1159-035 — principal objeto de estudo deste trabalho — foi identificada em 1977 por Richard F. Green numa busca por objetos com excesso de ultravioleta. Esse levantamento serviu de base para o “*Palomar-Green Catalog of Ultraviolet-Excess Stellar Objects*” (Green *et al.* 1986), conhecido como *PG Survey*, o qual contém 1874 objetos observados com o telescópio *Schmidt* de 46 cm do Monte Palomar. Todos os objetos deste catálogo possuem magnitudes mais brilhantes que 16.67. O *PG Survey* apresenta as seguintes informações para a PG 1159-035:

- Coordenadas (equinócio de 1950):

$$\begin{aligned} R.A. &= 11^h 59^m 12^s .3 \\ \delta &= -03^\circ 28' 57'' \end{aligned}$$

- Índices espectro-fotométricos:

$$\begin{aligned} v &= 14.84 \\ u - v &= -0.78 \\ g - v &= -0.25 \\ g - r &= -0.71 \end{aligned}$$

As bandas  $v$ ,  $u - v$ ,  $g - v$  e  $g - r$  são bandas “monocromáticas” definidas por (Greenstein 1976), centradas em  $u = 2.80\mu m$ ,  $g = 2.12\mu m$ ,  $v = 1.85\mu m$  e  $r = 1.44\mu m$ . Todos os índices foram calibrados de acordo com o sistema “ $AB_{79}$ ” (Oke & Gunn 1983).

- Índices fotométricos<sup>1</sup> (sistema Strömrgren):

$$\begin{aligned} y &= 14.87 \\ b - y &= -0.37 \\ u - b &= -0.47 \end{aligned}$$

O nome “PG 1159-035” segue a proposta do autor de designar os objetos do *PG survey* por *PG hhmm ± ddd*, onde *hhmm* é representada a ascensão reta do objeto e  $\pm ddd$  sua

---

<sup>1</sup> Para maiores informações sobre os índices fotométricos e espectro-fotométricos, ver Wegner (1983), Liebert & Stockman (1980) e Wesemael, Green & Liebert (1985).

declinação convertida para graus, multiplicada por dez e arredondada para o inteiro mais próximo. Desse modo,  $R.A. = 15^h59^m12.^s3$  fica 1159 e  $\delta = -03^{\circ}28'55''$  fica  $-035$ .

## 2.2 Variabilidade

A variabilidade da estrela PG 1159-035 foi descoberta por McGraw *et al.* (1979). Eles verificaram que a PG 1159-035 era multi-periódica, com pelo menos dois períodos de pulsação: um de  $\sim 540s$  e outro de  $\sim 460s$  simultaneamente presentes na curva de luz da estrela. Mais tarde seriam identificadas outras estrelas com características espectrais muito parecidas com as da PG 1159-035, definindo a classe espectral das PG 1159, sejam elas pulsantes ou não.

A presença de linhas de absorção de He II em seu espectro indicava uma temperatura superficial muito alta, o que localizava a estrela no extremo superior esquerdo do diagrama H-R. Isso levou McGraw *et al.* (1979) a sugerir que a PG 1159-035 estaria evoluindo rapidamente, fazendo com que os períodos de pulsação mudassem em resposta a mudanças na estrutura interna da estrela e, caso as pulsações fossem periódicas, as variações nos períodos de pulsação seriam mensuráveis em poucos anos.

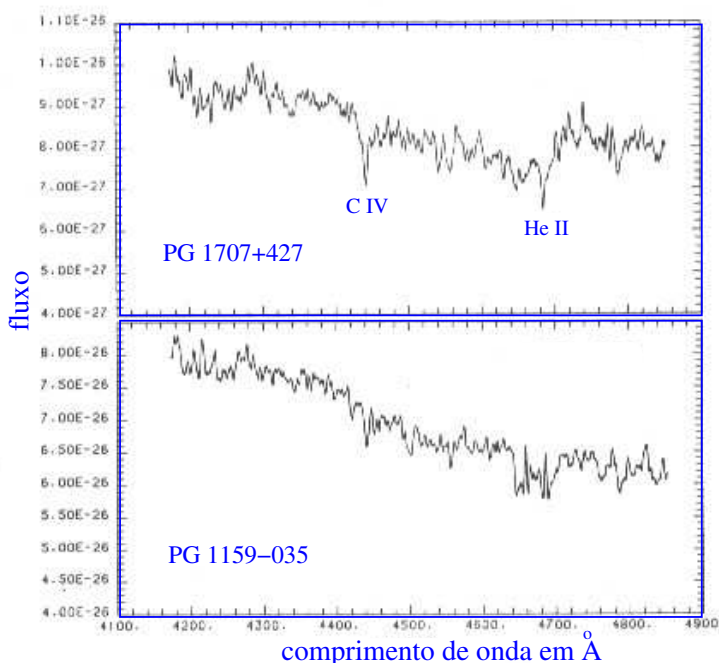
Werner *et al.* (1982) analisaram a distribuição do fluxo ultravioleta longínquo — de  $\sim 1200 \text{ \AA}$  até o limite de Lyman de  $912 \text{ \AA}$  — obtida com o espectro-fotômetro de ultravioleta da *Voyager 2* e concluíram que a temperatura efetiva da PG 1159-035 é superior a  $100\,000 \text{ K}$ . Nessa temperatura, a estrela ainda não atingiu o estágio de anã branca e é classificada como uma pré-anã branca. Análises posteriores com o *IUE* e *HST* demonstraram que a PG 1159-035 é efetivamente uma das estrelas com a maior temperatura efetiva já medida (Werner 1995).

## 2.3 Estrelas Similares à PG 1159-035

A PG 1159-035 permaneceu como um objeto único até que Grauer & Bond (1984) demonstraram que a estrela central da nebulosa planetária *Kohoutek 1-16*, a PG 0122+200 (Bond *et al.* 1987, Vauclair *et al.* 1995, O'Brien 1996, O'Brien 1998), era uma variável pulsante com características espectrais e fotométricas similares às da PG 1159-035. Logo em seguida, Bond *et al.* (1984) anunciaram a descoberta de mais duas estrelas, também com características similares às da PG 1159-035: a PG 1707+427 (Fontaine *et al.* 1991, Grauer 1992, Werner 1994) e a PG 2131+066 (Kawaler 1995). Isso definia uma nova região de instabilidade no diagrama H-R.

A mais pronunciada característica espectral óptica observada nessas estrelas (Fig. 2.1 e Fig. 2.2) é a intensa linha de absorção de He II  $\lambda 4686 \text{ \AA}$ , C IV  $\lambda 4658 \text{ \AA}$  e, possivelmente, outras contribuições de C e N, como mencionadas por Wesemael *et al.* (1985). Essa similaridade levou os astrônomos a agrupá-las em uma classe que tem a PG 1159-035 como protótipo e, por isso, são chamadas de estrelas PG 1159 ou DOs. Atualmente, essa classe conta com cerca de 16 estrelas (Dreizler 1999) das quais apenas cinco são conhecidamente

pulsantes. Além das quatro mencionadas acima, a HS 2324+3944 (ou 2324+397), também apresenta um comportamento pulsante (Silvotti 1996, Dreizler *et al.* 1996, Handler *et al.* 1997). A Tab.2.3 lista as estrelas PG 1159 pulsantes (DOV) com suas respectivas temperaturas efetivas, magnitudes  $V$  e  $B$  e amplitudes aproximadas dos modos de pulsação. As temperaturas efetivas foram tomadas de Dreizler (1995).

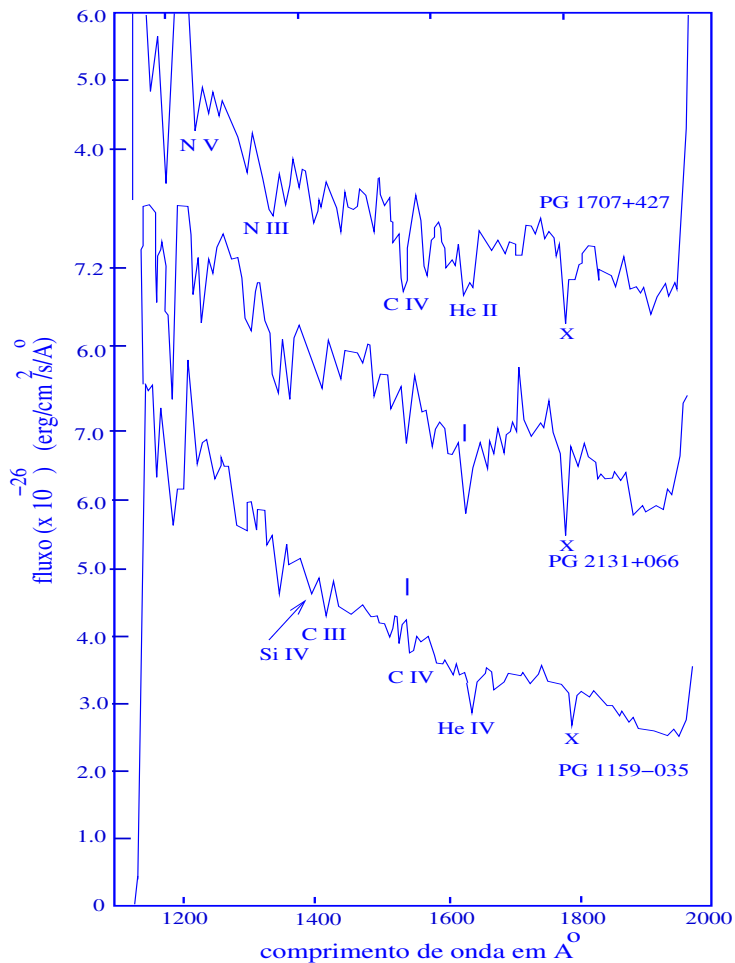


**Fig. 2.1:** Espectros das DOVs PG 1707+427 e PG 1159-035. As linhas de absorção mais fortes são devido ao C IV e He II. Fluxo em  $\text{erg}/\text{cm}^2/\text{s}/\text{Å}$  (Bond *et al.* 1984).

**Tab. 2.1:** Estrelas PG 1159 pulsantes (DOV).

Estrela	$T_{eff}$ $\times 10^3 K$	$V$ (mag)	$B$ (mag)	Amp. (ma)	Períodos (s)
PG 0122+200	80	-	16.13	0.10	400 - 600 complexo
PG 1159-035	140	14.84	14.21	0.10	300 - 1000 complexo
PG 1707+427	85	16.69	16.08	0.10	~ 450 complexo
PG 2131+066	95	16.63	16.24	0.10	400 - 600 complexo
HS 2324+3944	130	14.80	-	0.02	2100 s ?

A Tab.2.3 lista as 10 estrelas da classe PG 1159 para as quais não há evidência de variabilidade, o que não significa que essas estrelas não apresentem modos de pulsação com amplitudes abaixo do limite de detecção mostrado na última coluna da tabela. As estrelas cuja variabilidade não foi estudada, estão indicadas por NS. Uma lista de referências sobre as estrelas PG 1159-035 não-pulsantes da Tab.2.3 pode ser encontrada em Bradley (1999).



**Fig. 2.2:** Espectros IUE de três estrelas DOVs. O símbolo “X” indica que a linha não é uma linha de absorção real (Bond et al. 1984). O fluxo está em  $\text{erg/cm}^2/\text{s}/\text{Å}$ .

A descoberta de que a estrela *RXJ 2117* (Moskalik & Vauclair 1995, Vauclair et al. 2002) possui características que a colocam num ponto intermediário entre as DOs e as PNNVs sugere a fusão das duas classes em uma única classe: a classe das estrelas DOs. A “antiga” classe das PNNVs conta com cerca de 10 objetos, listados na Tab.2.3 (ver Bradley 1999 para referências sobre cada PNNV).

**Tab. 2.2:** *Estrelas PG 1159-035 não-pulsantes.*

Estrelas	$T_{eff}$ $\times 10^3 K$	$V$ (mag)	$B$ (mag)	Amp. (ma)
RXJ 0122.9-7521	180	15.45	12.12	< 0.01
MCT 0130-1937	90	15.84	15.55	< 0.002
HS 0444+0453	100	-	15.90	NS
VV 47	75	-	16.80	NS
PG 1144+005	130	16.83	16.53	< 0.004
PG 1151-029	150	15.10	14.72	NS
PG 1424+535	110	-	16.07	< 0.005
H 1504+65	170	16.20	15.86	< 0.004
HS 1517+7403	110	-	15.90	NS
PG 1520+525	150	15.52	15.56	< 0.003

**Tab. 2.3:** *Núcleos Pulsantes de Nebulosas Planetárias (PNNVs).*

Estrela	$T_{eff}$ $\times 10^3 K$	$V$ (mag)	$B$ (mag)	Amp. (ma)	Períodos (s)
NGC 2646	150	11.96	-	$\sim 0.002$	$\sim 1500$
NGC 1501	ND	14.40	-	$\sim 0.15$	$\sim 1500$ complexo
NGC 2371-2	ND	14.85	-	$\sim 0.01$	$\sim 1000$ complexo
NGC 2867	ND	-	16.60	$\sim 0.02$	$\sim 770$ complexo
Lo-4	120	16.60	16.45	$\sim 0.06$	1800 – 2000 complexo
NGC 5189	ND	-	14.90	$\sim 0.003$	$\sim 690$ complexo
Sanduleak 3	130	-	13.00	$> 0.01$	$\sim 1000$ complexo
K1-16	140	15.08	14.66	$\sim 0.05$	1500 – 1700 complexo
NGC 6905	ND	15.70	-	$\sim 0.01$	710, 875 e outros
RXJ 2117+3412	170	13.16	-	$\sim 0.05$	$\sim 800$ complexo

\* \* \* \* \*

## Capítulo 3

# DADOS FOTOMÉTRICOS

### 3.1 Introdução

A curva de luz de uma estrela descreve a variação de seu brilho durante o intervalo de tempo em que esteve sendo observada. A técnica usada para isto é a fotometria, a contagem dos fótons da luz da estrela.

Em fotometria de estrelas pulsantes, o *tempo de integração* deve ser suficientemente pequeno para que se tenham várias medidas da intensidade de sua luz ao longo de cada ciclo de pulsação. O efeito da pulsação sobre o brilho da estrela é normalmente descrito por uma função sinusoidal, a qual possui três parâmetros — amplitude, frequência e fase — e são necessários pelo menos três medidas em um ciclo, para que a função possa ser ajustada.

Como os períodos de pulsação de anãs brancas e PWD pulsantes estão entre 70 e 1500 segundos, o tempo de integração deve ser menor do que  $\sim 35$  segundos (1/2 do menor período). Isto garante que, mesmo para os períodos mais curtos de 70 segundos, teremos pelo menos dois pontos por ciclo. Em geral, usa-se um tempo de integração entre 5 e 10 segundos (fotometria rápida) o que garante que, para um período de, digamos, 500 s, teremos entre 50 e 100 pontos por ciclo.

### 3.2 Fotômetros

Ao longo de uma noite de observação, o brilho do céu e a transparência da atmosfera sofrem variações, afetando bastante as medidas da intensidade do brilho da estrela. Para contornar este problema, Nather (1973) introduziu o uso do *fotômetro de dois canais*: um canal faz a fotometria da *estrela alvo*, enquanto o outro faz (simultaneamente) a fotometria de uma *estrela de comparação*, não-variável, bem próxima da estrela alvo. Se as variações observadas na curva de luz da estrela alvo aparecerem também na curva de luz da estrela de comparação, deduz-se que são decorrentes de efeitos atmosféricos locais.

No fotômetro de dois canais, de tempos em tempos, a observação das estrelas é interrompida para uma rápida medida do brilho do céu. Em seguida, a fotometria das estrelas é retomada. O brilho do céu entre duas medidas sucessivas pode ser calculado por interpolação.



Um problema que a fotometria de dois canais enfrenta é que o brilho do céu varia em escalas de tempo comparáveis com os períodos de pulsação das anãs brancas e valores calculados por interpolação, freqüentemente, não descrevem bem essas variações. As anãs brancas são estrelas bastante fracas com pequenas amplitudes de pulsação e os erros na determinação do brilho do céu podem afetar significativamente a precisão na medida das amplitudes de pulsação.

Este problema levou à idealização do *fotômetro de três canais*, onde um terceiro canal é usado exclusivamente para se fazer a fotometria contínua do brilho do céu (Nather *et al.* 1990 e Kleinmann *et al.* 1995).

Antes da introdução da fotometria de dois e três canais, todo este processo tinha que ser realizado com a utilização de um único canal, que se alternava entre a observação da estrela alvo, da estrela de comparação e do céu. Uma certa fração de tempo era perdida para deslocar o telescópio de uma estrela para outra. Como consequência, o tempo efetivo de fotometria da estrela alvo era bastante reduzido. Uma pequena parte dos dados fotométricos mais antigos da PG 1159-035 e de outras estrelas foram obtidos com fotometria de um canal.

Nos últimos anos, a *fotometria por CCD* tem sido cada vez mais utilizada. Esta técnica dispensa o uso de canais adicionais, pois, através dela, pode-se fazer a fotometria de todos os objetos dentro do campo do CCD, além de medidas mais precisas do brilho do céu nas proximidades de cada objeto. Apenas em algumas das observações mais recentes, a fotometria da PG 1159-035 foi feita com CCD.

### 3.3 Filtros

Nenhum *filtro* foi utilizado na maior parte das observações. O uso de filtro seria necessário se a fase de cada pulsação dependesse do comprimento de onda, sendo diferente para cada cor, no espectro visível. Como essa dependência não existe (Robinson *et al.* 1982; Kepler 1984), o uso de filtro é desnecessário e, às vezes, desaconselhável devido à baixa luminosidade das estrelas. Entretanto, a *amplitude* de pulsação depende do comprimento de onda. Neste caso, a fotometria sem filtro ou mesmo o uso de dados fotométricos obtidos com filtros diferentes pode aumentar a incerteza na determinação da amplitude de pulsação, reduzindo a qualidade dos ajustes, como será discutido no Cap.4.

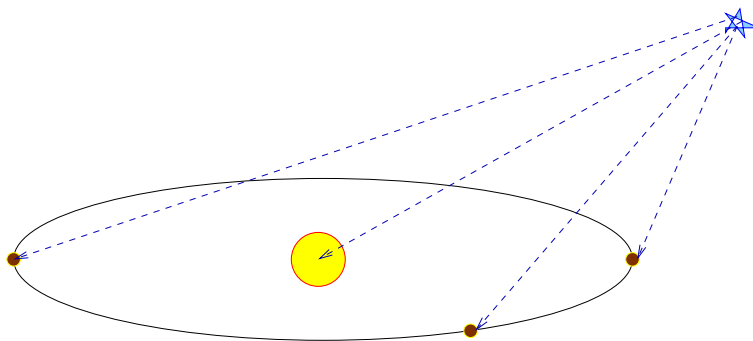
### 3.4 Tempo de Observação

A extensão (duração ou tempo de observação) da curva de luz é o fator que determina a resolução do periodograma, enquanto que a qualidade do periodograma é determinada principalmente pela continuidade da curva de luz. Para se ter a resolução necessária para resolver as freqüências de pulsação no periodograma de uma DOV, as observações devem cobrir vários dias. Para uma resolução de  $\sim 1\mu Hz$ , necessária para separar as componentes da PG 1159-035, por exemplo, a campanha deve durar 10 dias ou mais.

Para reduzir as *descontinuidades*, a estrela é observada por vários telescópios posicionados em pontos diferentes da Terra. Quando a estrela sai do campo de visão de um telescópio, já está sendo observada por outro. Com isso, se consegue uma *cobertura efetiva* de 65 ou 70% para 12 a 16 dias de observação, com uma taxa de sobreposição de curvas de luz entre 10 e 20%. A coordenação de todo o processo é feita pelo *Whole Earth Telescope* (WET) (Nather 1990).

### 3.5 Base de Tempo

O instante em que um sinal vindo da estrela é detectado depende da posição da Terra em sua órbita em torno do Sol. De acordo com a posição angular da estrela, essa diferença pode chegar até 16 minutos (Fig.3.2).



**Fig. 3.1:** O instante em que o sinal de uma estrela chega à Terra depende da posição orbital da Terra.

A escala de tempo usada no estudo de estrelas variáveis deve ser independente da posição orbital da Terra. Poderíamos usar como escala de tempo o instante em que o sinal da estrela atinge o centro (geométrico) do Sol, conhecido como “*Heliocentric Ephemeris Time*” ou “*Heliocentric Julian Ephemeris Date*” (HJED) quando convertido para dias julianos, mas o Sol possui um *movimento reflexo* devido, principalmente, à sua interação com Júpiter, que faz com que seu centro se desloque em relação ao centro de massa do sistema solar. Isto faria com que a escala de tempo fosse dependente da posição do centro do Sol em relação ao centro de massa do sistema solar. Essa diferença pode introduzir uma variação de até 3 segundos na medida do tempo.

Por essa razão, a escala de tempo usada no estudo de objetos variáveis é baseada no instante em que o sinal da estrela atinge o centro de massa do sistema solar e não no instante em que atinge a Terra ou mesmo o centro do Sol. Esta escala de tempo é atualmente denominada BCT (Barycentric Coordinate Time) (Standish 1998). Até poucos anos atrás, era chamada de BJD (Barycentric Julian Date) e antes de BJED (Barycentric Julian Ephemeris Dynamical Date).

Para se chegar ao BCT, é preciso primeiro corrigir o tempo de UTC (Coordinated Universal Time), descontando os *load seconds*. A conversão de UTC corrigido para BCT é

feita através de subrotinas das bibliotecas SOFA (IAU Standards of Fundamental Astronomy), disponibilizadas a partir de 31 de março de 2001 pelo IAU. Essas subrotinas são implementações de algoritmos anteriormente desenvolvidos por Stumpff (1977, 1979 e 1980).

### 3.6 WET - Whole Earth Telescope

O WET é uma rede internacional interativa, criada em 1986 por R. E. Nather, astrônomo da Universidade do Texas. O WET conta com a participação de vários observatórios localizados em diversos pontos do planeta, com a finalidade de minimizar o problema das *interrupções diurnas*, permitindo a observação quase-contínua de uma mesma estrela durante vários dias consecutivos. Quando a estrela está saindo do campo de visão de um telescópio, um outro telescópio, mais a oeste, já a está observando.

**Tab. 3.1:** *Observatórios participantes do WET.*

<i>N</i> <sup>o</sup>	Observatório	Localização	Long. W.	Latitude	Altura (m)	Telesc.
1	Mauna Kea Observatories	Hilo/Mauna Kea,Havai,EUA	-10 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup>	+19 <sup>o</sup> 49.6''	4215	0.6m
2	CFHT <sup>2</sup>	Mauna Kea,Havai,EUA	-10 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup>	+19 <sup>o</sup> 49.6''	4215	3.6m
3	KPNO <sup>3</sup>	Tucson/Kitt Peak,Arizona,EUA	-7 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup>	+31 <sup>o</sup> 57.8''	2120	2.1, 0.9m
4	Mc Donald	Fort Davis/Mt.Locke,Texas,EUA	-6 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup>	+30 <sup>o</sup> 40.3''	2075	0.9, 2.1m
5	CTIO <sup>5</sup>	La Serena,Chile	-4 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	-29 <sup>o</sup> 15.4''	2347	1.5m
6	ESO <sup>6</sup>	La Serena,Chile	-4 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	-30 <sup>o</sup> 09.9''	2215	1.5m
7	OPD/LNA <sup>7</sup>	Itajubá,MG,Brasil	-3 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup>	-22 <sup>o</sup> 32.1''	1870	1.6m
8	Roque de los Muchachos	La Palma Island/I.Canárias	-1 <sup>h</sup> 11 <sup>m</sup>	+28 <sup>o</sup> 45.6''	2326	3.5m
9	Calar Alto Obs.	Gérgal/Calo Alto,Espanha	-0 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup>	+37 <sup>o</sup> 13.8''	2168	1.2, 2.2, 3.5m
10	Obs. de Haute-Provence	Forcalquier/St.Michel,França	+0 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup>	+43 <sup>o</sup> 55.9''	665	1.9m
11	Mt. Suhora Observatory	Cracow,Polónia	+1 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup>	+50 <sup>o</sup> 03.9''	225	0.5m
12	SAAO <sup>12</sup>	Sutherland,Africa do Sul	+1 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup>	-32 <sup>o</sup> 22.7''	1771	0.8m
13	Wise, Florence and George	Mitzpe Ramon/Mt.Zin,Israel	+2 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup>	+30 <sup>o</sup> 35.8''	874	1.0m
14	Maidanak Observatory	Uzbekistão	+4 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup>	+38 <sup>o</sup> 41.3''	2540	1.0m
15	Vainu Bappu Obs.	Kavalur,Índia	+5 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>	+12 <sup>o</sup> 34.6''	725	1.0m
16	Perth Obs.	Bickley,Austrália	+7 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	-32 <sup>o</sup> 00.5''	391	0.6m
17	Anglo-Australian Obs.	Coonabarabran/Siding Sprint,Austrália	+9 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup>	-31 <sup>o</sup> 16.4''	1149	1.0m
18	Beijing Normal Univ. Obs.	Beijing/China	+7 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	+39 <sup>o</sup> 57.4''	70	2.2m
19	MJUO <sup>18</sup>	Lake Tekapo/Nova Zelândia	+11 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup>	-43 <sup>o</sup> 59.2''	1027	1.0m

- 2 Canada-France-Hawaii Telescope.
- 3 Kitt Peak National Observatory.
- 5 Cerro Tololo Inter-American Observatory.
- 6 European Southern Observatory.
- 7 Laboratório Nacional de Astrofísica.
- 12 South African Astrophysical Observatory.
- 19 Mount John University Observatory.

A Tab.3.1 lista os observatórios participantes do WET, sua localização, longitude, latitude e diâmetro do telescópio. Os observatórios participantes variam de campanha para campanha dependendo da declinação da estrela-alvo. No caso da PG 1159-035, por exemplo, sua baixa declinação permite que observatórios em ambos os hemisférios participem das observações.

### 3.7 Dados Fotométricos da PG 1159-035

A estrela PG 1159-035 vem sendo observada desde 1979 quando foi identificada como estrela pulsante. Observações feitas em 1980 e 1981 confirmaram a continuidade de seu comportamento pulsante. Em 1983 a estrela foi observada várias vezes durante 3 meses, revelando a

presença de pelo menos seis períodos de pulsação. Novas campanhas foram realizadas em 1984, 1985 e 1986 (Winget *et al.* 1985). Com a formação do WET em 1988, campanhas de observação quase-contínuas foram feitas em 1989, 1993, 2000 e 2002, sendo que em 2000 e 2002 a PG 1159-035 foi observada como alvo secundário.

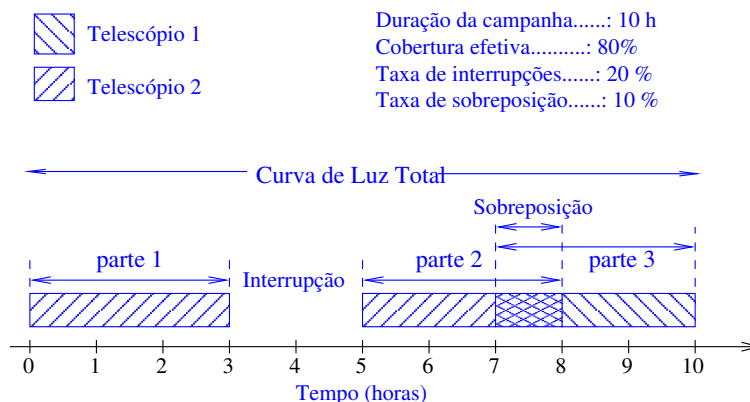
A Tab.3.2 apresenta algumas informações sobre as campanhas observacionais da PG 1159-035, para os anos listados na primeira coluna. Na segunda coluna aparece o *número de pontos* (medidas) nas curvas de luz já reduzidas. A *duração da campanha* é o intervalo de tempo em horas (h) ou dias (d) entre a primeira e a última medida fotométrica da estrela naquele ano. As campanhas do WET, realizadas após 1988, tiveram uma durações entre 10 e 15 dias. O número total de *horas de fotometria* (que puderam ser aproveitadas) é mostrado na quarta coluna. Ao longo de uma campanha, a fotometria é interrompida várias vezes. Cada seqüência de medidas fotométricas é salva em um arquivo e é uma *parte* (pedaço) da curva de luz daquele ano. O *número de partes* da curva de luz de cada ano é mostrado na quinta coluna.

A *cobertura efetiva* é a fração (em %) de tempo da campanha durante a qual foram feitas as medidas fotométricas da estrela. A cobertura efetiva é uma medida do aproveitamento da campanha, enquanto que a *taxa de interrupções* é uma medida das lacunas na curva de luz total da campanha. Por exemplo, numa campanha de 10 dias, 48 horas de fotometria correspondem a uma cobertura efetiva de 20% e a uma taxa de interrupções de 80%. As colunas 6 e 7 da Tab.3.2 mostram a cobertura efetiva e a taxa de interrupções de cada campanha. Pode ocorrer que dois telescópios façam simultaneamente a fotometria da estrela. Neste caso, teremos uma sobreposição de medidas fotométricas na curva de luz total da estrela. Chamamos de *taxa de sobreposição* a fração (em %) do número total de horas de fotometria durante as quais houve sobreposição de medidas na curva de luz. A taxa de sobreposição de cada campanha é mostrada na oitava coluna da Tab.3.2. A Fig.?? ilustra as definições apresentadas neste parágrafo. Na última coluna da tabela temos a *resolução espectral* aproximada que será discutida no Cap.4.

Ano	Número de pontos	Duração da campanha	Horas de fotometria	Número de partes	Cobertura efetiva	Taxa de interrupções	Taxa de sobreposições	Resolução espectral
1979	523	2.9 h	2.9 h	1	100.0%	—	—	95.0 $\mu$ Hz
1980	1 294	5.1 d	7.2 h	4	5.9%	94.1%	—	2.3 $\mu$ Hz
1983	11 758	96.0 d	64.5 h	17	2.8%	97.2%	—	0.2 $\mu$ Hz
1984	2 658	1.3 d	14.8 h	2	47.4%	52.6%	—	5.0 $\mu$ Hz
1985	4 380	64.6 d	48.1 h	19	3.0%	97.0%	0.1%	0.2 $\mu$ Hz
1989	82 471	12.1 d	228.8 h	61	65.4%	34.6%	13.4%	1.0 $\mu$ Hz
1993	248 162	16.9 d	345.2 h	89	64.3%	35.7%	20.8%	0.7 $\mu$ Hz
2000	14 794	10.3 d	24.5 h	13	9.2%	90.8%	0.7%	1.1 $\mu$ Hz
2002	33 770	14.8 d	116.5 h	50	27.7%	72.3%	5.1%	0.8 $\mu$ Hz

Tab. 3.2: Campanhas observacionais da PG 1159-035.

A maior parte das observações até 1988 foi feita no McDonald Observatory, usando fotometria de dois canais com foto-multiplicadoras bi-alcálicas (sensíveis no azul) RCA 8850, nos telescópios de 2.7m, 2.1m e 0.9m (Nather 1973). Outras foram feitas no South African Astronomical Observatory (SAAO), com um fotômetro de um canal, no telescópio



**Fig. 3.2:** Na figura acima, as faixas representam a cobertura durante uma campanha com duração de 10 horas feita por dois telescópios. A curva de luz obtida será dividida em 3 partes. Há uma interrupção de 2 horas e uma sobreposição de 1 hora nos dados dos dois telescópios (parte 2/parte 3).

de 0.75 m . Nas observações do SAAO foi utilizada uma foto-multiplicadora com foto-cátodo S-20. Em nenhuma das observações foram usados filtros, com exceção de duas observações realizadas com o telescópio de 2.1 m do McDonald Observatory em 1983, que usaram um filtro Johnson B com uma foto-multiplicadora RCA C31034A, sensível no vermelho (Winget *et al.* 1985).

Nas observações de 1985, além do McDonald Observatory e do SAAO, participaram o Kitt Peak National Observatory, com um fotômetro de um canal e o telescópio de 1.6 m do OPD/LNA com um fotômetro de dois canais. Nesta campanha, usou-se um tempo de integração de 20 segundos (Winget *et al.* 1985).

Em 1989 todos os telescópios que participaram da campanha usaram fotômetros de dois canais com exceção do observatório Australiano e do telescópio de 1.9 m de Haute Provence que usaram fotômetros de três canais (modelos “Montreal” e “Chevreton”, respectivamente). Entretanto, o segundo canal do observatório de Sutherland não estava operacional. Pela primeira vez, todos utilizaram um tempo de integração de 10 segundos (Winget *et al.* 1991). Na campanha de 1993, o tempo de integração foi reduzido para 5 segundos, pois nessa época se descobriu que a presença de multi-periodicidades tornava o ruído não-aditivo (Costa 1996).

Tab. 3.3: Dados Fotométricos da PG 1195-035 obtidos em 1979.

Parte #	Data	$T_{incio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	24-Dez-1979	4232.87726	4232.99809	20.0	523	2.90

Tab. 3.4: Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1980.

Parte #	Data	$T_{incio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	19-Fev-1980	4289.78045	4290.01124	20.0	998	5.54

Parte #	Data	$T_{incio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	11-Jan-1983	5346.87113	5347.02183	20.0	652	3.62
2	13-Jan-1983	5348.86911	5348.92467	20.0	241	1.33
3	09-Mar-1983	5403.50362	5403.53418	20.0	133	0.73
4	10-Mar-1983	5404.36235	5404.57393	20.0	915	5.08
5	10-Mar-1983	5404.67926	5404.97046	20.0	1259	6.99
6	11-Mar-1983	5405.51238	5405.55381	20.0	180	0.99
7	13-Mar-1983	5407.95501	5407.98673	20.0	138	0.76
8	14-Mar-1983	5408.40062	5408.54322	20.0	617	3.42
9	16-Mar-1983	5410.63769	5410.99139	20.0	1529	8.49
10	17-Mar-1983	5411.68840	5411.98539	20.0	1284	7.13
11	18-Mar-1983	5412.83123	5412.91479	20.0	362	2.01
12	09-Abr-1983	5434.62539	5434.75224	20.0	549	3.04
13	14-Abr-1983	5439.64494	5439.89402	20.0	1077	5.98
14	15-Abr-1983	5440.62407	5440.71134	20.0	378	2.09
15	15-Abr-1983	5440.82476	5440.89166	20.0	290	1.61
16	16-Abr-1983	5441.63260	5441.87936	20.0	1067	5.92
17	17-Abr-1983	5442.62631	5442.87769	20.0	1087	6.03

Tab. 3.7: Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1985.

Parte #	Data	$T_{incio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	22-Mar-1985	6147.66137	6147.75165	40.0	196	2.17
2	23-Mar-1985	6148.62689	6148.89911	40.0	589	6.53
3	25-Mar-1985	6149.77593	6149.84213	40.0	144	1.59
4	15-Abr-1985	6171.64051	6171.72153	40.0	176	1.94
5	14-Mai-1985	6200.63833	6200.72120	40.0	180	1.99
6	18-Mai-1985	6204.25175	6204.27490	40.0	51	0.56
7	18-Mai-1985	6204.45436	6204.62292	40.0	365	4.05
8	19-Mai-1985	6205.25169	6205.44105	40.0	410	4.54
9	20-Mai-1985	6206.22159	6206.26279	40.0	90	0.99
10	20-Mai-1985	6206.65760	6206.78563	40.0	254	3.07
11	20-Mai-1985	6206.68563	6206.74720	40.0	134	1.48
12	21-Mai-1985	6206.79029	6206.81584	40.0	53	0.61
13	21-Mai-1985	6207.64662	6207.69894	40.0	114	1.26
14	21-Mai-1985	6207.67308	6207.78174	40.0	221	2.61
15	23-Mai-1985	6209.22139	6209.35611	40.0	292	3.23
16	23-Mai-1985	6209.36828	6209.41921	40.0	111	1.22
17	24-Mai-1985	6210.22471	6210.41684	40.0	416	4.61
18	25-Mai-1985	6211.20978	6211.41488	40.0	444	4.92
19	26-Mai-1985	6212.22363	6212.28798	40.0	140	1.54

Tab. 3.8: Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1989.

Parte #	Data	$T_{incio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	28-Fev-1989	7586.50815	7586.65294	10.0	1252	3.47
2	01-Mar-1989	7587.50865	7587.77022	10.0	2261	6.28
3	02-Mar-1989	7587.78458	7588.12590	10.0	2950	8.19
4	02-Mar-1989	7587.96399	7588.23968	10.0	2383	6.62
5	02-Mar-1989	7588.30655	7588.34174	10.0	305	0.84
6	02-Mar-1989	7588.35135	7588.36986	10.0	161	0.44
7	03-Mar-1989	7588.87270	7588.90881	10.0	313	0.87
8	03-Mar-1989	7588.92027	7588.95719	10.0	320	0.89
9	03-Mar-1989	7588.96263	7589.17432	10.0	1830	5.08
10	03-Mar-1989	7589.14782	7589.38243	10.0	2028	5.63
11	03-Mar-1989	7589.47631	7589.58788	10.0	965	2.68

12	03-Mar-1989	7589.60813	7589.61925	10.0	97	0.27
13	03-Mar-1989	7589.62399	7589.78117	10.0	1359	3.77
14	04-Mar-1989	7589.77852	7590.12574	10.0	3001	8.33
15	04-Mar-1989	7590.10202	7590.38373	10.0	2435	6.76
16	04-Mar-1989	7590.46835	7590.78675	10.0	2752	7.64
17	05-Mar-1989	7590.77496	7590.94429	10.0	1464	4.06
18	05-Mar-1989	7590.78793	7591.09962	10.0	2694	7.48
19	05-Mar-1989	7591.09129	7591.11802	10.0	232	0.64
20	05-Mar-1989	7591.11108	7591.23099	10.0	1037	2.88
21	05-Mar-1989	7591.12705	7591.38388	10.0	2220	6.16
22	05-Mar-1989	7591.62799	7591.68054	10.0	455	1.26
23	05-Mar-1989	7591.70890	7591.78332	10.0	644	1.79
24	05-Mar-1989	7591.72036	7591.93355	10.0	1843	5.12
25	06-Mar-1989	7591.78124	7591.92221	10.0	1219	3.38
26	06-Mar-1989	7591.92915	7591.95682	10.0	240	0.66
27	06-Mar-1989	7591.96573	7591.97996	10.0	124	0.34
28	06-Mar-1989	7591.99084	7592.00149	10.0	93	0.26
29	06-Mar-1989	7592.02901	7592.10042	10.0	618	1.71
30	06-Mar-1989	7592.09652	7592.24178	10.0	1256	3.49
31	06-Mar-1989	7592.24780	7592.38912	10.0	1222	3.39
32	06-Mar-1989	7592.37499	7592.48830	10.0	980	2.72
33	06-Mar-1989	7592.47292	7592.53647	10.0	550	1.53
34	06-Mar-1989	7592.55417	7592.73392	10.0	1554	4.31
35	07-Mar-1989	7592.77518	7592.99925	10.0	1937	5.38
36	07-Mar-1989	7593.00701	7593.10978	10.0	889	2.47
37	07-Mar-1989	7593.09516	7593.38394	10.0	2496	6.93
38	07-Mar-1989	7593.19622	7593.48256	10.0	2475	6.87
39	07-Mar-1989	7593.33441	7593.55894	10.0	1941	5.39
40	07-Mar-1989	7593.48753	7593.65779	10.0	1472	4.09
41	07-Mar-1989	7593.66450	7593.69182	10.0	237	0.66
42	08-Mar-1989	7593.77077	7594.07216	10.0	2605	7.23
43	08-Mar-1989	7594.08015	7594.13292	10.0	457	1.27
44	08-Mar-1989	7594.09102	7594.27019	10.0	1549	4.30
45	08-Mar-1989	7594.19182	7594.48893	10.0	2568	7.13
46	08-Mar-1989	7594.46186	7594.76291	10.0	2602	7.22
47	09-Mar-1989	7594.84150	7594.91928	10.0	673	1.87
48	09-Mar-1989	7594.95736	7595.13224	10.0	1512	4.20
49	09-Mar-1989	7595.18879	7595.38185	10.0	1669	4.63
50	10-Mar-1989	7595.78413	7596.12533	10.0	2949	8.19
51	10-Mar-1989	7595.91479	7595.99905	10.0	729	2.02
52	10-Mar-1989	7596.01190	7596.14847	10.0	1181	3.28
53	10-Mar-1989	7596.03945	7596.30958	10.0	2335	6.48
54	11-Mar-1989	7596.77433	7596.78961	10.0	133	0.37
55	11-Mar-1989	7596.80419	7597.10512	10.0	2601	7.22
56	11-Mar-1989	7597.30776	7597.52801	10.0	1904	5.29
57	11-Mar-1989	7597.54098	7597.58936	10.0	419	1.16
58	12-Mar-1989	7597.94169	7597.96195	10.0	176	0.49
59	12-Mar-1989	7597.96716	7598.02480	10.0	499	1.38
60	12-Mar-1989	7598.31623	7598.34898	10.0	284	0.79
61	12-Mar-1989	7598.45940	7598.61229	10.0	1322	3.67

Tab. 3.9: Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 1993.

Parte #	Data	$T_{inicio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	18-Mar-1993	9065.36939	9065.53299	5.0	2828	3.93
2	18-Mar-1993	9065.43461	9065.49260	5.0	1003	1.39
3	18-Mar-1993	9065.50996	9065.55753	5.0	823	1.14
4	18-Mar-1993	9065.53727	9065.60463	5.0	1165	1.62
5	18-Mar-1993	9065.56210	9065.58947	5.0	474	0.66
6	19-Mar-1993	9065.82107	9066.15238	5.0	5726	7.95
7	19-Mar-1993	9065.92142	9065.98050	5.0	1022	1.42
8	19-Mar-1993	9065.92616	9066.07495	5.0	2572	3.57
9	19-Mar-1993	9065.94370	9066.04474	5.0	1747	2.43

10	19-Mar-1993	9066.08241	9066.23120	5.0	2572	3.57
11	19-Mar-1993	9066.15961	9066.30180	5.0	2458	3.41
12	19-Mar-1993	9066.30252	9066.37607	5.0	1222	1.77
13	19-Mar-1993	9066.38643	9066.55460	5.0	2859	4.04
14	19-Mar-1993	9066.47003	9066.61656	5.0	2533	3.52
15	19-Mar-1993	9066.55871	9066.62069	5.0	1072	1.49
16	19-Mar-1993	9066.72964	9066.98149	5.0	4353	6.04
17	20-Mar-1993	9066.92235	9067.21303	5.0	5024	6.98
18	20-Mar-1993	9066.94110	9067.02038	5.0	1371	1.90
19	21-Mar-1993	9067.78780	9068.13809	5.0	6054	8.41
20	21-Mar-1993	9067.90030	9068.02084	5.0	2018	2.89
21	21-Mar-1993	9068.03212	9068.05504	5.0	397	0.55
22	21-Mar-1993	9068.06899	9068.15440	5.0	1477	2.05
23	21-Mar-1993	9068.09295	9068.13646	5.0	753	1.04
24	21-Mar-1993	9068.15869	9068.30365	5.0	2506	3.48
25	21-Mar-1993	9068.25568	9068.48241	5.0	3920	5.44
26	21-Mar-1993	9068.29214	9068.48201	5.0	3226	4.56
27	21-Mar-1993	9068.49665	9068.55955	5.0	1088	1.51
28	21-Mar-1993	9068.56910	9068.61308	5.0	761	1.06
29	22-Mar-1993	9068.77500	9069.14613	5.0	6414	8.91
30	22-Mar-1993	9068.91852	9069.05388	5.0	2340	3.25
31	22-Mar-1993	9069.06036	9069.08710	5.0	463	0.64
32	22-Mar-1993	9069.09260	9069.28363	5.0	3302	4.58
33	22-Mar-1993	9069.13959	9069.35394	5.0	3705	5.14
34	22-Mar-1993	9069.29167	9069.41412	5.0	2117	2.94
35	23-Mar-1993	9069.77095	9070.11759	5.0	5991	8.32
36	23-Mar-1993	9069.88542	9070.18015	5.0	5094	7.07
37	23-Mar-1993	9070.04531	9070.07338	5.0	486	0.67
38	23-Mar-1993	9070.12349	9070.17054	5.0	797	1.13
39	23-Mar-1993	9070.27407	9070.61076	5.0	5805	8.08
40	24-Mar-1993	9070.77036	9071.14704	5.0	6496	9.04
41	24-Mar-1993	9071.08500	9071.14033	5.0	957	1.33
42	24-Mar-1993	9071.27927	9071.30369	5.0	423	0.59
43	24-Mar-1993	9071.31845	9071.40780	5.0	1545	2.14
44	24-Mar-1993	9071.66336	9071.69947	5.0	625	0.87
45	24-Mar-1993	9071.70520	9071.80965	5.0	1806	2.51
46	25-Mar-1993	9071.77163	9072.12759	5.0	6152	8.54
47	25-Mar-1993	9071.85109	9071.94680	5.0	1655	2.30
48	25-Mar-1993	9071.87661	9072.10947	5.0	3931	5.59
49	25-Mar-1993	9072.11497	9072.22568	5.0	1914	2.66
50	25-Mar-1993	9072.29385	9072.33146	5.0	651	0.90
51	25-Mar-1993	9072.47845	9072.60148	5.0	2127	2.95
52	25-Mar-1993	9072.61242	9072.62029	5.0	137	0.19
53	25-Mar-1993	9072.62672	9072.80218	5.0	3033	4.21
54	26-Mar-1993	9072.76670	9072.96410	5.0	3412	4.74
55	26-Mar-1993	9073.34872	9073.42928	5.0	1366	1.93
56	26-Mar-1993	9073.43275	9073.44021	5.0	130	0.18
57	26-Mar-1993	9073.61860	9073.90657	5.0	4977	6.91
58	27-Mar-1993	9073.75795	9074.13938	5.0	6592	9.15
59	27-Mar-1993	9073.97415	9074.16634	5.0	3287	4.61
60	27-Mar-1993	9074.17184	9074.22496	5.0	919	1.28
61	27-Mar-1993	9074.27548	9074.59521	5.0	5526	7.67
62	27-Mar-1993	9074.29086	9074.55863	5.0	4472	6.43
63	27-Mar-1993	9074.44487	9074.46599	5.0	366	0.51
64	27-Mar-1993	9074.61026	9074.81784	5.0	3588	4.98
65	28-Mar-1993	9074.76205	9075.09347	5.0	5728	7.95
66	28-Mar-1993	9074.84417	9074.96419	5.0	2075	2.88
67	28-Mar-1993	9075.04555	9075.05452	5.0	156	0.22
68	28-Mar-1993	9075.05817	9075.25649	5.0	3370	4.76
69	28-Mar-1993	9075.60839	9075.95961	5.0	6070	8.43
70	29-Mar-1993	9075.93899	9075.96057	5.0	374	0.52
71	29-Mar-1993	9075.96676	9076.30033	5.0	5765	8.01
72	29-Mar-1993	9076.26676	9076.36676	5.0	1729	2.40
73	29-Mar-1993	9076.38898	9076.59141	5.0	3499	4.86
74	29-Mar-1993	9076.61363	9076.81479	5.0	3477	4.83
75	30-Abr-1993	9076.91531	9077.29153	5.0	6503	9.03
76	30-Abr-1993	9077.63857	9077.96125	5.0	5577	7.74
77	31-Mar-1993	9077.98625	9078.01258	5.0	452	0.63



78	31-Mar-1993	9078.03057	9078.04238	5.0	205	0.28
79	31-Mar-1993	9078.04840	9078.09707	5.0	842	1.17
80	31-Mar-1993	9078.10789	9078.21443	5.0	1842	2.56
81	31-Mar-1993	9078.62310	9078.95753	5.0	5780	8.03
82	01-Abr-1993	9078.91418	9079.26290	5.0	6027	8.37
83	01-Abr-1993	9079.62186	9079.95629	5.0	5780	8.03
84	02-Abr-1993	9079.91572	9080.13424	5.0	3777	5.24
85	02-Abr-1993	9080.65170	9080.90922	5.0	4451	6.18
86	03-Abr-1993	9081.65752	9081.84936	5.0	3316	4.60
87	04-Abr-1993	9081.90554	9082.01955	5.0	1971	2.74
88	04-Abr-1993	9082.03106	9082.17036	5.0	2408	3.34
89	04-Abr-1993	9082.19657	9082.27539	5.0	1363	1.89

Tab. 3.10: Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 2000.

Parte #	Data	$T_{incio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	26-Mai-2000	11692.23688	11692.29290	5.0	886	1.34
2	26-Mai-2000	11692.23705	11692.24319	5.0	99	0.15
3	26-Mai-2000	11692.23786	11692.23995	5.0	6	0.05
4	26-Mai-2000	11692.29660	11692.32525	5.0	419	0.69
5	30-Mai-2000	11696.23953	11696.32465	5.0	1282	2.04
6	30-Mai-2000	11696.33953	11696.36325	5.0	339	0.57
7	31-Mai-2000	11697.22070	11697.31763	5.0	1657	2.33
8	01-Jun-2000	11698.38429	11698.50194	5.0	1820	2.82
9	02-Jun-2000	11699.38281	11699.50967	5.0	1899	3.04
10	03-Jun-2000	11700.37974	11700.45272	23.0	255	1.75
11	03-Jun-2000	11700.38469	11700.50176	5.0	1793	2.81
12	04-Jun-2000	11701.22309	11701.38438	5.0	2446	3.87
13	05-Jun-2000	11702.38219	11702.50342	5.0	1893	2.91

Tab. 3.11: Dados Fotométricos da PG 1159-035 obtidos em 2002.

Parte #	Data	$T_{incio}$ 244 0000.+ (BCT)	$T_{fim}$ 244 0000.+ (BCT)	Tempo de Integração (sec)	Número de pontos	Duração (horas)
1	05-Mai-2002	12400.73879	12400.84683	33.0	282	2.59
2	06-Mai-2002	12401.68458	12401.77347	10.0	765	2.13
3	07-Mai-2002	12402.23813	12402.30688	10.0	565	1.65
4	07-Mai-2002	12402.47978	12402.52596	10.0	387	1.11
5	07-Mai-2002	12402.53777	12402.60073	10.0	522	1.51
6	08-Mai-2002	12403.30727	12403.33193	10.0	209	0.59
7	08-Mai-2002	12403.34130	12403.35519	10.0	121	0.33
8	08-Mai-2002	12403.47451	12403.73631	10.0	2218	6.28
9	08-Mai-2002	12403.51308	12403.55908	30.2	129	1.10
10	09-Mai-2002	12404.22121	12404.39668	10.0	1446	4.21
11	09-Mai-2002	12404.47999	12404.74747	10.0	2250	6.42
12	09-Mai-2002	12404.49446	12404.74747	10.0	2078	6.07
13	10-Mai-2002	12405.00929	12405.05060	30.0	118	0.99
14	10-Mai-2002	12405.05963	12405.11448	30.0	158	1.32
15	10-Mai-2002	12405.21697	12405.41848	10.0	1653	4.84
16	10-Mai-2002	12405.40504	12405.46981	30.2	189	1.55
17	10-Mai-2002	12405.46071	12405.57298	10.0	960	2.69
18	10-Mai-2002	12405.47727	12405.51703	29.4	111	0.95
19	10-Mai-2002	12405.58189	12405.73675	10.0	1317	3.72
20	10-Mai-2002	12405.98722	12406.11210	30.0	354	3.00
21	11-Mai-2002	12406.42742	12406.58494	10.0	1280	3.78
22	11-Mai-2002	12406.55472	12406.72764	10.0	1370	4.15
23	11-Mai-2002	12406.87610	12406.96129	10.0	731	2.04
24	12-Mai-2002	12407.00913	12407.11168	30.0	294	2.46
25	12-Mai-2002	12407.24071	12407.42033	20.0	771	4.31

26	12-Mai-2002	12407.34529	12407.36948	10.0	210	0.58
27	12-Mai-2002	12407.37619	12407.46392	10.0	759	2.11
28	12-Mai-2002	12407.40645	12407.48283	30.2	218	1.83
29	12-Mai-2002	12407.48736	12407.55185	30.2	173	1.55
30	12-Mai-2002	12407.57138	12407.61312	30.2	121	1.00
31	12-Mai-2002	12407.75799	12407.79098	10.0	273	0.79
32	13-Mai-2002	12408.20616	12408.22676	20.0	90	0.49
33	13-Mai-2002	12408.24042	12408.25639	20.0	70	0.38
34	13-Mai-2002	12408.27491	12408.39318	20.0	511	2.84
35	13-Mai-2002	12408.34985	12408.48121	10.0	1119	3.15
36	13-Mai-2002	12408.37126	12408.47415	10.0	860	2.47
37	13-Mai-2002	12408.40227	12408.53938	30.2	390	3.29
38	13-Mai-2002	12408.90964	12408.95223	10.0	361	1.02
39	14-Mai-2002	12409.35208	12409.36875	10.0	138	0.40
40	14-Mai-2002	12409.37882	12409.41458	10.0	310	0.86
41	14-Mai-2002	12409.42570	12409.44687	10.0	184	0.51
42	15-Mai-2002	12410.40316	12410.54830	10.0	1231	3.48
43	15-Mai-2002	12410.63291	12410.74055	10.0	852	2.58
44	16-Mai-2002	12411.46106	12411.55331	10.0	744	2.21
45	16-Mai-2002	12411.76782	12411.81828	10.0	404	1.21
46	17-Mai-2002	12412.38067	12412.55844	10.0	1518	4.27
47	18-Mai-2002	12413.43209	12413.54910	10.0	1001	2.81
48	19-Mai-2002	12414.45336	12414.53435	30.2	231	1.94
49	19-Mai-2002	12414.51661	12414.66186	10.0	1150	3.49
50	20-Mai-2002	12415.46959	12415.54147	10.0	574	1.73

As tabelas Tab.3.3 a Tab.3.11 mostram informações sobre os dados fotométricos da PG 1159-035 para cada ano em que a estrela foi observada.

Chamamos de *parte* ou *pedaço* (traduzido do inglês, *chunk*) de uma curva de luz os dados fotométricos obtidos de forma contínua em um turno de observação. Se por motivos de tempo ruim, falhas de equipamento ou outros problemas durante o turno de observação a fotometria foi interrompida por um período de tempo maior que 5 minutos<sup>1</sup>, os dados são separados em pedaços diferentes.

Isso é conveniente quando ocorrem mudanças bruscas nas condições do tempo durante a observação, pois o valor médio da relação sinal/ruído (S/N) depende fortemente das condições climáticas.

Os pedaços das curvas de luz dos dados anuais foram numerados em ordem crescente, de acordo com o seu tempo inicial ( $T_{incio}$ ). Para fazer referência a um *pedaço* específico, o *pedaço* N<sup>o</sup> 10 dos dados de 1989, por exemplo, usamos a notação: *pedaço #10/1989*.

A segunda coluna da tabela mostra a data do início da observação, de acordo com o tempo de Greenwich (UTC). A terceira e quarta colunas mostram o instante inicial ( $T_{incio}$ ) e o instante final ( $T_{fim}$ ) de cada pedaço, expressos em BCT.

O tempo de integração (em segundos), a duração do turno (em horas) e o número de pontos (dados) são mostrados nas três últimas colunas. Se não houver interrupções no *chunk*, o número de pontos ( $n$ ) pode ser calculado a partir da duração do *pedaço* ( $T_{ch}$ ) e do tempo de integração ( $\Delta t$ ):

<sup>1</sup> Este intervalo de tempo equivale a pouco mais da metade de um período de pulsação.

$$\text{número de pontos} = \frac{\text{duração do pedaço}}{\text{tempo de integração}} + 1 \quad (3.1)$$

e

$$n = \frac{T_{ch}}{\Delta t} + 1 \quad (3.2)$$

No próximo capítulo, discutiremos o tratamento dos dados.

\* \* \* \* \*

## Capítulo 4

# TRATAMENTO DE DADOS

This is Art. You expected Science?  
— R.E.Nather in “Using QED” —

### 4.1 Introdução

A fotometria mede a intensidade da luz através da contagem do número de fótons que atinge o sensor fotométrico durante o tempo de integração. Se uma estrela for observada em dois sítios, as contagens fotométricas serão diferentes, porque o número de fótons que atinge o sensor fotométrico depende de diversos fatores, alguns ligados às características do telescópio, da instrumentação e do próprio sensor; outros ligados às condições atmosféricas locais e à posição da estrela no céu.

Por exemplo, um telescópio que possui um espelho com um diâmetro de 1,60 m pode captar aproximadamente quatro vezes mais fótons que um telescópio cujo espelho tenha um diâmetro de 0,80 m, metade, por seu espelho ter uma superfície cerca de quatro vezes maior que o segundo. O uso ou não de filtros também afeta a contagem, pois os filtros deixam passar uma determinada banda do espectro de frequências, reduzindo drasticamente a passagem da luz com comprimentos de onda fora da banda passante. A altitude do observatório e a qualidade da aluminização do espelho também são cruciais na transmissão de diferentes comprimentos de onda.

Mesmo quando se usam dois canais de um fotômetro para se fazer medidas simultâneas de uma mesma fonte luminosa, as contagens dos dois canais não serão as mesmas porque a luz que chega no sensor de cada canal percorre caminhos óticos diferentes dentro do fotômetro. Os sensores provavelmente terão sensibilidades diferentes.

Felizmente, no estudo de estrelas pulsantes geralmente o que interessa não é o valor absoluto de seu brilho, mas sim a *variação relativa* do mesmo ao longo do tempo, às vezes, em diferentes comprimentos de onda. As curvas de luz devem mostrar quanto o brilho da estrela varia em relação ao seu valor médio, ao longo do tempo. Para tal, as contagens fotométricas precisam passar por um “tratamento” que chamamos de *redução de dados*.

Na redução de dados, todos os efeitos decorrentes de causas conhecidas que os afetam são corrigidos. Efeitos decorrentes de causas desconhecidas passam a fazer parte dos erros sistemáticos.

O processo de redução de dados fotométricos adotado pelo WET segue um protocolo bem estabelecido que será descrito a seguir, sendo realizado em sua maior parte, por um programa chamado *QED*, desenvolvido por R. E. Nather (Nather 2000). A redução de dados é uma **etapa crítica** no estudo de estrelas pulsantes, porque se cada passo do processo não for bem feito, efeitos que deveriam ser removidos dos dados permanecerão na curva de luz resultante, na forma de sinais (ou pseudo-sinais), que podem ser mal interpretados como sinais reais da estrela.

Isso se tornou patente no estudo das pulsações da PG 1159-035 onde a maior parte dos dados havia sido previamente reduzida e não tivemos acesso aos dados originais. Como será mostrado mais adiante, curvas de luz defeituosas decorrentes de falhas no processo de redução introduzem erros significativos na determinação dos tempos de máximo das pulsações. Isso nos obrigou a desenvolver técnicas de diagnóstico e tratamento de defeitos em redução de dados.

Parte das falhas na redução de dados tem origem histórica: no início da asterosismologia de anãs brancas e outras estrelas pulsantes até os anos de 1980, tudo o que se desejava saber era se a estrela era pulsante ou não, ou quais eram os períodos e as amplitudes de seus modos de pulsação. Os dados eram poucos e não havia necessidade de precisão nas medidas.

Como boa parte da redução depende muito da experiência (e paciência) de quem a faz, erros acabam sendo mais comuns do que se desejaria e muitas vezes passam despercebidos. Mas, a asterosismologia evoluiu bastante nas últimas duas décadas, o volume de dados aumentou muito, novos e poderosos recursos computacionais foram desenvolvidos e medidas mais precisas começaram a se tornar possíveis e necessárias. Os problemas decorrentes de deficiências e falhas no processo de redução começam a aparecer na análise de dados e, aos poucos, suas causas vão sendo descobertas.

Uma importante fonte de ruído em uma curva de luz é o próprio processo de redução. Precisamos entender o que é feito em cada passo do processo de redução para identificarmos as principais causas de ruído e o que deve ser feito para eliminar ou reduzir o problema.

## 4.2 Redução de Dados Fotométricos

Segue uma descrição detalhada de cada etapa do processo de redução de dados fotométricos obtidos através de fotometria fotoelétrica. Chamaremos de *canal a* o canal da estrela alvo, *canal b* ao canal da estrela de comparação e, no caso de fotometria de três canais, de *canal c*, o canal de medidas do brilho do céu.

*a) Calibração* — quando os detectores de um fotômetro fazem à medida simultânea de uma mesma região do céu, as leituras são diferentes porque a sensibilidade de cada detector é diferente e a área da abertura também pode ser diferente, sendo necessário *normalizar* a leitura de cada detector para que as leituras sejam as mesmas. Essa normalização é o que chamamos de *calibração*.

Em fotômetros de dois canais, a fotometria das estrelas alvo e de comparação é interrompida por um ou dois minutos para se fazerem medidas do brilho do céu. Esse processo

é repetido várias vezes durante a noite. Aproveita-se à medida simultânea do brilho do céu para a *calibração* dos canais. Um dos canais (em geral, o canal  $a$ ) é adotado como referência e uma constante de normalização<sup>1</sup>  $c_b$  é calculada para o segundo canal:

$$c_b = \frac{\text{média das contagens de céu do canal } a}{\text{média das contagens de céu do canal } b} \quad (4.1)$$

A calibração do canal  $b$  é feita pela multiplicação de suas contagens por  $c_b$ :

$$\text{contagem calibrada do canal } b = c_b \times \text{contagem original do canal } b \quad (4.2)$$

No fotômetro de três canais o terceiro canal é dedicado exclusivamente à fotometria do céu, mas pelo menos uma medida simultânea do céu é feita; as constantes  $c_b$  e  $c_c$  são calculadas e a calibração é feita tal como no fotômetro de dois canais.

Se por alguma razão medidas simultâneas do céu não forem feitas, utiliza-se um valor *default* para  $c_b$  (ou  $c_c$ ), baseado em determinações anteriores realizadas com o mesmo fotômetro.

*b) Remoção de pontos anômalos* — cada curva de luz é inspecionada, os pontos referentes a medidas de céu são identificados, computados e removidos.

Pontos espúrios que, não sendo medidas do céu, apresentam contagens muito diferentes das contagens vizinhas são retirados da curva de luz. Pontos deste tipo aparecem imediatamente antes e imediatamente depois das leituras de céu, durante o deslocamento do telescópio, mas também podem ser resultantes de breves interrupções na leitura de um ou ambos canais, que fazem com que pontos com baixas contagens apareçam nas curvas de luz. Já, iluminação externa, relâmpagos ou mesmo a passagem de meteoros, podem aumentar as contagens e o ponto aparecerá bem acima da distribuição média.

Quando há nuvens no céu, os pontos da curva de luz tendem a se dispersar de forma anômala em relação à curva média. Esta dispersão aparece tanto no canal  $a$  quanto no canal  $b$ . Regiões visivelmente afetadas pela presença de nuvens também *podem* ser removidas da curva de luz de ambos canais.

A relação custo/benefício da remoção de regiões anômalas da curva de luz é algo discutível: a remoção de um conjunto de pontos implica em reduzir o número de dados, mas a permanência de pontos ruins na curva de luz pode piorar a qualidade dos ajustes. Em geral, o percentual de pontos ruins é pequeno e sua retirada praticamente não afetará a análise dos dados. Mas se o ponto for muito fora da média, pode afetar drasticamente os ajustes de curvas aos pontos, mascarando o valor de  $\chi^2$ .

---

<sup>1</sup> Na terminologia usada pelo QED, a constante de normalização  $c_b$  é chamada de *razão entre as sensibilidades dos detectores* (*detector sensibility ratio*).

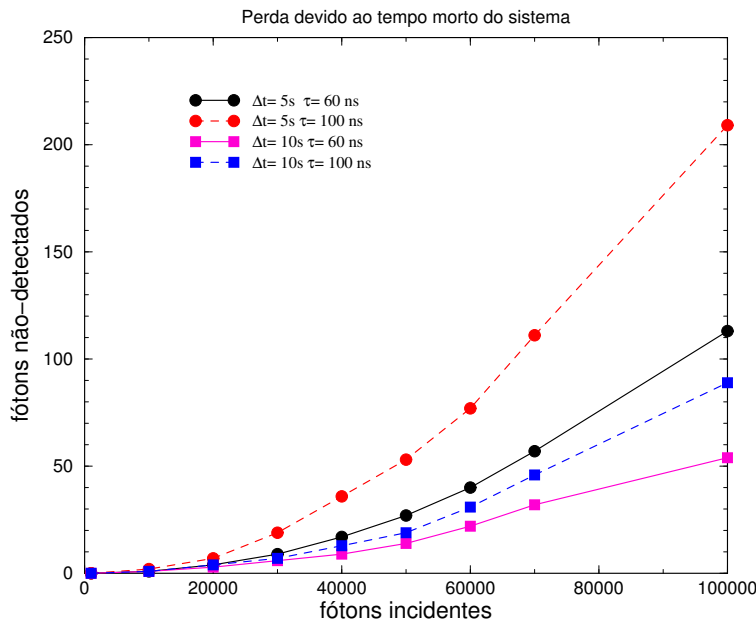


Fig. 4.1: Perda devido ao tempo morto do sistema.

Muitas vezes o número de pontos que são removidos é tão grande que parece ser conveniente salvar o resto da curva em um arquivo separado. Este procedimento deve ser adotado se a interrupção for maior que a metade do menor período de pulsação.

c) *Correção para o tempo morto do sistema* — cada vez que um elétron é liberado do fotocátodo da válvula fotoelétrica temos um pulso na saída. Os pulsos são contados por um contador digital. O contador só consegue distinguir entre dois pulsos se os mesmos estiverem separados por um intervalo mínimo de tempo, chamado de *tempo morto*. Se o intervalo entre dois pulsos for menor que o tempo morto, o contador contará apenas um pulso. O tempo morto faz com que alguns pulsos não sejam contados. A correção para tempo morto é feita com base na equação:

$$N_{\text{corrigido}} = N_{\text{obs}} e^{-\tau/T} \quad (4.3)$$

onde  $T$  é o tempo de integração e  $\tau$  é o tempo morto do sistema. O tempo morto é da ordem de nanosegundos (60 ns para uma fotomultiplicadora *Hamamatsu*, bi-alcalina, usada na maioria dos nossos observatórios).

Quanto maior for a intensidade da luz incidente, maior será a probabilidade de um fóton atingir o fotocátodo antes que o sistema tenha tempo de detectá-lo. Por outro lado, quanto maior for o tempo morto do sistema, maior será o número de fótons não-detectados. Isso fica bem claro no gráfico da Fig.4.1, onde é mostrado o número de fótons não-detectados em função do número de fótons incidentes para sistemas com tempo morto de 60 ns e 100 ns e para tempos de integração de 5 e 10 segundos.

Para estrelas pouco brilhantes como a PG 1159-035 (magnitude 14.8), o tempo morto do sistema não é um problema, pois as contagens típicas para um tempo de integração de 5 segundos não ultrapassam a casa dos 100 000, mesmo em telescópios com espelhos de diâmetro de  $\sim 2\text{ m}$ , com uma perda da ordem de  $\sim 0,1\%$ . Mas para estrelas um pouco mais brilhantes, como as estrelas *roAp*, as perdas devido ao tempo morto do sistema podem ser significativas, principalmente para telescópios maiores, podendo comprometer a qualidade da curva de luz.

*d) Correção para o brilho do céu* — o céu noturno possui um brilho que se soma à luz da estrela observada, atuando como ruído<sup>2</sup>. Para reduzir o ruído na fotometria de uma estrela deve-se subtrair o brilho do céu. Por esta razão são feitas medidas do brilho do céu ao longo da noite.

Depois da calibração, as contagens de céu feitas pelo canal  $c$  são subtraídas das contagens dos canais  $a$  e  $b$ . No caso de fotômetros de um ou dois canais, ajusta-se uma curva às medidas regulares de céu, para depois se fazer a subtração ponto-a-ponto<sup>3</sup>.

Também pode-se fazer o ajuste de uma curva às medidas contínuas de céu em fotometria de três canais para “suavizar” a curva de brilho de céu. Este procedimento supostamente reduz um pouco do ruído presente nos dados de céu. Entretanto, existem situações em que isto pode não ser aconselhável. Nuvens que passam perto (ou sobre) do campo observado podem refletir um pouco de luz da Lua aumentando momentaneamente o brilho do céu. Esse efeito é registrado em todos os canais e deve desaparecer quando as contagens de céu forem subtraídas. Mas, se a curva de brilho de céu foi “suavizada” demais, a correção não será feita e o defeito permanecerá lá.

*e) Correção para a extinção atmosférica - Parte I* — quando a luz de uma estrela passa através da atmosfera, parte dela é absorvida e espalhada em todas as direções, fazendo com que a intensidade da luz diminua à medida que vai atravessando a atmosfera. Este efeito de redução da intensidade da luz é chamado de *extinção atmosférica*. A extinção atmosférica depende do caminho ótico da luz dentro da atmosfera, como é mostrado na Fig.4.2. Quanto mais perto do horizonte estiver a estrela maior é o caminho ótico e maior será o efeito de extinção atmosférica. Por outro lado, quanto menor for a *distância zenital*  $z$ , menor será o efeito de extinção. A extinção atmosférica reduz a *transmissão* da luz na atmosfera.

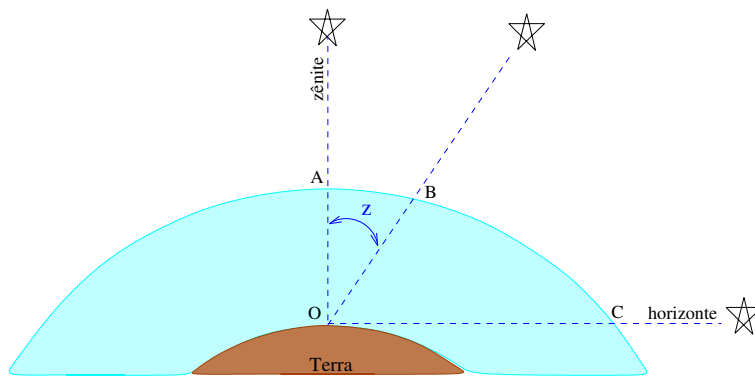
A extinção atmosférica também é seletiva em relação ao comprimento de onda  $\lambda$ , sendo maior para  $\lambda$  na faixa do ultravioleta do que no visível ( $A \propto \lambda^{-4}$ ). O decaimento da intensidade luminosa para um determinado comprimento de onda  $\lambda$  é dado pela equação:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda_0} e^{-K_{\lambda} \sec z} \quad (4.4)$$

<sup>2</sup> Quanto menor for a abertura, menor é o ruído do céu, mas precisamos incluir todo o disco de difração da imagem, que varia durante a noite.

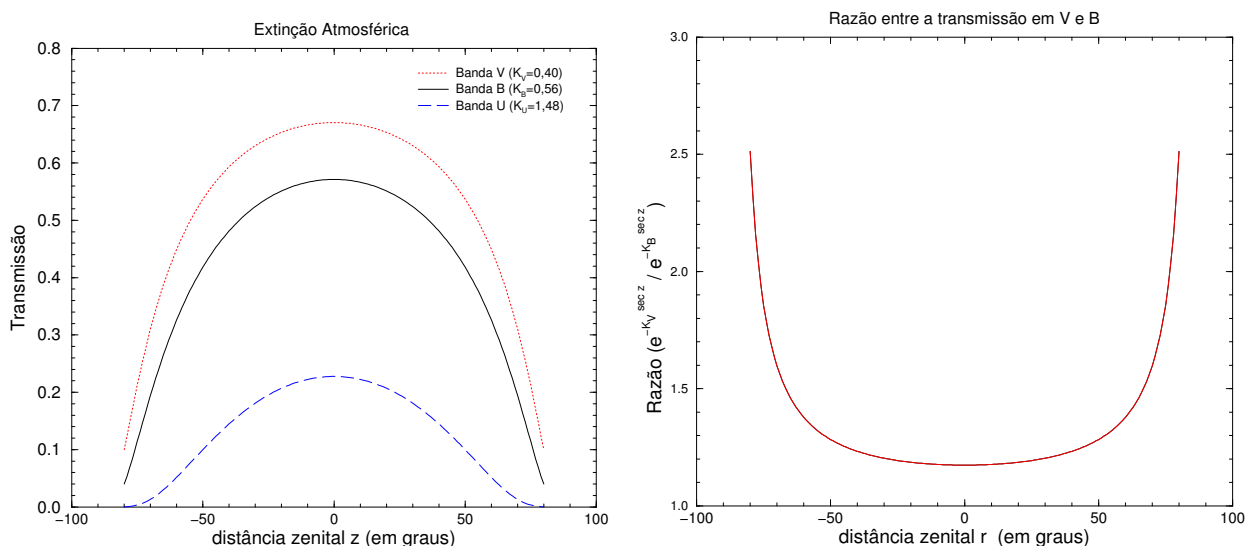
<sup>3</sup> No QED a curva de céu é reconstruída a partir de interpolações lineares entre medidas consecutivas de céu. Para os extremos da curva de céu, o QED tenta usar uma extrapolação linear que, com frequência, produz resultados não aceitáveis. Para contornar este problema, “pontos artificiais” são colocados nos extremos, permitindo que uma interpolação possa ser feita.





**Fig. 4.2:** O comprimento do caminho óptico depende da distância zenital,  $z$ .

onde,  $K_\lambda$  é o coeficiente de extinção para o comprimento de onda  $\lambda$ . O fator  $e^{-K_\lambda \sec z}$  é o coeficiente de transmissão da atmosfera para o comprimento de onda  $\lambda$  e para a distância zenital  $z$ .



**Fig. 4.3:** Efeito de extinção atmosférica. O gráfico da esquerda mostra como o índice de transmissão da atmosfera para as bandas U, B e V varia em função da distância zenital  $z$ . O gráfico da direita, mostra a razão entre a extinção no visível e a extinção na banda B, em função da distância zenital. A atmosfera é mais transparente para a luz visível do que para a ultravioleta.

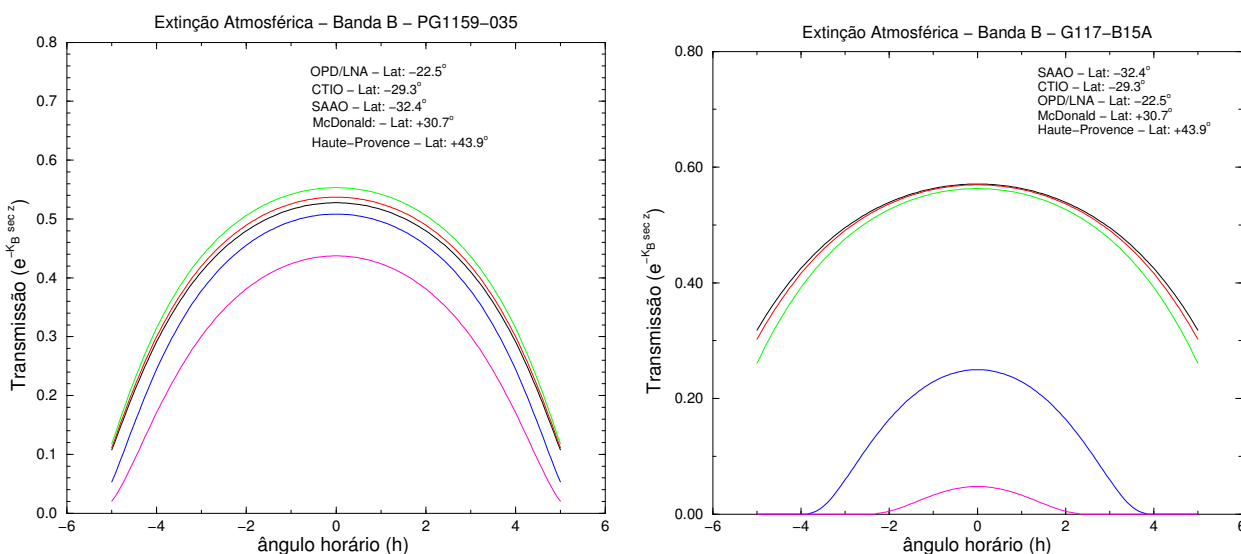
Para sítios acima de 1 500 m de altitude, o valor médio do coeficiente de extinção para comprimentos de onda dentro da banda visível V (no sistema *UBV*) é  $K_V \simeq 0,40$ . Para as bandas B e U, os valores médios para o coeficiente de extinção são  $K_B \simeq 0,56$  e  $K_U \simeq 1,48$ .

A Fig.4.3 mostra como a transmissão da luz é afetada em função da distância zenital,  $z$ , para as bandas U, B e V (para um objeto com declinação  $\delta = 0^\circ$ , observado a partir do

equador). Quando a estrela está passando pelo meridiano local, apenas  $\sim 60\%$  de sua luz na banda  $B$  chega ao detector. Esta fração cai para  $\sim 10\%$  quando a estrela está pouco acima da linha do horizonte.

A razão entre a transmissão para as bandas  $V$  e  $B$  não é constante, variando em função da distância zenital, como podemos ver no gráfico da direita. Se a estrela alvo emite mais na banda  $B$ , devemos escolher para comparação uma estrela que também emita mais na banda  $B$ , para que o efeito de extinção afete igualmente as curvas de luz das duas estrelas (já que as estrelas que estamos estudando são muito mais azuis do que as estrelas do campo).

A distância zenital  $z$  depende do ângulo horário, mas é a relação entre a declinação  $\delta$  do objeto e a latitude do observador que define a distância zenital mínima e, conseqüentemente, o máximo em transmissão. Os dois gráficos da Fig.4.4 mostram o efeito de extinção atmosférica sobre as estrelas PG 1159-035 ( $\delta \simeq -3.5^\circ$ ) *Sanduleak 3* ( $\delta \simeq -35.6^\circ$ ) para cinco diferentes sítios com latitudes entre  $-30^\circ$  e  $+50^\circ$ .

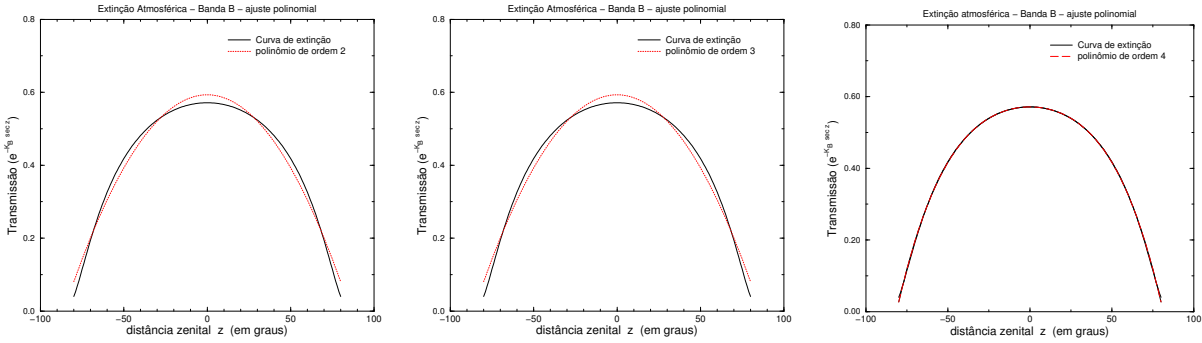


**Fig. 4.4:** Efeito de extinção atmosférica sobre as estrelas PG 1159-035 (gráfico da esquerda) e G117-B15A (gráfico da direita), em função do ângulo horário para diferentes observatórios.

Uma correção para a extinção atmosférica pode ser feita através da Eq.4.4: divide-se cada ponto da curva de luz por  $e^{-K_B sec z}$ , onde  $z$  é calculado para cada instante de tempo, com  $K_B$  constante. O cálculo de  $z$ , além do instante de tempo, envolve as coordenadas da estrela e do local de observação. Além disso, é comum que ajustes baseados na Eq.4.4 não sejam bons, por razões que serão apresentadas a seguir.

A correção para a extinção atmosférica pode ser feita de um modo mais simplificado através do ajuste de um polinômio de baixa ordem à curva de luz. Os gráficos da Fig.4.5, mostram o ajuste de três polinômios de ordens 2, 3 e 4 à uma curva de extinção (baseada na Eq.4.4 para um grande intervalo de  $z$ ). Conforme pode ser visto claramente, o polinômio de ordem 4 é o que melhor se ajusta à curva. Não há grande diferença entre o ajuste de um

polinômio de ordem 2 ou um de ordem 3. Entretanto, para curvas de luz não muito longas, um polinômio de ordem 2 pode ser usado com boa aproximação.



**Fig. 4.5:** Ajuste de polinômios de ordens 2, 3 e 4 à curva de extinção atmosférica.

Uma vez calculados os polinômios de correção,  $P_a(t)$  e  $P_b(t)$  para cada canal, faz-se a correção por extinção:

$$\text{Leitura corrigida do canal a} = C_a \times \frac{\text{Leitura do canal a}}{P_a(t)} \quad (4.5)$$

$$\text{Leitura corrigida do canal b} = C_b \times \frac{\text{Leitura do canal b}}{P_b(t)} \quad (4.6)$$

onde  $C_a$  e  $C_b$  são constantes arbitrárias, mas para que as leituras corrigidas tenham um significado físico,  $C_a$  e  $C_b$  devem ser definidas como sendo iguais aos valores máximos de  $P_a(t)$  e  $P_b(t)$  para as curvas:

$$C_a = \text{Max}\{P_a(t)\} \quad (4.7)$$

$$C_b = \text{Max}\{P_b(t)\} \quad (4.8)$$

Desta forma, as leituras corrigidas seriam as leituras para o caso em que a extinção fosse constante e igual ao menor valor possível para o local.

*f) Interpolação* — quando existem pontos ausentes na curva de luz devido a interrupções, alguns astrônomos defendem a idéia de que os pontos devem ser repostos através de uma interpolação linear entre os últimos pontos imediatamente antes da interrupção e os primeiros pontos imediatamente após. Este artifício é chamado de *interpolação* ou “*bridging*” e serviria para evitar o aparecimento de frequências espúrias no periodograma da curva de luz, embora este procedimento reduza a amplitude por  $n/n_{total}$ , onde  $n$  é o número de pontos interpolados e  $n_{total}$  é o número total de pontos. A interpolação deveria ser feita se

a interrupção for menor que a metade do menor período de pulsação presente na estrela. Caso a interrupção fosse um pouco maior que tal intervalo, o *bridging* não deveria ser feito.

Isso parece fazer sentido apenas quando se quer fazer o periodograma da curva de luz de um único turno de observação. Para a maior parte das anãs brancas pulsantes, os dados de um único turno de observação não são suficientes para que todas as frequências sejam resolvidas. Atualmente, a asterosismologia de anãs brancas se vale de dados que cobrem períodos de 10 a 14 dias, com interrupções da ordem de horas, de forma que o *bridging* não faz sentido.

Uma outra razão para se fazer o *bridging* era a FFT (Fast Fourier Transform). Programas baseados na FFT eram muito usados antigamente, pois permitiam o cálculo rápido de transformadas de Fourier de séries de tempo, numa época em que os computadores não eram ainda muito velozes. A FFT exige que os pontos da série de tempo, no caso, da curva de luz sejam regularmente espaçados, sem interrupções e com um número de pontos múltiplo de 2. Desta forma é possível se explorar algumas propriedades da série de tempo, baseadas em uma base binária que reduz drasticamente o tempo necessário para o cálculo da transformada de Fourier.

Quando as frequências que compõe a curva de luz de uma estrela pulsante são bem conhecidas, o *bridging* pode ser feito através uma curva de luz sintética. O mesmo também pode ser feito através da teoria do caos.

*g) Correção para a extinção atmosférica - Parte II* — o efeito de extinção atmosférica por absorção e espalhamento descrito pela Eq.4.4 assume que a atmosfera é homogênea e isotrópica. Entretanto, a atmosfera contém grande quantidade de pequenos aerossóis<sup>4</sup>, muitas vezes com uma certa opacidade, através dos quais a luz da estrela precisa passar antes de chegar ao detector fotométrico. Esses aerossóis têm um comportamento que não podemos modelar facilmente e que provocam flutuações na transparência do céu em diferentes escalas de tempo, de alguns segundos a algumas horas.

A atração gravitacional combinada do Sol e da Lua que provoca as marés oceânicas provoca efeitos de maré também na atmosfera. É sabido que as variações no nível do mar são descritas por funções esférico-harmônicas, e há evidências de que a atmosfera também apresenta um comportamento pulsante semelhante aos modos-g das anãs brancas; em junho de 1991 o vulcão do Monte Pinatubo nas Filipinas entrou em erupção lançando uma enorme quantidade de gases e cinzas na atmosfera. Observou-se que um sinal periódico de  $\sim 450$  segundos apareceu nas curvas de luz de *todas* as estrelas observadas alguns dias após a erupção (Nather 2000), mostrando que a atmosfera possui oscilações fazendo com que a transparência do céu também oscile, modulando a luz observada das estrelas, mas não sabemos exatamente como essas variações se relacionam com o comprimento de onda.

---

<sup>4</sup> Aerossóis são minúsculas partículas líquidas ou sólidas em suspensão no ar. Isto inclui gotículas d'água, partículas de poeira e moléculas de gases. Sua presença pode decorrer de causas naturais como atividade vulcânica, tempestades de areia, incêndios em florestas e pradarias, e pela pulverização provocada pelo mar ou por florestas. A poluição provocada pelo homem, como a queima de combustíveis e a alteração da superfície da terra também contribui com o aumento da quantidade de aerossóis presentes na atmosfera.

Seja  $R(t)$  a função (desconhecida) que descreve as flutuações na transparência do céu provocadas pelos aerossóis e pela maré na atmosfera. Então, os brilho observados da estrela alvo,  $I_{a,obs}(t)$ , e da estrela de comparação,  $I_{b,obs}(t)$ , serão:

$$I_{a,obs}(t) = R(t) \times I_{a,real}(t) \quad (4.9)$$

$$I_{b,obs}(t) = R(t) \times I_o \quad (4.10)$$

Como a estrela  $b$  não é variável, podemos isolar  $R(t)$  na Eq.4.10, substituí-lo na Eq.4.9 e assim calcularmos a variabilidade intrínseca da estrela alvo:

$$R(t) = \frac{I_{b,obs}(t)}{I_o} \quad (4.11)$$

$$I_{a,real}(t) = I_o \times \frac{I_{a,obs}(t)}{I_{b,obs}(t)} \quad (4.12)$$

É para isto que serve a estrela de comparação: para eliminar da curva da estrela alvo a variabilidade,  $R(t)$ , introduzida pela atmosfera. Se for devidamente usada e a razão sinal ruído for suficientemente alta, *toda* a variabilidade com escalas de tempo maiores que algumas vezes o tempo de integração deve ser removida.

*h) Variação relativa* — a variação relativa do brilho da estrela alvo pode então ser calculada:

$$\text{Variação relativa do brilho no instante } t = \frac{\text{Brilho no instante } t - \text{Brilho médio}}{\text{Brilho médio}} \quad (4.13)$$

$$I_{rel}(t) = \frac{I_{a,real}(t) - \langle I_{a,real}(t) \rangle}{\langle I_{a,real}(t) \rangle} \quad (4.14)$$

$$I_{rel}(t) = \frac{I_{a,real}(t)}{\langle I_{a,real}(t) \rangle} - 1 \quad (4.15)$$

$$I_{rel}(t) = \frac{I_o \times \frac{I_{a,obs}(t)}{I_{b,obs}(t)}}{\langle I_o \times \frac{I_{a,obs}(t)}{I_{b,obs}(t)} \rangle} - 1 \quad (4.16)$$

$$I_{rel}(t) = \frac{I_o I_a / I_b}{I_o \langle I_a / I_b \rangle} - 1 \quad (4.17)$$

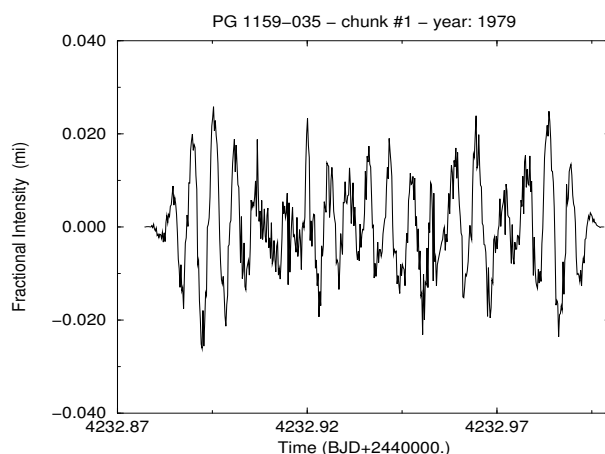
$$I_{rel}(t) = \frac{I_a / I_b}{\langle I_a / I_b \rangle} - 1 \quad (4.18)$$

Como se vê,  $I_{rel}(t)$  independe do valor de  $I_o$ . A unidade usada para expressar a variação relativa em intensidade de estrelas pulsantes é a *modulação em intensidade*, simbolizada por *mi*. Modulação em intensidade é uma grandeza adimensional. Os valores de  $I_{rel}(t)$  oscilam em torno de zero.

### 4.3 Defeitos em Curvas de Luz

A maior parte das curvas de luz usadas neste trabalho foram reduzidas previamente e não tivemos acesso aos dados originais. Como de praxe, assumimos que os dados haviam sido bem reduzidos e partimos para a análise dos mesmos. Uma série de problemas com os resultados obtidos nos levou a questionar a qualidade dos dados e um exame detalhado de cada curva de luz revelou que muitas delas apresentavam anomalias decorrentes de deficiências no processo de redução.

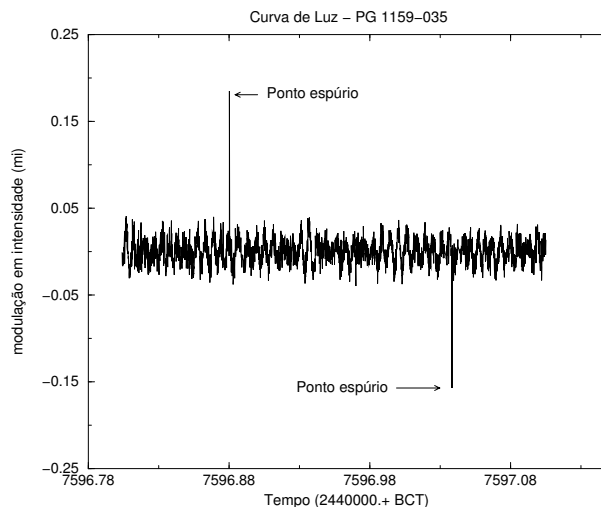
Uma parte do tempo teve que ser gasto no exame, no diagnóstico e no tratamento de anomalias em curvas de luz. Uma curva de luz bem reduzida tem o aspecto mostrado na Fig.4.6.



**Fig. 4.6:** *Aspecto de uma curva de luz bem reduzida.*

As principais características de uma curva bem reduzida são:

- o valor médio das intensidades é zero;
- a curva média é uma reta, com intensidade igual a zero;
- os pontos estão dispersos de forma aproximadamente simétrica, acima e abaixo da curva média, com valores dentro de limites característicos para cada estrela que, em geral, são da ordem de alguns por cento. Para a PG 1159-035 os limites são  $\pm 0.10$  mi e para a G117-B15A,  $\pm 0.02$ ;
- não há pontos espúrios com intensidades que fujam demais da distribuição normal.



**Fig. 4.7:** Curva com pontos espúrios.

**Problema #1:** presença de pontos espúrios (Fig.4.7).

**Descrição:** pontos espúrios são pontos com um desvio muito grande, maior que  $\sim 4\sigma$ , onde

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{(n-1)}} \quad (4.19)$$

**Causa:** se um ponto do canal *a* ou do canal *b* apresenta um desvio muito grande em relação à média do respectivo canal, após a divisão do canal *a* pelo canal *b* aparecerá como um ponto espúrio na curva de luz resultante.

**Complicações:** foram encontradas curvas de luz com pontos espúrios com um desvio de  $10\sigma$ ,  $20\sigma$  ou até mais. Estes pontos afetam o cálculo do peso do *chunk* a que pertencem, fazendo com que o peso do mesmo seja reduzido. Em ajustes de funções, eles dominam o cálculo de  $\chi^2$ .

**Prevenção:** eliminar pontos espúrios dos canais *a* e *b* antes de se fazer a divisão.

**Tratamento:** remover o ponto da curva de luz resultante, já que nenhum dos nossos programas de análise requer dados igualmente espaçados.

**Problema #2:** média constante diferente de zero (Fig.4.8).

**Descrição:** os pontos aparecem distribuídos em torno de uma reta horizontal acima (ou abaixo) do eixo horizontal.

**Causa:** erro no uso da Eq.4.13.

**Complicações:** prejudica o ajuste, aumentando o erro na determinação de todas as medidas.

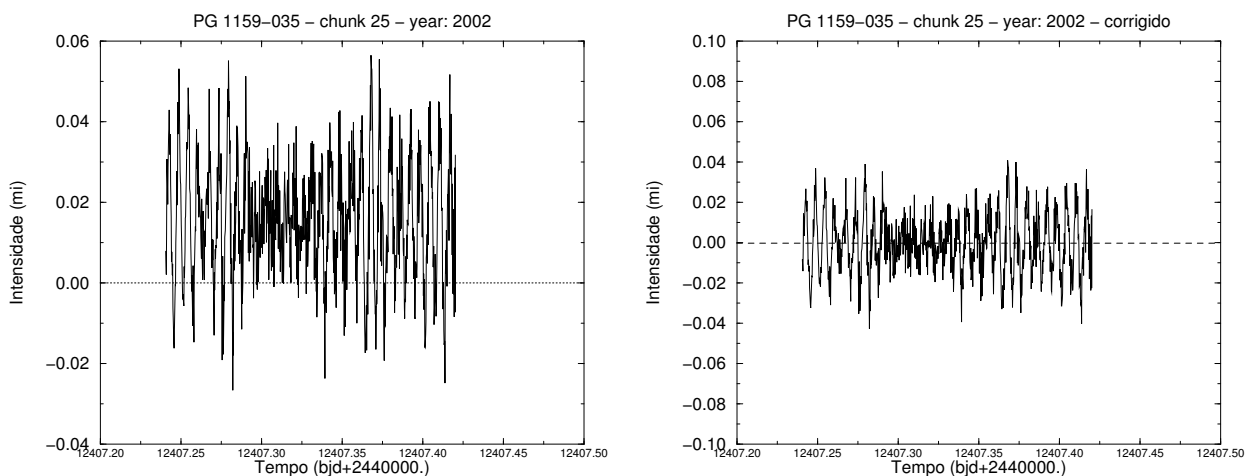


Fig. 4.8: Correção de uma curva de luz com média diferente de zero.

**Prevenção:** usar corretamente a Eq.4.13 e verificar se a média da curva é  $\sim$ zero.

**Tratamento:** se a diferença é apenas a constante, subtrair a constante:

$$I_{i,corrigido} = I_i - \bar{I} \tag{4.20}$$

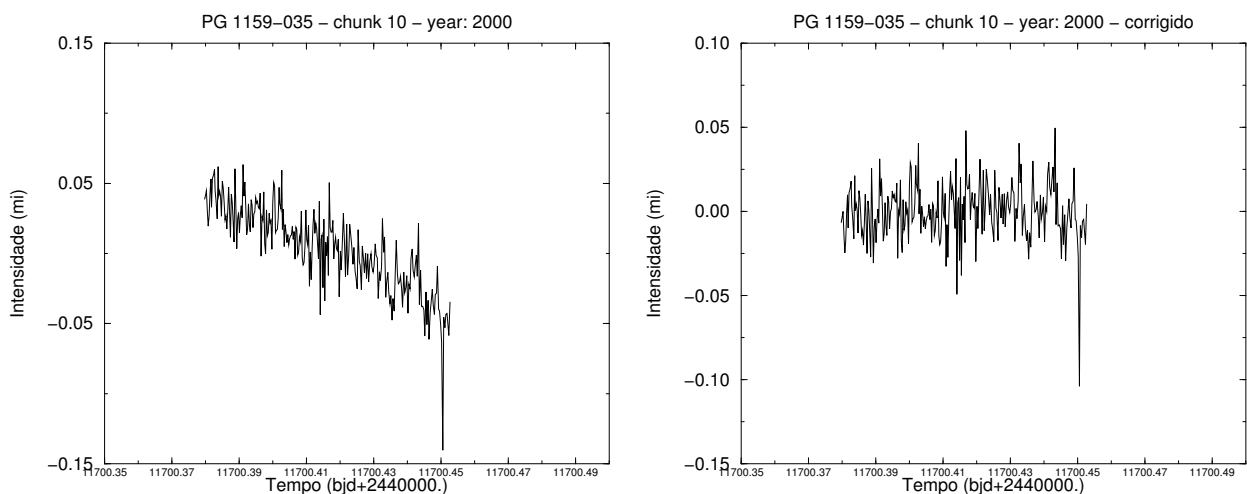


Fig. 4.9: Correção de uma curva de luz com uma linha média irregular.

**Problema #3:** curva média irregular (Fig.4.9).

**Descrição:** as curvas estão visivelmente tortas.

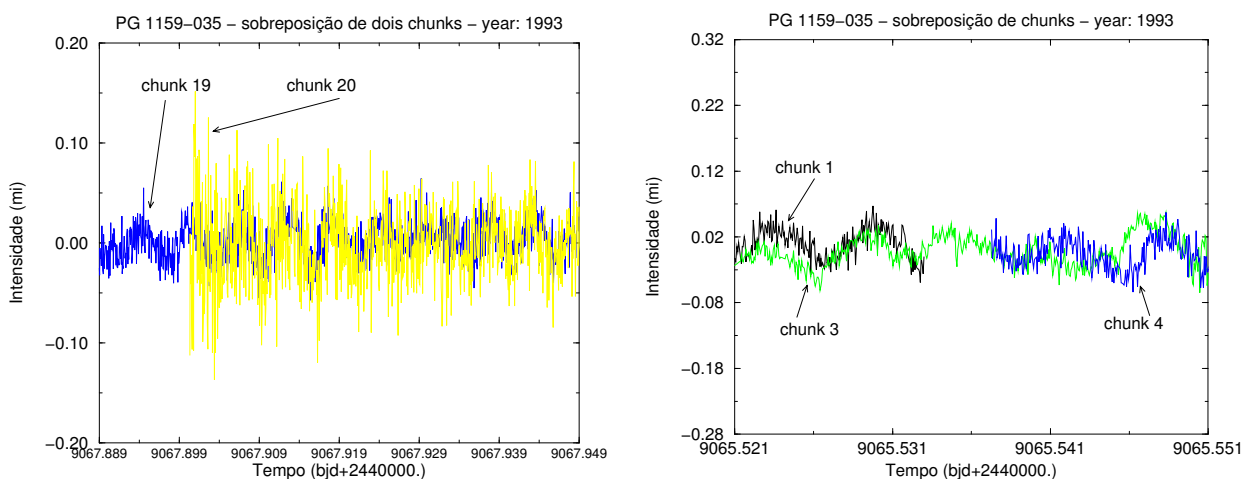
**Causa:** provavelmente não foi feito o ajuste polinomial em uma das curvas.



**Complicações:** prejudica o ajuste; introduz picos espúrios no periodograma.

**Prevenção:** checar o ajuste polinomial em ambas curvas *antes* de se fazer a divisão.

**Tratamento:** ajustar um polinômio  $P_c(t)$  à curva de luz.



**Fig. 4.10:** *Discrepâncias entre curvas de luz.*

**Problema #4:** discrepâncias entre curvas de luz (Fig.4.10).

**Descrição:** não há coincidência entre a sobreposição de curvas de luz obtidas a partir de sítios diferentes. Isto não chega a ser um problema por que a relação sinal/ruído varia muito de um sítio para o outro. A situação pode ser mais grave quando as curvas são muito parecidas, mas uma delas está transladada para a direita ou para a esquerda em relação à outra, indicando problemas na determinação do tempo.

**Causa:** diferenças na relação sinal/ruído. Se uma curva parece estar deslocada para um dos lados em relação à outra, pode ter havido erro no cálculo do instante de tempo de cada ponto. Normalmente este erro é um múltiplo inteiro do tempo de integração: 5s, 10s. Isto ocorre porque o instante de cada ponto é calculado a partir do instante da primeira medida. Se houver algum tipo de equívoco quanto ao primeiro ponto, o tempo atribuído a ele estará errado.

**Complicações:** erros na determinação dos tempos podem passar facilmente despercebidos, a menos que a curva problemática se sobreponha a uma outra, correta. Erros desse tipo aumentam o erro na determinação dos tempos de máximo.

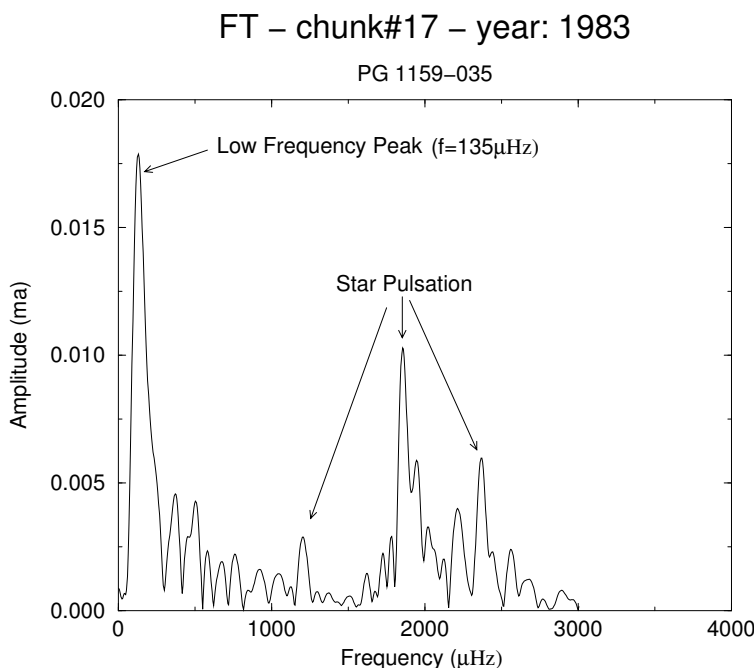
**Prevenção:** cuidado.

**Tratamento:** difícil, mesmo porque nunca se tem absoluta certeza de que os tempos estão errados. O que se pode fazer é verificar se a inclusão da curva de luz melhora ou piora a determinação do tempo de máximo para o principal período de pulsação. Se os dados são bons, espera-se que haja uma melhora. Caso ocorra o contrário, pode ser aconselhável excluir toda a curva de luz.

## 4.4 O Problema das Baixas Frequências com Altas Amplitudes

As frequências de pulsação de anãs brancas e PWD são da ordem de  $mHz$  ( $10^3 \mu Hz$ ) e se estendem em uma faixa que vai de  $\sim 600 \mu Hz$  ( $P = 1/f \simeq 650$  s) a  $\sim 14\,500 \mu Hz$  ( $P \simeq 70$  s). Podemos, então, dividir o periodograma de anãs brancas pulsantes em três regiões:

- Região de Baixas Frequências — frequências menores que  $\sim 600 \mu Hz$ .
- Região de Frequências de Pulsação — frequências entre  $\sim 600 \mu Hz$  e  $\sim 14\,500 \mu Hz$ . Nesta região aparecem os picos dos modos de pulsação da estrela.
- Região de Altas Frequências — os picos nesta região se mantêm dentro de uma faixa praticamente constante, muito parecida com o espectro de um ruído branco.



**Fig. 4.11:** *Periodograma de uma curva de luz mostrando um pico de baixa frequência, com alta amplitude.*

Estes picos de baixa frequência e alta amplitude não são gerados pela estrela. Não são frequências de pulsações radiais. O período das pulsações radiais é, pelo menos, uma ordem de grandeza menor que os observados nas anãs brancas. No gráfico da Fig.4.11, podemos ver um pico com amplitude bem proeminente na região de baixas frequências ( $< 600\mu Hz$ ), com frequência de  $140\mu Hz$ , correspondendo a um período de 2 horas.

É comum ver em curvas de luz, picos de baixas frequências com amplitudes bem maiores que as amplitudes dos modos de pulsação da estrela, como é o caso do exemplo acima. Quanto maior é a amplitude de um pico, maior é sua “interferência” sobre todos os outros. A presença dos picos de baixa frequência com grandes amplitudes aumenta o ruído interno da curva de luz, reduzindo nossa capacidade de detectar frequências de pulsação com amplitudes pequenas.

Mas, qual a origem real do picos de baixas frequências? A divisão da curva de luz da estrela pulsante pela estrela de comparação deveria, a princípio, remover *todo* o sinal devido à modulação do céu. Mas algo continua lá. Numa tentativa de entender a causa dos picos de baixas frequências, formulamos duas hipóteses, as duas relacionadas com extinção atmosférica.

Formulamos duas hipóteses para explicar a presença desses picos. Primeira hipótese: as baixas frequências seriam **frequências de modulação** que, de algum modo, não foram eliminadas pelo processo de redução. As variações na transparência do ar têm um efeito modulador sobre o sinal da estrela. A princípio, as correções para extinção atmosférica *deveriam remover* este efeito da curva de luz. A segunda hipótese: os picos de baixa frequência *não são* uma frequência de modulação e sim a frequência de um sinal sobreposto aos sinais da estrela, cuja origem real deveria ser descoberta depois.

## 4.5 Efeito de Modulação

Suponha que uma estrela com intensidade média  $Y_o$  pulse em uma única frequência de pulsação  $\omega = 2\pi f$  com amplitude  $a$ :

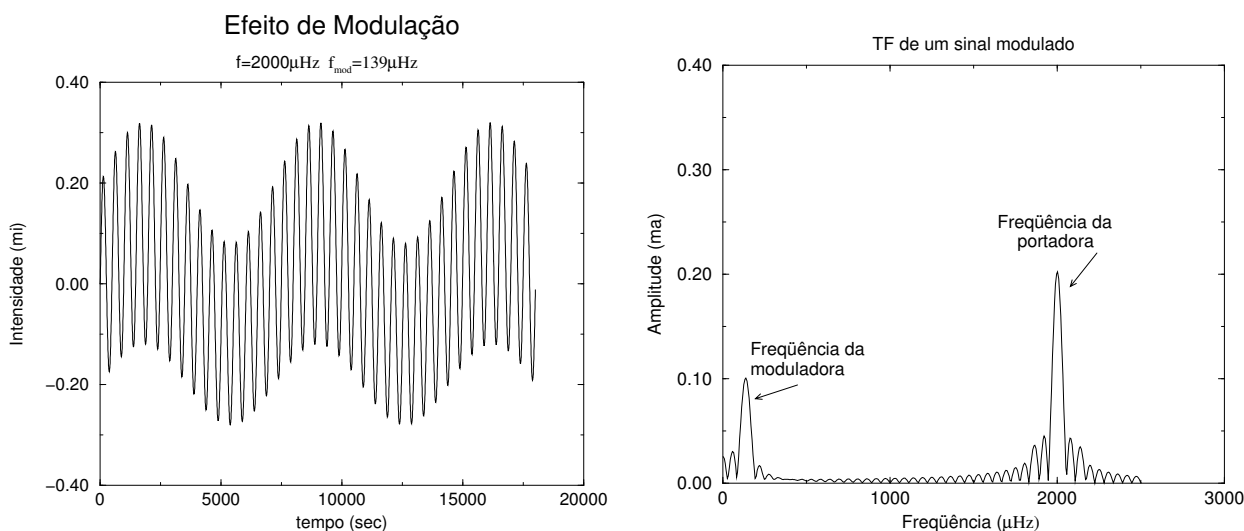
$$Y(t) = Y_o [1 + a \sin(\omega t)] \quad (4.21)$$

e que, ao passar pela atmosfera da Terra, a luz da estrela seja modulada por uma frequência moduladora  $\omega_{mod} = 2\pi f_{mod}$ , com amplitude de modulação  $a_{mod}$ :

$$y(t) = Y(t) \{1 + a_{mod} \sin[\omega_{mod} (t - t_o)]\} \quad (4.22)$$

A curva de luz resultante pode ser vista no gráfico da esquerda da Fig.4.12. O periodograma da curva de luz “detecta” tanto a frequência de pulsação (que poderíamos chamar de portadora), quanto a frequência moduladora.

Se um pico na FT é resultado de algum efeito de modulação, a curva de luz pode ser demodulada e o pico deve desaparecer do periodograma. Caso não seja uma frequência moduladora, seria melhor eliminado pela subtração de uma senóide da curva de luz. Quando



**Fig. 4.12:** À esquerda, vemos uma curva de luz modulada e à direita, seu periodograma.

se faz a demodulação de um sinal modulado, o sinal retoma sua forma original e a frequência moduladora desaparece do periodograma, como podemos ver nos gráficos da Fig.4.13.

Quando se faz a **subtração** da frequência moduladora de um sinal modulado, o sinal se torna muito parecido com sua forma original e a frequência moduladora *também desaparece* do periodograma, como podemos ver nos gráficos da Fig.4.14.

Uma conclusão importante é que um efeito real de modulação se comporta como um efeito de sobreposição de sinais. Isto é, podemos tratar os efeitos de modulação, com boa aproximação, como efeitos de superposição de sinais. A demodulação e a subtração da frequência moduladora *sempre* geram resultados muito parecidos.

Entretanto, quando o sinal realmente é modulado, os ajustes feitos após a demodulação são sempre levemente melhores que os ajustes feitos após a subtração do sinal. E, se o sinal é um sinal sobreposto, os ajustes serão levemente melhores quando se fizer a subtração do sinal. Isto pode ser usado como um teste para se distinguir entre a natureza dos dois efeitos. A técnica mais adequada para cada fim é aquela que produz a maior redução da dispersão dos pontos na curva de luz corrigida.

A Tab.4.1 e os gráficos da Fig.4.15 mostram os resultados de uma simulação, em que o sinal da estrela era modulado por uma frequência moduladora. O tempo de máximo real do sinal era igual a 125.0 s. A incerteza na determinação de  $T_{max}$  a partir da curva modulada foi igual a 0.7 s. Quando se fez a subtração da moduladora, a incerteza caiu para 0.09 segundos ( $\sim 10$  vezes menor) e quando se fez a correção por demodulação, a incerteza praticamente caiu a zero. A mesma correção ocorre com a amplitude.

Usando um programa chamado **PostRed**, que desenvolvemos especialmente para este fim, apliquei as duas técnicas, (a) demodulação e (b) subtração de sinal, a dezenas de curvas de luz, a fim de remover os picos de baixas frequências e altas amplitudes. Em *todos* os casos, os melhores resultados foram obtidos através da subtração de sinal, sugerindo que tais

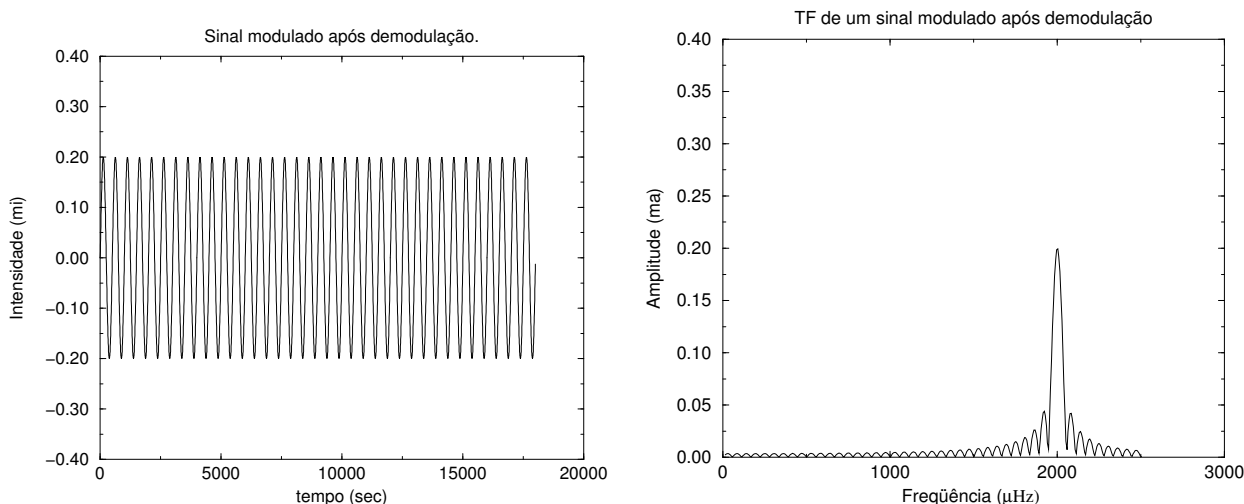


Fig. 4.13: Sinal após demodulação.

	Amplitude (ma)	$T_{max}$ (sec)	$\chi^2$ do ajuste
Valor Esperado	0.20	125.0	—
Sinal Modulado	$0.203 \pm 0.002$	$125.0 \pm 0.7$	$4.9 \times 10^{-3}$
Corrigido por Subtração	$0.2025 \pm 0.0002$	$125.00 \pm 0.09$	$1.0 \times 10^{-5}$
Corrigido por Demodulação	$0.20 \pm 6.0 \times 10^{-9}$	$125.00 \pm 2.0 \times 10^{-7}$	$5.4 \times 10^{-16}$

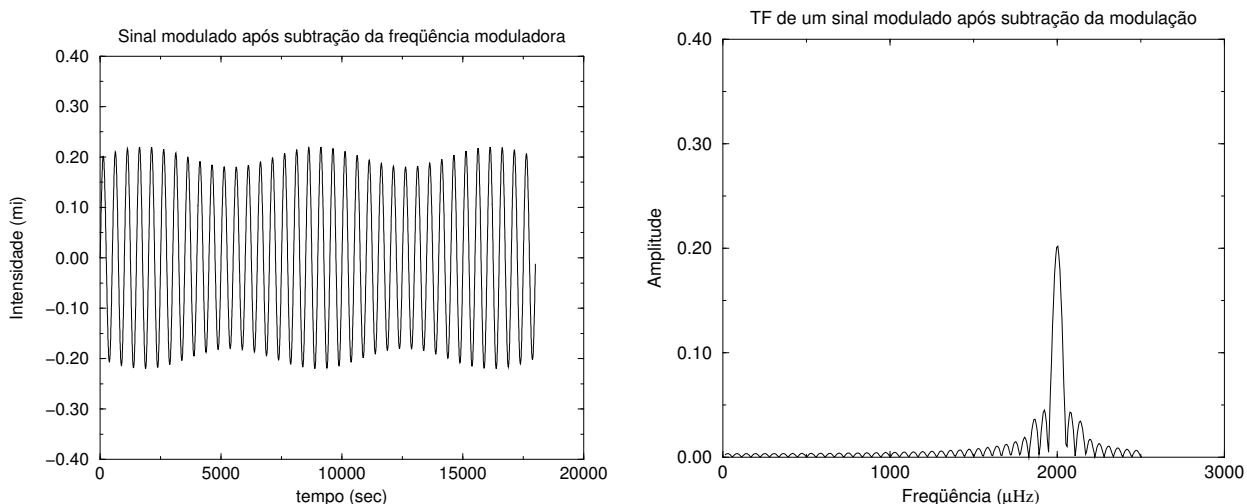
Tab. 4.1: Comparando a demodulação com a subtração da freqüência moduladora.

freqüências são realmente freqüências de sinais sobrepostos à curva de luz e não freqüências de qualquer efeito de modulação.

## 4.6 Origem dos Picos de Baixas Freqüências e Altas Amplitudes

Se essas freqüências não são sinais da estrela, nem são freqüências de modulação, o que são? Qual sua origem? Escalas de tempo da ordem de horas, são típicas de efeitos atmosféricos, mas todo e qualquer efeito devido à extinção atmosférica *deveria desaparecer* quando se faz a divisão da curva de luz da estrela alvo pela curva de luz da estrela de comparação. No entanto, ele não desaparece totalmente, sugerindo que alguma coisa não está bem neste passo do processo de redução.

A explicação pode estar na diferença de cores entre as duas estrelas. Tanto a absorção quanto o espalhamento de luz, responsáveis pela extinção atmosférica, são funções do comprimento de onda,  $\lambda$ . A massa de ar média varia no tempo fazendo com que o efeito de extinção também varie. Entretanto, esta variação *não é proporcional* para comprimentos de onda diferentes, fazendo com que o efeito de extinção sobre as duas estrelas não seja proporcionalmente constante ao longo da noite. Ademais, a presença de aerossóis e



**Fig. 4.14:** Sinal após a subtração da freqüência moduladora.

as marés atmosféricas podem tornar a aumentar a dependência da extinção em relação ao comprimento de onda.

O QED assume que as extinções sofridas pela luz das duas estrelas são proporcionais ao longo do tempo, ou seja, que os polinômios  $P_a(t)$  e  $P_b(t)$  são proporcionais:

$$P_a(t) \propto P_b(t) \rightarrow P_b(t) = \alpha P_a(t) \tag{4.23}$$

onde  $\alpha$  é a constante de proporcionalidade. Esta condição não é óbvia e passa facilmente despercebida, mas é uma **condição necessária** para que todo o resto do processo de redução funcione bem. Se  $P_a(t)$  e  $P_b(t)$  são proporcionais, então a divisão de canais sempre funcionará, porque  $P_a/P_b$  é uma constante. O problema surge quando os dois polinômios não são proporcionais: a dependência temporal será transferida para a curva de luz resultante, atuando como um sinal artificial (às vezes, semi-periódico) e podendo aparecer no periodograma como um pico de baixa freqüência e alta amplitude.

## 4.7 Correção para a Diferença de Cor

Para se fazer a *correção para a diferença de cor*, definimos a função corretiva  $f(t)$ :

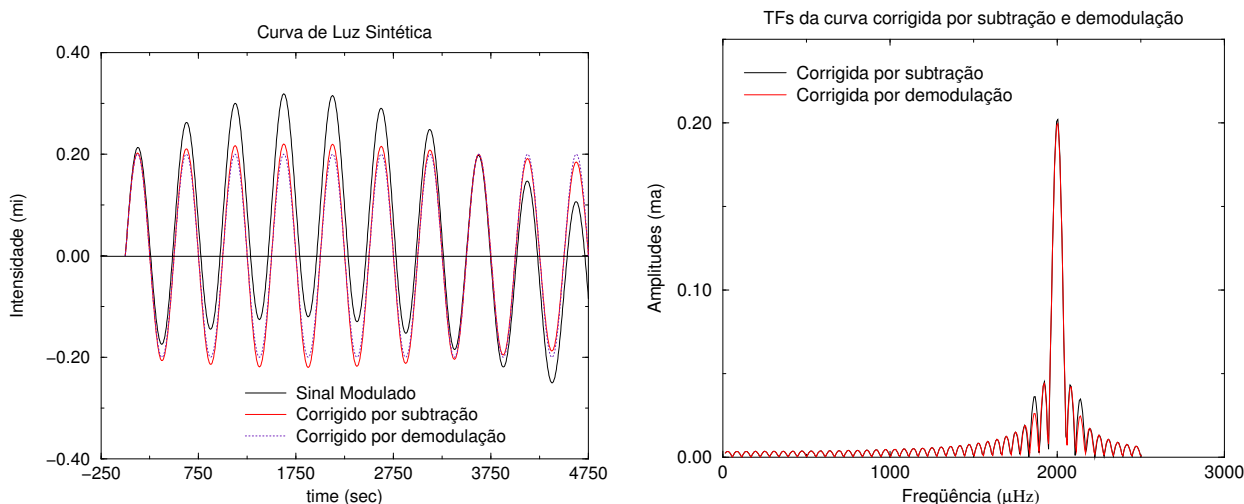
$$f(t) = r \frac{P_A(t)}{P_B(t)} \tag{4.24}$$

onde

$$r \equiv \frac{C_b}{C_a} = \frac{Max\{P_b(t)\}}{Max\{P_a(t)\}} \tag{4.25}$$

A correção é feita, através da multiplicação do canal  $b$  pela função corretiva:

$$\text{Leitura corrigida para diferença de cor} = f(t) \times \text{Leitura do canal b} \tag{4.26}$$



**Fig. 4.15:** Comparando a demodulação com a subtração da freqüência moduladora.

Com esta correção, a leitura do canal  $b$  passa a ser a leitura que, teoricamente, seria feita, caso as duas estrelas fossem exatamente da mesma cor. Note que se o efeito de extinção for o mesmo para as duas estrelas,  $f(t) = 1$  e nenhuma correção é feita. Diferenças entre as extinções fazem com que  $f(t)$  se afaste de 1, para mais ou para menos<sup>5</sup>.

## 4.8 Filtros Passa-Altas

A correção para a diferença de cor descrita acima deve ser aplicada *durante* o processo de redução e não faz parte do protocolo seguido pelo programa *QED*, usado em boa parte das reduções de dados do WET. Testes realizadas com um programa experimental para redução de dados, chamado *PhotoRed*, mostrou que a correção para diferença de cor é eficaz, reduzindo a amplitude dos picos de baixa freqüência nos periodogramas das curvas de luz.

Entretanto, notamos que freqüentemente eram necessários polinômios de mais altas ordens (entre 5 e 10) para que as amplitudes dos picos de baixa freqüências fossem reduzidos ao nível de ruído. Isto sugere que variações significativas na transparência do céu podem ocorrer em escalas de tempo menores, de forma que ajustes baseados em polinômios de baixa ordem não podem corrigir totalmente.

Nestes casos, pode ser necessário o uso de *filtros passa-altas* que retirem da curva de luz sinais com freqüências abaixo de um certo limite de corte e amplitudes acima do nível de ruído. Há várias técnicas que podem ser usadas em filtros deste tipo. Deve-se notar que quando o sinal é irregular, isso pode aparecer no periodograma como vários picos na região de baixas freqüências. Quando se retira as baixas freqüências de uma curva de luz, o nível de ruído diminui e alguns picos que antes estavam abaixo do nível de ruído agora podem

<sup>5</sup> A função  $f(t)$  é sempre maior que zero,  $f(t) \geq 0$ , porque tanto  $P_a(t) > 0$  e  $P_b(t) > 0$

estar acima dele, necessitando ser removidos. Entretanto, sempre existe a possibilidade de se subtraírem sinais reais da estrela como se fosse ruído.

## 4.9 Semelhança de Cores

Em fotometria por CCD, junto com a estrela alvo, temos várias estrelas (provavelmente não variáveis) dentro do campo do CCD que poderiam ser usadas como estrelas de comparação. Isto nos coloca diante de algumas questões:

- qual delas deve ser usada como estrela de comparação?
- que critério ou critérios devem ser usados na escolha?
- deve-se usar apenas uma estrela de comparação ou mais de uma?
- se forem usadas mais de uma, como se deve proceder?

Dois critérios que devem ser usados na escolha de uma estrela de comparação são: (a) o efeito de extinção deve ser o mais parecido possível nas duas estrelas e (b) as magnitudes aproximadamente iguais. Matematicamente, podemos definir um índice  $\mathcal{F}$  que nos dê uma idéia de quão parecido o efeito de extinção é nas duas curvas:

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{(t_f - t_o)} \int_{t_o}^{t_f} [f(t) - 1]^2 dt. \quad (4.27)$$

Quanto mais próximo de zero for o valor de  $\mathcal{F}$ , mais parecido é o efeito de extinção com o da estrela de comparação. Portanto, devemos escolher a estrela que apresente o menor valor de  $\mathcal{F}$ . Quanto ao segundo critério, podemos usar o fator  $r$  definido na Eq.4.25: quanto mais próximo de 1 for  $r$ , mais parecidas são as magnitudes das duas estrelas. Entretanto, para melhorar a relação S/R, a soma de todas as estrelas de comparação pode ser a melhor opção.

\* \* \* \* \*



## Capítulo 5

# PULSAÇÕES NÃO-RADIAIS

### 5.1 Introdução

O passo que segue a redução dos dados fotométricos de uma estrela pulsante é a detecção dos períodos de pulsação presentes em sua curva de luz.

Os mecanismos que perturbam o equilíbrio hidrostático da estrela, tornando-a instável, fazem com que ela entre em regime de pulsação, e que seu brilho varie em torno do valor médio, modulando a curva de luz da estrela. Nas anãs brancas e pré-anãs brancas pulsantes, essa modulação pode ser de 1% ou menos até 30% ou mais (Bradley 2000).

Como qualquer objeto em vibração mecânica, a estrela também não pode oscilar livremente em qualquer frequência, mas apenas em frequências específicas determinadas por sua geometria e constituição interna, como será mostrado no Cap.6.

Em anãs brancas, a alta gravidade desempenha papel de força restauradora. Qualquer deslocamento radial de massa sofre a ação da força gravitacional fazendo com que a porção de massa deslocada seja espalhada para dentro e para os lados. Modos de pulsação deste tipo são chamados de *modos-g*. Mas podem existir modos, chamados *modos-p* onde a *pressão* desempenha papel de força restauradora (Ledoux & Walraven 1958).

A simetria esférica da estrela<sup>1</sup> impõe fortes restrições aos modos de pulsação: a estrela pode apenas pulsar em modos descritos por funções de harmônicos esféricos e suas combinações.

Quando um tambor é percutido, seus modos de pulsação não são todos excitados com a mesma amplitude. O mesmo ocorre com as anãs brancas e PWD pulsantes: vários modos se mostram excitados, mas com diferentes amplitudes. Alguns modos parecem não ter sido excitados, ou pelo menos, suas amplitudes estão abaixo do limite de detecção. Em geral, apenas os modos com valores mais baixos de  $\ell$  podem ser detectados e isto depende da faixa de comprimentos de onda espectral observada. Por exemplo, para o visível, consegue-se detectar somente os modos  $\ell = 1$  e  $\ell = 2$  nas anãs brancas (Robinson, Kepler & Nather 1982, Dziembowski 1981). Essa é uma limitação observacional.

---

<sup>1</sup> Existem estrelas que não são perfeitamente esféricas. Isso pode ocorrer quando sua velocidade de rotação é alta ou quando forma um sistema binário próximo com outra estrela. Nesses casos, o desvio da forma esférica precisa ser levado em conta.

Em algumas anãs brancas, a pulsação apresenta efeitos não-lineares e observa-se a presença de frequências harmônicas e de combinações lineares de frequências de pulsação (Vuille *et al.* 1999). As combinações de frequências fazem com que a estrela pulse em frequências que normalmente não pulsaria caso seu comportamento fosse estritamente linear.

Devido às propriedades da simetria de pulsação, a inclinação do eixo de simetria em relação ao observador afeta apenas as amplitudes observadas de cada modo de pulsação (Pesnell 1985). Entretanto, a rotação da estrela afeta a frequência aparente de cada modo de pulsação fazendo com que seja levemente maior ou menor do que a frequência real. Através deste efeito, conhecido como *desdobramento rotacional*, pode-se determinar a velocidade de rotação da estrela.

Campos magnéticos muito intensos podem “frear” ou “acelerar” os modos de pulsação, afetando as frequências de pulsação, como veremos mais adiante

## 5.2 A Função de Brilho para Modos-g

A função de brilho  $f$  mapeia o brilho sobre a superfície da estrela num dado instante de tempo  $t$ , emitido para comprimentos de ondas no intervalo  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ , para um modo-g de pulsação caracterizado pelos índices  $\ell$  e  $m$  e pela frequência  $\nu$ . Esta função envolve um termo radial, termos angulares e um termo temporal:

$$f(r, \theta, \phi; \lambda; \ell, m, \nu; t) = R(r) h(\theta, \phi, \lambda) \operatorname{Real} \left\{ Y_m^\ell(\theta, \phi) e^{i\nu t} \right\} \quad (5.1)$$

onde  $R(r)$  é o termo radial,  $\nu$  é a frequência de pulsação (em  $Hz$ ),  $Y_m^\ell$  são os *harmônicos esféricos*, ponderados em função do comprimento de onda  $\lambda$  pela função  $h$  e  $e^{i\nu t}$  é o termo que introduz a variabilidade temporal.

Na superfície da estrela, os deslocamentos na direção radial são bastante pequenos devido à alta gravidade. Kepler (1984) estimou que os deslocamentos radiais na superfície da DAV G117-B15A ( $\log g = 7.97$ ; Bergeron *et al.* 1995) era da ordem de 1 metro. Para deslocamentos tão pequenos na superfície, podemos assumir que o termo radial se mantém aproximadamente constante:

$$R(r) \simeq R(R_\star) = \text{constante} \quad (5.2)$$

$R(R_\star)$  define o valor médio do brilho superficial da estrela, enquanto que os termos angulares  $h(\theta, \phi, \lambda)$  e  $Y_m^\ell(\theta, \phi)$  definem a variação espacial relativa e o termo  $e^{i\nu t}$  a variação temporal.

## 5.3 Harmônicos Esféricos

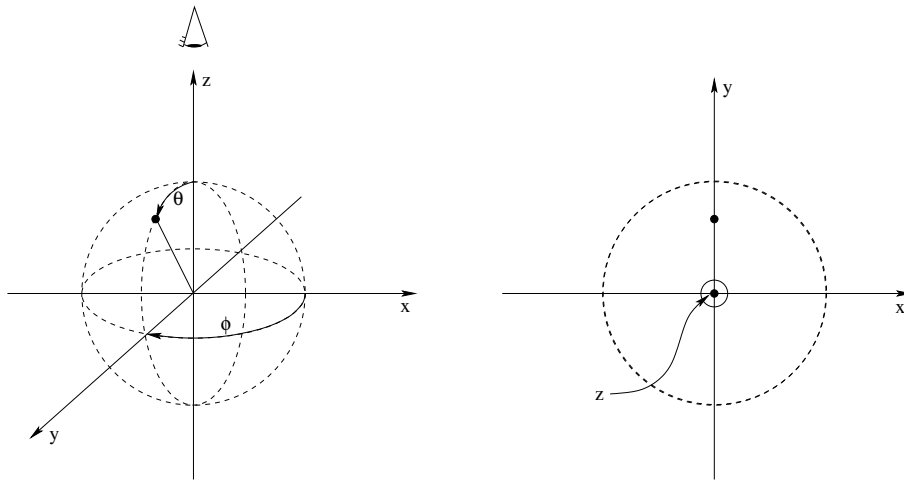
Em matemática, o termo “harmônico” pode ser entendido como sinônimo de “senóide” ou “sinusoidal” (senos e cossenos). Qualquer função que envolva uma combinação linear de senos e cossenos é uma função “harmônica”. Este é o caso dos harmônicos esféricos.

Os harmônicos esféricos<sup>2</sup> são dados em termos de *Polinômios Associados de Legendre*,  $P_\ell^m(\cos \theta)$ :

$$Y_m^\ell(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (-1)^m e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta) \quad , \quad (5.3)$$

onde  $P_\ell^m(\cos \theta)$  pode ser calculado através da relação:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{(\cos \theta)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (\cos \theta)^n . \quad (5.4)$$



**Fig. 5.1:** Esquemática das coordenadas angulares  $(\theta, \phi)$  usadas nos harmônicos esféricos. O ângulo  $\theta$  é medido em relação ao semi-eixo positivo  $z$ . O ângulo  $\phi$  é medido sobre o plano  $xy$  a partir do semi-eixo positivo  $x$ .

O sistema de coordenadas usado é o sistema de coordenadas esféricas, onde os ângulos  $(\theta, \phi)$  são as coordenadas angulares de um ponto qualquer na esfera (ver Fig. 5.1).

O índice  $\ell$  é chamado de *índice do harmônico esférico* ou *grau do modo de pulsação* e para o modo-g (e também para o modo-p) de pulsação  $\ell$  será sempre um número inteiro maior que 1:

$$\ell \geq 1; \quad \ell = 1, 2, 3, 4, \dots$$

O índice  $m$  é chamado de *índice azimutal* e é um número inteiro entre  $-\ell$  e  $+\ell$ :

$$m = -\ell, \dots, 0, \dots, +\ell$$

---

<sup>2</sup> O fator com a raiz quadrada é o fator de normalização.

Ao todo, são  $(2\ell + 1)$  valores possíveis para o índice  $m$ . Como será mostrado mais adiante, a frequência  $\nu$  não pode assumir qualquer valor, mas apenas valores específicos dentro de uma seqüência definida por um terceiro índice chamado *índice nodal*  $k$ . Os índices  $(k, \ell, m)$  definem cada um dos possíveis *modos de pulsação* da estrela.

O brilho varia com a quarta potência da temperatura,  $f \propto R^2 T^4$  ( $\delta f \propto R^2 T^3 \delta T$ ) e, portanto, as regiões mais brilhantes na superfície da estrela são mais quentes e as menos brilhantes, mais frias em relação à temperatura superficial média da estrela, já que nas pulsações não-radiais o raio  $R$  não varia significativamente.

Os índices  $\ell$  e  $m$  se manifestam na superfície da estrela na maneira como as zonas quentes e as zonas frias estão arrançadas sobre ela. Pode-se pensar na estrela como sendo uma esfera com dois *pólos* diametralmente opostos. A linha que passa pelos dois pólos é o *eixo de simetria* e o plano perpendicular ao eixo de simetria e que passa pelo centro é o *plano equatorial* da estrela.

Qualquer plano imaginário que intercepte a estrela define um círculo sobre sua superfície. Vamos considerar dois casos particulares de planos: *perpendiculares* ao plano equatorial contendo o eixo de simetria, chamados de *planos meridionais*; e *planos paralelos* ao plano equatorial. Os primeiros definem os *círculos meridionais* (ou meridianos) e os segundos definem os *círculos paralelos*.

O índice  $\ell$  é igual ao número total de planos que cortam a superfície da estrela. Desses  $\ell$  planos,  $|m|$  são planos meridionais e o resto são planos paralelos.

## 5.4 Zonas Quentes e Frias

A expressão para o número de zonas quentes/frias sobre a superfície da estrela é um pouco mais complicada:

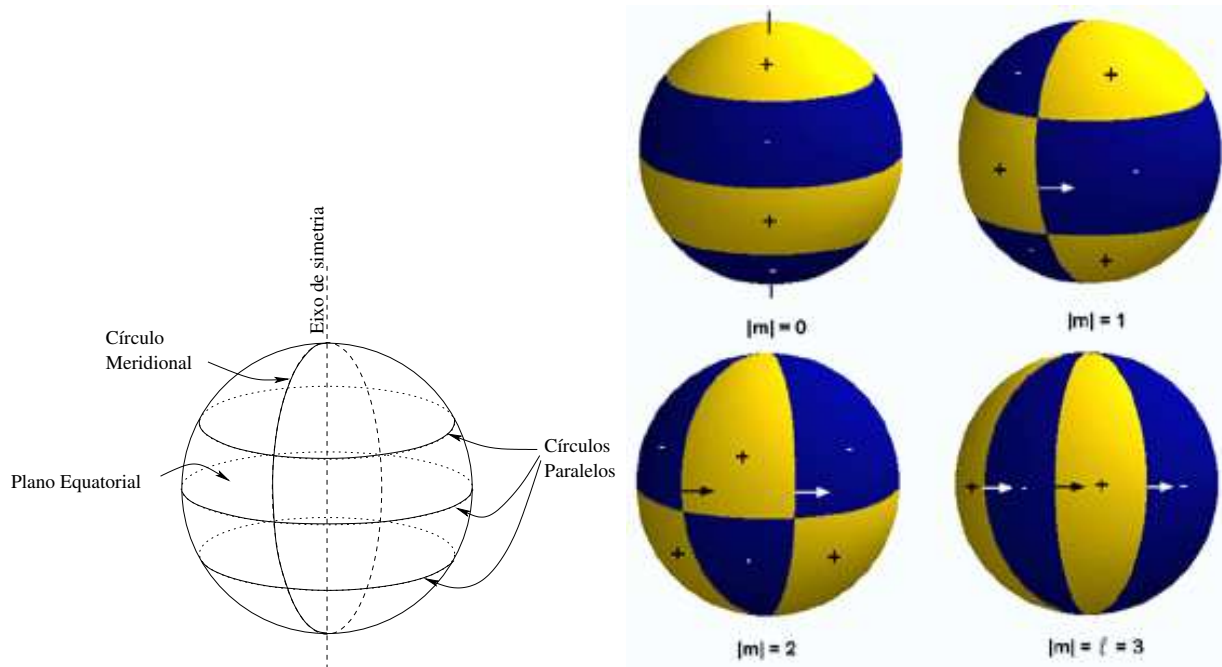
$$\text{número de zonas} = (\ell + 1 - |m|) \times 2^{|m|} \quad (5.5)$$

A Tabela 5.1 mostra o número total de zonas quentes/frias para diferentes valores de  $\ell$  e  $|m|$ , com  $\ell$  variando entre 1 e 5.

## 5.5 Parte Real da Função de Brilho

Introduzindo Eq.5.3 na equação Eq.5.1 temos:

$$f(R_\star, \theta, \phi; \lambda; \ell, m, \nu, t) = R(\star) h(\theta, \phi, \lambda) \operatorname{Real} \left\{ \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (-1)^m e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta) e^{i\nu t} \right\}$$



**Fig. 5.2:** Os planos definem círculos sobre a superfície da estrela, sobre os quais a temperatura é igual à temperatura efetiva média. As zonas entre os círculos têm gradientes com temperaturas acima da média (zonas quentes) ou abaixo da média (zonas frias). Na figura da esquerda, a esfera foi cortada por 4 planos, 3 paralelos e 1 meridional, portanto, o modo de pulsação é  $\ell = 4$  e  $|m| = 1$ . Já as quatro esferas da direita são cortadas por 3 planos, mas o número de planos meridionais são 0, 1, 2 e 3. Todas têm modo com  $\ell = 3$ , mas com diferentes valores de  $|m|$ .

Número Total de Planos $\ell$	Número de Planos Meridionais $ m $	Número d de Planos Paralelos $\ell -  m $	Número Total de Zonas $(\ell + 1 -  m ) \times 2^{ m }$
1	0	1	2
1	1	0	2
2	0	2	3
2	1	1	4
2	2	0	4
3	0	3	4
3	1	2	6
3	2	1	8
3	3	0	8
4	0	4	5
4	1	3	8
4	2	2	12
4	3	1	16
4	4	0	16
5	0	5	6
5	1	4	10
5	2	3	16
5	3	2	24
5	4	1	32
5	5	0	32

**Tab. 5.1:** Número de zonas quentes/frias para modos com  $\ell \leq 5$ .

Considerando apenas a parte real, temos:

$$f(R_*, \theta, \phi; \lambda; \ell, m, \nu, t) = R(R_*) h(\theta, \phi, \lambda) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (-1)^m P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\phi + \nu t) \quad (5.6)$$

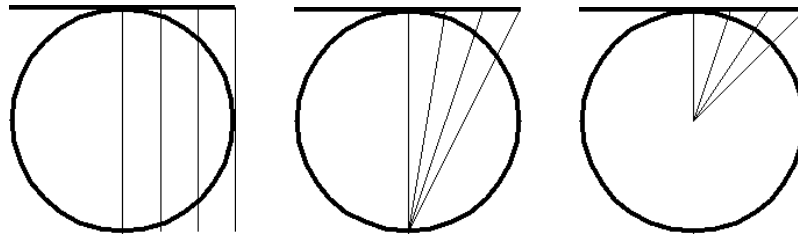
## 5.6 Representação Gráfica

A função de brilho pode ser representada graficamente a partir de alguma forma de *mapeamento*. O mapeamento estabelece uma relação bi-unívoca entre a superfície de um objeto tri-dimensional e uma superfície plana, bi-dimensional (mapa). Os valores da função de brilho podem ser representados no mapa com base em uma escala de cores e/ou por curvas de níveis.

Os mapas, são construídos a partir de algum tipo de *projeção*. As projeções podem ser classificadas de acordo com o esquema abaixo:

1. Tipo de construção:

- (a) Direta: as projeções são construídas por linhas retas que vão de um ponto sobre a superfície da estrela ao plano de projeção. O ponto inicial pode estar no infinito (projeção ortográfica), no centro da esfera (projeção gnômica), ou a uma distância finita do centro da estrela (projeção estereográfica), conforme é ilustrado na Fig.1a



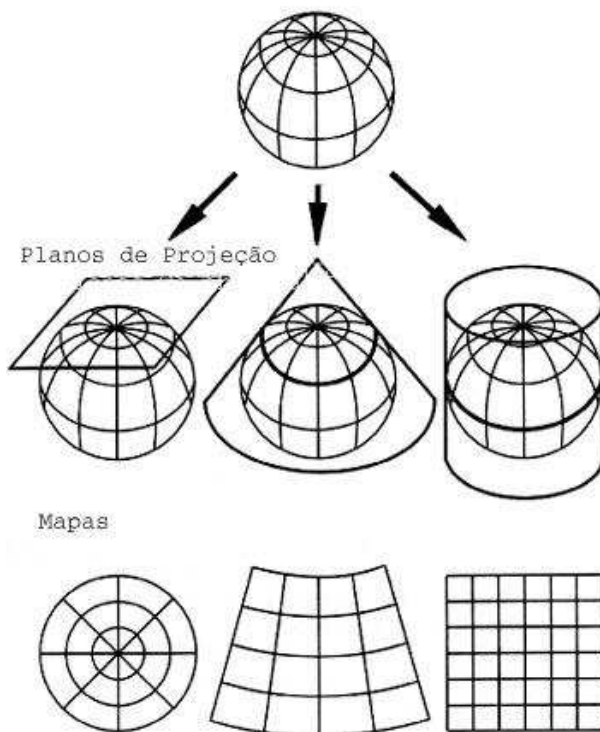
**Fig. 5.3:** Projeções com construção direta: (a) ortográfica. (b) estereográfica. (c) gnômica.

- (b) Indireta: são as projeções construídas a partir de leis geométricas ou de alguma relação matemática.

2. Plano de projeção (Fig.5.4):

- (a) Azimutal: o plano de projeção é uma superfície plana tangente à superfície da estrela.

- (b) Cilíndrica: o plano de projeção é um cilindro circunferenciando a estrela e tangente à sua superfície.
- (c) Cônica: o plano de projeção é um cone circunferenciando a estrela e tangente à sua superfície.



**Fig. 5.4:** *Projeções: os mapas são projeções dos pontos de uma superfícies tridimensional sobre um plano de projeção. Planos de projeção: (a) plano azimutal, (b) plano cônico, e (c) plano cilíndrico.*

3. Orientação do plano de projeção:

- (a) Normal: o eixo principal do plano de projeção é paralelo ao eixo de referência<sup>3</sup> da estrela. O eixo de referência da estrela é arbitrário. Pode ser o eixo de rotação (se conhecido) ou o eixo de simetria de pulsação.
- (b) Transversal: o eixo principal é ortogonal ao eixo de referência da estrela.

4. Propriedades preservadas:

- (a) Distâncias preservadas (eqüidistante): a projeção preserva as distâncias em certas direções.
- (b) Áreas preservadas: os mapas podem ser construídos de forma que a área para um dados ângulo sólido na estrela seja a mesma no mapa.

<sup>3</sup> O eixo de referência pode ser o eixo de rotação (se conhecido) ou o eixo de simetria de pulsação ou um outro eixo qualquer.

- (c) Ângulos preservados (conformal): quando as coordenadas angulares (longitude, latitude) de um ponto sobre a superfície da estrela são as mesmas no mapa.

No estudo de anãs brancas, as projeções com uso prático são:

- Projeção azimutal ortográfica — esta projeção gera uma imagem “natural” da pulsação sobre a superfície visível da estrela. O plano de projeção pode ser deslocado permitindo que a estrela seja visualizada de ângulos diferentes.
- Projeção cilíndrica eqüidistante — permite a visualização da pulsação sobre toda a superfície da estrela. Este tipo de projeção facilita o reconhecimento de padrões, mesmo em modos com grandes valores para  $\ell$ . Este tipo de projeção também facilita o entendimento decorrentes da geometria, rotação e campo magnético sobre a função de brilho superficial.

## 5.7 Evolução Temporal

Na Eq.5.6 o termo  $\cos(m\phi + \nu t)$  faz com que o brilho de qualquer ponto  $(\theta, \phi)$  varie no tempo de forma sinusoidal. Se  $m < 0$  teremos uma diferença de fase de  $180^\circ$ .

As figuras Fig.5.5, Fig.5.6 e Fig.5.7 mostram a evolução de um ciclo completo de pulsação sobre a superfície da estrela em intervalos de  $1/4$  de período, para os modos  $\ell = 1, m = 0$ ;  $\ell = 1, m = +1$ ; e  $\ell = 1, m = -1$ .

A variação do brilho em relação ao seu valor médio é indicada pela escala de cor mostrada no canto inferior esquerdo de cada figura. O valor 0 (zero) corresponde ao brilho médio da estrela. Variações para mais são indicados por tons mais claros e variações para menos por tons mais escuros. Um ponto com índice 0.3, por exemplo, significa que seu brilho está 30% acima do brilho médio. Podemos pensar nas pulsações como sendo manchas térmicas que se deslocam sobre a superfície da estrela.

As figuras da esquerda são projeções azimutais ortográficas transversais da estrela. A linha vertical representa o eixo de simetria de pulsação, formando um ângulo de  $90^\circ$  com o eixo de visada. À direita, vemos o mapa da superfície da estrela (projeção cilíndrica eqüidistante). O ângulo  $\theta$  varia de 0 a  $180^\circ$  e está no eixo vertical, enquanto que o ângulo  $\phi$  pode variar de 0 a  $360^\circ$  e está no eixo horizontal. Numa projeção deste tipo podemos ver a distribuição e o deslocamento das manchas térmicas sobre toda a superfície da estrela. Note que numa projeção cilíndrica a borda da esquerda e a borda da direita são na verdade uma mesma linha. Por isso, a mancha que “sai” pela direita é a mesma mancha que “entra” pela esquerda, e vice-versa. Note também que a linha da borda horizontal superior é na verdade um ponto na estrela real e o mesmo ocorre com a borda horizontal inferior e por isso tem sempre a mesma cor.

A área mostrada na figura da esquerda corresponde à metade direita do mapa. Observando o mapa superficial, vemos que as manchas aparecem aos pares e que no modo  $\ell =$



1,  $m = +1$ , as manchas se deslocam para a esquerda enquanto que no modo  $\ell = 1, m = -1$  elas se deslocam para a direita. A diferença entre modos com  $m$  positivo e  $m$  negativo (para um mesmo  $\ell$ ) está no sentido em que a pulsação evolui sobre a superfície da estrela. O mesmo vale para  $\ell = 2$  e  $m = \pm 1$  ou  $\ell = 2$  e  $m = \pm 2$ , etc (Fig.5.8 a 5.10).

## 5.8 Integral de Brilho

O brilho emitido por um elemento de área na superfície da estrela se propaga radialmente em uma direção normal à mesma, que pode ser denotada pelo vetor unitário<sup>4</sup>  $\hat{n}_\theta$ :

$$\vec{f}(R_\star, \theta, \phi; \lambda; \ell, m, \nu, t) = R(R_\star) h(\theta, \phi, \lambda) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (-1)^m P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\phi + \nu t) \hat{n}_\theta$$

Somente a componente do brilho na direção do observador,  $\hat{r}$ , será observada, ou seja,  $\vec{f} \cdot \hat{r}$ , conforme mostra a Fig.5.11. Se o produto escalar é negativo, então o elemento de área está no lado oculto da estrela e sua radiação não atinge o observador.

Para se calcular o brilho total emitido em um dado instante  $t$  pela estrela, devemos integrar a função  $f$  sobre toda a superfície visível da estrela e sobre os comprimentos de onda da faixa observada:

$$F(\nu, \lambda_1, \lambda_2, t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int \int \vec{f}(R_\star, \theta, \phi; \lambda; \nu, t) \cdot \hat{r} \, d\theta \, d\phi \, d\lambda$$

$$F(\nu, \lambda_1, \lambda_2, t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int \int R(R_\star) h(\theta, \phi, \lambda) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (-1)^m P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\phi + \nu t) \hat{n}_\theta \cdot \hat{r} \, d\theta \, d\phi \, d\lambda$$

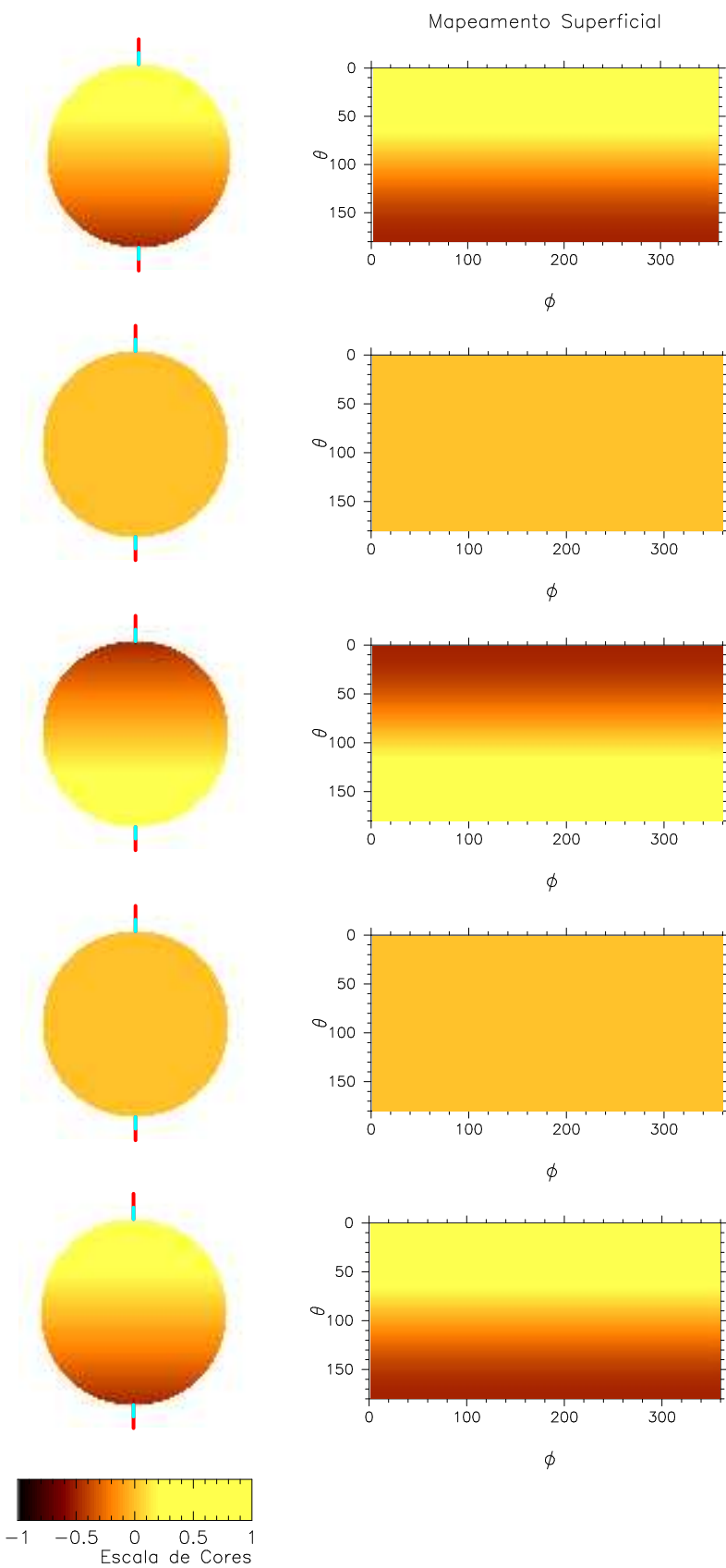
$$F(\nu, \lambda_1, \lambda_2, t) = R(R_\star) \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} (-1)^m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int \int h(\theta, \phi, \lambda) P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\phi + \nu t) \hat{n}_\theta \cdot \hat{r} \, d\theta \, d\phi \, d\lambda$$

Surpreendentemente, o resultado da integral acima é bastante simples:

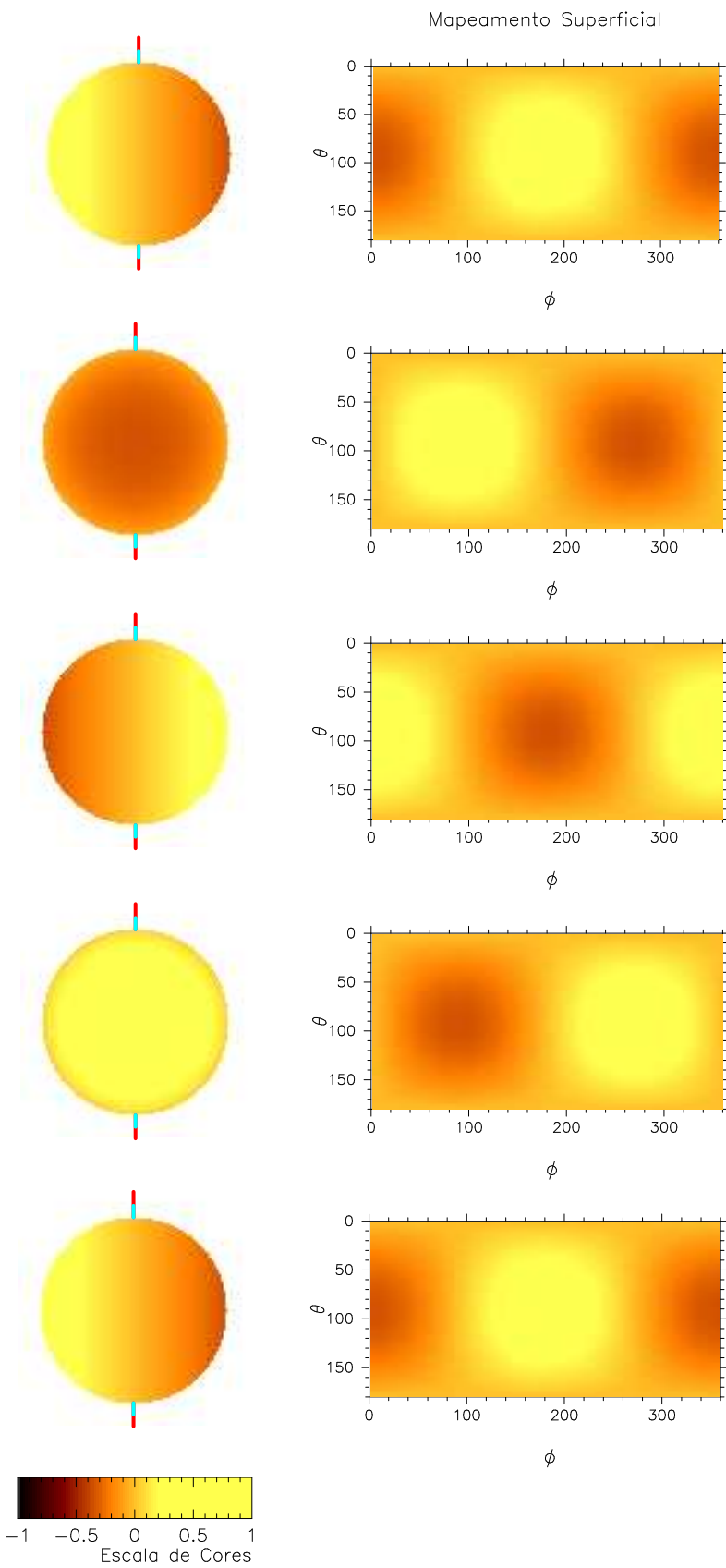
$$F(\nu, \lambda_1, \lambda_2, t) = A \sin [2\pi\nu(t - t_o)] \quad (5.7)$$

A Eq.5.7 é a equação de uma senóide, onde a constante  $A$  é a *amplitude* e depende de cada frequência de pulsação e da faixa de comprimentos de onda observada;  $t_o$  é um instante em que  $F = 0$ , chamado *tempo de zero*. Isto gera uma certa ambigüidade já que em um ciclo quando  $F = 0$  a curva pode ser crescente ( $dF/dt > 0$ ) ou decrescente ( $dF/dt < 0$ ), como mostra a Fig.5.12. Neste trabalho, definimos o tempo de zero  $t_o$  como sendo qualquer instante em que  $F = 0$  e a derivada  $dF/dt$  é positiva.

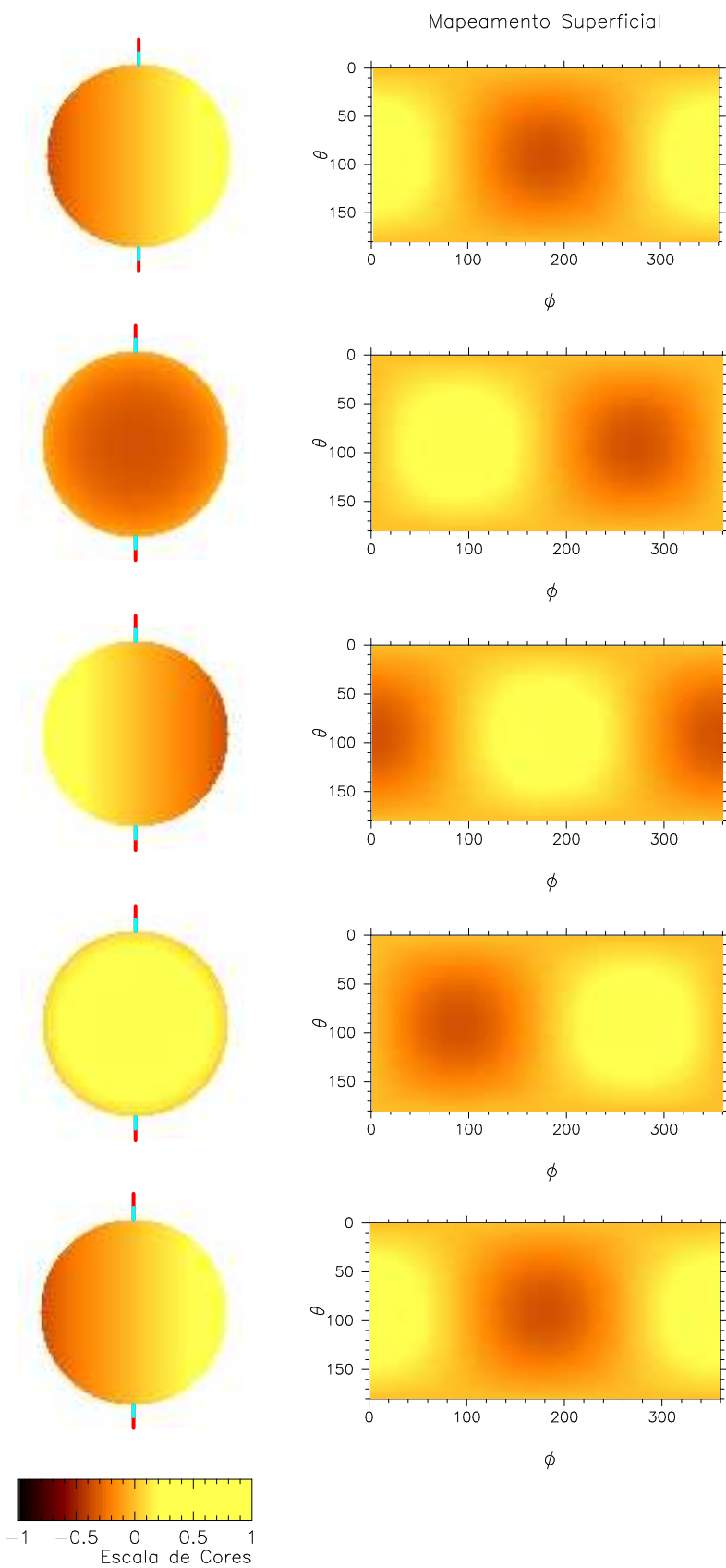
<sup>4</sup> Esta é a notação vetorial parecida com a adotada por Pesnell (1985).



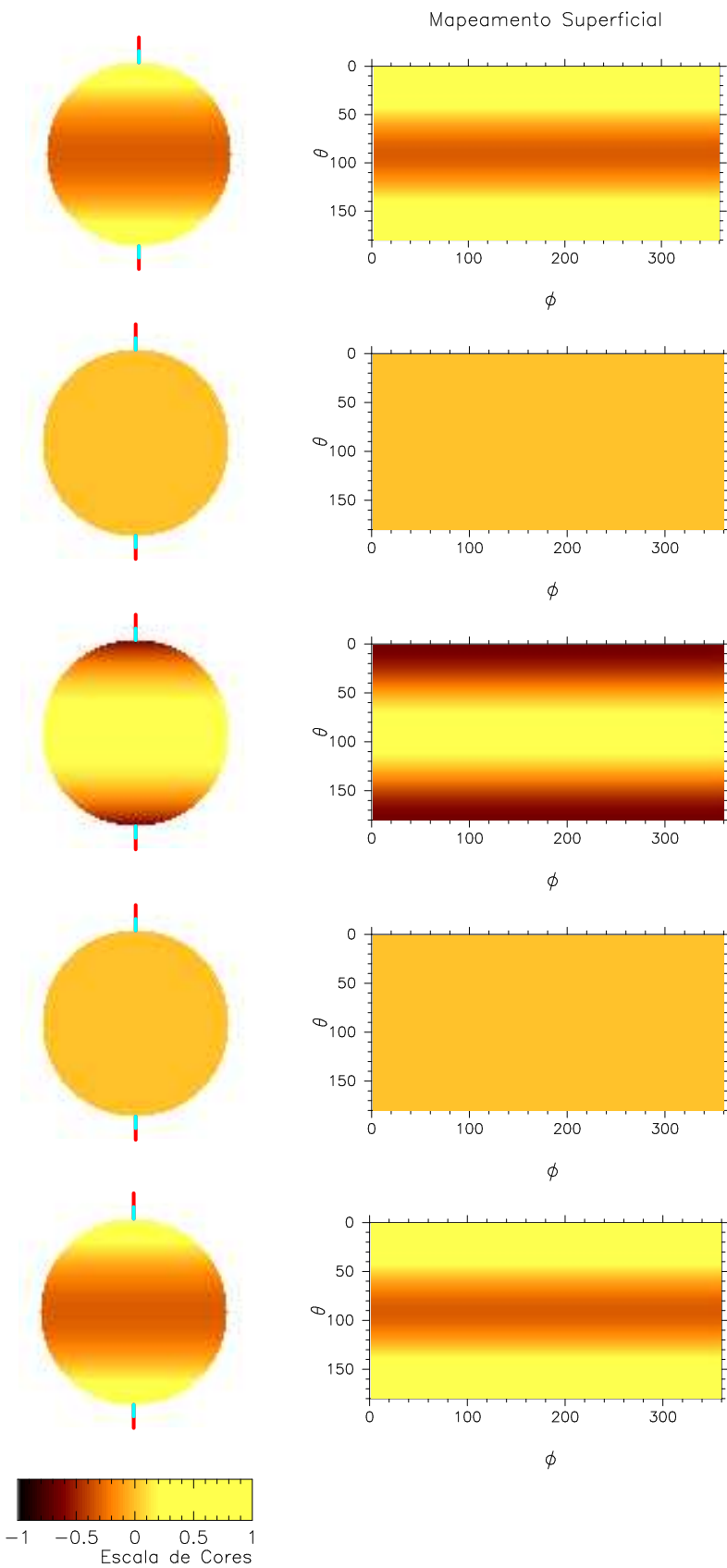
**Fig. 5.5:** A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 1$  e  $m = 0$ ). O brilho é mapeado através da escala de cores mostrada na parte de baixo.



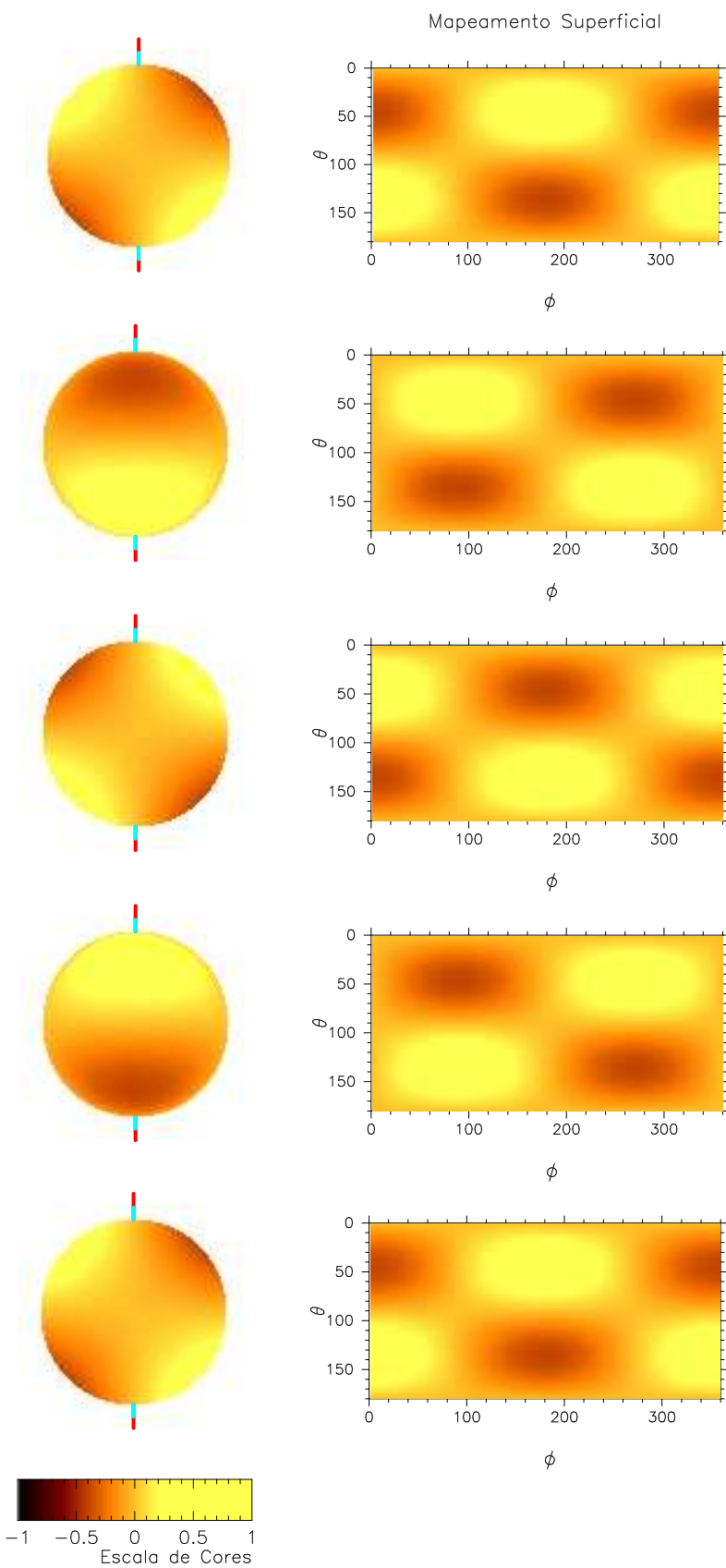
**Fig. 5.6:** A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 1$  e  $m = +1$ ).



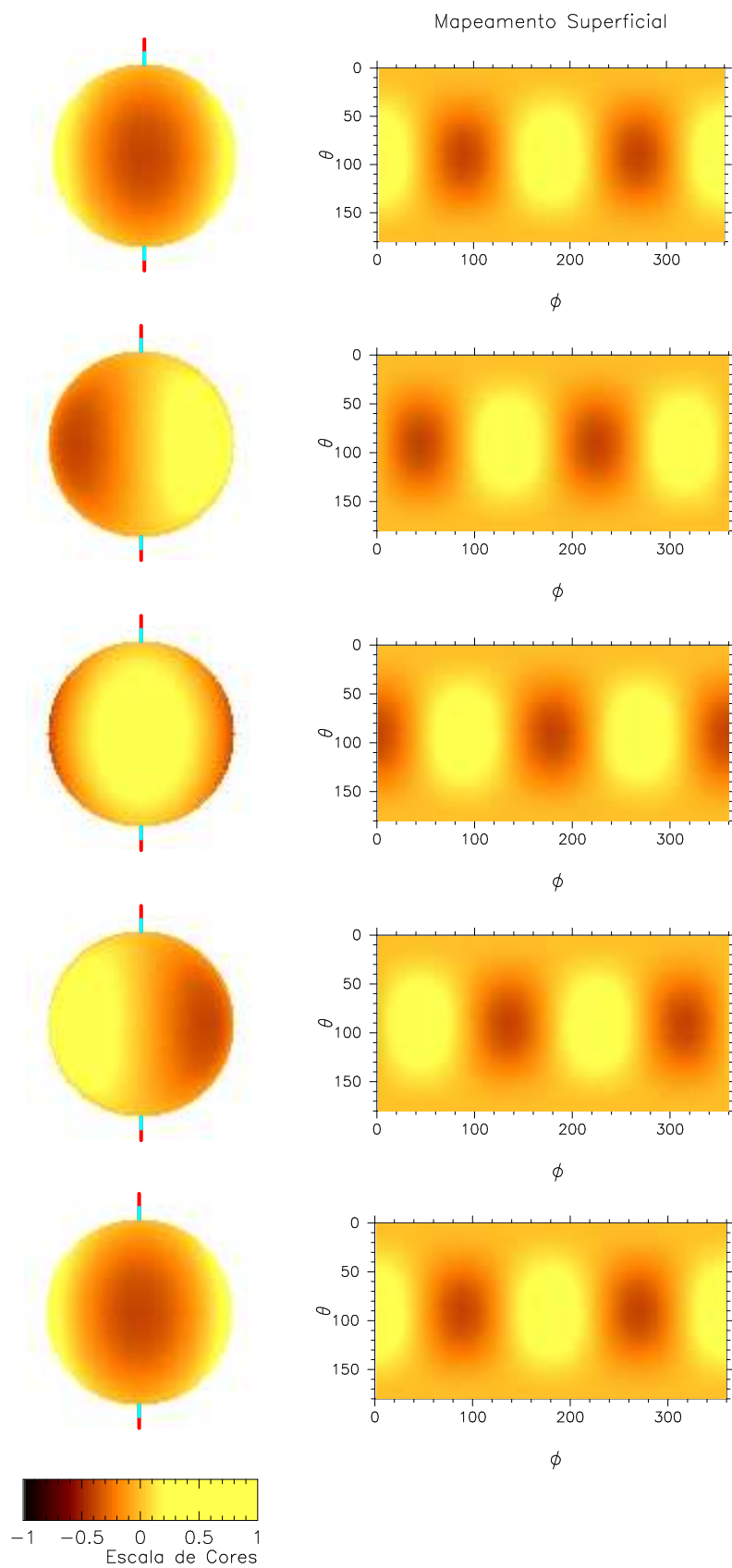
**Fig. 5.7:** A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 1$  e  $m = -1$ ). Note que as manchas térmicas se deslocam no sentido oposto ao do modo ( $\ell = 1$  e  $m = 1$ ).



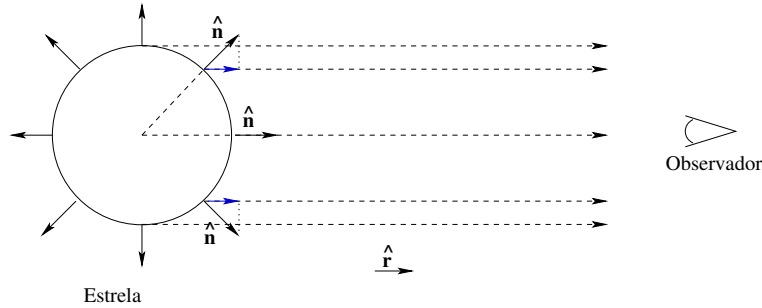
**Fig. 5.8:** A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 2$  e  $m = 0$ ).



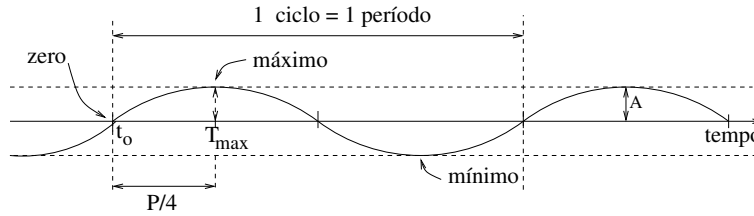
**Fig. 5.9:** A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 2$  e  $m = +1$ ).



**Fig. 5.10:** A figura mostra uma pulsação do modo ( $\ell = 2$  e  $m = +2$ ).



**Fig. 5.11:** Somente a componente do brilho na direção do observador pode ser detectada.



**Fig. 5.12:** Uma curva sinusoidal.

Mas tudo fica mais claro se usarmos um instante em que a curva atinge seu máximo, chamado *Tempo de Máximo*, e denotado por  $T_{max}$ , como referência temporal. Há uma outra boa razão para isto: um sinal pode ser detectado com maior facilidade e precisão justamente quando atinge o seu máximo e a relação sinal/ruído é maior.

Como  $T_{max} = t_0 + P/4$ , podemos reescrever a Eq.5.7 assim:

$$F(\nu, \lambda_1, \lambda_2, t) = A \sin \left[ 2\pi\nu (t - T_{max}) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (5.8)$$

A curva de luz será igual ao somatório de todos os modos possíveis. Usando  $f_{kl}$  para denotar a frequência  $\nu$  de cada modo, temos:

$$y(t) = \sum_{k>0} \sum_{\ell \geq 1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} A_{k\ell m} \sin \left[ 2\pi f_{kl} (t - T_{max_{k\ell m}}) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (5.9)$$

## 5.9 Rotação da estrela

As pulsações se manifestam na superfície da estrela como ondas térmicas que se propagam ao redor do eixo de simetria ou na direção pólo-a-pólo com uma certa velocidade angular  $\vec{\omega}$ . Por outro lado, a estrela gira em torno de seu eixo de rotação com uma velocidade angular  $\vec{\Omega}$ . O que um observador vê é, na verdade, a soma vetorial das duas velocidades. Assim, ao invés da velocidade (ou frequência) angular observada de um dado modo ( $\ell = 1$ ) ser  $\vec{\omega}$ , será:



$$\vec{\omega}_{obs} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \quad (5.10)$$

O caso mais simples ocorre quando o eixo de simetria e o eixo de rotação estão alinhados e a estrela gira quase como um corpo rígido. Neste caso a equação vetorial acima se reduz a uma equação escalar:

$$\omega_{obs} = \omega + \Omega \quad (5.11)$$

e é muito fácil entender o que ocorre. Nos modos com  $m < 0$ , de acordo com a definição (arbitrária) proposta por (Winget *et al.* 1991), a onda térmica se propaga em sentido contrário ao da rotação e, portanto, a frequência angular observada será:

$$\omega_{obs} = \omega - |\Omega| \quad (5.12)$$

Para modos com  $m > 0$  a onda térmica se propaga no mesmo sentido do movimento de rotação, e:

$$\omega_{obs} = \omega + |\Omega| \quad (\text{para } \ell = 1) \quad (5.13)$$

Para os modos com  $m = 0$ , a onda térmica se propaga na direção pólo-a-pólo, perpendicular à velocidade angular de rotação da estrela. Neste caso:

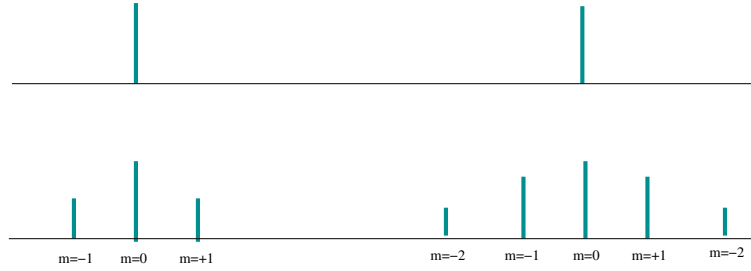
$$\omega_{obs} = \omega \quad (5.14)$$

As equações anteriores são válidas para modos com  $\ell = 1$  em que há apenas um meridiano ( $m = 1$ ) dividindo a estrela em duas zonas. Para  $\ell > 1$ , se  $m = 2$  teremos 2 meridianos dividindo a superfície da estrela em 4 zonas. Neste caso, a velocidade angular aparente de pulsação será duas vezes maior. De um modo geral:

$$\omega_{obs} = \omega + m\Omega \quad (5.15)$$

No periodograma da curva de luz, o pico de cada modo  $\ell$  se desdobra em  $2\ell + 1$  picos, com frequências aparentes diferentes, formando um *tripleto* (se  $\ell = 1$ ) ou um *multipleto* (se  $\ell > 1$ ). Este efeito é chamado de “desdobramento rotacional” (*rotational splitting*, em inglês) e através dele podemos estimar a velocidade de rotação da estrela (Fig.5.13). Winget *et al.* (1991) usaram o desdobramento rotacional observado no periodograma dos dados de 1989 da PG 1159-035 ( $\delta f = 4.22 \mu Hz$  para  $\ell = 1$ ) para estimar o período de rotação da estrela, de  $P_{rot} = 1.38 \pm 0.01$  dias.

No mundo real, as estrelas não giram como corpos rígidos; elas possuem uma rotação diferencial tanto no sentido radial, quanto no sentido angular ( $\theta$ ). Isto faz com que a equação do desdobramento rotacional seja um pouco mais complexa como mostram Mohan *et al.* (1994).



**Fig. 5.13:** *Periodogramas para os modo  $\ell = 1$  (esquerda) e  $\ell = 2$ . O periodograma superior é o de uma estrela em repouso (ou em rotação muito lenta). Como todos os modos  $m$  têm a mesma frequência de pulsação, seus picos se sobrepõem. Com a rotação da estrela, cada modo  $m$  adquire uma frequência aparente diferente e aparece no periodograma como membro de um tripleto ( $\ell = 1$ ) ou como um multipletto ( $\ell = 2$ ). Quanto maior for a velocidade angular de rotação, maior será o espaçamento entre os picos.*

## 5.10 Inclinação do Eixo de Rotação

O eixo de rotação pode ter qualquer ângulo de inclinação em relação ao eixo de visada. Por convenção,  $i = 0^\circ$  se os dois eixos coincidirem e  $i = 90^\circ$  se forem perpendiculares. Uma das propriedades dos harmônicos esféricos é que sempre podemos representar as funções esférico-harmônicas para um determinado eixo de simetria em termos de harmônicos esféricos associados a qualquer outro eixo de simetria (Jackson 1975; Pesnell 1985; Morris *et al.* 1984). Isto é possível porque o conjunto de funções  $Y_{\ell m'}$  com  $m' = -\ell, \dots, 0, \dots, +\ell$  forma uma base ortogonal e qualquer modo  $\ell$  (para qualquer eixo de simetria) pode ser expresso através dela:

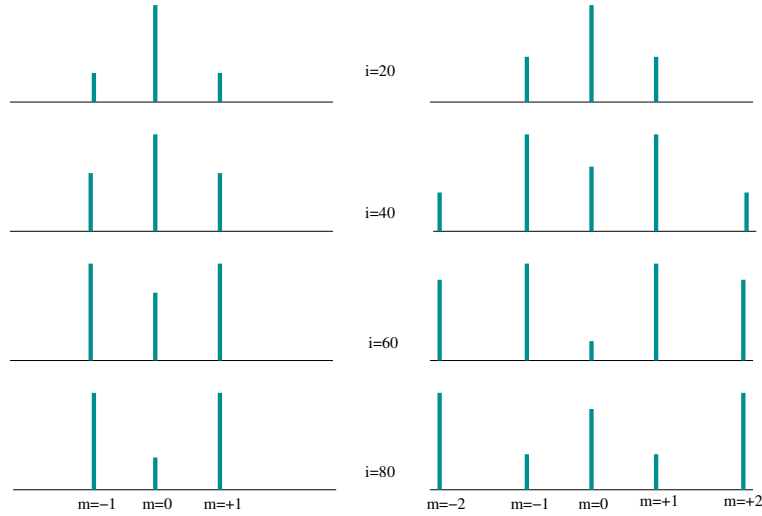
$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sum_{m'=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m m'}(i) Y_{\ell m'}(\theta_r, \phi_r)$$

A equação acima expressa a função  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  em termos de um novo conjunto de harmônicos esféricos,  $Y_{\ell m'}(\theta_r, \phi_r)$  cujo eixo de simetria tem a mesma orientação do eixo de rotação.

Isto faz com que as amplitudes dos picos de um multipletto mudem, mas sempre haverá uma simetria em relação ao pico central como podemos ver na Fig.5.14, se as amplitudes intrínsecas forem as mesmas.

## 5.11 Modelo dos Eixos Não-Alinhados

A análise do periodograma de estrelas pulsantes é mais simples quando o eixo de simetria e o eixo de pulsação estão alinhados ou quase-alinhados. Mas, devemos considerar uma situação mais geral em que o eixo de simetria forma um ângulo  $\beta$  diferente de zero com o eixo de rotação. As estrelas *roAp*, por exemplo, têm o eixo de pulsação alinhado com o do campo magnético, que é inclinado em relação ao eixo de rotação.



**Fig. 5.14:** *Periodogramas para os modos  $\ell = 1$  (esquerda) e  $\ell = 2$  (direita) de uma mesma estrela com diferentes inclinações  $i$  (em graus) para o eixo de simetria, assumindo que as amplitudes sobre a estrela são iguais.*

O desalinhamento dos eixos faz com que o eixo de simetria tenha um *movimento precessivo* em torno do eixo de rotação, o que afeta completamente as frequências aparentes de pulsação, conforme podemos ver na Fig.5.15.

No periodograma cada modo  $\ell$  é desdobrado em  $n = (2\ell + 1)^2$  picos, cujas frequências angulares aparentes serão dadas por (Pesnell 1985):

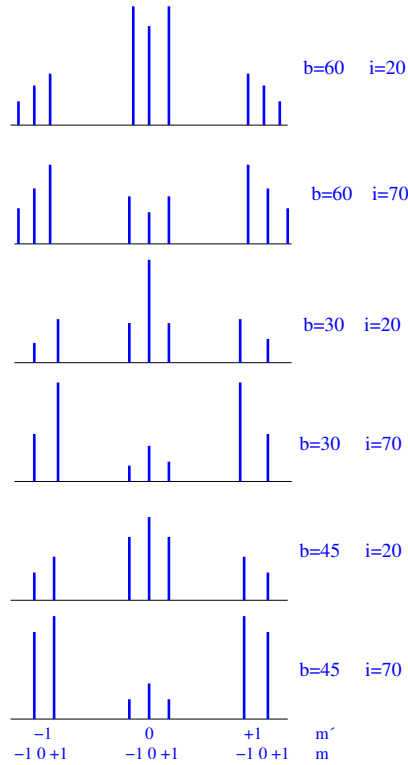
$$\omega_{obs} = \omega + m'\Omega + m\Omega C \cos \beta \quad (5.16)$$

$\ell$	n
1	9
2	25
3	49
4	81

## 5.12 Campo Magnético

Um campo magnético intenso também pode provocar um efeito de desdobramento das frequências. Entretanto, o desdobramento devido ao campo magnético produz  $\ell + 1$  picos, ao invés dos  $2\ell + 1$  produzidos pela rotação. Uma outra diferença é que o desdobramento devido ao campo magnético é proporcional a  $m^2$  (Jones *et al.* 1989).

Se não existisse campo magnético e nenhum outro efeito que afete o espaçamento entre os picos dos tripletos e multipletos, o espaçamento seria perfeitamente uniforme. Os desvios observados em relação ao espaçamento uniforme decorrem da ação do campo magnético e



**Fig. 5.15:** *Periodogramas para o modo  $\ell = 1$  de uma estrela, cujo eixo de simetria não está alinhado com o eixo de rotação, para diferentes inclinações do eixo de rotação,  $i$ , e para diferentes ângulos de nutação,  $\beta$  (representado na figura por  $b$ ). Tanto  $i$  quanto  $\beta (= b)$  são dados em graus. Os índices  $m$  e  $m'$  de cada pico estão indicados na parte inferior da figura.*

de outros efeitos, como a rotação diferencial. Se desprezarmos a ação desses outros efeitos e assumirmos que os desvios no espaçamento uniforme dos picos se deve basicamente à ação do campo magnético, podemos usar o desvio máximo para a determinação de um *limite máximo* para a intensidade do campo magnético da estrela (Winget *et al.* 1991).

### 5.13 Efeitos sobre $\dot{P}$

A atmosfera da PG 1159-035 ainda está em processo de contração e esse processo tem um efeito direto e outro indireto sobre os períodos aparentes de pulsação. À medida que a atmosfera se contrai, a velocidade angular de rotação deve aumentar para manter o momento angular da estrela constante, assumindo que a massa se mantém praticamente constante ( $\dot{M} \simeq 0$ ). Uma variação em  $\Omega$  faz com que a frequência aparente dos modos  $m \neq 0$  também varie.

É possível que a atmosfera da estrela possua uma rotação diferencial, com dependência radial. Neste caso, os efeitos da rotação sobre o  $\dot{P}$  poderia depender do índice  $k$  de cada modo, pois a rotação diferencial seria maior para posições mais internas.

Outro efeito que deve ser levado em conta é o efeito de *nutation do eixo de simetria*. A energia do sistema é minimizada quando o eixo de simetria está alinhado com o eixo de rotação e, como a natureza sempre caminha na direção do estado de menor energia, com o tempo os dois eixos tendem a se alinhar, reduzindo o  $\beta$ . Esse processo faz com que os períodos aparentes dos modos  $m \neq 0$  sofram uma variação ao longo do tempo. Esse tipo de efeito não foi ainda observado em anãs brancas ou pré-anãs brancas pulsantes, mas pode ocorrer em estrelas *roAp*.

\* \* \* \* \*

## Capítulo 6

# IDENTIFICAÇÃO DOS MODOS DE PULSAÇÃO

### 6.1 Introdução

Depois da redução e tratamento dos dados fotométricos de uma estrela pulsantes os dados estão prontos para serem analisados. A análise passa por diversas etapas, mas tudo começa com a *identificação* dos modos de pulsação da estrela. Como foi explicado no capítulo anterior, cada modo de pulsação da estrela é caracterizado por três números “quânticos”:  $k$ ,  $\ell$  e  $m$ , sendo que o índice  $k$  está relacionado com frequência (ou período) de pulsação.

A grande ferramenta utilizada para a identificação das frequências ou períodos de pulsação chama-se *periodograma*, que é basicamente um gráfico da frequência contra a amplitude, gerado a partir da curva de luz da estrela. Nele, as possíveis frequências de pulsação aparecem como picos com uma altura ou amplitude maior, em relação à amplitude média. O primeiro passo na identificação dos modos de pulsação é justamente localizar no periodograma esses possíveis períodos de pulsação.

A qualidade de um periodograma depende fortemente da duração e continuidade da curva de luz. Quando a qualidade não é muito boa, a tarefa de localizar os possíveis períodos de pulsação pode tornar-se bastante difícil. No caso de periodogramas de boa qualidade, a dificuldade aparece quando se tenta localizar períodos de baixa amplitude, próximos ao nível de ruído. Nesses momentos, nos valemos da *teoria de pulsações estelar*; a teoria de pulsações prevê — e as observações confirmam — que o espaçamento entre os períodos de pulsação de mesmo índice  $\ell$  e  $m = 0$  é aproximadamente constante. Assim, à medida que os períodos de pulsação vão sendo identificados podemos calcular com melhor precisão o espaçamento médio entre eles e, conhecer o espaçamento médio ajuda na localização de outros períodos de pulsação.

Quando a rotação da estrela é suficientemente alta, o desdobramento rotacional ocorre, fazendo com que cada modo  $\ell = 1$  se transforme num tripleto e cada modo  $\ell = 2$  num multipletto, conforme foi explicado no capítulo anterior. Isto faz com que cada modo ativo e com amplitude acima da amplitude de detecção, com índices  $k$ ,  $\ell$  e  $m$ , corresponda a um pico num periodograma de alta resolução. Localizar esses picos e determinar os índices  $k$ ,  $\ell$  e  $m$  correspondentes é o que chamamos de *identificação dos modos de pulsação* da estrela.

Neste capítulo, descrevemos passo-a-passo todo o processo para a identificação dos modos de pulsação da estrela PG 1159-035.

## 6.2 Espaçamento em Período

Os períodos dos modos-g para um dado  $\ell$  devem aumentar monotonicamente quando o número de nodos radiais  $k$  aumenta. Isto ocorre porque a força restauradora é proporcional à massa total deslocada e esta massa é menor quando o número de nodos radiais  $k$  é maior. Uma força restauradora mais fraca implica um período mais longo.

Um dos métodos mais simples para se calcular os períodos de oscilação dentro de cavidades ressonantes é a aproximação WKB<sup>1</sup>, bem conhecida em Mecânica Quântica. No caso de estrelas pulsantes, esta aproximação se baseia na hipótese de que o comprimento da onda radial é *muito menor* que as escalas de comprimento nas quais as variáveis físicas relevantes (como a densidade, por exemplo) estão variando dentro da cavidade. Isto é *aproximadamente verdadeiro* para modos-g com valores grandes<sup>2</sup> de  $k$  ( $k \gg \ell$ ). Neste “limite assintótico”, a aproximação WKB leva a uma relação bastante simples:

$$P_{\ell k} \simeq \frac{P_o}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} (k + \epsilon) \quad (k \gg \ell) \quad (6.1)$$

onde  $P_{\ell k}$  é o período para um dado índice  $k$ ;  $P_o$  é uma constante que depende da estrutura interna da estrela e será discutido no próximo capítulo; e  $\epsilon$  é um fator para o correto ajuste do índice  $k$ .

A Eq.6.1 nos leva a esperar um padrão relativamente ordenado de modos de pulsação para as observações de estrelas anãs brancas e pré-anãs brancas (PWDs). Em particular, a Eq.6.1 implica que modos de um dado  $\ell$  formariam uma seqüência onde o espaçamento entre dois períodos consecutivos é uniforme:

$$\Delta P_\ell \simeq P_{\ell, k+1} - P_{\ell, k} \simeq \frac{P_o}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \quad (6.2)$$

e

$$P_{\ell k} \simeq (k + \epsilon)\Delta P_\ell \quad (6.3)$$

Uma vez que o espaçamento em período,  $\Delta P_\ell$ , tenha sido detectado a partir do periodograma da curva de luz, podemos comparar este espaçamento com o previsto pelos modelos para decifrar a estrutura da estrela. Kawaler (1986) encontrou que o parâmetro  $P_o$  em

<sup>1</sup> WKB são as iniciais de seus autores: G. Wentzel, A. Kramers e L. Brillouin. Uma aproximação similar foi usada antes por H. Jeffreys; esta aproximação é chamada de JWKB por alguns autores.

<sup>2</sup> Na verdade, a Eq.6.1 é uma aproximação suficientemente boa para calcular períodos de pulsação, mesmo para baixos *sobretons* (baixas frequências) ( $k > 2$ ) em modelos homogêneos, isto é, não-estratificados (Kawaler & Bradley 1994).

modelos estáticos de PWDs depende primariamente da massa total da estrela ( $M$ ) e de sua luminosidade ( $L$ ), com uma dependência fraca de sua composição. A partir de modelos teóricos, Kawaler & Bradley (1994) chegaram à relação aproximada

$$P_o \simeq \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1.3} \left(\frac{L}{100L_\odot}\right)^{-0.035} \left(\frac{q_Y}{10^{-3}}\right)^{-0.00012} \quad (6.4)$$

onde  $q_Y$  é a fração por massa de Hélio na superfície. Portanto,

$$\Delta P_\ell \simeq \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1.3} \left(\frac{L}{100L_\odot}\right)^{-0.035} \left(\frac{q_y}{10^{-3}}\right)^{-0.00012}. \quad (6.5)$$

### 6.3 Modos Amarrados

Do inglês, (*trapped modes*). Uma complicação envolvendo os padrões para os modos pode ser causada por descontinuidades na composição interna da estrela. Estrelas pós-AGBs são estratificadas, com um núcleo de C/O coberto por uma camada relativamente pura de He e talvez por uma fina camada de H na superfície. O grau de estratificação depende do estágio evolutivo da estrela, pois é necessário um certo tempo para a segregação dos elementos no interior da estrela (da ordem de  $10^6$  anos para as PWD).

A hipótese da aproximação WKB é violada próximo das zonas entre uma camada e outra, onde o peso molecular médio muda muito mais drasticamente que a função da onda de pulsação (mesmo para valores grandes de  $k$ ). Os efeitos dessas descontinuidades foram descritos analiticamente pela primeira vez por Carl Hansen e explorados por Kawaler & Weiss (1990) e Brassard *et al.* (1991) no estudo de anãs brancas pulsantes.

Quando um dos *nodos*<sup>3</sup> da função de onda radial de um modo de pulsação coincide com uma zona de transição entre camadas (em  $r = r_c$ ), sua amplitude na região imediatamente mais interna ( $r < r_c$ ), é fortemente reduzida, como se a onda radial estivesse “amarrada” à zona de transição. Este efeito de amarramento (*mode trapping*) ocorre nas camadas mais externas da estrela, onde estão as zonas de transição.

O amarramento de uma onda radial provoca uma alteração em seu período de oscilação, fazendo com que este se desvie do valor assintótico previsto pela Eq.6.3. Os modos subseqüentes irão ter nodos que caem fora da zona de transição e seus períodos serão mais próximos aos valores previstos pela Eq.6.3. E assim vai, até que algum outro modo volte a ter um nodo próximo da zona de transição, fazendo com que o amarramento torne a ocorrer e o período novamente se desvia do valor assintótico.

Este ciclo é conhecido como *ciclo de amarramento* (*trapping cycle*) (Bradley 1994). O *período de amarramento* (*trapping period*), por definição, é o número de modos consecutivos cobertos por cada ciclo. Quanto maior a profundidade, menor é o ciclo de amarramento.

<sup>3</sup> Cuidado para não confundir *nodos* com *modos*.



## 6.4 Detecção x Identificação

Foi visto no Cap.5 que a variabilidade devido aos modos-g de pulsação (assumindo que a estrela tenha uma rotação uniforme) pode ser descrita pela Eq.5.9:

$$y(t) = \sum_{k>0} \sum_{\ell \geq 1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} A_{k\ell m} \sin \left[ 2\pi f_{k\ell} (t - T_{max_{k\ell m}}) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (6.6)$$

O sinal presente na curva de luz<sup>4</sup> pode ser modelado como um somatório de senóides com frequências  $f_{k\ell}$ , amplitudes  $A_{k\ell m}$  e constantes de fase  $\phi_{k\ell m}$  ( $\phi_{k\ell m} = T_{max_{k\ell m}} - \pi/2$ ).

O primeiro passo na análise de curvas de luz de estrelas pulsantes é descobrir em que frequências a estrela está pulsando. Este processo é chamado de *detecção* de modos de pulsação. A detecção apenas nos revela a presença de um sinal periódico, mas não nos diz quais são exatamente os índices  $(k, \ell, m)$  que caracterizam um modo de pulsação. Uma vez que os índices  $(k, \ell, m)$  são desconhecidos, é conveniente usar um único índice  $i$  na Eq.6.6 para indexar os modos detectados:

$$y(t) = \sum_i A_i \sin [\omega_i t + \phi_i] \quad \text{onde} \quad \omega_i = 2\pi f_i. \quad (6.7)$$

Cada modo  $i$  corresponde a um trio  $(k, \ell, m)$ , ainda desconhecido, e descobrir quais são esses índices exige técnicas especiais e faz parte da etapa de *identificação* dos modos de pulsação, que será discutida mais adiante. Alguns dos períodos detectados como possíveis períodos de pulsação talvez não sejam períodos reais, mas grande parte deles será descartada na etapa de identificação. Por isso, não há um limite bem definido entre detecção e identificação de modos de pulsação, pois um processo pode depender do outro.

## 6.5 Análise de Fourier

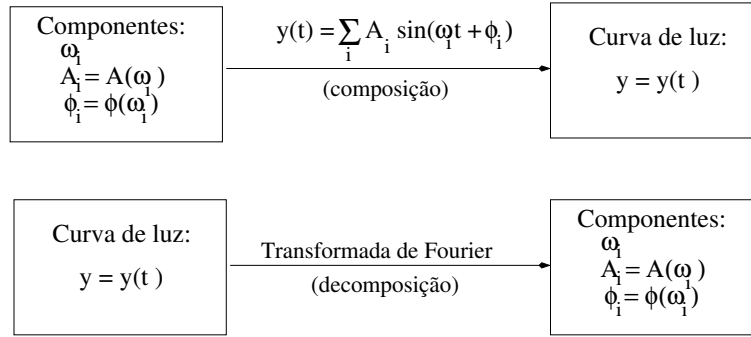
Qualquer função  $y(t)$  pode ser descrita por uma superposição de um número infinito de senóides tal como na Eq.6.7. A ferramenta matemática mais usada para a determinação dessas senóides é a *Transformada de Fourier* (TF) e o uso da TF com esta finalidade é chamado de *análise de Fourier*.

A análise de Fourier nos permite calcular os valores de  $\omega_i$ ,  $A_i$  e  $\phi_i$ . Este processo é o inverso do que faz a Eq.6.7: enquanto a E.6.7 *constrói* (compõe)  $y(t)$  a partir das componentes  $[\omega_i, A(\omega_i), \phi(\omega_i)]$ , a análise de Fourier decompõe  $y(t)$  em suas componentes,  $[\omega_i, A(\omega_i), \phi(\omega_i)]$ , como mostra a Fig.6.1.

Com a Transformada de Fourier da função  $y(t)$  podemos calcular as funções  $A(\omega)$  e  $\phi(\omega)$ . Numa situação ideal,

---

<sup>4</sup> Na curva de luz, além da variabilidade da estrela, temos um alto nível de ruído. Face a baixa amplitude observada, é bastante frequente que a relação sinal/ruído seja bem menor que 1:  $S/N \ll 1$ , para cada ponto da curva de luz.



**Fig. 6.1:** Dados os valores de  $\omega_i$ ,  $A_i$  e  $\phi_i$ , podemos compor a função  $y(t)$  através de um somatório de senóides. A Transformada de Fourier faz o caminho inverso: dada uma função  $y(t)$ , ela a decompõe em suas componentes  $\omega_i$ ,  $A_i$  e  $\phi_i$ .

$$A(\omega) = \begin{cases} A_i & \text{se } \omega = \omega_i \\ 0 & \text{se } \omega \neq \omega_i \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \phi_i & \text{se } \omega = \omega_i \\ \text{qualquer valor} & \text{se } \omega \neq \omega_i \end{cases} \quad (6.9)$$

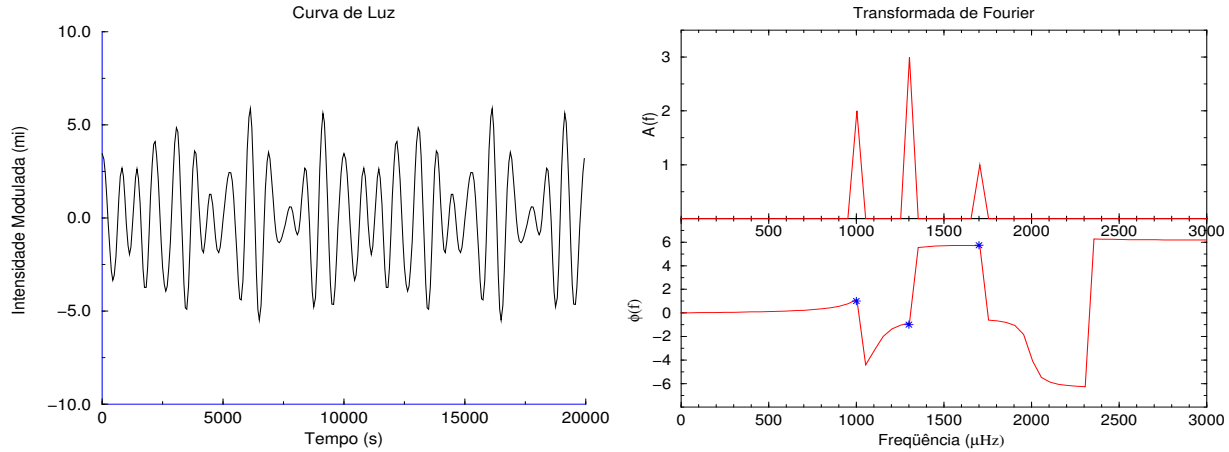
Como ilustração, a Fig.6.2 mostra parte da função  $y(t)$  construída com os dados mostrados na tabela Tab.6.1. O resultado da Transformada de Fourier de  $y(t)$  aparece no gráfico duplo. As funções  $\omega(f)$  e  $A(f)$  são contínuas. Os valores máximos dos três picos no gráfico de  $\omega(f)$  correspondem às três frequências presentes em  $y(t)$  e os respectivos valores de  $\phi(f)$  no gráfico inferior, às constantes de fase  $\phi_i$ .

$i$	Frequência $f_i$ ( $\mu Hz$ )	Freq. Angular $\omega_i = 2\pi f_i$ ( $\times 10^{-6} rad/s$ )	Amplitude $A_i$ ( $ma$ )	Cte. Fase $\phi_i$ ( $rad$ )
1	1000.	6283.2	2.	+1.00
2	1300.	8168.2	3.	-1.00
3	1700.	10681.4	1.	+5.75

**Tab. 6.1:** Senóides presentes na curva de luz da Fig.6.2.

## 6.6 Periodogramas

O gráfico da amplitude contra a frequência é chamado de *periodograma*. Um periodograma mostra a curva de algum tipo de função da frequência  $f$ , do período  $P$  ou mesmo da frequência angular  $\omega$ . Os extremos da curva (máximos ou mínimos) indicam a posição das frequências de pulsação sobre o eixo-x. Qualquer função que tenha esta propriedade pode



**Fig. 6.2:** A série de tempo acima é formada pelo somatório das senóides mostradas na tabela. O gráfico duplo mostra as funções  $A(f)$  (amplitude) e  $\phi(f)$  (constante de fase) calculadas a partir da TF da série de tempo. As posições dos picos sobre o eixo-x no gráfico de  $A \times f$  indicam as frequências presentes na série de tempo. A altura de cada pico é a amplitude. As constantes de fase estão indicadas no gráfico inferior por asteriscos.

ser usada em um periodograma, como é o caso da amplitude  $A(f)$  no exemplo acima, mas poderia ser a potência  $A^2(f)$  ou alguma grandeza estatística como a probabilidade  $\mathcal{P}(f)$ , a variância  $\text{Var}(f)$ ,  $\chi^2(f)$ , etc.

Talvez a denominação mais adequada para gráficos de  $A(f) \times f$  seja *espectro de Fourier*, mas isso não se aplicaria a gráficos que envolvem grandezas estatísticas. Alguns autores empregam o termo “Transformada de Fourier”, o que é inadequado, pois a TF é uma função complexa. O termo *espectro de frequências* pode ser usado para gráficos da amplitude contra a frequência mas este termo já é usado em espectroscopia e pode gerar alguma confusão. O mesmo ocorre com o termo *espectrograma* que também é usado em outras áreas da Física. Também costuma-se chamar o gráfico de  $A^2(f) \times f$  de *espectro de potência* (*power spectrum*, em inglês), mas este termo se aplica somente a este tipo de gráfico (ver Tab.6.2).

Como toda essa classe de gráficos têm como função mostrar as frequências ou períodos de pulsação como extremos locais (em picos ou vales), Martinez & Koen (1994) sugeriram que fossem todos chamados de *periodogramas* independentemente das grandezas em cada eixo. Esta convenção foi adotada neste trabalho.

## 6.7 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier de uma função  $y(t)$  é dada por:

$$F(\omega) = TF[y] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.10)$$

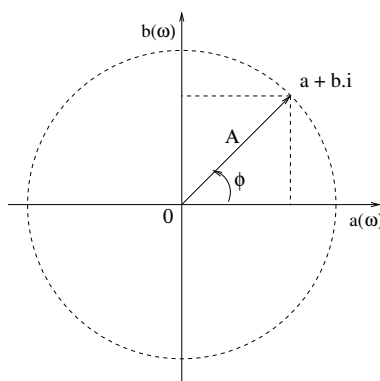
Eixo-x	Eixo-y	Denominações
Frequência	Amplitude	Transformada de Fourier Espectro de Frequências Espectro de Fourier Espectrograma
Frequência	Quadrado da Amplitude	Espectro de Potências Espectro de Fourier Espectro de Frequências
Períodos	Amplitude	Espectro de Períodos Espectro de Fourier Transformada de Fourier
Frequência	Probabilidade	Periodograma
Frequência	$\chi^2$	Espectrograma

**Tab. 6.2:** Diferentes tipos de periodogramas e como são chamados.

Para cada valor de  $\omega$  a Eq.6.10 retorna um valor complexo:

$$F(\omega) = a(\omega) + b(\omega) i \tag{6.11}$$

onde  $a(\omega)$  e  $b(\omega)$  são funções reais de  $\omega$ . Na Fig.6.3 podemos ver que o módulo do vetor  $\langle a, b \rangle$  é a amplitude  $A$  e o ângulo que o mesmo forma como o semi-eixo positivo dos  $x$  é a constante de fase  $\phi_o$  da senóide  $A \sin[\omega t + \phi_o]$ :



**Fig. 6.3:** O gráfico mostra o plano complexo: no eixo-x temos a parte real da TF,  $a(\omega)$ , no eixo-y a parte imaginária,  $b(\omega)$ . O módulo do vetor é a amplitude e o ângulo que forma com o eixo-x, a fase.

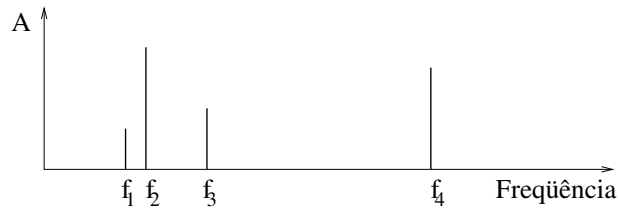
$$A^2(\omega) = a^2(\omega) + b^2(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \tag{6.12}$$

$$\phi_o(\omega) = \arctan \left[ \frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right]$$

Na Fig.6.2, lado direito, vemos os gráficos da amplitude  $A$  e da constante de fase  $\phi_o$  (lá apresentado como  $\phi$ ) como função da frequência  $f = \omega/2\pi$ .

Se  $y(t)$  na Eq.6.10 é uma função periódica contínua e definida para  $-\infty < t < +\infty$ , as frequências apareceriam em seu periodograma como picos de largura infinitesimal (funções  $\delta - Dirac$ ), como pode ser visto na Fig.6.4.



**Fig. 6.4:** Num periodograma ideal, as frequências de pulsação apareceriam como picos de largura desprezível.

Curvas de luz reais são funções finitas e discretas e podem ter pontos igualmente espaçados ou não. Isso faz com que, ao invés de picos como os da Fig.6.4, apareçam estruturas mais complexas nos periodogramas e que muitas vezes dificultam (ou até impossibilitam) a detecção de frequências. Uma compreensão sobre a natureza desses efeitos é fundamental para a correta análise de curvas de luz à procura de periodicidades.

O fato de  $y(t)$  ser finita (ter uma duração  $T$ ) faz com que apareçam uma série de picos distribuídos de forma simétrica à esquerda e à direita do pico real. O pico real central tem a maior altura e os picos laterais têm alturas decrescentes dadas pela função erro, se só houver uma curva contínua. A duração  $T$  está relacionada com a largura média dos picos: quanto maior for a duração de  $y(t)$  mais estreitos serão os picos. A largura média dos picos,  $\delta f$ , é inversamente proporcional à duração da curva de luz,  $T$ :

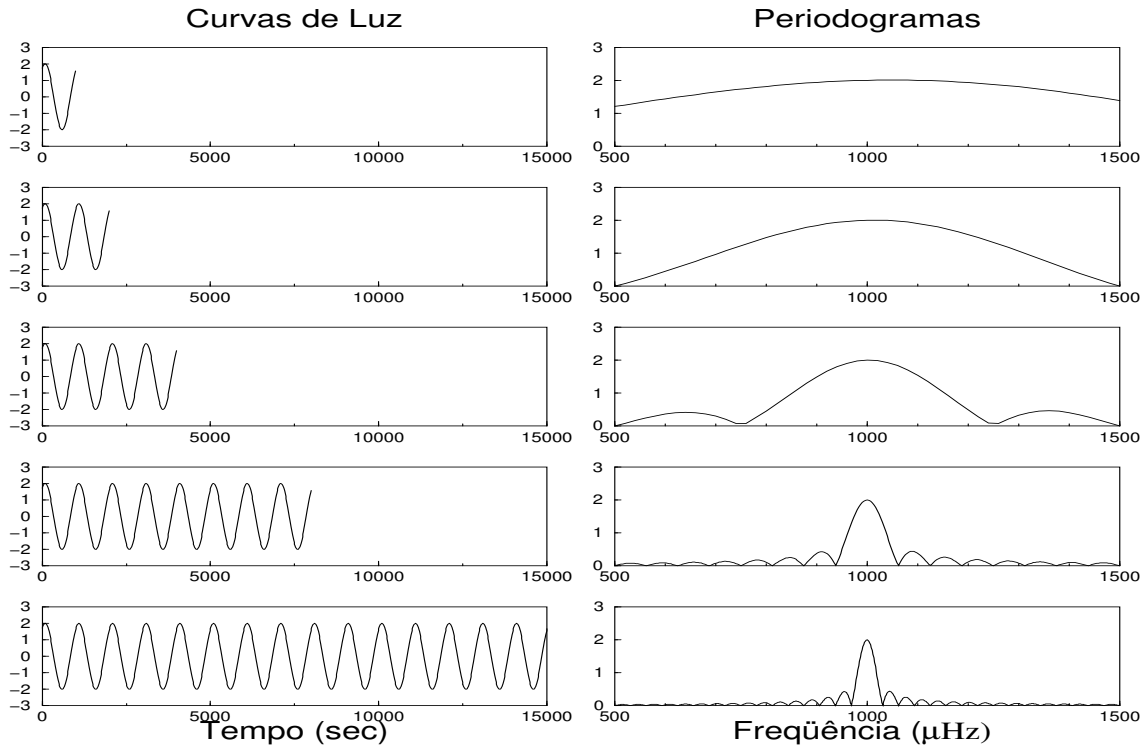
$$\delta f \propto \frac{1}{T} \tag{6.13}$$

A largura média dos picos dada por  $\delta f$  é um parâmetro característico de cada periodograma e é chamado de *resolução espectral* ou de *resolução do periodograma*. Aproximadamente,  $\delta f \simeq 1/T$ . Quando  $T$  tende a infinito,  $\delta f$  tende a zero e caímos no caso do periodograma ideal mostrado na Fig.6.4.

A Fig.6.5 mostra os periodogramas da mesma função  $y(t)$ , porém com durações diferentes: 1, 2, 4, 8 e 16 vezes o período de oscilação. Como pode ser visto, para a curva com maior duração os picos são mais estreitos. Note também a presença dos picos laterais à direita e à esquerda do pico central, chamados *lóbulos laterais* (*sidelobes*, em inglês).

A explicação para os lóbulos laterais vem do *Teorema da Convolução*. Podemos dizer que a função finita  $y(t)$  seja apenas uma parte de uma função infinita  $y_\infty(t)$ , localizada por uma função janela  $J(t)$ :

$$y(t) = y_\infty(t) \cdot J(t) \tag{6.14}$$



**Fig. 6.5:** Efeito da duração da curva de luz sobre o periodograma. Quanto maior é a extensão da curva de luz,  $T$ , maior é a resolução do periodograma. Os picos menores ao lado do pico central são chamados de lóbulos laterais (*sidelobes*).

onde

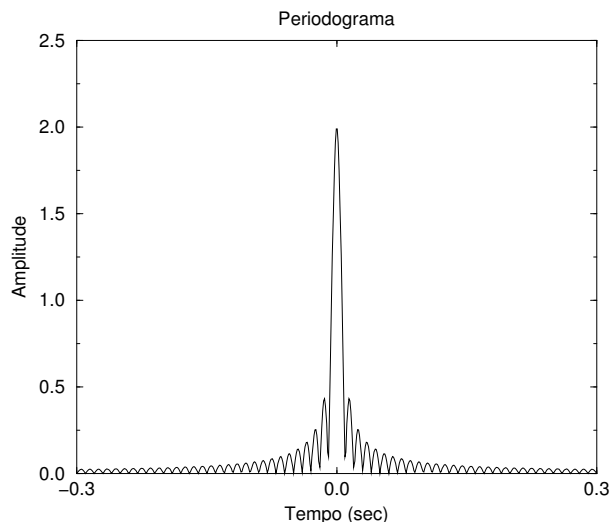
$$J(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t \leq t_f \\ 0 & \text{fora deste intervalo.} \end{cases} \quad (6.15)$$

Pelo Teorema da Convolução, a Transformada de Fourier do produto de duas funções é igual à Convolução das Transformadas de Fourier de cada uma delas:

$$TF[y] = TF[y_\infty \cdot J] = TF[y_\infty] * TF[J] \quad (6.16)$$

A TF de  $y_\infty$  é uma função  $\delta$ -Dirac enquanto que a TF da *função janela*,  $TF[J(t)]$ , é mostrada na Fig.6.6. Quando  $TF[y_\infty]$  é convolvida com  $TF[J]$ , aparecem os lóbulos laterais (*sidelobes*) em  $TF[y]$ .

Se  $y(t)$  é uma função discreta no tempo e igualmente espaçada, a *resolução temporal* dada pelo intervalo  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  (que em geral é igual ao tempo de integração) não afeta significativamente a forma do periodograma de curvas com mesma duração, como podemos ver na Fig.6.7. Entretanto, o número de pontos afeta a precisão com que se consegue determinar a frequência, a amplitude e o tempo de máximo de um modo de pulsação. Quanto maior for o número de pontos em uma curva de luz, menor será a incerteza nas determinações.



**Fig. 6.6:** *Periodograma da função janela  $J(t)$ .*

O problema mais sério na qualidade dos periodogramas é introduzido pelas *interrupções* (*gaps*, em inglês), nas curvas de luz. Essas interrupções podem ser decorrentes da passagem de nuvens, falhas nos equipamentos, ou simplesmente o intervalo de tempo entre um turno e outro. As interrupções fazem com que cada pico se desdobre em vários. Isto é ilustrado na Fig.6.8 onde vemos o periodograma de uma curva de luz contendo uma única frequência  $f = 1000\mu Hz$ , formada por duas séries de  $T = 16\,000$  sec, com mesma resolução temporal, mas com uma interrupção entre elas de diferentes tamanhos: 0, 1T, 2T, 4T e 8T.

Uma ampliação da região central do periodograma inferior da Fig.6.8 pode ser vista na Fig.6.9. Note que os picos centrais têm quase a mesma altura. Quanto menos regular for uma curva de luz, mais difícil é a tarefa de detectar as frequências reais de pulsação.

## 6.8 Harmônicos

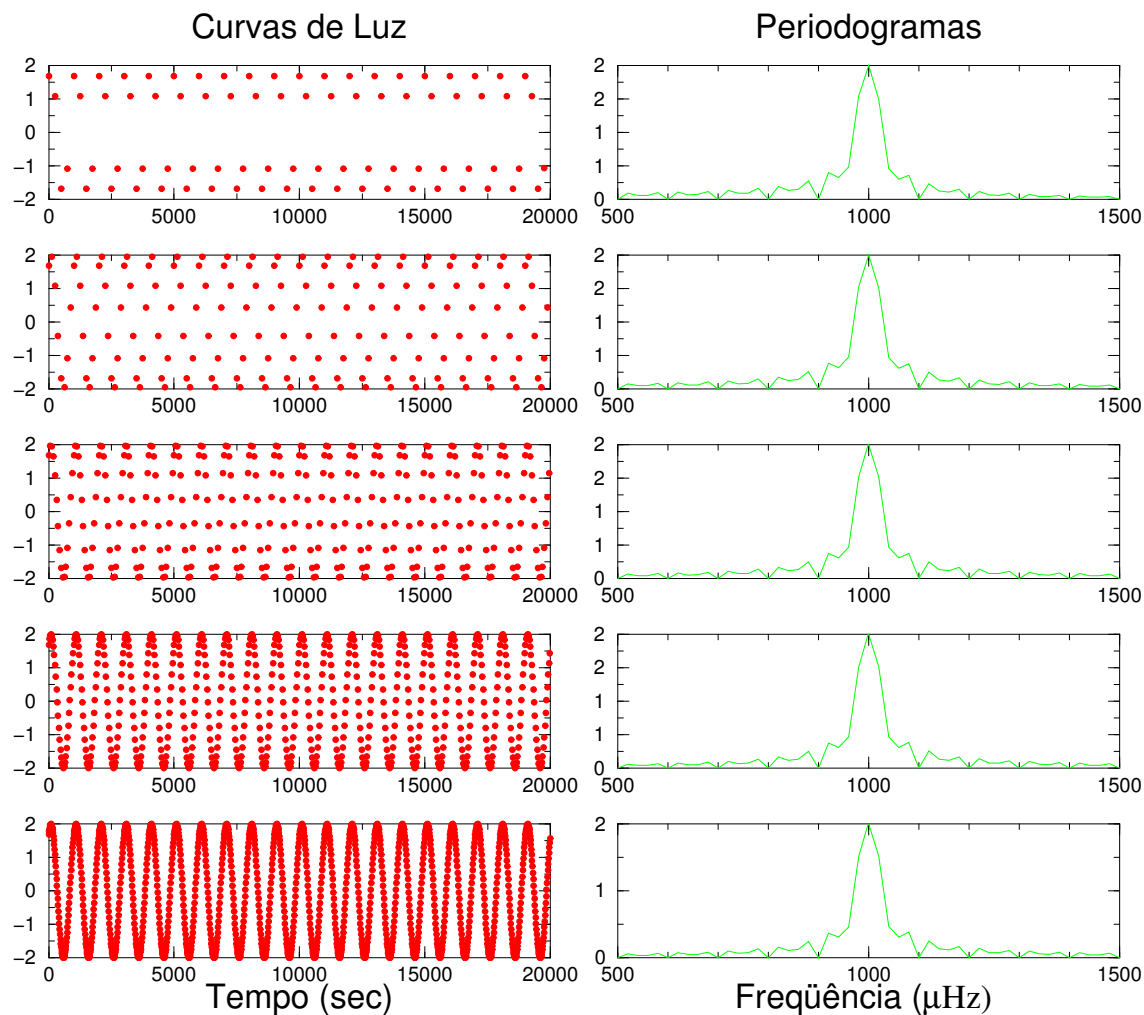
Qualquer função periódica de frequência  $f_0$  pode ser ajustada através do somatório:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin [2\pi f_k t + \phi_k] \quad (6.17)$$

onde

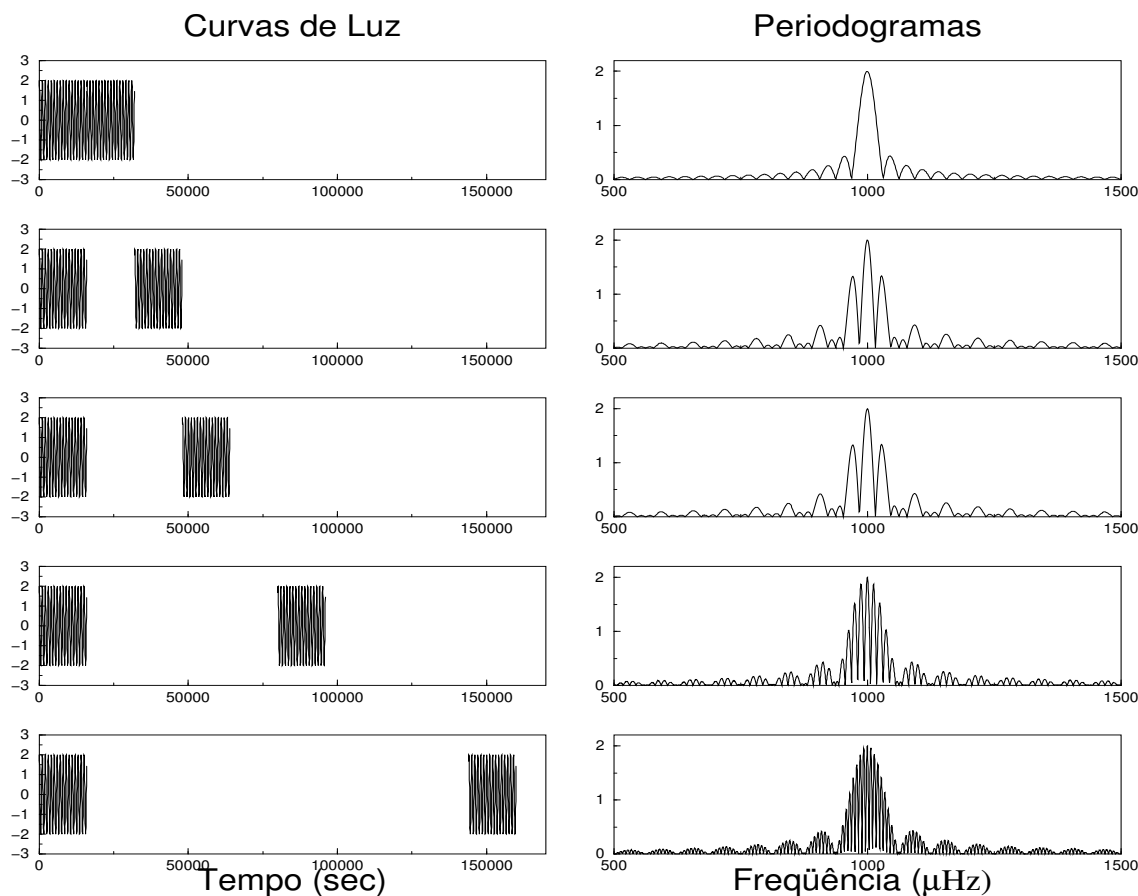
$$f_k = (k + 1)f_0 \quad f_k = f_0, 2f_0, 3f_0, 4f_0, \dots \quad (6.18)$$

A frequência  $f_0$  é chamada *frequência fundamental*;  $f_1 = 2f_0$  é o *primeiro harmônico* de  $f_0$ ;  $f_2 = 3f_0$  é o *segundo harmônico* de  $f_0$ ;  $f_3 = 4f_0$  é o *terceiro harmônico* e assim por diante. No periodograma isso aparecerá como uma série de picos igualmente espaçados.

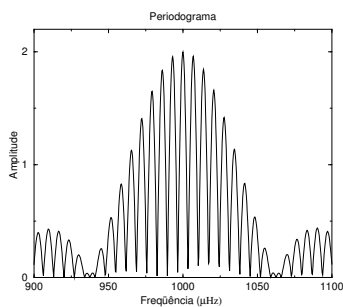


**Fig. 6.7:** *Periodogramas da mesma curvas de luz com resolução temporal diferentes. As curvas são praticamente idênticas, contudo, quanto maior for a amostragem na curva de luz, menor será o erro na determinação das frequências, amplitudes e tempos de máximo do sinal.*





**Fig. 6.8:** A curva de luz nos gráficos do lado esquerdo contém uma única frequência ( $f = 1000 \mu\text{Hz}$ ) e é formada por duas séries de  $T = 16\,000$  segundos cada uma. Em cada caso, o intervalo entre as duas é diferente:  $0$ ,  $1T$ ,  $2T$ ,  $4T$  e  $8T$  (de cima para baixo). Como efeito, os periodogramas se tornam mais intrincados e fica mais difícil identificar o pico central.



**Fig. 6.9:** Ampliação da região central do periodograma inferior da figura anterior. Note que os três picos centrais têm quase a mesma altura. Isso dificulta a detecção de frequências de pulsação. A dificuldade pode ser ainda maior se houver interferência da janela espectral de outras frequências presentes no espectro. Neste caso, é comum haver quebra de simetria.

A Fig.6.10 mostra o periodograma de um sinal periódico triangular de frequência igual a  $0.01\text{ Hz}$  (período igual a  $100\text{ s}$ ) onde podemos ver uma série de picos igualmente espaçados: a frequência fundamental  $f_o$  e seus harmônicos.

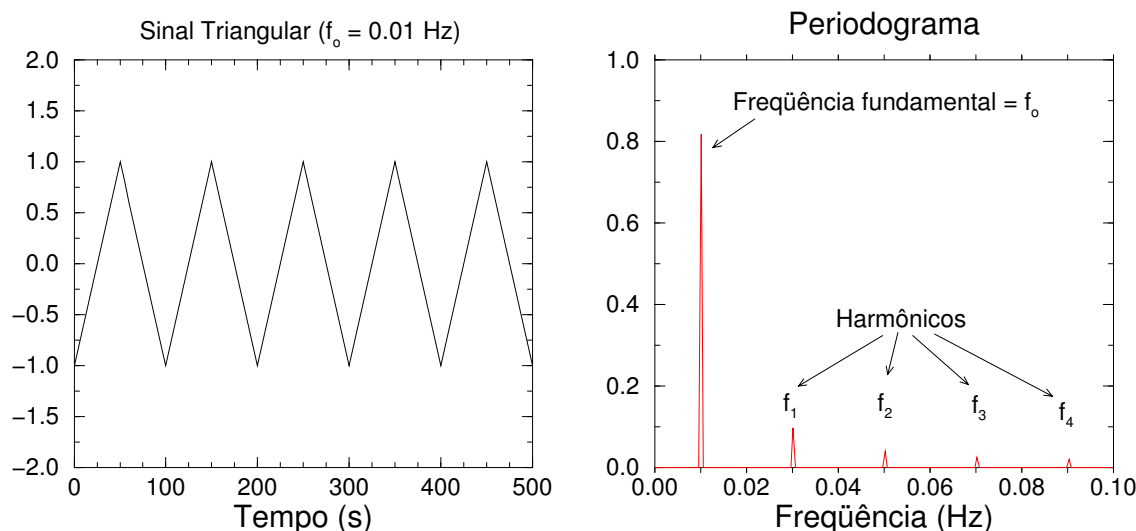


Fig. 6.10: Periodograma de um sinal periódico triangular de frequência  $f_o = 0.01\text{ Hz}$

## 6.9 Janela Espectral

A estrutura de cada periodograma da Fig.6.8 independe da frequência do sinal, sendo apenas escalonada em amplitude. Este padrão é chamado de *janela espectral*. Observando a Fig.6.9, além do grupo central de picos, podemos ver grupos menores à esquerda e à direita que poderiam enganosamente sugerir a presença de outras frequências de oscilação, quando, na verdade, fazem parte da janela espectral da única frequência presente nos dados. Para evitar este tipo de equívoco, toda a vez que uma frequência é detectada, devemos comparar os picos vizinhos com os picos que aparecem em sua janela espectral<sup>5</sup> tentando reconhecer quais fazem parte dela e quais não.

## 6.10 Interferência entre Frequências

A janela espectral de uma dada frequência se estende ao longo de todo o espectro interferindo nas janelas espectrais de todas as outras frequências e sofrendo a interferência de todas elas<sup>6</sup>. O grau de interferência depende da razão entre as amplitudes, da razão entre as

<sup>5</sup> A janela espectral pode ser obtida fazendo-se o periodograma de uma única senóide com o mesmo espaçamento temporal. A senóide pode ter qualquer frequência, mas geralmente usamos a frequência do sinal detectado.

<sup>6</sup> Por *interferência* entre frequências queremos dizer que a TF de uma senóide se sobrepõe (se soma) à TF de todas as demais, o que, no periodograma, se traduz como uma interferência de uma sobre as outras e vice-versa.

freqüências e das interrupções presentes na curva de luz. A interferência introduz um erro na determinação dos períodos, amplitudes e tempos de máximo. Simulações de Monte Carlo (Costa 1996 e Costa & Kepler 1999) demonstram que o pico sofre um pequeno deslocamento para a direita ou para a esquerda, sempre bem menor que a largura média dos picos). A altura do pico também aumenta ou diminui em relação à altura real.

## 6.11 Pré-Branqueamento

Uma das técnicas mais úteis e mais usadas na etapa de detecção de freqüências de oscilação é o chamado *pré-branqueamento* (*prewhitening*, em inglês). O pré-branqueamento consiste, simplesmente, em subtrair uma senóide da curva de luz, cuja freqüência, amplitude e tempo de máximo foram previamente calculados. Embora não seja rigorosamente correto, é comum se falar em “*subtração de freqüências*”. Se todo o sinal for subtraído, a série residual conterà apenas ruído branco e daí o nome da técnica.

A idéia por trás deste método é que quando uma freqüência é subtraída da curva de luz, ela leva consigo sua janela espectral, “limpando” o periodograma, o que facilita a detecção das freqüências remanescentes. Na Fig.6.11 podemos ver o pré-branqueamento de uma curva de luz que contém três freqüências de pulsação: 1000, 1100 e 1300  $\mu Hz$ . Começamos pelo pico de maior amplitude ( $f = 1300 \mu Hz$ ) (a). A curva de luz resultante após cada subtração é chamada de *curva residual*. No periodograma da curva residual, identificamos o pico mais alto e o subtraímos (b). Em (c), temos apenas a janela espectral do pico de menor amplitude. Quando se subtraem todas as freqüências, a curva residual (d) conterà apenas ruído e possíveis sinais com amplitudes abaixo do limiar de detecção. Este tipo de curva pode ser usado no estudo do ruído em curvas de luz.

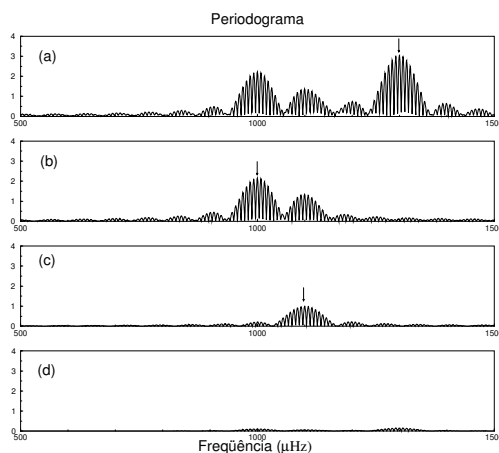


Fig. 6.11: Seqüência de pré-branqueamento.

## 6.12 Limite de Detecção

A detecção de frequências com grandes amplitudes não representa nenhum problema, mas a questão é mais delicada quando estamos tentando detectar frequências com amplitudes muito baixas, próximas do nível de ruído.

Numa distribuição poissônica, a probabilidade de um valor se distanciar  $1\sigma$  da média é de 31.7%; 4.6% para  $2\sigma$ ; 0.3% para  $3\sigma$ ; 0.05% para  $3.5\sigma$ ; e 0.006% para  $4\sigma$ . A chance de um valor se afastar mais que  $3.5\sigma$  da média devido ao acaso é menor do que 1 em 1000. Por isso costuma-se usar como *critério de seleção* amplitude  $3.5\sigma$  acima da média ou mais, para que a chance de erro seja menor que 1 em 1000.

Contudo, a existência de interrupções (gaps), a finitude dos dados, refletidos nas janelas espectrais das frequências de oscilação e a interferência entre elas, fazem com que as alturas dos picos no periodograma não sigam uma distribuição perfeitamente poissônica. Isto dificulta uma estimativa realista da probabilidade estatística da altura de um dado pico ser casual ou não, com base em uma estatística poissônica. Uma abordagem diferente deve ser usada.

A técnica usada neste trabalho, se baseia em um processo repetitivo: o sinal presente na curva de luz é “destruído” através da randomização dos valores das intensidades<sup>7</sup>. O periodograma da série randomizada é feito e a altura do maior pico  $A_{max}$  é computada. Após  $n$  repetições deste processo, tem-se uma distribuição de valores para  $A_{max}$ . O valor médio  $\bar{A}_{max}$  e seu desvio padrão  $\sigma$  são calculados. Todos os picos com amplitude maior que  $\bar{A}_{max} + 3.5\sigma$  são considerados possíveis frequências de pulsação. Chamamos este limite de *limite de detecção*:

$$A_{detect} \equiv \bar{A}_{max} + 3.5\sigma \quad (6.19)$$

Se o periodograma possuir mais de 1000 picos, então se deve trabalhar com uma probabilidade de erro menor que 1/1000. Por isso convém generalizar a definição na Eq.6.19:

$$A_{detect} \equiv \bar{A}_{max} + x\sigma \quad (6.20)$$

onde  $x$  pode ser ajustado conforme o número de picos no periodograma, sendo que  $x \simeq 4$  se aplica bem a qualquer caso.

Um critério que vem sendo bastante usado é baseado na amplitude média e não na amplitude máxima (Kepler *et al.* 1993). Calcula-se a *amplitude média* dos picos do periodograma da série de tempo randomizada e, defini-se  $A_{detect}$  como sendo 4 vezes este valor:

$$A_{detect} = 4 \langle A \rangle \quad (6.21)$$

---

<sup>7</sup> Uma curva de luz é um conjunto de pontos  $\{t_i, y_i\}$  com  $i = 1, n$ . No processo de randomização os valores de  $y_i$  são trocados aleatoriamente. Isto destrói qualquer princípio de ordenamento (sinal) que exista na curva de luz.

O fator 4 foi determinado empiricamente, o que garante que o valor de  $A_{detect}$  calculado pela Eq.6.21 esteja bem acima da maior amplitude que um pico possa ter, devido ao acaso. Este valor é 20 a 35% maior que o valor calculado por Eq.6.19 (ver Tab.6.3). Como nosso interesse é selecionar o maior número possível de candidatas a frequências de pulsação, o limite calculado por Eq.6.19 é mais adequado.

A Fig.6.12 mostra a distribuição de amplitudes no periodograma para dados randomizados de 1985. As linhas contínuas mostram as posições da amplitude média,  $\langle A \rangle$ , e da amplitude máxima média,  $\langle A_{max} \rangle$ . As linhas tracejadas mostram as posições dos limites de detecção calculados segundo os dois critérios,  $4 \langle A \rangle$  e  $\langle A_{max} \rangle + 3.5\sigma$ . Note que  $4 \langle A \rangle$  está bem além do limite  $\langle A_{max} \rangle + 3.5\sigma$ . Todos os picos com amplitudes entre os dois limites não são detectados quando se usa a Eq.6.21 como limite de detecção.

O gráfico da esquerda na Fig.6.13 mostra o periodograma dos dados randomizados de 1985 sobreposta ao periodograma dos dados reais (não-randomizados). Note como a randomização destrói todo o sinal. A linha horizontal contínua, inferior, mostra o nível da amplitude média,  $\langle A \rangle$ , enquanto que a linha horizontal acima dela, mostra o nível da amplitude máxima média,  $\langle A_{max} \rangle$ , calculada a partir de centenas de espectros como o mostrado na figura. No gráfico da direita, o periodograma dos dados reais (não-randomizados) se sobrepõe ao periodograma dos dados randomizados, apenas para mostrar regiões que estavam ocultas no gráfico anterior. As linhas horizontais tracejadas mostram os limites de detecção calculados segundo os dois critérios:  $4 \langle A \rangle$  e  $\langle A_{max} \rangle + 3.5\sigma$ .

Ano	$\langle A \rangle$	$4 \langle A \rangle$	$\langle A_{max} \rangle$	$3.5 \langle A_{max} \rangle$	Diferença
1983	0.405	1.620	1.142	1.283	20%
1985	0.488	1.952	1.233	1.394	28%
1989	0.138	0.552	0.350	0.375	32%
1993	0.134	0.536	0.343	0.368	31%
2002	0.190	0.760	0.493	0.507	33%

Tab. 6.3: Limites de detecção para os dados de cada ano.

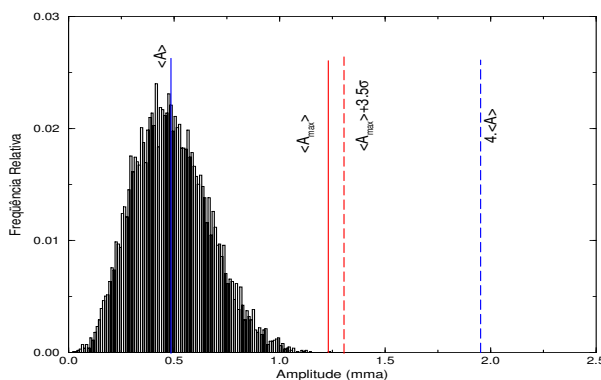
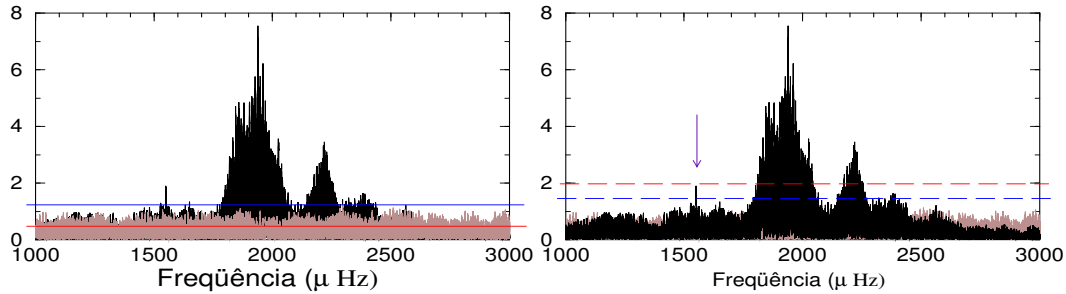


Fig. 6.12: O gráfico mostra a distribuição das amplitudes no periodograma dos dados de 1985, randomizados.



**Fig. 6.13:** Os gráficos mostram o periodograma dos dados de 1985 da PG-1159-035 (escura) junto com o periodograma do mesmo conjunto de dados, randomizados (claro). A randomização destrói todo o sinal. As linhas horizontais no gráfico da esquerda mostram  $\langle A \rangle$  e  $\langle A_{max} \rangle$ ; enquanto que as linhas horizontais tracejadas no gráfico da direita mostram os limites de detecção segundo dois critérios diferentes:  $4 \langle A \rangle$  e  $\langle A_{max} \rangle + 3.5\sigma$ . A flecha indica um pico que não é detectado quando se usa o limite de  $4 \langle A \rangle$ .

## 6.13 Refinamento

Para cada frequência detectada no periodograma, pode-se calcular a amplitude e o tempo de máximo através de ajuste linear de senóides<sup>8</sup>, mas os valores de  $f_i$ ,  $A_i$  e  $T_{max_i}$  estimados desta forma contém erros introduzidos pela interferência entre frequências e a estatística é deficiente (Costa 1996 e Costa *et al.* 1997). Por isso, se faz necessário o refinamento dos valores encontrados, de modo a diminuir os erros inerentes às estimativas e também determinar de forma confiável as incertezas envolvidas.

Uma maneira de se refinar as estimativas dos valores é através da subtração do maior número possível de frequências da curva de luz (pré-branqueamento), deixando apenas a frequência que se quer refinar. A idéia é eliminar ou reduzir a interferência que outras frequências exercem sobre a frequência que se quer medir, minimizando o erro que isto causa. De fato, este método reduz a incerteza, mas o resultado depende muito da seqüência seguida nas subtrações. Subtrair primeiro  $f_1$  e depois  $f_2$ , em geral, não nos levará exatamente ao mesmo resultado que obtemos quando  $f_2$  é subtraído antes de  $f_1$ . Do ponto de vista matemático, o pré-branqueamento não é uma operação permutativa.

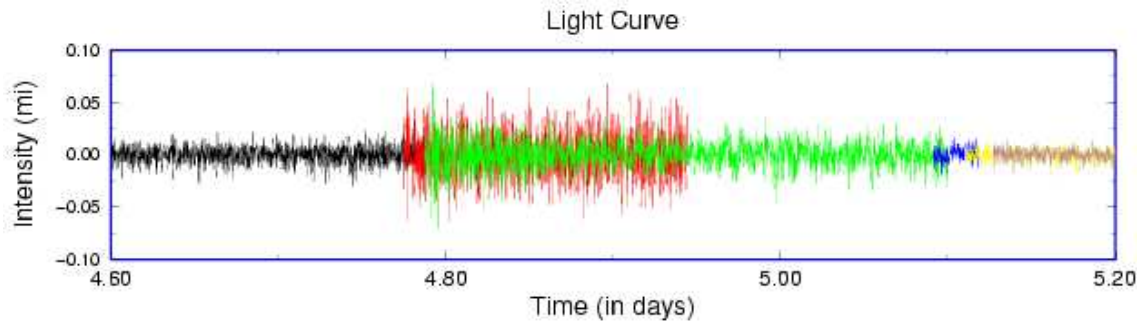
A melhor maneira de se fazer o refinamento é através do *ajuste simultâneo de senóides*, baseado em algum algoritmo que permita fazer o ajuste não-linear da Eq.6.7 à curva de luz. O programa que desenvolvemos para fazer isto chama-se **multif**. Explicações detalhadas sobre seu funcionamento estão no Apêndice B.

## 6.14 Pesos dos Dados

Os dados fotométricos vêm, em geral, de diversos telescópios que realizaram suas observações sob condições atmosféricas locais e usando diferentes detectores com ou sem filtros.

<sup>8</sup> Ver Costa (1996), Apêndice A.

Evidentemente, o nível de ruído deve ser bem diferente para cada conjunto de dados, como se pode ver na Fig.6.14. Mesmo para os dados de um único turno obtidos com um mesmo telescópio, o nível de ruído muda com a mudança das condições atmosféricas ao longo do turno. Isto nos põe diante de uma questão importante: *como definir os pesos para os dados fotométricos?*



**Fig. 6.14:** Sobreposição de curvas de luz obtidas a partir de diferentes telescópios.

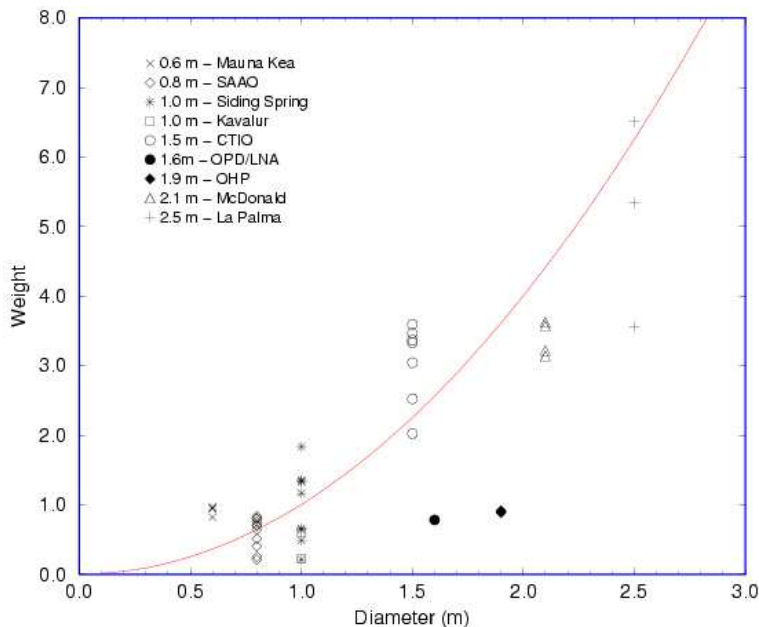
Usamos uma técnica interativa que se baseia no conhecimento que temos sobre o sinal da estrela. A curva de luz é separada em *chunks* (pedaços); cada *chunk* corresponde aos dados de um turno de observação, ou parte dele. Opcionalmente, os dados de cada *chunk* podem ser separados segundo intervalos de 10, 15, 20 minutos, etc, se quisermos levar em conta a variabilidade da atmosfera ao longo do turno. Em cada interação  $k = 1, 2, 3, \dots$ , o peso do conjunto  $i$  é calculado segundo a fórmula:

$$w_i^{(k+1)} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} w_i^{(k)} [y_{ij} - y(t_{ij})]^2 \quad (6.22)$$

onde  $w_i^{(k)}$  é o peso (normalizado) do conjunto  $i$  calculado pela interação  $k$ ;  $M$  é o número de conjuntos de dados;  $N_i$  é o número de pontos do conjunto  $i$ ;  $(t_{ij}, y_{ij})$  é o ponto  $j$  do conjunto  $i$ ; e  $y(t_{ij})$  é o valor calculado para  $y$  no instante  $t_{ij}$ . Assumimos que  $w_i^{(0)} = 1/N$  para todos os pontos, onde  $N$  é o número total de pontos.

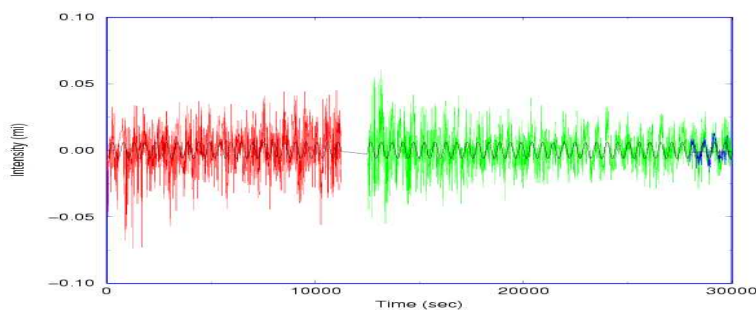
O processo é repetido até que todas os pesos converjam para seus respectivos limites. Em geral, 2 ou 3 interações são necessárias para que os limites sejam atingidos.

Com base no cálculo dos pesos através do algoritmo descrito acima, para dados obtidos por nove diferentes telescópios, construímos um gráfico do peso de cada conjunto de dados da PG 1159-035 contra o diâmetro do espelho do telescópio,  $D$ , mostrado na Fig.6.15. Os pesos foram arbitrariamente normalizados de modo que o peso médio para os dados dos telescópios de 1 m fosse igual a 1. No mesmo gráfico, plotamos a curva de  $D^2$ , proporcional à área do espelho. A princípio, se esperaria que o peso fosse proporcional a  $D^2$  pois o número de fótons captados da estrela é proporcional à área do espelho. O gráfico evidencia uma tendência neste sentido. A dispersão vertical de pontos se deve à variação das condições atmosféricas no local de observação.



**Fig. 6.15:** Pesos normalizados dos dados de nove telescópios diferentes. Os pesos foram normalizados de modo que o peso médio dos dados dos telescópios de 1 m fosse igual a 1. No mesmo gráfico vemos a curva de  $1/D^2$ , proporcional à área do espelho.

A Fig.6.16 mostra a relação sinal ruído diretamente em uma curva de luz da PG 1159-035. A curva sinusoidal representa a pulsação de *maior amplitude* presente na curva de luz da PG 1159-035, com período de 516 s, se sobrepondo às curvas de luz observadas. Como se pode ver, a relação S/N é bem menor que 1.



**Fig. 6.16:** Relação S/N para a PG 1159-035. A curva sinusoidal representa o modo de pulsação de maior amplitude (período de 516 s) se sobrepondo à curva de luz da estrela.

O uso de pesos no cálculo da TF não torna necessariamente mais fácil a tarefa de identificar os picos verdadeiros no periodograma, pois faz com que a densidade efetiva de dados em certas partes da curva de luz diminua, o que, em certos, casos torna o periodograma

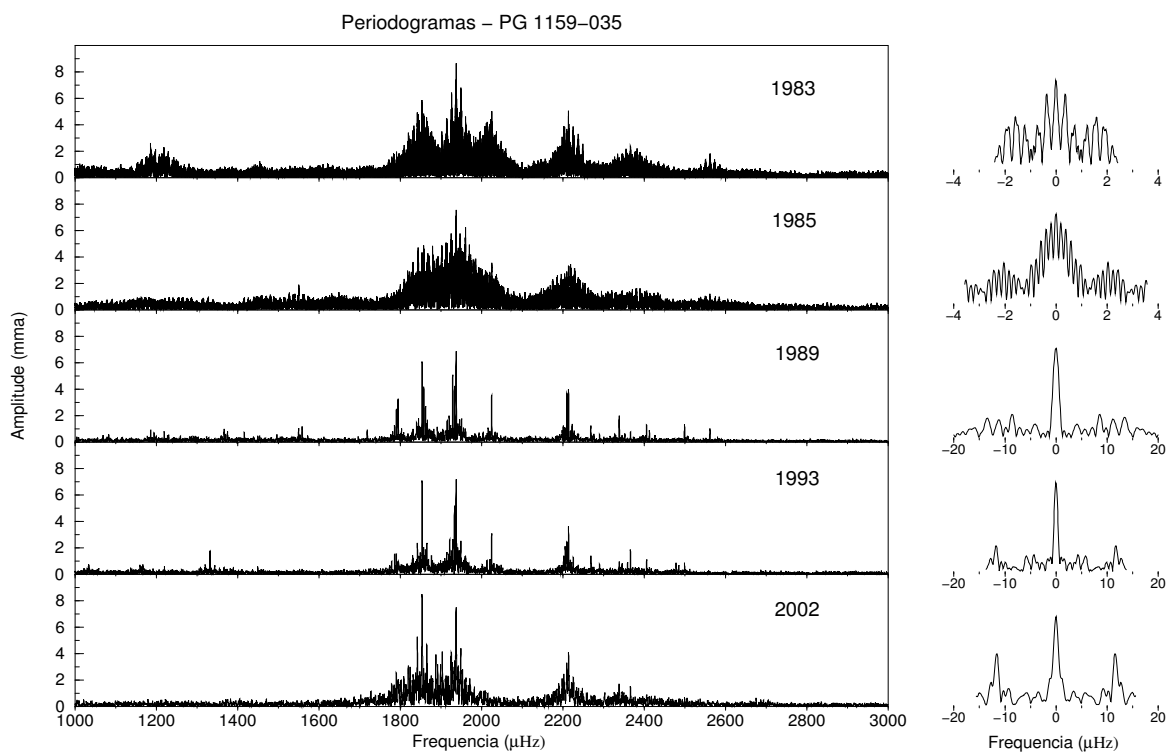


ainda mais intrincado. Contudo, o uso de pesos reduz a incerteza nos cálculos das frequências e de suas amplitudes e tempos de máximo.

## 6.15 Periodogramas da PG 1159-035

A Fig.6.17 mostra os periodogramas da estrela PG 1159-035 obtidos a partir das curvas de luz dos anos de 1983, 1985, 1989, 1993 e 2002. O intervalo de frequências cobre toda a faixa de frequências (detectáveis) de pulsação da estrela,  $1000-3000 \mu Hz$ . As amplitudes estão no intervalo  $0-10 \text{ mma}$ . Os picos de maior amplitude estão concentrados no intervalo  $1700-2400 \mu Hz$ . As figuras seguintes, Fig.6.18 a Fig.6.26, mostram com detalhes nove regiões do periodograma anterior, com uma superposição de  $50 \mu Hz$  entre regiões consecutivas.

As janelas espectrais dos dados de cada ano podem ser vistas à esquerda dos gráficos. Os dados de 1983 e 1985 são os que apresentam as maiores discontinuidades e por isso suas janelas espectrais são as mais intrincadas. Os melhores espectros foram obtidos para os dados quase-contínuos de 1989 e 1993.



**Fig. 6.17:** *Periodogramas da PG 1159-035 para os anos de 1983, 1985, 1989, 1993 e 2002. As respectivas janelas espectrais são mostradas à direita.*

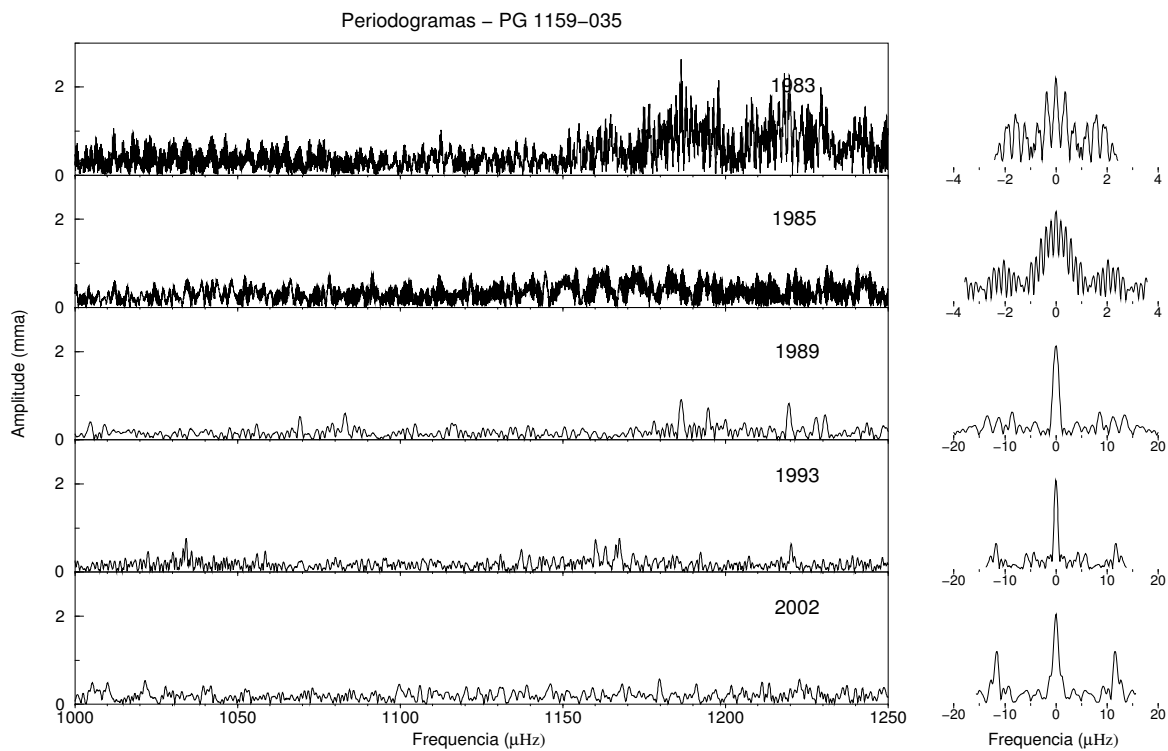


Fig. 6.18: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE I*

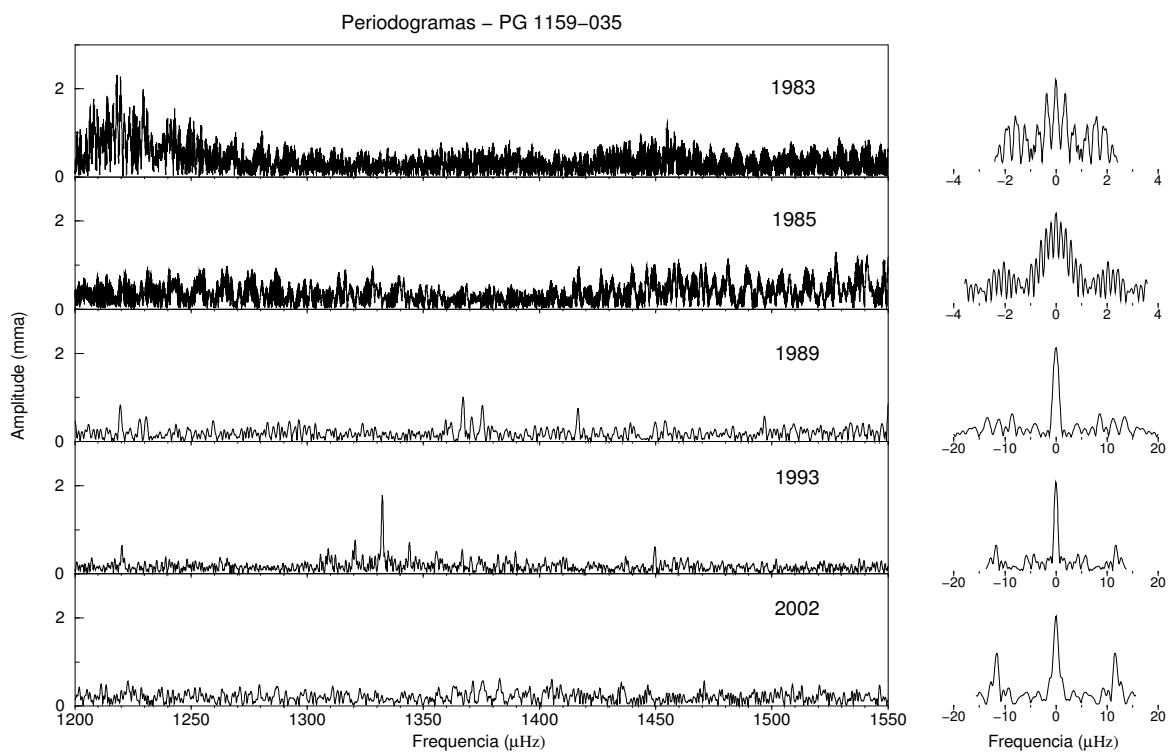


Fig. 6.19: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE II*

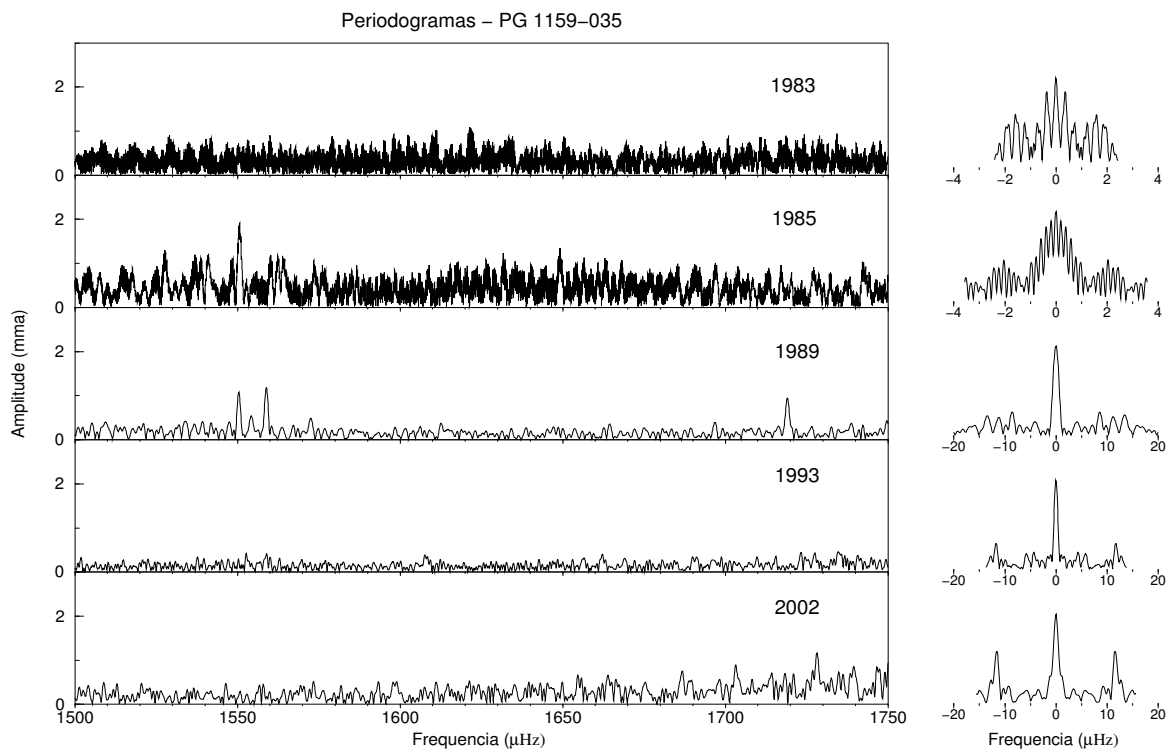


Fig. 6.20: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE III*

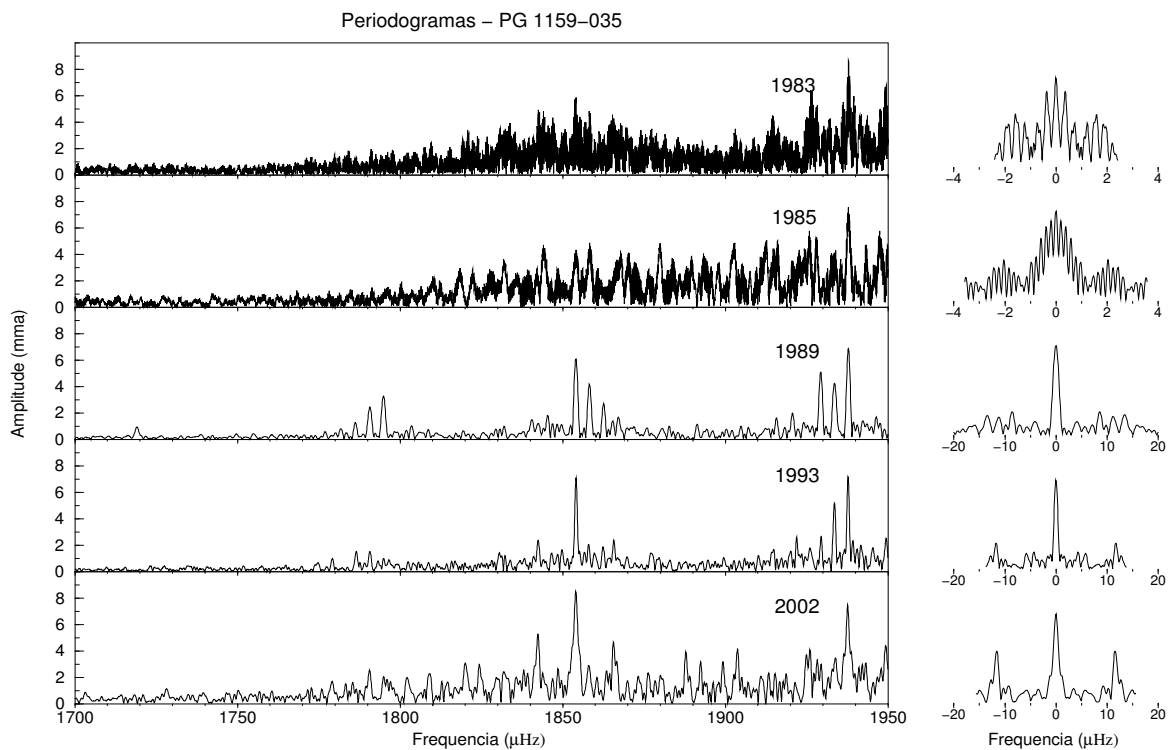


Fig. 6.21: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE IV*

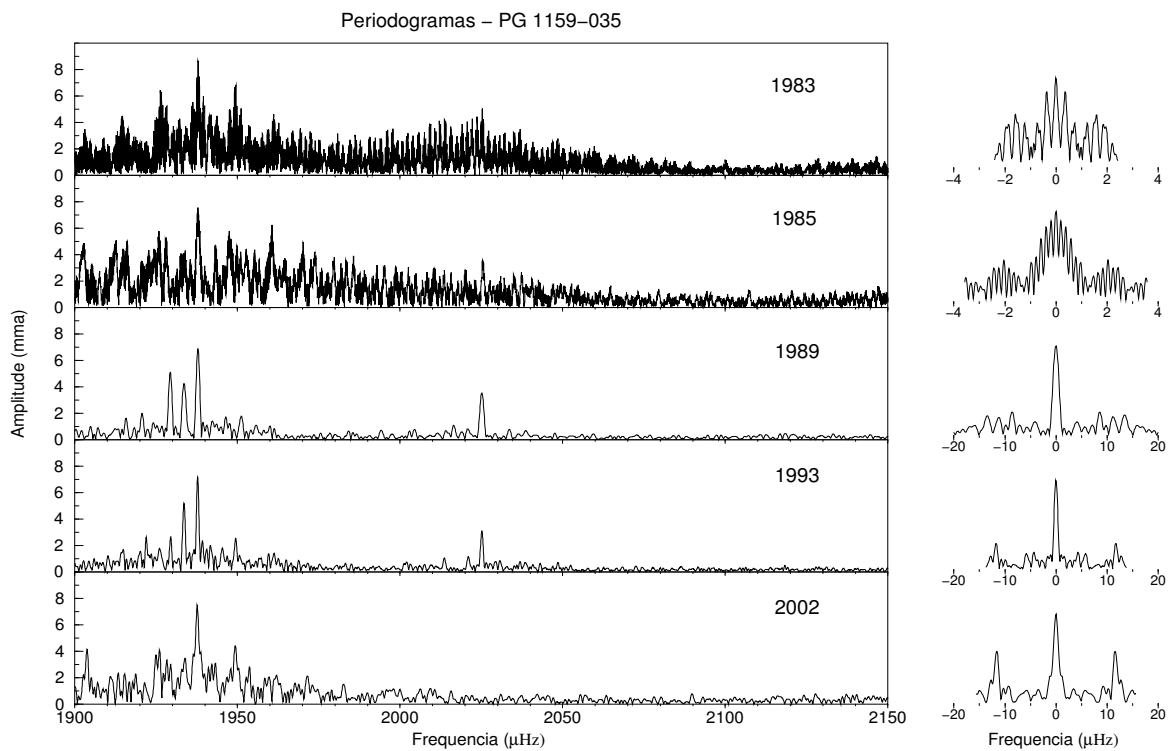


Fig. 6.22: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE V*

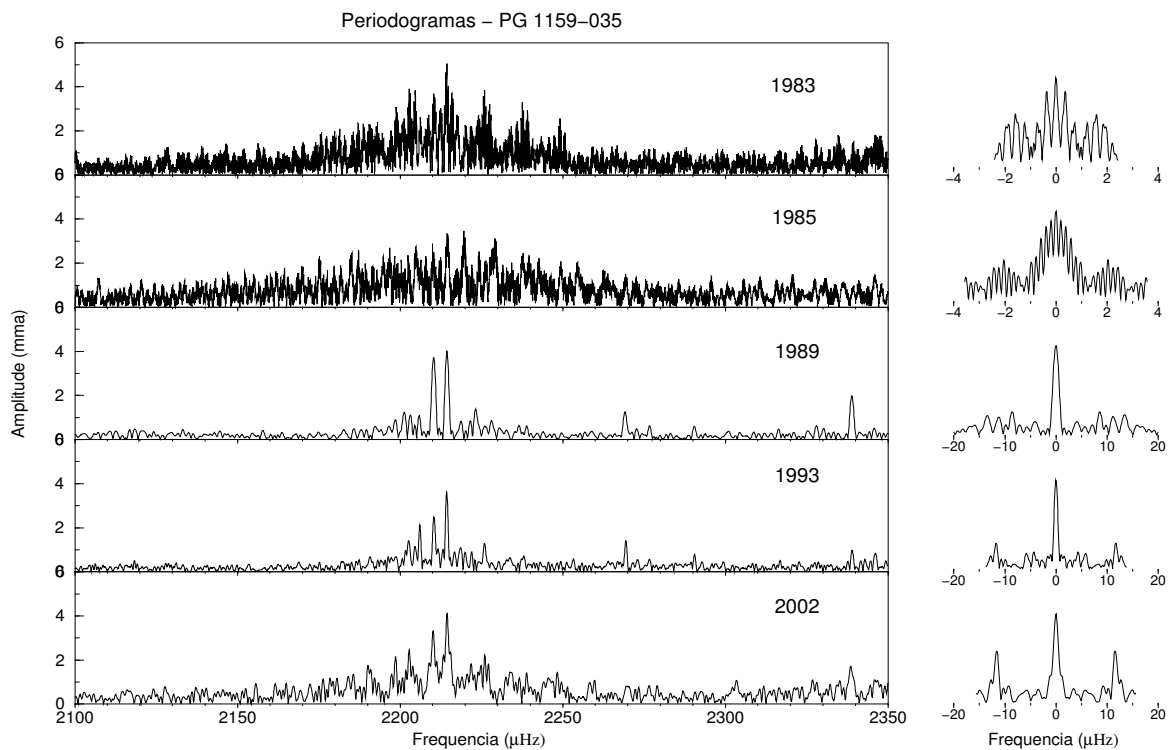


Fig. 6.23: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE VI*

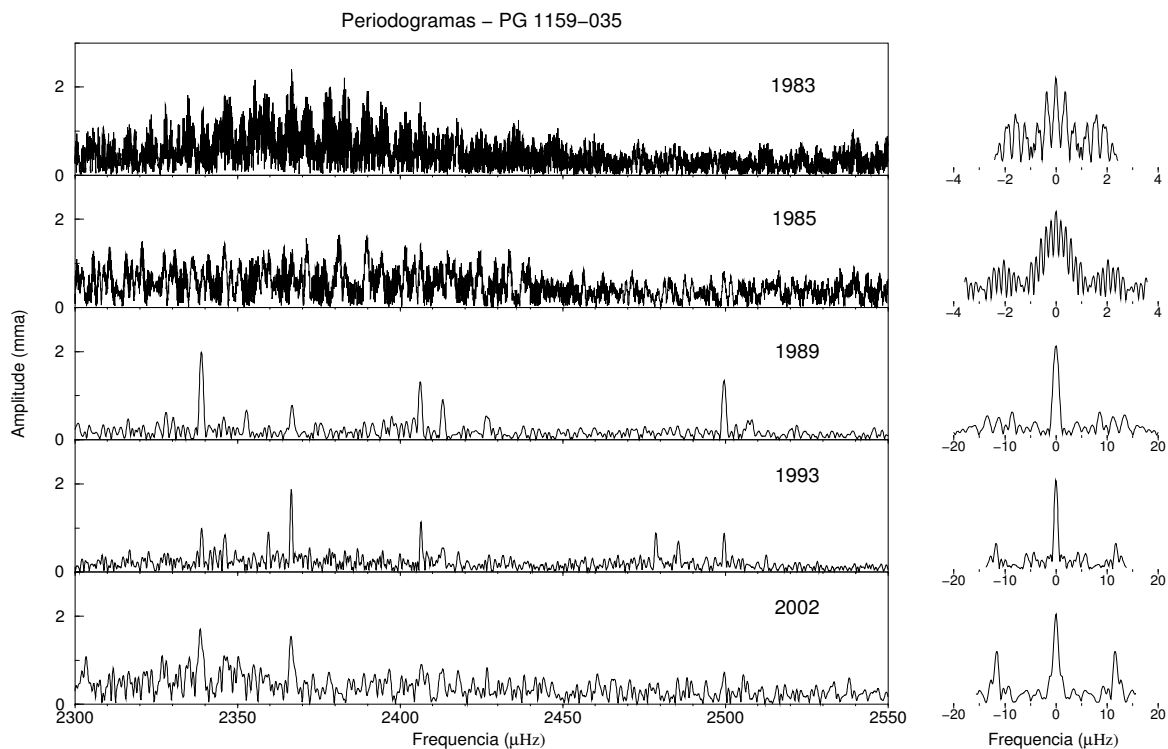


Fig. 6.24: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE VII*

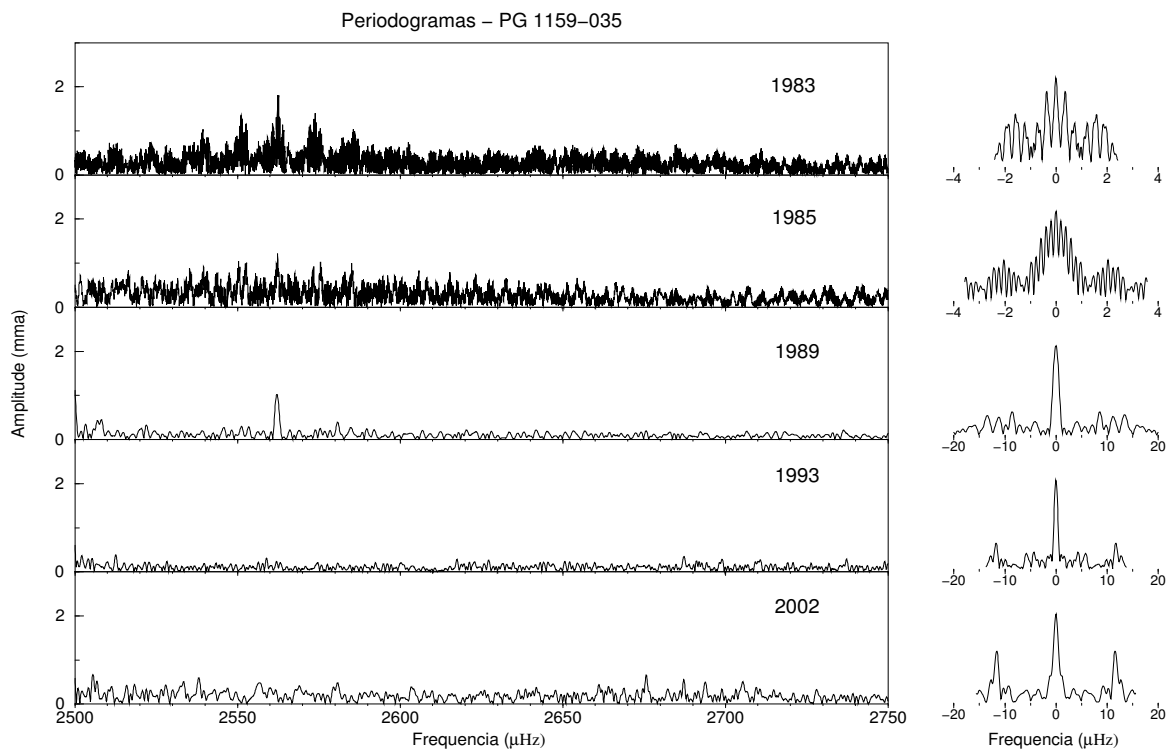


Fig. 6.25: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE VIII*

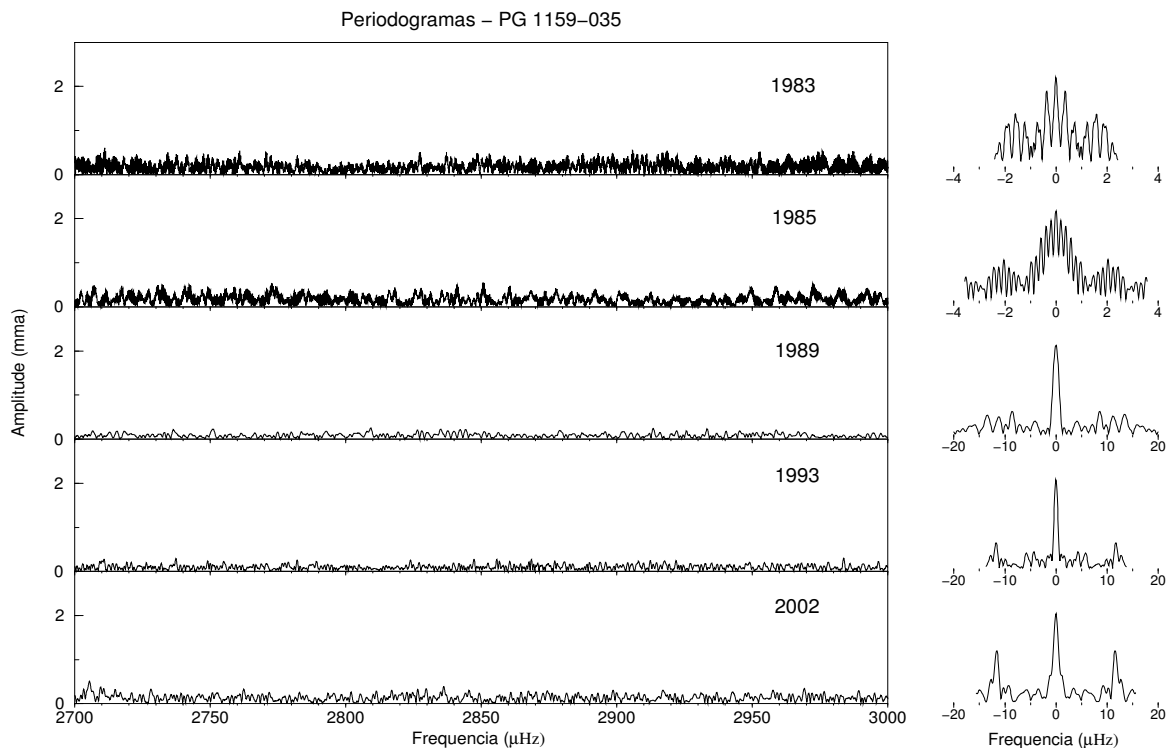


Fig. 6.26: *Periodogramas da PG 1159-035: PARTE IX*

## 6.16 Períodos Detectados na PG 1159-035

Para cada conjunto de dados anuais, calculamos a amplitude mínima de detecção  $A_{detect}$  (Eq.6.19). Selecionamos todas as frequências com amplitude acima de  $A_{detect}$ , tomando cuidado com frequências muito próximas. Em seguida, fizemos o ajuste não-linear de todas as frequências selecionadas, usando o programa `multif`, calculando suas frequências, amplitudes e fases ( $T_{max}$ ).

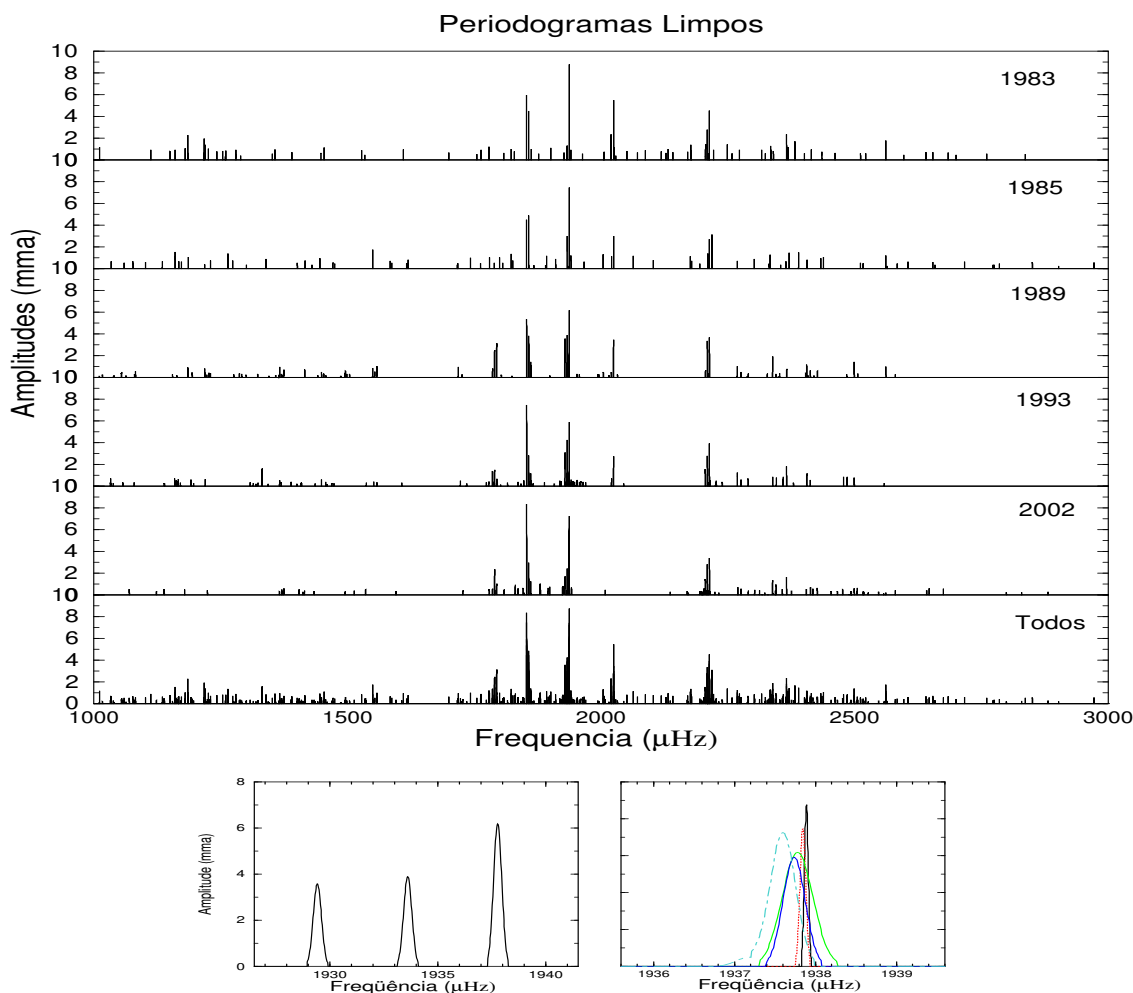
Na etapa seguinte, examinamos a curva de luz residual repetindo o procedimento acima: calculamos  $A_{detect}$ ; selecionamos todos os picos com amplitude acima de  $A_{detect}$ ; fizemos o ajuste simultâneo usando `multif`. O processo era repetido para a curva de luz residual até que não restasse nenhum pico com amplitude maior que a amplitude mínima de detecção. Sempre que havia dúvida em relação a algum pico, este era deixado para a etapa seguinte.

A chance de uma frequência selecionada ser casual é de  $\sim 1$  em 1000 (0.1%). A maior fonte de erros ocorre quando o pico selecionado está dentro da janela espectral de um pico real de grande amplitude. Neste caso, talvez ele seja um dos lóbulos laterais (*sidelobes*). E o problema é pior quando as janelas espectrais de dois ou mais picos de alta amplitude se sobrepõem. Esta foi a situação que enfrentamos com os dados de 1983 e 1985 (em menor grau, com os dados de 2002). Para esses anos, era esperado que um percentual maior dos picos selecionados fossem escolhas equivocadas.

Contudo, a inclusão de períodos equivocados na lista de períodos de cada ano não é algo grave, pois os períodos equivocados podem ser identificados e descartados quando se faz a

identificação dos modos de pulsação, como veremos a seguir.

As tabelas contendo os períodos detectados para cada ano aparecem no final deste capítulo: Tab.6.10 a Tab.6.14. Todos os períodos detectados aparecem plotados nos gráficos da Fig.6.27. Chamamos este tipo de periodograma de *periodograma limpo* pois ele contém apenas os períodos de pulsação detectados, sem o ruído espectral. A largura dos picos é igual à largura média dos picos no periodograma real, mas sem a presença de *sidelobes*. Ampliações de nove partes sucessivas podem ser vistas nas Fig.6.37 - Fig.6.45. Há uma sobreposição de  $50\mu\text{Hz}$  entre duas partes consecutivas para que nenhum detalhe seja perdido.



**Fig. 6.27:** *Periodogramas limpos* - os picos indicam as frequências detectadas nos dados de cada ano e suas respectivas amplitudes. A figura superior mostra os periodogramas limpos dos dados de cada ano, sendo que no último gráfico temos uma superposição de todos os gráficos anteriores. Na parte de baixo, o gráfico à esquerda mostra como fica um tripleto em um periodograma limpo. A largura dos picos é igual à resolução espectral no periodograma real. No gráfico à direita vemos uma sobreposição de picos presentes em anos diferentes, para uma pequena janela de frequências.

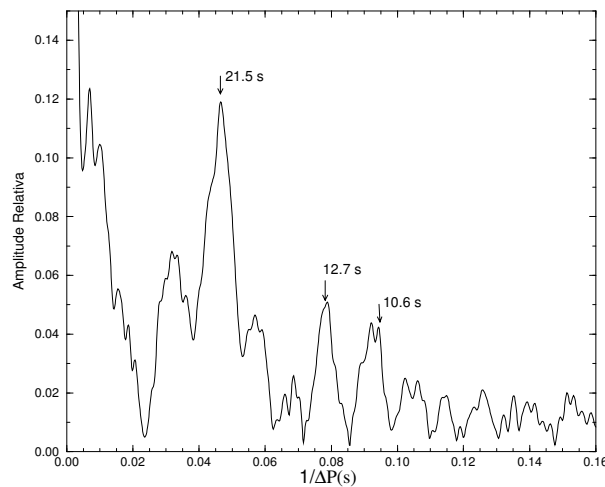
## 6.17 Estimativa de $\Delta P_\ell$

O espaçamento entre os períodos de dois modos consecutivos ( $k$  e  $k + 1$ ) de mesmo índice  $\ell$  não é exatamente uniforme, mas é próximo de um valor característico que depende fundamentalmente da massa da estrela.

Duas técnicas foram usadas no cálculo de  $\Delta P_\ell$ : (a) transformada em período (PT) e (b) o Teste Kolmogorov-Smirnov (K-S).

**Transformada em Período** — esta técnica consiste em converter o periodograma da curva de luz de frequência contra amplitude para período contra amplitude. Desta forma, os dados se assemelham a uma série de tempo e se existir alguma regularidade no espaçamento entre picos de altas amplitudes ela deve aparecer na Transformada de Fourier (periodograma) da série. Por este motivo, alguns autores chamam esta técnica de *transformada em período* (“period transform”= PT, em inglês).

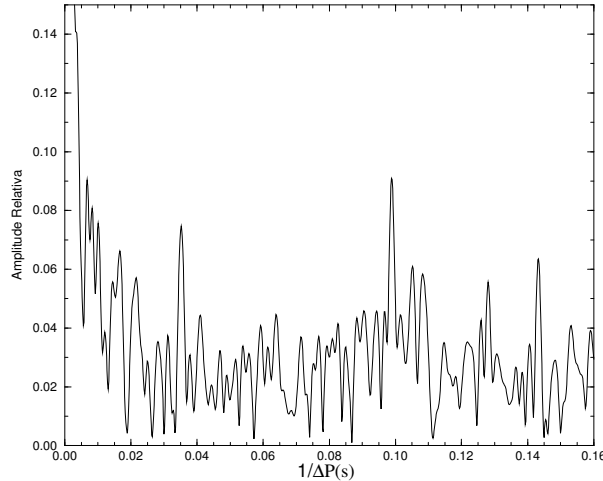
A técnica PT foi usada por Winget *et al.* (1991) no primeiro cálculo de  $\Delta P_\ell$  para a PG 1159-035, com base nos dados fotométricos obtidos em 1989. Em seu estudo, eles fizeram a Transformada de Fourier da seqüência de picos encontrados no periodograma da curva de luz, escritos em termos de períodos e amplitudes. O transformada em período obtida é mostrada no gráfico da Fig.6.28. No eixo horizontal temos  $1/\Delta P(s)$ , cobrindo a faixa de  $0 - 0.16 Hz$ , onde se espera que os valores de  $1/\Delta P(s)$  caiam. O pico mais proeminente corresponde a  $21.5 s$  e sugere que este seja o valor de  $\Delta P_1$  ( $\Delta P$  para  $\ell = 1$ ), enquanto que o pico de  $12.7 s$  seria o valor de  $\Delta P_2$  ( $\Delta P$  para  $\ell = 2$ ). O pico de  $10.6 s$  é o primeiro harmônico do pico de  $21.5 s$ .



**Fig. 6.28:** Transformada em período (PT) dos dados de 1989 da PG 1159-035. Os picos de  $21.5 s$  e  $12.7 s$  indicam os espaçamentos para períodos com  $\ell = 1$  e  $\ell = 2$ , respectivamente. O pico de  $10.6 s$  é o primeiro harmônico do pico de  $21.5 s$ .

Para as pré-anãs brancas, como a PG 1159-035, onde  $k \gg \ell$ , a relação entre  $\Delta P_1$  e  $\Delta P_2$  deve ser coerente com a Eq.6.2:





**Fig. 6.29:** A transformada em período (PT) no gráfico mostra que mesmo numa série aleatória de um grande número de picos aparecem regularidades casuais nos espaçamentos entre os picos.

$$\frac{\Delta P_\ell}{\Delta P_{\ell+1}} = \frac{P_o}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \cdot \frac{\sqrt{(\ell+1)(\ell+2)}}{P_o} \quad (6.23)$$

$$\frac{\Delta P_\ell}{\Delta P_{\ell+1}} = \sqrt{\frac{\ell+2}{\ell}} \quad (6.24)$$

Para  $\ell = 1$  e  $\ell = 2$ :

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \sqrt{3} \simeq 1.73 \quad (6.25)$$

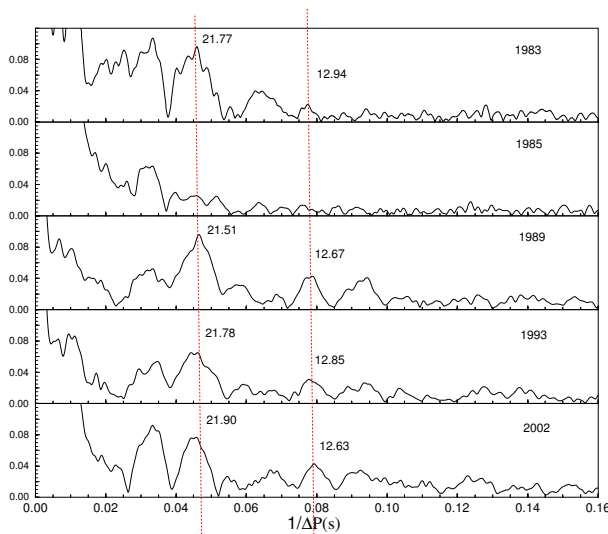
Para os valores encontrados por Winget *et al.* (1991) temos:

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{21.5}{12.5} = 1.72 \quad (6.26)$$

o que é muito próximo do valor esperado de acordo com a Eq.6.24.

Em qualquer distribuição aleatória de um número grande de picos é possível se encontrar regularidades no espaçamento entre séries de picos. A figura Fig.6.29 mostra a transformada em período (PT) dos dados mencionados anteriormente, após serem randomizados, isto é, os picos têm a mesma altura, mas suas frequências foram alteradas aleatoriamente. Entretanto, a probabilidade de que a razão entre dois dos picos mais proeminentes seja *casualmente* aproximadamente igual a  $\sqrt{3}$  é mínima. Por isto, o fato de  $\Delta P_1/\Delta P_2 \simeq \sqrt{3}$  reforça enormemente a hipótese de que esses valores correspondam aos valores reais de  $\Delta P_1$  e  $\Delta P_2$ .

O mesmo procedimento foi empregado com os dados de 1983 a 2002, com uma pequena diferença: aplicamos a técnica aos periodogramas *inteiros* e não apenas à seqüência de picos.



**Fig. 6.30:** Análise dos espaçamentos entre os períodos de pulsação através da técnica PT. Os picos de  $\sim 21$  s correspondem à  $\Delta P_1$  e os de  $\sim 12$  s à  $\Delta P_2$ .

Ano	$\Delta P_1$ (s)	$\Delta P_2$ (s)	$\Delta P_1/\Delta P_2$
1983	21.77	12.94	1.68
1985	-	-	-
1989	21.51	12.67	1.70
1993	21.78	12.85	1.69
2002	21.90	12.63	1.73

**Tab. 6.4:** Valores calculados pela técnica PT.

Os resultados podem ser vistos na Fig.6.30 e na Tab.6.4. Com exceção dos dados de 1985, onde o periodograma é bastante ruidoso, os dois picos aparecem nos gráficos de todos os anos e a razão entre eles é sempre próxima de  $\sqrt{3}$ .

**Kolmogorov-Smirnoff** — Este método usa o teste estatístico de *Kolmogorov-Smirnov* (K-S) para verificar a presença de espaçamentos constantes entre os períodos detectados. O uso do teste K-S para este fim foi introduzido por Kawaler (1988) para estudar os espaçamentos nos primeiros oito períodos detectados por Winget *et al.* (1985) nos dados da PG 1159-035. Mais tarde Winget *et al.* (1991) usou o teste K-S para estudar os espaçamentos entre os 122 períodos detectados nos dados de 1989 da mesma estrela.

O teste K-S compara duas distribuições, uma conhecida e outra desconhecida, e calcula a probabilidade das duas serem iguais. O primeiro passo é reescrever a Eq.6.3 numa forma mais geral:

$$P_{\ell n} = P_{o\ell} + x_n \Delta P_\ell \quad (6.27)$$

onde  $P_{o\ell}$  é uma constante a ser descoberta e o número real  $x_n$  substitui o número inteiro  $n$  para transformar a aproximação na Eq.6.3 na igualdade da Eq.6.27.

Se assumirmos um valor para  $P_{o\ell}$ , para cada período observado  $P_{obs}$  podemos calcular o número  $x_n$  e o índice  $n$ :

$$\begin{aligned} x_n &= (P_{obs} - P_{o\ell})/\Delta P_\ell \\ n &= \text{Parte Inteira}\{ x_n \} \\ r_n &= \text{Parte Fracionária}\{ x_n \} = x_n - n \end{aligned} \tag{6.28}$$

Repetindo o cálculo acima para todos os períodos observados, para cada valor de  $\Delta P_\ell$  teremos uma distribuição de valores  $r_n$ , entre 0 e 1. Os valores de  $r_n$  estarão próximos de zero para o valor correto de  $\Delta P_\ell$ . Mas, se o valor assumido para  $\Delta P_\ell$  for incorreto, os períodos  $P_n$  não serão representados pela Eq.6.27 e  $r_n$  poderá ter qualquer valor entre 0 e 1. Neste caso, teremos uma distribuição uniforme de números randômicos entre 0 e 1.

$\Delta P_\ell$	$r_n$
correto	distribuição concentrada em zero (não randômica)
incorreto	distribuição randômica entre 0 e 1

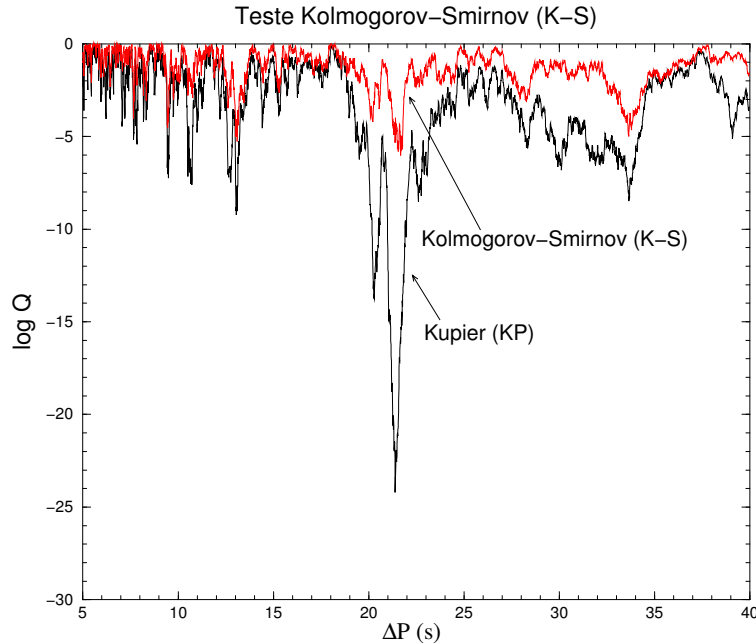
O teste K-S calcula a *probabilidade*  $Q$  da distribuição de valores  $r_n$  para um dado  $\Delta P_\ell$  ser uma distribuição randômica e, portanto de  $\Delta P_\ell$  ser incorreto. A probabilidade<sup>9</sup> de  $\Delta P_\ell$  ser correto será  $(1 - Q)$ . Dizemos, então, que o valor de  $\Delta P_\ell$  é significativo em um *nível de confiança* de  $(1 - Q) \times 100\%$ .

O teste K-S é perfeito para o estudo de espaçamentos uniformes e é uma técnica padrão neste tipo de estudo. O método PT não é uma técnica padrão, mas tem a vantagem de poder ser aplicado diretamente aos dados observacionais, sem nenhuma interferência de interpretação. Já o teste K-S é aplicado ao conjunto de períodos *detectados* e, por isso, é menos direto. Sempre é aconselhável comparar o resultado do teste K-S com o do método PT: a princípio, os picos de maior amplitude devem aparecer nos dois métodos. Se não aparecerem, algum problema na etapa de detecção *pode* ter ocorrido e deve ser investigada.

O teste K-S “puro” proposto por Kawaler (1988) apresenta um problema: a estatística K-S não é muito sensível quando a distribuição é concentrada em 0 ou em 1. Nos extremos, o valor estimado para  $Q$  pode não ser tão confiável. E este é justamente o caso da distribuição de  $r_n$  quando  $\Delta P$  é correto e os valores de  $r_n$  estão concentrados próximos a zero.

Para corrigir este problema, precisamos usar uma estatística um pouco mais sofisticada que a estatística de Kolmogorov-Smirnov e que leve em conta o problema dos extremos, como por exemplo, a estatística de *Anderson-Darling* (A-D) ou a estatística de *Shapiro-Wilk* (S-W) ou ainda a estatística de *Kuiper* (KP) (Press *et al.* 1986). Os testes de comparação de distribuições que usam estas estatísticas às vezes são chamados de teste A-D, teste S-W e teste KP, respectivamente. Na verdade, são apenas variantes do teste K-S.

<sup>9</sup> Winget *et al.* (1991) usa o termo “K-S Statistic” para se referir a  $\log Q$ . Por uma questão de clareza, é melhor se usar  $\log Q$ .



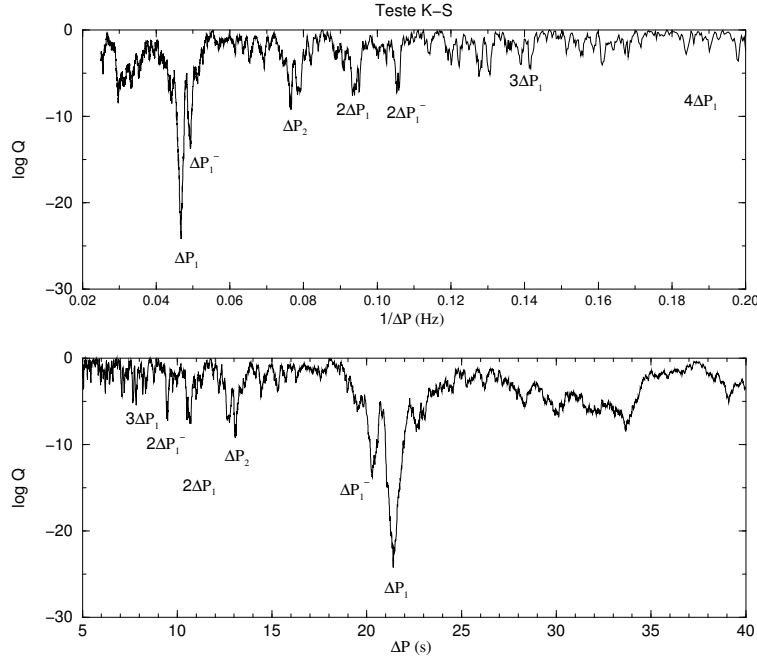
**Fig. 6.31:** Comparação entre o teste K-S usando duas estatísticas diferentes: K-S (curva mais clara) e KP (curva mais escura). Em geral, os vales no teste K-S usando estatística KP ficam melhor definidos facilitando a determinação de  $\Delta P$ .

Em nosso trabalho, usamos o teste K-S com estatística KP. Em testes comparativos, a estatística KP se mostrou tão eficaz quanto a A-D e a S-W, tendo a vantagem de ser mais simples do ponto de vista numérico e computacional. A Fig.6.31 mostra uma comparação entre o teste K-S usando estatísticas K-S e KP.

Na Fig.6.32 pode ser visto o resultado do teste K-S para os 556 períodos detectados nos periodogramas da PG 1159-035. No gráfico superior temos  $(\log Q)$  contra  $1/\Delta P$  (em Hz), o que facilita a identificação de harmônicos. O gráfico inferior mostra  $(\log Q)$  contra  $\Delta P$  (em segundos). O espaçamento  $\Delta P_1$  para  $\ell = 1$  vale 21.39 s, enquanto que  $\Delta P_2$  (para modos  $\ell = 2$ ) vale 13.06 s (ver Tab.6.5).

Os dois valores são coerentes com os valores obtidos pelo método PT e, além disso, a razão entre eles é bem próxima de  $\sqrt{3}$ :  $\Delta P_1/\Delta P_2 = 1.64$ . A diferença de  $\sim 5\%$  se deve, principalmente, ao fato das duas séries estarem superpostas. A identificação dos períodos de cada seqüência permite que  $\Delta P_1$  e  $\Delta P_2$  sejam determinados independentemente, o que reduz bastante o erro nos cálculos, como veremos a seguir.

Uma possível explicação para as estruturas de vales (mínimos) reveladas nos teste K-S é ilustrada na Fig.6.33, onde podemos ver as distâncias possíveis entre os picos de dois tripletos (modo  $\ell = 1$ ). A distância entre picos de mesmo  $m$  é  $\Delta P$ , mas temos distâncias maiores ( $\Delta P^+$  e  $\Delta P^{++}$ ) e distâncias menores ( $\Delta P^-$  e  $\Delta P^{--}$ ). Devemos levar em conta que nem todos os componentes de todos os tripletos podem ser detectados ou, talvez, até não sejam modos ativados. Isto pode explicar os vales menores e assimétricos ao redor de  $\Delta P_1$  e  $\Delta P_2$ .



**Fig. 6.32:** *Teste K-S para os 556 períodos detectados em todas as curvas de luz da PG 1159-035.*

Se o espaçamento entre períodos de mesmo  $\ell$  fosse exatamente constante, os valores corretos de  $\Delta P_\ell$  apareceriam como linhas muito finas no gráfico do Teste K-S. O fato dessas linhas possuírem uma certa espessura sugere que esse espaçamento não é exatamente constante, tendo uma certa dispersão em torno de  $\Delta P_\ell$ , tal como sugere a teoria e que discutiremos a seguir.

Espaçamento	(s)	(Hz)	$\log Q$
$\Delta P_1$	21.38	0.047	-21,4
$\Delta P_1^-$	20.29	0.050	-20.3
$\Delta P_1^{--}$	19.59	0.051	-3.2
$\Delta P_1^+$	22.65	0.044	-8.1
$\Delta P_1^{++}$	23.06	0.043	-6.8
$\Delta P_2$	13.06	0.077	-9.1
$\Delta P_1^- ?$	12.80	0.078	-7.4

**Tab. 6.5:** *Periodicidades encontradas pelo Teste K-S.*

Para modos com  $\ell = 3$  o valor esperado para  $\Delta P_3$  seria da ordem de 8.75 s. No gráfico do Teste K-S vemos a presença de picos entre 9.4 e 9.5 s que, mais provavelmente, são harmônicos de  $\Delta P_1^-$  e  $\Delta P_1^{--}$ . As amplitudes dos modos  $\ell = 3$  para o visível são pequenas demais para serem detectadas<sup>10</sup>, de modo que não há picos suficientes (se é que existe algum) para validar qualquer estatística.

<sup>10</sup> O cancelamento geométrico faz com que as amplitudes dos modos  $\ell = 3$  sejam 50 vezes menor que as

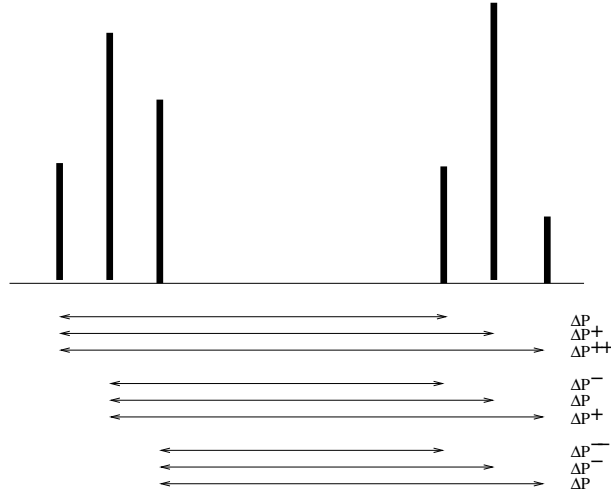


Fig. 6.33: Distâncias possíveis entre componentes de dois tripletos.

### 6.18 Cálculo de $P_{o\ell}$

— O valor de  $Q$  no Teste K-S depende fortemente de  $\Delta P_\ell$ , sendo praticamente insensível ao valor escolhido para  $P_{o\ell}$ . Para um dado  $\Delta P_\ell$ , o valor de  $P_{o\ell}$  deve ser aquele que otimize o ajuste da seqüência,

$$P_{\ell n} = P_{o\ell} + n \Delta P_\ell \tag{6.29}$$

aos períodos observados. Para cada valor de  $P_{o\ell}$  no intervalo  $[P_{\ell min} - \Delta P_\ell, P_{\ell min}]$ , calculamos a variância:

$$Var = \sum_{n=1}^N \frac{r_n^2}{N} \tag{6.30}$$

onde

$$r_n = P_\ell - Int \left[ \frac{P_{\ell i} - P_o}{\Delta P_\ell} \right] \Delta P_\ell \tag{6.31}$$

é a diferença entre o período observado  $P_{\ell i}$  e o período mais próximo calculado pela Eq.6.29.

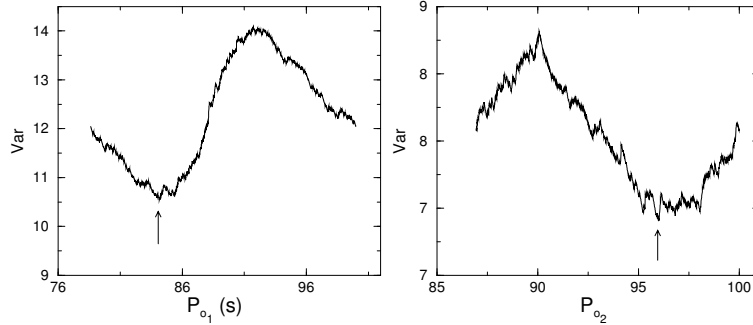
O resultado da aplicação deste método aos valores encontrados para  $\Delta P_1$  e  $\Delta P_2$  podem ser vistos na Fig.6.34 e são:

$$\begin{aligned} P_{o_1} &= 84.15 \text{ s} \\ P_{o_2} &= 96.01 \text{ s} \end{aligned} \tag{6.32}$$

As seqüências de períodos ficam:

---

dos modos  $\ell = 1$  (Robinson, Kepler & Nather 1982).



**Fig. 6.34:** Os pontos de mínimo indicam os melhores valores para  $P_{o_1}$  e  $P_{o_2}$ .

$$P_{1,n} = 84.15 + 21.38 n \text{ (s)} \quad \text{para } \ell = 1 \quad (6.33)$$

$$P_{2,n} = 96.01 + 13.06 n \text{ (s)} \quad \text{para } \ell = 2 \quad (6.34)$$

O índice  $n$  acima não corresponde ao índice nodal  $k$  dos modos-g de pulsação, apenas indica a posição em relação ao período de referência  $P_{o_\ell}$ . Por exemplo, o período  $P_{1,8}$  é o oitavo período da série  $\ell = 1$  após  $P_{o_1}$ . Como as equações acima servem apenas para auxiliar no processo de identificação de períodos, o período de referência é arbitrário. A correspondência entre  $n$  e  $k$  é feita a partir da comparação dos espaçamentos nos dados reais com modelos para PWDs.

A determinação de  $P_{o_1}$  e  $P_{o_2}$  é fortemente afetada pela superposição entre as duas seqüências, de forma que os valores de  $P_{o_1}$  e  $P_{o_2}$  são apenas uma primeira aproximação dos valores reais. Uma determinação mais precisa só pode ser feita depois que as duas seqüências foram identificadas.

## 6.19 Identificação dos Períodos de Pulsação

No periodograma da Fig.6.17 os períodos da série  $\ell = 1$  estão sobrepostos aos da série  $\ell = 2$ . Usamos a Eq.6.33 para calcular a posição *aproximada* dos períodos centrais dos tripletos e multipletos ( $m = 0$ ). E, sendo o período de rotação da estrela conhecido,  $P_{rot} = 1.38 \pm 0.01$  dias (Winget *et al.* 1991), podemos estimar a posição dos picos laterais ( $m \neq 0$ ). É através desta comparação que podemos identificar os membros de cada seqüência.

A identificação dos períodos com  $\ell = 1$  é mais fácil e segura, pois além do espaçamento entre eles ser menor e formarem tripletos e não multipletos, suas amplitudes são, em geral, bem maiores que as dos períodos com  $\ell = 2$  já que o cancelamento geométrico é menor para  $\ell = 1$ . Por isto, primeiro fizemos a identificação dos períodos da seqüência  $\ell = 1$  e os restantes foram comparados com a seqüência aproximada para  $\ell = 2$ .

Os tripletos  $\ell = 1$  de maior amplitude quase sempre são inconfundíveis e não representam problemas. A dificuldade aparece quando as amplitudes são muito pequenas, sendo difícil

diferenciá-los dos picos com  $\ell = 2$ . Comparando os periodogramas de dados de diferentes anos, vê-se claramente que as amplitudes de muitos picos sofrem mudanças acentuadas: às vezes aumentam, às vezes diminuem até desaparecer. De fato, com exceção dos picos de maior amplitude, a maioria dos picos não aparece em todos os anos e muitos aparecem apenas em um dos periodogramas. Este problema pode ser contornado pela sobreposição dos periodogramas, como no caso da DAV G29-38 (Kleimman *et al.* 1998).

A tabela Tab.6.6 mostra os períodos identificados como  $\ell = 1$ . Ajustamos os índices  $k$  de cada tripleto assumindo  $k = 20 \pm 2$  para o tripleto de 517 s. Winget *et al.* (1991) chegaram a este valor ( $k = 20 \pm 2$ ) comparando os espaçamentos entre períodos observados nos dados de 1989 com modelos para a PG 1159-035. Os modelos utilizados nesta comparação (modelos KB) serão discutidos no próximo capítulo.

Usamos o símbolo ? para indicar que o período é incerto e ?? quando esta incerteza é realmente grande. Em alguns casos, não há dúvidas de que o período pertença ao tripleto, mas não há certeza quanto ao seu índice  $m$ . Isto é indicado pelo símbolo : ao lado do período. A frequência (em  $\mu Hz$ ) é mostrada na coluna seguinte. A penúltima coluna mostra a amplitude média aproximada em  $mma$  e serve apenas para dar uma idéia da amplitude do pico.

Muitos períodos aparecem apenas nos dados de um dos anos, outros em dois ou três, mas não em todos. Outros são “persistentes”, aparecendo em todos os anos. Essas observações aparecem na última coluna das tabelas Tab.6.6.

A Fig.6.35 mostra um gráfico do período contra o índice  $k$ . Os períodos encontrados para o modo  $\ell = 1$  formam uma seqüência alinhada de pontos. Ajustando uma reta aos pontos, podemos refinar o valor de  $\Delta P_1$ :

$$P_{1,k} = 88.05 + 21.43 k \quad (6.35)$$

$$\Delta P_1 = 21.43 \pm 0.03 \text{ (sec)} \quad (6.36)$$

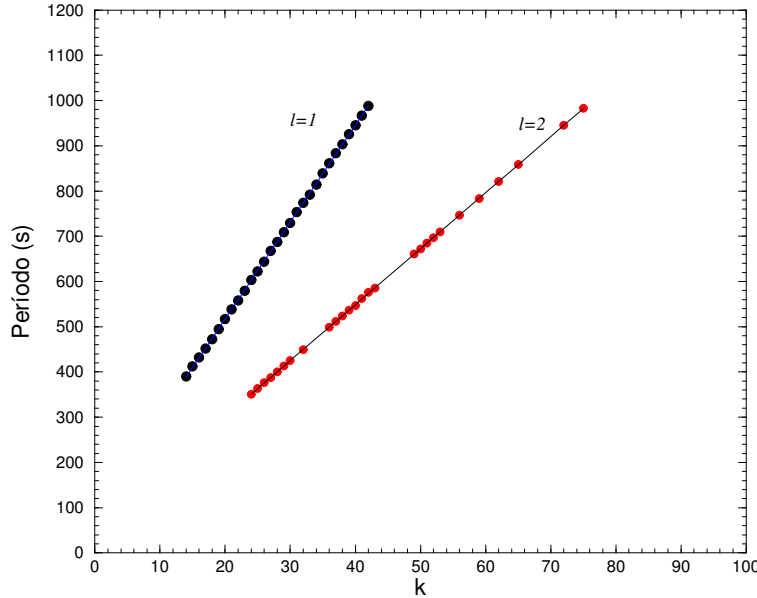
com  $P_{o1} = 88.0 \pm 1.0$  (s). Note que este ajuste foi feito usando o vínculo  $P_{1,20} = 517$  s, ou seja, assumindo que o período de 517 s corresponde ao modo  $\ell = 1$ ,  $m = 0$  e  $k = 20$  (com uma incerteza de  $\pm 2$ ). O valor da constante  $\epsilon$  na Eq.6.1, que é usado na determinação dos índices  $k$  dos modos  $\ell = 2$ , pode ser calculado quando se faz  $k = 0$ :

$$k = 0 \rightarrow P_{10} = \epsilon \Delta P_1 = P_{o1} \quad (6.37)$$

$$\epsilon = \frac{P_{o1}}{\Delta P_1} = \frac{88.05}{21.43} = 4.1 \quad (6.38)$$

De posse dessas informações, estamos preparados para investigar a seqüência  $\ell = 2$ . O processo é basicamente o mesmo empregado na análise da seqüência  $\ell = 1$ . Poderíamos usar o valor encontrado diretamente pelo teste K-S para  $\Delta P_2$  como valor inicial, mas uma





**Fig. 6.35:** Sequências de períodos para os modos  $\ell = 1$  e  $\ell = 2$ .

estimativa melhor para  $\Delta P_2$  pode ser feita (indiretamente) a partir do valor final de  $\Delta P_1$ , já que  $\Delta P_2 = \Delta P_1 / \sqrt{3}$ . No caso,  $\Delta P_2 = 21.43 \text{ s} / \sqrt{3} = 12.4 \text{ s}$  (5% de diferença em relação ao valor encontrado pelo teste K-S).

Geramos então uma sequência de pontos com um espaçamento igual a  $12.4 \text{ s}$  para auxiliar no processo de identificação dos picos. A sequência foi ajustada aos períodos observados usando o pico de  $425 \text{ s}$  como referência. O pico de  $425 \text{ s}$  é o pico de maior amplitude entre os picos que não foram identificados como  $\ell = 1$  e é o pico central de um multipletto. O índice  $k$  do tripleto pode ser calculado a partir da Eq.6.1:

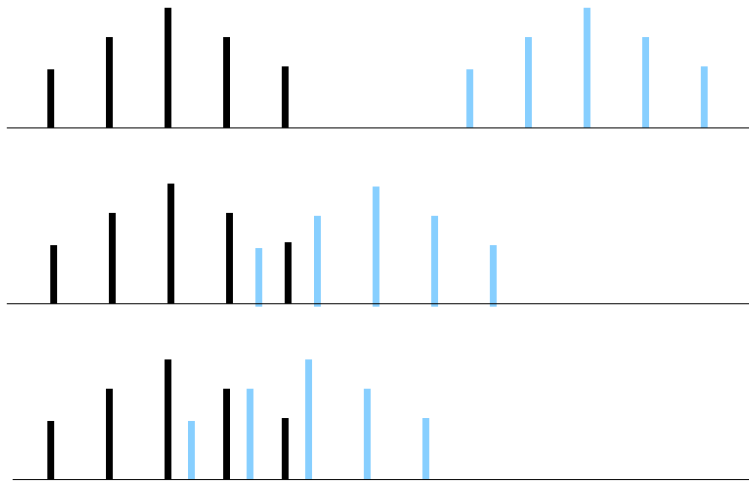
$$425.0 = (k + 4.1) \times 12.4 \rightarrow k \simeq 30.2 \quad (6.39)$$

Portanto,  $k = 30$  para o tripleto de  $425 \text{ s}$ , com uma incerteza de  $\pm 2$ . A incerteza de  $\pm 2$  nos valores de  $k$  para a sequência  $\ell = 2$  decorre do fato de que o cálculo dos índices  $k$  para  $\ell = 1$  e, por conseguinte, para  $\ell = 2$  foram calculados tendo como hipótese que  $k = 20$  para o pico central do tripleto de  $517 \text{ s}$ , conforme foi explicado anteriormente. era de  $\pm 2$ , ela se propaga para todos os valores calculados de  $k$ , tanto para  $\ell = 1$  quanto para  $\ell = 2$ .

A amplitude da maioria dos modos  $\ell = 2$  ativados está abaixo dos limites de detecção. Para contornar esse problema, tivemos que considerar como possíveis modos de pulsação, picos com amplitude *abaixo dos limites de detecção*, que aparecem em dois ou mais anos e com períodos próximos aos valores esperados. A ausência de componentes de um multipletto dificulta a identificação do índice azimutal  $m$  dos componentes presentes.

Uma complicação adicional é a sobreposição de multipletos (ver Fig.6.36) que se torna mais séria quando  $k$  (e o período) aumenta. Os multipletos com períodos menores que  $\sim 600 \text{ s}$  aparecem isolados. Entre  $\sim 600$  e  $\sim 750 \text{ s}$  aparecem casos em que as componentes

mais externas ( $m = \pm 2$ ) de um multipletto “invade” o multipletto vizinho. A partir de  $\sim 750$  s as sobreposições já envolvem as *duas* componentes mais externas ( $m = \pm 2$  e  $m = \pm 1$ ).



**Fig. 6.36:** Sobreposição de dois multipletos ( $\ell = 2$ ). Para períodos até 600 s, os multipletos não se sobrepõe. Entre 600-750 s, ocorre a sobreposição de um pico e acima de 750 s, a sobreposição de dois picos.

Os períodos identificados podem ser vistos nas tabelas Tab.6.7 - Tab.6.8. Como na Tab.6.6, usamos o símbolo ? para indicar quando não há certeza de que o período pertença ao multipletto e ?? quando esta incerteza é muito grande. O símbolo : indica quando há incerteza na determinação do índice  $m$ . Os picos com amplitudes abaixo dos limites de detecção que foram incluídos na listagem são indicados por um asterisco \* ao lado do valor do período. Comentários restantes são mostrados na última coluna da tabela.

A seqüência dos períodos  $P_{20}$  ( $m = 0$ ) pode ser vista no gráfico da Fig.6.35. Ajustando uma reta aos pontos da seqüência, encontramos:

$$\Delta P_2 = 12.38 \pm 0.01 \text{ (s)} \tag{6.40}$$

com  $P_{o_2} = 338.35 \pm 0.25$  (s). A razão entre os dois espaçamentos fica:

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{21.43}{12.38} = 1.73 \tag{6.41}$$

tal como esperado. Como não há pontos fora da reta na Fig.6.35, a identificação destes modos é segura.

No próximo capítulo iremos mostrar como as informações sobre o espaçamento entre os períodos podem ser usadas para se obter informações sobre a estrutura e rotação da estrela.

\* \* \* \* \*

$k \pm 2$	$m$	$P_{k1m} (s)$	$f (\mu Hz)$	$A (mma)$	Observação
14	+1	389.72	2565.94	0.2	apenas em 1985 persistente; amplitude variável apenas em 1993
	0	390.30 :	2562.13	1.0	
	+1	390.84	2558.59	0.2	
15	+1	412.01 ?	2427.13	0.6	não detectado 1989 e 2002. apenas em 1989
	0	413.14 ?	2420.49	0.2	
	-1				
16	+1	430.38 ?	2323.53	0.3	apenas em 2002 apenas em 2002 apenas em 2002
	0	432.37 ?	2312.83	0.5	
	-1	434.15 ?	2303.35	0.5	
17	+1	450.83	2218.13	3.5	persistente persistente persistente
	0	452.06	2212.10	3.0	
	-1	453.24	2206.34	1.0	
18	+1	472.08 ?	2118.29	0.4	apenas em 1993 apenas em 1985
	0	475,45 ?	2103.27	0.3	
	-1				
19	+1	493.79	2025.15	1.5	persistente persistente apenas em 1989
	0	494.85	2020.81	0.7	
	-1	496.00	2016.13	0.2	
20	+1	516.04	1937.83	7.2	persistente persistente persistente
	0	517.16	1933.64	4.2	
	-1	518.29	1929.42	3.2	
21	+1	536.92	1862.47	0.5	persistente; assimétrico persistente persistente
	0	538.14	1858.25	0.6	
	-1	539.34	1854.12	1.0	
22	+1	557.13	1794.91	2.0	persistente persistente persistente
	0	558.14	1791.67	2.4	
	-1	559.71	1786.64	1.0	
23	+1	576.89 ?	1733.43	0.1	apenas em 1993 apenas em 1989 apenas em 1989
	0	579.12 :	1726.76	0.1	
	-1	581.67 :	1718.18	0.1	
24	+1	(601.44) ??	(1662.66)	0.3	W91 W91 W91
	0	(603.04) ??	(1658.25)	0.2	
	-1	(604.72) ??	(1653.66)	0.2	
25	+1	(621.45) ??	(1609.07)	0.2	W91 apenas em 1993 (W91: 1989) W91
	0	622.00 ??	1607.72	0.3	
	-1	(624/36) ??	(1601.64)	0.3	
26	+1	641.54	1558.75	1.0	1989 e 1993; Pdot grande? apenas em 1989 1989 (e 1985?)
	0	643.31	1554.46	0.5	
	-1	644.99	1550.41	0.8	
27	+1	664.43	1505.34	0.3	apenas em 1989 apenas em 1989 apenas em 1989
	0	668.09 :	1496.80	0.3	
	-1	672.21	1487.63	0.3	
28	+1	685.79	1458.17	0.3	1989 e 1993 apenas em 1989 1989 e 1993
	0	687.74	1454.04	0.4	
	-1	689.75	1449.80	0.5	
29	+1	705.32 :	1417.80	0.8	1985,1989,2002; Pdot grande? apenas em 2002 apenas em 1993
	0	709.05 ?	1410.34	0.3	
	-1	711.58 ?	1405.32	0.4	
30	+1	727.09	1375.36	0.7	1989 e 2002 1989 3 2002; Pdot grande? 1989, 1993 e 2002; Pdot grande?
	0	729.51 :	1370.78	0.3	
	-1	731.45	1367.15	1.0	
31	+1	750.56	1332.34	1.6	apenas em 1993 não detectado; valor médio 1989 e 1993 ; Pdot grande?
	0	(752.94)	(1328.13)		
	-1	755.31	1323.96	0.3	
32	+1				não detectado apenas em 1989 apenas em 1989
	0	773.74	1292.42	0.3	
	-1	776.67	1287.55	0.4	
33	+1	790.26	1265.41	1.4	apenas em 1985 não detectado; valor médio apenas em 1983
	0	(791.80)	(1262.95)		
	-1	793.34	1260.49	0.8	
34	+1	812.57	1230.66	0.4	1985 e 1989; Pdot grande ? apenas em 1989 apenas em 1989
	0	814.58	1227.61	0.4	
	-1	817.40	1223.39	0.2	
35	+1	835.34	1197.12	0.3	apenas em 1993 apenas em 1993 1983, 1985 e 1989
	0	838.62	1192.44	0.6	
	-1	842.88 :	1186.41	1.0	
36	+1	857.37	1166.36	0.4	apenas em 1993 apenas em 1993 apenas em 1993
	0	861.72 ?	1160.47	0.5	
	-1	865.08 ?	1155.96	0.7	
37	+1	877.67	1139.38	0.4	1993 e 2002 não detectado; valor médio apenas em 2002
	0	883.67	1131.65		
	-1	889.66	1124.02	0.3	
38	+1	898.82 ?	1112.57	0.9	apenas em 1983 apenas em 1983 não detectado
	0	903.19 ?	1107.19	0.7	
	-1				
39	+1	923.19 ?	1083.20	0.5	apenas em 1989 1989 e 1993; Pdot grande ? apenas em 1985
	0	925.31 ?	1080.72	0.3	
	-1	927.58 ?	1078.07	0.5	
40	+1	943.01	1060.43	0.5	apenas em 1985 apenas em 1993 apenas em 1989
	0	945.01	1058.19	0.3	
	-1	947.41	1055.51	0.5	
41	+1	962.07 ?	1039.43	0.3	apenas em 1993 apenas em 1993 não detectado
	0	966.98	1034.15	0.9	
	-1				
42	+1				não detectado apenas em 1989 apenas em 1989
	0	988.13	1012.01	0.2	
	-1	994.12 ??	1005.91	0.1	

Tab. 6.6: *Períodos Identificados - Modo  $\ell = 1$ .*

$k \pm 2$	$m$	$P_{k1m}$ (s)	$f$ ( $\mu\text{Hz}$ )	$A$ (mma)	Observação
24	+2				
	+1				
	0	350.75		0.6	1985
	-1	352.48 ?		0.5	1983
	-2	353.39 ?		0.2	2002
25	+2				1983
	+1	362.20		0.6	1986
	0	363.39		0.5	
	-1				
	-2				
26	+2				
	+1				
	0	376.03		0.3	1985
	-1	376.65		0.7	1983
	-2	377.73		0.6	2002
27	+2				1985
	+1	386.93 ?		0.4	1989 e 2002
	0	387.47		0.4	
	-1				
	-2	390.30 *		1.5	persistente (?;1,0)
28	+2	397.23		0.4	1983 e 1985
	+1	398.91		0.3	1989 e 2002
	0	400.06		1.4	1989 e 2002
	-1				
	-2	402.36		0.5	1989 e 2002
hline 29	+2	410.43 ?		0.7	1983 (?;1,?)
	+1	412.00 *		0.6	1989 e 2002 (?;1,?)
	0	413.14 *		0.1	1989
	-1	414.37		0.6	1989 e 2002
	-2	415.59		1.2	1989 e 1993
30	+2	422.55		2.0	persistente
	+1	423.81		0.8	1993
	0	425.04		0.4	2002
	-1	426.29		0.9	1989, 1993 e 2002
	-2	427.53		1.5	persistente
31	+2	434.96 ?		0.1	insignificante
	+1	436.56		0.5	1989 e 1993
	0				
	-1	439.25		0.5	1989 e 2002
	-2	440.66		0.1	persistente (?;1,-1)
32	+2	446.52		0.4	1993
	+1	447.89		0.2	2002
	0	449.43		0.2	2002
	-1	452.03		2.0	1989 e 1993
	-2	453.26		2.0	persistente
33	+2	458.88 ?		0.7	1985
	+1	460.71 ?		0.3	2002
	0				
	-1				
	-2				
34	+2				
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
35	+2				
	+1				
	0				
	-1	488.89 ?		0.3	1993
	-2				
36	+2	494.85		0.5	persistente
	+1				
	0	498.73		0.6	1989 e 1993
	-1	500.91		0.3	1989
	-2				
37	+2	507.58		0.3	1993
	+1	510.06		0.4	1993
	0	511.98		0.4	1989 e 1993
	-1	514.06		0.4	1993 (?;1,0)
	-2	516.03		2.0	persistente
38	+2	519.30		0.7	1989
	+1				
	0	524.03		0.2	1993
	-1	526.43		0.4	1989 e 2002
	-2				
39	+2	531.83		1.0	2002
	+1				
	0	536.37		0.2	1993
	-1				
	-2	540.96		0.4	1989 e 2002
40	+2	544.31		0.6	1993 e 2002
	+1	546.05		0.9	2002
	0	547.00		0.2	1989
	-1	550.52		0.3	1993
	-2				
41	+2	556.64		0.3	1993
	+1	558.98		0.4	1993 (?;1,?)
	0	561.99		0.5	1993 e 2002
	-1	563.48		0.3	1993
	-2				
42	+2				
	+1	571.19		0.5	1985
	0	573.69		1.0	1986
	-1	576.02		0.2	1993 (?;1,+1)
	-2	579.11		0.3	1989 (?;1,0)
43	+2	580.34		0.4	1993
	+1				
	0	585.26		0.6	1986
	-1				
	-2				

$k \pm 2$	$m$	$P_{k1m} (s)$	$f (\mu Hz)$	$A (mma)$	Observação
44	+2				
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
45	+2				
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
46	+2				
	+1				
	0	626.47		0.3	2002
	-1	629.54		0.5	1983
	-2				
47	+2				
	+1				
	0				
	-1	641.90		0.8	1986 (?;1,0)
	-2				
48	+2				
	+1	644.04		0.4	1993 (?; 1,-1)
	0				
	-1	650.83		0.5	2002
	-2				
49	+2				
	+1				
	0	660.46		0.4	2002
	-1				
	-2	666.86		0.3	1989
50	+2				
	+1	668.52		0.3	1989 e 2002 (?;1,-1)
	0	672.20		0.1	1989
	-1				
	-2	680.33		0.3	1993
51	+2				
	+1				
	0	684.48		0.1	1993
	-1				
	-2	693.29		0.2	1989
52	+2				
	+1	689.77		0.5	1989 e 1993 (?;1,-1)
	0	693.29		0.2	1989
	-1	696.83		0.4	2002
	-2	705.80		0.7	1989 e 1993 (?;1,+1)
53	+2				
	+1	705.93		0.7	1989 e 1993 (?;1,+1)
	0	709.87		0.2	1993
	-1	713.80		0.2	1993
	-2				
54	+2	713.23		0.5	1985
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
55	+2				
	+1	729.72		0.3	1993 (?;1,0)
	0				
	-1				
	-2	742.95		0.1	1989
56	+2	737.79		1.0	1986
	+1				
	0	746.38		0.8	1985
	-1				
	-2				
57	+2				
	+1				
	0	763.90		0.3	1993
	-1	768.72		0.3	1989
	-2				
58	+2	762.11		0.5	1986
	+1				
	0	776.63		0.3	1989 (?;1,-1)
	-1	780.97		0.9	1983
	-2				
59	+2	773.73		0.3	1989 (?;1,0)
	+1				
	0	783.19		0.3	1989
	-1				
	-2				
60	+2				
	+1				
	0				
	-1	819.95		0.8	1989 e 1993
	-2				
61	+2				
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
62	+2				
	+1				
	0	820.90		1.8	1983
	-1				
	-2				
63	+2	821.69		0.6	1983
	+1				
	0				
	-1	838.65		0.6	1993
	-2	844.78		0.9	1986 (?;1,0)

$k \pm 2$	$m$	$P_{k1m} (s)$	$f (\mu Hz)$	$A (mma)$	Observação
64	+2	857.36		0.4	1993 (?;1,+1)
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
65	+2	852.08		0.6	1985
	+1	858.84		0.2	1989
	0				
	-1				
	-2				
66	+2	859.67		0.5	1993
	+1				
	0				
	-1	877.10		0.3	1993
	-2				
67	+2	889.67		0.4	2002 (?;1,+1)
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
68	+2				
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
69	+2	901.07		0.7	1986
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
70	+2	934.05		0.5	2002
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
71	+2	924.94		0.3	1989 (?;1,-1)
	+1	939.68		???	????
	0	947.45		0.5	1989
	-1				
	-2				
72	+2	945.01		0.3	1993 (?;1,0)
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
73	+2				
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
74	+2	961.09		0.2	1989
	+1				
	0				
	-1				
	-2				
75	+2	966.95		0.7	1993
	+1	982.68		0.2	1989
	0	988.70		0.1	1989
	-1				
	-2				

Tab. 6.9: *Períodos Identificados - Modo  $\ell = 2$ : PARTE III.*

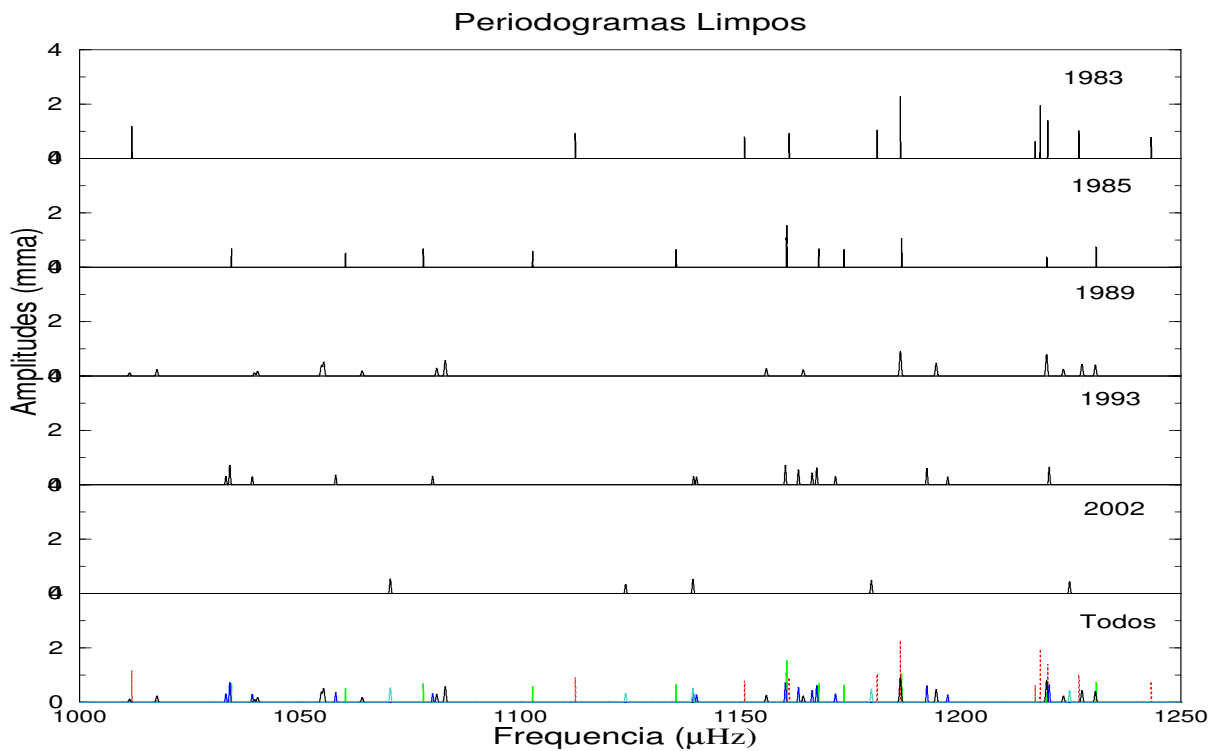


Fig. 6.37: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE I*

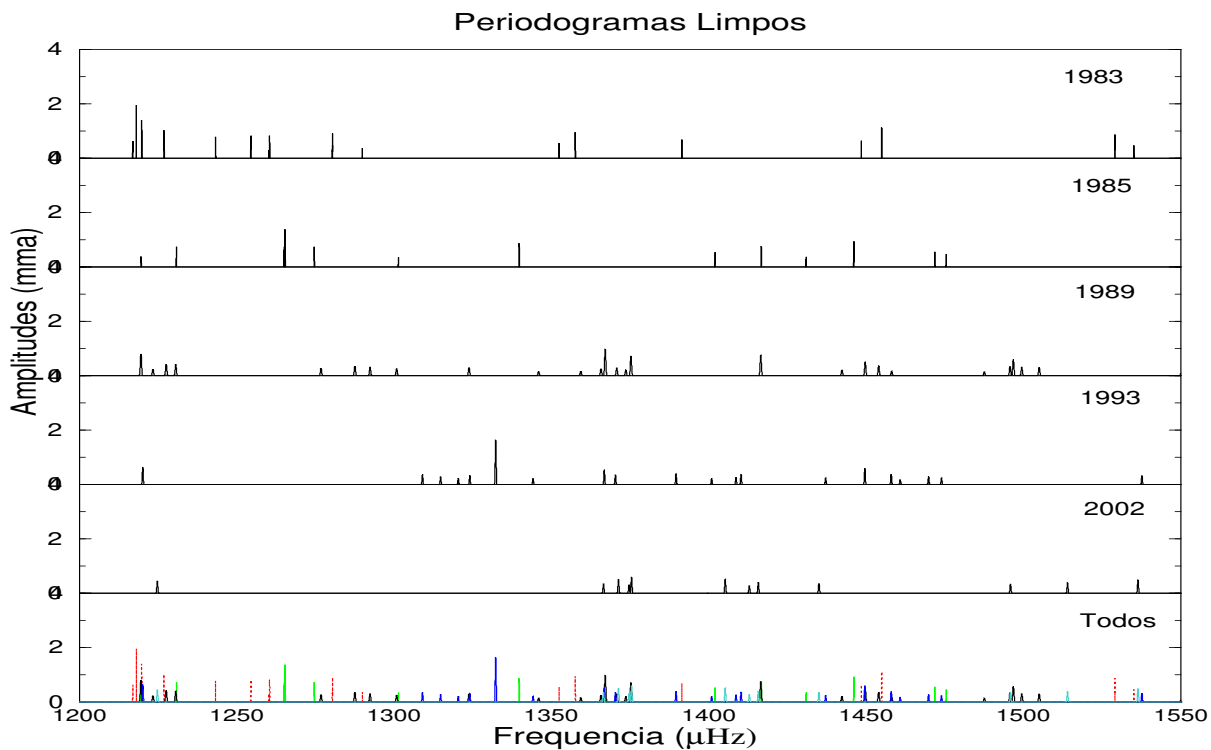


Fig. 6.38: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE II*

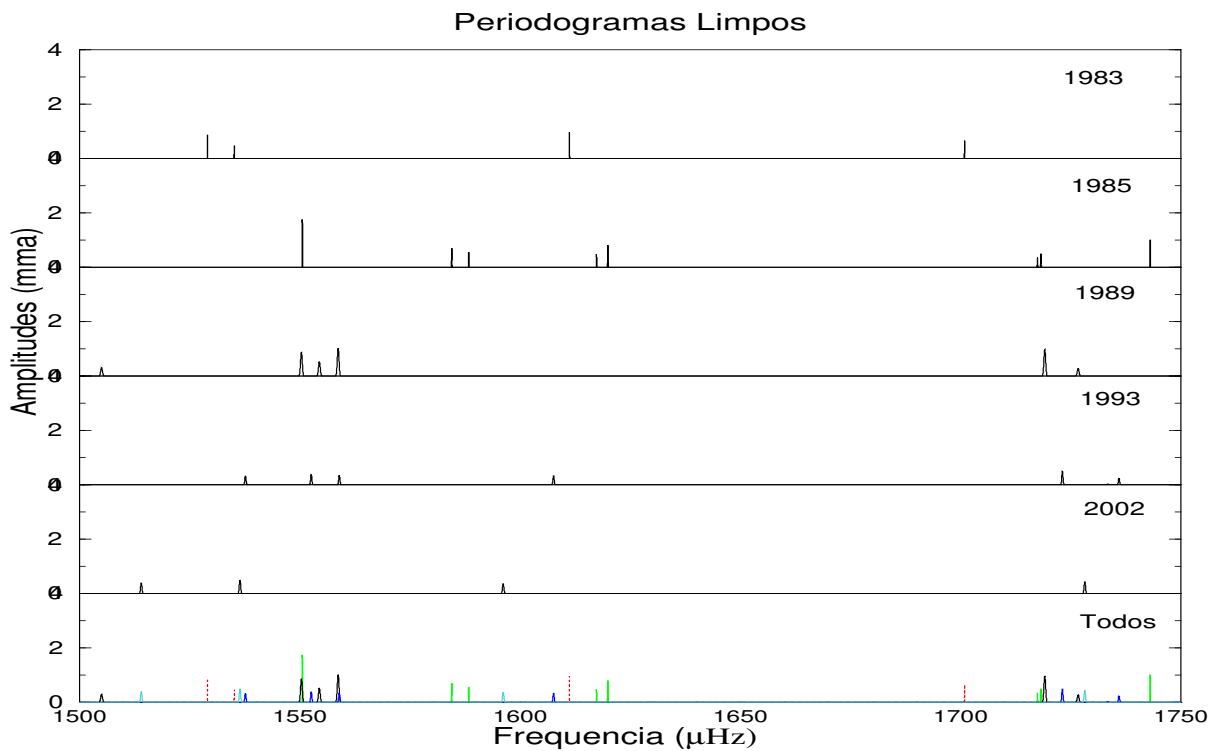


Fig. 6.39: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE III*

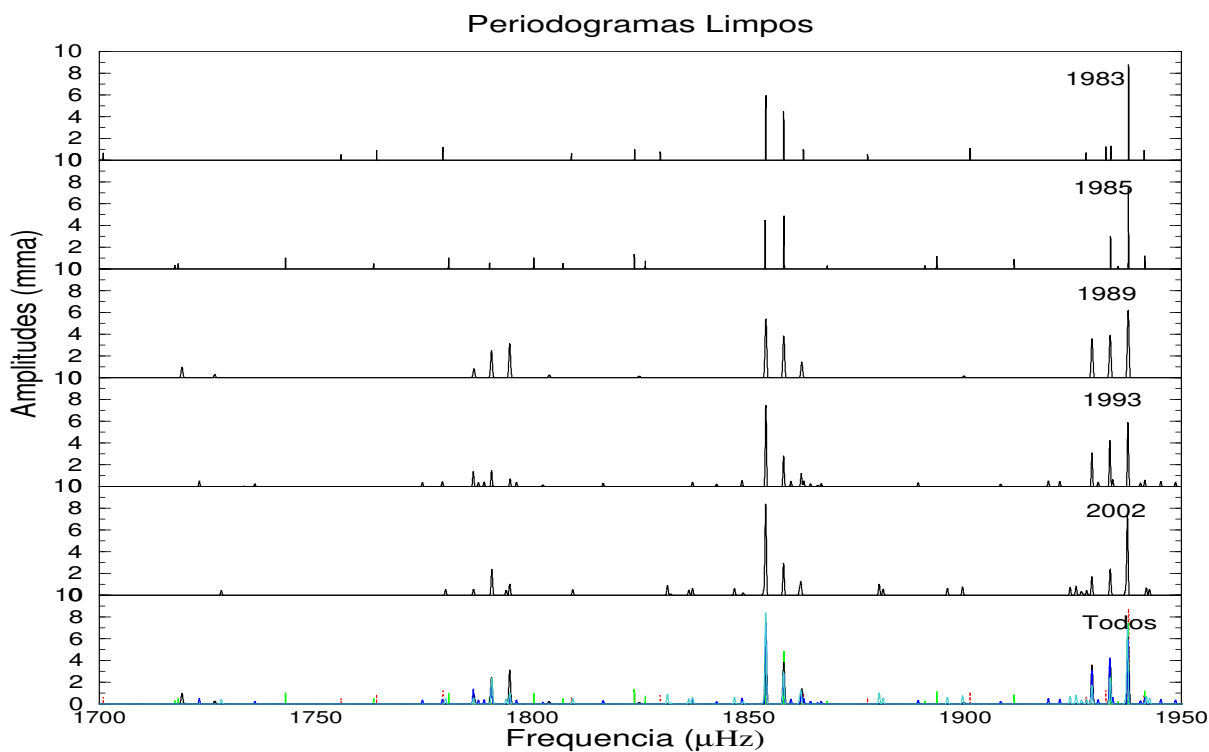


Fig. 6.40: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE IV*



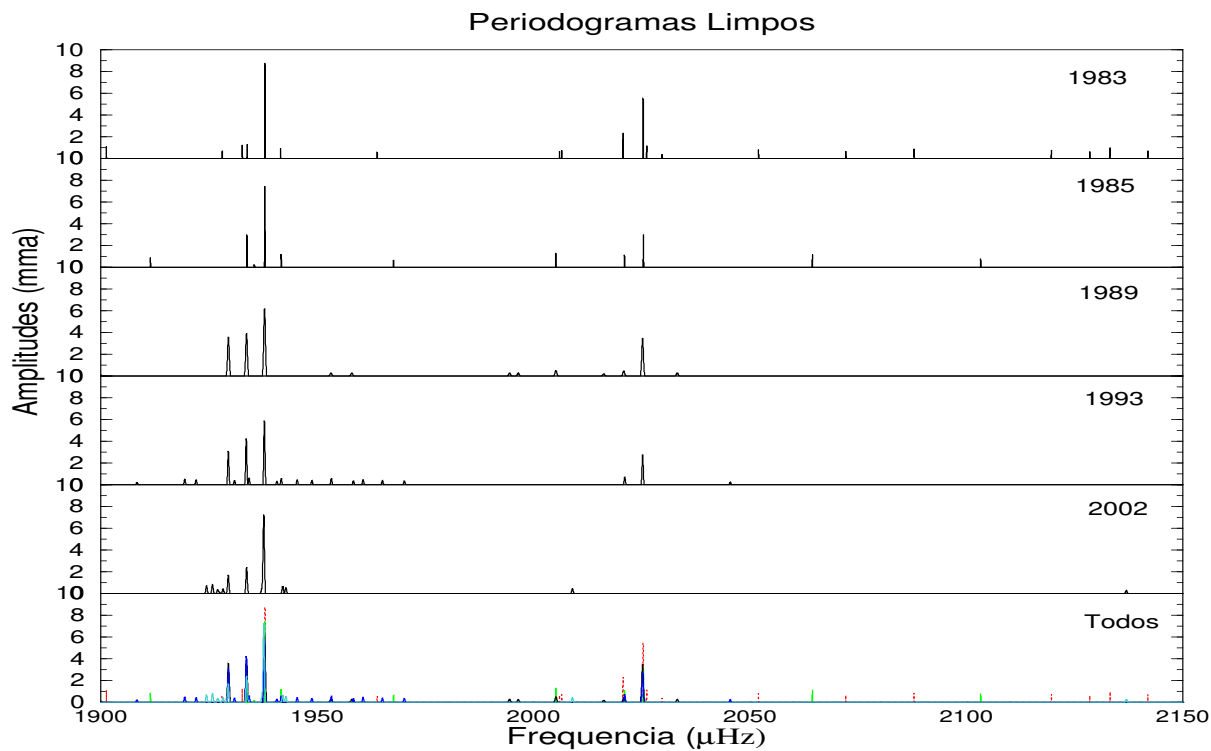


Fig. 6.41: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE V*

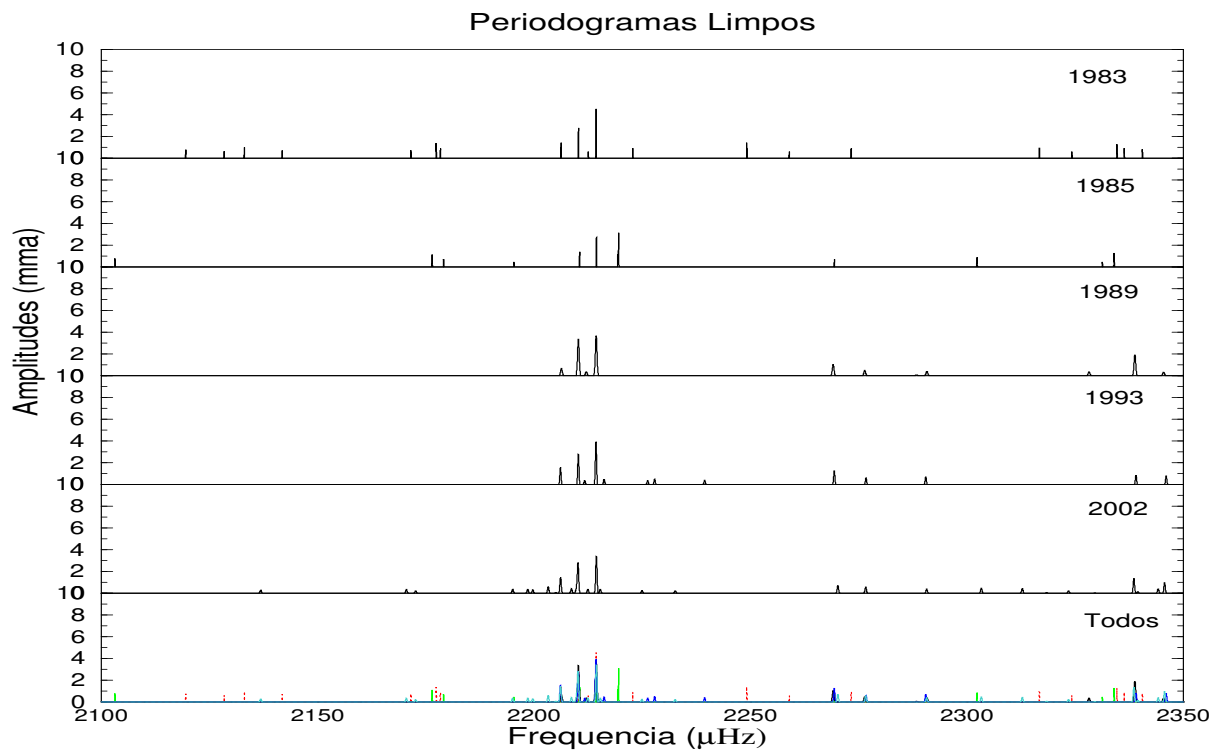


Fig. 6.42: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE VI*

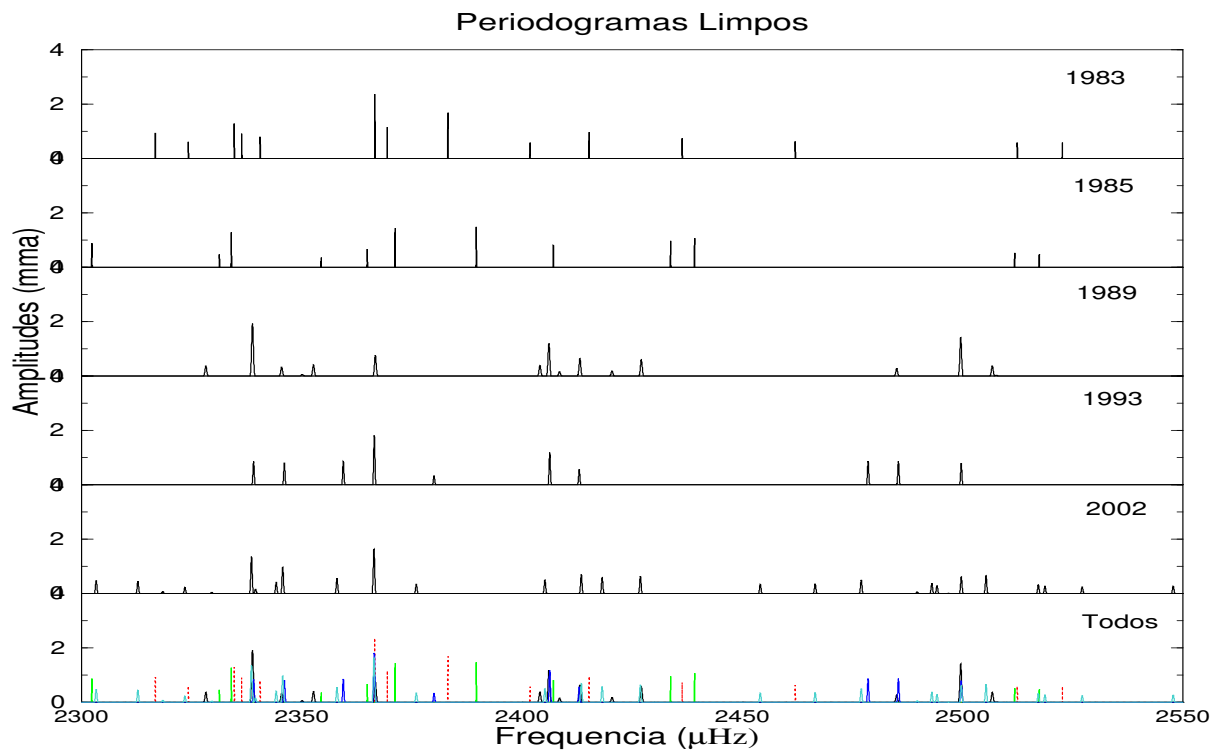


Fig. 6.43: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE VII*

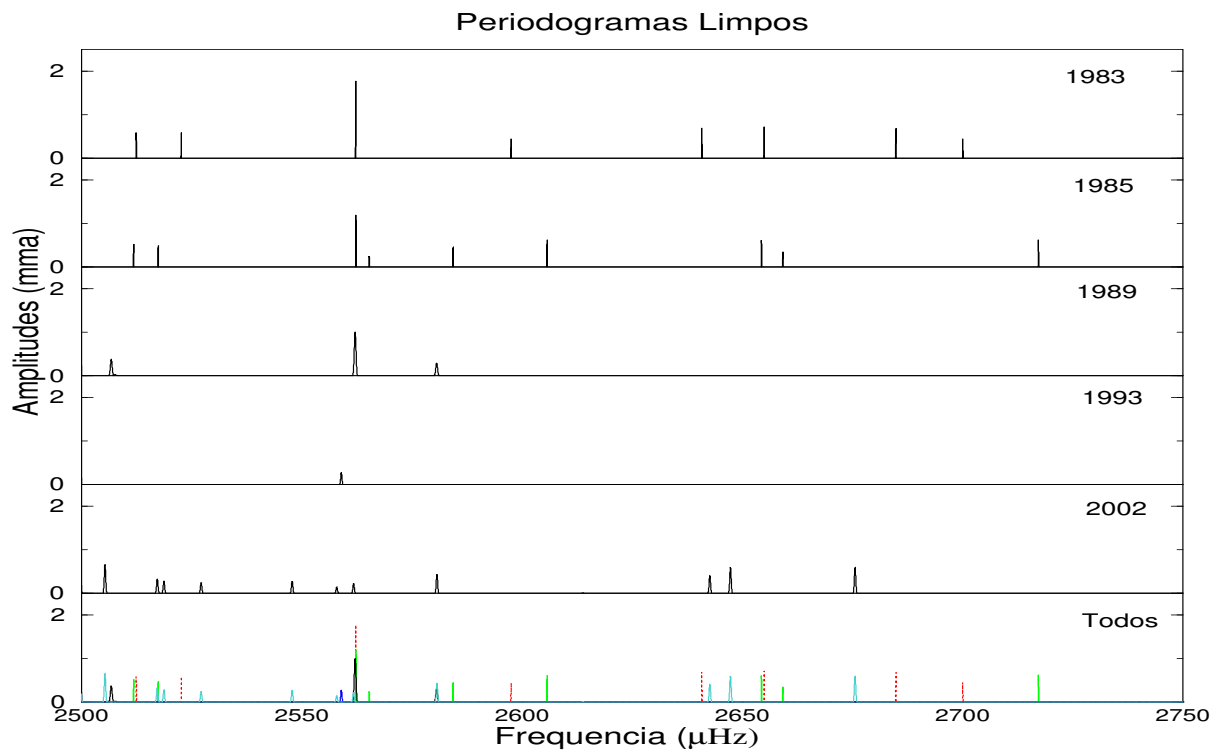


Fig. 6.44: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE VIII*

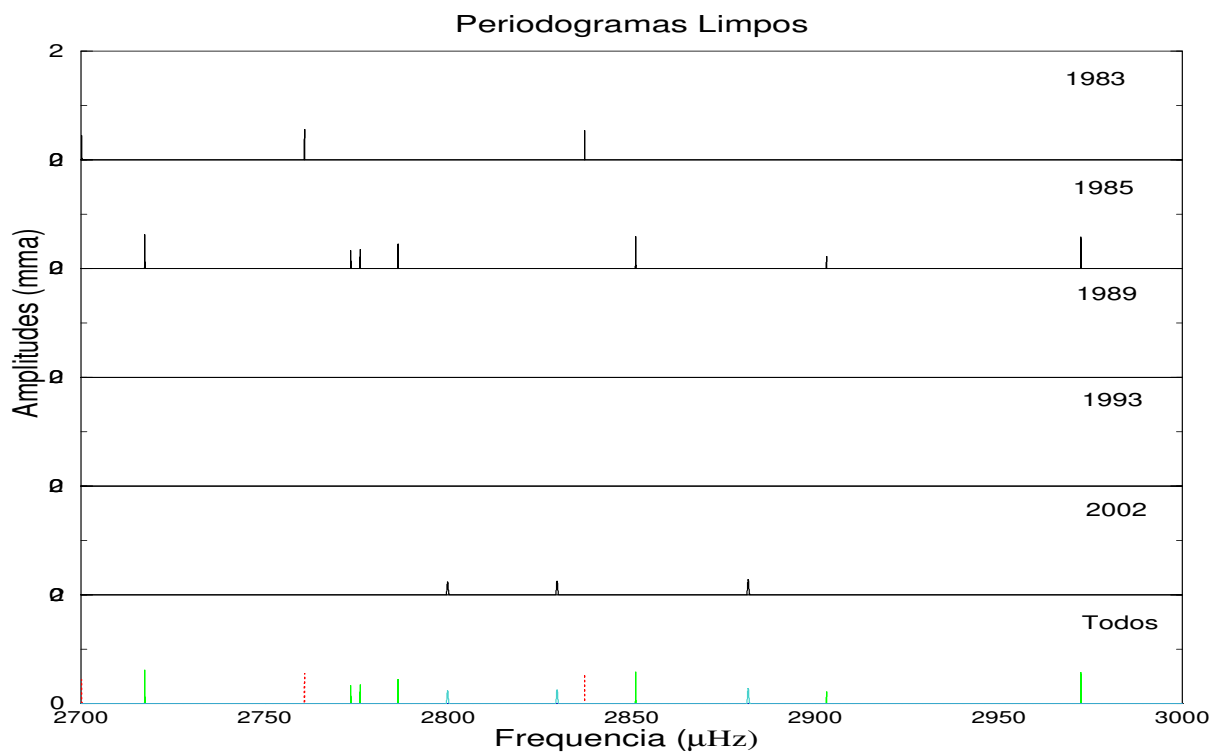


Fig. 6.45: *Periodogramas limpos da PG 1159-035: PARTE IX*

Frequency ( $\mu\text{Hz}$ )	Period ( $\text{sec}$ )	Amplitude ( $\text{mma}$ )	$T_{max}$ ( $\text{s}$ )
1011.9365 ± 0.0079	988.204333 ± 0.007711	1.1791 ± 0.1256	17.62 ± 49.50
1112.6100 ± 0.0111	898.787523 ± 0.008955	0.9190 ± 0.1380	638.41 ± 63.26
1151.0329 ± 0.0119	868.784910 ± 0.008981	0.7887 ± 0.1259	527.90 ± 65.72
1161.1547 ± 0.0101	861.211712 ± 0.007524	0.9217 ± 0.1259	844.50 ± 55.52
1181.1207 ± 0.0090	846.653521 ± 0.006440	1.0447 ± 0.1270	32.58 ± 48.27
1186.4182 ± 0.0046	842.873106 ± 0.003243	2.2830 ± 0.1418	493.04 ± 24.39
1216.9900 ± 0.0160	821.699418 ± 0.010776	0.6305 ± 0.1409	486.90 ± 84.62
1218.1499 ± 0.0053	820.917047 ± 0.003587	1.9605 ± 0.1416	386.19 ± 27.72
1219.8514 ± 0.0073	819.772012 ± 0.004880	1.3999 ± 0.1380	766.46 ± 37.77
1226.9416 ± 0.0099	815.034743 ± 0.006564	1.0191 ± 0.1410	172.52 ± 51.98
1243.3324 ± 0.0141	804.290153 ± 0.009095	0.7829 ± 0.1757	654.30 ± 73.35
1254.5377 ± 0.0133	797.106396 ± 0.008461	0.8206 ± 0.1757	349.41 ± 68.93
1260.5005 ± 0.0119	793.335677 ± 0.007504	0.8284 ± 0.1307	338.19 ± 60.24
1280.4246 ± 0.0109	780.990943 ± 0.006675	0.9026 ± 0.1304	386.32 ± 54.35
1352.4929 ± 0.0170	739.375432 ± 0.009270	0.5584 ± 0.1279	314.78 ± 79.60
1357.6442 ± 0.0107	736.570013 ± 0.005828	0.9506 ± 0.1378	379.29 ± 50.19
1391.4715 ± 0.0134	718.663683 ± 0.006941	0.6877 ± 0.1249	70.92 ± 61.31
1448.5587 ± 0.0148	690.341362 ± 0.007061	0.6323 ± 0.1270	329.19 ± 64.92
1455.0232 ± 0.0092	687.274290 ± 0.004341	1.1181 ± 0.1390	379.94 ± 40.07
1529.1025 ± 0.0108	653.978381 ± 0.004640	0.8726 ± 0.1285	292.69 ± 45.02
1535.1914 ± 0.0202	651.384588 ± 0.008592	0.4664 ± 0.1278	327.07 ± 83.68
1611.2702 ± 0.0107	620.628356 ± 0.004117	0.9618 ± 0.1389	465.32 ± 42.10
1700.9494 ± 0.0157	587.906960 ± 0.005411	0.6505 ± 0.1376	421.02 ± 58.42
1755.9298 ± 0.0198	569.498851 ± 0.006418	0.5359 ± 0.1432	64.88 ± 71.52
1764.1313 ± 0.0116	566.851230 ± 0.003729	0.9206 ± 0.1446	359.75 ± 41.72
1779.4498 ± 0.0090	561.971446 ± 0.002833	1.2115 ± 0.1473	412.12 ± 31.99
1809.1382 ± 0.0178	552.749380 ± 0.005437	0.6271 ± 0.1496	526.53 ± 62.80
1823.7553 ± 0.0113	548.319169 ± 0.003389	0.9871 ± 0.1492	495.74 ± 39.35
1829.6743 ± 0.0135	546.545366 ± 0.004023	0.7892 ± 0.1433	234.94 ± 46.77
1854.0516 ± 0.0021	539.359305 ± 0.000601	5.9342 ± 0.1617	532.55 ± 7.14
1858.1887 ± 0.0027	538.158481 ± 0.000793	4.4800 ± 0.1618	140.06 ± 9.44
1862.7482 ± 0.0106	536.841215 ± 0.003062	1.0068 ± 0.1447	51.93 ± 36.17
1877.5834 ± 0.0193	532.599526 ± 0.005468	0.5525 ± 0.1444	413.36 ± 65.14
1901.2433 ± 0.0099	525.971619 ± 0.002744	1.1041 ± 0.1462	482.25 ± 33.19
1928.0004 ± 0.0141	518.672104 ± 0.003794	0.6720 ± 0.1285	359.36 ± 46.42
1932.6317 ± 0.0088	517.429174 ± 0.002354	1.2554 ± 0.1492	274.07 ± 28.90
1933.7778 ± 0.0085	517.122487 ± 0.002267	1.3028 ± 0.1473	499.16 ± 27.89
1937.8870 ± 0.0013	516.025972 ± 0.000359	8.7643 ± 0.1604	223.87 ± 4.42
1941.4769 ± 0.0117	515.071793 ± 0.003093	0.9146 ± 0.1442	156.07 ± 38.11
1963.7950 ± 0.0164	509.218114 ± 0.004257	0.5715 ± 0.1269	218.49 ± 53.05
2005.9249 ± 0.0159	498.523151 ± 0.003947	0.6724 ± 0.1444	409.06 ± 50.25
2006.4344 ± 0.0145	498.396553 ± 0.003601	0.7311 ± 0.1429	255.65 ± 45.92
2020.5927 ± 0.0047	494.904296 ± 0.001156	2.3447 ± 0.1491	3.71 ± 14.83
2025.2590 ± 0.0022	493.764000 ± 0.000527	5.4731 ± 0.1600	182.52 ± 6.78
2026.0712 ± 0.0095	493.566068 ± 0.002309	1.1630 ± 0.1476	313.03 ± 29.76
2029.6308 ± 0.0244	492.700450 ± 0.005930	0.3990 ± 0.1330	115.65 ± 76.54
2051.9225 ± 0.0119	487.347832 ± 0.002833	0.8185 ± 0.1320	321.17 ± 36.91
2072.0988 ± 0.0149	482.602478 ± 0.003471	0.6545 ± 0.1332	170.74 ± 45.76
2087.8452 ± 0.0110	478.962716 ± 0.002533	0.8871 ± 0.1326	309.38 ± 33.55
2119.5632 ± 0.0125	471.795314 ± 0.002781	0.7708 ± 0.1301	20.26 ± 37.44
2128.4479 ± 0.0152	469.825928 ± 0.003348	0.6276 ± 0.1293	153.32 ± 45.21
2133.1093 ± 0.0109	468.799230 ± 0.002404	0.9720 ± 0.1438	118.38 ± 32.56
2141.8612 ± 0.0138	466.883655 ± 0.003019	0.7126 ± 0.1336	296.95 ± 41.04
2171.5971 ± 0.0126	460.490575 ± 0.002680	0.7510 ± 0.1284	124.18 ± 36.93
2177.4422 ± 0.0079	459.254450 ± 0.001671	1.3725 ± 0.1472	352.71 ± 23.09
2178.4015 ± 0.0110	459.052210 ± 0.002324	0.8789 ± 0.1314	424.17 ± 32.15
2206.2713 ± 0.0076	453.253413 ± 0.001554	1.4114 ± 0.1444	79.20 ± 21.76
2210.2990 ± 0.0041	452.427481 ± 0.000838	2.7826 ± 0.1520	75.60 ± 11.74
2212.5858 ± 0.0162	451.959885 ± 0.003305	0.5801 ± 0.1270	289.54 ± 46.42
2214.3841 ± 0.0025	451.592837 ± 0.000511	4.5395 ± 0.1519	345.00 ± 7.16
2222.8546 ± 0.0115	449.871985 ± 0.002336	0.9125 ± 0.1429	251.75 ± 32.95
2249.1975 ± 0.0077	444.603024 ± 0.001515	1.4051 ± 0.1457	56.58 ± 21.63
2259.0124 ± 0.0159	442.671322 ± 0.003109	0.6013 ± 0.1293	151.59 ± 44.58
2273.3189 ± 0.0115	439.885501 ± 0.002218	0.9272 ± 0.1437	37.27 ± 32.03
2316.7935 ± 0.0105	431.631037 ± 0.001953	0.9266 ± 0.1316	377.13 ± 28.75
2324.3126 ± 0.0171	430.234724 ± 0.003171	0.6123 ± 0.1404	148.06 ± 46.68
2334.7293 ± 0.0076	428.315172 ± 0.001394	1.2879 ± 0.1326	416.39 ± 20.64
2336.4100 ± 0.0115	428.007074 ± 0.002113	0.9080 ± 0.1405	333.24 ± 31.25
2340.6038 ± 0.0120	427.240179 ± 0.002185	0.7996 ± 0.1297	177.87 ± 32.45
2366.6416 ± 0.0042	422.539691 ± 0.000754	2.3616 ± 0.1349	81.13 ± 11.33
2369.4702 ± 0.0084	422.035264 ± 0.001491	1.1572 ± 0.1303	327.43 ± 22.43
2383.2251 ± 0.0059	419.599475 ± 0.001035	1.6882 ± 0.1337	219.72 ± 15.66
2401.8652 ± 0.0167	416.343105 ± 0.002891	0.5787 ± 0.1302	389.12 ± 44.08
2415.2562 ± 0.0100	414.034745 ± 0.001713	0.9684 ± 0.1305	266.36 ± 26.27
2436.4093 ± 0.0134	410.440061 ± 0.002252	0.7345 ± 0.1315	354.62 ± 34.89
2462.0764 ± 0.0153	406.161236 ± 0.002524	0.6309 ± 0.1300	97.49 ± 39.44
2512.4785 ± 0.0170	398.013362 ± 0.002691	0.5859 ± 0.1339	397.56 ± 42.92
2522.7090 ± 0.0167	396.399270 ± 0.002632	0.5855 ± 0.1312	364.67 ± 42.21
2562.2870 ± 0.0056	390.276339 ± 0.000856	1.7742 ± 0.1349	243.50 ± 13.92
2597.5527 ± 0.0218	384.977754 ± 0.003231	0.4413 ± 0.1302	247.21 ± 53.27
2640.8545 ± 0.0144	378.665322 ± 0.002058	0.6903 ± 0.1338	30.95 ± 34.49
2655.0047 ± 0.0136	376.647173 ± 0.001929	0.7176 ± 0.1319	376.05 ± 32.52
2684.9228 ± 0.0144	372.450192 ± 0.001996	0.6832 ± 0.1328	337.22 ± 34.03
2700.0979 ± 0.0215	370.356941 ± 0.002946	0.4454 ± 0.1296	146.36 ± 50.48
2760.8020 ± 0.0175	362.213595 ± 0.002299	0.5611 ± 0.1328	201.08 ± 40.31
2837.1015 ± 0.0175	352.472408 ± 0.002172	0.5425 ± 0.1285	252.36 ± 39.09

Tab. 6.10: Freqüências detectadas no periodograma de 1983.

Frequency ( $\mu\text{Hz}$ )	Period ( $\text{sec}$ )	Amplitude ( $\text{mma}$ )	$T_{max}$ ( $\text{s}$ )
1034.5428 ± 0.0217	966.610560 ± 0.020314	0.6849 ± 0.1988	736.76 ± 94.62
1078.0905 ± 0.0201	927.565918 ± 0.017289	0.6848 ± 0.1815	516.68 ± 84.53
1102.9193 ± 0.0235	906.684649 ± 0.019318	0.5980 ± 0.1865	336.53 ± 95.88
1135.4811 ± 0.0212	880.683988 ± 0.016460	0.6612 ± 0.1822	742.20 ± 86.97
1160.5270 ± 0.0124	861.677505 ± 0.009235	1.0889 ± 0.1814	189.62 ± 48.88
1160.6326 ± 0.0089	861.599096 ± 0.006592	1.5447 ± 0.1821	226.99 ± 34.68
1167.8772 ± 0.0206	856.254435 ± 0.015102	0.6882 ± 0.1837	715.95 ± 82.30
1173.5780 ± 0.0201	852.095023 ± 0.014619	0.6553 ± 0.1746	417.38 ± 77.38
1186.6776 ± 0.0131	842.688835 ± 0.009292	1.0753 ± 0.1868	595.48 ± 49.73
1230.8545 ± 0.0187	812.443695 ± 0.012359	0.7349 ± 0.1812	196.48 ± 69.76
1265.0999 ± 0.0260	790.451391 ± 0.016224	0.7356 ± 0.2509	378.00 ± 98.51
1265.3800 ± 0.0108	790.276444 ± 0.006735	1.3816 ± 0.1988	351.40 ± 38.37
1274.6813 ± 0.0261	784.509853 ± 0.016070	0.7337 ± 0.2510	224.14 ± 98.27
1339.7982 ± 0.0155	746.381081 ± 0.008647	0.8750 ± 0.1805	7.76 ± 52.24
1402.0384 ± 0.0247	713.247214 ± 0.012565	0.5407 ± 0.1777	292.46 ± 79.40
1416.7367 ± 0.0189	705.847439 ± 0.009436	0.7605 ± 0.1919	161.39 ± 60.26
1446.1612 ± 0.0158	691.485856 ± 0.007577	0.9403 ± 0.1985	635.83 ± 49.36
1471.8909 ± 0.0243	679.398170 ± 0.011201	0.5597 ± 0.1807	185.42 ± 74.34
1475.5162 ± 0.0290	677.728912 ± 0.013319	0.4697 ± 0.1795	240.86 ± 89.38
1550.6392 ± 0.0104	644.895333 ± 0.004318	1.7487 ± 0.2415	86.68 ± 30.18
1584.5568 ± 0.0198	631.091302 ± 0.007887	0.7024 ± 0.1772	552.05 ± 57.01
1588.4141 ± 0.0255	629.558741 ± 0.010126	0.5431 ± 0.1761	478.52 ± 73.22
1617.4207 ± 0.0278	618.268316 ± 0.010612	0.4886 ± 0.1806	466.49 ± 77.32
1619.9864 ± 0.0178	617.289125 ± 0.006780	0.8086 ± 0.1921	206.64 ± 49.57
1717.5117 ± 0.0373	582.237654 ± 0.012652	0.3535 ± 0.1772	181.18 ± 97.57
1718.2909 ± 0.0284	581.973646 ± 0.009610	0.5009 ± 0.1888	77.54 ± 74.76
1743.0959 ± 0.0135	573.691892 ± 0.004453	1.0035 ± 0.1809	86.98 ± 35.00
1763.4590 ± 0.0268	567.067343 ± 0.008618	0.4986 ± 0.1781	467.81 ± 68.63
1780.7922 ± 0.0130	561.547822 ± 0.004095	1.0315 ± 0.1798	307.14 ± 32.91
1790.2400 ± 0.0252	558.584319 ± 0.007858	0.5249 ± 0.1782	131.33 ± 63.25
1800.4563 ± 0.0139	555.414752 ± 0.004286	1.0264 ± 0.1885	189.10 ± 34.92
1807.1851 ± 0.0253	553.346743 ± 0.007737	0.5230 ± 0.1784	302.81 ± 62.89
1823.6754 ± 0.0108	548.343187 ± 0.003262	1.3674 ± 0.1927	292.15 ± 27.08
1826.2281 ± 0.0179	547.576729 ± 0.005362	0.7463 ± 0.1748	128.89 ± 44.42
1853.9013 ± 0.0033	539.403043 ± 0.000971	4.4803 ± 0.1985	430.19 ± 8.12
1858.2488 ± 0.0033	538.141067 ± 0.000959	4.8752 ± 0.2149	131.71 ± 8.03
1893.5625 ± 0.0131	528.105086 ± 0.003655	1.1711 ± 0.1998	352.02 ± 31.27
1911.4126 ± 0.0160	523.173287 ± 0.004367	0.8856 ± 0.1879	380.39 ± 37.72
1933.7114 ± 0.0054	517.140243 ± 0.001440	3.0092 ± 0.2152	485.22 ± 12.55
1937.8440 ± 0.0024	516.037412 ± 0.000650	7.4480 ± 0.2414	28.37 ± 5.68
1941.6301 ± 0.0123	515.031147 ± 0.003263	1.2133 ± 0.1991	387.92 ± 28.38
1967.5851 ± 0.0217	508.237238 ± 0.005617	0.6510 ± 0.1824	480.79 ± 50.88
2005.0693 ± 0.0112	498.735878 ± 0.002793	1.3306 ± 0.1987	81.86 ± 25.24
2020.9467 ± 0.0121	494.817607 ± 0.002974	1.1327 ± 0.1808	93.61 ± 27.12
2025.3204 ± 0.0054	493.749041 ± 0.001320	2.9996 ± 0.2154	290.75 ± 12.07
2064.3576 ± 0.0122	484.412195 ± 0.002853	1.1559 ± 0.1871	147.21 ± 26.56
2103.2286 ± 0.0176	475.459501 ± 0.003969	0.7866 ± 0.1817	216.98 ± 37.66
2176.4901 ± 0.0128	459.455332 ± 0.002696	1.1370 ± 0.1942	431.99 ± 26.61
2179.1563 ± 0.0196	458.893196 ± 0.004136	0.7141 ± 0.1872	346.20 ± 40.61
2195.4017 ± 0.0292	455.497513 ± 0.006050	0.4674 ± 0.1814	312.52 ± 59.94
2210.5733 ± 0.0109	452.371342 ± 0.002224	1.3724 ± 0.1986	143.63 ± 22.16
2214.4590 ± 0.0060	451.577571 ± 0.001213	2.7234 ± 0.2149	308.42 ± 12.13
2219.4165 ± 0.0123	450.568874 ± 0.002497	1.1831 ± 0.1943	323.79 ± 25.16
2219.5751 ± 0.0058	450.536692 ± 0.001180	3.1264 ± 0.2419	44.14 ± 11.81
2269.4384 ± 0.0189	440.637642 ± 0.003674	0.6945 ± 0.1754	338.86 ± 37.59
2302.3939 ± 0.0160	434.330549 ± 0.003024	0.8768 ± 0.1869	306.06 ± 31.42
2331.3456 ± 0.0354	428.936832 ± 0.006513	0.4683 ± 0.2034	409.67 ± 68.48
2334.0609 ± 0.0108	428.437841 ± 0.001982	1.2824 ± 0.1813	65.21 ± 20.93
2354.4629 ± 0.0461	424.725320 ± 0.008317	0.3600 ± 0.2032	46.07 ± 88.33
2364.9175 ± 0.0198	422.847741 ± 0.003540	0.6717 ± 0.1771	49.45 ± 37.74
2371.2417 ± 0.0103	421.719989 ± 0.001832	1.4474 ± 0.1986	260.20 ± 19.58
2389.6684 ± 0.0109	418.468103 ± 0.001911	1.4818 ± 0.2150	218.43 ± 20.59
2407.1592 ± 0.0171	415.427442 ± 0.002959	0.8055 ± 0.1809	30.17 ± 32.22
2433.7686 ± 0.0149	410.885402 ± 0.002517	0.9678 ± 0.1914	195.63 ± 27.65
2439.2207 ± 0.0131	409.967002 ± 0.002198	1.0734 ± 0.1868	73.11 ± 24.18
2511.8868 ± 0.0261	398.107114 ± 0.004131	0.5253 ± 0.1749	231.33 ± 47.30
2517.4640 ± 0.0267	397.225150 ± 0.004212	0.4874 ± 0.1734	374.09 ± 47.73
2562.3537 ± 0.0135	390.266188 ± 0.002054	1.1989 ± 0.2149	175.43 ± 23.71
2584.3824 ± 0.0304	386.939638 ± 0.004556	0.4486 ± 0.1752	380.99 ± 53.65
2605.7493 ± 0.0241	383.766768 ± 0.003543	0.6205 ± 0.1995	144.87 ± 41.66
2654.4085 ± 0.0235	376.731762 ± 0.003330	0.6139 ± 0.1913	150.64 ± 39.87
2659.2838 ± 0.0402	376.041099 ± 0.005684	0.3491 ± 0.1871	269.52 ± 68.11
2717.2780 ± 0.0238	368.015347 ± 0.003220	0.6278 ± 0.1993	90.92 ± 39.46
2773.3897 ± 0.0482	360.569597 ± 0.006269	0.3378 ± 0.1764	227.32 ± 82.35
2775.9713 ± 0.0459	360.234271 ± 0.005954	0.3546 ± 0.1762	147.01 ± 78.27
2786.2589 ± 0.0308	358.904199 ± 0.003964	0.4555 ± 0.1867	277.29 ± 49.77
2851.0184 ± 0.0275	350.751857 ± 0.003387	0.5890 ± 0.2152	199.07 ± 43.54
2903.0088 ± 0.0634	344.470198 ± 0.007524	0.2267 ± 0.1912	181.87 ± 98.45
2972.3323 ± 0.0278	336.436139 ± 0.003150	0.5829 ± 0.2150	191.96 ± 42.22

Tab. 6.11: *Frequências detectadas no periodograma de 1985.*

Frequency ( $\mu\text{Hz}$ )	Period ( $\text{sec}$ )	Amplitude ( $\text{mma}$ )	$T_{max}$ ( $s$ )
1017.6244 ± 0.1505	982.680884 ± 0.145369	0.2355 ± 0.0527	835.02 ± 83.61
1081.1478 ± 0.1171	924.942960 ± 0.100212	0.2865 ± 0.0518	685.45 ± 61.49
1083.0795 ± 0.0576	923.293233 ± 0.049073	0.5750 ± 0.0519	578.15 ± 30.48
1155.9663 ± 0.1244	865.077117 ± 0.093109	0.2678 ± 0.0522	49.06 ± 62.12
1164.3414 ± 0.1462	858.854597 ± 0.107846	0.2277 ± 0.0523	183.33 ± 72.72
1186.3982 ± 0.0364	842.887344 ± 0.025827	0.9129 ± 0.0520	621.86 ± 17.59
1194.5258 ± 0.0694	837.152258 ± 0.048667	0.4734 ± 0.0514	413.69 ± 33.26
1219.5889 ± 0.0412	819.948424 ± 0.027698	0.8064 ± 0.0526	736.66 ± 19.47
1223.4084 ± 0.1365	817.388508 ± 0.091173	0.2412 ± 0.0514	121.26 ± 63.84
1227.6156 ± 0.0757	814.587257 ± 0.050229	0.4336 ± 0.0514	645.39 ± 35.33
1230.6595 ± 0.0814	812.572474 ± 0.053740	0.4082 ± 0.0526	308.64 ± 38.12
1276.8218 ± 0.1238	783.194636 ± 0.075956	0.2729 ± 0.0522	447.87 ± 55.98
1287.5897 ± 0.0941	776.644911 ± 0.056747	0.3601 ± 0.0521	216.57 ± 42.35
1292.4168 ± 0.1075	773.744170 ± 0.064379	0.3091 ± 0.0515	256.44 ± 47.87
1300.8603 ± 0.1254	768.722034 ± 0.074088	0.2620 ± 0.0514	109.60 ± 55.25
1323.8489 ± 0.1114	755.373222 ± 0.063550	0.3060 ± 0.0523	522.84 ± 47.98
1345.9740 ± 0.2271	742.956428 ± 0.125357	0.1515 ± 0.0529	498.10 ± 95.94
1359.3972 ± 0.2012	735.620174 ± 0.108857	0.1695 ± 0.0540	610.86 ± 83.76
1365.8060 ± 0.1254	732.168389 ± 0.067237	0.2618 ± 0.0514	72.66 ± 52.63
1367.1423 ± 0.0350	731.452732 ± 0.018711	0.9771 ± 0.0524	711.78 ± 14.87
1370.8007 ± 0.1154	729.500659 ± 0.061392	0.2903 ± 0.0526	237.90 ± 48.05
1373.6916 ± 0.1595	727.965433 ± 0.084543	0.2100 ± 0.0523	251.61 ± 66.06
1375.3251 ± 0.0473	727.100800 ± 0.025032	0.7227 ± 0.0524	5.58 ± 19.98
1416.5690 ± 0.0441	705.931037 ± 0.021974	0.7513 ± 0.0519	314.76 ± 17.84
1442.3849 ± 0.1604	693.296238 ± 0.077092	0.2145 ± 0.0523	614.41 ± 64.41
1449.7783 ± 0.0676	689.760631 ± 0.032140	0.5101 ± 0.0521	157.26 ± 26.92
1454.0459 ± 0.0900	687.736194 ± 0.042572	0.3689 ± 0.0524	587.77 ± 35.55
1458.1900 ± 0.1912	685.781680 ± 0.089917	0.1725 ± 0.0514	340.92 ± 75.00
1487.6353 ± 0.2375	672.207780 ± 0.107307	0.1438 ± 0.0536	21.18 ± 91.14
1495.7875 ± 0.0999	668.544150 ± 0.044649	0.3496 ± 0.0547	535.93 ± 38.06
1496.8471 ± 0.0556	668.070922 ± 0.024808	0.5948 ± 0.0515	417.71 ± 21.26
1499.5242 ± 0.1066	666.878186 ± 0.047388	0.3122 ± 0.0522	524.33 ± 40.83
1505.0529 ± 0.1092	664.428487 ± 0.048187	0.3120 ± 0.0529	387.82 ± 41.10
1550.4193 ± 0.0396	644.986828 ± 0.016481	0.8661 ± 0.0532	47.76 ± 14.54
1554.4871 ± 0.0614	643.298997 ± 0.025423	0.5349 ± 0.0515	509.52 ± 22.66
1558.7631 ± 0.0334	641.534310 ± 0.013752	1.0265 ± 0.0533	553.31 ± 12.20
1719.1686 ± 0.0339	581.676519 ± 0.011483	0.9750 ± 0.0519	0.77 ± 11.31
1726.7450 ± 0.1159	579.124301 ± 0.038885	0.2812 ± 0.0511	26.09 ± 38.52
1786.6284 ± 0.0396	559.713468 ± 0.012405	0.8354 ± 0.0519	197.14 ± 12.71
1790.6783 ± 0.0139	558.447616 ± 0.004335	2.4897 ± 0.0545	275.26 ± 4.46
1794.8854 ± 0.0111	557.138625 ± 0.003434	3.1440 ± 0.0546	135.76 ± 3.54
1804.0014 ± 0.1315	554.323292 ± 0.040413	0.2488 ± 0.0512	16.04 ± 41.71
1824.8078 ± 0.2048	548.002915 ± 0.061511	0.1593 ± 0.0513	293.96 ± 64.32
1854.0658 ± 0.0068	539.355194 ± 0.001982	5.3727 ± 0.0564	392.63 ± 2.10
1858.2018 ± 0.0091	538.154698 ± 0.002640	3.8176 ± 0.0548	173.63 ± 2.83
1862.3605 ± 0.0260	536.952969 ± 0.007486	1.4123 ± 0.0563	322.28 ± 7.97
1899.8434 ± 0.2042	526.359180 ± 0.056574	0.1600 ± 0.0512	353.43 ± 61.65
1929.4276 ± 0.0103	518.288425 ± 0.002764	3.5757 ± 0.0562	60.53 ± 3.05
1933.6139 ± 0.0089	517.166333 ± 0.002383	3.8907 ± 0.0548	414.10 ± 2.65
1937.7787 ± 0.0060	516.054807 ± 0.001586	6.1725 ± 0.0562	15.74 ± 1.76
1953.1183 ± 0.1119	512.001750 ± 0.029321	0.2939 ± 0.0512	192.75 ± 32.84
1957.9498 ± 0.1110	510.738317 ± 0.028949	0.2960 ± 0.0513	167.15 ± 32.55
1994.3999 ± 0.1183	501.403964 ± 0.029750	0.2910 ± 0.0537	499.42 ± 33.86
1996.3986 ± 0.1183	500.901973 ± 0.029689	0.2761 ± 0.0511	343.39 ± 34.00
2005.0984 ± 0.0683	498.728633 ± 0.016994	0.5148 ± 0.0538	253.86 ± 19.45
2016.1480 ± 0.1777	495.995325 ± 0.043722	0.1959 ± 0.0539	391.98 ± 50.50
2020.7602 ± 0.0728	494.863279 ± 0.017839	0.4635 ± 0.0525	276.16 ± 20.54
2025.1181 ± 0.0099	493.798373 ± 0.002425	3.4706 ± 0.0541	451.15 ± 2.82
2033.1382 ± 0.1143	491.850489 ± 0.027658	0.2931 ± 0.0521	452.71 ± 32.04
2206.3680 ± 0.0492	453.233543 ± 0.010101	0.6726 ± 0.0519	306.31 ± 12.79
2210.2818 ± 0.0103	452.431007 ± 0.002103	3.3597 ± 0.0544	288.90 ± 2.68
2212.1173 ± 0.0916	452.055590 ± 0.018725	0.3552 ± 0.0510	145.16 ± 23.77
2214.3950 ± 0.0093	451.590617 ± 0.001906	3.6952 ± 0.0544	112.64 ± 2.43
2269.1586 ± 0.0316	440.691991 ± 0.006138	1.0518 ± 0.0521	54.68 ± 8.00
2276.4452 ± 0.0695	439.281377 ± 0.013402	0.4861 ± 0.0528	387.34 ± 17.33
2290.8154 ± 0.0842	436.525798 ± 0.016050	0.4088 ± 0.0523	181.89 ± 20.83
2328.2752 ± 0.0938	429.502487 ± 0.017313	0.3710 ± 0.0539	237.35 ± 23.03
2338.8610 ± 0.0181	427.558544 ± 0.003300	1.9225 ± 0.0539	202.62 ± 4.42
2345.4819 ± 0.1009	426.351623 ± 0.018341	0.3333 ± 0.0519	415.13 ± 24.80
2352.7107 ± 0.0825	425.041635 ± 0.014898	0.4074 ± 0.0519	409.23 ± 20.20
2366.7507 ± 0.0436	422.520217 ± 0.007785	0.7702 ± 0.0525	14.13 ± 10.51
2404.1168 ± 0.0894	415.953171 ± 0.015460	0.3869 ± 0.0536	409.35 ± 21.31
2406.1507 ± 0.0287	415.601567 ± 0.004960	1.1933 ± 0.0527	82.93 ± 6.87
2408.5641 ± 0.2037	415.185136 ± 0.035118	0.1609 ± 0.0513	151.70 ± 48.51
2413.1890 ± 0.0542	414.389421 ± 0.009312	0.6461 ± 0.0539	62.29 ± 12.94
2420.4775 ± 0.1766	413.141629 ± 0.030138	0.1854 ± 0.0513	137.51 ± 41.84
2427.1272 ± 0.0547	412.009726 ± 0.009277	0.6025 ± 0.0515	123.19 ± 12.90
2485.0991 ± 0.1152	402.398437 ± 0.018661	0.2825 ± 0.0510	91.61 ± 26.60
2499.6344 ± 0.0241	400.058512 ± 0.003859	1.4193 ± 0.0532	69.66 ± 5.53
2506.8053 ± 0.0880	398.914115 ± 0.013999	0.3728 ± 0.0514	272.35 ± 20.13
2562.1587 ± 0.0329	390.295893 ± 0.005015	1.0058 ± 0.0519	269.36 ± 7.37
2580.6640 ± 0.1095	387.497178 ± 0.016437	0.2971 ± 0.0510	156.59 ± 24.35

Tab. 6.12: *Frequências detectadas no periodograma de 1989.*

Frequency ( $\mu\text{Hz}$ )	Period ( $\text{sec}$ )	Amplitude ( $\text{mma}$ )	$T_{max}$ ( $\text{s}$ )
1033.2862 ± 0.0900	967.786090 ± 0.084282	0.3132 ± 0.0709	941.51 ± 64.90
1034.1774 ± 0.0382	966.952057 ± 0.035763	0.7283 ± 0.0700	156.13 ± 27.45
1039.2650 ± 0.0916	962.218468 ± 0.084791	0.3065 ± 0.0709	729.29 ± 65.82
1058.2071 ± 0.0793	944.994582 ± 0.070789	0.3558 ± 0.0701	272.82 ± 55.76
1080.2204 ± 0.0870	925.737038 ± 0.074575	0.3189 ± 0.0697	897.77 ± 59.84
1139.4529 ± 0.0912	877.614173 ± 0.070280	0.3044 ± 0.0697	254.65 ± 59.55
1140.1251 ± 0.0981	877.096766 ± 0.075488	0.2824 ± 0.0695	37.96 ± 63.94
1160.2915 ± 0.0395	861.852395 ± 0.029347	0.7204 ± 0.0709	686.17 ± 25.33
1163.2534 ± 0.0501	859.657957 ± 0.037026	0.5567 ± 0.0701	808.54 ± 31.95
1166.3591 ± 0.0735	857.368871 ± 0.054024	0.4417 ± 0.0723	197.67 ± 47.40
1167.3995 ± 0.0511	856.604768 ± 0.037496	0.6338 ± 0.0714	438.91 ± 32.65
1171.6597 ± 0.0896	853.490112 ± 0.065293	0.3129 ± 0.0702	586.99 ± 56.99
1192.4088 ± 0.0450	838.638565 ± 0.031625	0.6224 ± 0.0702	220.03 ± 28.11
1197.1341 ± 0.0983	835.328307 ± 0.068583	0.2826 ± 0.0697	144.95 ± 60.98
1220.1689 ± 0.0430	819.558646 ± 0.028858	0.6508 ± 0.0701	552.22 ± 26.15
1309.0639 ± 0.0807	763.904662 ± 0.047121	0.3677 ± 0.0726	217.47 ± 45.58
1314.8173 ± 0.0994	760.561941 ± 0.057486	0.2815 ± 0.0699	186.80 ± 56.28
1320.4297 ± 0.1316	757.329209 ± 0.075477	0.2261 ± 0.0771	711.09 ± 74.84
1324.0973 ± 0.0857	755.231490 ± 0.048879	0.3268 ± 0.0700	333.45 ± 48.18
1332.3277 ± 0.0178	750.566122 ± 0.010052	1.6315 ± 0.0780	501.89 ± 10.08
1344.2132 ± 0.1346	743.929621 ± 0.074506	0.2142 ± 0.0745	184.53 ± 75.63
1366.8532 ± 0.0523	731.607465 ± 0.028017	0.5452 ± 0.0704	176.88 ± 28.58
1370.3877 ± 0.0768	729.720507 ± 0.040906	0.3614 ± 0.0698	138.18 ± 41.62
1389.6408 ± 0.0719	719.610424 ± 0.037228	0.3991 ± 0.0707	333.50 ± 38.71
1400.9626 ± 0.1245	713.794935 ± 0.063452	0.2251 ± 0.0699	229.35 ± 65.67
1408.7119 ± 0.1060	709.868381 ± 0.053430	0.2643 ± 0.0698	269.36 ± 55.65
1410.3156 ± 0.0759	709.061159 ± 0.038169	0.3700 ± 0.0703	468.66 ± 40.06
1437.1959 ± 0.1182	695.799355 ± 0.057216	0.2440 ± 0.0713	45.98 ± 61.72
1449.6613 ± 0.0492	689.816324 ± 0.023429	0.6045 ± 0.0708	88.77 ± 24.74
1458.0250 ± 0.0717	685.859316 ± 0.033749	0.3936 ± 0.0709	256.25 ± 36.73
1460.8938 ± 0.1669	684.512460 ± 0.078199	0.1779 ± 0.0716	490.11 ± 84.06
1469.9053 ± 0.0962	680.315961 ± 0.044504	0.2948 ± 0.0711	446.71 ± 48.71
1474.0148 ± 0.1176	678.419251 ± 0.054138	0.2410 ± 0.0711	85.46 ± 59.29
1537.7154 ± 0.0856	650.315397 ± 0.036210	0.3291 ± 0.0697	455.33 ± 41.56
1552.6555 ± 0.0727	644.057891 ± 0.030169	0.3895 ± 0.0700	436.86 ± 34.65
1559.0218 ± 0.0801	641.427846 ± 0.032940	0.3544 ± 0.0700	225.65 ± 38.03
1607.6603 ± 0.0827	622.021937 ± 0.031990	0.3365 ± 0.0698	338.49 ± 38.21
1723.1638 ± 0.0566	580.327893 ± 0.019058	0.4983 ± 0.0716	387.76 ± 24.44
1736.0197 ± 0.1180	576.030323 ± 0.039138	0.2388 ± 0.0709	321.35 ± 51.08
1774.7121 ± 0.0795	563.471691 ± 0.025253	0.3791 ± 0.0768	509.13 ± 33.46
1779.3249 ± 0.0717	562.010920 ± 0.022644	0.4311 ± 0.0775	343.25 ± 29.57
1786.4773 ± 0.0250	559.760815 ± 0.007836	1.3773 ± 0.0781	283.92 ± 10.60
1787.6437 ± 0.0881	559.395583 ± 0.027580	0.3756 ± 0.0763	414.67 ± 37.91
1788.9755 ± 0.0786	558.979164 ± 0.024561	0.3969 ± 0.0765	374.54 ± 33.25
1790.6871 ± 0.0233	558.444856 ± 0.007271	1.5092 ± 0.0840	52.03 ± 9.39
1794.9656 ± 0.0443	557.113746 ± 0.013750	0.6912 ± 0.0755	313.15 ± 18.52
1796.4485 ± 0.0803	556.653867 ± 0.024878	0.3801 ± 0.0746	271.90 ± 33.10
1802.5758 ± 0.2227	554.761699 ± 0.068546	0.1424 ± 0.0772	9.31 ± 88.33
1816.4675 ± 0.0899	550.519073 ± 0.027252	0.3188 ± 0.0711	380.79 ± 36.83
1837.1351 ± 0.0689	544.325793 ± 0.020423	0.4111 ± 0.0699	360.34 ± 27.97
1842.7054 ± 0.1386	542.680350 ± 0.040818	0.2191 ± 0.0741	68.66 ± 55.07
1848.5585 ± 0.0511	540.962043 ± 0.014962	0.5506 ± 0.0705	385.61 ± 20.58
1854.0679 ± 0.0041	539.354562 ± 0.001199	7.4667 ± 0.0780	272.24 ± 1.65
1858.1632 ± 0.0104	538.165870 ± 0.003017	2.8177 ± 0.0732	93.17 ± 4.21
1859.8665 ± 0.0614	537.672989 ± 0.017757	0.4629 ± 0.0701	453.52 ± 24.57
1862.2440 ± 0.0238	536.986550 ± 0.006872	1.1779 ± 0.0703	130.11 ± 9.50
1862.8139 ± 0.0539	536.822283 ± 0.015526	0.5164 ± 0.0698	427.05 ± 21.49
1864.3898 ± 0.1090	536.368511 ± 0.031348	0.2625 ± 0.0707	416.62 ± 43.72
1866.0015 ± 0.2279	535.905253 ± 0.065441	0.1287 ± 0.0754	403.22 ± 92.13
1866.8473 ± 0.1130	535.662450 ± 0.032423	0.2520 ± 0.0705	492.49 ± 45.25
1889.2619 ± 0.0808	529.307254 ± 0.022637	0.3493 ± 0.0703	526.40 ± 31.80
1908.3014 ± 0.1193	524.026237 ± 0.032768	0.2359 ± 0.0702	496.60 ± 46.44
1919.3508 ± 0.0539	521.009508 ± 0.014619	0.5170 ± 0.0701	455.07 ± 20.88
1921.9779 ± 0.0676	520.297335 ± 0.018295	0.4526 ± 0.0755	468.85 ± 25.53
1929.3992 ± 0.0100	518.296046 ± 0.002682	3.1239 ± 0.0755	402.29 ± 3.89
1930.8374 ± 0.0694	517.910003 ± 0.018616	0.4047 ± 0.0705	513.52 ± 26.76
1933.5527 ± 0.0076	517.182704 ± 0.002026	4.2646 ± 0.0778	259.92 ± 2.90
1934.2010 ± 0.0439	517.009347 ± 0.011739	0.6335 ± 0.0699	44.63 ± 16.89
1937.7357 ± 0.0054	516.066256 ± 0.001429	5.9070 ± 0.0751	430.56 ± 2.07
1940.6333 ± 0.0879	515.295703 ± 0.023332	0.3166 ± 0.0701	501.79 ± 33.64
1941.6345 ± 0.0526	515.029999 ± 0.013965	0.5783 ± 0.0742	512.29 ± 20.39
1945.3247 ± 0.0623	514.053010 ± 0.016466	0.4518 ± 0.0709	84.25 ± 23.85
1948.7083 ± 0.0780	513.160450 ± 0.020534	0.3801 ± 0.0720	117.80 ± 29.89
1953.2238 ± 0.0469	511.974107 ± 0.012304	0.5927 ± 0.0699	505.16 ± 17.87
1958.2977 ± 0.0757	510.647580 ± 0.019732	0.3779 ± 0.0707	106.62 ± 28.83
1960.5431 ± 0.0623	510.062738 ± 0.016211	0.4656 ± 0.0711	238.26 ± 23.85
1965.0174 ± 0.0716	508.901354 ± 0.018543	0.3990 ± 0.0712	91.53 ± 27.24
1970.0741 ± 0.0761	507.595116 ± 0.019606	0.3647 ± 0.0696	195.12 ± 28.70
2020.9997 ± 0.0385	494.804625 ± 0.009422	0.7243 ± 0.0700	431.68 ± 14.15
2025.1355 ± 0.0103	493.794131 ± 0.002508	2.7496 ± 0.0709	83.23 ± 3.77
2045.3755 ± 0.1085	488.907782 ± 0.025935	0.2561 ± 0.0697	288.79 ± 39.40
2206.1419 ± 0.0188	453.280005 ± 0.003857	1.5642 ± 0.0728	307.96 ± 6.29
2210.2752 ± 0.0107	452.432358 ± 0.002184	2.7965 ± 0.0740	339.80 ± 3.64
2211.7581 ± 0.0757	452.129006 ± 0.015466	0.3696 ± 0.0701	156.57 ± 25.47
2214.3454 ± 0.0074	451.600738 ± 0.001513	3.9293 ± 0.0723	197.64 ± 2.51
2216.2287 ± 0.0570	451.216963 ± 0.011612	0.4867 ± 0.0698	134.57 ± 19.13
2226.2960 ± 0.0781	449.176562 ± 0.015747	0.3706 ± 0.0708	155.61 ± 26.10
2227.9061 ± 0.0578	448.851945 ± 0.011636	0.4996 ± 0.0709	178.28 ± 19.33
2239.4576 ± 0.0694	446.536693 ± 0.013838	0.3991 ± 0.0696	218.07 ± 23.03
2269.4107 ± 0.0224	440.643032 ± 0.004344	1.2648 ± 0.0703	115.71 ± 7.30
2276.7283 ± 0.0460	439.226755 ± 0.008873	0.6139 ± 0.0701	136.89 ± 14.92
2290.5488 ± 0.0389	436.576592 ± 0.007423	0.7237 ± 0.0704	247.51 ± 12.62
2339.1130 ± 0.0330	427.512477 ± 0.006032	0.8525 ± 0.0705	424.71 ± 10.48
2346.0971 ± 0.0353	426.239820 ± 0.006406	0.8032 ± 0.0706	195.92 ± 11.12
2359.4700 ± 0.0328	423.824003 ± 0.005897	0.8627 ± 0.0706	339.12 ± 10.29
2366.5109 ± 0.0154	422.563024 ± 0.002750	1.8229 ± 0.0704	117.34 ± 4.84
2380.0856 ± 0.0824	420.152952 ± 0.014551	0.3363 ± 0.0696	138.69 ± 25.73
2406.3307 ± 0.0235	415.570477 ± 0.004063	1.1894 ± 0.0701	114.34 ± 7.26
2413.0358 ± 0.0499	414.415741 ± 0.008570	0.5608 ± 0.0701	70.22 ± 15.35
2478.6019 ± 0.0322	403.453250 ± 0.005237	0.8725 ± 0.0703	401.63 ± 9.62
2485.4890 ± 0.0320	402.335323 ± 0.005185	0.8750 ± 0.0703	317.17 ± 9.56

Frequency ( $\mu\text{Hz}$ )	Period ( $\text{sec}$ )	Amplitude ( $\text{mma}$ )	$T_{max}$ ( $\text{s}$ )
1070.6102 ± 0.0861	934.046767 ± 0.075104	0.5357 ± 0.0871	107.39 ± 50.77
1124.0253 ± 0.1287	889.659728 ± 0.101866	0.3526 ± 0.0859	688.36 ± 72.72
1139.3026 ± 0.0857	877.729971 ± 0.066030	0.5280 ± 0.0860	747.58 ± 47.88
1179.7990 ± 0.0944	847.601985 ± 0.067817	0.4948 ± 0.0887	765.09 ± 50.63
1224.8006 ± 0.1001	816.459446 ± 0.066728	0.4508 ± 0.0853	599.17 ± 51.69
1366.5982 ± 0.1319	731.743955 ± 0.070626	0.3443 ± 0.0860	74.59 ± 61.10
1371.3576 ± 0.1032	729.204412 ± 0.054864	0.5059 ± 0.0935	101.42 ± 44.89
1374.7202 ± 0.1422	727.420768 ± 0.075249	0.3224 ± 0.0867	487.34 ± 65.33
1375.5050 ± 0.0805	727.005714 ± 0.042522	0.5990 ± 0.0909	654.32 ± 36.96
1405.2834 ± 0.1118	711.600227 ± 0.056631	0.5233 ± 0.0949	417.45 ± 46.17
1412.9375 ± 0.1605	707.745398 ± 0.080389	0.2813 ± 0.0852	25.32 ± 71.73
1415.7909 ± 0.1342	706.318985 ± 0.066956	0.4019 ± 0.0911	501.06 ± 57.43
1435.0568 ± 0.1252	696.836548 ± 0.060794	0.3665 ± 0.0867	100.40 ± 55.05
1495.9336 ± 0.1321	668.478884 ± 0.059015	0.3456 ± 0.0853	55.45 ± 55.49
1514.0709 ± 0.1250	660.471055 ± 0.054510	0.3845 ± 0.0893	499.27 ± 50.25
1536.4736 ± 0.0983	650.841008 ± 0.041623	0.4947 ± 0.0891	540.22 ± 38.64
1596.2317 ± 0.1287	626.475476 ± 0.050510	0.3591 ± 0.0876	53.34 ± 50.99
1728.2481 ± 0.1071	578.620634 ± 0.035841	0.4318 ± 0.0868	375.10 ± 39.29
1780.0778 ± 0.0828	561.773192 ± 0.026133	0.5547 ± 0.0886	18.20 ± 29.57
1786.5244 ± 0.0824	559.746053 ± 0.025824	0.5639 ± 0.0871	434.82 ± 29.19
1790.7357 ± 0.0211	558.429697 ± 0.006571	2.2240 ± 0.0886	366.77 ± 7.44
1790.9382 ± 0.1458	558.366561 ± 0.045466	0.3097 ± 0.0851	366.77 ± 51.36
1794.0625 ± 0.0981	557.394184 ± 0.030472	0.4683 ± 0.0865	509.78 ± 34.56
1794.8864 ± 0.0447	557.138323 ± 0.013887	1.0415 ± 0.0878	315.93 ± 15.75
1809.4518 ± 0.0892	552.653564 ± 0.027232	0.5176 ± 0.0875	94.29 ± 31.06
1831.3343 ± 0.0487	546.049955 ± 0.014514	0.9362 ± 0.0861	536.28 ± 16.78
1836.2799 ± 0.0951	544.579286 ± 0.028195	0.4844 ± 0.0864	66.81 ± 32.62
1837.1193 ± 0.0794	544.330474 ± 0.023538	0.6341 ± 0.0963	125.39 ± 27.38
1846.8182 ± 0.0742	541.471815 ± 0.021759	0.6357 ± 0.0904	88.89 ± 24.95
1848.8445 ± 0.2050	540.878378 ± 0.059977	0.2298 ± 0.0869	283.10 ± 69.56
1853.6162 ± 0.0910	539.486009 ± 0.026483	0.5071 ± 0.0872	154.66 ± 31.02
1854.0242 ± 0.0060	539.367285 ± 0.001760	8.3568 ± 0.0943	430.10 ± 2.05
1858.1503 ± 0.0161	538.169592 ± 0.004669	2.9824 ± 0.0910	199.88 ± 5.48
1861.8588 ± 0.0845	537.097655 ± 0.024364	0.5706 ± 0.0946	142.98 ± 28.37
1862.1695 ± 0.0440	537.008057 ± 0.012676	1.1613 ± 0.0958	78.57 ± 14.79
1880.2493 ± 0.0451	531.844376 ± 0.012771	1.0293 ± 0.0867	405.53 ± 15.23
1881.1465 ± 0.0896	531.590703 ± 0.025327	0.5358 ± 0.0916	171.05 ± 29.55
1896.0151 ± 0.0791	527.421973 ± 0.022008	0.6424 ± 0.0973	117.94 ± 25.63
1899.5102 ± 0.0596	526.451492 ± 0.016518	0.7695 ± 0.0866	445.05 ± 19.82
1924.3662 ± 0.0694	519.651606 ± 0.018740	0.7102 ± 0.0903	197.67 ± 23.19
1925.7273 ± 0.1793	519.284327 ± 0.048361	0.2580 ± 0.0864	186.83 ± 58.67
1925.7573 ± 0.0850	519.276242 ± 0.022910	0.5794 ± 0.0905	174.21 ± 28.38
1926.9414 ± 0.1290	518.957139 ± 0.034731	0.3572 ± 0.0863	49.20 ± 42.41
1928.1807 ± 0.1029	518.623600 ± 0.027670	0.4430 ± 0.0862	328.53 ± 33.71
1929.3921 ± 0.0287	518.297980 ± 0.007708	1.7091 ± 0.0921	100.33 ± 9.27
1933.6410 ± 0.0191	517.159088 ± 0.005107	2.4516 ± 0.0887	198.49 ± 6.24
1937.1805 ± 0.0951	516.214164 ± 0.025330	0.4936 ± 0.0879	27.52 ± 30.81
1937.5984 ± 0.0070	516.102831 ± 0.001862	7.2537 ± 0.0946	434.69 ± 2.28
1941.9776 ± 0.0730	514.938987 ± 0.019356	0.6935 ± 0.0946	137.30 ± 23.83
1942.7075 ± 0.0851	514.745523 ± 0.022550	0.5492 ± 0.0881	139.88 ± 27.53
2008.9093 ± 0.0996	497.782543 ± 0.024687	0.4577 ± 0.0863	32.45 ± 31.29
2136.8990 ± 0.1556	467.967828 ± 0.034076	0.2920 ± 0.0860	270.93 ± 46.03
2170.5511 ± 0.1300	460.712495 ± 0.027588	0.3551 ± 0.0890	83.61 ± 38.07
2172.6801 ± 0.2086	460.261035 ± 0.044183	0.2266 ± 0.0867	188.87 ± 60.42
2195.1020 ± 0.1247	455.559702 ± 0.025882	0.3727 ± 0.0895	230.03 ± 36.05
2198.5986 ± 0.1632	454.835188 ± 0.033755	0.3698 ± 0.1013	219.14 ± 41.48
2199.7496 ± 0.1770	454.597206 ± 0.036576	0.3172 ± 0.0900	151.45 ± 50.00
2203.3154 ± 0.0909	453.861480 ± 0.018723	0.6159 ± 0.0987	211.71 ± 25.04
2206.1699 ± 0.0319	453.274258 ± 0.006552	1.4671 ± 0.0886	243.59 ± 9.15
2208.6948 ± 0.1069	452.756075 ± 0.021920	0.4326 ± 0.0876	280.92 ± 30.53
2209.8242 ± 0.1304	452.524684 ± 0.026693	0.4560 ± 0.1021	204.12 ± 33.23
2210.2000 ± 0.0173	452.447752 ± 0.003544	2.7767 ± 0.0911	75.01 ± 4.95
2212.4681 ± 0.1416	451.983909 ± 0.028921	0.3813 ± 0.0901	422.65 ± 40.78
2214.4441 ± 0.0146	451.580605 ± 0.002985	3.3943 ± 0.0941	171.35 ± 4.18
2215.3478 ± 0.1491	451.396388 ± 0.030380	0.3748 ± 0.0987	328.11 ± 40.86
2224.9708 ± 0.1838	449.444093 ± 0.037129	0.2551 ± 0.0880	227.54 ± 51.97
2232.6552 ± 0.1923	447.897205 ± 0.038583	0.2390 ± 0.0869	317.15 ± 54.29
2270.2367 ± 0.0637	440.482714 ± 0.012354	0.7243 ± 0.0872	50.70 ± 17.74
2276.6719 ± 0.0774	439.237640 ± 0.014935	0.5979 ± 0.0876	254.15 ± 21.51
2290.7585 ± 0.1186	436.536633 ± 0.022598	0.3902 ± 0.0876	42.62 ± 32.67
2303.3819 ± 0.0951	434.144256 ± 0.017933	0.4816 ± 0.0866	142.89 ± 26.22
2312.8515 ± 0.1140	432.366722 ± 0.021303	0.4549 ± 0.0872	87.10 ± 29.16
2323.5281 ± 0.2197	430.379995 ± 0.040693	0.2365 ± 0.0863	238.33 ± 56.16
2338.6337 ± 0.0376	427.600100 ± 0.006869	1.3643 ± 0.0940	150.88 ± 10.07
2339.5492 ± 0.2815	427.432772 ± 0.051422	0.1616 ± 0.0861	260.01 ± 76.26
2344.2511 ± 0.1114	426.575472 ± 0.020270	0.4168 ± 0.0878	163.77 ± 30.01
2345.7248 ± 0.0492	426.307468 ± 0.008938	0.9784 ± 0.0909	327.08 ± 13.27
2358.0435 ± 0.0825	424.080388 ± 0.014837	0.5594 ± 0.0872	316.62 ± 22.14
2366.4338 ± 0.0313	422.576783 ± 0.005580	1.6362 ± 0.0941	105.47 ± 8.29
2376.0473 ± 0.1284	420.867035 ± 0.022749	0.3506 ± 0.0855	245.65 ± 34.21
2405.2427 ± 0.0894	415.758461 ± 0.015461	0.5093 ± 0.0860	105.21 ± 23.51
2413.5025 ± 0.0662	414.335592 ± 0.011373	0.6977 ± 0.0871	130.27 ± 17.33
2418.2414 ± 0.0802	413.523652 ± 0.013719	0.5829 ± 0.0887	228.47 ± 20.99
2426.9190 ± 0.0718	412.045069 ± 0.012195	0.6427 ± 0.0876	61.36 ± 18.76
2454.1297 ± 0.1375	407.476435 ± 0.022832	0.3532 ± 0.0881	52.49 ± 36.61
2466.5843 ± 0.1430	405.418952 ± 0.023503	0.3630 ± 0.0930	308.39 ± 36.59
2477.0475 ± 0.0917	403.706433 ± 0.014943	0.5014 ± 0.0871	395.12 ± 23.41
2493.0801 ± 0.1250	401.110256 ± 0.020111	0.3771 ± 0.0896	275.03 ± 31.96
2494.2523 ± 0.1651	400.921744 ± 0.026537	0.2889 ± 0.0877	253.69 ± 41.98
2499.7609 ± 0.0753	400.038258 ± 0.012052	0.6148 ± 0.0875	213.83 ± 19.05
2505.3706 ± 0.0700	399.142542 ± 0.011157	0.6596 ± 0.0870	67.48 ± 17.59
2517.2488 ± 0.1433	397.259101 ± 0.022617	0.3349 ± 0.0902	226.23 ± 36.19
2518.7564 ± 0.1643	397.021324 ± 0.025902	0.2769 ± 0.0860	294.01 ± 41.27
2527.2090 ± 0.1941	395.693427 ± 0.030384	0.2460 ± 0.0872	329.32 ± 47.98
2547.8652 ± 0.1658	392.485442 ± 0.025543	0.2790 ± 0.0877	79.07 ± 41.68
2557.9851 ± 0.3118	390.932688 ± 0.047647	0.1483 ± 0.0877	232.22 ± 77.72
2561.8125 ± 0.2072	390.348636 ± 0.031567	0.2224 ± 0.0872	49.50 ± 51.04
2580.7262 ± 0.1065	387.487827 ± 0.015996	0.4336 ± 0.0871	61.83 ± 26.00
2642.6779 ± 0.1131	378.404050 ± 0.016191	0.4069 ± 0.0871	212.25 ± 27.04
2647.3574 ± 0.0767	377.735169 ± 0.010950	0.6011 ± 0.0871	225.95 ± 18.32
2675.6539 ± 0.0842	373.740420 ± 0.011765	0.5884 ± 0.0939	161.95 ± 19.92



## Capítulo 7

# ASTEROSISMOLOGIA DA PG 1159-035

### 7.1 Introdução

A PG 1159-035 é provavelmente formada por um núcleo de carbono e oxigênio envolto por uma atmosfera constituída por uma mistura de hélio e carbono, praticamente sem hidrogênio<sup>1</sup>. A atmosfera ainda está em processo de contração, o que afeta a taxa de variação temporal dos períodos de pulsação,  $\dot{P}$ . Por outro lado, à medida que a atmosfera contrai, o momento de inércia da estrela diminui e sua velocidade angular de rotação deve aumentar para manter constante o momento angular, já que não há perdas de massa ou acreção mensurável. O aumento da velocidade angular afeta o espaçamento entre as componentes dos tripletos e multipletos, e também o  $\dot{P}$  de seus períodos.

O estudo do efeito da contração da atmosfera sobre a taxa de variação dos períodos de pulsação exige o conhecimento de três parâmetros: a fração de massa da atmosfera de He ( $q_Y$ ), a massa total da estrela ( $M_\star$ ) e o raio do núcleo ( $r_c$ ). Kawaler & Bradley (1994) estimaram que a massa fracionária da camada mais externa (atmosfera) da PG 1159-035 deve ser  $q_Y \simeq 0.0039 M_\star$ . Winget *et al.* (1991), se valendo dos dados de 1989, fizeram a primeira determinação da massa da PG 1159-035, encontrando  $M_\star = 0.586 \pm 0.003 (M_\odot)$ . Contudo, o raio da região nuclear,  $r_c$ , ainda não havia sido determinado.

Usando um conjunto mais completo de dados, podemos refinar a determinação da massa da PG 1159-035 e fazer a primeira estimativa para  $r_c$ . Este capítulo descreve todo o procedimento usado para tal fim.

### 7.2 $\Delta P_\ell$ e a Freqüência de Brunt-Väisälä

Partindo dos valores calculados para  $\Delta P_1$  e  $\Delta P_2$  podemos calcular o valor da constante  $P_o$  da Eq.6.1, reproduzida aqui novamente:

---

<sup>1</sup> Embora a  $\sim 130\,000\text{ K}$  não haja linhas espectrais de H, a presença de H na atmosfera da estrela provoca um alargamento nas linhas de He.

$$\Delta P_\ell = \frac{P_o}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \quad (7.1)$$

$$P_o = \sqrt{\ell(\ell+1)} \Delta P_\ell \quad (7.2)$$

Para  $\ell = 1$ , temos  $P_o = 30.31 \pm 0.04 (s)$  e para  $\ell = 2$ ,  $P_o = 30.32 \pm 0.03 (s)$ , calculados no capítulo anterior. Fazendo a média ponderada dos dois valores, temos:

$$P_o = 30.32 \pm 0.03 (s) \quad (7.3)$$

A constante  $P_o$  depende da estrutura interna da estrela (Kawaler & Bradley 1994):

$$P_o = 2\pi^2 \left( \int \frac{N(r)}{r} dr \right)^{-1}, \quad (7.4)$$

onde  $N(r)$  representa a *freqüência de Brunt-Väisälä*<sup>2</sup> e a integração é feita sobre toda a região de propagação dos modos-g de pulsação.

A freqüência de Brunt-Väisälä,  $N(r)$ , está relacionada com a variação da densidade no interior da estrela. Para entender o significado físico de  $N(r)$ , vejamos um exemplo simples: suponha que um objeto esteja flutuando estaticamente dentro de um fluido continuamente estratificado (isto é, sua densidade varia de forma contínua ao longo do eixo vertical), sendo mais denso em baixo e menos denso em cima. No ponto em que o objeto está, a densidade do fluido é exatamente igual à densidade do objeto, por isto, ele não se move. Se o objeto for deslocado para cima, se tornará relativamente mais pesado que o fluido ao seu redor e se for deslocado para baixo, se tornará relativamente mais leve. Nos dois casos, uma força restauradora atuará sobre o objeto tentando trazê-lo de volta para a posição de equilíbrio. Se assumirmos que o movimento do objeto não perturba o fluido e se ignorarmos efeitos de viscosidade, a intensidade da força restauradora varia com o movimento vertical do objeto e ele entra em oscilação harmônica simples (como ocorre em um sistema massa-mola). A freqüência (ou período) de oscilação,  $N(r)$ , é chamado de *freqüência (ou período) de Brunt-Väisälä*, e  $N^2(r)$  é proporcional à variação relativa da densidade ( $d\rho/dr$ ) na direção vertical. Por esta razão, a freqüência de Brunt-Väisälä pode ser usada como parâmetro para caracterizar o grau de estratificação de um fluido.

Em estrelas pulsantes,  $N^2(r)$  também leva em conta a variação relativa da densidade adiabática:

$$N^2(r) = -g \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \right] \quad (7.5)$$

---

<sup>2</sup> O físico finlandês Vilho (Yrjö) Väisälä (1891-1971) em 1925, e o meteorologista inglês Sir David Brunt (1886-1965), em 1927, derivaram independentemente a fórmula para a freqüência de flutuabilidade (*buoyancy*) e que corresponde a maior freqüência de uma oscilação gravitacional em uma atmosfera completamente compressível. Esta freqüência é normalmente descrita como a freqüência de Brunt-Väisälä.

A frequência de Brunt-Väisälä é calculada a partir de modelos. Kawaler (1990) usou um conjunto limitado de modelos para calcular  $N(r)$  e encontrou que o valor de  $P_o$  é inversamente proporcional à massa da estrela,  $M$ , com uma fraca dependência da luminosidade,  $L$ , e da composição da superfície,  $q_Y$ . Contudo, abaixo de  $\sim 10 L_\odot$ , os modelos mostraram uma dependência crescente de  $P_o$  em relação a esses parâmetros.

Estudos mais aprofundados feitos por Kawaler & Bradley (1994), conduziram à Eq.6.4, apresentada no capítulo anterior, e reproduzida novamente aqui:

$$P_o \simeq 15.5 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1.3} \left( \frac{L}{100L_\odot} \right)^{-0.035} \left( \frac{q_Y}{10^{-3}} \right)^{-0.00012} \quad (\text{em segundos}). \quad (7.6)$$

ou

$$P_o \simeq 18.196 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1.3} \left( \frac{L}{L_\odot} \right)^{-0.035} \left( \frac{q_Y}{10^{-3}} \right)^{-0.00012} \quad (\text{em segundos}). \quad (7.7)$$

Como  $P_o$  é fracamente dependente de  $q_Y$ , conhecendo  $P_o$  podemos estimar a massa da estrela, mesmo com uma estimativa grosseira de sua luminosidade. Antes de aplicarmos a equação acima para calcular a massa da PG 1159-035, vamos descrever com um pouco mais de detalhes os modelos usados por Kawaler & Bradley, daqui para a frente chamados de “modelo KB”.

### 7.3 O Modelo KB

Os modelos evolucionários de Kawaler & Bradley para PWD, partem de um modelo inicial que tenta ser o mais fiel possível à estrutura da estrela logo que entra no estágio de PWD. Ao contrário das anãs brancas pulsantes mais frias (DAVs e DBVs), a estrutura interna das DOVs está intimamente ligada à de seus progenitores mais prováveis, as estrelas centrais de nebulosas planetárias (PNNs) e as estrelas do ramo assintótico das gigantes (AGBs). O intervalo de tempo que separa as DOVs do seu estágio anterior como PNN ou como uma estrela AGB é da ordem de  $\sim 10^6$  anos — pouco tempo para que mudanças significativas ocorram — fazendo com que sua estrutura interna e suas características térmicas ainda sejam muito parecidas às de suas progenitoras. Para as DBVs e DAVs, a longa evolução na seqüência de esfriamento já apagou a história anterior.

Kawaler e Bradley partiram de um modelo evolucionário simples para estrelas pós-AGBs, deficientes em hidrogênio e de  $0.6 M_\odot$  como “modelo semente”. Durante a evolução, a camada de hélio do modelo semente passou por vários *flashes* até que, após um deles, o modelo semente saiu do estágio AGB. Com os *flashes*, o modelo semente perdeu seu envelope de hidrogênio, mas manteve sua camada de hélio ainda queimando hélio. Eles deixaram o modelo evoluir até que a queima de hélio fosse responsável apenas por uma pequena fração da luminosidade total da estrela (que era da ordem de  $1000 L_\odot$ ). Neste ponto, o modelo semente tinha um núcleo composto por uma mistura de carbono e oxigênio na proporção de 57:43 (em termos de massa) e por uma camada de hélio de  $1.85 \times 10^{-2} M_\star$ , e já podia ser usado como modelo inicial.

Para produzir modelos iniciais com diferentes massas totais, o modelo semente era transformado homoganeamente até que a massa desejada fosse atingida, mantendo fixa a massa da camada de hélio. Para produzir modelos com diferentes massas para a camada de hélio, a localização da região de transição entre o núcleo C+O e a camada de He era deslocada para o ponto de massa desejado. Desta forma, eles tinham um modelo inicial cuja composição química, estrutura térmica e história evolucionária eram coerente com o que se sabe sobre estrelas AGBs.

Os modelos KB usam como parâmetros a *massa total da estrela* ( $M_*$ ), a temperatura efetiva ( $T_{eff}$ ), a espessura da camada superficial de hélio ( $q_Y$ , em termos da massa da estrela), e a composição da superfície ( $Y_{surf}$ ). Essas são as grandezas de maior interesse no estudo de pulsações não-radiais.

Como já foi visto, a massa da estrela,  $M_*$ , determina o espaçamento,  $\Delta P_\ell$ , entre os períodos de pulsação. A espessura da camada superficial de hélio ( $q_Y$ ) afeta os desvios em relação ao espaçamento uniforme. Para estudar os efeitos de  $M_*$  e  $q_Y$  sobre o espaçamento em período, Kawaler e Bradley estudaram modelos com  $M_*$  variando de 0.50 a 0.80  $M_\odot$ , o que cobre boa parte do intervalo de distribuição de massa para anãs brancas (pelo menos para as que são provenientes de AGBs).

Eles também consideraram camadas de hélio com espessura entre  $2 \times 10^{-4}$  e  $10^{-4} M_*$ . Se a camada de hélio possuir mais do que  $2 \times 10^{-4} M_*$ , ainda haverá queima de hélio e a estrela não será uma PG1159. Foram consideradas composições diferentes para a camada superficial de hélio,  $Y_{surf}$ , variando desde hélio puro até uma mistura extremamente rica em C/O, já que a estrela no AGB tinha extensa camada convectiva que dragava C/O até a fotosfera. A possibilidade de um último pulso térmico, nos modelos de *renascimento* (*born again*) também precisa ser considerada (ver Sec.1.7).

## 7.4 Cálculo da Massa da Estrela

Kawaler & Bradley calcularam  $P_o$  para uma grade inteira de modelos, variando os parâmetros  $M_*$ ,  $L$  e  $q_Y$ . A massa é dada em termos de massas solares,  $M_\odot$ , e a luminosidade em termos de luminosidade solar,  $L_\odot$ . Os resultados foram parametrizados através da relação,

$$P_o = z M^a L^b q_Y^c \quad (7.8)$$

onde  $z$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes valem:

$$\begin{aligned} z &= 18.196 s \\ a &= -1.3 \\ b &= -0.035 \\ c &= -0.00012 \end{aligned} \quad (7.9)$$

A Eq.7.8 é equivalente à Eq.7.7. Isolando  $M$  na Eq.7.8, podemos calcular a massa em função de  $P_o$  e dos outros dois parâmetros:

$$M^a = P_o z^{-1} L^{-b} q_Y^{-c} \quad (7.10)$$

$$M = \left( P_o z^{-1} L^{-b} q_Y^{-c} \right)^{1/a} \quad (7.11)$$

ou, na forma logarítmica:

$$\log M = \frac{1}{a} [\log P_o - \log z - b \log L - c \log q_Y] \quad (7.12)$$

Numericamente,

$$\log M = -0.76923 [\log P_o - 1.25998 + 0.035 \log L + 0.00012 \log q_Y] \quad (7.13)$$

$$\log M = 0.96921 - 0.76923 \log P_o - 0.02692 \log L - 0.00009 \log q_Y \quad (7.14)$$

A incerteza para a massa, pode ser calculada por:

$$\sigma_M = \frac{M}{|a|} \left[ \left( \frac{\sigma_{P_o}}{P_o} \right)^2 + \left( \frac{b\sigma_L}{L} \right)^2 + \left( \frac{c\sigma_{q_Y}}{q_Y} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_z}{z} \right)^2 + \left( \frac{b\sigma_b}{L} \right)^2 + (\ln M \sigma_a)^2 \right]^{1/2} \quad (7.15)$$

A expressão acima é uma equação geral para o cálculo da incerteza, que leva em conta a contribuição de todos as variáveis e parâmetros. Infelizmente, Kawaler & Brabley (1994) não publicaram as incertezas<sup>3</sup> para os parâmetros  $z$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Isso nos força a ignorar a contribuição desses termos (fazendo  $\sigma_z$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  e  $\sigma_c$ , todos iguais a zero). Neste caso, a equação acima se torna:

$$\sigma_M = \frac{M}{|a|} \left[ \left( \frac{\sigma_{P_o}}{P_o} \right)^2 + \left( \frac{b\sigma_L}{L} \right)^2 + \left( \frac{c\sigma_{q_Y}}{q_Y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7.16)$$

$$\sigma_M = 0.76923 M \left[ \left( \frac{\sigma_{P_o}}{P_o} \right)^2 + 0.01225 \left( \frac{\sigma_L}{L} \right)^2 + 1.44 \times 10^{-8} \left( \frac{\sigma_{q_Y}}{q_Y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7.17)$$

---

<sup>3</sup> Enquanto fazia a correção final desta tese, Steven Kawaler (comunicação privada) divulgou novos valores para a constante de proporcionalidade e para o expoente da massa na Eq.7.6 bem como suas incertezas. Usando os novos valores, Kawaler calculou a massa da estrela para espaçamento assintótico em período (integrando a frequência de Brunt-Väisälä) e usando o espaçamento médio para modos  $\ell = 1$ ,  $m = 0$ , com períodos entre 300 e 700 segundos. Os valores encontrados para a massa da estrela foram  $M/M_\odot = 0.59296$  (incerteza não divulgada) e  $M/M_\odot = 0.59311 \pm 0.0008$ . No primeiro cálculo, Kawaler usou  $a = -1.342 \pm 0.001$  e no segundo  $a = -1.424 \pm 0.003$ . As constantes de proporcionalidade foram  $14.728 \pm 0.001$  (s) e  $14.115 \pm 0.004$  (s), respectivamente.

Finalmente, podemos calcular a massa da PG 1159-035, usando

$$\begin{aligned} P_o &= 30.32 \pm 0.03 \quad (s) \\ L &= 195 \pm 3 \quad (L_\odot) \\ q_Y &= 0.039 \end{aligned} \quad (7.18)$$

temos:

$$M/M_\odot = 0.586 \pm 0.001 \quad (7.19)$$

O mesmo resultado obtido por Winget *et al.* (1991), ( $M/M_\odot = 0.586 \pm 0.003$ ), porém com uma incerteza 3 vezes menor. Chamamos a atenção a incerteza no valor da massa *não leva em conta* os erros nos valores calculados dos parâmetros  $z$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Assumindo que as incertezas desses parâmetros sejam da ordem do último dígito significativo no valor calculado para esses parâmetros, teríamos:  $\sigma_z \leq 0.001 s$ ,  $\sigma_a \leq 0.1$ ,  $\sigma_b \leq 0.001$  e  $\sigma_c \leq 0.00001$ . Neste caso, todos os erros podem ser perfeitamente desprezados, exceto o erro no parâmetro  $a$ , que pode aumentar a incerteza na determinação da massa até 25 vezes. De acordo com este raciocínio, a incerteza na massa, na Eq.7.16 pode estar subestimada, mas essa incerteza deve ser menor que 0.025.

## 7.5 Diagrama $\Delta P$

A aproximação assintótica da Eq.6.4 calcula com excelente precisão os períodos de pulsação para modelos completamente homogêneos. Contudo, sabemos que em anãs brancas existem gradientes na composição entre o núcleo de C+O e a camada mais externa, rica em hélio. Esta região é chamada de *zona de transição de composição*, mas freqüentemente vamos nos referir a ela simplesmente como *zona de transição*. As variações abruptas que ocorrem nesses gradientes podem fazer com que a zona de transição atue como uma parede refletora para certos modos de pulsação, isolando-os em regiões específicas do modelo, como numa caixa de ressonância. Desta maneira, os modos podem ser “amarrados” tanto dentro do núcleo de C+O, quanto entre a superfície externa e a zona de transição. Para anãs brancas em geral, os modos que mostram maior efeito são aqueles que ficam confinados nas camadas mais externas (Winget *et al.* 1981), entre a zona de transição e a superfície externa, pois os modos confinados nas camadas mais externas requerem menos energia para serem excitados. A energia cinética,  $E_K$ , de um modo de pulsação é dada por

$$E_K \propto \frac{\sigma^2}{2} \int_0^R \rho(\delta r)^2 dr \quad , \quad (7.20)$$

onde  $\sigma$  é a freqüência angular de oscilação, e  $\delta r$  é a perturbação da posição de um dado elemento do fluido. A função  $\rho(\delta r)^2$  atua como uma função peso e mostra que no interior de uma anã branca, onde as densidades são muitíssimo altas, mesmo pequenas amplitudes de oscilação irão resultar em um grande valor para a energia cinética.

Logo, se uma grande quantidade de energia é bombeada para um modo externo por algum mecanismo de excitação, o modo ainda terá uma pequena amplitude de pulsação. Por outro lado, modos que ficam confinados na camada superficial não-degenerada devido ao efeito de amarramento terão pequenos valores de  $E_K$ .

Assim, se uma certa quantidade de energia for bombeada para um modo por algum mecanismo de excitação, o deslocamento da superfície provocado pelos modos amarrados será maior do que o deslocamento provocado por modos não-amarrados, isto é, maior amplitude observada. Desta forma, o amarramento de modos pode atuar como um mecanismo de seleção, fazendo com que certos modos possam ser observados mesmo se muitos outros são linearmente instáveis.

No capítulo anterior foi explicado como o amarramento de modos de pulsação pode alterar o espaçamento entre períodos consecutivos em relação ao espaçamento uniforme. E é a análise desses desvios que nos permite estudar o amarramento de modos na estrela e obter informações sobre sua estrutura interior. Para isso, nos valem de gráficos de  $\Delta P$  contra  $P$ , onde, para cada período  $P_k$  é plotada a diferença<sup>4</sup>  $\Delta P = P_{k+1} - P_k$ . Daqui para frente, vamos nos referir a esses gráficos como “*diagrama  $\Delta P$* ”.

O diagrama  $\Delta P$  para a PG 1159-035 que obtemos pode ser visto na Fig.7.1 e os valores de cada ponto estão tabelados na tabela Tab.7.1. A continuidade é muito importante em um diagrama  $\Delta P$ , pois somente em seqüências contínuas pode-se fazer uma análise mais segura do amarramento dos modos de pulsação. A partir do estudo dos periodogramas da PG 1159-035 conseguimos obter a seqüência *completa* dos espaçamentos para todos os modos  $\ell = 1$  com  $k$  variando de 14 a 41. São, ao todo, 27 modos de pulsação, 8 a mais do que os obtidos por Winget *et al.* (1991), mas incluímos modos para os quais há alguma incerteza na determinação do período. Estes casos, estão indicados na tabela por um asterisco \*.

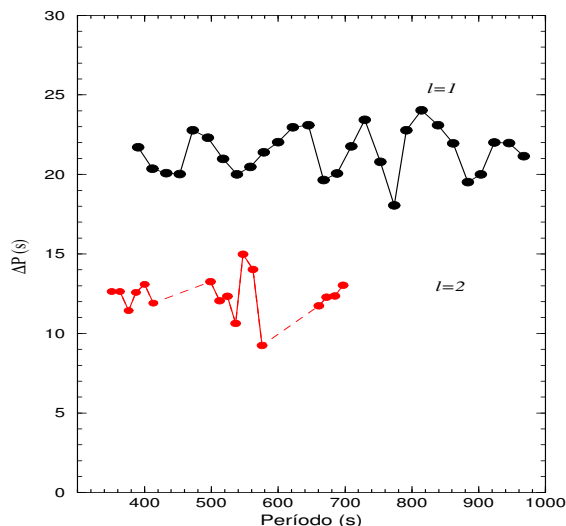
A seqüência para os modos  $\ell = 2$  para a PG 1159-035 está incompleta; contamos apenas com subseqüências de pontos, que no gráfico aparecem ligados por uma linha contínua. O cancelamento geométrico faz com que a amplitude observada de um modo com  $\ell = 2$  seja muito menor que a amplitude de  $\ell = 1$ , mesmo se pulsarem com a mesma amplitude real. A linha tracejada indica as regiões onde há ausência de pontos. Felizmente as informações importantes podem ser obtidas apenas da análise da seqüência  $\ell = 1$ .

O amarramento ocorre quando existe uma ressonância entre as auto-funções de oscilação e a posição da zona de transição no interior da estrela, o que nos permite usar os períodos dos modos amarrados para calcular a posição da zona de transição. E é isso que faz dos modos amarrados algo tão útil para a Asterosismologia.

Quando se examina um diagrama  $\Delta P$ , estamos interessados em quatro características ligadas aos espaçamentos entre os períodos dos modos-g:

---

<sup>4</sup> Alguns autores preferem calcular  $\Delta P$  em relação ao período *anterior*,  $\Delta P = P_k - P_{k-1}$ , e não em relação ao período seguinte, como estamos usando aqui.



**Fig. 7.1:** Diagrama  $\Delta P$  para a PG 1159-035, onde o valor de  $\Delta P$  para um período  $k$  da seqüência  $l = 1$  (ou  $l = 2$ ) é o espaçamento entre este período e o período seguinte da seqüência:  $\Delta P = P_{k+1} - P_k$ . As linhas tracejadas na seqüência para  $l = 2$  indicam as regiões onde há ausência de pontos.

**modos amarrados:**

Aparecem como pontos de mínimo do diagrama  $\Delta P$ .

**ciclo de amarramento:**

É o conjunto de pontos entre dois modos amarrados consecutivos. O ciclo de amarramento inicia em um modo amarrado e termina em outro e a diferença em segundos entre os dois é chamada de *período do ciclo de amarramento*. O período dos ciclos de amarramento é determinado principalmente pela localização da zona de transição e, por isso, pode ser usado para calculá-la.

**amplitude de amarramento:**

A amplitude de amarramento é a diferença entre o ponto máximo do ciclo (maior  $\Delta P$ ) e o ponto mínimo mais próximo à direita (modo amarrado). A amplitude de amarramento nos dá uma idéia de *quanto* o amarramento de um modo afeta os espaçamentos dos modos imediatamente anteriores. É expressa em segundos, mas pode ser expressa em termos de amplitude fracionária. O que mais influi na amplitude de amarramento é a espessura da camada superficial de hélio,  $q_Y$  (já que não há uma camada de H nas DOVs). O estudo da amplitude de amarramento pode nos dar informações sobre  $q_Y$ .

**fase de amarramento:**

É o menor período amarrado observado,  $P_{min}$ , isto é, o ponto inicial da seqüência de ciclos de amarramento. Sua posição está relacionada com a temperatura efetiva da estrela,  $T_{eff}$ . O esfriamento da estrela desloca  $P_{min}$  no diagrama  $\Delta P$  e todos os demais ciclos são deslocados junto com ele. Mas a contração e a rotação diferencial da estrela também têm um papel importante sobre esse deslocamento.



$\ell = 1$			$\ell = 2$		
k	$P(s)$	$\Delta P(s)$	k	$P(s)$	$\Delta P(s)$
14	390.30	21.71	24	350.75	12.64
15	412.01 *	20.36	25	363.39	12.64
16	432.37 *	20.07	26	376.03	11.44
17	452.44	20.02	27	387.47	12.59
18	472.08 *	22.77	28	400.06	13.08
19	494.85	22.31	29	413.14 *	11.90
20	517.16	20.98	36	498.73	13.25
21	538.14	20.00	37	511.98	12.05
22	558.14	20.98	38	524.03	12.34
23	578.61	21.39	39	536.37	10.63
24	600.00 *	22.03	40	547.00	14.99
25	622.03 *	22.96	41	561.99	14.03
26	644.99	23.10	42	576.02	9.24
27	668.09	19.65	49	660.46	11.74
28	687.74	20.06	50	672.20	12.28
29	709.05 *	20.46	51	684.48	12.35
30	729.51	23.43	52	696.83	13.04
31	752.94	20.80			
32	773.74	18.06			
33	791.80	22.78			
34	814.58	24.04			
35	838.62	23.10			
36	861.72 *	21.95			
37	883.67	19.52			
38	903.19 *	20.00			
39	923.19 *	22.00			
40	945.01	21.97			
41	966.98	21.15			

Tab. 7.1: Pontos do diagrama  $\Delta P$ . O asterisco indica detecção incerta.

Na Fig.7.2 podemos ver o diagrama  $\Delta P$  para a seqüência  $\ell = 1$  da PG 1159-035. Cada círculo representa um modo de pulsação e está identificado por seu índice  $k$  (ver Tab.7.1, conforme determinação de Winget *et al.* (1991), através da comparação com modelos teóricos (a determinação não é absoluta). As setas indicam a posição dos modos amarrados (pontos de mínimo):  $k = 17, 21, 27, 32$  e  $37$ . Entre os modos amarrados  $k = 32$  e  $k = 37$  temos 4 modos não-amarrados ( $k = 33, 34, 35$  e  $36$ ). O intervalo entre  $k = 32$  e  $k = 37$  corresponde a um ciclo de amarramento, cujo período tem  $883.67 - 773.74 = 109.93$  segundos. A amplitude do amarramento sobre o modo  $k = 27$  ( $668.09 s$ ) é igual à variação que ela provoca no espaçamento máximo do ciclo:  $23.10 - 19.65 = 3.45$  segundos. Também podemos expressar a amplitude de amarramento na forma fracional:  $3.45/23.10 = 0.15$ , o que significa que o amarramento provocou uma variação de 15% no espaçamento entre os períodos. A fase de amarramento é definida pelo modo  $k = 17$ :  $P_{min} = 452.44 s$ . A Tab.7.2 resume as informações mais importantes que podemos extrair do diagrama  $\Delta P$  da PG 1159-035 e que serão usadas como base para todos os cálculos daqui para frente.

## 7.6 Análise Preliminar

Como se pode ver pelo diagrama  $\Delta P$  e pela Tab.7.6, tanto o período quanto a amplitude de cada ciclo de amarramento não são constantes. Para calcular um valor característico para

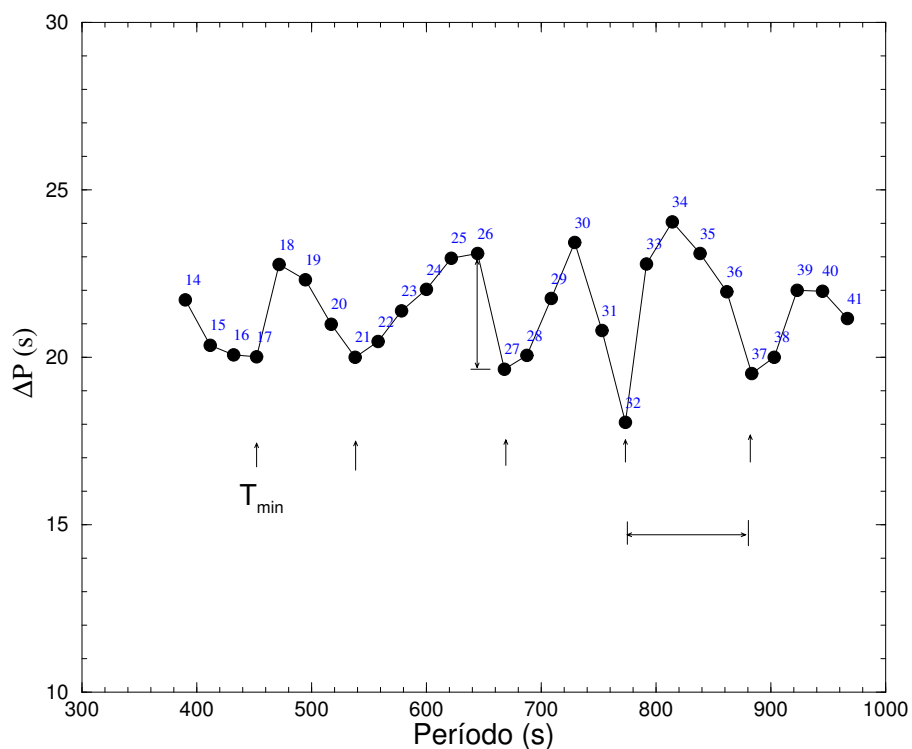
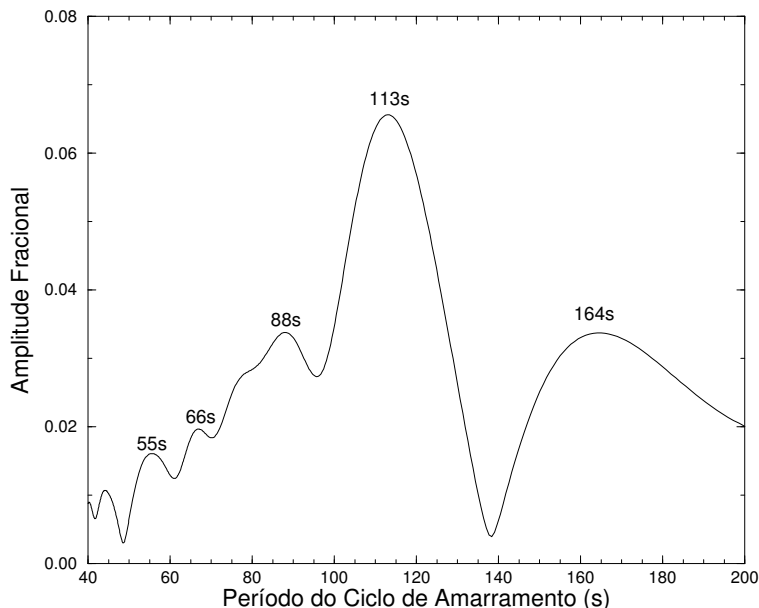


Fig. 7.2: Diagrama  $\Delta P$  para a seqüência  $\ell = 1$  da PG 1159-035.

$k$	Período (s)	Ciclo (c) (s)	Amplitude (s)	Amplitude Fracional
17	$452.431 \pm 0.002$	—	$\geq 1.69$	$\leq 0.078$
21	$538.154 \pm 0.003$	85.70	2.77	0.122
27	$668.071 \pm 0.024$	129.95	3.45	0.149
32	$773.744 \pm 0.064$	105.65	5.37	0.229
37	$883.637 \pm 0.122$	109.93	4.32	0.188

Tab. 7.2: Modos amarrados na PG 1159-035.



**Fig. 7.3:** *Periodograma do diagrama  $\Delta P$ . Os picos indicam os melhores valores para o período do ciclo de amarramento.*

um  $\Delta P$  (real ou teórico), Winget *et al.* (1991) (W91) propõem o ajuste de uma senóide aos pontos do diagrama  $\Delta P$  e usam o período da senóide ajustada como o período do ciclo de amarramento, sua amplitude como amplitude de amarramento e sua constante de fase como fase de amarramento. Isto permite uma comparação entre observação e modelos.

Antes do ajuste ser feito, o valor médio de  $\Delta P$  é calculado e subtraído de cada ponto. Em seguida, os pontos são normalizados por  $\Delta P$  (é o mesmo tratamento que se usa para normalizar curvas de luz). Este procedimento reduz a sensibilidade à massa da estrela — já que  $\Delta P$  depende fortemente da massa da estrela — fazendo que a *estratificação da superfície* seja a fator dominante sobre os valores característicos do diagrama  $\Delta P$ .

Para descobrir o melhor valor para o período do ciclo de amarramento da PG 1159-035, foi feito um periodograma cobrindo o intervalo de 40 a 200 s. O resultado é mostrado na Fig.7.3. Para cada pico do periodograma, ajustamos uma senóide. Os valores encontrados estão na Tab.7.6, sendo que o melhor para o período do ciclo de amarramento é de  $113 \pm 2$  s, diferente do obtido por W91 ( $80 \pm 2$  s), o que tem algumas implicações sobre as conclusões que se podem tirar desta análise preliminar, como será mostrado a seguir. Note que o ajuste feito por W91 aparece como o segundo melhor ajuste na Tab.7.6.

Podemos agora comparar os valores característicos observados para a PG 1159-035 com os valores característicos (calculados através do mesmo procedimento) de diferentes modelos com diferentes composições. Na tabela Tab.7.6 temos os valores obtidos por Kawaler (1997) para três diferentes modelos: um modelo completamente homogêneo, formado por carbono; um modelo onde a superfície é formada por um camada de hélio sobre outra de carbono; e um outro, onde a superfície é formada por três camadas: uma de hidrogênio, outra de hélio e uma terceira de carbono. Entretanto, os espectros da atmosfera da PG 1159-035

Período (s)	Amplitude Fracional	$T_{min}$ (s)	$\chi^2$
$113 \pm 2$	$0.07 \pm 0.01$	$441 \pm 6$	0.06
$88 \pm 4$	$0.03 \pm 0.02$	$426 \pm 12$	0.10
$66 \pm 4$	$0.19 \pm 0.18$	$432 \pm 15$	0.12

**Tab. 7.3:** *Ciclo de amarramento da PG 1159-035: melhores valores.*

Composição da Zona de Transição	Ciclo de Amarramento (s)	Amplitude Fracional	$P_{min}$ (s)	$< \Delta P >$ (s)
C	$143 \pm 7$	$0.030 \pm 0.006$	$466 \pm 9$	21.2
He/C	$63 \pm 1$	$0.09 \pm 0.01$	$528 \pm 2$	20.7
H/He/C	$85 \pm 1$	$0.18 \pm 0.01$	$515 \pm 1$	18.5
PG 1159-035 - atual	$113 \pm 2$	$0.07 \pm 0.01$	$441 \pm 6$	21.4
PG 1159-035 - W91	$80 \pm 2$	$0.12 \pm 0.02$	$523 \pm 3$	21.6

**Tab. 7.4:** *Resultados para diferentes composições da zona de transição*

não apresenta evidência de H (Dreizler 1998). Na última linha da tabela, temos os valores calculados para a PG 1159-035 a partir dos dados da Tab.7.1 e os valores obtidos por Winget *et al.* (1991).

Comparando os valores, praticamente não há dúvidas de que a zona de transição da PG 1159-035 não é quimicamente homogênea. O período para o ciclo de amarramento (113 s) está entre o período obtido para o modelo com C puro (143 s) e o de H/He/C (85 s).

O período do ciclo de amarramento é muito sensível à profundidade ( $r_c$ ) da zona de transição, porque os modos de pulsação (com  $k$  grande) se formam no envelope mais externo. O exame de como as auto-funções mudam de modo para modo, indica que as grandes mudanças ocorrem nas camadas mais externas. Quanto mais massiva a camada, mais profunda será a zona de transição, e maior será o número de modos que são encontrados após um modo amarrado antes que a auto-função seja alterada suficientemente para criar uma nova ressonância; isto é, períodos de amarramento longos estão associados com regiões espessas de composição uniforme.

É por esta razão que o ciclo de amarramento é maior para o modelo quimicamente homogêneo (onde o amarramento é o resultado da região de degenerescência relativamente profunda) que para o modelo de He/C ou o modelo de H/He/C.

O modelo de H/He/C tem um ciclo maior que o de He/C — apesar da camada mais externa de H ser extremamente fina no modelo — porque o amarramento é o resultado da dupla ressonância das auto-funções com as duas camadas.

A amplitude do ciclo de amarramento é mais sensível ao gradiente de densidade da zona de transição: quanto maior for o gradiente, maior será a amplitude do ciclo de amarramento.

Isto resulta da mudança do peso molecular médio. A amplitude observada (0.07) é menor que a do modelo com He/C (0.09) e maior que a do modelo com C puro (0.03).

W91 usaram o período de mínimo para determinar o valor de  $k$  para o tripleto de 517 s e encontraram  $k = 20 \pm 2$ . A diferença entre o valor obtido em nosso trabalho ( $P_{min} = 441 \pm 6$  s) e o obtido por W91 ( $P_{min} = 523 \pm 3$  s) pode implicar que o valor de  $k$  para o tripleto de 517 s não seja exatamente 20, mas, felizmente, isto não afeta nossos cálculos.

## 7.7 Localização da Zona de Transição

Como o amarramento de modos depende da ressonância entre as auto-funções para as pulsações e a profundidade da região de transição de composição, as frequências para as quais os modos são amarrados são sensíveis à profundidade geométrica,  $r_c$ , da zona de transição. Segundo Kawaler & Bradley (1994), os períodos dos modos amarrados são dados em uma aproximação analítica por:

$$P_i^2 = 2\pi^2 \lambda_i^2 \left[ \left(1 - \frac{r_c}{R}\right) \frac{GM}{R^3} \right]^{-1}, \quad (7.21)$$

onde  $\lambda_i$  são um conjunto de constantes relacionados com os zeros de funções de Bessel;  $r_c$  é a posição da região de transição de composição; e  $P_i$  é o período do modo amarrado que tem  $i$  nodos entre a superfície e  $r_c$ .

As constantes  $\lambda_i$  são chamadas de *coeficientes de amarramento* e foram calculadas empiricamente a partir de modelos para anãs brancas por vários grupos. A Tab.7.7 mostra os valores de  $\lambda_i$  para  $i = 0 - 9$  para modelos de PG 1159, DBs e DAs. Os coeficientes  $\lambda_i$  para modelos de PG 1159 foram calculados por Kawaler & Bradley (1990); os  $\lambda_i$  para DBs foram calculados por Bradley *et al.* (1993); e Kawaler & Bradley (1990) e Brassard *et al.* (1992)  $\lambda_i$  para modelos de DAs ( $DA_1$  e  $DA_2$ , respectivamente) e, conforme se pode ver, os valores obtidos pelos dois grupos são coerentes entre si.

Partindo da Eq.7.21, a razão entre dois períodos  $P_i > P_j$  será igual a:

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \quad \text{com } i > j. \quad (7.22)$$

O primeiro passo é identificar os valores de  $i$  e  $j$ . A Tab.7.7 mostra os resultados de todas as razões  $P_k/P_{k'}$ , com  $k > k'$ , para os períodos amarrados da PG 1159-035, enquanto que a Tab.7.7 mostra as razões entre  $\lambda_i/\lambda_j$  com  $i > j$ . Comparando as duas tabelas, a seqüência de índices que gera o melhor ajuste é  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Para  $\ell = 1$ , a Eq.7.21 fica:

$$P_i^2 = 4\pi^2 \lambda_i^2 \left[ \left(1 - \frac{r_c}{R}\right) \ell(\ell + 1) \frac{GM}{R^3} \right]^{-1}, \quad (7.23)$$

	<i>PG1159</i>	<i>DB</i>	<i>DA<sub>1</sub></i>	<i>DA<sub>2</sub></i>
<i>i</i>	$\lambda_i$	$\lambda_i$	$\lambda_i$	$\lambda_i$
0	$3.33 \pm 0.10$	...	$2.21 \pm 0.06$	$2.28 \pm 0.05$
1	$4.92 \pm 0.16$	...	$4.38 \pm 0.06$	$4.49 \pm 0.19$
2	$6.15 \pm 0.18$	$5.70 \pm 0.33$	$6.06 \pm 0.20$	$6.23 \pm 0.23$
3	$7.45 \pm 0.16$	$7.43 \pm 0.17$	$7.58 \pm 0.22$	$7.83 \pm 0.19$
4	$8.76 \pm 0.06$	$9.20 \pm 0.18$	$9.00 \pm 0.20$	$9.18 \pm 0.26$
5	$10.17 \pm 0.18$	$10.91 \pm 0.41$	$10.50 \pm 0.30$	$10.44 \pm 0.17$
6	$11.46 \pm 0.18$	...	...	...
7	$12.77 \pm 0.19$	$12.56 \pm 0.36$	...	...
8	$13.82 \pm 0.35$	$14.15 \pm 0.47$	...	...
9	$15.26 \pm 0.26$	$15.77 \pm 0.32$	...	...

**Tab. 7.5:** *Coefficientes de amarramento para modelos de anãs brancas. Fontes: PG1159: Kawaler & Bradley (1990); DB: Bradley et al. (1993); DA<sub>1</sub>: Kawaler & Bradley (1990); DA<sub>2</sub>: Brassard et al. (1992)*

	538.14	668.09	773.74	883.67
452.44	1.189	1.477	1.710	1.953
538.14	—	1.241	1.438	1.643
668.09	—	—	1.158	1.323
773.74	—	—	—	1.142

**Tab. 7.6:** *Razões entre os períodos amarrados observados*

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$
$\lambda_0$	1.477	1.847	2.237	2.630	3.054	3.441	3.835	4.150	4.583
$\lambda_1$	—	1.331	1.514	1.780	2.067	2.329	2.596	2.809	3.102
$\lambda_2$	—	—	1.211	1.424	1.654	1.863	2.076	2.247	2.481
$\lambda_3$	—	—	—	1.176	1.365	1.538	1.714	1.855	2.048
$\lambda_4$	—	—	—	—	1.161	1.308	1.458	1.578	1.742
$\lambda_5$	—	—	—	—	—	1.127	1.256	1.358	1.500
$\lambda_6$	—	—	—	—	—	—	1.114	1.206	1.332
$\lambda_7$	—	—	—	—	—	—	—	1.802	1.195
$\lambda_8$	—	—	—	—	—	—	—	—	1.104

**Tab. 7.7:** *Razões  $\lambda_i/\lambda_j$ , com  $i > j$ . As razões dentro dos retângulos são as que melhor se ajustam às razões entre os períodos amarrados observados, mostrados na Tab.7.7.*

$i$	$P$ (s)	$\lambda_i$	$r_c$ $R_\star$
1	452.431002	4.92	$0.84 \pm 0.05$
2	538.153994	6.15	$0.83 \pm 0.06$
3	668.070986	7.45	$0.83 \pm 0.05$
4	773.744021	8.76	$0.83 \pm 0.02$
5	883.635988	10.17	$0.82 \pm 0.06$

**Tab. 7.8:** Valores encontrados para  $r_c$  para cada modo amarrado.

Isolando  $r_c$  temos:

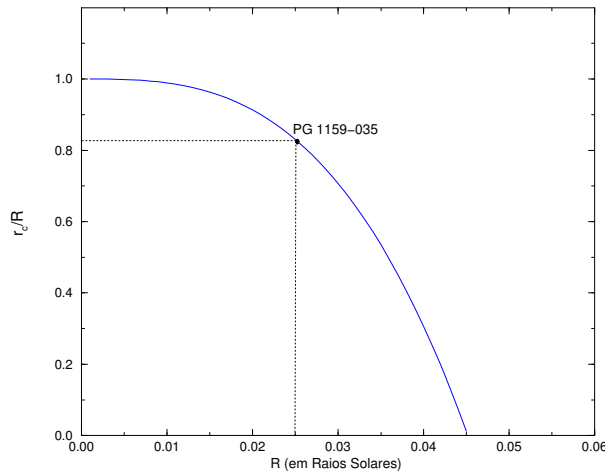
$$r_c/R = \left(1 - \frac{2\pi^2\lambda_i^2}{GMP_i^2}R^3\right) \quad (7.24)$$

usando como raio para a PG 1159-035,  $R/R_\odot = 0.025 \pm 0.005$  (Kawaler & Bradley 1994). Os resultados são mostrados na Tab.7.8. Como se pode ver, os valores estão concentrados ao redor de  $0.83 R_\star$ , com uma dispersão muito pequena.

Fazendo-se a média ponderada, do termo que multiplica  $R^3$  na Eq.7.24, temos:

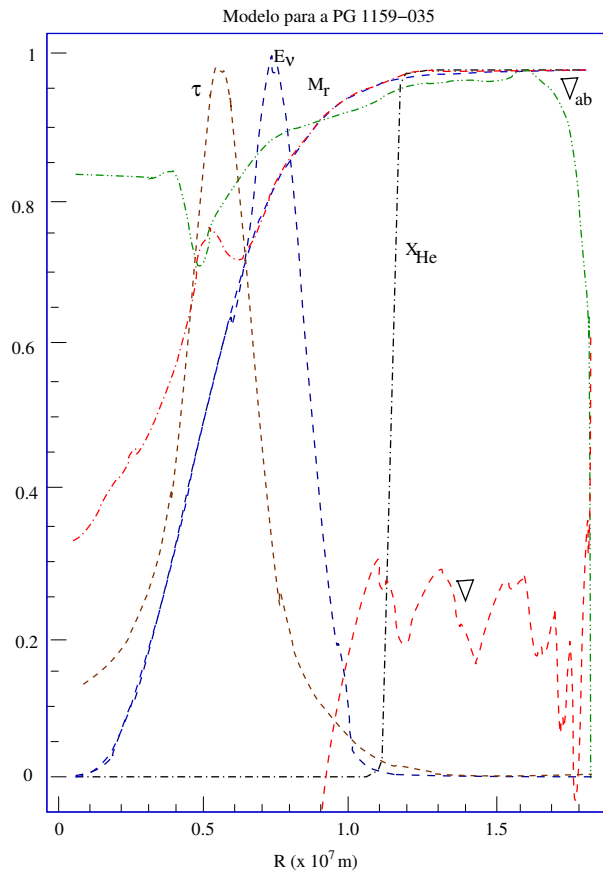
$$r_c/R = \left(1 - 10\,842.52 R^3\right) \quad (7.25)$$

onde  $R$  é dado em raios solares,  $R_\odot$ . O limite máximo de  $R$  para que o lado direito da equação acima seja maior ou igual a zero é  $R = 0.045 R_\odot$ . O gráfico de  $r_c$  contra  $R$  pode ser visto na Fig.7.4. A fonte dominante de erros no cálculo de  $r_c$  é a incerteza nos coeficientes de amarramento  $\lambda_i$ , sendo dezenas de vezes maior que as demais, o que mostra a importância de boas determinações para as constantes  $\lambda_i$ . Para  $R_\star = 0.025 \pm 0.005 R_\odot$ , temos



**Fig. 7.4:** Gráfico de  $r_c/R$  como uma função de  $R$  (em  $R_\odot$ ).

$$r_c/R_\star = 0.83 \pm 0.05 \quad (7.26)$$



**Fig. 7.5:** Modelo para a PG 1159-035 calculado por Paul Bradley.

Agora, podemos comparar com os modelos KB. A Fig.7.5 mostra num mesmo gráfico os resultados de um modelo teórico para a PG 1159-035 calculado por Paul Bradley (comunicação privada) para uma estrela com raio igual a  $R_\star = 1.82 \times 10^7 m$  ou  $R_\star = 0.026 R_\odot$ . As curvas no gráfico foram *normalizadas* em relação ao valor máximo de cada uma e calculadas em função do raio,  $R$ , da estrela dado em  $\times 10^7 m$  e

- $\tau$  = opacidade;
- $E_\nu$  = emissão de neutrinos;
- $M_r$  = massa contida no raio  $r$ ;
- $\nabla_{ad}$  = gradiente adiabático de temperatura;
- $\nabla$  = gradiente de temperatura real;
- $X_{He}$  = fração de massa de He;

No modelo, a zona de transição entre o núcleo de C/O e a camada de He ocorre entre  $0.60$  e  $0.65 R_\star$ , diferente do valor por nós calculado, de  $0.83 R_\star$ , por um fator de  $4.1\sigma$ .



Esta discrepância mostra que os modelos KB ainda não geram resultados completamente satisfatórios. A diferença observada sugere que a massa de He na estrela seja menor do que a usada no modelo. Por outro lado, é possível que a zona de transição responsável pelo amarramento dos modos não seja a zona de transição entre a atmosfera de He e o núcleo de C/O e sim uma zona de transição, *dentro da atmosfera*, entre uma camada de He I e outra de He II, ou talvez ainda entre uma camada de  $^3\text{He}$  e outra de  $^4\text{He}$ .

\* \* \* \* \*

## Capítulo 8

# VARIAÇÕES DOS PERÍODOS DE PULSAÇÃO

### 8.1 Introdução

À medida que uma estrela pulsante evolui, os períodos de cada um de seus modos de pulsação mudam em resposta às mudanças na estrutura interna da estrela. Como a evolução das PWD é relativamente rápida, essas mudanças nos períodos de pulsação são mensuráveis em alguns anos (McGraw *et al.* 1979).

Os modelos de Kawaler & Bradley (KB) prevêem que as taxas com que os períodos estão variando dependem da temperatura efetiva ( $T_{eff}$ ), da massa da estrela ( $M_*$ ) e da espessura da camada superficial de hélio ( $q_Y$ ). De acordo com estes modelos, a maioria dos períodos de pulsação deve estar aumentando com o tempo (taxas positivas). Apenas os modos amarrados e talvez os modos vizinhos estariam *diminuindo* no tempo (taxas negativas). A comparação dos valores observados para as taxas de variação dos períodos com os valores previstos funciona como um *teste* para os modelos teóricos.

Este capítulo trata das variações dos períodos de pulsação. Iniciamos apresentando a definição da taxa de variação do período de pulsação, para então, discutirmos as previsões dos modelos KB. A sessão seguinte descreve os diferentes métodos usados na determinação das taxas de variação dos períodos de pulsação. Em seguida, aplicamos estes métodos para determinar as variações dos períodos de pulsação da estrela PG 1159-035. Na última sessão, é feita uma comparação dos valores encontrados para a PG 1159-035 com os valores previstos pelos modelos KB para a mesma estrela.

### 8.2 Definição de $\dot{P}$

Podemos representar a variação do período  $P$  no tempo através da função  $P = P(t)$ . Se a função  $P(t)$  for expandida em *série de Taylor*, teremos:

$$P(t - t_o) = P(t_o) + \left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_o} (t - t_o) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2P}{dt^2} \right|_{t=t_o} (t - t_o)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3P}{dt^3} \right|_{t=t_o} (t - t_o)^3 + \dots \quad (8.1)$$

onde  $t_o$  é um instante qualquer usado como referência temporal. Para os casos em que o período está variando muito lentamente e/ou o intervalo de tempo considerado é suficientemente curto, podemos desprezar os termos de ordem igual ou superior a 2. Neste caso, a Eq.8.1 se transforma na aproximação:

$$P(t - t_o) \simeq P(t_o) + \left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_o} (t - t_o) \quad (8.2)$$

ou

$$P(t - t_o) \simeq P_o + \dot{P}(t - t_o) \quad (8.3)$$

onde,

$$P_o \equiv P(t_o) \quad (8.4)$$

$$\dot{P} \equiv \left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_o} \quad (8.5)$$

$P_o$ , tal como definido na Eq.8.4, é o período no instante  $t_o$ , enquanto que  $\dot{P}$ , tal como definido na Eq.8.5 é a *taxa de variação temporal do período* de pulsação da estrela, freqüentemente chamada de “P-ponto” ou “P-dot”. A Eq.8.5 é a definição formal de  $\dot{P}$  e é a definição que estamos utilizando neste trabalho. Mais adiante, ao discutirmos a técnica do diagrama (O-C) veremos que um aparente paradoxo envolvendo esta técnica levou alguns autores a sugerir uma definição diferente para  $\dot{P}$ .

Como os períodos de pulsação das anãs brancas e PWD são da ordem de segundos, costuma-se expressar  $\dot{P}$  em termos de  $s/s$  (segundos por segundo), isto é,  $\dot{P}$  expressa a variação em segundos que um período de pulsação sofre a cada segundo. No caso de anãs brancas e pré-anãs brancas, o intervalo de valores (evolutivos) para  $\dot{P}$  varia de  $10^{-9}$  a  $10^{-15}$ . A Tab.8.2 mostra em quanto tempo o período de pulsação de uma estrela varia 1 segundo e quanto ele muda em 1 ano, para diversas ordens de grandeza de  $\dot{P}$ .

### 8.3 Escalas de Tempo de Evolução

Às vezes, o que interessa não é o valor de  $\dot{P}$  para um dado período  $P$  e sim, a *escala de tempo*  $\tau$  em que o período está variando. Por definição, a escala de tempo de evolução é o tempo que seria necessário para um modo de pulsação variar de zero até  $P$  mantendo uma taxa de variação constante igual a  $\dot{P}$ :

$$\tau \equiv \frac{P}{\dot{P}} \quad (8.6)$$

$\dot{P}$ (s/s)	Tempo necessário para uma variação de 1 segundo	Varição do período em 1 ano
$10^{-9}$	32 anos	$3 \times 10^{-2}$ s
$10^{-10}$	317 anos	$3 \times 10^{-3}$ s
$10^{-11}$	3 mil anos	$3 \times 10^{-4}$ s
$10^{-12}$	32 mil anos	$3 \times 10^{-5}$ s
$10^{-13}$	317 mil anos	$3 \times 10^{-6}$ s
$10^{-14}$	3 milhões de anos	$3 \times 10^{-7}$ s
$10^{-15}$	32 milhões de anos	$3 \times 10^{-8}$ s

**Tab. 8.1:** *Tempo necessário para que o período varie 1 segundo.*

A escala de tempo de evolução tem unidade de tempo e, em geral, é expressa em anos. Em muitas equações da teoria evolutiva de estrelas pulsantes aparece o tempo  $\dot{P}/P$ , que é o inverso da escala de tempo de evolução,  $\dot{P}/P = \tau^{-1}$ , com unidades de  $s^{-1}$ . Isto deve ser entendido como uma taxa *relativa* de variação do período. Como o termo  $\dot{P}/P$  é exatamente a derivada em relação ao tempo do logaritmo natural de  $P$ ,

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{d \ln P}{dP} \frac{dP}{dt} = \frac{d \ln P}{dt} \quad (8.7)$$

muitos autores preferem usar  $d \ln P/dt$  ao invés de  $\dot{P}/P$ .

## 8.4 Previsões Teóricas

As estimativas para as taxas de variação dos períodos de pulsação podem ser obtidas a partir de considerações analíticas simples (ver Winget *et al.* 1983 e Kawaler *et al.* 1985). Para  $k \gg 1$ , os períodos dos modos-g de pulsação podem ser calculados com boa aproximação por (Cox 1980):

$$P^2 \simeq -\frac{k^2 r^2}{A g \ell (\ell + 1)} \quad (8.8)$$

onde

$$A = \frac{\chi_T}{\chi_\rho} (\nabla - \nabla_{ad}) / H_p \quad (8.9)$$

$$\chi_T = \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \quad (8.10)$$

$$\chi_\rho = \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T \quad (8.11)$$

$$(8.12)$$

Nas equações acima,  $k$  é o índice radial,  $\ell$  é o índice do esférico harmônico,  $g$  é a gravidade local na posição radial  $r$ ,  $\nabla$  é o gradiente de temperatura real da estrela,  $\nabla_{ad}$  é o gradiente adiabático de temperatura, e  $H_p$  é a altura da escala de pressão (distância em que a pressão cai por um fator de  $1/e$ ).

Se assumirmos que o período de pulsação,  $P$ , é determinado na região em que a maior medida de temperatura ocorre ( $T_m$ ), então podemos supor que  $\nabla$  é pequeno comparado com  $\nabla_{ad}$ , de forma que  $\nabla - \nabla_{ad} \simeq \nabla_{ad}$ . Esta aproximação também é válida para os modelos nos quais a emissão de neutrinos é desprezível porque os núcleos desses modelos tendem a ser isotérmicos (que não é o caso das PWD).

Derivando a Eq.8.8 em relação ao tempo se pode deduzir:

$$\frac{\dot{P}}{P} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\dot{T}_m}{T_m} + \frac{\dot{R}}{R} \quad (8.13)$$

Na equação acima,  $T_m$  é a temperatura máxima,  $R$  é a posição radial da região onde as pulsações são formadas,  $\dot{T}_m$  é a taxa de variação da temperatura máxima e  $\dot{R}$  é a taxa de contração do raio da estrela. As duas taxas são *negativas* pois tanto  $T_m$  quanto  $R$  estão diminuindo no tempo, já que em anãs brancas e PWD não há reações nucleares nem contração significativa do núcleo, embora o raio da estrela varie por um fator de 2 enquanto a estrela esfria de 140 000K para 70 000K.

Estamos assumindo que os períodos se formam na região da estrela onde a temperatura é máxima  $T_m$ .  $T_m$  não é a temperatura superficial efetiva da estrela ( $T_{eff} \ll T_m$ ).

À medida que a estrela esfria, sua atmosfera se contrai. Os dois processos — o *esfriamento* da região de temperatura máxima e a *contração* da atmosfera da estrela — afetam os períodos de pulsação fazendo com que os mesmos variem no tempo.

Mas no caso de estrelas frias, como é o caso das DAs, a taxa de contração relativa do raio,  $\dot{R}/R$ , é muito pequena comparada com a taxa relativa de esfriamento,  $\dot{T}_m/T_m$ , de forma que para essas estrelas a Eq.8.13 se reduz a:

$$\frac{\dot{P}}{P} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\dot{T}_m}{T_m} \quad (8.14)$$

No caso de estrelas mais quentes, como a PG 1159-035, a contração da atmosfera é significativa a ponto dos dois termos terem magnitudes aproximadas, implicando que o segundo termo da Eq.8.13 não pode ser desprezado.

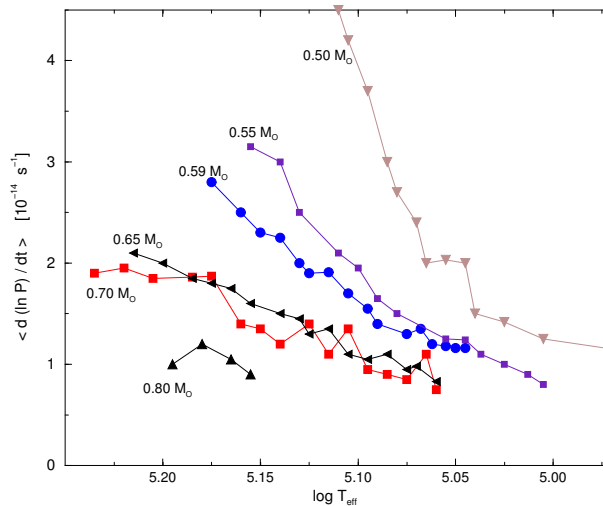
Se nenhum outro efeito além do esfriamento e da contração existisse, o sinal de  $\dot{P}$  seria determinado apenas pelo efeito que é dominante na região onde os períodos se formam: se o esfriamento é dominante, então  $\dot{P}$  seria positivo; se a contração é dominante,  $\dot{P}$  seria negativo. Contudo, outros efeitos físicos como o amarramento de modos de pulsação, campos magnéticos, sedimentação gravitacional, e rotação diferencial da estrela tornam a determinação do sinal de  $\dot{P}$  e, ainda mais, seu valor, uma tarefa bem mais complexa.

## 8.5 $\dot{P}$ , Segundo os Modelos KB

Os modelos KB mostram que vários parâmetros do modelo afetam a variação dos períodos (Kawaler & Bradley 1984).

A magnitude de  $\dot{P}/P$  diminui com o aumento da massa total da estrela entre  $0.50$  e  $0.80 M_{\odot}$ , com a temperatura efetiva mantida constante. A Fig.8.1 mostra o valor médio de  $\dot{P}/P$  para modos com  $\ell = 1$  e períodos entre 200 e 800 segundos para diferentes massas estelares. A fração de massa da camada superficial de hélio é a mesma para todos os modelos ( $q_Y = 0.0185$ ). Os valores de  $\dot{P}/P$  estão entre  $5 \times 10^{-14}$  (para  $0.5 M_{\odot}$ ) e  $0.5 \times 10^{-14}$  (para  $0.8 M_{\odot}$ ). Como se pode ver,  $\dot{P}/P$  diminui quando a massa estelar aumenta. Em parte, isso se deve ao fato de que a capacidade térmica é maior para massas maiores. Porém, a emissão de neutrino é maior para estrelas mais massivas. A Fig.8.1 também mostra que quando o modelo esfria,  $\dot{P}/P$  diminui.

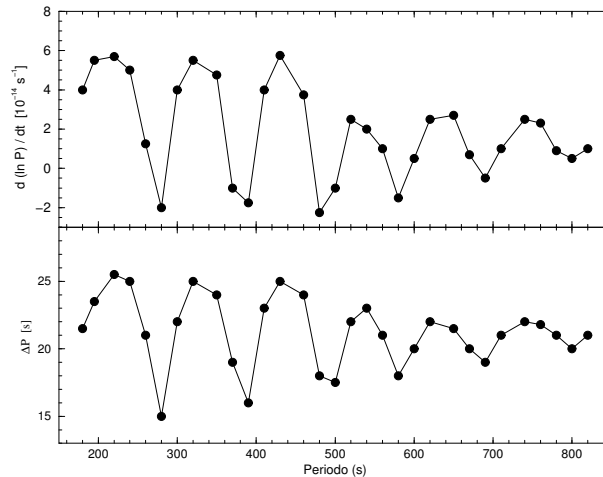
A composição do núcleo também afeta  $\dot{P}$ . Modelos com composições mais ricas em oxigênio geralmente têm maiores valores de  $\dot{P}/P$  que modelos com composições mais ricas em carbono. A emissão de neutrinos é maior em modelos com núcleos mais ricos em oxigênio, o que faz com que  $\dot{P}/P$  seja maior para esses modelos, como predito pela teoria de esfriamento de Mestel, discutida na Sec.1.9, onde descrevemos as curvas de esfriamento das anãs brancas.



**Fig. 8.1:** Valor médio de  $\dot{P}/P$  em função da  $T_{\text{eff}}$  para modos  $\ell = 1$  e diferentes massas. Todos os modelos têm  $q_Y = 0.0185$ . Note que  $T_{\text{eff}}$  aumenta para a esquerda (Kawaler & Bradley 1994).

O período de cada modo de pulsação muda em resposta às mudanças que ocorrem nas regiões do modelo que são “amostradas” pelo modo. Se pensarmos em termos dos *nodos* do modo de pulsação, o período sofrerá variações em resposta às mudanças que ocorrem nos locais onde os nodos estão. Como cada modo “amostra” posições diferentes do modelo, os valores de  $\dot{P}/P$  podem variar de um modo para outro.

Os modos não-amarrados têm aproximadamente o mesmo valor de  $\dot{P}/P$  enquanto que os modos amarrados estão presos às camadas mais externas onde a contração da estrela tem um papel importante. Isto faz com que os modos amarrados possam apresentar valores *negativos* para  $\dot{P}$ . A Fig.8.2 mostra  $\dot{P}/P$  contra o período  $P$  para um modelo com  $0.59 M_{\odot}$  com  $q_Y = 0.0023$  e  $\log T_{eff} = 5.115$ . O gráfico inferior mostra os espaçamentos entre períodos adjacentes,  $\Delta P$  contra o período  $P$ . Conforme foi visto no capítulo anterior, os mínimos indicam os modos amarrados. Note que para esses modos,  $\dot{P}/P$  também apresenta mínimos e, muitos deles, negativos.

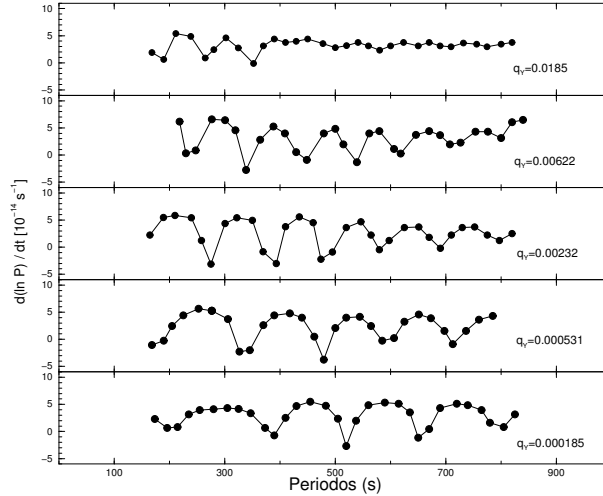


**Fig. 8.2:** O gráfico de cima mostra  $\dot{P}/P$  como uma função do período,  $P$ , para um modelo com massa igual a  $0.59 M_{\odot}$ ,  $\log T_{eff} = 5.115$  e  $q_Y = 0.0023$ . O gráfico de baixo mostra os espaçamentos em período para os modos  $\ell = 1$  do mesmo modelo.

Conforme foi discutido no capítulo anterior, a espessura da camada superficial afeta o espaçamento em período,  $\Delta P$  e, por conseguinte,  $\dot{P}/P$ . Quanto mais fina for a camada superficial, o amarramento de modos torna-se mais forte, resultando em valores mais negativos para  $\dot{P}/P$ . A Fig.8.3 mostra como  $\dot{P}/P$  varia em função do período para diferentes valores de  $q_Y$ . Todas as curvas foram calculadas para modelos com  $T_{eff} = 130\,000\,K$  e massa igual a  $0.59 M_{\odot}$  similares aos valores determinados para a PG1159-035 (Dreizler *et al.* 1998).

À medida que o modelo evolui, os períodos dos modos amarrados vão saindo das zonas de ressonância que provocam os amarramentos enquanto outros vão entrando. Isto provoca complexas variações nos valores de  $\dot{P}/P$  como pode ser visto na Fig.8.4. A figura mostra que o modo  $k = 23$  é um modo amarrado quando  $\log T_{eff} \simeq 5.167$ , enquanto que o modo  $k = 22$  torna-se um modo amarrado para  $\log T_{eff} \simeq 5.152$ . À medida que a estrela esfria, o modo  $k = 23$  vai deixando de ser um modo amarrado enquanto que o modo  $k = 22$  vai se tornando um modo amarrado.

A exatidão dos modelos pode ser testada a partir da comparação das previsões dos mesmos para  $\dot{P}/P$  com os valores observados. Isto será feito a seguir, mas antes é preciso descrever as técnicas usadas para se fazer as determinações.



**Fig. 8.3:** Os gráficos mostram  $\dot{P}/P$  como uma função do período,  $P$ , para um modelo com massa igual a  $0.59 M_{\odot}$ ,  $T_{eff} = 130\,000\text{ K}$  para diferentes valores de  $q_Y$ .

## 8.6 Técnicas de Determinação de $\dot{P}$

As principais técnicas para determinação de  $\dot{P}$  são:

- medida direta
- diagrama (O-C)
- ajuste não-linear de senóides
- método da máxima vizinhança

*Medida direta* — Quando o período está variando suficientemente rápido, podemos calcular  $\dot{P}$  através do ajuste direto da Eq.8.3 aos períodos encontrados,  $\{t_i, P_i\}$ :

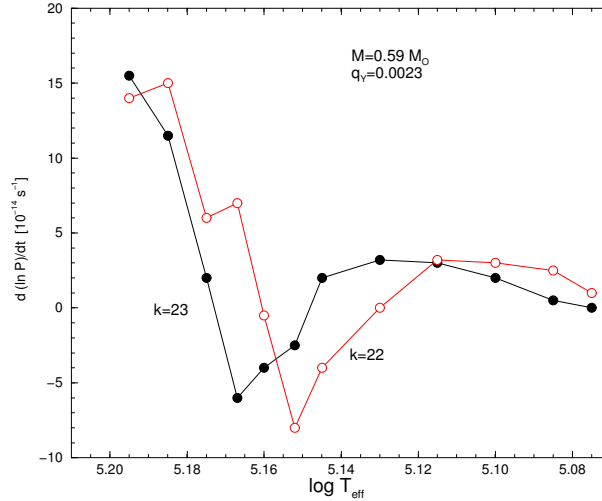
$$P_i = P_o + \dot{P} (t_i - t_o) \quad (8.15)$$

onde  $t_i$  são os tempos de medida (valor médio dos tempos da série de tempo). A incerteza na determinação de  $\dot{P}$ ,  $\sigma_{\dot{P}}$ , através desta técnica, é proporcional à incerteza média nas determinações dos períodos,  $\sigma_P$ , e inversamente proporcional ao tempo de observação<sup>1</sup>,  $T$ . Uma fórmula prática para a estimativa de  $\sigma_{\dot{P}}$  é:

$$\sigma_{\dot{P}} = \sqrt{2} \frac{\sigma_P}{T} \quad (8.16)$$

<sup>1</sup> Intervalo de tempo entre a primeira e a última determinação de período.





**Fig. 8.4:** O gráfico mostra  $\dot{P}/P$  como uma função da temperatura efetiva,  $T_{\text{eff}}$ , para os modos  $k = 22$  e  $k = 23$  ( $\ell = 1$ ) para um modelo com massa igual a  $0.59 M_{\odot}$  e  $q_Y = 0.0023$ .

A partir da equação acima, podemos calcular o tempo necessário para que uma determinada precisão na determinação de  $\dot{P}$  seja atingida:

$$T = \sqrt{2} \frac{\sigma_P}{\sigma_{\dot{P}}} \quad (8.17)$$

A incerteza na determinação do período depende do período (sendo menor para períodos de maior amplitude), depende da estrela e da duração da campanha. Como se pode ver nas tabelas Tab.6.10 a Tab.6.14,  $\sigma_P$  pode variar de pouco menos de 0.002 a 0.1 segundos para os períodos da PG 1159-035. Para os 19 anos de observação desta estrela, as medidas diretas de  $\dot{P}$  podem ser feitas com uma incerteza variando entre  $0.3 \times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$  para as melhores determinações de período e  $16 \times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$  para as demais (maior que o valor teórico esperado).

Como se pode ver, a medida direta de  $\dot{P}$  tem um poder limitado. Esta é sua grande desvantagem, mas esta técnica tem duas grandes vantagens: (a) gera uma solução única e, (b) não depende de valores iniciais para  $\dot{P}$  ou  $P_o$ .

*Diagrama (O-C)* — A técnica do diagrama (O-C) explora o efeito cumulativo da variação do período sobre o tempo de máximo,  $T_{\text{max}}$ .

Suponha que  $T_o$  seja o valor calculado para um dado período detectado,  $P$  e que, tanto  $T_o$  quanto  $P$  sejam boas aproximações dos valores reais (exatos),  $\hat{T}_o$  e  $\hat{P}$ . Se o período de pulsação da estrela é constante, cada tempo de máximo,  $C$ , ocorre um número inteiro,  $E$ , de períodos (ciclos) antes ou depois de  $T_o$  e poderia ser calculado com boa aproximação por:

$$C = T_o + E \cdot P \quad (8.18)$$

onde o número inteiro  $E$  é a parte inteira da divisão de  $(C - T_o)$  pelo período,  $P$ :

$$E = \text{int} \left\{ \frac{C - T_o}{P} \right\} \quad (8.19)$$

Se o período está variando de forma linear, como descrito pela Eq.8.3, os tempos de máximo observados,  $O$ , devem ocorrer nos instantes dados pela equação:

$$O = \hat{T}_o + \hat{P} \cdot E + \frac{1}{2} \cdot \hat{P} \cdot \dot{P} \cdot E^2 \quad (8.20)$$

A derivação da Eq.8.20 é feita no Apêndice X. Assim, se o período de pulsação está variando no tempo com uma taxa  $\dot{P}$ , os tempos de máximo sofrem um atraso ou um adiamento em relação aos tempos calculados pela Eq.8.18:

$$(O - C) = (\hat{T}_o - T_o) + (\hat{P} - P) \cdot E + \frac{1}{2} \cdot \hat{P} \cdot \dot{P} \cdot E^2 \quad (8.21)$$

A equação acima é uma equação de segundo grau em relação a  $E$ :

$$(O - C) = a + b \cdot E + c \cdot E^2 \quad (8.22)$$

onde

$$\begin{aligned} a &\equiv \hat{T}_o - T_o \\ b &\equiv \hat{P} - P \\ c &\equiv \frac{1}{2} \cdot \hat{P} \cdot \dot{P} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Usando a Eq.8.21 podemos calcular  $\dot{P}$  e valores corrigidos para  $T_o$  e  $P$  seguindo o seguinte algoritmo:

1. Calcular o tempo de máximo,  $T_{max_i}$ , para o período  $P$ , para cada conjunto de dados, através do ajuste não-linear de senóides. Adotamos esses valores como valores *observados* para  $O_i$ , isto é,  $O_i \equiv T_{max_i}$
2. Calcular o número inteiro de períodos,  $E_i$ , através da Eq.8.19.
3. Calcular  $C_i$  através da Eq.8.18.
4. Calcular a diferença observada  $(O - C)_i$ , fazendo  $(O - C)_i = O_i - C_i$ .
5. Colocar os pontos  $\{E_i, (O - C)_i\}$  em, um diagrama (gráfico) de  $(O - C)$  contra  $E$ . Ajustar a Eq.8.22 aos pontos, calculando os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

6. Calcular  $\dot{P}$  e os valores corrigidos para  $T_o$  e  $P$ :

$$\hat{T}_o = T_o + a \quad (8.24)$$

$$\hat{P} = P + b \quad (8.25)$$

$$\dot{P} = \frac{2c}{\hat{P}} \quad (8.26)$$

A incerteza na estimativa de  $\dot{P}$  através do diagrama (O-C) é proporcional à incerteza média na determinação dos tempos de máximo,  $\sigma_{T_{max}}$  e inversamente proporcional à  $T^2$ :

$$\sigma_{\dot{P}} = \frac{2P\sigma_{T_{max}}}{T^2} \quad (8.27)$$

O tempo  $T$  necessário para se atingir uma dada precisão na determinação de  $\dot{P}$  é proporcional a  $\sqrt{\sigma_{\dot{P}}}$ :

$$T = \frac{\sqrt{2P\sigma_{T_{max}}}}{\sqrt{\sigma_{\dot{P}}}} \quad (8.28)$$

Portanto, através do diagrama (O-C) pode-se determinar  $\dot{P}$  com uma precisão muitíssimo maior do que através de uma medida direta. A grande desvantagem desta técnica é que ela pode levar a múltiplas soluções quando o valor de  $\dot{P}$  não é muito pequeno. Essa situação ocorre porque pode haver dubiedade no esquema de contagem do número de ciclos,  $E$ , através da Eq.8.19, o que nos força a considerar todos os valores possíveis para  $E_i$ .

Uma maneira de se fazer isto é varrendo uma grade de valores possíveis para  $P$  e  $\dot{P}$  e calculando os valores de  $E_i$  a partir da Eq.8.20:

$$E_i = \text{int} \left\{ \frac{-P + \sqrt{P^2 - 2P\dot{P}(T_o - C_i)}}{P\dot{P}} \right\} \quad (8.29)$$

Quando  $\dot{P}$  é muito pequeno, a Eq.8.29 se transforma na Eq.8.19.

A melhor solução é aquela que otimiza o ajuste, apresentando o menor  $\chi^2$ . Esta variante da técnica do diagrama (O-C) foi proposta por O'Donoghue (1994) e é a técnica usada neste trabalho para refinar os valores de  $\dot{P}$  encontrados pela medida direta.

*Ajuste não-linear* — O valor de  $\dot{P}$  também pode ser calculado através do ajuste não-linear de uma senóide com período variante no tempo:

$$y(t) = A \sin \left\{ \frac{2\pi}{P_o + \frac{1}{2}\dot{P} \cdot (t - T_o)} (t - t_o) + \frac{\pi}{2} \right\} \quad (8.30)$$

O fator  $1/2$  que aparece no denominador é discutido no Apêndice X, que discute o “paradoxo do  $\dot{P}$ ”.

O ajuste não-linear pode ser feito através do método de Levenberg-Macquardt, o qual parte de valores iniciais para  $T_o$ ,  $P_o$  e  $\dot{P}$ . O ajuste não-linear pode calcular  $\dot{P}$  com grande precisão, desde que os valores iniciais estejam suficientemente próximos dos valores reais, caso contrário, o ajuste converge para qualquer outra solução local. A forte dependência dos valores iniciais é a grande desvantagem deste método.

Para contornar este problema, ao invés de usarmos um único conjunto de valores iniciais, consideramos uma grade tridimensional de valores para  $T_o$ ,  $P_o$  e  $\dot{P}$ , cobrindo todo o intervalo de valores fisicamente possíveis. Cada ponto da grade é usado como valor inicial para o ajuste-não linear e o  $\chi^2$  é calculado. Desta forma podemos encontrar a melhor solução dentro do intervalo de valores adotado.

Usamos o ajuste não-linear para refinar os valores encontrados pelo diagrama (O-C), como apresentados nas seções Sec.8.8 e Sec.8.9.

## 8.7 Variações dos Períodos de Pulsação da PG 1159-035

Comparando os periodogramas dos dados anuais da PG 1159-035 vemos que  $1/3$  dos modos detectados aparecem em dois ou mais anos. As amplitudes mudam de ano para ano, podendo diminuir para baixo do limite de detecção fazendo com que os picos “desapareçam” temporariamente do periodograma da estrela para “ressurgirem” anos mais tarde. Portanto, o desaparecimento ou mesmo o fato de um dado modo de pulsação não ter sido detectado não significa, necessariamente, que o mesmo esteja desativado, embora seja teoricamente possível que alguns dos modos de pulsação da estrela não sejam ativados. Kleimann *et al.* (1996) mostra que para a DAV G29-38, modos aparecem e desaparecem com o passar dos anos, mas mantém a mesma frequência (levando-se em conta as incertezas) quando presentes. Kepler *et al.* (2003) mostram o mesmo efeito para a DBV GD358.

A tabela Tab.8.2 mostra uma listagem de todos os modos de pulsação da PG 1159-035 presentes em dois ou mais dos periodogramas anuais. O período aproximado do modo de pulsação aparece na primeira coluna. Os periodogramas nos quais o modo está presente estão indicados por  $\checkmark$ . A taxa de variação do período,  $\dot{P}$ , é mostrada na sétima coluna. Nas três últimas colunas aparecem os índices  $\ell$ ,  $m$  e  $k$  que identificam o modo de pulsação, na identificação de Winget *et al.* (1991).

*Procedimento* — Para cada modo de pulsação presente nos periodogramas de dois ou mais anos, foi feito o gráfico do período contra o tempo a fim de ver se a disposição dos pontos era consistente com uma variação linear, levando em conta as incertezas na determinação dos períodos. Uma reta foi ajustada à cada conjunto de pontos e  $\dot{P}$  foi calculado (mesmo para os casos em que haviam apenas dois pontos). Os gráficos são mostrados a seguir. Ao lado de cada gráfico, há uma tabela mostrando os valores do instante de cada medida (em anos) e o período medido (em segundos). Abaixo da tabela, aparece os valores obtidos para

Período (s)	1983	1985	1989	1993	2002	$\dot{P}$ $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\ell$	$m$	$k$
376.0	✓	✓				122.25	2	0	22
387.4			✓		✓	-2.24	2	0	27
390.3	✓		✓		✓	10.43	1	0	14
390.8				✓	✓	54.91	1	-1	14
397.2		✓			✓	6.27	2	2	28
399.0			✓		✓	54.88	2	1	28
400.0			✓	✓	✓	-6.83	2	0	28
401.6		✓			✓	-12.58	2	-2	28
412.0			✓		✓	8.49	1	0	15
414.3			✓	✓	✓	-14.6	2	-1	28
415.5		✓	✓		✓	58.05	2	-2	28
422.5	✓			✓	✓	6.69	2	+2	30
426.2				✓	✓	23.40	2	-1	30
427.5			✓	✓	✓	-35.29	2	-2	30
430.3	✓				✓	23.80	1	+1	16
434.2		✓			✓	-34.42	1	-1	16
436.5			✓	✓	✓	1.46	2	+1	31
439.2			✓	✓	✓	-7.49	2	-1	31
440.6			✓	✓	✓	-48.84	2	-2	31
451.5	✓	✓	✓	✓	✓	0.08	1	+1	17
452.4	✓	✓	✓	✓	✓	2.54	1	0	17
453.2	✓			✓	✓	5.42	1	-1	17
493.7	✓	✓	✓	✓		9.10	1	+1	19
494.8	✓		✓	✓		-30.11	1	0	19
511.9			✓	✓		-21.72	2	0	37
515.0	✓	✓		✓	✓	-18.80	2	-1	37
516.0	✓	✓	✓	✓	✓	13.26	1	+1	20
517.1	✓	✓	✓	✓		18.28	1	0	20
518.2			✓	✓	✓	3.18	1	-1	20
526.4			✓	✓	✓	22.17	2	-1	38
536.9	✓		✓	✓	✓	46.47	1	+1	21
538.1	✓		✓		✓	2.00	1	0	21
539.3	✓	✓	✓	✓		-1.52	1	-1	21
540.9				✓	✓	-28.95	2	-2	39
544.3				✓	✓	1.61	2	+2	40
557.1			✓	✓	✓	-1.49	1	+1	22
558.4			✓	✓	✓	-4.30	1	0	22
559.7			✓	✓	✓	12.23	1	-1	22
561.9	✓			✓	✓	-20.57	2	0	41
641.4			✓	✓		-83.67	1	0	26
644.9		✓	✓			73.25	1	-1	26
668.5			✓		✓	-15.68			
685.8			✓	✓		61.01	1	+1	28
689.7			✓	✓		43.77	1	-1	28
705.8		✓	✓			66.92	1	+1	29
727.0			✓		✓	-22.84	1	+1	30
729.6			✓	✓		172.29	1	0	30
731.6			✓	✓	✓	84.22	1	-1	30
755.3			✓	✓		-111.39	1	-1	31
812.5		✓	✓			103.10	1	+1	34
819.7	✓	✓	✓	✓		-13.76	2	-2	60
842.8	✓		✓			7.33	1	-1	35
861.7		✓		✓		100.46	1	0	36
877.6				✓	✓	40.06	1	+1	37

Tab. 8.2: Modos presentes em dois ou mais anos.

cada ajuste para  $P_o$ ,  $\dot{P}$  em unidades de  $10^{-11} s/s$  e a variância, sendo que  $P_o$  é o período para  $BCT = 0$ . Note que estamos trabalhando com estatística de poucos pontos e que para o caso de dois únicos pontos a variância é zero, já que dois pontos definem uma reta.

Nos casos em que havia 3 ou mais pontos (ver Tab.8.3), usamos a técnica do diagrama (O-C) para refinar  $\dot{P}/P$ . Usamos uma grade centrada nos valores encontrados para  $(P_o, \dot{P})$ . A grade cobria um intervalo de  $\pm 3.5\sigma$  para cada lado do ponto central. O espaçamento entre os pontos da grade foi calculado para que a mesma possuísse resolução suficientemente alta para amostrar bem a superfície  $\chi^2(P_o, \dot{P})$  para que nenhum mínimo local deixasse de ser mapeado. Os gráficos com o diagrama (O-C) mostram a diferença (O-C) em segundos, no eixo vertical, contra o número de ciclos,  $E$ .

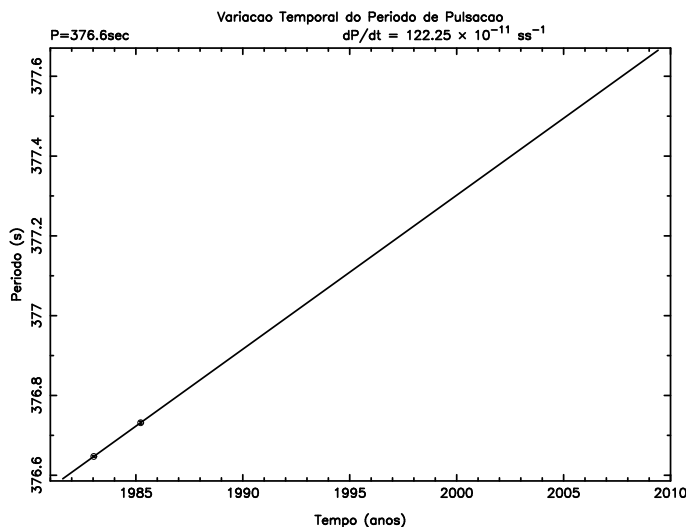
A tabela de cima, ao lado de cada gráfico, mostra os valores ajustados para  $T_{max}$  (em BCT), período (em segundos),  $\dot{P}$  (em  $10^{-11} s/s$ ) e  $\chi^2$ , para as melhores soluções, ordenadas em ordem decrescente em relação a  $\chi^2$ . Em muitos casos, havia uma única solução para todo o intervalo considerado, isto é, a solução não depende dos valores iniciais. A tabela de baixo, mostra os valores de  $E$  e  $(O - C)$  (em segundos). Como instante de referência, usamos as medidas para os dados de 1989, quando estas existiam. Quando não havia detecção para os dados de 1989, usamos as medidas de 1993 ou 2002 ou 1983 (nesta ordem). Aqui também, temos estatística de poucos pontos. Nos casos em que haviam só 3 pontos, o ajuste é perfeito e  $\chi^2$  obviamente é zero. Lembramos que as periodicidades de maior amplitude são aquelas dos tripletos de 516 s e 539 s.

Concluindo, fizemos:

medida direta  $\rightarrow$  diagrama (O-C)  $\rightarrow$  ajuste não-linear

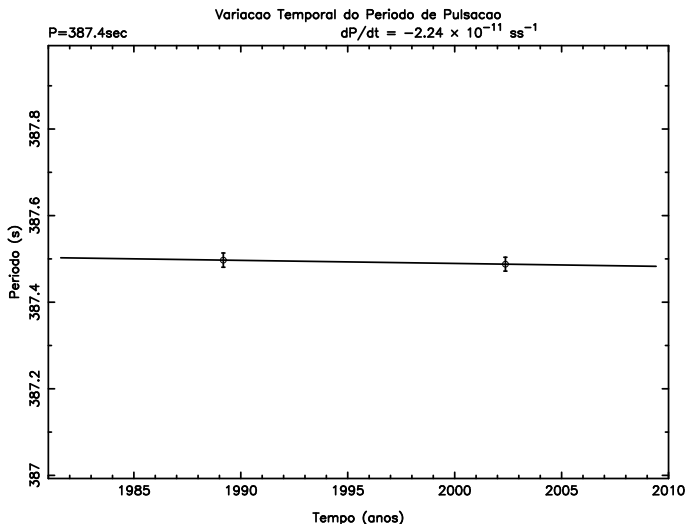
% \_\_\_\_\_

## 8.8 Medidas diretas das variações dos períodos da PG1159-035



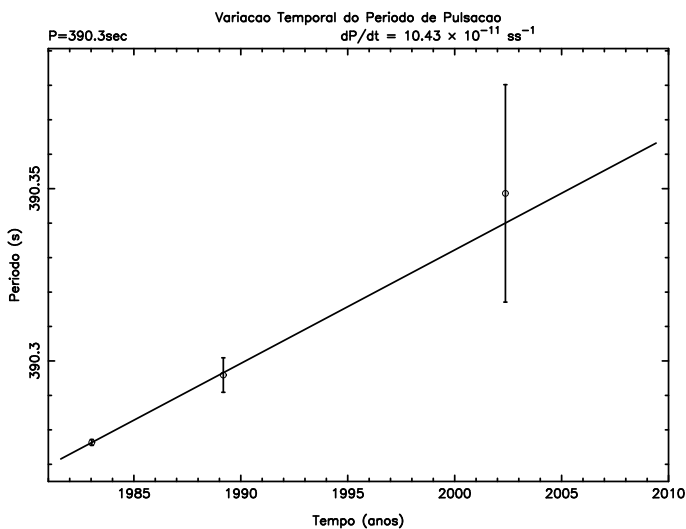
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	376.647173 $\pm$ 0.001929
1985.224274	376.731761 $\pm$ 0.003330

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 300.13914  $\pm$  3.48203  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11} s/s$ )..... 122.2569  $\pm$  5.5626  
 Variância ..... 0.00000



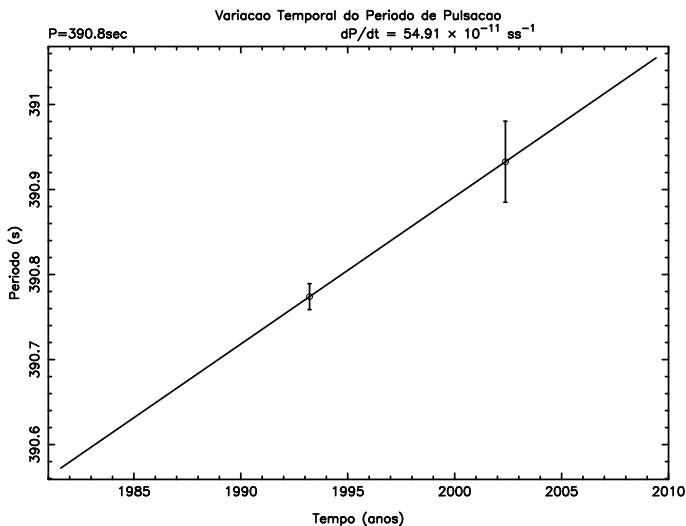
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	$387.497179 \pm 0.016437$
2002.371352	$387.487827 \pm 0.015996$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $388.90756 \pm 3.47101$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11} \text{ s/s}$ ).....  $-2.2468 \pm 5.5106$   
 Variança..... 0.00000



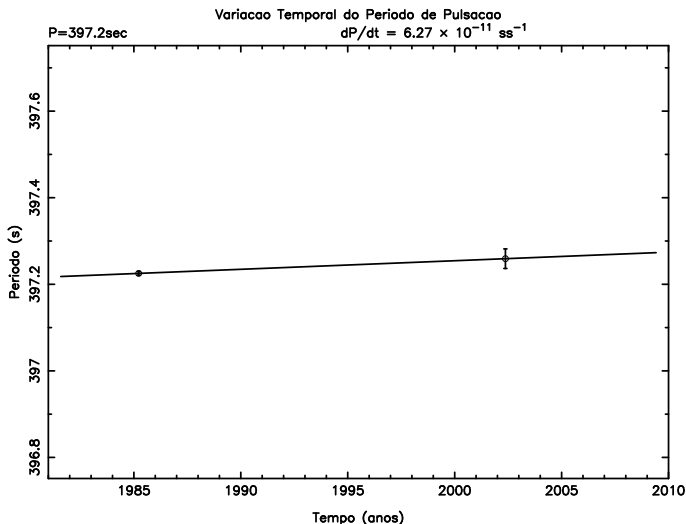
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	$390.276338 \pm 0.000856$
1989.182302	$390.295894 \pm 0.005015$
2002.371352	$390.348636 \pm 0.031567$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $383.74620 \pm 1.46614$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11} \text{ s/s}$ ).....  $10.4349 \pm 0.7166$   
 Variança..... 0.00007



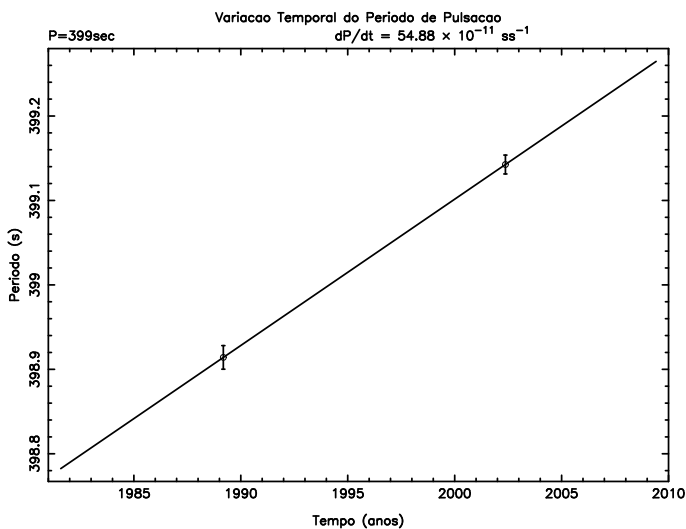
Tempo (anos)	Período (s)
1993.214050	$390.773989 \pm 0.015244$
2002.371352	$390.932688 \pm 0.047647$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $356.23078 \pm 10.89356$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11} \text{ s/s}$ ).....  $54.9167 \pm 17.3112$   
 Variança..... 0.00000



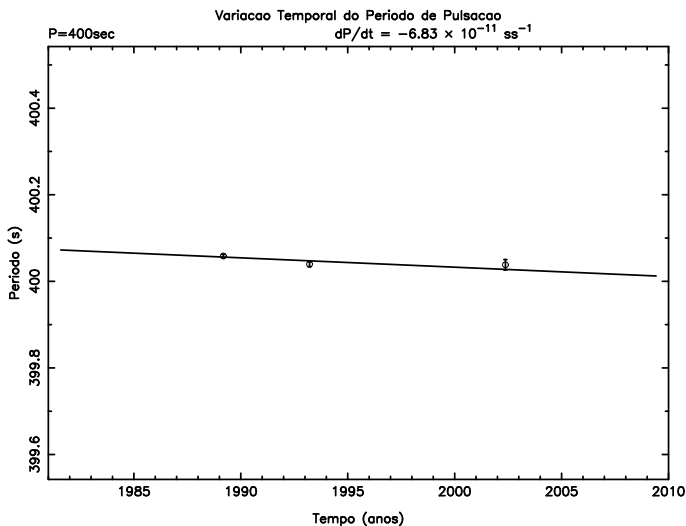
Tempo (anos)	Período (s)
1985.224274	397.225150 ± 0.004212
2002.371352	397.021324 ± 397.259101

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 393.29444 ± 2.66436  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 6.2742 ± 4.2516  
 Variância..... 0.00000



Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	398.765252 ± 398.914114
2002.371352	399.142541 ± 0.011157

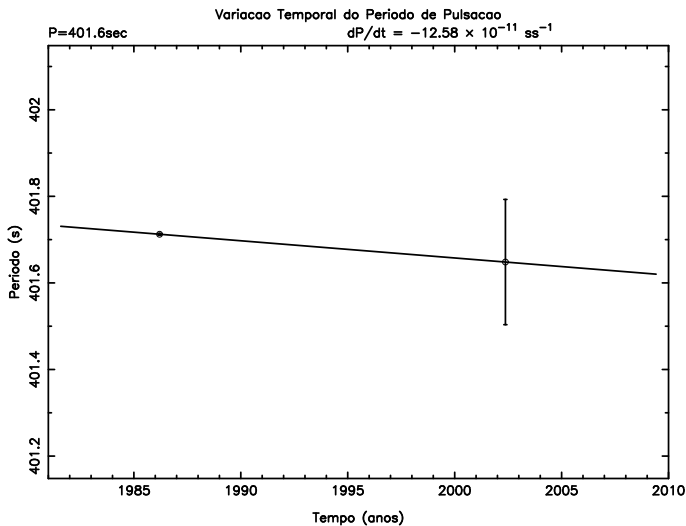
$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 364.46259 ± 2.71089  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 54.8820 ± 4.3010  
 Variância..... 0.00000



Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	400.058511 ± 0.003859
1993.214050	400.039554 ± 0.005687
2002.371352	400.038258 ± 0.012052

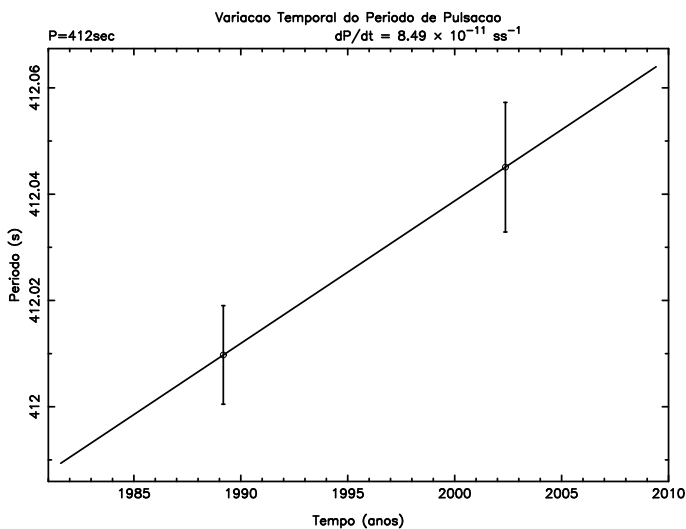
$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 404.34595 ± 1.77538  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -6.8339 ± 4.9500  
 Variância..... 0.00018





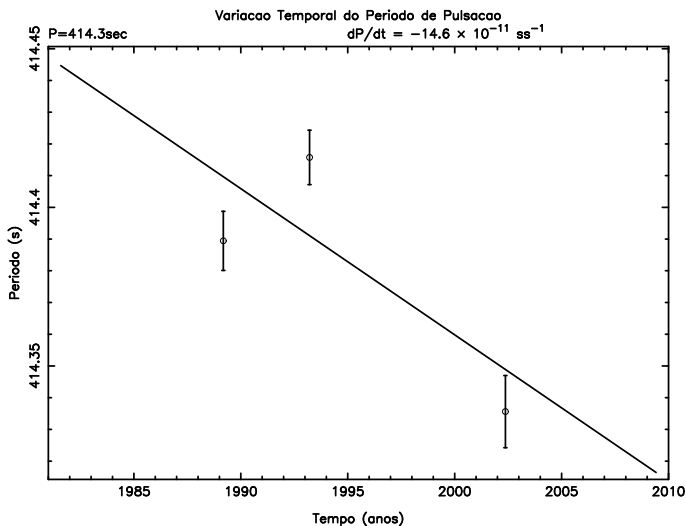
Tempo (anos)	Período (s)
1986.201909	$401.712456 \pm 0.002249$
2002.371352	$401.648220 \pm 0.144671$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $409.60299 \pm 17.77310$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $-12.5886 \pm 28.3553$   
 Variança..... 0.00000



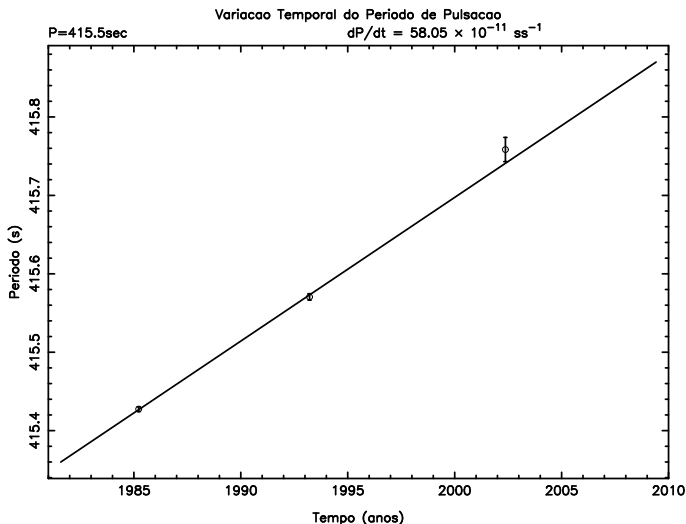
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	$412.009726 \pm 0.009277$
2002.371352	$412.045070 \pm 0.012195$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $406.67916 \pm 2.31663$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $8.4917 \pm 3.6815$   
 Variança..... 0.00000



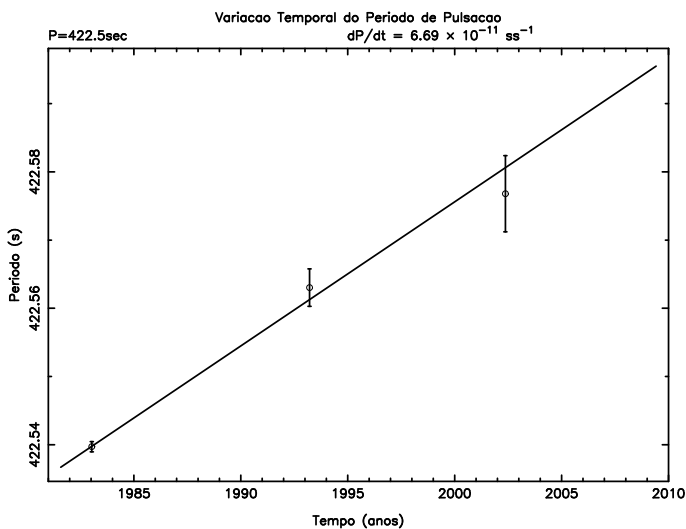
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	$414.389421 \pm 0.009312$
1993.214050	$414.415742 \pm 0.008570$
2002.371352	$414.335592 \pm 0.011373$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $423.57533 \pm 2.20492$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $-14.6011 \pm 13.2834$   
 Variança..... 0.00119



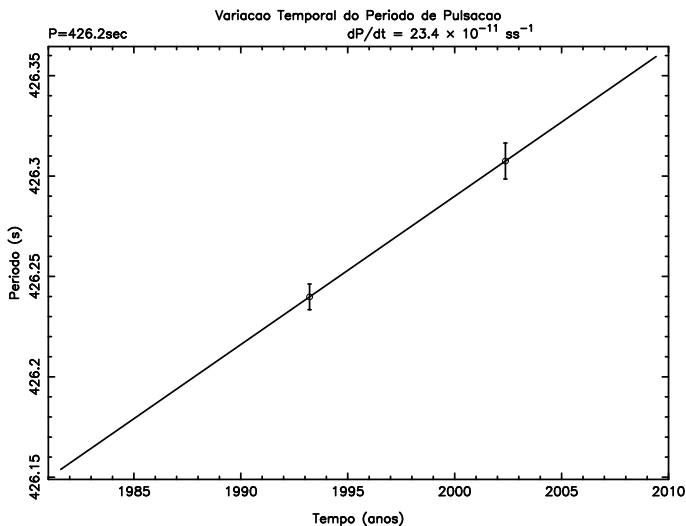
Tempo (anos)	Período (s)
1985.224274	415.427441 ± 0.002959
1993.214050	415.570477 ± 0.004063
2002.371352	415.758461 ± 0.015461

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 379.05491 ± 1.08287  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 58.0565 ± 2.2966  
 Variância..... 0.00032



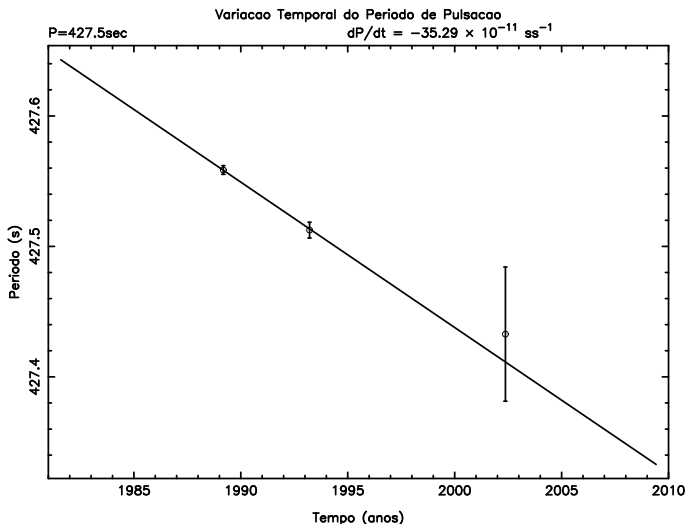
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	422.539690 ± 0.000754
1993.214050	422.563023 ± 0.002750
2002.371352	422.576783 ± 0.005580

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 418.35103 ± 0.40752  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 6.6934 ± 0.6127  
 Variância..... 0.00002



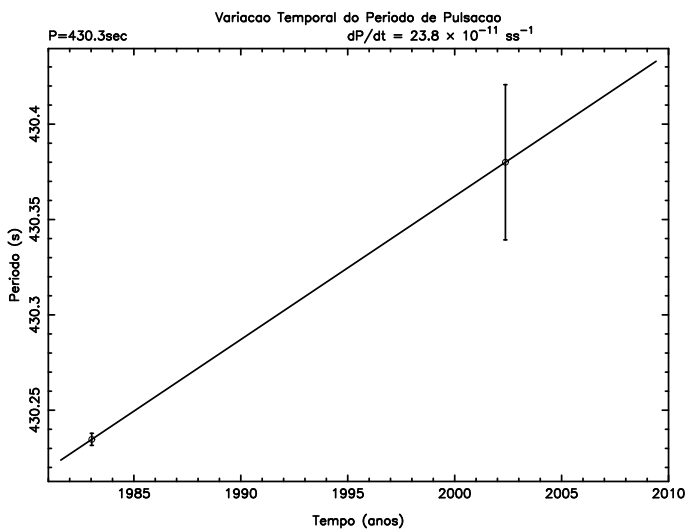
Tempo (anos)	Período (s)
1993.214050	426.239819 ± 0.006406
2002.371352	426.307468 ± 426.575473

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 411.51518 ± 2.39731  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 23.4092 ± 3.8053  
 Variância..... 0.00000



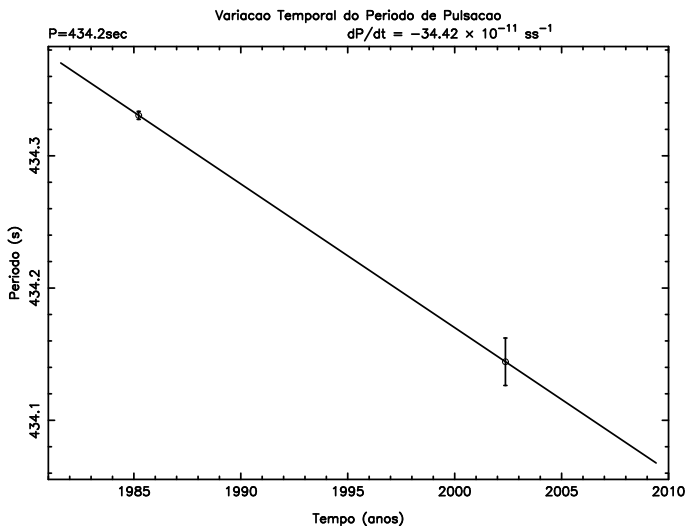
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	$427.558544 \pm 0.003300$
1993.214050	$427.512477 \pm 0.006032$
2002.371352	$427.432772 \pm 0.001100$

$P_0$  (sec) (em ano=0.0).....  $449.71492 \pm 3.14477$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $-35.2959 \pm 2.2456$   
 Variância.....  $0.00046$



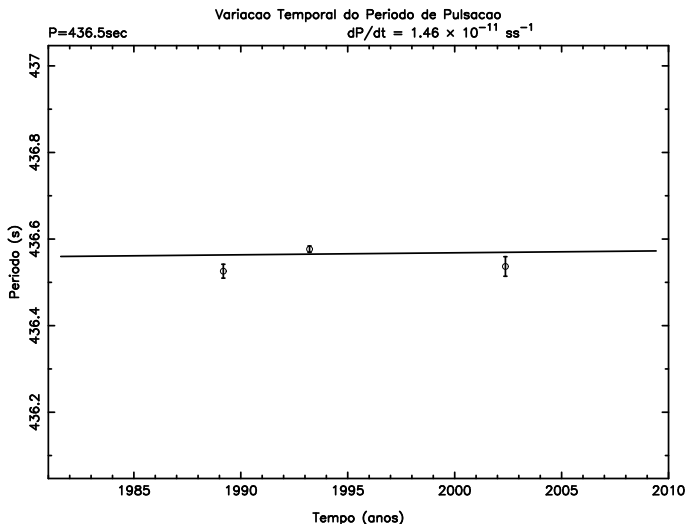
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	$430.234725 \pm 0.003171$
2002.371352	$430.379995 \pm 0.040693$

$P_0$  (sec) (em ano=0.0).....  $415.33899 \pm 4.18549$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $23.8028 \pm 6.6879$   
 Variância.....  $0.00000$



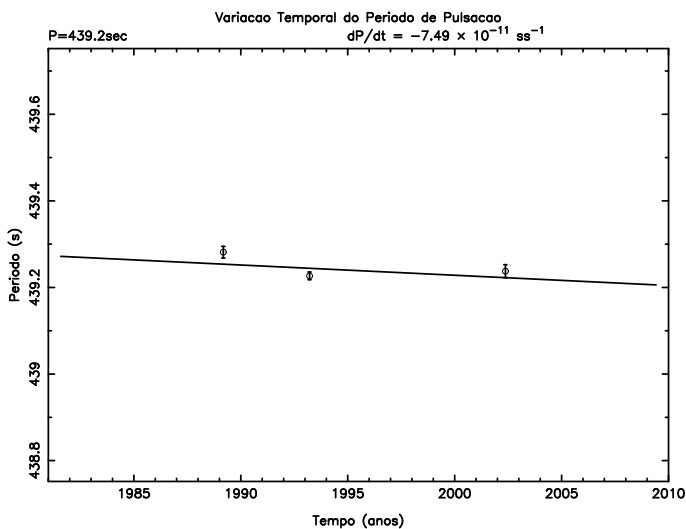
Tempo (anos)	Período (s)
1985.224274	$434.330550 \pm 0.003024$
2002.371352	$434.144256 \pm 0.017933$

$P_0$  (sec) (em ano=0.0).....  $455.89894 \pm 2.10603$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $-34.4274 \pm 3.3608$   
 Variância.....  $0.00000$



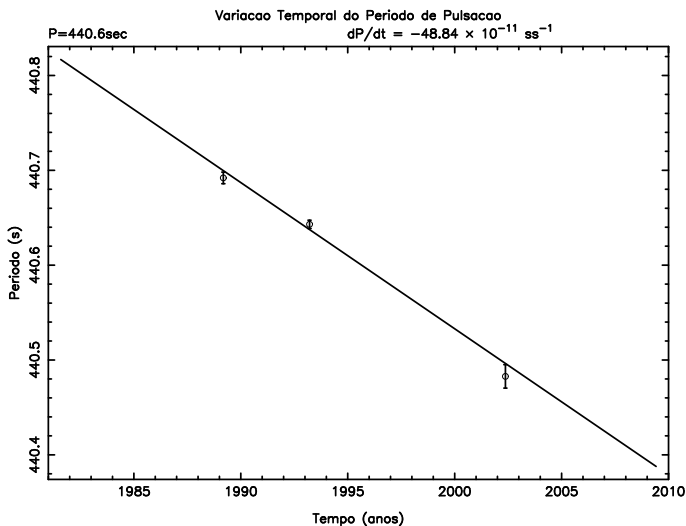
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	436.525799 ± 0.016050
1993.214050	436.576593 ± 0.007423
2002.371352	436.536634 ± 0.022598

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 435.64659 ± 4.18292  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 1.4602 ± 20.9563  
 Variância..... 0.00260



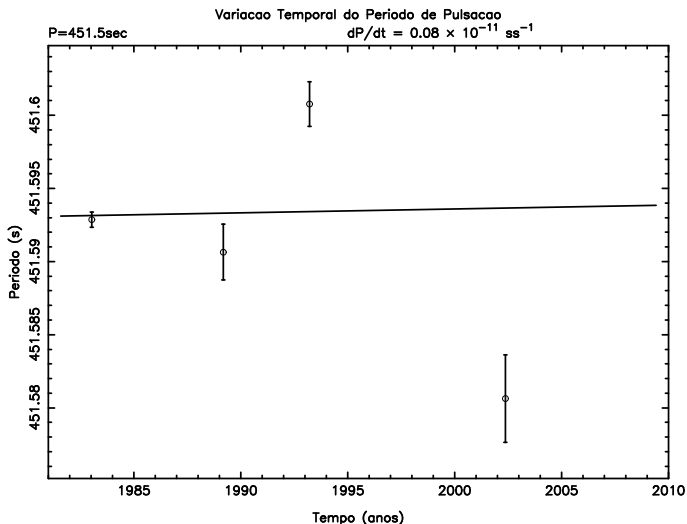
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	439.281377 ± 0.013402
1993.214050	439.226755 ± 0.008873
2002.371352	439.237639 ± 0.014935

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 443.96111 ± 2.96845  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -7.4989 ± 14.2629  
 Variância..... 0.00130



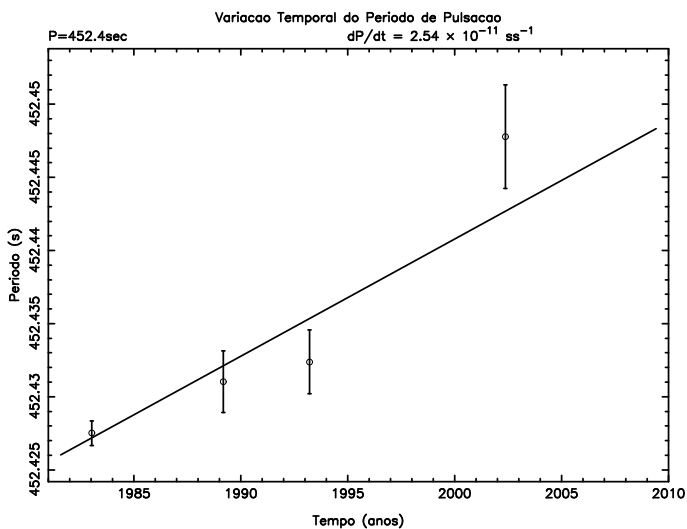
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	440.691991 ± 0.006138
1993.214050	440.643031 ± 0.004344
2002.371352	440.482714 ± 0.012354

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 471.35856 ± 2.03885  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -48.8403 ± 6.7966  
 Variância..... 0.00028



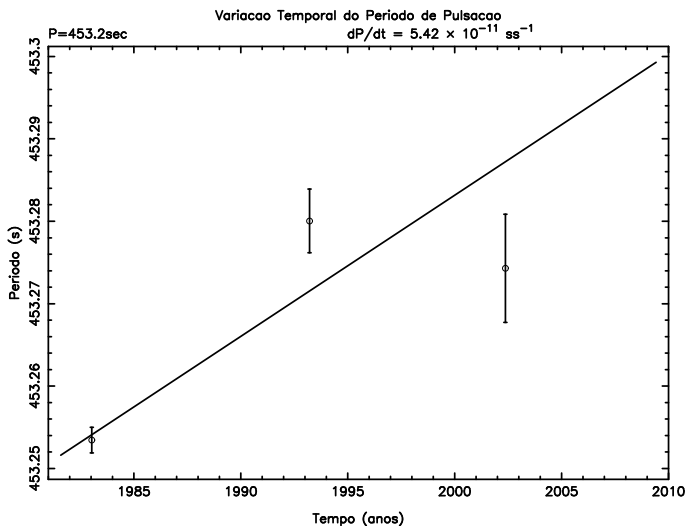
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	$451.592838 \pm 0.000511$
1989.182302	$451.590617 \pm 0.001906$
1993.214050	$451.216962 \pm 451.600739$
2002.371352	$451.396388 \pm 451.580604$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....:  $451.54066 \pm 0.21805$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....:  $0.0838 \pm 1.6494$   
 Variância.....: 0.00012



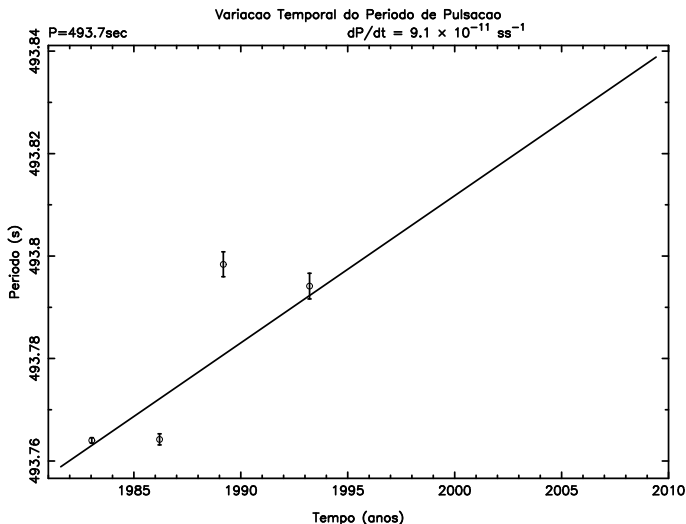
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	$451.959884 \pm 452.427481$
1989.182302	$452.055590 \pm 452.431006$
1993.214050	$452.129006 \pm 452.432357$
2002.371352	$451.983910 \pm 452.447753$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....:  $450.83702 \pm 0.29016$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....:  $2.5410 \pm 0.6804$   
 Variância.....: 0.00002



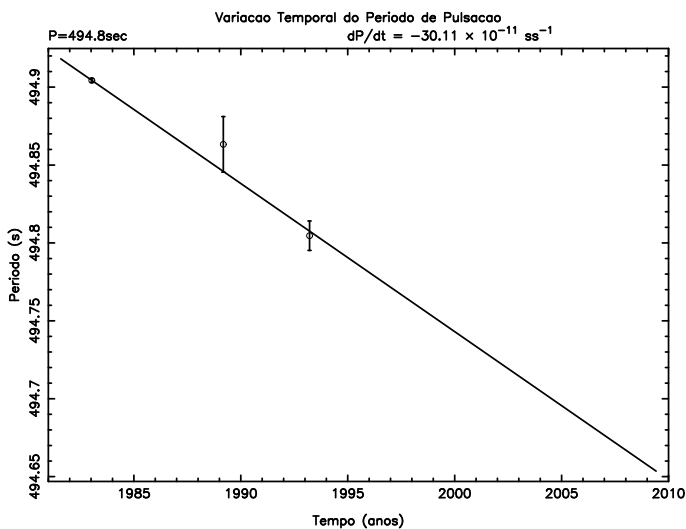
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	$453.253412 \pm 0.001554$
1993.214050	$453.280004 \pm 0.003857$
2002.371352	$453.274257 \pm 453.495565$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....:  $449.85865 \pm 0.54791$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....:  $5.4257 \pm 2.6131$   
 Variância.....: 0.00024



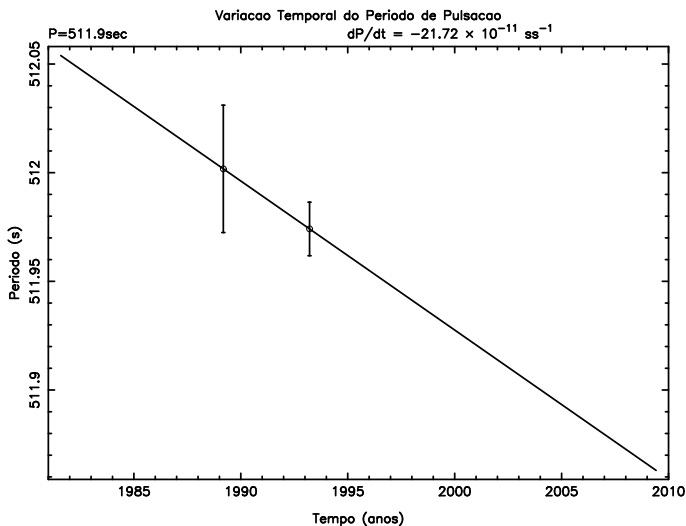
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	493.566068 ± 493.764000
1985.224274	493.749041 ± 0.001320
1989.182302	493.798374 ± 0.002425
1993.214050	493.794131 ± 0.002508

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 488.06706 ± 0.39319  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 9.1019 ± 4.6751  
 Variância..... 0.00019



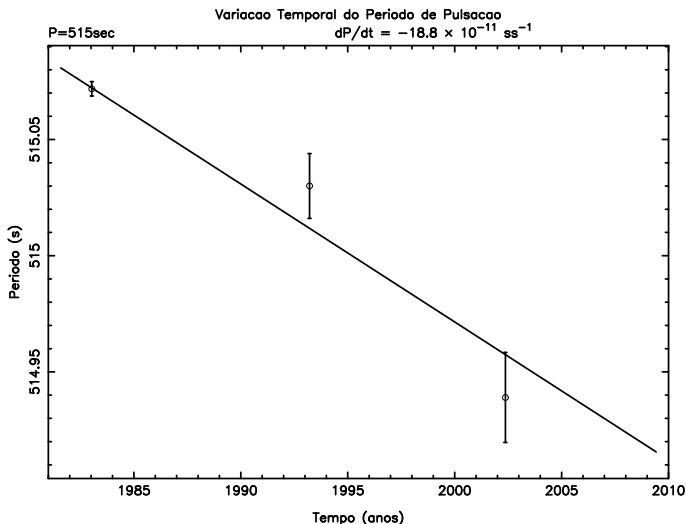
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	494.904297 ± 0.001156
1989.182302	494.863280 ± 0.017839
1993.214050	494.804626 ± 0.009422

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 513.75021 ± 1.76450  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -30.1150 ± 2.8883  
 Variância..... 0.00031



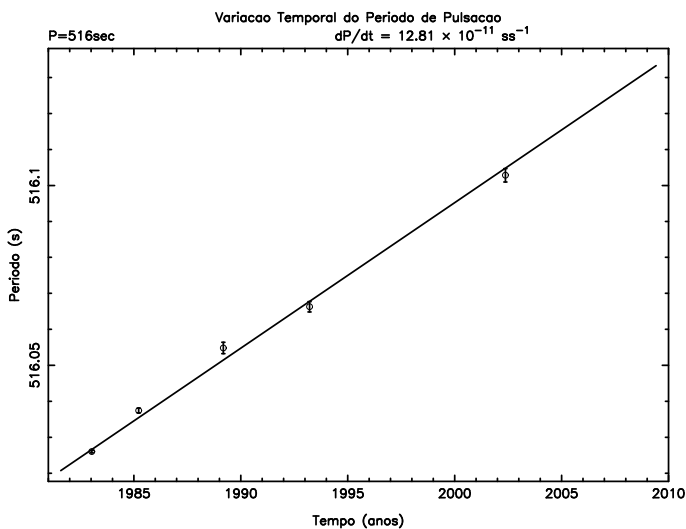
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	512.001751 ± 0.029321
1993.214050	511.974107 ± 0.012304

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 525.64094 ± 15.71564  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -21.7275 ± 24.9923  
 Variância..... 0.00000



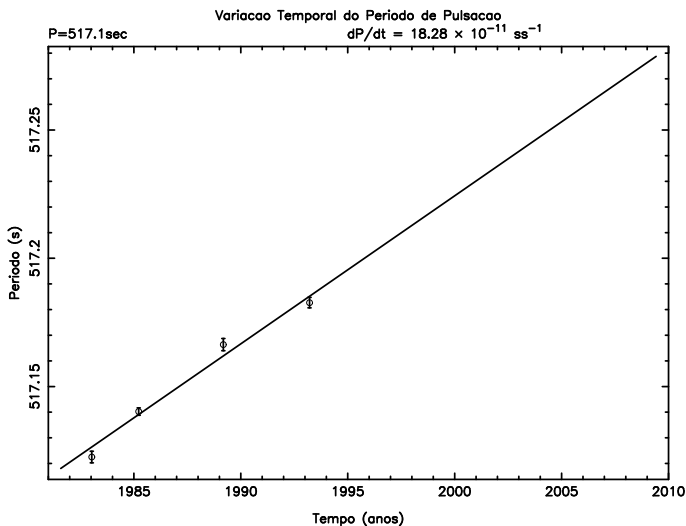
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	515.071794 ± 0.003093
1993.214050	515.029999 ± 515.295703
2002.371352	514.745524 ± 514.938988

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 526.84333 ± 1.65682  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -18.8098 ± 4.2901  
 Variância..... 0.00067



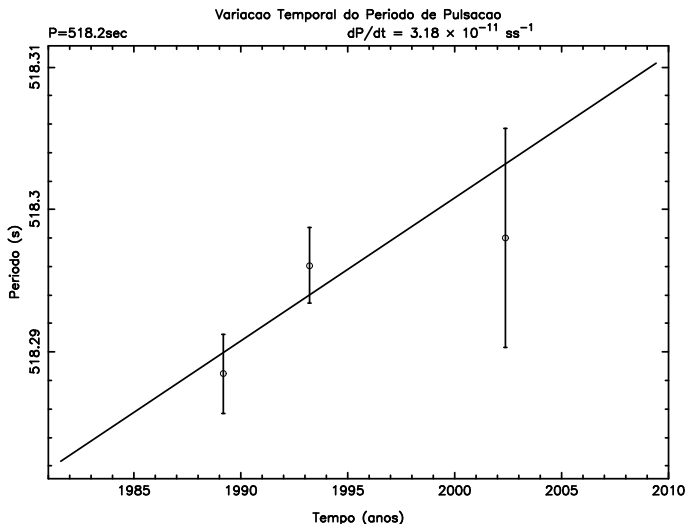
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	516.025971 ± 0.000359
1985.224274	516.037413 ± 0.000650
1989.182302	516.054808 ± 0.001586
1993.214050	516.066255 ± 0.001429
2002.371352	516.102832 ± 516.214163

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 508.00627 ± 0.15901  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 12.8161 ± 0.6343  
 Variância..... 0.00001



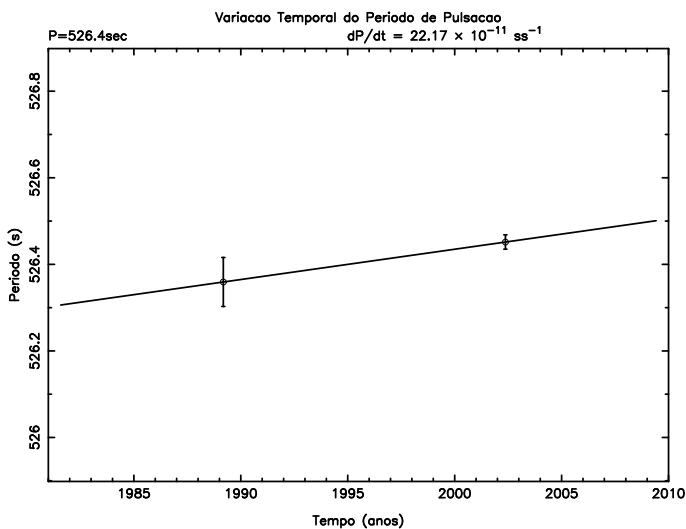
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	517.122487 ± 517.429175
1985.224274	517.140244 ± 0.001440
1989.182302	517.166333 ± 0.002383
1993.214050	517.009346 ± 517.182705

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 505.68367 ± 0.51721  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 18.2850 ± 1.7106  
 Variância..... 0.00002



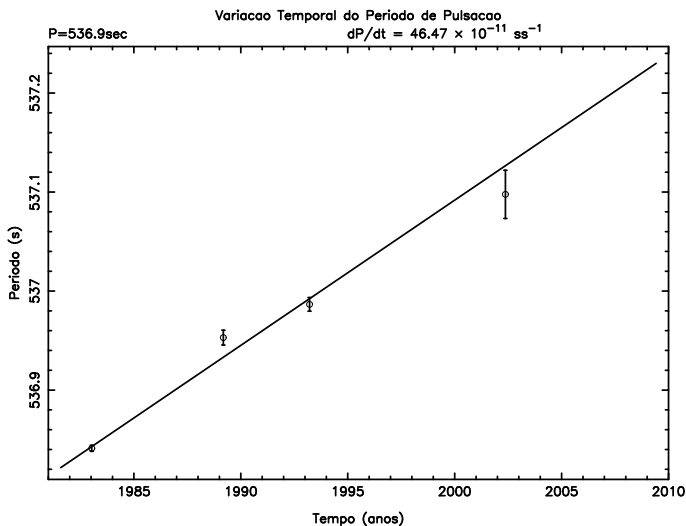
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	518.288424 ± 0.002764
1993.214050	518.296047 ± 0.002682
2002.371352	518.297979 ± 0.007708

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 516.29364 ± 1.14007  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 3.1801 ± 2.1045  
 Variância..... 0.00003



Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	526.359181 ± 0.056574
2002.371352	526.451492 ± 0.016518

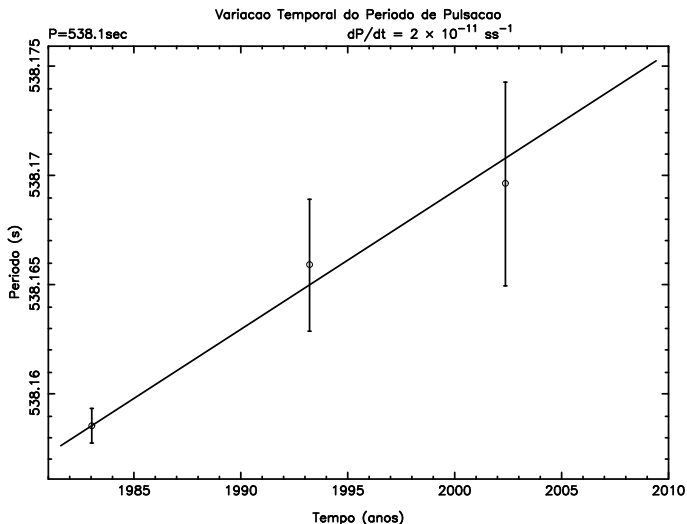
$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 512.43674 ± 8.94316  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 22.1787 ± 14.1601  
 Variância..... 0.00000



Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	536.841214 ± 0.003062
1989.182302	536.952969 ± 0.007486
1993.214050	536.822283 ± 536.986549
2002.371352	537.008058 ± 537.097655

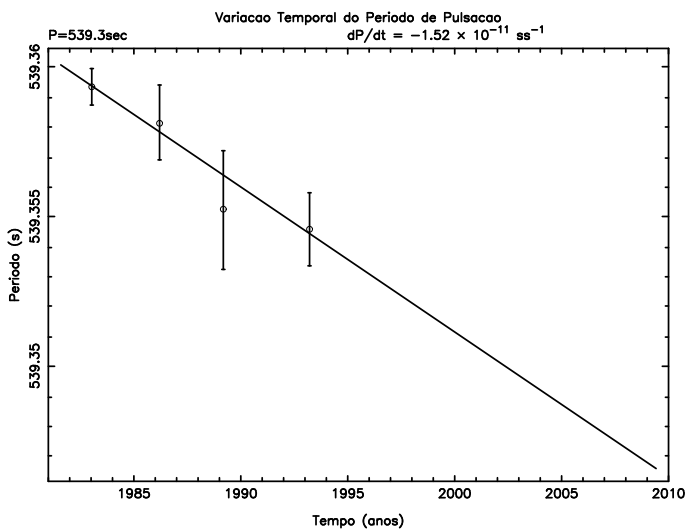
$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 507.75974 ± 1.22397  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 46.4738 ± 4.2427  
 Variância..... 0.00063





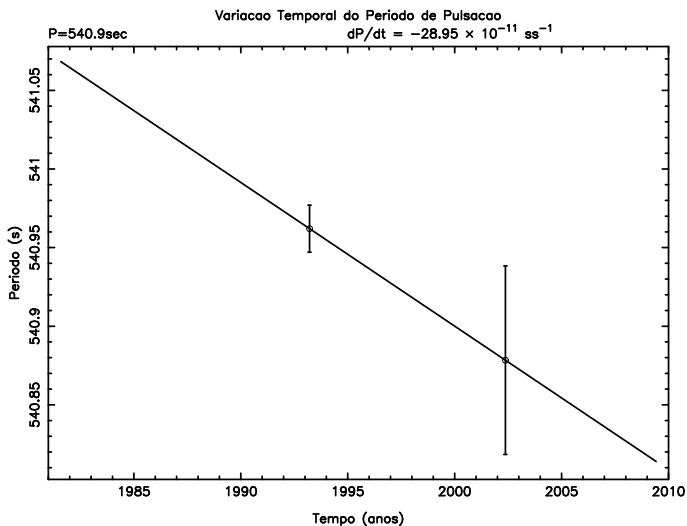
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	538.158482 ± 0.000793
1993.214050	538.165871 ± 0.003017
2002.371352	538.169592 ± 0.004669

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 536.90393 ± 0.38730  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 2.0048 ± 0.2435  
 Variância..... 0.00000



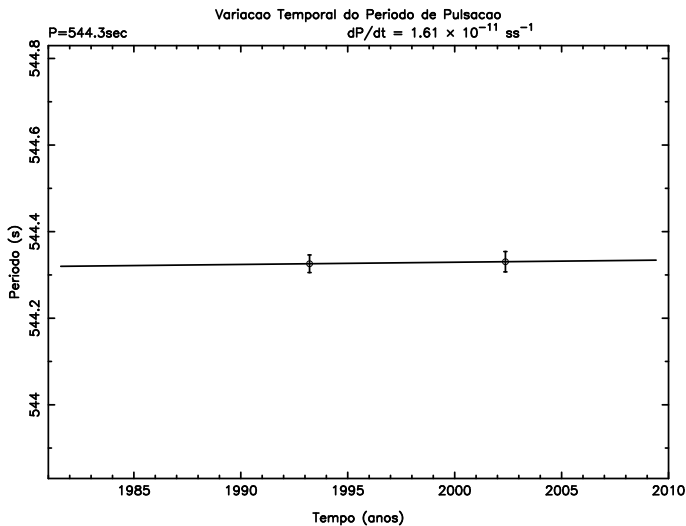
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	539.359306 ± 0.000601
1985.224274	539.403042 ± 0.000971
1989.182302	539.355195 ± 0.001982
1993.214050	539.354561 ± 0.001199

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 540.31656 ± 0.25216  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -1.5296 ± 0.1861  
 Variância..... 0.00000



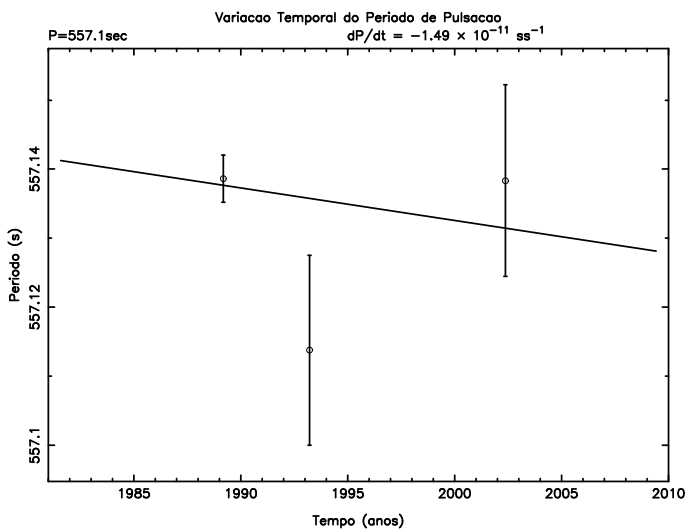
Tempo (anos)	Período (s)
1993.214050	540.962044 ± 0.014962
2002.371352	540.878379 ± 0.059977

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 559.17279 ± 13.45847  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -28.9514 ± 21.3905  
 Variância..... 0.00000



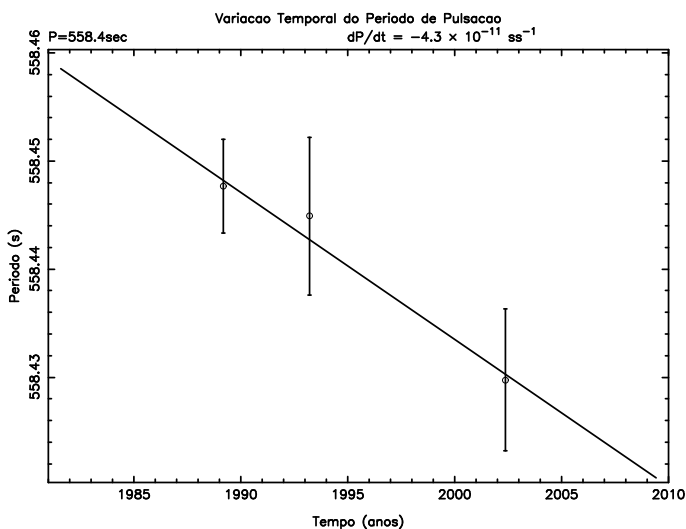
Tempo (anos)	Período (s)
1993.214050	544.325794 ± 0.020423
2002.371352	544.330472 ± 544.579285

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 543.30746 ± 6.79640  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 1.6189 ± 10.7836  
 Variância..... 0.00000



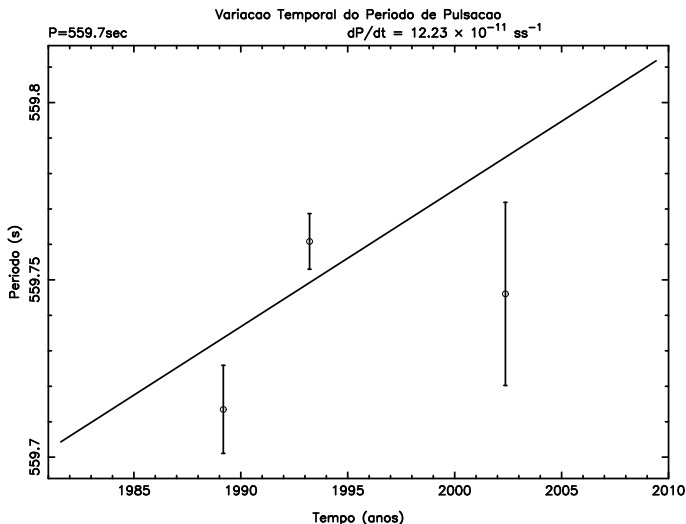
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	557.138625 ± 0.003434
1993.214050	557.113747 ± 0.013750
2002.371352	557.138324 ± 557.394185

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 558.07499 ± 2.09365  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -1.4932 ± 5.6646  
 Variância..... 0.00053



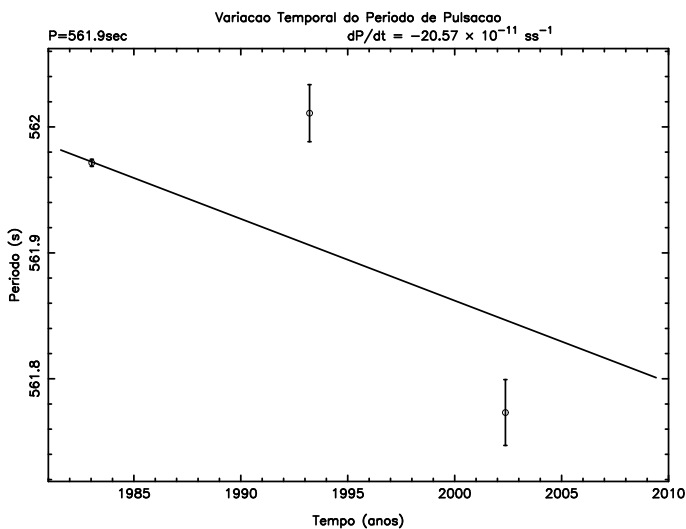
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	558.447616 ± 0.004335
1993.214050	558.444856 ± 558.979163
2002.371352	558.366562 ± 558.429697

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 561.14980 ± 1.18965  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -4.3038 ± 0.6329  
 Variância..... 0.00001



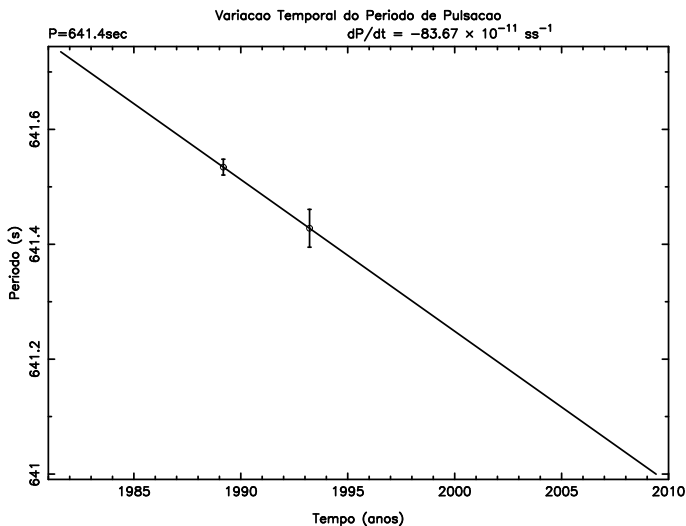
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	559.713468 ± 0.012405
1993.214050	559.760815 ± 0.007836
2002.371352	559.746054 ± 0.025824

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 552.05496 ± 4.20125  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 12.2323 ± 17.7546  
 Variância..... 0.00203



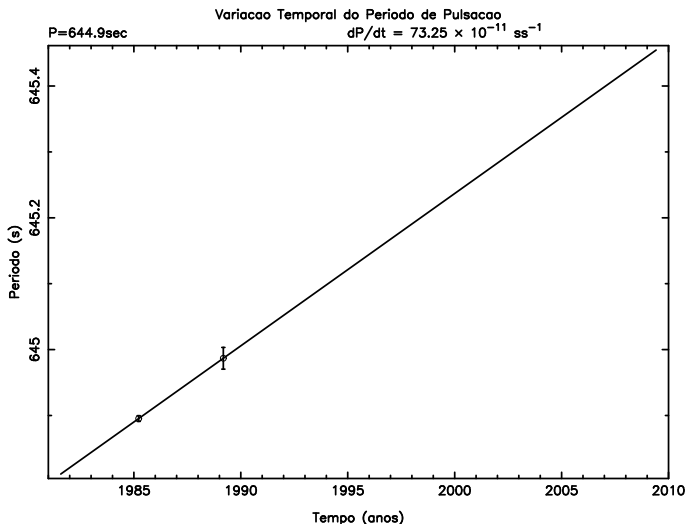
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	561.971446 ± 0.002833
1993.214050	562.010919 ± 0.022644
2002.371352	561.773193 ± 0.026133

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 574.84528 ± 2.31868  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -20.5707 ± 20.0860  
 Variância..... 0.01638



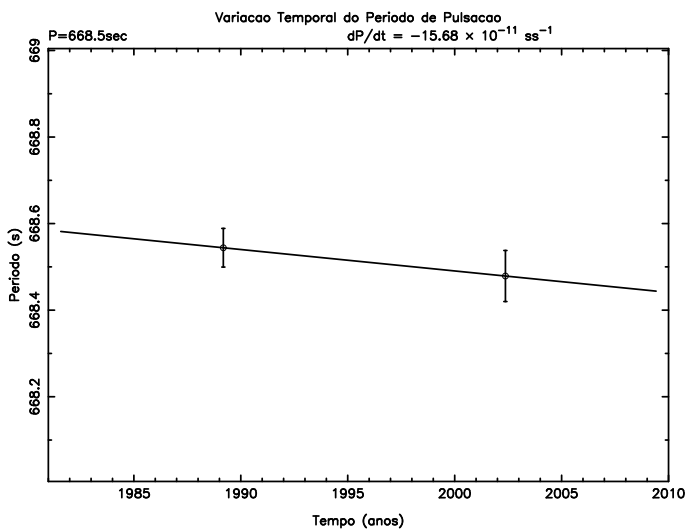
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	641.534312 ± 0.013752
1993.214050	641.427845 ± 0.032940

$P_0$  (sec) (em ano=0.0)..... 694.06291 ± 17.61658  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -83.6791 ± 28.0551  
 Variância..... 0.00000



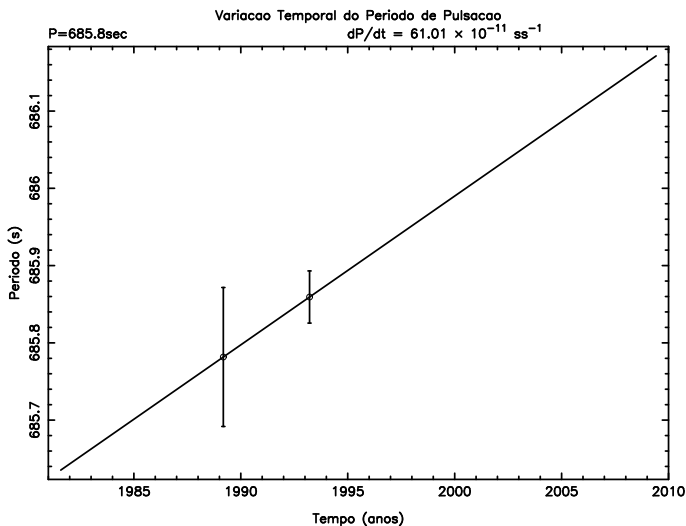
Tempo (anos)	Período (s)
1985.224274	644.895331 ± 0.004318
1989.182302	644.986828 ± 0.016481

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 599.00362 ± 8.54674  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 73.2522 ± 13.6405  
 Variança..... 0.00000



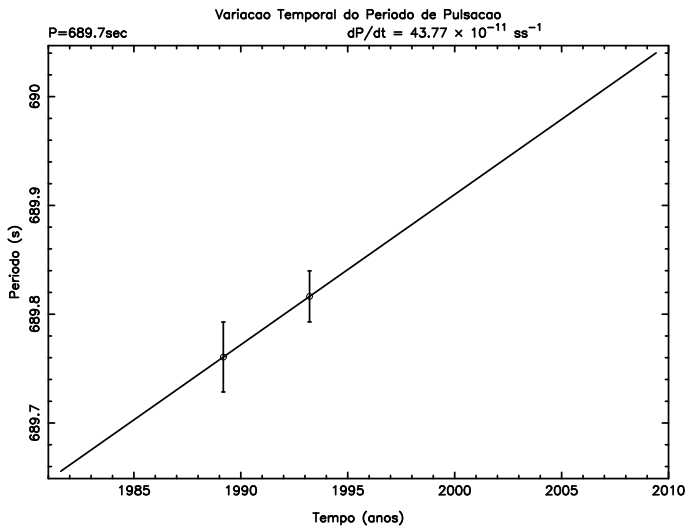
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	668.544148 ± 0.044649
2002.371352	668.478882 ± 0.059015

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 678.38767 ± 11.18808  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -15.6809 ± 17.7798  
 Variança..... 0.00000



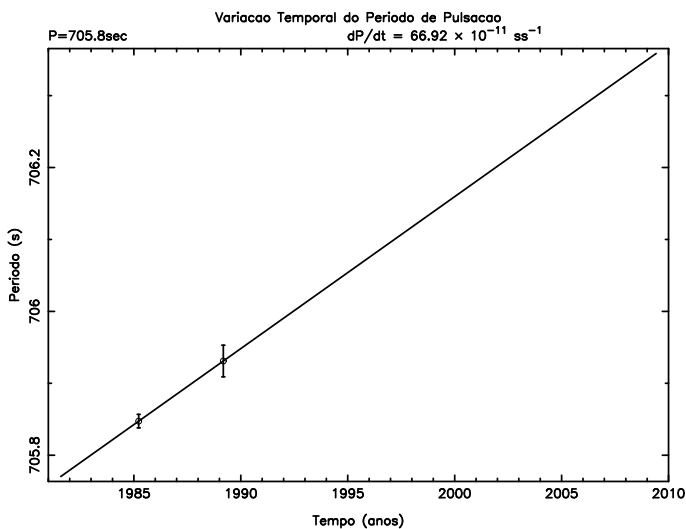
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	685.781679 ± 0.089917
1993.214050	685.859315 ± 0.033749

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 647.47769 ± 47.46941  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 61.0191 ± 75.4856  
 Variança..... 0.00000



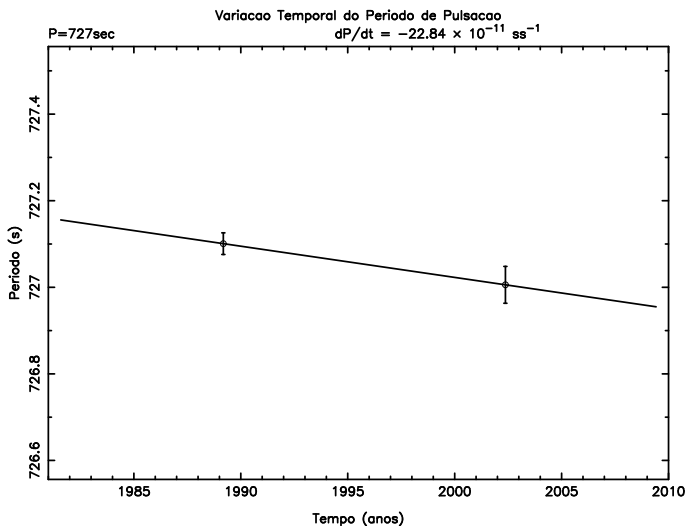
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	689.760630 ± 0.032140
1993.214050	689.816323 ± 0.023429

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 662.28266 ± 19.64923  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 43.7730 ± 31.2602  
 Variância..... 0.00000



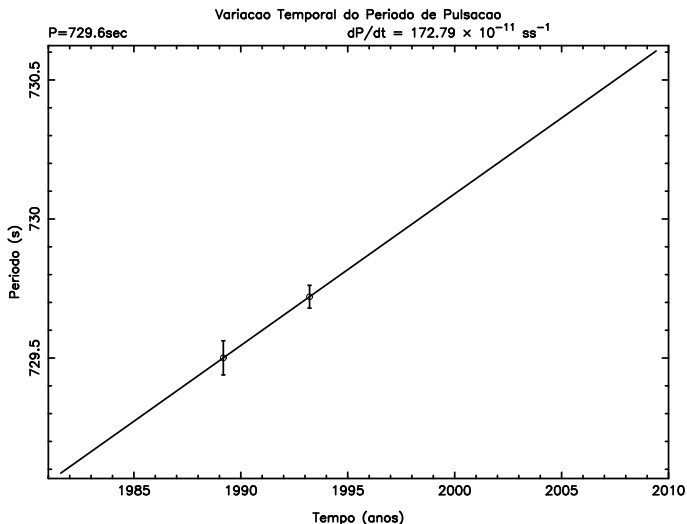
Tempo (anos)	Período (s)
1985.224274	705.847439 ± 0.009436
1989.182302	705.931036 ± 0.021974

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 663.91809 ± 11.99829  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 66.9275 ± 19.1457  
 Variância..... 0.00000



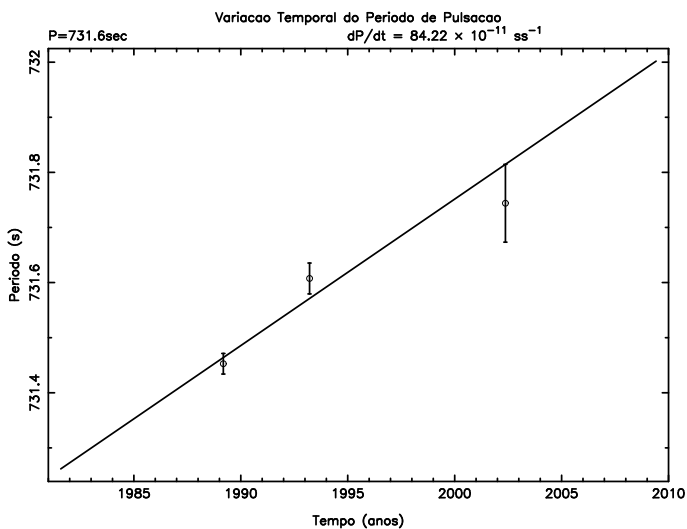
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	727.100798 ± 0.025032
2002.371352	727.005713 ± 0.042522

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 741.44170 ± 7.45462  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -22.8454 ± 11.8551  
 Variância..... 0.00000



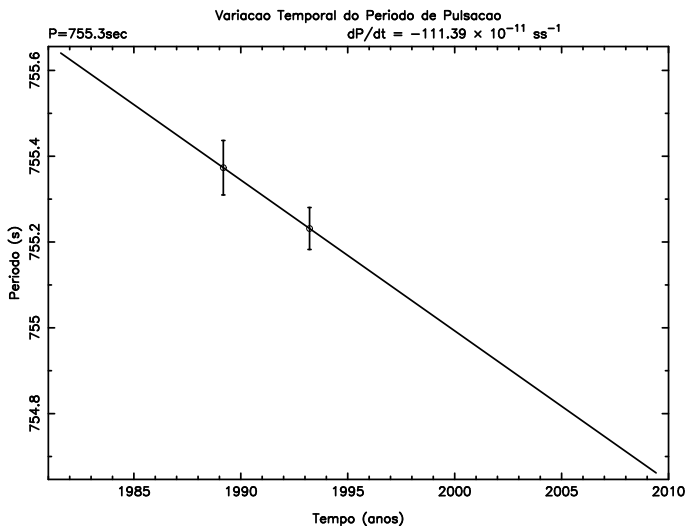
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	729.500659 ± 0.061392
1993.214050	729.720507 ± 0.040906

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 621.03230 ± 36.44893  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 172.7923 ± 57.9825  
 Variância..... 0.00000



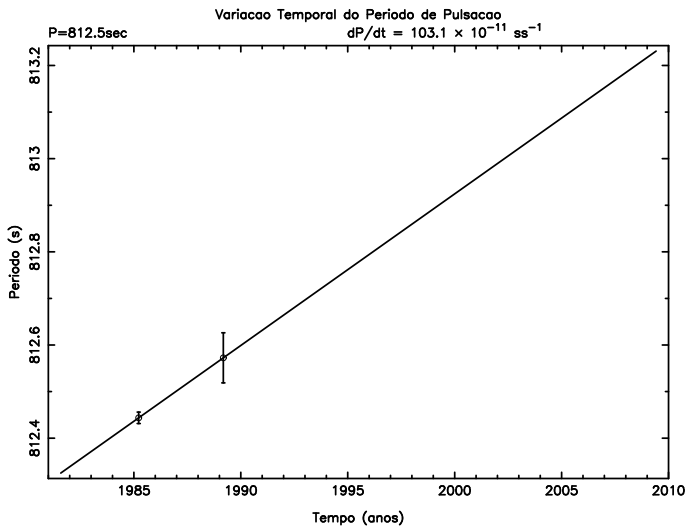
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	731.452732 ± 0.018711
1993.214050	731.607467 ± 0.028017
2002.371352	731.743954 ± 0.070626

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 678.59507 ± 9.76115  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 84.2213 ± 27.0926  
 Variância..... 0.00643



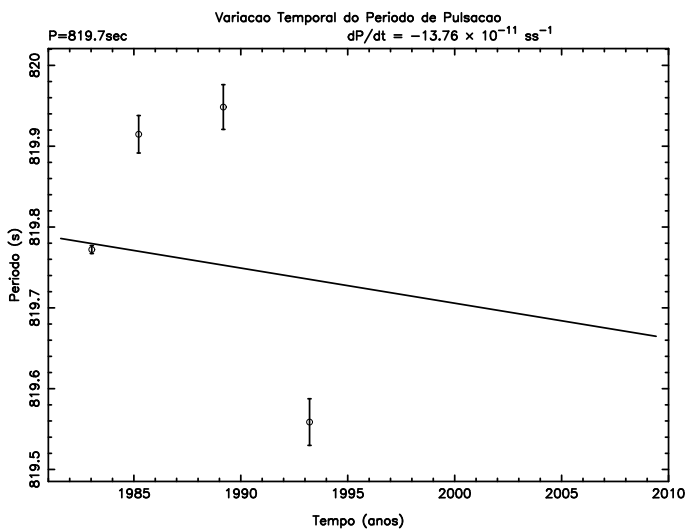
Tempo (anos)	Período (s)
1989.182302	755.373221 ± 0.063550
1993.214050	755.231490 ± 0.048879

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 825.30015 ± 39.60621  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -111.3951 ± 63.0132  
 Variância..... 0.00000



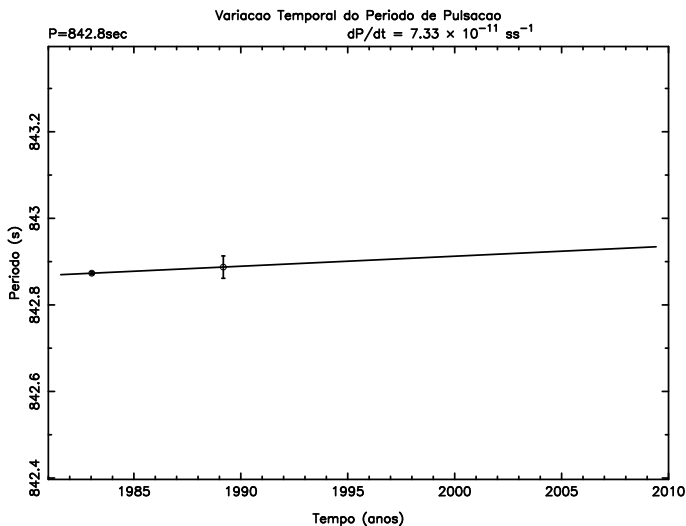
Tempo (anos)	Período (s)
1985.224274	812.443693 ± 0.012359
1989.182302	812.572472 ± 0.053740

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 747.85202 ± 27.66073  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 103.1010 ± 44.1476  
 Variância..... 0.00000



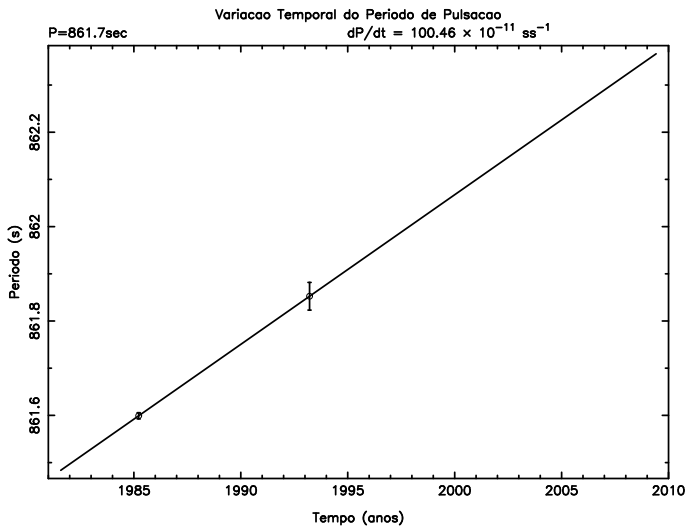
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	819.772009 ± 0.004880
1985.224274	819.914745 ± 0.023202
1989.182302	819.948427 ± 0.027698
1993.214050	819.558649 ± 0.028858

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 828.39303 ± 4.81113  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... -13.7642 ± 61.6413  
 Variância..... 0.04525



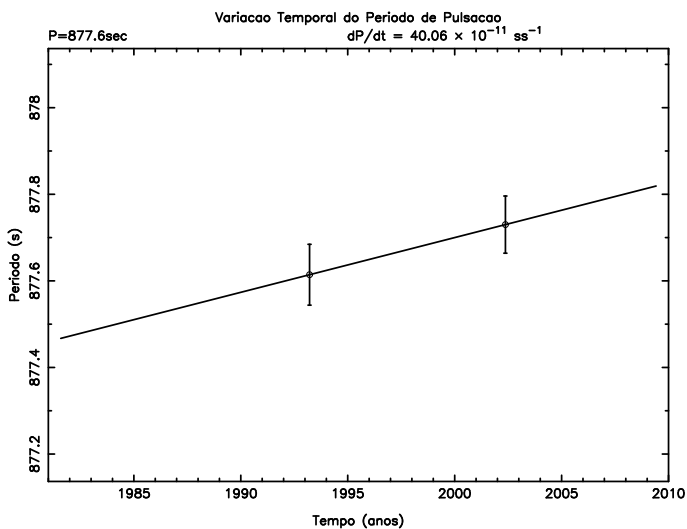
Tempo (anos)	Período (s)
1983.031820	842.873105 ± 0.003243
1985.224274	842.688837 ± 0.009292
1989.182302	842.887342 ± 0.025827

$P_o$  (sec) (em ano=0.0)..... 838.28271 ± 8.39273  
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s)..... 7.3353 ± 13.4106  
 Variância..... 0.00000



Tempo (anos)	Período (s)
1985.224274	$861.599097 \pm 861.677504$
1993.214050	$861.852395 \pm 0.029347$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $798.66187 \pm 7.47488$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $100.4602 \pm 11.9291$   
 Variância..... 0.00000



Tempo (anos)	Período (s)
1993.214050	$877.614176 \pm 0.070280$
2002.371352	$877.729968 \pm 0.066030$

$P_o$  (sec) (em ano=0.0).....  $852.41028 \pm 21.04104$   
 $dP/dt$  ( $\times 10^{-11}$  s/s).....  $40.0691 \pm 33.3695$   
 Variância..... 0.00000



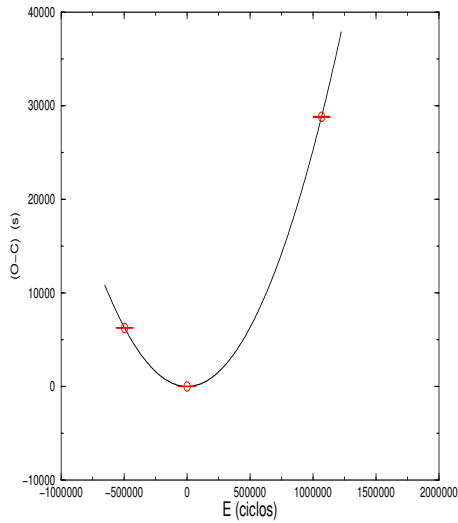
## 8.9 Aplicando o Diagrama (O-C) à PG 1159-035

A Tab.8.3 lista todos os modos para os quais existem dois ou mais pontos. Para esses modos aplicamos a técnica do diagrama (O-C). Os resultados podem ser vistos nos gráficos a seguir e resumidos na Tab.8.4.

Período (s)	1983	1985	1989	1993	2002	$\dot{P}$ - Medida direta $\times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$	$\ell$	$m$	$k$
390.3	✓		✓		✓	$+10.43 \pm 0.72$	1	0	14
400.0			✓	✓	✓	$-6.83 \pm 4.95$	2	0	28
414.3			✓	✓	✓	$-14.60 \pm 13.28$	2	-1	28
415.5		✓	✓		✓	$+58.05 \pm 2.30$	2	-2	28
422.5	✓			✓	✓	$+6.69 \pm 0.61$	2	+2	30
427.5			✓	✓	✓	$-35.30 \pm 2.25$	2	-2	30
436.5			✓	✓	✓	$1.46 \pm 20.96$	2	+1	31
439.2			✓	✓	✓	$-7.49 \pm 14.26$	2	-1	31
440.6			✓	✓	✓	$-48.84 \pm 6.80$	2	-2	31
451.5	✓	✓	✓	✓	✓	$0.08 \pm 1.65$	1	+1	17
452.4	✓	✓	✓	✓	✓	$2.54 \pm 0.68$	1	0	17
453.2	✓		✓	✓	✓	$5.42 \pm 2.61$	1	-1	17
493.7	✓	✓	✓	✓		$9.10 \pm 4.68$	1	+1	19
494.8	✓		✓	✓		$-30.12 \pm 2.89$	1	0	19
515.0	✓	✓		✓	✓	$-18.80 \pm 4.29$	2	-1	37
516.0	✓	✓	✓	✓	✓	$12.82 \pm 0.63$	1	+1	20
517.1	✓	✓	✓	✓		$18.28 \pm 1.71$	1	0	20
518.2			✓	✓	✓	$3.18 \pm 2.10$	1	-1	20
536.9	✓		✓	✓	✓	$46.47 \pm 4.24$	1	+1	21
538.1	✓		✓		✓	$2.00 \pm 0.24$	1	0	21
539.3	✓	✓	✓	✓		$-1.53 \pm 0.19$	1	-1	21
557.1			✓	✓	✓	$-1.49 \pm 5.66$	1	+1	22
558.4			✓	✓	✓	$-4.30 \pm 0.63$	1	0	22
559.7			✓	✓	✓	$12.23 \pm 17.75$	1	-1	22
561.9	✓			✓	✓	$-20.57 \pm 20.09$	2	0	41
731.6			✓	✓	✓	$84.22 \pm 27.09$	1	-1	30

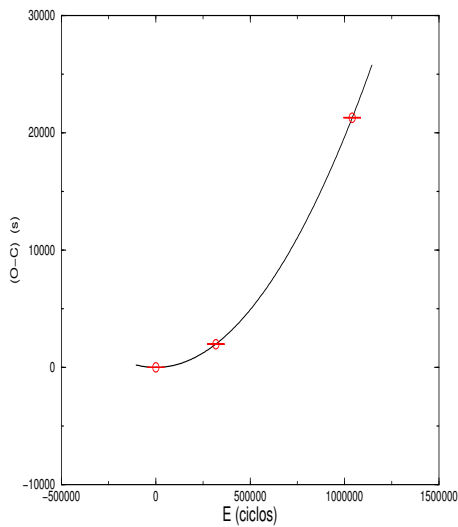
**Tab. 8.3:** *Períodos com 3 ou mais pontos, aos quais foi aplicada a técnica do diagrama (O-C).*

### 8.10 Diagramas (O-C)



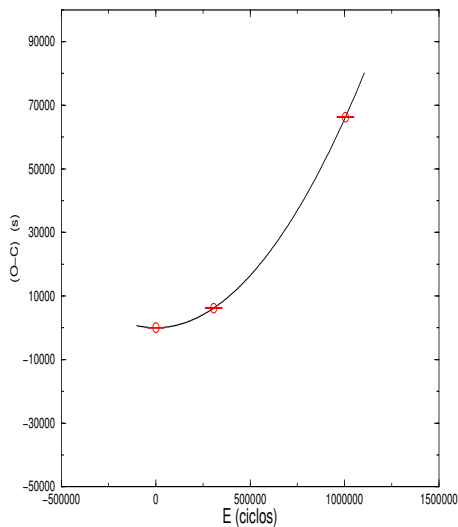
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.336394 \pm 0.000000$	$390.278495 \pm 0.000000$	$12.978 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
-497339	$6264.02 \pm 13.92$
0	$0.00 \pm 7.37$
1066382	$28798.77 \pm 51.04$



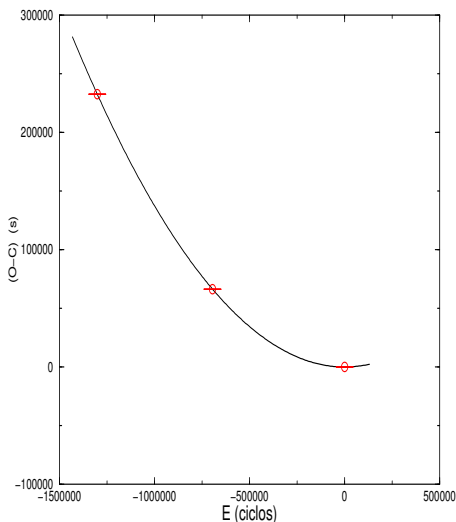
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.338684 \pm 0.000000$	$400.071759 \pm 0.000000$	$9.832 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
0	$0.00 \pm 5.53$
318017	$1989.08 \pm 10.58$
1040296	$21284.64 \pm 19.05$



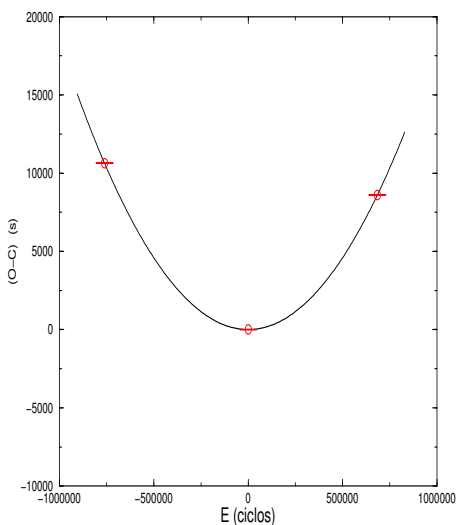
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.338724 \pm 0.000000$	$414.421498 \pm 0.000000$	$31.716 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
0	$0.00 \pm 12.94$
306996	$6193.69 \pm 15.35$
1004166	$66266.66 \pm 17.33$



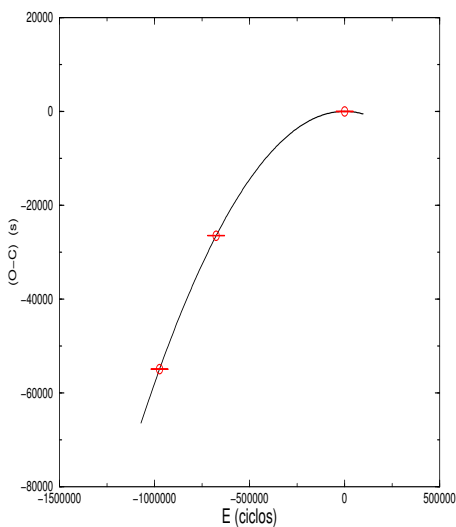
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	12410.632926 $\pm$ 0.000000	415.704568 $\pm$ 0.000000	65.970 $\pm$ 0.000	0.00000

E	(O-C)
-1302254	232535.93 $\pm$ 32.22
-695323	66293.64 $\pm$ 7.26
0	0.00 $\pm$ 23.51



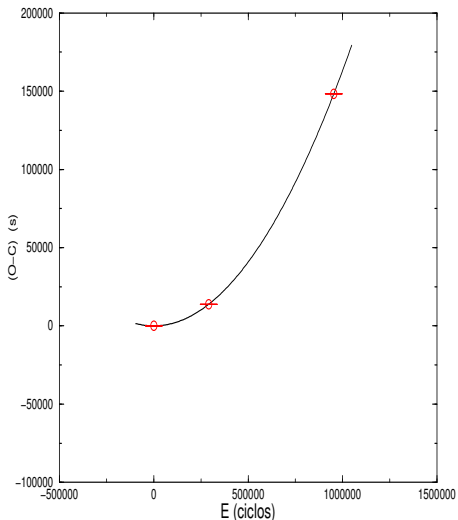
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	9065.926299 $\pm$ 0.000000	422.553900 $\pm$ 0.000000	8.707 $\pm$ 0.000	0.00000

E	(O-C)
-760463	10637.85 $\pm$ 11.33
0	0.00 $\pm$ 4.84
683876	8603.05 $\pm$ 8.29



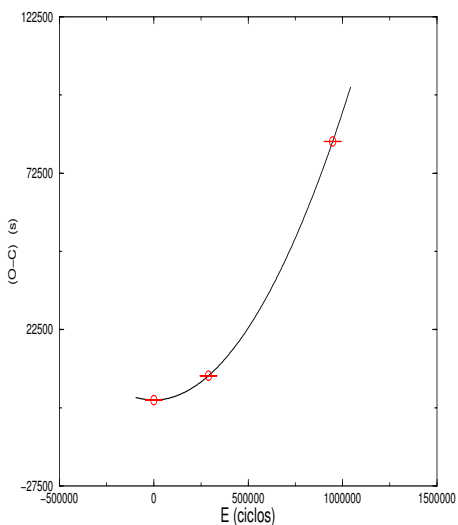
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	12410.634684 $\pm$ 0.000000	427.253816 $\pm$ 0.000000	-27.090 $\pm$ 0.000	0.00000

E	(O-C)
-974034	-54904.74 $\pm$ 4.42
-676310	-26469.96 $\pm$ 10.48
0	0.00 $\pm$ 76.26



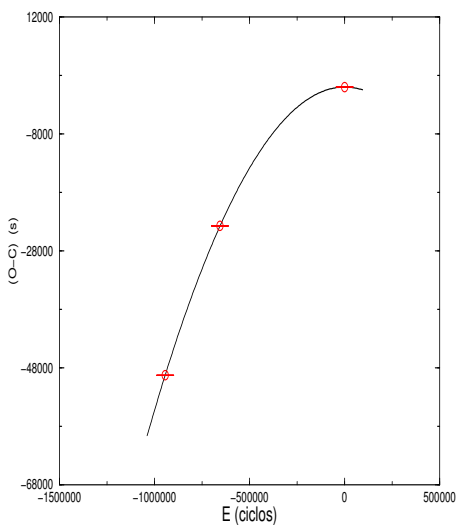
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.335248 \pm 0.000000$	$436.581604 \pm 0.000000$	$74.778 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
0	$0.00 \pm 20.83$
291396	$13860.50 \pm 12.62$
953010	$148254.06 \pm 32.67$



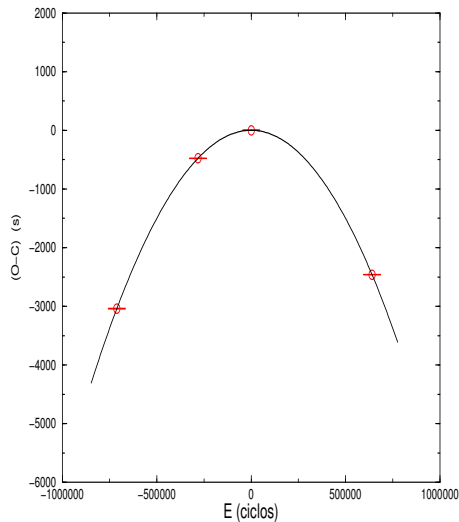
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.337618 \pm 0.000000$	$439.327437 \pm 0.000000$	$41.927 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
0	$0.00 \pm 17.33$
289588	$7723.54 \pm 14.92$
947202	$82630.55 \pm 21.51$



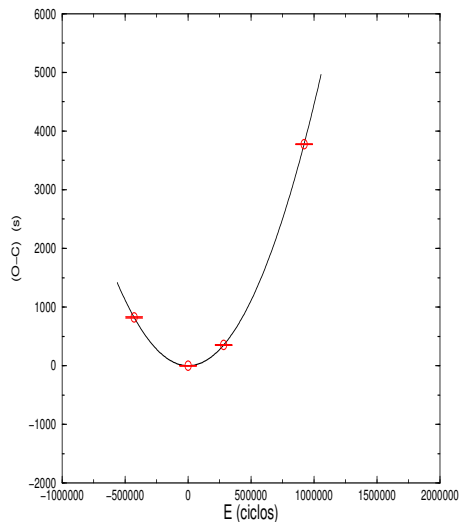
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$12410.637321 \pm 0.000000$	$440.439731 \pm 0.000000$	$-25.050 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
-944886	$-49251.20 \pm 8.00$
-656070	$-23744.24 \pm 7.30$
0	$0.00 \pm 17.74$



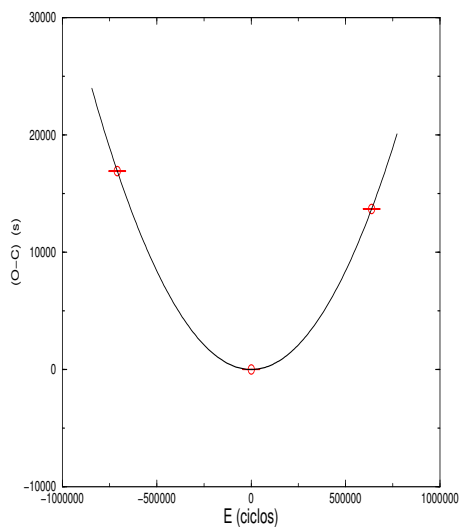
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	9065.927138 $\pm$ 0.000010	451.604840 $\pm$ 0.000002	-2.661 $\pm$ 0.002	0.18112
2	9065.927138 $\pm$ 0.000010	451.601354 $\pm$ 0.000002	-5.621 $\pm$ 0.002	0.18186
3	9065.927137 $\pm$ 0.000011	451.603692 $\pm$ 0.000002	0.575 $\pm$ 0.002	0.20882
4	9065.927137 $\pm$ 0.000011	451.600206 $\pm$ 0.000002	-2.385 $\pm$ 0.002	0.22128
5	9065.927137 $\pm$ 0.000011	451.596720 $\pm$ 0.000002	-5.345 $\pm$ 0.002	0.22312
6	9065.927137 $\pm$ 0.000011	451.602545 $\pm$ 0.000002	3.811 $\pm$ 0.002	0.22526
7	9065.927137 $\pm$ 0.000012	451.599059 $\pm$ 0.000002	0.851 $\pm$ 0.002	0.25062
8	9065.927136 $\pm$ 0.000012	451.595573 $\pm$ 0.000003	-2.109 $\pm$ 0.002	0.26537
9	9065.927136 $\pm$ 0.000012	451.597912 $\pm$ 0.000003	4.087 $\pm$ 0.002	0.26738
10	9065.927156 $\pm$ 0.000016	451.596012 $\pm$ 0.000003	-1.438 $\pm$ 0.003	0.43515

E	(O-C)
-711514	-3040.72 $\pm$ 7.16
-281731	-477.63 $\pm$ 2.43
0	0.61 $\pm$ 2.51
639907	-2460.99 $\pm$ 4.18



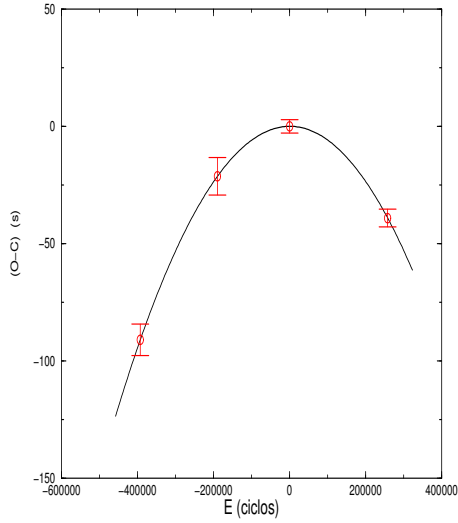
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	7593.336440 $\pm$ 0.000000	452.433809 $\pm$ 0.000000	1.972 $\pm$ 0.000	0.00000
2	7593.336441 $\pm$ 0.000001	452.428806 $\pm$ 0.000000	2.250 $\pm$ 0.000	0.00112
3	7593.336441 $\pm$ 0.000002	452.423802 $\pm$ 0.000001	2.527 $\pm$ 0.000	0.00433
4	7593.336428 $\pm$ 0.000021	452.423666 $\pm$ 0.000011	0.230 $\pm$ 0.005	0.60580
5	7593.336427 $\pm$ 0.000022	452.428388 $\pm$ 0.000011	2.923 $\pm$ 0.006	0.68474
6	7593.336453 $\pm$ 0.000022	452.433946 $\pm$ 0.000012	4.270 $\pm$ 0.006	0.70815
7	7593.336426 $\pm$ 0.000023	452.433391 $\pm$ 0.000012	2.646 $\pm$ 0.006	0.73909
8	7593.336454 $\pm$ 0.000023	452.434227 $\pm$ 0.000012	1.299 $\pm$ 0.006	0.74229
9	7593.336454 $\pm$ 0.000023	452.428942 $\pm$ 0.000012	4.547 $\pm$ 0.006	0.76262
10	7593.336454 $\pm$ 0.000024	452.429223 $\pm$ 0.000012	1.576 $\pm$ 0.006	0.79944

E	(O-C)
-429002	821.23 $\pm$ 11.74
0	0.00 $\pm$ 2.68
281216	352.88 $\pm$ 3.64
919938	3776.23 $\pm$ 4.95



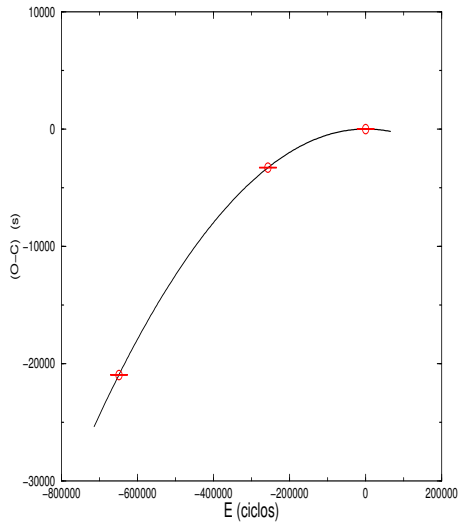
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	9065.928417 $\pm$ 0.000000	453.266803 $\pm$ 0.000000	14.851 $\pm$ 0.000	0.00000

E	(O-C)
-708949	16916.70 $\pm$ 21.76
0	0.00 $\pm$ 6.29
637525	13679.81 $\pm$ 9.15



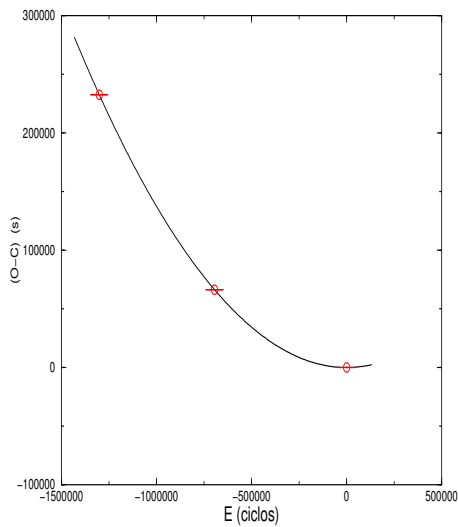
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	7593.338198 $\pm$ 0.000000	493.796473 $\pm$ 0.000000	-0.238 $\pm$ 0.000	0.00000
2	7593.338197 $\pm$ 0.000002	493.794981 $\pm$ 0.000001	-2.107 $\pm$ 0.001	0.00399
3	7593.338199 $\pm$ 0.000002	493.797965 $\pm$ 0.000001	-2.584 $\pm$ 0.001	0.00432
4	7593.338197 $\pm$ 0.000004	493.793489 $\pm$ 0.000001	-4.453 $\pm$ 0.002	0.01608
5	7593.338199 $\pm$ 0.000004	493.799457 $\pm$ 0.000001	-4.930 $\pm$ 0.002	0.01716
6	7593.338196 $\pm$ 0.000006	493.791997 $\pm$ 0.000002	6.799 $\pm$ 0.003	0.03606
7	7593.338200 $\pm$ 0.000006	493.800949 $\pm$ 0.000002	-7.276 $\pm$ 0.004	0.03872
8	7593.338196 $\pm$ 0.000008	493.790505 $\pm$ 0.000003	9.145 $\pm$ 0.005	0.06374
9	7593.338192 $\pm$ 0.000021	493.805557 $\pm$ 0.000008	24.653 $\pm$ 0.012	0.46469
10	7593.338207 $\pm$ 0.000029	493.789994 $\pm$ 0.000010	18.976 $\pm$ 0.017	0.86985

E	(O-C)
-393066	-90.98 $\pm$ 6.78
-190472	-21.36 $\pm$ 8.01
0	0.00 $\pm$ 2.82
257661	-39.09 $\pm$ 3.77



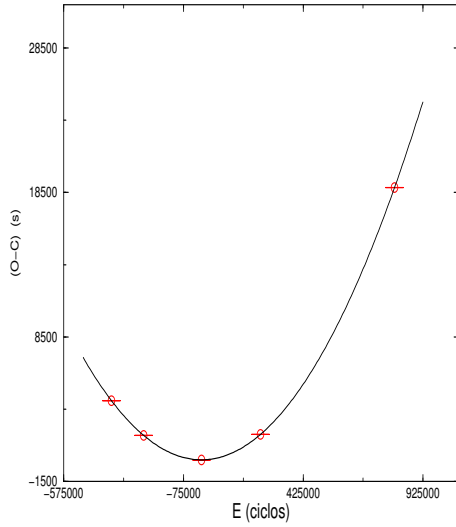
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	9065.929728 $\pm$ 0.000000	494.772611 $\pm$ 0.000000	-20.085 $\pm$ 0.000	0.00000

E	(O-C)
-649400	-20953.89 $\pm$ 14.83
-257146	-3285.49 $\pm$ 20.54
0	0.00 $\pm$ 14.15



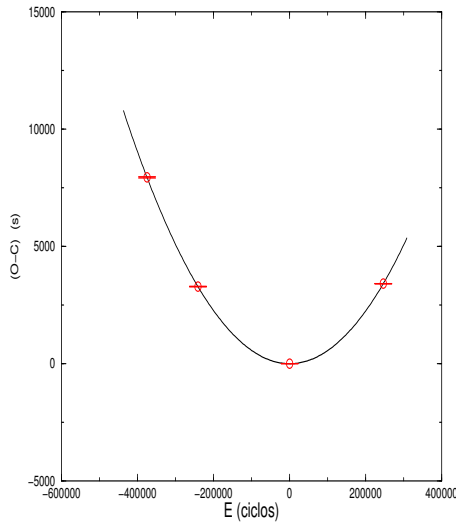
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	12410.632926 $\pm$ 0.000000	415.704568 $\pm$ 0.000000	65.970 $\pm$ 0.000	0.00000

E	(O-C)
-1302254	232535.93 $\pm$ 32.22
-695323	66293.64 $\pm$ 7.26
0	0.00 $\pm$ 23.51



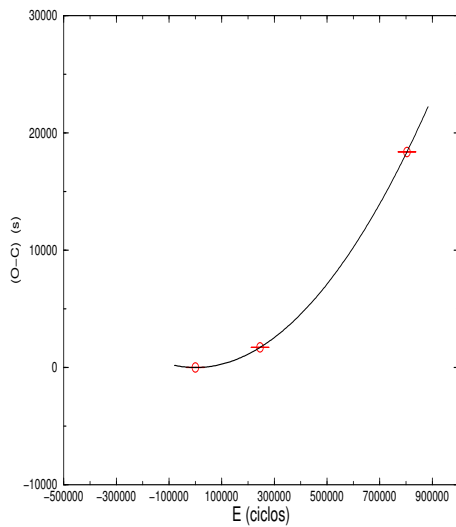
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	7593.339044 $\pm$ 0.000020	516.054216 $\pm$ 0.000008	11.222 $\pm$ 0.004	1.63511
2	7593.338994 $\pm$ 0.000060	516.053142 $\pm$ 0.000024	12.970 $\pm$ 0.013	15.07107
3	7593.339181 $\pm$ 0.000095	516.050020 $\pm$ 0.000039	11.081 $\pm$ 0.021	37.98125
4	7593.338943 $\pm$ 0.000101	516.052068 $\pm$ 0.000041	14.719 $\pm$ 0.022	42.88001
5	7593.339134 $\pm$ 0.000120	516.056193 $\pm$ 0.000049	14.574 $\pm$ 0.026	60.93053
6	7593.338907 $\pm$ 0.000134	516.058413 $\pm$ 0.000055	11.364 $\pm$ 0.029	75.71718
7	7593.339043 $\pm$ 0.000136	516.059619 $\pm$ 0.000056	12.623 $\pm$ 0.029	78.18805
8	7593.339184 $\pm$ 0.000146	516.057268 $\pm$ 0.000060	12.826 $\pm$ 0.032	90.38955
9	7593.338993 $\pm$ 0.000151	516.058545 $\pm$ 0.000062	14.371 $\pm$ 0.033	96.34531
10	7593.339130 $\pm$ 0.000170	516.054348 $\pm$ 0.000069	14.230 $\pm$ 0.037	121.47783

E	(O-C)
-376121	4095.25 $\pm$ 4.42
-242044	1691.02 $\pm$ 5.68
0	1.98 $\pm$ 1.76
246544	1757.98 $\pm$ 2.07
806496	18834.52 $\pm$ 2.28



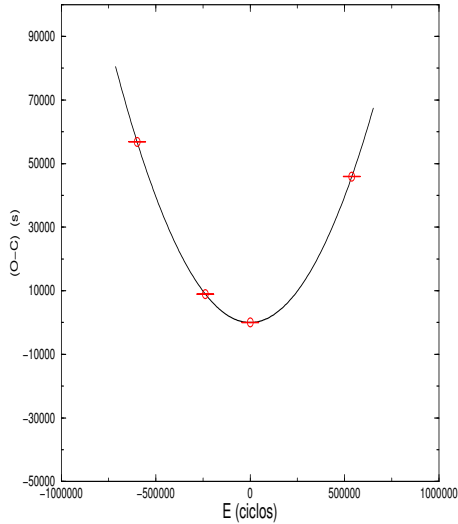
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	7593.337702 $\pm$ 0.000000	517.171652 $\pm$ 0.000000	21.790 $\pm$ 0.000	0.00000
2	7593.337702 $\pm$ 0.000004	517.160038 $\pm$ 0.000003	16.914 $\pm$ 0.004	0.01593
3	7593.337702 $\pm$ 0.000004	517.161123 $\pm$ 0.000003	15.208 $\pm$ 0.005	0.02057
4	7593.337701 $\pm$ 0.000008	517.170567 $\pm$ 0.000006	23.496 $\pm$ 0.009	0.07175
5	7593.337703 $\pm$ 0.000008	517.172737 $\pm$ 0.000006	20.083 $\pm$ 0.009	0.07324
6	7593.337701 $\pm$ 0.000012	517.158953 $\pm$ 0.000008	18.621 $\pm$ 0.014	0.15662
7	7593.337703 $\pm$ 0.000013	517.162208 $\pm$ 0.000009	13.502 $\pm$ 0.014	0.17076
8	7593.337704 $\pm$ 0.000016	517.173822 $\pm$ 0.000011	18.377 $\pm$ 0.019	0.29167
9	7593.337698 $\pm$ 0.000039	517.166422 $\pm$ 0.000027	13.490 $\pm$ 0.045	1.65449
10	7593.337706 $\pm$ 0.000044	517.166352 $\pm$ 0.000030	23.508 $\pm$ 0.050	2.04947

E	(O-C)
-375315	7936.85 $\pm$ 27.89
-241524	3286.85 $\pm$ 12.55
0	0.00 $\pm$ 2.65
246008	3410.01 $\pm$ 2.90



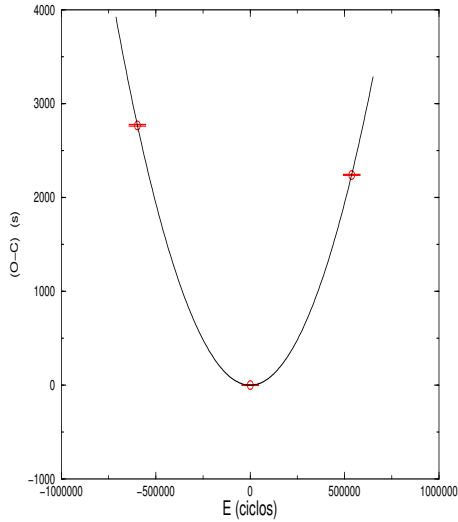
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	7593.339605 $\pm$ 0.000000	518.297169 $\pm$ 0.000000	10.997 $\pm$ 0.000	0.00000

E	(O-C)
0	0.00 $\pm$ 3.05
245477	1717.25 $\pm$ 3.89
803007	18375.96 $\pm$ 9.27



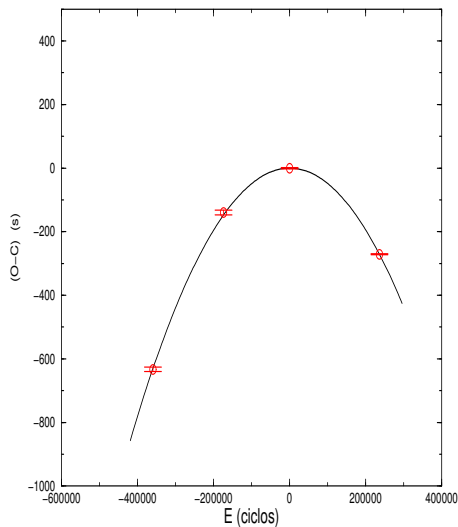
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	9065.932331 $\pm$ 0.000000	537.007239 $\pm$ 0.000000	59.090 $\pm$ 0.000	0.00002
2	9065.932330 $\pm$ 0.000001	537.000688 $\pm$ 0.000000	59.479 $\pm$ 0.000	0.00015
3	9065.932330 $\pm$ 0.000002	536.994136 $\pm$ 0.000001	59.868 $\pm$ 0.001	0.00042
4	9065.932329 $\pm$ 0.000003	536.987586 $\pm$ 0.000001	60.257 $\pm$ 0.001	0.00082
5	9065.932333 $\pm$ 0.000003	536.965167 $\pm$ 0.000001	35.703 $\pm$ 0.001	0.00085
6	9065.932329 $\pm$ 0.000003	536.981035 $\pm$ 0.000001	60.646 $\pm$ 0.001	0.00134
7	9065.932333 $\pm$ 0.000004	536.971718 $\pm$ 0.000001	35.313 $\pm$ 0.001	0.00156
8	9065.932334 $\pm$ 0.000005	536.978268 $\pm$ 0.000002	34.923 $\pm$ 0.001	0.00248
9	9065.932328 $\pm$ 0.000005	537.008858 $\pm$ 0.000002	54.514 $\pm$ 0.002	0.00306
10	9065.932335 $\pm$ 0.000006	536.984819 $\pm$ 0.000002	34.534 $\pm$ 0.002	0.00362

E	(O-C)
-598471	56826.31 $\pm$ 36.17
-236945	8907.52 $\pm$ 7.97
0	0.02 $\pm$ 9.50
538049	45931.00 $\pm$ 28.37



#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	9065.931914 $\pm$ 0.000000	538.155826 $\pm$ 0.000000	2.886 $\pm$ 0.000	0.00000

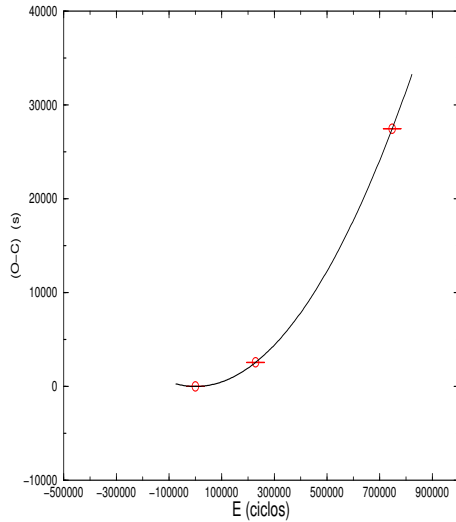
E	(O-C)
-597094	2769.01 $\pm$ 9.44
0	0.00 $\pm$ 4.21
536982	2239.54 $\pm$ 5.48



#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	7593.337395 $\pm$ 0.000027	539.349798 $\pm$ 0.000010	-1.806 $\pm$ 0.018	1.32394
2	7593.337404 $\pm$ 0.000066	539.356310 $\pm$ 0.000025	-1.266 $\pm$ 0.044	7.70382
3	7593.337368 $\pm$ 0.000090	539.358898 $\pm$ 0.000034	-1.717 $\pm$ 0.061	14.46255
4	7593.337332 $\pm$ 0.000246	539.361487 $\pm$ 0.000092	-2.168 $\pm$ 0.165	107.77689
5	7593.337278 $\pm$ 0.000480	539.349271 $\pm$ 0.000181	-0.900 $\pm$ 0.323	411.40169
6	7593.337521 $\pm$ 0.000573	539.356837 $\pm$ 0.000216	-2.172 $\pm$ 0.386	586.10595
7	7593.337243 $\pm$ 0.000636	539.351859 $\pm$ 0.000239	-1.351 $\pm$ 0.428	721.54743
8	7593.337557 $\pm$ 0.000729	539.354248 $\pm$ 0.000274	-1.721 $\pm$ 0.491	947.89928
9	7593.337216 $\pm$ 0.000754	539.360960 $\pm$ 0.000283	-1.262 $\pm$ 0.507	1012.23931
10	7593.337566 $\pm$ 0.000768	539.360760 $\pm$ 0.000289	-1.181 $\pm$ 0.517	1050.61989

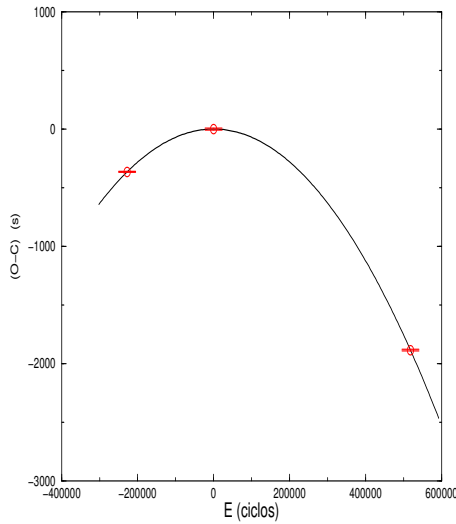
E	(O-C)
-359866	-633.05 $\pm$ 7.14
-174384	-139.73 $\pm$ 7.82
0	-0.54 $\pm$ 2.10
235899	-270.94 $\pm$ 1.65





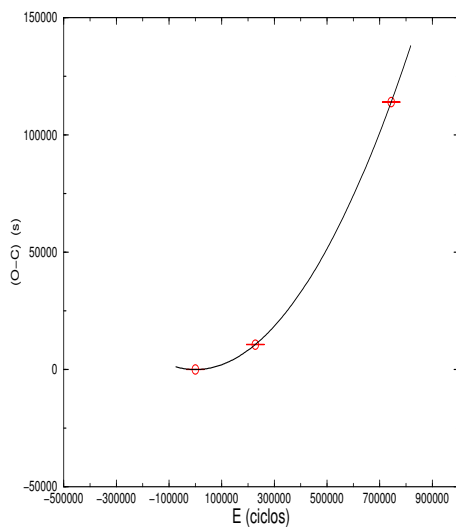
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.340813 \pm 0.000000$	$557.149473 \pm 0.000000$	$17.664 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
0	$0.00 \pm 3.54$
228357	$2566.03 \pm 18.52$
746993	$27457.82 \pm 15.75$



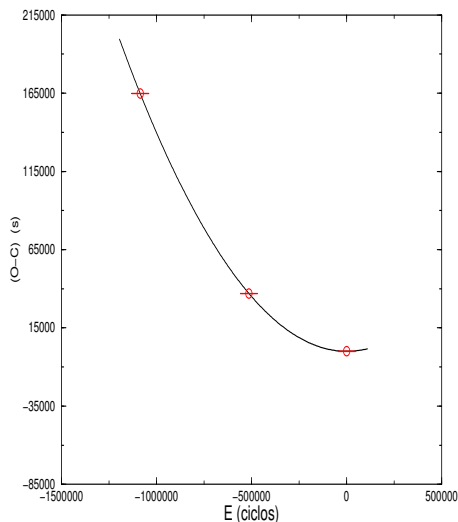
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$9065.931614 \pm 0.000000$	$558.421616 \pm 0.000000$	$-2.520 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
-227842	$-365.21 \pm 4.46$
0	$0.00 \pm 9.39$
517502	$-1884.09 \pm 7.44$



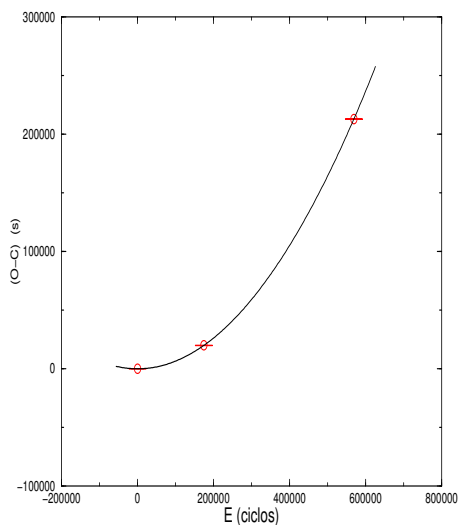
#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.335068 \pm 0.000000$	$559.756061 \pm 0.000000$	$73.714 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
0	$0.00 \pm 12.71$
227280	$10657.14 \pm 10.60$
743361	$114003.42 \pm 29.19$



#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$12410.637998 \pm 0.000000$	$561.682395 \pm 0.000000$	$49.698 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
-1086867	$164873.81 \pm 31.99$
-514561	$36954.95 \pm 29.57$
0	$0.00 \pm 29.57$



#	$T_{max}$ (BCT)	P (s)	$\dot{P}$ ( $\times 10^{-11}$ s/s)	$\chi^2$
1	$7593.340527 \pm 0.000000$	$731.516734 \pm 0.000000$	$179.921 \pm 0.000$	0.00000

E	(O-C)
0	$0.00 \pm 14.87$
173902	$19901.47 \pm 28.58$
568684	$212822.74 \pm 61.10$

A maior parte dos ajustes de  $(O - C)$  envolvendo apenas 3 pontos leva à resultados inconsistentes com as medidas diretas, devendo ser descartados. A Tab.8.5 lista os resultados consistentes. Ao todo, são sete modos, listados na Tab.8.5, somente um deles com 3 pontos.

## 8.11 Resultados do Ajuste Não-Linear para a PG 1159-035

O ajuste não linear assume que a amplitude da senóide é constante e que o período está variando de forma linear. O algoritmo usado parte de valores iniciais e converge para o menor mínimo local que encontrar. Se o valor inicial não for suficientemente próximo da solução real, o algoritmo pode convergir para outro mínimo, que não o real. Para contornar este problema, usamos um grade cúbica de valores iniciais para  $T_o$ ,  $P_o$  e  $\dot{P}$ , centrada na melhor estimativa que temos. Cada dimensão da grade cobre um intervalo de  $\pm 4\sigma$  em relação ao ponto central. Procedendo assim, podemos cobrir todas as possíveis convergências e escolher o mínimo global do ajuste.

Período (s)	1983	1985	1989	1993	2002	$\dot{P}$ - Medida direta $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}$ - (O-C) $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\ell$	$m$	$k$	Obs.
390.3	✓		✓		✓	$+10.43 \pm 0.72$	$+12.978 \pm 0.000$	1	0	14	ok ?
400.0			✓	✓	✓	$-6.83 \pm 4.95$	$+9.832 \pm 0.000$	2	0	28	$> 3\sigma$
414.3			✓	✓	✓	$-14.60 \pm 13.28$	$+31.716 \pm 0.000$	2	-1	28	$> 3\sigma$
415.5		✓	✓		✓	$+58.05 \pm 2.30$	$+65.970 \pm 0.000$	2	-2	28	$> 3\sigma$
422.5	✓			✓	✓	$+6.69 \pm 0.61$	$+8.707 \pm 0.000$	2	+2	30	ok ?
427.5			✓	✓	✓	$-35.30 \pm 2.25$	$-27.090 \pm 0.000$	2	-2	30	$> 3\sigma$
436.5			✓	✓	✓	$1.46 \pm 20.96$	$+74.778 \pm 0.000$	2	+1	31	$> 3\sigma$
439.2			✓	✓	✓	$-7.49 \pm 14.26$	$+41.927 \pm 0.000$	2	-1	31	$> 3\sigma$
440.6			✓	✓	✓	$-48.84 \pm 6.80$	$-25.050 \pm 0.000$	2	-2	31	$> 3\sigma$
451.5	✓	✓	✓	✓	✓	$0.08 \pm 1.65$	$-2.661 \pm 0.002$	1	+1	17	ok
452.4	✓	✓	✓	✓	✓	$2.54 \pm 0.68$	$1.972 \pm 0.001$	1	0	17	ok
453.2	✓		✓	✓	✓	$5.42 \pm 2.61$	$14.851 \pm 0.000$	1	-1	17	$> 3\sigma$
493.7	✓	✓	✓	✓		$9.10 \pm 4.68$	$-0.238 \pm 0.001$	1	+1	19	ok
494.8	✓		✓	✓		$-30.12 \pm 2.89$	$-20.085 \pm 0.000$	1	0	19	$> 3\sigma$
515.0	✓	✓		✓	✓	$-18.80 \pm 4.29$	$+65.970 \pm 0.000$	2	-1	37	$> 3\sigma$
516.0	✓	✓	✓	✓	✓	$12.82 \pm 0.63$	$+11.222 \pm 0.004$	1	+1	20	ok
517.1	✓	✓	✓	✓		$18.28 \pm 1.71$	$+21.790 \pm 0.001$	1	0	20	ok
518.2			✓	✓	✓	$3.18 \pm 2.10$	$+10.997 \pm 0.000$	1	-1	20	$\dot{P}$ muito grande.
536.9	✓		✓	✓	✓	$46.47 \pm 4.24$	$+59.090 \pm 0.001$	1	+1	21	$> 3\sigma$
538.1	✓		✓	✓	✓	$2.00 \pm 0.24$	$+2.886 \pm 0.000$	1	0	21	$> 3\sigma$
539.3	✓	✓	✓	✓		$-1.53 \pm 0.19$	$-1.806 \pm 0.018$	1	-1	21	ok
557.1			✓	✓	✓	$-1.49 \pm 5.66$	$+17.664 \pm 0.000$	1	+1	22	$> 3\sigma$
558.4			✓	✓	✓	$-4.30 \pm 0.63$	$-2.520 \pm 0.000$	1	0	22	ok
559.7			✓	✓	✓	$12.23 \pm 17.75$	$+73.714 \pm 0.000$	1	-1	22	$> 3\sigma$
561.9	✓			✓	✓	$-20.57 \pm 20.09$	$+49.698 \pm 0.000$	2	0	41	$> 3\sigma$
731.6			✓	✓	✓	$84.22 \pm 27.09$	$179.921 \pm 0.000$	1	-1	30	$\dot{P}$ muito grande.

**Tab. 8.4:** Resultados da técnica do diagrama (O-C) para todos os modos com 3 ou mais pontos.

A segurança com que se pode usar o ajuste não-linear depende da topologia do espaço de parâmetros. Quando a amplitude não é muito constante, os mínimos não serão muito profundos e a possibilidade de erros será maior. Por esta razão, às vezes, é preferível fazer o ajuste apenas nos dados dos anos em que o sinal está presente do que no conjunto total de dados. Os valores obtidos para os sete modos mais estáveis estão listados na Tab.8.6.

## 8.12 Comparando os Resultados

O valor médio de  $\dot{P}/P$  na Tab.8.6 é:

$$\langle \dot{P}/P \rangle = 7.71 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1} \quad (8.31)$$

Este valor está fora do intervalo de valores para  $\langle \dot{P}/P \rangle$  mostrado na Fig.8.1. Os modelos com massa de  $0.59 M_{\odot}$  possuem  $\langle \dot{P}/P \rangle$  entre 1 e  $3 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ . Além disso, os  $\dot{P}$  dos modos não-amarrados são negativos em sua maioria, contradizendo a previsão teórica.

Conforme foi visto no capítulo anterior, os modos amarrados para a PG 1159-035 (ver Tab.7.6) são 452.4s, 538.1s, 668.1s, 773.7s e 883.6s. Desses cinco modos, conseguimos estimar o  $\dot{P}$  de um deles:

Período (s)	1983	1985	1989	1993	2002	$\dot{P}$ - Medida direta $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}$ - (O-C) $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\ell$	$m$	$k$
451.5	✓	✓	✓	✓	✓	$0.08 \pm 1.65$	$-2.661 \pm 0.002$	1	+1	17
452.4	✓	✓	✓	✓	✓	$2.54 \pm 0.68$	$1.972 \pm 0.001$	1	0	17
493.7	✓	✓	✓	✓		$9.10 \pm 4.68$	$-0.238 \pm 0.001$	1	+1	19
516.0	✓	✓	✓	✓	✓	$12.82 \pm 0.63$	$+11.222 \pm 0.004$	1	+1	20
517.1	✓	✓	✓	✓		$18.28 \pm 1.71$	$+21.790 \pm 0.001$	1	0	20
539.3	✓	✓	✓	✓		$-1.53 \pm 0.19$	$-1.806 \pm 0.018$	1	-1	21
558.4			✓	✓	✓	$-4.30 \pm 0.63$	$-2.520 \pm 0.000$	1	0	22

**Tab. 8.5:** Modos para os quais o resultado obtido pela técnica do diagrama (O-C) é consistente com a medida direta de  $\dot{P}$ .

Período (s)	83	85	89	93	02	$\dot{P}$ - MD $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}$ - (O-C) $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}$ - nls $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}/P$ $\times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$	$\ell$	$m$	$k$
451.5	✓	✓	✓	✓	✓	$0.08 \pm 1.65$	$-2.661 \pm 0.002$	$-2.6572 \pm 0.0008$	-5.90	1	+1	17
452.4	✓	✓	✓	✓	✓	$2.54 \pm 0.68$	$1.972 \pm 0.001$	$+1.9707 \pm 0.0004$	+4.36	1	0	17
493.7	✓	✓	✓	✓		$9.10 \pm 4.68$	$-0.238 \pm 0.001$	$-0.2375 \pm 0.0005$	-0.48	1	+1	19
516.0	✓	✓	✓	✓	✓	$12.82 \pm 0.63$	$+11.222 \pm 0.004$	$+11.2258 \pm 0.0001$	+21.75	1	+1	20
517.1	✓	✓	✓	✓		$18.28 \pm 1.71$	$+21.790 \pm 0.001$	$+21.7998 \pm 0.0005$	+42.14	1	0	20
539.3	✓	✓	✓	✓		$-1.53 \pm 0.19$	$-1.806 \pm 0.018$	$-1.7665 \pm 0.0010$	-3.35	1	-1	21
558.4			✓	✓	✓	$-4.30 \pm 0.63$	$-2.520 \pm 0.000$	$-2.5201 \pm 0.0004$	-4.51	1	0	22

**Tab. 8.6:** Modos para os quais o resultado obtido pela técnica do diagrama (O-C) e pelo ajuste não-linear (nls) são consistentes com a medida direta (MD) de  $\dot{P}$ .

$$P = 452.4 \text{ s} \quad (k = 17) \quad \rightarrow \quad \dot{P}/P = +4.94 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$$

Este modo está próximo de um ponto de mínimo para  $\dot{P}/P$ , de acordo com o que se esperaria para um modo amarrado. Contudo, vemos a presença de valores negativos para  $\dot{P}/P$  para modos que não são amarrados.

Se assumirmos que o menor valor encontrado para  $|\dot{P}|$ , o  $\dot{P}$  do período de 451.5 s,  $\dot{P} = (0.08 \pm 1.65) \times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$ , a escala de tempo de pulsação, será  $\tau \simeq 1.4 \times 10^6$  anos. Este valor se aproxima do valor predito pelos modelos,  $\sim 10^6$  anos.

\* \* \* \* \*

## Capítulo 9

# A ESTRELA G117-B15A

### 9.1 Introdução

A estrela G117-B15A<sup>1</sup> é uma anã-branca pertencente à classe espectral das DAs. As estrelas DAs cujas temperaturas efetivas caem entre 12 000  $K$  e 10 500 (Bergeron *et al.* 2004) estão dentro da faixa de instabilidade sendo variáveis (DAVs). As DAs variáveis, ou DAVs, também são conhecidas como ZZ Ceti, das quais, a G117-B15A é um exemplo.

A G117-B15A forma um sistema de mesmo movimento próprio com uma outra estrela anã, de classe espectral dM2e, a G117-B15B (ou EG 1965a) (Kotak *et al.* 2003). A separação entre as duas companheiras é grande suficiente para que a evolução da G117-B15-A não tenha sido afetada pela presença da companheira, permitindo que a G117-B15A seja tratada como se fosse uma estrela isolada (Richer & Ulrich 1974).

A variabilidade da G117-B15A foi descoberta por Richer & Ulrich (1974) quando fizeram o periodograma das curvas de luz da estrela obtidas em maio de 1973. O periodograma acusou a presença de um período da ordem  $\simeq 1311$  s, com um erro bastante grande, devido a baixa resolução do periodograma. Desde então, a estrela G117-B15-A passou a ser sistematicamente observada até os dias de hoje.

McGraw & Robinson (1976) usaram os telescópios de 2.1  $m$  e 92  $cm$  do McDonald Observatory para fazer a fotometria de dois canais da G117-B15A, em dezembro de 1974 e março de 1975. A análise dos dados fotométricos mostrou que a variabilidade da estrela G117-B15A era mais regular do que qualquer outra estrela variável conhecida até então. Sua curva de luz era quase sinusoidal, com uma amplitude (pico-a-pico) constante de cerca de 0.08  $mag$ . O periodograma da curva de luz mostrava um pico com grande amplitude com uma frequência de 4630  $\mu Hz$ , correspondente ao período de 216 s. A ausência de harmônicos detectáveis confirmava a natureza puramente sinusoidal do sinal.

O periodograma também mostrava a presença de dois picos bem menores: um em 3250  $\mu Hz$  e outro em 3680  $\mu Hz$ , correspondendo à períodos de 308 s e 272 s, respectivamente. O periodograma da G117-B15A era similar em simplicidade à estrela R548 (ZZ Ceti), uma outra DA, também variável, estudada anteriormente por Lasker & Hesser (1971).

Para explicar a variabilidade da G117-B15A, McGraw & Robinson (1976) consideraram três possíveis explicações: (1) a variabilidade podia ser gerada pela passagem de um planeta

---

<sup>1</sup> A G117-B15-A também é chamada de RY LMi, WD 0921+354 e EG 65.

(ou qualquer outro objeto opaco) na frente da estrela; (2) a superfície da estrela poderia não ser uniforme, tendo algo como uma grande mancha mais brilhante (ou mais escura), por exemplo, que com a rotação da estrela provocaria a variabilidade na curva de luz; e (3) a variabilidade poderia ser decorrente de pulsações não-radiais.

Para que um planeta estivesse girando em torno da estrela com um período de 216 s, o raio de sua órbita deveria ser de  $5.4 \times 10^9$  cm, cerca de 7.5 vezes o raio da estrela, o que parece inviável e, por isso, a hipótese (1) foi descartada. A hipótese (2) também deve ser descartada pois o período de rotação da G117-B15A é longo e não de 216 s. Como as cores da G117-B15A eram similares às cores de outras DAs variáveis, McGraw & Robinson (1976) sugeriram que a variabilidade observada era causada por pulsações não-radiais.

Kepler *et al.* (1982) analisaram os dados fotométricos da G117-B15A obtidos em 36 noites de observações entre 1974 e 1980. A fotometria foi feita usando um fotômetro de dois canais nos telescópios de 2.1, 0.9 e 0.8 m do McDonald Observatory, sem o uso de filtros. A análise dos dados não só confirmou a presença das três frequências de pulsação encontradas anteriormente, como também permitiu uma determinação mais precisa das mesmas. Além disso, três novas frequências foram detectadas nos periodogramas da G117-B15A.

Os três períodos adicionais, de 107.6 s, 119.8 s, e 126.2 s têm de cerca de 1 *mma* amplitudes; entretanto, suas amplitudes estão  $10\sigma$ ,  $6\sigma$  e  $8\sigma$  acima do nível de ruído do periodograma, respectivamente, o que não deixa dúvidas que as mesmas são frequências reais da estrela.

Observações da G117-B15A realizadas em 1990 pelo WET conseguiram mais 96 horas de dados fotométricos, usando fotômetros de dois e três canais. Kepler *et al.* (1995) publicaram o periodograma de alta resolução para a curva de luz inteira com o objetivo de estudar a estrutura fina do espectro de frequências (periodograma) e detectar possíveis períodos de pulsação além dos seis já conhecidos.

A curva de luz de 1990 é muito descontínua, o que torna a janela espectral bastante complexa, dificultando a identificação dos picos verdadeiros, principalmente quando a amplitude dos mesmos é parecida com as dos picos vizinhos. A variação da amplitude observada é parcialmente causada pela contaminação da luz da G117-B15A na abertura quando observada por pequenos telescópios. Isto causa picos espúrios no periodograma. Além dos seis já conhecidos, a análise revelou a presença de um sétimo período de pulsação, com alta probabilidade de ser real. O novo período descoberto é de 126.0 s. Além desse, outros dez picos foram identificados, mas apenas com média ou baixa probabilidades de serem reais, como pode ser visto na Tab.9.1. Como as amplitudes medidas variam um pouco com o tempo e com a qualidade das observações, os picos muito próximos podem ser reais ou matemáticos.

Em sua análise, Kepler e colaboradores usaram dois procedimentos complementares; cada pico identificado como possível frequência de pulsação era subtraído da curva de luz (pré-branqueamento) e um novo periodograma era feito para a curva de luz residual onde se procurava pelo pico seguinte, e assim por diante. Como eles bem observaram, nem todo o sinal associado a cada senóide pode ser subtraído de uma uma vez só. Pelo menos em parte, isso decorre do fato de que cada senóide é ajustada por meio de um ajuste linear por mínimos quadrados. Nesse tipo de ajuste, a frequência é um parâmetro de entrada e qualquer erro na mesma afeta o ajuste fazendo com que o sinal não seja subtraído por completo. O sinal

residual aparece no novo periodograma como um pico de amplitude pequena e frequência próxima à original.

O segundo procedimento usado por Kepler e colaboradores é mais uma técnica para auxiliar na detecção do que para fazer a detecção em si. Uma curva de luz sintética é gerada com as senóides detectadas na curva de luz da estrela real, livre de ruído. A comparação do periodograma da curva sintética com o periodograma dos dados reais pode mostrar se podemos considerar um dado pico no periodograma real como um possível período de pulsação ou se o mesmo pode fazer parte da janela espectral do sinal conhecido da estrela.

Período (s)	Amplitude (mma)	Probabilidade		
215.1968 ± 0.0007	19.15 ± 0.39	alta		
214.30 ± 0.01	1.04 ± 0.40	baixa		
214.36 ± 0.01	1.02 ± 0.39	baixa		
304.052 ± 0.004	6.89 ± 0.44	alta		
305.30 ± 0.01	2.40 ± 0.45	alta		
270.455 ± 0.004	5.47 ± 0.45	alta		
269.51 ± 0.02	0.94 ± 0.45	média		
269.26 ± 0.03	0.93 ± 0.45	média		
270.73 ± 0.03	0.88 ± 0.45	média		
271.95 ± 0.03	0.79 ± 0.45	baixa		
119.836 ± 0.003	1.60 ± 0.45	alta		
107.600 ± 0.004	1.06 ± 0.45	alta		
107.958 ± 0.006	0.60 ± 0.45	média		
107.700 ± 0.007	0.60 ± 0.45	média		
125.682 ± 0.006	0.90 ± 0.45	alta		
126.013 ± 0.006	0.67 ± 0.45	média		
125.847 ± 0.008	0.67 ± 0.45	média		

Período (s)	Amplitude (mma)
107.5987	1.30
119.8410	1.01
125.8287	0.57
126.6477	0.84
215.1974	20.22
270.4537	5.56
304.0585	6.29

**Tab. 9.1:** *Períodos de pulsação detectados por Kepler et al. (1995) para a G117-B15A a partir dos dados do WET de 1990. A tabela da esquerda mostra os picos considerados possíveis períodos de pulsação. O sete picos de maior amplitude estão listados na tabela da direita.*

## 9.2 Variações nos Períodos de Pulsação

Stover *et al.* (1980), usando os dados fotométricos disponíveis até então, conseguiram estabelecer, pela primeira vez, um limite superior para a variação do período de mais alta amplitude da estrela R548, uma outra estrela DAV (ZZ Ceti) com características muito parecidas com as da G117-B15-A. Usando a técnica do diagrama (O-C) descrita no Cap.8, eles encontraram que o período de pulsação 213.1 s da R548 deveria estar variando com uma taxa  $|\dot{P}| < 2 \times 10^{-13} s s^{-1}$ .

A estrela G117-B15-A foi a segunda DAV para a qual se conseguiu estabelecer limites para a variação do período de pulsação de maior amplitude. A primeira estimativa para o  $\dot{P}$  do período de 215 s foi feita por Kepler *et al.* (1982). Usando a técnica do diagrama (O-C) aplicada às 85 horas de dados fotométricos obtidos entre 1974 e 1980, eles encontraram que  $|\dot{P}| < 7.8 \times 10^{-14} \text{ s s}^{-1}$  com 68% de certeza.

Nos anos seguintes, novas observações da G117-B15A foram feitas, aumentando a base de dados e permitindo que medidas sucessivamente melhores do  $\dot{P}$  do período de 215 s fossem feitas. A Tab.9.2 mostra um resumo de todas as medidas feitas até o momento. Na primeira coluna temos o intervalo de observação da estrela. O número total de anos é mostrado na segunda coluna e o número total de horas de dados fotométricos na terceira coluna. Na quarta coluna temos o valor estimado para  $\dot{P}$  e na última coluna a referência bibliográfica com informações sobre os dados observacionais, o procedimento e os resultados para cada medida.

A melhor e mais recente estimativa publicada para o  $\dot{P}$  é  $\dot{P} = (+2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{ s/s}$  calculada por Kepler *et al.* (2000).

Intervalo	Anos	Horas	Medidas	Referências
1979-1980	5.6	85	$\dot{P} = (+5.6 \pm 4.7) \times 10^{-14} \text{ s/s}$	Kepler <i>et al.</i> (1982)
1979-1986	11.3	138	$\dot{P} = (-5.7 \pm 7.8) \times 10^{-15} \text{ s/s}$	Kepler <i>et al.</i> (1988)
1979-????			$\dot{P} = (+12.5 \pm 5.5) \times 10^{-15} \text{ s/s}$	Kepler <i>et al.</i> (1989)
1979-1989	14.2	257	$\dot{P} = (+8.3 \pm 5.0) \times 10^{-15} \text{ s/s}$	Kepler <i>et al.</i> (1990)
1979-1990	15.3	343	$\dot{P} = (+12.0 \pm 3.5) \times 10^{-15} \text{ s/s}$	Kepler <i>et al.</i> (1991)
1979-1997	22.1		$\dot{P} = (+1.2 \pm 2.2) \times 10^{-15} \text{ s/s}$	Kepler <i>et al.</i> (1998)
1979-????	22.1		$\dot{P} = (+2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{ s/s}$	Kepler <i>et al.</i> (2000)

Tab. 9.2: Medidas do  $\dot{P}$  do período de 215.2 s da G117-B15A.

### 9.3 Novas Medidas para as Variações em Período da G117-B15A

Um dos objetivos deste trabalho era aplicar as técnicas que foram usadas para estudar as variações em período na PG11159-035 na G117-B15A. Uma diferença importante entre o procedimento usado na atual medida do  $\dot{P}$  para a G117-B15A e os procedimentos usados por Kepler *et al.* nas medidas anteriores é o tratamento pós-redução aplicado aos dados. Outra diferença importante é que os  $T_{max}$  são calculados através de um ajuste não-linear de senóides usando todas as senóides detectadas por Kepler *et al.* (1995). Finalmente, o  $\dot{P}$  é calculado através de uma variante da técnica do diagrama (O-C) que, ao invés de usar um único valor inicial para o ajuste, usa os pontos de uma grade que cobre todo o intervalo de valores possíveis.



Um segundo objetivo era tentar fazer a determinação do  $\dot{P}$  para outros períodos de pulsação presentes na G117-B15A.

## 9.4 Dados Observacionais

Em nosso estudo, utilizamos todos os dados fotométricos obtidos para a G117-B15A entre dezembro de 1974 e janeiro de 2003. Informações detalhadas sobre os dados obtidos até 1999 podem ser encontradas nas referências listadas na Tab.9.2. Os dados obtidos entre fevereiro de 2001 e janeiro de 2003, totalizando 40.2 horas de fotometria, são novos e não foram usados nas determinações anteriores do  $\dot{P}$ .

Na maior parte das observações foram usados fotômetros de dois e três canais, usando como sensor válvulas foto-multiplicadoras, sem o uso de filtro dada à baixa luminosidade da G117-B15A ( $V=15.52$ , segundo Kepler *et al.* 1982).

Os tempos de integração dos dados analisados aqui variam entre 5 e 40 segundos, sendo que geralmente se usou tempos de 5 ou 10 segundos. Tempos de integração de 5 e 10 segundos são ideais para estrelas DAVs pois permitem que se façam de 10 a 62 medidas da intensidade da luz da estrela ao longo de um ciclo inteiro de pulsação, como se pode ver na Tab.9.3. Um tempo de integração de 40 segundos permite apenas de 3 a 8 medidas por ciclo, o que é muito pouco, mesmos para os períodos mais longos da estrela. Portanto, nas regiões da curva de luz onde o tempo de integração é  $\Delta t = 40 s$ , a densidade de informação é relativamente pobre. Embora os dados originais tenham sido obtidos com tempos de integração menores, os dados de 1975-1985 armazenados foram somados em 40s.

$\Delta t$ (s)	$P = 105 s$	$P = 215 s$	$P = 305 s$
5.	22	44	62
10.	11	22	31
40.	3	6	8

**Tab. 9.3:** Número de pontos por ciclo para diferentes tempos de integração.

A Tab.9.4 lista todos os *chunks* da curva de luz total da G117-B15A. Geralmente, *chunk* corresponde aos dados de um turno de observação. Em alguns casos, os dados de um mesmo turno podem ser separados em dois ou mais *chunks*. Isso é feito quando a observação foi interrompida por um períodos maior do que 5 minutos. Os *chunks* foram numerados em ordem cronológica, de acordo com o seu instante inicial. Na segunda coluna podemos ver a data (Tempo Universal Coordenado -UCT) em que as medidas foram iniciadas. O instante (em Tempo Baricêntrico Coordenado -BCT) da primeira e última medida de cada *chunk* são mostrados na terceira e quarta colunas. O tempo de integração (em segundos) aparece na quinta coluna. O número de pontos e o tempo de fotometria (em horas) estão mostrados nas duas últimas colunas.

## Dados da G117-B15A

Chunk #	Date	$T_{begin}$ 244 0000.+ (BJD)	$T_{end}$ 244 0000.+ (BJD)	Integration Time (sec)	Number of points	Lenght (hours)
1	15-Dec-1974	2397.91603	2398.00029	5.0	1429	2.02
2	05-Mar-1975	2477.79540	2477.88707	10.0	793	2.20
3	01-Jan-1976	2779.81674	2779.95400	10.0	1187	3.29
4	05-Jan-1976	2783.84897	2783.87884	10.0	259	0.72
5	08-Jan-1976	2786.97940	2787.06551	10.0	744	2.07
6	14-Nov-1977	3462.96072	3463.05192	10.0	775	2.19
7	15-Nov-1977	3463.94465	3463.99627	10.0	447	1.24
8	15-Nov-1977	3464.00183	3464.06039	10.0	495	1.41
9	17-Nov-1977	3465.96855	3466.04123	10.0	619	1.74
10	11-Dec-1977	3489.90736	3489.96547	10.0	503	1.39
11	14-Dec-1977	3492.89673	3492.97115	10.0	641	1.79
12	12-Jan-1978	3521.92637	3522.12891	10.0	1741	4.86
13	12-Feb-1978	3552.75224	3552.90757	10.0	1313	3.73
14	07-Mar-1978	3576.75235	3576.79518	10.0	371	1.03
15	12-Mar-1978	3581.69068	3581.79776	6.0	1502	2.57
16	12-Mar-1978	3581.80193	3581.85526	6.0	704	1.28
17	13-Mar-1978	3582.69185	3582.88027	10.0	1597	4.52
18	14-Mar-1978	3583.69606	3583.88588	10.0	1581	4.56
19	15-Mar-1978	3584.73280	3584.94114	10.0	1761	5.00
20	04-Apr-1978	3604.65870	3604.75175	10.0	799	2.23
21	05-Apr-1978	3605.75198	3605.90707	10.0	1336	3.72
22	11-Apr-1978	3611.69065	3611.86055	10.0	1425	4.08
23	13-Apr-1978	3613.65633	3613.74406	10.0	734	2.11
24	06-May-1978	3636.65726	3636.69337	10.0	301	0.87
25	25-Nov-1978	3839.95593	3840.00478	10.0	423	1.17
26	27-Nov-1978	3841.97494	3842.01626	5.0	715	0.99
27	28-Nov-1978	3842.97841	3843.04195	10.0	532	1.52
28	29-Nov-1978	3843.94367	3843.99715	10.0	463	1.28
29	25-Dec-1978	3869.98769	3870.05482	10.0	577	1.61
30	26-Dec-1978	3870.90022	3870.95184	10.0	447	1.24
31	26-Dec-1978	3870.95901	3870.99443	10.0	307	0.85
32	31-Dec-1979	3874.83597	3874.89581	10.0	518	1.44
33	31-Dec-1979	3874.90021	3875.00565	10.0	873	2.53
34	25-Mar-1979	3959.64269	3959.74964	10.0	925	2.57
35	29-Mar-1979	3963.60842	3963.71791	10.0	922	2.63
36	25-Apr-1979	3990.62501	3990.69758	5.0	1255	1.74
37	21-Oct-1979	4169.92006	4169.97052	10.0	428	1.21
38	22-Dec-1979	4231.79020	4231.85709	10.0	579	1.61
39	23-Dec-1979	4232.77038	4232.86459	10.0	815	2.26
40	23-Feb-1980	4293.81298	4293.85256	10.0	343	0.95
41	02-Feb-1981	4637.77545	4637.81284	10.0	320	0.90
42	05-Feb-1981	4641.62220	4641.74592	10.0	1044	2.97

Tab. 9.4: (continuação)

## Dados da G117-B15A

Chunk #	Date	$T_{begin}$ 244 0000.+ (BJD)	$T_{end}$ 244 0000.+ (BJD)	Integration Time (sec)	Number of points	Lenght (hours)
43	06-Feb-1981	4641.75877	4641.93643	10.0	1507	4.26
44	22-Jan-1982	4992.78959	4992.88044	10.0	761	2.18
45	24-Jan-1982	4994.68785	4994.75406	10.0	573	1.59
46	24-Jan-1982	4994.75788	4994.94225	10.0	1571	4.42
47	24-Jan-1982	4994.94827	4994.97408	10.0	224	0.62
48	26-Jan-1982	4996.74266	4996.88513	10.0	1216	3.42
49	27-Jan-1982	4997.72158	4997.86405	10.0	1216	3.42
50	03-Jan-1984	5703.85819	5703.99882	10.0	1168	3.38
51	03-Feb-1984	5734.64055	5734.68233	10.0	359	1.00
52	03-Feb-1984	5734.68962	5734.69575	10.0	45	0.15
53	03-Feb-1984	5734.72550	5734.82515	10.0	844	2.39
54	03-Feb-1984	5734.83175	5734.92399	10.0	785	2.21
55	04-Feb-1984	5735.64234	5735.71907	10.0	651	1.84
56	17-Feb-1985	6113.76150	6113.92128	5.0	2762	3.83
57	12-Jan-1986	6443.77444	6443.84915	5.0	1292	1.79
58	06-Feb-1986	6468.62829	6468.87591	5.0	4280	5.94
59	11-Feb-1986	6473.71748	6473.76667	10.0	426	1.18
60	01-Apr-1986	6523.61866	6523.66206	10.0	376	1.04
61	02-Apr-1986	6524.61337	6524.65631	10.0	372	1.03
62	02-Dec-1986	6768.93593	6769.09200	5.0	2698	3.75
63	28-Dec-1986	6794.93571	6795.02078	10.0	736	2.04
64	31-Dec-1987	6796.92787	6796.97868	10.0	440	1.22
65	01-Jan-1987	6797.92362	6798.00337	10.0	690	1.91
66	02-Jan-1987	6798.90096	6799.01890	10.0	1020	2.83
67	27-Jan-1987	6823.66290	6823.73431	10.0	618	1.71
68	29-Jan-1987	6825.64964	6825.83564	10.0	1608	4.46
69	09-Mar-1988	7231.32669	7231.42711	6.0	1447	2.41
70	10-Mar-1988	7231.61098	7231.73378	10.0	1062	2.95
71	10-Mar-1988	7232.39448	7232.45510	6.0	874	1.46
72	11-Mar-1988	7232.62099	7232.72308	10.0	883	2.45
73	11-Mar-1988	7233.34088	7233.46039	6.0	1722	2.87
74	12-Mar-1988	7233.63210	7233.72539	10.0	807	2.24
75	12-Mar-1988	7234.31735	7234.45825	6.0	2030	3.38
76	13-Mar-1988	7235.31152	7235.44486	6.0	1921	3.20
77	14-Mar-1988	7235.60646	7235.72046	10.0	986	2.74
78	15-Mar-1988	7236.60883	7236.71299	10.0	901	2.50
79	02-Mar-1989	7589.37462	7589.45101	10.0	661	1.83
80	07-Mar-1989	7594.33172	7594.50290	10.0	1480	4.11
81	08-Mar-1989	7595.32079	7595.39660	10.0	656	1.82
82	09-Mar-1989	7596.31000	7596.39461	10.0	732	2.03
83	10-Mar-1989	7597.31337	7597.39752	10.0	728	2.02
84	11-Mar-1989	7598.31783	7598.40116	10.0	721	2.00

Tab. 9.4: (continuação)

## Dados da G117-B15A

Chunk #	Date	$T_{begin}$ 244 0000.+ (BJD)	$T_{end}$ 244 0000.+ (BJD)	Integration Time (sec)	Number of points	Lenght (hours)
85	20-Mar-1990	7972.61938	7972.66475	40.0	99	1.09
86	21-Mar-1990	7973.71167	7973.72787	40.0	36	0.39
87	21-Mar-1990	7973.74118	7973.89257	40.0	328	3.63
88	25-Mar-1990	7977.40086	7977.45040	40.0	108	1.19
89	26-Mar-1990	7978.32600	7978.49730	40.0	371	4.11
90	26-Mar-1990	7978.60691	7978.77543	40.0	365	4.04
91	26-Mar-1990	7978.77148	7978.82472	40.0	116	1.28
92	26-Mar-1990	7978.83444	7979.02055	40.0	403	4.47
93	27-Mar-1990	7979.27980	7979.46452	40.0	400	4.43
94	27-Mar-1990	7979.35639	7979.39667	40.0	88	0.97
95	27-Mar-1990	7979.51287	7979.56102	40.0	105	1.16
96	27-Mar-1990	7979.78251	7980.03066	40.0	537	5.96
97	28-Mar-1990	7980.22472	7980.43120	40.0	447	4.96
98	28-Mar-1990	7980.31982	7980.55176	40.0	502	5.57
99	28-Mar-1990	7980.61983	7980.64853	40.0	63	0.69
100	28-Mar-1990	7980.78324	7981.03139	40.0	537	5.96
101	29-Mar-1990	7981.32603	7981.38343	40.0	125	1.38
102	29-Mar-1990	7981.38401	7981.55022	40.0	360	3.99
103	29-Mar-1990	7981.60367	7981.80783	40.0	442	4.90
104	29-Mar-1990	7981.78105	7982.02642	40.0	531	5.89
105	30-Apr-1990	7982.32953	7982.56102	40.0	501	5.56
106	30-Apr-1990	7982.74150	7982.94845	40.0	448	4.97
107	31-Mar-1990	7983.73458	7983.92440	40.0	411	4.56
108	01-Apr-1990	7984.73569	7984.94356	40.0	450	4.99
109	10-Jan-1991	8267.79903	8267.98872	10.0	1640	4.55
110	07-Mar-1991	8324.62592	8324.93287	5.0	5305	7.37
111	08-Mar-1991	8325.70711	8325.87054	5.0	2825	3.92
112	11-Mar-1991	8328.59503	8328.67981	5.0	1466	2.03
113	14-Mar-1991	8331.66093	8331.70259	5.0	721	1.00
114	31-Dec-1992	8622.91394	8623.01665	5.0	1776	2.47
115	27-Feb-1992	8680.64026	8680.74565	5.0	1822	2.53
116	05-Mar-1992	8687.61355	8687.67738	5.0	1104	1.53
117	06-Mar-1992	8688.59683	8688.66344	5.0	1152	1.60
118	09-Dec-1996	10427.92010	10427.95210	8.6	278	0.77
119	11-Dec-1996	10429.97542	10430.02739	10.0	450	1.25
120	12-Dec-1996	10430.91635	10431.02896	10.0	973	2.70
121	13-Dec-1996	10431.84170	10432.02688	10.0	1601	4.44
122	16-Dec-1996	10434.91079	10434.93035	10.0	170	0.47
123	18-Dec-1996	10436.93228	10437.03135	10.0	857	2.38
124	03-Feb-1997	10483.63239	10483.95027	5.0	5494	7.63
125	12-Dec-1999	11526.87821	11527.03730	5.0	1394	3.82
126	14-Dec-1999	11528.85357	11528.92111	5.0	596	1.62

Tab. 9.4: (continuação)

Dados da G117-B15A

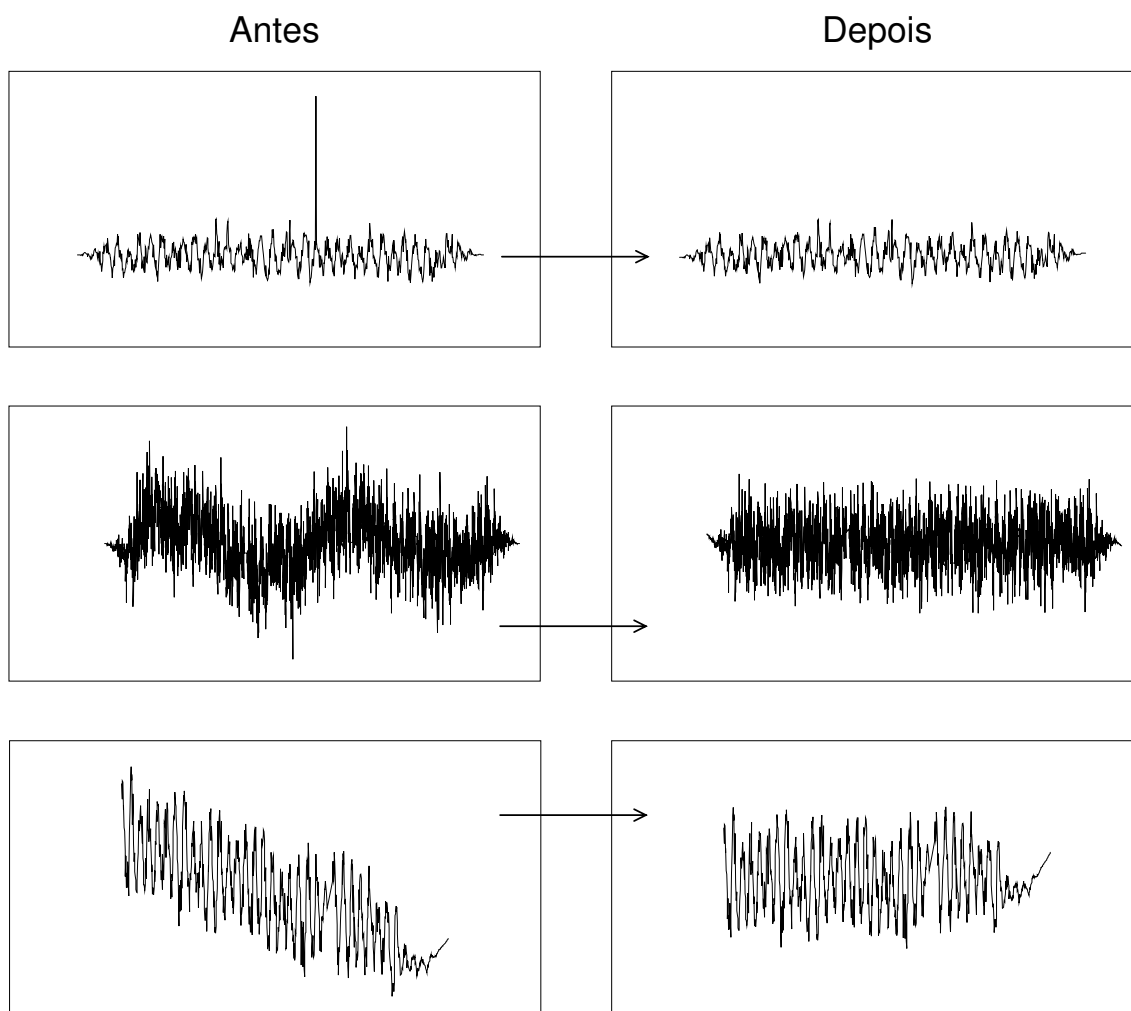
Chunk #	Date	$T_{begin}$ 244 0000.+ (BJD)	$T_{end}$ 244 0000.+ (BJD)	Integration Time (sec)	Number of points	Lenght (hours)
127	14-Dec-1999	11528.99249	11529.05407	5.0	598	1.48
128	14-Dec-1999	11529.12136	11529.17466	5.0	467	1.28
129	15-Dec-1999	11529.85978	11530.02760	5.0	2901	4.03
130	16-Dec-1999	11530.93293	11530.95879	5.0	233	0.62
131	20-Feb-2001	11960.85718	11960.97627	5.0	2059	2.86
132	22-Feb-2001	11962.93523	11963.08066	5.0	2490	3.49
133	26-Feb-2001	11967.68176	11967.68576	5.0	70	0.10
134	11-Nov-2001	12225.90394	12226.02783	5.0	2088	2.97
135	19-Dec-2001	12263.88138	12264.03971	5.0	2737	3.80
136	06-Feb-2002	12312.73958	12312.85341	5.0	1968	2.73
137	10-Feb-2002	12316.64376	12316.79549	3.0	4371	3.64
138	13-Feb-2002	12319.79796	12319.90253	5.0	1808	2.51
139	15-Feb-2002	12321.83589	12321.86881	3.0	935	0.79
140	16-Feb-2002	12322.72379	12322.73473	5.0	190	0.26
141	01-Nov-2002	12581.94731	12582.02549	5.0	1352	1.88
142	03-Nov-2002	12583.90867	12584.02540	5.0	2018	2.80
143	04-Nov-2002	12584.87934	12584.96673	5.0	1511	2.10
144	05-Nov-2002	12585.98175	12586.02724	5.0	787	1.09
145	06-Nov-2002	12586.89316	12586.94461	3.0	1483	1.24
146	25-Jan-2003	12665.78363	12665.94641	5.0	2808	3.91
147	29-Jan-2003	12669.79638	12669.96420	5.0	2901	4.03
148	02-Mar-2003	12702.70350	12702.72833	5.0	390	0.60
149	20-Mar-2003	12720.67276	12720.73342	5.0	852	1.46
150	31-Mar-2003	12731.75738	12731.80472	10.0	410	1.14
151	22-Dec-2003	12997.89685	12997.92347	5.0	461	0.64
152	22-Dec-2003	12997.94187	12998.02272	5.0	1398	1.94
153	23-Dec-2003	12999.02707	12999.05467	5.0	478	0.66
154	27-Dec-2003	13002.78007	13002.96115	5.0	3129	4.35
155	21-Jan-2004	13026.75871	13026.88898	5.0	2192	3.13
156	21-Jan-2004	13026.89465	13026.93337	5.0	670	0.93

Tab. 9.4: Dados da G117-B15A obtidos entre 1974 e 2003.

## 9.5 Pós-redução dos dados

Os dados usados neste trabalho já haviam sido reduzidos através do procedimento explicado no Cap.4. Encontramos nos dados da G117-B15A problemas similares aos encontrados nos dados da PG 1159-035. Para corrigir esses problemas, usamos as mesmas técnicas usadas no tratamento dos dados já reduzidos da PG 1159-035. As curvas de luz nos gráficos da direita da Fig.9.1 ilustram três casos em que a necessidade do tratamento de pós-redução é obviamente necessário.

No tratamento pós-redução, todos os pontos com um desvio excessivo em relação à média da curva de luz são eliminados. O efeito de modulação devido a variações do brilho do céu é corrigido e um filtro passa-altas elimina todas as baixas frequências presentes na curva de luz, com uma amplitude superior a um certo limite de corte. Conforme foi discutido com mais detalhes no Cap.4, a presença de baixas frequências nas curvas de luz afeta a determinação da frequência e do  $T_{max}$  de cada senóide.



**Fig. 9.1:** *Efeitos das técnicas de pós-redução em três curvas de luz.*

## 9.6 Períodos de Pulsação

Vamos nos concentrar nos três principais períodos de pulsação da G117-B15A mostrados em Tab.9.5. Todos os outros possíveis períodos de pulsação possuem amplitudes muito pequenas comparadas com os três principais, praticamente não afetando as determinações de amplitude, frequência e  $T_{max}$ .

Período	Frequência	Amplitude
$215.221 \pm 0.003$	$4643.38 \pm 0.71$	$19.8 \pm 0.4$
$304.148 \pm 0.147$	$3691.95 \pm 1.98$	$8.8 \pm 0.4$
$270.860 \pm 0.145$	$3287.87 \pm 1.59$	$7.1 \pm 0.4$

Tab. 9.5: *Períodos da G117-B15A usados no ajuste.*

## 9.7 Medida Direta

As frequências, períodos, amplitudes e  $T_{max}$  foram calculadas pelo programa `multif`, descrito no Apêndice B que faz o ajuste não-linear das três senóides, simultaneamente. A menor incerteza em período obtida para dados individuais (*chunks*) é da ordem de  $0.015\text{ s}$ . Um  $\dot{P}$  da ordem de  $10^{-15}\text{ ss}^{-1}$  equivale a uma variação da ordem de apenas  $\simeq 3 \times 10^{-9}\text{ ss}^{-1}$  em 30 anos de observação, o que torna impossível a medida direta de  $\dot{P}$  para a G117-B15A.

Na Fig.9.2 podemos ver os gráficos do períodos contra o tempo para as medidas dos três períodos estudados, calculados para cada conjunto individual de dados. Na Fig.9.3 podemos ver os gráficos do período contra o tempo calculado para dados anuais. Como se pode ver, a dispersão dos pontos é pequena comparada com as barras de erro, o que inviabiliza a medida direta dos períodos de pulsação.

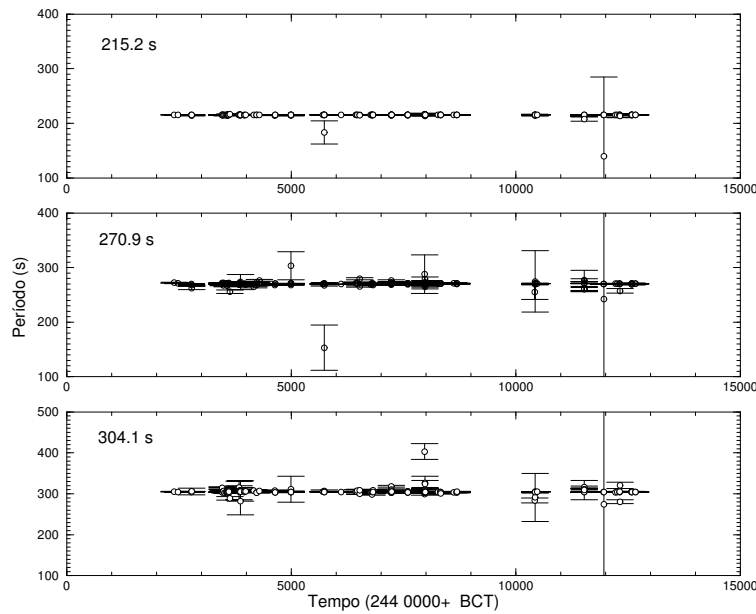
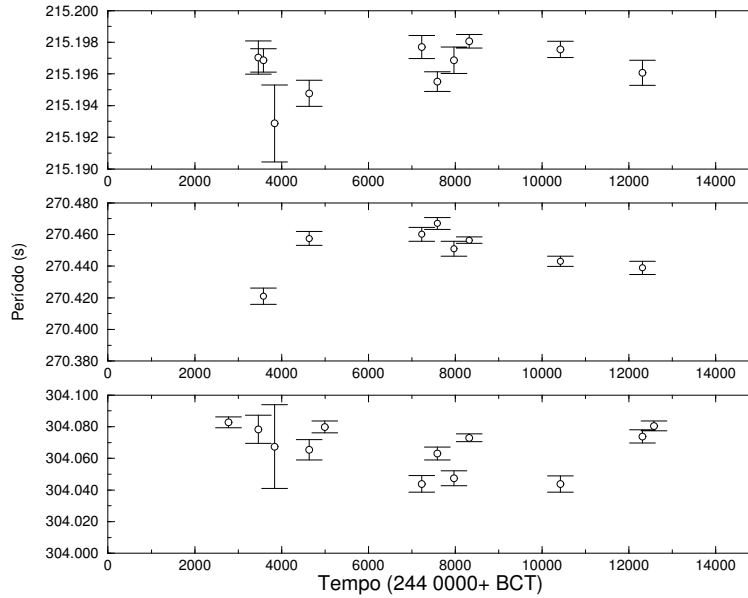


Fig. 9.2: *Gráficos do período contra o tempo, para os períodos de 215.2 s, 270.9 s e 304.2 s, para cada conjunto de dados. Cada barra equivale a uma variação de  $1\sigma$  para cima e para baixo.*



**Fig. 9.3:** Gráficos do período contra o tempo, para os períodos de 215.2 s, 270.9 s e 304.2 s, para dados anuais. Cada barra equivale a uma variação de  $1\sigma$  para cima e para baixo.

## 9.8 Diagramas (O-C)

As incertezas na determinação dos  $T_{max}$  dos períodos da G117-B15A são relativamente pequenas. Para o período principal de 215 s o desvio padrão em  $T_{max}$ , na maior parte dos casos, é da ordem de 1 a 3 segundos. Mesmo para os períodos de 270.9 s e 304.2 s a incerteza em  $T_{max}$  é menor do que 5% do valor do período. Isso favorece enormemente o uso da técnica do diagrama (O-C) para determinação de  $\dot{P}$ .

O fato de  $\dot{P}$  ser tão pequeno tem algumas implicações interessantes e que podem ser exploradas. No Cap.XX vimos que a técnica do diagrama (O-C) determina os valores de  $P_o$  e  $\dot{P}$  a partir de valores iniciais, procurando os valores de  $P$  e  $\dot{P}$  que minimizem o  $\chi^2$  do ajuste. Se os valores iniciais não forem suficientemente próximos dos valores reais, o algoritmo pode encontrar um mínimo local para  $\chi^2$  que não corresponde à solução real que, presumivelmente, é o mínimo global do ajuste. Para evitar este problema, usamos uma grade de valores iniciais. Para cada ponto da grade o ajuste era feito e a solução com menor  $\chi^2$  (= mínimo global) era assumida como sendo a solução real do problema.

Quando  $\dot{P}$  é grande, a necessidade de se usar uma grade de valores iniciais aparece porque o número de ciclos,  $E_i$ , deve ser calculado levando-se em conta a variação no período,  $\dot{P}$  e não apenas o período, como é feito na Eq.8.29. Mas, quando  $\dot{P}$  é pequeno, podemos calcular o número de ciclos apenas levando em conta o período:

$$E_i = \text{int} \left\{ \frac{C_i - T_o}{P} \right\} \quad (9.1)$$

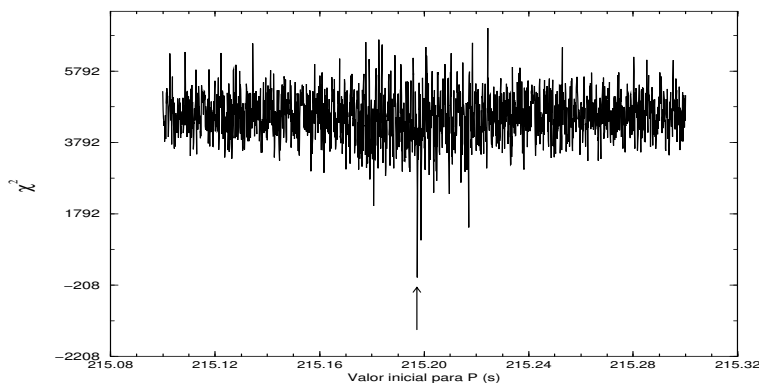
Podemos, então, usar valores de  $P$  dentro de um certo intervalo, como valores iniciais. A solução que levar ao menor  $\chi^2$  é assumida como sendo a solução real. Na Fig.9.4 podemos



ver o gráfico de  $\chi^2$  como uma função do período tentativo  $P$ ,  $\chi^2 = \chi^2(P)$ , variando no intervalo 215.1 – 215.3 s com um incremento igual a 0.000 001 s. O menor  $\chi^2$  ocorre para  $P = 215.197\,388\,6 \pm 0.000\,003\,4$  s.

Na Fig.9.5 podemos ver o gráfico de  $\chi^2$  como função do período usado como valor inicial, no intervalo 215.1972-215.1976 s, centrado no valor mínimo para  $\chi^2$ . O segundo gráfico de cima para baixo mostra o valor obtido para  $T_o$  (em BCT - 244 0000). o Terceiro gráfico mostra o valor de  $P_o$  para o qual o ajuste convergiu e o último gráfico mostra o valor obtido para  $\dot{P}$ . A região retangular pontilhada indica o intervalo de valores iniciais para os quais o resultado convergirá para a mesma solução. Qualquer valor inicial para  $P$  fora deste intervalo levará a soluções diferentes. Estes gráficos ilustram bem o *risco* que representa o uso de um único valor inicial.

Note que quanto menor for o incremento no valor inicial dos períodos, maior será a região plana nos vales dos gráficos de  $\chi^2$ ,  $T_o$ ,  $P_o$  e  $\dot{P}$  contra o valor inicial de  $P$ . Se a região plana for muito estreita, o incremento deve ser reduzido; se for muito largo, o incremento pode ser aumentado. Uma situação como a mostrada nos gráficos Fig.9.5 é algo próximo do ideal. Esta é uma maneira segura de garantir que os resultados obtidos correspondam a solução global e não a uma solução local.



**Fig. 9.4:** O gráfico mostra  $\chi^2$  em função do período usado como valor inicial, para o ajuste do pico de 215 s. O valor mínimo, indicado pela flecha, corresponde à localização da solução real.

## 9.9 Variação do Período de 215 s

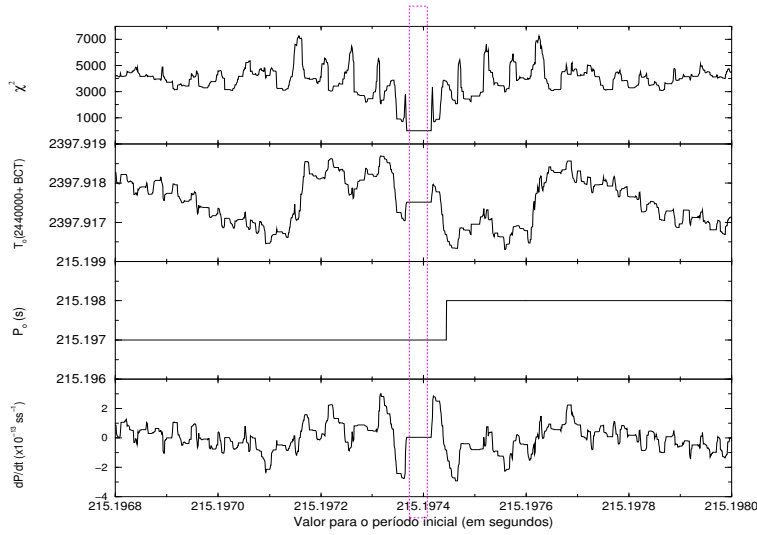
Para os períodos de 215.2 s, o melhor valor usando a técnica do (O-C) obtido é:

$$T_o = 244\,2397.917\,514\,2 \pm 0.000\,004\,6\text{BCT}$$

$$P_o = 215.197\,388\,6 \pm 0.000\,003\,4\text{ s}$$

$$\dot{P} = (+4.72 \pm 0.80) \times 10^{-15}\text{ s s}^{-1}$$

A incerteza em  $T_o$  é de 2.4 s e o valor encontrado para  $\dot{P}$  difere do valor mais recente encontrado por Kepler *et al.* (2000),  $\dot{P} = (+2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15}\text{ s/s}$ , a qual deve corresponder a alguma outra solução local. O diagrama (O-C) para o período de 215.2 s é mostrado na Fig.9.6.



**Fig. 9.5:** O primeiro gráfico (de cima para baixo) mostra  $\chi^2$  em função do valor inicial do período no ajuste do pico de 215 s. Os gráficos seguintes, mostram os valores obtidos através do ajuste para  $T_o$  (em 244 0000+ BCT),  $P_o$  (em segundos) e  $\dot{P}$  para cada valor inicial de período.

## 9.10 Variação do Período de 270 s

O mesmo procedimento foi usado para se determinar a variação temporal do período de 270 s. O gráfico da Fig.9.7 mostra  $\chi^2$  em função do valor inicial do período, cobrindo o intervalo 270.4 – 271.5 s. O ponto de mínimo ocorre para  $P \simeq 270.453\,729\,0$  s. Os gráficos da Fig.9.8 mostram os resultados dos ajustes numa região menor, 270.4533 – 270.4542 s, centrada no pico de mínimo.

Os resultados para o melhor ajuste são:

$$T_o = 244\,2779.817\,509\,7 \pm 0.000\,045\,1\text{BCT}$$

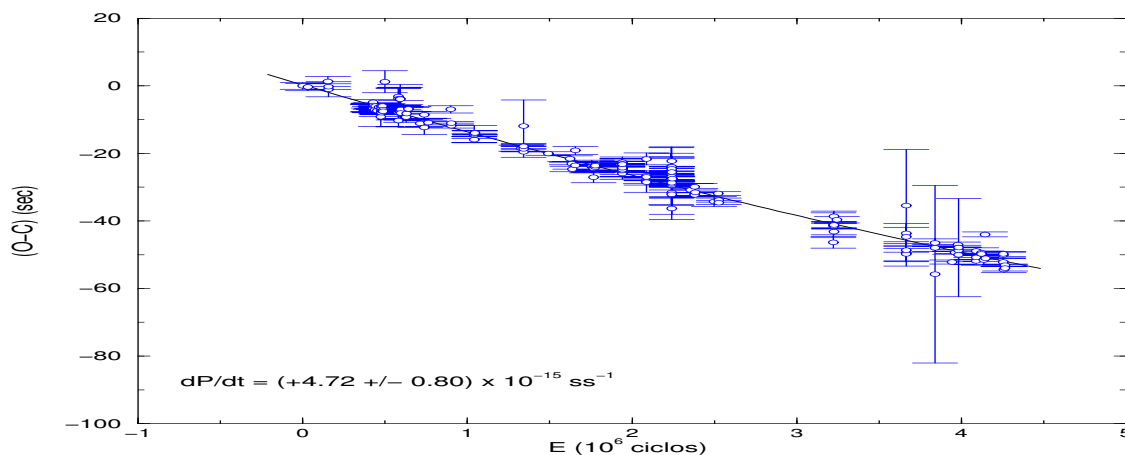
$$P_o = 270.453\,729\,0 \pm 0.000\,003\,9\text{ s}$$

$$\dot{P} = (+3.60 \pm 0.72) \times 10^{-14}\text{ ss}^{-1}$$

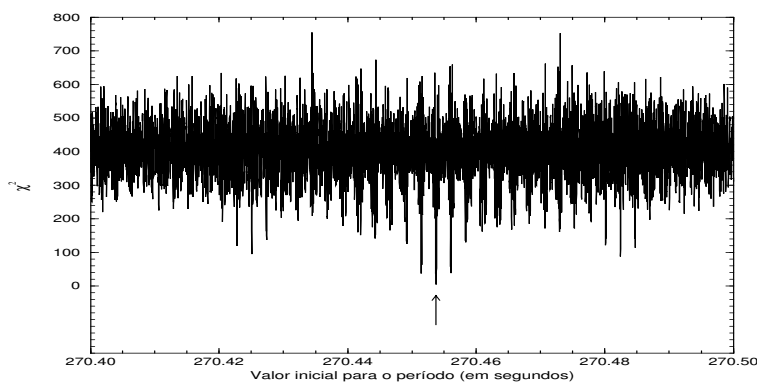
A incerteza no valor encontrado para  $\dot{P}$  para o período de 270 s ainda é relativamente pequena e um  $\dot{P}$  da ordem de  $10^{-14}\text{ ss}^{-1}$  ainda permite o uso desta técnica. O diagrama (O-C) pode ser visto na Fig.9.9.

## 9.11 Variação do Período de 304 s

O mesmo procedimento foi usado para se determinar a variação temporal do período de 304 s. O gráfico da Fig.9.10 mostra  $\chi^2$  em função do valor inicial do período, cobrindo o intervalo 304.00 – 304.12 s. O ponto de mínimo ocorre para  $P \simeq 304.058\,489$  s. Os gráficos da Fig.9.11 mostram os resultados dos ajustes numa região menor, 304.058 – 304.059 s, centrada no pico de mínimo.



**Fig. 9.6:** Diagrama (O-C) para o período de 215.2 s.



**Fig. 9.7:** O gráfico mostra  $\chi^2$  em função do período inicial, no ajuste para o pico de 270 s.

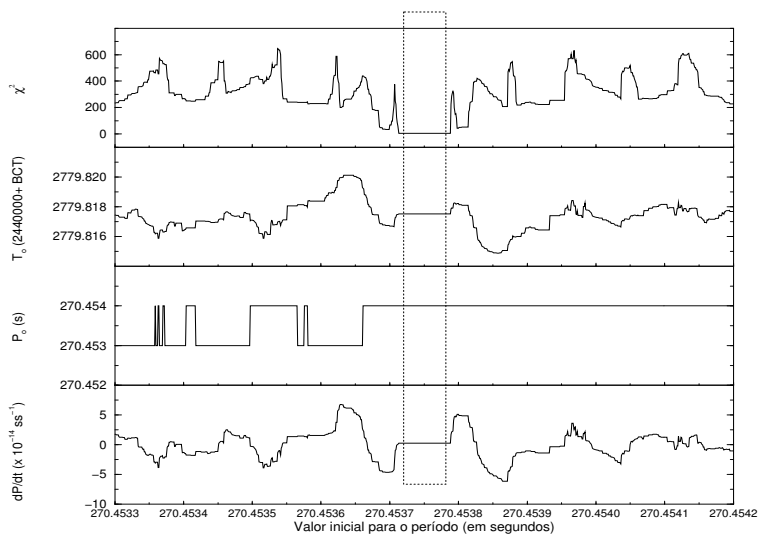
Os resultados para o melhor ajuste são:

$$T_o = 244\,2786.819\,510\,3 \pm 0.000\,058\,9BCT$$

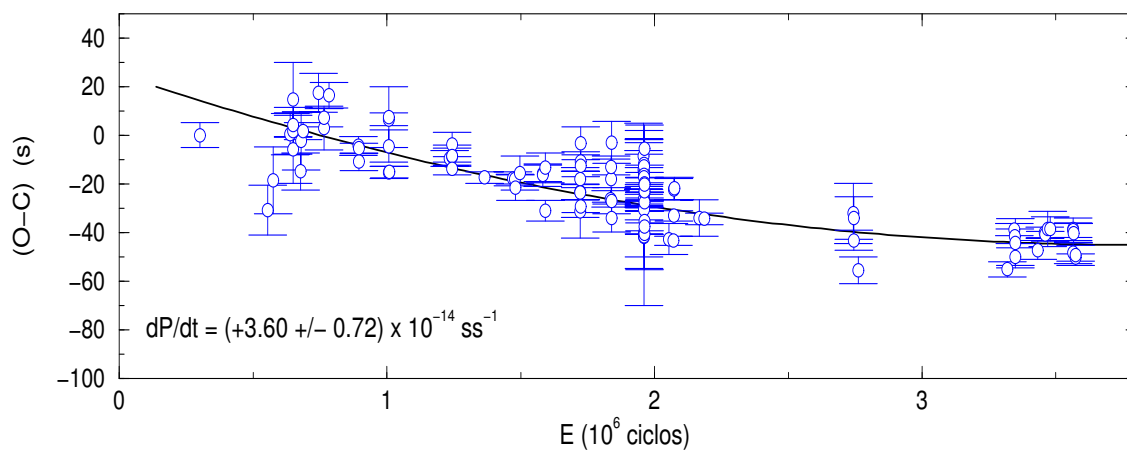
$$P_o = 304.058\,489\,4 \pm 0.000\,007\,8\,s$$

$$\dot{P} = (+7.43 \pm 1.52) \times 10^{-14} \, ss^{-1}$$

A incerteza no valor encontrado para  $\dot{P}$  para o período de 390 s ainda é grande mas nos permite estabelecer um intervalo de confiança para  $\dot{P}$ . O diagrama (O-C) pode ser visto na Fig.9.12.



**Fig. 9.8:** O primeiro gráfico (de cima para baixo) mostra  $\chi^2$  em função do valor inicial do período no ajuste do pico de 270 s. Os gráficos seguintes, mostram os valores obtidos através do ajuste para  $T_o$  (em 2440000+ BCT),  $P_o$  (em segundos) e  $\dot{P}$  para cada valor inicial de período.



**Fig. 9.9:** Diagrama (O-C) para o período de 270 s.

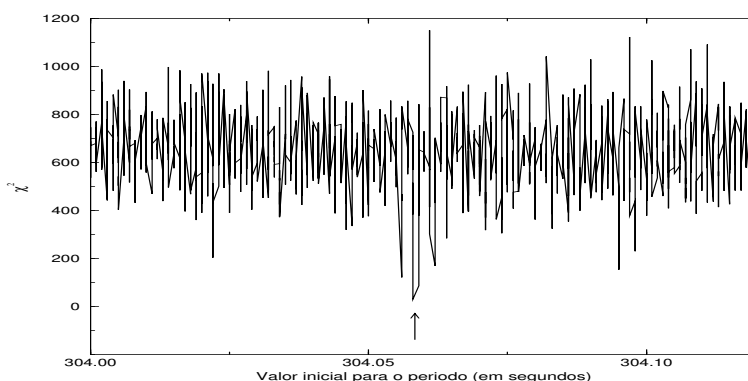


Fig. 9.10: O gráfico mostra  $\chi^2$  em função do período inicial, no ajuste para o pico de 390 s.

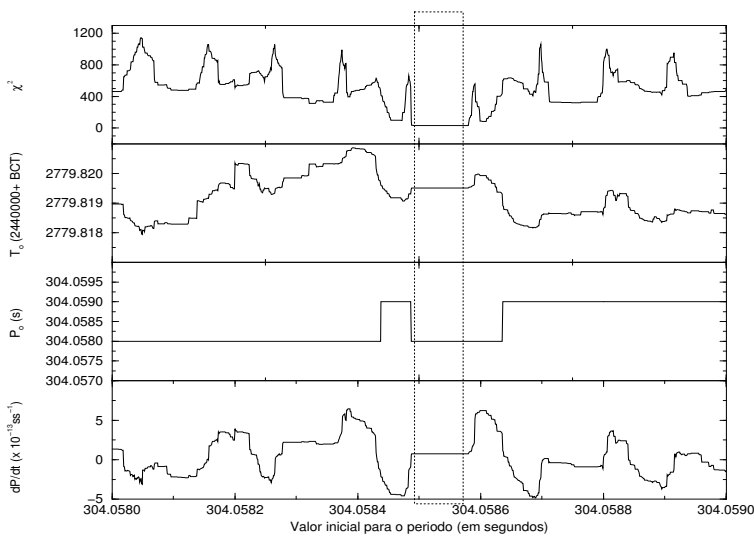


Fig. 9.11: O primeiro gráfico (de cima para baixo) mostra  $\chi^2$  em função do valor inicial do período no ajuste de pico de 304 s. Os gráficos seguintes, mostram os valores obtidos através do ajuste para  $T_0$  (em 2440000+ BCT),  $P_0$  (em segundos) e  $\dot{P}$  quando se para cada valor inicial de período.

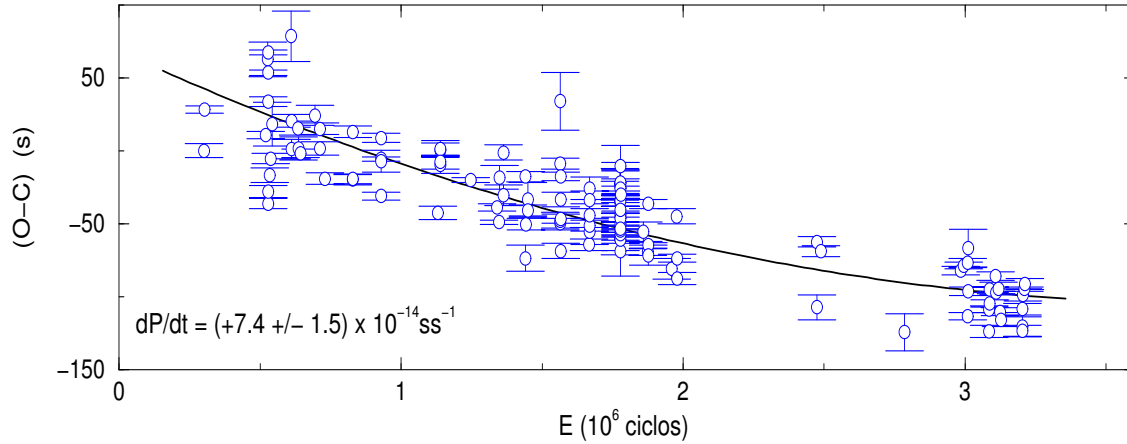


Fig. 9.12: Diagrama (O-C) para o período de 304 s.

## 9.12 Análise dos Resultados

Os resultados obtidos para as medidas das variações dos três principais períodos de pulsação da estrela estão resumidos na Tab.9.12, abaixo.

$T_o$ (BCT)	Período (s)	$\dot{P}$
$244\,2397.917\,514\,2 \pm 0.000\,004\,6$	$215.197\,388\,6 \pm 0.000\,003\,4$	$(+4.72 \pm 0.80) \times 10^{-15} \text{ ss}^{-1}$
$244\,2779.817\,509\,7 \pm 0.000\,045\,1$	$270.453\,729\,0 \pm 0.000\,003\,9$	$(+3.60 \pm 0.72) \times 10^{-14} \text{ ss}^{-1}$
$244\,2786.819\,510\,3 \pm 0.000\,058\,9$	$304.058\,489\,4 \pm 0.000\,007\,8$	$(+7.43 \pm 1.52) \times 10^{-14} \text{ ss}^{-1}$

Como na G117-B15A a contração da atmosfera da estrela é desprezível ( $\dot{R} \simeq 0$ ), podemos usar a Eq.8.14,

$$\frac{\dot{P}}{P} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\dot{T}_m}{T_m}$$

para se calcular a taxa de esfriamento,  $\dot{T}_m$ , da estrela:

$$\dot{T}_m \simeq -2 T_m \frac{\dot{P}}{P} \quad . \quad (9.2)$$

Usando,

$$\begin{aligned} T_m &= 11\,600 \text{ K} \\ P &= 215.197\,388\,6 \pm 0.000\,003\,4 \text{ s} \\ \dot{P} &= (+4.72 \pm 0.80) \times 10^{-15} \text{ ss}^{-1} \end{aligned}$$

temos:

$$T_m = -2 \times 11\,600 \times \frac{+4.72 \times 10^{-15}}{215.197\,388\,6} \quad (\text{K/s})$$

e, portanto:

$$T_m = -5.89 \times 10^{-13} \text{ K/s} \quad (9.3)$$

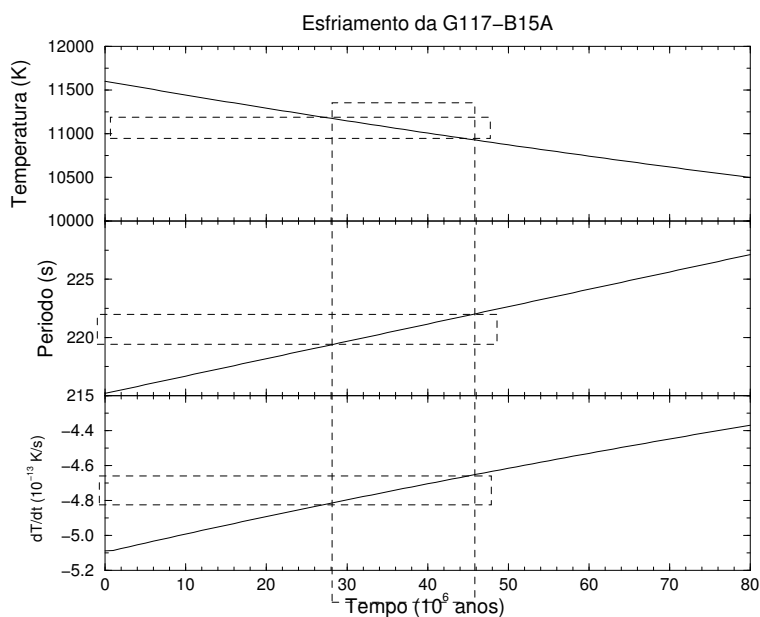
ou

$$T_m = -1.606 \times 10^{-5} \text{ K/ano.} \quad (9.4)$$

Supondo que essa taxa de esfriamento se mantenha constante, a estrela levaria cerca de 750 milhões de anos para entrar em equilíbrio térmico com o universo. À medida que a estrela esfria ( $T$  diminui), o período aumenta (pois  $\dot{P} > 0$ ) e  $\dot{P}$  diminui. Isto faz com que a taxa de esfriamento,  $\dot{T}$  seja cada vez menor e, portanto, o tempo necessário para que a estrela atinja o equilíbrio térmico com o universo será bem maior que 750 milhões de anos. Contudo, o cálculo simplificado acima já nos dá um *limite inferior* para este tempo.

O gráfico superior da Fig.9.13 mostra a curva de esfriamento da G117-B15A ao longo do tempo (em milhões de anos). O gráfico do meio mostra a variação do período, quando se assume que o mesmo está variando de forma linear. O gráfico inferior mostra a variação na taxa de esfriamento,  $\dot{T}_m$ , em  $10^{-13} \text{ K/s}$ . Se assumirmos que a borda vermelha da faixa de instabilidade ocorre para temperaturas em torno de 11 000 – 11 200 K, a G117-B15A levará entre 28 e 46 milhões de anos para cruzá-la. Se a mesma lei de esfriamento fosse mantida, a estrela levaria cerca de 4.5 bilhões de anos para chegar a 4 500 K, a temperatura efetiva mais baixa observada para anãs brancas.

\* \* \* \* \*



**Fig. 9.13:** *Esfriamento da G117-B15A, assumindo que  $\dot{P}$  é constante. O gráfico superior mostra a curva de esfriamento ao longo do tempo. No gráfico do meio vemos a variação do período de pulsação e no gráfico inferior a variação na taxa de esfriamento,  $\dot{T}$ . O retângulo tracejado vertical indica o intervalo de tempo dentro do qual a estrela deve cruzar a borda vermelha da faixa de instabilidade. Os retângulos horizontais indicam os intervalos correspondentes nas escalas verticais.*



## Capítulo 10

# RESUMO E CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentamos um resumo dos principais pontos deste trabalho, mais ou menos na mesma seqüência com que aparecem no texto. Explicações detalhadas sobre cada tópico são encontradas nos capítulos anteriores. A Sec.10.15 lista as principais conclusões do trabalho.

### 10.1 Redução dos Dados Fotométricos

O estudo das pulsações da estrela PG 1159-035 tornou clara a necessidade de um maior *controle de qualidade* no processo de redução de dados. Como o estudo de estrelas pulsantes ricas em frequências de pulsações, como é o caso das DOVs, exige curvas de luz quase-contínuas e com centenas de horas de duração, as campanhas observacionais só são possíveis com a participação de vários telescópios em diferentes posições do planeta, como faz o WET.

A presença de pontos espúrios com grandes desvios em relação à média afeta a qualidade dos ajustes, mascarando o valor de  $\chi^2$ . Falhas na correção para a extinção atmosférica deixam sinais de baixa frequência nas curvas de luz que afetam a determinação das frequências dos modos de pulsação e de seus tempos de máximo e amplitudes.

Como em muitos casos não tivemos acesso aos dados não-reduzidos, desenvolvemos técnicas para exame, diagnóstico e tratamento de problemas em curvas de luz já reduzidas. Chamamos esse procedimento de *pós-redução* de dados.

### 10.2 O Problema das Baixas Frequências

O problema das baixas frequências ( $f < 1000 \mu Hz$ ) e altas amplitudes nas curvas de luz individuais foi resolvido com o uso de *filtros passa-altas*, que retiram os sinais de baixas frequências das curvas de luz. Dois tipos de filtros foram testados: um baseado em demodulação do sinal e outro baseado na subtração de senóides. Os dois tipos de filtros levaram praticamente aos mesmos resultados, sendo que o filtro baseado em subtração de senóides apresentou resultados levemente melhores.

Uma das objeções levantadas contra o uso desse tipo de filtro é que a subtração de sinais de baixa frequência poderia estar eliminando da curva de luz também sinais reais da própria estrela. Contra esse tipo de objeção podemos argumentar do seguinte modo: (1) os sinais de baixa frequência e alta amplitude — independente de incluírem ou não sinais da própria estrela — dificultam a detecção e introduzem erros na determinação dos modos de pulsação da estrela (com  $f > 1000 \mu Hz$ ) como foi *demonstrado* no Cap.4; (2) mesmo que existam sinais de baixas frequências gerados pela própria estrela, tais sinais seriam completamente mascarados pelas flutuações introduzidas na curva de luz

pelos efeitos de extinção atmosférica, o que torna praticamente impossível sua detecção direta (a não ser que se faça fotometria diferencial); (3) o filtro de passa-altas é apenas *um recurso* usado no estudo de frequências de pulsação acima de  $1\,000\ \mu\text{Hz}$ . Os dados originais permanecem intactos.

O uso dessas técnicas de pós-redução nos dados da PG 1159-035 foram absolutamente necessárias, já que a relação sinal/ruído nessa estrela é muito baixa e a amplitude da quase totalidade dos picos é, em geral, bem menor que a amplitude dos picos de baixa frequência. O uso do filtro de passa-altas reduziu significativamente as incertezas nas determinações das frequências, amplitudes e tempos de máximo e amplitudes dos sinais dos dados anuais.

O uso das mesmas técnicas de pós-redução nos dados da estrela G117-B15A não mostraram grandes efeitos na determinação das frequências, amplitudes e tempos de máximo para dados individuais; em geral a diferença nas determinações dos três parâmetros entre os dados que passaram pelas técnicas de pós redução e os dados originais foi sempre menor do que  $1\sigma$ . A G117-B15A, por ser uma DA, apresenta frequências de pulsação mais altas, com períodos menores que 300 segundos enquanto que a maior parte dos períodos de pulsação da PG 1159-035, por ser uma DOV, estão acima de 300 segundos. Como foi visto no Cap.4 a interferência dos sinais de baixas frequências e altas amplitudes é maior sobre os modos de pulsação com frequências mais baixas (períodos mais altos) do que sobre os modos de pulsação com frequências mais altas (períodos menores). Por isso, os efeitos do uso de filtros passa-altas é muito mais benéfico (e necessários) no estudo dos dados da PG 1159-035 do que na G117-B15A.

### 10.3 Limite de Detecção

A detecção e identificação dos modos de pulsação de estrelas pulsantes são etapas mutuamente complementares e interativas. Avanços na identificação dos modos de pulsação de uma estrela pulsante, às vezes leva a uma reavaliação das técnicas e critérios usados na etapa de detecção. Como exemplo, podemos citar a definição do limite de detecção, discutida no Cap.6.

O *limite de detecção* pode ser definido como a amplitude mínima num periodograma acima da qual o pico central de uma janela espectral pode ser considerado um *possível* modo de pulsação. O limite que vem sendo usado, proposto por Kepler *et al.* (1993) se baseia na amplitude média local dos picos no periodograma e, por definição, é igual a 4 vezes a amplitude média. Nossa experiência com a detecção dos modos de pulsação da PG 1159-035 mostrou que esse limite, apesar de ser bastante cauteloso, está acima da amplitude de muitos (possíveis) modos reais de pulsação presentes nos periodogramas da estrela.

Um limite de detecção inferior, baseado não na amplitude média, mas na amplitude máxima,  $A_{max}$  se mostrou mais adequado e também seguro pois nenhum pico com amplitude acima desse limite teve que ser descartado na etapa de identificação. Além disso, os histogramas para distribuição de amplitudes em periodogramas, mostram que essas distribuições não obedecem a uma estatística poissônica e que a amplitude média não é a grandeza que as melhor caracteriza (a moda seria mais adequada). Portanto, do ponto de vista estatístico, um limite baseado na amplitude máxima (e não na amplitude média) é também mais coerente.

### 10.4 Peso dos Dados

A questão dos *pesos dos dados* também foi estudada em detalhes. Testamos diferentes definições e algoritmos para o cálculo do peso estatístico dos dados e concluímos que o algoritmo mais ade-

quando para ajustes envolvendo grandes conjuntos de dados, como os da PG 1159-035, é o processo iterativo descrito na Sec.6.14. Verificamos que o uso desses pesos no cálculo de periodogramas não necessariamente torna os periodogramas mais claros, a ponto de facilitar perceptivelmente a identificação dos modos de pulsação da estrela.

## 10.5 Ajuste Simultâneo de Senóides

A asterosismologia necessita de medidas precisas para os períodos, amplitudes e tempos de máximos dos modos de pulsação detectados. A maneira mais simples de se calcular esses parâmetros é fazer o ajuste linear de cada senóide, individualmente. Testes com base em simulações de Monte Carlo mostram que o erro nas estimativas desses parâmetros é reduzido (às vezes, consideravelmente) quando se faz o ajuste simultâneo de vários modos presentes no sinal da estrela, por meio de técnicas não-lineares, como faz o programa `multif` que desenvolvemos para este fim.

Além disso, outros testes envolvendo simulações de Monte Carlo demonstraram que as incertezas calculadas através de ajustes lineares de uma única senóide a uma série de tempo multiperiódica *subestimam* em muito as incertezas reais (Costa & Kepler 1999). Os mesmos testes mostram que as incertezas calculadas pelo programa `multif` são consistentes com as incertezas calculadas via Monte Carlo, *quando* o ajuste inclui um número adequado de senóides.

## 10.6 Períodos de Pulsação da PG 1159-035

Analisando e comparando os periodogramas dos dados da PG 1159-035 dos anos de 1983, 1985, 1989, 1993 e 2002, conseguimos detectar 198 possíveis modos de pulsação, 76 modos a mais dos que haviam sido detectados por Winget *et al.* (1991) nos dados de 1989. Dos 198 modos detectados, 81 são modos  $\ell = 1$  com  $m = -1, 0, +1$  (93% de todos os modos  $\ell = 1$ ) e 117 modos  $\ell = 2$  com  $m = -2, -1, 0, +1, +2$  (45% de todos os modos  $\ell = 2$ ). Os resultados estão nas tabelas Tab.6.6 a Tab.6.9.

Todos os períodos de pulsação detectados nos dados da PG 1159-035 têm valores entre 380 e 990 segundos (frequências entre 1 010 e 2 630  $\mu Hz$ ). Apenas 14 modos, todos  $\ell = 1$  são persistentes, aparecendo nos periodogramas de todos os anos, embora suas amplitudes tenham variado. Todos os demais modos  $\ell = 1$  e todos os modos  $\ell = 2$  aparecem apenas no periodograma de um ou dois dos anos. Isso demonstra que as amplitudes de quase todos os modos de pulsação apresentam grande variabilidade. É possível que os 6 modos  $\ell = 1$  não detectados em estudos anteriores, acidentalmente não estavam presente nos anos em que a estrela foi observada. Por outro lado, o fato de um modo não ter sido detectado não significa que o mesmo esteja desativado, sendo mais provável que sua amplitude esteja abaixo do limite de detecção. Fica claro que é praticamente impossível fazer a identificação de todos os modos de pulsação da estrela com base em uma única campanha anual.

A identificação dos modos  $\ell = 3$  é muito mais difícil do que a dos modos  $\ell = 1$ , pois, além de possuírem amplitudes mais baixas devido ao cancelamento geométrico, ocorre a sobreposição dos múltiplos para períodos maiores do que 600 segundos. A identificação das regiões de sobreposição é importante para uma identificação mais segura.

## 10.7 Espaçamento em Período na PG 1159-035

A teoria de pulsações prevê e as observações confirmam que os períodos de pulsação para  $k \gg 1$  estão aproximadamente regularmente espaçados. Utilizamos duas técnicas (descritas com detalhes no Cap.6) para estimar o espaçamento em período na PG 1159-035: a técnica PT (transformada em período) e o Teste K-S (Kolmogorov-Sirmirnov). Os valores encontrados foram usados para auxiliar na localização dos demais modos de pulsação. Os valores finais de  $\Delta P_1$  e  $\Delta P_2$  e suas respectivas incertezas foram calculados a partir do gráfico de  $P_{k\ell}$  contra  $k$  e os resultados obtidos foram:

$$\Delta P_1 = 21.43 \pm 0.03 \text{ s} \quad (10.1)$$

e

$$\Delta P_2 = 12.38 \pm 0.01 \text{ s}. \quad (10.2)$$

Os valores anteriormente calculados por Winget *et al.* (1991) são  $\Delta P_1 = 21.50 \pm 0.03 \text{ s}$  e  $\Delta P_2 = 12.67 \pm 0.03 \text{ s}$ . Os dois resultados são coerentes. A diferença de  $0.07 \text{ s}$  entre os dois valores para  $\Delta P_1$  é significativa pois para um intervalo de  $k$  variando de 14 a 42 ( $\delta k = 28$ ) um erro de  $0.07 \text{ s}$  em  $\Delta P_1$  implica em um erro de até 2 segundos no cálculo da posição aproximada do período.

A incerteza em  $\Delta P_2$  caiu de  $0.03 \text{ s}$  para  $0.01 \text{ s}$ . A incerteza em  $\Delta P_2$  é menor que em  $\Delta P_1$  porque o número de modos  $\ell = 2$  identificados é maior que o número de modos  $\ell = 1$  (117 para 81).

A razão entre  $\Delta P_1/\Delta P_2 = 1.73$ , tal como esperado. A teoria de pulsações prevê que, para qualquer estrela pulsante,  $\Delta P_1/\Delta P_2 \simeq \sqrt{3} \simeq 1.73$ , no limite assintótico.

## 10.8 Identificação dos Modos $m = 0$

Com base nos valores encontrados para os espaçamentos médios em períodos e assumindo que o modo  $m = 0$  do tripleto de  $517 \text{ s}$  tem índice  $k = 20$ , conforme estimado por Winget *et al.* (1991), chegamos às seguintes fórmulas para o cálculo aproximado dos períodos dos modos  $m = 0$  (picos centrais dos tripletos e multipleros):

$$P_{1,k} = 88.05 + 21.43 k \text{ (s)} \quad \text{para } \ell = 1, \quad (10.3)$$

e

$$P_{2,k} = 338.35 + 12.38 k \text{ (s)} \quad \text{para } \ell = 2. \quad (10.4)$$

Winget *et al.* (1991) estimaram o valor  $k = 20$  para o período central do tripleto com base em comparações dos dados observacionais com modelos teóricos, sendo que a incerteza no valor de  $k$  é de  $\pm 2$ .

## 10.9 Combinações Lineares de Frequências

A presença de picos no periodogramas resultantes de combinações lineares de frequências de pulsação sugere a presença de comportamentos não-lineares. Combinações desse tipo tem sido observadas na GD 358 (Vuille *et al.* 1999, Kepler *et al.* 2003), a PG 1351+489 (Alves *et al.* 2003) e em outras

estrelas. O que faz a estrela entrar em regime não-linear ainda não é bem entendido. Mas, talvez, a PG 1159-035 esteja nos dando uma pista.

Não há indícios de frequências harmônicas na PG 1159-035 e todas as tentativas de explicar suas quase 200 frequências de pulsação ou mesmo, parte delas, como resultado de combinações lineares de uma base de frequências e seus harmônicos, fracassaram. Ao que parece, a PG 1159-035 não apresenta sinais de comportamentos não-lineares, apesar de sua alta amplitude de pulsação.

Uma das grandes diferenças entre a PG 1159-035 e todas as outras estrelas que apresentam comportamentos não-lineares é que todas essas estrelas possuem uma camada convectiva, enquanto que a PG 1159-035 não possui. Isso sugere que talvez a origem dos comportamentos não-lineares seja justamente a convecção, como proposto por Brickhill (1990,1992), Goldreich & Wu (1999a, 1999b).

## 10.10 Massa da Estrela

Os espaçamentos nas seqüências de períodos com  $\ell = 1$  e  $\ell = 2$  dependem fortemente da *massa* da estrela,  $M$  e mais fracamente da luminosidade e da massa de He no envelope. Usamos a relação entre os espaçamentos e a massa pode ser usada para o cálculo da massa da estrela, conforme foi explicado no Cap.7. O valor encontrado foi

$$M/M_{\odot} = 0.586 \pm 0.001 \quad (10.5)$$

o mesmo valor encontrado por Winget *et al.* (1991), porem com uma incerteza três vezes menor.

## 10.11 Modos Amarrados

Uma das questões em aberto em relação à PG 1159-035 era se seu interior já apresentava algum grau de estratificação ou não. No estágio de pré anã-branca os elementos que constituem a estrela, C, O e He ainda não estão completamente separados, já que a zona de convecção no AGB é muito extensa. O processo de precipitação gravitacional faz com que os elementos mais pesados se precipitem para camadas mais profundas enquanto os mais leves se concentram em camadas mais superficiais. Com o tempo, as camadas vão ficando cada vez mais puras e a estrela vai se estratificando. A estratificação ocorre numa escala de tempo da ordem de  $10^6$  anos.

A estratificação do interior da estrela afeta os espaçamentos entre os períodos de pulsação, pois os modos que possuem nodos próximos das zonas de transição entre as camadas têm seus nodos *amarrados* às zonas de transição, fazendo com que o espaçamento entre o período anterior e o seguinte seja notavelmente menor do que o espaçamento médio (Cap.7). Num diagrama de  $\Delta P$  contra  $k$ , esses modos aparecem como mínimos. Se a estrela ainda não está estratificada o amarramento dos modos de pulsação não ocorre e esses mínimos não aparecem no diagrama  $\Delta P$ . Desta forma, através do diagrama  $\Delta P$ , podemos saber se a estrela está estratificada ou não.

O diagrama  $\Delta P$  da PG 1159-035 (para  $\ell = 1$ ) têm o aspecto típico do diagrama  $\Delta P$  de uma estrela estratificada, apresentando 5 mínimos que podem ser interpretados como modos amarrados. São eles, os modos com períodos de 452.43 s, 538.12 s, 668.1 s, 773.7 s e 883.6 s.

A *fase de amarramento* que é definida como o menor período amarrado observado,  $P_{min}$  está relacionada com a temperatura efetiva da estrela. Este período é importante porque é ele que induz

a escala de tempo de esfriamento da estrela. O esfriamento da estrela desloca  $P_{min}$  no diagrama  $\Delta P$  e todos os demais ciclos de amarramento são deslocados com ele.

## 10.12 Localização da Zona de Transição

A posição da zona de transição,  $r_c$ , é muito sensível ao período dos ciclos de amarramento, conforme foi explicando no capítulo anterior e pode ser calculada com boa precisão a partir da determinação dos períodos dos modos amarrados. Para a PG 1159-035, encontramos que

$$r_c/R_\star = 0.83 \pm 0.05 \quad (10.6)$$

A comparação de  $r_c$  com as curvas de densidade geradas pelos modelos funciona como um teste para os mesmos. No modelo teórico para a PG 1159-035, com  $M_{\text{He}} = 10^{-2} M_\star$ , a zona de transição entre o núcleo de C/O e a camada de He estava localizada entre 0.60 e 0.65  $R_\star$ . A diferença entre o modelo e o valor que calculado para  $r_c$  é de  $4.1\sigma$ . Esta discrepância sugere que o modelo ainda não é satisfatório. A zona de transição no modelo ficaria mais próxima de 0.83  $R_\star$  se a massa da camada de He utilizada no modelo fosse menor.

## 10.13 Variações dos Períodos de Pulsação da PG 1159-035

À medida que a estrela evolui, os períodos de pulsação mudam em resposta às alterações que ocorrem no interior da estrela. Chamamos de  $\dot{P} = dP/dt$  a taxa de variação dos períodos de pulsação. Como a PG 1159-035 é uma estrela com alta temperatura superficial, sua evolução é rápida e medidas *diretas* das variações dos períodos podem ser feitas em poucos anos (Costa, Kepler & Winget, 1999).

Como já foi explicado, as amplitudes variam ao longo do tempo, podendo diminuir para baixo do limite de detecção fazendo com que os picos “desapareçam” temporariamente do periodograma da estrela para “ressurgirem” meses ou anos mais tarde. Isso limita o número de modos cuja variação em período pode ser estudada. Apenas cerca de 1/3 dos modos detectados aparecem nos periodogramas de dois ou mais anos.

Assumindo que o período esteja variando linearmente, usamos o método direto para calcular  $\dot{P}$  para os 18 casos em que o modo aparecia em 3 ou mais anos. Todos os valores de  $\dot{P}$  estão entre  $10^{-11}$  a  $10^{-9} \text{ ss}^{-1}$ . O espaçamento em período não pode se afastar muito do espaçamento médio. Isso restringe o intervalo dentro do qual um período pode variar de um ano para outro e explica a concentração de  $\dot{P}$  entre os limites mencionados. Para todos os casos com três ou mais pontos, usamos a técnica do diagrama (O-C) para refinar a determinação de  $\dot{P}$ . Por sua vez, os resultados da técnica do diagrama (O-C) foram refinados através do ajuste não-linear.

Como resultado, conseguimos determinar  $\dot{P}$  para sete modos de pulsação da PG 1159-035:

A escala de tempo evolutiva para a faixa de valores obtidos de  $\dot{P}$  é da ordem de  $10^6$  anos, de acordo como os valor esperado pelos modelos evolutivos de Kawaler & Bradley (1994). Contudo, para os particulares modelos usados para comparação, os valores de  $\dot{P}$  esperados para cada modo

Período (s)	$\dot{P}$ - MD $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}$ - (O-C) $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}$ - nls $\times 10^{-11} \text{ ss}^{-1}$	$\dot{P}/P$ $\times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$	$\ell$	$m$	$k$
451.5	$0.08 \pm 1.65$	$-2.661 \pm 0.002$	$-2.6572 \pm 0.0008$	-5.90	1	+1	17
452.4	$2.54 \pm 0.68$	$1.972 \pm 0.001$	$+1.9707 \pm 0.0004$	+4.36	1	0	17
493.7	$9.10 \pm 4.68$	$-0.238 \pm 0.001$	$-0.2375 \pm 0.0005$	-0.48	1	+1	19
516.0	$12.82 \pm 0.63$	$+11.222 \pm 0.004$	$+11.2258 \pm 0.0001$	+21.75	1	+1	20
517.1	$18.28 \pm 1.71$	$+21.790 \pm 0.001$	$+21.7998 \pm 0.0005$	+42.14	1	0	20
539.3	$-1.53 \pm 0.19$	$-1.806 \pm 0.018$	$-1.7665 \pm 0.0010$	-3.35	1	-1	21
558.4	$-4.30 \pm 0.63$	$-2.520 \pm 0.000$	$-2.5201 \pm 0.0004$	-4.51	1	0	22

**Tab. 10.1:** *Variações dos períodos de pulsação da PG 1159-35.*

de pulsação diferem dos valores obtidos, sugerindo que novos modelos devem ser estudados para a PG 1159-035.

## 10.14 Variações nos Períodos da G117-B15A

A estrela DAV G117-B15A vem sendo observada há cerca de 30 anos. Seu periodograma é bastante simples, quando comparado com o da DOV PG 1159-035: contém apenas 6 modos detectados, sendo que o modo com período de 215 s é o que possui maior amplitude, seguido pelos modos de 270 s e 304. Kepler S.O. e colaboradores vêm fazendo determinações sucessivas da taxa de variação do período dominante de 215 s. No mais recente estudo, Kepler *et al.* (2000) encontraram  $\dot{P} = (+2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{ ss}^{-1}$ . Uma  $\dot{P}$  desta ordem faz da G117-B15A um dos mais precisos relógios naturais conhecidos.

Em nosso trabalho, refizemos o cálculo do  $\dot{P}$  para o período de 215 s e determinamos as taxas de variações dos modos de 270 s e 390 s. Os valores encontrados estão na Tab.10.14:

$T_o$ (BCT)	Período (s)	$\dot{P}$
$244\,2397.917\,514\,2 \pm 0.000\,004\,6$	$215.197\,388\,6 \pm 0.000\,003\,4$	$(+4.72 \pm 0.80) \times 10^{-15} \text{ ss}^{-1}$
$244\,2779.817\,509\,7 \pm 0.000\,045\,1$	$270.453\,729\,0 \pm 0.000\,003\,9$	$(+3.60 \pm 0.72) \times 10^{-14} \text{ ss}^{-1}$
$244\,2786.819\,510\,3 \pm 0.000\,058\,9$	$304.058\,489\,4 \pm 0.000\,007\,8$	$(+7.43 \pm 1.52) \times 10^{-14} \text{ ss}^{-1}$

## 10.15 Conclusões

1. É extremamente conveniente a adoção de um conjunto mínimo de regras de controle de qualidade na redução dos dados fotométricos do WET.
2. Os sinais de baixa frequência e alta amplitude, decorrentes de efeitos de extinção atmosférica introduzem erros na determinação dos modos de pulsação de maior período. A remoção desses sinais através do uso de filtros passa-altas se mostrou bastante eficaz. O uso desse procedimento se mostrou necessário na análise dos dados da PG 1159-035, mas poderia ter sido dispensado na análise dos dados da G117-B15A. A razão disso é que a maior parte dos períodos de pulsação detectados na PG 1159-035 é maior que 300 segundos, enquanto que todos os períodos de pulsação detectados na G117-B15A são menores do que 300 segundos.
3. O uso de um limite de detecção baseado na amplitude máxima (global ou local, conforme o caso) se mostrou mais adequada do que o limite de detecção atualmente aceito, baseado na amplitude média (local) e definido como 4 vezes a amplitude média.
4. Testes baseados em simulações de Monte Carlo demonstraram que o ajuste simultâneo se senóides através de técnicas de ajuste não-linear, como faz o programa `multif`, reduz os erros nas determinações das frequências, amplitudes e tempos de máximo das senóides ajustadas, em comparação com os erros decorrentes de um ajuste linear de uma única senóide. Os mesmos testes mostram que as incertezas calculadas para o ajuste linear de uma única senóide a uma série de tempo multiperiódica *subestimam* em muito as incertezas reais, enquanto que as incertezas calculadas pelo programa `multif` são consistentes com as incertezas calculadas via Monte Carlo.
5. Foram identificados 198 modos de pulsação nos periodogramas dos anos de 1983, 1985, 1989, 1993 e 2002, sendo 81  $\ell = 1$  e 117  $\ell = 2$ ; 76 modos a mais do que os que foram identificados por Winget *et al.* (1991) no periodograma dos dados de 1989. Todos os modos têm períodos entre 380 e 990 segundos (frequências entre 1010 e 2630  $\mu Hz$ ) e suas amplitudes variam muito de ano para ano. A grande maioria dos modos está presente em apenas um ou dois dos anos. Apenas 14 modos, todos  $\ell = 1$ , são persistentes, estando presentes em todos os anos, embora suas amplitudes tenham sofrido variação. Conclui-se que não é possível se fazer a identificação dos modos de pulsação da PG 1159-035 com base em uma única campanha anual. Nenhuma evidência da presença modos  $\ell > 2$  foi encontrada.
6. Foram identificados 29 tripletos ( $\ell = 1$ ) e modos avulsos de 52 multipletos. Não há sobreposição de tripletos e, para períodos até 600 segundos, os multipletos também não se sobrepõem. Para períodos entre 600 e 750 segundos ocorre a sobreposição de um pico em multipletos e de dois picos para períodos acima de 750 segundos. Essa sobreposição dificulta a identificação dos modos em multipletos.
7. Não há indícios de frequências harmônicas ou de combinações de frequências, características de comportamento não-linear. Todas as estrelas que apresentam esse tipo de comportamento possuem camada convectiva, enquanto a PG 1159-35, por ser uma DOV, não possui camada convectiva. Isto concorda com a proposta de que a convecção é a causa dos comportamentos não-lineares.
8. Os espaçamentos em períodos para as séries  $\ell = 1$  e  $\ell = 2$  da PG 1159-035 são respectivamente:  $\Delta P_1 = 21.43 \pm 0.03 s$  e  $\Delta P_2 = 12.38 \pm 0.01 s$ , consistentes com os resultados



anteriores de Winget *et al.* (1991) e a razão  $\Delta P_1/\Delta P_2 \simeq \sqrt{3}$ , tal como previsto pela teoria de pulsações para o limite assintótico.

9. A massa da PG 1159-035 é  $M/M_\odot = 0.586 \pm 0.001$ .
10. O diagrama  $\Delta P$  da PG 1159-035 sugere a existência de 5 modos amarrados (períodos: 452.4 s, 538.2 s, 668.1 s, 773.7 s e 883.6 s) indicando que a estrela já possui um certo grau de estratificação.
11. A posição da zona de transição,  $r_c$ , da PG 1159-035 foi calculada a partir dos ciclos de amarramento e o valor obtido foi  $r_c/R_\star = 0.83 \pm 0.05$ . A posição da zona de transição entre o núcleo de C/O e a camada de He em modelos para a PG 1159-035 está entre  $0.60 - 0.65 R_\star$ , indicando que os modelos ainda não são adequados.
12. Determinamos as taxas de variação temporal de sete modos de pulsação. Os valores obtidos não estão em concordância com os valores previstos pelos modelos evolutivos de Kawaler & Bradley.
13. Determinamos as taxas de variação do período dominante da DAV G117-B15A e dos outros dois modos de maior amplitude. Os resultados são mostrados na Tab.10.14.

## 10.16 Sugestões para Trabalhos Futuros

Abaixo, listamos algumas sugestões para futuros estudos da PG 1159-035 e G117-B15A:

- Seria interessante estudar as variações em amplitude dos modos de pulsação para estimar em que escala de tempo eles estão realmente variando (dias, semanas, meses ou anos?). Isto ajudaria a entender melhor e a prever a razão entre modos detectados e não-detectados para um mesmo  $\ell$ .
- Também seria interessante estudar com mais detalhes as variações em período nos modos em que estas variações parecem estar ocorrendo de forma não-linear. Talvez essas variações estejam ocorrendo em escalas de tempo curtas de forma que taxas de ordem superior à primeira ( $\ddot{P}$ ,  $d^3P/dt^3$ , etc) possam ser determinadas a partir de um ajuste não-linear (que leve em conta esses termos) à cada conjunto de dados anuais.
- Realização de novas campanhas observacionais da PG 1159-035. A última campanha do WET para monitoramento fotométrico da PG 1159-035 foi realizada em 2002. Um espaçamento de  $\sim 4$  anos entre campanhas consecutivas tem se mostrado adequado, neste intervalo de tempo os períodos apresentam variações significativas comparadas com as incertezas. Uma campanha em que a PG 1159-035 seja observada de forma quase-contínua por 10 a 14 dias, como as realizadas em 1989 e 1993, seria o ideal.
- A identificação dos modos de pulsação nos dados de 1983 a 2002 facilitará enormemente a identificação dos períodos em futuros periodogramas, permitindo a confirmação dos modos de mais baixa amplitude e a detecção de modos ausentes nos dados que estudamos.
- Novas determinações de período representam um ponto a mais nos gráficos de período contra o tempo e nos diagramas (O-C), o que permitirá a determinação de  $\dot{P}$  para *outros* modos de pulsação e a redução da incerteza no cálculo de  $\dot{P}$  dos modos até agora estudados.
- Desenvolver novos modelos para estrelas PG 1159 que se ajustem melhor aos resultados observacionais. No momento, este é o grande desafio no estudo de pré-anãs brancas.
- Dar continuidade às observações da G117-B15A e estudar a possibilidade de se fazer a medida dos três modos de mais baixa amplitude presentes em seus periodogramas.
- Estudar a variabilidade das DOs recentemente descobertas pelo SLOAN (o anúncio da descoberta foi feito há poucos dias!), à procura de novas DOVs.

\* \* \* \* \*

## Apêndice A

# Função Sinusoidal com Período Variável

Este apêndice apresenta a dedução da Eq.8.21 apresentada no Cap.8 que permite calcular o tempo de máximo em função do período inicial,  $P_o$ , e da taxa de variação temporal do período,  $\dot{P}$ , e discute um aparente paradoxo envolvendo a definição de  $\dot{P}$ , decorrente de um erro matemático.

### A.1 Definição de Período

Seja  $y$  uma função sinusoidal com *amplitude*  $A$ , cujo argumento é o ângulo  $\theta$  (dado em radianos):

$$y = A \sin \theta \quad . \quad (\text{A.1})$$

Por definição, o *período*,  $L$ , de uma função periódica  $f(x)$  é o menor valor  $L > 0$  para o qual  $f(x + L) = f(x)$  e a derivada  $f'(x + L) = f'(x)$ , para qualquer valor de  $x$ . No caso da função seno, o *período (angular)* é  $L = 2\pi$ , constante. Como  $\theta$  é uma função do tempo  $t$ , ( $\theta = \theta(t)$ ), precisamos chegar a uma definição para o *período temporal*,  $P$ , coerente com a noção intuitiva que temos sobre período. Podemos chegar a esta definição partindo do conceito de *número de ciclos*.

Por definição, um *ciclo* de uma função periódica  $f(x)$ , de período  $L$ , é qualquer segmento da curva de  $f(x)$  para valores de  $x$  em um intervalo fechado qualquer, de 1 período de comprimento,  $x$  em  $[x, x + L]$ . O *número de ciclos*,  $E$ , contidos em um intervalo  $\Delta x \equiv x - x_o$  pode ser então definido como  $E \equiv \Delta x / L$ . Para uma senóide,

$$E = \frac{\theta - \theta_o}{2\pi} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Como  $E = E(\theta)$  e  $\theta = \theta(t)$ , então  $E = E(t)$ , ou seja, o número de ciclos varia com o tempo,  $t$ ; cada ponto da curva  $y(t)$  pode ser representado pelo respectivo número de ciclos,  $E$ . Por outro lado, cada instante de tempo  $t$  corresponde a um valor de  $E$ ,  $t = t(E)$  (a relação entre  $t$  e  $E$  é bi-unívoca).

De acordo com a noção que temos de *período* (temporal), o período  $P$  é o tempo necessário para se completar 1 ciclo de um processo periódico qualquer. Uma definição para  $P$  baseada nesta noção seria válida apenas se o período desse processo fosse constante no tempo. Note que, de acordo com esta noção, o período é uma *taxa*: ciclos por unidade de tempo. Isto pode ser expresso, de forma mais geral, por meio da derivada:

$$P \equiv \frac{dt}{dE} \quad . \quad (\text{A.3})$$

Esta definição de período pode ser aplicada tanto para os casos em que o período (temporal) é constante ( $P = P_o = \text{constante}$ ), quanto para os casos em que está variando no tempo ( $P = P(t)$ ).

## A.2 Tempos de Máximo

Como  $t$  pode ser expresso em termos de  $E$ ,  $t = t(E)$ , então, podemos expressar  $P$  como uma função de  $E$ ,  $P = P(E)$ . Isto nos permite expandir  $P(E)$  via série de Taylor:

$$P(E) = P(0) + \left. \frac{dP}{dE} \right|_0 E + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2P}{dE^2} \right|_0 E^2 + \dots \quad (\text{A.4})$$

Se os termos de ordem maior que a primeira forem desprezíveis, podemos considerar somente os dois primeiros termos da expansão acima. Vamos chamar esta condição de *condição 1*. Mais adiante, vamos mostrar que para DOVs e anãs brancas pulsantes, esta condição é satisfeita. No momento, vamos assumir que a condição 1 é satisfeita e, portanto,

$$P(E) \simeq P(0) + \left. \frac{dP}{dE} \right|_0 E \quad . \quad (\text{A.5})$$

Na equação acima,  $P(E) = P$ ,  $P_o \equiv P(0)$  e, aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{dP}{dE} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{dE} \quad , \quad (\text{A.6})$$

onde,  $dt/dE = P_o$  (derivada em  $E = 0$ ) e  $dP/dt$ , por definição, é  $\dot{P}$ :

$$\frac{dP}{dt} \equiv \dot{P} \quad . \quad (\text{A.7})$$

Podemos agora reescrever a Eq.A.5 desta forma:

$$P = P_o + P_o \dot{P} E \quad . \quad (\text{A.8})$$

Usando a definição  $P = dt/dE$ ,

$$\frac{dt}{dE} = P_o + P_o \dot{P} E \quad , \quad (\text{A.9})$$

e passando a diferencial  $dE$  para a direita da igualdade,

$$dt = (P_o + P_o \dot{P} E) dE \quad , \quad (\text{A.10})$$

podemos integrar os dois termos:

$$\int_{T_o}^T dt = \int_0^E (P_o + P_o \dot{P} E') dE' \quad . \quad (\text{A.11})$$

Na integral da direita substituímos  $E$  por  $E'$  no integrando da integral da direita para que o símbolo  $E$  pudesse ser usado como limite superior e, por conveniência, fizemos  $E = 0$  no instante

$t = T_o$ , ou seja, os ciclos começam a ser contados a partir do instante  $T_o$ . Resolvendo as integrais, temos:

$$T - T_o = P_o E + \frac{1}{2} P_o \dot{P} E^2 \quad , \quad (\text{A.12})$$

ou

$$T = T_o + P_o E + \frac{1}{2} P_o \dot{P} E^2 \quad . \quad (\text{A.13})$$

Particularmente, se  $T_o$  for um *tempo de máximo qualquer*,  $T$  será também um tempo de máximo sempre que  $E$  for um número *inteiro* de ciclos. Este caso particular é usado para se calcular  $\dot{P}$  na técnica do diagrama (O-C) descrita no Cap.8, onde fizemos  $O \equiv T$ :

$$O = T_o + P_o E + \frac{1}{2} P_o \dot{P} E^2 \quad . \quad (\text{A.14})$$

### A.3 Condição 1

A condição necessária para que a Eq.A.13 seja válida, é que os termos de ordem superior à primeira na Eq.A.4 sejam desprezíveis quando comparados com o termo de primeira ordem:

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 P}{dE^2} \right|_0 E^2 \ll \left. \frac{dP}{dE} \right|_0 E \quad (\text{A.15})$$

ou

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 P}{dE^2} \right|_0 E \ll \left. \frac{dP}{dE} \right|_0 \quad . \quad (\text{A.16})$$

Nas desigualdades acima, tanto as derivadas quanto  $E$ , devem ser dados em termos de valor absoluto (positivos). Para simplificar, omitimos os símbolos de valor absoluto. Fazendo

$$\frac{dP}{dE} = \frac{dP}{dt} \frac{dt}{dE} = \dot{P} P \quad (\text{A.17})$$

e

$$\frac{d^2 P}{dE^2} = \frac{d}{dE} \left( \frac{dP}{dE} \right) = \frac{d}{dt} \frac{dt}{dE} \left( \frac{dP}{dE} \right) = \frac{d}{dt} P^2 \dot{P} = 2P\dot{P}^2 + P^2\ddot{P} \quad (\text{A.18})$$

onde  $\ddot{P}$  é a derivada segunda de  $P$  em relação ao tempo, e substituindo na Eq.A.16, temos:

$$\frac{1}{2} \left( 2P_o \dot{P}^2 + P_o^2 \ddot{P} \right) E \ll \dot{P} P_o \quad (\text{A.19})$$

$$P_o \dot{P}^2 + \frac{P_o^2 \ddot{P}}{2} \ll \frac{\dot{P} P_o}{E} \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{P} + \frac{P_o \ddot{P}}{2\dot{P}} \ll \frac{1}{E} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{P_o \ddot{P}}{2\dot{P}} \ll \frac{1}{E} - \dot{P} \quad . \quad (\text{A.22})$$

Façamos uma estimativa de um limite superior para  $E$ . Para um período de pulsação de 50 s (em geral os períodos de pulsação de PWD e anãs brancas são maiores que 50 s) o número de ciclos,  $E$ , em 100 anos de observação seria  $E = 3.2 \times 10^7$ . Podemos usar este valor para estabelecer um limite mínimo para  $1/E$ :  $1/E < 3.2 \times 10^{-8}$ . Em pré-anãs brancas,  $\dot{P}$  (em módulo) é da ordem de  $10^{-10} \text{ ss}^{-1}$  ou menor. Em anãs brancas,  $\dot{P}$  é varias ordens de grandeza menor que  $10^{-10} \text{ ss}^{-1}$ . Portanto,

$$1/E \gg \dot{P}, \quad (\text{A.23})$$

e podemos escrever que

$$\frac{P_o \ddot{P}}{2\dot{P}} \ll \frac{1}{E} \quad , \quad (\text{A.24})$$

fazendo com que a *condição 1* seja:

$$\ddot{P} \ll \frac{2\dot{P}}{P_o E} \quad . \quad (\text{A.25})$$

Como  $P_o E$  (período vezes o numero de ciclos) é da ordem do tempo de observação e  $\ddot{P}$  é a taxa de variação temporal de  $\dot{P}$ , então  $\ddot{P} P_o E$  é igual a variação de  $\dot{P}$  durante o tempo de observação,  $\Delta \dot{P} = \ddot{P} P_o E$ , e

$$\Delta \dot{P} \ll 2\dot{P} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\Delta \dot{P}}{\dot{P}} \ll 2 \quad (\text{A.27})$$

em outras palavras, a variação relativa de  $\dot{P}$  ao longo do tempo de observação tem que ser muito menor do que um fator de 2. A condição 1, expressa tanto através da Eq.A.25 quanto através da Eq.A.27 é a condição necessária para que a Eq.A.13 seja válida e a técnica do diagrama (O-C) possa ser empregada.

## A.4 Número de Ciclos

Se  $P_o$  é constante ( $\dot{P} = 0$ ), o número de ciclos,  $E$ , pode ser calculado de forma simples através da equação:

$$E = \frac{T - T_o}{P_o} \quad . \quad (\text{A.28})$$

Se a variação do período,  $\dot{P}$ , é pequena, a Eq.A.28 continua sendo uma boa aproximação, mas para  $\dot{P}$  grandes e/ou longos períodos de tempo ( $T \gg T_o$ ), pode ser necessário calcular  $E$  com maior precisão. Para isso, partimos da Eq.A.13:

$$T = T_o + P_o E + \frac{1}{2} P_o \dot{P} E^2 \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{1}{2} P_o \dot{P} E^2 + P_o E + (T_o - T) = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$E = \frac{-P_o + \sqrt{P_o^2 - 4P_o \dot{P} (T_o - T)/2}}{2P_o \dot{P}/2} \quad (\text{A.31})$$

$$E = \frac{-P_o + P_o \sqrt{1 - 2\dot{P}(T_o - T)/P_o}}{P_o \dot{P}} \quad (\text{A.32})$$

$$E = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2\dot{P}(T_o - T)/P_o}}{\dot{P}} \quad (\text{A.33})$$

Esta é a fórmula exata para o cálculo de  $E$ . Podemos mostrar que quando a condição da Eq.A.23 é satisfeita, a Eq.A.33 se reduz a Eq.A.28.

O termo com a raiz quadrada pode ser expandido via série de Taylor:

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \dots \quad (\text{A.34})$$

onde  $x \equiv 2\dot{P}(T_o - T)/P_o$ . Como  $(T_o - T)/P_o \simeq E$ , podemos escrever  $x \simeq 2\dot{P}E$ . Mas, a Eq.A.23 garante que  $\dot{P}E \ll 1$ , logo  $x \ll 1$  e podemos desprezar todos os termos de ordem superior à primeira na expansão acima:

$$\sqrt{1 - 2\dot{P}(T_o - T)/P_o} = 1 - \frac{1}{2} 2\dot{P}(T_o - T)/P_o = 1 - \dot{P}(T_o - T)/P_o \quad (\text{A.35})$$

$$E \simeq \frac{-1 + 1 - \dot{P}(T_o - T)/P_o}{\dot{P}} \quad (\text{A.36})$$

$$E \simeq \frac{T - T_o}{P_o} \quad (\text{A.37})$$

## A.5 Variação Linear do Período

Agora, queremos mostrar se a Eq.A.13 é válida, então o período está variando linearmente no tempo, ou seja,  $P = P_o + \dot{P}(t - t_o)$ .

Pela Eq.A.8,

$$P = P_o + P_o \dot{P} E \quad (\text{A.38})$$

Usando a Eq.A.37, podemos escrever  $E$  em termos de  $t$ :

$$P = P_o + P_o \dot{P} \left( \frac{T - T_o}{P_o} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$P = P_o + \dot{P}(t - t_o) \quad , \quad (\text{A.40})$$

onde substituímos  $T$  por  $t$  e  $T_o$  por  $t_o$ .

## A.6 Função Sinusoidal com Período Variável

Agora, estamos em condições de escrever a equação sinusoidal (Eq.A.41),

$$y = A \sin \theta \quad , \quad (\text{A.41})$$

levando em conta a variação em período. Para isso, vamos expandir  $\theta = \theta(t)$  via série de Taylor:

$$\theta(t) = \theta_o + \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_o t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\theta}{dt^2} \right|_o t^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\theta}{dt^3} \right|_o t^3 + \dots \quad (\text{A.42})$$

Vamos assumir que todos os termos de  $t$  de ordem superior à segunda são desprezíveis, fazendo com que:

$$\theta(t) \simeq \theta_o + \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_o t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\theta}{dt^2} \right|_o t^2 \quad (\text{A.43})$$

Por definição, a *frequência angular*,  $\omega$ , é

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \quad . \quad (\text{A.44})$$

Pela Eq.A.2,  $\theta = 2\pi E - \theta_o$ , logo,

$$\omega = \frac{d}{dt} (2\pi E - \theta_o) = 2\pi \frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{P} \quad . \quad (\text{A.45})$$

Por outro lado,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} \quad . \quad (\text{A.46})$$

Logo, a Eq.A.43 pode ser escrita como:

$$\theta(t) \simeq \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \dot{\omega}_o t^2 \quad . \quad (\text{A.47})$$

Agora, podemos escrever a equação acima em termos de  $P_o$  e  $\dot{P}$ , levando em conta que

$$\omega = \frac{2\pi}{P} \rightarrow \omega_o = \frac{2\pi}{P_o} \quad (\text{A.48})$$

e

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = 2\pi \frac{\dot{P}}{P^2} \rightarrow \dot{\omega}_o = 2\pi \frac{\dot{P}_o}{P_o^2} \quad , \quad (\text{A.49})$$



$$\theta(t) \simeq \theta_o + \frac{2\pi}{P_o} t + \frac{1}{2} \frac{2\pi \dot{P}}{P_o^2} t^2 \quad (\text{A.50})$$

$$\theta(t) \simeq \theta_o + \frac{2\pi}{P_o} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{P} t}{P_o} \right) t \quad . \quad (\text{A.51})$$

Se  $x \equiv \dot{P}t/2P_o \ll 1$ , a seguinte aproximação será válida:

$$(1 - x) \simeq \frac{1}{1 + x} \quad , \quad (\text{A.52})$$

de forma que a Eq.A.51 pode ser escrita como

$$\theta(t) \simeq \theta_o + \left( \frac{2\pi}{P_o + \frac{1}{2}\dot{P}t} \right) t \quad . \quad (\text{A.53})$$

Portanto, a equação para uma função sinusoidal com período variável é

$$y(t) \simeq A \sin \left[ \theta_o + \left( \frac{2\pi}{P_o + \frac{1}{2}\dot{P}t} \right) t \right] \quad . \quad (\text{A.54})$$

e é esta função que deve ser usada em ajustes não-lineares.

## A.7 Paradoxo do $\dot{P}$

Um descuido matemático na derivação da equação sinusoidal com período variável, gerou muita confusão e grandes discussões, pois levava a um resultado aparentemente paradoxal para  $\dot{P}$ . Descrevemos, abaixo o “*paradoxo do  $\dot{P}$* ”.

Quando  $\dot{\omega} = 0$ , a Eq.A.47 torna-se:

$$\theta(t) = \theta_o + \omega_o t, \quad (\text{A.55})$$

onde  $\omega_o$  é uma *constante*. Neste caso particular,

$$\omega = \omega(t) = \omega_o + \dot{\omega}t = \omega_o, \quad (\text{A.56})$$

e podemos escrever

$$\theta(t) = \theta_o + \omega t. \quad (\text{A.57})$$

Temos então,

$$y(t) = A \sin [\theta_o + \omega t] \quad . \quad (\text{A.58})$$

Ressaltamos que esta equação só é válida se  $\dot{\omega} = 0$  e que  $\omega = \omega_o = \text{constante}$ . O erro ocorre quando não se percebe que  $\omega = \text{constante}$  e se faz a expansão de  $\omega$ , como se  $\omega$  não fosse uma função constante:

$$\omega = \omega_o + \dot{\omega}t \tag{A.59}$$

Isto faz com que

$$y(t) = A \sin [\theta_o + (\omega_o + \dot{\omega}t) t] . \tag{A.60}$$

Escrevendo  $w$  em termos de  $P_o$  e  $\dot{P}$ , tal como fizemos antes,

$$\omega = \frac{2\pi}{P_o} + \frac{2\pi}{P_o^2} \dot{P}t = \frac{2\pi}{P_o + \dot{P}t} \tag{A.61}$$

fazendo com que  $y(t)$  fique:

$$y(t) = A \sin \left[ \theta_o + \left( \frac{2\pi}{P_o + \dot{P}t} \right) t \right] . \tag{A.62}$$

Note que na equação correta, Eq.A.54,  $\dot{P}$  no denominador que aparece no argumento da função seno é multiplicado por um fator 1/2. Já na equação acima,  $\dot{P}$  é multiplicado pela unidade. Quando se usava esta forma incorreta, sempre se obtinha um valor para  $\dot{P}$  igual a metade do valor obtido pelo método do diagrama (O-C), pois

$$\frac{1}{2} \dot{P}_{correto} = \dot{P}_{errado} . \tag{A.63}$$

Um resultado *aparentemente* paradoxal. Na verdade, incorreto.

\* \* \* \* \*

## Apêndice B

# MULTIF Tutorial

The **multif** program performs the nonlinear fitting of multiple sinusoidal curves to a light curve from a set of initial guess for the frequencies, returning the fitted values for the frequencies, amplitudes and times of maximum.

This tutorial<sup>1</sup> shows how to use it and gives basic information for you to understand how the program works. It assumes you are working in a unix-like platform. The symbol % represents the shell's prompt.

## B.1 The fitted function

The fitted function is a sum of sinusoidal curves with frequencies  $f_i$  \* $i = 1, M$ . The sum can include harmonic frequencies of them:  $(k + 1)f_i$ , ( $k = 0, 1, \dots, h_i$ ). For  $k = 0$  we have the fundamental frequency and for  $k = 1, 2, \dots$  we have the first harmonic, the second harmonic, etc. ( $k$  is the index of the harmonic frequency). **multif** uses the initial guess for the frequencies  $f_i$  to refine their values and calculates their amplitudes  $A_{ik}$  and times of maximum  $T_{max_{ik}}$ .

But, you may be interested to fit not all frequencies, but only some of them while the other are maintained fixed. To do this, the  $M$  frequencies are divided in two sets: the first  $M_{fit}$  frequencies ( $f_i$ , with  $i = 1, 2, \dots, M_{fit}$ ) to be fitted and the remaining  $M_{fix}$  frequencies ( $f_i$ , with  $i = M_{fit} + 1, \dots, M$ ). The fitting of the  $M_{fit}$  first frequencies is done taking into account the fixed frequencies. Mathematically:

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{M_{fit}} \sum_{k=0}^{h_i} A_{ik} \sin \left( 2\pi(k+1)f_i(t - T_{max_{ik}}) + \frac{\pi}{2} \right)}_{\text{Fitted frequencies}} + \underbrace{\sum_{i=M_{fit}+1}^M \sum_{k=0}^{h_i} A_{ik} \sin \left( 2\pi(k+1)f_i(t - T_{max_{ik}}) + \frac{\pi}{2} \right)}_{\text{Fixed frequencies}}$$

where:

---

<sup>1</sup> Multif Tutorial Version 0.5

$t$	=	time (in seconds)
$y(t)$	=	modulation in intensity (mi)
$M_{fit}$	=	number of (fundamental) fitted frequencies
$M_{fix}$	=	number of (fundamental) fixed frequencies
$M = M_{fit} + M_{fix}$	=	total number of frequencies
$i$	=	frequency index ( $0 < i \leq 500$ )
$h_i$	=	number of harmonics of the $i^{th}$ frequency ( $h_i \geq 0$ )
$k$	=	index of the harmonic frequency
$f_i$	=	$i^{th}$ frequency (in Hz)
$A_{ik}$	=	Amplitude (in ma) of the $k^{th}$ harmonic of $f_i$
$T_{max_{ik}}$	=	time of maximum (in sec) of the $k^{th}$ harmonic of $f_i$

Time of maximum  $T_{max_{ik}}$ , by definition, is a instant of time for which the  $ik$  sinusoidal component has a maximum value. This is the reason for the factors  $\pi/2$ .

## B.2 Starting multif

Type:

```
% multif
```

in the command line. It will show something like that:

```
-----
multif - Version 3.34+ - Jan/2002 - by J.E.S.Costa
-----
```

This is the **multif** header with the version number and version date. The first operating version was ready in Jan/2002. Each time that I implement the program, the version number is changed. To see only the program version version number and the indicated version of the Multif Tutorial, type:

```
% multif -v
```

```
multif - Version 3.40+
Multif Tutorial - Version 0.5
```

## B.3 Project name

**multif** will ask for a project name. All the output filenames are based on the project name. The project name can be any word or character string, following the same rules for filenames in unix-like systems, except that the string cannot finish with a point (.). Type anything that has a meaning for you. If you type an invalid project name, a warning message will be displayed.

```
Project name (0=no).....: starXYZ
```

If you only want to see the results, without output files, just type 0 (zero).

```
Project name (0=no).....: 0
```

In this case, no output file will be created.

## B.4 The light curve

**multif** will ask what is the name of the file with the light curve. Type the file name:

```
File with light curve.....: curve.dat
```

If necessary, you may include the whole path:

```
File with light curve.....: /home/edu/stars/XYZ/curve.dat
```

If it doesn't find the file, a warning message is displayed.

**List of files** — **multif** can read data from more than one file, but all files *must* be in the same format. To do this, you must create a one-column file with the list of the files to be read. For example:

```
file_01.dat
file_02.dat
file123.xyz
chk23xxx.
```

Past the file-list name to **multif**, putting an @ before the name:

```
File with light curve.....: @file_list
```

**A trick** — you can list the content of the current directory typing **ls** in the **multif** prompt. This works exactly like the unix **ls** command. This is useful when I forget filenames or when the filename is large or complicated: all I need to do is type **ls** and use the mouse to copy and past the filename to the prompt ;)

```
File with light curve.....: ls
curve.dat  curve2.dat  freq.hz  freq.uhz
File with light curve.....:
```

This trick also works for the **Project name** prompt.

## B.5 File format

The next step is say to **multif** what is the format of the light curve file.

Basically, a light curve is a data set with two columns: *time* and *modulation in intensity* (mi), but the file can also be in different formats: time unit may be seconds or days (BCT); the data number may appear in the first line, or not; the data set may be unique or may be split in several chunks; the data may be in one or more files; etc. The current version of **multif** works with 5 different data formats, denoted by the the characters 2,3, b, c, and e:

- **Format: 2** — the file has 2 columns: time & mi. The time unit may be seconds or days (BCT). Example:

```
1207426.6      -0.0406805780
1207431.6      -0.0392964323
1207436.6       0.0401238143
...
```

In the example above, time is in seconds.

- **Format: 3** — the file has 3 columns: *time*, *modulation in intensity* and *standard deviation* (sigma of the mi measurement). The time unit may be seconds or days (BCT). Example:

```
1207426.6      -0.0406805780   1.0
1207431.6      -0.0392964323   1.0
1207436.6       0.0401238143   1.0
...
```

In the example above, all sigmas are equal to 1.0.

- **Format: b** — **b1d** format. Data number in the *first* line is followed by the data set with two columns (time & mi) with time *in seconds*. Example:

```
232591
1207426.6      -0.0406805780
1207431.6      -0.0392964323
1207436.6      +0.0401238143
...
```

- **Format: c** — **carl** format. In this format, the data are divided in “chunks”. Each chunk starts with its data number, followed by the data in two columns (time & mi) with time in seconds. The data file has the number of chunks in the *first* line followed by the chunks. Example:

```

2
3
1207426.6      -0.0406805780
1207431.6      -0.0392964323
1207436.6       0.0401238143
2
1207461.6      -0.0417785781
1207466.6      -0.0399995961

```

In the example above, the file has 2 chunks: one with 3 points and the other with 2 points. And the timing is in seconds.

- **Format: e** — this is the format that I used for years. It is equal to b1d format, with data number in the 1st line, but time is in *BCT* (days) and not in seconds, suitable when you are studying period changes.

```

82471
7593.3344054   -1.84800E-03
7593.3345212   -1.71750E-02
7593.3346369    1.40680E-02
...

```

Don't worry with the alignment: no specific alignment is necessary. To get some help about formats, type `h`.

**Sigmas** — `multif` assumes  $\sigma = 1$  (standard deviation =1 ) for all data, except in the format-3 where the sigmas are defined in the 3rd column. It's also possible to use a different sigma for all data of each chunk in the carl-format (format-c). For this, put the sigma in the side of the data number of each chunk. For example:

```

2
3  1.0
1207426.6      -0.0406805780
1207431.6      -0.0392964323
1207436.6       0.0401238143
2  0.8
1207461.6      -0.0417785781
1207466.6      -0.0399995961
2
1207537.6      +0.0523232322
1207541.6      -0.0343438345

```

In the example above, all data of the 1st chunk have  $\sigma = 1.0$ ; all data of the 2nd chunk have  $\sigma = 0.8$ ; and all data of the 3rd chunk have  $\sigma = 1.0$  (`multif` assumes  $\sigma = 1$ , if the sigma is not defined).

**Data reading and possible errors** — if all runs right, the reading of the data file must take few seconds. If something runs wrong an error message will be displayed explaining what happened. There are 5 possible causes for errors:

1. **multif** cannot open the data file. Maybe you have typed a different filename and/or data file doesn't exist. Or the data file hasn't permission for reading. Some times, this error occurs when the data file is opened and being read by another program.
2. error while reading the data file. In this case, check up the file format.
3. **multif** cannot close the file. A uncommon case. I *never* saw that. But if it occur, you will know.
4. excessive number of data. There is a fixed limit for the maximum number of data that can be read. For the current version, this limit is equal to 500 000. If the data number is greater than the maximum limit, the reading is aborted and the program stops. The current limit is large enough for the most of cases, but if you need to read a file with a greater number of data, change the value of the parameter IDIM in the **multif** source code and re-compile the program:

```

...
parameter (IDIM=500000, LDIM=500) ! <--- IDIM: MAXIMUM LIMIT
parameter (JDIM=300, KDIM=900)    ! must be equal to multif_nlsf.
...

```

## B.6 Time Unit

The timing may be in *seconds* or in *days* (BCT).

The most appropriated time scale for the study of variable stars is the BCT (Barycentric Julian Coordinated Time). Years ago, BCT was known as BJD (Barycentric Julian Date) and before, as BJED (Barycentric Julian Ephemeris Date). Different names for the same thing. **multif** uses the current name, BCT.

A BCT date is a large number with a lot of digits, something like  $BCT = 2447593.33440549$ , but is usual to discard the two (or three) first digits subtracting 2400000., 2440000. or 2450000. from the BCT date. This may be a solution when a program or machine has problems with large numbers.

BCT with six digits after the floating point, gives us an error of less than 0.1 seconds. Perfectly reasonable, because the error in determination of the BCT date is also of the order of 0.1 seconds. All other digits after the 6th are redundant. Five digits after the floating point gives us an error of  $\sim 1$  second, still acceptable. *Never use less than five digits* after the floating point.

The formats **b**, **c**, and **e** have fixed time units: seconds, seconds, and BCT, respectively. The time units for the formats **2** and **3** are free and must be defined by the user:



```
Time units (s,d).....: s
```

Type **s** for *seconds* and **d** (days) for *BCT*.

## B.7 Checking the time series

**multif** adopts the *first point* read of the light curve as *starting time* and subtracts the starting time from all the times. If time is in BCT, it is converted to seconds. The first three lines of the new time series and the number of points are shown.

It is a good opportunity to check if all are OK. Look the timing: the first time *must be* zero. The difference between the first-and-second times and between the second-and-third times ( $\Delta t$ ) must be consistent with typical values for integration times (5, 10 seconds). Modulation in intensity must be fractional values, between -1 and +1.

```
First three lines (time in seconds):
Line #1 --->      0.00  -0.407E-01
Line #2 --->      5.00  -0.393E-01
Line #3 --->     10.00  -0.401E-01
Number of points.....: 232591
```

If anything looks strange, abort the program with **CTRL-c** and verify if you entered the correct file format or if the data file is OK.

## B.8 Starting time

If the timing of the light curve is in seconds, **multif** will ask for the starting time in BCT:

```
T_start in BCT (0=no).....: 9432.123456
```

Remember: **T\_start** is the time of the **first point** of the read data file. If you don't know or if you are not sure, don't worry, type zero. **T\_start** is optional.

## B.9 Frequencies

```
Frequency file name (0=keyboard)..:
```

The frequencies to be fitted may be entered via file or via keyboard.

**Frequencies via file** — the frequencies must be in a one-column file. Example:

```
1940.123
2001.332
2432.123
2781.329
```

```
Frequency file name (0=keyboard).: freq.uhz
```

In the example above, the frequency file is called `freq.uhz`. The frequency unit can be  $\mu Hz$ ,  $mHz$  or  $Hz$ . **multif** uses the low-case letter u (u of “urgence”) to denote the Greek letter  $\mu$  (mu). If the filename is `*.uhz`, **multif** assumes frequency unit= $\mu Hz$ . If the filename is `*.mhz`, **multif** assumes frequency unit= $mHz$ . If the filename is `*.hz`, **multif** assumes frequency unit= $Hz$ . If the filename is `*.sec`, **multif** assumes that you are working with **periods** (in seconds) instead of frequencies. If the filename extension isn't or `*.uhz`, or `*.mhz`, or `*.hz`, and nor `*.sec`, **multif** will ask what evil of unit you are using.

**Fitting harmonic frequencies** — put the number of harmonics to be considered on the side of each frequency. Put zero if the frequency hasn't any harmonic. For example:

```
1000.0 3
1200.0 1
1700.0 0
```

In the example above, the frequencies to be fitted are:  $f_1 = 1000\mu Hz$  and its 3 first harmonics:  $2f_1 = 2000\mu Hz$ ,  $3f_1 = 3000\mu Hz$  and  $4f_1 = 4000\mu Hz$ ;  $f_2 = 1200\mu Hz$  and its first harmonic:  $2f_2 = 2400\mu Hz$ ; and  $f_3 = 1700\mu Hz$  (without harmonics). Total: 7 frequencies, where 4 are harmonic frequencies. **multif** shows:

```
Number of frequencies.....: 7
Number of harmonic frequencies....: 4
```

In the fitting of harmonics frequencies, **multif** fits each fundamental frequency forcing its harmonics to be *exactly* integer multiples of the fitted frequencies.

**Fixed frequencies** — to keep fixed one or more frequencies put a - (minus symbol, without space) before them. For example:

```
1000.0
1200.0
-1700.0
```

**multif** will fit  $f_1$ ,  $f_2$ , and  $f_3$ , but the value of  $f_3$  is maintained fixed. For example:

```
1000.0 3
-1200.0 1
1700.0 0
```

In this case we are working with harmonic frequencies. **multif** will fit the 7 frequencies ( $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1$ ;  $f_2, 2f_2$ ;  $f_3$ ), but  $f_2$  and  $2f_2$  are keeping fixed (1200.0 and 2400.0  $\mu Hz$ , exactly).

**Frequencies via keyboard** — to enter the frequencies via keyboard, type 0 (zero):

```
Frequency file name (0=keyboard).: 0
-> Enter Frequency # 1 (in uhz) (0=stop -1=unit): 1921.12
-> Enter Frequency # 2 (in uhz) (0=stop -1=unit): 2022.07
```

```

-> Enter Frequency # 3 (in uhz) (0=stop -1=unit): 2343.87
-> Enter Frequency # 4 (in uhz) (0=stop -1=unit): 0
Number of frequencies.....: 3
Number of harmonic frequencies...: 0

```

Type the frequency and press [ENTER]. To finish, type 0 (zero).

The current version doesn't work with harmonics for frequencies entered via keyboard. I will enable it in a future version. For while, if you want to fit harmonic frequencies enter them via file.

**Changing frequency unit** — The default frequency unit is  $\mu Hz$ , but it is possible to change it to  $mHz$ ,  $Hz$  or to period (in seconds) typing -1 on the prompt and typing the new unit:

```

Frequency file name (0=keyboard):: 0
-> Enter Frequency # 1 (in uhz) (0=stop -1=unit): -1
Frequency unit (Hz,mHz,uHz; sec):: sec
-> Enter Period # 1 (in sec) (0=stop -1=unit): 510.
-> Enter Period # 2 (in sec) (0=stop -1=unit): 592.
-> Enter Period # 3 (in sec) (0=stop -1=unit): 623.23
-> Enter Period # 4 (in sec) (0=stop -1=unit): 0
Number of frequencies.....: 3
Number of harmonic frequencies...: 0

```

**How many frequencies** — The current version can work with up to 500 frequencies. But, the processing time increases with the frequency number.

## B.10 Lambda factor: a slowest convergence

The non-linear fitting procedure uses a convergence step calculated to be adequate for use in asteroseismology and to ensure a correct convergence for the best local solution.

But, in certain cases, it can converge accidentally for another local solution. This can occur when you are using small or bad data sets; or when the frequency initial guess isn't good enough; or when the mode amplitude is too small. This last trends to be the main reason.

In the periodogram, another local solution corresponded to one of the lateral peaks. **multif** notes when this occurs and puts an asterisk \* on the side of a suspect solution. But remember: a suspect solution is just *suspect* and not necessarily a *wrong* solution.

In these cases, a more careful convergence may be tried, using a smaller convergence step. To do this, **multif** multiplies the default convergence step by a factor between 0 and 1, called *lambda factor*. By default, lambda factor is 1.

The rule here is: use lambda factor = 1. Only try a smaller step when you see an \* or when you want to make a convergence experiment. Start with 0.8 and after 0.6, 0.5,... There are two possible cases:

1. decreasing the lambda factor the same result persists — in this case, the “suspect” solution is innocent. The result resisted to the torture and it really is the best local solution.
2. decreasing the lambda factor the solution converge for a different value — in this case, the default convergence step is really large and **multif** is converting for another local solution.

Lambda factor (0,1] (default=1)...: 1

You must note that a smallest convergence step has a cost: processing time.

## B.11 Calculating the initial guess

For each initial frequency  $f_i$ , **multif** calculates an initial value for amplitude  $A_i$  and time of maximum  $T_{max_i}$ . One table with all initial values is shown before it starting the nonlinear fitting. Amplitudes are in *mma* (mili-modulation in amplitude,  $1mma = 10^{-3} ma$ ) and T\_max in BCT or in sec (case the  $T_{start}$  is not defined).

Calculating the intial guess .....

Initial Guess:

#	Frequency (uhz)	Amplitude (mma)	T_max (BCT)
1	1960.7843	0.1344	7000.004037
2	1689.1892	0.5073	7000.005169
3	1604.5441	0.4466	7000.006314

Calculating...

In sequence, it starts the nonlinear fitting.

## B.12 Final results

```

Nonlinear Fitting of Multiple Sinusoidal Curves
+-----+-----+-----+-----+
| # | Frequency (uHz) | Period (sec) | Amplitude (mma) | T_max (BCT$sec) |
+-----+-----+-----+-----+
| 1 | 1961.3016 ± 0.3107 | 509.865492 ± 0.080762 | 0.1854 ± 0.1238 | 7000.003124 ± 87.00 |*
| 2 | 1689.3426 ± 0.1102 | 591.946244 ± 0.038599 | 0.5232 ± 0.1238 | 7000.004645 ± 35.83 |*
| 3 | 1603.8753 ± 0.0717 | 623.489867 ± 0.027869 | 0.8037 ± 0.1239 | 7000.001575 ± 24.56 |*
+-----+-----+-----+-----+
Chi2 (in m-2 unit).....: 0.41498E+03
Number of interations...: 3
    
```

The final results of the nonlinear fitting are shown in a table. The values after the  $\pm$  signal are the standard deviations ( $1\sigma$ ). If the unit time is BCT, the  $T_{max}$  is given in BCT;

otherwise in seconds. The sigma for  $T_{max}$  is *always* given in seconds. An asterisk \* indicates a suspect solution.

Below the table, is shown the  $\chi^2$  for the fitting (**Chi2**) in  $mi^2$  units. By definition,

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n (\omega_i (y_i - y(t_i; f_1, f_2, \dots, f_m)))^2 \quad (\text{B.1})$$

where  $y_i$  is the modulation in intensity at the time  $t_i$ ;  $y(t_i; f_1, f_2, \dots, f_m)$  is the fitted value using the  $m$  frequencies and  $w_i$  is the data weight.

Obs. — in this printing version, the symbol  $\pm$  appears as  $\acute{s}$ . I don't know why this happen, yet.

## B.13 The output files

**multif** creates some output files:

Saving the output files...

```
proj.log --> multif logfile
proj.fit --> fitted values (ascii file)
proj.res --> residual light curve
proj.syn --> synthetic light curve
proj.tex --> LaTeX table
proj.uhz --> fitted frequencies
```

- **\*.log** — a log-file with all you see in the screen, including all you typed and the tables, and something more. All are registered here.
- **\*.fit** — an ASCII file with a list of the final results in the following sequence: frequency (in Hz) and its sigma (in Hz); Amplitude (in ma) and its sigma (in ma); time of maximum (in BCT/sec) and its sigma (in sec). I use this file when I want to pass the final results to another program.
- **\*.res** — this file contains the residual light curve. The residual light curve is what remain of the original light curve after the subtraction of all fitted sinusoidal curve (pre-whitening).
- **\*.syn** — this file contains a synthetic light curve, with only the fitted sinusoidal curves (and without noise).
- **\*.tex** — a LaTeX file with the final results. The file is self-compilable:

```
% latex proj.tex
```

- **\*.uhz** — a one-column file only with the fitted frequencies.

## B.14 End of work

Ok, Tchau.

*Tchau* means “bye”, in Brazilian-Portuguese.

## B.15 Running multif in background

To run **multif** in background, put all the enter values into a file (without spaces before), *exactly* in the same sequence you usually type when are running **multif** . In the example bellow, the file with the enter values is called `multif.in`:

```
starXYZ
curve.dat
b
7000.00
freq.uhz
1.
```

```
% multif < multif.in &
```

or

```
% multif < multif.in > multif.bg &
```

This runs **multif** in background. To return to foreground, type:

```
% fg
```

# Referências Bibliográficas

- [1] AIZENMAN, M. L.; HANSEN, C. J.; COX, J. P.; PESNELL, W. D. Rotational mode splitting about an inclined axis. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 286, n. 2, p. L43-L45, Nov. 1984. pt. 2.
- [2] ALVES, V. M.; KEPLER, S. O.; HANDLER, G.; HANSEN, C. J.; COSTA, J. E. S.; NITTA, A.; CLAVER, C. F.; KANAAN, A.; NATHER, R. E.; WINGET, D. E.; KLEINMAN, S. J.; BIN, Z. J.; XIAOJUN, J.; MEISTAS, E. G.; CHERNYSHEV, A. V.; IBBETSON, P.; LEIBOWITZ, E.; HEMAR, S.; MOSKALIK, P.; PAJDOSZ, G.; VAUCLAIR, G.; DOLEZ, N.; FU, J. N.; SOLHEIM, J.-E.; PFEIFFER, B.; MARAR, T. M. K.; ASHOKA, B. N.; SEETHA, S.; GIOVANNINI, O.; O'DONOGHUE, D.; BUCKLEY, D.; BARSTOW, M. A.; SULLIVAN, D. J. The pulsating DB white dwarf PG 1351+489. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 12, p. 33-37, 2003.
- [3] ASPLUND, M.; LAMBERT, D. L.; KIPPER, T.; POLLACCO, D.; SHETRONE, M. D. The rapid evolution of the born-again giant Sakurai's object. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 343, n. 2, p. 507-518, Mar. 1999.
- [4] BEAUCHAMP, A.; WESEMAEL, F.; BERGERON, P.; FONTAINE, G.; SAFFER, R. A.; LIEBERT, J.; BRASSARD, P. Spectroscopic studies of DB white dwarfs: the instability strip of the pulsating DB (V777 Herculis) stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 516, n. 2, p. 887-891, May 1999. pt. 1.
- [5] BEAUDET, G.; PETROSIAN, V.; SALPETER, E. E. Energy losses due to neutrino processes. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 150, n. 2, p. 979-1000, Dec. 1967. pt. 1.
- [6] BERGERON, P.; WESEMAEL, F.; FONTAINE, G. On the influence of the convective efficiency on the determination of the atmospheric parameters of DA white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 387, n. 1, p. 288-293, Mar. 1992. pt. 1.
- [7] BERGERON, P.; SAFFER, R.; LIEBERT, J. A spectroscopic determination of the mass distribution of DA white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 394, n. 1, p. 228-247, July 1992. pt. 1.
- [8] BERGERON, P.; WESEMAEL, F.; BEAUCHAMP, A.; WOOD, M. A.; LAMONTAGNE, R.; FONTAINE, G.; LIEBERT, J. A spectroscopic analysis of DAO and hot DA white dwarfs: the implications of the presence of helium and nature of DAO stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 432, n. 1, p. 305-325, Sept. 1994. pt. 1.

- [9] BERGERON, P.; WESEMAEL, F.; LAMONTAGNE, R.; FOUNTAINE, G.; SALFER; R. A.; ALLARD, N. F. Optical and ultraviolet analyses of ZZ Ceti stars and study of the atmospheric convective efficiency in DA white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 449, n.1, p. 258-279, Aug. 1995. pt. 1.
- [10] BERGERON, P.; FONTAINE, G.; BILLÈRES, M.; BOUDREAU, S.; GREEN, E. M. On the purity of the ZZ Ceti instability strip: discovery of more pulsating DA white dwarfs on the basis of optical spectroscopy. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 600, n. 1, p. 404-408, Jan. 2004. pt. 1.
- [11] BENETTI, S.; DUERBACK, H. W.; SEITTER, W. C.; HARRISON T.; HOFF, W. Novalike variable in Sagittarius. *IAU Circ.*, Cambridge, n. 6325, Feb. 1996.
- [12] BOND, H. E.; GRAUER, A. D.; GREEN, R. F.; LIEBERT, J. W. Two new extremely hot pulsating white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 279, n. 2, p. 751-757, Apr. 1984. pt. 1.
- [13] BOND, H. E. ; GRAUER, A. D. PG 0122+200: a new member of the GW Virginis (PG 1159-035) class of extremely hot pulsating white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 321, n. 2, p. L123-L128, Oct. 1987. pt. 2.
- [14] BOND, H. E.; MEAKES, M. G.; LIEBERT, J. W.; RENZINI, A. HST Observations of the nuclei of EGB 6 (0950+ 139) and Abell 58 (V605 Aql). In: WEINBERGER, R.; ACKER, A. (Eds.). *Planetary nebulae*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1993. p. 499-499. (IAU symposium n. 155).
- [15] BOWEN, G. H.; WILLSON, L. A. From wind to superwind: the evolution of mass-loss rates for Mira models. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 375, n. 1, p. L53-L56, July 1991. pt. 1.
- [16] BRADLEY, P. A. *Theoretical asteroseismology of white dwarfs stars: the encyclopedia seismologica*. 1994. 163 f. Thesis (Doctor of Philosophy) - Department of Astronomy, University of Texas at Austin, Austin, 1994.
- [17] BRADLEY, P. A. ; WINGET, D. E. An asteroseismological determination of the structure of the DBV white dwarf GD 358. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 430, n. 2, p. 850-857, Aug. 1994. pt. 1.
- [18] BRADLEY, P. A. White dwarf data tables. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 4, p. 536-546, 1995.
- [19] BRADLEY, P. A. White dwarf data tables. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 9, p. 485-498, 2000.
- [20] BRASSARD, P.; FOUNTAINE, G.; WESEMAEL, F.; KAWALER, S. D. ; TASSOUL, M. Adiabatic properties of pulsating DA white dwarfs. I. The treatment of the Brunt-Väisälä frequency and the region of period formation. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 367, n. 2, p. 601-611, Feb. 1991. pt. 1.



- [21] BRASSARD, P.; FOUNTAINE, G.; WESEMAEL, F.; TASSOUL, M. Adiabatic properties of pulsating DA white dwarfs. IV. An extensive survey of the period structure of evolutionary models. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, Chicago, v. 81, n. 2, p. 747-794, Aug. 1992.
- [22] BRICKHILL, A. J. The pulsations of ZZ-Ceti stars. II. Turbulent convection and the maximum period. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Oxford, v. 246, n. 3, p. 510-517, Oct. 1990.
- [23] BRICKHILL, A. J. The pulsations of ZZ Ceti stars. V. The light curves. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Oxford, v. 259, n. 3, p. 519-528, Dec. 1992.
- [24] BRICKHILL, A. J. The pulsations of ZZ Ceti stars. VI. The amplitude spectra. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Oxford, v. 259, n. 3, p. 529-535, Dec. 1992.
- [25] CHANDRASEKHAR, S. *An introduction to stellar structure*. Chicago: Univ. Chicago Press, 1939.
- [26] COSTA, A. F. M. *Cálculo dos parâmetros fundamentais das anãs brancas*. 1999. 101 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.
- [27] COSTA, J. E. S. *Medida das taxas de variação temporal de períodos de pulsação da estrela DOV PG 1159-035*. 1996. 127 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1996.
- [28] COSTA, J. E. S.; KEPLER, S. O. ; WINGET, D. E. Direct measurement of a secular pulsation period change in the pulsating hot pre-white dwarf PG 1159-035. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 522, n. 2, p. 937-982, Sept. 1999. pt. 1.
- [29] COSTA, J. E. S. ; KEPLER, S. O. Determination of the uncertainties in frequency, amplitude and phase from Monte Carlo simulations. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 9, p. 451-462, 1999.
- [30] COX, J. P. *Theory of stellar pulsation*. Princeton: Princeton University Press, 1980.
- [31] COX, A. N. A pulsation mechanism for GW Virginis variables. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 585, n. 2, p. 975-982, Mar. 2003. pt. 1.
- [32] DEHNER, B. T. ; KAWALER, S. D. Thick to thin: the evolutionary connection between PG 1159 stars and the thin helium-enveloped pulsating white dwarf GD 358. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 445, n. 2, p. L141-L144, June 1995. pt. 2.
- [33] DICUS, D. A. Stellar energy-loss rates in a convergent theory of weak and electromagnetic interactions. *Phys. Rev. D*, New York, v. 6, n. 4, p. 941-949, Aug. 1972.
- [34] DICUS, D. A.; KOLB, E. W.; SCHRAMM, D. N.; TUBBS, D. L. Neutrino pair bremsstrahlung including neutral current effects. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 210, n. 1, p. 481-488, Dec. 1976, pt. 1.

- [35] DORMAN, B.; ROOD, R. ; O'CONNELL, R. Ultraviolet radiation from evolved stellar populations. I. Models. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 419, n. 1, p. 596-614, Dec. 1993. pt. 1.
- [36] DREIZLER, S.; WERNER, K.; HEBER, U. PG 1159 stars and their evolutionary link to DO white dwarfs. In: KOESTER, D.; WERNER, K. (Eds.). *White dwarfs*. Berlin: Springer-Verlag, 1995. p. 160-170. (Lecture notes in physics, 443).
- [37] DREIZLER, S.; WERNER, K.; HEBER, U.; ENGELS, D. Discovery and analysis of a hydrogen-rich PG1159 star. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 309, n. 3, p. 820-826, May 1996.
- [38] DREIZLER, S.; HEBER, U. Spectral analyses of PG 1159 star: constraints on the GW Virginis pulsations from HST observations. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 334, n. 2, p. 618-632, June 1998.
- [39] DUERBECK, H. W.; BENETTI, S.; GUTSCHY, A.; VAN GENDEREN, ARNOUT, M.; KEMPER, C.; LILLER, W.; THOMAS, T. The final helium flash object Sakurai: photometric behavior and physical characteristics. *Astron. J.*, Chicago, v. 114, n. 4, p. 1657-1665, Oct. 1997.
- [40] EYRES, S. P. S.; SMALLEY, B.; GEBALLE, T. R.; EVANS, A.; ASPLUND, M.; TYNE, V. H. Strong helium 10830Å absorption in Sakurai's object (V4334 Sgr). *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, Oxford, v. 307, n. 1, p. L11-L15, June 1999.
- [41] FEYNMAN, R. P.; GELL-MANN, M. Theory of the Fermi interaction. *Phys. Rev.*, New York, v. 109, n. 1, p. 193-198, Jan. 1958.
- [42] FONTAINE, G.; WESEMAEL, F. Recent advances in the theory of white dwarf spectral evolution. In: PHILIP, A. G.; KAYES, D. S.; LIEBERT, J. W. (Eds.). *The second conference on faint blue stars*. Schenectady: L. Davis Press, 1987. p. 319-326. (IAU colloquium, n. 95).
- [43] FONTAINE, G.; WESEMAEL, F. Successes and challenges of the theory of white dwarf spectral evolution. In: MICHAUD, G.; TUTUKOV, A. V. (Eds.). *Evolution of stars: the photospheric abundance connection*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 421-434. (IAU symposium, n. 145).
- [44] FONTAINE, G.; BERGERON, P.; BRASSARD, P.; WESEMAEL, F.; VAUCLAIR, G.; KAWALER, S. D.; GRAUER, A. D.; WINGET, D. D. Discovery and seismological interpretation of low-amplitude modes in the pulsating DO white dwarf PG 1707+427 (V817 Herculis). *Astrophys. J.*, Chicago, v. 378, n. 1, p. L49-L52, Sept. 1991. pt. 2.
- [45] GAUTSCHY, A. A further look into the pulsating PG 1159 stars. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 320, n. 3, p. 811-822, Apr. 1997.

- [46] GIOVANNINI Jr., O. *Distribuição de massa, cristalização e variabilidade das estrelas anãs brancas DA*. 1996. 119 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1996.
- [47] GOLDREICH, P.; WU, Y. Gravity modes in ZZ Ceti stars. I. Quasi-adiabatic analysis of overstability. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 511, n. 2, p. 904-915, Feb. 1999a. pt. 1.
- [48] GOLDREICH, P.; WU, Y. Gravity modes in ZZ Ceti stars. III. Effects of turbulent dissipation. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 523, n. 2, p. 805-811, Oct. 1999b. pt. 1.
- [49] GRAUER, A. D.; BOND, H. E. The pulsating central star of the planetary nebula Kohoutek 1-16. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 277, n. 1, p. 211-215, Feb. 1984. pt. 1.
- [50] GRAUER, A. D.; GREEN, R. F.; LIEBERT, J. On the pulsational stability of the pre-white dwarf star PG 1707+427. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 399, n. 2, p. 686-693, Nov. 1992. pt. 1.
- [51] GREEN, R. F.; SCHMIDT, M.; LIEBERT, J. The Palomar-Green catalog of ultraviolet-excess stellar objects. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, Chicago, v. 61, n. 2, p. 305-352, June 1986.
- [52] GREENSTEIN, J. L. Some further degenerate stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 207, n. 2, p. L119-L123, June 1976. pt. 2.
- [53] GREENSTEIN, J. L. Spectrophotometry of the white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 276, n. 2, p. 602-620, Jan. 1984. pt. 1.
- [54] GREENSTEIN, J. L. The frequency of hydrogen white dwarfs as observed at high signal to noise ratio. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 304, n. 1, p. 334-355, May 1986. pt. 1.
- [55] HANDLER, G.; KANAAN, A.; MONTGOMERY, M. H. Complex light variations of the "hybrid" PG 1159 star HS 2324+3944. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 326, n. 2, p. 692-697, Oct. 1997.
- [56] HANSEN, B. M. S.; BREWER, J.; FAHLMAN, G. G.; GIBSON, B. K.; IBATA, R.; LIMONGI, M. A.; RICH, R. M.; RICHER, H. B.; SHARA, M. M.; STETSON, P. B. The white dwarf cooling sequence of the globular cluster Messier 4. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 574, n. 2, p. L155-L158, Aug. 2002. pt. 2.
- [57] HAMADA, T.; SALPETER, E. E. Models for zero-temperature stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 134, n. 2, p. 683-698, Nov. 1961.
- [58] HARVEY, J. W.; HILL, F.; HUBBARD, R.; KENNEDY, J. R.; LEIBACHER, J. W.; PINTAR, J. A.; GILMAN, P. A.; NOYES, R. W., TITLE, A. M., TOOMRE, J.; ULRICH, R. K., BHATNAGAR, A.; KENNEWELL, J. A.; MARQUETTE, W.; PATRÓN, J.; SAÁ, O.; YASUKAWA, E. The global oscillation network group (GONG) project. *Science*, Washington, v. 272, n. 5266, p. 1284-1286, May 1996.

- [59] HERBIG, G. H.; BOYARCHUK, A. A. The peculiar variable FG Sagittae. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 153, p. 397-420, Aug. 1968. pt. 1.
- [60] IBEN Jr., I.; RENZINI, A. Asymptotic giant branch evolution and beyond. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Palo Alto, v. 21, p. 271-342, Sept. 1983.
- [61] IBEN Jr., I. On the frequency of planetary nebula nuclei powered by helium burning and on the frequency of white dwarfs with hydrogen-deficient atmospheres. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 277, n. 1, p. 333-354, Feb. 1984. pt. 1.
- [62] IIJIMA, T.; STRAFELLA, F. FG Sagittae has been a carbon star since 1981. *Inf. Bull. Var. Stars*, Budapest, n. 3959, Dec. 1993.
- [63] JONES, P. W.; PESNELL, W. D.; HANSEN, C. J.; KAWALER, S. D. On the possibility of detecting weak magnetic fields in variable white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 336, n. 1, p. 403-408, Jan. 1989. pt. 1.
- [64] JURCSIK, J. Rapid decline of FG Sagittae. *Inf. Bull. Var. Stars*, Budapest, n. 3775, Sept. 1992.
- [65] KAWALER, S. D. *The transformation from planetary nebula nucleus to white dwarf: a seismological study of stellar metamorphosis*. 1986. 162 f. Thesis (Doctor of Philosophy) - University of Texas at Austin, Austin, 1986.
- [66] KAWALER, S. D. White dwarfs: fossil stars. *Sky & Telesc.*, Cambridge, v. 74, n. 2, p. 132-135, Aug. 1987.
- [67] KAWALER, S. D. Angular momentum loss in low-mass stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 333, n. 1, p. 236-247, Oct. 1988. pt. 1.
- [68] KAWALER, S. D. The hydrogen shell game: pulsational instabilities in hydrogen shell-burning planetary nebula nuclei. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 334, n. 1, p. 220-228, Nov. 1988. pt. 1.
- [69] KAWALER, S. D.; WEISS, P. Mode trapping in pulsating white dwarfs. In: OSAKI, Y.; SHIBAHASHI, H. (Eds.). *Progress of seismology of the sun and stars*. Berlin: Springer-Verlag, 1990. p.431-436. (Lecture notes in physics, v. 367).
- [70] KAWALER, S. D.; BRADLEY, P. A. Precision asteroseismology of pulsating PG 1159 stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 427, n. 1, p. 415-428, May 1994. pt. 1.
- [71] KAWALER, S. D. The PNN and PG 1159 connection. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 4, p. 329-333. 1995.
- [72] KEPLER, S. O. The ZZ Ceti star GD 385 revisited. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 278, n. 2, p. 754-760, Mar. 1984a. pt. 1.
- [73] KEPLER, S. O. Light and line profile variations due to r-mode pulsations with an application to the ZZ Ceti star G117-B15A. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 286, n. 1, p. 314-327, Mar. 1984b. pt. 1.

- [74] KEPLER, S. O.; NELAN, E. P. IUE temperatures for white dwarf stars in and around the ZZ Ceti instability strip. *Astron. J.*, New York, v. 105, n. 2, p. 608-613, Feb. 1993.
- [75] KEPLER, S. O.; NATHER, R. E.; WINGET, D. E.; NITTA, A.; KLEINMAN, S. J.; METCALFE, T.; SEKIGUCHI, K.; XIAOJUN, J.; SULLIVAN, D.; SULLIVAN, T.; JANULIS, R.; MEISTAS, E.; KALYTIS, R.; KRZESINSKI, J.; OGOZA, W.; ZOLA, S.; O'DONOGHUE, D.; ROMERO-COLMENERO, E.; MARTINEZ, P.; DREIZLER, S.; DEETJEN, J.; NAGEL, T.; SCHUH, S. L.; VAUCLAIR, G.; NING, F. J.; CHEVRETON, M.; SOLHEIM, J.-E.; GONZALEZ PEREZ, J. M.; JOHANNESSEN, F.; KANAAN, A.; COSTA, J. E. S.; MURILLO COSTA, A. F.; WOOD, M. A.; SILVESTRI, N.; AHRENS, T. J.; JONES, A. K.; COLLINS, A. E.; BOYER, M.; SHAW, J. S.; MUKADAM, A.; KLUMPE, E. W.; LARRISON, J.; KAWALER, S.; RIDDLE, R.; ULLA, A.; BRADLEY, P. The everchanging pulsating white dwarf GD358. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 401, n. 2, p. 639-654, Apr. 2003.
- [76] KERBER, F.; BLOMMAERT, J. A. D. L.; GROENWEGEN M. A. T.; KIMESWENGER S.; KÄUFL H. U.; ASPLUND M. ISO: monitoring the mass loss of a very late Helium flash star. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 350, p. L27-L30, Oct. 1999.
- [77] KLEINMAN, S. J.; NATHER, R. E.; PHILLIPS, T. The WET standard photometer. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 4, p. 482-496, 1995.
- [78] KLEINMAN, S. J., NATHER, R. E.; WINGET, D. E.; CLEMENS, J. C.; BRADLEY, P. A.; KANNAN, A.; PROVENCAL, J. L.; CLAVER, C. F.; WATSON, T. K.; YANAGIDA, K.; NITTA, A.; DIXSON, J. S.; WOOD, M. A.; GRAUER, A. D.; HINE, B. P.; FONTAINE, G.; LIEBERT, J.; SULLIVAN, D. J.; WICKRAMASINGHE, D. T.; ACHILLEOS, N.; MARAR, T. M. K.; SEETHA, S.; ASHOKA, B. N.; MEISTAS, E.; LEIBOWITZ, E. M.; MOSKALIK, P.; KRZESINSKI, J.; SOLHEIM, J.-E.; BRUVOLD, A.; O'DONOGHUE, D.; KURTZ, D. W.; WARNER, B.; MARTINEZ, P.; VAUCLAIR, G.; DOLEZ, N.; CHEVRETON, M.; BARSTOW, M. A.; KEPLER, S. O.; GIOVANNINI, O.; AUGUSTEIJN, T.; HANSEN, C. J.; KAWALER, S. D. Understanding the cool DA white dwarf pulsator, G29-38. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 495, n. 1, p. 424-434, Mar. 1998. pt. 1.
- [79] KLINMAN, S. J.; HARRIS, H. C.; EISENSTEIN, D. J.; LIEBERT, J.; NITTA, A.; KRZESINSKI, J.; MUNN, J. A.; DAHN, C. C.; HAWLEY, S. L.; PIER, J. R.; SCHMIDT, G.; SILVESTRI, N. M.; SMITH, J. A.; SZKODY, P.; STRAUSS, M. A.; KNAPP, G. R.; COLLINGE, M. J.; MUKADAM, A. S.; KOESTER, D.; UOMOTO, A.; SCHLEGEL, D. J.; ANDERSON, S. F.; BRINKMANN, J.; LAMB, D. Q.; SCHNEIDER, D. P.; YORK, D. G. A catalog of spectroscopically identified white dwarf stars in the first data release of the Sloan digital sky survey. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 607, n. 1, p. 426-444, May. 2004.
- [80] KOESTER, D.; VAUCLAIR, G.; DOLEZ, N.; OKE, J. B.; GREENSTEIN, J. L.; WEIDEMANN, V. Atmospheric parameters of the variable DB white dwarf GD 358. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 149, n. 2, p. 423-428, Aug. 1985.

- [81] LIEBERT, J.; STOCKMAN, H. S. Circular polarization measurements of selected white dwarfs. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, San Francisco, v. 92, n. 549, p. 657-660, Oct./Nov. 1980.
- [82] LIEBERT, J.; WESEMAEL, F.; HANSEN, C. J.; FONTAINE, G.; SHIPMAN, H. L.; SION, E. M.; WINGET, D. E.; GREEN, R. F. Temperatures for hot and pulsating DB white dwarfs obtained with the IUE Observatory. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 309, n. 1, p. 241-252, Oct. 1986. pt. 1.
- [83] LOUP, C.; FORVEILLE, T.; OMONT, A.; PAUL, J. F. CO and HCN observations of circumstellar envelopes. A catalogue: mass loss rates and distributions. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, Berlin, v. 99, n. 2, p. 291-377, June 1993.
- [84] LUYTEN, W. J. The spectra and luminosities of white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 116, p. 283-290, Sept. 1952.
- [85] MARTINEZ, P.; KOEN, C. Period searching by least squares in sparsely sampled lightcurves with non-sinusoidal oscillations. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 267, n. 4, p. 1039-1044, Apr. 1994. pt. 1.
- [86] MCGRAW, J. T.; STARRFIELD, S. G.; LIEBERT, J.; GREEN, R. F. PG1159-035: a new, hot, non-DA pulsating degenerate. In: *WHITE dwarfs and variable degenerate stars*. Rochester: University of Rochester. 1979. p. 377-381.
- [87] METCALFE, T. S.; WINGET, D. E.; CHARBONNEAU, P. Preliminary constraints on  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  from white dwarf seismology. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 557, n. 2, p. 1021-1027, Aug. 2001. pt. 1.
- [88] MOHAN, C.; LAL, A. K.; SINGH, V. P. Equilibrium structures of differentially rotating white dwarf stars. *Bull. Astron. Soc. India*, Hyderabad, v. 22, p. 439-450, Dec. 1994.
- [89] MONTESINOS, B.; CASSATELLA, A.; GONZALEZ-RIESTRA, R.; FERNANDEZ-CASTRO, T.; EIROA, C.; JIMENEZ-FUENSALIDA, J. Ultraviolet and infrared monitoring of FG Sagittae during 1982-1989: evolutionary status. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 363, n. 1, p. 245-254, Nov. 1990. pt. 1.
- [90] MOSKALIK, P.; VAUCLAIR, G. RXJ 2117+34: preliminary results of the august 1994 WET campaign. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 4, p. 360-362, 1995.
- [91] MUKADAM, A. S.; KEPLER, S. O.; WINGET, D. E.; NATHER, R. E.; KILIC, M.; MULLALLY, F.; VON HIPPEL, T.; KLEINMAN, S. J.; NITTA, A.; GUZIK, J. A.; BRADLEY, P. A.; MATTHEWS, J.; SEKIGUCHI, K.; SULLIVAN, D. J.; SULLIVAN, T.; SHOBBROOK, R. R.; BIRCH, P.; JIANG, X. J.; XU, D. W.; JOSHI, S.; ASHOKA, B. N.; IBBETSON, P.; LEIBOWITZ, E.; OFEK, E. O.; MEISTAS, E. G.; JANULIS, R.; ALISAUSKAS, D.; KALYTIS, R.; HANDLER, G.; KILKENNY, D.; O'DONOGHUE, D.; KURTZ, D. W.; MÜLLER, M.; MOSKALIK, P.; OGLOZA, W.;

- ZOLA, S.; KRZESINSKI, J.; JOHANNESSEN, F.; GONZALEZ-PEREZ, J. M.; SOLHEIM, J.-E.; SILVOTTI, R.; BERNABEI, S.; VAUCLAIR, G.; DOLEZ, N.; FU, J. N.; CHEVRETON, M.; MANTEIGA, M.; SUÁREZ, O.; ULLA, A.; CUNHA, M. S.; METCALFE, T. S.; KANAAN, A.; FRAGA, L.; COSTA, A. F. M.; GIOVANNINI, O.; FONTAINE, G.; BERGERON, P.; O'BRIEN, M. S.; SANWAL, D.; WOOD, M. A.; AHRENS, T. J.; SILVESTRI, N.; KLUMPE, E. W.; KAWALER, S. D.; RIDDLE, R.; REED, M. D.; WATSON, T. K. Constraining the evolution of ZZ Ceti. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 594, n. 2, p. 961-970, Sept. 2003. pt. 1.
- [92] NAKANO, S.; SAKURAI, Y.; HAZEN M.; McNAUGHT, R. H.; BENETTI, S.; DUPERBECK, H. W.; CAPPELLARO, E.; LEIBUNDGUT, B. Novalike variable in Sagittarius. *IAU Circ.*, Cambridge, n. 6322, Feb. 1996.
- [93] NATHER, R. E.; WINGET, D. E.; CLEMENS, J. C.; HANSEN, C. J.; HINE, B. P. The whole earth telescope: a new astronomical instrument. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 361, n. 1, p. 309-317, Sept. 1990. pt. 1.
- [94] NATHER, R. E. *Using QED*. 2000. Disponível em <<http://astro.if.ufrgs.br/qed>>. Acesso em: 17 maio 2004.
- [95] O'BRIEN, M. S.; CLEMENS, J. C.; KAWALER, S. D., DEHNER, B. T. The pulsating pre-white dwarf star PG 0122+200. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 467, n. 1, p. 397-404, Aug. 1996. pt. 1.
- [96] O'BRIEN, M. S. *Pre-white dwarf pulsation: variations on a theme*. 1998. 110 f. Thesis (Doctor of Philosophy) - Iowa State University, Ames, 1998.
- [97] OLIVEIRA FILHO, K. de S.; SARAIVA, M. de F. O. *Astronomia e astrofísica*. Porto Alegre: Ed. Universidade/UFRGS, 2000. p. 386-390.
- [98] OKE, J. B.; GUNN, J. E. Secondary standard stars for absolute spectrophotometry. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 266, n. 2, p. 713-717, Mar. 1983. pt. 1.
- [99] PACZYNSKI, B. Evolution of single stars. I. Stellar evolution from main sequence to white dwarf or carbon ignition. *Acta Astron.*, Warsaw, v. 20, n. 1, p. 47-58, 1970.
- [100] PESNELL, W. D. Observable quantities of nonradial pulsations in the presence of slow rotation. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 292, n. 1, p. 238-248, May 1985. pt. 1.
- [101] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [102] ROBINSON, E. L.; KEPLER, S. O.; NATHER, R. E. Multicolor variations of the ZZ Ceti stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 259, n. 1, p. 219-231, Aug. 1982. pt. 1.
- [103] SAIO, H. Linear models for hydrogen-deficient star pulsations. In: JEFFERY, C. S.; HEBER, U. (Eds.). *Hydrogen deficient stars*. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 1996. p. 361-373. (Astronomical Society of the Pacific conference series, v. 96).

- [104] SALAM, A. *Elementary particle physics*. Sockholm: Almquist and Wicksell, 1968. p. 367-369. (Nobel symposium, n. 8).
- [105] SAVEDOFF, M. P.; van HORN, H. M.; VILA, S. C. Late phases of stellar evolution. I. Pure iron stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 155, p. 221-246, Jan. 1969. pt. 1.
- [106] SCHÖNBERNER, D. Late stages of stellar evolution: central stars of planetary nebulae. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 103, n. 1, p. 119-130, Nov. 1981.
- [107] SCHÖNBERNER, D. Late stages of stellar evolution. III. The observed evolution of central stars of planetary nebulae. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 169, n. 1/2, p. 189-193, Nov. 1986.
- [108] SILVOTTI, R. HS 2324+3944: discovery of non-radial pulsations in a hydrogen-rich PG 1159 star.. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 309, n. 1, p. L23-L26, May 1996.
- [109] SION, E. M.; GREENSTEIN, J. L.; LANDSTREET, J. D.; LIEBERT, J.; SHIPMAN, H. L.; WEGNER, G. A. A proposed new white dwarf spectral classification system. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 269, n. 1, p. 253-257, June 1983. pt. 1.
- [110] SION, E. M. Implications of the absolute magnitude distribution functions of DA and non-DA white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 282, n. 1, p. 612-614, July 1984. pt. 1.
- [111] SMOLINSKI, J.; CLIMENNHAGA, J. L.; KIPPER, T. The spectrum of FG SGE in 1975. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, San Francisco, v. 88, p. 67-68, Feb. 1976.
- [112] STANDISH, E. M. Time scales in the JPL and CfA ephemerides. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v.336, n. 1, p. 381-384, Aug. 1998.
- [113] STANGHELLINI, L.; COX, A. N.; STARRFIELD, S. G. Nonradial instability strips for post-AGB stars. In: CONFRONTATION between stellar pulsation and evolution. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. 1990. p. 524-527.
- [114] STARRFIELD, S. G.; COX, A. N.; KIDMAN, R. B. ; PESNELL, W. D. Nonradial instability strips based on carbon and oxygen partial ionization in hot, evolved stars. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 281, n. 2, p. 800-810, June 1984. pt. 1.
- [115] STEININGER, B.; PAPARÓ, M.; VIRÁGHALMY, G.; ZSUFFA, D.; BREGER, M. New observations of the pulsating DA white dwarf G117-B15A. *Inf. Bull. Var. Stars*, Budapest, n. 5430, June 2003.
- [116] STUMPF, P. On the computation of barycentric radial velocities with classical perturbation theories. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 56, n. 1/2, p. 13-23, Apr. 1977.
- [117] STUMPF, P. The rigorous treatment of stellar aberration and Doppler shift, and the barycentric motion of the earth. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 78, n. 2, p. 229-238, Sept. 1979.



- [118] STUMPPFF, P. Two self-consistent FORTRAN subroutines for the computation of the Earth's motion. *Astron. Astrophys. Supp. Ser.*, Berlin, v. 41, n. 1, p. 1-8, June 1980.
- [119] THEJLL, P.; VENNES, S.; SHIPMAN, H. L. A critical analysis of the ultraviolet temperature scale of the helium-dominated DB and DBV white dwarfs. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 370, n. 1, p. 355-369, Mar. 1991. pt. 1.
- [120] VAN DEN BERGH, S. The strange case of V605 Aquilae. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, San Francisco, v. 83, n. 496, p. 819-821, Dec. 1971.
- [121] VAN GENDEREN, A. M. On the pre-decline and decline phases of FG Sagittae, the post-AGB star and central star of the planetary nebula PK 60-7.1 deg. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 284, n. 2, p. 465-476, Apr. 1994.
- [122] VAUCLAIR, G.; PFEIFFER, B.; GRAUER, A. D.; BELMONTE, J. A.; JIMENEZ, A.; CHEVRETON, M.; DOLEZ, N.; VIDAL, I. The multi-periodic pulsating PG 1159 white dwarf PG 0122+200. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 299, n. 2, p. 707-714, June 1995.
- [123] VAUCLAIR, G.; MOSKALIK, P.; PFEIFFER, B.; CHEVRETON, M.; DOLEZ, N.; SERRE, B.; KLEINMAN, S. J.; BARSTOW, M.; SANSOM, A. E.; SOLHEIM, J.-E.; BELMONTE, J. A.; KAWALER, S. D.; KEPLER, S. O.; KANAAN, A.; GIOVANNINI, O.; WINGET, D. E.; WATSON, T. K.; NATHER, R. E.; CLEMENS, J. C.; PROVENCAL, J.; DIXSON, J. S.; YANAGIDA, K.; NITTA KLEINMAN, A.; MONTGOMERY, M.; KLUMPE, E. W.; BRUVOLD, A.; O'BRIEN, M. S.; HANSEN, C. J.; GRAUER, A. D.; BRADLEY, P. A.; WOOD, M. A.; ACHILLEOS, N.; JIANG, S. Y.; FU, J. N.; MARAR, T. M. K.; ASHOKA, B. N.; MEISTAS, E. G.; CHERNYSHEV, A. V.; MAZEH, T.; LEIBOWITZ, E.; HEMAR, S.; KRZESINSKI, J.; PAJDOSZ, G.; ZOLA, S. Asteroseismology of RXJ 2117+3412, the hottest pulsating PG 1159 star. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 381, n. 1, p. 122-150, Jan. 2002.
- [124] WEGNER, G. Photometry of white dwarfs in the Stromgren system. *Astron. J.*, New York, v. 88, n. 1, p. 109-119. Jan. 1983.
- [125] WEIDEMANN, V.; KOESTER, D. Mass distribution of DA white dwarfs and atmospheric parameters of ZZ Ceti stars. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 132, n. 1, p. 195-202, Mar. 1984.
- [126] WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 19, n. 21, p. 1264-1266, Nov. 1967.
- [127] WERNER, K.; RAUCH, T. On the neon abundance in PG 1159-type central stars of planetary nebulae. *Astron. Astrophys.*, Berlin, v. 284, n. 1, p. L5-L8, Apr. 1994.
- [128] WERNER, K. Spectra of GW Vir type pulsators. *Baltic Astron.*, Vilnius, v. 4, p. 340-348, 1995.

- [129] WESEMAEL, F.; GREEN, R.; LIEBERT, L. Spectrophotometric and model-atmosphere analyses of the hot DO and DAO white dwarfs from the Palomar-Green survey. *Astrophys. J. Supp. Ser.*, Chicago, v. 58, n. 3, p. 379-411, July 1985.
- [130] WINGET, D. E.; KEPLER, S. O.; ROBINSON, E. L.; NATHER, R. E. A measurement of secular evolution in the pre-white dwarf star PG 1159-035. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 292, n. 2, p. 606-613, May 1985. pt. 1.
- [131] WINGET, D. E.; VAN HORN, H.M. The physics of cool white dwarfs. In: PHILIP, A. G. D.; HAKES, D. S.; LIEBERT, J. W. (Eds.). *The second conference on faint blue stars*. Schenectady: L. Davis Press, 1987. p. 363-374.
- [132] WINGET, D. E.; NATHER, R. E.; CLEMENS, J. C.; PROVENCAL, J. L.; KLEINMAN, S. J.; BRADLEY, P. A.; WOOD, M. A.; CLAVER, C. F.; FRUEH, M. L.; GRAUER, A. D.; HINE, B. P.; HANSEN, C. J.; FONTAINE, G.; ACHILLEOS, N.; WICKRAMASINGHE, D. T.; MARAR, T. M. K.; SEETHA, S.; ASHOKA, B. N.; O'DONOGHUE, D.; WARNER, B.; KURTZ, D. W.; BUCKLEY, D. A.; BRICKHILL, J.; VAUCLAIR, G.; DOLEZ, N.; CHEVRETON, M.; BARSTOW, M. A.; SOLHEIM, J. E.; KANAAN, A.; KEPLER, S. O.; HENRY, G. W.; KAWALLER, S. D. Asteroseismology of the DOV star PG 1159 - 035 with the Whole Earth Telescope. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 378, n. 1, p. 326-348, Sept. 1991. pt. 1.
- [133] WINGET, D. E.; NATHER, R. E.; CLEMENS, J. C.; PROVENCAL, J. L.; KLEINMAN, S. J.; BRADLEY, P. A.; CLAVER, C. F.; DIXSON, J. S.; MONTGOMERY, M. H.; HANSEN, C. J.; HINE, B. P.; BIRCH, P.; CANDY, M.; MARAR, T. M. K.; SEETHA, S.; ASHOKA, B. N.; LEIBOWITZ, E. M.; O'DONOGHUE, D.; WARNER, B.; BUCKLEY, D. A. H.; TRIPE, P.; VAUCLAIR, G.; DOLEZ, N.; CHEVRETON, M.; SERRE, T.; GARRIDO, R.; KEPLER, S. O.; KANAAN, A.; AUGUSTEIJN, T.; WOOD, M. A.; BERGERON, P.; GRAUER, A. D. Whole earth telescope observations of the DBV white dwarf GD 358. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 430, n. 2, p. 839-849, Aug. 1994. pt. 1.