UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# APLICAÇÕES COMPLETAMENTE POSITIVAS EM ÁLGEBRAS DE MATRIZES E O TEOREMA DE BIRKHOFF

PAULINHO DEMENEGHI

PORTO ALEGRE, AGOSTO DE 2014

Dissertação submetida por Paulinho Demeneghi[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

**Banca Examinadora**

Dr. Elismar da Rosa Oliveira (PPG-MAT/UFRGS)

Dr. Jean Carlo Pech de Moraes (PPG-MAP/UFRGS)

Dr. Rogério Ricardo Steffenon (UNISINOS)

Dr. Carlos Felipe Lardizabal (orientador, PPG-MAT/UFRGS)

Data de Defesa: 14/08/2014.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

“É muito melhor lançar-se em busca de coisas grandiosas,

mesmo expondo-se ao fracasso,

do que alinhar-se com os pobres de espírito,

que não gozam muito e nem sofrem muito,

porque vivem na penumbra cinzenta,

onde não conhecem nem vitória, nem derrota.”

(Theodore Roosevelt)

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente ao professor Carlos Felipe Lardizabal, pela orientação e pelos conselhos durante o mestrado. Muito obrigado professor por aceitar minha proposta de estudo e me apresentar o estudo de C*-álgebras, o qual tenho interesse em seguir estudando.

Agradeço ao professor Rogério Steffenon, por todo incentivo oferecido desde a época em que eu era um ingênuo aluno de graduação com uma visão muito limitada sobre a matemática. Foram vários conselhos, sugestões e muita paciência para me abrir o horizonte do mestrado em matemática e me ajudar a dar os primeiros passos. Professor, muito obrigado por todo o apoio que me deste. Admiro o trabalho que exerces, apoiando alunos iniciantes na matemática. Espero algum dia poder ajudar alunos como fazes.

Em vários momentos de minha vida, tive muitos motivos para ser grato aos meus pais. Este não é diferente. Agradeço, de modo especial, aos meus pais Gervásio Mazzurana Demeneghi e Iria Demeneghi pelo exemplo de vida, garra e determinação, pelo incentivo e pelo suporte oferecido.

Agradeço à minha irmã Elza Demeneghi pelas ajudinhas e quebra-galhos durante o mestrado. Por mais longe que podemos estar, por mais tempo que possamos passar sem nos ver, tenho certeza que nossa amizade e companheirismo nunca enfraquecerá.

Agradeço aos colegas estudantes de matemática, amizades feitas na UFRGS, pelas discussões inusitadas e pelas conversas pseudo-intelectuais. Em especial, aos meus contemporâneos de mestrado Hevans Pereira e Fabiano Pereira.

Agradeço, de modo geral, a todos familiares e amigos que me incentivaram e torceram por mim.

**Resumo:** Descrevemos propriedades espectrais de aplicações positivas em C*-álgebras de dimensão finita, seguindo o trabalho clássico de Evans e Høegh-Krohn [EH-K]. Conjuntamente, estudamos os pontos extremais do conjunto das aplicações duplamente estocásticas completamente positivas sobre $M_n(\mathbb{C})$, seguindo Landau e Streater [LS].

**Palavras-chave:** Aplicações positivas; Aplicações completamente positivas; Espectro; Extremalidade; C*-álgebras.

**Abstract:** We describe spectral properties of positive maps over finite dimensional $C^*$-algebras, following the classical work of Evans and Høegh-Krohn [EH-K]. We also study the extremal points of the set of completely positive doubly-stochastic maps over $M_n(\mathbb{C})$, following Landau and Streater [LS].

**Keywords:** Positive maps; Completely positive maps; Spectrum; Extremality; C*-algebras.

# Sumário

# Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar aplicações positivas em C*-álgebras. Aqui, o foco é repartido em duas áreas principais: a análise de propriedades espectrais das aplicações positivas em C*-álgebras de dimensão finita e no estudo dos pontos extremais do conjunto das aplicações completamente positivas duplamente estocásticas sobre a álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{C})$.

Inicialmente analisamos o trabalho de D. Evans e R. Høegh-Krohn em [EH-K], onde consideramos propriedades espectrais de aplicações positivas em C*-álgebras de dimensão finita. Em certo sentido, as propriedades mencionadas podem ser consideradas como análogas às obtidas por Perron e Frobenius para matrizes com entradas positivas. Mostramos que o raio espectral de uma aplicação positiva e irredutível é um autovalor associado a um único autovetor positivo, a menos de multiplicação por escalar.

Neste trabalho, não trataremos sobre teoria de Perron-Frobenius em dimensão qualquer. Mas, indicamos aqui um trabalho [AH-K] de Albevério e Høegh-Krohn sobre teoria de Perron-Frobenius para álgebras de Von Neumann de dimensão qualquer.

Posteriormente, tratamos das aplicações completamente positivas. De acordo com M. Choi, as aplicações completamente positivas são uma generalização natural para os funcionais lineares positivos, já que apresentam propriedades análogas a estes funcionais. Transcorremos o trabalho de Choi em [Ch] explorando algumas dessas propriedades.

Para o leitor interessado em aplicações da teoria sobre aplicações completamente positivas em mecânica quântica, indicamos o livro do Bratteli e do Robinson [BR]. Não abordamos este tema aqui sob o receio de fugir do foco desse trabalho.

Na sequência, seguimos o trabalho de L. Landau e R. Streater em [LS], onde fazemos um estudo sobre os pontos extremais do conjunto das aplicações duplamente estocásticas completamente positivas sobre $M_n(\mathbb{C})$. Apresentamos, em certo sentido, uma generalização para o Teorema de Birkhoff, que atesta que os pontos extremais do conjunto das matrizes duplamente estocásticas são precisamente as permutações. No caso do conjunto das aplicações duplamente estocásticas completamente positivas sobre $M_n(\mathbb{C})$ repartimos em dois casos: para $n = 2$ os pontos extremais são, precisamente, as aplicações unitárias; para $n \geq 3$, existem aplicações não unitárias duplamente estocásticas completamente positivas extremais. Apresentaremos exemplos desse último caso.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo inicial apresentamos a teoria de C*-álgebras que será utilizada no decorrer do trabalho. Começamos num âmbito mais geral, apresentando as definições e teoremas iniciais da forma que são classicamente utilizados na literatura, veja [Ex], [Su] e [Mu], por exemplo.

Na sequência, passamos a um âmbito mais específico, o da álgebra de matrizes. Optamos por uma seção exclusiva sobre as matrizes, já que neste trabalho o estudo das aplicações completamente positivas foi feito sobre esta álgebra. Para o leitor interessado, uma boa referência é apresentada por Horn e Johnson [HJ]

Por fim, terminamos o capítulo com uma seção dedicada à apresentação do clássico Teorema de Birkhoff para o conjunto das matrizes duplamente estocásticas com o intuito de relacioná-lo a um teorema devido a L. Landau e R. Streater [LS] que veremos no capítulo 3.

## 1.1 C*-álgebras: uma introdução

Essa seção visa introduzir os conceitos de C*-álgebra que serão utilizados posteriormente neste trabalho. Toda estrutura algébrica aqui abordada será considerada sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

**Definição 1.1.** Uma *álgebra* $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial complexo equipado com uma operação bilinear e associativa $\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, dita *operação de multiplicação.* Por brevidade, ao invés da notação $\bullet(a, b)$, denotaremos por $ab$ a imagem da operação de multiplicação quando aplicada ao par $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Além disso, $\mathcal{A}$ é dita *unital* se possuir uma unidade para a operação de multiplicação.

**Definição 1.2.** Uma *álgebra normada* $\mathcal{A}$ é uma álgebra equipada com uma função norma

$$a \in \mathcal{A} \mapsto \|a\| \in \mathbb{R}$$

que faz com que $\mathcal{A}$ seja um espaço normado. Isto é, para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos:

1. $\|a\| \geq 0$ e $\|a\| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;
2. $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$, onde $|\lambda|$ indica o módulo de $\lambda$;
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$;

   Além disso, queremos que $\| \cdot \|$ obedeça o seguinte axioma para o produto:

4. $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

$\mathcal{A}$ será dita uma *álgebra de Banach* se, vista como um espaço normado, for completo.

**Exemplo 1.3.** Seja $n$ um inteiro positivo e seja $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizs $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. É sábido que $M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra com a operação usual de multiplicação de matrizes. Existem várias normas que fazem com que $M_n(\mathbb{C})$ seja uma álgebra de Banach. A mais importante é definida por

$$\|a\| := \sup\{\|av\|_2 : v \in \mathbb{C}^n, \|v\|_2 \leq 1\}, \quad a \in M_n(\mathbb{C})$$

onde $av$ representa o produto da matriz $a$ pelo vetor $v$ (matriz coluna $n \times 1$). Além disso, usamos na definição acima a norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ para vetores.

Entre os conceitos mais importantes no estudo de álgebras de Banach, destacamos os conceitos de espectro e resolvente.

**Definição 1.4.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade. Dado $a \in \mathcal{A}$, definimos o *resolvente* de $a$ como sendo o conjunto $\rho(a)$ dado por

$$\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \text{ é invertível}\}.$$

Acima, $\lambda - a$ significa $\lambda 1 - a$, onde 1 é a identidade de álgebra. O *espectro* de $a$ é definido como sendo o conjunto $\sigma(a)$ dado por $\sigma(a) = \mathbb{C} \backslash \rho(a)$, isto é, o complementar de $\rho(a)$ em $\mathbb{C}$. O *raio espectral* de $a$, denotado por $r(a)$, é definido como $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.

**Definição 1.5.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. Uma *involução* em $\mathcal{A}$ é uma função

$$* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

que, para todo $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfaz:

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$;

2. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$;

3. $(ab)^* = b^* a^*$;

4. $(a^*)^* = a$;

5. $\|a^*\| = \|a\|$.

Acima, $a^*$ denota a imagem de um elemento $a \in \mathcal{A}$ pela função involução, ao invés da rigorosa notação $*(a)$. Definimos uma *álgebra de Banach com involução* como sendo uma álgebra de Banach equipada com uma função involução. Uma *$C^*$-álgebra* é uma álgebra de Banach com involução para a qual vale

6. $\|a^* a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in \mathcal{A}$.

**Exemplo 1.6.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $B(\mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Levando em consideração a estrutura usual de espaço vetorial em $B(\mathcal{H})$, definimos o produto $TS$, para $T, S \in B(\mathcal{H})$, como sendo a composição de operadores. A norma de um operador $T \in B(\mathcal{H})$ é definida por

$$\|T\| = \sup \{\|T(\xi)\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\},$$

enquanto que a involução de um operador $T$ é definida como o adjunto usual de $T$, isto é, $T^*$ é o único operador linear em $\mathcal{H}$ que satisfaz

$$\langle T(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, T^*(\eta) \rangle, \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Então, $B(\mathcal{H})$ é uma C*-álgebra com a norma e a involução assim definidas.

**Exemplo 1.7.** Seja $X$ um espaço topológico localmente compacto e seja $C_0(X)$ o espaço vetorial complexo de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subseteq X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Dadas $f, g \in C_0(X)$, defina uma nova função, denotada por $fg$, por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Com esta operacão de multiplicação, $C_0(X)$ torna-se uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Além disto, $C_0(X)$ é uma álgebra de Banach com a norma definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Ainda, $C_0(X)$ pode ser tornada uma C*-álgebra se considerar-mos a involução dada pela conjugação ponto a ponto, isto é, dada uma função $f \in C_0(X)$, definimos $f^*$ como sendo a função dada por $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Observe que, quando $X$ é compacto, a possibilidade de tomarmos $K = X$ nos diz que toda função contínua se anula no infinito, isto é, $C_0(X)$ coincide com $C(X)$, espaço formado pelas funções contínuas.

**Definição 1.8.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Um subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ é uma *sub-C*-álgebra* de $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{B}$ é uma sub-álgebra fechada de $\mathcal{A}$ invariante pela involução, isto é, $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ onde $\mathcal{B}^* = \{b^* : b \in \mathcal{B}\}$.

Uma sub-C*-álgebra é, em si, uma C*-álgebra com as operações induzidas pela álgebra ambiente. Assim, dado um subconjunto qualquer $S$ de uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, podemos considerar a interseção de todas as sub-C*-álgebras de $\mathcal{A}$ que contém $S$, o que resulta numa C*-álgebra que contém $S$ e que é a menor de todas as sub-C*-álgebras de $\mathcal{A}$ com esta propriedade. Tal sub-C*-álgebra é chamada a C*-álgebra gerada por $S$.

**Exemplo 1.9.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $K(\mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores lineares compactos em $\mathcal{H}$. Então $K(\mathcal{H})$ é uma sub-C*-álgebra de $B(\mathcal{H})$ e portanto é uma C*-álgebra.

**Definição 1.10.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra.

1. Um elemento $a \in \mathcal{A}$ é dito *normal* se $a^*a = aa^*$;

2. Se $\mathcal{A}$ tem unidade, um elemeto $a \in \mathcal{A}$ é dito *unitário* se $a^*a = aa^* = 1$;

3. Um elemento $a \in \mathcal{A}$ é dito *auto-adjunto* se $a^* = a$;

4. Se $\mathcal{A}$ tem unidade, um elemento $a$ é dito *positivo*, denotado $a \geq 0$, se $a$ for auto-adjunto e $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Um fato simples, porém muito útil, nos diz que todo elemento em uma álgebra de Banach com involução é combinação linear de elementos auto-adjuntos. Mais precisamente:

**Proposição 1.11** (Decomposição Cartesiana). *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com involução. Dado $a \in \mathcal{A}$, existem elementos $x, y \in \mathcal{A}$ tais que $x^* = x$, $y^* = y$ e $a = x + iy$. Além disso, a decomposição é única.*

**Demonstração**: Observe que

$$x = \frac{a + a^*}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{a - a^*}{2i}$$

satisfazem as condições do enunciado. Para provar a unicidade da decomposição, observe que se $a = w + iz$ com $w$ e $z$ auto-adjuntos, então

$$2x = a + a^* = 2w$$

e, portanto, $x = w$. Analogamente, mostra-se que $y = z$.

$\square$

Ainda, os elementos auto-adjuntos em uma C*-álgebra apresentam um propriedade muito interessante, como segue.

**Teorema 1.12.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Se $a \in \mathcal{A}$ é um elemento auto-adjunto, então $r(a) = \|a\|$.*

**Demonstração**: Segue da C*-identidade que $\|a^2\| = \|a\|^2$ e, por indução em $n$, $\|a^{2n}\| = \|a\|^{2n}$. Assim,

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2n}\|^{1/2n} = \|a\|.$$

A fórmula acima utilizada para calcular o raio espectral de $a$ pode ser encontrada em [Ex].

$\square$

Uma consequência do teorema anterior é o fato de que a norma em uma C*-álgebra é única. Mais precisamente:

**Corolário 1.13.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com involução. Então existe no máximo uma norma que torna $A$ uma C*-álgebra.*

**Demonstração**: Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas que tornam $\mathcal{A}$ uma C*-algebra, então

$$\|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a^*a) = \|a^*a\|_2 = \|a\|_2^2.$$

Portanto, $\|a\|_1 = \|a\|_2$.

$\square$

**Definição 1.14.** Dadas álgebras de Banach $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ diremos que uma função $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um *homomorfismo* se $\varphi$ for linear e além disto

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$. O *espectro* de $\mathcal{A}$ é definido como sendo o conjunto $\hat{\mathcal{A}}$ formado por todos os homomorfismos não nulos de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$.

Além disso, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ forem álgebras de Banach com involução, um homomorfismo $\varphi$ será dito **-homomorfismo* se satisfizer

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

**Definição 1.15.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Dado $a \in \mathcal{A}$, considere a função $\hat{a} : \hat{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ dada por $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$ para todo $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$. A *transformada de Gelfand* de $\mathcal{A}$ é a função

$$k : \mathcal{A} \to C(\hat{\mathcal{A}})$$

dada por $k(a) = \hat{a}$, para todo $a \in \mathcal{A}$.

O próximo teorema é um dos mais importantes da teoria de C*-álgebras. Este teorema não será provado aqui, mas o leitor interessado pode encontrar a demonstração em Exel [Ex], Murphy [Mu] e Sunder [Su].

**Teorema 1.16** (Teorema de Gelfand)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade. A transformada de Gelfand $k : \mathcal{A} \to C(\hat{\mathcal{A}})$ é um *-isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ sobre $C(\hat{\mathcal{A}})$.*

Este teorema consiste em uma ferramenta básica da teoria e, em combinação com a próxima proposição, nos fornece uma caracterização para elementos normais de uma C*-álgebra e nos permite tomar sub-C*-álgebras comutativas apropriadas de uma C*-álgebra geral.

**Proposição 1.17.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e seja $a \in \mathcal{A}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$a$ é normal;*
2. *A C*-álgebra gerada por $a$ é comutativa;*
3. *Se $a = x + iy$ denota a decomposição cartesiana de $a$, então $xy = yx$.*

**Demonstração**: Para provar a implicação *1* $\Rightarrow$ *2*, repare que $a$ e $a^*$ comutam, pois $a$ é normal e assim a C*-álgebra gerada por $a$ é comutativa. A implicação *2* $\Rightarrow$ *3* é imediata. Finalmente, para provar a implicaçao *3* $\Rightarrow$ *1*, note que $a^*a = (x+iy)^*(x+iy) = (x-iy)(x+iy) = x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = (x+iy)(x+iy)^* = aa^*$.

$\square$

Agora enunciamos, sem prova, um forte corolário do Teorema de Gelfand. A demonstração pode ser encontrada em Murphy [Mu] e Sunder [Su], por exemplo.

**Corolário 1.18.** *Sejam $a$ um elemento normal de uma C*-álgebra com unidade, $\mathcal{B}$ a sub-C*-álgebra gerada por $\{1, x\}$ e $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ a aplicação inclusão. Então, existe um único *-isomorfismo isométrico $\varphi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{B}$ tal que $\varphi(z) = a$.*

O grande ganho a partir do corolário anterior é que ele permite associar propriedades de algumas funções contínuas definidas em compactos com elementos normais de C*-álgebras com unidade. Mais especificamente:

**Proposição 1.19.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C* -algebra com unidade. Então:*

1. *$a \in \mathcal{A}$ é normal e $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ se, e somente se, $a$ é auto-adjunto;*

2. *$u \in \mathcal{A}$ é normal e $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$ se, e somente se, $u$ é unitário, onde $\mathbb{T} = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$;*

3. *$p$ é normal e $\sigma(p) \subseteq \{0,1\}$ se, e somente se, $p$ é uma projeção.*

**Demonstração**:

1. Seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento normal e tal que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Como $a$ é normal, segue que a sub-C*-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por $\{1, a\}$ é comutativa. Pelo corolário, existe um *-isomorfismo $\varphi$ entre $\mathcal{B}$ e $C(\sigma(a))$ tal que a aplicação inclusão é levada em $a$. Repare que, como $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, temos $a = \varphi(z) = \overline{\varphi(z)} = a^*$, isto é, $a$ é auto-adjunto. Reciprocamente, se $a \in \mathcal{A}$ é auto-adjunto é imediato verificar que $a$ é normal e $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

2. Seja $u \in \mathcal{A}$ um elemento normal e tal que $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$. Como $u$ é normal, segue que a sub-C*-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por $\{1, u\}$ é comutativa. Pelo corolário, existe um *-isomorfismo isométrico $\varphi$ entre $\mathcal{B}$ e $C(\sigma(u))$ tal que a aplicação inclusão é levada em $u$. Assim, seja $e^{i\theta} \in r(u) \subseteq \mathbb{T}$, e note que $z^*z(e^{i\theta}) = z^*(e^{i\theta})z(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}e^{i\theta} = 1$. Logo, $u^*u = \overline{\varphi(z)}\varphi(z) = \varphi(z^*)\varphi(z) = \varphi(z^*z) = \varphi(1) = 1$. O caso $uu^* = 1$ é análogo. Reciprocamente, se $u$ é unitário, é imediato verificar que $u$ é normal. Suponha então que $u \in \mathcal{A}$ é normal mas $\sigma(u) \nsubseteq \mathbb{T}$. Utilizando argumentos análogos aos anteriores, verifica-se que $u$ não pode ser unitário. Logo, se $u$ é unitário, $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$.

3. Seja $p \in \mathcal{A}$ um elemento normal e tal que $\sigma(p) \subseteq \{0, 1\}$. Como $p$ é normal, segue que a sub-C*-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por $\{1, p\}$ é comutativa. Pelo corolário, existe um *-isomorfismo $\varphi$ entre $\mathcal{B}$ e $C(\sigma(p))$ tal que a aplicação inclusão é

levada em $p$. Assim, repare que $p^2 = \varphi(z)^2 = \varphi(z^2) = \varphi(z) = p$. Além disso, segue do item *1* que $p^* = p$. Logo, $p$ é uma projeção. Reciprocamente, seja $p \in \mathcal{A}$ uma projeção. Da igualdade $p = p^*$ segue que $p$ é normal. Além disso, da igualdade, $p^2 = p$, segue que $p$ anula o polinômio $f(z) = z^2 - z$. Então, pelo Teorema da Aplicação Espectral, $f(\sigma(p)) = \sigma(f(p)) = \sigma(0) = 0$, isto é, $\sigma(p) \subseteq \{0, 1\}$.

□

O conceito de positividade é fundamental em análise funcional e, como não poderia deixar de ser, representa um papel muito importante na teoria das C*-álgebras. Dedicamo-nos agora a introduzir as noções básicas de positividade no nosso contexto.

**Proposição 1.20.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade.*

1. *(Decomposição de Jordan) Todo elemento auto-adjunto $a \in \mathcal{A}$ pode ser escrito como a diferença de elementos positivos $a_+$ e $a_-$ tais que $a_+a_- = 0$;*
2. *Se $a$ e $-a$ são ambos positivos, então $a = 0$;*
3. *Seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento auto-adjunto e seja $\mu$ uma constante tal que $\mu \geq \|a\|$. Então $a$ é positivo se e somente se $\|\mu - a\| \leq \mu$;*
4. *Se $a$ e $b$ são positivos então $a + b$ também é positivo;*
5. *Se $a$ é um elemento auto-adjunto, então $a \leq \|a\|$ no sentido em que $\|a\| - a$ é positivo.*

**Demonstração**:

1. Dado $a \in \mathcal{A}$ auto-adjunto, a sub-C*-álgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ gerada por $\{1, a\}$ é comutativa e, pelo Teorema de Gelfand, isomorfa à $C(\hat{\mathcal{B}})$. Identificando $\mathcal{B}$ e $C(\hat{\mathcal{B}})$ através da transformada de Gelfand podemos pensar em $a$ como uma função real contínua em $\hat{\mathcal{B}}$ e, reciprocamente, toda função contínua em $\hat{\mathcal{B}}$ pode ser interpretada como um elemento de $\mathcal{B}$. Seja portanto

$$a_+ = \max\{a, 0\} \ \text{ e } a_- = \max\{-a, 0\}.$$

É claro que $a = a_+ - a_-$, que $a_+ a_- = 0$, e que $a_+$ e $a_-$ são funções reais positivas e portanto elementos positivos de $\mathcal{B}$.

2. Suponha agora que $a$ e $-a$ são positivos. Então temos que, por um lado $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ e por outro lado, $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_-$, de onde $\sigma(a) = \{0\}$ e portanto $\|a\| = r(a) = 0$, pois, em particular, $a$ é auto-adjunto.

3. Como $a$ é auto-adjunto, segue que $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ e $r(a) = \|a\|$. Assim, temos que

$$\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|] \subseteq [-\mu, \mu].$$

Além disto,

$$\|\mu - a\| = r(\mu - a) = \sup|\mu - \lambda| = \sup \mu - \lambda$$

Segue, portanto, que $\|\mu - a\| \leq \mu$ se, e somente se, $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

4. Sejam $a$ e $b$ elementos positivos. Por 3 temos que $\big\|\|a\| - a\big\| \leq \|a\|$ e que $\big\|\|b\| - b\big\| \leq \|b\|$. Seja $\mu = \|a\| + \|b\| \geq \|a + b\|$. Assim, vale que

$$\big\|\mu - (a+b)\big\| = \big\|(\|a\| - a) + (\|b\| - b)\big\| \leq \big\|\|a\| - a\big\| + \big\|\|b\| - b\big\| \leq \|a\| + \|b\| = \mu,$$

de onde $a + b$ é positivo, utilizando *3* novamente.

5. Seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento auto-adjunto. Então, como $a$ é auto-adjunto, temos que que $\sigma(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$. Usando o Teorema da Aplicação Espectral para $f(z) = \|a\| - z$, temos $\sigma(\|a\| - a) = \sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ e consequentemente $\sigma(\|a\| - a) \subseteq [0, 2\|a\|]$. Assim $\|a\| - a$ é positivo.

□

**Corolário 1.21.** *Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra, seja $\mathcal{A}_{sa}$ o conjunto dos elementos auto-adjuntos de $\mathcal{A}$. Se $x, y \in \mathcal{A}_{sa}$, diremos que $x \geq y$ (ou equivalentemente, $y \leq x$) se $x - y$ for um elemento positivo de $\mathcal{A}$. Isto define uma relação de ordem parcial em $\mathcal{A}_{sa}$.*

**Demonstração**: A reflexividade segue do fato de que $0 \geq 0$. A transitividade segue do fato de que $(a + b) \geq 0$ se $a \geq 0$ e $b \geq 0$. A antissimetria segue do fato de que $a = 0$ se $a \geq 0$ e $-a \geq 0$.

□

A seguir damos duas caracterizações alternativas para elementos positivos. Ambas podem ser encontradas em [Ex].

**Teorema 1.22.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade. Dado $a \in \mathcal{A}$, são equivalentes:*

1. *$a$ é positivo;*
2. *Existe um elemento auto-adjunto $b \in \mathcal{A}$ tal que $b^2 = a$;*
3. *Existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $b^*b = a$.*

Uma consequência simples, porém muito útil, do resultado acima é:

**Corolário 1.23.** *Se $a$ é um elemento positivo, então $b^*ab$ também é positivo para todo $b \in \mathcal{A}$.*

**Demonstração**: De fato, sabendo-se que $a = c^*c$ para algum $c \in \mathcal{A}$, temos que $b^*ab = b^*c^*cb = (cb)^*(cb)$.

$\square$

**Definição 1.24.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com involução e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Uma *representação* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{H}$ é um *-homomorfismo

$$\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}),$$

isto é, um homomorfismo que satisfaz $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Terminamos esta seção expondo um importante resultado. De fato, é por causa deste resultado que as C*-álgebras se tornam um caso tão importante de álgebras de Banach. O resultado afirma que toda C*-álgebra possui uma representação isométrica, e portanto que toda C*-álgebra pode ser vista como uma sub-C*-álgebra de $B(\mathcal{H})$. A demonstração pode ser encontrada em Exel [Ex], Murphy [Mu] e Sunder [Su].

**Teorema 1.25** (Teorema de Gelfand-Naimark-Segal)**.** *Para qualquer C*-álgebra $\mathcal{A}$, existe uma representação isométrica de $\mathcal{A}$ em um espaço de Hilbert.*

## 1.2 Um exemplo: $M_n(\mathbb{C})$

Como mencionado anteriormente, toda estrutura algébrica aqui abordada será considerada sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Dessa forma, não há perda de generalidade em associar um espaço de Hilbert de dimensão $n$ com o espaço $\mathbb{C}^n$.

O produto interno entre vetores $x, y \in \mathbb{C}^n$ será escrito como $\langle x, y\rangle$ ou como $x^*y$. Adotamos a convenção de que o produto interno é sesquilinear, isto é, antilinear na primeira variável e linear na segunda.

Pelo último teorema da seção anterior, existe uma representação isométrica de $M_n(\mathbb{C})$ em um espaço de Hilbert. De fato, podemos corresponder uma matriz $A$ em $M_n(\mathbb{C})$ com um operador $T$ definido em $\mathbb{C}^n$ quando $\xi = T(\eta)$ se, e somente se, $[\xi]_\beta = A[\eta]_\beta$, onde $\beta$ é uma base para $\mathbb{C}^n$ e $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$. Além disso, vale que $A^*$ está associada à $T^*$ na correspondência anterior. Dizemos então que a matriz $A$ representa o operador $T$ na base $\beta$. Dessa forma, podemos identificar um operador $T \in B(\mathbb{C}^n)$ com a matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ que representa o operador $T$ na base $\beta$. Não faremos distinção entre um operador em $B(\mathbb{C}^n)$ e sua representação $A \in M_n(\mathbb{C})$.

As definições para elementos normais, unitários e auto-adjuntos em $M_n(\mathbb{C})$ serão utilizadas como na seção anterior, visto que, tradicionalmente, elas são feitas da mesma forma. Apenas observamos que, às vezes chamamos uma matriz auto-adjunta de matriz hermitiana.

Por simplicidade de notação, por vezes identificaremos $M_n = M_n(\mathbb{C})$. Dito isto, comecemos com a seguinte definição:

**Definição 1.26.** Uma matriz $B \in M_n$ é *unitariamente equivalente* a uma matriz $A \in M_n$ se existe uma matriz $U \in M_n$ unitária tal que $B = U^*AU$. Vale que a equivalência unitária é uma relação de equivalência. Se $A \in M_n$ é unitariamente equivalente a uma matriz diagonal, dizemos que $A$ é *unitariamente diagonalizável.*

**Proposição 1.27.** *Se $A = [a_{ij}] \in M_n$ e $B = [b_{ij}] \in M_n$ são unitariamente equivalentes, então*

$$\sum_{i,j}^{n} |b_{ij}|^2 = \sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2.$$

**Demonstração**: Observe que $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = trA^*A$. Assim, é suficiente mostrar que $trB^*B = trA^*A$. De fato, se $B = U^*AU$, então $trB^*B = trU^*A^*UU^*AU = trU^*A^*AU = trA^*AUU^* = trA^*A$, utilizando que $trXY = trYX$ para todo $X, Y \in M_n$.

$\square$

Feito isso, podemos passar a definição de matriz positiva definida e matriz positiva semidefinida.

**Definição 1.28.** Uma matriz hermitiana $A \in M_n$ é dita *positiva definida* se

$$x^*Ax > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \text{com} \quad x \neq 0.$$

Além disso, $A$ é dita *positiva semidefinida* se

$$x^*Ax \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Por brevidade, usaremos o termo matriz *positiva* para nos referirmos a uma matriz positiva definida ou a uma matriz positiva semidefinida. Algumas vezes, se quisermos enfatizar que a matriz é positiva definida, diremos que ela é *estritamente positiva*. Ainda, usaremos a notação $A \geq 0$ para dizer que a matriz $A$ é positiva e a notação $A > 0$ para dizer que a matriz $A$ é estritamente positiva. Uma generalização para a definição de positividade estrita será apresentada na próxima seção.

É importante deixar claro que não há ambiguidade de notação entre a última definição e aquela de elementos positivos em uma C*-álgebra. De fato, se $A$ é uma matriz positiva então $A$ é auto-adjunta por definição e se $\lambda$ é um autovalor de $A$ associado a um autovetor unitário $x$, temos $\lambda = x^*\lambda x = x^*Ax \geq 0$. Como o espectro de uma matriz é precisamente o conjunto de seus autovalores, segue que $A$ é positiva vista como um elemento da C*-álgebra $M_n(\mathbb{C})$.

Além das caracterizações para elementos positivos de C*-álgebras mostradas no Teorema 1.19, apresentamos mais uma para o caso da álgebra das matrizes.

**Proposição 1.29.** *Seja $A \in M_n$. Então $A$ é positiva se, e somente se, existem vetores $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathbb{C}^n$ tais que*

$$a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle.$$

*$A$ é estritamente positiva se, e somente se, os vetores $x_1, \ldots, x_n$ são linearmente independentes.*

**Demonstração**: Se $A$ é positiva, existe $B \in M_n$ tal que $B^*B = A$. Assim, basta tomar $x_i$ como sendo a $i$-ésima coluna de $B$. Se $A$ é estritamente positiva, o posto de $A$ é $n$ e o mesmo vale para $B$, de onde segue que as colunas de $B$ são linearmente independentes.

Reciprocamente, se $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ então $A$ é hermitiana, pois $a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle = \overline{\langle x_j, x_i \rangle} = \overline{a_{ji}}$. Além disso,

$$\begin{aligned} y^*Ay &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{y_i}y_j = \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle \overline{y_i}y_j = \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i x_i, y_j x_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \sum_{j=1}^{n} y_j x_j \right\rangle = \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \right\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Portanto $A$ é positiva. Repare ainda que, a igualdade acima pode acontecer somente se

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 0$$

e, assumindo que os vetores $x_1, \ldots, x_n$ são linearmente independentes, a única solução é a trivial $y = 0$.

$\square$

## 1.3 Teorema de Birkhoff

O Teorema de Birkhoff é um importante resultado sobre os pontos extremais do conjunto convexo das matrizes duplamente estocásticas. Comecemos definindo um conjunto convexo.

**Definição 1.30.** Um conjunto $K$ é dito *convexo* se, dados $x, y \in K$, todos os pontos do segmento de reta que liga $x$ e $y$ também pertencem a $K$. Isto é, dados $x, y \in K$, temos $tx + (1-t)y \in K$ para todo $0 \leq t \leq 1$.

**Exemplo 1.31.** O conjunto das matrizes auto-adjuntas é convexo. O mesmo vale para o conjunto das matrizes positivas. Com efeito, dados $A, B \in M_n$ auto-adjuntas e $0 \leq t \leq 1$, temos que $[tA + (1-t)B]^* = tA^* + (1-t)B^* = tA + (1-t)B$. Além disso, para $X, Y \in M_n$ positivas e $0 \leq t \leq 1$, temos $x^*[tA + (1-t)B]x = tx^*Ax + (1-t)x^*Bx \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

**Definição 1.32.** Seja $K$ um conjunto convexo fechado. Um ponto $z \in K$ é dito *extremal* se puder ser escrito como combinação convexa de pontos de $K$ somente na forma trivial. Isto é, se $z = tx + (1-t)y$, com $0 \leq t \leq 1$ e $x, y \in K$, então $x = y = z$.

**Definição 1.33.** Seja $p$ uma permutação dos inteiros $(1, \ldots, n)$. Associamos uma matriz $P$ com a permutação $p$ da seguinte forma:

$$P = [p_{ij}] = \begin{cases} 1, & \text{se } j = p(i) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz $P$ é dita *matriz de permutação* ou simplesmente uma *permutação*.

**Definição 1.34.** Uma matriz $S = [s_{ij}] \in M_n$ é dita *duplamente estocástica* se todas suas entradas são não-negativas e a soma de cada linha e cada coluna é 1, isto é, se satisfaz as seguintes condições:

1. $s_{ij} \geq 0$ para todo $i, j$;

2. $\sum_i s_{ij} = 1$ para todo $j$;

3. $\sum_j s_{ij} = 1$ para todo $i$.

O próximo Teorema pode ser encontrada em Horn e Johnson [HJ] e em Lax [Lx]. A demonstração aqui apresentada segue a demonstração utilizada por Lax.

**Teorema 1.35** (Teorema de Birkhoff)**.** *Os pontos extremais do conjunto das matrizes duplamente estocásticas são, precisamente, as permutações. Portanto, toda matriz duplamente estocástica é uma combinação convexa de permutações.*

**Demonstração**: Segue da definição 1.34 que nenhuma entrada de uma matriz duplamente estocástica pode ser maior do que 1. Assim, se $S$ é duplamente estocástica, temos que

$$0 \leq s_{ij} \leq 1. \tag{1.1}$$

Afirmamos que todas as permutações são pontos extremais no conjunto das matrizes duplamente estocásticas. De fato, suponha

$$P = \frac{A + B}{2}$$

com $A$ e $B$ duplamente estocásticas. Isto é,

$$p_{ij} = \frac{a_{ij} + b_{ij}}{2}$$

Observe que, se $p_{ij} = 1$, então $a_{ij} + b_{ij} = 2$ e, por (1.1), $p_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = 1$. Analogamente, se $p_{ij} = 0$, temos que $p_{ij} = a_{ij} = b_{ij} = 0$. Isto mostra que $A = B = P$.

Provemos agora a recíproca. Comecemos provando que se $S$ é duplamente estocástica e possui uma entrada entre 0 e 1

$$0 < s_{i_0 j_0} < 1$$

então $S$ não é um ponto extremal. Para ver isso, vamos construir uma sequência de entradas, todas entre 0 e 1 e tais que as entradas são tomadas, alternadamente, na mesma linha ou na mesma coluna. Isto é, escolhemos $j_1$ tal que

$$0 < s_{i_0 j_1} < 1.$$

Note que isso é possível porque a soma das entradas da $i_0$-ésima linha deve ser igual a 1. Analogamente, como a soma das entradas da $j_1$-ésima coluna deve ser igual a 1, podemos escolher uma linha $i_1$ tal que

$$0 < s_{i_1 j_1} < 1.$$

Continuamos procedendo dessa forma até que uma mesma entrada seja alcançada duas vezes. Teremos então construído uma cadeia fechada

$$s_{i_k j_k} \to s_{i_k j_{k+1}} \to \ldots \to s_{i_m j_m} = s_{i_k j_k} \tag{1.2}$$

Definimos agora uma matriz $N$ como segue:

*1*) As entradas de $N$ são nulas, exceto por aquelas que aparecem na cadeia (1.2);

*2*) As entradas de $N$ que aparecem na cadeia são 1 e $-1$, em sucessão;

Repare que a matriz $N$ tem a seguinte propriedade:

*3*) A soma das entradas de cada linha e cada coluna de $N$ é 0.

Definimos agora, duas matrizes $A$ e $B$ por

$$A = S + \varepsilon N, \qquad B = S - \varepsilon N$$

Segue de *3*) que a soma das entradas de cada linha e cada coluna de $A$ e $B$ é igual a 1. Por *1*) e pela construção, as entradas de $S$ são positivas em todos os pontos onde $N$ tem uma entrada não nula. Segue, portanto, que $\varepsilon$ pode ser tomado suficientemente pequeno para que $A$ e $B$ tenham entradas não-negativas. Isto mostra que $A$ e $B$ são matrizes duplamente estocásticas. Como $A \neq B$ e

$$S = \frac{A + B}{2},$$

segue que $S$ não é um ponto extremal no conjunto das matrizes duplamente estocásticas.

Daí, segue que os pontos extremais do conjunto das matrizes duplamente estocásticas tem entradas não diferentes de 0 ou 1. Segue da definição 1.34 que cada linha e cada coluna tem exatamente uma entrada igual a 1 e, portanto, é uma permutação. Isto completa a prova da recíproca.

$\square$

# Capítulo 2

# Propriedades Espectrais de Aplicações Positivas

Nesse capítulo, vamos analisar os resultados obtidos por Evans e Høegh-Krohn em [EH-K]. Veremos que aplicações positivas em C*-álgebras de dimensão finita possuem propriedades espectrais semelhantes às obtidas por Perron e Frobenius para matrizes com entradas positivas. Por exemplo, veremos que o raio espectral de uma aplicação positiva e irredutível é um autovalor associado a um único autovetor positivo.

## 2.1 Aplicações Positivas em C*-álgebras

**Definição 2.1.** Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ C*-algebras. Uma aplicação linear $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dita *auto-adjunta* se $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e é dita *positiva* se $\phi(x^*x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$. No caso em que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ tem unidade, dizemos que $\phi$ é *unital* se $\phi(1) = 1$. Ainda, $\phi$ é dita *estocástica* se for positiva e unital.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.2.**

1. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ C*-álgebras e $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um *-homomorfismo. Então $\pi$ é uma aplicação positiva pois

$$\pi(x^*x) = \pi(x^*)\pi(x) = \pi(x)^*\pi(x) \geq 0$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

2. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento arbitrário. Defina $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por $\phi(x) = a^*xa$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Então $\phi$ é uma aplicação positiva pois

$$\phi(x^*x) = a^*x^*xa = (xa)^*xa \geq 0$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Em geral, $\phi$ não é um *-homomorfismo. Alguns autores referem-se a $\phi$ como *conjugação por* $a$.

3. Defina $\phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ por $\phi(X) = X^t$ para todo $X \in M_n(\mathbb{C})$, onde $X^t$ é a transposta de $X$. Então $\phi$ é uma aplicação positiva pois

$$\phi(X^*X) = (X^*X)^t = X^t(X^*)^t = X^t(X^t)^*$$

para todo $X \in M_n(\mathbb{C})$.

**Lema 2.3.** *Toda aplicação linear positiva $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é auto-adjunta.*

**Demonstração**: Suponha inicialmente $x \in \mathcal{A}$ auto-adjunto e escreva $x = x_+ - x_-$, com $x_\pm \geq 0$, sua decomposição de Jordan. Assim, por linearidade, temos $\phi(x) = \phi(x_+) - \phi(x_-)$. Como $\phi$ é positiva por hipótese, temos que $\phi(x)$ é diferença de dois elementos positivos e, portanto, é um elemento auto-adjunto. Agora, mais geralmente, seja $a \in \mathcal{A}$ qualquer e escreva $a = x + iy$, com $x$ e $y$ auto-adjuntos, sua decomposição Cartesiana. Novamente por linearidade temos $\phi(a)^* = \phi(x + iy)^* = \phi(x)^* - i\phi(y)^* = \phi(x) - i\phi(y) = \phi(x - iy) = \phi(a^*)$.

$\square$

A partir de agora, será importante analisar um caso particular de elementos positivos em uma C*-álgebra. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, denotaremos por $\mathcal{A}_+$ o conjunto dos seus elementos positivos.

**Definição 2.4.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra de dimensão finita e seja $x \in \mathcal{A}$. Dizemos que $x$ é *estritamente positivo*, denotado $x > 0$, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \geq \varepsilon$, isto é, $x$ é positivo e invertível. Além disso, dizemos que uma aplicação linear $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é *estritamente positiva*, denotado $\phi > 0$, se $\phi(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{A}_+$ não nulo.

**Definição 2.5.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra de dimensão finita. Um funcional linear $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é dito um *traço* em $\mathcal{A}$ se $\tau(xy) = \tau(yx)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Além disso, um traço $\tau$ será dito:

1. *normalizado* se $\mathcal{A}$ tem unidade e $\tau(1) = 1$;

2. *positivo* se $\tau(x^*x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$;

3. *fiel* se for positivo e $\tau(x^*x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ com $x \neq 0$.

**Exemplo 2.6.** A C*-álgebra $M_n(\mathbb{C})$ admite um único traço normalizado fiel

$$Tr(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{para todo } A \in M_n(\mathbb{C}), \text{ onde } A = [a_{ij}].$$

De fato, para ver isso precisamos apenas mostrar que todos os estados traciais assumem o mesmo valor nas projeções de posto 1, já que estas formam um base para para $M_n(\mathbb{C})$. Portanto, se mostrarmos que todas as projeções de posto 1 são unitariamente equivalentes, o resultado seguirá imediatamente. Para isso, sejam $P$ e $Q$ projeções de posto 1 tais que $P = ee^*$ e $Q = ff^*$, onde $e, f \in \mathbb{C}^n$ são vetores unitários. Assim, existe uma matriz unitária $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $Ue = f$. Portanto, temos $Q = Ue(Ue)^* = U(ee^*)U^* = UPU^*$.

**Definição 2.7.** Sejam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e $\tau$ um traço normalizado fiel em $\mathcal{A}$. Defina

$$\langle x, y \rangle = \tau(y^* x) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}.$$

Seja, ainda, $\phi$ uma aplicação linear em $\mathcal{A}$, definimos a *adjunta* de $\phi$, denotada por $\phi^*$ como sendo a única aplicação linear tal que

$$\langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi^*(y) \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}.$$

**Observação.** Quando dizemos que uma aplicação linear $\phi$ em $\mathcal{A}$ é auto-adjunta ou positiva, estaremos sempre falando no sentido da C*-álgebra e não no sentido de espaços de Hilbert. Em outras palavras, dizer que $\phi$ é auto-adjunta significa dizer que, como na definição, $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e não que $\phi = \phi^*$. Similarmente, quando dizemos que $\phi$ é uma aplicação positiva, queremos dizer que $\phi(x^* x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e não que $\langle \phi(x), x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

As duas seguintes proposições não serão provadas. Ambas podem ser encontradas em [EH-K].

**Proposição 2.8.** *Uma aplicação linear $\phi$ é auto-adjunta, respectivamente positiva, se, e somente se, $\phi^*$ é auto-adjunta, respectivamente positiva.*

**Proposição 2.9.** *Uma aplicação linear $\phi$ é estritamente positiva se, e somente se, $\langle \phi(x), y \rangle > 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}_+$ não nulos.*

Segue de imediato da proposição acima que $\phi$ é estritamente positiva se, e somente se, $\phi^*$ é estritamente positiva.

**Definição 2.10.** Um cone $M$ em $\mathcal{A}_+$ é dito *hereditário* se, para cada $x \in \mathcal{A}$ tal que $0 \leq x \leq y$ com $y \in M$, vale que $x \in M$. Uma sub-C*-álgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ é dita *hereditária* se $\mathcal{B}_+$ é hereditário em $\mathcal{A}_+$.

**Proposição 2.11.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*álgebra de dimensão finita. Se $p$ é uma projeção em $\mathcal{A}$, então $p\mathcal{A}p$ é hereditário em $\mathcal{A}$. Além disso, se $\mathcal{B}$ é sub-C*-álgebra de $\mathcal{A}$, então existe uma única projeção $p$ em $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B} = p\mathcal{A}p$.*

**Demonstração**: De fato, seja $p$ uma projeção em $\mathcal{A}$ e assuma $0 \leq b \leq pap$ com $a, b \in \mathcal{A}$. Note que $b - pap \geq 0$ implica $(1-p)(b-pap)(1-p) \geq 0$, isto é, $0 \leq (1-p)b(1-p) \leq (1-p)pap(1-p) = 0$. De onde segue que $(1-p)b(1-p) = 0$. Assim, $\|b^{\frac{1}{2}}(1-p)\| = \|(1-p)b(1-p)\| = 0$ e, portanto, $b(1-p) = 0$. Analogamente, $(1-p)b = 0$. Daí, $b = bp = pbp \in p\mathcal{A}p$. A outra afirmação pode ser encontrada em [EH-K].

$\square$

**Definição 2.12.** Dizemos que a sub-C*-álgebra hereditária $p\mathcal{A}p$ *reduz* a aplicação linear positiva $\phi$, ou simplesmente que a projeção $p$ *reduz* $\phi$, se $\phi$ deixa $p\mathcal{A}p$ globalmente invariante. Ainda, dizemos que $\phi$ é *irredutível* se não pode ser reduzida por nenhuma sub-C*-álgebra hereditária própria.

**Proposição 2.13.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra de dimensão finita e $p \in \mathcal{A}$ uma projeção. Então*

1. *$p$ reduz $\phi$ se, e somente se, existe $\lambda > 0$ tal que $\phi(p) \leq \lambda p$.*

2. *$p$ reduz $\phi$ se, e somente se, $1 - p$ reduz $\phi^*$.*

A demonstração desta proposição será omitida aqui. O leitor interessado pode encontrá-la em [EH-K].

**Lema 2.14.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra finita, realizável em um espaço de Hilbert de dimensão $n$. Uma aplicação linear positiva $\phi$ em $\mathcal{A}$ é irredutível se, e somente se, $(1 + \phi)^{n-1} > 0$.*

**Demonstração**: Suponha que $\phi$ é irredutível. Seja $y \in \mathcal{A}_+$ não nulo. Seja $z = y+\phi(y)$ e, portanto, $\ker(z) \subseteq \ker(y)$. Suponha inicialmente que $\ker(z) = \ker(y)$, isto é, $\ker(y) \subseteq \ker(\phi(y))$. Em outras palavras, $\mathrm{im}(\phi(y)) \subseteq \mathrm{im}(y)$. Seja $p$ a projeção sobre a imagem de $y$. Então $\phi$ deixa a sub-C*-álgebra hereditária $p\mathcal{A}p$ invariante. Por irredutibilidade, devemos ter $p = 1$ e portanto, $y$ invertível. Assim, se $y$ é não invertível, devemos ter $\dim\ker z < \dim\ker y$. Portanto, $\dim\ker(1+\phi)^{n-1}y = 0$, e por consequência, $(1+\phi)^{n-1} > 0$. A recíproca é evidente.

□

**Proposição 2.15.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra finita, realizável em um espaço de Hilbert de dimensão $n$. Uma aplicação linear positiva $\phi$ em $\mathcal{A}$ é irredutível se, e somente se, para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}_+$ não nulos com $\langle x, y\rangle > 0$, existe $k > 0$ tal que $\langle \phi^k(x), y\rangle >$* 0 *(nesse caso, $k$ pode ser tomado estritamente menor que $n$).*

**Demonstração**: Se $\phi$ pode ser reduzida por uma projeção $p \in \mathcal{A}$, então $\langle \phi^k(p), 1-p\rangle = 0$, para todo $k \geq 0$. Se $\phi$ é irredutível, segue do lema 2.14 que $\langle (1+\phi)^{n-1}x, y\rangle \geq 0$, para todo $x, y \in \mathcal{A}_+$ diferentes de zero. Portanto, por expansão, existe $k < n$ tal que $\langle \phi^k(x), y\rangle > 0$, se $\langle x, y\rangle = 0$. Isto prova a proposição.

□

## 2.2 Autovetores Positivos

Seja $\phi$ uma aplicação linear positiva irredutível em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$. Com o propósito de produzir autovetores positivos, considere a função real

$$r_x = \sup\{\rho \in \mathbb{R} \text{ tal que } \rho x \leq \phi(x)\}$$

definida em $\mathcal{A}_+$. Mostraremos que $r$ atinge valor máximo em um elemento estritamente positivo de $\mathcal{A}$, o qual é unicamente determinado, a menos de multiplicação por escalar. Como $r_{\lambda x} = r_x$, para qualquer $\lambda > 0$ e $x \neq 0$, é suficiente restringir $r$ ao conjunto compacto $S = \{x \in \mathcal{A}_+ \text{ tal que } \tau(x) = 1\}$. Contudo, $r$ não é necessariamente contínua em $S$, então vamos restringir $r$ ainda mais.

Note que a projeção $p$ sobre a imagem de $\phi(1)$ reduz $\phi$ e, por irredutibilidade, $p = 1$ e $\phi(1)$ é invertível. Assim, se $x \in \mathcal{A}_+$ e $x \geq \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$, então $\phi(x) \geq \varepsilon\phi(1)$. Portanto a relação $x > 0$ implica $\phi(x) > 0$. Mas, $r_x = \|\phi(x)^{-\frac{1}{2}} x \phi(x)^{-\frac{1}{2}}\|^{-1}$, para todo $x \neq 0$ tal que $\phi(x)$ é invertível. Em particular, $r$ é contínua quando restrita aos elementos estritamente positivos de $\mathcal{A}$. Seja $N$ o conjunto compacto $(1+\phi)^{n-1}S$, que está contido no conjunto dos elementos estritamente positivos de $\mathcal{A}$. Então, $r_x$ atinge seu valor máximo $r$ em $N$, digamos em $z$. Agora suponha que $x \in S$. Então, $\phi(x) - r_x x \geq 0$. Portanto $(1+\phi(x))^{n-1}[\phi(x) - r_x x] \geq 0$, isto é, $\phi(y) - r_x y \geq 0$, onde $y := (1+\phi)^{n-1}x \in N$. Portanto $r_y \geq r_x$, e então

$$\begin{aligned} r = \max\{r_x; x \in N\} &= \max\{r_x; x \in S\} \\ &= \max\{r_x; x \in \mathcal{A}_+\} \end{aligned}$$

Seja $z \in \mathcal{A}_+$ tal que $\phi(z) - rz \geq 0$. Note que, se $\phi(x) - rz \neq 0$, teremos, pelo Lema 2.14, $\phi(u) - ru = (1+\phi)^{n-1}[\phi(z) - rz] > 0$, onde $u = (1+\phi)^{n-1}z$. Assim, $r_u > r$, contradizendo a maximalidade de $r$. Em suma, mostramos que se $\phi(u) - ru \geq 0$ para $u \neq 0$ positivo, então $\phi(u) = ru$.

**Teorema 2.16.** *Seja $\phi$ uma aplicação linear positiva e irredutível em uma $C^*$-álgebra de dimensão finita. Então a função definida em $\mathcal{A}_+$ por*

$$r_x = \sup\{\rho \in \mathbb{R} \quad \textit{tal que} \quad \rho x \leq \phi(x)\}$$

*atinge valor máximo $r = r_z$ em um elemento estritamente positivo $z \in \mathcal{A}$, o qual é unicamente determinado a menos de multiplicação por escalar. Além disso, $r$ é um autovalor simples de $\phi$ com autovetor $z$.*

**Demonstração**: Resta apenas mostrar que $r$ é um autovalor simples. Suponha que $z'$ é um autovetor, o qual pode ser tomado auto-adjunto (decomposição cartesiana). Suponha que $z^{-\frac{1}{2}}z'z^{-\frac{1}{2}} \notin \mathbb{C}$. Assim, podemos encontrar um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda - z^{-\frac{1}{2}}z'z^{-\frac{1}{2}} \notin \mathbb{C}$ é positivo e não nulo, mas não estritamente positivo (o que é possível, pois o espectro de um elemnto é compacto, $\sigma(\lambda - a) = \lambda - \sigma(a)$ e $\sigma(a) \in \mathbb{R}$ se $a$ auto adjunto). Isto é, $\lambda z - z'$ é positivo e não nulo, mas não estritamente positivo. Então, $(1+\phi)^{n-1}(\lambda z - z') = (1+r)^{n-1}(\lambda z - z')$ e, pelo Lema 2.14, $\lambda z - z' > 0$, contradizendo a afirmação inicial. Logo $z^{-\frac{1}{2}}z'z^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}$ e, portanto, $z'$ é um múltiplo escalar de $z$.

$\square$

Denotaremos $r = r(\phi)$ e $z = z(\phi)$ o *valor característico* e o *vetor característico* de $\phi$, respectivamente. Como $\phi^*$ é irredutível sempre que $\phi$ for, podemos considerar $r^* = r(\phi^*)$ e $z' = z(\phi^*)$ o valor característico e o vetor característico de $\phi^*$, respectivamente.

Com esta notação, temos

$$r\langle z, z'\rangle = \langle \phi(z), z'\rangle = \langle z, \phi^*(z')\rangle = r^*\langle z, z'\rangle.$$

Portanto $r = r^*$, pois $z, z' > 0$. Além disso, se $\phi(y) = \alpha y$ para algum $y \in \mathcal{A}_+$ não nulo, temos

$$\alpha\langle y, z'\rangle = \langle \phi(y), z'\rangle = \langle y, \phi^*(z')\rangle = r\langle y, z'\rangle. \tag{2.1}$$

Portanto, $\alpha = r$, pois $z' > 0$.

Se definirmos a função real $r^x$ em $\mathcal{A}_+$ por

$$r^x = \inf\{\rho \in \mathbb{R} \text{ tal que } \rho x \geq \phi(x)\}$$

veremos, por procedimento análogo, que $r^x$ atinge valor mínimo $\hat{r}$ em um único ponto $v \in N$ e que, se $x \in \mathcal{A}_+$ satisfaz $\hat{r}x \geq \phi(x)$, então $x$ é um múltiplo escalar de $v$. Além disso, $\phi(v) = \hat{r}v$ e, por (2.1), $\hat{r} = r$ e, pelo Teorema 2.16, $v$ é um múltiplo escalar de $z$, pois $r$ é um autovalor simples de $\phi$.

O próximo teorema resume estes resultados.

**Teorema 2.17.** *Seja $\phi$ uma aplicação linear positiva irredutível em uma $C^*$-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita. A seguinte função definida em $\mathcal{A}_+$,*

$$r^x = \inf\{\rho \in \mathbb{R} \textit{ tal que } \rho x \geq \phi(x)\},$$

*atinge valor mínimo $r$ na mesma direção de $z$, onde $r$ e $z$ são o valor característico e o vetor característico de $\phi$ dados no Teorema 2.16, respectivamente. Os valores característicos de $\phi$ e $\phi^*$ coincidem. Além disso, se $\phi(y) = \alpha y$ para algum $y \in \mathcal{A}_+$ não nulo e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $\alpha = r$ e $y$ é um múltiplo escalar de $z$.*

Note também que $r$ é o raio espectral de $\phi$. Assumindo $\phi(u) = \alpha u$ para algum $u$ não nulo e $\alpha \in \mathbb{C}$, considere a aplicação positiva $\psi$ dada por

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{r}\right) z^{-\frac{1}{2}}\phi(z^{\frac{1}{2}}xz^{\frac{1}{2}})z^{-\frac{1}{2}}, \qquad x \in \mathcal{A}$$

Então, $\psi(1) = 1$ e, por consequência $\|\psi\| = 1$. Se $z^{-\frac{1}{2}}uz^{-\frac{1}{2}}$, vemos que $\psi(v) = \frac{\alpha}{r}v$. Portanto, $|\frac{\alpha}{r}| \leq \|\psi\| = 1$.

Agora, considere uma aplicação linear positiva $\phi$ em $\mathcal{A}$ tomada arbitrariamente e seja $\phi_n$ uma sequência de aplicações lineares positivas irredutíveis que converge para $\phi$ em norma. Então, como $z_n$ são autovetores simples, segue que $z_n$ converge para um autovetor positivo de $\phi$ com autovalor $r$, onde $r_n$ converge para $r$. Além disso, $r$ é o raio espectral de $\phi$, o qual chamamos de valor característico de $\phi$.

Segue, portanto, o seguinte conhecido teorema.

**Teorema 2.18.** *Seja $\phi$ uma aplicação linear positiva em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita. Se $r$ é o raio espectral de $\phi$, então existe $z \in \mathcal{A}_+$ não nulo tal que $\phi(z) = rz$.*

## 2.3 Aplicações de Schwarz

**Definição 2.19.** Seja $\phi$ uma aplicação linear em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$. Dizemos que $\phi$ é uma *aplicação de Schwarz* se $\phi(1) = 1$ e

$$\phi(x^*x) \geq \phi(x)^*\phi(x), \text{ para todo } x \in \mathcal{A}.$$

Se $\alpha \in \mathbb{C}$, denotamos por $M^\phi(\alpha)$ o subespaço espectral $ker(\phi - \alpha)$.

**Lema 2.20.** *Seja $\phi$ uma aplicação de Schwarz irredutível em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita. Então*

1. $M^\phi(1) = \mathbb{C}$;

2. *Para qualquer $\alpha \in \sigma(\phi) \cap \mathbb{T}$, $M^\phi(\alpha)$ consiste de mútiplos escalares de um elemento unitário $u$. Além disso,*

$$\phi(ux) = \alpha u \phi(x), \text{ para todo } x \in \mathcal{A}.$$

3. $M^\phi(\alpha)M^\phi(\beta) \subseteq M^\phi(\alpha\beta)$, *para todo $\alpha \in \mathbb{T}$ e $\beta \in \mathbb{C}$.*

A demonstração deste lema será omitida aqui. O leitor interessado pode encontrá-la em [EH-K].

Seja $\phi$ uma aplicação de Schwarz irredutível. Segue do Lema 2.20 acima que os autovalores sobre o círculo unitário formam um grupo discreto $\Gamma$, com gerador $\gamma = \exp(2\pi i/m)$ para algum inteiro $m$. Além disso, $\Gamma$ age em $\sigma(\phi)$ por multiplicação, pois $M^{\phi}(\alpha)M^{\phi}(\beta) \subseteq M^{\phi}(\alpha\beta) \neq 0$ para todo $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \sigma(\phi)$ (Lema 2.20). Além disso, se $u \in M^{\phi}(\gamma)$ é unitário, temos $\phi(u^k) = \gamma^k u^k$. Portanto $u^m = 1$ e $\sigma(u) \subseteq \Gamma$. Assim, a decomposição espectral de $u$ é

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k p_k,$$

onde as projeções espectrais $p_k$ estão em $\mathcal{A}$. Da relação $\phi(u) = \gamma u$ e do item *2* do Lema 2.20, temos que $\phi$, restrita à C*-álgebra gerada por $u$, é um automorfismo. Da unicidade da decomposição espectral de $u$ e como

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{k+1} p_k = \gamma u = \phi(u) = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k \phi(p_k),$$

segue que $\phi(p_k) = p_{k-1}, k = 1, 2, \ldots, m-1$, e $\phi(p_0) = p_{m-1}$. Portanto, cada $p_k$ reduz $\phi^m$. assim, se $\phi^n$ é irredutível para todo $n$, então $\sigma(\phi) \cap \mathbb{T} = \{1\}$. Reciprocamente, se $\sigma(\phi) \cap \mathbb{T} = \{1\}$, afimrmamos que $\phi^n$ é irredutível para todo $n$. De fato, caso contrário, suponha que $p\mathcal{A}p$ reduz $\phi^n$ para algum $n > 1$, e para alguma projeção própria $p$. Então, pelo Teorema 2.18, existem $x \in p\mathcal{A}p$ não nulo e $\alpha > 0$ tais que $\phi^n(x) = \alpha x$. Mas $\phi$ é recorrente, isto é, $\phi$ tem um estado fiel pelo Teorema 2.16 e portanto $\alpha = 1$. Assim, $(\phi^n - 1)(x) = 0$. Mas

$$\phi^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (\phi - \gamma^i), \text{ onde } \gamma = \exp(2\pi i/n),$$

e, além disso, $\gamma^i \notin \sigma(\phi)$ se $i \neq 0$, pois $\sigma(\phi) \cap \mathbb{T} = \{1\}$. Assim $(\phi - 1)(x) = 0$ e, por consequência, $x \in \mathbb{C}$ pois $\phi$ é irredutível. Isto contradiz o fato de que $p$ é uma projeção própria e $x \in p\mathcal{A}p$ é não nulo.

Mostramos, portanto, o seguinte teorema.

**Teorema 2.21.** *Seja $\phi$ uma aplicação de Schwarz irredutível em uma $C^*$-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita. Então $\sigma(\phi) \cap \mathbb{T}$ forma um subgrupo discreto $\Gamma$ do círculo unitário $\mathbb{T}$. Cada autovalor em $\Gamma$ é simples, com correspondentes autovetores que são múltiplos escalares de um elemento unitário em $\mathcal{A}$. Esses autovetores formam um grupo abeliano isomorfo à $\Gamma$. Se $|\Gamma| = m$, $\gamma = exp(2\pi i/m)$ e $u \in M^{\phi}(\gamma)$ é unitário, então $\sigma(u) = \Gamma$ e $u$ tem decomposição espectral*

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k p_k,$$

*onde $\phi(p_k) = p_{k-1}, k = 1, \ldots, m-1$, e $\phi(p_0) = p_{m-1}$. Assim, $\sigma(\phi) \cap \mathbb{T} = \{1\}$ se, e somente se, $\phi^n$ é irredutível para todo $n$.*

Seja $\psi$ uma aplicação estocástica irredutível em uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita e tal que $\psi^*$ é uma aplicação de Schwarz. Então, $\Gamma = \sigma(\psi^*) \cap \mathbb{T} \subseteq \sigma(\psi^*) = \sigma(\psi)$, e portanto $\Gamma$ age em $\sigma(\psi)$. De fato, se $v \in M^{\psi^*}(\alpha)$, onde $\alpha \in \Gamma$, temos

$$\begin{aligned} \langle v\psi(x), z\rangle &= \tau(z^* v\psi(x)) = \langle \psi(x), v^* z\rangle \\ &= \langle x, \psi^*(v^* z)\rangle = \langle x, \bar{\alpha} v^* \psi^*(z)\rangle \\ &= \alpha\langle vx, \psi^*(z)\rangle = \alpha\langle \psi(vx), z\rangle \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathcal{A}$. Assim $\bar{\alpha} v\psi(x) = \psi(vx)$, para todo $v \in M^{\psi^*}(\alpha)$ e $x \in \mathcal{A}$. Em particular, se $x \in M^{\psi}(\beta)$ para algum $\beta \in \mathbb{C}$, então $\psi(v^* x) = \alpha\beta(v^* x)$ e analogamente $\psi(xv^*) = \alpha\beta xv^*$. Se $u, \gamma$ e $\{p_0, \ldots, p_{m-1}\}$ são como no enunciado do Teorema 2.21 para a aplicação $\psi^*$, então cada $p_k$ reduz $\psi^m$, e a aplicação $\psi^m$ reduzida por $p_k$ é irredutível. De fato, caso contrário, suponha que $p\mathcal{A}p$ reduz $(\psi^*)^m$, onde $p$ é uma projeção própria em $p_k A p_k$. Então, pelo Teorema 2.18, existem $x \in p\mathcal{A}p$ não nulo e $\alpha > 0$ tais que $(\psi^*)^m(x) = \alpha x$. Então, como no Teorema anterior, vemos que $\alpha = 1$, e portanto

$$(\psi^* - 1)[1 + \psi^* + \ldots + (\psi^*)^{m-1}](x) = 0.$$

Mas, $\psi^*$ é irredutível e $\psi^*(1) = 1$. Assim, pelo Teorema 2.16, temos

$$x + \psi^*(x) + \ldots + (\psi^*)^{m-1}(x) \in \mathbb{C}.$$

Contudo, isso é impossível pois $x \in p\mathcal{A}p \subseteq p_k A p_k$, e $(\psi^*)^i(x) \in p_{k-i} A p_{k-i}$, para $i = 1, \ldots, m-1$. Segue assim que $\psi^m$ reduzida por $p_k$ é irredutível. Portanto, existem únicos $z_0, \ldots, z_{m-1}$ em $p_0 A p_0, \ldots, p_{m-1} A p_{m-1}$, respectivamente, tais que $\psi(z_k) = z_{k-1}, \psi(z_0) = z_{m-1}, \tau(z_k) = 1$ e $z_k > 0$ em $p_k A p_k$, para $k = 0, 1, \ldots, m-2$. Então $z = \sum z_k$ é o único estado invariante por $\psi$.

O seguinte teorema é um resumo da discussão acima.

**Teorema 2.22.** *Seja $\psi$ uma aplicação afim irredutível no espaço de estados de uma $C^*$-álgebra de dimensão finita, tal que $\psi^*$ é uma aplicação de Schwarz. Então $1$ é o único autovalor na circunferência unitária se, e somente se, $\psi^m$ é irredutível para algum $m \geq 1$. Em qualquer caso, os autovalores na circunferência unitária formam um subgrupo discreto $\Gamma$ que opera em $\sigma(\psi)$. Se $|\Gamma| = m$, existe uma familia maximal de faces disjuntas de $S(\mathcal{A})$, $F_0, \ldots, F_{m-1}$ tais que $\psi(F_k) = F_{k-1}$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$ e $\psi(F_0) = F_{m-1}$. Se $\omega$ é o único estado invariante por $\psi$, então $\omega = (1/m) \sum \omega_k$, onde $\omega_k \in F_k$, $\psi(\omega_k) = \omega_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$, $\psi(\omega_{m-1}) = \omega_0$, e $F_k$ é a face minimal contendo $w_0$.*

# Capítulo 3

# Sobre o Teorema de Birkhoff

Neste capítulo concentramos o estudo nos pontos extremais do conjunto das aplicações duplamente estocásticas completamente positivas sobre a C*-álgebra $M_n(\mathbb{C})$. Veremos, em certo sentido, uma generalização do clássico Teorema de Birkhoff 1.35, visto no primeiro capítulo. Para isso, seguiremos o trabalho de Landau e Streater [LS], onde é apresentada essa generalização. Também veremos o Teorema de Tregub, encontrado no próprio trabalho de Landau e Streater.

## 3.1 Aplicações Positivas em Álgebras de Matrizes

Comecemos com alguns exemplos adicionais aos apresentados no Exemplo 2.2.

**Exemplo 3.1.**

1. A aplicação $\phi(X) = (TrX)I$ é estocástica em $M_n$, onde $tr$ é o traço normalizado fiel dado no exemplo 2.6.

2. Para qualquer $A \in M_n$ tal que $A \geq 0$, a aplicação $\phi(X) = A \circ X$ é positiva em $M_n$. Lembramos que $A \circ X$ denota o produto de Schur de $A$ por $X$, isto é, $(A \circ X)_{ij} = a_{ij}x_{ij}$ onde $A = [a_{ij}]$ e $X = [x_{ij}]$.

3. Qualquer combinação linear positiva de aplicações positivas é uma aplicação positiva.

Vimos na Definição 2.5 que um traço em uma C*-álgebra de dimensão finita é um funcional linear cíclico e no exemplo 2.6 vimos que existe um único traço normalizado fiel em $M_n(\mathbb{C})$. No entanto, a partir de agora, quando nos referirmos ao traço de um elemento em $M_n(\mathbb{C})$ estaremos nos referindo ao traço usual de uma matriz, isto é,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ onde } A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}).$$

Dito isso, observamos que todo elemento $X \in M_n$ pode ser associado com um funcional linear $F_X$ em $M_n$ dado pela seguinte forma

$$F_X(Y) = tr(X^*Y) \quad \text{para todo} \quad Y \in M_n \tag{3.1}$$

Ainda, no espaço $M_n$ é possível definir um produto interno naturalmente por

$$\langle X, Y \rangle := trX^*Y, \tag{3.2}$$

Assim, $F_X(Y) = tr(X^*Y) = \langle X, Y \rangle$. Segue do Teorema da Representação de Riesz que todo funcional linear em $M_n$ pode ser representado unicamente na forma 3.1. Tais fatos possibilitam a seguinte definição.

**Definição 3.2.** Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação linear. Definimos a *adjunta* de $\phi$ como sendo a aplicação $\phi^* : M_n \to M_n$ tal que

$$\langle \phi(X), Y \rangle = \langle X, \phi^*(Y) \rangle \quad \text{para todo} \quad X, Y \in M_n \tag{3.3}$$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.3.**

1. Se $\phi$ é uma aplicação linear em $M_n$ tal que $\phi(X) = V^*XV$, então é fácil ver que $\phi^*(X) = VXV^*$. De fato, temos $\langle \phi(X), Y\rangle = \langle V^*XV, Y\rangle = \langle X, VYV^*\rangle$.

2. Sejam $A \in M_n$ qualquer e $\phi(X) = A \circ X$. Assim $\phi^*(X) = A^* \circ X$.

A seguinte proposição tem fácil demonstração e portanto será omitida aqui. O leitor interessado pode encontrá-la em [Ch].

**Proposição 3.4.** *Seja $\phi$ uma aplicação linear em $M_n$. Então $\phi$ é positiva se, e somente se, $\phi^*$ é positiva. Além disso, $\phi$ é unital se, e somente se, $\phi^*$ preserva traço, isto é, $tr\phi^*(X) = trX$ para todo $X \in M_n$.*

Passamos agora a definição de aplicação duplamente estocástica.

**Definição 3.5.** Uma aplicação positiva $\phi : M_n \to M_n$ é dita *duplamente estocástica* se for unital e preservar traço. Note que, pela proposição 3.4, dizer que uma aplicação linear $\phi$ é duplamente estocástica é o mesmo que dizer que tanto $\phi$ quanto sua adjunta $\phi^*$ são aplicações estocásticas.

Agora, para adentrarmos o estudo dos pontos extremais das aplicações duplamente estocásticas, resta-nos a definição de aplicação completamente positiva em $M_n(\mathbb{C})$. Mas para isso, será necessário apresentar o produto tensorial de espaços de Hilbert.

## 3.2 Produto Tensorial

O conceito de produto tensorial de estruturas algébricas é extremamente útil em diversas áreas da matemática. Aqui, vamos abordar, inicialmente, o produto tensorial de espaços vetoriais e, em seguida, o produto tensorial de espaços de Hilbert. Terminaremos a seção exibindo o produto de Kronecker, que pode ser vista como sendo o produto tensorial em coordenadas e que será, na prática, a operação usada sobre matrizes.

Comecemos pela definição abstrata.

**Definição 3.6.** Sejam $U$ e $V$ espaços vetoriais de dimensões $m$ e $n$, respectivamente. Chamamos de *produto tensorial* de $U$ por $V$ a todo par $(Z, \Psi)$ que satisfaça os seguintes axiomas:

1. $Z$ é um espaço vetorial e $\Psi : U \times V \to Z$ é uma aplicação bilinear do par $U, V$ em $Z$;

2. $\dim Z = \dim U \dim V$;

3. $\Psi(U \times V)$ gera $Z$, isto é, todo elemento de $Z$ pode ser obtido como combinação linear de elementos de $\Psi(U \times V)$.

Os axiomas 2 e 3, na presença do axioma 1, poderiam ser substituídos por um único axioma, assim enunciado:

2'. Se $\beta_U = \{e_1, \ldots, e_m\}$ e $\beta_V = \{f_1, \ldots, f_n\}$ são bases de $U$ e $V$ respectivamente, então a $mn$-upla $\Psi(e_i, f_j)$, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, forma uma base de $Z$.

O caminho a seguir é dedicado a mostrar a existência e a unicidade do produto tensorial. Comecemos pela existência.

**Teorema 3.7** (Construção do Produto Tensorial)**.** *Dados espaços vetoriais $U$ e $V$, existe o produto tensorial de $U$ por $V$, isto é, existe um par $(Z, \Psi)$ satisfazendo os axiomas da definição 3.6.*

**Demonstração**: Sejam $\beta_U = \{e_1, \ldots, e_m\}$ e $\beta_V = \{f_1, \ldots, f_n\}$ bases de $U$ e $V$, respectivamente. Seja $Z$ um espaço vetorial qualquer de dimensão $mn$. Escolhamos

$$\beta_Z = \{h_{11}, \ldots, h_{ij}, \ldots, h_{mn}\}$$

uma base de $Z$. Ainda, definamos $\Psi : U \times V \to Z$ nos pares $(e_i, f_j)$, com $e_i \in \beta_U$ e $f_j \in \beta_V$, por $\Psi(e_i, f_j) = h_{ij}$ e estendamos $\Psi$ por linearidade em $U \times V$. É evidente que o par $(Z, \Psi)$ satisfaz os axiomas da definição 3.6.

$\square$

De agora em diante, indicaremos um produto tensorial de $U$ por $V$ com $U \otimes V$. Assim, $\Psi(u, v)$ será substituído por $u \otimes v$ (lê-se: $u$ tensor $v$). Observamos ainda que, na definição de produto tensorial 3.6, não se tem $\Psi(U \times V) = Z$. Em outras palavras, nem todo elemento de $U \otimes V$ pode ser escrito na forma $u \otimes v$, embora todo $z \in U \otimes V$ se exprima como $z = \sum u_k \otimes v_k$. Os tensores da forma $u \otimes v$ são ditos *decomponíveis*.

O próximo teorema não será demonstrado aqui, mas sua demonstração pode ser encontrada em [Li] e [La], por exemplo.

**Teorema 3.8.** *Sejam $U \otimes V$ um produto tensorial de $U$ por $V$ e $W$ um espaço vetorial qualquer. Se $g : U \times V \to W$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única aplicação linear $\tilde{g} : U \otimes V \to W$ tal que $\tilde{g}(u \otimes v) = g(u, v)$ para todo $u \in U$ e $v \in V$.*

A partir do Teorema 3.8 acima, mostramos a unicidade do produto tensorial de espaços vetoriais.

**Teorema 3.9** (Unicidade do Produto Tensorial). *Sejam $U \otimes V$ e $U \boxtimes V$ dois produtos tensoriais de $U$ por $V$. Então existe um isomorfismo canônico de $U \otimes V$ sobre $U \boxtimes V$ que leva $u \otimes v$ em $u \boxtimes v$, para todo $u \in U$ e $v \in V$.*

**Demonstração**: A aplicação bilinear $g : U \times V \to U \boxtimes V$ que, ao par $(u, v)$, associa o elemento $g(u, v) = u \boxtimes v$, induz, de acordo com o Teorema 3.8, uma aplicação linear $\tilde{g} : U \otimes V \to U \boxtimes V$ tal que $\tilde{g}(u \otimes v) = u \boxtimes v$. Analogamente, a aplicação bilinear $h : U \times V \to U \otimes V$ tal que $h(u, v) = u \otimes v$ induz uma aplicação linear $\tilde{h}(u \boxtimes v) = u \otimes v$. Assim, a aplicação linear composta $\tilde{h} \circ \tilde{g} : U \otimes V \to U \otimes V$ é tal que $\tilde{h} \circ \tilde{g}(u \otimes v) = \tilde{h}(u \boxtimes v) = u \otimes v$, isto é, $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ coincide com a aplicação identidade no conjunto dos tensores decomponíveis de $U \otimes V$. Como tal conjunto gera $U \otimes V$, segue que $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ é, ela própria, a aplicação identidade. Analogamente, $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ é a aplicação identidade de $U \boxtimes V$ em $U \boxtimes V$. Daí, segue que $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ são isomorfismos, inversos um do outro.

□

Observe que a demonstração do Teorema 3.9 mostra que a propriedade do produto tensorial expressa no Teorema 3.8 serve para caracterizá-lo.

Agora que mostramos a existência e a unicidade do produto tensorial de espaços vetoriais, podemos, ainda, pensar no produto tensorial de espaços de Hilbert. Dados $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert, o produto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é também um espaço de Hilbert. Mais especificamente, temos o seguinte resultado, que não será demonstrado aqui, mas pode ser encontrado em [Mu].

**Proposição 3.10.** *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Então, o produto tensorial*

*$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é um espaço de Hilbert com o único produto interno que satisfaz*

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle x_2, y_2 \rangle_{\mathcal{H}_2},$$

*onde $x_1, y_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2, y_2 \in \mathcal{H}_2$ e os produtos internos no lado direito da igualdade são calculados no espaço de Hilbert indicado.*

Também podemos definir o produto tensorial de aplicações lineares.

**Definição 3.11.** Sejam $S : U \to W$ e $T : V \to Z$ aplicações lineares. O *produto tensorial* de $S$ por $T$ é a aplicação linear $S \otimes T : U \otimes V \to W \otimes Z$ caracterizada pela igualdade

$$S \otimes T(u \otimes v) = S(u) \otimes T(v), \text{ onde } u \in U \text{ e } v \in V.$$

Note que a definição acima faz sentido. Isto é, $S \otimes T$ é obtida, por meio do Teorema 3.8, como $S \otimes T = \tilde{g}$, sendo $g : U \times V \to W \otimes Z$ a aplicação bilinear dada por $g(u, v) = S(u) \otimes T(v)$.

Sejam $S, T : U \to U$ aplicações lineares. Dada $\beta = \{e_1, \ldots, e_m\}$ base de $U$, sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ as matrizes de $S$ e $T$, respectivamente, na base $\beta$. A matriz $A \otimes B$ da aplicação linear $S \otimes T : U \otimes U \to U \otimes U$ na base $\beta \otimes \beta = \{e_i \otimes e_j; 1 \leq i, j \leq m\}$ é denominada *produto de Kronecker* das matrizes $A$ e $B$. Observe que, como $A(e_k) = \sum_i a_{ik} e_i$ e $B(e_h) = \sum_j b_{jh} e_j$, temos:

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)(e_k \otimes e_h) &= A(e_k) \otimes B(e_h) \\
&= \left( \sum_i a_{ik} e_i \right) \otimes \left( \sum_j b_{jh} e_j \right) \\
&= \sum_{i,j} a_{ik} b_{jh} e_i \otimes e_j,
\end{aligned}$$

e, portanto:

$$A \otimes B = (a_{ik}b_{jh}) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1n} & \dots & a_{1n}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{nn} & \dots & a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & \dots & a_{n1}b_{1n} & \dots & a_{nn}b_{11} & \dots & a_{nn}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \dots & a_{n1}b_{nn} & \dots & a_{nn}b_{n1} & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

De forma mais compacta, podemos escrever:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

**Proposição 3.12.** *Sejam $S : U \to V$, $T : V \to W$, $S' : U' \to V'$ e $T' : V' \to W'$ aplicações lineares. Então*

$$TS \otimes T'S' = (T \otimes T')(S \otimes S') : U \otimes U' \to W \otimes W'.$$

**Demonstração**: Temos $[TS \otimes T'S'](u \times u') = TS(u) \otimes T'S'(u') = (T \otimes T')[S(u) \otimes S'(u')] = [(T \otimes T')(S \otimes S')](u \otimes u')$, quaisquer que sejam $u \in U$ e $u' \in U'$, o que demonstra a proposição.

□

## 3.3 Aplicações Completamente Positivas e Condições de Extremalidade

Nessa seção, em um primeiro momento, vamos apresentar a definição de aplicação completamente positiva e algumas caracterizações para essas aplicações. Para isso, seguiremos Choi [Ch]. Na sequência, vamos estudar condições de extremalidade para aplicações completamente positivas, onde começamos a nos aproximar do trabalho de Landau e Streater [LS].

Seja $M_m(M_n(\mathbb{C}))$ o espaço das matrizes $m \times m$ com entradas em $M_n(\mathbb{C})$. Assim, cada aplicação linear $\phi : M_n \to M_n$ induz uma aplicação $\phi_m : M_m(M_n) \to M_m(M_n)$ como na seguinte definição.

**Definição 3.13.** Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação linear. Definimos a aplicação $\phi_m : M_m(M_n) \to M_m(M_n)$ tal que

$$\phi_m([X_{ij}]) = [\phi(X_{ij})]. \tag{3.4}$$

Dizemos que $\phi$ é uma aplicação *$m$-positiva* se $\phi_m$ for uma aplicação positiva. Além disso, se $\phi$ for $m$-positiva para todo $m$, dizemos que a aplicação $\phi$ é *completamente positiva*.

**Exemplo 3.14.**

1. A aplicação dada por $\phi(X) = X^t$ em $M_2$ é positiva, mas não é 2-positiva. De fato, considere as matrizes $E_{ij}$ em $M_2$. Então, $[E_{ij}]$ é positiva em $M_4$, mas $[\phi(E_{ij})]$ não é positiva.

2. Seja $V \in M_n$ uma matriz qualquer. A aplicação dada por $\phi(X) = V^*XV$ em $M_n$ é completamente positiva. De fato, para cada $m$, note que

$$[\phi(X_{ij})] = (I_m \otimes V^*)[X_{ij}](I_m \otimes V).$$

3. Sejam $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(a)} \in M_n$. Por raciocínio análogo ao anterior, a aplicação dada por $\phi(X) = \sum_{k=1}^{a} V^{(k)*}XV^{(k)}$ é completamente positiva.

**Observação 3.15.** Dizer que uma aplicação $\phi$ em $M_n$ é positiva equivale a dizer que ela é 1-positiva. Logo, toda aplicação completamente positiva é também positiva. Mas, como visto no exemplo anterior, a recíproca é falsa.

**Definição 3.16.** Sejam $K, L \in M_n$. Definimos:

1. $CP_n(K) = \{\phi : M_n \to M_n$ tal que $\phi$ é completamente positiva e $\phi(I) = K\}$;

2. $CP_n(K, L) = \{\phi : M_n \to M_n$ tal que $\phi \in CP_n(K)$ e $\phi^*(I) = L\}$.

Segue de (3.3) que $trK^* = trL$. Note que esta é uma condição suficiente para que o conjunto $CP_n(K, L)$ seja não vazio se $K$ e $L$ são positivos. Mais precisamente:

**Proposição 3.17.** *Sejam $K, L \in M_n$ tais que $trK^* = trL$. Então:*

1. *existe uma aplicação linear $\phi : M_n \to M_n$ tal que $\phi(I) = K$ e $\phi^*(I) = L$;*

2. *se $K$ e $L$ são hermitianas, então $\phi$ pode ser tomada hermitiana;*

3. *se $K$ e $L$ são positivos, então $\phi$ pode ser tomada completamente positiva.*

**Demonstração**: Para provar *1*, escrevamos as decomposições cartesianas $K = K_1 + iK_2$ e $L = L_1 + iL_2$, onde $K_1, K_2, L_1$ e $L_2$ são matrizes hermitianas. Assim, temos $tr(K_1) = tr(L_1)$, $tr(K_2) = tr(-L_2)$ e, assumindo o item *2*, garantimos a existência de aplicações hermitianas $\phi_1$ e $\phi_2$ tais que $\phi_1(I) = K_1$, $\phi_2(I) = K_2$, $\phi_1^*(I) = L_1$ e $\phi_2^*(I) = -L_2$. Logo, $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ possui as propriedades requeridas.
Para provar *2*, escrevamos as decomposições de Jordan $K = K_1 - K_2$ e $L = L_1 - L_2$, onde $K_1$, $K_2$, $L_1$ e $L_2$ são positivas. Suponha $tr(K_1) \geq tr(L_1)$. Então existe $\varepsilon \geq 0$ tal que $tr(K_1) \geq tr(L_1 + \varepsilon I)$ e, portanto, $tr(K_2) \geq tr(L_2 + \varepsilon I)$. Assumindo *3*, garantimos a existência de aplicações hermitianas $\phi_1$ e $\phi_2$ tais que $\phi_1(I) = K_1$,

$\phi_2(I) = K_2$, $\phi_1^*(I) = (L_1 + \varepsilon I)$ e $\phi_2^*(I) = (L_2 + \varepsilon I)$. Logo, $\phi = \phi_1 - \phi_2$ possui as propriedades requeridas.

Para provar *3*, note que a aplicação linear $\phi : M_n \to M_n$ dada por $\phi(X) = \tau^{-1} tr(LX)K$, onde $\tau = tr(K^*) = tr(L)$, é completamente positiva e possui as requeridas propriedades.

□

Veremos agora algumas caracterizações para as aplicações completamente positivas. Para qualquer matriz $V \in M_n$, vimos no exemplo 3.14 que a aplicação $\phi(X) = V^* X V$ é completamente positiva. Além disso, toda aplicação completamente positiva em $M_n$ é uma soma de aplicações dessa forma. Mais especificamente, temos:

**Teorema 3.18** (Representação de Kraus [Ch]). *Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação completamente positiva. Então existem $V^{(k)} \in M_n$ com $1 \leq k \leq N$ tais que $\phi$ pode ser escrita na forma*

$$\phi(X) = \sum_{k=1}^{N} V^{(k)*} X V^{(k)}, \tag{3.5}$$

*para todo $X \in M_n$ .*

**Demonstração**: Como $\phi$ é linear e as matrizes $E_{ij}$ geram $M_n$, é suficiente mostrar que existem $V^{(k)}$ com $1 \leq k \leq N$ tais que a Representação de Kraus (3.5) acima é válida para as unidades $E_{ij}$ em $M_n$.

Para isso, seja $v^* \in \mathbb{C}^{n^2}$ e escreva $v^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$, onde $x_k^* \in \mathbb{C}^n$. Defina por $V := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_n$ a matriz associada ao vetor $v^*$ e note que

$$(V^* E_{ij} V)_{1 \leq i,j \leq n} = (x_i^* x_j)_{1 \leq i,j \leq n} = v^* v$$

Agora, suponha $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação completamente positiva. Como $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ é elemento positivo de $M_n \otimes M_n$, segue que $(\phi(E_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ é positivo também. Assim, existem vetores $v_k^*$ com $1 \leq k \leq N$ tais que $(\phi(E_{ij}))_{ij} = \sum_{k=1}^{N} v_k^* v_k$. Seja $V^{(k)}$ a matriz associada ao vetor $v_k^*$. Então, pela construção anterior, $(\phi(E_{ij}))_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (V^{(k)*} E_{ij} V^{(k)})_{ij}$. Portanto, concluímos que $\phi(X) = \sum_{k=1}^{N} V^{(k)*} X V^{(k)}$ para todo $X \in M_n$.

□

Repare que a aplicação linear $\phi : M_n \to M_n$ é completamente determinada pelo elemento $(\phi(E_{ij}))_{ij} \in M_n \otimes M_n$. Em fato, a demonstração do Teorema da Representaçao de Kraus 3.18 nos fornece uma outra caracterização para aplicações completamente positivas.

**Teorema 3.19.** *Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação linear. Então $\phi$ é completamente positiva se, e somente se, $(\phi(E_{ij}))_{1 \leq j,k \leq n}$ é uma matriz positiva.*

Novamente, repare que este último teorema implica que, se $\phi : M_n \to M_n$ é uma aplicação linear, então a $n$-positividade de $\phi$ implica positividade completa.

**Observação 3.20.** Na demonstração do Teorema da Representação de Kraus 3.18, a expressão $(\phi(E_{ij}))_{ij} = \sum_{k=1}^{N} v_k^* v_k$ não é única e, portanto, os $V^{(k)}$ da representação de Kraus (3.5) não são unicamente determinados. Com o propósito de aperfeiçoar a representação, podemos exigir que os vetores $v_k^*$ formem um conjunto linearmente independente. Assim, teremos que o conjunto formado pelas matrizes $V^{(k)}$ também é linearmente independente.

A condição adicional imposta às matrizes $V^{(k)}$ da representação de Kraus (3.5), na observação anterior, permite enunciar e provar a seguinte proposição.

**Proposição 3.21.** *Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação completamente positiva tal que $\phi(X) = \sum_{k=1}^{N} V^{(k)*} X V^{(k)}$ é uma representação de Kraus para $\phi$. Se $\phi(X) = \sum_{p=1}^{N'} W^{(p)*} X W^{(p)}$ é uma outra representação de Kraus para $\phi$. Então existe uma matriz isométrica $(\mu_{pk})_{pk}$ de ordem $N' \times N$ tal que $W^{(p)} = \sum_{k=1}^{N} \mu_{pk} V^{(k)}$ para todo $p$. Além disso, se as matrizes $W^{(p)}$ também formarem um conjunto linearmente independente, então $N' = N$ e $(\mu_{pk})_{pk}$ é unitária.*

**Demonstração**: Seja $w_p^* \in \mathbb{C}^{n^2}$ o vetor tal que $W^{(p)}$ é a sua matriz associada. Como na prova do Teorema da Representação de Kraus 3.18, $\sum_{p=1}^{N'} w_p^* w_p = (\phi(E_{ij}))_{ij} = \sum_{k=1}^{N} v_k^* v_k$ e, portanto, $w_p^*$ pertence ao gerado linear de $\{v_k^*\}_k$. Logo, existe $(\mu_{pk})_{pk}$ tal que $w_p^* = \sum_{k=1}^{N} \bar{\mu}_{pk} v_k^*$. Daí, segue que $W^{(p)} = \sum_{k=1}^{N} \mu_{pk} V^{(k)}$.
Como $\{v_k^*\}_k$ é um conjunto linearmente independente, segue que $\{v_k^* v_l\}_{kl}$ também é. Assim, da igualdade

$$\sum_k v_k^* v_k = \sum_p w_p^* w_p = \sum_{p,k} \bar{\mu}_{pk} v_k^* w_p = \sum_{p,k,l} \bar{\mu}_{pk} \mu_{pl} v_k^* v_l,$$

obtemos $\sum_p \bar{\mu}_{pk} \mu_{pl} = \delta_{kl}$ e, portanto, $(\mu_{pk})_{pk}$ é uma isometria.
No caso em que $\{W^{(p)}\}_p$ também for um conjunto linearmente independente, teremos que o gerado linear de $\{v_k^*\}_k^N$ coincide com o gerado linear de $\{w_p^*\}_p^{N'}$ e, portanto, $N = N'$ e $(\mu_{pk})_{pk}$ é unitária.

□

Comecemos agora um estudo sobre condições de extremalidade para aplicações completamente positivas. De fato, os pontos extremais dos conjuntos $CP_n(K)$ e $CP_n(K, L)$ podem ser caracterizados por uma propriedade das matrizes $V^{(k)}$ na representação de Kraus de aplicações completamente positivas.

**Teorema 3.22** (Teorema de Choi [Ch]). *Seja $\phi \in CP_n(K)$. Então, a aplicação $\phi$*

*é um ponto extremal de $CP_n(K)$ se, e somente se, $\phi$ admite uma representação de Kraus (3.5) onde*

$$\sum_{k=1}^{N} V^{(k)*}V^{(k)} = K$$

*e*

$$\{V^{(k)*}V^{(l)}\}_{k,l=1,\dots,N}$$

*é um conjunto linearmente independente.*

**Demonstração**: Sejam $\phi \in CP_n(K)$ um ponto extremal de $CP_n(K)$ e $\phi(X) = \sum_k V^{(k)*}XV^{(k)}$ uma representação de Kraus (3.5) para $\phi$ com $\{V^{(k)}\}$ linearmente independente. Suponha que $\sum_{kl} \lambda_{kl}V^{(k)*}V^{(l)} = 0$. Queremos mostrar que $(\lambda_{kl})_{kl} = 0$. Repare que podemos assumir, sem perda de generalidade, $(\lambda_{kl})_{kl}$ hermitiana. De fato, da igualdade $\sum_{kl} \lambda_{kl}V^{(k)*}V^{(l)} = 0$ obtemos $\sum_{kl} \bar{\lambda}_{kl}V^{(l)*}V^{(k)} = 0$, de onde concluímos que $\sum_{kl}(\lambda_{kl} \pm \bar{\lambda}_{lk})V^{(k)*}V^{(l)} = 0$. Assim, se provarmos que $(\lambda_{kl} \pm \bar{\lambda}_{lk})_{kl} = 0$, teremos $(\lambda_{kl})_{kl} = 0$ por consequência. Além disso, podemos assumir, multiplicando por um escalar se necessário, que $-I \leq (\lambda_{kl})_{kl} \leq I$.

Agora, defina $\phi_\pm : M_n \to M_n$ por $\phi_\pm(X) = \sum V^{(k)*}XV^{(k)} \pm \sum_{kl} \lambda_{kl}V^{(k)*}V^{(l)}$. Dessa forma, repare que temos $\phi_\pm(I) = \sum V^{(k)*}V^{(k)} = \phi(I) = K$. Sejam $I + (\lambda_{kl})_{kl} = (\alpha_{kl})_{kl}^*(\alpha_{kl})_{kl}$ e $W^{(k)} = \sum_l \alpha_{kl}V^{(l)}$. Assim, $\phi_+(X) = \sum_k W^{(k)*}XW^{(k)}$ e, portanto, $\phi_+ \in CP_n(K)$. Analogamente, temos $\phi_- \in CP_n(K)$. Como $\phi = \frac{1}{2}(\phi_+ + \phi_-)$, segue da extremalidade de $\phi$ que $\phi = \phi_+$ e, portanto, $(\alpha_{kl})_{kl}$ é uma isometria. Logo, $I + (\lambda_{kl})_{kl} = (\alpha_{kl})_{kl}^*(\alpha_{kl})_{kl} = I$, isto é, $(\lambda_{kl})_{kl} = 0$ como queríamos demonstrar.

Reciprocamente, sejam $\phi(X) = \sum_k V^{(k)*}XV^{(k)}$, $\sum_k V^{(k)*}V^{(k)} = K$ e $\{V^{(k)*}V^{(l)}\}_{kl}$ um conjunto linearmente independente. Como $\{V^{(k)*}V^{(l)}\}_{kl}$ é linearmente independente, segue que $\{V^{(k)}\}_k$ também é linearmente independente. Suponha agora que $\phi = \alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_2$ com $\phi_1(X) = \sum_p W^{(p)*}XW^{(p)}$, $\phi_2(X) = \sum_q Z^{(q)*}XZ^{(q)}$ e

$W^{(p)*}W^{(p)} = Z^{(q)*}Z^{(q)} = K$. Como $\phi(X) = \alpha\sum_p W^{(p)*}XW^{(p)} + (1-\alpha)\sum_q Z^{(q)*}XZ^{(q)}$, $W^{(p)}$ e $Z^{(q)}$ podem ser expressos em termos de $V^{(k)}$. Seja $W^{(p)} = \sum_k \mu_{pk}V^{(k)}$ para cada $p$. Então $\sum_p \bar{\mu_{pk}}\mu_{pl}V^{(k)*}V^{(l)}$ e, portanto, $\bar{\mu_{pk}}\mu_{pl} = \delta_{kl}$, isto é, $(\mu_{pk})_{pk}$ é uma isometria. Daí concluímos que $\phi = \phi_1$, de onde segue que $\phi$ é extremal.

$\square$

**Observação 3.23.** Como vimos, se $\phi \in CP_n(K)$, podemos escrever $\phi$ na forma $\phi(X) = \sum_{k=1}^{N} V^{(k)*}XV^{(k)}$ com $\{V^{(k)}\}_k^N$ linearmente independente e, portanto, $N \leq n^2$. No caso em que $\phi$ for um ponto extremal de $CP_n(k)$ a desigualdade pode ser reduzida para $N \leq n$. De fato, o conjunto $\{V^{(k)*}V^{(l)}\}$ é linearmente independente somente se sua cardinalidade for menor que a dimensão de $M_n$ e, portanto, somente se $N^2 \leq n^2$. Daí temos $N \leq n$.

Para enunciar um teorema que caracteriza os pontos extremais de $CP_n(K, L)$ precisaremos da seguinte definição.

**Definição 3.24.** Os pares $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ de elementos de um espaço vetorial são ditos *bi-independentes* se

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$$

implica $c_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Os $n$ pares de elementos serão denotados por $u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n$.

**Exemplo 3.25.** Os pares $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ de vetores em $\mathbb{C}^r$ são bi-independentes se, e somente se, $u_1 \oplus v_1, \ldots, u_n \oplus v_n$ são linearmente independentes em $\mathbb{C}^{2r}$. Daí segue que $n \leq 2r$ se os pares são bi-independentes.

Agora podemos enunciar o teorema, o qual a prova não será dada aqui pois é análoga à prova do Teorema de Choi 3.22.

**Teorema 3.26.** *Seja $\phi \in CP_n(K,L)$. Então, a aplicação $\phi$ é um ponto extremal de $CP_n(K,L)$ se, e somente se, $\phi$ admite uma representação de Kraus* (3.5) *onde*

$$\sum_{k=1}^{N} V^{(k)*}V^{(k)} = K, \qquad \sum_{k=1}^{N} V^{(k)}V^{(k)*} = L$$

*e*

$$\{V^{(k)*}V^{(l)}\}_{k,l=1,\ldots,N}; \{V^{(l)}V^{(k)*}\}_{k,l=1,\ldots,N}$$

*é um conjunto bi-independente de matrizes.*

O seguinte corolário segue como consequência imediata.

**Corolário 3.27.** *Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação linear. Então $\phi$ é um ponto extremal no conjunto das aplicações completamente positivas duplamente estocásticas se, e somente se, $\phi$ admite uma representação de Kraus* (3.5) *onde*

$$\sum_{k=1}^{N} V^{(k)*}V^{(k)} = I, \qquad \sum_{k=1}^{N} V^{(k)}V^{(k)*} = I$$

*e*

$$\{V^{(k)*}V^{(l)}\}_{k,l=1,\ldots,N}; \{V^{(l)}V^{(k)*}\}_{k,l=1,\ldots,N}$$

*é um conjunto bi-independente de matrizes.*

## 3.4 Aplicações Diagonais

**Definição 3.28.** Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação linear. Dizemos que $\phi$ é *diagonal* se

$$\phi(X) = C \circ X \tag{3.6}$$

para algum $C \in M_n$.

**Exemplo 3.29.** A aplicação identidade é diagonal com $C = E$, isto é, $\phi(X) = E \circ X$.

O seguinte lema pode ser facilmente provado.

**Lema 3.30.** *Sejam* $X, C \in M_n$ *positivos. Então* $\phi(X)$*, como em* (3.6)*, é positivo.*

Assim, podemos mostrar a próxima proposição, a qual fornece uma caracterização para as aplicações diagonais positivas.

**Proposição 3.31.** *Seja* $\phi : M_n \to M_n$*, tal que* $\phi(X) = C \circ X$*, para algum* $C \in M_n$*. Então* $\phi$ *é uma aplicação positiva se, e somente se,* $C$ *é positivo. Nesse caso,* $\phi$ *é completamente positiva.*

**Demonstração**: Se $\phi$ é uma aplicação positiva, então $C = \phi(E)$ é positivo, pois $E$ é uma matriz positiva. Reciprocamente, se $C$ é uma matriz positiva, então $\phi$ é uma aplicação positiva pelo lema anterior. Agora, dado um inteiro positivo $m$, a aplicação $\widehat{\phi} : M_n \otimes M_m \to M_n \otimes M_m$ definida por $\widehat{\phi} = \phi \otimes Id$ é uma aplicação diagonal com $\widehat{C} = C \otimes E$. Da positividade de $E$, segue que $\widehat{C}$ é positivo sempre que $C$ for positivo e, portanto, $\widehat{\phi}$ é uma aplicação positiva. Logo, $\phi$ é uma aplicação completamente positiva.

$\square$

**Observação 3.32.** Se $\phi$ é uma aplicação diagonal, então $\phi^*$ também é uma aplicação diagonal. Mais especificamente, se $\phi(X) = C \circ X$, então $\phi^*(X) = C^* \circ X$. Assim, se $\phi(I) = \phi^*(I) = K$, temos que $K_{ij} = C_{ii}\delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$. Portanto, $\phi$ é estocástica se, e somente se, $C_{ii} = 1$ para todo $i \leq n$, e então $\phi$ será duplamente estocástica.

**Proposição 3.33.** *Seja* $\phi : M_n \to M_n$ *uma aplicação diagonal completamente positiva. Então, em qualquer representação de Kraus da forma* (3.5)*, as matrizes* $V^{(k)}$ *são diagonais.*

**Demonstração**: Sejam $\phi(X) = \sum_{k=1}^{N} V^{(k)*}XV^{(k)}$ uma representação de Kraus para $\phi$ e $C \in M_n$ tal que $\phi(X) = X \circ C$, onde $X \in M_n$ é arbitrário. Comparando as duas expressões para $\phi$ obtemos

$$\sum_{k,m,n} \bar{V}_{mi}^{(k)} X_{mn} V_{nj}^{(k)} = C_{ij} X_{ij}.(1)$$

Pela arbitrariedade de $X$, segue que

$$\sum_{k} \bar{V}_{mi}^{(k)} V_{nj}^{(k)} = C_{ij} \delta_{mi} \delta_{nj}.(2)$$

Fixando $m = n$ e $i = j$, temos que

$$\sum_{k} |V_{mi}^{(k)}|^2 = 0 \quad \text{sempre que} \quad m \neq i.$$

Assim, $V_{mi}^{(k)} = 0$ se $m \neq i$, isto é, as matrizes $V^{(k)}$ são diagonais.

□

A condição para extremalidade pode ser reformulada no caso das aplicações diagonais, com o auxílio da seguinte definição.

**Definição 3.34.** O conjunto $\{u_1, \ldots, u_t\}$ de elementos de $\mathbb{C}^n$ é dito um *conjunto completo de vetores* se $\langle u_k, Au_k \rangle = 0$ para todo $1 \leq k \leq t$ implica $A = 0$, onde $A \in M_n$.

Agora, podemos enunciar

**Teorema 3.35.** *Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação diagonal completamente positiva. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\phi$ é extremal em $CP_n(K, K)$;*

2. *$\phi$ é extremal em $CP_n(K)$;*

*3. A matriz $C$, como na equação* (3.6)*, pode ser expressa como*

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_i^{(k)} \bar{\lambda}_j^{(k)},$$

*onde $\sum_{k,l} b_{kl} \lambda_i^{(k)} \lambda_i^{(l)}$ para todo $1 \leq i \leq n$ implica $b = 0$;*

*4. $\phi$ admite uma representação de Kraus* (3.5) *onde $V_{ij}^{(k)} = \lambda_i^{(k)} \delta_{ij}$, e os vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ formam um conjunto completo de vetores em $\mathbb{C}^N$, onde $(u_i)_k = \lambda_i^{(k)}$.*

**Demonstração**: De acordo com a Proposição 3.33, em qualquer representação de Kraus de $\phi$ da forma (3.5), as matrizes $V^{(k)}$ são diagonais e portanto comutam entre si. Segue que a bi-independência expressa no Teorema 3.26 é equivalente à independência linear expressa no Teorema de Choi 3.22 nesse caso. Portanto *1* e *2* são equivalentes. Além disso, as matrizes $V^{(k)*}V^{(l)}$ são diagonais com entradas diagonais $\bar{\lambda}_j^{(k)} \lambda_j^{(l)}$. Portanto, a independência linear dessas matrizes é equivalente à condição *3*, onde $C$ é tal que

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\lambda}_i^{(k)} \lambda_j^{(k)} \text{ e } V_{ij}^{(k)} = \lambda_i^{(k)} \delta_{ij}.$$

Ainda, a condição em *3* expressa a completude dos vetores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ em $\mathbb{C}^N$ como na definição 3.34.

□

**Definição 3.36.** Sejam $\phi_1$ e $\phi_2$ aplicações lineares de $M_n$ em $M_n$. Então, $\phi_1$ e $\phi_2$ são ditas *unitariamente equivalentes* se existem aplicações unitárias $\phi_R$ e $\phi_S$ tais que $\phi_2 = \phi_R \phi_1 \phi_S$.

Equivalência unitária preserva positividade completa, estocasticidade e extremalidade. Se $\phi_1$ e $\phi_2$ são unitariamente equivalentes, então $K_2 = R^* K_1 R$ e $L_2 = S L_1 S^*$ e as representações deles satisfazem $V_2^k = S V_1^k R$.

**Teorema 3.37.** *Seja $\phi : M_n \to M_n$ uma aplicação linear.*

*(1) Se $\phi$ é completamente positiva com representação de Kraus* (3.5) *onde $N = 1$, então $\phi$ é unitariamente equivalente a uma aplicação diagonal completamente positiva.*

*(2) Se $\phi$ é uma aplicação completamente positiva duplamente estocástica com representação de Kraus* (3.5) *onde $N = 2$, então $\phi$ é unitariamente equivalente a uma aplicação diagonal completamente positiva duplamente estocástica.*

**Demonstração**:

(1) Seja $\phi$ completamente positiva tal que $\phi(X) = V^*XV$ é uma representação de Kraus (3.5) para $\phi$. Seja $V = RDS$ decomposição do valor singular de $V$, onde $R, S \in M_n$ são unitárias e $D \in M_n$ é diagonal. Assim, temos $\phi = \phi_R \phi' \phi_S$, onde $\phi'$ é uma aplicação diagonal completamente positiva.

(2) Seja $\phi$ completamente positiva com representação de Kraus (3.5) onde $N = 2$. Analogamente ao argumento anterior, seja $V^{(1)} = SDR$ e defina $W := S^*V^{(2)}R^*$. Defina ainda $\phi' : M_n \to M_n$ tal que $\phi'(X) = DXD + W^*XW$ e repare que $\phi = \phi_R \phi' \phi_S$. Como equivalência unitária preserva estocasticidade, segue que $\phi'$ é duplamente estocástica. Assim, $D^2 + W^*W = I$ e $D^2 + WW^* = I$, de onde segue que $WW^* = W^*W$, isto é, $W$ é normal. Seja $W = UT$ decomposição polar de $W$, onde $U$ é unitária e $T$ é positiva. Como $W$ é normal, $U$ e $T$ comutam e, portanto, $D^2 + T^2 = I$. De onde segue $T = (I - D^2)^{1/2}$, que é diagonal, e que $U$ comuta com $D$ e pode, portanto, ser simultaneamente diagonalizada com $D$. Obtemos, portanto, $\phi''$ que é unitariamente equivalente a $\phi$ e é diagonal.

$\square$

## 3.5 Sobre o Teorema de Birkhoff

Nessa seção consideramos os pontos extremais do conjunto das aplicações completamente positivas duplamente estocástica de $M_2$, $M_3$ e $M_4$.

Veremos, em seguida, que as aplicações estocásticas invertíveis apresentam um importante papel no estudo sobre os pontos extremais no conjunto das aplicações estocásticas. Por aplicação estocástica invertível nos referimos a uma aplicação estocástica que possui uma inversa, a qual também é estocástica. O Teorema de Wigner apresenta uma caracterização para as aplicações estocásticas invertíveis.

**Teorema 3.38** (Teorema de Wigner [LS])**.** *Uma aplicacão estocástica invertível é*

1. *unitária, isto é, $\phi_U(X) = U^*XU$ para alguma matriz unitária $U \in M_n$ ou*

2. *anti-unitária, isto é, $\psi_U(X) = U^*X^tU$ para alguma matriz unitária $U \in M_n$.*

Tregub considera a questão de quando as aplicações estocásticas invertíveis são exatamente o conjunto dos pontos extremais das aplicações duplamente estocásticas.

A demonstração do Teorema de Tregub pode ser vista em [Tr].

**Teorema 3.39** (Teorema de Tregub)**.**

1. *O conjunto das aplicações duplamente estocásticas de $M_2$ consiste precisamente de aplicações invertíveis. Portanto, toda aplicação duplamente estocástica de $M_2$ é uma combinação convexa de aplicações unitárias e anti-unitárias.*

*2. Se $n \geq 3$, existem aplicações duplamente estocásticas que não são combinações convexas de aplicações invertíveis. Portanto, existem aplicações duplamente estocásticas extremais e não-invertíveis.*

Veremos agora, mais detalhadamente os casos $n = 2, 3, 4$.

### 3.5.1 O caso $M_2$

Se $\phi$ é uma aplicação extremal completamente positiva duplamente estocástica de $M_2$, então admite uma representação de Kraus da forma (3.5). Ainda, a bi-independência no Teorema 3.26 implica $N^2 \leq 2n^2$, de onde segue que $N = 1$ ou $N = 2$.

Se $N = 1$, então $\phi(X) = V^*XV$ e $V^*V = I$, isto é, $V$ é uma matriz unitária. Logo, $\phi$ é uma aplicação unitária.

Se $N = 2$, segue do teorema 3.37 que $\phi$ é unitariamente equivalente à uma aplicação diagonal, que também é extremal. Mas, pelo o que observamos, devemos ter $N^2 \leq 2$. Logo, somente $N = 1$ é possível para uma aplicação extremal no caso $M_2$.

Portanto, o conjunto das aplicações extremais completamente positivas duplamente estocásticas de $M_2$ consiste de aplicações unitárias. Assim, toda aplicação duplamente estocástica completamente positiva de $M_2$ é uma combinação convexa de aplicações unitárias.

### 3.5.2 O caso $M_3$

Se $\phi$ é uma aplicação diagonal completamente positiva duplamente estocástica de $M_3$, então pode ser escrita como uma combinação convexa de aplicações extremais duplamente estocásticas completamente positivas, as quais devem ser diagonais. Então, de acordo com o que vimos, essas aplicações extremais devem ter $N = 1$ e, portanto, são unitárias. Além disso, qualquer aplicação completamente positiva duplamente estocástica $\phi$ com representão de Kraus (3.5), onde $N = 2$ é unitariamente equivalente a uma aplicação diagonal, de acordo com o teorema 3.37. Como essa aplicação diagonal é uma combinação convexa de aplicações unitárias, o mesmo vale para $\phi$ e, portanto, provamos o seguinte teorema.

**Teorema 3.40.**

1. *Se $\phi$ é uma aplicação diagonal completamente positiva duplamente estocástica de $M_3$, então é uma combinação convexa de aplicações diagonais unitárias.*

2. *Se $\phi$ completamente positiva duplamente estocástica de $M_3$ com representação de Kraus* (3.5)*, onde $N = 2$, então $\phi$ é uma combinação convexa de aplicações unitárias.*

Podemos, contudo, construir uma aplicação extremal não-unitária $\phi$ de $M_3$ com Representação de Kraus com $N = 3$, fixando $V^{(k)} = (\frac{1}{\sqrt{2}})J^{(k)}$, onde

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para ver isso, note que $V^{(k)*} = V^{(k)}$ para todo $k = 1, 2, 3$ e $V^{(1)2} + V^{(2)2} + V^{(3)2} = I$. Assim, $\phi$ é duplamente estocástica.

### 3.5.3 O caso $M_4$

De acordo com a observação acima, $n = 4$ é o menor valor de $n$ tal que aplicações diagonais extremais não-unitárias completamente positivas duplamente estocásticas podem existir. Então, necessariamente $N = 2$. Um exemplo pode ser construído fixando

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Não é difícil verificar que o conjunto $\left\{V^{(k)*}V^{(l)}\right\}_{k,l=1,2}$ é linearmente independente.

# Bibliografia

[AH-K] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn. Frobenius Theory for Positive Maps of von Neumann Algebras. Institute of Mathematics, University of Oslo, Blindern, Oslo, Norway (1978), 83-94.

[Bh] R. Bhatia. Positive definite matrices. Princeton University Press, 2007.

[Bh2] R. Bhatia. Matrix analysis. Springer, 1997.

[BR] O. Bratteli, D. W. Robinson. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I. Springer, Berlin (1979)

[Ch] M. D. Choi. Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices, *Linear Algebra and its Applications.* **10** 285-290 (1975).

[EH-K] D. E. Evans, R. Høegh-Krohn. Spectral Properties of Positive Maps on C*-algebras. J. London Math. Soc. (2), 17 (1978), 345-355.

[Ex] R. Exel. Introdução às C*-álgebras. Mini-curso ministrado na Primeira Bienal de Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais. http://www.mtm.ufsc.br/~exel/

[HJ] R. A. Horn, C. R. Johnson. Matrix analysis. Cambridge University Press, 1985.

[HJ2] R. A. Horn, C. R. Johnson. Topics in matrix analysis. Cambridge University Press, 1991.

[LS] L. J. Landau, R. F. Streater. On Birkhoff's Theorem for Doubly Stochastic Completely Positive Maps of Matrix Algebras, *Linear Algebra and its Applications.* **193** 107-127 (1993).

[La] S. Lang. Linear algebra. Reading: Addison-Wesley, 1966.

[Li] E. Lima. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária. Impa, 2006.

[Lx] P. Lax. Linear Algebra and its applications. 2nd. ed. New York : Wiley, 2007.

[Mu] G. J. Murphy. Murphy, C* algebras and operator theory. Boston : Academic Press, 1990.

[Su] V. S. Sunder. Functional Analysis - Spectral theory. Birkhäuser-Verlag, 1997.

[Tr] S. L. Tregub. Soviet. Math. 30(3): 105 (1986).