UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Letícia Lisovski

UM TRATAMENTO VETORIAL PARA CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA

Porto Alegre

2014/2

Letícia Lisovski

UM TRATAMENTO VETORIAL PARA CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2014/2

Letícia Lisovski

UM TRATAMENTO VETORIAL PARA CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

Profa. Dra. Maria Alice Gravina
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS

Porto Alegre, 05 de dezembro de 2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, grandes incentivadores do meu estudo. Mostrando-se sempre presentes nos momentos em que mais precisei. Obrigada pelos conselhos de vocês, obrigada por suas sábias e doces palavras.

Agradeço aos amigos e colegas que cruzaram pelo meu caminho nesta universidade e assim como levaram também deixaram experiências e contribuições. Em especial as colegas e amigas Maria Luiza e Letícia mostrando-se grandes parceiras ao longo de minha graduação. Obrigada Maria Luiza pelas suas conversas e conselhos que tanto me acalentavam. Obrigada Letícia pelo seu auxílio e companheirismo nas diversas disciplinas do curso que enfrentamos juntas.

Aos professores e equipe diretiva da Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont em que a experiência prática deste trabalho foi realizada por abrirem as portas da escola para a realização de meu estágio e, agora, por me receberem novamente em função do meu TCC mostrando-se sempre solícitos em ajudar.

Aos alunos do 3º ano do Ensino Médio noturno que participaram da pesquisa, pois sem a colaboração dos mesmos este trabalho não seria possível. São vocês alunos que nos ensinam a ser professores todos os dias.

À minha orientadora, Prof.ª Márcia Notare, pela sua paciência comigo nas orientações, pelas ideias que vieram a contribuir de modo significativo ao meu trabalho, pelo seu apoio e incentivo até mesmo naqueles momentos em que desanimei. Muito obrigada!

À Prof.ª Rosane Maestri por quem desde criança auxiliava-me nas tarefas escolares de matemática e foi contribuindo de certo modo para que o gosto e o prazer em fazer matemática tornassem-se arraigados em mim. Obrigada pelas suas sugestões e ideias para este trabalho.

Às professoras Marilaine e Maria Alice que contribuíram para a minha formação acadêmica e por aceitarem o convite em compor a banca examinadora do meu TCC.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de introdução de conceitos básicos da Geometria Vetorial para estudar, de outra forma, tópicos de Geometria Analítica abordados no Ensino Médio, com o uso do *software* GeoGebra. Dessa forma foi concebida e aplicada uma sequência didática, que se encontra no Apêndice A, com um grupo de dez alunos do 3º ano de Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino de Porto Alegre. O *software* GeoGebra foi utilizado em alguns dos encontros da experiência prática como um recurso facilitador na visualização e compreensão dos conceitos abordados. Para a elaboração da sequência didática e para as análises das estratégias de resolução dos alunos nas atividades que lhes foram propostas, tomamos como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Neste trabalho também foi feita a análise de livros didáticos de matemática básica com o objetivo de verificar como os conceitos de Geometria Analítica são apresentados e se há ou não a presença do estudo de vetores nos mesmos.

Palavras-chave: Sistemas de Representação Semiótica. GeoGebra. Geometria Vetorial. Geometria Analítica.

ABSTRACT

This work presents a proposal of introduction of basic concepts of Vector Geometry so as to study in a different way topics of Analytic Geometry covered in high school, with the use of GeoGebra software. Therefore, a didactical sequence has been designed and implemented – which is in appendix A – with a group of ten third grade high school students in a state school in Porto Alegre. GeoGebra software was used in some of practical experience meetings as a resource to help visualization and comprehension of concepts approached. For instructional sequence design and analysis of students' solution strategies in activities proposed, this work is based on Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations. This work has also analyzed basic mathematics textbooks to check how concepts of Analytic Geometry are presented and whether or not there is the presence of vector study in them.

Keywords: Semiotics Representation Systems. GeoGebra. Vector Geometry. Analytic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao ingressar no curso de graduação em Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), tive a oportunidade de cursar a disciplina de "Geometria Analítica B" no primeiro semestre. Nesta disciplina, estudei tópicos de Geometria Analítica vistos no Ensino Médio sob uma nova abordagem: a Geometria Vetorial. Era a primeira vez que me deparava com o estudo dos vetores, sendo que pude perceber como os diversos problemas trabalhados em Geometria Analítica eram solucionados de uma maneira mais fácil e elegante por meio do uso dos mesmos. Desde, então, questionava-me sobre os motivos de tal abordagem não fazer parte das aulas de matemática do Ensino Médio.

No segundo semestre de 2011 fui monitora da disciplina de "Geometria Analítica B", sendo que auxiliava os alunos na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas propostos na disciplina. Chamava-me a atenção o fato de estar atribuída aos vetores tamanha visualização geométrica, tornando os tópicos e problemas trabalhados dentro da Geometria Analítica mais compreensíveis e significativos para os alunos. Foi a partir do meu trabalho como monitora que encontrei a motivação para levar o estudo de vetores para a sala de aula de matemática da escola básica, já que o mesmo só se encontra presente em certas disciplinas de graduação de alguns cursos de Ciências Exatas. Dessa forma, por meio do meu trabalho de conclusão de curso tal experiência tornou-se possível.

No capítulo 2, apresento a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, pois a mesma serviu como aporte teórico para o desenvolvimento deste trabalho. Na sequência, apresento a análise de dois livros didáticos, com o objetivo de verificar a abordagem do conteúdo de Geometria Analítica para os estudantes de Ensino Médio e se o estudo de vetores se faz presente nos mesmos. Finalizo este capítulo destacando a importância do uso de *softwares* e mídias digitais no ensino da matemática através da apresentação e análise do *software* GeoGebra neste contexto.

No capítulo 3 há um detalhamento do conteúdo de Geometria Vetorial e de Geometria Analítica a ser explorado neste trabalho com a apresentação de definições e demonstrações de certas propriedades.

No capítulo 4, descrevo de maneira breve o contexto da escola, o público alvo da pesquisa e a estrutura física da instituição escolar. Depois, apresento a proposta da sequência didática elaborada para os alunos do Ensino Médio, sendo que a mesma encontra-se no Apêndice A deste trabalho.

No capítulo 5, descrevo e analiso os encontros que constituíram a experiência prática na escola, com base nos registros das atividades realizadas pelos estudantes, nos momentos de discussões com o grande grupo, nas dúvidas e questionamentos levantados pelos mesmos no decorrer dos encontros.

Por fim, no capítulo 6 apresento as considerações finais, baseada na experiência realizada e na descrição e análise dos encontros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, será abordada a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que auxiliou na fundamentação deste trabalho. Em seguida, são analisados dois livros didáticos de matemática, com o objetivo de verificar como se dá a abordagem de tópicos de Geometria Analítica e se há o estudo de vetores nos mesmos. No final deste capítulo, discuto a importância da informática na educação e apresento brevemente o *software* GeoGebra.

2.1 A IMPORTÂNCIA DAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

Porque grande parte dos alunos possuem dificuldades de compreensão em matemática? Qual é a origem destas dificuldades? De que maneira podemos melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos? São estas e outras questões que permeiam constantemente o pensamento de muitos professores de matemática, ao perceberem as dificuldades de compreensão enfrentadas por seus alunos quando apresentam aos mesmos um novo conceito matemático ou, então, quando os estudantes se deparam com um problema que não conseguem resolver.

Comumente, atribuem-se os bloqueios de compreensão em matemática à complexidade epistemológica dos conceitos estudados nesta disciplina. No entanto, tanto a matemática como os demais domínios do conhecimento são capazes de produzir conceitos mais ou menos complexos (DUVAL, 2003). Dessa forma, temos que há uma diferença entre a atividade cognitiva exigida pela matemática e aquela exigida pelas outras áreas do conhecimento, porém esta diferença não deve ser concedida aos conceitos e, sim, às duas seguintes características: utilização de representações semióticas e diversidade destas representações na matemática.

Podemos afirmar que o progresso do conhecimento matemático ao longo da história se deu graças ao desenvolvimento das representações semióticas, ou seja, estas últimas são uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático (DUVAL, 2003). Diferentemente do que ocorre em outras áreas do conhecimento, o acesso aos objetos matemáticos se dá de uma maneira que não é perceptível fisicamente, nem mesmo observável por meio do auxílio de instrumentos (lunetas, microscópios, aparelhos de medida, etc.), pois os objetos matemáticos são abstratos. Dessa forma, o acesso aos mesmos está ligado ao uso de um sistema de representação semiótica que os permite designar (DUVAL, 2003).

Para Duval (2009) não existe conhecimento matemático que não possa ser mobilizado por um sujeito sem o auxílio de uma representação. O autor destaca três aproximações para a noção de representação, sendo elas: as mentais, as internas ou computacionais e as semióticas.

As representações mentais surgiram dos estudos de Piaget sobre as crenças e explicações dadas pelas crianças para os fenômenos naturais. São representações internas e conscientes ao sujeito e “[...] recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. [...]” (DUVAL, 2012, p. 269).

As representações computacionais são internas e não-conscientes ao indivíduo e cumprem a função de codificação da informação recebida, isto é, ao realizar uma determinada tarefa, temos que os sujeitos, com o objetivo de produzir uma resposta adaptada, não pensam em todos os passos necessários para a sua execução, ou seja, há a realização automatizada da tarefa. Exemplos de representações computacionais: algoritmos das operações e algoritmos computacionais.

As representações semióticas presentes na atividade matemática surgem por volta de 1985 no âmbito das pesquisas e estudos referentes à aquisição de conhecimentos matemáticos e aos problemas relativos à aprendizagem dos mesmos. Estas representações são externas e conscientes ao sujeito e cumprem três funções importantes para a atividade cognitiva, a saber: comunicação, objetivação (tomada de consciência) e tratamento da informação, sendo que esta última será explicada com mais detalhes adiante. “[...] As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. [...]” (DUVAL, 2012, p. 269). São exemplos de representações semióticas: a língua natural, as escritas simbólicas, os gráficos cartesianos, as tabelas, as figuras geométricas, etc. Temos que o termo registro de representação semiótica é utilizado para designar os diferentes tipos de representações semióticas existentes.

Muitas vezes, atribuímos às representações semióticas apenas o papel de expressão das representações mentais com o objetivo de torná-las acessíveis aos outros. Porém é um erro afirmar que as representações semióticas cumprem somente esta função. Além do mais, pode haver uma grande diferença entre as representações mentais de um indivíduo e as representações semióticas que o mesmo produz para exprimir as primeiras a outrem.

No entanto, podemos afirmar que há uma interação entre estes dois tipos de representações (mentais e semióticas), que não chega a ser uma correspondência direta ou uma equivalência, pois para o desenvolvimento das representações mentais se faz necessária a interiorização das representações semióticas. Temos que as representações mentais não exercem a função de tratamento “[...] a não ser por meio da mobilização de um registro semiótico e da prática ‘mental’ desse registro. [...]” (DUVAL, 2009, p. 46).

A teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida pelo psicólogo e filósofo francês Raymond Duval é tomada como suporte teórico para a pesquisa desenvolvida neste trabalho. Esta teoria traz inúmeras contribuições para a área da Educação Matemática, pois Duval concentra seus estudos no funcionamento cognitivo implicado nos processos de ensino e aprendizagem em matemática. De acordo com Duval (2009, p.13):

> A aprendizagem das matemáticas constitui, em evidência, um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos. A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. [...]

Para o desenvolvimento da teoria dos Registros de Representação Semiótica, Duval apoia-se nos estudos feitos dentro do campo da semiótica por Charles Sanders Peirce (1839 - 1914), Ferdinand de Saussure (1857 - 1913) e Gottlob Frege (1848 - 1925). Dessa forma, veremos a seguir, de maneira breve, as contribuições destes três teóricos antes de nos determos as explicações sobre a teoria de Raymond Duval.

Cada um destes três teóricos utiliza-se de disciplinas distintas como campo de referência para os seus estudos sobre a análise dos signos. “[...] Para Peirce, são as ciências em geral, sem distinção, e a lógica. Para Saussure, que tinha trabalhado sobre a evolução das línguas indo europeias, é a linguística. Para Frege são a matemática e, mais exatamente, a análise e a aritmética. [...]” (DUVAL, 2011, p. 29).

De acordo com Duval (2011), o limite das contribuições de Frege se deve ao fato de o mesmo considerar as escritas simbólicas como únicas representações possíveis para a atividade matemática, não levando em consideração os outros sistemas de representação semiótica que também podem ser utilizáveis para representar os objetos matemáticos.

Duval (2011) afirma que os modelos propostos por estes teóricos são insuficientes com relação a tudo o que diz respeito ao funcionamento e desenvolvimento do fazer matemático.

De acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, na atividade matemática temos que a utilização de ao menos dois registros de representação semiótica se faz necessária. Quando os sujeitos estão em fase de aprendizagem, podem confundir os objetos matemáticos com suas representações. Dessa forma “[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semióticas. [...]” (DUVAL, 2003, p. 15). O trabalho com diferentes representações de um mesmo objeto se faz necessário, para que o aluno não confunda representante e representado, reconhecendo, assim, nas distintas representações o mesmo objeto.

De acordo com Duval (2009), há dois tipos de transformações de representações semióticas: os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos são as transformações de representações pertencentes a um determinado sistema semiótico em outras representações de um mesmo sistema. Ou seja, os tratamentos são transformações internas a um sistema semiótico. Exemplos: efetuar um cálculo mantendo-se sempre no mesmo sistema de escrita dos números (veja a figura 1 abaixo), resolver um sistema de equações, etc.

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{5}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{12}+\frac{18}{12}+\frac{20}{12}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{41}{12}$$

Figura 1 - Exemplo de tratamento.

Fonte: A autora.

As conversões são as transformações de representações pertencentes a um determinado sistema semiótico em outras representações pertencentes a um sistema semiótico distinto do primeiro. Exemplos: enunciado em língua natural de um determinado teorema e a representação figural deste teorema (veja a figura 2 a seguir), representações gráfica, em língua natural e algébrica dos vetores (veja a figura 3 a seguir), entre outras. Duval (2003) afirma que a atividade de conversão, do ponto de vista matemático, é interessante quando se deseja buscar uma representação de um determinado objeto em que os custos cognitivos são menores e os tratamentos mais econômicos. No entanto, do ponto de vista cognitivo “[...] é a atividade de conversão que [...] aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. [...]” (DUVAL, 2003, p. 16).

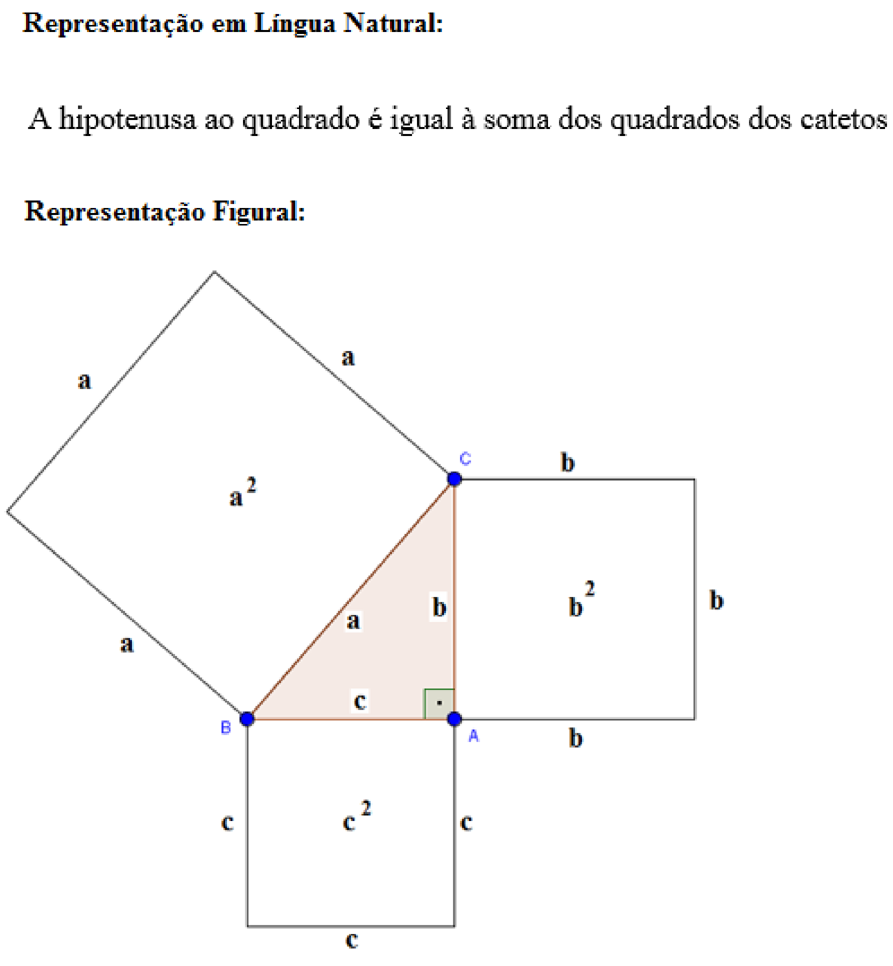


Figura 2 - Exemplo de conversão envolvendo as representações língua natural e figural do Teorema de Pitágoras.

Fonte: A autora.

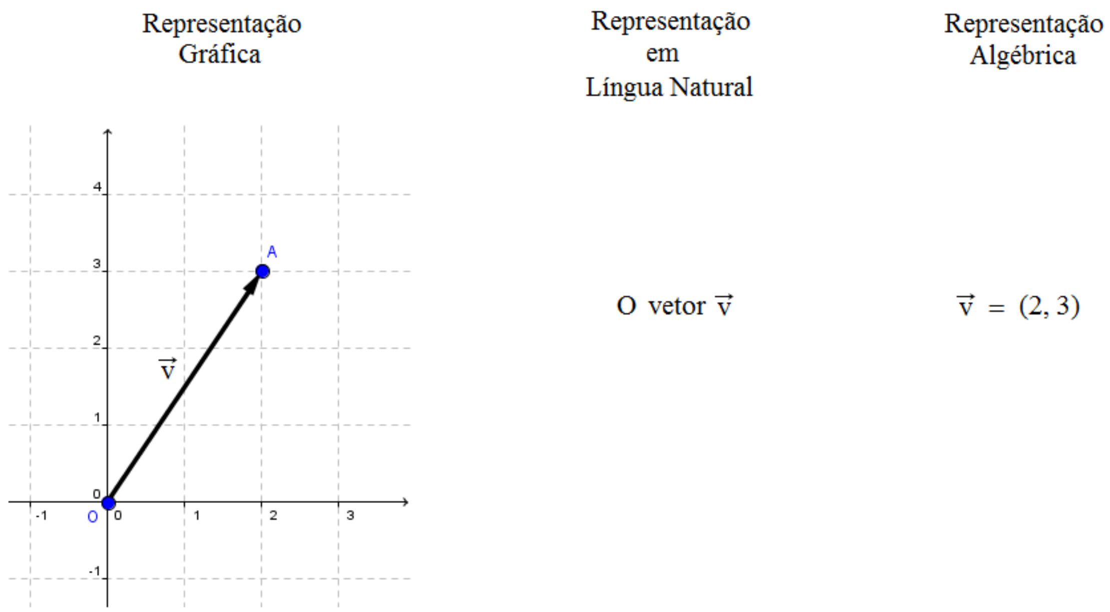


Figura 3 - Exemplo de conversão envolvendo as representações gráfica, língua natural e algébrica de um vetor.

Fonte: A autora.

A atividade de conversão não é tão simples de ser realizada como a de tratamento. Temos que as representações semióticas são constituídas por unidades de sentido, ou seja, estas unidades significantes formam o conteúdo das representações. Sendo assim, para que a operação de conversão ocorra, os seguintes três critérios devem ser atendidos: “[...] correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações. [...]” (DUVAL, 2009, p. 69).

O primeiro critério corresponde ao fato de cada unidade significante na representação de partida corresponder a uma unidade de sentido na representação de chegada.

O segundo critério se refere a cada unidade significante no registro de partida corresponder a uma única unidade significante elementar no registro de chegada.

O terceiro critério corresponde a mesma ordem de arrumação e apreensão das unidades de sentido dentro da organização das unidades significantes que compõem as representações.

Quando os três critérios citados são satisfeitos, temos que ocorre o fenômeno de congruência entre as representações semióticas. Agora, quando um destes critérios, dois ou até mesmo os três não são satisfeitos, temos o fenômeno de não-congruência entre as representações que podem ser, então, de menor ou maior grau. Observe as figuras 4 e 5 a abaixo.

A figura 4 ilustra um exemplo de congruência entre representações semióticas. Todos os três critérios estão sendo atendidos neste caso.

"o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa"

$$y>x$$

Figura 4 - Exemplo de congruência entre as representações.

Fonte: Duval (2009, p. 64).

A figura 5 abaixo ilustra um exemplo de não congruência entre as representações. Temos que o segundo e terceiros critérios não estão sendo satisfeitos. O termo "mesmo sinal" na representação em língua natural corresponde a "> 0" na representação simbólica, porém "> 0" significa ao mesmo tempo "mesmo sinal" e "positivo". Além disso, não há uma correspondência termo a termo das respectivas unidades significantes nas duas representações.

"o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal".

$$xy > 0$$

Figura 5 - Exemplo de não-congruência entre as representações.

Fonte: Duval (2009, p. 65).

Muitas vezes, por exemplo, ao efetuarmos a conversão de uma representação A constituída em um registro de partida em uma representação B pertencente a um registro de chegada, temos que esta conversão é congruente. Porém, se efetuarmos a conversão da representação B para a representação A, esta já passa a ser não-congruente. A este fenômeno chamamos de heterogeneidade nos dois sentidos de conversões.

O fenômeno da heterogeneidade explica o fato de muitas vezes o desempenho dos alunos em uma determinada atividade matemática não ser equivalente nos dois sentidos de conversão.

Na verdade, no ensino de matemática o que se observa é que quando são propostos certos problemas aos alunos, estes só trabalham com apenas um sentido de conversão, pois acredita-se que se o aluno sabe realizar a conversão em um dos sentidos, então, consequentemente realizará a conversão no sentido inverso, o que não é verdade.

Os professores de matemática parecem não perceber que, ao abordar um determinado conteúdo matemático, o fazem de maneira a dar ênfase a apenas um tipo de representação do objeto estudado. Muitas vezes, o que se observa são os professores seguindo somente aquilo que está nos livros didáticos, sendo que nestes é possível encontrar a predominância de um determinado tipo de registro. Dessa forma não podemos promover o enclausuramento em um registro de representação semiótica, mas sim propiciar atividades em que diversas representações de um determinado objeto matemático possam ser utilizadas e mobilizadas. Somente assim, podemos dar acesso a compreensão em matemática.

2.2 COMO OS LIVROS DIDÁTICOS ABORDAM ALGUNS PROBLEMAS

Nesta seção, apresento a análise de alguns tópicos de Geometria Analítica presentes em dois livros didáticos de matemática básica. De uma maneira geral, os tópicos analisados são: plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos, equação geral da reta, posições relativas entre duas retas no plano e ângulo entre retas. Com esta análise, pretende-se verificar a maneira como os conceitos de Geometria Analítica são abordados pelos autores de livros didáticos e identificar se o estudo de vetores encontra-se presente nestes livros. Para ilustrar tal análise, trago imagens de como é feita a exposição teórica de alguns tópicos do conteúdo, imagens de exemplos, de exercícios resolvidos e de exercícios propostos presentes nos capítulos referentes aos conteúdos de Geometria Analítica. Os livros didáticos analisados foram escolhidos por pertencerem a coleções cujas edições mais atuais foram avaliadas e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2015. No Guia de Livros Didáticos do PNLD 2015 para o Ensino Médio, tais coleções são indicadas aos professores como um material de apoio a ser utilizado nas tarefas que os docentes desenvolvem com seus alunos em sala de aula. Outro critério de escolha para os livros analisados foi o fato de que, nas experiências por mim adquiridas ao cursar as disciplinas de “Estágio em Educação Matemática” no decorrer da graduação, observava os professores de matemática utilizando livros didáticos dos autores Dante e Iezzi et al. no seu trabalho em sala de aula.

De acordo com o Guia de Livros Didáticos do PNLD 2015:

> Desde suas origens, a geometria analítica é um campo privilegiado para as conexões entre a álgebra e a geometria. É sabido que a escolha de um sistema de coordenadas permite que se estabeleça uma estreita relação entre, de um lado, figuras geométricas e, do

> outro, equações (ou inequações) envolvendo as coordenadas dos pontos. Na geometria analítica, tanto se resolvem problemas geométricos recorrendo a métodos algébricos, quanto se atribui significado geométrico a fatos algébricos. (BRASIL, 2014, p. 98).

- Matemática: Ciência e Aplicações – Volume 3 – Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida (2010)

No início do primeiro capítulo, intitulado “O ponto”, os autores trazem uma nota histórica sobre a Geometria Analítica, atribuindo a René Descartes (1596 – 1650) e a Pierre de Fermat (1601 - 1665) “[...] a invenção da Geometria Analítica.” (IEZZI et al., 2010, p. 9).

Em seguida, apresentam o tópico “Plano cartesiano” de uma maneira muito breve, sem se atentar a detalhes, pois, de acordo com os autores, este tópico foi mais explorado no volume 1 da coleção. Porém, muitas vezes, há alunos que não entendem o plano cartesiano, não sabem localizar pontos e muito menos construir gráficos, afirmo isto baseada em minhas experiências advindas de observações e práticas docentes realizadas nas disciplinas de “Estágio em Educação Matemática” ao longo da graduação. Dessa forma, acredito ser importante retomar alguns conceitos e não apenas apresentá-los sem maiores explicações. Os autores citam, por exemplo, os termos “eixos orientados”, “medida algébrica” de um segmento, “bissetriz dos quadrantes” e não apresentam o significado de tais expressões.

Depois há treze exercícios em que o aluno precisa localizar pontos no plano cartesiano dadas as suas coordenadas, ou então, realizar o processo contrário, isto é, dados os pontos no plano cartesiano, informar as coordenadas dos mesmos ou ainda dados os pontos pertencentes a uma reta ou a uma determinada figura ou que atendam a uma certa condição, determinar as suas coordenadas.

No exercício de número 12 do tópico “Plano Cartesiano” (veja a figura 6 abaixo), o aluno precisa provar que o triângulo ABC é retângulo e indicar a sua hipotenusa. Se o aluno localizar os pontos no plano cartesiano, acredito que irá conjecturar que o triângulo ABC é retângulo em A e, portanto, a sua hipotenusa será o segmento $\overline{BC}$, porém é necessário mostrar que o triângulo ABC é retângulo, o que não é suficiente apenas desenhando este triângulo no plano cartesiano.

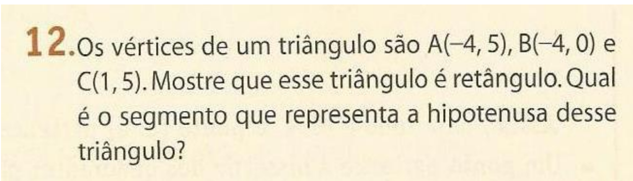
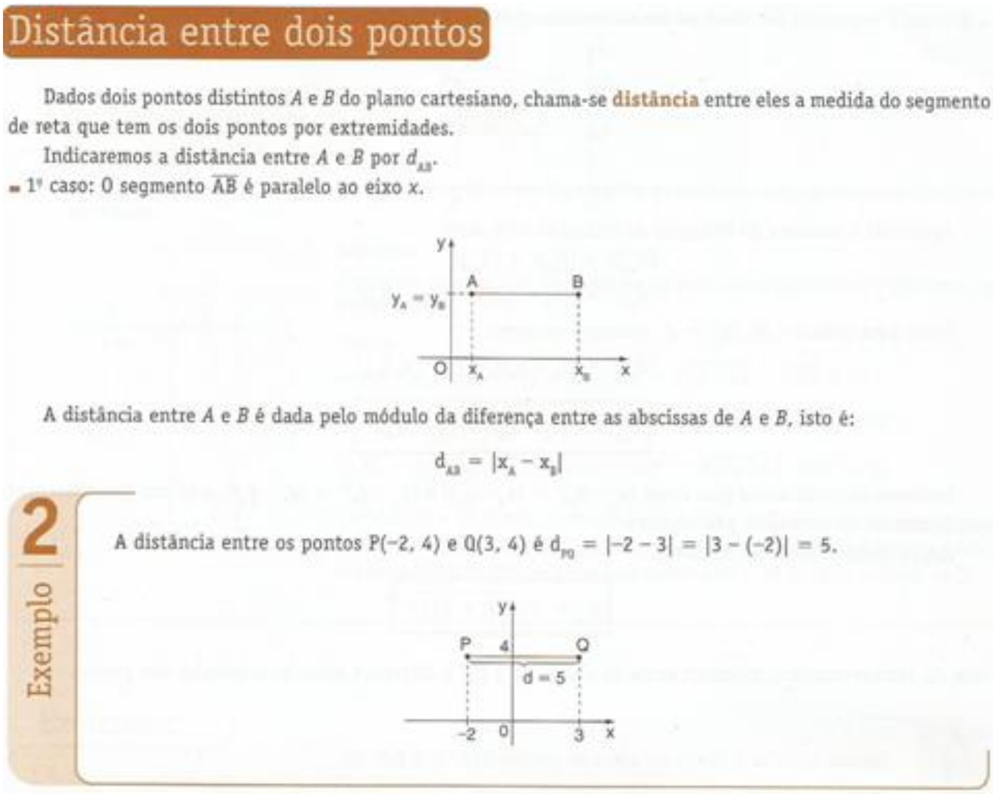

12. Os vértices de um triângulo são A(−4, 5), B(−4, 0) e C(1, 5). Mostre que esse triângulo é retângulo. Qual é o segmento que representa a hipotenusa desse triângulo?

Figura 6 - Exercício para mostrar que o triângulo ABC é retângulo.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 12).

O próximo tópico discutido é "Distância entre dois pontos". A apresentação deste tópico é feita de uma maneira simples e objetiva, sendo dividida pelos autores em três casos na seguinte ordem: dois pontos que possuem ordenadas iguais (veja a figura 7 abaixo), dois pontos que possuem abscissas iguais e dois pontos que possuem abscissas e ordenadas distintas (veja a figura 8 a seguir). No final de cada caso, um exemplo é apresentado. Após a exemplificação do 3º caso, uma observação importante é feita: "Embora tenhamos deduzido a fórmula da distância entre dois pontos usando pontos do 1º quadrante, podemos notar que ela não perde a validade quando são utilizados pontos de outros quadrantes. [...]" (IEZZI et al., 2010, p. 14). Neste tópico, há um exercício resolvido e logo após há uma lista com quinze exercícios para os alunos resolverem.


Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos A e B do plano cartesiano, chama-se **distância** entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

Indicaremos a distância entre A e B por d_{AB}.

- 1º caso: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x.

A distância entre A e B é dada pelo módulo da diferença entre as abscissas de A e B, isto é:

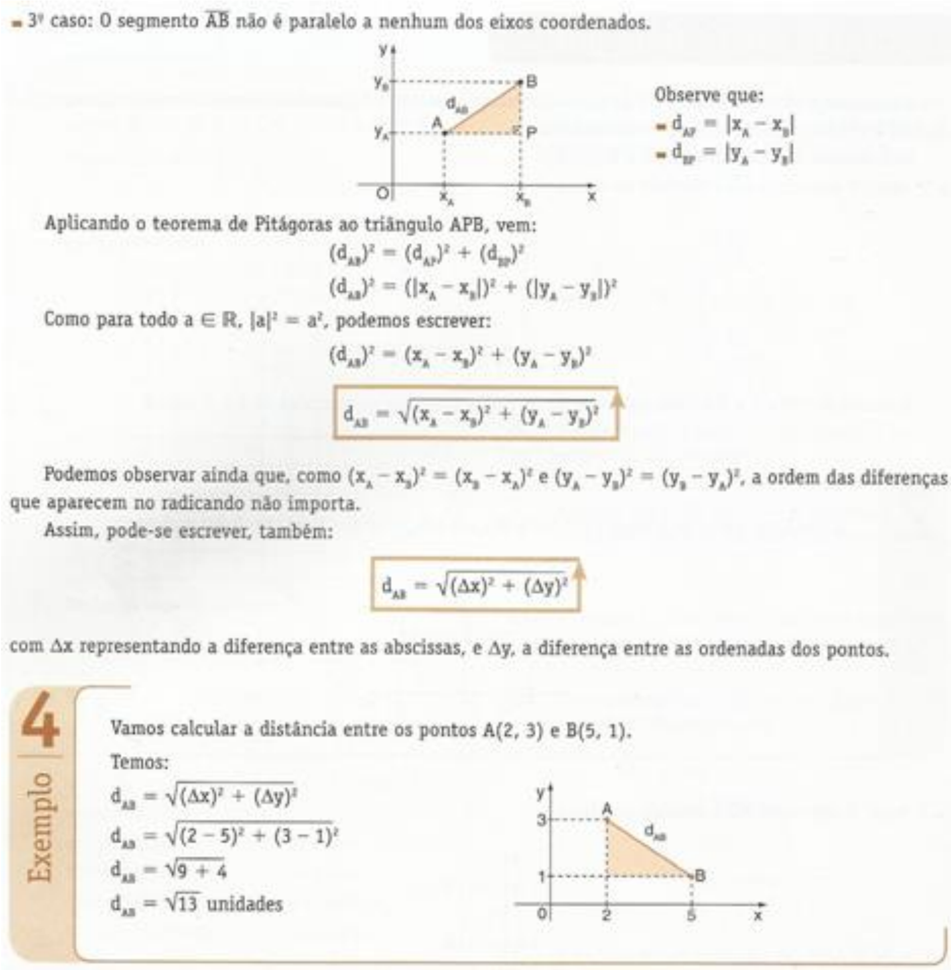
$$d_{AB} = |x_A - x_B|$$

2 Exemplo

A distância entre os pontos $P(-2, 4)$ e $Q(3, 4)$ é $d_{PQ} = |-2 - 3| = |3 - (-2)| = 5$.

Figura 7 – Distância entre dois pontos de mesma ordenada.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 13).



▪ 3º caso: O segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados.

Observe que:

▪ $d_{AP} = |x_A - x_B|$

▪ $d_{BP} = |y_A - y_B|$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo APB, vem:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AP})^2 + (d_{BP})^2$$

$$(d_{AB})^2 = (|x_A - x_B|)^2 + (|y_A - y_B|)^2$$

Como para todo $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$, podemos escrever:

$$(d_{AB})^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

Podemos observar ainda que, como $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$ e $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$, a ordem das diferenças que aparecem no radicando não importa.

Assim, pode-se escrever, também:

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

com Δx representando a diferença entre as abscissas, e Δy, a diferença entre as ordenadas dos pontos.

4 Exemplo

Vamos calcular a distância entre os pontos A(2, 3) e B(5, 1).

Temos:

$d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 1)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{9 + 4}$

$d_{AB} = \sqrt{13}$ unidades

Figura 8 – Distância entre dois pontos de abscissas e ordenadas distintas.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 14).

No próximo tópico, intitulado “Ponto médio de um segmento”, temos a dedução da fórmula para o cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento por meio de semelhança de triângulos. Em seguida, há dois exemplos com aplicação direta desta fórmula e um exercício resolvido em que são informadas as coordenadas de três vértices não necessariamente consecutivos de um losango e pede-se para determinar as coordenadas do quarto vértice, o qual é feito aplicando-se a fórmula da distância entre dois pontos e a fórmula das coordenadas do ponto médio.

Acredito que neste tópico seria interessante deduzir, por meio de semelhança de triângulos, as coordenadas de um ponto que divide um segmento em uma razão qualquer, pois o ponto médio é consequência disto, já que o mesmo divide um segmento na razão $\frac{1}{2}$. Desta forma, os autores estariam tornando a discussão deste tópico mais geral não se limitando apenas ao caso do ponto médio.

Em seguida, temos um subtópico, intitulado “Mediana e baricentro”, no qual, primeiramente, é apresentada uma definição para mediana de um triângulo. Como parte integrante do texto, temos o cálculo do comprimento de uma das medianas do triângulo ABC dadas as suas coordenadas. Depois, a seguinte afirmação é feita: “[...] O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é chamado baricentro do triângulo. [...]” (IEZZI et al., 2010, p. 18). Porém, nenhuma demonstração é apresentada para provar que as medianas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto.

Em seguida, há a determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo de vértices A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) e C = (x_c, y_c) por meio da aplicação da fórmula para o cálculo das coordenadas do ponto médio. Esta fórmula é aplicada diversas vezes depois dos autores afirmarem sem nada provar que: “[...] é preciso lembrar uma importante propriedade da Geometria Plana: o baricentro do triângulo divide cada mediana em dois segmentos cujas medidas estão na razão 2:1, ou melhor, o segmento que tem um vértice como uma de suas extremidades mede o dobro do outro. [...] (IEZZI et al, 2010, p. 18).

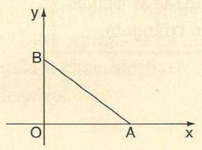
No final do tópico “Ponto médio de um segmento”, há quatorze exercícios propostos aos alunos. Novamente, temos exercícios que priorizam a repetição de técnicas de resolução, ou seja, exercícios em que o aluno irá aplicar e reaplicar as fórmulas estudadas até então. Nas figuras 9(a), 9(b) e 9(c) a seguir, temos a ilustração de alguns dos exercícios cobrados. Nas questões de número 33 e 39, podemos ler em seus enunciados, respectivamente, os termos “circunferência”, “diametralmente” e “ponto simétrico”, sendo que na teoria o significado de tais termos não foi abordado. Já na questão 33, o aluno poderá seguir a propriedade que diz que “[...] Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.” (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 106) para resolver o problema aplicando as fórmulas da distância entre dois pontos e do ponto médio. Porém, acredito que seria mais interessante se fosse proposto ao aluno provar esta propriedade utilizando os conhecimentos sobre ponto médio aprendidos até então em Geometria Analítica. Assim, o aluno poderia ter a liberdade de escolher o sistema de coordenadas no plano que achar mais conveniente para solucionar o problema. Dessa mesma forma o exercício de número 38 (item b) poderia ser resolvido, isto é, sem trabalhar com coordenadas fixas. O exercício de número 41 pode ser resolvido de uma maneira bem mais fácil se o aluno souber certas relações válidas em um triângulo equilátero, geralmente abordadas em Geometria Plana, pois a resolução por meio da aplicação das fórmulas de ponto médio e distância entre dois pontos torna-se exaustiva.

32. O ponto P(7, −3) pertence a uma circunferência de centro (4, 2). Determine o ponto diametralmente oposto a *P*.

33. Mostre que o quadrilátero de vértices (−8, −6), (−2, 0), (−2, −4) e (4, 2) é um paralelogramo.

(a)

38. Na figura, o triângulo de vértices A(6, 0), O(0, 0) e *B* é retângulo, e sua hipotenusa mede 8.



Determine:

a) as coordenadas de *B*.

(b)

b) a medida da mediana relativa à hipotenusa.

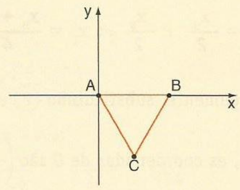
c) o baricentro do triângulo e sua distância à origem.

(Observação: veja o exercício complementar nº 9.)

39. Determine o ponto simétrico de (2, −3) em relação a $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

40. Dados A(−13, −1) e B(3, 5), ache as coordenadas dos pontos que dividem $\overline{AB}$ em quatro partes iguais.

41. Na figura, o triângulo ABC é equilátero, e seu lado mede 4 cm.



Determine:

a) as coordenadas de *C*.

b) a área do triângulo ABC.

(c)

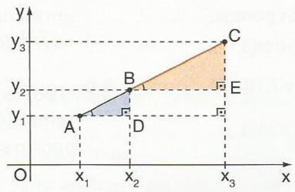
Figura 9 - Exercícios do tópico “Ponto médio de um segmento”.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 19-20).

No tópico seguinte, intitulado “Condição de alinhamento de três pontos”, temos a dedução de uma propriedade que é satisfeita quando se tem três pontos A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) e C = (x_c, y_c) distintos e colineares. Esta condição é deduzida por meio de semelhança de triângulos e recai em uma igualdade envolvendo duas expressões matemáticas que, por sua vez, por meio de manipulações algébricas, termina sendo representada sob a forma de um determinante de ordem três, sendo o valor deste determinante igual a zero. Observe a figura 10 a seguir.

Condição de alinhamento de três pontos

Para que três pontos distintos estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a uma condição que será deduzida com a utilização da figura abaixo, na qual $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão na mesma reta.



Os triângulos retângulos BCE e ABD são semelhantes.

Decorre a proporção $\frac{BE}{AD} = \frac{CE}{BD}$, que pode ser escrita como $\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$. Desenvolvendo essa expressão, obtemos $(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$. Daí:

$$x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 - x_2y_3 + \cancel{x_2y_2} + x_1y_3 - x_1y_2 = 0, \text{ ou, ainda:}$$

$$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0$$

Essa última expressão pode ser escrita sob a forma de determinante: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Observação

Se os pontos *A*, *B* e *C* pertencessem a uma reta paralela a um dos eixos (ao *x*, por exemplo), o determinante também se anularia.

De fato, teríamos:

$$y_1 = y_2 = y_3 \text{ e } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{x_1y_1} + \cancel{x_3y_1} + \cancel{x_2y_1} - \cancel{x_3y_1} - \cancel{x_1y_1} - \cancel{x_2y_1} = 0$$

Concluímos, então, que:

Se três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são colineares, então:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Figura 10 - Condição de alinhamento de três pontos.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 20-21).

A recíproca desta condição também é demonstrada por meio de uma análise puramente algébrica. Depois, há dois exemplos e dois exercícios resolvidos com aplicação direta dos determinantes de ordem três, isto é, aplicação da propriedade deduzida (veja a figura 10 acima) e de sua recíproca.

Penso que este tópico poderia ser tratado de uma maneira mais simples, ou seja, poderia se fazer a discussão do mesmo até a parte de semelhança de triângulos sem a necessidade de desenvolver a equação $\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$ (veja a figura 10 acima) até chegar em um determinante ou, então, os autores poderiam deixar para discutir a "condição de alinhamento de três pontos", depois de introduzirem o assunto "inclinação de uma reta". De qualquer forma, o uso de determinantes não é uma boa opção, pois não contribui em nada para a visualização geométrica desta situação.

> Ao tratar de alinhamento de três pontos, os livros didáticos insistem no uso de um determinante 3x3 [...]. O uso de determinantes não está errado e, embora seja um bom truque para memorizar, é uma forma inadequada de tratar o assunto, pois surge como mágica e tira o aspecto geométrico do estudo da Geometria Analítica. Além disso, dados os pontos A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) e C = (x_c, y_c), o alinhamento desses três pontos se baseia numa semelhança de triângulos retângulos, definindo a inclinação de um segmento não-vertical AB como o quociente $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$, os pontos A, B e C são colineares se, e somente se, os segmentos AB e AC são verticais ou a inclinação de AB é igual à inclinação de AC. (SILVA, 2013, p. 24).

No final deste tópico, temos onze exercícios propostos aos alunos. Novamente, em sua maioria, há exercícios repetitivos em que o aluno irá aplicar as mesmas técnicas de resolução utilizadas nos exemplos e exercícios resolvidos. As figuras 11, 12 e 13 a seguir ilustram alguns dos exercícios cobrados.

No exercício de número 45 (veja a figura 11 abaixo), os autores esperam que os alunos apliquem a condição demonstrada neste tópico, tanto que se o aluno realmente a aplicar, encontrará a seguinte equação 2x – y -1 = 0 (equação geral da reta que passa pelos pontos P e Q) que aparece como resposta na parte do livro referente ao gabarito dos exercícios propostos em cada capítulo. Porém, o aluno pode resolver este exercício utilizando os conhecimentos adquiridos no tópico anterior sobre ponto médio de um segmento.

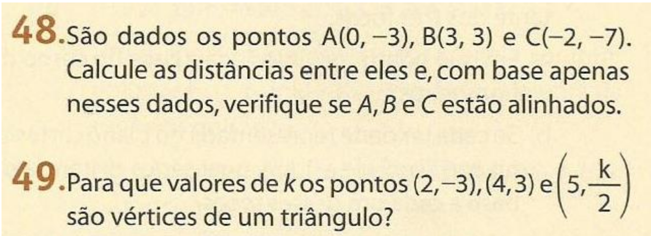
45. Ache um ponto que esteja alinhado com P(3, 5) e Q(−1, −3).

Figura 11 - Dados dois pontos, encontrar outro ponto que esteja alinhado com estes.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 23).

Já o exercício de número 48 (veja a figura 12 a seguir) é interessante pelo fato de levar o aluno a pensar e aplicar uma estratégia diferente daquela mostrada até então. Apesar de ser uma estratégia um pouco trabalhosa, pois o aluno terá que aplicar a fórmula da distância três vezes, o mesmo terá que pensar sobre como relacionar as distâncias encontradas para verificar o alinhamento dos pontos A, B e C, sendo que esta relação nada mais é do que a soma das distâncias menores igual à distância maior.

Para solucionar o exercício 49 (veja a figura 12 abaixo), em uma das possíveis formas de solucionar o problema, o aluno poderá aplicar a contra-positiva da recíproca da condição, isto é, se os pontos são vértices de um triângulo, então, não estão alinhados e portanto, o determinante deverá ser diferente de zero.



48. São dados os pontos A(0, −3), B(3, 3) e C(−2, −7). Calcule as distâncias entre eles e, com base apenas nesses dados, verifique se *A*, *B* e *C* estão alinhados.

49. Para que valores de *k* os pontos (2, −3), (4, 3) e $\left(5, \frac{k}{2}\right)$ são vértices de um triângulo?

Figura 12 - Outros exercícios referentes ao tópico "Condição de alinhamento de três pontos".

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 23).

No exercício 53 (veja a figura 13 abaixo), o aluno também poderá utilizar a mesma estratégia de resolução que aquela dos exercícios resolvidos e das questões propostas anteriormente, porém destaco algo de diferente neste exercício: os pontos estão representados no plano cartesiano ao invés de terem as suas coordenadas já informadas no enunciado da questão.

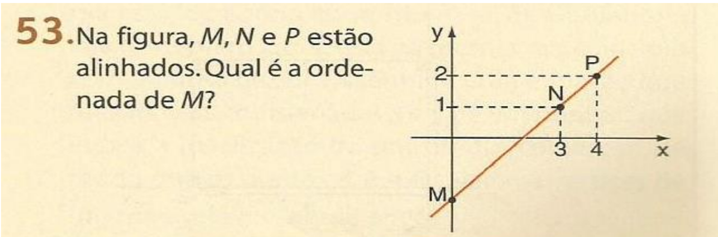


Figura 13 - Pontos alinhados e representados graficamente.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 23).

No segundo capítulo, intitulado “A reta”, temos uma “Introdução” que inicia com a representação gráfica de uma reta r qualquer e de alguns de seus pontos. Depois há uma afirmação que diz que, para um ponto P = (x, y) qualquer pertencer a r, é necessário que o mesmo esteja alinhado a dois outros pontos de r. Em seguida, há a aplicação de um determinante 3 x 3 envolvendo as coordenadas de dois pontos da reta r e do ponto P. Este determinante é igualado a zero (aplicação da “condição de alinhamento de três pontos” vista no capítulo anterior) e uma equação é encontrada, sendo a mesma nomeada de “equação geral de r”.

Em seguida há o tópico intitulado “Equação geral da reta”, no qual é feita a demonstração de que para toda reta r do plano temos uma equação do tipo ax + by + c = 0 com a, b e c números reais, sendo a e b não simultaneamente nulos. Observe a figura 14 abaixo. Perceba o tratamento puramente algébrico dado a este tópico via uso de determinante. Acredito que, se a equação geral da reta fosse demonstrada por meio de semelhança de triângulos ou após os estudos referentes à inclinação e declividade de uma reta, a mesma receberia uma visualização geométrica que lhe atribuiria mais sentido, facilitando, assim, a sua compreensão.

No quadro observação (veja a figura 14 a seguir), os autores explicam que os coeficientes a e b devem ser simultaneamente não nulos, pois, caso contrário, temos Q = R sendo que estes pontos foram admitidos distintos. Porém, porque estes pontos devem ser distintos? Os autores não explicam que “Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.” (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 3). Sendo assim, se tivermos Q = R, não teremos uma única reta passando por Q e R, mas sim um feixe de retas.

Equação geral da reta

A toda reta r do plano cartesiano está associada pelo menos uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com a e b não nulos simultaneamente, e x e y são as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ genérico de r. Costuma-se escrever $r: ax + by + c = 0$.

Vamos demonstrar essa propriedade:

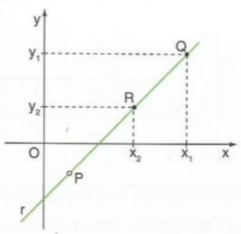
Sejam $Q(x_1, y_1)$ e $R(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano cartesiano, e $r = \overleftrightarrow{QR}$ é a reta determinada por Q e R.

Um ponto genérico de r é $P(x, y)$, isto é, P é um ponto que “percorre” r.

Como P, Q e R estão alinhados, devemos ter $D = 0$, isto é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy_1 + yx_2 + x_1y_2 - x_2y_1 - xy_2 - yx_1 = 0$$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \ (*)$$



Como x_1, y_1, x_2 e y_2 são números reais conhecidos, podemos fazer:

$y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $x_1y_2 - x_2y_1 = c$, e obtemos em (*): $ax + by + c = 0$, que é chamada equação geral de r.

Observação

- Na demonstração acima podemos entender o porquê de a e b serem coeficientes não nulos simultaneamente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } a = 0,\ y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \\ \text{Se } b = 0,\ x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = R,$$ o que é absurdo pois admitimos que Q e R são pontos distintos. Logo, não podemos ter a e b simultaneamente nulos.

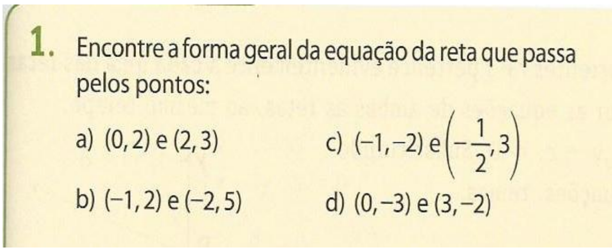
Figura 14 - Equação geral da reta.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 31).

Em seguida, há um exemplo com aplicação direta de um determinante 3 x 3 para encontrar a equação geral de uma reta dados dois de seus pontos. Na sequência, há um subtópico, intitulado "Casos particulares", em que é feito o estudo, por meio de exemplos com representações gráficas, para os casos em que os parâmetros da equação geral da reta ($ax + by + c = 0$) são $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$. Depois, no subtópico "Recíproca da Propriedade", os autores demonstram a recíproca da propriedade ilustrada na figura 14 (ver página anterior) por meio da aplicação de um determinante de ordem três, sendo que os cálculos árduos deste determinante não são mostrados, pois os autores apenas afirmam que aplicaram a "Regra de Sarrus" e concluíram que o determinante se anula. Temos que um exemplo encerra este subtópico no qual a equação geral de uma reta é fornecida e o gráfico da mesma é construído a partir da obtenção das coordenadas de dois de seus pontos. Na sequência há dois exercícios resolvidos, sendo o primeiro a aplicação de um determinante para encontrar a equação geral da reta r dados dois de seus pontos e o segundo a aplicação da fórmula da distância entre dois pontos para a obtenção das coordenadas de um ponto P pertencente à reta r cuja equação geral é fornecida, sendo que P dista três unidades do ponto de origem do sistema de coordenadas.

No final do tópico "Equação geral da reta", treze exercícios são cobrados, sendo que na maioria (nove) destes exercícios, o aluno deve encontrar a equação geral da reta, conhecendo as coordenadas de dois de seus pontos. Observe a figura 15 a seguir, que ilustra os exercícios de números um (veja a figura 15(a)) e nove (veja a figura 15(b)). Estes exercícios possuem o mesmo objetivo, que é de fazer o aluno encontrar a equação geral da reta. Porém no exercício de número um, temos que as coordenadas de dois pontos da reta são informadas e no exercício nove, temos a representação gráfica das retas.

Neste tópico não é feita uma análise do significado geométrico dos coeficientes envolvidos na equação geral de uma reta, ou seja, os autores poderiam ter analisado o que ocorre com as retas no domínio geométrico se mantivermos o parâmetro "a" constante, por exemplo, ou se fizermos somente o parâmetro "c" variar. Os autores somente analisam de maneira geométrica o que ocorre quando apenas um dos seguintes três casos acontece: $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$.



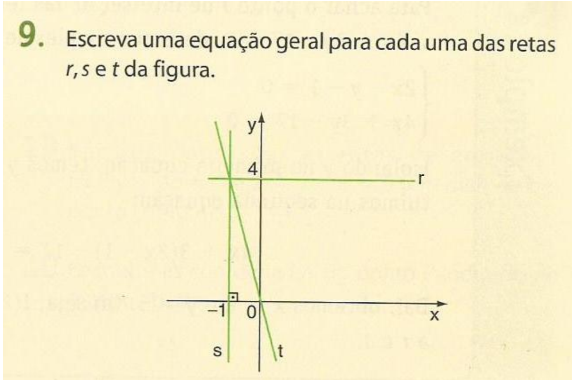
1. Encontre a forma geral da equação da reta que passa pelos pontos:

a) $(0, 2)$ e $(2, 3)$

b) $(-1, 2)$ e $(-2, 5)$

c) $(-1, -2)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

d) $(0, -3)$ e $(3, -2)$



9. Escreva uma equação geral para cada uma das retas *r*, *s* e *t* da figura.

(a) **(b)**

Figura 15 - Exercícios do tópico "Equação Geral da Reta".

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 35).

No próximo tópico, intitulado "Interseção de retas", os autores afirmam que as coordenadas do ponto P = (x_p, y_p), ponto de interseção de duas retas concorrentes, satisfazem as equações gerais destas duas retas, de modo que é possível associar a este caso um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, ou seja, um sistema formado pelas equações gerais das duas retas. A solução deste sistema são as coordenadas do ponto P = (x_p, y_p).

Em seguida, há um exemplo em que são dadas as equações gerais de duas retas e pede-se para encontrar as coordenadas do ponto de interseção.

Depois, os autores, de maneira muito breve, relembram as três classificações dos sistemas de equações lineares com duas variáveis (segundo os autores, abordado com maiores detalhes no segundo volume da coleção): Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI).

O livro segue com um exercício resolvido em que "monta" três sistemas de equações lineares com duas incógnitas para encontrar os pontos vértices de um triângulo sabendo as equações gerais das retas suportes de seus lados.

Na sequência, há 13 exercícios propostos aos alunos, sendo que nos mesmos pede-se para encontrar o ponto de intersecção dadas as equações gerais das retas ou, então, dadas as suas representações gráficas; determinar a posição relativa de duas retas dadas as suas equações gerais; encontrar o valor de um dos coeficientes da equação geral de uma reta, sabendo que a interseção desta com uma outra reta é um determinado ponto; etc.

Observe a figura 16 a seguir que mostra o exercício de número 16. Repare que este exercício poderia ser resolvido de uma maneira mais fácil apenas comparando-se os coeficientes das duas equações gerais das retas de cada um dos itens ao invés de resolver um sistema.

16. Qual é, em cada caso, a posição relativa das retas *r* e *s*?

a) $r: x - 3y + 2 = 0$; $s: 2x - y = 0$

b) $r: x + y - 3 = 0$; $s: -2x - 2y + 6 = 0$

c) $r: -2x + y - 3 = 0$; $s: -x + \frac{y}{2} + 1 = 0$

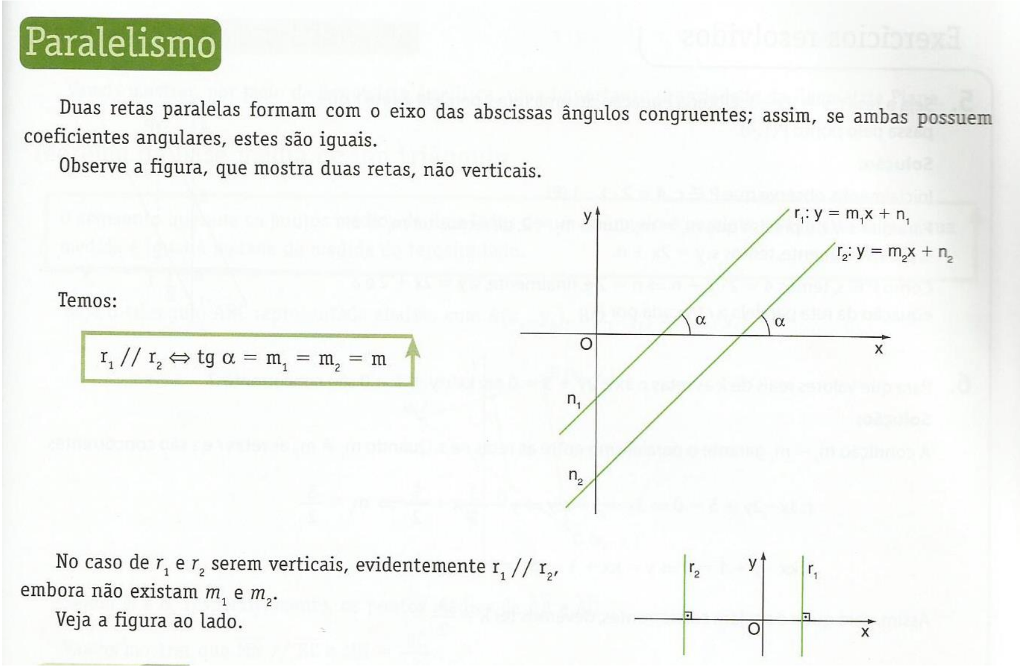
d) $r: x - 1 = 0$; $s: x + 2 = 0$

Figura 16 - Exercícios do tópico "Interseção de retas".
Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 37).

Os próximos tópicos que o livro apresenta são: "Inclinação de uma reta", "Equação reduzida de uma reta" e "Equação de uma reta passando por P(x_0, y_0) com declividade conhecida". Perceba a preocupação dos autores em apresentar diferentes tipos de equações para as retas. De acordo com PCNs+ (2002, p. 124), "[...] mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe. [...]".

Na sequência, temos o tópico intitulado "Função afim e a equação reduzida da reta", sendo que o interessante nesta parte é o fato de os autores fazerem a conexão e estabelecerem relações entre diferentes áreas da matemática. Temos que uma reta não-vertical é a representação gráfica de uma função afim.

No tópico, intitulado "Paralelismo", os autores apresentam a representação gráfica de duas retas paralelas e as equações reduzidas das mesmas de uma maneira generalizada e afirmam que "[...] Duas retas paralelas formam com o eixo das abcissas ângulos congruentes; assim, se ambas possuem coeficientes angulares, estes são iguais." (IEZZI et al., 2010, p. 47). Depois, observam o fato de que duas retas verticais são paralelas, embora a declividade das mesmas não esteja definida, veja a figura 17 a seguir.



Paralelismo

Duas retas paralelas formam com o eixo das abscissas ângulos congruentes; assim, se ambas possuem coeficientes angulares, estes são iguais.

Observe a figura, que mostra duas retas, não verticais.

Temos:

$$\boxed{r_1 \,//\, r_2 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = m_1 = m_2 = m}$$

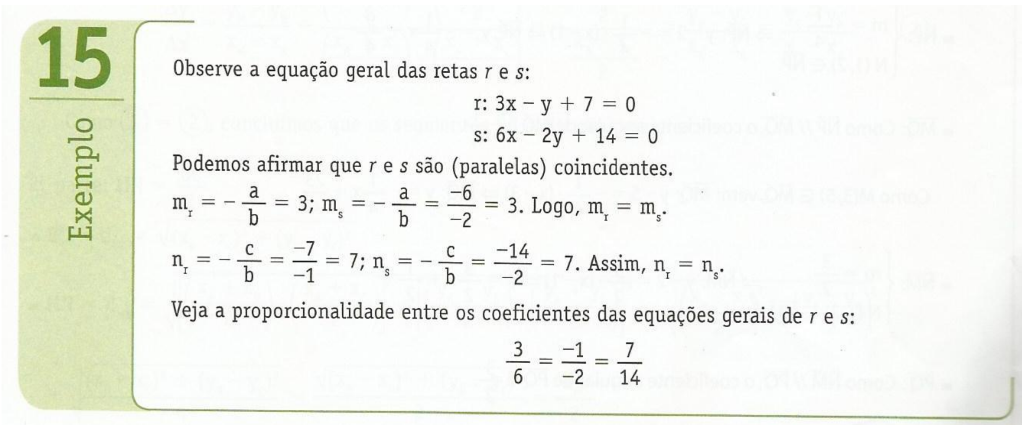
No caso de r_1 e r_2 serem verticais, evidentemente $r_1 \,//\, r_2$, embora não existam m_1 e m_2.

Veja a figura ao lado.

Figura 17 - Paralelismo.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 47).

Em seguida, há dois exemplos em que são dadas as equações gerais de duas retas e pede-se a posição relativa das mesmas. Para resolver tal problema, temos que no primeiro exercício, as equações gerais são transformadas para a forma reduzida e, depois, é realizada a comparação dos coeficientes angulares destas retas. Dessa forma, parece que não é possível trabalhar com as equações gerais das retas quando queremos determinar suas posições relativas, o que não é verdade. Quando as equações gerais de duas retas são fornecidas, podemos comparar os coeficientes das mesmas para saber a posição relativa entre elas. Apenas o último exemplo faz a proporção entre os coeficientes das equações gerais das retas, porém somente "monta" esta proporção sem nada afirmar. Observe a figura 18 abaixo que ilustra este último exemplo.



15 Exemplo

Observe a equação geral das retas *r* e *s*:

$$r: 3x - y + 7 = 0$$
$$s: 6x - 2y + 14 = 0$$

Podemos afirmar que *r* e *s* são (paralelas) coincidentes.

$m_r = -\frac{a}{b} = 3$; $m_s = -\frac{a}{b} = \frac{-6}{-2} = 3$. Logo, $m_r = m_s$.

$n_r = -\frac{c}{b} = \frac{-7}{-1} = 7$; $n_s = -\frac{c}{b} = \frac{-14}{-2} = 7$. Assim, $n_r = n_s$.

Veja a proporcionalidade entre os coeficientes das equações gerais de *r* e *s*:

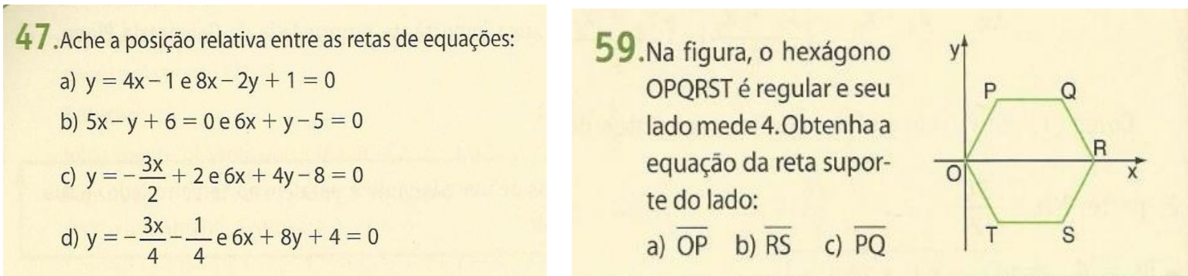
$$\frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{7}{14}$$

Figura 18 - Verificação do paralelismo entre duas retas.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 47).

Em seguida há três exercícios resolvidos, sendo que no primeiro é preciso obter a equação de uma reta que passa por um determinado ponto e é paralela a uma reta cuja equação é conhecida, no segundo, temos que determinar para quais valores reais de “k” (parâmetro que acompanha a incógnita “x” em uma das equações gerais informadas) as retas são concorrentes. No terceiro e último exercício resolvido, os conceitos aprendidos no tópico “Paralelismo” são aplicados para determinar as equações suporte dos lados de um paralelogramo, sendo que as coordenadas de três de seus vértices são informadas.

No subtópico, intitulado “Base média de um triângulo”, temos a demonstração, feita de uma maneira bastante algébrica, para o “Teorema da base média de um triângulo”. Depois, há uma lista com 13 exercícios a serem resolvidos. Temos que os primeiros exercícios são mais de fixação e aplicação direta do conteúdo abordado no tópico “Paralelismo”. Depois, há exercícios que conectam os conceitos matemáticos abordados neste tópico com a área da Geometria Plana. Observe a figura 19 abaixo.


47. Ache a posição relativa entre as retas de equações:

a) $y = 4x - 1$ e $8x - 2y + 1 = 0$

b) $5x - y + 6 = 0$ e $6x + y - 5 = 0$

c) $y = -\frac{3x}{2} + 2$ e $6x + 4y - 8 = 0$

d) $y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$ e $6x + 8y + 4 = 0$

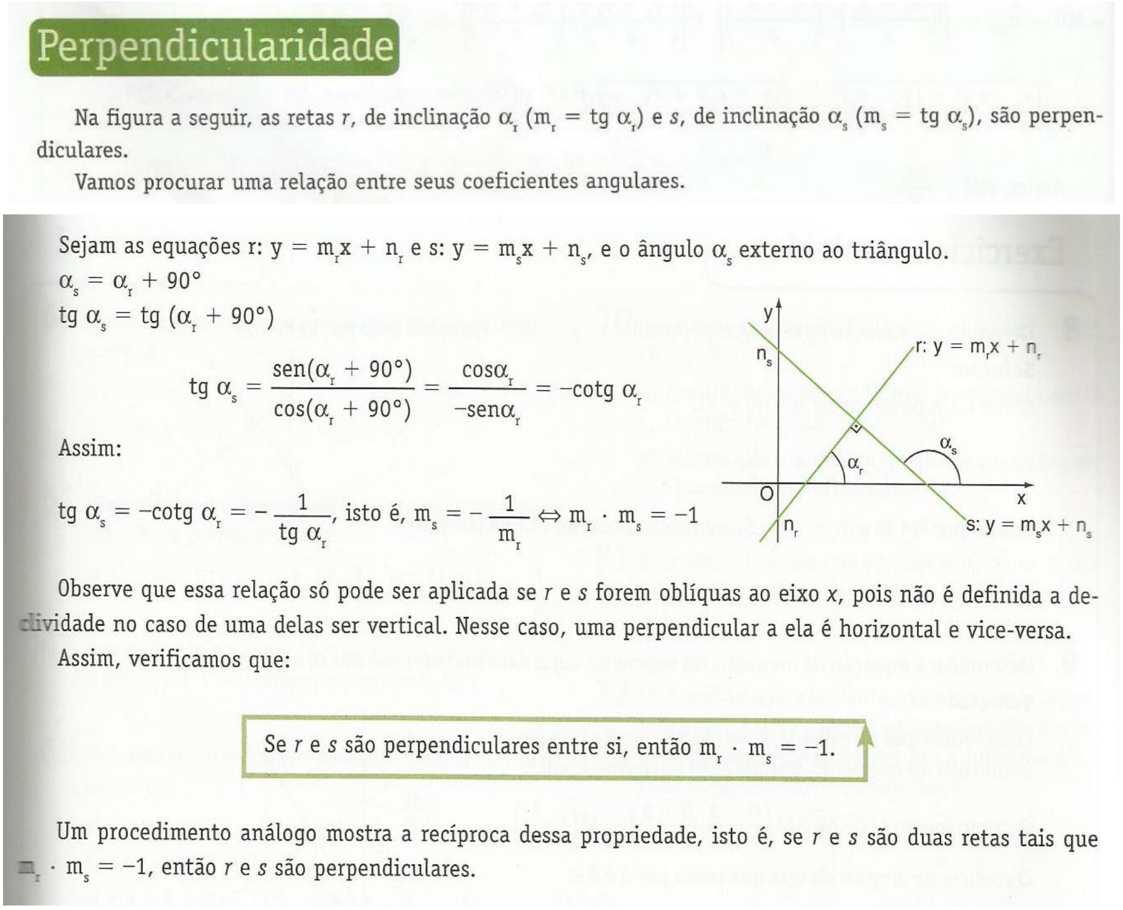
59. Na figura, o hexágono OPQRST é regular e seu lado mede 4. Obtenha a equação da reta suporte do lado:

a) $\overline{OP}$ b) $\overline{RS}$ c) $\overline{PQ}$

Figura 19 - Exercícios sobre o tópico “Paralelismo”.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 50).

No tópico, intitulado “Perpendicularidade”, temos duas retas r e s perpendiculares, cujas equações na forma reduzida são, respectivamente, $y = m_r + n_r$ e $y = m_s + n_s$. Estas retas estão representadas graficamente. Temos que a relação $m_r \ . \ m_s = -1$ entre os seus coeficientes angulares é mostrada de maneira breve utilizando-se do Teorema do Ângulo Externo ao Triângulo e da fórmula de adição envolvendo a razão trigonométrica tangente. Observe a figura 20 a seguir.



Perpendicularidade

Na figura a seguir, as retas *r*, de inclinação α_r ($m_r = tg\ \alpha_r$) e *s*, de inclinação α_s ($m_s = tg\ \alpha_s$), são perpendiculares.

Vamos procurar uma relação entre seus coeficientes angulares.

Sejam as equações r: $y = m_r x + n_r$ e s: $y = m_s x + n_s$, e o ângulo α_s externo ao triângulo.

$\alpha_s = \alpha_r + 90°$

$tg\ \alpha_s = tg\ (\alpha_r + 90°)$

$$tg\ \alpha_s = \frac{sen(\alpha_r + 90°)}{cos(\alpha_r + 90°)} = \frac{cos\alpha_r}{-sen\alpha_r} = -cotg\ \alpha_r$$

Assim:

$$tg\ \alpha_s = -cotg\ \alpha_r = -\frac{1}{tg\ \alpha_r}, \text{ isto é, } m_s = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Observe que essa relação só pode ser aplicada se *r* e *s* forem oblíquas ao eixo *x*, pois não é definida a declividade no caso de uma delas ser vertical. Nesse caso, uma perpendicular a ela é horizontal e vice-versa.

Assim, verificamos que:

> Se *r* e *s* são perpendiculares entre si, então $m_r \cdot m_s = -1$.

Um procedimento análogo mostra a recíproca dessa propriedade, isto é, se *r* e *s* são duas retas tais que $m_r \cdot m_s = -1$, então *r* e *s* são perpendiculares.

Figura 20 – Perpendicularidade.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 51).

Seguem-se três exemplos, sendo os dois primeiros com aplicação direta da relação $m_r \,.\, m_s = -1$ e o último o caso em que uma das retas é vertical e a outra é horizontal. Neste caso, a relação não pode ser aplicada, mas temos que as retas envolvidas são perpendiculares. Logo em seguida, há três exercícios resolvidos e catorze questões são propostas. Nestas questões, temos exercícios repetitivos, em que a aplicação da relação $m_r \,.\, m_s = -1$ é exigida, exercícios em que o aluno provavelmente fará uso das mesmas estratégias de resolução dos exercícios resolvidos. Veja a figura 21 a seguir, que ilustra algumas das questões propostas.

Exercícios

60. Mostre quais das retas abaixo são perpendiculares entre si.

$r: y = 2x + 3$ $\quad$ $t: x + 2y - 6 = 0$

$s: x - 4y + 4 = 0$ $\quad$ $u: y = -2x - 1$

61. Obtenha a equação reduzida da reta que passa por $P(2, -3)$ e é perpendicular a:

a) $y = 3x - 1$ $\quad$ b) $2x - 5y - 11 = 0$

62. Determine m para que as retas $r: 3x + 5y - 7 = 0$ e $s: mx - 6y + 1 = 0$ sejam perpendiculares.

63. Determine, em cada caso, a posição relativa entre as retas *r* e *s*:

a) $r: x - 3y = 0$ $\quad$ $s: y = 3x + 2$

b) $r: 2x - y + 1 = 0$ $\quad$ $s: y = -\frac{1}{2}x - 3$

c) $r: x + 3 = 0$ $\quad$ $s: x - 1 = 0$

d) $r: x + 3 = 0$ $\quad$ $s: y + 3 = 0$

e) $r: 2x - 3y + 4 = 0$ $\quad$ $s: y = \frac{2x}{3}$

64. Encontre a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, sendo:

a) $A(4, 5)$ e $B(-2, 1)$ $\quad$ b) $A(2, -1)$ e $B(-3, 1)$

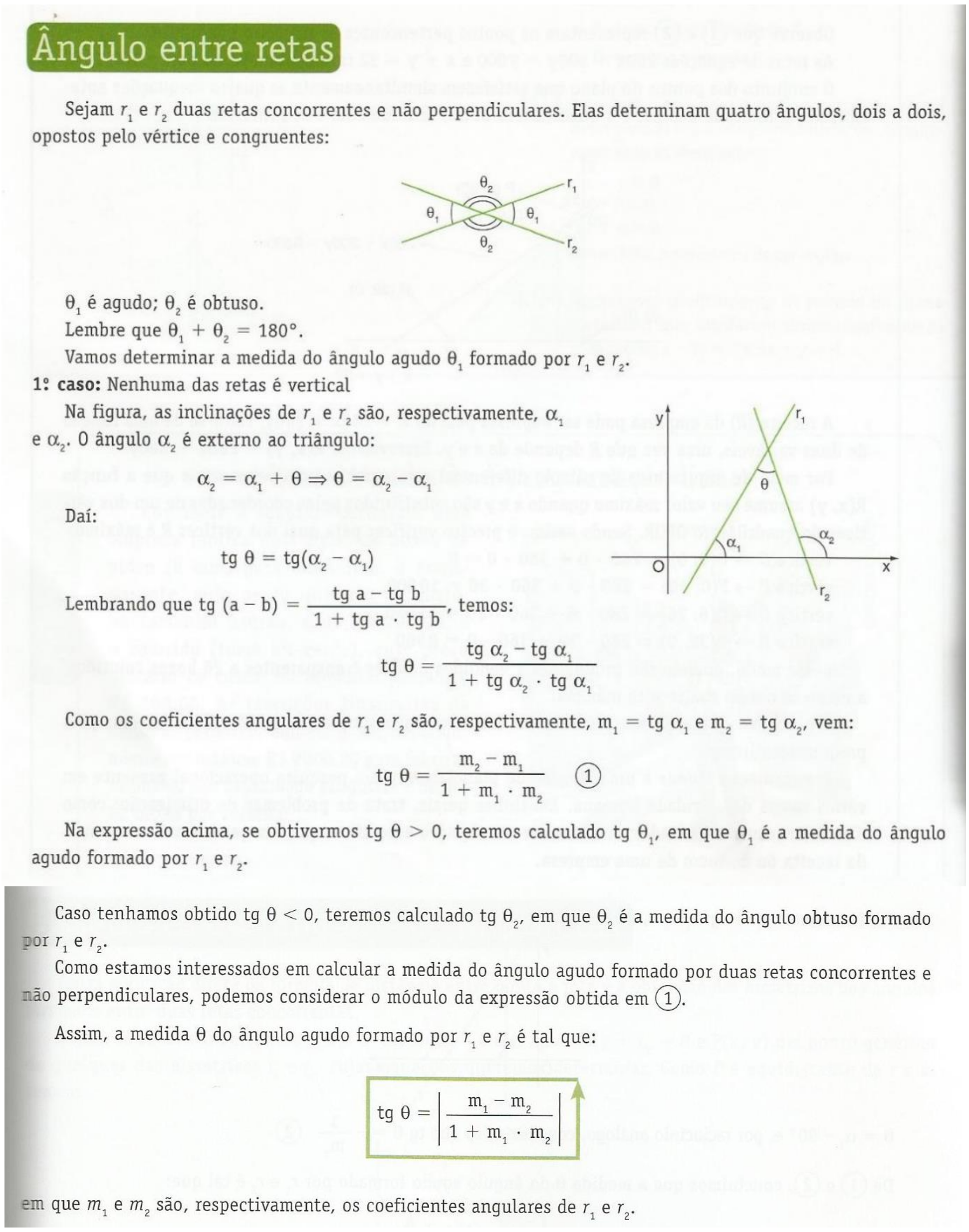
65. Encontre a equação da mediatriz do segmento $\overline{PQ}$, sendo $P(1, 2)$ e $Q(-3, 4)$. Em seguida, escolha um ponto qualquer dessa mediatriz e mostre que ele equidista de *P* e *Q*.

Figura 21 - Exercícios do tópico "Perpendicularidade".

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 53).

Na sequência, temos o tópico intitulado “Outros modos de escrever a equação de uma reta”, em que as equações na forma segmentária e paramétrica são apresentadas. Depois há o tópico “Distância entre ponto e reta”, sendo que no final do capítulo há um apêndice em que a fórmula para a distância de um ponto a uma reta é demonstrada. Seguem-se os tópicos “Área do triângulo” e “Inequações do 1º grau – Resolução gráfica”, sendo que no final deste último, os autores trazem uma aplicação: “Uma introdução à programação linear”.

No tópico, intitulado “Ângulo entre retas”, o objetivo é determinar a medida do ângulo agudo entre duas retas. Para tanto, temos a divisão em dois casos: o primeiro quando as retas não são verticais e o segundo quando uma das retas é vertical. Nos dois casos, os autores utilizam-se da aplicação da tangente do ângulo para a obtenção da medida do mesmo (veja a figura 22 a seguir que ilustra o primeiro caso). No final de cada caso, há um exemplo com a aplicação direta da fórmula deduzida. No final do tópico, há seis exercícios propostos em que o aluno aplica diretamente os conceitos abordados no mesmo, ou seja, o aluno deve obter a medida do ângulo entre duas retas, dadas as suas equações ou, então, a tangente do ângulo.



Ângulo entre retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas concorrentes e não perpendiculares. Elas determinam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice e congruentes:

θ_1 é agudo; θ_2 é obtuso.

Lembre que $\theta_1 + \theta_2 = 180°$.

Vamos determinar a medida do ângulo agudo θ_1 formado por r_1 e r_2.

1º caso: Nenhuma das retas é vertical

Na figura, as inclinações de r_1 e r_2 são, respectivamente, α_1 e α_2. O ângulo α_2 é externo ao triângulo:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta \Rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Daí:

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Lembrando que $\text{tg}\ (a - b) = \dfrac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$, temos:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{tg}\ \alpha_2 - \text{tg}\ \alpha_1}{1 + \text{tg}\ \alpha_2 \cdot \text{tg}\ \alpha_1}$$

Como os coeficientes angulares de r_1 e r_2 são, respectivamente, $m_1 = \text{tg}\ \alpha_1$ e $m_2 = \text{tg}\ \alpha_2$, vem:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \quad (1)$$

Na expressão acima, se obtivermos $\text{tg}\ \theta > 0$, teremos calculado $\text{tg}\ \theta_1$, em que θ_1 é a medida do ângulo agudo formado por r_1 e r_2.

Caso tenhamos obtido $\text{tg}\ \theta < 0$, teremos calculado $\text{tg}\ \theta_2$, em que θ_2 é a medida do ângulo obtuso formado por r_1 e r_2.

Como estamos interessados em calcular a medida do ângulo agudo formado por duas retas concorrentes e não perpendiculares, podemos considerar o módulo da expressão obtida em (1).

Assim, a medida θ do ângulo agudo formado por r_1 e r_2 é tal que:

$$\boxed{\text{tg}\ \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|}$$

em que m_1 e m_2 são, respectivamente, os coeficientes angulares de r_1 e r_2.

Figura 22 - Ângulo entre retas.

Fonte: Iezzi et al. (2010, p. 68-69).

- Matemática: Contexto e Aplicações – Volume 3 – Luiz Roberto Dante (2011)

No segundo capítulo, intitulado “Geometria analítica: ponto e reta”, Dante traz uma breve nota histórica:

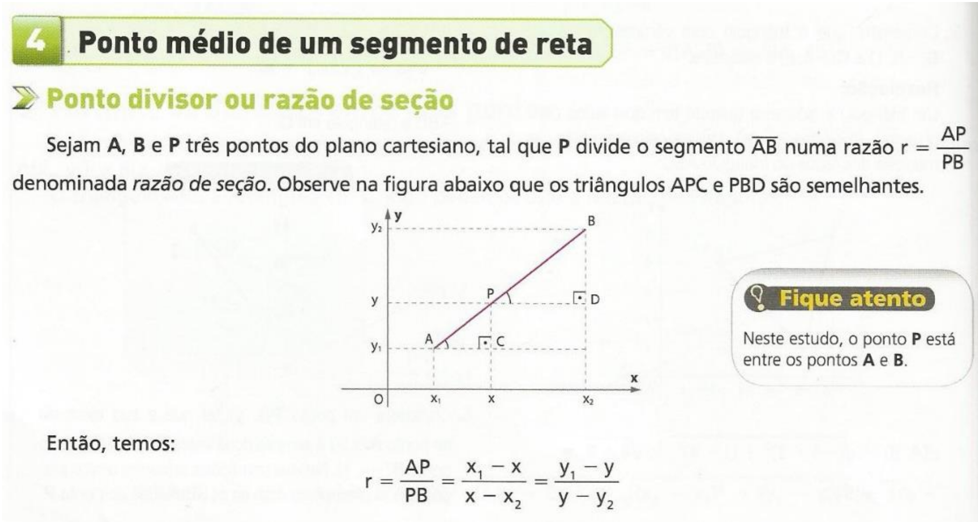
> Ao relacionar Álgebra com Geometria, em sua obra Discurso do Método, o filosofo francês René Descartes (1596 – 1650) concebeu os alicerces da Geometria analítica, estabelecendo relações entre curvas no plano cartesiano e equações algébricas. [...] (DANTE, 2011, p. 46).

Em seguida comenta a respeito de algumas aplicações da Geometria Analítica: na computação gráfica, no GPS (sigla inglesa para Sistema de Posicionamento Global), na tomografia computadorizada, etc.

No primeiro tópico, intitulado “Introdução”, Dante cita o fato de, na Geometria Analítica, os entes geométricos receberem uma interpretação algébrica, assim como situações algébricas recebem uma interpretação geométrica. No segundo tópico, intitulado “Sistema cartesiano ortogonal”, o autor afirma que há “[...] uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais [...]” (DANTE, 2011, p. 48), sendo que para estabelecer esta correspondência se faz necessário o uso de dois eixos x e y ortogonais que formam o *sistema cartesiano ortogonal*. Como exemplo, são dadas as coordenadas de alguns pontos e sua localização no plano cartesiano. Em seguida, sete exercícios são propostos.

No terceiro tópico, intitulado “Distância entre dois pontos”, Dante (2011, p. 50) afirma: “Dados dois pontos, A e B, a distância entre eles, que será indicada por d(A, B), é a medida do segmento de extremidades A e B.”. Seguem-se seis exemplos em que segmentos são desenhados no sistema cartesiano ortogonal e a distância entre os seus pontos extremidade é calculada. Há segmentos paralelos aos eixos coordenados e não paralelos. Em seguida vem o subtópico “Fórmula da distância entre dois pontos” no qual o Teorema de Pitágoras é aplicado para deduzir tal fórmula que calcula a distância entre dois pontos A e B quaisquer. Depois há cinco exercícios resolvidos e sete exercícios propostos, sendo que nos exercícios propostos, o aluno irá aplicar de maneira direta a fórmula da distância entre dois pontos e se deparar com exercícios bem parecidos com aqueles que foram apresentados já resolvidos.

No quarto tópico, intitulado “Ponto médio de um segmento de reta”, há três subtópicos, nesta ordem: “Ponto divisor ou razão de seção”, “Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta” e “Coordenadas do baricentro de um triângulo”. No primeiro subtópico, veja que interessante, há uma discussão mais geral, por meio de semelhança de triângulos, sobre um ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ em uma razão r = $\frac{AP}{PB}$. Observe a figura 23 a seguir.



4 Ponto médio de um segmento de reta

Ponto divisor ou razão de seção

Sejam **A, B** e **P** três pontos do plano cartesiano, tal que **P** divide o segmento $\overline{AB}$ numa razão $r = \frac{AP}{PB}$ denominada *razão de seção*. Observe na figura abaixo que os triângulos APC e PBD são semelhantes.

Fique atento

Neste estudo, o ponto **P** está entre os pontos **A** e **B**.

Então, temos:

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2}$$

Figura 23 - Ponto divisor ou razão de seção.

Fonte: Dante (2011, p. 52).

No segundo subtópico, o autor foca no caso específico do ponto médio M de um segmento de reta $\overline{AB}$, com o objetivo de encontrar a fórmula para o cálculo das coordenadas do ponto médio M. Para isto, o Teorema de Tales é aplicado.

No terceiro subtópico, temos as coordenadas dos pontos A, B e C, vértices do triângulo ABC e quer-se determinar as coordenadas do ponto G, sendo G o baricentro deste triângulo. Por meio do cálculo das coordenadas do ponto médio M do lado $\overline{BC}$ e admitindo-se que G “[...] divide a mediana $\overline{AM}$ em duas partes, em que uma é o dobro da outra. Nesse caso, $\frac{AG}{GM} = 2$.” (DANTE, 2011, p. 53), determinam-se as coordenadas de G.

Em seguida há quatro exercícios resolvidos e oito exercícios propostos referentes ao tópico “Ponto médio de um segmento de reta”. Somente nesta parte aparece uma nota explicando brevemente o que é mediana e baricentro. Veja a figura 24 (a) a seguir que ilustra o exercício resolvido de número nove. Neste exercício, calculam-se as coordenadas de um ponto que divide um segmento na razão $\frac{2}{3}$. A figura 24 (b) mostra o exercício de número 20 em que se pede para calcular as coordenadas do ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{1}{4}$.

9. Dados os pontos **A**(5, 12) e **B**(15, −3), determine o ponto **P** do segmento $\overline{AB}$ tal que a razão entre as medidas de $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ seja igual a $\frac{2}{3}$.

Resolução:

$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$

Fazendo **P**(x, y), temos:

- $\frac{2}{3} = \frac{x_A - x_P}{x_P - x_B} = \frac{5 - x}{x - 15} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(y - 15) = 3(5 - x) \Rightarrow 2x - 30 = 15 - 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = 9$

- $\frac{2}{3} = \frac{y_A - y_P}{y_P - y_B} = \frac{12 - y}{y - (-3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(y + 3) = 3(12 - y) \Rightarrow 2y + 6 = 36 - 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6$

Logo, **P**(9, 6).

20. Determine as coordenadas do ponto **P**(x, y) que divide o segmento **A**(2, 0) e **B**(17, 20) na razão $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{4}$.

(a) **(b)**

Figura 24 - Ponto que divide um segmento em uma dada razão.

Fonte: Dante (2011, p. 55).

No quinto tópico, intitulado "Condição de alinhamento de três pontos", temos os pontos A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) e C = (x_3, y_3) colineares e representados graficamente em um sistema de coordenadas cartesianas. Aplica-se o Teorema de Tales e obtêm-se as seguintes expressões: $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ e $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$. Estas expressões são igualadas e, por meio de manipulações algébricas, chega-se nesta igualdade: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

O autor afirma que a recíproca desta propriedade é verdadeira, porém não a demonstra. Temos, assim, novamente a presença de um determinante para verificar quando três pontos distintos estão ou não alinhados. Realmente há uma insistência no uso do determinante em certos tópicos da Geometria Analítica. Sendo que a utilização de determinante na condição de alinhamento de três pontos não se faz necessária. Do modo como está, temos que este tópico está recebendo uma interpretação bastante algébrica. Vale lembrar que Dante inicia este capítulo citando o fato de a Geometria Analítica trabalhar com álgebra e geometria.

> [...] raciocínios de natureza geométrica podem estar presentes em situações, que na escola, são tratados normalmente apenas com raciocínios de natureza algébrica. Essa

> predominância das representações algébricas pode ter razão na presença de regras de manipulação bem definidas e de procedimentos algorítmicos que resolvem, às vezes, de forma quase mecânica, as equações. Já resoluções geométricas, de um modo geral, exigem procedimentos de construção, para os quais não existem regras pré-definidas. Cada novo problema proposto corresponde à criação de uma nova estratégia de resolução. [...]. (CARNEIRO, 2007, p. 51).

Seguem-se quatro exercícios resolvidos com a aplicação do determinante e da recíproca da propriedade. Depois há quatro exercícios propostos parecidos com os exercícios resolvidos.

Na sequência, há os tópicos "Inclinação de uma reta", "Coeficiente angular de uma reta", "Equação da reta quando são conhecidos um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a declividade m da reta".

No nono tópico, intitulado "Formas da equação da reta", são apresentados quatro subtópicos, nesta ordem: "Forma reduzida da equação da reta", "Equação geral da reta", "Forma segmentária da equação da reta" e "Forma paramétrica da equação da reta". No segundo subtópico "Equação geral da reta", temos que este tipo de equação da reta é apresentado sem demonstração. Veja a figura 25 abaixo.

Equação geral da reta

Toda reta do plano possui uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0$$

na qual **a**, **b** e **c** são constantes e **a** e **b** não são simultaneamente nulos. Ela é denominada *equação geral da reta*.

Exemplo:

A reta:

- $y = -\frac{3}{4}x + 1$ pode ser escrita na forma geral por $3x + 4y - 4 = 0$.
- $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ pode ser dada na forma geral por $5x + 2y - 10 = 0$.
- $y = 5$, que é paralela ao eixo **x**, pode ser dada por $0x + 1y - 5 = 0$.
- $x = 2$, que é uma reta vertical, pode ser dada por $1x + 0y - 2 = 0$.
- $y - 3 = 5(x - 1)$ pode ser dada por $5x - 1y - 2 = 0$.

Figura 25 - Equação geral da reta.

Fonte: Dante (2011, p. 63).

Temos, neste caso, que a equação geral da reta foi simplesmente apresentada aos alunos sem maiores explicações. Isto pode gerar nos estudantes a impressão de que a matemática é um amontoado de fórmulas sem sentido, sendo que é preciso aceitá-las e decorá-las para depois poder aplicá-las nos exercícios, porém sem saber o porquê das mesmas. Quando os alunos são estimulados a justificar, a conjecturar certas relações, temos que o conhecimento matemático torna-se mais significativo para os mesmos.

Os PCNs+ (2002, p. 124) ressaltam a importância de, no ensino básico, trabalhar com deduções de certas propriedades:

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. [...]

Seguem-se três exercícios resolvidos, nos quais sempre é preciso determinar a equação geral da reta que passa por dois pontos. Os exercícios são resolvidos por meio da aplicação do determinante visto no tópico "Condição de alinhamento de três pontos". Veja a figura 26 abaixo que ilustra um dos exercícios resolvidos.

25. Se um triângulo tem como vértices os pontos **A**(1, 1), **B**(−2, −2) e **C**(−3, 4), determine a forma geral das equações das retas-suportes dos lados desse triângulo.

Resolução:

Equação geral da reta-suporte do lado $\overline{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 2 + 2 - y + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3y = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

Equação geral da reta-suporte do lado $\overline{AC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 4 + 3 - y - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$

Equação geral da reta-suporte do lado $\overline{BC}$:

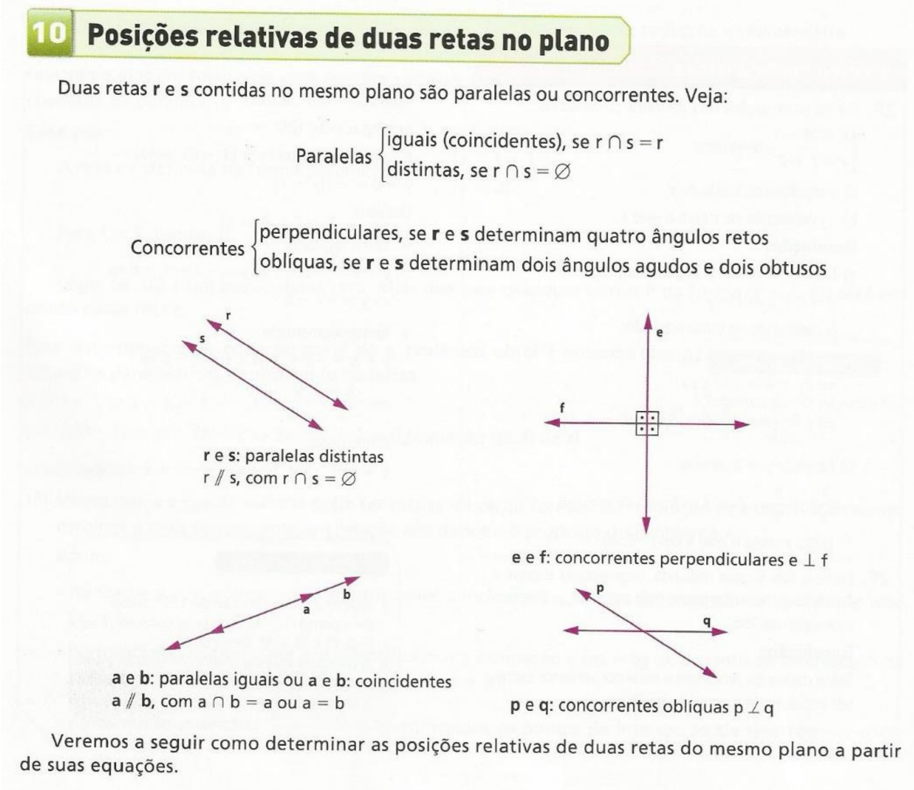
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 3y - 8 - 6 + 2y - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x - y - 14 = 0 \Rightarrow 6x + y + 14 = 0$$

Figura 26 - Aplicação de determinante para encontrar a equação geral da reta.

Fonte: Dante (2011, p. 64).

No décimo tópico, intitulado "Posições relativas de duas retas no plano", temos quatro subtópicos, nesta ordem: "Retas paralelas", "Retas concorrentes", "Intersecção de duas retas" e "Perpendicularidade de duas retas". Observe na figura 27 a seguir, as quatro posições relativas entre as retas consideradas por Dante.



10 Posições relativas de duas retas no plano

Duas retas **r** e **s** contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes. Veja:

Paralelas $\begin{cases} \text{iguais (coincidentes), se } r \cap s = r \\ \text{distintas, se } r \cap s = \varnothing \end{cases}$

Concorrentes $\begin{cases} \text{perpendiculares, se } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ determinam quatro ângulos retos} \\ \text{oblíquas, se } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ determinam dois ângulos agudos e dois obtusos} \end{cases}$

Veremos a seguir como determinar as posições relativas de duas retas do mesmo plano a partir de suas equações.

Figura 27 - Posições relativas de duas retas no plano.

Fonte: Dante (2011, p. 68).

No subtópico "Retas paralelas", o autor inicia com um exemplo em que r é representada pela equação $2x - 3y + 5 = 0$ e s pela equação $4x - 6y - 1 = 0$. Pergunta-se sobre a posição relativa entre r e s. Dante afirma que a primeira equação é equivalente a $4x - 6y + 10 = 0$, sem informar justificativas de tal afirmação. Depois cita que "[...] Comparando [$4x - 6y + 10 = 0$] com $4x - 6y - 1 = 0$ percebe-se que não existe um ponto (x, y) que pertença a **r** e **s** simultaneamente. Logo, **r** e **s** são retas paralelas distintas." (DANTE, 2011, p. 69, grifo do autor). Porém, que comparação o autor faz com as equações de r e de s que permite afirmar que "não existe ponto (x, y) que pertença a **r** e **s** simultaneamente"? Acredito que o autor está comparando os parâmetros das equações gerais, porém isto não está claro. No entanto, Dante não se detém muito nesta parte e, em seguida, converte as equações de r e de s para a forma reduzida, a fim de comparar seus coeficientes angulares. Conclui que as retas são paralelas, pois os coeficientes angulares são iguais, porém são distintas, pois os coeficientes lineares são diferentes.

No subtópico "Retas concorrentes", o autor afirma brevemente o fato de duas retas distintas no plano serem concorrentes se e, somente se, seus coeficientes angulares forem distintos. Depois, por meio de uma observação, Dante afirma que é possível verificar o paralelismo entre duas retas, comparando-se os coeficientes das equações gerais das retas.

Em seguida há uma lista com cinco exercícios resolvidos e outra lista com quatro exercícios propostos, sendo que em ambas as listas os exercícios são parecidos. Os métodos de resolução aplicados nos exercícios resolvidos serão utilizados pelos alunos nos exercícios propostos. A figura 28 abaixo, ilustra um dos exercícios propostos. O exercício de número 48 conecta áreas diferentes da matemática (Geometria Analítica e Geometria Plana).

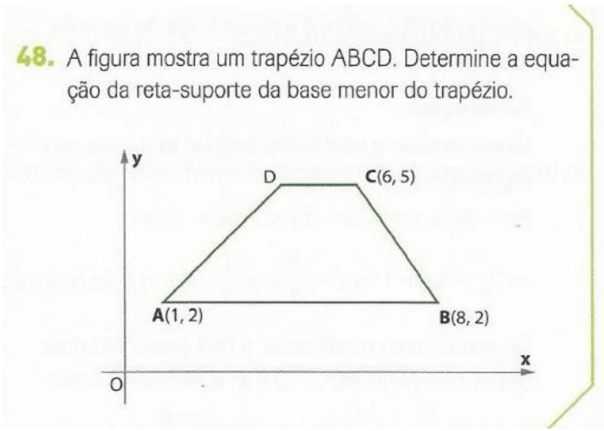
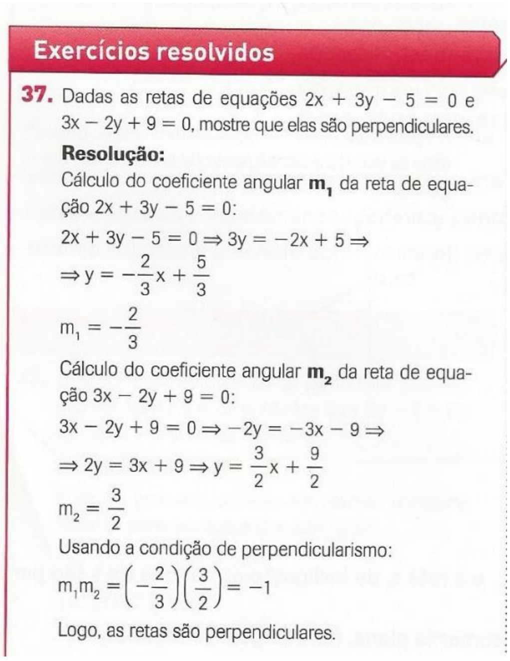


Figura 28 – Conexão entre a Geometria Analítica e a Geometria Plana.

Fonte: Dante (2011, p. 68).

No subtópico "Intersecção de duas retas", há a representação gráfica de duas retas r e s, sendo P = (a, b) o ponto de intersecção das mesmas. O autor afirma que P satisfaz a equação das duas retas e que, portanto, para encontrarmos suas coordenadas se faz necessário resolver um sistema formado pelas equações destas retas. Nesta parte, Dante preocupa-se em associar a resolução de sistemas com a posição relativa entre duas retas no plano. O autor apresenta brevemente a classificação dos sistemas (divididos em três casos). Em seguida, há dois exercícios resolvidos sobre a aplicação de sistemas com o objetivo de encontrar o ponto de intersecção entre duas retas. Seguem-se sete exercícios propostos.

No último subtópico, "Perpendicularidade de duas retas", a relação $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ é mostrada, sendo m_1 e m_2 os coeficientes angulares das retas perpendiculares r e s, respectivamente. O autor afirma que a recíproca da relação também é válida, embora não demonstre a mesma. Dante traz como uma observação apenas o fato de que "[...] Uma maneira prática de verificar o perpendicularismo de duas retas **r** e **s**, dadas por suas equações gerais, tal que r: ax + by + c = 0 e s: a'x + b'y + c' = 0, é verificar se a . a' + b . b' = 0. Se isso ocorrer, elas serão perpendiculares." (DANTE, 2011, p. 74). Seguem-se sete exercícios resolvidos e seis exercícios propostos. Observe a figura 29 a seguir. No exercício resolvido de número 37 (veja a figura 29 (a)), temos que as equações das retas são fornecidas na forma geral, porém não é feita a comparação dos coeficientes de suas equações nesta forma e, sim, as equações gerais são convertidas para a forma reduzida e, então, o coeficiente angular de ambas é comparado. No exercício proposto de número 59 (veja a figura 29 (b)), pede-se para encontrar as coordenadas do ponto N, simétrico ao ponto M em relação à reta r. Porém, nada com relação a ponto simétrico foi abordado na teoria.



Exercícios resolvidos

37. Dadas as retas de equações $2x + 3y - 5 = 0$ e $3x - 2y + 9 = 0$, mostre que elas são perpendiculares.

Resolução:

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_1}$ da reta de equação $2x + 3y - 5 = 0$:

$2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

$m_1 = -\frac{2}{3}$

Cálculo do coeficiente angular $\mathbf{m_2}$ da reta de equação $3x - 2y + 9 = 0$:

$3x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow -2y = -3x - 9 \Rightarrow$

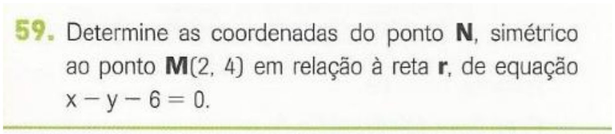
$\Rightarrow 2y = 3x + 9 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

$m_2 = \frac{3}{2}$

Usando a condição de perpendicularismo:

$m_1m_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1$

Logo, as retas são perpendiculares.



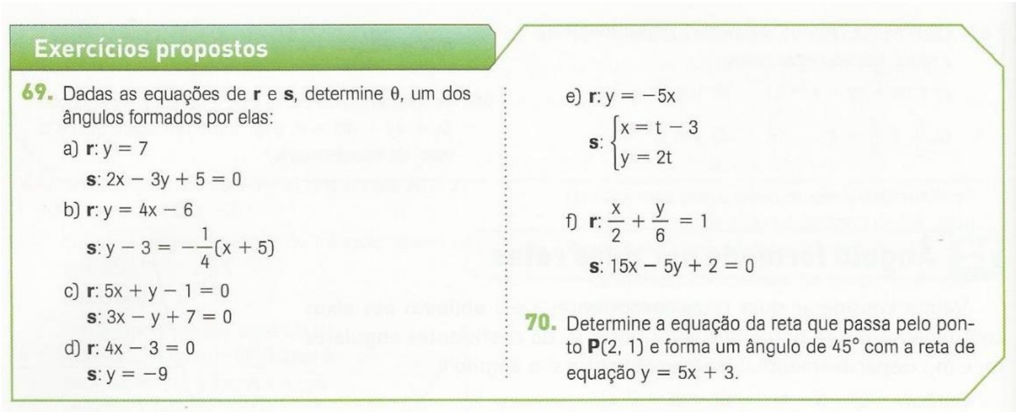
59. Determine as coordenadas do ponto **N**, simétrico ao ponto **M**(2, 4) em relação à reta **r**, de equação $x - y - 6 = 0$.

(a) **(b)**

Figura 29 - Exercícios do subtópico "Perpendicularidade de duas retas".

Fonte: Dante (2011, p. 74 e p. 78)

O próximo tópico é “Distância de um ponto a uma reta” e, depois, temos o tópico intitulado “Ângulo formado por duas retas”, em que duas retas concorrentes r e s “[...] oblíquas aos eixos coordenados e não perpendiculares [...]” (DANTE, 2011, p. 81) formam entre si o ângulo θ ao qual se deseja descobrir a medida. Uma relação envolvendo a tangente do ângulo θ e os coeficientes angulares destas retas é estabelecida. Em seguida, de maneira muito breve, há a análise da medida do ângulo θ para o caso em que as retas r e s são paralelas, perpendiculares (reapresentam a relação estabelecida no subtópico “Perpendicularidade de duas retas”) ou quando uma delas é vertical. Em seguida há um exercício resolvido no qual pede-se para determinar o valor do ângulo formado por duas retas cujas equações são fornecidas. Depois, duas questões são propostas aos alunos. Observe na figura 30 a seguir os exercícios propostos.



Exercícios propostos

69. Dadas as equações de **r** e **s**, determine θ, um dos ângulos formados por elas:

a) **r**: $y = 7$
s: $2x - 3y + 5 = 0$

b) **r**: $y = 4x - 6$
s: $y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 5)$

c) **r**: $5x + y - 1 = 0$
s: $3x - y + 7 = 0$

d) **r**: $4x - 3 = 0$
s: $y = -9$

e) **r**: $y = -5x$
s: $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 2t \end{cases}$

f) **r**: $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$
s: $15x - 5y + 2 = 0$

70. Determine a equação da reta que passa pelo ponto **P**(2, 1) e forma um ângulo de 45° com a reta de equação $y = 5x + 3$.

Figura 30 - Exercícios do tópico “Ângulo formado por duas retas”

Fonte: Dante (2011, p. 82)

2.3 REFLEXÕES SOBRE A ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

A partir da análise de alguns tópicos do conteúdo de Geometria Analítica presentes em dois livros didáticos, foi possível perceber a maneira fragmentada como estes são abordados pelos autores. Em nenhum momento é feito menção à utilização de recursos tecnológicos ou computacionais para se trabalhar com os conceitos matemáticos desenvolvidos ao longo dos livros texto. As contextualizações com outras áreas da matemática e domínios do conhecimento são poucas.

Verificou-se na exposição teórica dos conteúdos e nos exercícios resolvidos ou propostos a presença dos seguintes registros de representação semiótica: registro em língua natural, registro gráfico, registro algébrico, registro numérico e registro figural. Porém, de nada adianta a apresentação de diferentes registros se o lugar dedicado à coordenação entre os mesmos é mínima. Em diversos momentos, por exemplo, foi possível perceber a ênfase dada ao registro algébrico e nas transformações de tratamento internas a este registro. Dessa forma, temos que os livros didáticos estão lidando com o “[...] isolamento de registros de representação [...]” (DUVAL, 2012, p. 283) ao não efetuar a atividade de conversão entre estes, sendo que é esta transformação, segundo Duval (2009), que permite a compreensão do conteúdo conceitual em Matemática.

> Naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda a compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam ser realmente utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do “sentido” daquilo que é feito. (DUVAL, 2012, p. 283).

Quando ocorre a conversão entre representações de registros diferentes, prioriza-se apenas um dos sentidos de conversão, sendo que é interessante trabalhar-se com a conversão em duplo sentido, pois, desta forma, certas propriedades do objeto matemático que os estudantes não conseguem visualizar ao trabalhar com apenas um dos sentidos, passam a ser perceptíveis no outro sentido.

Nenhum dos dois livros analisados aborda o conteúdo de vetores, o que é uma pena, pois vetores podem servir como uma ferramenta bastante útil para a resolução de diversos problemas propostos em Geometria Analítica. Com a aplicação de vetores, é possível perceber como os problemas podem ser resolvidos de maneira mais rápida e fácil. Além disso, por meio da utilização de vetores, os conceitos ganham uma interpretação geométrica, o que pode facilitar a compreensão por parte dos estudantes.

Não sabemos os motivos que levam os livros didáticos de matemática a não trazerem tal abordagem. Talvez seja o fato de o conteúdo de vetores não se fazer presente nos vestibulares. De qualquer modo, isto influência na maneira como o professor em sala de aula lida com o conteúdo de Geometria Analítica, já que muitas práticas pedagógicas tomam como recurso principal o livro didático.

O fato é que os vetores são objetos matemáticos, porém não aparecem nas aulas de matemática da escola básica, sendo que os mesmos podem ser encontrados nos livros de Física. De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p.77):

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física.

Percebe-se também nos livros didáticos analisados uma abordagem bastante algébrica, o que compromete o estudo da Geometria Analítica, que no seu próprio nome, carrega o termo “geometria”, sendo que o mesmo está sendo ignorado.

> A Geometria Analítica faz uma interconexão entre a Geometria e a Álgebra, desta forma permite tratar algebricamente várias questões geométricas e, de forma recíproca, de questões algébricas através do uso de Geometria. Isso é a essência da Geometria Analítica e que é completamente ignorada pelos autores de livros didáticos brasileiros que tratam essa disciplina como um amontoado de fórmulas, muitas vezes desprovidas de sentido e ignoram completamente o aspecto

> geométrico. Não é adequado que um livro dedique cem páginas ao ensino de Geometria Analítica, alguns até mais, sem estabelecer conexão entre esses dois ramos da matemática. (SILVA, 2013, p. 21-22).

Muitas vezes, percebeu-se o uso exagerado de determinantes, que não propicia uma visualização geométrica dos problemas. Além disso, se fossemos interpretar um determinante de ordem três geometricamente, temos que o mesmo representa o volume de um paralelepípedo.

Os exercícios propostos pelos livros são bastante repetitivos e mecânicos, em que o aluno apenas memoriza e reproduz técnicas de resolução. Dessa forma, os problemas propostos não favorecem o aluno a adquirir certa liberdade para criar as suas próprias estratégias de resolução, o que não estimula a criatividade e nem contribui para a autonomia do estudante.

De acordo com Gérard e Roegiers (1998 apud BRASIL, 2014, p. 9-10), temos algumas funções importantes que os livros didáticos devem cumprir com relação aos alunos:

> [...] favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes; consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos; propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno, que contribuam para aumentar sua autonomia; contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania. [...]

Portanto, é importante que o professor, no momento de escolher o livro didático a ser utilizado com seus alunos, fique atento e faça uma análise criteriosa dos mesmos. O livro didático deve servir como um material de apoio para o professor, isto é, deve auxilia-lo e trazer contribuições para as tarefas que o mesmo desenvolve em sala de aula. Dessa forma, espera-se que o professor possa contar com a ajuda do livro didático para propor aos estudantes diferentes atividades e situações que envolvam o trabalho com os diversos registros de representação semiótica e a articulação entre os mesmos, contribuindo, assim, para o desenvolvimento cognitivo do educando e, consequentemente, para que este amplie suas capacidades de análise, interpretação, raciocínio, visualização, resolução de problemas do cotidiano tanto internos quanto externos à Matemática, etc.

2.4 INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

O desenvolvimento tecnológico pelo qual está passando a nossa sociedade influência novos modos de vida, novos comportamentos, novos métodos de trabalho, novas formas de comunicação, etc.

Dessa forma, temos que o surgimento dos computadores, assim como das demais tecnologias (telefones celulares, calculadoras eletrônicas, câmeras digitais, dispositivos para armazenar dados, etc.), imprimiram grandes mudanças na sociedade, inclusive, nas formas de construção de conhecimento, pois a medida que as tecnologias surgem e são incorporadas ao cotidiano das pessoas, as mesmas se veem obrigadas a tomarem conhecimento de seus funcionamentos.

> Sob este prisma, o uso dos recursos tecnológicos tem se tornado necessário à participação do indivíduo na sociedade moderna, no mercado de trabalho e nos diferentes grupos sociais e culturais, assim como a presença dos mesmos tem modificado as formas de registrar e armazenar a história dessas culturas. Esta necessidade, consequentemente, vem se refletindo no meio escolar e acadêmico e, também, na prática docente, na medida em que o setor educacional é incitado a investir na inserção e investigação destes instrumentos nas atividades pedagógicas, visando a preparar os alunos para interagirem no novo cenário social que vem se definindo e a contribuírem para a promoção de mudanças no mesmo. (RICHIT, 2005, p. 25)

Sendo assim, acredito que a escola deve propiciar aos seus estudantes o acesso à informática com o objetivo principal de ajudá-lo no processo de construção do conhecimento e garantir-lhes a integração na sociedade. O acesso à informática:

> [...] deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania. (BORBA & PENTEADO, 2001, apud RICHIT, 2005, p. 26)

2.4.1 Utilização do GeoGebra

O *software* GeoGebra[1] (junção das palavras Geometria e Álgebra) permite o trabalho com Geometria e Álgebra. Por meio da “Janela de Visualização” é possível construir pontos, retas, circunferências, triângulos, etc. e assim obter as representações geométricas destes entes. Por meio da “Janela de Álgebra” é possível obter suas representações algébricas. Portanto, ao construirmos um ponto na “Janela de Visualização”, por exemplo, poderemos observar suas coordenadas na “Janela de Álgebra” ou, então, se construirmos uma reta, na “Janela de Álgebra” estará a sua equação. Este é o motivo que nos levou à escolha do

---

[1] O *software* GeoGebra é livre e está disponível na rede para o download em http://www.geogebra.org/cms/.

software GeoGebra para a pesquisa a ser desenvolvida neste trabalho, já que o programa permite a coordenação entre representações de objetos matemáticos pertencentes a dois registros de representação semiótica: o registro geométrico e o registro algébrico. De acordo com Duval (2012), a mobilização de ao menos dois registros de representação semiótica é uma condição fundamental para as aprendizagens em Matemática.

Para construir os objetos, temos a nossa disposição uma diversidade de ferramentas localizadas na “Barra de Ferramentas”.

No *software* GeoGebra é possível construir figuras que atendam a determinadas propriedades, de maneira que ao manipulamos a mesma, isto é, se mexermos em algum de seus pontos, mudarmos a figura de posição, alterarmos o seu tamanho, temos que as propriedades continuam preservadas. É por isso que o GeoGebra é considerado um *software* de Geometria Dinâmica.

A utilização de recursos por parte do professor muda a dinâmica da sala de aula com o objetivo de provocar “[...] o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática. [...]” (GRAVINA; BASSO, 2012, p.34).

Os tópicos do conteúdo de Geometria Analítica que analisamos nos dois livros didáticos escolhidos recebem, no próximo capítulo, uma abordagem vetorial. Acreditamos, assim, que estamos contribuindo para uma melhor consolidação dos conceitos, pois desta forma proporcionamos uma melhor articulação entre os domínios algébrico e geométrico que constituem o estudo da Geometria Analítica.

3 ESTUDO DE VETORES - UM TRATAMENTO VETORIAL PARA A GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresentamos detalhadamente os conteúdos de Geometria Vetorial e de Geometria Analítica a serem desenvolvidos com os alunos na escola de maneira a garantir a aproximação entre os domínios da geometria e da álgebra. Por meio de uma abordagem vetorial espera-se que os tópicos trabalhados dentro do conteúdo de Geometria Analítica possam se tornar mais compreensíveis, mais significativos para os alunos, já que recebem uma nova leitura que se faz sob a ótica da Geometria Vetorial.

Para desenvolvermos este capítulo, apresentamos ao longo do mesmo a dedução de certas relações e propriedades, assim como, a apresentação de definições. Para tanto, sete obras foram consultadas, sendo que estas contribuíram para a exposição teórica que apresentaremos a seguir. As obras consultadas foram: Baldin e Furuya (2011), Boulos e Camargo (2005), Carneiro (2007), Dolce e Pompeo (2005), Lima (1992), Lima et al. (2006) e Winterle (2000).

Os tópicos a serem trabalhados são os seguintes: grandeza escalar x grandeza vetorial, o vetor geométrico, operações com o vetor geométrico, o vetor algébrico, operações com o vetor algébrico, módulo de um vetor, distância entre dois pontos, translação segundo um vetor, coordenadas de um ponto que divide um segmento em uma razão dada, colinearidade de três pontos, condição de ortogonalidade entre dois vetores, equação geral da reta, posições relativas entre duas retas no plano, ângulo entre dois vetores e ângulo entre duas retas.

Grandezas escalares: São aquelas em que um número (acompanhado da unidade de medida correspondente) é o suficiente para caracterizá-las completamente. Exemplos de grandezas escalares: comprimento, área, volume, tempo, temperatura, etc.

Figura 31- Grandeza escalar temperatura.
Fonte: <http://imagem.band.com.br/f_188919.jpg> Acesso em: 14/10/14.

Figura 32 - Grandeza escalar volume.

Fonte: <http://www.lojadomecanico.com.br/imagens/31/266/73048/Balde_Graduado_de_Polietileno_20L_1.JPG> Acesso em: 14/10/14.

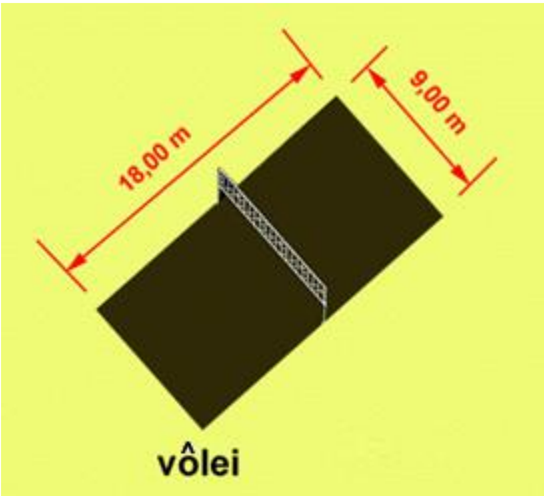


Figura 33 - Grandeza escalar comprimento.

Fonte: <http://www.edifique.arq.br/images/esportes.GIF> Acesso em: 14/10/14.

Grandezas vetoriais: São aquelas em que não basta apenas informarmos um número (acompanhado da unidade de medida correspondente) para caracterizá-las. É necessário informarmos também a direção e o sentido de tais grandezas para que assim elas fiquem completamente determinadas. Exemplos de grandezas vetoriais: velocidade, aceleração, força, etc.

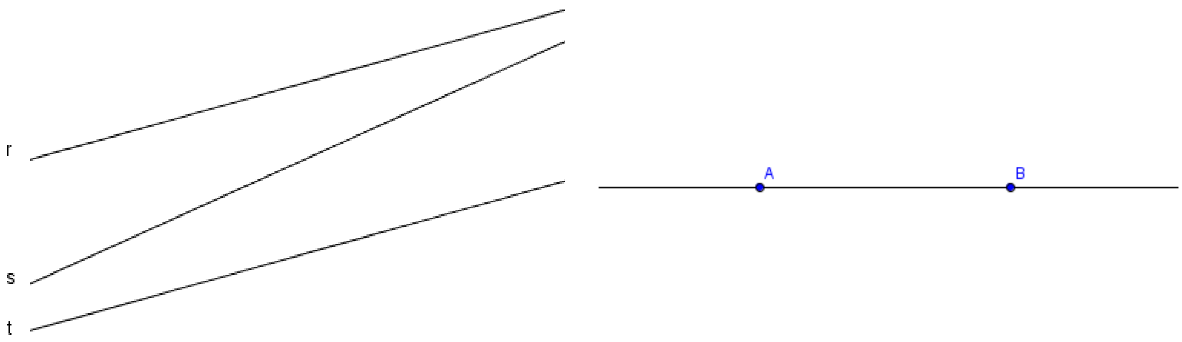
Portanto, não basta apenas informarmos que um carro se desloca a uma velocidade de 70 km/h, por exemplo, pois esse dado se refere apenas à intensidade da velocidade, mas qual é a direção dessa velocidade? E o seu sentido? Assim como não basta apenas informarmos, por exemplo, que uma força de 100 N foi aplicada sobre um objeto, pois é necessário dizermos algo a respeito da direção e do sentido em que essa força foi aplicada.

Direção e sentido

Observe a figura 34 (a) abaixo. Temos que a reta r determina uma direção. Já a reta s determina outra direção diferente da direção dada pela reta r. Agora, a reta t determina a mesma direção que a da reta r, pois as retas r e t são paralelas.

Agora, observe a figura 34 (b) a seguir. Temos a reta que passa pelos pontos A e B. Essa reta determina uma única direção, porém há dois sentidos de percurso nessa direção: o sentido que vai de A para B e o sentido contrário que vai de B para A.

Portanto, só é possível comparar “sentidos” quando estamos lhe dando com a mesma direção.



(a) **(b)**

Figura 34 – Direção e sentido.

Fonte: A autora.

Os segmentos orientados como representantes das grandezas vetoriais

Os segmentos orientados (ou flechas) podem ser utilizados para representarem quaisquer grandezas vetoriais, pois eles carregam três informações importantes e que caracterizam uma grandeza vetorial: comprimento (número real referente à intensidade da grandeza vetorial), direção e sentido.

Observe a figura 35 a seguir em que temos a reta r que passa pelos pontos A e B e que, portanto, determina uma direção. Sobre r, temos o segmento de reta $\overline{AB}$. Tomando o ponto A como a origem do segmento e o ponto B como a extremidade, estamos definindo um sentido de percurso sobre o segmento de reta $\overline{AB}$. Sendo assim, temos o segmento orientado que vai de A para B e que denotamos por $\overrightarrow{AB}$.

Repare que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ possui um comprimento que nada mais é do que o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ (um número real), uma direção dada pela reta suporte r e um sentido de A (origem) para B (extremidade).

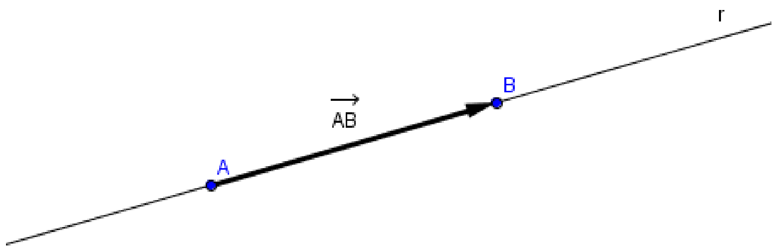


Figura 35 - Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

Fonte: A autora.

Vejamos agora as figuras 36, 37, 38 e 39 a seguir referentes a animações elaboradas no *software* GeoGebra que modelam quatro situações envolvendo a grandeza vetorial velocidade.

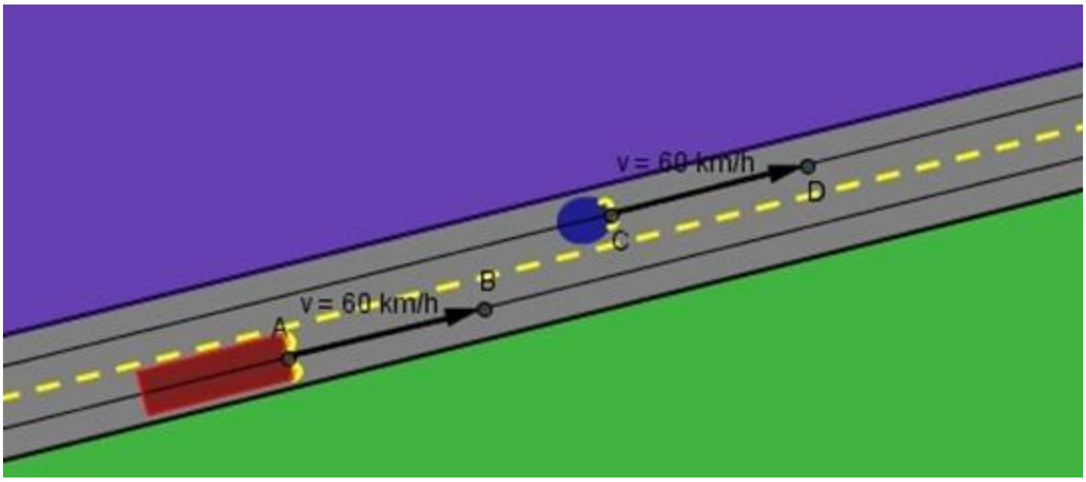


Figura 36 - Carros.

Fonte: A autora.

Observe que na ilustração acima há dois automóveis se deslocando ao longo de uma estrada. O carro azul se desloca a uma velocidade constante de 60 km/h (intensidade da velocidade), na direção da reta que passa pelos pontos C e D e no sentido que vai de C para D. Sendo assim, o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ representa a velocidade do carro azul, pois $\overrightarrow{CD}$

possui um comprimento que está associado aos 60 km/h, à direção dada pela reta que passa pelos pontos C e D e o sentido de C (origem da flecha $\overrightarrow{CD}$) para D (extremidade da flecha $\overrightarrow{CD}$). O ônibus vermelho também se desloca a uma velocidade constante de 60 km/h, na direção da reta que passa pelos pontos A e B e no sentido que vai de A para B. Sendo assim, o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa a velocidade do ônibus vermelho, pois $\overrightarrow{AB}$ possui um comprimento que está associado aos 60 km/h, à direção dada pela reta que passa pelos pontos A e B e o sentido de A (origem da flecha $\overrightarrow{AB}$) para B (extremidade da flecha $\overrightarrow{AB}$).

Repare que a reta que passa pelos pontos A e B e a reta que passa pelos pontos C e D são paralelas e que, portanto, possuem a mesma direção. Além disso, o sentido de percurso de quem vai de A para B é o mesmo sentido de quem vai de C para D.

Podemos concluir, assim, que as flechas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido e, portanto, representam velocidades que são iguais.

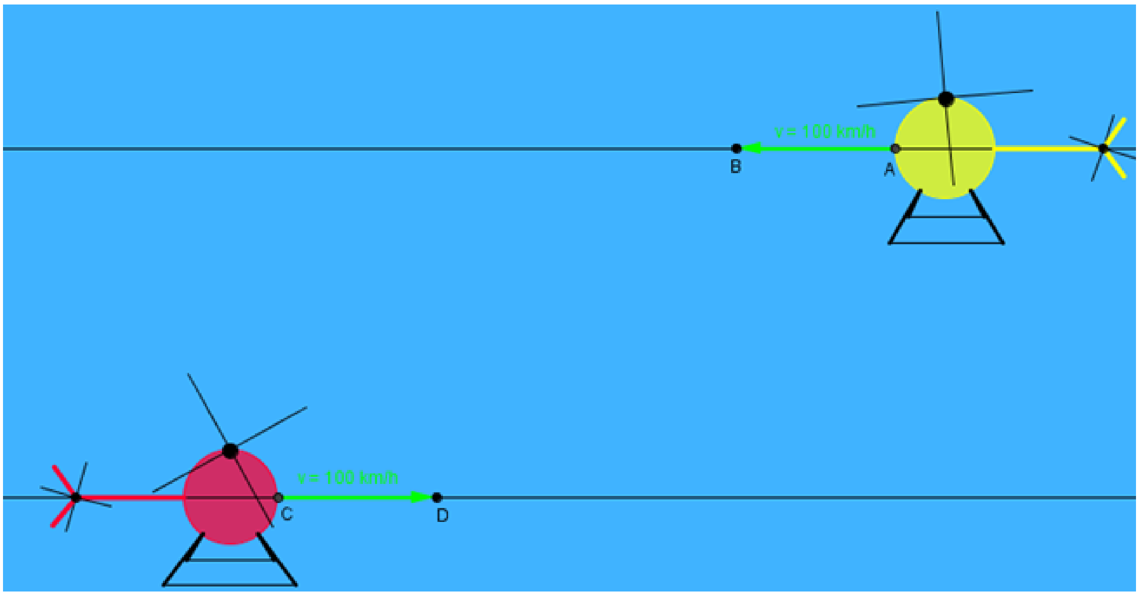


Figura 37 - Helicópteros.

Fonte: A autora.

Observe que na ilustração acima há dois helicópteros se deslocando a uma velocidade constante de 100 km/h. O helicóptero rosa se desloca na direção dada pela reta que passa pelos pontos C e D e no sentido que vai de C para D. Sendo assim, o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ representa a sua velocidade. O helicóptero amarelo se desloca na direção da reta que passa pelos pontos A e B e no sentido que vai de A para B. Sendo assim, o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa a velocidade desse helicóptero.

Repare que a reta que passa pelos pontos A e B e a reta que passa pelos pontos C e D são paralelas e possuem a mesma direção. Porém, neste caso, o sentido de percurso de quem vai de A para B é diferente do sentido de quem vai de C para D.

Podemos concluir, assim, que as flechas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem mesmo comprimento, mesma direção, mas não possuem o mesmo sentido. Portanto, representam velocidades que não são iguais.

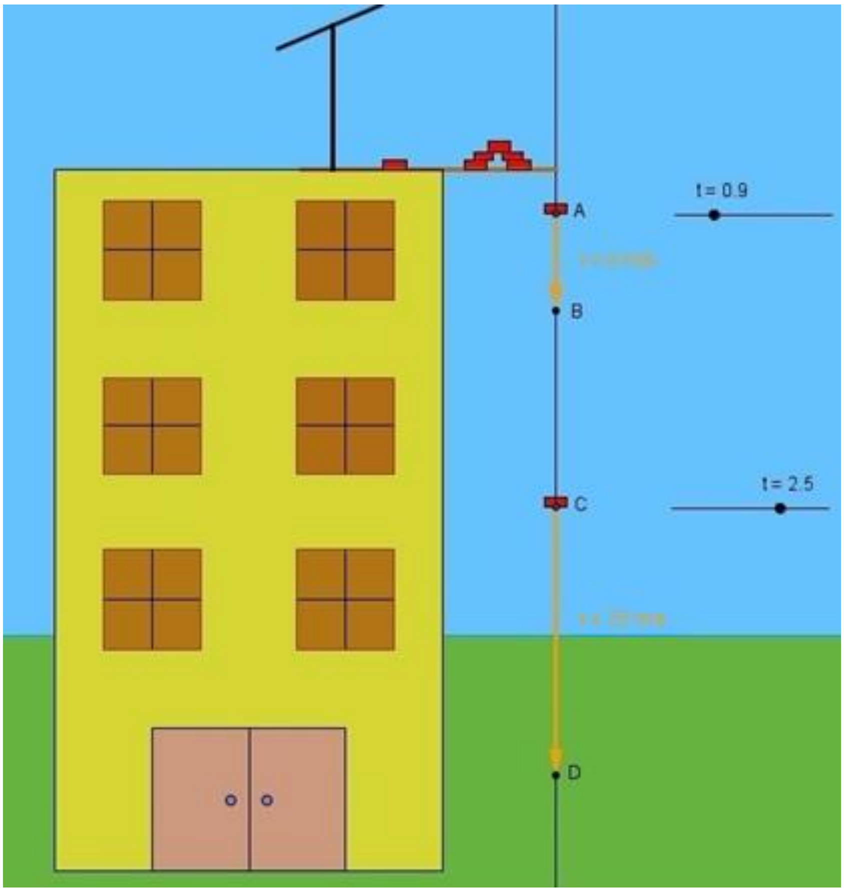


Figura 38 - MRUV.

Fonte: A autora.

Na figura 38, temos a situação de um tijolo que cai em queda livre do terraço de um edifício descrevendo, segundo a Física, um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Sendo assim, durante toda a trajetória o tijolo se desloca na direção da reta que passa pelos pontos A, B, C e D e no sentido que vai de A para D. No instante de tempo t = 0,9 s, o tijolo se desloca a uma velocidade de 9 m/s sendo que $\overrightarrow{AB}$ é a flecha que representa a sua velocidade (o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ possui comprimento referente aos 9 m/s). No instante de tempo t = 2,5 s, o tijolo se desloca a uma velocidade de 25 m/s sendo que $\overrightarrow{CD}$ é a flecha que representa a sua velocidade (o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ possui comprimento referente aos 25 m/s).

Podemos concluir, assim, que as flechas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem mesma direção, mesmo sentido, mas comprimentos diferentes. Portanto, representam velocidades que não são iguais.

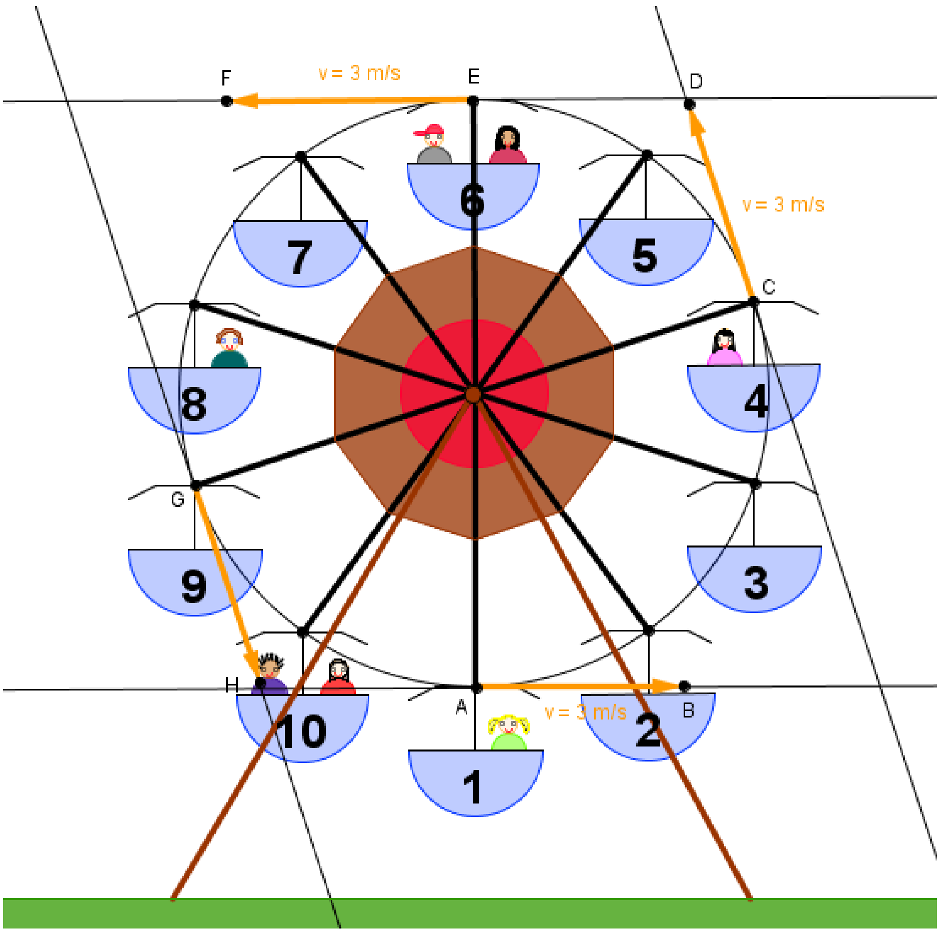


Figura 39 - Roda gigante.

Fonte: A autora.

Na figura 39 acima, temos o registro de uma roda gigante em um determinado instante. Todos os banquinhos se deslocam a uma velocidade cuja intensidade é de 3 m/s. No instante do registro, o banquinho de nº 1 se desloca na direção da reta que passa pelos pontos A e B e no sentido que vai de A para B. O banquinho de nº 4 se desloca na direção da reta que passa pelos pontos C e D e no sentido que vai de C para D. O banquinho de nº 6 se desloca na direção da reta que passa pelos pontos E e F e no sentido que vai de E para F. As velocidades dos banquinhos de nº 1, nº 4 e nº 6 são representadas, respectivamente, pelas setas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$. Comparando as velocidades dos banquinhos de n° 1 e nº 4, por exemplo, temos que elas não são iguais, pois as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ não possuem a mesma direção (e nesse caso o sentido não pode ser comparado), o mesmo ocorre se compararmos as velocidades dos banquinhos de nº 4 e nº 6. Agora, se compararmos as velocidades dos banquinhos de nº 1 e nº 6 também se verificará que não são iguais, pois as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EF}$ não possuem o mesmo sentido (embora possuam a mesma direção – se encontram apoiadas sobre retas paralelas – e o mesmo comprimento – referente à intensidade de 3 m/s).

Portanto, o que podemos concluir após termos vistos essas quatro situações que envolvem a grandeza vetorial velocidade?

Quando comparamos velocidades só podemos afirmar que elas são iguais quando possuem a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido, ou seja, quando os segmentos orientados que as representam possuírem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. O mesmo vale para qualquer outra grandeza vetorial.

O vetor geométrico

Ao estudarmos as grandezas vetoriais (em particular a grandeza vetorial velocidade que foi o que fizemos até aqui), temos que surge a ideia de vetor. Mas o que é vetor? Vetor[2] pode ser entendido como um conjunto de segmentos orientados que possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido, ou seja, quando temos uma coleção de flechas que possuem em comum o comprimento, a direção e o sentido, podemos dizer que essa coleção é um determinado vetor, que essa coleção representa um determinado vetor.

Observe a figura 40 a seguir, em que temos nove segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido (repare que na figura 40 poderiam ter sido desenhados muitos outros segmentos orientados com essas três características idênticas). Esse conjunto de flechas é um vetor, sendo que podemos escolher qualquer segmento orientado dessa coleção e toma-lo como um representante do vetor.

Indicamos vetores utilizando letras minúsculas encimadas por uma flecha Exemplos: $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{z}$, etc. Também podemos indicar da seguinte maneira: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

[2] De uma maneira mais formal, temos que “um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados.” (BOULOS; CAMARGO, 2005, p. 4).

Quando escrevemos dessa forma estamos querendo dizer que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa o vetor $\overrightarrow{u}$. Note, porém, que qualquer outro segmento orientado que possua o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido que a flecha $\overrightarrow{AB}$ também pode representar o vetor $\overrightarrow{u}$. Sendo assim, podemos escrever: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{w}$.

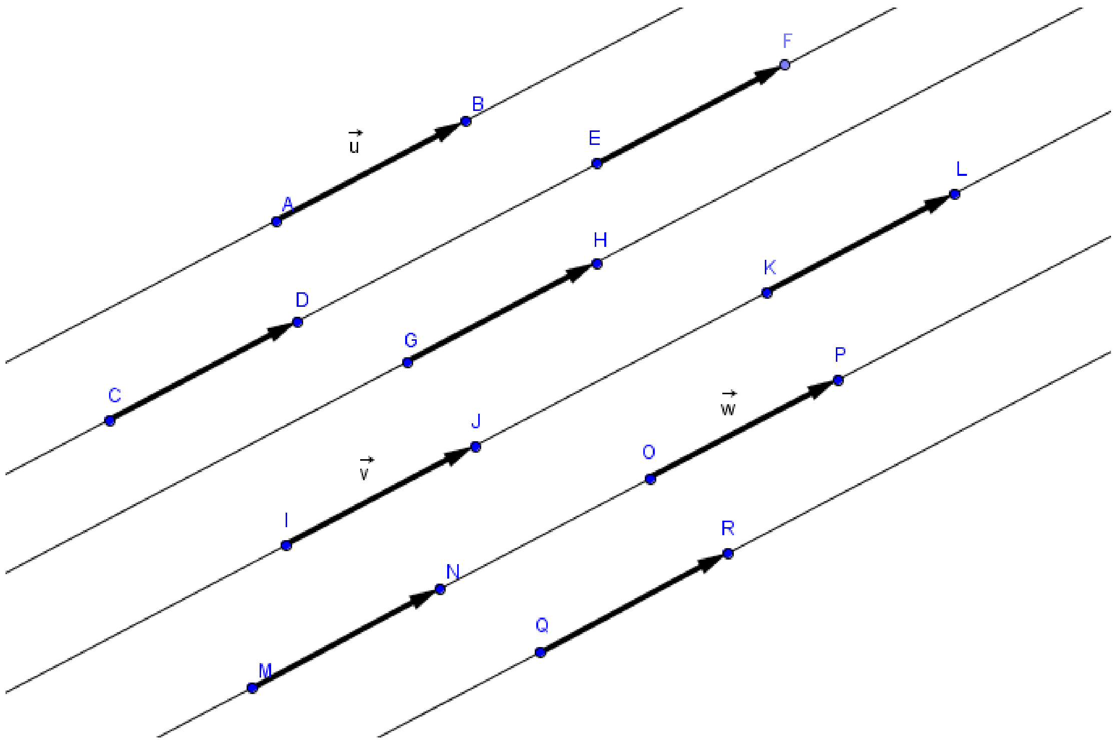


Figura 40 – Vetor $\overrightarrow{u}$.

Fonte: A autora.

Observe a figura 41 a seguir. Temos outra coleção de segmentos orientados que possuem em comum o comprimento, a direção e o sentido. Essa coleção também representa um vetor. O vetor representado pela coleção de flechas ilustradas na figura 40 é igual ao vetor representado pelo conjunto de flechas da figura 41? Quando podemos afirmar que duas setas representam o mesmo vetor?

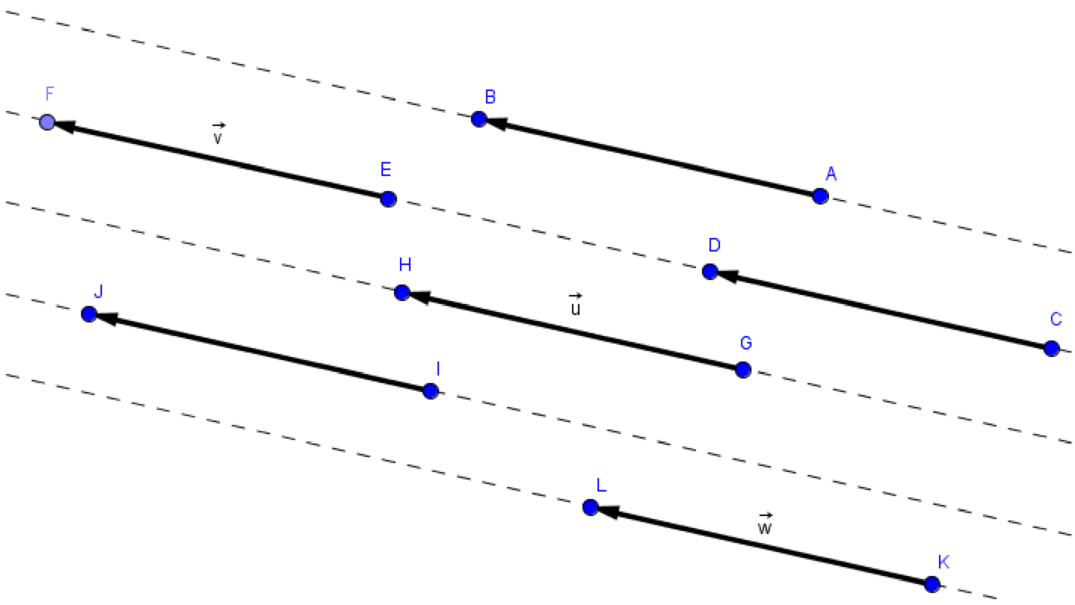


Figura 41 – Vetor $\overrightarrow{v}$.

Fonte: A autora.

Observe a figura 42 abaixo em que temos o vetor $\overrightarrow{z}$ sendo representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e que, portanto, podemos escrever $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{AB}$. Note que dado qualquer ponto P do espaço, podemos obter o segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ que possui direção, sentido e comprimento iguais à flecha $\overrightarrow{AB}$. Sendo assim, $\overrightarrow{PQ}$ também representa $\overrightarrow{z}$ e podemos escrever: $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{PQ}$. Dessa forma, temos a ideia de vetor livre, no sentido de que podemos tomar setas representantes de um vetor com origem em qualquer ponto do espaço.

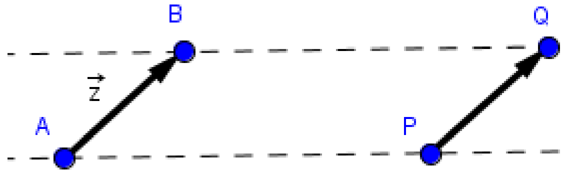


Figura 42 - Vetor livre: $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.

Fonte: A autora.

Operações com o vetor geométrico

Adição de vetores

Sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EF}$ dois segmentos orientados que representam, respectivamente, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ conforme a figura 43 abaixo.

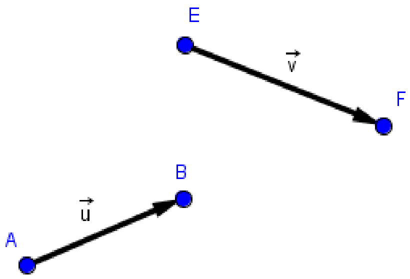


Figura 43 - Segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EF}$.

Fonte: A autora.

Consideremos, agora, o segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ com origem no ponto B e que também representa o vetor $\overrightarrow{v}$ (veja a figura 44). Temos que o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$ representa o vetor soma de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$. Esse vetor soma indica-se por $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Sendo assim, podemos escrever: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

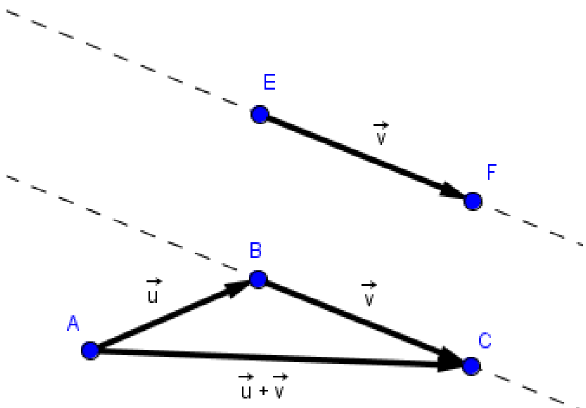


Figura 44 - Vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Fonte: A autora.

Observe a figura 45 abaixo. No caso ilustrado em (a), temos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ representados, respectivamente, pelas flechas $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{AB}$ que possuem em comum a direção (se encontram apoiadas em retas paralelas) e o sentido. No caso ilustrado em (b), temos os vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ representados, respectivamente, pelas flechas $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{JI}$ que possuem em comum apenas a direção (se encontram apoiadas sobre uma mesma reta). Nesses casos como podemos obter os vetores soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$?

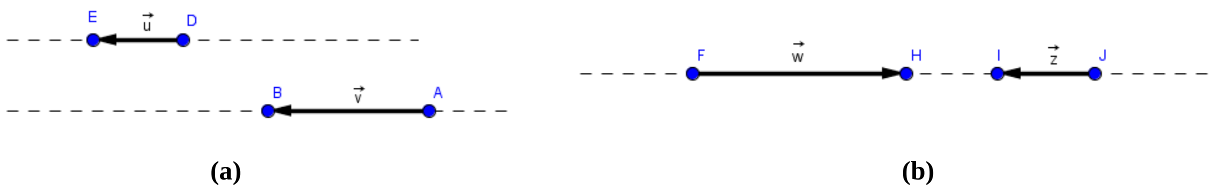
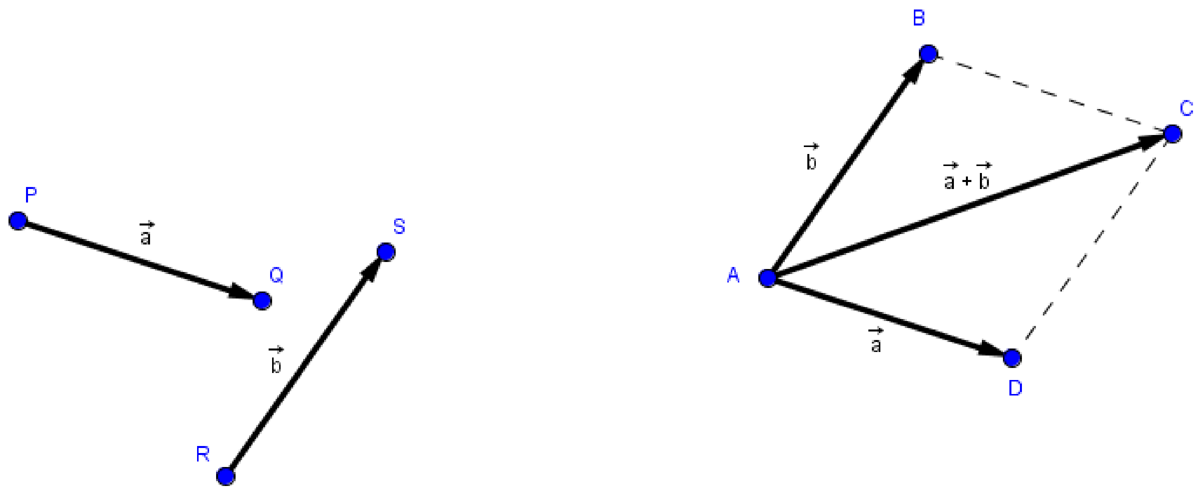


Figura 45 – Vetores paralelos.

Fonte: A autora.

Outra maneira de encontrarmos um representante para o vetor soma de dois vetores é aplicar a regra do paralelogramo que será apresentada a seguir. Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ dois vetores cujos representantes são os respectivos segmentos orientados $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ como mostra a figura 46 (a) a seguir. Vamos tomar flechas representantes para os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ que tenham origem em um mesmo ponto. Sendo assim, sejam $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ representantes dos vetores $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{a}$, respectivamente (veja a figura 46 (b) a seguir). Se "fecharmos" o paralelogramo ABCD, temos que o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$ (desenhado sobre uma das diagonais do paralelogramo) representa o vetor soma de $\overrightarrow{a}$ com $\overrightarrow{b}$. Repare que poderíamos ter desenhado o segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ (que também representa o vetor $\overrightarrow{a}$) com origem na extremidade do representante do vetor $\overrightarrow{b}$ e também encontraríamos a flecha $\overrightarrow{AC}$ como representante do vetor soma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (reveja na página anterior o caso apresentado na figura 44). Sendo assim, podemos escrever: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



(a) **(b)**

Figura 46 - Regra do paralelogramo.

Fonte: A autora.

Vetor nulo

O vetor nulo possui como representante qualquer "segmento orientado" cuja origem coincide com a extremidade, ou seja, os representantes do vetor nulo nada mais são do que pontos do espaço (figura 47). Indicamos o vetor nulo da seguinte maneira: $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \ldots$ O vetor nulo não possui direção e sentido definidos e seu comprimento é igual à zero.

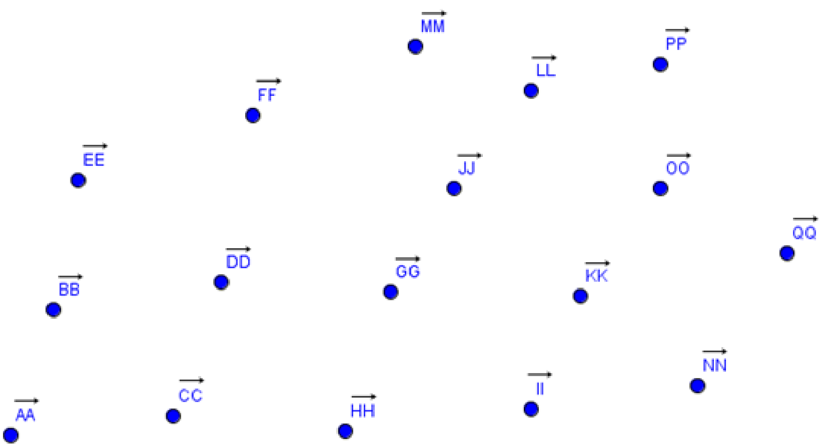


Figura 47 - Representantes do vetor nulo.

Fonte: A autora.

Vetor oposto

Observe a figura 48 abaixo em que temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Dizemos que $-\overrightarrow{v}$ é o vetor oposto de $\overrightarrow{v}$ e escrevemos $-\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. O vetor $-\overrightarrow{v}$ possui mesmo comprimento e mesma direção de $\overrightarrow{v}$, mas sentido contrário. Sendo assim, neste caso, o vetor $-\overrightarrow{v}$ pode ter como seu representante qualquer segmento orientado que possua comprimento, direção e sentido iguais à flecha $\overrightarrow{BA}$.

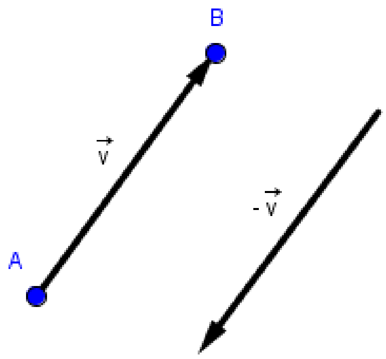


Figura 48 – Vetor $\overrightarrow{v}$ e o seu vetor oposto $-\overrightarrow{v}$.

Fonte: A autora.

Diferença entre vetores

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$ de acordo com a figura 49 a seguir. Conforme vimos anteriormente, temos que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$ que corresponde a uma das diagonais do paralelogramo ABCD. Porém, agora, queremos encontrar a diferença entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$, isto é, queremos obter $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$. Fazer a diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ nada mais é do que somar o vetor $\overrightarrow{u}$ com o oposto do vetor $\overrightarrow{w}$, isto é, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ sendo que $\overrightarrow{DB}$ corresponde a outra diagonal do paralelogramo. Portanto, $\overrightarrow{DB}$ é um representante para o vetor diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$, porém, qualquer outro segmento orientado com direção, sentido e comprimento comuns a $\overrightarrow{DB}$ também poderá representar $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$.

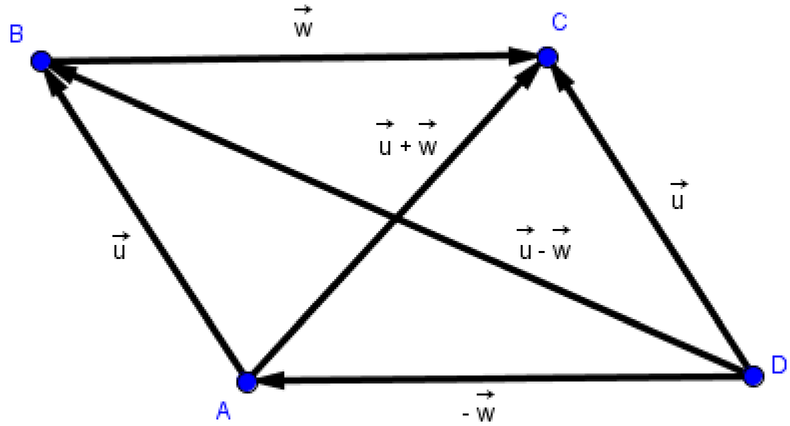


Figura 49 - Diferença entre vetores.

Fonte: A autora.

Multiplicação de um número real por um vetor

Observe a figura 50 a seguir em que temos os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{GH}$ (o ponto H se encontra no centro do quadrado da malha). Repare que o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ possui comprimento igual ao triplo do comprimento de $\overrightarrow{AB}$, mesma direção de $\overrightarrow{AB}$ e mesmo sentido. Sendo assim, podemos escrever: $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$ o que leva a concluirmos que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$. Agora, observe o segmento orientado $\overrightarrow{EF}$ que possui comprimento igual ao dobro do comprimento de $\overrightarrow{AB}$, mesma direção de $\overrightarrow{AB}$, mas sentido contrário. Sendo assim, podemos escrever: $\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AB}$ o que leva a concluirmos que $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$. E se compararmos o segmento orientado $\overrightarrow{GH}$ com o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, que conclusões podemos obter?

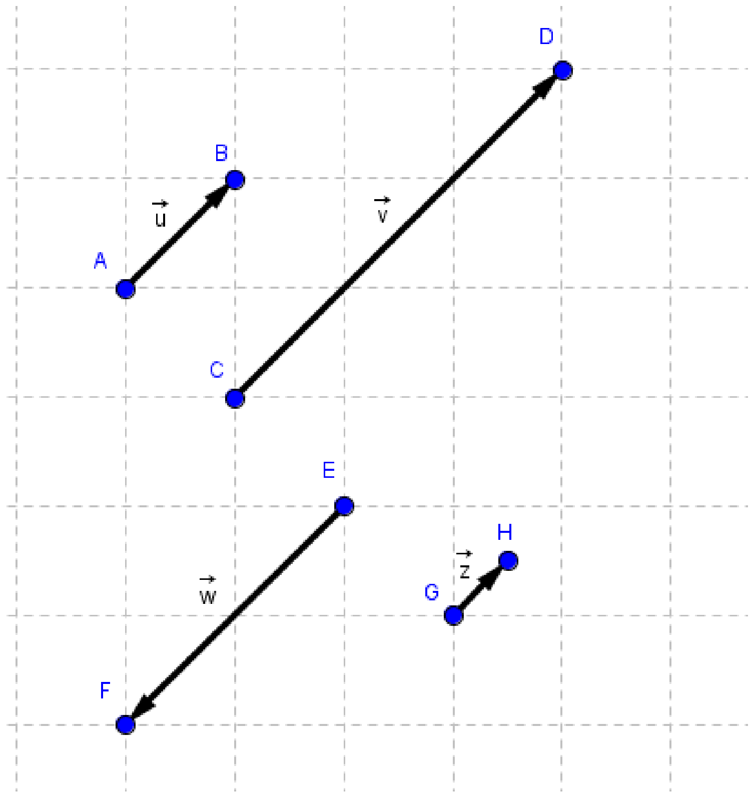


Figura 50 - Vetores múltiplos.

Fonte: A autora.

Podemos dizer que os vetores $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ representados na figura 50 acima são múltiplos de $\overrightarrow{u}$.

Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor qualquer e k um número real, temos que o vetor k $\overrightarrow{v}$ é o produto do número real k pelo vetor $\overrightarrow{v}$ e possui as seguintes características:

a) k $\overrightarrow{v}$ possui comprimento igual a $|k|$ vezes o comprimento do vetor $\overrightarrow{v}$;

b) k $\overrightarrow{v}$ possui a mesma direção que o vetor $\overrightarrow{v}$;

c) k $\overrightarrow{v}$ possui sentido igual ao do vetor $\overrightarrow{v}$ se k > 0 e sentido contrário se k < 0.

Observação: Se k = 0 ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (vetor nulo), então k $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

O vetor algébrico

Observe a figura 51 abaixo em que há seis segmentos orientados de mesma direção, sentido e comprimento. Essas flechas se encontram sobre um mesmo sistema de coordenadas cartesianas no plano. Esse conjunto de setas representa o mesmo vetor $\overrightarrow{v}$ e, portanto, podemos escrever: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OP}$.

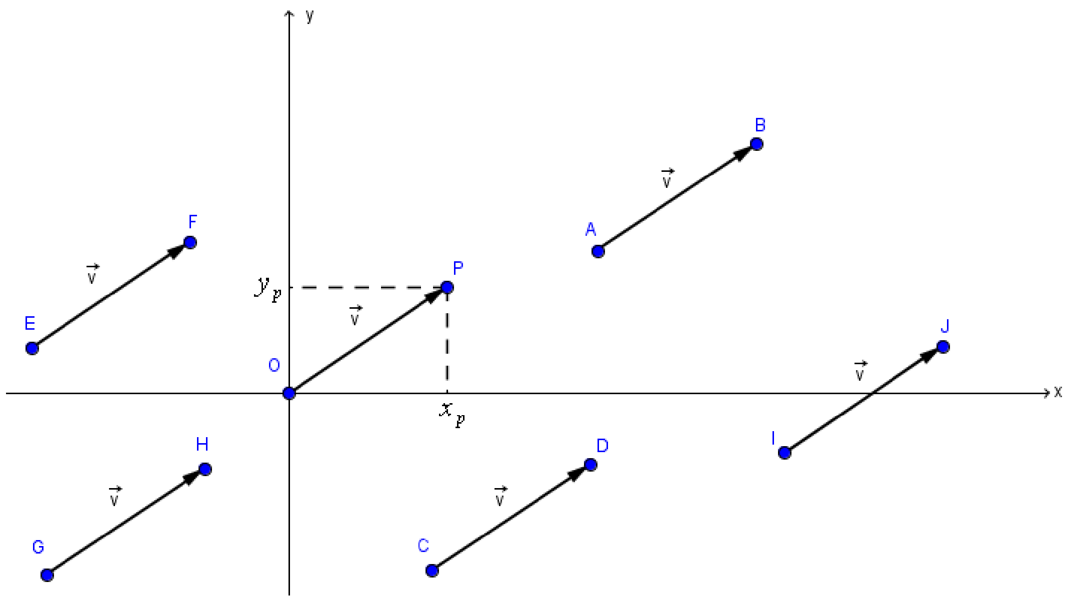


Figura 51 - Segmentos orientados sobre um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Fonte: A autora.

Repare no segmento orientado $\overrightarrow{OP}$. Perceba que a origem de $\overrightarrow{OP}$ coincide com a origem O = (0, 0) do sistema de coordenadas e a extremidade de $\overrightarrow{OP}$ é o ponto P = (x_p, y_p). Sendo assim, podemos representar a flecha $\overrightarrow{OP}$ da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{OP} = (x_p, y_p)$$

Ou seja, o vetor dado por $\overrightarrow{OP}$ é representado (no sistema de coordenadas considerado) em função das coordenadas do ponto extremidade do representante $\overrightarrow{OP}$.

Como $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$, também podemos representar o vetor $\overrightarrow{v}$ da seguinte maneira: $\overrightarrow{v} = (x_p, y_p)$.

Agora observe a figura 52 abaixo. Temos que a origem A e a extremidade B do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ possuem as seguintes coordenadas no sistema considerado: A = (x_a, y_a) e B = (x_b, y_b). Como o ponto O não é origem do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, então não podemos representar a seta $\overrightarrow{AB}$ por meio das coordenadas do seu ponto extremidade. Porém, como $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = (x_p, y_p)$, então, também podemos escrever: $\overrightarrow{AB} = (x_p, y_p)$. No entanto, será que é possível representar a flecha $\overrightarrow{AB}$ de maneira algébrica em função das coordenadas do seu ponto origem e do seu ponto extremidade?

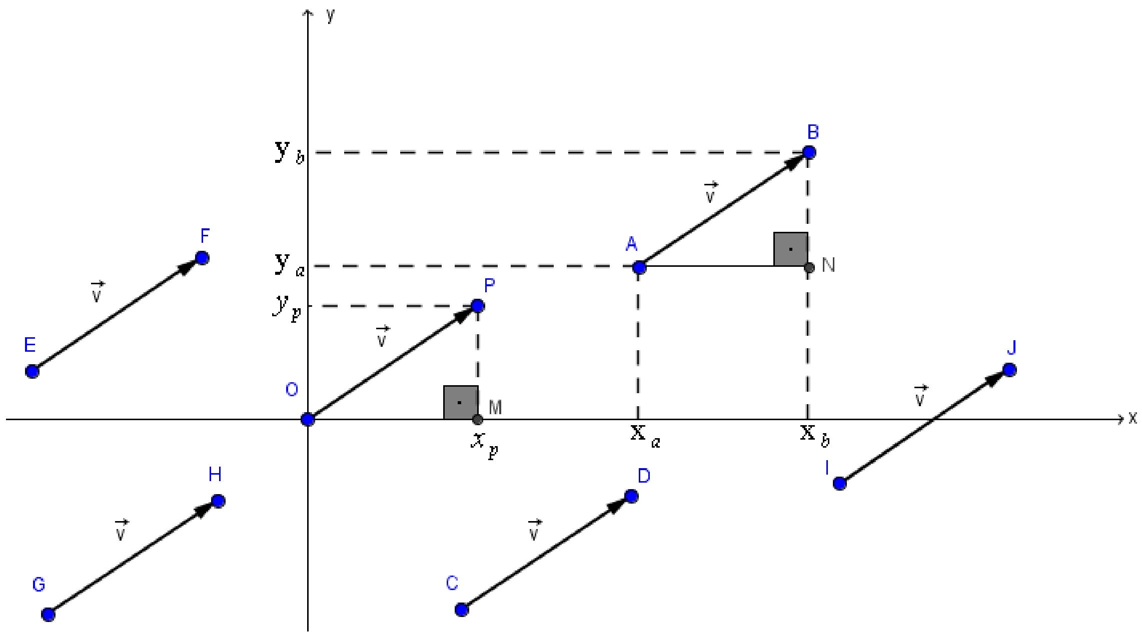


Figura 52 - Coordenadas da seta $\overrightarrow{AB}$.

Fonte: A autora.

Sejam ΔOMP e ΔANB dois triângulos retângulos. Estes triângulos são congruentes. De fato:

1º) As setas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{AB}$ possuem mesmo comprimento sendo que este nada mais é do que a medida dos segmentos de reta $\overline{OP}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Portanto, temos que m($\overline{OP}$) = m($\overline{AB}$) o que implica em $\overline{OP} \equiv \overline{AB}$;

2º) Os ângulos $O\hat{M}P$ e $A\hat{N}B$ são retos. De maneira que é possível escrever: m($O\hat{M}P$) = m($A\hat{N}B$) $\Leftrightarrow$ $O\hat{M}P \equiv A\hat{N}B$;

3º) As setas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{AB}$ possuem mesma direção, ou seja, os segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{AB}$ são paralelos. Os segmentos de reta $\overline{OM}$ e $\overline{AN}$ também são paralelos, pois $\overline{OM}$ está sobre o eixo x e $\overline{AN}$ é paralelo ao eixo x, sendo assim, por transitividade, $\overline{AN}$ é paralelo ao segmento $\overline{OM}$. Portanto, os ângulos PÔM e BÂN são congruentes (PÔM $\equiv$ BÂN).

Logo, os triângulos ΔOMP e ΔANB possuem um lado congruente, o ângulo oposto e um ângulo adjacente a este lado também congruentes, sendo que isto nos leva a afirmar que estes triângulos são congruentes.

A partir disto, concluímos que m($\overline{OM}$) = m($\overline{AN}$) e m($\overline{MP}$) = m($\overline{NB}$). Sendo assim, podemos escrever:

$$x_p = x_b - x_a \text{ e } y_p = y_b - y_a$$

Portanto, temos que:

$$\overrightarrow{AB} = (x_p, y_p)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

Repare que, ao escrevermos $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$, estamos subtraindo as coordenadas do ponto A das coordenadas do ponto B:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_b, y_b) - (x_a, y_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

Mas, atenção, pois esta operação não significa fazer a subtração entre dois pontos e sim efetuar a diferença entre as flechas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$[3], veja a figura 53 a seguir.

Sendo assim, temos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_b, y_b) - (x_a, y_a) = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

Como os vetores dados por $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$ são representados de maneira algébrica por meio das coordenadas do seu ponto extremidade, costumamos escrever $\overrightarrow{AB}$ = B – A ao invés de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ apenas para simplificar a linguagem[4].

---

[3] Explicação retirada do vídeo Geometria analítica plana, CÉZAR, Paulo, Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) oferecido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008.

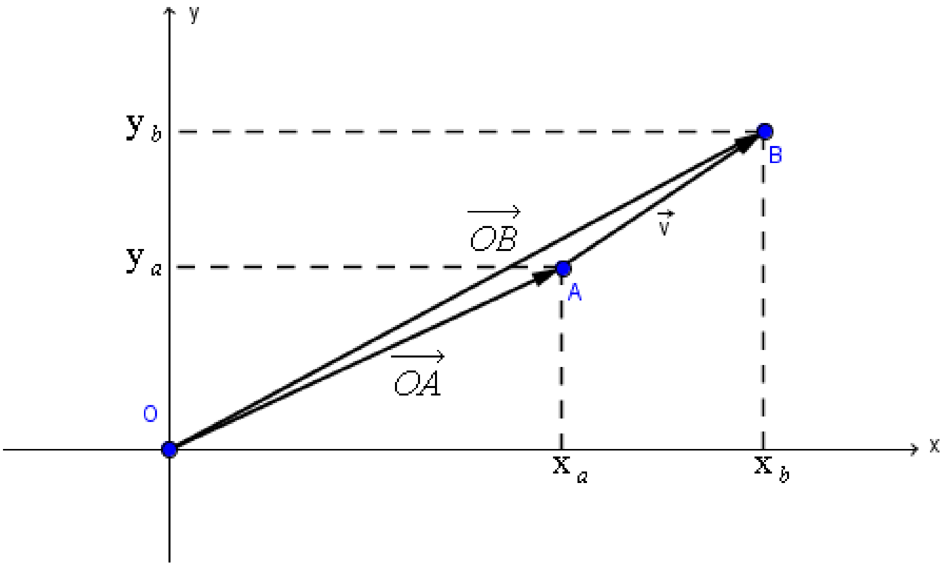


Figura 53 – Escrever $\overrightarrow{AB}$ = B – A significa efetuar a diferença $\overrightarrow{OB}$ - $\overrightarrow{OA}$.

Fonte: A autora.

Operações com o vetor algébrico

Adição de vetores

Sejam $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ dois segmentos orientados que representam, respectivamente, os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$. Estes segmentos orientados se encontram sobre um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, sendo que P = (x_p, y_p), Q = (x_q, y_q), R = (x_r, y_r) e S = (x_s, y_s). Vamos tomar, neste sistema de coordenadas, as flechas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$, com A = (x_a, y_a) e C = (x_c, y_c), como representantes dos vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, respectivamente. Repare que estas flechas possuem origem em um mesmo ponto e que este coincide com a origem O = (0, 0) do sistema de coordenadas cartesianas o que nos permite escrever: $\overrightarrow{OA}$ = (x_a, y_a) e $\overrightarrow{OC}$ = (x_c, y_c). Observe a figura 54 a seguir que ilustra o que foi descrito acima.

[4] Explicação retirada do vídeo Geometria analítica plana, CÉZAR, Paulo, Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) oferecido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2008.

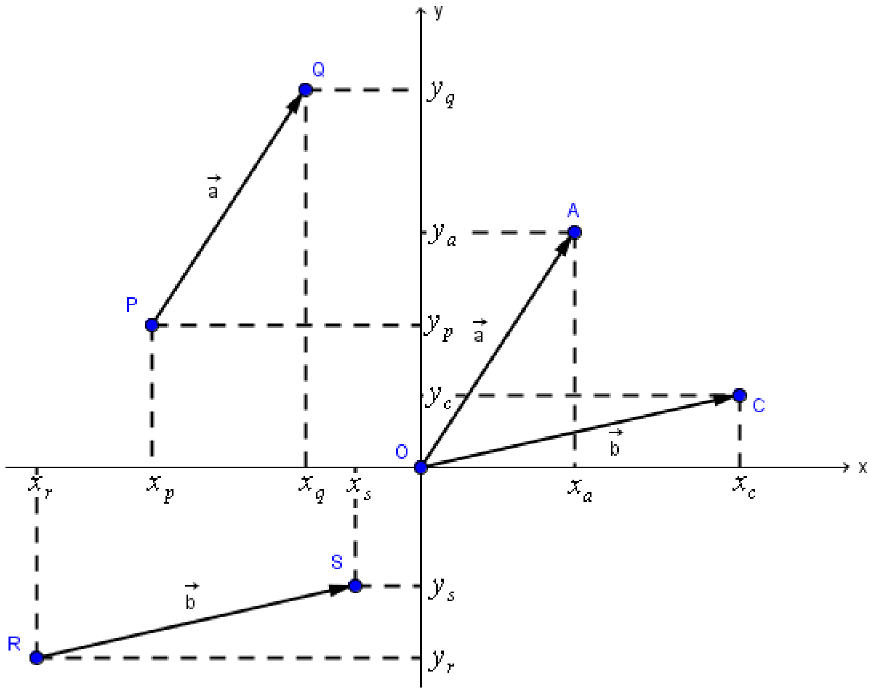


Figura 54 - Setas representantes dos vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$.

Fonte: A autora.

Para efetuarmos a adição $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, vamos aplicar a regra do paralelogramo, isto é, vamos "fechar" o paralelogramo OABC, conforme a figura 55 a seguir. O segmento orientado $\overrightarrow{OB}$, que se encontra sobre uma das diagonais do paralelogramo OABC, representa a soma de $\overrightarrow{a}$ com $\overrightarrow{b}$. Temos que B = $(x_b,\ y_b)$ e a seta $\overrightarrow{OB}$ é representada em função das coordenadas do seu ponto extremidade, isto é, $\overrightarrow{OB} = (x_b,\ y_b)$

Sendo assim, podemos escrever:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = (x_b,\ y_b)$$

No entanto, será que é possível representar a flecha $\overrightarrow{OB}$ de maneira algébrica em função das coordenadas das flechas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$?

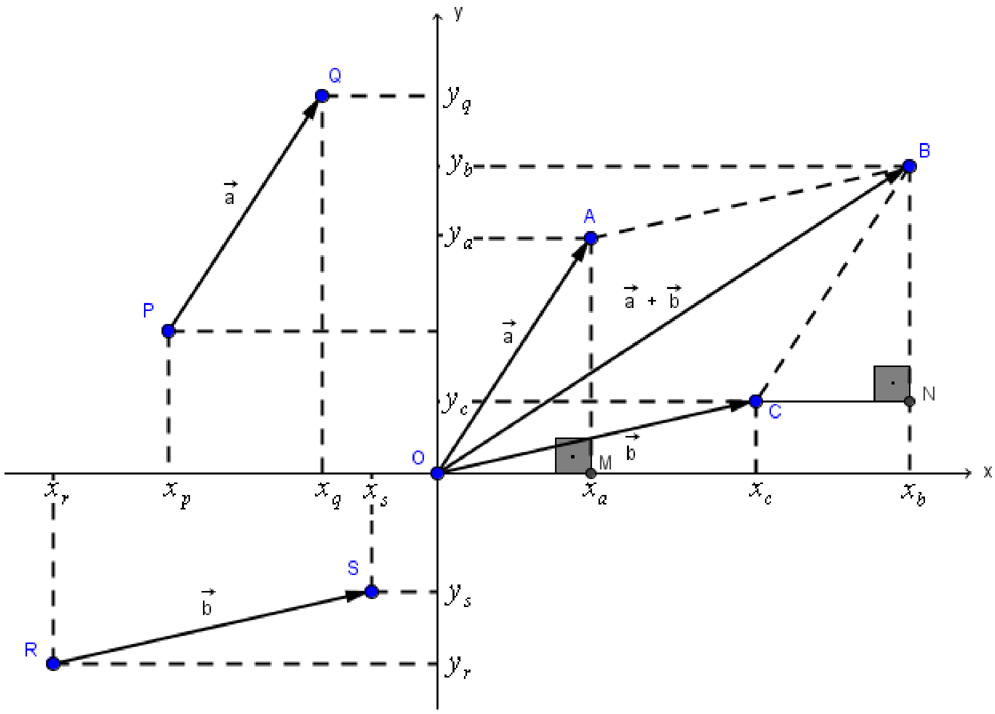


Figura 55 - Regra do paralelogramo.

Fonte: A autora.

Repare que os triângulos ΔOAM e ΔCBN são congruentes. De fato:

1º) As setas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{CB}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{a}$, pois estão sobre os lados opostos do paralelogramo OABC e, portanto, possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Temos que o comprimento das flechas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{CB}$ nada mais é do que a medida dos segmentos de reta $\overline{OA}$ e $\overline{CB}$, respectivamente. Sendo assim, podemos escrever m($\overline{OA}$) = m($\overline{CB}$) o que implica em $\overline{OA} \equiv \overline{CB}$;

2º) Os ângulos $O\hat{M}A$ e $C\hat{N}B$ são retos. De maneira que é possível escrever: m($O\hat{M}A$) = m($C\hat{N}B$) ⇔ $O\hat{M}P \equiv A\hat{N}B$;

3º) As setas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{CB}$ possuem mesma direção, ou seja, os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{CB}$ são paralelos. Os segmentos de reta $\overline{OM}$ e $\overline{CN}$ também são paralelos, pois $\overline{OM}$ está sobre o eixo x e $\overline{CN}$ é paralelo ao eixo x, sendo assim, por transitividade, $\overline{CN}$ é paralelo ao segmento $\overline{OM}$. Portanto, os ângulos AÔM e $B\hat{C}N$ são congruentes (AÔM $\equiv$ $B\hat{C}N$).

Logo, os triângulos ΔOAM e ΔCBN possuem um lado congruente, o ângulo oposto e um ângulo adjacente a este lado também congruentes, sendo que isto nos leva a afirmar que estes triângulos são congruentes.

Portanto, podemos concluir que m($\overline{OM}$) = m($\overline{CN}$) e m($\overline{MA}$) = m($\overline{NB}$) e assim, escrevemos:

$$x_b - x_c = x_a \Rightarrow x_b = x_a + x_c$$

e

$$y_b - y_c = y_a \Rightarrow y_b = y_a + y_c$$

Temos que a seta $\overrightarrow{OB}$ pode ser representada da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{OB} = (x_b, y_b) = (x_a + x_c, y_a + y_c)$$

Sendo assim, para efetuarmos a adição entre dois vetores no domínio algébrico, somam-se as coordenadas correspondentes dos segmentos orientados que representam estes vetores:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_a, y_a) + (x_c, y_c) = (x_a + x_c, y_a + y_c) = (x_b, y_b)$$

Vetor nulo

Sabemos que o vetor nulo é representado por qualquer "segmento orientado" que possua origem e extremidade coincidentes. Observe a figura 56 a seguir que ilustra representantes para o vetor nulo $\overrightarrow{0}$, sendo que estes se encontram sobre um mesmo sistema de coordenadas

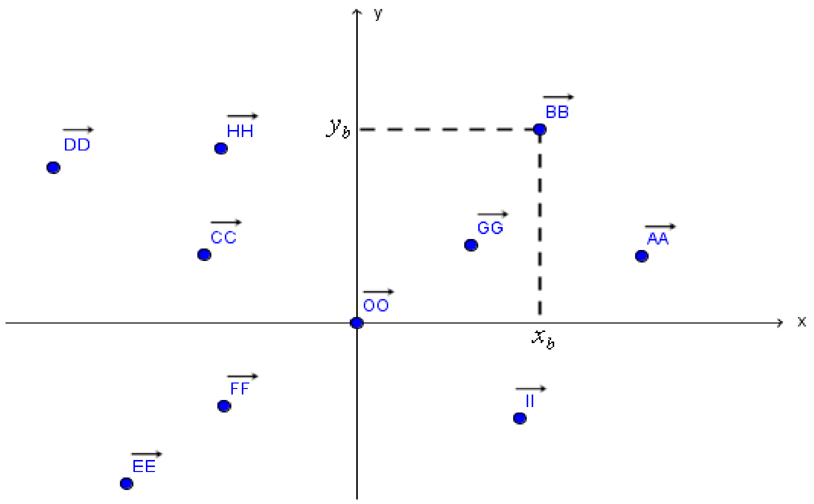


Figura 56 - Representantes do vetor nulo sobre um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Fonte: A autora.

O “segmento orientado” $\overrightarrow{OO}$ possui origem na origem O = (0, 0) do sistema de coordenadas considerado e seu ponto extremidade também é o ponto O. Portanto, podemos escrever: $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{OO} = (0, 0)$.

Observe também que: $\overrightarrow{BB} = B - B = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} = (x_b, y_b) - (x_b, y_b) = (x_b - x_b, y_b - y_b) = (0, 0) = \overrightarrow{0}$.

Vetor oposto

Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ (figura 57 a seguir). Sabemos que $-\overrightarrow{u}$ é o vetor oposto do vetor $\overrightarrow{u}$ e, portanto, podemos escrever: $-\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Sendo assim, temos que:

$$-\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{AB} = -(x_b - x_a, y_b - y_a) = (-x_b + x_a, -y_b + y_a) = (x_a - x_b, y_a - y_b)$$

Também é possível obter as coordenadas do vetor oposto $-\overrightarrow{u}$ da seguinte maneira:

$$-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (x_a, y_a) - (x_b, y_b) = (x_a - x_b, y_a - y_b)$$

Na figura 57 abaixo, temos o segmento orientado $\overrightarrow{OC}$ que representa o vetor $\overrightarrow{u}$ com origem na origem do sistema de coordenadas cartesianas considerado e o segmento orientado $\overrightarrow{OD}$ que representa o vetor $-\overrightarrow{u}$ e que também possui origem no ponto O.

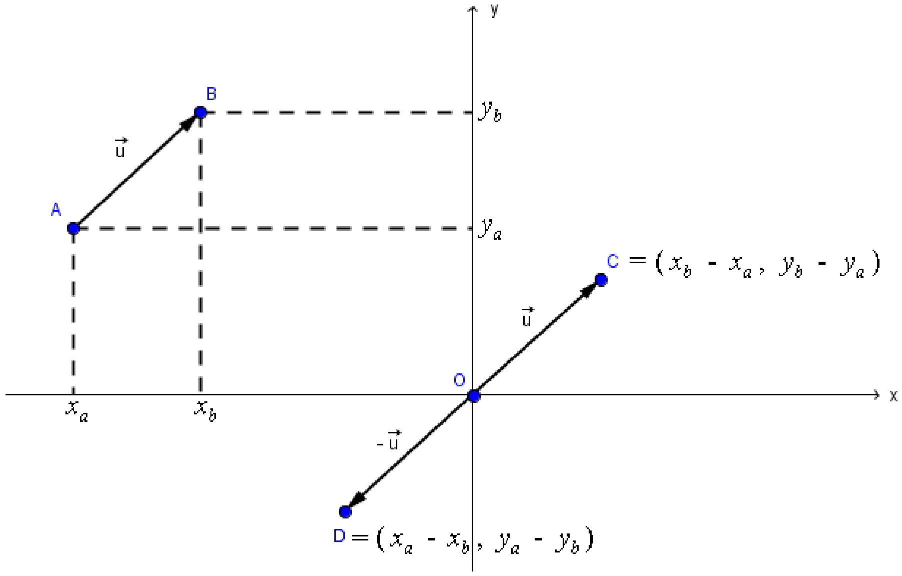


Figura 57 - Vetor $\overrightarrow{u}$ e o seu oposto $-\overrightarrow{u}$ em um mesmo sistema de coordenadas.

Fonte: A autora.

Diferença entre vetores

Seja $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{OA} = (x_a, y_a)$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = (x_c, y_c)$, de acordo com a figura 58 a seguir. Queremos efetuar a seguinte operação: $\overrightarrow{z} - \overrightarrow{w}$. Sabemos que, fazer a diferença entre $\overrightarrow{z}$ e $\overrightarrow{w}$ nada mais é do que somar o vetor $\overrightarrow{z}$ com o oposto do vetor $\overrightarrow{w}$. Temos que $-\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO} = (-x_c, -y_c)$.

De acordo com as afirmações feitas acima, podemos escrever as seguintes igualdades:

$\overrightarrow{z} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{z} + (-\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA}$.

Repare que podemos “fechar” o paralelogramo OABC para efetuar a operação $\overrightarrow{z} - \overrightarrow{w}$ sendo que o segmento orientado $\overrightarrow{CA}$ representa esta diferença e está sobre uma das diagonais do paralelogramo construído.

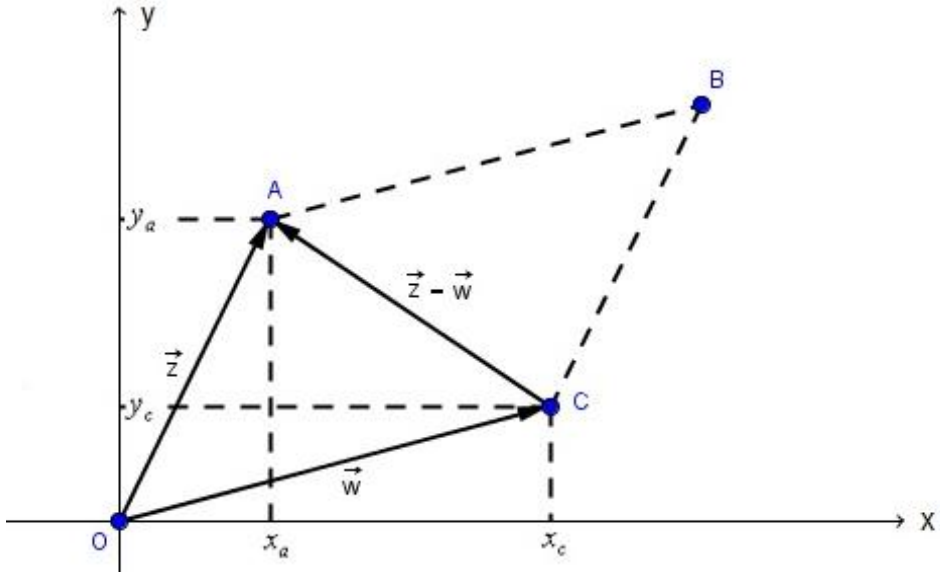


Figura 58 - Diferença entre vetores.

Fonte: A autora.

Temos que: $\overrightarrow{CA}$ = A – C = (x_a, y_a) - (x_c, y_c) = (x_a - x_c, y_a - y_c). Sendo que também obtemos as suas coordenadas da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{z} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{z} + (-\overrightarrow{w})$$

$$(x_a, y_a) - (x_c, y_c) = (x_a, y_a) + (-x_c, -y_c) = (x_a - x_c, y_a - y_c) = \overrightarrow{CA}$$

Sendo assim, para efetuarmos a diferença entre dois vetores no domínio algébrico, devemos subtrair as suas coordenadas correspondentes.

Multiplicação de um número real por um vetor

Observe a figura 59 a seguir. Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (x_a, y_a)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (x_b, y_b)$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = (x_c, y_c)$. Repare que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ possuem mesma direção (dada pela reta s) e, portanto, são paralelos, mesmo sentido e o comprimento do vetor $\overrightarrow{v}$ é igual ao triplo do comprimento do vetor $\overrightarrow{u}$. Podemos afirmar, então, que $\overrightarrow{v}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{u}$ de maneira que é possível escrever:

$$\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$$

$$(x_b, y_b) = 3(x_a, y_a)$$

$$(x_b,\ y_b) = (3x_a, 3y_a)$$

E quanto ao vetor $\overrightarrow{w}$, este também é múltiplo de $\overrightarrow{u}$? É possível escrever as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ em função das coordenadas de $\overrightarrow{u}$?

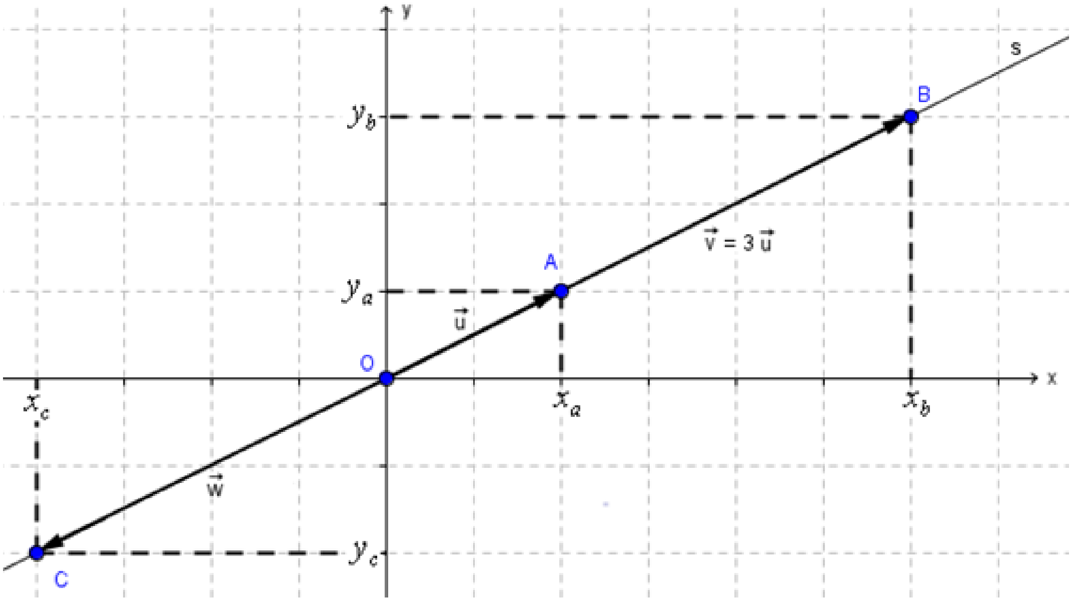


Figura 59 - Vetores múltiplos em mesmo sistema de coordenadas.

Fonte: A autora.

Vamos agora generalizar a situação apresentada acima. Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ vetores de mesma direção (veja a figura 60 abaixo). Portanto, é possível escrever $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ com $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos que $k > 0$, pois os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ possuem mesmo sentido. Como expressar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em função das coordenadas de $\overrightarrow{u}$?

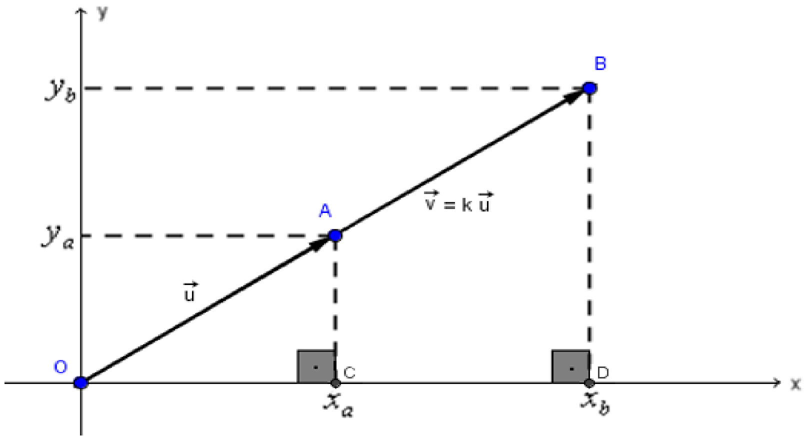


Figura 60 - Coordenadas de $\overrightarrow{v}$ em função das coordenas de $\overrightarrow{u}$.

Fonte: A autora.

Repare que os triângulos ΔOAC e ΔOBD são semelhantes. De fato:

1º) Os ângulos $O\hat{C}A$ e $O\hat{D}B$ são retos. De maneira que é possível escrever: m($O\hat{C}A$) = m($O\hat{D}B$) $\Leftrightarrow$ $O\hat{C}A \equiv O\hat{D}B$;

2º) O ângulo AÔC é comum aos triângulos ΔOAC e ΔOBD.

Portanto, quando temos dois triângulos que possuem dois ângulos congruentes, podemos afirmar que os mesmos são semelhantes. Sendo assim, ΔOAC ~ ΔOBD.

Escrevendo, então, as razões de semelhança, temos que:

$$\frac{m(\overline{OB})}{m(\overline{OA})} = \frac{m(\overline{DB})}{m(\overline{CA})} = \frac{m(\overline{OD})}{m(\overline{OC})}$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|} = \frac{y_b}{y_a} = \frac{x_b}{x_a}$$ [5]

$$\frac{\left|k\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|} = \frac{y_b}{y_a} = \frac{x_b}{x_a}$$

$$\frac{|k|\left|\overrightarrow{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|} = \frac{y_b}{y_a} = \frac{x_b}{x_a}$$

Como k > 0, temos que $|k|$ = k e, assim, podemos escrever:

$$k = \frac{y_b}{y_a} = \frac{x_b}{x_a}$$

[5] As notações $\left|\overrightarrow{v}\right|$ e $\left|\overrightarrow{u}\right|$ significam, respectivamente, módulo (comprimento) do vetor $\overrightarrow{v}$ e do vetor $\overrightarrow{u}$. Módulo de um vetor será abordado em detalhes no próximo tópico referente ao 4º encontro da sequência didática.

$\Rightarrow$ k = $\dfrac{x_b}{x_a}$ $\Rightarrow$ x_b = k x_a ;

$\Rightarrow$ k = $\dfrac{y_b}{y_a}$ $\Rightarrow$ y_b = k y_a .

Portanto, se $\overrightarrow{u}$ = (x_a , y_a) e $\overrightarrow{v}$ = (x_b , y_b) sendo que $\overrightarrow{v}$ = k $\overrightarrow{u}$, então, é possível escrever o vetor $\overrightarrow{v}$ em função das coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ da seguinte maneira: $\overrightarrow{v}$ = (x_b , y_b) = k (x_a , y_a) = (k x_a , k y_a).

Para o caso em que k < 0, obtemos o mesmo resultado de maneira análoga.

Observação: Se k = 0 ou $\overrightarrow{v}$ = $\overrightarrow{0}$ = (0, 0), então k $\overrightarrow{v}$ = $\overrightarrow{0}$.

Módulo de um vetor

Módulo de um vetor nada mais é do que o seu comprimento. Seja $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ conforme a figura 61 abaixo. O módulo do vetor $\overrightarrow{u}$, indicado por $\left|\overrightarrow{u}\right|$, é o comprimento dos segmentos orientados que o representam. Sendo assim, como podemos obter o módulo de $\overrightarrow{u}$?

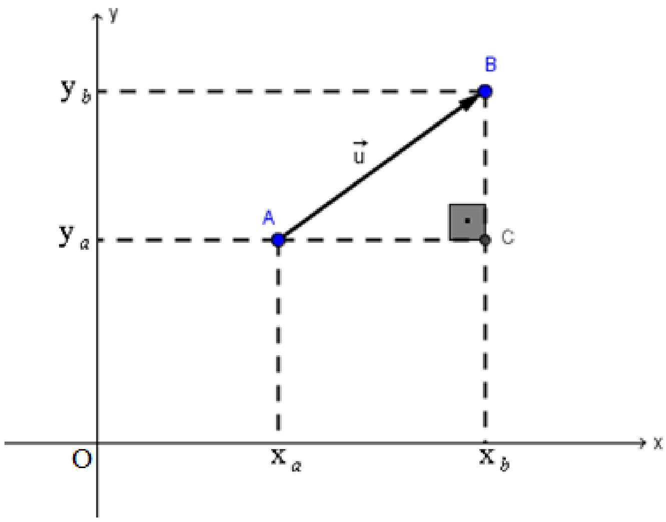


Figura 61 - Vetor $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ **.**

Fonte: A autora.

Primeiramente, vamos encontrar o comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ que nada mais é do que a medida do segmento de reta $\overline{AB}$.

Repare, que o triângulo ΔABC é retângulo (figura 61). Temos que m($\overline{AC}$) = x_b - x_a e m($\overline{CB}$) = y_b - y_a. Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABC, encontraremos m($\overline{AB}$). Observe:

$$\left(m(\overline{AB})\right)^2 = \left(m(\overline{AC})\right)^2 + \left(m(\overline{CB})\right)^2$$

$$\left(m(\overline{AB})\right)^2 = \left(x_b - x_a\right)^2 + \left(y_b - y_a\right)^2$$

$$m(\overline{AB}) = \sqrt[2]{\left(x_b - x_a\right)^2 + \left(y_b - y_a\right)^2}$$

Portanto, dado um vetor $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ = (x_b - x_a , y_b - y_a), podemos concluir que:

$$\left|\overrightarrow{u}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt[2]{\left(x_b - x_a\right)^2 + \left(y_b - y_a\right)^2}$$

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos A = (x_a , y_a) e B = (x_b , y_b), denotamos a distância entre estes por d (A, B), sendo que para obter a distância entre A e B é necessário calcular o módulo do vetor que possui a flecha $\overrightarrow{AB}$ ou a flecha $\overrightarrow{BA}$ como um de seus representantes. Portanto, podemos escrever:

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt[2]{\left(x_b - x_a\right)^2 + \left(y_b - y_a\right)^2}$$

Translação segundo um vetor

Com o uso de vetores, podemos efetuar deslocamentos de pontos, de figuras, por exemplo, realizando o que chamamos de translação. Observe a figura 62 a seguir, podemos dizer que o ponto N nada mais é do que o deslocamento do ponto M por meio do vetor $\overrightarrow{u}$, ou seja, é como se o vetor $\overrightarrow{u}$ tivesse transportado o ponto M para a posição do ponto N.

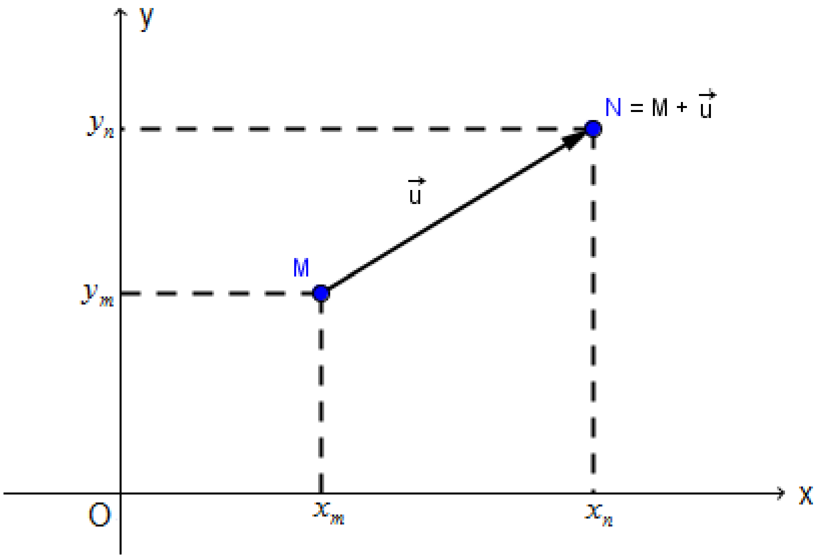


Figura 62 - Translação do ponto M por meio do vetor $\overrightarrow{u}$.

Fonte: A autora.

É possível representar este deslocamento da seguinte maneira:

$$M + \overrightarrow{u} = N$$

ou

$$M + \overrightarrow{MN} = N$$

De fato, como $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} = N - M = (x_n, y_n) - (x_m, y_m) = (x_n - x_m, y_n - y_m)$, temos que: $M + \overrightarrow{u} = (x_m, y_m) + (x_n - x_m, y_n - y_m) = (x_m + x_n - x_m, y_m + y_n - y_m) = (x_n, y_n) = N$.

Coordenadas de um ponto que divide um segmento em uma razão dada

Vamos considerar o segmento de reta $\overline{CD}$ com C = (x_c, y_c) e D = (x_d, y_d). Queremos obter as coordenadas do ponto P que divide o segmento $\overline{CD}$ em uma razão k, isto é, $\frac{CP}{CD} = k$, com k $\in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq 1$ (veja a figura 63 (a) a seguir).

Sejam $\overrightarrow{CD}$ = (x_d - x_c, y_d - y_c) e $\overrightarrow{CP}$ segmentos orientados que representam, respectivamente, os vetores $\overrightarrow{w}$ e k $\overrightarrow{w}$ que sabemos ter mesma direção e sentido (para k $\neq$ 0) (veja a figura 63 (b) abaixo).

Repare que se transladarmos o ponto C segundo o vetor k $\overrightarrow{w}$ = $\overrightarrow{CP}$ = k$\overrightarrow{CD}$, obteremos o ponto P com coordenadas (reveja o tópico anterior "Translação segundo um vetor"). Observe:

$$\frac{CP}{CD} = k \Rightarrow CP = k\,CD \Rightarrow \overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow P - C = k\overrightarrow{CD} \Rightarrow P = C + k\overrightarrow{CD}$$

Sendo assim, vamos obter as coordenadas do vetor k $\overrightarrow{w}$:

$$k\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{CD} = k\,(x_d - x_c, y_d - y_c) = (k\,(x_d - x_c), k\,(y_d - y_c)).$$

Portanto, as coordenadas do ponto P são:

$$P = C + k\overrightarrow{w} = C + k\overrightarrow{CD} = (x_c, y_c) + (k\,(x_d - x_c), k\,(y_d - y_c)) =$$

$$= (kx_d - kx_c + x_c, ky_d - k\,y_c + y_c) = (kx_d + (1 - k)x_c, ky_d + (1 - k)y_c)$$

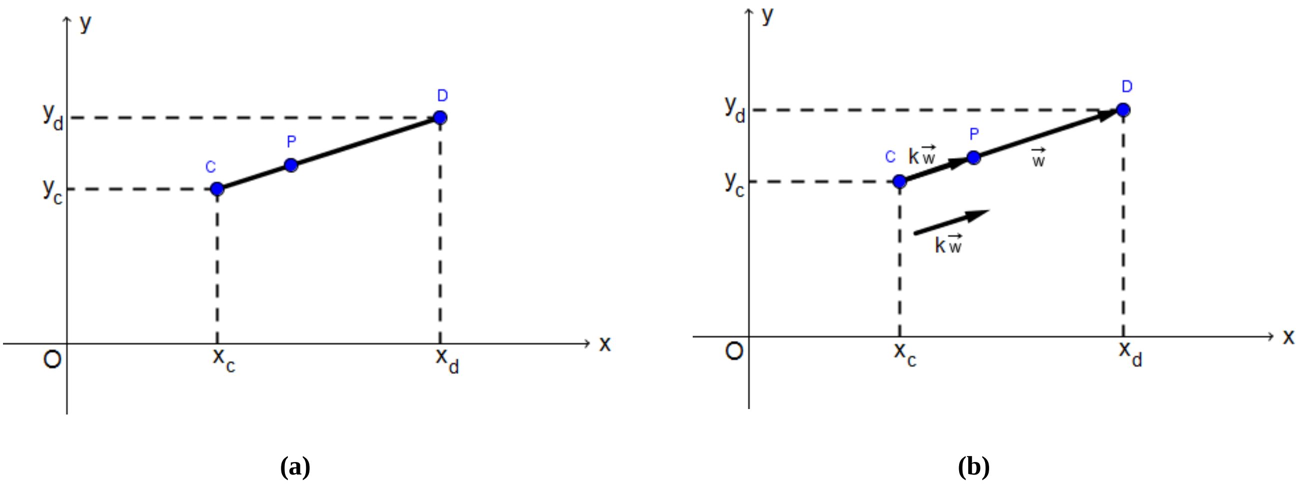


Figura 63 - Ponto P que divide o segmento $\overline{CD}$ na razão k.

Fonte: A autora.

Vejamos agora, como um exemplo clássico deste tópico, o problema de calcular as coordenadas do ponto médio M de um determinado segmento $\overline{AB}$ sendo A = (x_a, y_a) e

B = (x_b , y_b) (veja a figura 64 (a) abaixo). Neste caso, temos que M divide $\overline{AB}$ na razão k = $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

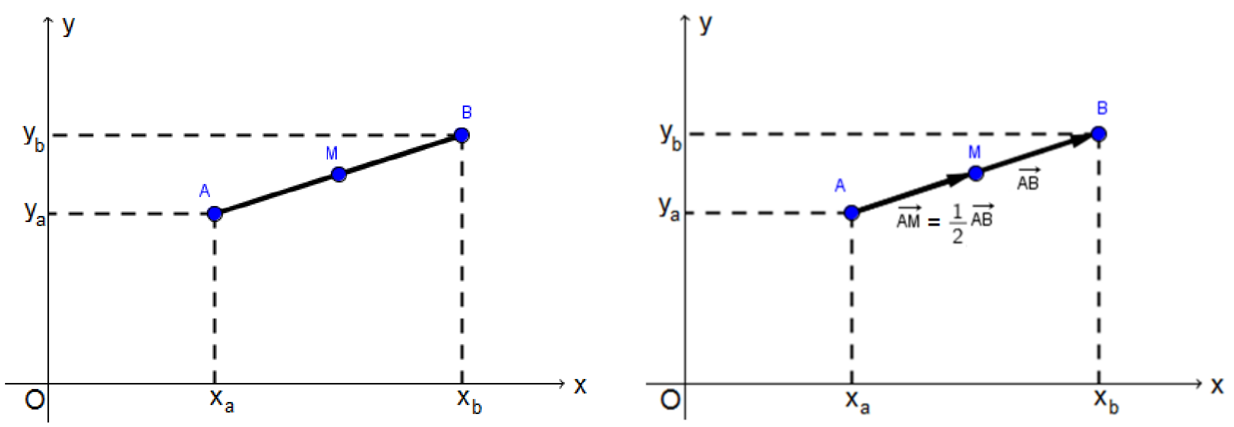
Sejam $\overrightarrow{AB}$ = (x_b - x_a, y_b - y_a) e $\overrightarrow{AM}$ segmentos orientados de mesma direção, sentido e comprimento de $\overrightarrow{AM}$ igual a metade do comprimento de $\overrightarrow{AB}$, isto é, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (veja a figura 64 (b) abaixo). Dessa forma, podemos escrever: $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{x_b - x_a}{2}, \frac{y_b - y_a}{2}\right)$.

Repare que se efetuarmos a soma das coordenadas do ponto A com as coordenadas do segmento orientado $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, obteremos as coordenadas do ponto M. Observe:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M - A = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Portanto, as coordenadas do ponto M são:

$$M = A + \overrightarrow{AM} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (x_a, y_a) + \left(\frac{x_b - x_a}{2}, \frac{y_b - y_a}{2}\right) = \left(\frac{2x_a + x_b - x_a}{2}, \frac{2y_a + y_b - y_a}{2}\right) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$



(a) **(b)**

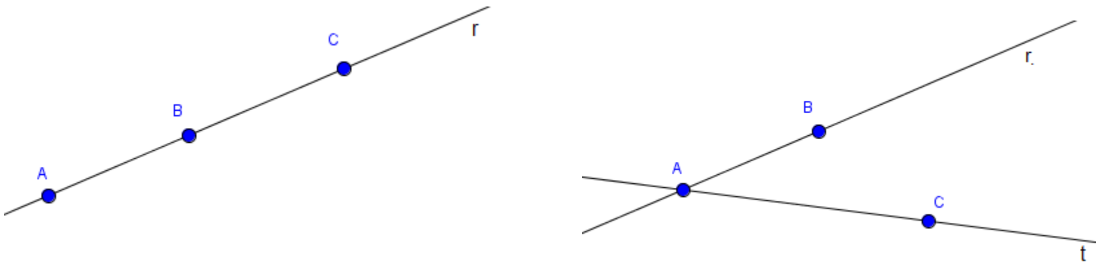
Figura 64 - Ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.

Fonte: A autora.

Sendo assim, temos que dadas as coordenadas dos pontos extremidades de um determinado segmento de reta e sabendo a razão k em que um ponto P qualquer divide este segmento, é possível obter as coordenadas do ponto P de maneira fácil fazendo-se uma leitura vetorial desta situação.

Colinearidade de três pontos

Observe as figuras 65 (a) e 65 (b) abaixo. A figura 65 (a) ilustra três pontos distintos A, B e C que são colineares, pois encontram-se alinhados, sendo que é possível traçar por estes três pontos uma única reta r. Já a figura 65 (b) mostra três pontos distintos A, B e C que não são colineares, isto é, não estão alinhados, pois não é possível "passar" por estes três pontos uma única reta que os contenha.



(a) **(b)**

Figura 65 - Pontos colineares e não colineares.
Fonte: A autora.

Sendo assim, dados três pontos distintos A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) e C = (x_c, y_c) como podemos saber se os mesmos são ou não colineares?

Repare que uma vez informadas as coordenadas destes três pontos, é possível obter as coordenadas das setas $\overrightarrow{AB}$ = (x_b - x_a, y_b - y_a), $\overrightarrow{BC}$ = (x_c - x_b, y_c - y_b) e $\overrightarrow{AC}$ = (x_c - x_a, y_c - y_a).

A partir disto, podemos verificar se estes segmentos orientados são ou não múltiplos um do outro, isto é, podemos verificar se é possível ou não escrevê-los da seguinte maneira: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB} = s\overrightarrow{BC}$ com k, t e s $\in \mathbb{R}$.

Caso seja possível, temos que estes segmentos orientados possuem mesma direção, ou seja, são paralelos o que nos leva a concluir que os pontos A, B e C são colineares. Veja a figura 66 abaixo.

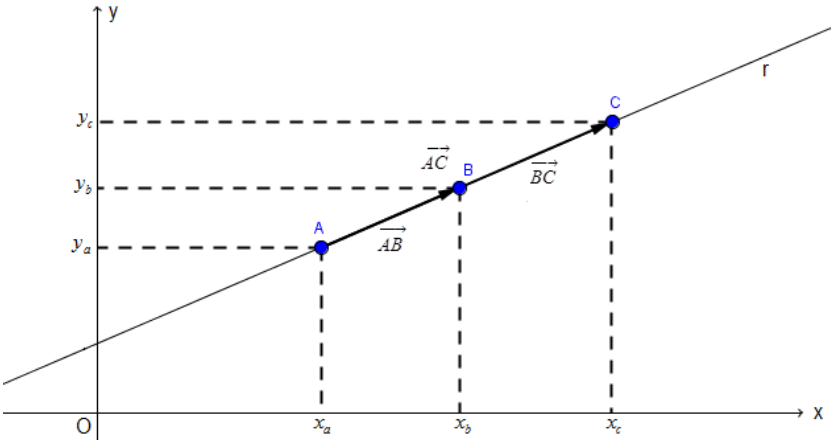


Figura 66 - Pontos A, B e C colineares.

Fonte: A autora.

Agora, caso não seja possível, os segmentos orientados não são paralelos e, portanto, os pontos A, B e C não são colineares. A figura 67 abaixo ilustra esta situação.

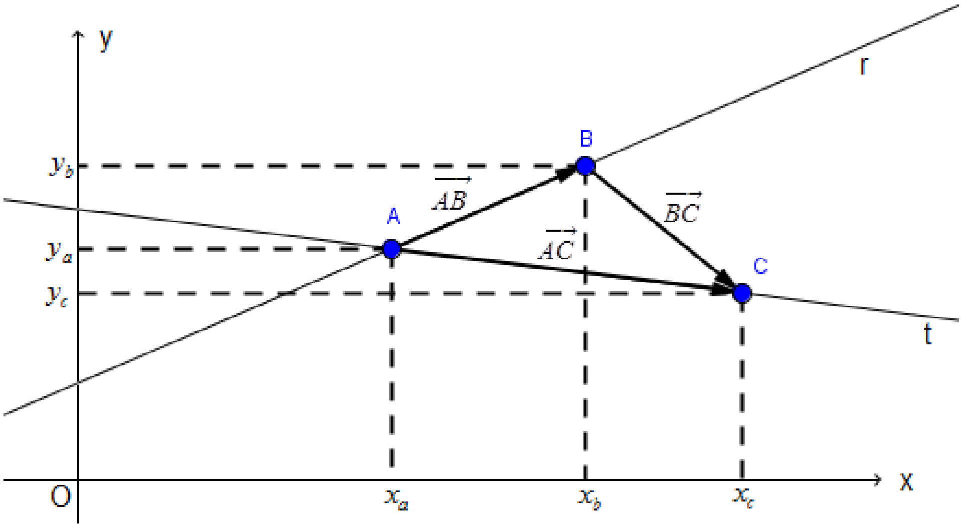


Figura 67 - Pontos A, B e C não colineares.

Fonte: A autora.

Condição de ortogonalidade entre dois vetores

Dois vetores são ditos ortogonais se ao tomarmos representantes dos mesmos estes formarem um ângulo reto entre si. Sendo assim, sejam $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OV}$ setas representantes dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, respectivamente, de acordo com a figura 68 a seguir. Temos que estas setas formam um ângulo reto entre si o que nos leva a concluir que $\overrightarrow{u} = (x_u , y_u)$ e $\overrightarrow{v} = (x_v , y_v)$ são vetores ortogonais.

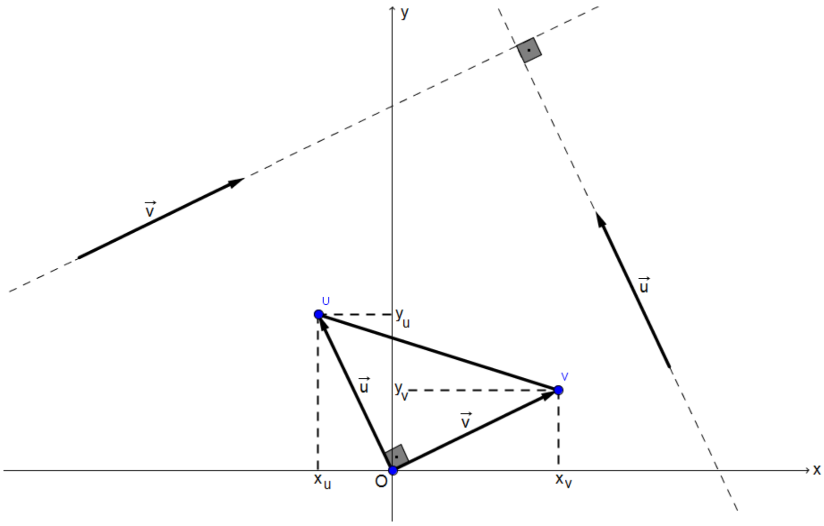


Figura 68 - Vetores ortogonais.

Fonte: A autora.

Façamos, então, a dedução algébrica para a condição de ortogonalidade entre dois vetores:

Observe que podemos construir o triângulo retângulo ΔOUV, no qual é possível aplicar o Teorema de Pitágoras. Sabemos que d(O,U) = $\left|\overrightarrow{OU}\right| = \left|\overrightarrow{u}\right|$, d(O,V) = $\left|\overrightarrow{OV}\right| = \left|\overrightarrow{v}\right|$ e d(V, U) = $\left|\overrightarrow{VU}\right|$. Portanto, temos que:

$$(\mathrm{d(V, U)})^2 = (\mathrm{d(O, U)})^2 + (\mathrm{d(O, V)})^2$$

$$\left|\overrightarrow{VU}\right|^2 = \left|\overrightarrow{u}\right|^2 + \left|\overrightarrow{v}\right|^2$$

$$(x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (x_v)^2 + (y_v)^2$$

$$(x_v)^2 - 2.x_v.x_u + (x_u)^2 + (y_v)^2 - 2.y_v.y_u + (y_u)^2 = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (x_v)^2 + (y_v)^2$$

$$-2.x_v.x_u - 2.y_v.y_u = 0$$

$$-2.(x_v.x_u + y_v.y_u) = 0$$

$$x_v.x_u + y_v.y_u = 0$$

Sendo assim, dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ = (x_u, y_u) e $\overrightarrow{v}$ = (x_v, y_v) ortogonais, concluímos que $x_v.x_u + y_v.y_u$ = 0.

Na verdade, podemos afirmar que a igualdade $x_v.x_u + y_v.y_u$ = 0 expressa uma condição necessária e suficiente (LIMA et al., 2006) para que os vetores $\overrightarrow{u}$ = (x_u, y_u) e $\overrightarrow{v}$ = (x_v, y_v) sejam ortogonais.

Portanto, também podemos concluir que dados os vetores $\overrightarrow{u}$ = (x_u, y_u) e $\overrightarrow{v}$ = (x_v, y_v), se a igualdade $x_v.x_u + y_v.y_u$ = 0 se verificar, temos, então, que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais.

Equação Geral da Reta

Dados um ponto P_0 = (x_0, y_0) e um vetor $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{OA}$ = (a, b), existe uma única reta t que passa pelo ponto P_0 e possui direção ortogonal à direção do vetor $\overrightarrow{u}$ (figura 69 abaixo). Sendo assim, vamos deduzir, por meio de métodos vetoriais, a equação geral da reta t.

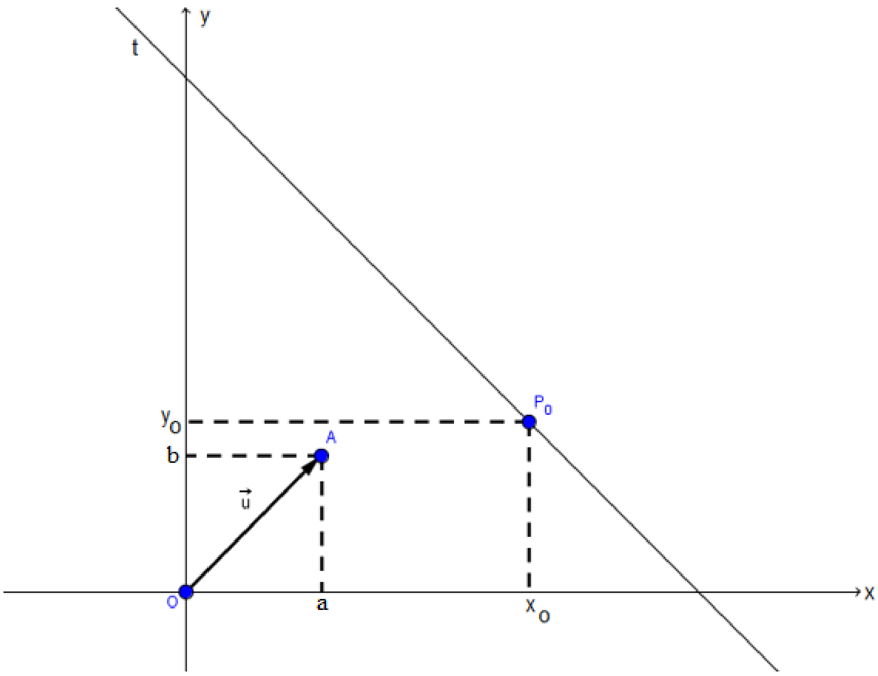


Figura 69 - Reta t por P_0 e ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Fonte: A autora.

Para que um ponto P = (x, y) pertença a reta t é necessário que o vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{P_0P}$ seja ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ (veja a figura 70 abaixo).

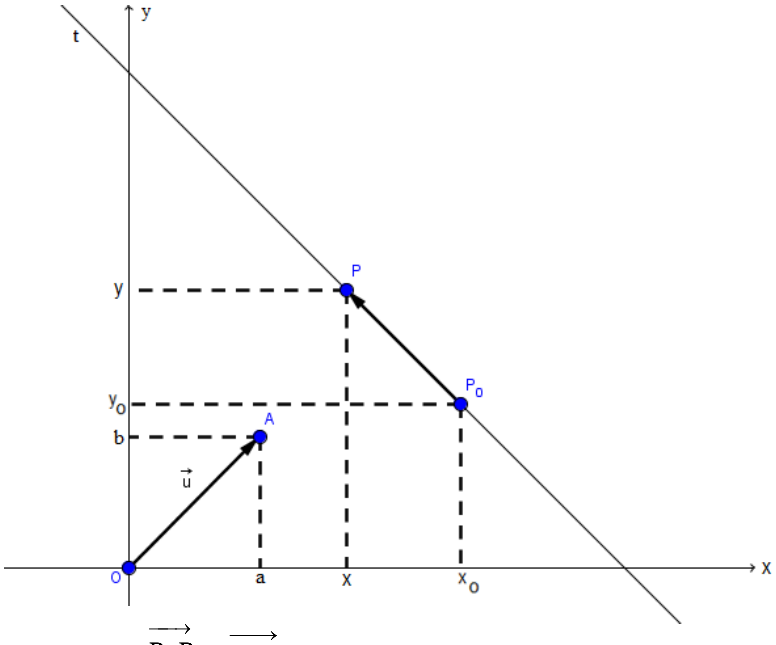


Figura 70 - $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{OA}$ ortogonais.

Fonte: A autora.

Sabemos que $\overrightarrow{P_0P}$ = P - P_0 = (x - x_0, y - y_0) e $\overrightarrow{OA}$ = (a, b). Portanto, para que $\overrightarrow{OA}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{P_0P}$ a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$a \,.\, (x - x_0) + b \,.\, (y - y_0) = 0$$

$$a \,.\, x - a \,.\, x_0 + b \,.\, y - b \,.\, y_0 = 0$$

$$ax + by - a\,x_0 - b\,y_0 = 0$$

$$ax + by = a\,x_0 + b\,y_0$$

Tomando c = a x_0 + b y_0, temos que:

$$ax + by = c$$

Esta última igualdade descreve a equação geral da reta t.

Posições relativas entre duas retas no plano

Sejam r_1 e r_2 duas retas do plano dadas, respectivamente, pelas seguintes equações: $a_1x + b_1y = c_1$ e $a_2x + b_2y = c_2$. Sendo assim, vamos analisar quatro possibilidades para as posições relativas entre as retas r_1 e r_2 no plano:

Paralelas distintas

Observe a figura 71 na página seguinte. Temos que a reta r_1 passa pelo ponto B = (x_b, y_b) e tem direção ortogonal à direção do vetor $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{OA}$ = $(a,\ b)$ e a reta r_2 passa pelo ponto C = (x_c, y_c) e também possui direção ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$. Sabemos que:

$$\begin{cases} r_1:\ a_1x + b_1y = c_1 \\ r_2:\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Temos que ambas as retas r_1 e r_2 são ortogonais a direção de $\overrightarrow{u}$ o que nos leva a concluir que se tratam de retas paralelas. Sendo assim, podemos escrever:

$$a_1 = a_2 = a$$

e

$$b_1 = b_2 = b$$

Temos que a reta r_1 passa pelo ponto B e a reta r_2 passa pelo ponto C, sendo que B $\neq$ C. Porém, a reta r_1 não contém o ponto C, assim como a reta r_2 não contém o ponto B. Podemos concluir, então, que estas retas não possuem pontos em comum o que nos leva a afirmar que $c_1 \neq c_2$.

Portanto, temos que r_1 e r_2 se tratam de retas paralelas e não coincidentes. Reescrevendo as equações de r_1 e r_2, obtemos:

$$\begin{cases} r_1: \mathrm{ax} + \mathrm{by} = c_1 \\ r_2:\ \mathrm{ax} + \mathrm{by} = c_2 \end{cases}$$

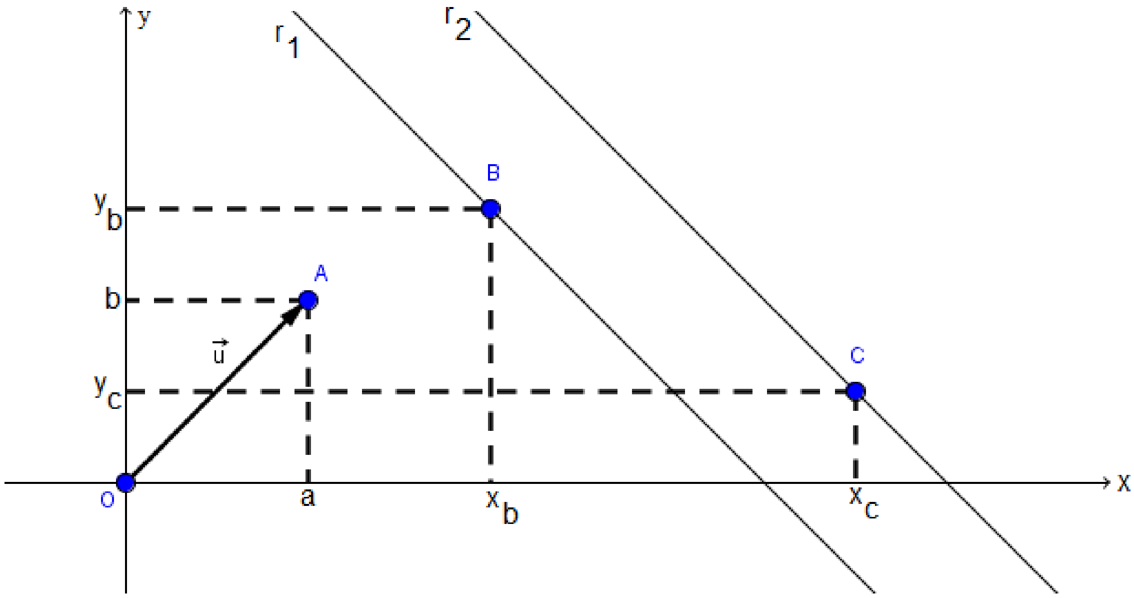


Figura 71 - Retas paralelas e distintas.

Fonte: A autora.

Paralelas coincidentes

Sejam as retas r_1 e r_2 ambas com direção ortogonal à direção do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a, b)$ (veja a figura 72 na próxima página). Sabemos que:

$$\begin{cases} r_1: \; a_1x + b_1y = c_1 \\ r_2: \; a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Podemos concluir que as retas r_1 e r_2 são paralelas o que nos permite escrever:

$$a_1 = a_2 = a$$

e

$$b_1 = b_2 = b$$

Neste caso temos que o ponto B = (x_b, y_b) pertence à reta r_1, mas também pertence à reta r_2, assim como o ponto C = (x_c, y_c) que também pertence a ambas as retas. Desse modo, temos que todos os pontos de r_1 e r_2 são comuns a ambas as retas, sendo que podemos escrever: $c_1 = c_2$.

Portanto, temos que r_1 e r_2 se tratam de retas paralelas e coincidentes. Reescrevendo as equações de r_1 e r_2, obtemos:

$$\begin{cases} r_1 : ax + by = c \\ r_2 : \ ax + by = c \end{cases}$$

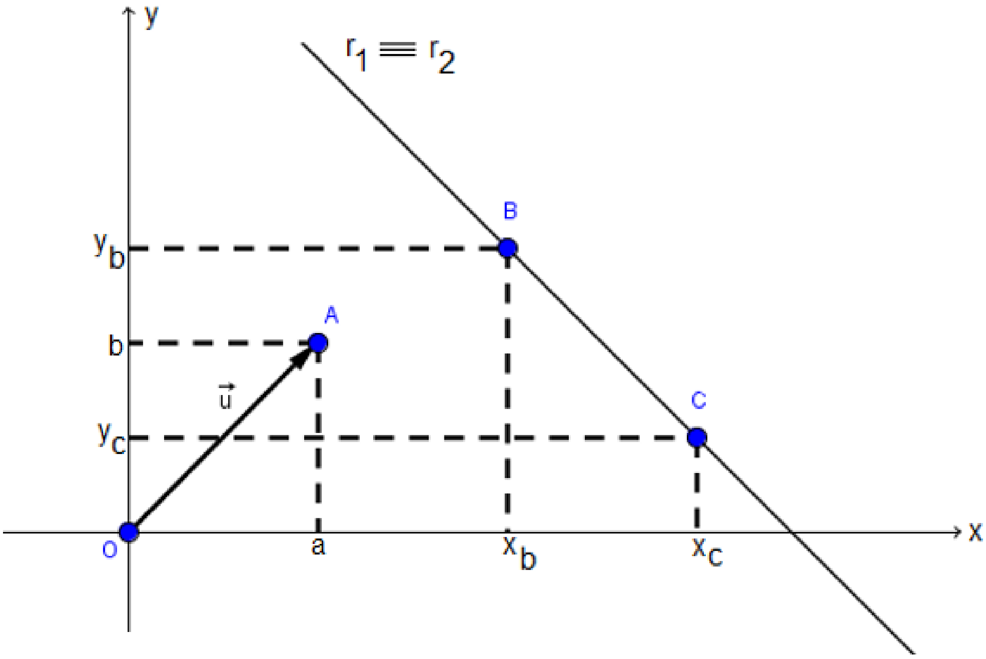


Figura 72 - Retas paralelas e coincidentes.

Fonte: A autora.

Concorrentes

Observe a figura 73 a seguir. Esta figura mostra as retas r_1 e r_2, sendo que r_1 passa pelo ponto C = (x_c, y_c) e é ortogonal a direção do vetor $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{OA}$ = (a_1, b_1) e a reta r_2 passa pelo ponto D = (x_d, y_d) e possui direção ortogonal a direção do vetor $\overrightarrow{v}$ = $\overrightarrow{OB}$ = (a_2, b_2).

Sendo assim, podemos concluir que as retas r_1 e r_2 não são paralelas, pois cada uma é ortogonal a direção de um determinado vetor (temos que $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{u}$). Isto nos leva a concluir que r_1 e r_2 são retas concorrentes e, portanto, possuem um único ponto de intersecção. Neste caso, como ilustra a figura 73, o ponto E = (x_e, y_e) é o ponto que as retas r_1 e r_2 possuem em comum. Podemos afirmar que o ponto E = (x_e, y_e) satisfaz as equações das retas r_1 e r_2.

Desse modo, temos que r_1 e r_2 se tratam de retas concorrentes, sendo que as equações que as descrevem são:

$$\begin{cases} r_1: \ a_1x + b_1y = c_1 \\ r_2: \ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

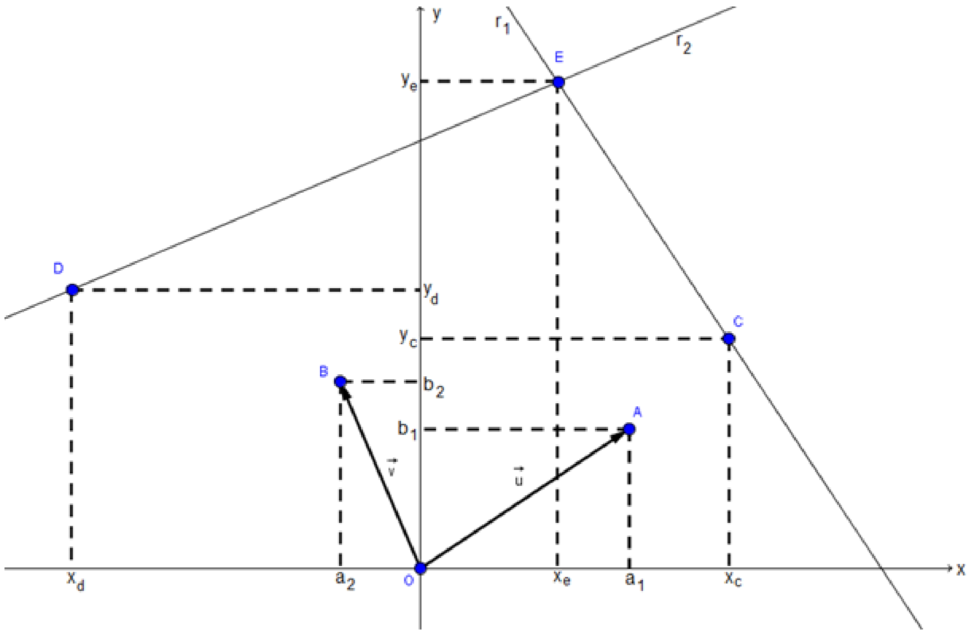


Figura 73 - Retas concorrentes.

Fonte: A autora.

Perpendiculares

As retas r_1 e r_2, ilustradas na figura 74 a seguir, se tratam de retas concorrentes. Repare que a reta r_1 passa pelo ponto C = (x_c, y_c) e tem direção ortogonal a direção do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a_1, b_1)$ e a reta r_2 passa pelo ponto D = (x_d, y_d) e é ortogonal a direção de $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (a_2, b_2)$. Temos que M = (x_m, y_m) é o ponto de intersecção das retas r_1 e r_2.

Porém, neste caso, temos que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais o que nos leva a concluir que as retas r_1 e r_2 são perpendiculares, isto é, além de concorrerem em um único ponto, elas formam um ângulo[6] reto.

Desse modo, as equações que descrevem as retas r_1 e r_2 são:

$$\begin{cases} r_1: \ a_1x + b_1y = c_1 \\ r_2: \ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

[6] Ângulo entre retas (tópico referente ao 7º encontro da sequência didática) será abordado em detalhes mais adiante.

Lembre-se que aqui temos uma relação importante, discutida anteriormente no tópico "Condição de ortogonalidade entre dois vetores":

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \text{ e } \overrightarrow{v} \text{ ortogonais} \Leftrightarrow r_1 \text{ e } r_2 \text{ perpendiculares}$$

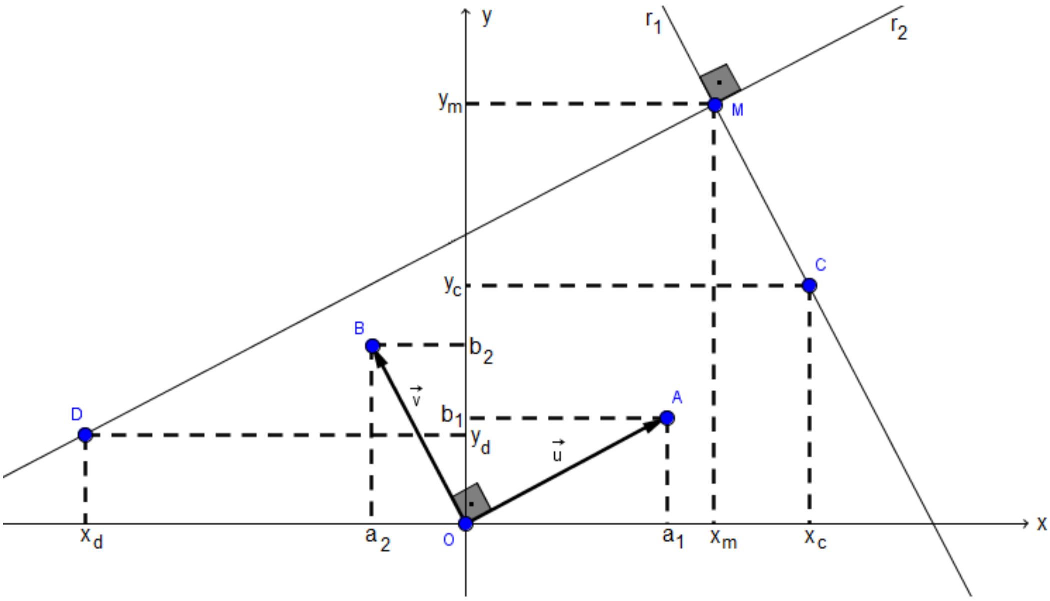


Figura 74 - Retas perpendiculares.

Fonte: A autora.

Ângulo entre dois vetores

Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos conforme a figura 75 a seguir. Seja θ a medida do ângulo PÔQ formado pelas semirretas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, sendo assim, temos que θ é a medida do ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$ (θ em radianos) ou $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

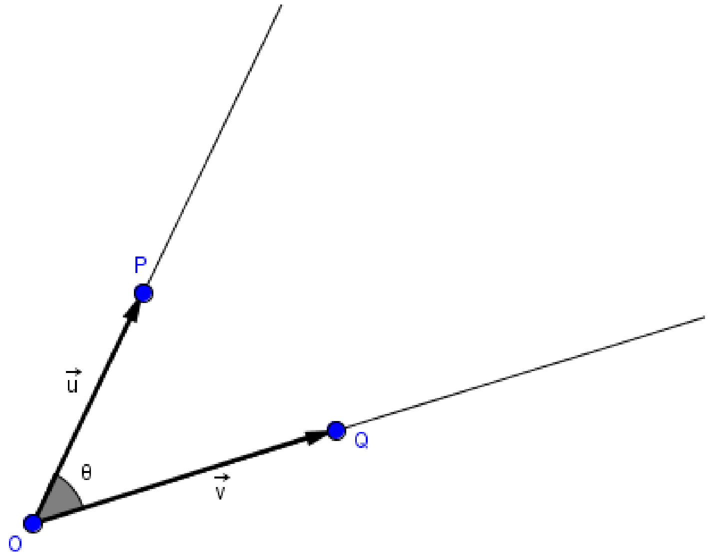


Figura 75 - Ângulo entre dois vetores.

Fonte: A autora.

Façamos, então, o seguinte questionamento: dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quaisquer, de que maneira podemos obter a medida do ângulo entre estes vetores?

Observe a figura 76 abaixo. Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (x_p, y_p)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ} = (x_q, y_q)$ e θ a medida do ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Vamos encontrar uma maneira de se obter o valor de θ. Primeiramente, vamos "fechar" o triângulo Δ OPQ. Temos, então, que $\overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p,\ y_q - y_p)$.

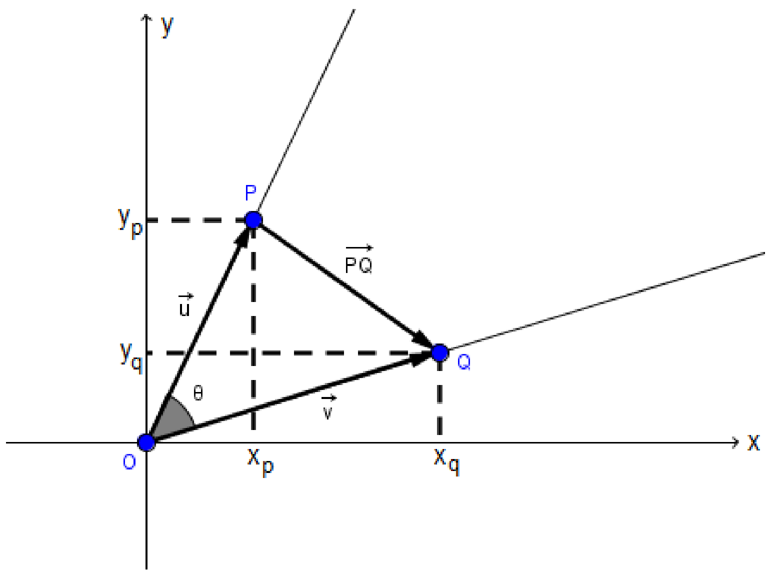


Figura 76 - Triângulo Δ OPQ.

Fonte: A autora.

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo Δ OPQ, temos que:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{u}\right|^2 + \left|\overrightarrow{v}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\theta$$

$$(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 = (x_p)^2 + (y_p)^2 + (x_q)^2 + (y_q)^2 - 2 \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\theta$$

$$(x_q)^2 - 2 \cdot x_q \cdot x_p + (x_p)^2 + (y_q)^2 - 2 \cdot y_q \cdot y_p + (y_p)^2 = (x_p)^2 + (y_p)^2 + (x_q)^2 + (y_q)^2 - 2 \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\theta$$

$$-2 \cdot x_q \cdot x_p - 2 \cdot y_q \cdot y_p = -2 \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\theta$$

$$-2 \cdot (x_q \cdot x_p + y_q \cdot y_p) = -2 \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\theta$$

$$x_q \cdot x_p + y_q \cdot y_p = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x_q \cdot x_p + y_q \cdot y_p}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}$$

Dessa forma, para encontrarmos o valor de θ é preciso obter o cálculo do cosseno de θ.

Ângulo entre duas retas

Seja r_1 a reta que passa pelos pontos C e D e r_2 a reta que passa pelos pontos E e F (veja a figura 77 na próxima página). Estas retas são concorrentes no ponto M e formam quatro ângulos, a saber: $C\hat{M}E$, $E\hat{M}D$, $D\hat{M}F$ e $F\hat{M}C$. Temos que os ângulos $C\hat{M}E$ e $D\hat{M}F$ são opostos pelo vértice, assim como, os ângulos $E\hat{M}D$ e $F\hat{M}C$. Portanto, podemos afirmar que $C\hat{M}E$ e $D\hat{M}F$ são ângulos congruentes, assim como, $E\hat{M}D$ e $F\hat{M}C$, de maneira que é possível escrever o que segue:

$$m(C\hat{M}E) = m(D\hat{M}F) = \theta$$

e

$$m(E\hat{M}D) = m(F\hat{M}C) = \alpha$$

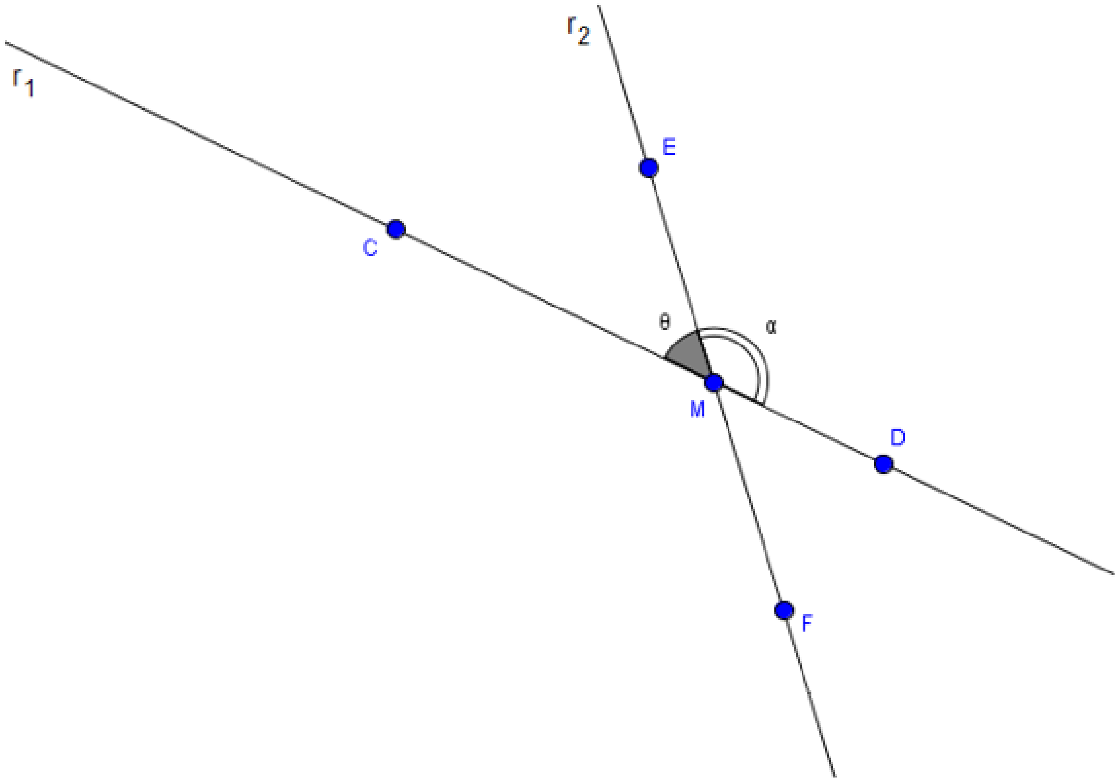


Figura 77 - Ângulo entre duas retas.

Fonte: A autora.

Repare que os ângulos $C\hat{M}E$ e $E\hat{M}D$ são suplementares, isto é, $m(C\hat{M}E) + m(E\hat{M}D) = \theta + \alpha = 180^\circ$ (ou $m(C\hat{M}E) + m(E\hat{M}D) = \theta + \alpha = \pi$ se θ e α forem dados em radianos), sendo que $C\hat{M}E$ é um ângulo agudo, pois θ possui medida menor que a de um ângulo reto e $E\hat{M}D$ é obtuso, pois α possui medida maior que a de um ângulo reto.

No entanto, temos que surge a seguinte pergunta: qual dos quatro ângulos formados pelas retas r_1 e r_2 devemos considerar como sendo o ângulo entre estas retas?

Definimos o ângulo entre duas retas como sendo o ângulo de menor medida (o ângulo agudo).

Portanto, no caso ilustrado pela figura 77, podemos tomar o ângulo $C\hat{M}E$ ou $D\hat{M}F$ como sendo o ângulo entre as retas r_1 e r_2, pois estes são ângulos agudos de medida igual a θ.

Retas perpendiculares

Seja r_1 a reta que passa pelos pontos A e B e r_2 a reta que passa pelos pontos C e D (observe a figura 78 abaixo). Estas retas são concorrentes no ponto M e formam quatro ângulos: $A\hat{M}D$, $D\hat{M}B$, $B\hat{M}C$ e $C\hat{M}A$. Repare que r_1 e r_2 são perpendiculares, isto é, formam um ângulo reto. Portanto, m($A\hat{M}D$) = m($D\hat{M}B$) = m($B\hat{M}C$) = m($C\hat{M}A$) = 90º $\left(ou \text{ igual a } \frac{\pi}{2} \ radianos\right)$. Neste caso, podemos tomar qualquer um dos quatro ângulos formados como sendo o ângulo entre as retas r_1 e r_2.

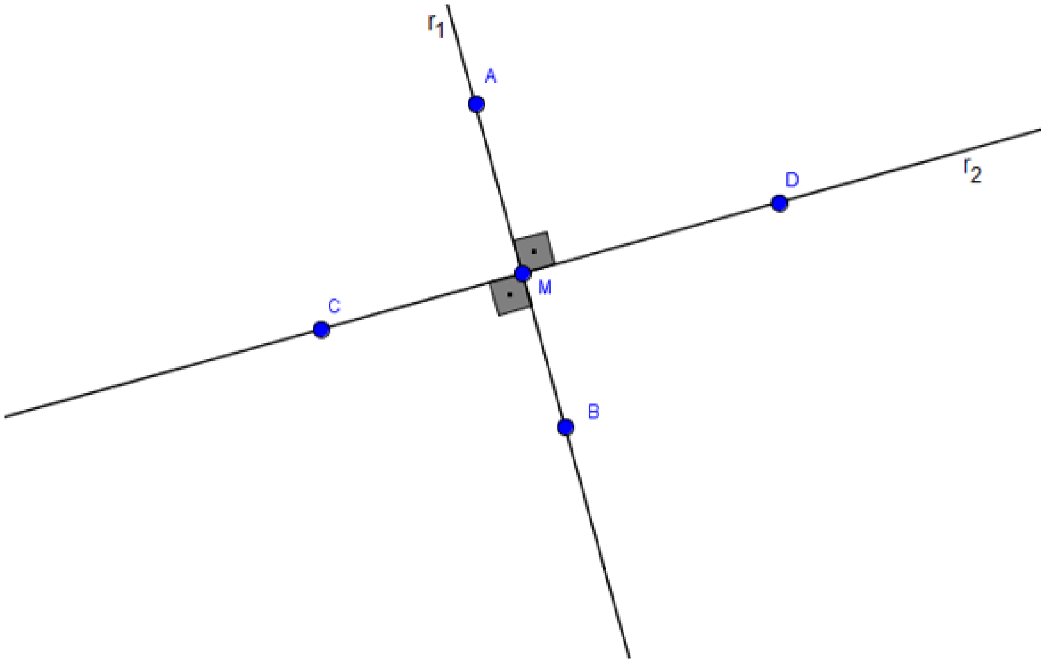
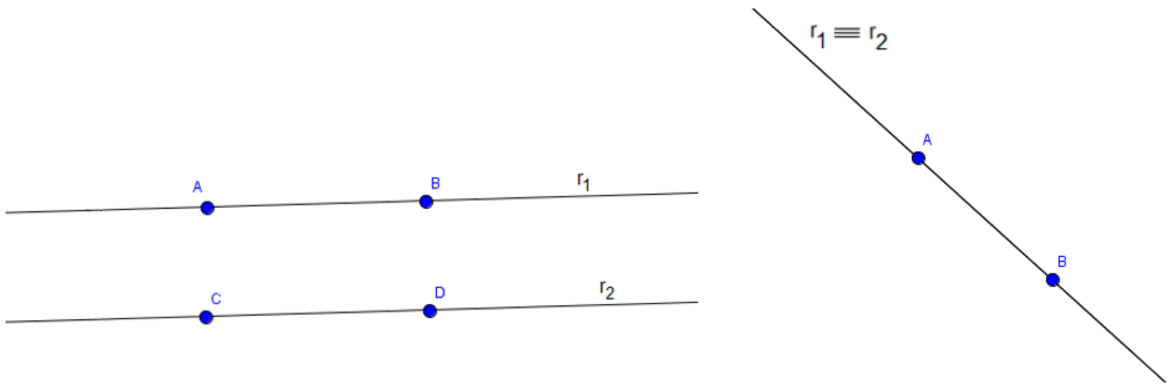


Figura 78 - Retas perpendiculares.

Fonte: A autora.

Retas paralelas

Sejam r_1 e r_2 retas paralelas distintas (figura 79 (a)) ou coincidentes (figura 79 (b)) e θ a medida do ângulo entre estas retas. Neste caso, temos que: θ = 0º (ou θ = 0 radianos).



(a) (b)

Figura 79 - Retas paralelas.

Fonte: A autora.

Conclusão: Seja θ a medida do ângulo entre duas retas r_1 e r_2. Temos que θ = 0º (ou θ = 0 radianos), se r_1 e r_2 forem retas paralelas (distintas ou coincidentes) e θ = 90º $\left(ou\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\ radianos\right)$, se r_1 e r_2 forem retas perpendiculares. Em qualquer outro caso, isto é, quando tivermos r_1 e r_2 retas concorrentes e não perpendiculares, 0º < θ < 90º $\left(ou\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\ com\ \theta \text{ em } radianos\right)$.

Façamos, então, a seguinte pergunta: de que maneira é possível obter o valor de θ no caso em que r_1 e r_2 são retas concorrentes e não perpendiculares?

Retas concorrentes e não perpendiculares

Observe a figura 80 a seguir que ilustra as retas r_1: $a_1x + b_1y = c_1$ e r_2: $a_2x + b_2y = c_2$ concorrentes e não perpendiculares e os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ representantes, respectivamente, dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, sendo que r_1 possui direção ortogonal a direção do vetor $\overrightarrow{u}$ e r_2 possui direção ortogonal a direção do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja $C\hat{M}E$ o ângulo entre as retas r_1 e r_2. Temos que $C\hat{M}E$ é um ângulo agudo de medida igual a θ. Como podemos obter a medida θ do ângulo $C\hat{M}E$?

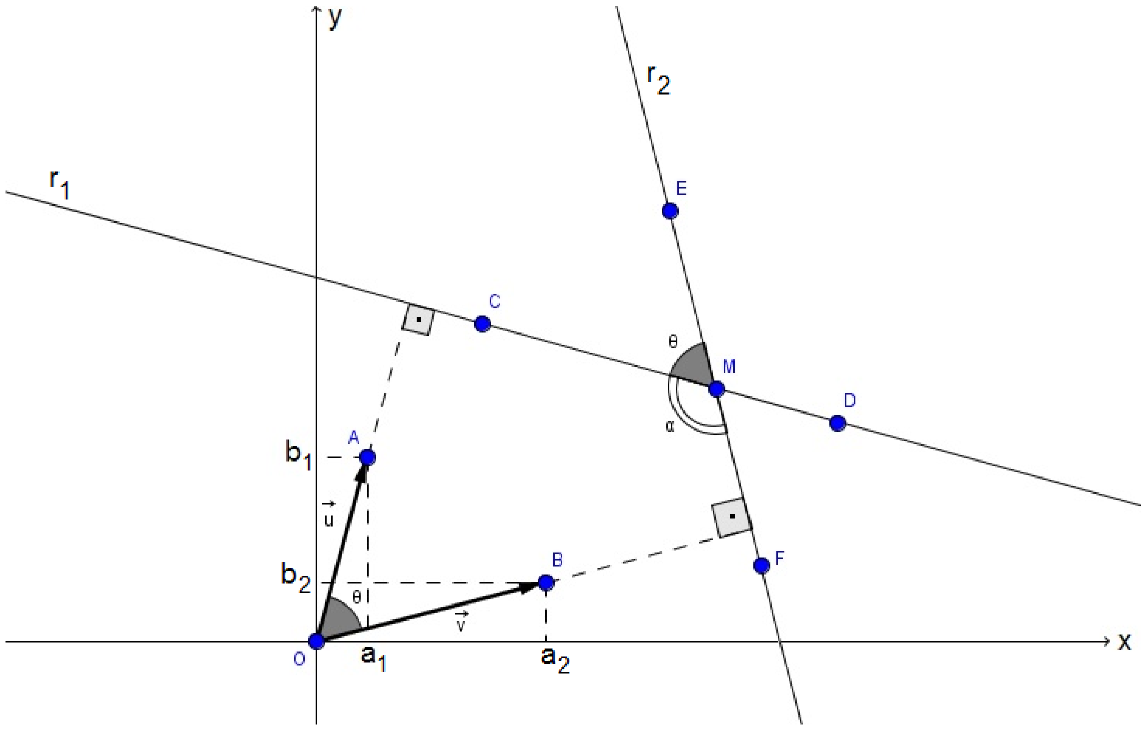


Figura 80 - Retas concorrentes e não perpendiculares.

Fonte: A autora.

Note que AÔB é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e m(AÔB) = θ. Portanto, m($C\hat{M}E$) = m(AÔB) = θ.

No tópico "Ângulo entre dois vetores", discutido anteriormente, vimos ser possível obter a medida do ângulo entre dois vetores por meio do cálculo do cosseno do mesmo aplicando a fórmula a seguir:

$$\cos\theta = \frac{x_q . x_p + y_q . y_p}{\left|\overrightarrow{u}\right| . \left|\overrightarrow{v}\right|}, \text{ para } \overrightarrow{u} = (x_p, y_p) \text{ e } \overrightarrow{v} = (x_q, y_q)$$

Como $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1)$ e $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2)$, obtemos:

$$\cos\theta = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\left|\overrightarrow{u}\right| . \left|\overrightarrow{v}\right|} > 0$$

Perceba que, neste caso, o sinal do cosseno de θ é positivo, pois o ângulo AÔB é agudo. Desta forma, conseguimos obter a medida do ângulo AÔB e, consequentemente, a medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2 .

Observe, agora, a figura 81 abaixo que também ilustra duas retas concorrentes e não perpendiculares r_1: $a_1x + b_1y = c_1$ e r_2: $a_2x + b_2y = c_2$ cujas direções são ortogonais, respectivamente, aos vetores $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OA} = (a_1, b_1)$ e $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{OB} = (a_2, b_2)$ também representados na figura a seguir. Seja C$\hat{M}$E o ângulo entre as retas r_1 e r_2 . Temos que C$\hat{M}$E é um ângulo agudo de medida igual a θ. Como podemos obter a medida θ do ângulo C$\hat{M}$E?

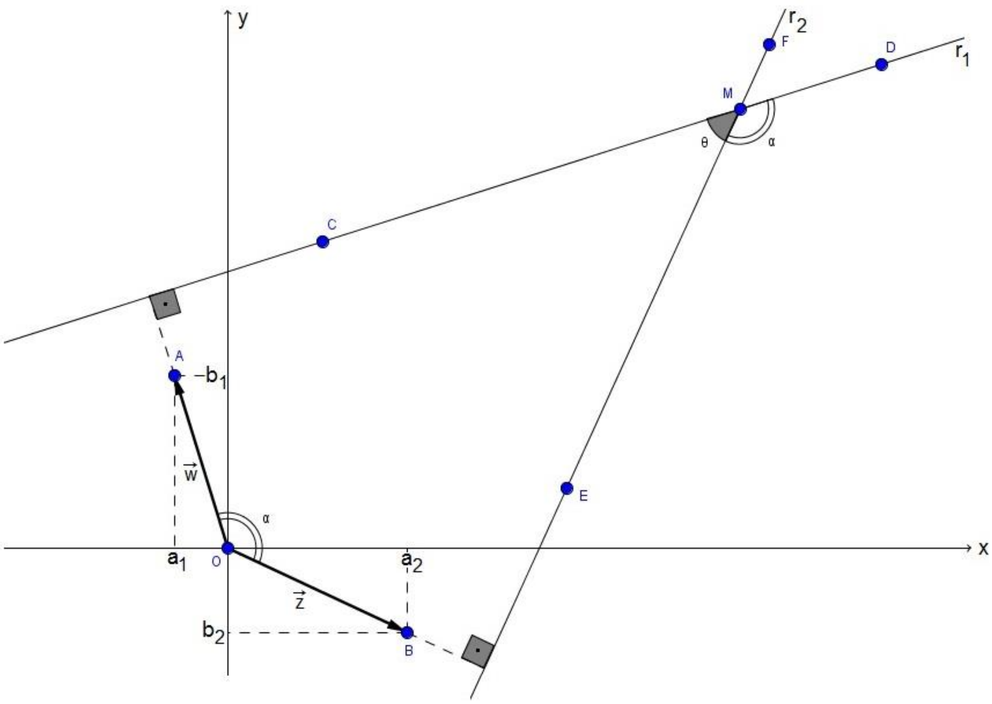


Figura 81 - Retas r_1 e r_2 concorrentes e não perpendiculares.

Fonte: A autora.

Repare que, neste caso, assim como no anterior, também iremos trabalhar com o ângulo formado entre os vetores que possuem direções ortogonais as direções dadas pelas retas r_1 e r_2. Portanto, vamos trabalhar, então, com o ângulo AÔB formado entre os vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$. Temos que AÔB é obtuso e possui medida igual a α, sendo que m(C$\hat{M}$E) = $\theta \neq \alpha$. Sabemos, porém, que os ângulos AÔB e C$\hat{M}$E são suplementares.

Sendo assim, vamos aplicar a fórmula a seguir para obter o cosseno de α, pois será por meio desta medida que conseguiremos obter o valor de α e consequentemente o valor de θ, observe:

$$\cos\alpha = \frac{x_q . x_p + y_q . y_p}{\left|\overrightarrow{u}\right| . \left|\overrightarrow{v}\right|}, \text{ para } \overrightarrow{u} = (x_p, y_p) \text{ e } \overrightarrow{v} = (x_q, y_q)$$

Como $\overrightarrow{w} = (a_1, b_1)$ e $\overrightarrow{z} = (a_2, b_2)$, obtemos:

$$\cos\alpha = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\left|\overrightarrow{w}\right| . \left|\overrightarrow{z}\right|} < 0$$

Note que o sinal do cosseno de θ é negativo, pois o ângulo AÔB é obtuso. Desta forma, conseguimos obter a medida do ângulo AÔB e, consequentemente, a medida do ângulo C$\hat{M}$E, pois m(AÔB) + m(C$\hat{M}$E) = $\alpha + \theta$ = 180º (ou m(AÔB) + m(C$\hat{M}$E) = $\alpha + \theta = \pi$ se α e θ forem dados em radianos).

Observe, porém, o seguinte: temos que C$\hat{M}$E é agudo, sendo o sinal do cosseno de θ positivo, e que AÔB é obtuso, sendo o sinal do cosseno de α negativo. Sabemos que C$\hat{M}$E e AÔB são ângulos suplementares o que nos leva a afirmar que o valor do módulo do cosseno de α é igual ao valor do cosseno de θ. Desta forma, calculando-se o módulo do cosseno de α, obtemos o cosseno de θ e, assim, a medida do ângulo C$\hat{M}$E:

$$\left|\cos \alpha\right| = \frac{\left|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2\right|}{\left|\overrightarrow{w}\right| \cdot \left|\overrightarrow{z}\right|} = \cos\theta > 0$$

Conclusão: Para obtermos a medida θ do ângulo entre duas retas r_1 e r_2 concorrentes e não perpendiculares, precisamos obter o valor do cosseno de θ, sendo que, para isto, é necessário aplicar a fórmula a seguir que calcula o módulo do cosseno do ângulo formado pelos vetores que possuem direções ortogonais as direções dadas pelas retas r_1 e r_2 :

$$\cos\theta = \frac{\left|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}$$

Neste capítulo, nos detemos à exposição teórica de conceitos da Geometria Vetorial para a introdução de seis tópicos da Geometria Analítica. Porém, outros tópicos de Geometria Analítica também podem receber uma abordagem vetorial. Temos que a Geometria Vetorial é um assunto mais moderno e permite melhor visualização geométrica dos conceitos. No próximo capítulo, trazemos informações breves a respeito da instituição escolar e do material didático a ser aplicado com um grupo de alunos desta escola, sendo este material referente ao estudo de vetores e de conceitos de Geometria Analítica.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos algumas características da escola (contexto escolar, participantes da pesquisa e estrutura física da escola) a qual se deu a aplicação da experiência prática e em seguida a proposta da sequência didática elaborada, acompanhada de uma tabela que traz informações resumidas sobre os conteúdos a serem explorados com os estudantes e que compõem cada um dos encontros planejados. A sequência didática encontra-se no Âpendice A deste trabalho.

4.1 A ESCOLA

4.1.1 Contexto escolar

Os alunos que estudam na Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont são oriundos de diferentes bairros da zona sul de Porto Alegre, cujas famílias pertencem à classe média baixa ou a classes ainda menos favorecidas. De acordo com o Projeto Político Pedagógico (PPP) (PORTO ALEGRE, 2010, p. 2), os estudantes da E.E.E. Médio Santos Dumont trazem para o seu dia-a-dia no espaço escolar certas vivências de brigas familiares e históricos de violência.

> Por diversas razões (de cunho emocional, psicológico ou social), muitos de nossos alunos apresentam dificuldades para conviver em grupo e apropriar-se de novos conhecimentos. São descomprometidos e desmotivados com atividades extracurriculares. Não existindo muitas vezes, uma parceria da família quanto ao estabelecimento de horários, rotinas[...] (PORTO ALEGRE, 2010, p. 3).

Com este contexto escolar, a E.E.E. Médio Santos Dumont traz no seu PPP (PORTO ALEGRE, 2010, p. 4) como um de seus objetivos específicos a emancipação social do educando e a inserção do mesmo no mundo do trabalho, sendo uma de suas metas “Promover conhecimento, cultura e boa formação intelectual para que os alunos sejam ‘sujeitos da história’ e ‘participantes das decisões sociais’” (PORTO ALEGRE, 2010, p. 5).

4.1.2 Participantes

A pesquisa foi desenvolvida no turno da noite com um grupo de dez alunos, com faixa etária entre 18 e 49 anos, do 3º ano do Ensino Médio. Todos os alunos da turma estudam à noite, porque trabalham durante o dia ou fazem cursos técnicos ou profissionalizantes. Não havia na turma casos de alunos que estavam repetindo o 3º ano do Ensino Médio, porém havia casos de estudantes que tinham desistido de cursar o Ensino Médio, em determinadas épocas de suas vidas, afastando-se, assim, da escola por alguns anos e, então, depois retornado aos estudos.

4.1.3 Estrutura Física da Escola

A escola possui uma grande estrutura física. De acordo com o seu Projeto Político Pedagógico, sabemos que a “[...] E.E. de Ensino Médio Santos Dumont [...] dispõe de uma área física para acolher aproximadamente 1500 alunos distribuídos em três turnos, com razoáveis condições de funcionamento.” (PORTO ALEGRE, 2010, p.2). De fato: no turno da manhã há seis turmas do 1º ano do Ensino Médio, quatro turmas do 2º ano do Ensino Médio e três turmas do 3º ano do Ensino Médio; no turno da tarde há uma turma por ano desde o 1º ano do Ensino Fundamental ao 7º ano do Ensino Fundamental e uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental. A escola não possui Educação de Jovens e Adultos (EJA). No espaço escolar há um laboratório de informática com trinta e um computadores, sendo que destes, doze não podem ser utilizados ou porque encontram-se estragados ou porque faltam alguns periféricos como CPUs, mouses e teclados, por exemplo. Quanto aos dezenove computadores utilizáveis, todos possuem acesso à internet. A escola também possui: um laboratório de Ciências; uma biblioteca, porém sem bibliotecário, para atender aos estudantes; dois salões para apresentações; uma sala da direção, uma sala da orientadora educacional, sendo que a mesma atende somente aos alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental; uma sala para os professores; um pátio amplo nos fundos da escola com duas quadras para prática de esportes e um barzinho com vendas de lanches para os alunos dos turnos da manhã e tarde; um pátio menor à frente da escola com uma pracinha; uma cozinha que serve merenda escolar para os alunos de todos os turnos; uma sala de xerox; e uma sala do Grêmio Estudantil.

4.2 A PROPOSTA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Elaboramos uma sequência didática prevista para ser aplicada em oito encontros com duração de duas horas cada, sendo que os sete primeiros seriam para discutirmos os sete materiais elaborados e o oitavo e último encontro seria como uma reserva, para tirar dúvidas dos alunos, para realizar revisão de algum conceito que não foi bem compreendido ou, então, para resolver alguma atividade que tenha sido esquecida. O material de cada encontro foi dividido em dois momentos: o primeiro (previsto para durar uma hora) com a apresentação dos conceitos a serem trabalhados, em formas de perguntas, às vezes acompanhadas de arquivos do GeoGebra em que o aluno deve abrir e explorar o objeto que descortina na tela do computador. Pretende-se ir percorrendo o material juntamente com os estudantes, discutindo os conteúdos abordados com os mesmos, na forma de um debate com o grande grupo, questionando-os, instigando-os, fazendo-os refletir. O segundo momento (previsto para durar uma hora) é composto pelas atividades, sendo que algumas devem ser realizadas utilizando-se o *software* GeoGebra, como forma de explorar os conceitos de matemática a partir da manipulação de objetos desenvolvidos pela autora.

A tabela 1 abaixo apresenta um resumo da sequência didática elaborada (ver Apêndice A), organizada por: encontros, conteúdos que se pretende abordar em cada encontro, duração dos encontros e utilização do GeoGebra.

Tabela 1 - Resumo dos encontros da sequência didática

Encontros	Conteúdos	Duração	GeoGebra
Encontro 1	Grandezas escalares e vetoriais; os segmentos orientados; o vetor geométrico e atividades.	2 horas	Utilização do GeoGebra para a exploração de movimentos por meio de animações e na resolução de duas atividades propostas.
Encontro 2	Operações com o vetor geométrico (adição entre vetores, diferença entre vetores e multiplicação de um escalar por um vetor); vetor nulo; vetor oposto; e atividades.	2 horas	Utilização do GeoGebra para a exploração de uma animação e de um arquivo, sendo este último referente ao conteúdo produto de um número real por um vetor.
Encontro 3	O vetor algébrico; operações com o vetor algébrico (adição de vetores, diferença entre vetores e multiplicação de um número real por um vetor); vetor nulo; vetor oposto e atividades.	2 horas	Utilização do GeoGebra para melhor visualização e compreensão dos conceitos de vetor algébrico e multiplicação de um número real por um vetor. Utilização do GeoGebra na resolução de duas atividades propostas.
Encontro 4	Módulo de um vetor; distância entre dois pontos e translação segundo um vetor.	2 horas	Exploração de arquivo no GeoGebra para melhor compreender o conceito de módulo de um vetor. Construção de mosaico por meio de translações no GeoGebra.

Encontro 5	Coordenadas de um ponto que divide um segmento em uma razão dada; colinearidade de três pontos e atividades.	2 horas	Exploração de arquivo no GeoGebra para melhor compreender o conceito de divisão de um segmento em dada razão. Apresentação de mosaicos prontos, construídos no GeoGebra. Utilização do GeoGebra para que os alunos construam o seu mosaico utilizando-se da ferramenta “Translação por um Vetor”.
Encontro 6	Condição de ortogonalidade entre vetores; equação geral da reta; posições relativas entre duas retas no plano e atividades.	2 horas	Utilização do GeoGebra para exploração de arquivos com o objetivo de que os alunos compreendam melhor os conceitos abordados neste encontro. Uso do GeoGebra em duas atividades propostas.
Encontro 7	Ângulo entre vetores; ângulo entre duas retas e atividades.	2 horas	Exploração de arquivos no GeoGebra relacionados aos conteúdos a serem abordados. Utilização do GeoGebra na resolução de duas atividades.
Encontro 8	Encontro reserva para a resolução de alguma atividade dos encontros passados e revisão de algum conteúdo.	2 horas	Utilização do GeoGebra para rever algum arquivo, resolver alguma atividade e no auxílio às dúvidas dos alunos.

Fonte: A autora

No capítulo a seguir vamos descrever e analisar cada um dos encontros que ocorreram na escola, apresentando informações sobre como se deu a aplicação dos novos conceitos matemáticos e a forma como os alunos entendiam e lidavam com os mesmos na resolução de atividades propostas.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Neste capítulo, descreverei o que ocorreu em cada um dos encontros, com o objetivo de analisar a forma como os alunos estão entendendo os conceitos matemáticos apresentados e as estratégias de resolução adotadas pelos estudantes nos problemas propostos. Ao longo do relato de cada encontro, apresento registros em fotos dos alunos e das atividades por eles realizadas, assim como a descrição de diálogos e questionamentos dos estudantes pertinentes para o bom andamento deste trabalho.

A experiência prática ocorreu na Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont, localizada na zona sul de Porto Alegre, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio noturno, composta por dez alunos, na faixa etária de 18 a 49 anos. Escolhi esta escola, pois no segundo semestre de 2013, ao cursar a disciplina de “EDU02X15 - Estágio em Educação Matemática III”, realizei prática docente na mesma.

Sendo assim, ao retornar à escola neste semestre (2014/2), a turma do 3º ano do Ensino Médio noturno foi a mim oferecida, pois a mesma era composta por um grupo pequeno de alunos que ainda não haviam estudado o conteúdo de Geometria Analítica e, além disso, de acordo com a professora titular de matemática, esta turma, assim como as demais turmas do noturno, geralmente não era escolhida por estudantes de licenciatura e/ou estagiários que procuravam a escola para realizarem suas práticas e proporem atividades diferenciadas aos estudantes.

Para a realização desta experiência, foram ocupados quatro períodos da disciplina de Matemática por semana, sendo dois períodos nas segundas-feiras e dois períodos nas quartas-feiras. Cada período do noturno possui duração de 30 minutos. Também ocupei períodos de professores de outras disciplinas quando estes não compareciam à escola no dia ou, então, quando os mesmos cediam o período à mim. Portanto, alguns dos encontros (2º, 3º e 4º encontros) tiveram uma duração maior (uma hora e meia). O número total de encontros realizados foram nove.

Os espaços da escola utilizados para a aplicação da prática foram a sala de aula e o laboratório de informática. Ao longo das descrições de cada encontro, utilizarei as letras A, B, C, E, G, L, M, R, T e W para me referir aos estudantes.

Devido ao fato da aplicação da sequência didática ter sido iniciada tardiamente na escola, além de outros fatores como pouca duração dos períodos do noturno, grupo de alunos participantes da pesquisa bastante heterogêneo, muitas ausências dos estudantes, etc., temos que a experiência realizada não chegou a tratar de todos os conteúdos previstos (veja a sequência didática no Apêndice A). Apenas o material referente ao primeiro encontro foi concluído com os estudantes. Quanto ao material do segundo encontro, temos que a parte teórica foi finalizada, porém não chegamos avançar para as atividades.

A tabela abaixo mostra, de forma resumida, os conteúdos trabalhados com os estudantes. A tabela está organizada por: encontros, número de participantes presentes, duração de cada encontro e conteúdos desenvolvidos com os alunos.

Tabela 2 – Conteúdos desenvolvidos com os alunos em cada um dos encontros na escola

Encontros	Número de participantes presentes	Duração	Conteúdos desenvolvidos
Encontro 1	Nove	1 hora	Grandezas escalares e grandezas vetoriais.
Encontro 2	Nove	1hora e 30 minutos	Revisão de grandezas escalares e vetoriais. Utilização do GeoGebra para a exploração de duas animações envolvendo certos movimentos. Apresentação dos segmentos orientados como representantes das grandezas vetoriais.
Encontro 3	Quatro	1 hora e 30 minutos	Utilização do GeoGebra para a visualização e exploração de três animações envolvendo certos movimentos. Introdução do conceito de vetor geométrico.
Encontro 4	Cinco	1 hora e 30 minutos	Resolução das três primeiras atividades referentes ao material do primeiro encontro. Utilização do GeoGebra na resolução da segunda atividade.
Encontro 5	Cinco	1 hora	Introdução da operação de adição entre vetores no domínio geométrico. Utilização de régua e compasso para as construções.
Encontro 6	Oito	1 hora	Revisão da operação de soma entre dois vetores. Adição entre vetores paralelos no domínio geométrico.
Encontro 7	Seis	30 minutos	Utilização do GeoGebra para a resolução da quarta atividade referente ao material do primeiro encontro.
Encontro 8	Cinco	1 hora	Revisão da atividade de somar, no domínio geométrico, vetores de mesma direção. Utilização do GeoGebra para a exploração de uma animação envolvendo certo movimento.
Encontro 9	Oito	1 hora	Vetor nulo, vetor oposto, diferença entre vetores no domínio geométrico. Utilização do GeoGebra para a exploração de arquivo referente ao conteúdo de multiplicação de um número real por um vetor.

Fonte: A autora

1º Encontro:

Este encontro iniciou em uma quarta-feira (22/10/2014) às 19h30min com duração de uma hora e ocorreu na própria sala de aula dos alunos. Neste dia, haviam nove alunos em sala de aula. Inicialmente apresentei-me e informei aos alunos que estava retornando à escola, pois havia sido estagiária na mesma no 2º semestre do ano passado (2013) em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Porém, agora, iria desenvolver, na turma deles, um trabalho de pesquisa em função de estar terminando o curso graduação em Licenciatura em Matemática e que, portanto, todas as atividades por eles desenvolvidas ao longo dos encontros seriam por mim analisadas e fariam parte do meu trabalho de conclusão de curso.

Deixei claro, também, que no decorrer dos encontros iria fazer o registro de certos momentos por meio de fotos e que os próximos encontros iriam ocorrer no laboratório de informática. A professora de matemática titular da turma estava presente.

Expliquei aos alunos a minha proposta de trabalho e os objetivos da mesma. Disse que iríamos trabalhar seis tópicos da Geometria Analítica, a saber: distância entre dois pontos, coordenadas de um ponto que divide um segmento em uma dada razão, alinhamento de três pontos, equação geral da reta, posições relativas entre retas e ângulo entre retas. Porém estes tópicos receberiam uma abordagem diferente daquela que normalmente é feita no Ensino Médio. Comentei com os alunos que, ao abrirmos um livro didático de matemática no conteúdo de Geometria Analítica, geralmente, o que observamos é este conteúdo recebendo um tratamento muito algébrico, sendo que ao trabalharmos com Geometria Analítica, não podemos nos deter somente ao campo algébrico ou somente ao campo geométrico, mas que é preciso transitar por estes dois domínios. Com o objetivo de exemplificar a minha explicação, escrevi no quadro (veja a figura 82 abaixo) representações geométrica e algébrica para o ponto, a reta e a circunferência, deixando claro que iríamos nos deter no estudo dos dois primeiros.

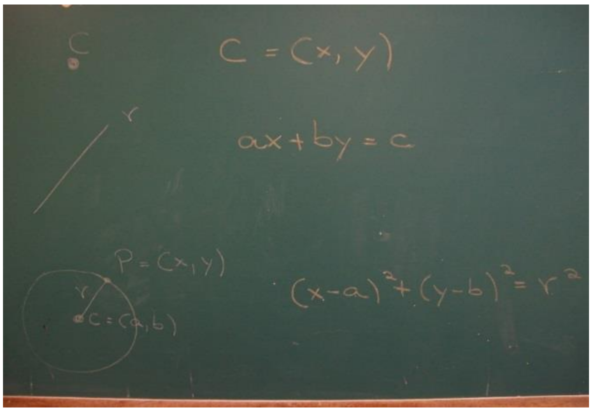


Figura 82 - Representações geométrica e algébrica para o ponto, a reta e a circunferência.

Fonte: A autora.

Perguntei, então, aos alunos se eles já ouviram falar em vetores ou se já estudaram algo sobre vetores, sendo que um deles respondeu que, em algum momento na disciplina de Física, ouviu falar em vetores, mas que nenhum estudo sobre os mesmos foi realizado. Sendo assim, informei aos alunos que antes de darmos início ao estudo daqueles seis tópicos de Geometria Analítica, iríamos estudar alguns conceitos básicos sobre vetores, pois estes nos dariam suporte para avançarmos nos estudos destes tópicos, além do que por meio de uma abordagem vetorial, conseguiríamos trabalhar com as representações algébricas e geométricas destes tópicos de Geometria Analítica, facilitando a compreensão dos mesmos. De acordo com Duval (2003), a compreensão em matemática está relacionada ao fato de mobilizarmos de pelo menos dois registros de representação distintos para trabalhar com um mesmo objeto matemático, pois é a mobilização de diferentes representações de um mesmo objeto que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática.

> [...] não pode haver verdadeiramente aprendizagem, na medida em que as situações e atividades propostas não levam em conta a necessidade de vários registros de representação para o funcionamento cognitivo do pensamento humano [...]. (DUVAL, 2012, p. 296).

Entreguei, então, aos estudantes o termo de consentimento informado (ver Apêndice A), sendo que todos devolvessem o mesmo assinado.

Em seguida, entreguei para cada aluno um questionário com seis perguntas (ver Apêndice B), a fim de obter algumas informações sobre este grupo de alunos e saber as suas expectativas com relação ao trabalho que estava sendo iniciado. Abaixo destaco as respostas de alguns alunos:

Na 1ª questão (veja as figuras 83 e 84 a seguir), cinco alunos responderam que o conteúdo de Geometria Analítica não havia sido abordado pelo(a) professor(a) de matemática, outros dois informaram que não estavam lembrados e um não respondeu à pergunta. Já o aluno E (veja a figura 84 abaixo) escreveu que teve conhecimento deste conteúdo no 2º ano (do Ensino Médio), porém não informou quais tópicos foram abordados e nem como se deu esta abordagem.

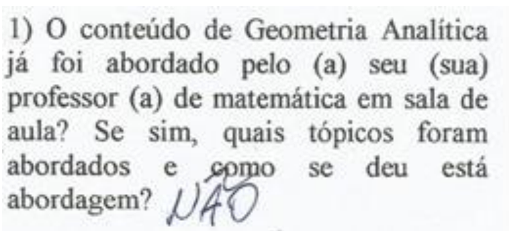

1) O conteúdo de Geometria Analítica já foi abordado pelo (a) seu (sua) professor (a) de matemática em sala de aula? Se sim, quais tópicos foram abordados e como se deu está abordagem? NÃO

Figura 83 - Resposta do aluno G

Fonte: Aluno G.

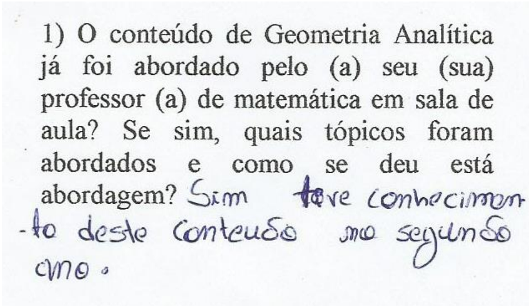

1) O conteúdo de Geometria Analítica já foi abordado pelo (a) seu (sua) professor (a) de matemática em sala de aula? Se sim, quais tópicos foram abordados e como se deu está abordagem? Sim teve conhecimen-to deste conteudo no segundo ano.

Figura 84 - Resposta do aluno E

Fonte: Aluno E

Na 2ª questão (veja a figura 85 abaixo), seis alunos responderam que já estudaram algo sobre vetores, mas na disciplina de Física.

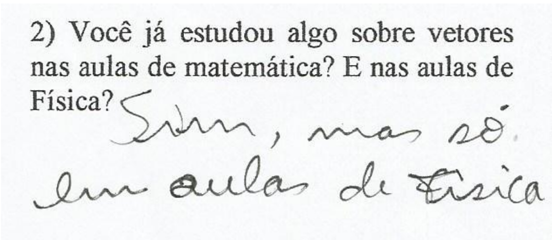

2) Você já estudou algo sobre vetores nas aulas de matemática? E nas aulas de Física? Sim, mas só em aulas de Física

Figura 85 - Resposta do aluno L.

Fonte: Aluno L.

Na 3ª questão (veja as figuras 86, 87 e 88 a seguir), seis alunos informaram que o laboratório de informática já foi utilizado nas aulas de matemática. Três alunos escreveram que o mesmo já foi utilizado em pesquisas para a disciplina de Seminário Integrado, outros três responderam que sim, para utilizar o *software* GeoGebra.

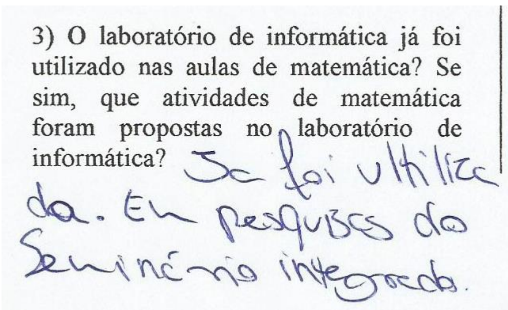
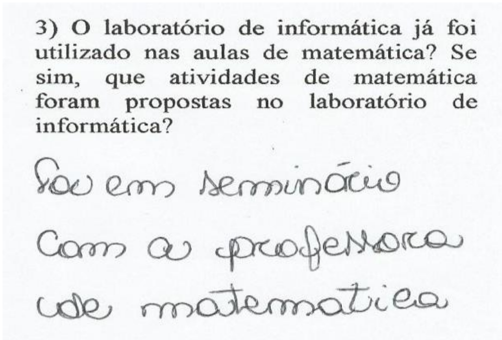

3) O laboratório de informática já foi utilizado nas aulas de matemática? Se sim, que atividades de matemática foram propostas no laboratório de informática? Ja foi ultiliza da. Em pesquises do Seminario integrado.

Figura 86 - Resposta do aluno W

Fonte: Aluno W


3) O laboratório de informática já foi utilizado nas aulas de matemática? Se sim, que atividades de matemática foram propostas no laboratório de informática?

Foi em seminário Com a professora de matematica

Figura 87 - Resposta da aluna T

Fonte: Aluna T

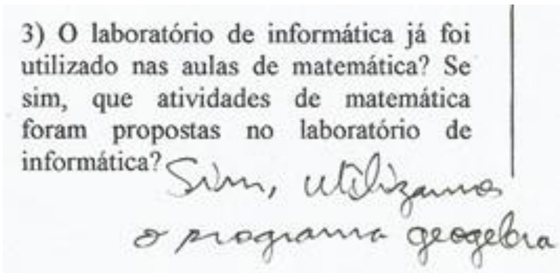
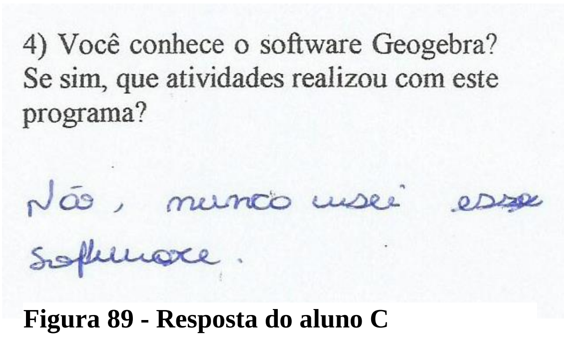

3) O laboratório de informática já foi utilizado nas aulas de matemática? Se sim, que atividades de matemática foram propostas no laboratório de informática? Sim, utilizamos o programa geogebra

Figura 88 - Resposta do aluno L.

Fonte: Aluno L.

Na 4ª questão (veja as figuras 89 e 90 abaixo), apenas três alunos informaram conhecer o *software* GeoGebra, sendo que destes, somente um citou algumas atividades realizadas no mesmo (veja a figura 90 abaixo). Cinco alunos informaram não conhecer o *software* GeoGebra e um não respondeu à questão.


4) Você conhece o software Geogebra? Se sim, que atividades realizou com este programa?

Não, nunca usei esse software.

Figura 89 - Resposta do aluno C

Fonte: Aluno C

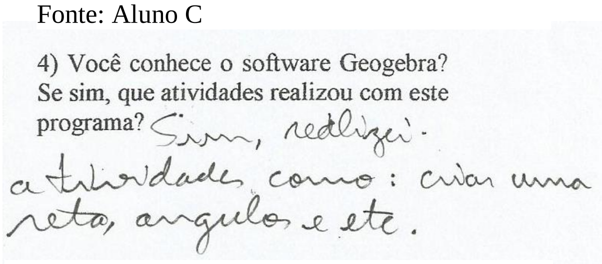

4) Você conhece o software Geogebra? Se sim, que atividades realizou com este programa? Sim, realizei atividades como: criar uma reta, angulos e etc.

Figura 90 - Resposta do aluno L

Fonte: Aluno L

Na 5ª questão (veja a figura 91 abaixo), seis alunos informaram que não trabalharam com nenhum outro *software* nas aulas de matemática, dois alunos citaram o programa Excel e um aluno não respondeu à pergunta.

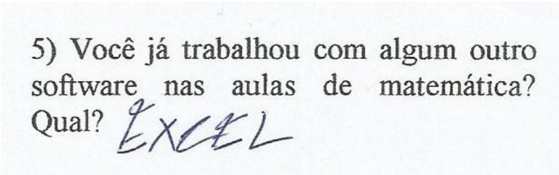

5) Você já trabalhou com algum outro software nas aulas de matemática? Qual? EXCEL

Figura 91 - Resposta do aluno G.

Fonte: Aluno G

Finalmente, na 6ª e última questão, apenas um aluno não informou a resposta, sendo que nos questionários entregues pelos demais, podemos identificar respostas como "aprender novos conteúdos", "adquirir novos conhecimentos"; "aprender com mais facilidade" e "que as aulas sejam mais produtivas". Veja nas figuras 92, 93 e 94 abaixo as respostas informadas por três destes alunos:

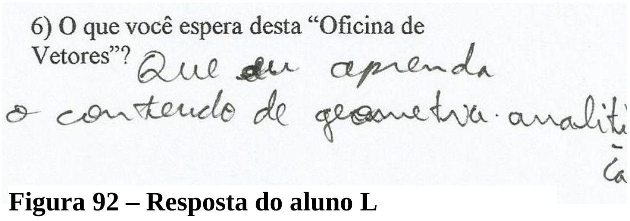

6) O que você espera desta "Oficina de Vetores"? Que eu aprenda o conteudo de geometria·analitica

Figura 92 – Resposta do aluno L

Fonte: Aluno L

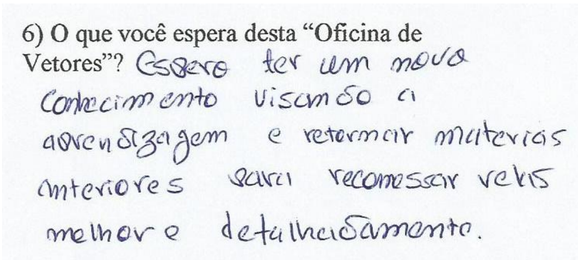

6) O que você espera desta "Oficina de Vetores"? Espero ter um novo conhecimento visando a aprendizagem e retormar materias anteriores para recomessar vetis melhore detalhadamento.

Figura 93 -Resposta do aluno E

Fonte: Aluno E

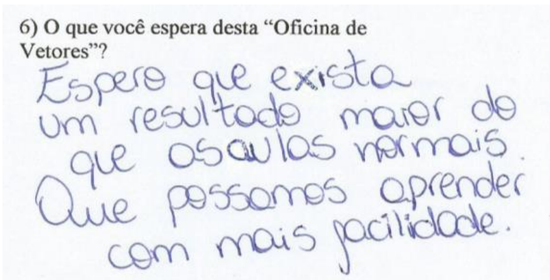

6) O que você espera desta "Oficina de Vetores"?
Espero que exista um resultado maior do que os aulas normais. Que possamos aprender com mais facilidade.

Figura 94 - Resposta da aluna A

Fonte**:** Aluna A

Recolhidos os questionários, entreguei para cada um dos alunos o material referente ao primeiro encontro da sequência didática. Expliquei que no final da aula, recolheria este material para realizar a análise das respostas informadas por eles, mas que o mesmo seria devolvido no encontro seguinte.

Comecei perguntando aos alunos se os mesmos sabiam o que podemos considerar como sendo grandezas. Como nenhum aluno respondeu, disse que as grandezas consistem em tudo aquilo que pode ser medido ou contado. Diante desta colocação, o aluno L afirmou: "Então, o tempo é uma grandeza." Confirmei que sim e dei outros exemplos. A aluna R contribui: "O nosso peso é uma grandeza, podemos medir em quilos". Então expliquei que na verdade o peso é considerado uma força e que isto, geralmente, é visto com mais detalhes na disciplina de Física, sendo que o que medimos na balança é a nossa massa, porém tanto o peso quanto a massa são grandezas.

Perguntei, então, se eles sabiam o que eram grandezas escalares e nenhum aluno soube responder. Portanto, expliquei para os mesmos do que se tratavam e pedi para que olhassem as imagens presentes na primeira página do material referente ao primeiro encontro e respondessem se estas representavam grandezas e se as mesmas eram escalares, ao que todos confirmaram que sim. Na imagem 95 abaixo, temos os alunos escrevendo suas respostas para a pergunta "O que são grandezas escalares? Dê exemplos de grandezas escalares:" depois deste primeiro momento de conversa.

(a) **(b)**

Figura 95 - Alunos anotando as suas conclusões

Fonte: A autora

Dois alunos informaram uma resposta que se aproxima do que era esperado ao escreverem que nas grandezas escalares utilizamos um número acompanhado da sua unidade (de medida) (veja a figura 96 a seguir). Cinco alunos escreveram respostas parecidas com a que podemos ver na figura 97 abaixo. Observe que nos exemplos dados pelo aluno C (figura 97) o mesmo confunde as unidades de medida com as grandezas escalares, citando o centímetro, o milímetro e o metro, por exemplo, como exemplos de grandezas escalares, porém estas se tratam das unidades de medida que medem a grandeza escalar comprimento. Outros dois alunos somente citaram exemplos, sendo que um destes escreveu a velocidade como um exemplo de grandeza escalar, o que está errado.

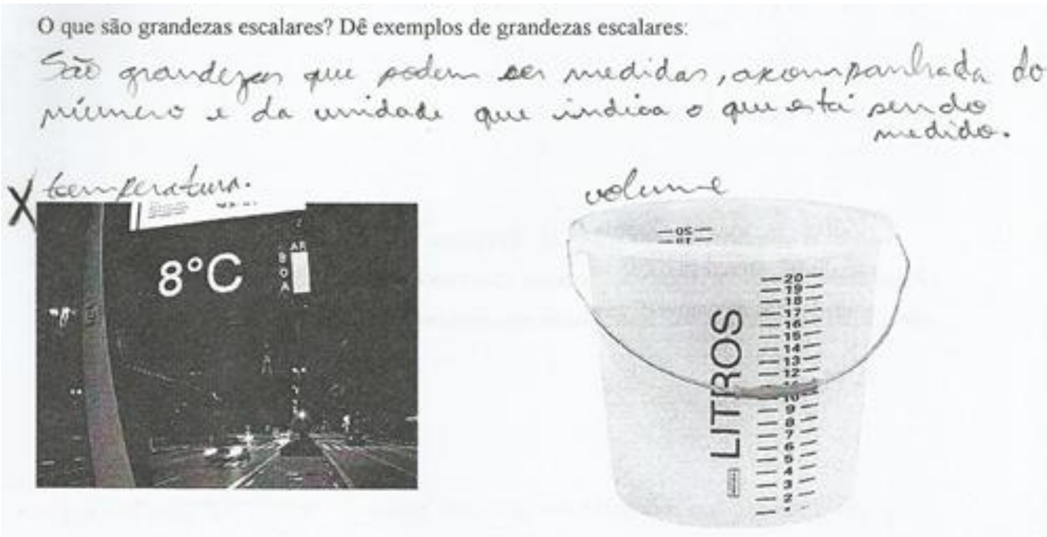


Figura 96 - Resposta do aluno L

Fonte: Aluno L

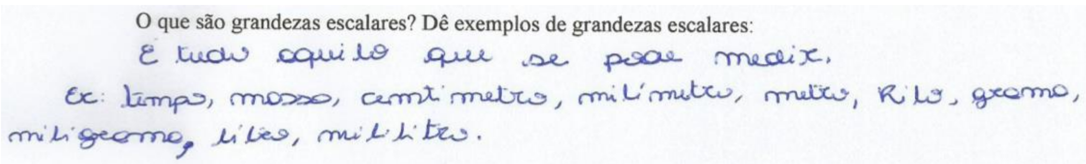


Figura 97 - Resposta do aluno C

Fonte: Aluno C

Dando continuidade à aula, perguntei aos alunos se os mesmos sabiam o que eram grandezas vetoriais e nenhum respondeu. Expliquei, então, que diferentemente das grandezas escalares, as vetoriais precisam de três informações para estarem bem determinadas, a saber: um número acompanhado da sua unidade de medida, direção e sentido. Citei como exemplo a velocidade e desenhei no quadro dois carros com velocidades de mesma intensidade (70 km/h), porém que se deslocavam por avenidas com direções perpendiculares. Novamente, questionei os alunos: “O que vocês acham? As velocidades dos carros são iguais?”. Todos os alunos responderam equivocadamente que sim. Afirmei, então, que se tratavam de velocidades distintas. A aluna R, questionou: “Mas como? Ali é 70 e o outro também é 70! São iguais!”.

Expliquei que quando comparamos duas grandezas vetoriais de mesma natureza, não basta verificarmos somente a sua intensidade, mas que também é necessário verificar a direção e o sentido. Sendo assim, no exemplo dado, a intensidade das velocidades eram iguais, porém a direção era diferente e, portanto, não poderíamos considerar as velocidades dos dois carros iguais. Porém, os alunos não se mostraram muito convencidos disso. Citei outro exemplo de grandeza vetorial: a força que aplicamos sobre algum objeto, a força peso exercida pela Terra sobre o nosso corpo.

Solicitei, então, que os alunos escrevessem o que haviam entendido por grandeza vetorial respondendo à pergunta “O que são grandezas vetoriais? Dê exemplos de grandezas vetoriais:”. No entanto, percebi certa dificuldade por parte dos alunos com relação à compreensão do conceito de grandeza vetorial, pois cinco alunos não informaram as suas respostas. Quanto aos demais alunos, verifiquei respostas parecidas com as que estão registras nas figuras 98 e 99 abaixo:

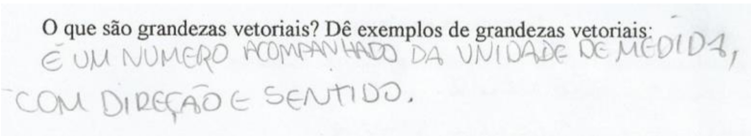

O que são grandezas vetoriais? Dê exemplos de grandezas vetoriais:
É UM NUMERO ACOMPANHADO DA UNIDADE DE MEDIDA, COM DIREÇÃO E SENTIDO.

Figura 98 - Resposta da aluna R.

Fonte: Aluna R.

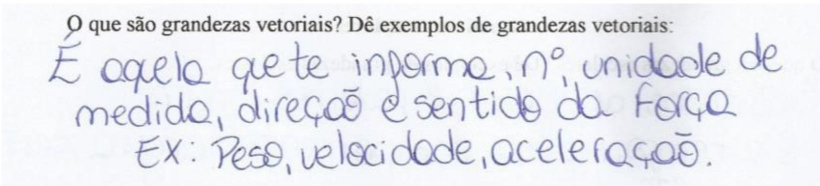

O que são grandezas vetoriais? Dê exemplos de grandezas vetoriais:
É aqela que te informa, nº, unidade de medida, direçaõ e sentido da Força
Ex: Peso, velocidade, aceleraçaõ.

Figura 99 - Resposta da aluna A

Fonte: Aluna A

A aula terminou sem que todas as atividades referentes ao primeiro encontro fossem concluídas por falta de tempo.

2º Encontro:

O segundo encontro ocorreu em uma segunda-feira (03/11/14) e iniciou às 20h com término às 21h30min. Neste dia, havia nove alunos em sala. Informei a eles que este encontro teria a duração de 1h30min, pois além dos dois períodos da professora de matemática, eu iria utilizar mais um período da disciplina de química que o professor havia à mim cedido.

Entreguei o termo de consentimento informado para a aluna B, pois a mesma não esteve presente no primeiro encontro, e o material referente ao primeiro encontro, explicando até onde havíamos avançado. Em seguida devolvi o material do primeiro encontro para os demais alunos da turma e iniciamos a aula.

Perguntei para os alunos: “Vocês estão lembrados do que são grandezas escalares? Os alunos ficaram quietos por um tempo. Esperei por um momento até que o aluno G rompeu o silêncio dizendo: “Número acompanhado da unidade de medida.” Então, eu pedi: “Me deem exemplos de grandezas escalares.” Alguns alunos começaram a falar: “tempo”, foi a resposta dada pelo aluno L; “velocidade”, informou o aluno E; “grau Celsius, litro”, disse o aluno C; “volume”, contribuiu o aluno E. Interrompi os alunos, dizendo: “Velocidade não é grandeza escalar”, “Grau Celsius e litro também não são grandezas escalares, mas sim unidades de medida que servem para medir grandezas escalares. Qual é a grandeza escalar medida pelo litro? E pelo grau Celsius?”. “Litro mede volume”, disse o aluno E; “Grau Celsius a temperatura”, informou o aluno L.

Como havia se passado mais de uma semana desde o nosso primeiro encontro, pensei ser importante retomar, mesmo que de uma maneira breve, os conceitos referentes às grandezas escalar e vetorial vistos no primeiro encontro.

Comecei dizendo aos alunos que havia analisado as respostas escritas por cada um deles para a pergunta “O que são grandezas escalares? Dê exemplos de grandezas escalares:”, sendo que cinco alunos haviam informado respostas parecidas com “é tudo o que se pode medir”. Expliquei que este tipo de resposta não estava errada, porém, sim, incompleta, pois as grandezas vetoriais também podem ser medidas. Dessa forma, gostaria que eles tivessem escrito mais, explicando o que caracteriza uma grandeza escalar, pois há diferença entre grandezas escalares e grandezas vetoriais. Sendo assim, expliquei novamente do que se tratavam as grandezas escalares. Informei, também, que nos exemplos dados por eles de grandezas escalares, muitos estavam confundindo estas com as suas unidades de medida.

Comentei, também, a respeito das respostas dadas por eles para a pergunta “O que são grandezas vetoriais? Dê exemplos de grandezas vetoriais:” informando aos mesmos que cinco alunos não haviam escrito resposta alguma. Dessa forma, revisei rapidamente o que caracteriza uma grandeza vetorial, procurando deixar claro o fato de que é necessário informar as seguintes três características: número acompanhado da unidade de medida correspondente (intensidade da grandeza vetorial), direção e sentido. Exemplifiquei para os alunos: “Por exemplo, a velocidade é uma grandeza vetorial. Se temos um carro que se desloca a 70km/h, estes 70km/h referem-se apenas à intensidade da grandeza vetorial velocidade. Mas qual é a direção desta velocidade? E qual o seu sentido? Se este carro segue por esta reta (desenhei a reta no quadro) que passa pelos pontos A e B, qual será a direção da velocidade? Qual será o sentido? Será de A para B ou de B para A? Há diferença. Outra situação é se o carro segue uma trajetória curva (desenhei um círculo no quadro) à 70km/h. Qual será a direção da velocidade deste carro em um determinado instante nesta curva? Enfim, são situações diferentes. Portanto, quando estamos trabalhando com grandezas vetoriais, não basta informarmos apenas a sua intensidade, é necessário informar também a direção e o sentido."

Convidei, então, os alunos para nos deslocarmos até o laboratório de informática, pois daríamos continuidade a nossa aula neste laboratório.

Assim que chegamos no laboratório, indiquei para os estudantes quais computadores poderiam ser utilizados, já que alguns não estavam funcionando e outros localizavam-se mais ao fundo da sala, sendo que não gostaria que eles ficassem muito afastados de mim para que pudessem melhor acompanhar a aula. Chamo a atenção para a aluna M que pediu para que eu a auxiliasse no momento de ligar o computador, pois a mesma não sabia como. A figura 100 abaixo mostra os alunos assim que chegaram ao laboratório de informática.

(a)

(b)

Figura 100 - Alunos na informática.

Fonte: A autora.

Pedi para que os alunos localizassem na área de trabalho do computador a pasta "Oficina de Vetores", sendo que dentro da mesma encontrariam a subpasta "Aula 1". Os estudantes abriram o arquivo "carros.ggb"[7]. Neste arquivo temos uma animação em que há dois carros se deslocando por uma estrada e seguindo na mesma velocidade, ou seja, a

[7] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mFOgWWWkN.

velocidade de ambos possui mesma intensidade, mesma direção e mesmo sentido. (Reveja o Capítulo 3, p 56 - Figura 36).

Pedi para que os alunos clicassem no botão “play” localizado no canto inferior esquerdo da tela e observassem o que iria acontecer. Perguntei aos alunos: “Então, pessoal, o que vocês estão visualizando aí?” Vários alunos começaram a responder ao mesmo tempo, respostas do tipo: “Tem dois carros”, “Eles estão subindo a estrada”, “Os dois carros estão subindo a 60 km/h”. Então, indaguei os alunos: “Será que podemos afirmar que as velocidades destes dois carros são iguais?”. Seis alunos afirmaram que sim. Eu perguntei: “Porque?” O aluno G respondeu: “Porque os dois carros estão à 60 km/h.” Diante desta resposta, argumentei: “Mas nós vimos que velocidade é uma grandeza vetorial e que, portanto, ao compararmos velocidades, é preciso levar em consideração não só a intensidade da velocidade, que neste caso é 60km/h para os dois carros, mas também a direção e o sentido. Precisamos, então, verificar se os dois carrinhos estão se deslocando em uma mesma direção e no mesmo sentido.” O aluno C disse: “Eles estão na mesma direção, estão subindo a mesma estrada e não está acontecendo de um estar subindo e o outro estar descendo, os dois estão subindo, então estão no mesmo sentido.” Solicitei, então, que os alunos escrevessem no material as suas conclusões sobre este caso.

Enquanto os alunos escreviam, fui passando de computador em computador para explicar que eles poderiam utilizar a ferramenta do GeoGebra “Reta definida por Dois Pontos” e traçar as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ (o carro vermelho se deslocava na direção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o carro azul na direção da reta $\overleftrightarrow{CD}$). Depois, com a ferramenta “Relação entre Dois Objetos” poderiam verificar que estas retas eram paralelas e que, portanto, os carros se deslocavam em uma mesma direção. A figura 101 a seguir ilustra a tela do computador em que o aluno L estava trabalhando.

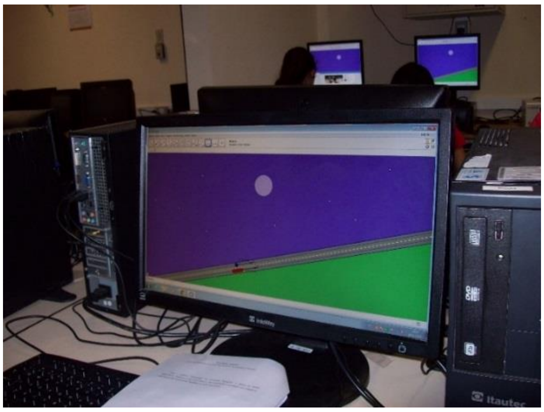


Figura 101 - Tela do computador em que o aluno L estava.

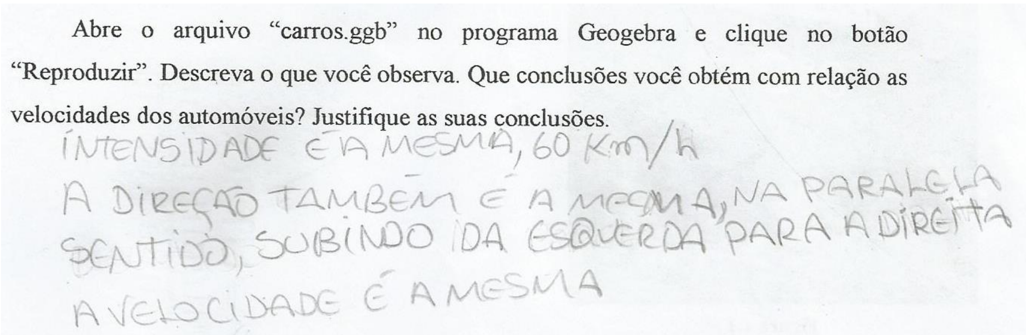
Fonte: A autora.

Chamei novamente a atenção do grande grupo, perguntando: “Vocês estão vendo que em cada um dos carrinhos temos uma seta?”. Os alunos responderam que sim. Continuei: “Junto do carrinho azul, temos a seta $\overrightarrow{CD}$ com origem no ponto C e extremidade no ponto D e junto do carrinho vermelho temos a seta $\overrightarrow{AB}$. Pessoal, a partir de agora, quando eu disser ‘seta’, ‘flecha’ ou ‘segmento orientado’, estou me referindo a um mesmo objeto, ou seja, estas palavras têm o mesmo significado.” Segui falando: “Temos que as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ estão representando as velocidades dos carrinhos. A seta $\overrightarrow{AB}$ representa a velocidade do carrinho vermelho e a seta $\overrightarrow{CD}$ representa a velocidade do carrinho azul.” Expliquei para os alunos que as flechas são utilizadas para representarem quaisquer grandezas vetoriais, pois as mesmas carregam as três informações que caracterizam uma grandeza vetorial.

Chamei a atenção dos alunos para o comprimento dos segmentos orientados, dizendo aos mesmos que podemos associar este comprimento a intensidade das grandezas vetoriais. Disse aos alunos: “Vamos medir o comprimento das setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Tem uma ferramenta no GeoGebra chamada ‘Distância, Comprimento ou Perímetro’ que podemos utilizar para calcular o comprimento destas setas.”. Poucos alunos apresentaram dificuldades para utilizar esta ferramenta. Perguntei aos alunos: “Pessoal, qual é o comprimento que vocês acharam para a as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$?” Todos disseram ter encontrado “três”. Continuei: “Ok, ambas as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ medem 3cm. Podemos, então, fazer a seguinte associação: a cada 1cm destas setas corresponde a 20km/h, sendo que os três centímetros correspondem aos 60km/h que é a intensidade das velocidades dos carros.”.

A seguir, as figuras 102, 103 e 104 ilustram as conclusões de quatro alunos referentes às velocidades dos automóveis do arquivo “carros.ggb”:

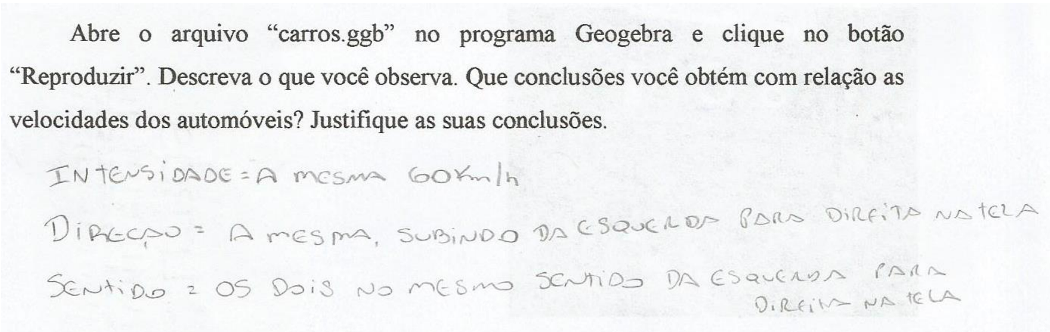
Na figura 102 a seguir, temos que a aluna R conclui que as velocidades dos automóveis são as mesmas, sendo que para isto ela analisa a intensidade, a direção e o sentido destas velocidades. Repare que a aluna escreve “a direção também é a mesma, na paralela”, pois ela construiu as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ e concluiu, com o auxílio das ferramentas do GeoGebra, que estas são paralelas e que, portanto, os carros se deslocam em uma mesma direção. Outros quatro alunos, assim como a aluna R, também fazem esta análise e concluem que as velocidades são as mesmas, sendo que um destes inclusive desenha os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ afirmando que os mesmos representam as velocidades dos carros. Já na resposta informada pela aluna B (veja a figura 103 abaixo), podemos perceber que ela confunde direção e sentido, analisando estas duas características da mesma forma, porém afirma que as velocidades dos carros possuem mesma intensidade, direção e sentido. Na figura 104 abaixo, o aluno W escreve "sentido horário" referindo-se aos sentidos das velocidades dos automóveis, porém só poderíamos escrever sentido horário se estivéssemos nos referindo ao movimento realizado pelos carros em uma trajetória circular, o que não é o caso.


Abre o arquivo "carros.ggb" no programa Geogebra e clique no botão "Reproduzir". Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos automóveis? Justifique as suas conclusões.

ÍNTENSIDADE É A MESMA, 60 Km/h
A DIREÇÃO TAMBÉM É A MESMA, NA PARALELA
SENTIDO, SUBINDO DA ESQUERDA PARA A DIREITA
A VELOCIDADE É A MESMA

Figura 102 - Resposta da aluna R

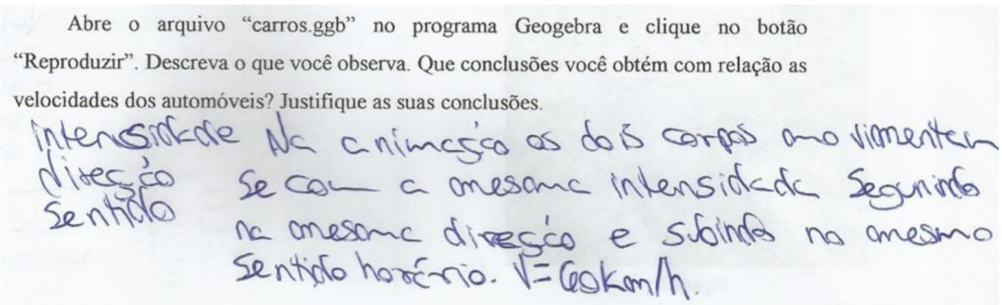
Fonte: Aluna R


Abre o arquivo "carros.ggb" no programa Geogebra e clique no botão "Reproduzir". Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos automóveis? Justifique as suas conclusões.

INTENSIDADE = A mesma 60Km/h
DIREÇÃO = A mesma, SUBINDO DA ESQUERDA PARA DIREITA NA TELA
SENTIDO = OS DOIS NO MESMO SENTIDO DA ESQUERDA PARA DIREITA NA TELA

Figura 103 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B.


Abre o arquivo "carros.ggb" no programa Geogebra e clique no botão "Reproduzir". Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos automóveis? Justifique as suas conclusões.

Intensidade
direção
Sentido

Na animação os dois carros movimentam se com a mesma intensidade seguindo na mesma direção e subindo no mesmo sentido horário. V=60km/h.

Figura 104 - Resposta do aluno W

Fonte: Aluno W

Solicitei aos alunos que minimizassem a janela do GeoGebra referente ao arquivo “carros.ggb” e abrissem o arquivo “helicopteros.ggb”[8]. Neste arquivo temos uma animação com dois helicópteros deslocando-se com velocidades diferentes, pois suas velocidades possuem em comum apenas a direção e a intensidade já que os helicópteros deslocam-se em sentidos opostos (Reveja o Capítulo 3, p. 57 - Figura 37). Disse aos alunos: “Novamente, cliquem no botão ‘play’, no canto inferior esquerdo da tela, e observem o que está acontecendo.”.

Esperei um momento e depois perguntei: “Então pessoal, o que podemos concluir com relação à velocidade dos helicópteros, neste caso?” O aluno C respondeu: “Bem, os dois estão a 100km/h”. Eu afirmei: “Ok, temos que a intensidade das velocidades é a mesma.”. Pedi para que os alunos utilizassem a ferramenta “Distância, comprimento ou perímetro” e medissem o tamanho das setas que acompanhavam os helicópteros. Alguns alunos solicitaram a minha ajuda. A aluna A, informou: “Sora, eu achei ‘quatro’.” Dirigi-me a aluna A dizendo: “Então, estes 4cm, podemos associar aos 100km/h, sendo que cada 1cm corresponde à 25km/h”. A aluna A falou: “Sim, é verdade. Daí os 4cm fecham os 100km/h, entendi.” Na figura 105 a seguir, temos um *print screen* do computador em que estava o aluno E:

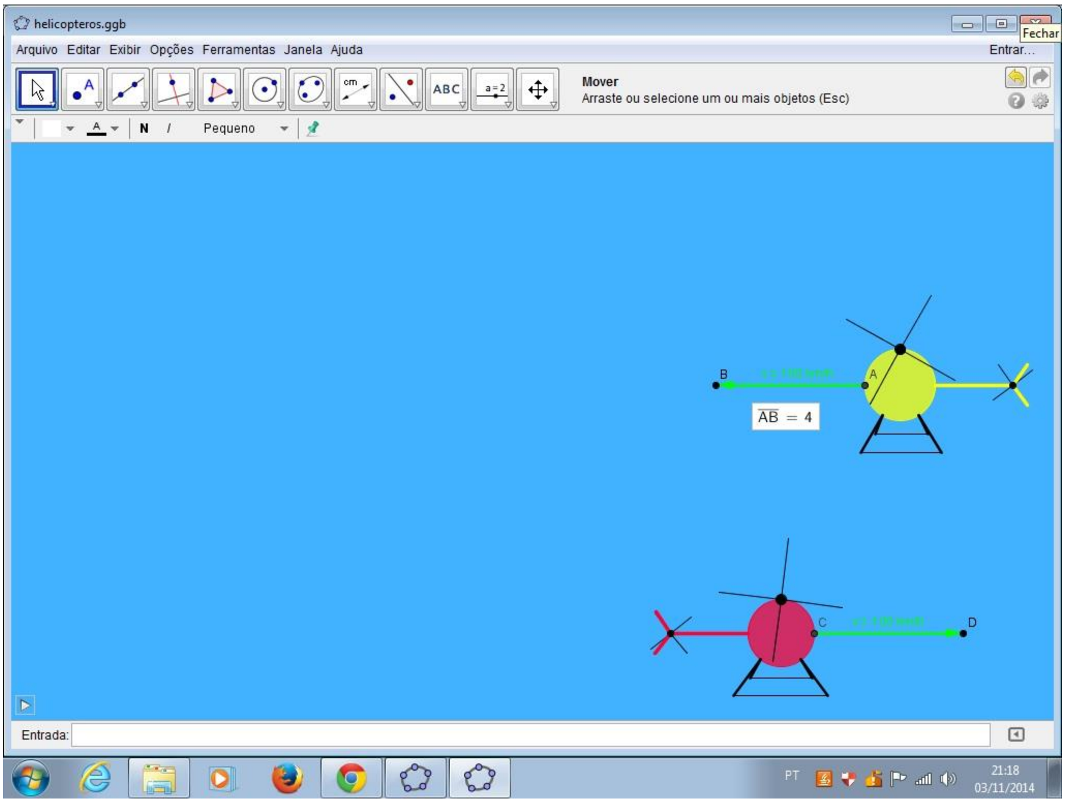


Figura 105 - *Print screen* do computador em que o aluno E estava.

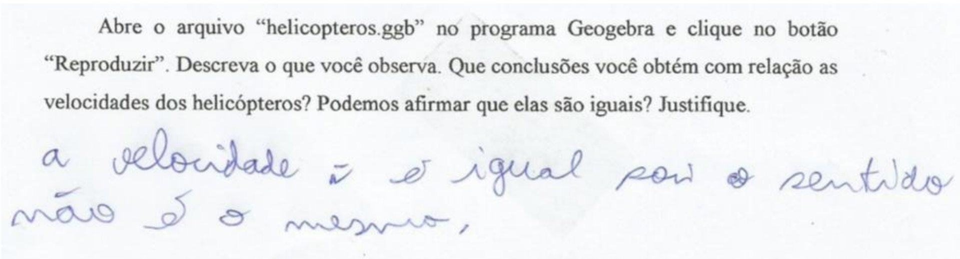
Fonte: Aluno E

[8] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mxQJ5Os8k.

Depois, solicitei aos alunos que construíssem as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, pois o helicóptero amarelo se deslocava na direção da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o vermelho na direção de $\overleftrightarrow{CD}$. Assim poderiam verificar se tratavam-se de retas paralelas e se os helicópteros seguiam numa mesma direção. Questionei os alunos com relação ao sentido das velocidades dos helicópteros, sendo que o aluno C respondeu: “Os helicópteros estão se cruzando, sora.”. “Então, eles têm sentidos iguais ou opostos?”, eu perguntei. O aluno C afirmou: “Sentidos opostos.”. O aluno L falou: “Sora, não estou entendendo. Para mim sentido e direção é a mesma coisa.”. Expliquei para o aluno L que uma reta determina uma direção, sendo que, em uma mesma reta, temos dois sentidos de percurso. Desenhei uma reta no quadro passando pelos pontos A e B e informei ao aluno L que nesta reta temos o sentido de quem vai de A para B e o sentido de quem vai de B para A.

Vejamos as figuras 106, 107 e 108 a seguir que mostram as respostas informadas por três alunos para as velocidades dos helicópteros:

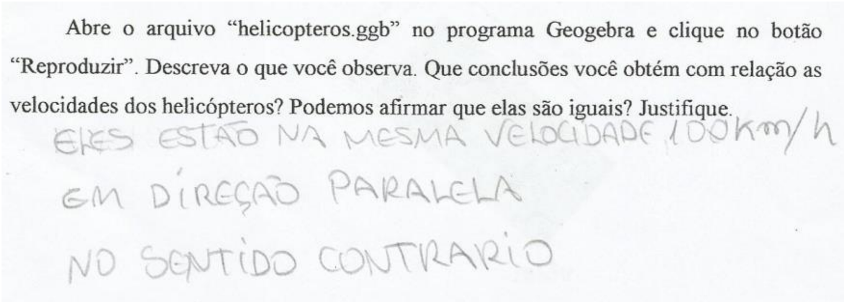
O aluno L (veja a figura 106) conclui corretamente que as velocidades dos helicópteros não são iguais, pois os sentidos não são os mesmos. Outros dois alunos analisam corretamente a intensidade, a direção e o sentido das velocidades dos helicópteros, porém não concluem se estas velocidades são ou não iguais. A figura 107 mostra a resposta da aluna R, sendo que ela escreve que os helicópteros “estão na mesma velocidade”, o que está errado. Porém, acredito que a aluna estava referindo-se aos 100km/h. Neste caso, ela deveria ter escrito que a intensidade das velocidades é a mesma, pois se os helicópteros “estão na mesma velocidade”, estas deveriam ter sentido iguais e não contrários como ela mesma coloca. Já na resposta informada pelo aluno E (figura 108), temos que ele analisa de forma correta o sentido e a intensidade das velocidades de ambos os helicópteros, porém escreve que estas velocidades são as mesmas, o que está errado. Três alunos não escreveram suas respostas por falta de tempo.


Abre o arquivo “helicopteros.ggb” no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos helicópteros? Podemos afirmar que elas são iguais? Justifique.

a velocidade ñ é igual pois o sentido não é o mesmo,

Figura 106 - Resposta do aluno L

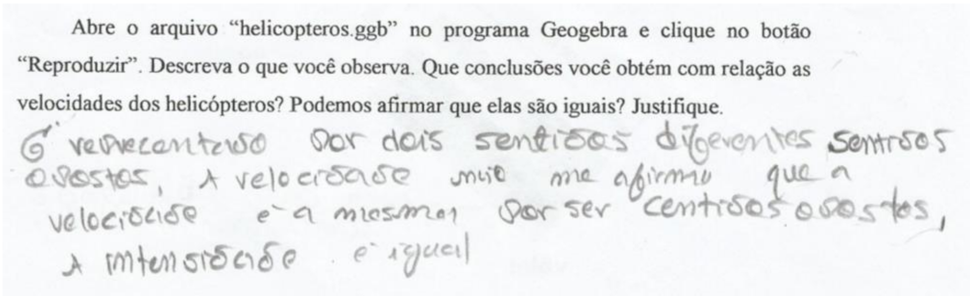
Fonte: Aluno L


Abre o arquivo “helicopteros.ggb” no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos helicópteros? Podemos afirmar que elas são iguais? Justifique.

ELES ESTÃO NA MESMA VELOCIDADE 100km/h
EM DIREÇÃO PARALELA
NO SENTIDO CONTRARIO

Figura 107 - Resposta da aluna R

Fonte: Aluna R


Abre o arquivo “helicopteros.ggb” no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos helicópteros? Podemos afirmar que elas são iguais? Justifique.

É representado por dois sentidos diferentes sentidos opostos, A velocidade muio me afirmo que a velocidade é a mesma por ser centidos opostos, A intensidade é igual

Figura 108 - Resposta do aluno E

Fonte: Aluno E

O encontro chegou ao fim. Pude perceber a dificuldade dos alunos em levar em consideração as três informações que caracterizam uma grandeza vetorial no momento de comparar velocidades, atribuindo aos objetos o fato de que eles têm uma mesma velocidade apenas analisando a intensidade da velocidade dos mesmos. Na manipulação do GeoGebra, os alunos não tiveram grandes dificuldades, sendo que quando algum aluno não conseguia utilizar determinada ferramenta, os colegas que já haviam aprendido como usar a mesma o auxiliavam.

3º Encontro:

Este encontro ocorreu em uma quarta-feira (05/11/14) e iniciou às 20h com término às 21h30min. Estavam presentes apenas quatro alunos. De acordo com os alunos presentes, haviam dois alunos da turma que estavam reunidos em uma outra sala da escola resolvendo um simulado preparado pelos professores com questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de anos anteriores, pois muitos alunos iriam realizar este exame no próximo final de semana. Estes quatro alunos que se encontravam na sala de aula do 3º ano do Ensino Médio, disseram que haviam optado por não fazer o simulado. Os demais alunos da turma não vieram à escola.

Iniciei aula com comentários referentes a algumas respostas por eles informadas ao analisarem os arquivos “carros.ggb” e “helicópteros.ggb” no encontro anterior. Perguntei aos alunos: “O que vocês querem dizer ao escreverem que os dois carros ‘andam na mesma velocidade’?”. O aluno C respondeu: “Que eles estão num mesmo ritmo.” A aluna R, disse: “Que a intensidade da velocidade é igual.”. Continuei: “Vocês estão confundindo ‘mesma velocidade’ com ‘mesma intensidade da velocidade’. Quando escrevemos que dois carros ‘andam na mesma velocidade’, significa que verificamos as intensidades, as direções e os sentidos das velocidades de ambos e concluímos que todas estas três características são iguais. Agora, se eu escrever ‘mesma intensidade da velocidade’, estou referindo-me somente aos 60 km/h, ou aos 100 km/h, por exemplo.”.

Dei continuidade aos comentários, dizendo aos mesmo que na análise das velocidades dos carrinhos havia aparecido a resposta de que os mesmos se deslocam com velocidade no sentido horário, então perguntei: “O que é sentido horário?”. A aluna R fez um movimento circular com o braço e afirmou: “É no sentido do relógio.”. Percebe-se que alguns alunos já estavam com a ideia de sentido mais elaborada, enquanto outros ainda estavam em processo de construção deste conceito, utilizando como referência situações cotidianas, como o sentido dos ponteiros do relógio.

Informei aos alunos também que havia percebido certa confusão entre direção e sentido nas respostas dadas por alguns, então perguntei: “O que vocês entendem por direção?” O aluno C respondeu: “Tipo assim, sora, se eu me levantar da cadeira e caminhar até a senhora, estou indo na sua direção.” Eu concordei: “Ok, como se tivesse uma reta que nos ligasse, não é?” “Sim”, disse o aluno C. Continuei: “Agora, se eu girar o meu corpo e caminhar em direção a (aluna) R, eu estou mudando de direção, não é?”. Todos os alunos concordaram. Então desenhei no quadro uma reta passando pelos pontos A e B e expliquei que uma reta determina uma única direção, mas que tínhamos dois sentidos nesta reta, aquele de A para B e aquele de B para A. O aluno C falou, novamente: “Que nem quando queremos ir do Bairro até o Centro”. Eu falei: “Ok, poderíamos imaginar uma reta que liga o Bairro e o Centro”. A aluna B contribui: “Daí nós temos dois sentidos: Bairro-Centro e Centro-Bairro”. Mais uma vez, percebemos que as vivências cotidianas conduzem os alunos na elaboração dos conceitos trabalhados.

Convidei, então, os alunos para irmos até o laboratório de informática. Como a aluna T não esteve presente no encontro anterior e os alunos B e C não haviam preenchido as suas respostas para o caso dos helicópteros, permiti que os alunos abrissem o arquivo “helicopteros.ggb” para escreverem as suas conclusões. A figura 109 a seguir ilustra este momento.

(a) (b)

Figura 109 - Alunos no laboratório de informática

Fonte: A autora

Enquanto os alunos observavam a animação dos helicópteros no GeoGebra, dizia para os mesmos que eles poderiam utilizar certas ferramentas do *software* para verificar, por exemplo, se as velocidades dos helicópteros tinham ou não a mesma direção. A figura 110 a seguir ilustra os alunos interagindo com o *software* e escrevendo o que entenderam deste caso

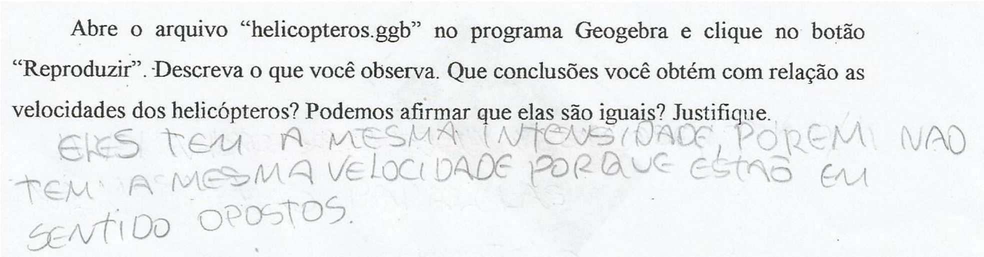
(a) (b)

Figura 110 - Alunos interagindo com o GeoGebra

Fonte: A autora

Vejamos a seguir as figuras 111 e 112 que mostram as respostas de dois alunos para as velocidades dos helicópteros.

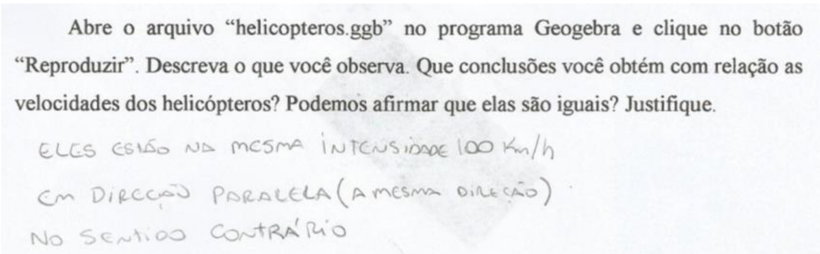
A figura 111 ilustra a resposta da aluna R. Esta aluna esteve presente no encontro anterior e analisou a animação dos helicópteros, porém, neste encontro, ela decidiu alterar a sua resposta para este caso (reveja a figura 107 do 2º encontro, p. 126). Diferentemente da resposta dada anteriormente, a aluna afirma, agora, que as velocidades dos helicópteros não são as mesmas justificando corretamente. Isto mostra que a aluna R reelaborou suas concepções iniciais sobre a ideia de velocidade, avançando no processo de compreensão deste conceito. Outros dois alunos informaram respostas parecidas com a da aluna R. Já a aluna B (figura 112) compara as velocidades dos helicópteros e analisa corretamente a intensidade, a direção e o sentido destas velocidades, porém não escreve a sua conclusão informando se os helicópteros possuem ou não a mesma velocidade.


Abre o arquivo “helicopteros.ggb” no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos helicópteros? Podemos afirmar que elas são iguais? Justifique.

ELES TEM A MESMA INTENSIDADE, POREM NAO TEM A MESMA VELOCIDADE PORQUE ESTÃO EM SENTIDO OPOSTOS.

Figura 111 - Resposta da aluna R

Fonte: Aluna R


Abre o arquivo “helicopteros.ggb” no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos helicópteros? Podemos afirmar que elas são iguais? Justifique.

ELES ESTÃO NA MESMA INTENSIDADE 100 Km/h
EM DIRECÃO PARALELA (A MESMA DIREÇÃO)
NO SENTIDO CONTRÁRIO

Figura 112 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B

Dando continuidade à aula, pedi para que os alunos fechassem o arquivo “helicopteros.ggb” e abrissem o arquivo “mruv.ggb”[9]. Neste arquivo temos uma animação em que há um edifício e do seu terraço cai um tijolo em queda livre efetuando o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado - MRUV (Reveja o Capítulo 3, p. 58 - Figura 38).

Ao abrir este arquivo e clicar no botão “Reproduzir”, o aluno C, disse: “Ahh, MRUV! É Movimento Retilíneo Uniforme, né sora!? Nós vimos isso em Física!” Eu respondi: “É quase isto! Este é o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado. E sim, vocês estudam ele na Física, assim como outros tipos de movimentos. No MRUV, como no próprio nome diz, os objetos seguem uma trajetória retilínea, ou seja, determinada por uma reta. Neste caso, vocês

[9] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mXP3FtEBl.

têm um tijolinho caindo do terraço de um edifício e ele está descrevendo um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.”.

Os alunos continuaram observando o arquivo, alteravam com o mouse o controle deslizante t referente ao tempo em segundos e assim o tijolo subia ou descia. A manipulação do *software* permite um momento de exploração da situação, para que os alunos consigam avançar na compreensão dos conceitos envolvidos.

Continuei a explicação: “Quando um objeto realiza um movimento de queda livre, por exemplo, quando jogamos uma pedra para cima ou quando, simplesmente, deixamos uma pedra cair de certa altura, temos uma aplicação do MRUV.” Perguntei aos alunos: “Vocês acham que a velocidade do tijolo nos diferentes instantes de tempo é sempre a mesma?” O aluno C, falou: “Quando a gente pega uma pedra e joga para cima, ela vai até um certo ponto e depois para. É a Terra que puxa, por causa da gravidade.” “Isso mesmo, perfeito.”, eu disse. A aluna T, falou: “Tah, mas a sora perguntou do tijolo. Sora, eu acho que a velocidade do tijolo é sempre a mesma.” Então, eu argumentei: “Mas, por exemplo, no instante de tempo t = 0s, temos que o tijolinho está parado lá no terraço.” Neste momento pedi para os alunos digitarem na “Caixa de Entrada” do GeoGebra: t = 0. Dessa forma, o tijolo retornou a posição inicial. Então, eu perguntei: Qual é a intensidade da velocidade do tijolo quando o tempo é 0s?”. Todos os alunos responderam: “É zero, sora.” Continuei: “Pois é, então, a medida que o tempo passa, o tijolo não fica mais parado, começa a cair, então, há uma mudança na velocidade do tijolo. Mas que mudança é essa? É a direção da velocidade que está mudando? É o sentido da velocidade? É a intensidade?”. A aluna B, contribuiu: “Eu acho que é a intensidade, porque quando os objetos caem, a intensidade da velocidade aumenta por causa da gravidade.”. “Isso, a medida que o tijolo vai chegando mais perto do solo, a intensidade da velocidade é maior. Até que ele atinge o solo e para. Daí, temos que a velocidade é igual a 0m/s”, dirigi-me a aluna B. Perguntei para os alunos: “A direção da velocidade muda?”. Os alunos responderam que não. Continuei: “O tijolo segue sempre uma trajetória retilínea. E o sentido da velocidade do tijolo?”. “Também não muda, o tijolo está caindo, o sentido é sempre de cima para baixo.”, disse o aluno C.

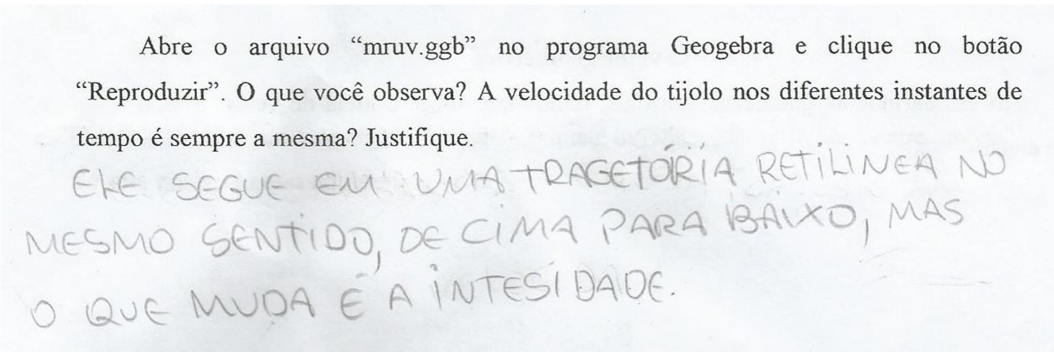
Pedi para que os alunos digitassem na “Caixa de Entrada” do GeoGebra t = 0.9 e, depois, t = 2.5. Chamei a atenção deles para o segmento orientado que acompanha o tijolo. Perguntei: “Vocês estão percebendo que o tamanho da seta está aumentando?” Continuei: “Como a seta está aumentando de tamanho, temos que a intensidade da velocidade do tijolo está aumentando.”. Pedi para que os alunos utilizassem a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” e, assim, poderiam obter o cálculo do comprimento da flecha nos instantes de tempo t = 0,9s e t = 2,5s. A figura 113 a seguir, mostra a aluna B, localizando esta ferramenta no GeoGebra.

Figura 113 - Aluna B procurando a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” no GeoGebra

Fonte: A autora

Vejamos abaixo, as respostas informadas pelos alunos para este caso, após este momento de discussão:

A aluna R (veja a figura 114 abaixo), não informou se a velocidade do tijolo é ou não é sempre a mesma, porém justificou corretamente, deixando claro que a intensidade da velocidade do tijolo muda. Outros dois alunos escreveram respostas parecidas com a da aluna R. A aluna B (veja a figura 115 a seguir) apenas escreveu que o tijolo “segue em uma trajetória retilínea no mesmo sentido” sem informar nada a respeito da intensidade da velocidade do mesmo.



Abre o arquivo “mruv.ggb” no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. O que você observa? A velocidade do tijolo nos diferentes instantes de tempo é sempre a mesma? Justifique.

ELE SEGUE EM UMA TRAGETÓRIA RETILINEA NO MESMO SENTIDO, DE CIMA PARA BAIXO, MAS O QUE MUDA É A INTESIDADE.

Figura 114 - Resposta da aluna R

Fonte: Aluna R

Abre o arquivo “mruv.ggb” no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. O que você observa? A velocidade do tijolo nos diferentes instantes de tempo é sempre a mesma? Justifique.

ELE SEGUE EM UMA TRAJETÓRIA RETILÍNEA NO MESMO SENTIDO

Figura 115 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B

Solicitei, então, que os alunos abrissem o arquivo “roda_gigante.ggb”[10]. Neste arquivo, temos uma animação em que uma roda gigante composta por dez banquinhos gira no sentido anti-horário efetuando o Movimento Circular Uniforme (Reveja o Capítulo 3, p. 59 - Figura 39) Em seguida, falei: “Quero que vocês escolham pelo menos dois dos banquinhos e comparem as suas velocidades.”. O aluno C, disse: “Sora, na roda gigante os banquinhos estão se movendo em círculo.”. A aluna R, completou: “E no sentido anti-horário.”. Concordei com os alunos: “Sim, neste caso, temos a aplicação do MCU, Movimento Circular Uniforme. Vocês também costumam estudar este movimento na disciplina de Física. Na roda gigante os banquinhos descrevem uma trajetória circular.”.

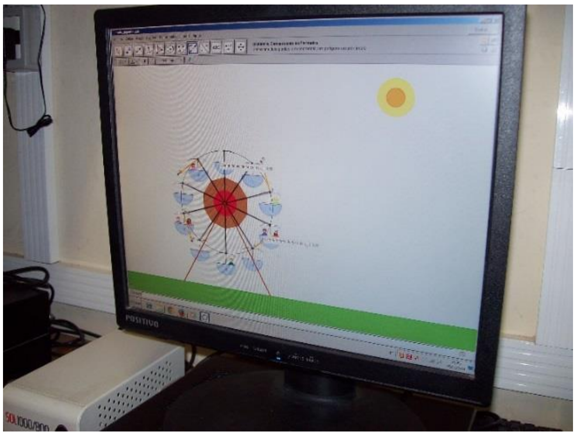
Ao questionar os alunos a respeito da intensidade da velocidade dos banquinhos, todos afirmaram ser 3m/s, porém ao indaga-los sobre a direção e o sentido destas velocidades, os alunos afirmavam ser circular no sentido anti-horário. Percebi, então, que os mesmos estavam confundindo a trajetória realizada pelos bancos da roda gigante com a direção e o sentido de suas velocidades.

Dessa forma, auxiliei os alunos na análise das velocidades dos banquinhos. Utilizando um dos computadores para que todos pudessem acompanhar a exploração, analisamos em conjunto os banquinhos de números quatro e seis. Chamei a atenção dos alunos para as setas $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$, que representavam as velocidades destes banquinhos. Tracei as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$. Os alunos também faziam o mesmo no arquivo “roda_gigante.ggb” dos seus computadores. Perguntei: “As retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ possuem a mesma direção?”. Todos os alunos afirmaram que não. Continuei: “Então, os segmentos orientados $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$ não possuem a mesma direção, pois o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ está apoiado na reta $\overleftrightarrow{CD}$ e o segmento orientado $\overrightarrow{EF}$ está

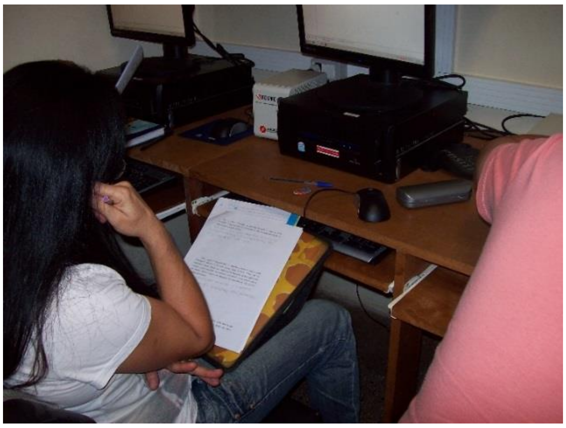
[10] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mS5sTeySX.

apoiado na reta $\overleftrightarrow{EF}$. Neste caso, nem é possível comparar os sentidos das flechas $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$". "É mesmo, sora? Porque?", perguntou a aluna R. Respondi que só comparamos sentidos quando estamos lidando com uma mesma direção. Cliquei no botão "Reproduzir" e disse aos alunos: "Observem, estas flechas mudam de direção a todo instante. A única coisa que elas têm em comum é o comprimento referente à intensidade de 3m/s dos banquinhos quatro e seis.".

Na figura 116 (a) abaixo, temos a imagem da tela do computador em que a aluna R estava interagindo com as ferramentas do *software* GeoGebra e na figura 116 (b) a mesma aluna pensando sobre o que foi discutido e formulando a sua resposta para este caso.



(a)

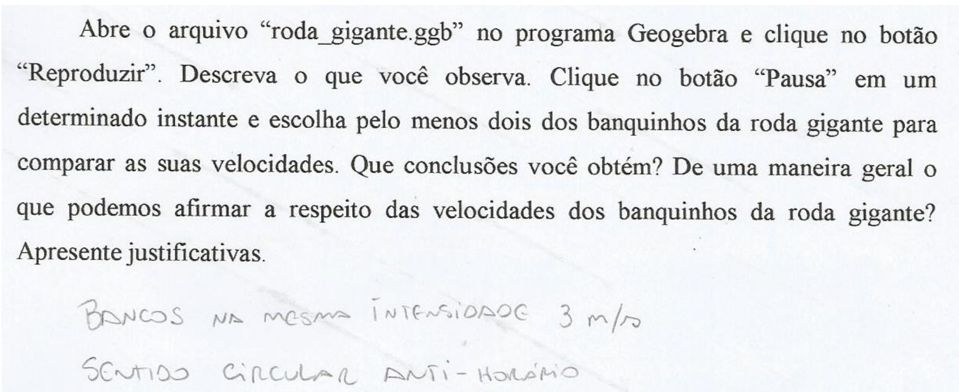


(b)

Figura 116 - Aluna R interagindo com a animação "roda gigante" e escrevendo suas conclusões

Fonte: A autora

As figuras 117 e 118 abaixo ilustram, respectivamente, as respostas informadas pelas alunas B e R, sendo que os outros dois alunos informaram respostas parecidas com a resposta da aluna R:



Abre o arquivo "roda_gigante.ggb" no programa Geogebra e clique no botão "Reproduzir". Descreva o que você observa. Clique no botão "Pausa" em um determinado instante e escolha pelo menos dois dos banquinhos da roda gigante para comparar as suas velocidades. Que conclusões você obtém? De uma maneira geral o que podemos afirmar a respeito das velocidades dos banquinhos da roda gigante? Apresente justificativas.

BANCOS NA MESMA INTENSIDADE 3 m/s

SENTIDO CIRCULAR ANTI-HORÁRIO

Figura 117 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B

Abre o arquivo "roda_gigante.ggb" no programa Geogebra e clique no botão "Reproduzir". Descreva o que você observa. Clique no botão "Pausa" em um determinado instante e escolha pelo menos dois dos banquinhos da roda gigante para comparar as suas velocidades. Que conclusões você obtém? De uma maneira geral o que podemos afirmar a respeito das velocidades dos banquinhos da roda gigante? Apresente justificativas.

A INTENSIDADE DO BANCO É A MESMA 3 m/s, POREM A DIRECAÕ ESTÁ MUDANDO.

Figura 118 - Resposta da aluna R

Fonte: Aluna R

Chamei a atenção dos alunos dizendo: "Bem, pessoal, até agora nós vimos quatro animações no GeoGebra envolvendo a velocidade.". Em seguida, questionei os alunos: "O que podemos concluir com relação à grandeza vetorial velocidade? Quando podemos afirmar que temos velocidades iguais?". Deixei os alunos pensarem e escreverem as suas conclusões.

Todos os alunos citaram em suas respostas as três informações que caracterizam as grandezas vetoriais (direção, sentido e intensidade). Parece que os alunos estavam, finalmente, percebendo a necessidade de comparar estas três informações para analisar se as velocidades de dois objetos são iguais. Veja as respostas de dois alunos nas figuras 119 e 120 abaixo:

Portanto, o que podemos concluir após termos vistos essas quatro situações que envolvem a grandeza vetorial velocidade? Quando podemos afirmar que temos velocidades iguais?

Quando temos → a mesma intensidade
→ a mesma direção
→ a mesma sentido.

Figura 119 - Resposta da aluna T

Fonte: Aluna T

Portanto, o que podemos concluir após termos vistos essas quatro situações que envolvem a grandeza vetorial velocidade? Quando podemos afirmar que temos velocidades iguais?

sentido Quando a intensidade e a direção e o são iguais, pode-se dizer que a velocidade são as mesmas.

Figura 120 - Resposta do aluno C

Fonte: Aluno C

Dando continuidade à aula, disse aos alunos que quando estudamos grandezas vetoriais, temos que surge a ideia de vetor. Questionei os alunos: “Mas o que é vetor? Vocês sabem me dizer?”. Os alunos ficaram quietos. Expliquei que até agora nas quatro situações estudadas sobre a grandeza vetorial velocidade, por meio do GeoGebra, vimos a presença dos segmentos orientados para representar as velocidades, pois os mesmos carregam a informação da direção, do sentido e da intensidade desta grandeza. Disse aos alunos: “Porém, nós podemos utilizar as flechinhas para representar qualquer grandeza vetorial, não só a velocidade. Podemos representar a força, a aceleração, por exemplo, por meio das setas.”.

Expliquei, então, aos alunos que quando temos um conjunto de setas com mesma direção, sentido e comprimento, este conjunto é um vetor.

Observe as figuras 121 e 122 abaixo que ilustram as respostas de duas alunas, os demais alunos informaram respostas parecidas:

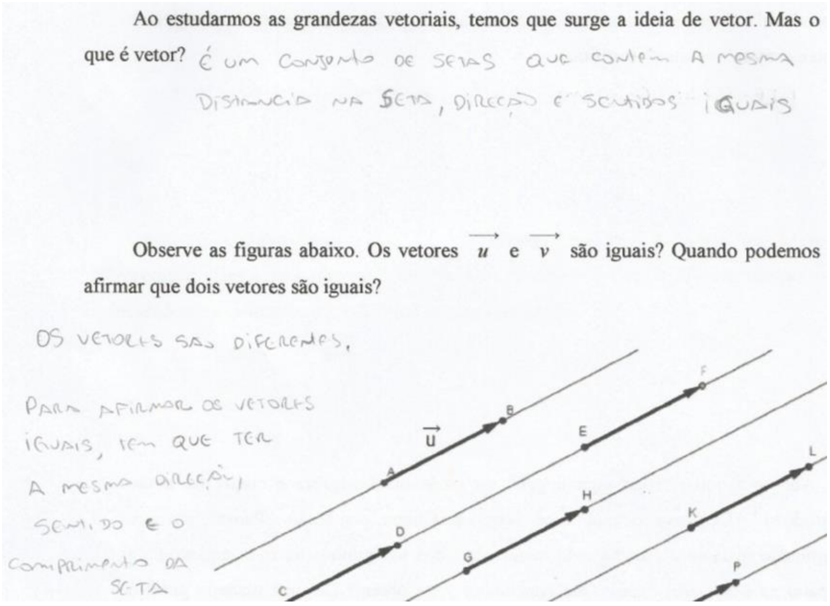


Figura 121 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B

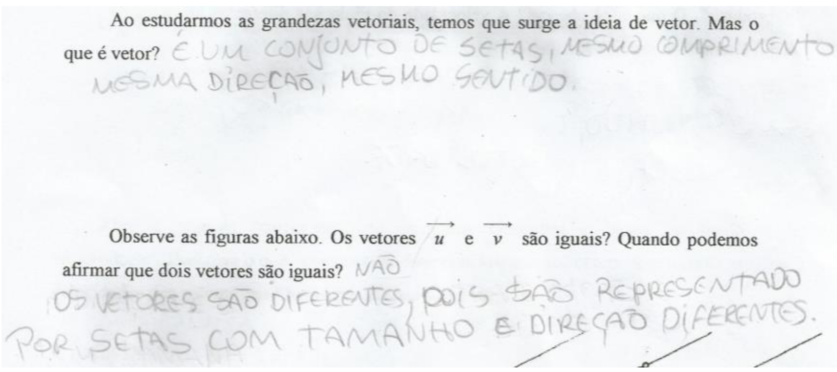


Figura 122 - Resposta da aluna R

Fonte: Aluna R

Encerramos o encontro, sendo que a aula foi bem produtiva. A aluna R comentou: “Bah, professora! É bem melhor de aprender assim, no GeoGebra.”.

4º Encontro:

Este encontro ocorreu em uma segunda-feira (10/11/14) e iniciou às 20h, com duração de 1h30min. Cinco alunos estavam presentes. Entreguei para os estudantes o material referente ao primeiro encontro e iniciamos a aula. Revisei, rapidamente, a noção de vetor, sendo que esta foi a última ideia discutida no encontro anterior. Em seguida, disse aos alunos: “Na aula de hoje, nós vamos focar nos exercícios deste material”. (Ver Apêndice A – Encontro 1 – Atividades, p. 182).

Na resolução da primeira atividade (“O que é um segmento orientado? O que é um vetor? Há diferença entre ambos? Se sim, quais são essas diferenças?”), os alunos encontraram dificuldades.

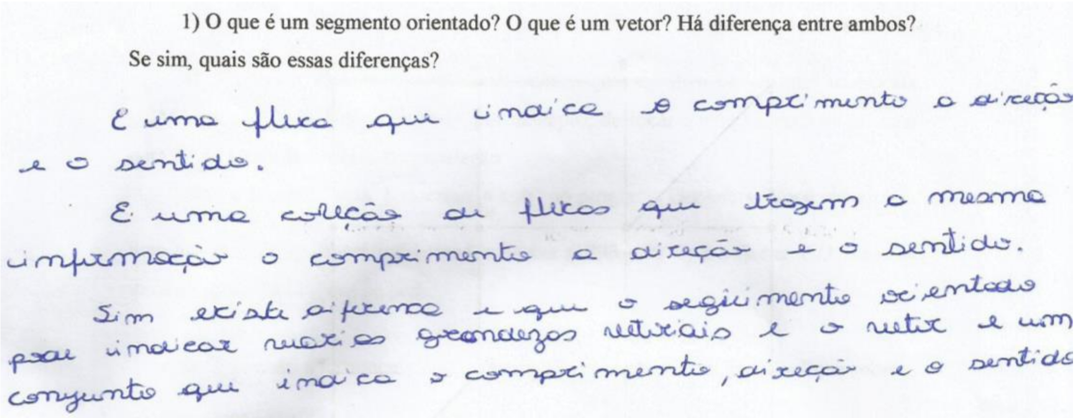
A figura 123 a seguir ilustra os alunos pensando sobre a primeira questão, elaborando as suas respostas e registrando as mesmas.

(a) (b)

Figura 123 - Alunos elaborando respostas

Fonte: A autora

As figuras 124 e 125 a seguir ilustram as respostas de dois alunos para a primeira atividade. O que gostaríamos de ter observado nas respostas informadas pelos alunos é o fato de que os segmentos orientados são representações para o objeto matemático vetor, ou seja, a diferença está no fato de que um é representante e o outro representado. A resposta informada pelo aluno C (figura 124) é a que mais se aproxima do que esperávamos, pois o mesmo afirma corretamente que os segmentos orientados são utilizados para “indicar” as grandezas vetoriais. Já os demais alunos informaram respostas parecidas com a da aluna B (figura 125), sem citar o fato de que os segmentos orientados são utilizados para representar os vetores.

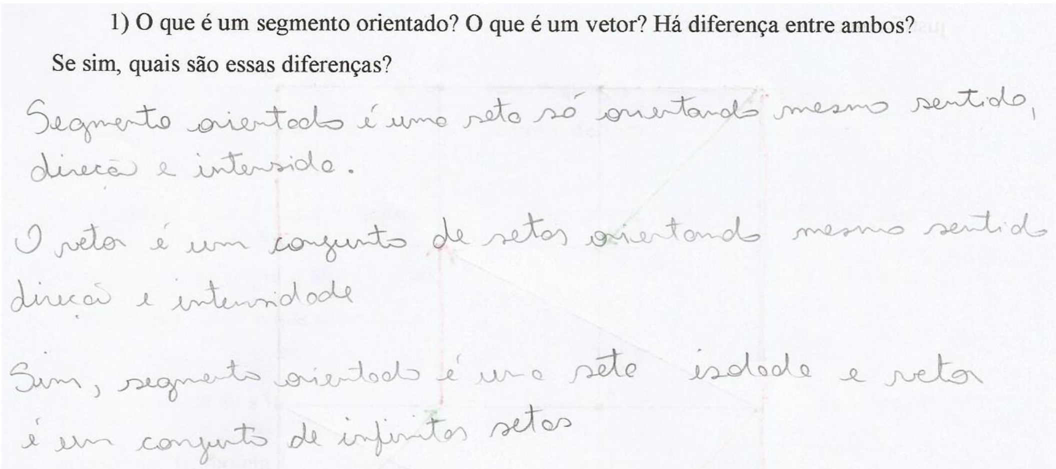


1) O que é um segmento orientado? O que é um vetor? Há diferença entre ambos?
Se sim, quais são essas diferenças?

É uma flexa que indica o comprimento a direção e o sentido.
É uma coleção de flexas que trazem a mesma informação o comprimento a direção e o sentido.
Sim existe diferença e que o segimento orientado para indicar vetores grandezas vetoriais e o vetor e um conjunto que indica o comprimento, direção e o sentido

Figura 124 - Resposta do aluno C

Fonte: Aluna C



1) O que é um segmento orientado? O que é um vetor? Há diferença entre ambos?
Se sim, quais são essas diferenças?

Segmento orientado é uma seta só orientando mesmo sentido, direção e intensidade.
O vetor é um conjunto de setas orientando mesmo sentido direção e intensidade
Sim, segmento orientado é uma seta isolada e vetor é um conjunto de infinitas setas

Figura 125 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B

Concluída a primeira atividade, convidei os alunos para irmos ao laboratório de informática. Chegando lá, solicitei aos mesmos que abrissem a pasta "Oficina de Vetores", localizada na área de trabalho dos computadores, depois a subpasta "Aula 1" e, então, o arquivo "aula_1_questao_2.ggb"[11]. Neste arquivo, temos as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ paralelas, de mesmo sentido e comprimento (veja a figura 126 a seguir).

[11] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mQMBDTqNq.

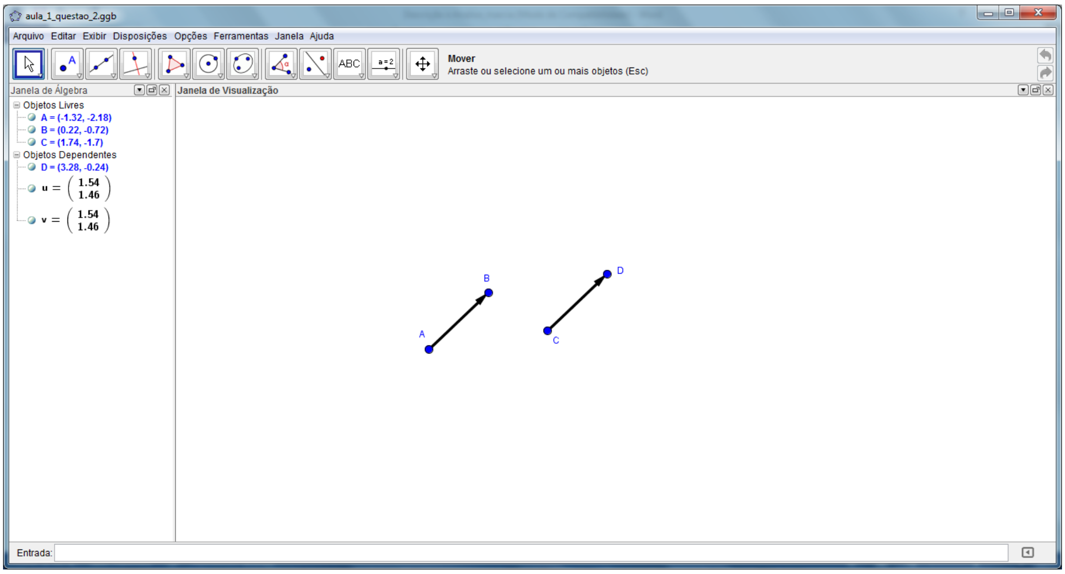


Figura 126– Imagem do arquivo "aula_1_questao_2.ggb"

Fonte: A autora

Fui até um dos computadores e manipulei as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ presentes no arquivo "aula_1_questao_2.ggb", para indicar as manipulações e explorações que poderiam ser feitas no arquivo. A figura 127 abaixo mostra alguns dos alunos visualizando e interagindo com este arquivo no GeoGebra.

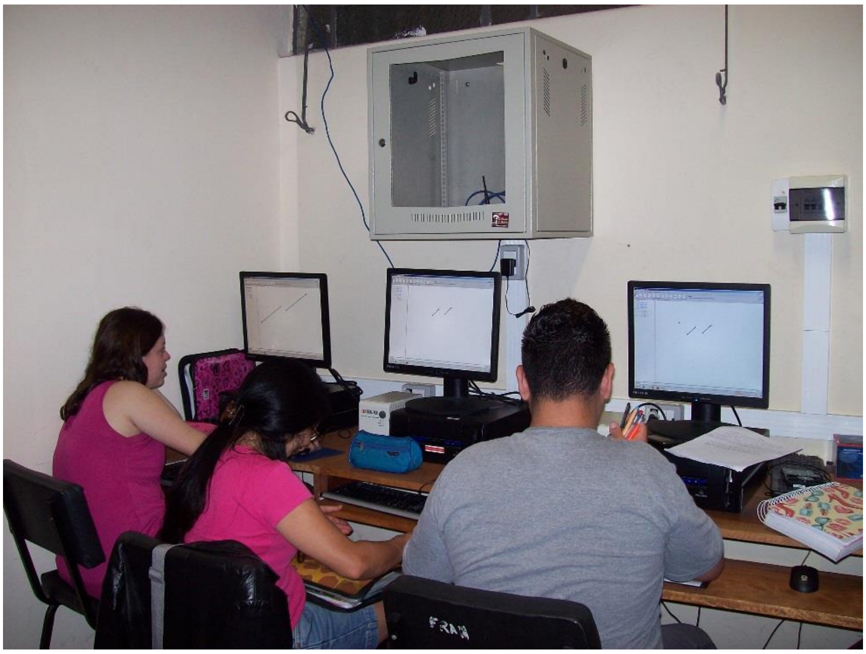
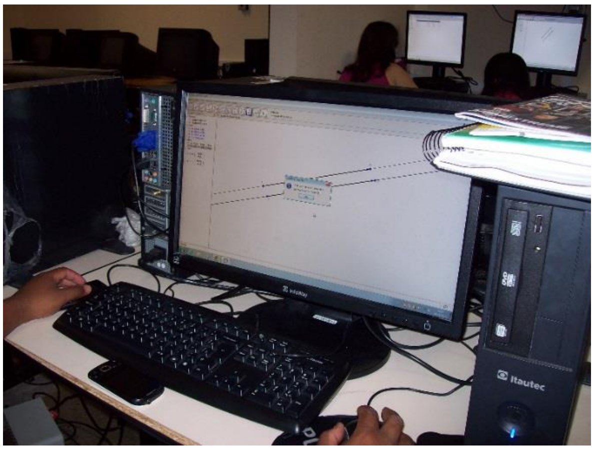


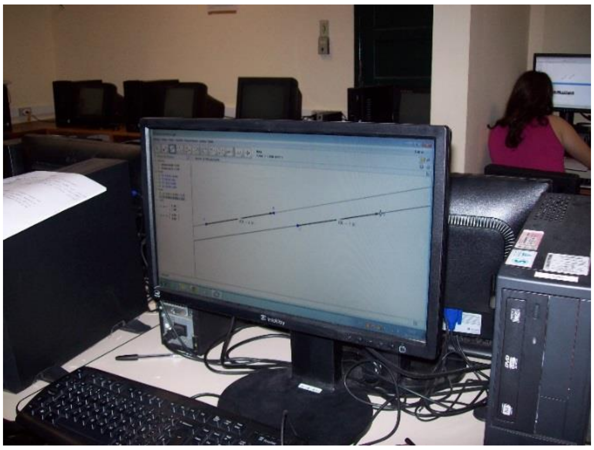
Figura 127 - Alunos interagindo com o arquivo "aula_1_questao_2.ggb"

Fonte: A autora

A partir deste arquivo, os alunos poderiam explorá-lo para responder a segunda questão. Comentei com os alunos que os mesmos poderiam utilizar certas ferramentas do GeoGebra para verificar se as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ do arquivo "aula_1_questao_2.ggb" possuíam mesmo comprimento e direção. Na figura 128 a seguir, alunos manipulam o este arquivo e utilizam as ferramentas do GeoGebra para fazerem as suas verificações.



(a)



(b)

Figura 128 - Alunos utilizando as ferramentas do GeoGebra

Fonte: A autora

Mostrei aos alunos também que eles poderiam apenas mover uma das setinhas, por meio da ferramenta "Mover", posicionando a mesma sobre a outra e verificando, assim, que ambas coincidem e que possuem mesmo comprimento, direção e sentido representando o mesmo vetor.

Para responder a pergunta "O que podemos dizer a respeito do quadrilátero ABDC?", também integrante da segunda atividade, os estudantes precisaram de ajuda. A partir de discussões sobre as propriedades dos quadriláteros, os alunos utilizaram as ferramentas do GeoGebra para verificar que o quadrilátero tratava-se de um paralelogramo (veja a figura 129 a seguir).

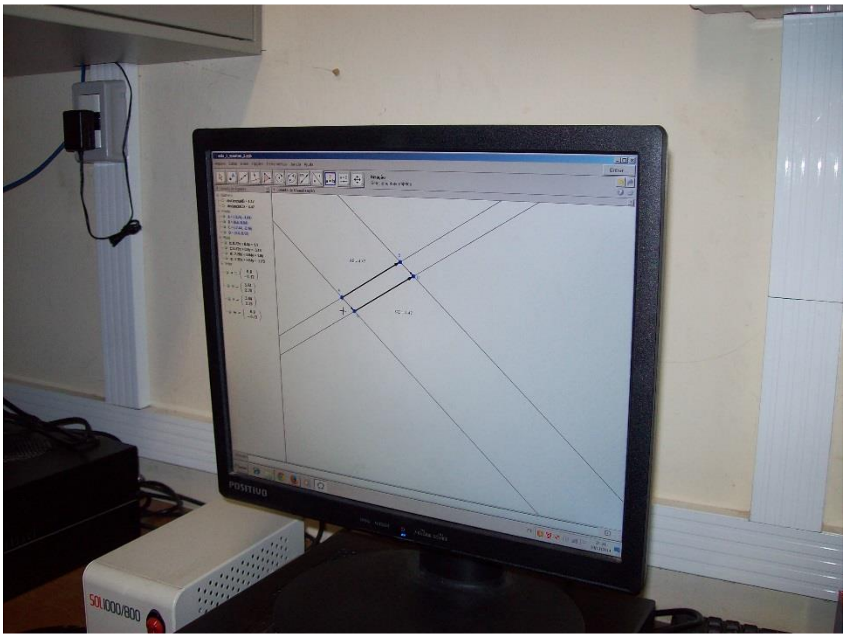
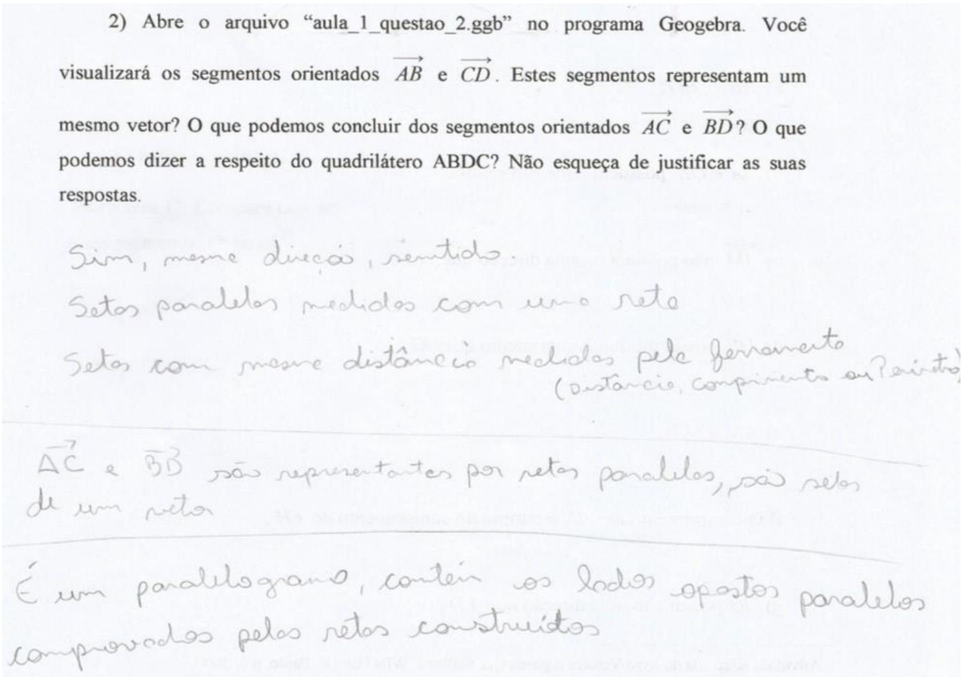


Figura 129 - Tela do computador em que o aluno C estava

Fonte: A autora

As figuras 130, 131 e 132 a seguir mostram as respostas informadas por três alunos para a segunda questão:

Para a pergunta “Estes segmentos ($\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$) representam um mesmo vetor?”, todos os alunos responderam que sim, citando o fato de que são setas paralelas (ou que possuem mesma direção), de mesmo sentido e comprimento (o termo intensidade é citado por dois alunos). Os alunos informam que chegaram a estas conclusões utilizando as ferramentas do GeoGebra. Alguns alunos são mais específicos citando o nome da ferramenta utilizada como podemos ver nas respostas informadas pelos alunos B (figura 130) e L (figura 131). Observe que o aluno L (figura 131) confunde os termos “reta’ e ‘seta” ao escrever “as retas ($\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$) fazem parte do mesmo vetor”. Já para a pergunta “O que podemos concluir dos segmentos orientados $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$?”, a maioria dos alunos (três) percebe que as setas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ representam o mesmo vetor, mas que este é diferente daquele representado pelas flechas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Repare que o aluno W (figura 132) utiliza erroneamente a notação de ponto para indicar os segmentos orientados. Para a última pergunta “O que podemos dizer a respeito do quadrilátero ABDC?”, ainda pertencente à segunda atividade, temos que todos os alunos afirmaram que ABDC é paralelogramo, porém as justificativas apresentadas estão incompletas ou equivocadas. Apenas a aluna B (figura 130) justifica corretamente a sua resposta. Repare que o aluno W (figura 132) utiliza o termo “linha” para se referir aos lados do paralelogramo ABDC, afirmando que este quadrilátero “possuem 4 linhas paralelas”. Algo parecido, podemos observar na justificativa dada pelo aluno L (figura 131) ao afirmar que o quadrilátero ABDC “é um paralelogramo porque todas as retas são paralelas”. Isto mostra que os alunos ainda não se apropriaram de uma linguagem matemática mais elaborada e correta.



2) Abre o arquivo “aula_1_questao_2.ggb” no programa Geogebra. Você visualizará os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Estes segmentos representam um mesmo vetor? O que podemos concluir dos segmentos orientados $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$? O que podemos dizer a respeito do quadrilátero ABDC? Não esqueça de justificar as suas respostas.

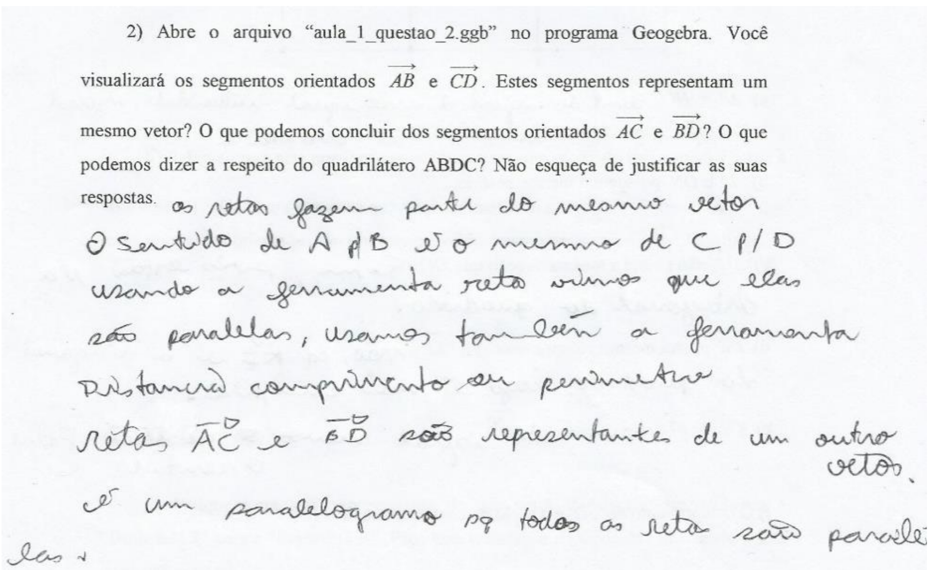
Sim, mesma direção, sentido.
Retas paralelas medidas com uma reta
Retas com mesma distância medidas pela ferramenta (distância, comprimento ou perímetro)

$\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são representantes por retas paralelas, são retas de um vetor

É um paralelogramo, contém os lados opostos paralelos comprovados pelas retas construídos

Figura 130 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B

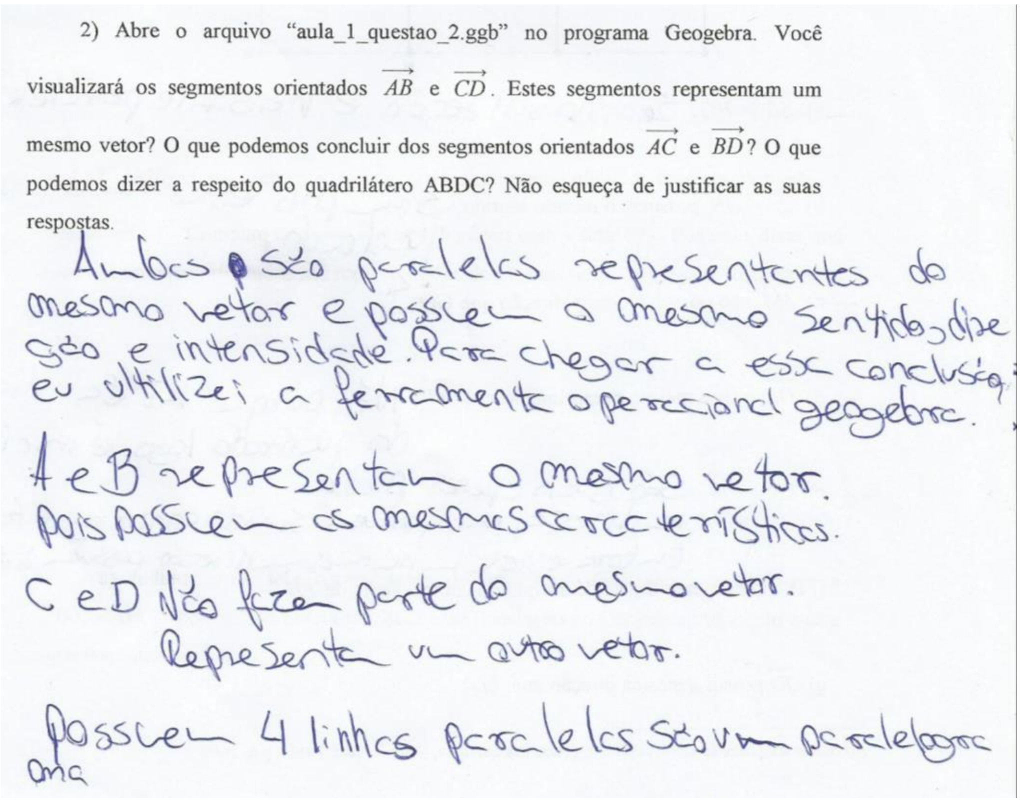


2) Abre o arquivo “aula_1_questao_2.ggb” no programa Geogebra. Você visualizará os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Estes segmentos representam um mesmo vetor? O que podemos concluir dos segmentos orientados $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$? O que podemos dizer a respeito do quadrilátero ABDC? Não esqueça de justificar as suas respostas.

os retas fazem parte do mesmo vetor
O sentido de A p/ B é o mesmo de C p/ D
usando a ferramenta reta vimos que elas são paralelas, usamos também a ferramenta Distancia comprimento ou perimetro
retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são representantes de um outro vetor.
é um paralelogramo pq todas as reta são paralelas.

Figura 131 - Resposta do aluno L

Fonte: Aluno L


2) Abre o arquivo “aula_1_questao_2.ggb” no programa Geogebra. Você visualizará os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Estes segmentos representam um mesmo vetor? O que podemos concluir dos segmentos orientados $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$? O que podemos dizer a respeito do quadrilátero ABDC? Não esqueça de justificar as suas respostas.

Ambos são paralelas representantes do mesmo vetor e possuem o mesmo sentido, direção e intensidade. Para chegar a essa conclusão eu ultilizei a ferramenta operacional geogebra.

A e B representam o mesmo vetor. pois possuem as mesmas caracteristicas.

C e D Não fazem parte do mesmo vetor. Representam um outro vetor.

Possuem 4 linhas paralelas são um paralelograma

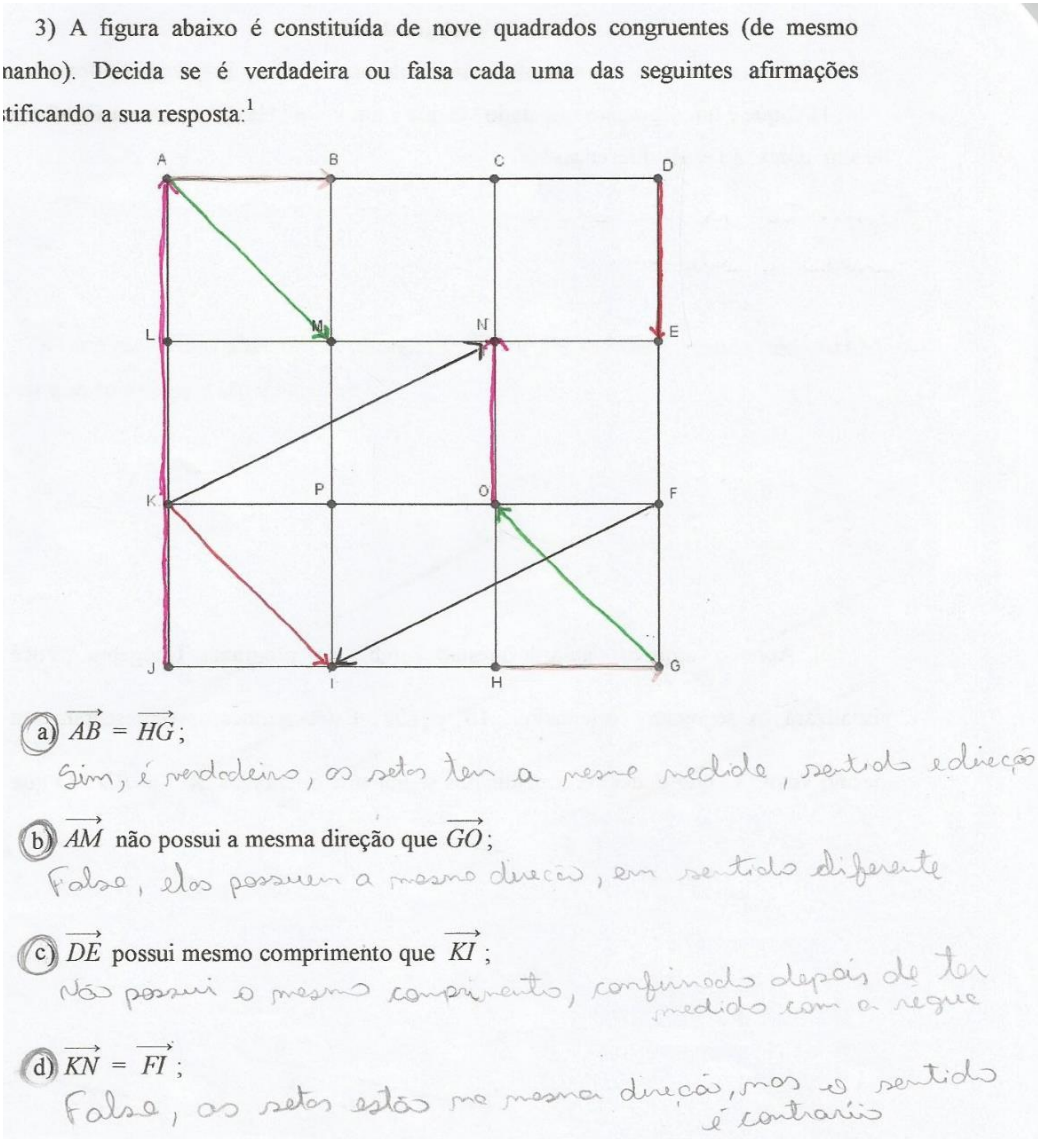
Figura 132 - Resposta do aluno W

Fonte: Aluno W

Na resolução da terceira atividade, os alunos conseguiram fazê-la de maneira mais autônoma.

As figuras 133, 134 e 135 ilustram as respostas de três alunos para o terceiro exercício:

No item (a), apenas o aluno W (figura 134) não registrou se a afirmação é verdadeira ou falsa, pois todos os demais alunos escreveram que a afirmação é verdadeira e justificaram corretamente. Repare que o aluno C (figura 135) escreve que as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{HG}$ “tem o mesmo lado”, acredito que o aluno quis se referir ao fato de que estas setas encontram-se apoiadas sobre lados de quadrados congruentes e que, portanto, as mesmas possuem medida igual. No item (b), três alunos afirmaram corretamente que a alternativa é falsa, justificando suas respostas. Os alunos W (figura 134) e L informaram respostas idênticas, sendo que perceberam que as setas $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{GO}$ encontram-se sobre a diagonal do quadrado ADGJ. No item (c), todos afirmaram corretamente que a alternativa é falsa, escrevendo justificativas corretas. A aluna B (figura 133) escreveu que mediu os segmentos orientados $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{KI}$ com régua. O aluno C (figura 135) indicou a seta $\overrightarrow{KI}$ de maneira errada em sua escrita. Os alunos W (figura 134) e L informaram respostas idênticas, afirmando que $\overrightarrow{KI}$ está na diagonal do quadrado IJKP e, portanto, possui comprimento maior que $\overrightarrow{DE}$ que está sobre o lado do quadrado CDEN (de acordo com o enunciado da questão os quadrados IJKP e CDEN são congruentes). No último item (d), apenas o aluno C (figura 135) não respondeu, todos os demais alunos afirmaram que esta alternativa é falsa, sendo que identificaram que os sentidos das setas $\overrightarrow{KN}$ e $\overrightarrow{FI}$ são opostos. Repare que o aluno W (figura 134) escreve que estas setas "são iguais apenas na direção", porém as mesmas também possuem comprimentos iguais.


3) A figura abaixo é constituída de nove quadrados congruentes (de mesmo
nanho). Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações
tificando a sua resposta:[1]

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$;

Sim, é verdadeiro, as setas tem a mesma medida, sentido e direção

b) $\overrightarrow{AM}$ não possui a mesma direção que $\overrightarrow{GO}$;

Falso, elas possuem a mesma direção, em sentido diferente

c) $\overrightarrow{DE}$ possui mesmo comprimento que $\overrightarrow{KI}$;

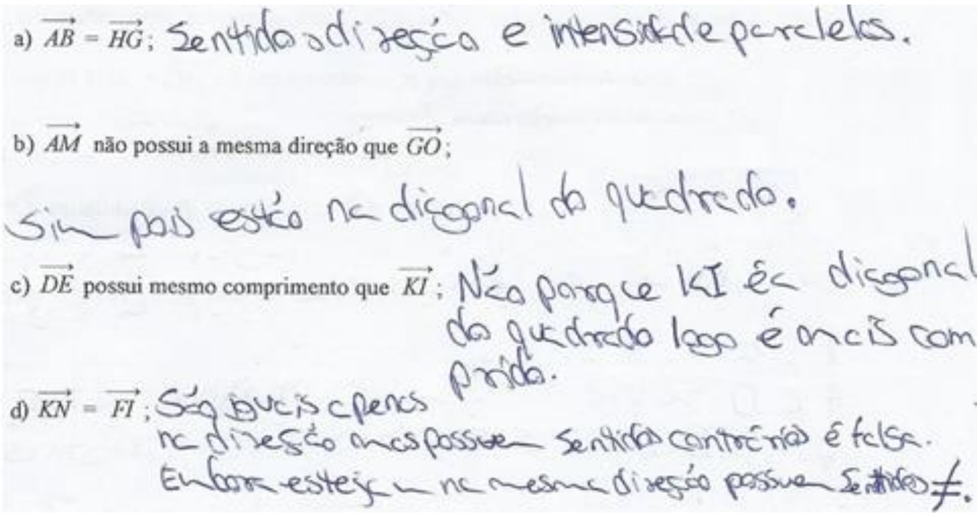
Não possui o mesmo comprimento, confirmado depois de ter medido com a regua

d) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$;

Falso, as setas estão na mesma direção, mas o sentido é contrário

Figura 133 - Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B



a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$; Sentido, direção e intensidade paralelos.

b) $\overrightarrow{AM}$ não possui a mesma direção que $\overrightarrow{GO}$;

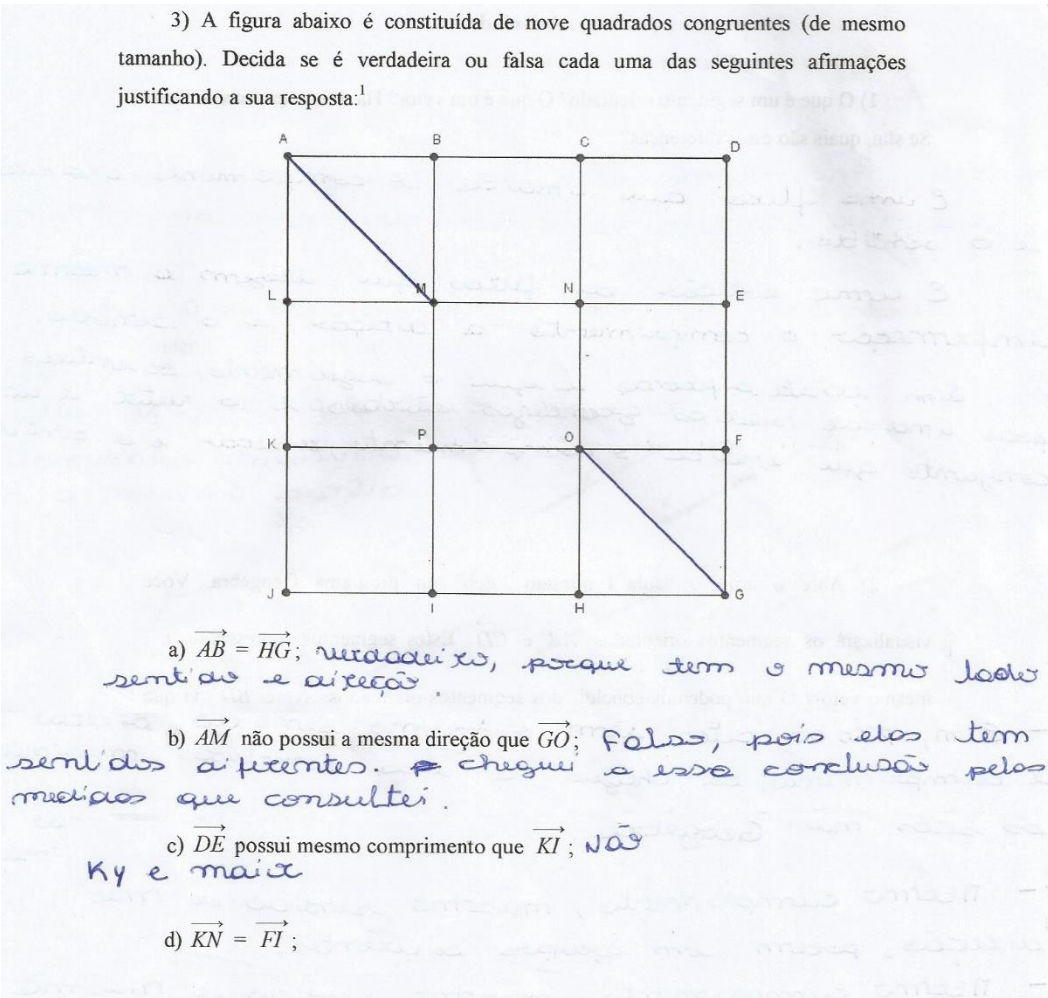
Sim pois estão na diagonal do quadrado.

c) $\overrightarrow{DE}$ possui mesmo comprimento que $\overrightarrow{KI}$; Não porque KI é diagonal do quadrado logo é mais comprida.

d) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$; São iguais apenas na direção mas possuem sentidos contrários é falsa. Embora estejam na mesma direção possuem sentidos ≠.

Figura 134 - Resposta do aluno W

Fonte: Aluno W



3) A figura abaixo é constituída de nove quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações justificando a sua resposta:[1]

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$; verdadeiro, porque tem o mesmo lado sentido e direção.

b) $\overrightarrow{AM}$ não possui a mesma direção que $\overrightarrow{GO}$; Falso, pois eles tem sentidos diferentes. Cheguei a essa conclusão pelas medidas que consultei.

c) $\overrightarrow{DE}$ possui mesmo comprimento que $\overrightarrow{KI}$; Não Ky e maior

d) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$;

Figura 135 - Resposta do aluno C

Fonte: Aluno C

O encontro terminou e os alunos entregaram seus materiais. O exercício de número quatro não chegou a ser resolvido. Portanto, voltaríamos ao mesmo em um outro momento.

5º Encontro:

Este encontro ocorreu em uma quarta-feira (12/11/14) e iniciou às 19h30min com término às 20h30min. Cinco alunos estavam presentes. Os estudantes receberam o material referente ao segundo encontro e o trabalho ocorreu no espaço da sala de aula.

Neste dia demos início ao estudo da operação de adição entre vetores no domínio geométrico. Dessa forma, expliquei para os alunos que iriamos efetuar a soma dos vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, sendo que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{RS}$. Disse aos alunos que haviam duas maneiras de fazer a soma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. A aluna R questionou: “Mas qual é o número que vai ser resultado desta soma?”. Então, perguntei: “Vocês acham que esta soma vai resultar num número? É isso que vocês estão entendendo?”. O aluno W respondeu: “Sim, porque as setas têm um comprimento, sora. É o comprimento das setas que a senhora vai somar?”. Percebe-se, neste momento, que os alunos ainda não consideram os componentes direção e sentido nesta operação. Então, lembrei o fato de que as flechas carregam três informações: direção, sentido e comprimento. Portanto, ao somarmos as flechas, temos que o resultado será uma flecha com uma determinada direção, sentido e comprimento.

Distribui para cada aluno uma régua e um compasso e assim começamos a explorar uma primeira maneira de efetuar a operação $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Por meio do uso da régua e do compasso, os alunos construíram a seta $\overrightarrow{ST}$ representante do vetor $\overrightarrow{a}$ com origem na extremidade da flecha $\overrightarrow{RS}$. Disse aos alunos: “Reparem que a seta $\overrightarrow{ST}$ possui mesma direção, sentido e comprimento que a seta $\overrightarrow{PQ}$, portanto também representa o vetor $\overrightarrow{a}$. Pedi aos alunos que utilizassem a régua para traçar o segmento orientado $\overrightarrow{RT}$, fechando, assim, o triângulo RST e expliquei que a soma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ era representada pela flecha $\overrightarrow{RT}$. Veja a figura 136 a seguir que ilustra esta forma de obter a soma $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

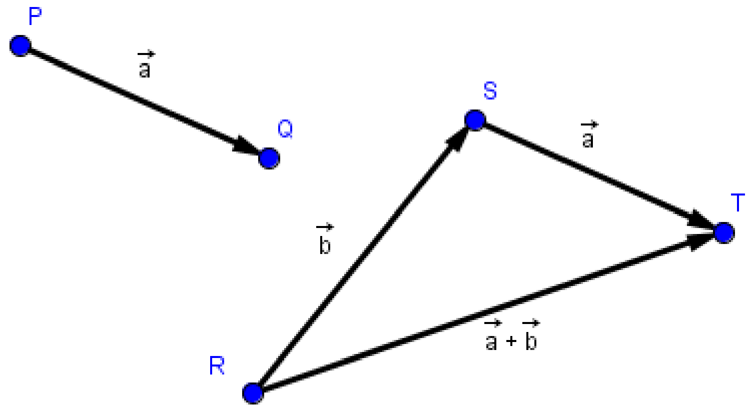


Figura 136 - Adição de vetores

Fonte: A autora

Concluída a construção da seta $\overrightarrow{RT}$, escrevi no quadro a seguinte expressão: $\overrightarrow{a}$ + $\overrightarrow{b}$ = $\overrightarrow{PQ}$ + $\overrightarrow{RS}$ = $\overrightarrow{RS}$ + $\overrightarrow{ST}$ = $\overrightarrow{RT}$ e discutimos sobre esta situação. Passamos para uma segunda maneira de realizar a soma $\overrightarrow{a}$ + $\overrightarrow{b}$. "Esta segunda maneira é conhecida como Regra do Paralelogramo", informei aos alunos.

Os estudantes conseguiram realizar os primeiros passos da construção sozinhos, porém, em certo momento, ficaram confusos e dei auxílio individual para cada um .

Por fim, os alunos fecharam o paralelogramo ABCD, corretamente. Disse aos mesmos: "Temos que o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$ sobre a diagonal do paralelogramo ABCD é um representante para o vetor soma $\overrightarrow{a}$ + $\overrightarrow{b}$. Reparem que a seta $\overrightarrow{AC}$ e a seta $\overrightarrow{RT}$ (esta última ainda encontrava-se desenhada no quadro) possuem mesma direção, sentido e comprimento.".

Vejamos nas figuras 137, 138 e 139 a seguir as soluções apresentadas por três alunos para a soma $\overrightarrow{a}$ + $\overrightarrow{b}$:

Apesar dos alunos terem tido dificuldades no decorrer do processo de construção com régua e compasso dos segmentos orientados, podemos dizer que os mesmos conseguiram superá-las. Todos os alunos apresentaram no final da aula construções corretas. A aluna R (veja a figura 138 a seguir) indicou com letra minúscula os pontos que formam os vértices do paralelogramo ABCD.

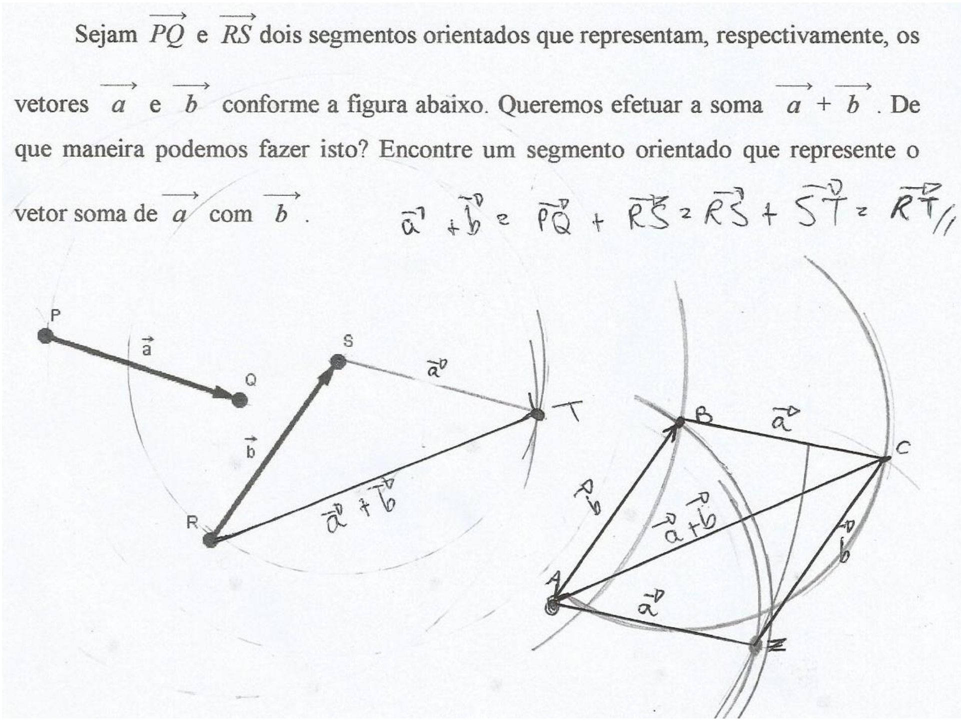


Figura 137 - Resposta do aluno L

Fonte: Aluno L

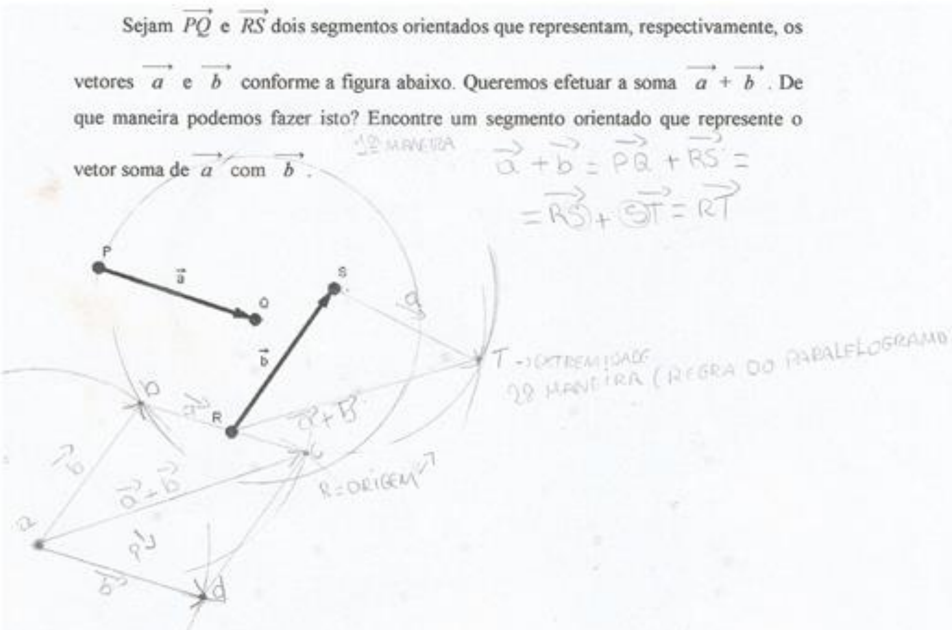


Figura 138 - Resposta da aluna R

Fonte: Aluna R

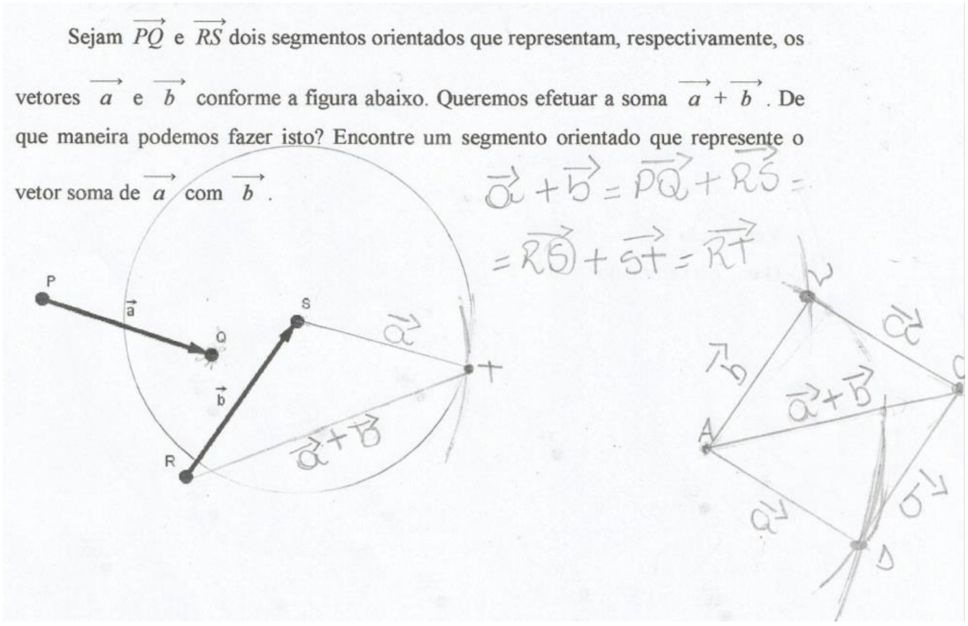


Figura 139 - Resposta da aluna A

Fonte: Aluna A

O encontro chegou ao fim, sendo que não tivemos mais tempo para avançar no material referente ao segundo encontro.

6º Encontro:

Este encontro ocorreu em uma segunda-feira (17/11/14) com duração de uma hora (iniciou às 20h e terminou às 21h). Oito alunos estavam presentes. O encontro foi realizado na sala de aula dos estudantes. Entreguei aos mesmos o material referente ao segundo encontro.

Iniciei a aula fazendo uma breve revisão da operação de soma entre dois vetores, tomando o mesmo exemplo discutido no encontro anterior.

Quatro dos estudantes presentes na sala, ou seja, metade da turma, não haviam comparecido no encontro anterior, sendo que percebi a dificuldade dos mesmos em compreender o assunto. Alguns deles diziam: “Bah, professora, estou perdido”, “Não estou entendendo nada!”.

Decidi, então, não avançar no conteúdo referente ao material do segundo encontro e dar um auxílio individualizado àqueles quatro estudantes para que os mesmos também pudessem compreender e solucionar a tarefa de encontrar uma seta representante para o vetor soma $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.

Quanto aos demais alunos, solicitei que observassem no material referente ao segundo encontro as setas $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{AB}$ representantes, respectivamente, dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e as setas $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{JI}$ representantes, respectivamente, dos vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ (veja a figura 140 a seguir).

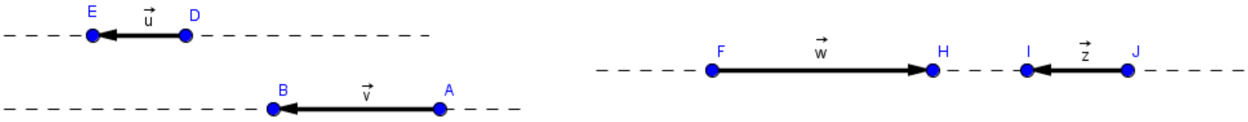


Figura 140 - Setas $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FH}$ **e** $\overrightarrow{JI}$

Fonte: A autora

Perguntei aos mesmos: “O que as setas $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{AB}$ possuem em comum? Será que é a direção? O sentido? Ou será que é o comprimento? E as setas $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{JI}$? Escrevam na folhinha (referente ao material do segundo encontro) as conclusões de vocês”. Continuei: “Depois, quero que vocês pensem em como podemos efetuar as somas $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ + $\overrightarrow{z}$ (escrevi no quadro estas expressões). Nós vimos duas maneiras de somar vetores, certo? Quero que vocês encontrem flechas que representem os vetores soma $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ + $\overrightarrow{z}$ ”.

A medida que concluía com cada um dos quatro estudantes a atividade de somar os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ fazendo uso da régua e do compasso, pedia para que os mesmos também pensassem na questão colocada aos demais estudantes, isto é, no problema de obter segmentos orientados que representassem os vetores soma $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ + $\overrightarrow{z}$.

Observe as figuras 141, 142 e 143 a seguir que ilustram as respostas informadas por três alunos para a questão que estava sendo discutida:

A aluna R (veja a figura 141) informou corretamente que as setas $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{AB}$ possuem em comum a direção e o sentido e efetuou a soma dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, ela também identificou que as setas $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{JI}$ possuem apenas a direção em comum e efetuou a soma $\overrightarrow{w}$ + $\overrightarrow{z}$ no registro simbólico, sendo que não desenhou a seta representante desta soma, a aluna R desenhou apenas a seta $\overrightarrow{HK}$ representante do vetor $\overrightarrow{z}$. O aluno L (veja a figura 142 a seguir), assim como outro colega seu, também indicou corretamente as características que as setas $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm em comum, fazendo o mesmo com as flechas $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{JI}$ e realizou as somas $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ + $\overrightarrow{z}$ apenas no registro simbólico sem desenhar os segmentos orientados representantes destas somas. Três alunos apenas informaram as componentes que cada par de seta possui em comum, sendo que destes, somente o aluno C (figura 143) desenhou a flecha $\overrightarrow{BC}$ representante do vetor $\overrightarrow{u}$ com origem na extremidade da seta dada $\overrightarrow{AB}$ representante do vetor $\overrightarrow{v}$. Duas alunas não informaram resposta alguma para a questão.

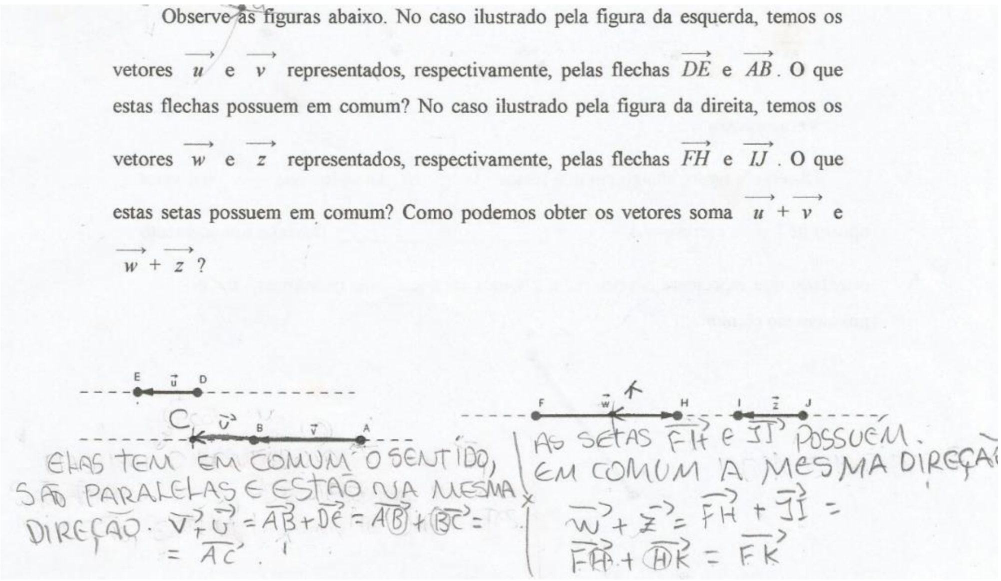


Figura 141 - Resposta da aluna R.

Fonte: Aluna R.

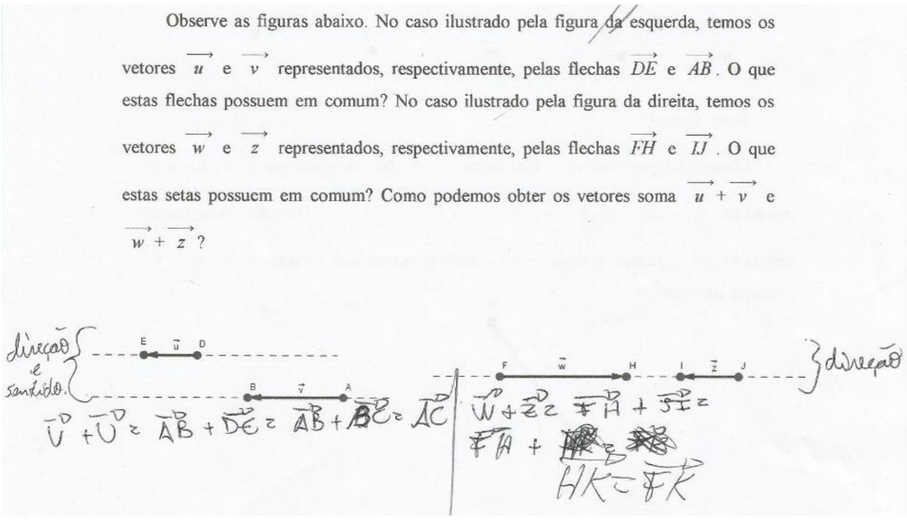


Figura 142 - Resposta do aluno L

Fonte: Aluno L

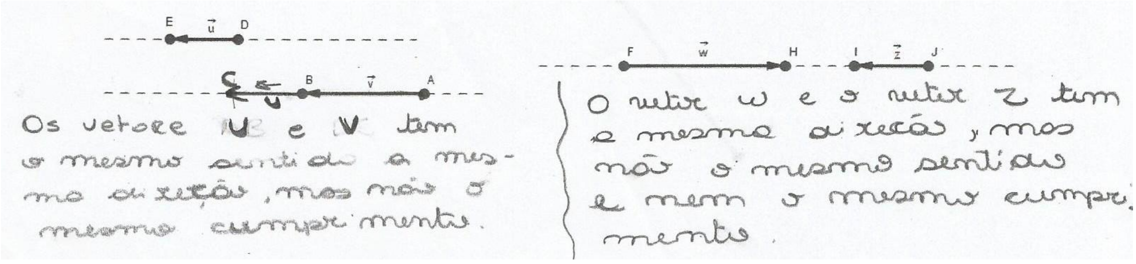


Figura 143 – Resposta do aluno C

Fonte: Aluno C

O sexto encontro chegou ao fim, sendo que pude perceber a dificuldade dos alunos em resolver a questão proposta de maneira autônoma. Apenas três alunos efetuaram as soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$, sendo que a preferência destes foi em realizar a operação no registro simbólico, sem desenhar segmentos orientados (representação geométrica) que representassem as mesmas. De acordo com Duval (2009), nesta questão estamos lhe dando com dois registros de representação semiótica (o registro simbólico e o registro geométrico), sendo que ao passarmos de um registro para o outro, estamos efetuando a transformação de conversão. Este tipo de transformação não é algo espontâneo para os alunos, muito pelo contrário, é na atividade de conversão que podemos observar a maioria dos insucessos dos alunos ao resolver um problema matemático.

7º Encontro:

Este encontro ocorreu em uma quarta-feira (19/11/14). Ao chegar na escola, os alunos do 3º ano do Ensino Médio estavam assistindo a uma palestra sobre emprego e cursos profissionalizantes, sendo que a nossa aula teve início às 20h, com duração de apenas 30 minutos. Neste encontro seis alunos estavam presentes.

Decidi aproveitar os trinta minutos de aula para levar os alunos até o laboratório de informática para resolvermos a quarta questão que havia ficado pendente, referente ao material do primeiro encontro.

Já na informática, solicitei aos alunos que abrissem a pasta "Oficina de Vetores" e que localizassem o arquivo "aula_1_questao_4.ggb"[12] (veja a figura 144 a seguir) na subpasta "Aula 1". Neste arquivo os alunos deveriam utilizar a ferramenta do GeoGebra "Translação por um vetor" e efetuar a translação da 'Borboleta 1' por meio da seta $\overrightarrow{CD}$. Depois os alunos

[12] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://www.geogebratube.org/student/mB4zdNKKj.

deveriam indicar uma flecha representante de um vetor translação que deslocasse a “Borboleta 2” para a posição da “Borboleta B”.

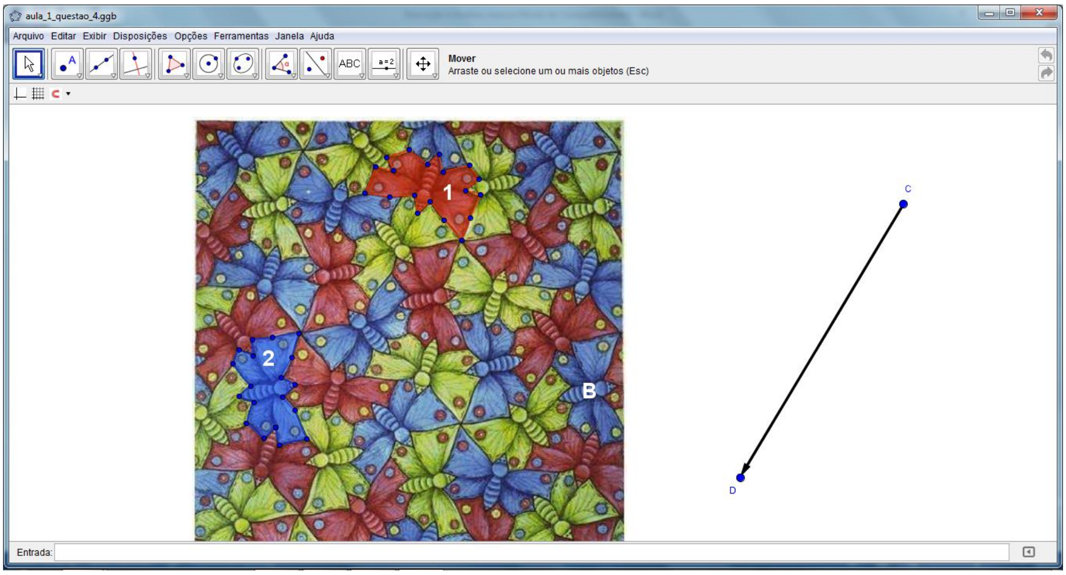


Figura 144 - Imagem do arquivo "aula_1_questao_4.ggb".

Fonte: A autora.

Comentei para os estudantes que a imagem que eles estavam visualizando se tratava de uma gravura do artista gráfico holandês Escher (1898 - 1972), sendo que as obras do mesmo eram muito admiradas pelos matemáticos, devido ao fato de Escher utilizar-se de certos conceitos e propriedades matemáticas para a elaboração de seus trabalhos.

Em seguida, comentamos sobre o fato de que os vetores podem ser utilizados para deslocar pontos e figuras de uma posição para a outra, sendo que a esta transformação nomeamos de translação.

A figura 145 abaixo mostra o aluno W interagindo com o arquivo “aula_1_questao_4.ggb” no GeoGebra.

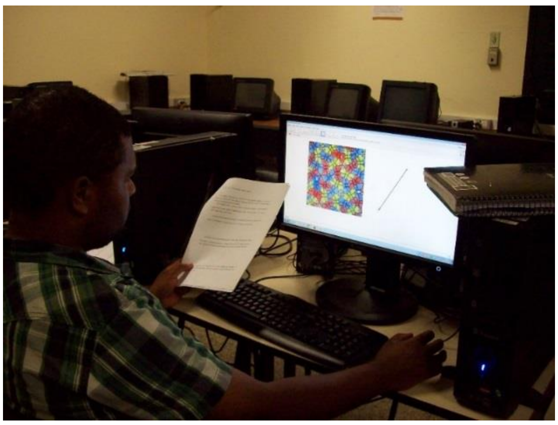


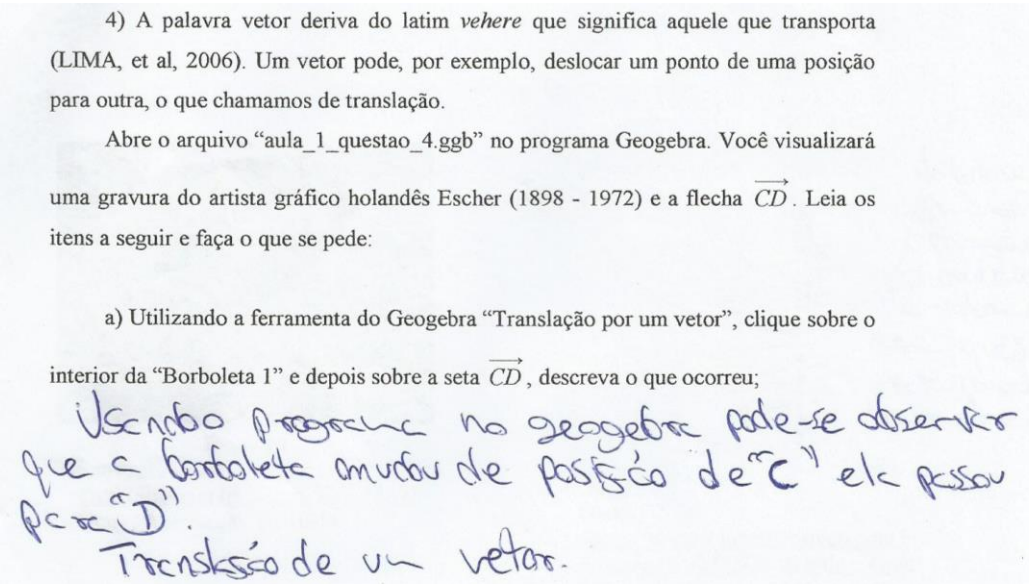
Figura 145 - Aluno W interagindo com o arquivo "aula_1_questao_4.ggb".

Fonte: A autora.

Conversamos sobre a transformação que os alunos fizeram, que foi a translação da 'Borboleta 1' por meio da seta $\overrightarrow{CD}$. Disse aos alunos: "Temos que a 'Borboleta 1' percorreu uma trajetória que possui a mesma direção, sentido e comprimento da seta $\overrightarrow{CD}$". Solicitei aos alunos que descrevessem em seus materiais (referente ao primeiro encontro) o que haviam entendido.

As figuras 146 e 147 ilustram as respostas informadas por dois alunos para o item (a) da quarta questão:

Na resposta informada pelo aluno W (veja a figura 146 abaixo), o mesmo escreve que "a borboleta mudou de posição de 'C' ela passou para 'D'". Repare que as posições 'C' e 'D' informadas pelo aluno são os pontos de origem e extremidade, respectivamente, da seta $\overrightarrow{CD}$. Dessa forma, acredito que o aluno W conseguiu perceber que o deslocamento efetuado pela "Borboleta 1" conservou a direção, o sentido e o comprimento do vetor representado pela seta $\overrightarrow{CD}$. Já a aluna B escreve que "A borboleta foi transportada para outra posição", "ela ('Borboleta 1') deslocou de lugar". Nas respostas informadas pelos demais alunos, também foi possível identificar os termos "transporte" e "deslocamento" referindo-se ao que ocorreu com a 'Borboleta 1'.



4) A palavra vetor deriva do latim *vehere* que significa aquele que transporta (LIMA, et al, 2006). Um vetor pode, por exemplo, deslocar um ponto de uma posição para outra, o que chamamos de translação.

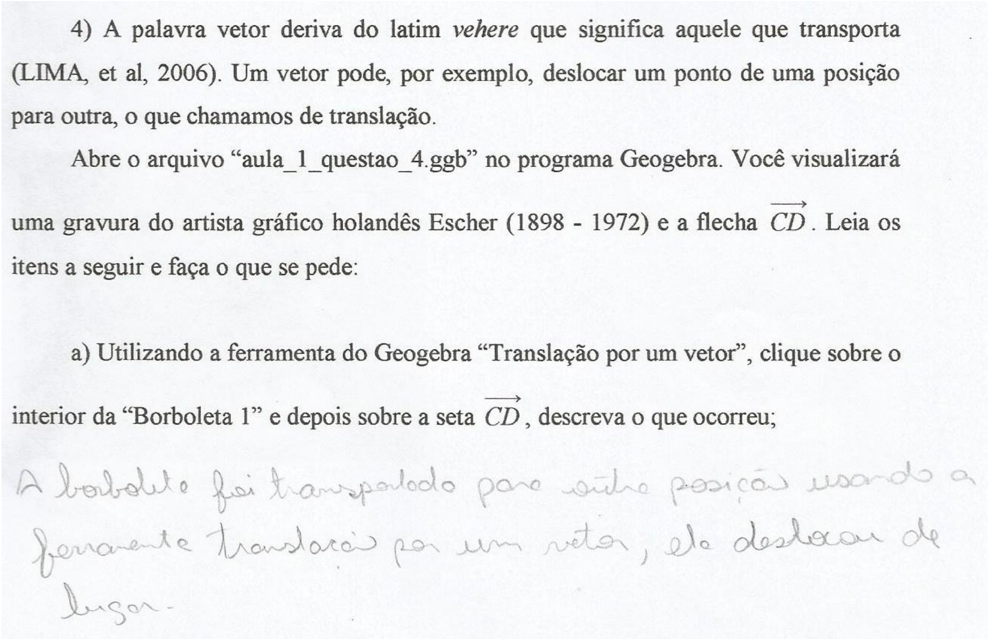
Abre o arquivo "aula_1_questao_4.ggb" no programa Geogebra. Você visualizará uma gravura do artista gráfico holandês Escher (1898 - 1972) e a flecha $\overrightarrow{CD}$. Leia os itens a seguir e faça o que se pede:

a) Utilizando a ferramenta do Geogebra "Translação por um vetor", clique sobre o interior da "Borboleta 1" e depois sobre a seta $\overrightarrow{CD}$, descreva o que ocorreu;

Usando programa no geogebra pode-se observar que a borboleta mudou de posição de "C" ela passou para "D".
Translação de um vetor.

Figura 146 – Resposta do aluno W

Fonte: Aluno W



4) A palavra vetor deriva do latim *vehere* que significa aquele que transporta (LIMA, et al, 2006). Um vetor pode, por exemplo, deslocar um ponto de uma posição para outra, o que chamamos de translação.

Abre o arquivo "aula_1_questao_4.ggb" no programa Geogebra. Você visualizará uma gravura do artista gráfico holandês Escher (1898 - 1972) e a flecha $\overrightarrow{CD}$. Leia os itens a seguir e faça o que se pede:

a) Utilizando a ferramenta do Geogebra "Translação por um vetor", clique sobre o interior da "Borboleta 1" e depois sobre a seta $\overrightarrow{CD}$, descreva o que ocorreu;

A borboleta foi transportada para outra posição usando a ferramenta translação por um vetor, ela deslocou de lugar.

Figura 147 – Resposta da aluna B

Fonte: Aluna B

Para resolver o item (b) da quarta questão, que se trava de indicar uma seta no GeoGebra que efetuasse o deslocamento da "Borboleta 2" para a posição da "Borboleta B", construímos segmentos orientados no GeoGebra por meio das ferramentas "Ponto" e "Vetor Definido por Dois Pontos". Assim que cada aluno construiu a sua seta, pedi que os mesmos verificassem, por meio da ferramenta "Translação por um Vetor", se estas deslocavam a "Borboleta 2" para a posição da "Borboleta B".

A figura 148 abaixo é um *print screen* do computador do aluno G:

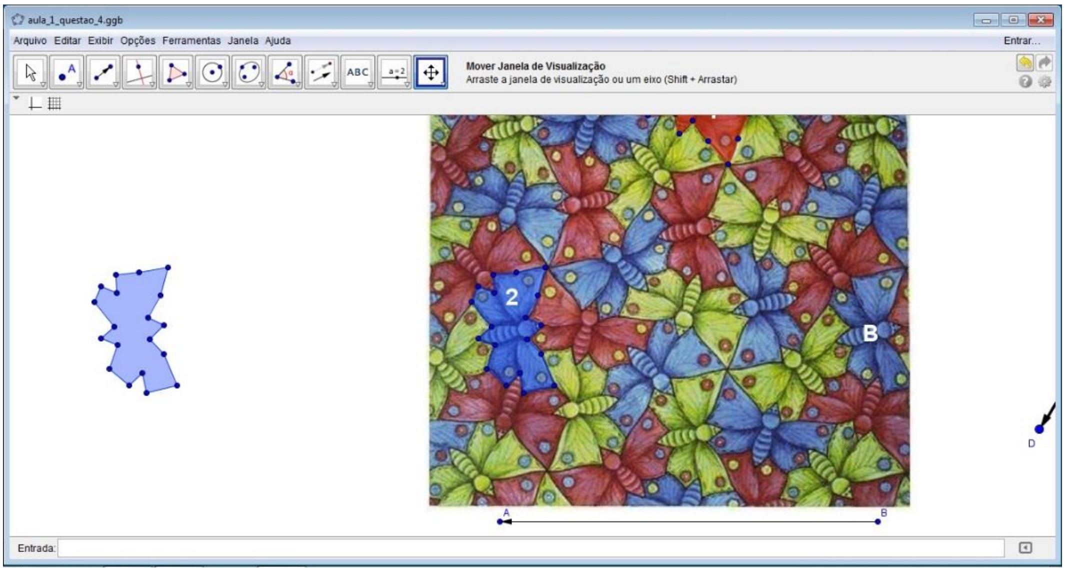


Figura 148 - *Print screen* do computador em que o aluno G estava

Fonte: A autora

Ao verificarem que as flechas construídas no GeoGebra não efetuavam o deslocamento da “Borboleta 2” para a posição da “Borboleta B”, os alunos solicitavam meu auxilio. Disse para os mesmos que poderiam fazer alterações no sentido, comprimento e direção da setinha construída e verificar se as borboletas que eles haviam obtido se “encaixariam” na posição da “Borboleta B”. “Tah, mas como vamos fazer para alterar a seta?”, perguntou o aluno E. Respondi ao aluno E: “Você pode mover o ponto de origem ou o ponto de extremidade da flecha que você construiu. Use a ferramenta ‘Mover’ (mostrei para o aluno E)”. “Ah, é verdade. A gente mexe na seta e a borboleta se move. Então a seta tem que ser assim, né sora? Agora a borboleta ficou direitinho nessa posição aqui (o aluno apontou para a tela do computador referindo-se a posição da “Borboleta B”).”.

A figura 149 abaixo é um *print screen* do computador do aluno E:

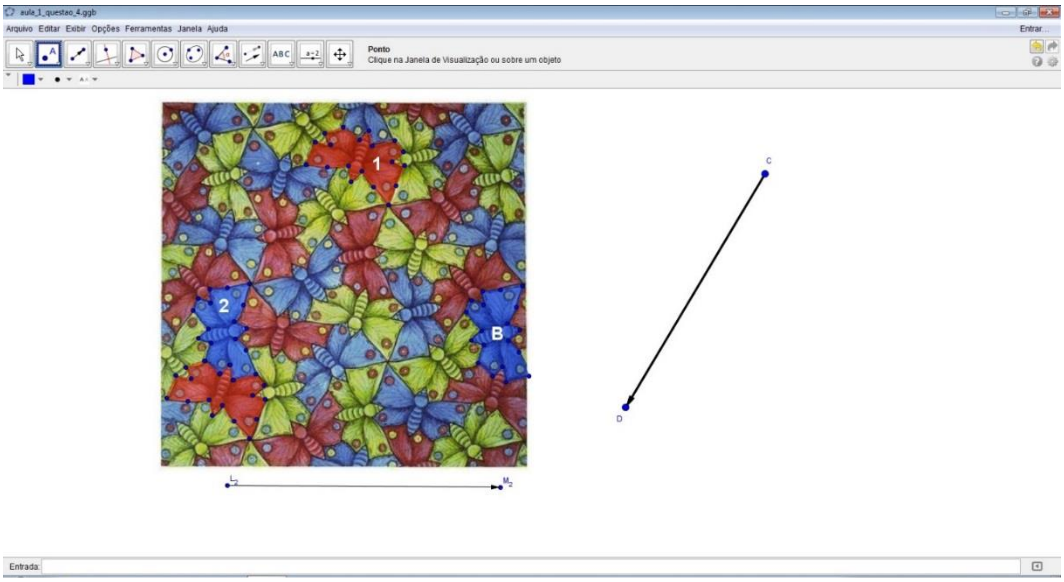


Figura 149 - *Print screen* do computador em que o aluno E estava

Fonte: A autora

O sétimo encontro terminou, sendo que o material referente ao primeiro encontro foi concluído pelos alunos.

8º Encontro:

Este encontro ocorreu em uma segunda-feira (24/11/14) e haviam cinco alunos em sala de aula. O encontro iniciou às 20h30min com duração de uma hora. O material do segundo encontro foi distribuído aos estudantes. Primeiramente, utilizei o próprio espaço da sala de aula para realizar uma breve revisão da atividade de somar $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$, sendo

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores de mesma direção, ou seja, representados por segmentos orientados paralelos. Esta atividade foi discutida em detalhes no sexto encontro e é referente ao tópico "Adição de vetores", primeiro tópico do material referente ao segundo encontro (Reveja o 6º Encontro, p. 149 – Figura 140).

Convidei, então, os alunos para irmos até a informática. Chegando ao laboratório de informática, solicitei aos estudantes que abrissem a pasta "Oficina de Vetores", localizada na área de trabalho dos computadores, e, depois, a subpasta "Aula 2". Nesta última, os alunos deveriam localizar o arquivo "barco.ggb"[13] e abri-lo.

O arquivo "barco.ggb" é uma animação construída no GeoGebra em que, em um primeiro momento, duas forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ são aplicadas em um barquinho, de modo a fazer com que o mesmo saia do mar e atinja a areia da praia. De repente, as "pessoas" (representadas por bonequinhos) que exercem as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ sobre o barco desaparecem e, em um segundo momento, uma terceira "pessoa" (terceiro bonequinho) aparece puxando o barquinho com uma força $\overrightarrow{F_3}$. O barco mantém a sua velocidade constante no decorrer de toda a animação. Veja a figura 150 abaixo que ilustra o arquivo "barco.ggb".

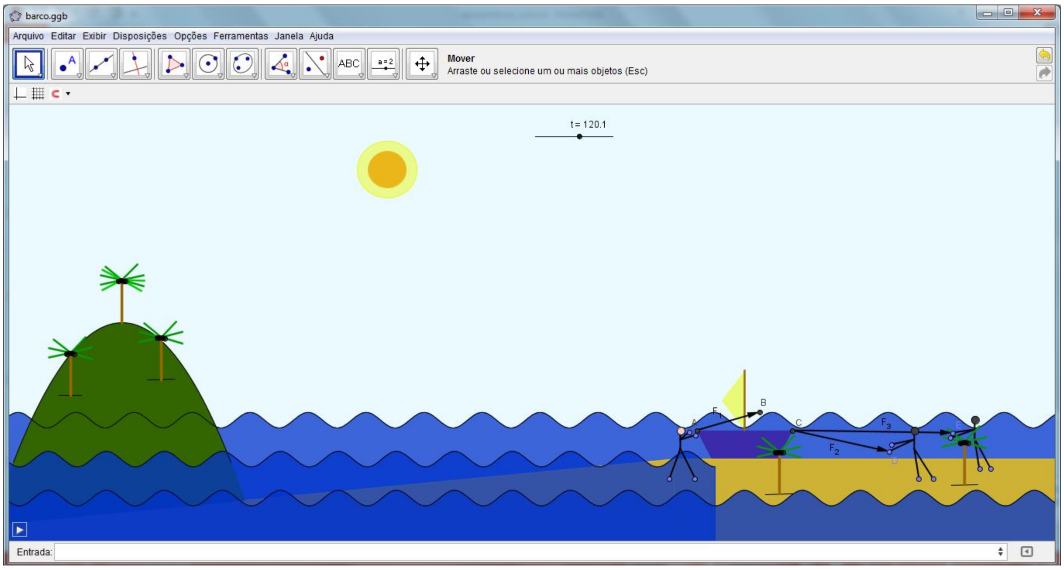


Figura 150 - Imagem do arquivo "barco.ggb".

Fonte: A autora.

[13] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mHrAq3le5.

Quando os alunos abriram o arquivo, esperei um tempo para que os mesmos visualizassem o que estava acontecendo na animação. Depois, expliquei para os estudantes do que se tratava a mesma. Pedi para que os alunos pausassem a animação ainda em seu primeiro momento, ou seja, no momento em que apareciam somente os dois bonequinhos aplicando as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ no barco. Questionei os alunos: “Pessoal, podemos afirmar que força é uma grandeza escalar ou uma grandeza vetorial?”. “É escalar”, respondeu o aluno W. Argumentei com o aluno W: “Mas veja que as forças estão sendo representadas por segmentos orientados, sendo que os segmentos orientados são utilizados para representar grandezas vetoriais.”. “Ah, é verdade”, disse o aluno W. Continuei: “Os segmentos orientados carregam as informações de direção, sentido e comprimento que caracterizam as grandezas vetoriais.”.

Pedi para que os estudantes clicassem no botão “Reproduzir” e deixassem a animação acontecer até o terceiro bonequinho aparecer puxando o barco com a força $\overrightarrow{F_3}$. Neste momento, solicitei que pausassem novamente a animação. A figura 151 abaixo ilustra o aluno L visualizando o arquivo “barco.ggb”.

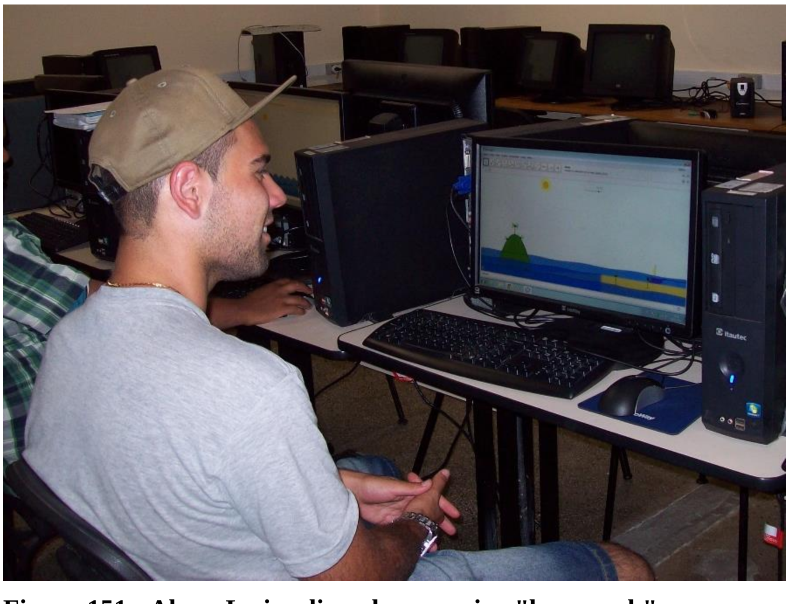


Figura 151 - Aluno L visualizando o arquivo "barco.ggb".

Fonte: A autora.

Indaguei os alunos: “Será que podemos relacionar a força $\overrightarrow{F_3}$ com as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$?” Percebam que a força $\overrightarrow{F_3}$ é aplicada no barco e este continua com a mesma velocidade que antes, a velocidade do barco não sofreu alteração na intensidade, nem na direção e nem no sentido. Será que podemos dizer que a força $\overrightarrow{F_3}$ substitui as forças $\overrightarrow{F_1}$ e

$\overrightarrow{F_2}$?". O aluno L respondeu: "Acho que sim, sora, porque $\overrightarrow{F_3}$ é representada por uma seta que começa no ponto C e a flecha que representa a força $\overrightarrow{F_2}$ também começa no ponto C.".

Diante desta resposta, pensei que talvez o aluno tenha conseguido visualizar a soma geométrica entre os vetores $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, veja a figura 152 a seguir.

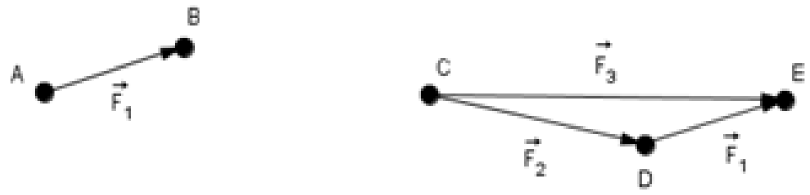


Figura 152 - Soma geométrica: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3}$ **.**

Fonte: A autora.

Escrevi no quadro a expressão $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3}$. Expliquei para os alunos que se a força $\overrightarrow{F_3}$ substitui as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, então, podemos escrever esta expressão. Disse aos alunos: "Neste caso, podemos chamar $\overrightarrow{F_3}$ de força resultante. Vamos verificar, utilizando as ferramentas do GeoGebra, se esta expressão é verdadeira."

Pedi para que os alunos digitassem na caixa de "Entrada" do GeoGebra "t = 120.1" referente ao instante de tempo t = 120,1s, pois neste instante tínhamos que os três bonequinhos apareciam simultaneamente e os segmentos orientados representantes das forças que os mesmos exerciam sobre o barquinho também.

Passei de computador em computador para auxiliar os alunos na localização e manipulação das ferramentas "Novo Ponto", "Vetor a Partir de um Ponto" e "Vetor Definido por Dois Pontos", pois por meio destas ferramentas foi possível construir a soma geométrica $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. A figura 153 abaixo mostra um *print screen* do computador em que a aluna M estava. Nesta figura é possível visualizar um triângulo ($\Delta\, K_4 A_5 Q_6$) construído pela aluna M. Nos lados deste triângulo encontram-se as setas $\overrightarrow{K_4A_5}$, $\overrightarrow{A_5Q_6}$ e $\overrightarrow{K_4Q_6}$ representantes, respectivamente, dos vetores $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ e $\overrightarrow{F_3}$. Todos os demais alunos também construíram este triângulo. Por meio da ferramenta "Mover", os alunos moviam a seta $\overrightarrow{K_4Q_6}$ pela Janela de Visualização do GeoGebra e faziam a mesma coincidir sobre a flecha $\overrightarrow{CE}$ representante do vetor $\overrightarrow{F_3}$, percebendo assim, que os segmentos orientados $\overrightarrow{K_4Q_6}$ e $\overrightarrow{CE}$ representavam o mesmo vetor força e que a expressão $\overrightarrow{F_1}$ + $\overrightarrow{F_2}$ = $\overrightarrow{F_3}$ era, de fato, verdadeira.

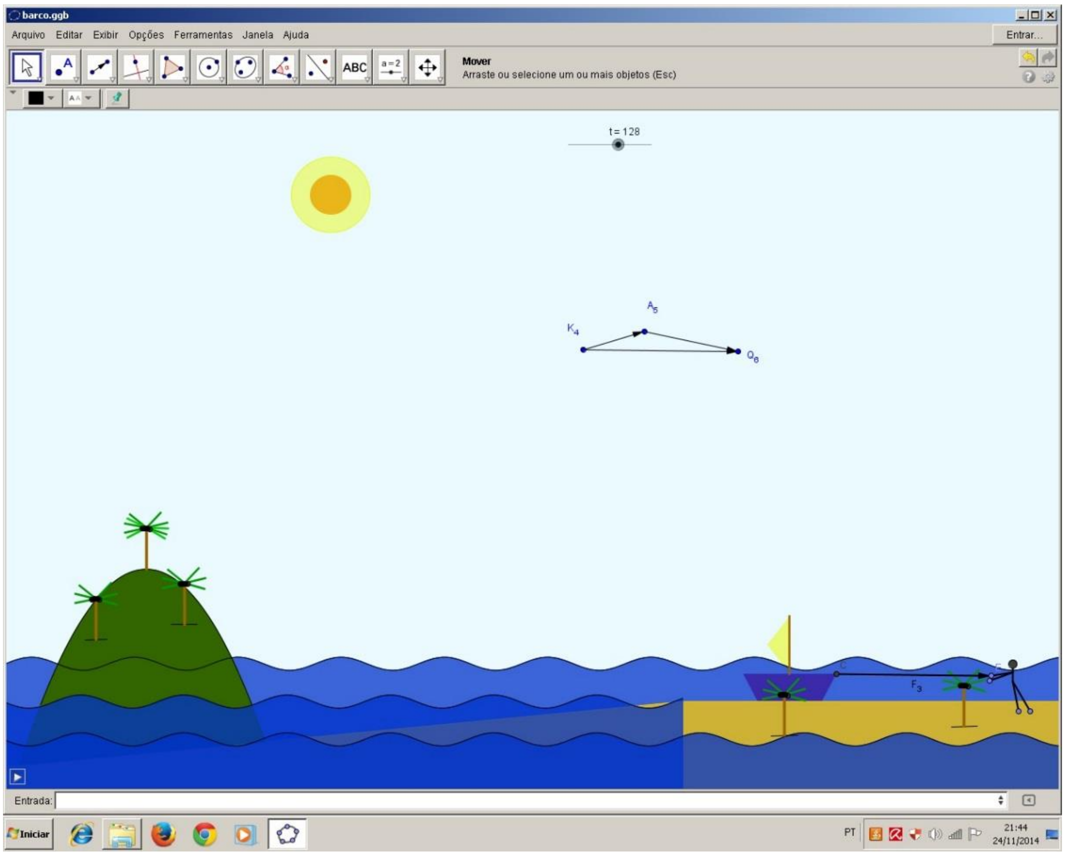
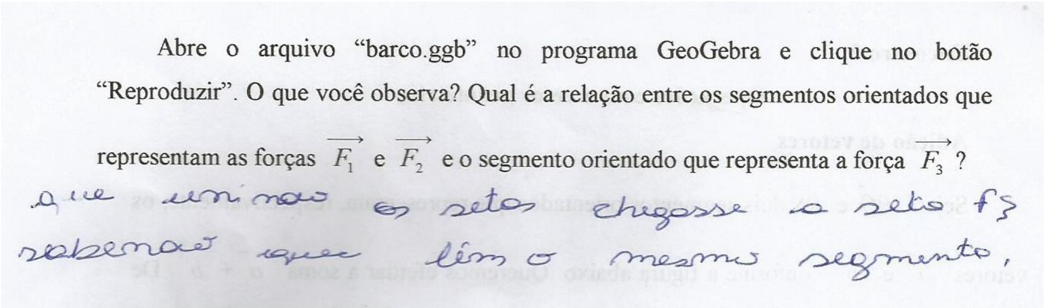


Figura 153 - *Print screen* do computador em que a aluna M estava.
Fonte: A autora.

As figuras 154 e 155 a seguir ilustram as respostas informadas por dois alunos para a pergunta “Qual é a relação entre os segmentos orientados que representam as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ e o segmento orientado que representa a força $\overrightarrow{F_3}$?”.

Na resposta informada pelo aluno C (veja a figura 154 a seguir), o mesmo afirma que “unindo as setas (representantes dos vetores $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$)” é possível obter a flecha que representa $\overrightarrow{F_3}$. O aluno L (observe a figura 155 a seguir) registra em sua resposta que foi feita “a soma dos vetores ($\overrightarrow{F_1}$ + $\overrightarrow{F_2}$)” para se obter o vetor força $\overrightarrow{F_3}$. Outro aluno registra uma resposta parecida com a dada pelo aluno L (figura 155). Uma das alunas desenha o triângulo $K_4A_5Q_6$ em cujos lados encontram-se os segmentos orientados representantes dos vetores $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ e $\overrightarrow{F_3}$. A outra aluna não informou a sua resposta para esta pergunta.

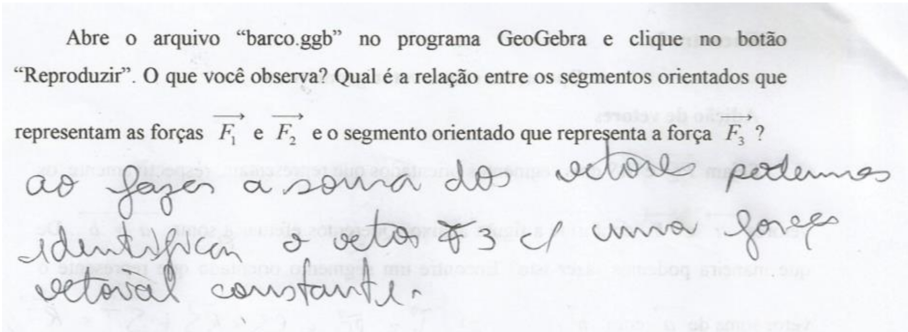


Abre o arquivo "barco.ggb" no programa GeoGebra e clique no botão "Reproduzir". O que você observa? Qual é a relação entre os segmentos orientados que representam as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ e o segmento orientado que representa a força $\overrightarrow{F_3}$?

que unimos os setos chegasse o seto f3 sabemos que têm o mesmo segmento,

Figura 154 - Resposta do aluno C.

Fonte: Aluno C.



Abre o arquivo "barco.ggb" no programa GeoGebra e clique no botão "Reproduzir". O que você observa? Qual é a relação entre os segmentos orientados que representam as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ e o segmento orientado que representa a força $\overrightarrow{F_3}$?

ao fazer a soma dos vetores podemos identificar o vetor F3 c/ uma força vetorial constante.

Figura 155 - Resposta do aluno L.

Fonte: Aluno L.

O oitavo encontro chegou ao fim, sendo que não foi possível avançar mais nos conteúdos do material referente ao segundo encontro.

9º Encontro:

Este encontro ocorreu em uma segunda-feira (01/12/14) e iniciou às 20h30min com término às 21h30min. Havia oito alunos presentes. Iniciamos a aula na própria sala de aula dos estudantes. O material referente ao segundo encontro foi entregue aos mesmos e, primeiramente, nos focamos no estudo do tópico "Vetor nulo".

Desenhei no quadro um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representante de um vetor qualquer. Chamei a atenção dos alunos: "Reparem que os pontos A e B são distintos, A é a origem e B é a extremidade.". Continuei: "Imaginem que eu vá aproximando os pontos A e B de maneira a fazer com que A e B coincidam, neste caso, teremos uma flecha?". "Não", respondeu o aluno W. "Teremos somente um ponto.", completou W. Desenhei, então, alguns pontos no quadro acompanhados das seguintes notações: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, etc. Expliquei para os alunos que estes pontos se tratavam de setas degeneradas, isto é, setas cujos pontos de origem e extremidade coincidiam. Disse aos estudantes: "Na verdade, não temos flechas, mas, sim, pontos. Temos que estes pontos são representantes do vetor nulo. Percebam que eu poderia ter desenhado muitos outros pontos aqui no quadro. Todos os pontos do espaço representam o vetor nulo.". Informei aos alunos: "Indicamos vetor nulo desta forma (escrevi no quadro a notação $\overrightarrow{0}$).". Depois, escrevi as seguintes igualdades no quadro: $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$ = ...

Questionei os alunos: "O vetor nulo tem comprimento?". "Não tem nenhum comprimento", respondeu o aluno W. "É zero", disse o aluno E. "E quanto à direção e ao sentido? Podemos afirmar que o vetor nulo possui direção e sentido?", perguntei aos estudantes que ficaram quietos, pensativos. Expliquei, então, que direção é dada por uma reta, ou seja, uma reta determina uma direção. Retornei ao desenho que havia feito no quadro do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e disse aos estudantes: "Vejam que a direção da seta $\overrightarrow{AB}$ é dada pela reta que passa pelos pontos A e B (prolonguei as extremidades da flecha $\overrightarrow{AB}$ de maneira a representar a reta $\overleftrightarrow{AB}$) e o sentido da seta $\overrightarrow{AB}$ é de A para B. Agora, observem o ponto $\overrightarrow{CC}$ representante do vetor nulo. Há infinitas retas que passam por este ponto (desenhei algumas "retas" passando por C), sendo que cada uma determina uma única direção. Portanto, o vetor nulo não possui direção definida e nem sentido definido".

As figuras 156 e 157 a seguir, mostram as respostas informadas por dois alunos para a pergunta "O que é o vetor nulo?" presente no material do segundo encontro.

Três alunos apresentaram respostas parecidas com a que podemos visualizar na figura 156 abaixo. Na resposta do aluno W (veja a figura 157 a seguir), podemos identificar que o mesmo explica que o ponto de origem e o ponto de extremidade (de um segmento orientado) formam "um ponto só determinando o vetor nulo". Outros três alunos também registraram em suas respostas que o ponto de origem e o de extremidade da flecha "se aproximam" ou "se encontram" de maneira a formar "só um ponto" que representa o vetor nulo. Apenas um aluno não informou resposta alguma.

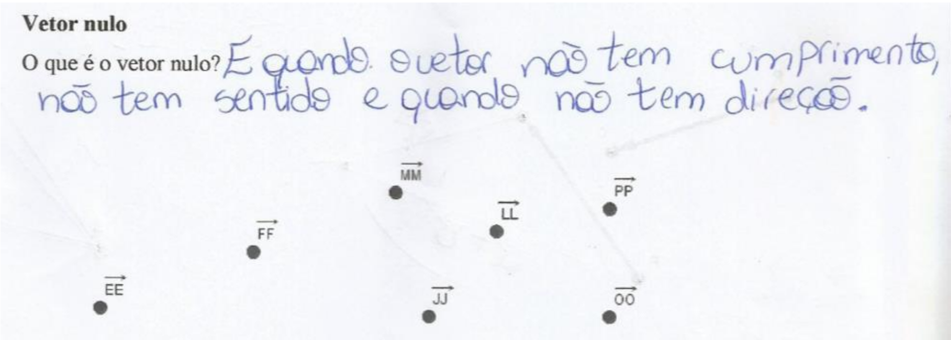


Figura 156 - Resposta da aluna A.

Fonte: Aluna A.

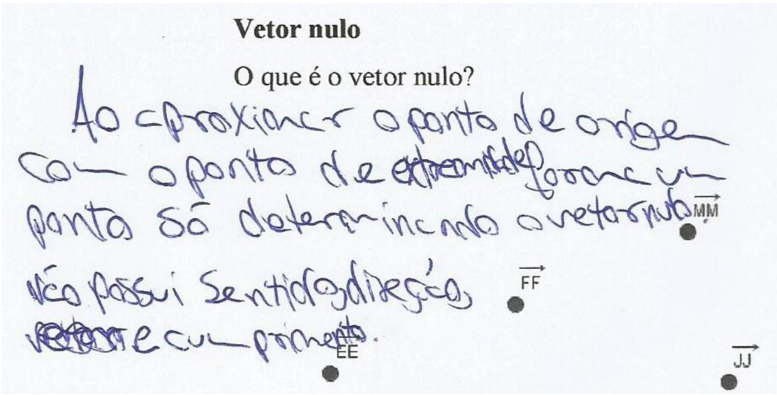


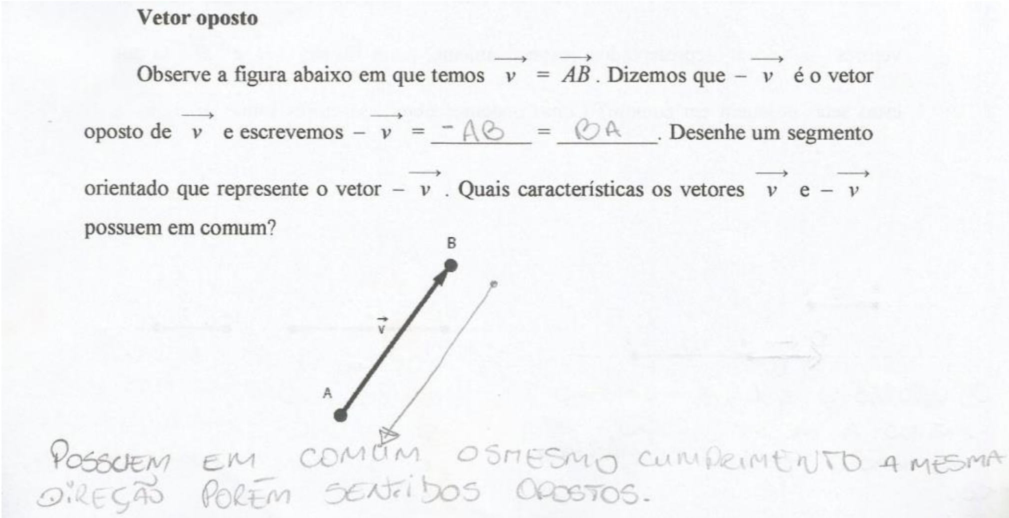
Figura 157 - Resposta do aluno W.

Fonte: Aluno W.

Em seguida, iniciamos a discussão sobre o tópico “Vetor oposto”. Pedi para que os alunos visualizassem o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representante do vetor $\overrightarrow{v}$ que estava desenhado nesta parte do material e escrevi no quadro a seguinte igualdade: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Perguntei aos alunos: “Pessoal, temos que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, mas e o vetor $-\overrightarrow{v}$? O que podemos dizer a respeito do vetor $-\overrightarrow{v}$?”. A aluna R leu o que estava escrito no material e respondeu: “$-\overrightarrow{v}$ é o vetor oposto do vetor $\overrightarrow{v}$”. “Ok, mas o que isso quer dizer?”, perguntei para a aluna R. “Sora, $-\overrightarrow{v}$ é igual a $-\overrightarrow{AB}$”, disse o aluno L. “Certo”, respondi e escrevi no quadro as igualdades: $-\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Continuei: “Reparem que o vetor $-\overrightarrow{v}$ tem como representante o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ com origem no ponto B e extremidade no ponto A.” Questionei os alunos: “Daquelas três características, direção, sentido e comprimento, quais que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$ possuem em comum?”. Os estudantes ficaram quietos. Segui com as indagações: “Os vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$ possuem mesmo comprimento?”. “Acho que sim”, respondeu o aluno W sem muita certeza. Desenhei no quadro a flecha $\overrightarrow{AB}$ representante do vetor $\overrightarrow{v}$ e com outra cor de giz, destaquei a seta $\overrightarrow{BA}$. Expliquei para os alunos que se medisse com uma régua os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, encontraria a mesma medida, já que a distância do ponto A até o ponto B é a mesma que a do ponto B até o ponto A. Afirmei: “Portanto, podemos dizer que os vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$ possuem mesmo comprimento.”. Os alunos concordaram. Indaguei os mesmos com relação à direção e ao sentido das setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, sendo que pude perceber que os estudantes estavam confundindo estas duas características. Disse: “Pessoal, as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ estão sobre uma mesma reta.”. “Ah tah, então tem mesma direção”, disse o aluno L. Continuei: “Agora, o sentido de quem vai de A para B é o mesmo de quem vai de B para A?”. “Não”, disseram alguns estudantes em conjunto.

Pedi para que os estudantes desenhassem no material uma flecha representante do vetor oposto $-\overrightarrow{v}$. Vejam as figuras 158 e 159 a seguir que ilustram as respostas de dois alunos para a pergunta “Quais características os vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$ possuem em comum?”.

Três alunos informaram respostas parecidas com a que podemos visualizar na figura 158 a seguir. A resposta dada pela aluna R (veja a figura 159 a seguir) está correta, porém, repare que a mesma desenha uma seta representante do vetor oposto $-\overrightarrow{v}$ que não possui mesma direção e comprimento que a seta representante de $\overrightarrow{v}$. Nas respostas dos outros quatro estudantes, temos que nenhum deles informa nada com relação à componente comprimento dos vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$, três deles desenham corretamente uma seta representante do vetor $-\overrightarrow{v}$ e o outro não faz desenho, porém escreve que o vetor oposto $-\overrightarrow{v}$ tem “origem no B e extremidade no A”.



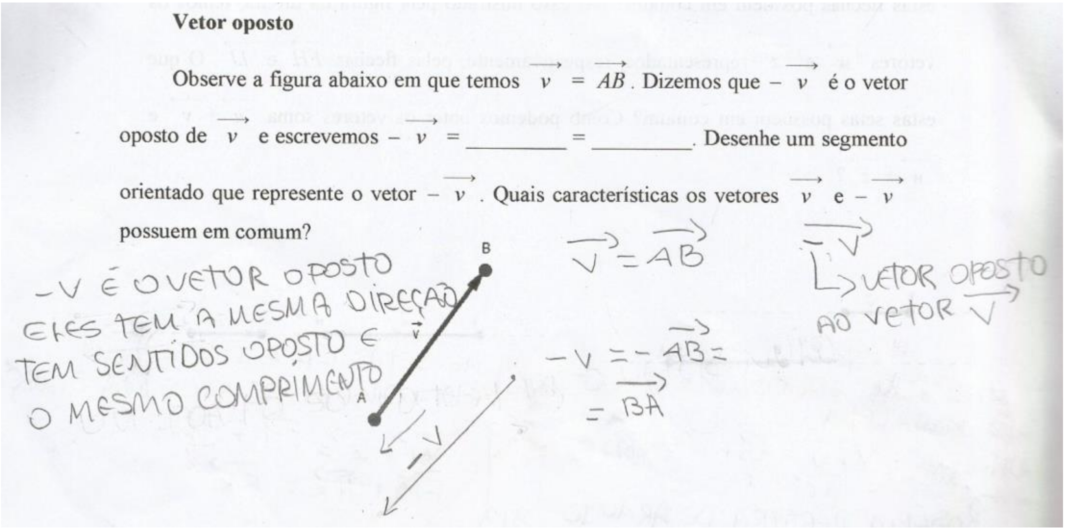
Vetor oposto

Observe a figura abaixo em que temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Dizemos que $-\overrightarrow{v}$ é o vetor oposto de $\overrightarrow{v}$ e escrevemos $-\overrightarrow{v}$ = - AB = BA. Desenhe um segmento orientado que represente o vetor $-\overrightarrow{v}$. Quais características os vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$ possuem em comum?

POSSUEM EM COMUM OS MESMO CUMPRIMENTO A MESMA DIREÇÃO PORÉM SENTIDOS OPOSTOS.

Figura 158 - Resposta da aluna T.

Fonte: Aluna T.



Vetor oposto

Observe a figura abaixo em que temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Dizemos que $-\overrightarrow{v}$ é o vetor oposto de $\overrightarrow{v}$ e escrevemos $-\overrightarrow{v}$ = _________ = _________. Desenhe um segmento orientado que represente o vetor $-\overrightarrow{v}$. Quais características os vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$ possuem em comum?

-V É O VETOR OPOSTO ELES TEM A MESMA DIREÇÃO E TEM SENTIDOS OPOSTO E O MESMO COMPRIMENTO

Figura 159 - Resposta da aluna R.

Fonte: Aluna R.

O próximo tópico a ser discutido foi "Diferença entre vetores". Desenhei no quadro as setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ representantes, respectivamente, dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$, conforme estava no material do segundo encontro entregue aos alunos, veja a figura 160 a seguir.

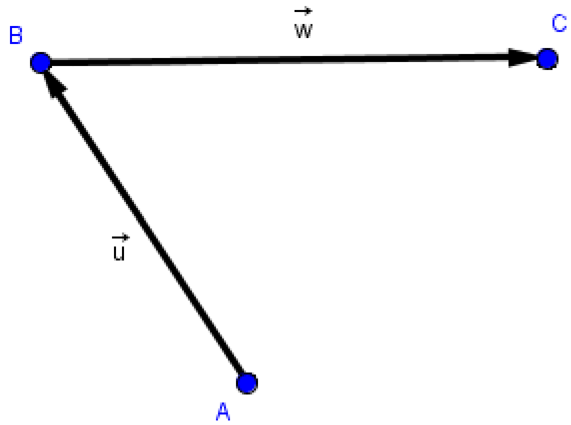


Figura 160 – Vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$

Fonte: A autora.

Disse aos alunos: “Nós já vimos como somar vetores. Vocês estão lembrados?”. Escrevi no quadro a expressão: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$. Perguntei: “Qual é a seta que representa a soma entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$?”. Nenhum aluno respondeu. Retornei a escrever no quadro: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Chamei a atenção dos estudantes para o fato de que a seta $\overrightarrow{BC}$ possui origem na extremidade da seta $\overrightarrow{AB}$ e que, portanto, para efetuar a soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$, poderíamos “ligar” os pontos A e C de maneira a formar a seta $\overrightarrow{AC}$ com origem no ponto A e extremidade no ponto C. Dessa forma, completei a expressão que havia escrito no quadro: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. O aluno E disse: “Ah, sim, agora lembrei! A seta $\overrightarrow{AC}$ é a soma, tem que fechar o triângulo, né sora?”. “Isso”, concordei e fechei o triângulo Δ ABC. O aluno L, perguntou: “Mas, sora, não é a diferença entre os vetores que nós vamos ver?”. “Sim”, confirmei e fiz um novo desenho das flechas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{w}$. Escrevi no quadro a expressão: $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{w})$. Chamei a atenção dos estudantes dizendo: “Vejam que fazer a diferença entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ é igual a somar $\overrightarrow{u}$ com o vetor $-\overrightarrow{w}$. Mas quem é o vetor $-\overrightarrow{w}$?”. Os alunos ficaram quietos. Insisti: “Pessoal, nós temos o vetor $\overrightarrow{w}$ e o vetor $-\overrightarrow{w}$. Quem é o vetor $-\overrightarrow{w}$?”. “O $-\overrightarrow{w}$ é o oposto do $\overrightarrow{w}$, sora.”, respondeu o aluno W. “Isso mesmo”, confirmei e continuei: “Portanto, fazer a diferença entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ nada mais é do que somar o vetor $\overrightarrow{u}$ com o oposto do vetor $\overrightarrow{w}$.”

O aluno L perguntou: “Esse $-\overrightarrow{w}$ não quer dizer que o $\overrightarrow{w}$ é negativo?”. “O sinal de menos está indicando que o $-\overrightarrow{w}$ é o vetor oposto ao vetor $\overrightarrow{w}$, ou seja, tem mesma direção e comprimento que $\overrightarrow{w}$, porém sentido oposto.”. “Ah tah, entendi”, disse o aluno L. Continuei, dirigindo-me ao aluno L: “Cuidado. Aqui estamos lidando com outro universo, o universo dos vetores. O sinal de menos na frente do vetor não significa que ele é negativo.”.

Retornei ao desenho das setas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, sendo que os alunos perceberam que a flecha $\overrightarrow{CB}$ representa o vetor $-\overrightarrow{w}$. Questionei os alunos: “Então, como podemos fazer a diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$? Qual é o segmento orientado que vai representar esta diferença?”. Os alunos nada disseram. Desenhei no quadro o paralelogramo ABCD (veja a figura 161 abaixo).

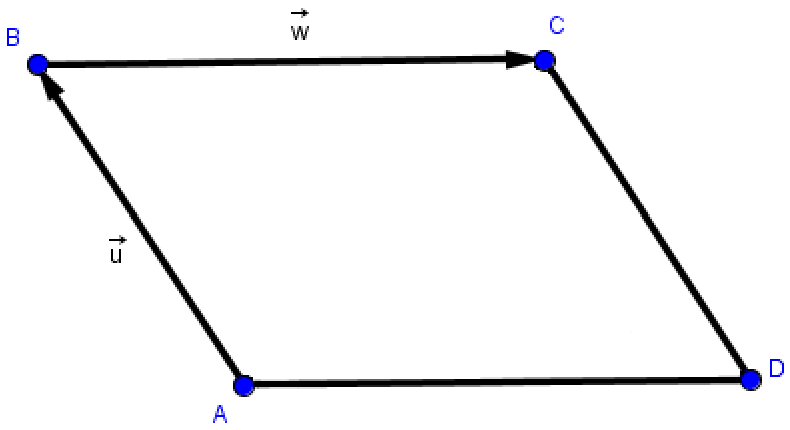


Figura 161 - Paralelogramo ABCD.

Fonte: A autora.

O aluno L afirmou: “A seta $\overrightarrow{DA}$ também representa o vetor $-\overrightarrow{w}$.” “E $\overrightarrow{DC}$, o vetor $\overrightarrow{u}$”, contribuiu a aluna R. “Certo”, concordei com os alunos L e R e completei com a ajuda dos estudantes a expressão que havia escrito no quadro, da seguinte forma: $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

O aluno L perguntou: “Sora, escrever $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ e, depois, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$ é a mesma coisa? Dá para fazer esta troca?”. “Sim”, respondi e expliquei para o (aluno) L que a operação de soma entre os vetores atendia a propriedade comutativa. Disse para o aluno L: “É como quando operamos 4 + 3. É o mesmo que fazer 3 + 4. A ordem das parcelas não altera o resultado”.

Desenhei a flecha $\overrightarrow{DB}$ no paralelogramo ABCD e chamei a atenção dos alunos para o fato de que na diagonal $\overline{AC}$ do paralelogramo, tínhamos o segmento orientado representante da soma $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{w}$ e na outra diagonal, o segmento orientado representante da diferença $\overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{w}$.

A figura 162 abaixo ilustra as conclusões do aluno G para o caso "Diferença entre vetores". Repare que ao desenhar o segmento orientado $\overrightarrow{DA}$, representante do vetor $-\overrightarrow{w}$, o aluno não toma o cuidado de manter a direção desta seta igual à da seta $\overrightarrow{BC}$, representante do vetor $\overrightarrow{w}$. Outra aluna "fechou" corretamente o paralelogramo ABCD, desenhando flechas representantes para os vetores $-\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{w}$. Os demais alunos não registraram suas conclusões para este caso.

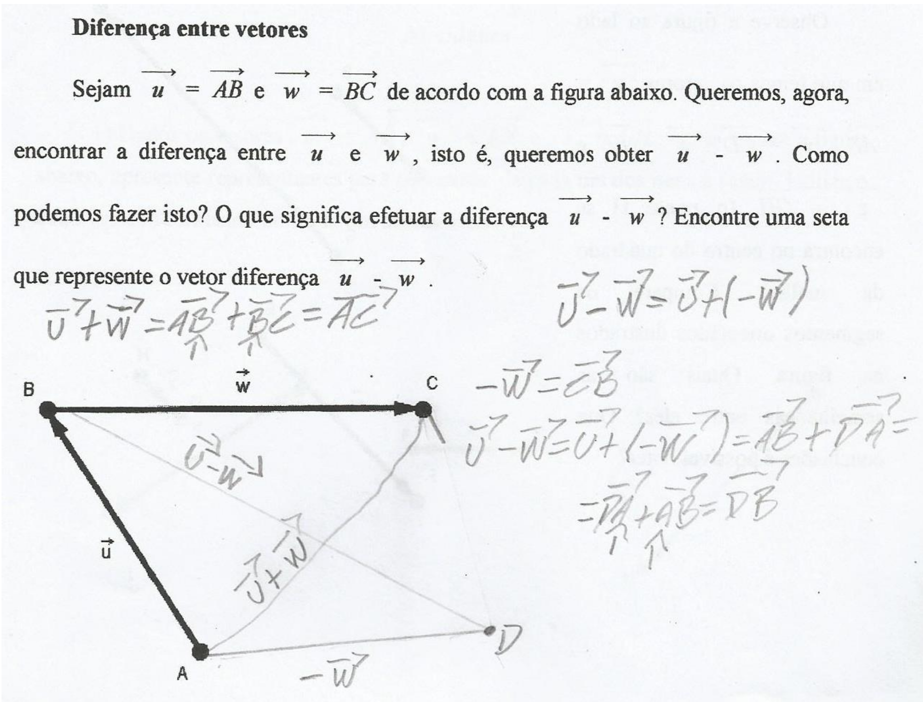


Figura 162 - Resposta do aluno G.

Fonte: Aluno G.

Em seguida, convidei os alunos para irmos ao laboratório de informática. Já na informática, pedi para que os estudantes abrissem a pasta "Oficina de Vetores" e que na subpasta “Aula 2” localizassem o arquivo “aula_2_produto.ggb”[14]. Neste arquivo, temos os vetores $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CC'}$. Ao movimentarmos o controle deslizante “k”, é possível perceber que as flechas representantes do vetor $\overrightarrow{u}$ sofrem alteração no comprimento e no sentido, porém mantem-se sempre na mesma direção que a da seta $\overrightarrow{OA}$. Observe a figura 163 abaixo que ilustra este arquivo.

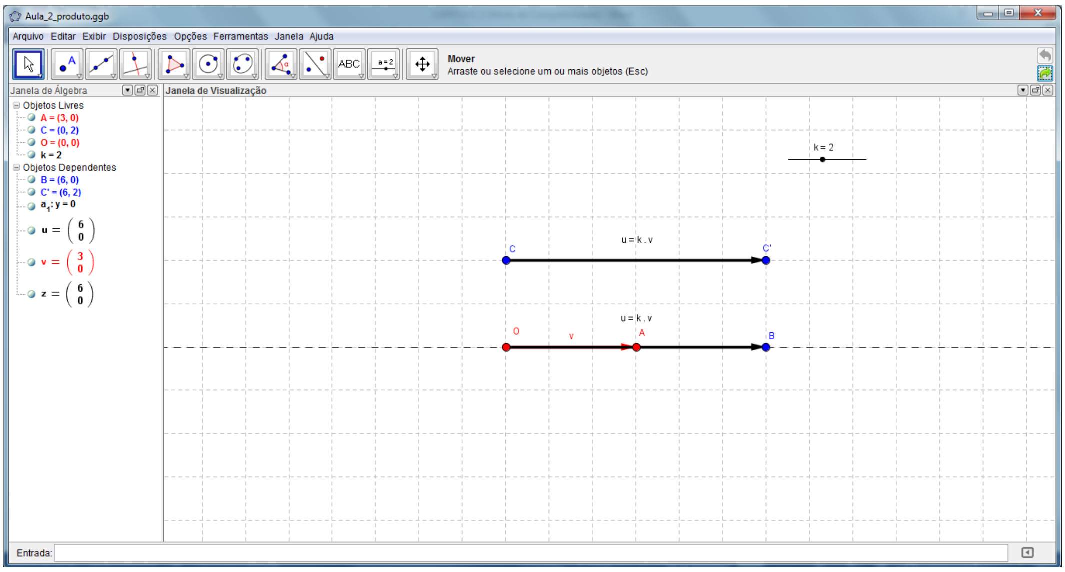


Figura 163 - Imagem do arquivo "aula_2_produto.ggb".

Fonte: A autora.

Solicitei aos alunos que movimentassem o controle deslizante “k”, mostrei para os mesmos como fazer isso. Perguntei: “O que está acontecendo? O que vocês estão percebendo?”. “As setas estão se movendo”, disse o aluno L. “Quais são as setas que se movem?”, questionei dirigindo-me ao L. O aluno L apontou na tela do computador em que estavam as setas $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{OB}$. Chamei a atenção dos alunos para o fato de que ao moverem o controle deslizante “k”, temos que o mesmo assume certos valores reais e os segmentos orientados $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{OB}$ sofrem alteração nas componentes comprimento e sentido. Disse aos alunos: “Vejam que as setas $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{OB}$ mantem sempre a mesma direção, são setas paralelas, vocês estão movimentando o controle deslizante k, mas a direção das setas $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{OB}$ não se altera. As flechas $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{OB}$ representam um mesmo vetor, o vetor $\overrightarrow{u}$.

[14] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/myLmgrfNp.

Chamei a atenção dos estudantes para a seta $\overrightarrow{OA}$. Disse: “A seta $\overrightarrow{OA}$ representa um outro vetor, o vetor $\overrightarrow{v}$. Vejam que esta seta também possui a mesma direção que a das outras, mas ela mantem sempre o mesmo comprimento e sentido”.

Pedi aos estudantes que digitassem um valor positivo para “k” na caixa de “Entrada” do GeoGebra. Disse ao grande grupo: “Pessoal, agora quero que vocês meçam o comprimento das setas $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{OB}$ e, depois, comparem a medida que vocês encontraram com o comprimento da seta $\overrightarrow{OA}$. Considerem cada quadriculado da malha como tendo uma unidade de medida de área”. Passei de computador em computador para auxiliar os alunos nesta tarefa e fazer com que os mesmos percebessem a relação existente entre os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CC'}$ e $\overrightarrow{OB}$, isto é, percebessem que estas setas representam vetores múltiplos, já que é possível escrever $\overrightarrow{CC'}$ = $\overrightarrow{OB}$ = k . $\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{u}$ = k . $\overrightarrow{v}$.

O nono encontro chegou ao fim e os estudantes devolveram para mim o material do segundo encontro. Por falta de tempo, nenhum aluno registrou no material suas conclusões sobre o que estava sendo discutido por meio do arquivo “aula_2_produto.ggb” referente ao tópico “Multiplicação de um número real por um vetor”.

Com este último encontro, a experiência prática na escola foi encerrada. Sendo assim, foram nove o número total de encontros realizados com os estudantes.

Percebo que meu planejamento inicial foi um tanto ambicioso, por querer, em oito encontros, trabalhar com os alunos diversos tópicos da Geometria Vetorial e da Geometria Analítica.

Cada período do noturno tinha uma duração de apenas 30 minutos. Além disso, muitas vezes, no início dos encontros se fez necessário revisar com os alunos certos tópicos não muito bem compreendidos pelos mesmos, relembra-los de certos conceitos já discutidos para que o avanço no conteúdo fosse possível.

Os estudantes tiveram uma dificuldade inicial para levar em consideração os três componentes (direção, sentido e comprimento) ao trabalhar com o estudo dos vetores. Confundiam constantemente os conceitos de direção e sentido. Já na informática, por não conhecerem o software GeoGebra, pude perceber a dificuldade dos alunos em manipular as ferramentas que o software oferece.

No entanto, a cada encontro, os alunos se mostravam curiosos e interessados em aprender, levantavam questionamentos, expunham as suas dúvidas, contribuindo, assim, para o desenrolar das atividades.

No próximo capítulo trago as minhas considerações finais com relação ao trabalho realizado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O interesse em levar ao conhecimento do estudante de Ensino Médio conceitos básicos da Geometria Vetorial com o objetivo de que o estudo referente a alguns tópicos de Geometria Analítica se tornasse mais compreensível, motivou-me à realização deste trabalho.

Os vetores constituem uma ferramenta a mais que os estudantes dispõem para a resolução de problemas de Geometria Analítica, pois permitem um melhor entendimento e visualização geométrica dos conceitos abordados neste conteúdo.

Neste trabalho, apresentamos a análise de dois livros didáticos, com o objetivo de verificar a abordagem concedida aos tópicos da Geometria Analítica, sendo que foi possível verificar a ênfase dada à álgebra. Temos que o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica se dá por meio da interação entre os domínios algébrico e geométrico. Porém, o campo geométrico deste conteúdo parece ser esquecido em diversos momentos pelos autores de livros didáticos.

Acreditando na possibilidade de tornar a aprendizagem dos conceitos matemáticos de Geometria Analítica mais global, elaboramos uma sequência didática com conceitos básicos da Geometria Vetorial, para que estes servissem como um suporte à introdução e ao estudo de alguns tópicos da Geometria Analítica, pois por meio desta abordagem os alunos podem transitar por pelo menos dois registros distintos de representação (algébrico e geométrico), realizando conversões e relacionando as unidades de sentido presentes no conteúdo de cada uma das representações semióticas de um mesmo objeto matemático. De acordo com Duval (2011, p. 102), “[...] a abordagem de interpretação global exige que a atenção esteja centrada sobre um conjunto de propriedades [...]” e não em uma interpretação baseada em regras de codificação, que é o que se verifica quando trabalhamos com o enclausuramento em um determinado registro de representação semiótica.

A sequência didática foi aplicada com um grupo de alunos do Ensino Médio e pode-se observar, no desenrolar da mesma, a curiosidade, o interesse e envolvimento destes estudantes em querer aprender e entender aqueles novos conceitos que lhes eram apresentados.

Em alguns dos encontros, o *software* GeoGebra foi utilizado, sendo que o mesmo foi escolhido devido ao fato de podermos trabalhar com duas representações distintas das construções realizadas no *software*: a representação geométrica (por meio da Janela de Visualização do *software)* e a representação algébrica (por meio da Janela de Álgebra do *software*). A partir do dinamismo oferecido pelo programa, os alunos puderam criar objetos e manipulá-los, facilitando assim a questão da visualização e, consequentemente, a compreensão.

No entanto, a sequência elaborada não chegou a ser finalizada com os estudantes. A princípio, havíamos planejado a aplicação da mesma em no máximo oito encontros com duração de duas horas cada. Porém nove encontros foram realizados com diferentes durações de tempo e não foi suficiente para a conclusão da mesma.

Neste trabalho propus o estudo de vetores para dar mais visualização geométrica a conceitos de Geometria Analítica. No entanto, temos que a Geometria Analítica une os campos da Geometria e da Álgebra, sendo que ao trabalharmos com a Geometria Analítica devemos lidar com estes dois campos, ou seja, não podemos dar mais ênfase a um do que ao outro. Nos encontros com os estudantes na escola, introduzi o conceito de vetor geométrico, porém o estudo do vetor algébrico não foi realizado. Talvez devesse ter dedicado menos tempo ao estudo de vetores geométricos e avançar para o trabalho com coordenadas, já que é com coordenadas que se pode trabalhar de forma mais eficiente os conceitos que são tratados na Geometria Analítica.

O estudo de vetores foi iniciado sob o viés da Física, ao trabalharmos com movimentos no GeoGebra e representações para os vetores velocidades. Talvez a exploração de atividades que envolvessem translações, já em um primeiro momento, ajudaria os alunos a compreender mais facilmente o conceito de vetor.

A aplicação da sequência didática foi iniciada tardiamente na escola. Porém não foi somente este o motivo para o não cumprimento total da sequência, ou seja, outros fatores também contribuíram para que isto acontecesse: o ritmo de aprendizagem da turma, a bagagem de conhecimentos que cada aluno carrega, a falta de habilidade de alguns em lidar com os computadores, o não conhecimento do *software* GeoGebra e as consequentes dificuldades para manipular as ferramentas deste programa, as ausências frequentes, etc.

Quando elaborarmos planejamentos para as nossas aulas, muitas vezes, acontece de os mesmos não serem cumpridos no prazo previsto. Desta forma, levarei isto como uma experiência a qual será importante em minha profissão como futura professora.

Após a realização da experiência, questionei-me sobre o que poderia ter feito de diferente. Primeiramente, devido ao fato de muitos alunos não saberem trabalhar com o *software* GeoGebra, permitiria que os mesmos explorassem o programa livremente. Apresentaria aos estudantes algumas atividades simples, com o objetivo de fazer com que os mesmos tomassem conhecimento sobre as funcionalidades das ferramentas disponíveis no GeoGebra. Acredito que assim os alunos estariam mais preparados para explorar no *software* os diversos arquivos que foram por mim elaborados. Em segundo lugar, ao trabalhar com o assunto grandezas vetoriais, dei muita ênfase à grandeza vetorial velocidade, ou seja, poderia ter trazido outros exemplos de grandezas vetoriais. Além do mais, poderia ter ampliado a discussão referente à direção, sentido e intensidade da velocidade ao refletir juntamente com os alunos de que no cotidiano essa diferenciação não é feita, ou seja, no senso comum não consideramos sentido e direção da velocidade. Dessa forma, estaria relacionando os novos conceitos matemáticos introduzidos com a realidade do aluno.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 18), o conhecimento escolar deve:

> [...] viabilizar o domínio do conhecimento científico sistematizado na educação formal, reconhecendo sua relação com o cotidiano e as possibilidades do uso dos conhecimentos apreendidos em situações diferenciadas da vida. Essa proposta depende, para a concretização, de que o professor se torne um mediador entre o conhecimento sistematizado e o aluno, para que este consiga transpor para o cotidiano os conteúdos apropriados em sala de aula.

Em terceiro lugar, em todas as aulas em que propus aos estudantes o trabalho no *software* GeoGebra, mostrei aos mesmos arquivos já prontos, arquivos que havia elaborado para que os alunos explorassem e fizessem uso das ferramentas do programa para realizar construções dentro destes arquivos. Esta escolha se deu para dar ênfase na exploração das animações que permitissem a descoberta dos conceitos de Geometria Vetorial estudados. Entretanto, uma outra abordagem poderia ser feita, solicitando aos alunos que construíssem seus arquivos no GeoGebra, enfatizando a construção de modelos no GeoGebra. No início da aplicação da sequência didática, trabalhei bastante com simulações de movimentos no *software*, sendo que um possível desdobramento do uso do material didático produzido, seria, talvez, mostrar vídeos de movimentos para os estudantes e ensina-los a modelar tais movimentos no GeoGebra.

De qualquer forma, a experiência foi válida, conceitos básicos de vetores foram introduzidos com os alunos, sendo que vetor é algo visto somente no ensino superior. Quando aparece na sala de aula do Ensino Médio, costuma ser apresentado na disciplina de Física, sendo que vetor é um objeto matemático. A maioria dos alunos havia afirmado em questionário entregue no início da experiência prática que não conhecia o *software* GeoGebra, sendo que pude perceber nos encontros em que utilizávamos o programa, a curiosidade dos alunos em interagir com as ferramentas, em aprender a como construir um determinado objeto, o interesse diante dos arquivos e animações que lhes eram mostradas, os questionamentos por eles levantados. Tudo isso corroborando, enfim, para o processo de aprendizagem em Matemática.

REFERÊNCIAS

BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda K. Saito. **Geometria analítica para todos e atividades com Octave e Geogebra**. São Carlos/SP: EdUFSCar, 2011. 493 p.

BANDT, Célia Finck; DIONIZIO, Fátima Aparecida Queiroz. **O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática**. IX ANPED SUL, Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul, 2012.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. São Paulo: Prentice Hall, 2005. 543 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: 2002. 144 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/CEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015 : Matemática / Brasília, 2014.

CARNEIRO, Pedro Sica. **Geometria Vetorial na escola:** uma leitura geométrica para sistemas de equações. Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS, 2007.

CÉZAR, Paulo. **Geometria Analítica Plana**. Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), 2008. Disponível em: <http://strato.impa.br/videos/CAPEM_JUL08/PAPMEM210708-PC.avi>. Acesso em: 22 jun. 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações**.**. 4.ed. São Paulo: Ática, 2011. v.3

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. São Paulo: Atual, 2005. 456 p. v. 9.

DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). p. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fascículo I)/ Raymond Duval. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização: CAMPOS, Tânia M. M. Tradução: DIAS, Marlene Alves. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. **Gráficos e equações**: a articulação de dois registros. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. Revemat, v. 06, n. 2, p. 96-112, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2011.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução: MORETTI, Méricles Thadeu. Revemat, v. 07, n. 2, p. 266-297, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice et al. (Org). **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** tripé para a formação do professor de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

IEZZI, Gelson, et al**. Matemática:** Ciência e Aplicações. 5.ed. São Paulo: Atual, 2010. v. 3

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1992. 216 p.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática, vol. 3. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 249 p.

PORTO ALEGRE. Secretaria de Educação e Cultura. Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont. **Projeto Político Pedagógico**. Porto Alegre, 2010.

RICHIT, Adriana. **Projetos em Geometria Analítica usando software de geometria dinâmica:** repensando a formação inicial docente em matemática. Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. UNESP, Rio Claro, 2005.

SILVA, Robson Vieira da. **Geometria Analítica no Ensino Médio:** uma proposta com tratamento vetorial. Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

WAGNER, Eduardo. Sobre o ensino de geometria analítica. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, n. 41, p. 17-22, 1999.

WAGNER, Eduardo. **Aplicações da geometria analítica**. Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), 2008. Disponível em: <http://strato.impa.br/videos/CAPEM_JUL08/PAPMEM220708-2-Wagner.avi>. Acesso em: 11 out. 2014.

WAGNER, Eduardo. **Aplicações da geometria analítica**. Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), 2011. Disponível em: <http://strato.impa.br/videos/PAPMEM_JAN11/papmem_jan2011_25012011_wagner_02.flv>. Acesso em: 11 out. 2014.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000. 232 p.

APÊNDICE A – A sequência didática planejada

Este apêndice traz os conteúdos e atividades de Geometria Vetorial e de Geometria Analítica que se pretende trabalhar com os estudantes, organizados em sete materiais nomeados por “Encontro 1”, “Encontro 2” “Encontro 3”, “Encontro 4”, “Encontro 5”, “Encontro 6” e “Encontro 7’.

Encontro 1:

Grandezas escalares

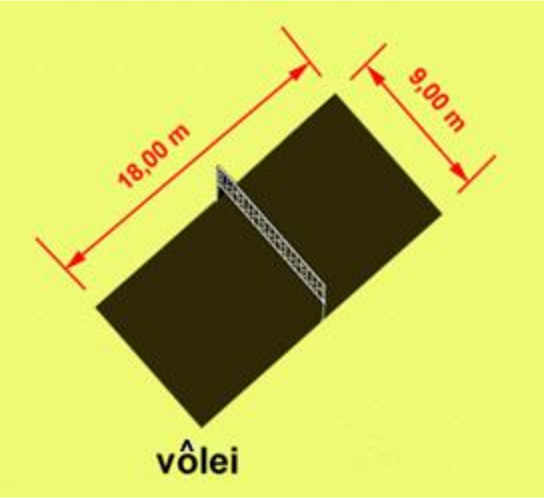
O que são grandezas escalares? Dê exemplos de grandezas escalares:

Grandeza escalar temperatura

Fonte: <http://imagem.band.com.br/f_188919.jpg>. Acesso em: 14/10/14.

Grandeza escalar volume

Fonte: <http://www.lojadomecanico.com.br/imagens/31/266/73048/Balde_Graduado_de_Polietileno_20L_1.JPG>. Acesso em: 14/10/2014.



Grandeza escalar comprimento

Fonte: <http://www.edifique.arq.br/images/esportes.GIF> Acesso em: 14/10/2014.

Grandezas vetoriais

O que são grandezas vetoriais? Dê exemplos de grandezas vetoriais:

Abre o arquivo “carros.ggb”[15] (veja a figura a seguir) no programa GeoGebra e clique no botão “Reproduzir”. Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos automóveis? Justifique as suas conclusões.

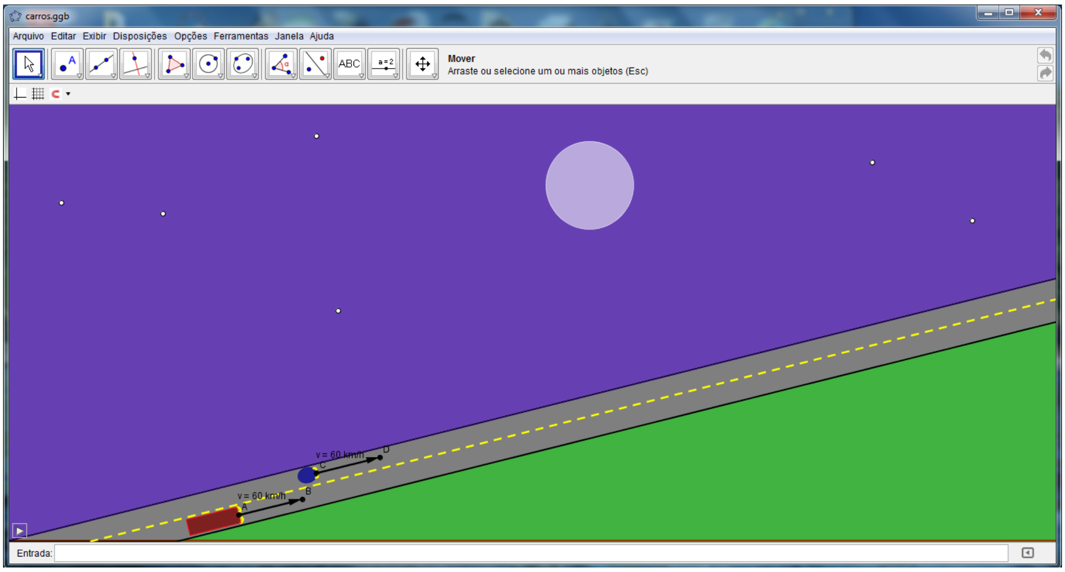


Imagem do arquivo "carros.ggb"

Fonte: A autora

[15] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mFOgWWWkN.

Abre o arquivo "helicopteros.ggb"[16] (veja a figura abaixo) no programa GeoGebra e clique no botão "Reproduzir". Descreva o que você observa. Que conclusões você obtém com relação as velocidades dos helicópteros? Podemos afirmar que elas são iguais? Justifique.

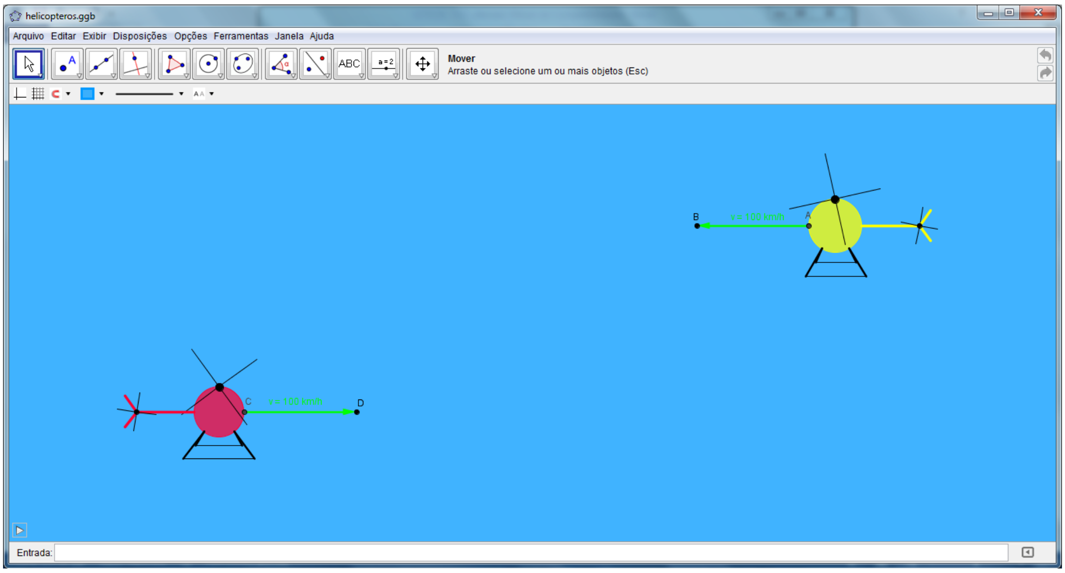


Imagem do arquivo "helicopteros.ggb"

Fonte: A autora

Abre o arquivo "mruv.ggb"[17] (observe a figura abaixo) no programa GeoGebra e clique no botão "Reproduzir". O que você observa? A velocidade do tijolo nos diferentes instantes de tempo é sempre a mesma? Justifique.

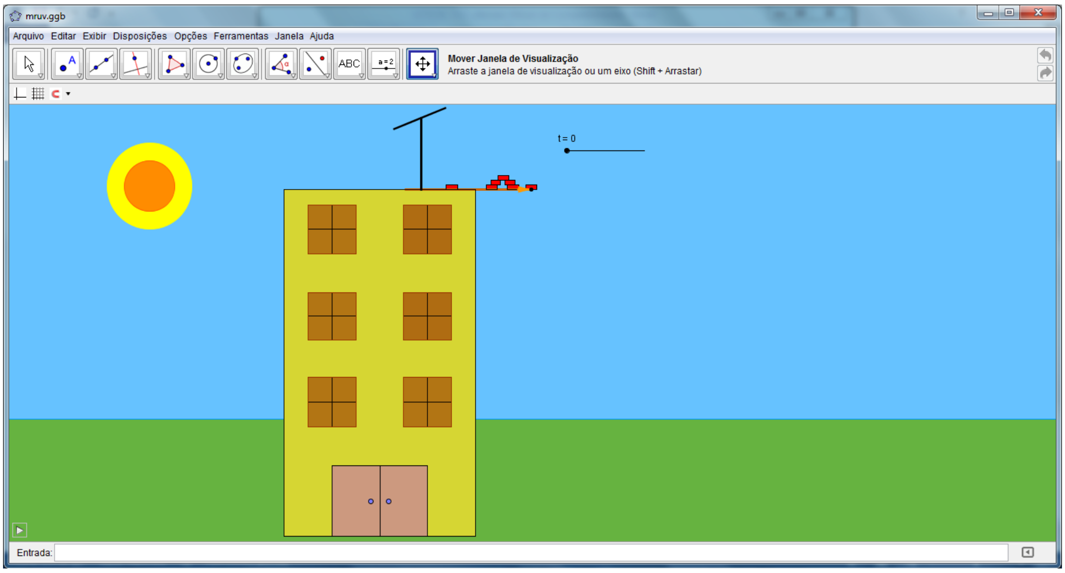


Imagem do arquivo "mruv.ggb"

Fonte: A autora

[16] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mxQJ5Os8k.

[17] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mXP3FtEBl.

Abre o arquivo “roda_gigante.ggb”[18] (veja a figura abaixo) no programa GeoGebra e clique no botão “Reproduzir”. Descreva o que você observa. Clique no botão “Pausa” em um determinado instante e escolha pelo menos dois dos banquinhos da roda gigante para comparar as suas velocidades. Que conclusões você obtém? De uma maneira geral o que podemos afirmar a respeito das velocidades dos banquinhos da roda gigante? Apresente justificativas.

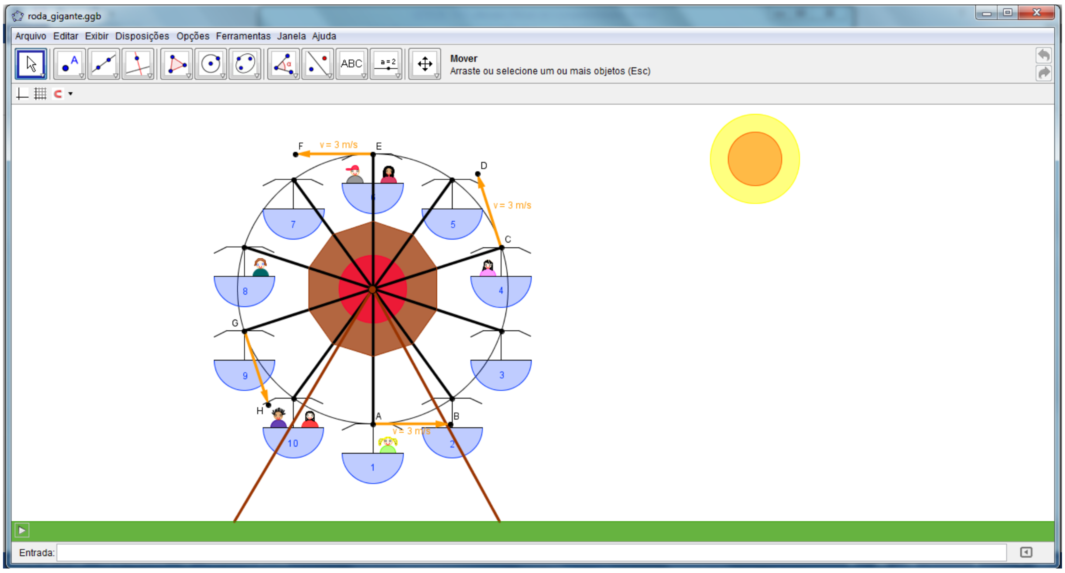


Imagem do arquivo "roda_gigante.ggb"

Fonte: A autora

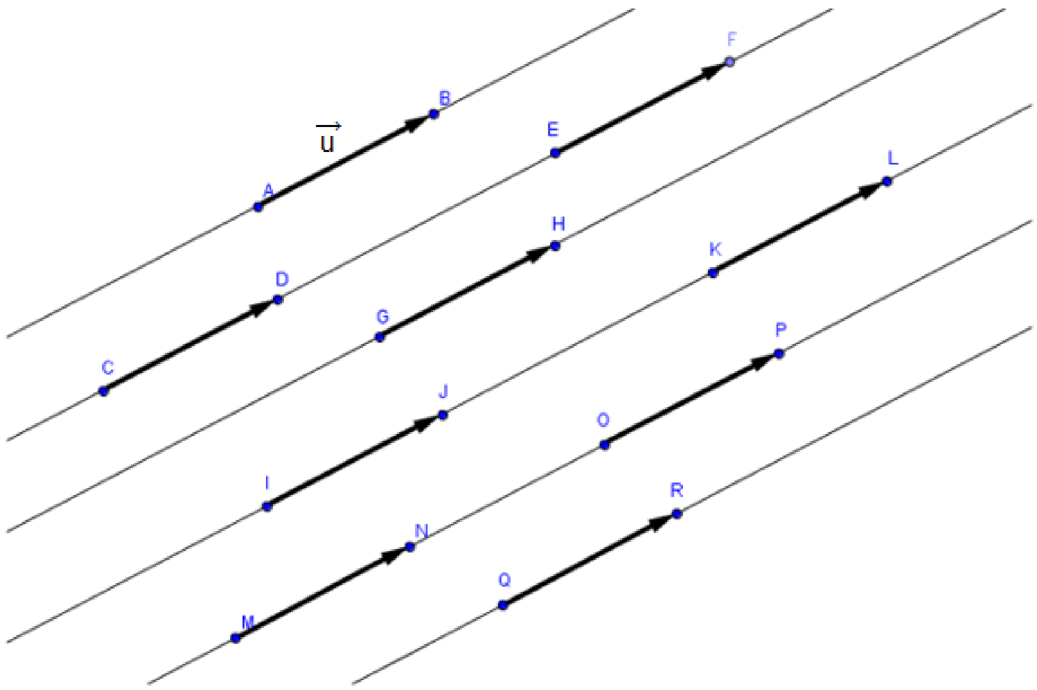
Portanto, o que podemos concluir após termos vistos essas quatro situações que envolvem a grandeza vetorial velocidade? Quando podemos afirmar que temos velocidades iguais?

O vetor geométrico

Ao estudarmos as grandezas vetoriais, surge a ideia de vetor. Mas o que é vetor?

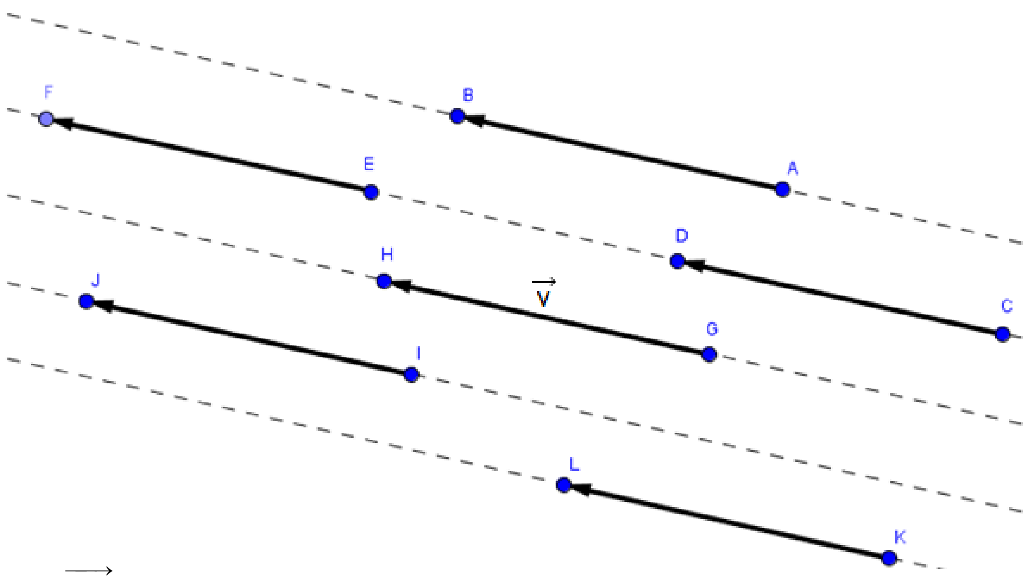
Observe as figuras a seguir. Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são iguais? Quando podemos afirmar que duas setas representam o mesmo vetor?

[18] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mS5sTeySX.



Vetor $\overrightarrow{u}$

Fonte: A autora



Vetor $\overrightarrow{v}$

Fonte: A autora

Atividades

1) O que é um segmento orientado? O que é um vetor? Há diferença entre ambos? Se sim, quais são essas diferenças?

2) Abre o arquivo "aula_1_questao_2.ggb"[19] (veja a figura abaixo) no programa GeoGebra. Você visualizará os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$. Estes segmentos representam um mesmo vetor? O que podemos concluir dos segmentos orientados $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$? O que podemos dizer a respeito do quadrilátero ABDC? Não esqueça de justificar as suas respostas.

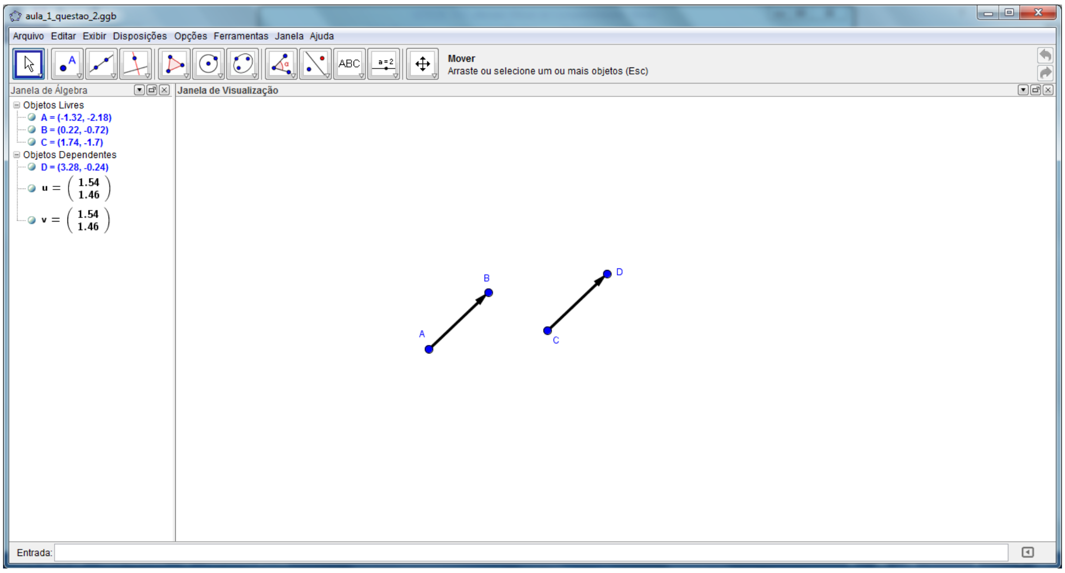


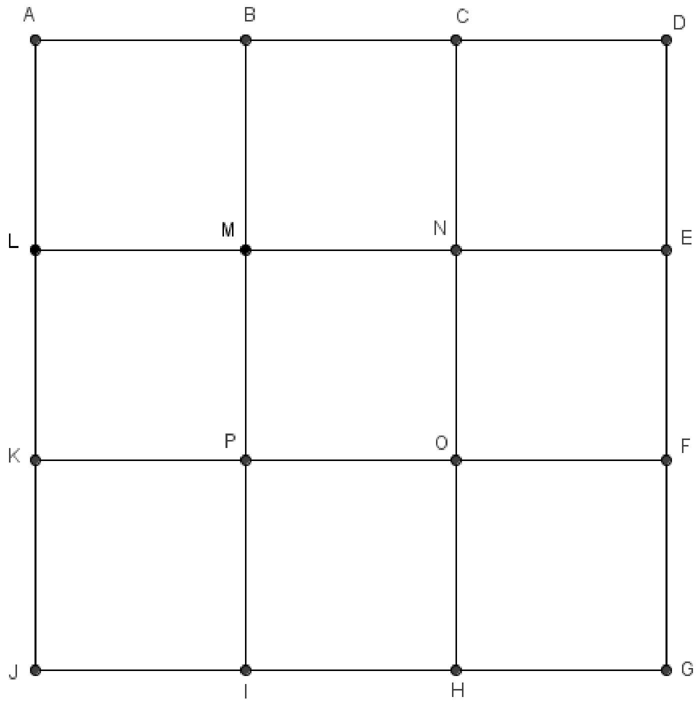
Imagem do arquivo "aula_1_questao_2.ggb"

Fonte: A autora

3) A figura a seguir é constituída de nove quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações justificando a sua resposta:[20]

[19] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mQMBDTqNq.

[20] Atividade adaptada do livro Vetores e geometria analítica, WINTERLE, Paulo, p.6, 2000.



Quadrado ADGJ

Fonte: A autora

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$;

b) $\overrightarrow{AM}$ não possui a mesma direção que $\overrightarrow{GO}$;

c) $\overrightarrow{DE}$ possui mesmo comprimento que $\overrightarrow{KI}$;

d) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$.

4) A palavra vetor deriva do latim *vehere* que significa aquele que transporta (LIMA, et al, 2006). Um vetor pode, por exemplo, deslocar um ponto de uma posição para outra, o que chamamos de translação.

Abre o arquivo "aula_1_questao_4.ggb"[21] (veja a figura a seguir) no programa GeoGebra. Você visualizará uma gravura do artista gráfico holandês Escher (1898 - 1972) e a flecha $\overrightarrow{CD}$. Leia os itens a seguir e faça o que se pede:

---

[21] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://www.geogebratube.org/student/mB4zdNKKj.

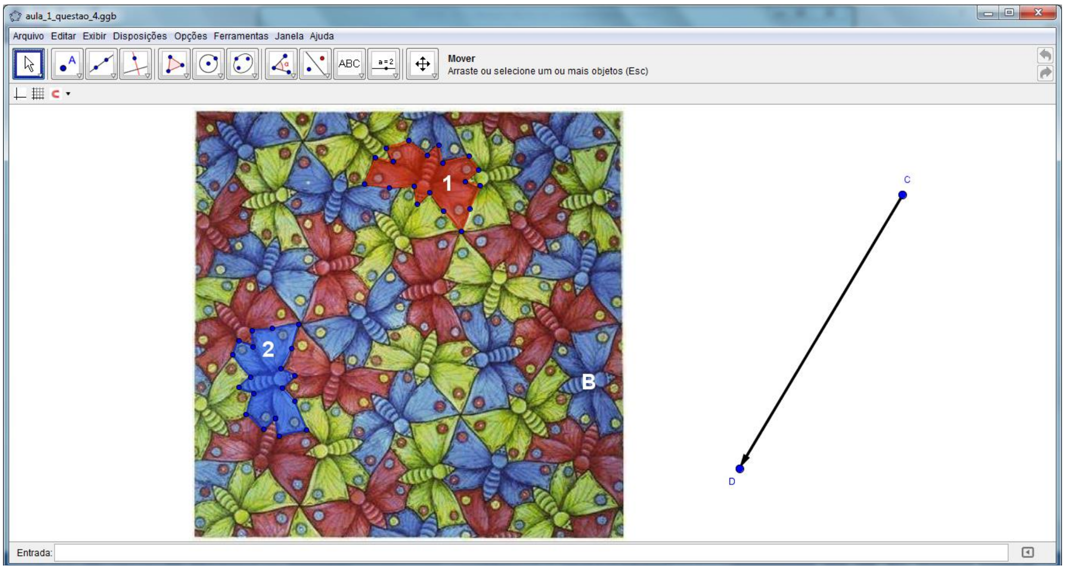


Imagem do arquivo "aula_1_questao_4"

Fonte: A autora

a) Utilizando a ferramenta do GeoGebra “Translação por um vetor”, clique sobre o interior da “Borboleta 1” e depois sobre a seta $\overrightarrow{CD}$, descreva o que ocorreu;

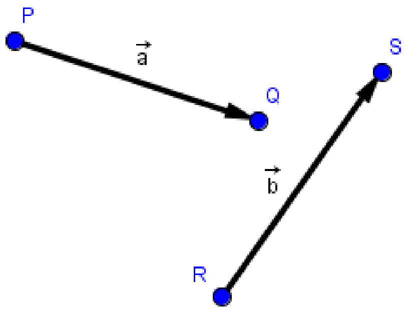
b) Indique uma seta representante de um vetor translação que desloque a “Borboleta 2” para a “Borboleta B”. Faça essa translação no GeoGebra utilizando a seta que você indicou.

Encontro 2:

Operações com o vetor geométrico

Adição de vetores

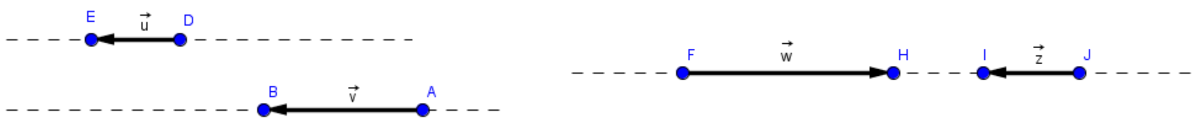
Sejam $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ dois segmentos orientados que representam, respectivamente, os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ conforme a figura a seguir. Queremos efetuar a soma $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$. De que maneira podemos fazer isto? Encontre um segmento orientado que represente o vetor soma de $\overrightarrow{a}$ com $\overrightarrow{b}$.



Setas $\overrightarrow{PQ}$ **e** $\overrightarrow{RS}$

Fonte: A autora

Observe as figuras abaixo. No caso ilustrado pela figura da esquerda, temos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ representados, respectivamente, pelas flechas $\overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{AB}$. O que estas flechas possuem em comum? No caso ilustrado pela figura da direita, temos os vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ representados, respectivamente, pelas flechas $\overrightarrow{FH}$ e $\overrightarrow{JI}$. O que estas setas possuem em comum? Como podemos obter os vetores soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$?



Vetores paralelos

Fonte: A autora

Abre o arquivo "barco.ggb"[22] (observe a figura a seguir) no programa GeoGebra e clique no botão "Reproduzir". O que você observa? Qual é a relação entre os segmentos orientados que representam as forças $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ e o segmento orientado que representa a força $\overrightarrow{F_3}$?

[22] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mHrAq3le5.

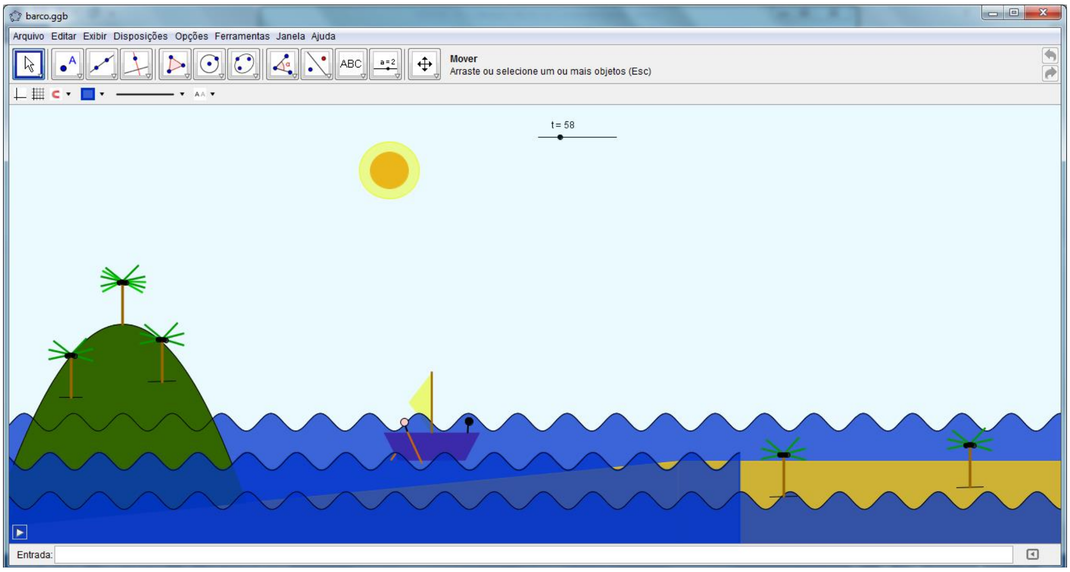
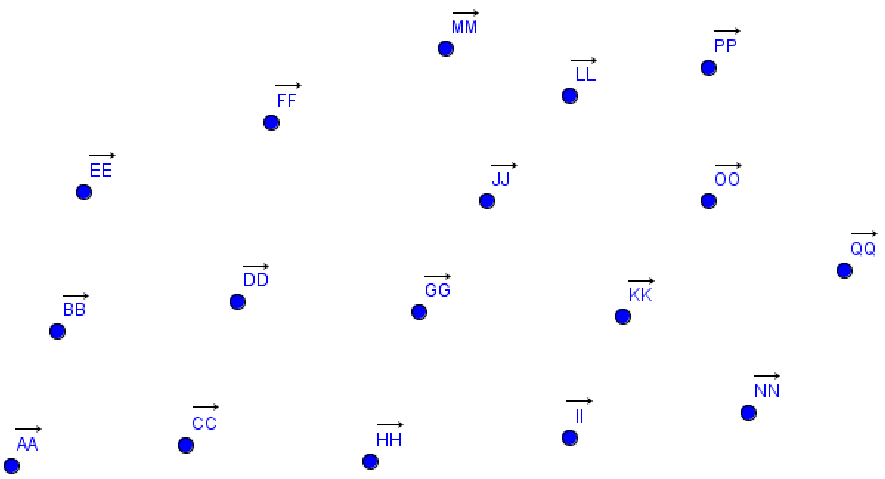


Imagem do arquivo "barco.ggb"

Fonte: A autora

Vetor nulo

O que é o vetor nulo?

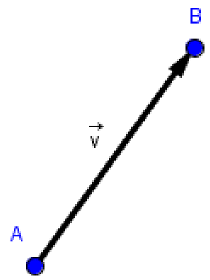


Representantes do vetor nulo

Fonte: A autora

Vetor oposto

Observe a figura a seguir em que temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$. Dizemos que $-\overrightarrow{v}$ é o vetor oposto de $\overrightarrow{v}$ e escrevemos $-\overrightarrow{v}$ = __________ = __________. Desenhe um segmento orientado que represente o vetor $-\overrightarrow{v}$. Quais características os vetores $\overrightarrow{v}$ e $-\overrightarrow{v}$ possuem em comum?

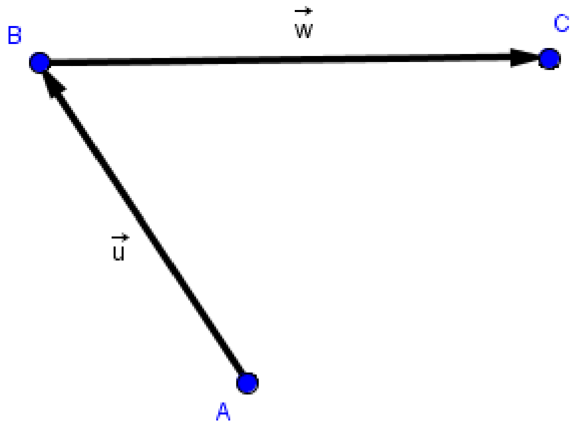


Vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$

Fonte: A autora

Diferença entre vetores

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$ de acordo com a figura abaixo. Queremos, agora, encontrar a diferença entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$, isto é, queremos obter $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$. Como podemos fazer isto? O que significa efetuar a diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$? Encontre uma seta que represente o vetor diferença $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$.



Vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ **e** $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$

Fonte: A autora

Multiplicação de um número real por um vetor

Abre o arquivo “aula_2_produto.ggb”[23] (observe a figura a seguir) no programa GeoGebra e movimente o controle deslizante “k”. O que você observa? Escolhe um valor positivo para “k” e digite o mesmo no campo de “Entrada”, depois compare os segmentos

[23] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/myLmgrfNp.

orientados que representam os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Repete o procedimento para um valor negativo de “k”. Que conclusões você obtém?

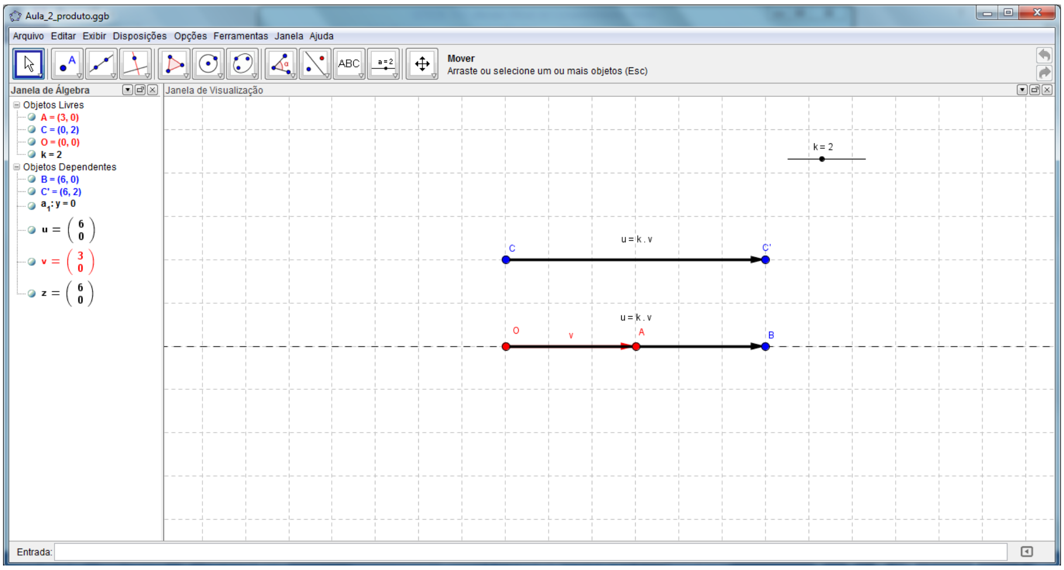
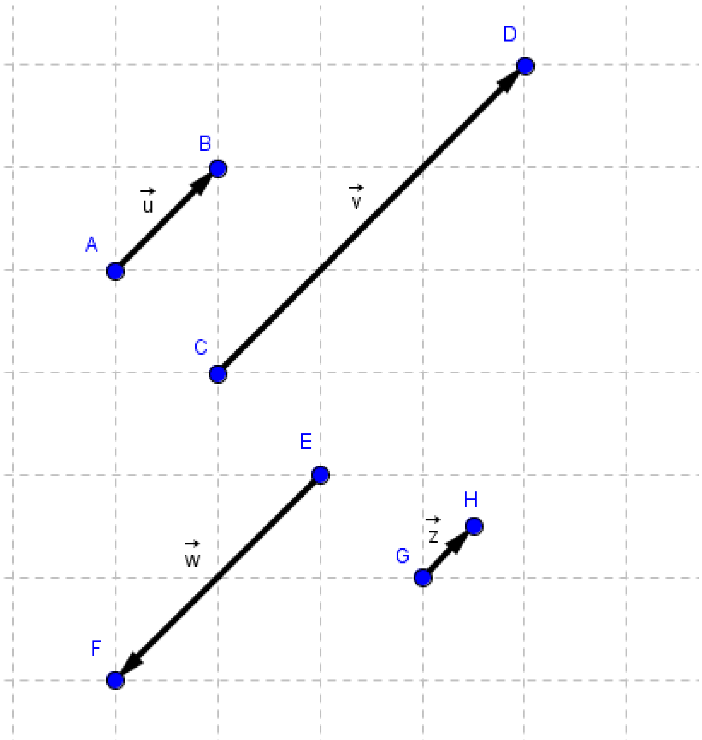


Imagem do arquivo "aula_2_produto.ggb"

Fonte: A autora

Observe a figura ao lado em que temos os vetores $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v}$ = $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{w}$ = $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{z}$ = $\overrightarrow{GH}$ (o ponto H se encontra no centro do quadrado da malha). Compare os segmentos orientados ilustrados na figura. Quais são as semelhanças entre eles? Que conclusões é possível obter?



Vetores múltiplos

Fonte: A autora

Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor qualquer e k um número real, temos que o vetor k $\overrightarrow{v}$ é o produto do número real k pelo vetor $\overrightarrow{v}$ e possui as seguintes características:[24]

a)

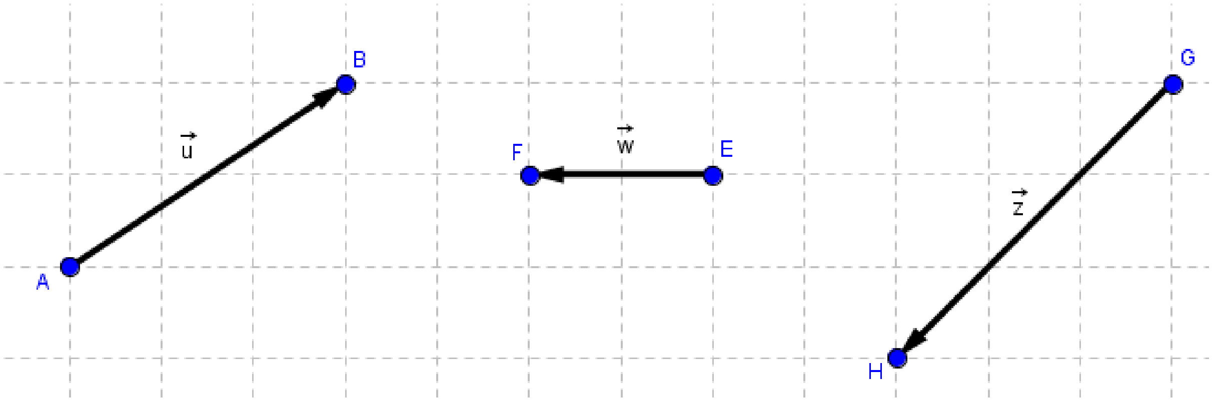
b)

c)

Observação: Se k = 0 ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (vetor nulo), então k $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Atividades

1) Dados os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{GH}$, como mostra a figura abaixo, apresente representantes para os vetores de cada um dos itens a seguir. Utilize o quadriculado fornecido em cada um destes itens.



Vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{EF}$ **e** $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{GH}$

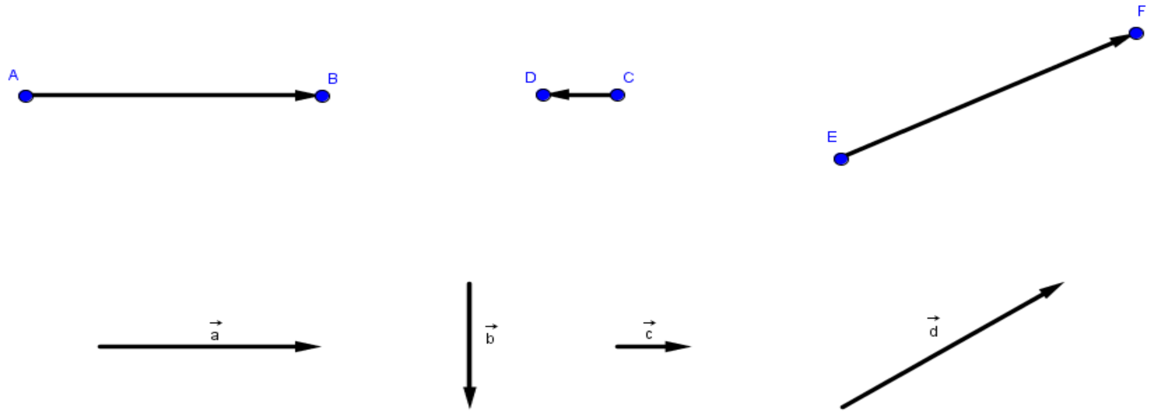
Fonte: A autora

[24] Pretende-se discutir com os alunos as características do vetor k $\overrightarrow{v}$ em relação ao vetor $\overrightarrow{v}$. Professor e alunos completam os itens juntamente (reveja o tópico "Multiplicação de um número real por um vetor" discutido no Capítulo 3, p. 67 e 68).

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$

b) $-\overrightarrow{z} - \overrightarrow{w}$

2) Os vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{d}$ podem ser escritos em função dos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$ (veja a figura abaixo). Preencha as lacunas dos itens a seguir escolhendo para cada caso um dos quatro vetores.



Vetores e segmentos orientados

Fonte: A autora

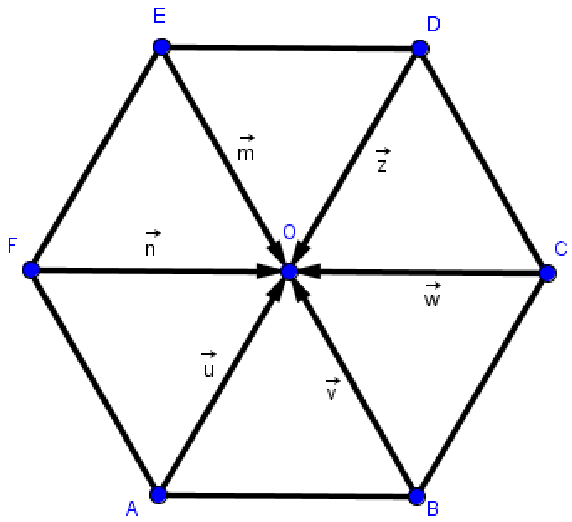
a) .... = $-\overrightarrow{CD}$

b) .... = $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

c) .... = $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EF}$

d) .... = $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD}$

3) Seja ABCDEF um hexágono regular conforme mostra a figura abaixo. Calcule a seguinte soma: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z} + \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$. Indique um representante para o vetor resultado dessa soma.[25]

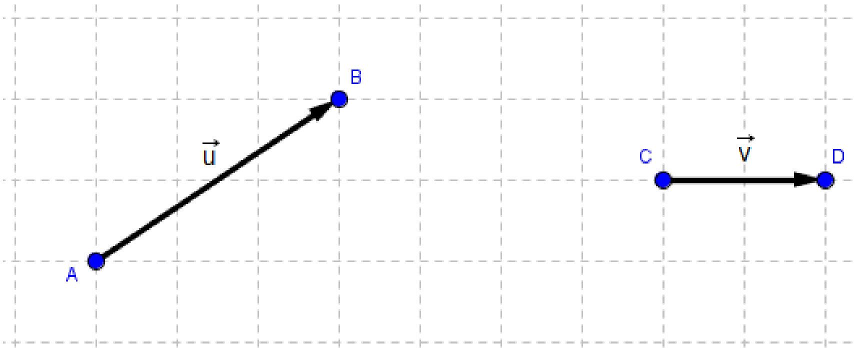


Hexágono regular ABCDEF

Fonte: A autora

[25] Atividade adaptada do livro Geometria analítica: um tratamento vetorial, BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de, p. 15, 2005.

4) Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ como na figura abaixo. Utilize o quadriculado fornecido em cada um dos itens a seguir para apresentar representantes dos vetores indicados nestes itens:



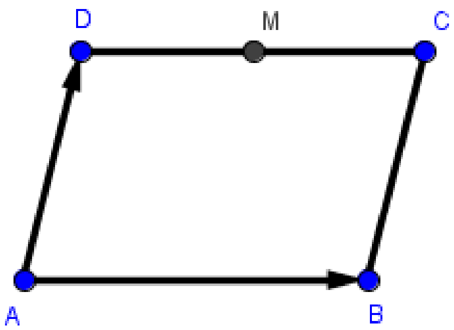
Vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$

Fonte: A autora

a) $\overrightarrow{u} + 2\,\overrightarrow{v}$

b) $-1,5\,\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$

5) Considere o paralelogramo ABCD da figura abaixo em que M é o ponto médio do lado $\overline{DC}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{AM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



Paralelogramo ABCD

Fonte: A autora

6) Seja ABC um triângulo em que M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Mostre que $\overline{MN}$ é paralelo ao lado $\overline{AB}$ e que possui a metade do comprimento de $\overline{AB}$.[26]

Encontro 3:

O vetor algébrico

Abre o arquivo "coordenadas.ggb"[27] (observe a figura abaixo) no programa GeoGebra e clique no botão "Reproduzir". Depois, responde à pergunta do arquivo e escreve a sua resposta abaixo:

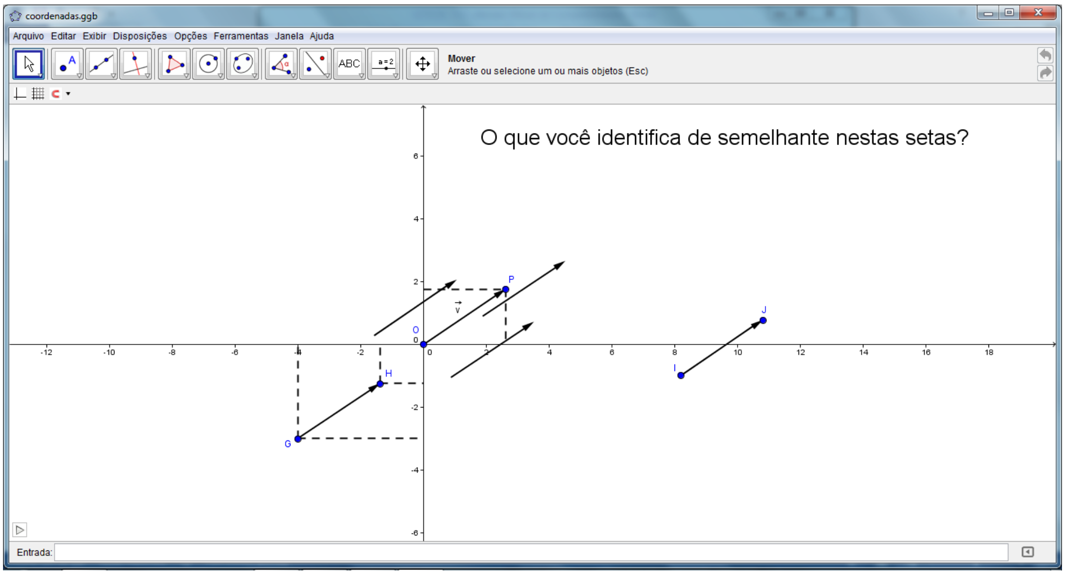
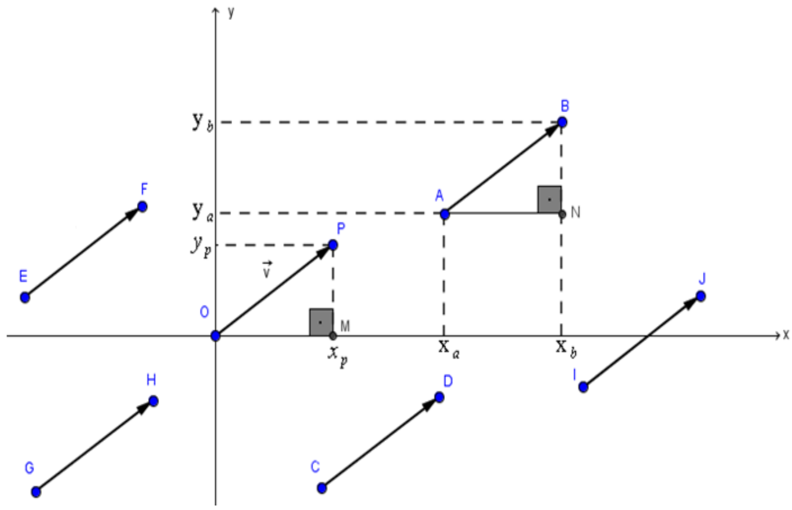


Imagem do arquivo "coordenadas.ggb"

Fonte: A autora

[26] Atividade adaptada do livro Vetores e geometria analítica, WINTERLE, Paulo, p. 13, 2000.

[27] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://www.geogebratube.org/student/mes76IqTk.



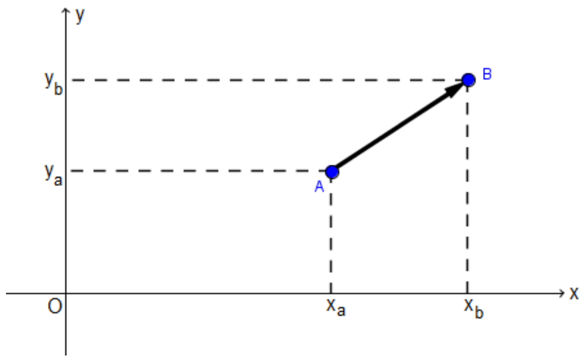
Repare no segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ ilustrado na figura ao lado. É possível representar a flecha $\overrightarrow{OP}$ de maneira algébrica?

Setas em um sistema de coordenadas cartesianas

Fonte: A autora

E quanto ao vetor $\overrightarrow{v}$, como este pode ser representado algebricamente?

Repare, agora, no segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Será que é possível representá-lo de maneira algébrica em função das coordenadas do seu ponto origem A e do seu ponto extremidade B?



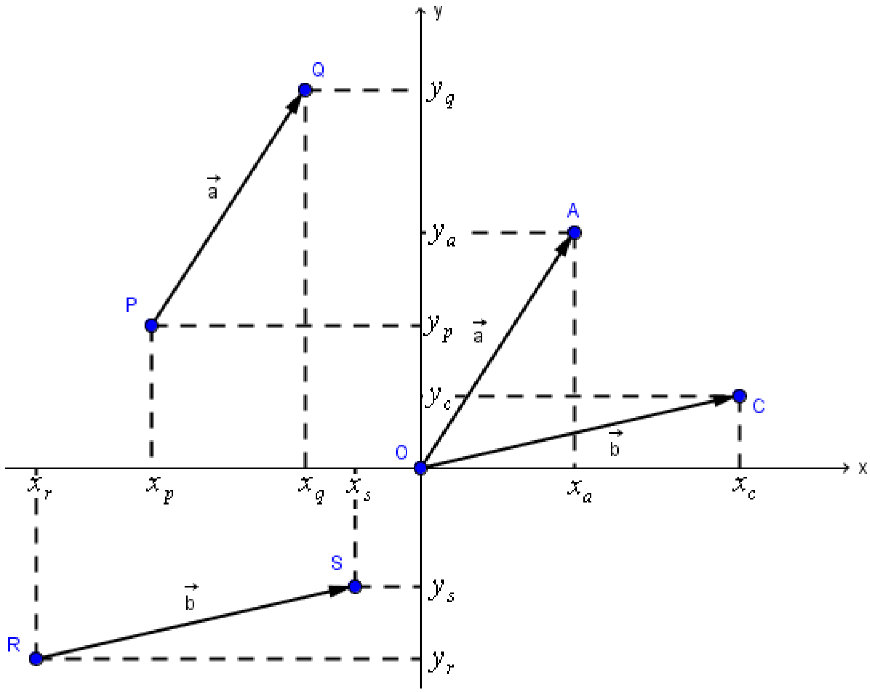
Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ em um sistema de coordenadas -cartesianas

Fonte: A autora

Operações com o vetor algébrico

Adição de vetores

Observe a figura a seguir. Quais são os segmentos orientados que representam o vetor $\overrightarrow{a}$ e quais são os que representam o vetor $\overrightarrow{b}$? Dê a representação algébrica destes segmentos orientados.



Vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ em um sistema de coordenadas cartesianas

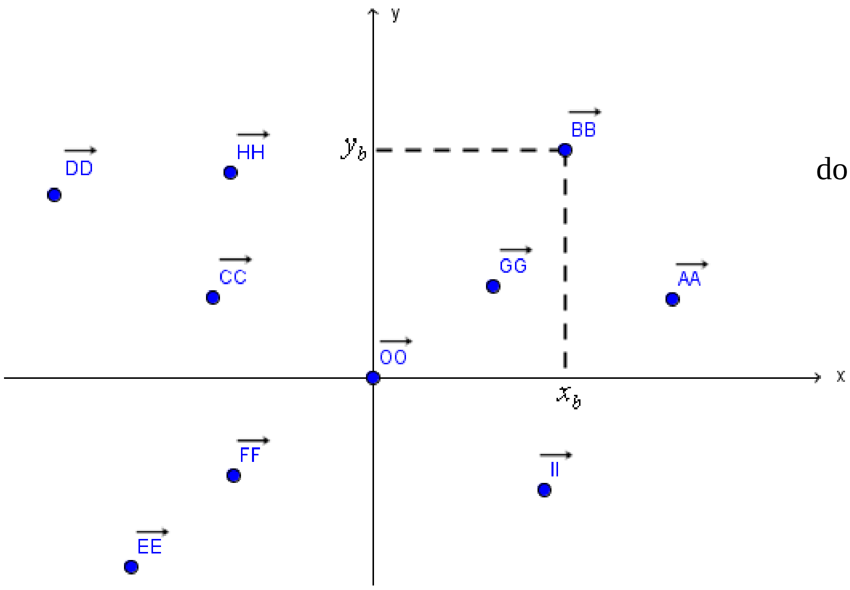
Fonte: A autora

Queremos efetuar a adição $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Para isto, vamos utilizar os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ e aplicar a ____. Qual é a seta que representa a soma de $\overrightarrow{a}$ com $\overrightarrow{b}$? Quais são as coordenadas desta seta?

Dadas as coordenadas de dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quaisquer, de que maneira podemos obter as coordenadas do vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$?

Vetor nulo

Observe a figura a seguir que ilustra representantes para o vetor nulo $\overrightarrow{0}$.



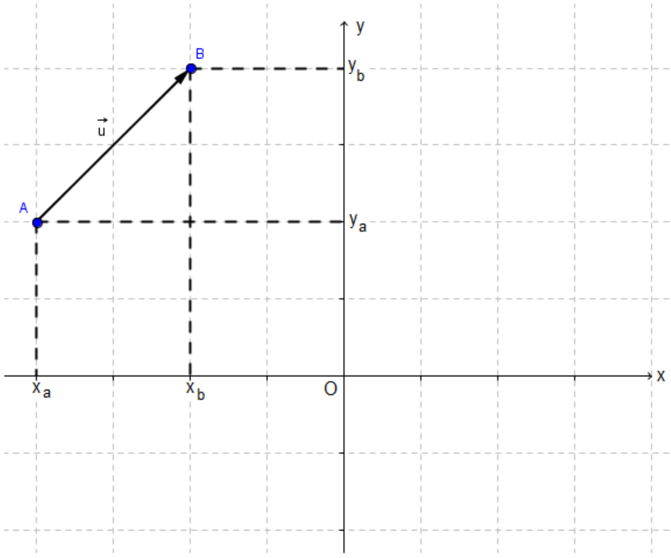
Quais são as coordenadas do vetor nulo $\overrightarrow{0}$?

Representantes para o vetor nulo em um sistema de coordenadas cartesianas

Fonte: A autora

Vetor oposto

Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, conforme a figura abaixo. O que podemos dizer a respeito do vetor $-\overrightarrow{u}$?

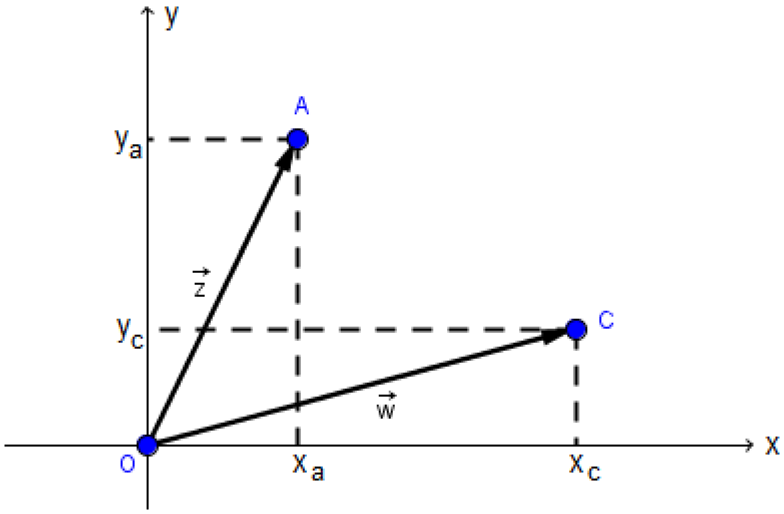


Vetor $\overrightarrow{u}$ representado pela seta $\overrightarrow{AB}$ em um sistema de coordenadas cartesianas

Fonte: A autora

Desenhe no sistema de coordenadas ao lado um representante para o vetor $\overrightarrow{u}$ e para o vetor $-\overrightarrow{u}$ com origem no ponto O. Quais são as coordenadas destes vetores?

Observe a figura abaixo. Queremos efetuar a diferença $\overrightarrow{z}$ - $\overrightarrow{w}$. O que significa fazer a operação $\overrightarrow{z}$ - $\overrightarrow{w}$?



Vetores $\overrightarrow{z}$ = $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{w}$ = $\overrightarrow{OC}$ representados em um sistema de coordenadas cartesianas

Fonte: A autora

Desenhe na figura ao lado um segmento orientado que representa a diferença $\overrightarrow{z}$ - $\overrightarrow{w}$. Quais são as coordenadas deste segmento orientado?

Portanto, dados dois vetores quaisquer $\overrightarrow{u}$ = (x_u, y_u) e $\overrightarrow{v}$ = (x_v, y_v), de que maneira podemos obter as coordenadas do vetor diferença $\overrightarrow{u}$ - $\overrightarrow{v}$?

Multiplicação de um número real por um vetor

Abre o arquivo "aula_3_produto.ggb"[28] (veja a figura a seguir) no programa GeoGebra. Podemos afirmar que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são múltiplos? Porque?

[28] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mRYluHP2v.

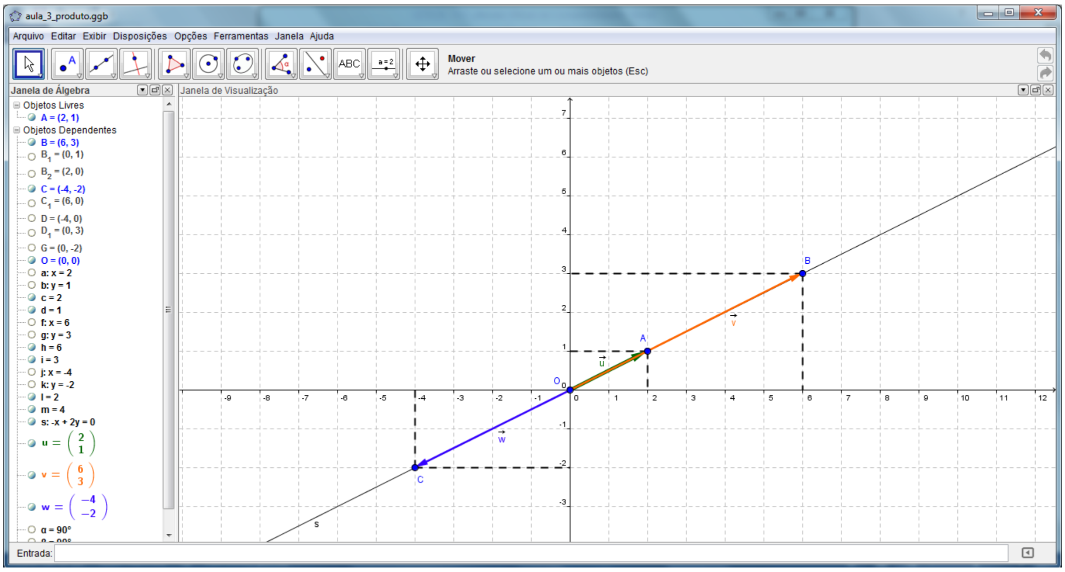
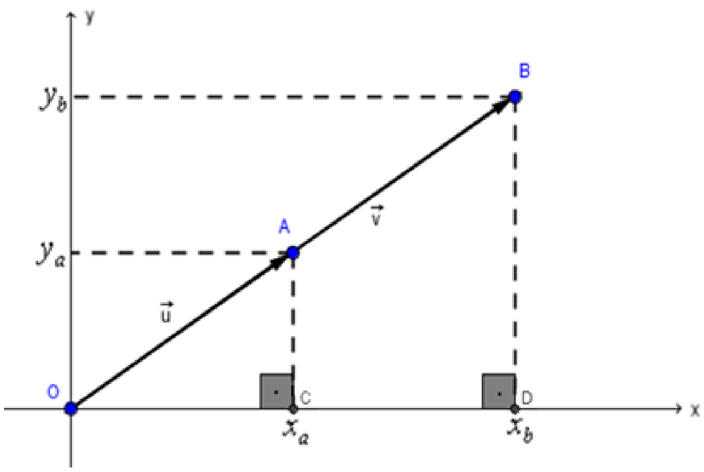


Imagem do arquivo "aula_3_produto.ggb"

Fonte: A autora

Escolhe um destes três vetores e verifique se é possível escrever as suas coordenadas em função das coordenadas dos outros dois. Se sim, escreve.

Vamos agora generalizar a situação apresentada acima. Observe a figura abaixo. Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são múltiplos? Mostre se é possível expressar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em função das coordenadas de $\overrightarrow{u}$.



Vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ representados em um sistema de coordenadas cartesianas

Fonte: A autora

Para o caso em que k < 0, obtemos o mesmo resultado de maneira análoga.

Observação: Se k = 0 ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} = (0, 0)$, então k $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Atividades

1) Abre o arquivo “aula_3_questao_1.ggb”[29] (veja a figura abaixo) no programa GeoGebra e responde os itens a seguir de acordo com o que você visualiza:

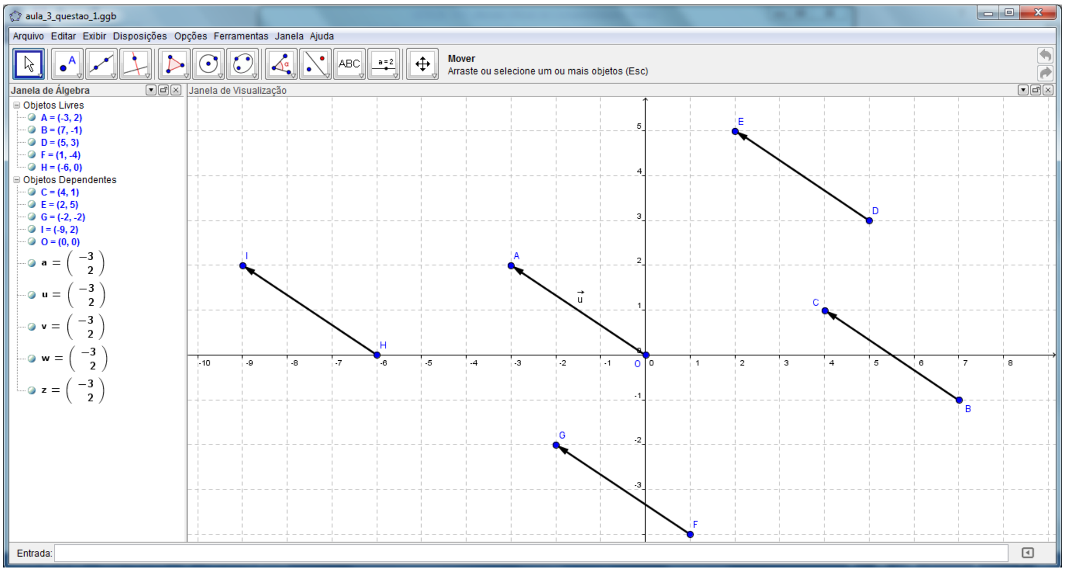


Imagem do arquivo "aula_3_questao_1"

Fonte: A autora

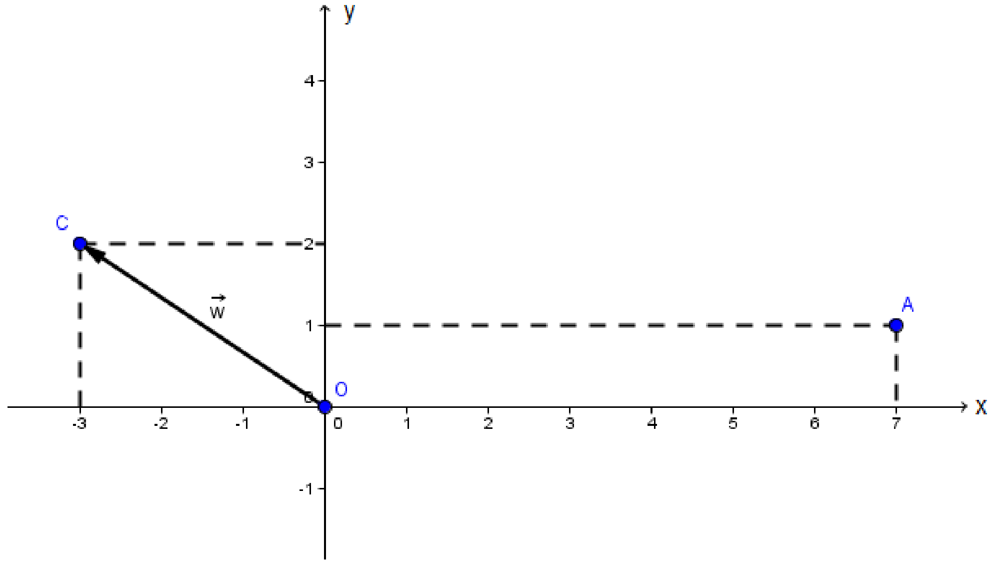
a) Quais são as coordenadas de cada um dos segmentos orientados? Quais são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$?

b) Podemos afirmar que os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{HI}$ representam o mesmo vetor $\overrightarrow{u}$? Por que?

2) Observe as figuras em cada um dos itens a seguir e faça o que se pede:

a) Quais são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w}$? Represente o vetor $\overrightarrow{w}$ por meio de uma seta com origem no ponto A.

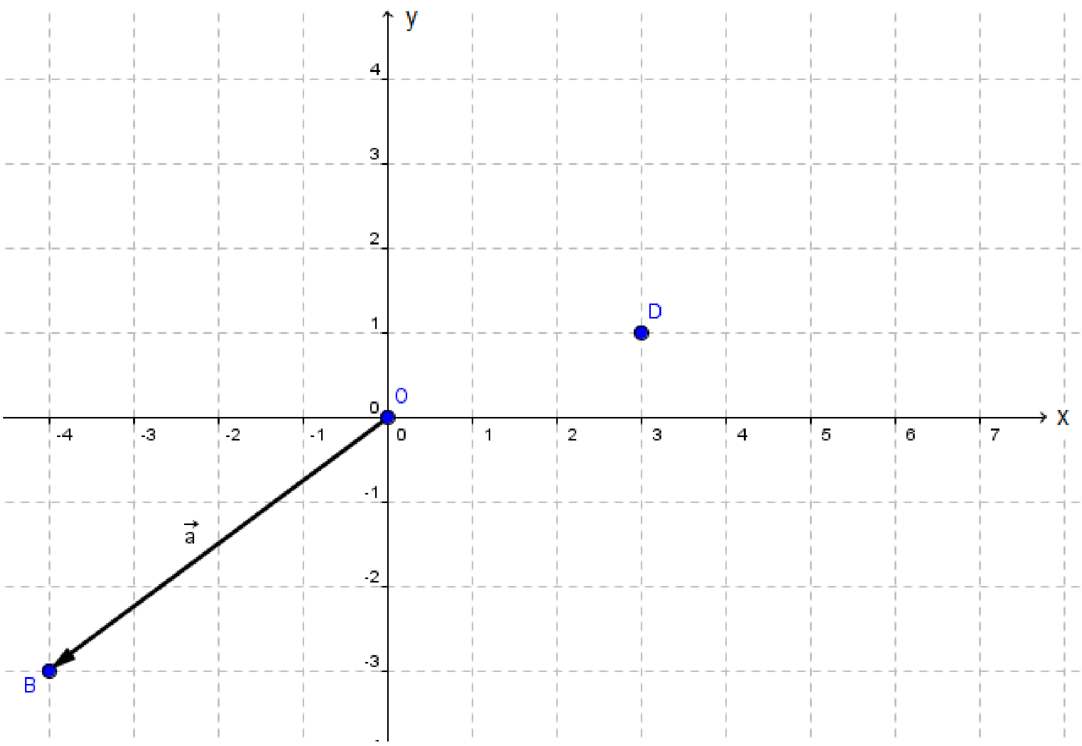
[29] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mJ7N4PSyB.



Vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ **representado em um sistema de coordenadas cartesianas**

Fonte: A autora

b) Represente o vetor $\overrightarrow{a}$ por meio de uma seta com extremidade no ponto D.



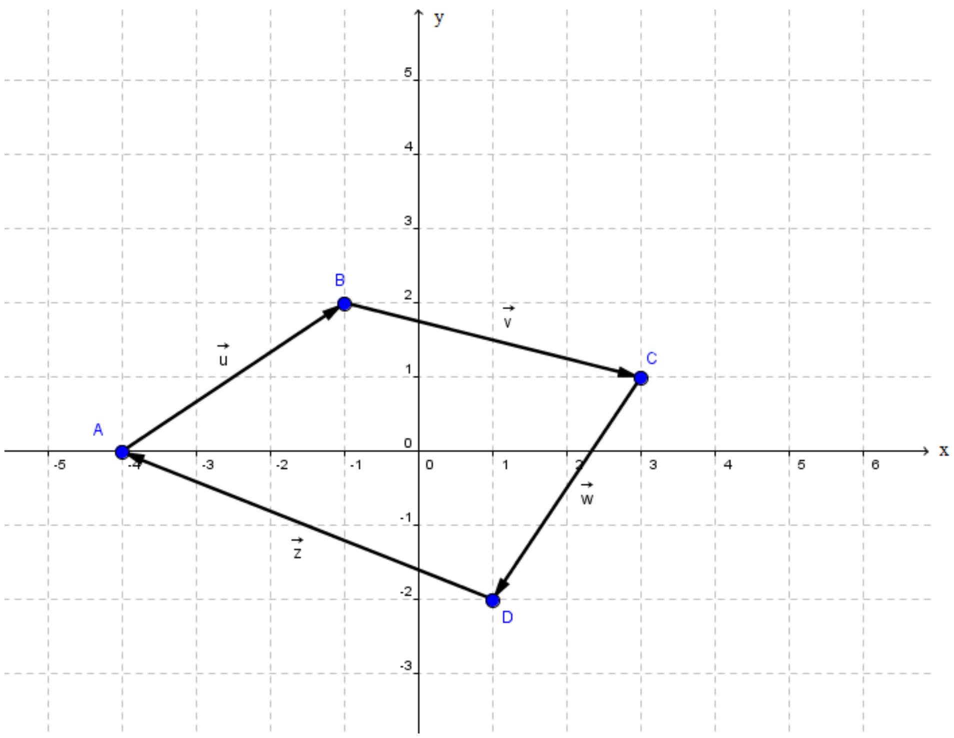
Vetor $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OB}$ **representado em um sistema de coordenadas cartesianas**

Fonte: A autora

3) Dados os vetores $\overrightarrow{u}$ = (-5, -2), $\overrightarrow{v}$ = (1, 3) e $\overrightarrow{z}$, sendo que este último possui como representante uma seta com origem no ponto A = (-1, 4) e extremidade no ponto B = (3, -2), calcule:

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ b) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{z}$ c) $-\overrightarrow{v} - \overrightarrow{z}$

4) Seja ABCD um quadrilátero, conforme figura abaixo. Efetue a soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}$ e represente o vetor soma no sistema de coordenadas abaixo. Quais são as coordenadas do vetor soma?



Quadrilátero ABCD

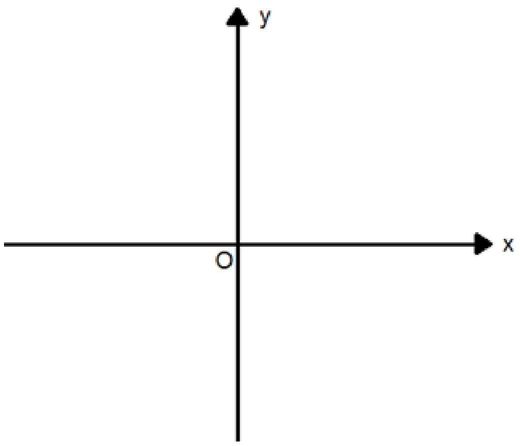
Fonte: A autora

5) Para cada um dos itens a seguir, construa no programa GeoGebra dois vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ que satisfaçam as condições indicadas. Descreve os passos destas construções. Na "Janela de Álgebra" do programa GeoGebra, visualize as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ construídos em cada situação e verifique algebricamente que as condições são satisfeitas.

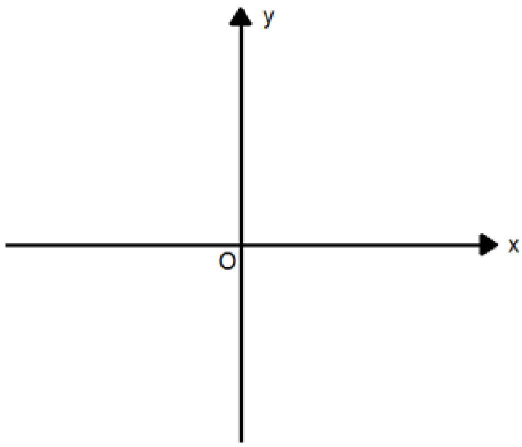
a) $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são paralelos b) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ c) $\overrightarrow{a} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{b}$

6) Dados os pontos A = (-6, 3), B = (-3, 5), C = (-4, -1) e D = (-3, -3) e os vetores $\overrightarrow{a}$ = B – A, $\overrightarrow{b}$ = (-2, 2) e $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{CD}$. Calcule as coordenadas dos vetores de cada um dos itens a seguir e represente-os nos sistemas de coordenadas abaixo.

a) $\overrightarrow{b} + 3\,\overrightarrow{c}$



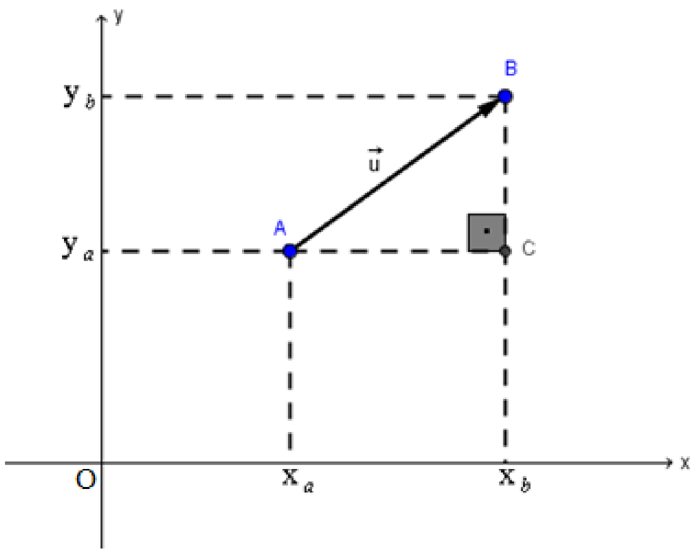
b) $\overrightarrow{a} - \frac{3}{2}\,\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$



Encontro 4:

Módulo de um vetor

O que é o módulo de um vetor? Dado $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ conforme a figura abaixo, como podemos obter o módulo do vetor $\overrightarrow{u}$?



Vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

Fonte: A autora

Abre o arquivo “modulo_vetor.ggb”[30] (veja a figura abaixo) no programa GeoGebra para visualizar o módulo do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ a partir do Teorema de Pitágoras.

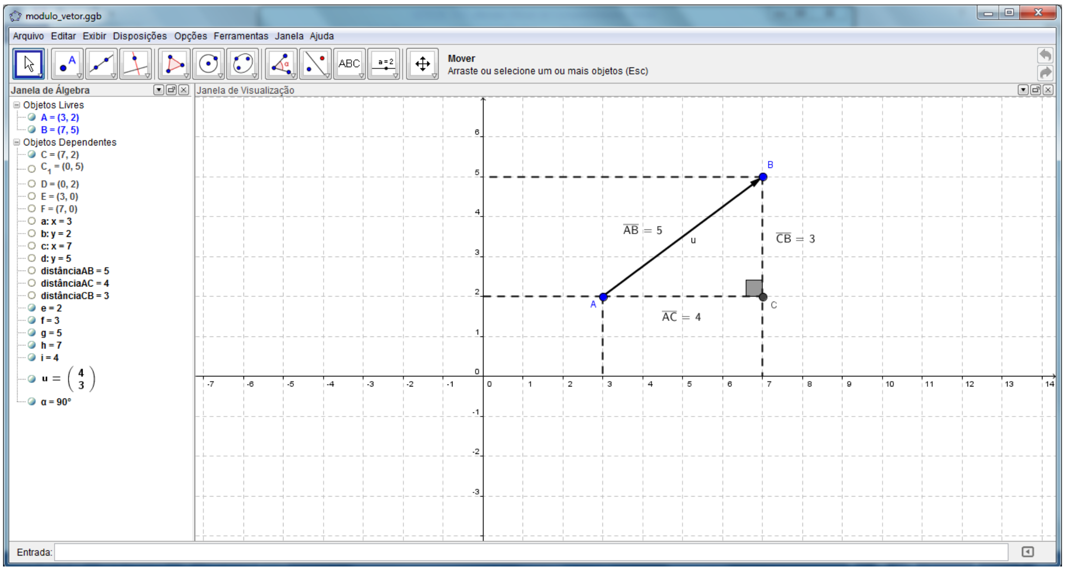


Imagem do arquivo "modulo_vetor.ggb"

Fonte: A autora

Distância entre dois pontos

Sejam A = (x_a, y_a) e B = (x_b, y_b) dois pontos do plano. O que significa calcular a distância entre os pontos A e B? Como podemos obter a distância entre estes dois pontos?

Translação segundo um vetor

Vamos construir um mosaico[31] (veja a figura do arquivo “mosaico.ggb”[32] a seguir que ilustra o mosaico a ser construído) no *software* GeoGebra. Siga o passo a passo a seguir:

---

[30] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://www.geogebratube.org/student/mjTgIZMD5.

[31] Um vídeo que exibe a construção deste mosaico está disponível em https://www.youtube.com/watch?v=5ZJMI9n_mmg. Acesso em: 10/08/2014.

[32] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mvqaDX1ZJ.

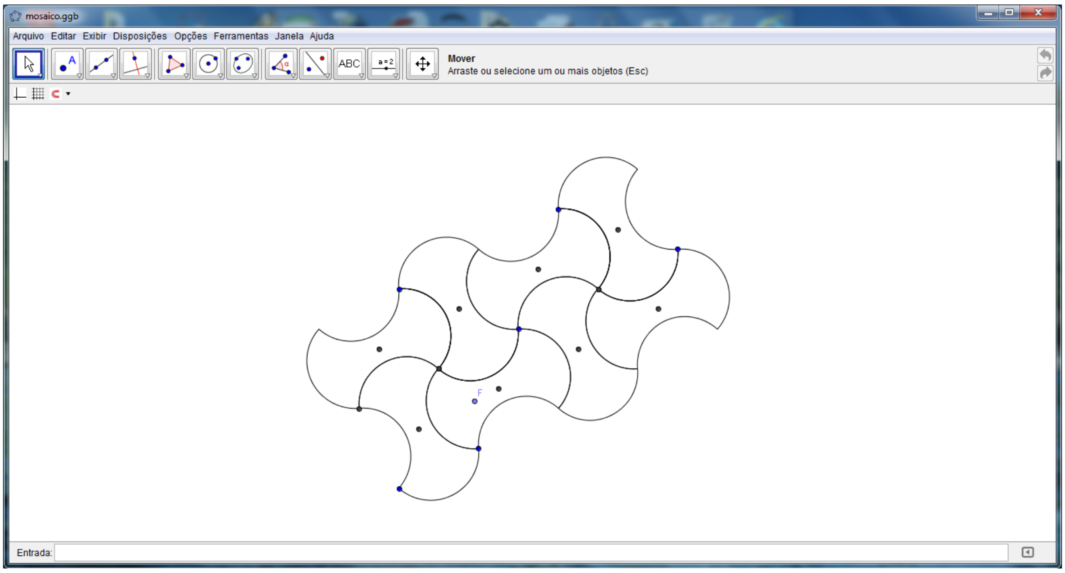


Imagem do arquivo "mosiaco.ggb"

Fonte: A autora

1º Passo: Abra o programa GeoGebra e construa os pontos A = (6, 1) e B = (8, 2);

2º Passo: Com a ferramenta “Polígono Regular”, clique nos pontos A e B, nesta ordem, e digite o número de vértices necessário para construir um quadrado;

3º Passo: Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, clique nos pontos A e C;

4º Passo: Selecione a ferramenta “Reta Perpendicular”, clique no ponto E e, depois, no lado $\overline{BC}$ do quadrado;

5º Passo: Construa o ponto F sobre a reta e de modo que F fique à direita do ponto E e não pertença ao quadrado, nem ao seu interior;

6º Passo: Com a ferramenta “Arco Circular dados Centro e Dois Pontos”, clique nos pontos F, C e B, nesta ordem. Você construiu a arco circular f;

7º Passo: Rotacione os arcos f, f' e f'', nesta ordem, em torno dos pontos C, D e A, respectivamente, por um ângulo de 90º no sentido horário;

8º Passo: Esconde os objetos “reta e” e “ponto F”;

9º Passo: Selecione a construção feita até o momento e a rotacione em torno do ponto C por um ângulo de 90º no sentido anti-horário;

10º Passo: Selecione apenas a última construção obtida e a rotacione em torno do ponto C por um ângulo de 90º no sentido anti-horário;

11º Passo: Repete o passo anterior. Depois, esconde os quadrados e os segmentos $\overline{B'C'}$ e $\overline{B''C''}$;

12º Passo: Com a ferramenta “Vetor Definido por Dois Pontos”, construa a seta $\overrightarrow{DB'}$;

13º Passo: Selecione toda a construção feita até agora e translade a mesma por meio da flecha $\overrightarrow{DB'}$;

Responda os itens a seguir:

a) O que ocorreu com a construção que você havia selecionado inicialmente? Explique.

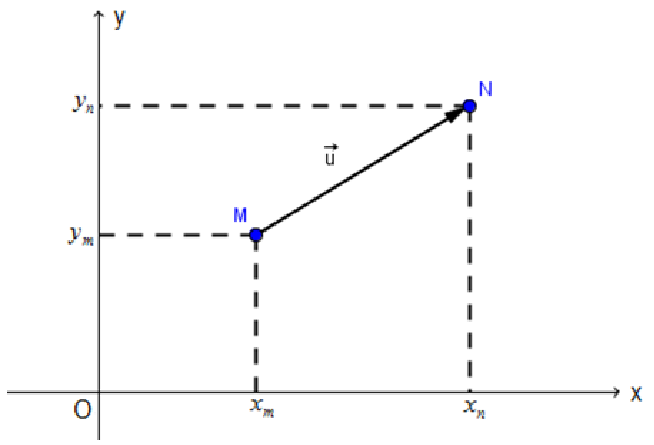
b) O ponto B = (8, 2) sofreu alguma transformação? Justifique. Se sim, qual é o resultado desta transformação?

14º Passo: Esconde a seta $\overrightarrow{DB'}$ e selecione toda a construção. Clique com o botão direito do mouse sobre a mesma e vá em “Propriedades” > “Ponto”, uma janela se abrirá. Na aba “Básico”, desmarque a caixa de seleção “Exibir Rótulo”. Clique em fechar.

15º Passo: Na “Janela de Álgebra”, procure pelo ponto F em “Objetos Dependentes”. Clique na “bolinha branca” ao lado do ponto F, o mesmo aparecerá na “Janela de Visualização”. Movimente o ponto F e observe o efeito. Você acaba de construir um mosaico.

Dado um ponto qualquer no plano ou uma figura plana (conjunto de pontos coplanares), podemos efetuar o deslocamento deste ponto ou da figura para uma outra posição no plano por meio de um vetor. Ao fazermos isto, estamos realizando uma transformação geométrica chamada ______________________.

Observe a figura a seguir em que temos os pontos M e N e o vetor $\overrightarrow{u}$. Podemos afirmar que a figura ilustra a representação de uma translação? Por que?



Vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$

Fonte: A autora

Se a figura acima ilustra uma translação, como podemos representar esta transformação de maneira algébrica, isto é, utilizando-se das coordenadas dos pontos M e N e do vetor $\overrightarrow{u}$?

Encontro 5:

Coordenadas de um ponto que divide um segmento em uma razão dada

Abre o arquivo "ponto_divide_segmento.ggb"[33] (observe a figura abaixo) no programa GeoGebra e movimente o ponto P. O que você observa? Que conclusões você obtém?

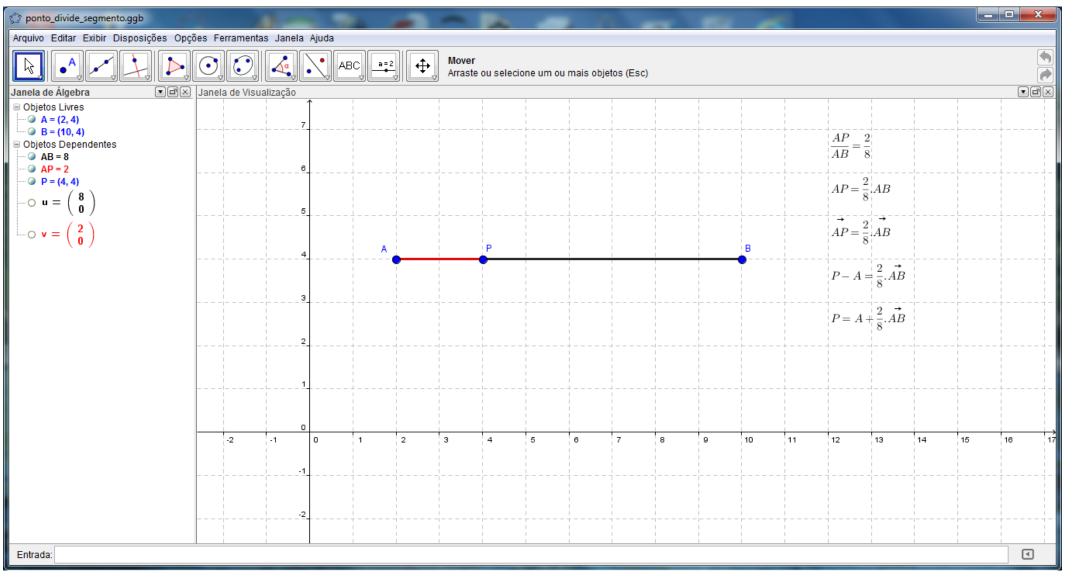


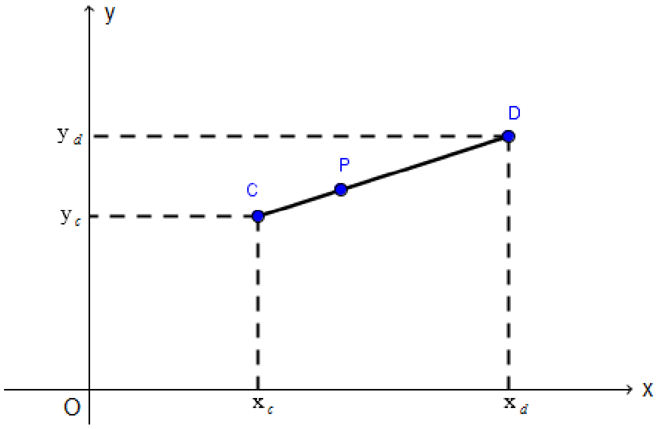
Imagem do arquivo "ponto_divide_segmento.ggb"

Fonte: A autora

---

33 Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mBf6zI1Sw.

Observe a figura abaixo em que temos o segmento de reta $\overline{CD}$ cujos pontos extremidades são C = (x_c, y_c) e D = (x_d, y_d). Seja P o ponto que divide este segmento em uma razão k, isto é, $\frac{CP}{CD} = k$, com k $\in \mathbb{R}$, 0 ≤ k ≤ 1. Como podemos obter as coordenadas de P?

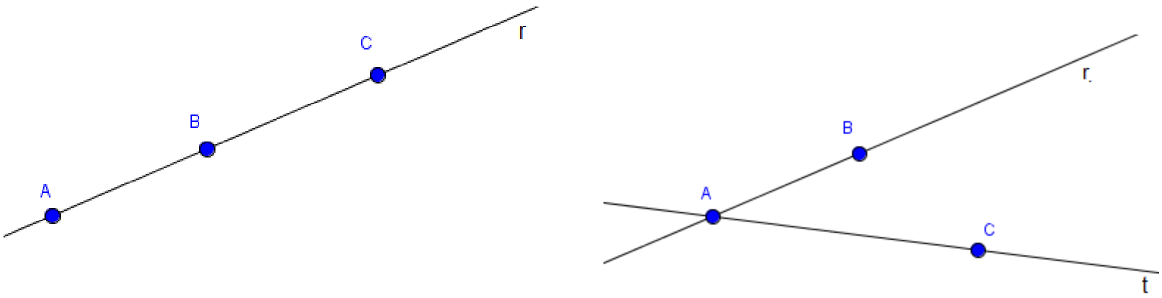


Ponto P que divide o segmento $\overline{CD}$

Fonte: A autora

Colinearidade de três pontos

Observe as figuras abaixo. Em quais destas figuras, podemos afirmar que os pontos A, B e C são colineares? Por que?



Pontos colineares e não colineares

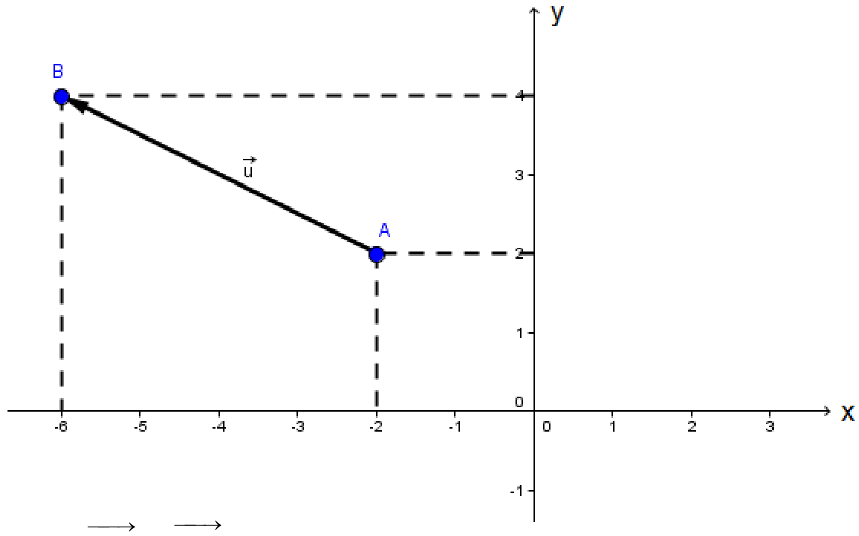
Fonte: A autora

Dadas as coordenadas de três pontos distintos A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) e C = (x_c, y_c) como podemos saber se os mesmos são ou não colineares?

Atividades

1) Calcule o módulo do vetor $\overrightarrow{u}$ nos seguintes casos:

a)

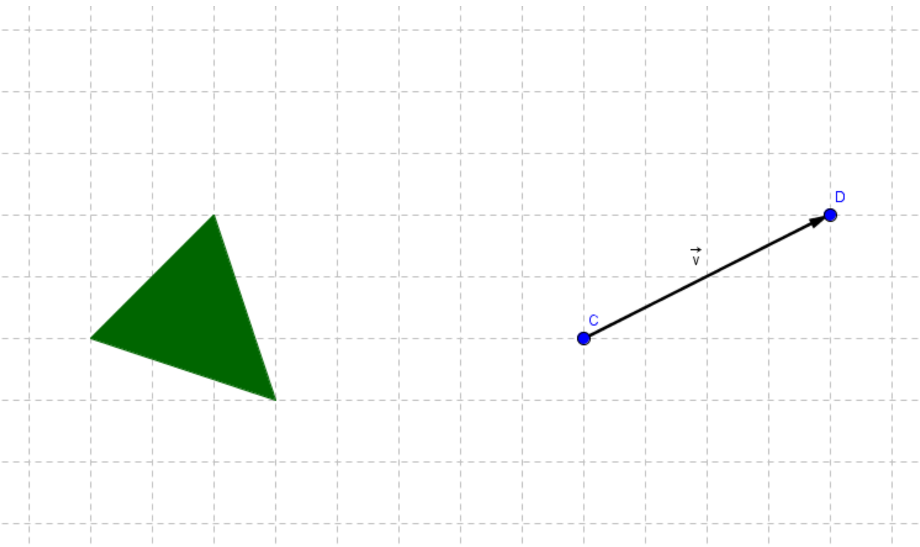


Vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

Fonte: A autora

b) $\overrightarrow{u}$ possui como representante uma seta com origem no ponto C = (-8, 1) e extremidade no ponto D = (-2, -1).

2) Efetue a translação do triângulo da figura abaixo por meio do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.



Translação

Fonte: A autora

3) Abre os arquivos “mosaico_1.ggb”[34], “mosaico_2.ggb”[35] e “mosaico_3.ggb”[36] no programa GeoGebra. As figuras a seguir ilustram estes arquivos. Agora, constrói no programa GeoGebra um mosaico. Utilize nesta construção a ferramenta “Translação por um Vetor”.

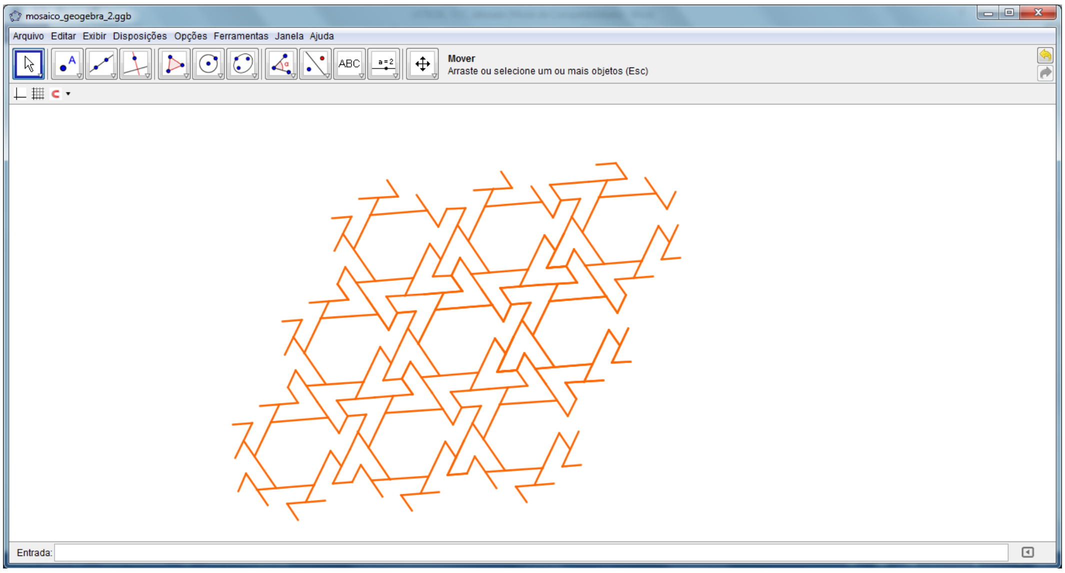


Imagem do arquivo "mosaico_1.ggb"

Fonte: A autora

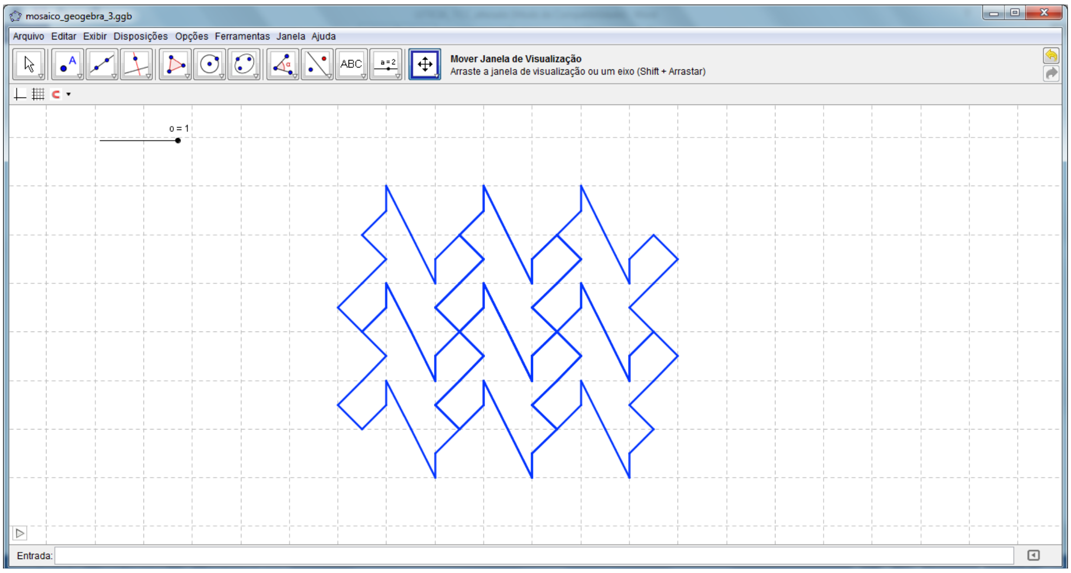


Imagem do arquivo "mosaico_2.ggb"

Fonte: A autora

---

[34] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mIBfCfbQH. Um vídeo que exibe a construção deste mosaico está disponível em https://www.youtube.com/watch?v=wpMCD5wxuyU. Acesso em: 10/08/2014.

[35] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mhekicrv8. Um vídeo que exibe a construção deste mosaico está disponível em https://www.youtube.com/watch?v=iOhxXBgQaDg. Acesso em: 11/08/2014.

[36] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mERtOVImc.

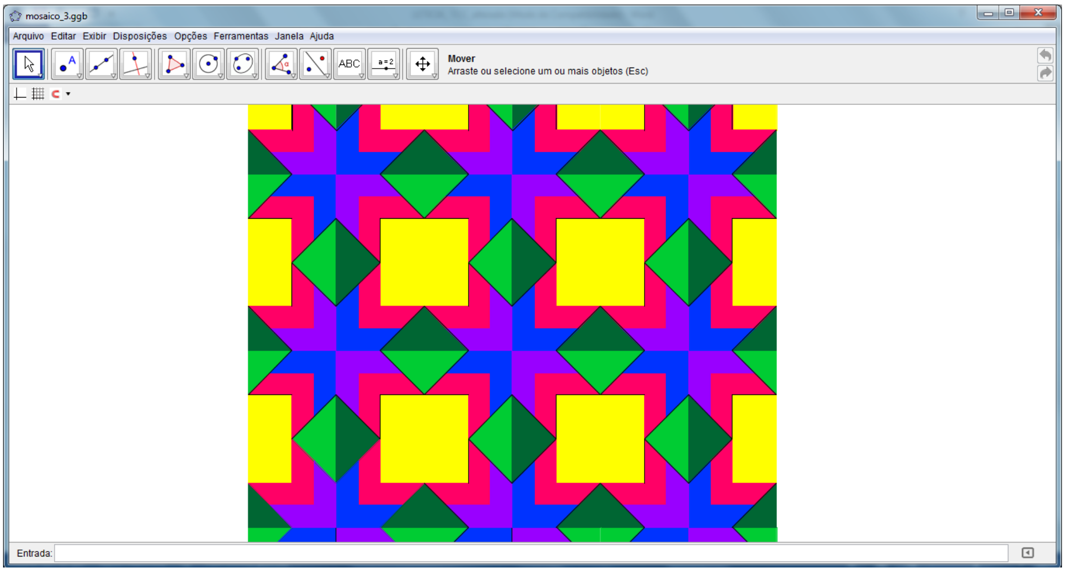


Imagem do arquivo "mosaico_3.ggb"

Fonte: A autora

4) Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta, com A = (x_a, y_a) e B = (x_b, y_b). Obtenha as coordenadas do ponto médio M deste segmento.

5) Sejam A = (1, 3) e B = (-2, 0). Determine os pontos que dividem o segmento $\overline{AB}$ em cinco segmentos de igual comprimento.

6) Verifique se os pontos A = (-3, 5), B = (1, 1) e C = (3, -1) podem ser os vértices de um triângulo.

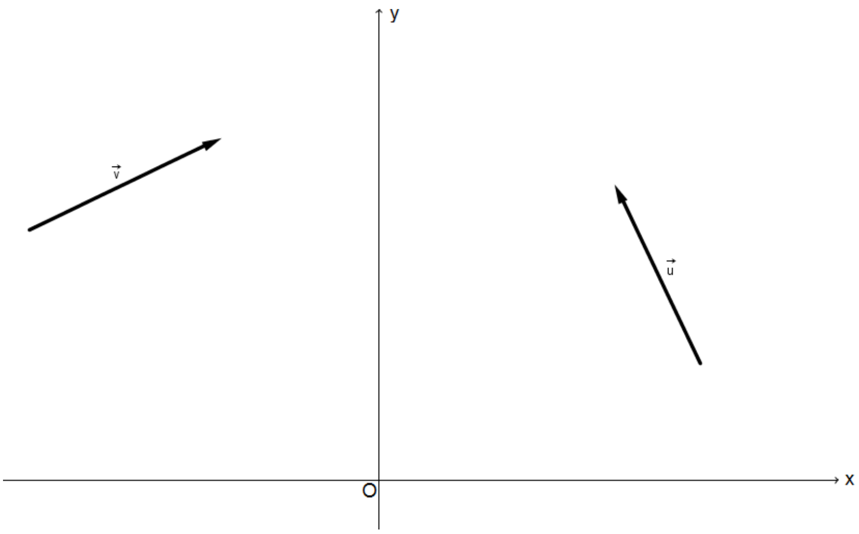
7) Seja ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC. Seja M o ponto médio de BC. Mostre que o comprimento da mediana AM é igual à metade do comprimento da hipotenusa.

Encontro 6:

Condição de ortogonalidade entre dois vetores

Quando podemos afirmar que dois vetores são ortogonais?

Método geométrico:



Ortogonalidade entre dois vetores

Fonte: A autora

Método algébrico:

Equação Geral da Reta

Abre o arquivo "animacao_1.ggb"[37] (observe a figura a seguir) no programa Geogebra e clique no botão "Reproduzir". Escreve abaixo as suas conclusões.

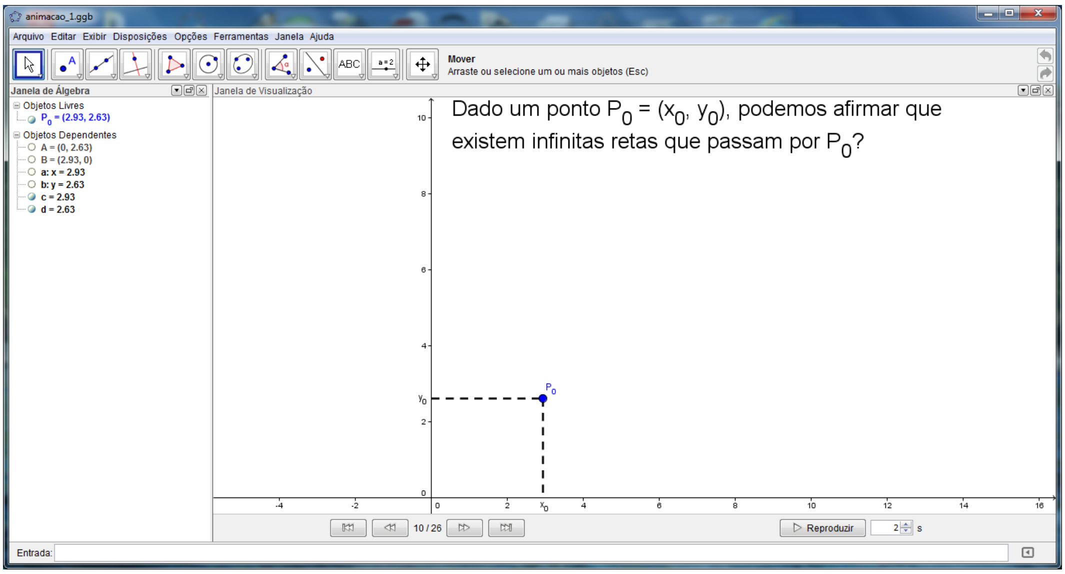


Imagem do arquivo "animacao_1.ggb"

Fonte: A autora

---

37 Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mNQtxT18g.

Agora, abre o arquivo “animacao_2.ggb”[38] (veja a figura a seguir) no programa Geogebra e clique no botão “Reproduzir”. Escreve abaixo as suas conclusões.

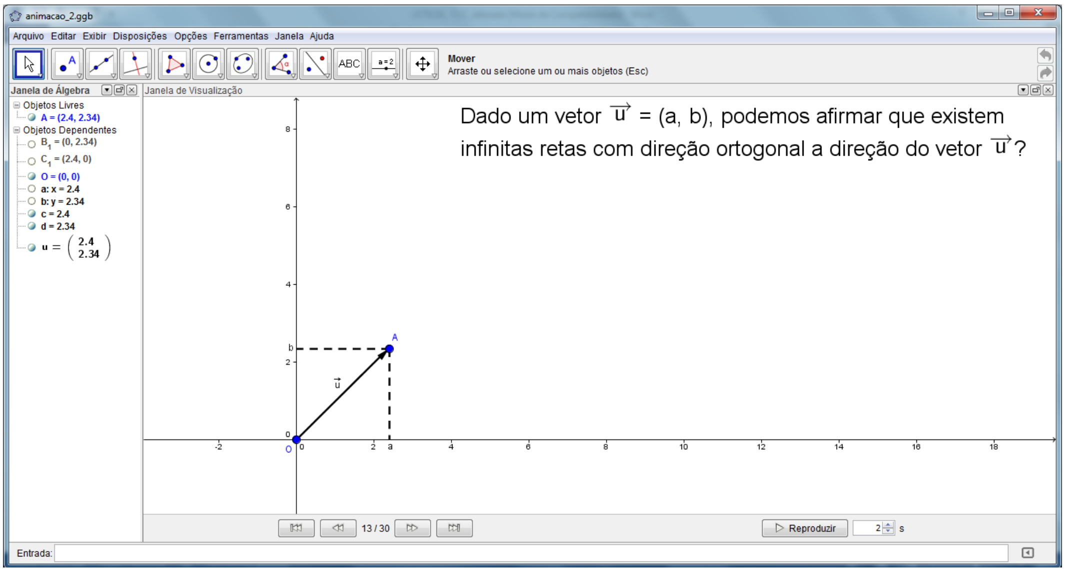
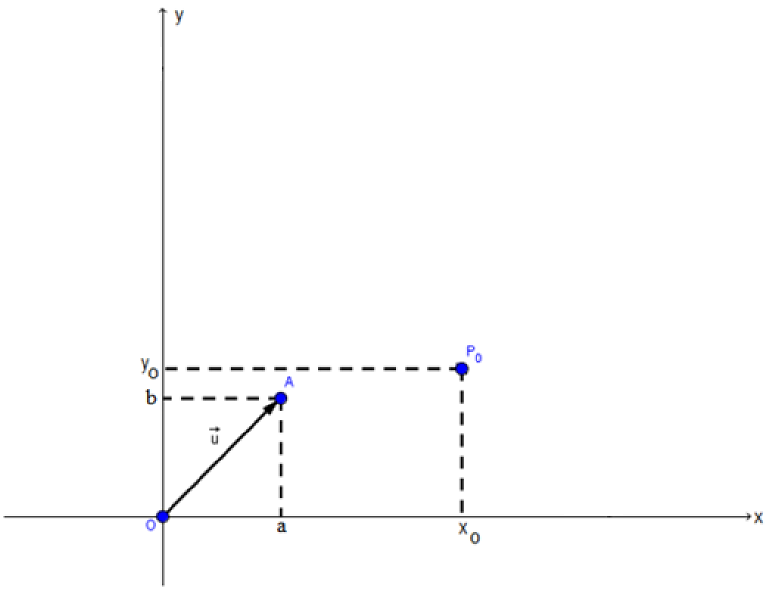


Imagem do arquivo "animacao_2.ggb"

Fonte: A autora

Observe a figura abaixo. Dados um ponto P_0 = (x_o, y_0) e um vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ = (a, b), podemos afirmar que existem infinitas retas que passam pelo ponto P_0 e possuem direção ortogonal a direção do vetor $\overrightarrow{u}$? Justifique.



Ponto P_0 = (x_o, y_0) e vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ = (a, b)

Fonte: A autora

[38] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mhjwyjFh1.

Abre o arquivo “reta.ggb”[39] (observe a figura a seguir) no programa Geogebra e responde às perguntas a seguir:

Movimente o ponto A. Quais objetos estão se movendo? Qual é a relação entre estes objetos?

Enquanto move o ponto A, observe na Janela de Álgebra as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ e a equação geral da reta t. O que você conclui?

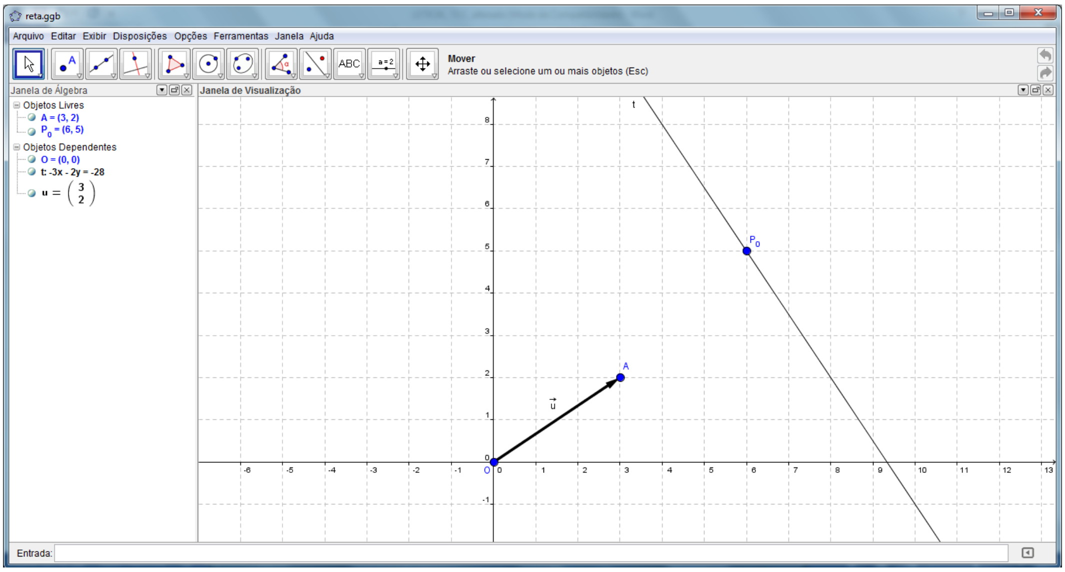


Imagem do arquivo "reta.ggb"

Fonte: A autora

Agora, movimente somente o ponto P_0. Observe na Janela de Álgebra as coordenadas do ponto P_0 e a equação geral da reta t. O que está ocorrendo?

Dedução da equação geral da reta t:

Posições relativas entre duas retas no plano

Sejam $r_1:\ a_1x+b_1y=c_1$ e $r_2:\ a_2x+b_2y=c_2$ duas retas do plano. Sendo assim, vamos analisar as quatro possibilidades para as posições relativas entre as retas r_1 e r_2 no plano:

[39] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mRKdeWPJC.

1ª possibilidade:

Abre o arquivo “posicao_relativa_1.ggb”[40] (veja a figura abaixo) no programa GeoGebra. Movimente o ponto A e, enquanto isto, visualize na Janela de Álgebra as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ e a equação geral das retas r_1 e r_2. Qual é a relação existente entre os objetos que aparecem neste arquivo? Justifique.

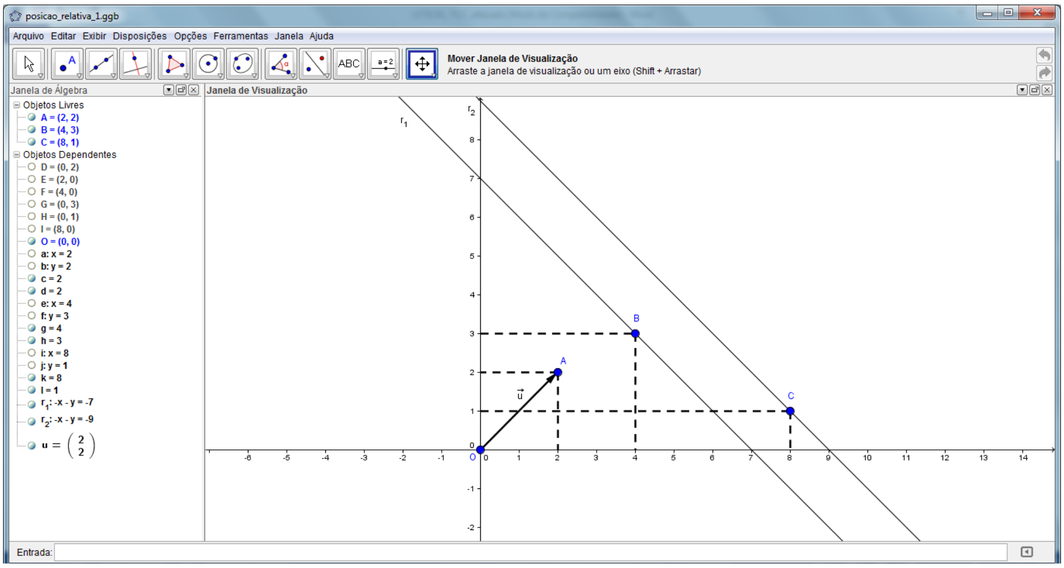


Imagem do arquivo "posicao_relativa_1.ggb"

Fonte: A autora

Qual é a posição relativa entre as retas r_1 e r_2? Porque?

Agora, façamos a seguinte generalização: seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a, b)$, B = (x_b, y_b) e C = (x_c, y_c). Deduz a equação geral das retas r_1 e r_2.

Podemos afirmar, neste caso, que o parâmetro **c** na equação geral das retas r_1 e r_2 sempre será diferente? Porque?

2ª possibilidade:

Abre novamente o arquivo “posicao_relativa_1.ggb” no programa Geogebra. Faz com que os pontos B e C coincidam. Movimente o ponto A e visualize na Janela de Álgebra as

[40] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mSrXyAflU.

coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ e a equação geral das retas r_1 e r_2. Qual é a relação existente entre os objetos (vetor $\overrightarrow{u}$ e retas r_1 e r_2) que aparecem neste arquivo? Justifique.

Qual é a posição relativa entre as retas r_1 e r_2? Justifique.

Façamos, agora, a seguinte generalização: seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a, b)$ e B = (x_b, y_b). Deduz a equação geral das retas r_1 e r_2.

O que podemos afirmar, neste caso, sobre os parâmetros **a**, **b** e **c** presentes na equação geral das retas r_1 e r_2? Porque?

3ª possibilidade:

Abre o arquivo "posicao_relativa_3.ggb"[41] (observe a figura abaixo) no programa Geogebra. Movimente o ponto A e, enquanto isto, visualize na Janela de Álgebra as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ e a equação geral da reta r_1. Qual é a relação entre o vetor $\overrightarrow{u}$ e a reta r_1? Justifique.

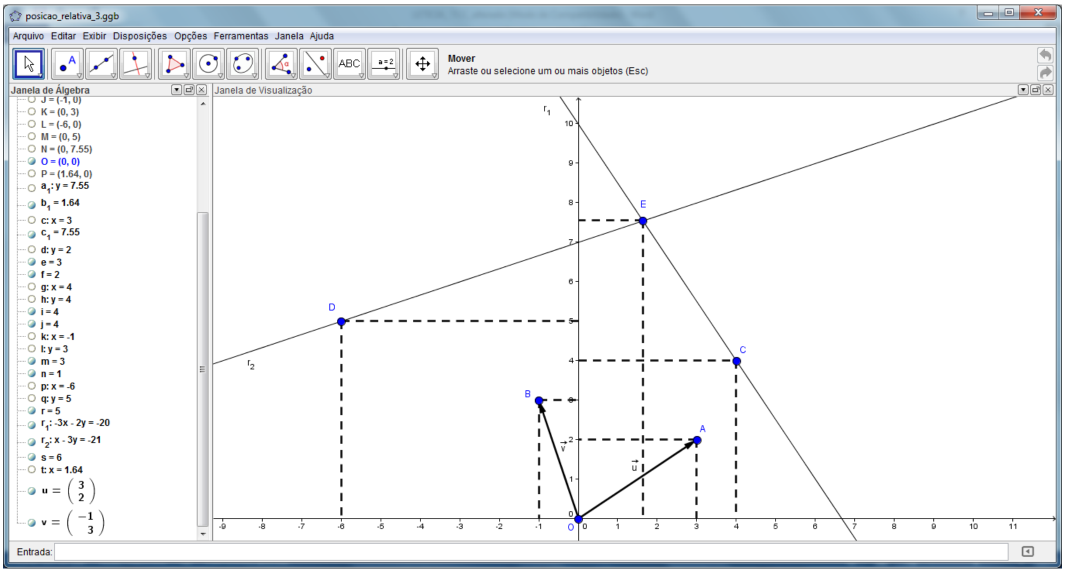


Imagem do arquivo "posicao_relativa_3.ggb"

Fonte: A autora

Agora, movimente o ponto B e visualize na Janela de Álgebra as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ e a equação geral da reta r_2. Qual é a relação entre o vetor $\overrightarrow{v}$ e a reta r_2? Justifique.

41 Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mdOSmpRnx.

Qual é a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 ? Porque?

Se fizéssemos o vetor $\overrightarrow{v}$ coincidir sobre o vetor $\overrightarrow{u}$, o que ocorreria com as retas r_1 e r_2 ?

Agora, façamos a seguinte generalização: seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a_1, b_1)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (a_2, b_2)$, C = (x_c, y_c) e D = (x_d, y_d) . Deduz a equação geral das retas r_1 e r_2 . O que podemos afirmar, neste caso, sobre os parâmetros **a**, **b** e **c** presentes na equação geral das retas r_1 e r_2 ? Porque?

Neste caso, há algum ponto de intersecção entre as retas r_1 e r_2 ? Este ponto satisfaz as equações gerais de r_1 e r_2 ?

4ª possibilidade:

Abre o arquivo “posicao_relativa_4.ggb”[42] (observe a figura abaixo) no programa Geogebra. Movimente o ponto A e, enquanto isto, visualize na Janela de Álgebra as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e a equação geral das retas r_1 e r_2 . Qual é a relação existente entre os objetos que aparecem neste arquivo? Justifique.

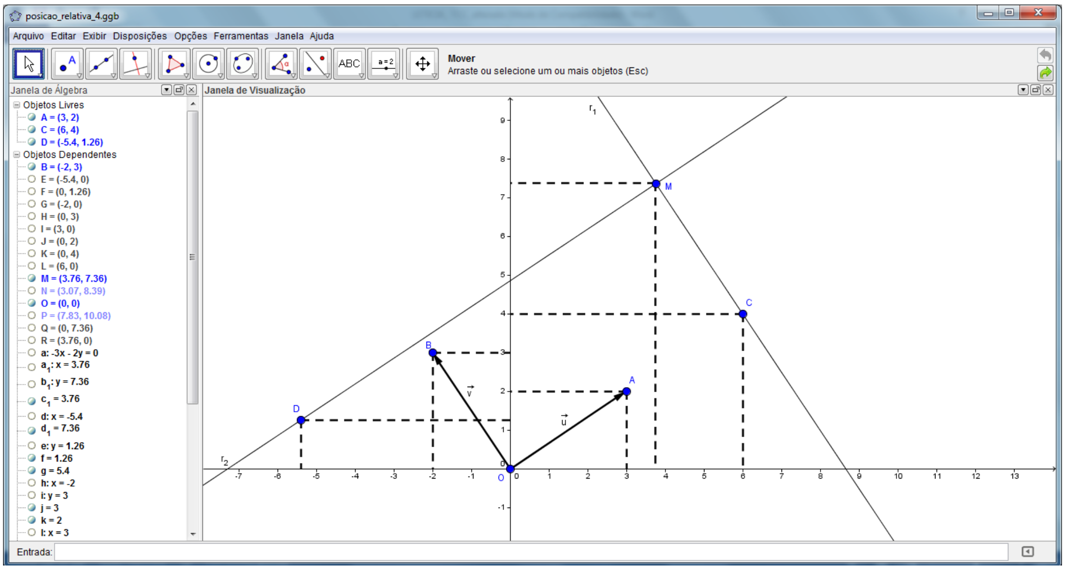


Imagem do arquivo "posicao_relativa_4"

Fonte: A autora

---

[42] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mOMpw0GsE.

Agora, façamos a seguinte generalização: seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a_1, b_1)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (a_2, b_2)$, C = (x_c, y_c) e D = (x_d, y_d). Deduz a equação geral das retas r_1 e r_2 :

Retorne ao arquivo "posicao_relativa_4.ggb" e verifique se a igualdade $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$ é satisfeita. Se sim, porque isto ocorre? O que podemos afirmar sobre as retas r_1 e r_2 a partir disto? Explique.

Qual é a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 ? Porque?

Atividades

1) Abre o arquivo "aula_6_questao_1.ggb"[43] (veja a figura abaixo) no programa Geogebra. Descreve abaixo as suas conclusões justificando as mesmas.

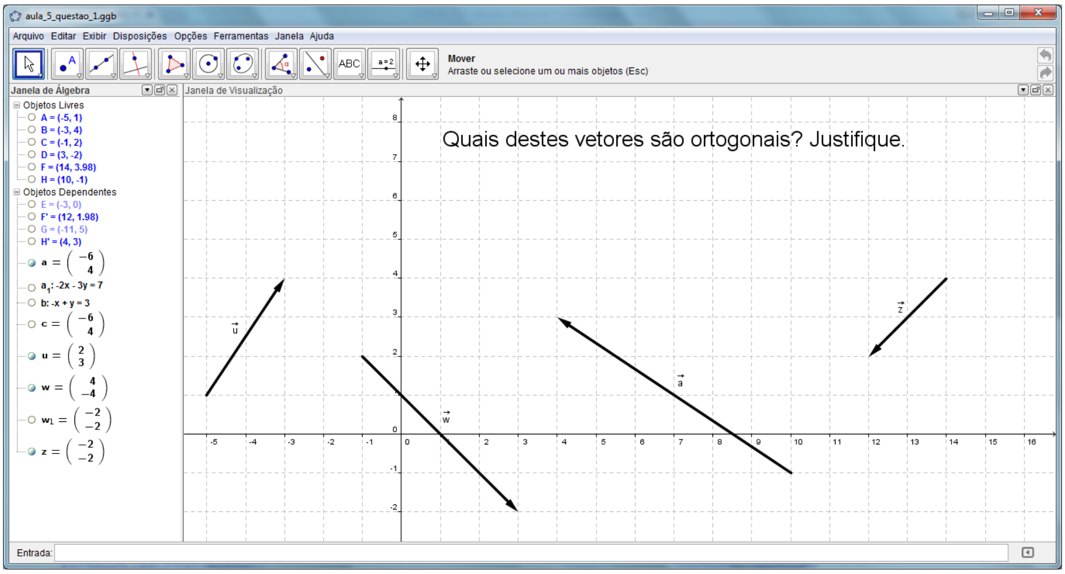


Imagem do arquivo "aula_6_questao_1.ggb"

Fonte: A autora

2) Quais devem ser as coordenadas do vetor u para que u e v sejam ortogonais?

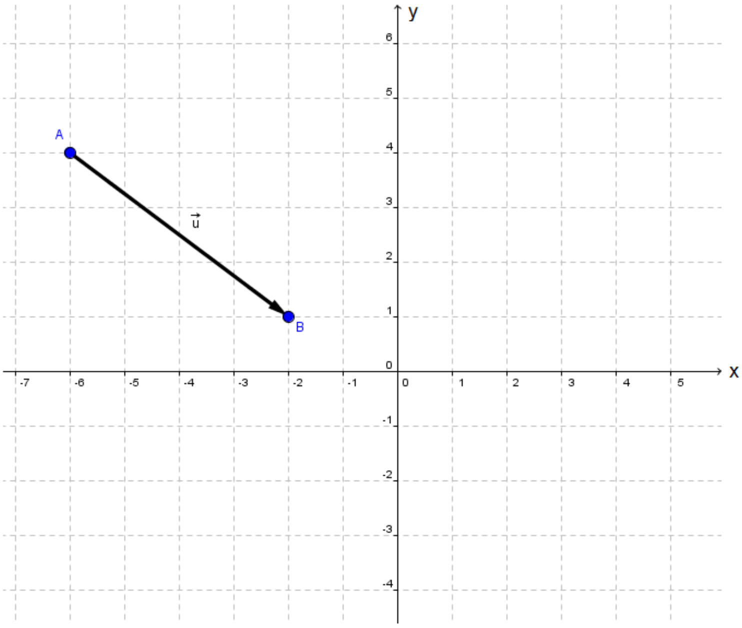
a) $\overrightarrow{v}$ = (7, - 4) e $\overrightarrow{u}$ = (-4, y)

3) Verifique se os vetores são ortogonais:

[43] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mTYdfQd2k.

a) $\overrightarrow{a}$ = (2, 1) e $\overrightarrow{b}$ = (3, -6)

4) Desenhe no sistema de coordenadas ao lado um segmento orientado representante de um vetor ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$. Quais são as coordenadas deste vetor representado pela seta que você desenhou?



Vetor $\overrightarrow{u}$ = $\overrightarrow{AB}$ em um sistema de coordenadas cartesianas

Fonte: A autora

5) Seja ΔABC um triângulo qualquer. Prove que as três alturas deste triângulo se encontram no mesmo ponto.

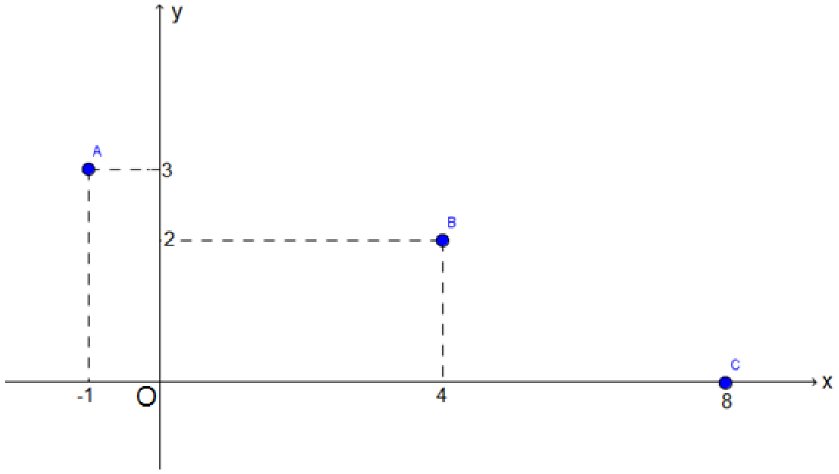
6) Abre novamente o arquivo "reta.ggb" no programa Geogebra. Faz o que se pede em cada um dos itens a seguir:

a) Coloque o ponto P_0 na origem do sistema de coordenadas cartesianas e movimente o ponto A. O que podemos concluir com relação à equação geral da reta t?

b) Agora, retire o ponto P_0 da origem. Coloque o ponto A sobre o eixo coordenado x. Depois, coloque o ponto A sobre o eixo coordenado y. O que podemos concluir com relação a reta t e a sua equação nestes casos?

c) Move o ponto A até a origem do sistema de coordenadas. Explique o que ocorreu com o vetor $\overrightarrow{u}$ e a reta t.

7) Escreve a equação geral da reta s que passa pelo ponto C e é ortogonal a direção do vetor representado pela flecha $\overrightarrow{AB}$. Depois, desenhe a reta s na figura abaixo.



Sistema de coordenadas cartesianas

Fonte: A autora

8) Determine a equação da mediatriz do segmento de extremidades A = (2, 3) e B = (8, 5). (Observação: mediatriz de um segmento é uma reta perpendicular ao segmento, passando pelo seu ponto médio)

9) Determine a posição relativa entre as retas s e t dadas por suas equações. Justifique as suas respostas:

a)

s: $4x - 5y = 7$

t: $- 8x + 10y = 6$

Encontro 7:

Ângulo entre dois vetores

Abre o arquivo “vetores_angulo.ggb”[44] (veja a figura a seguir) no programa Geogebra. Clique na ferramenta “Ângulo” e em seguida nos pontos Q, O e P, nesta ordem. Um novo objeto surgirá na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização. Que objeto é este? Quais informações ele traz?

[44] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mIEpSRvWu.

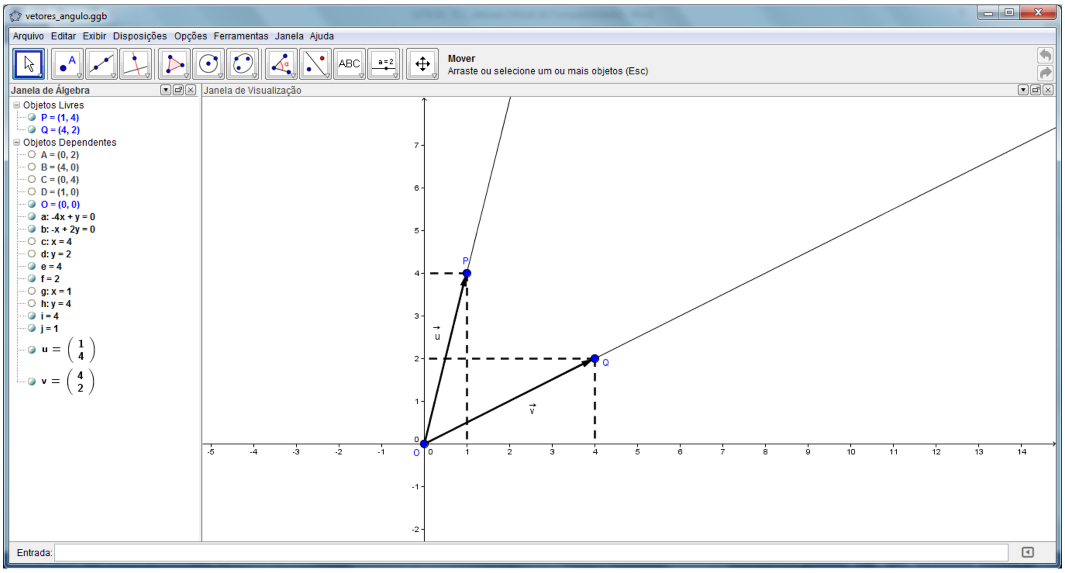


Imagem do arquivo "vetores_angulo.ggb"

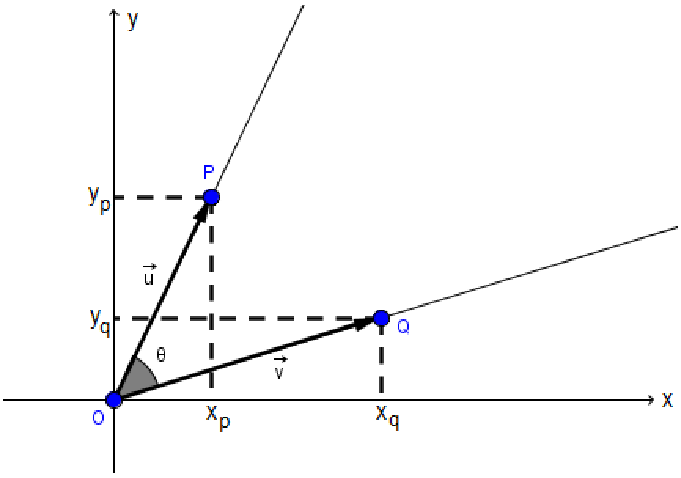
Fonte: A autora

Este novo objeto possui alguma relação com os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$? Qual?

Coloque o ponto Q sobre o eixo x e o ponto P sobre o eixo y. O que você observa? Agora, coloque o ponto P e o ponto Q sobre o eixo x de maneira que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ tenham a mesma direção, mas sentidos opostos. O que você observa?

Coloque o ponto P no terceiro quadrante do sistema de coordenadas cartesianas e o ponto Q no quarto quadrante. Qual o valor que este novo objeto assumiu? Este valor pode ser considerado? Porque?

Observe a figura abaixo. Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quaisquer, de que maneira podemos obter a medida do ângulo entre estes vetores?



Ângulo entre vetores

Fonte: A autora

Ângulo entre duas retas

Abre o arquivo "retas_angulo_1.ggb"[45] (veja a figura abaixo) no programa Geogebra e responde às perguntas a seguir:

Qual é a posição relativa entre as retas r_1 e r_2? Elas possuem algum ponto em comum? Se sim, qual?

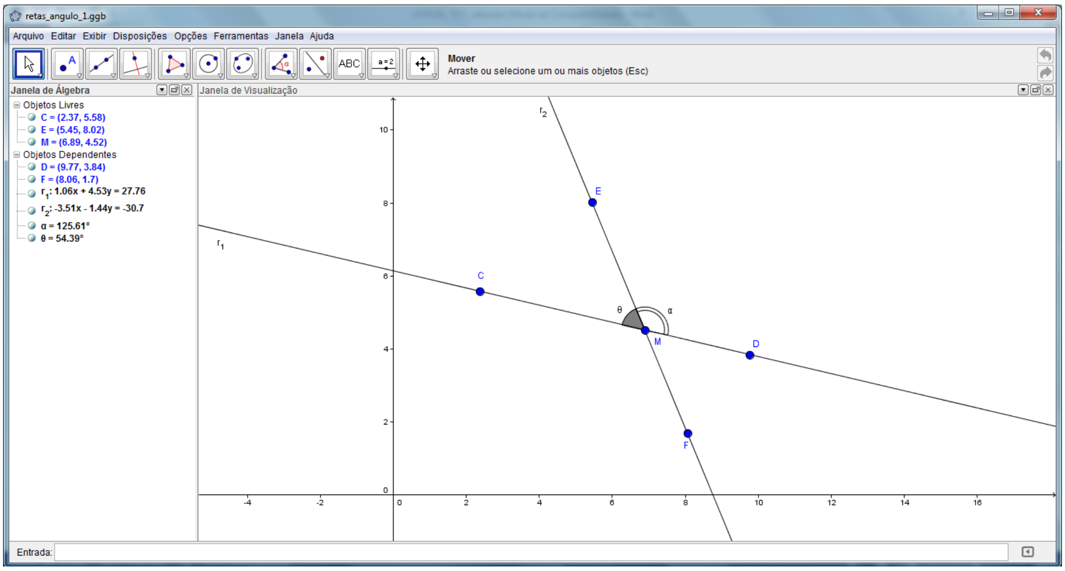


Imagem do arquivo "retas_angulo_1.ggb"

Fonte: A autora

As retas r_1 e r_2 determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Quais são estes pares? O que podemos concluir a respeito da medida destes ângulos? (Se achar necessário, você pode utilizar a ferramenta "Ângulo".)

Podemos afirmar que os ângulos $C\hat{M}E$ e $E\hat{M}D$ são suplementares? Por que?

$C\hat{M}E$ é um ângulo agudo? Verifique e justifique sua resposta.

$E\hat{M}D$ é um ângulo obtuso? Verifique e justifique sua resposta.

Qual dos quatro ângulos formados pelas retas r_1 e r_2 devemos considerar como sendo o ângulo entre estas retas?

[45] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/masJYXLJ1.

Retas perpendiculares

Abre o arquivo "retas_angulo_2.ggb"[46] (observe a figura abaixo) no programa Geogebra. Com a ferramenta "Ângulo", verifique a medida dos ângulos formados pelas retas r_1 e r_2. O que você conclui?

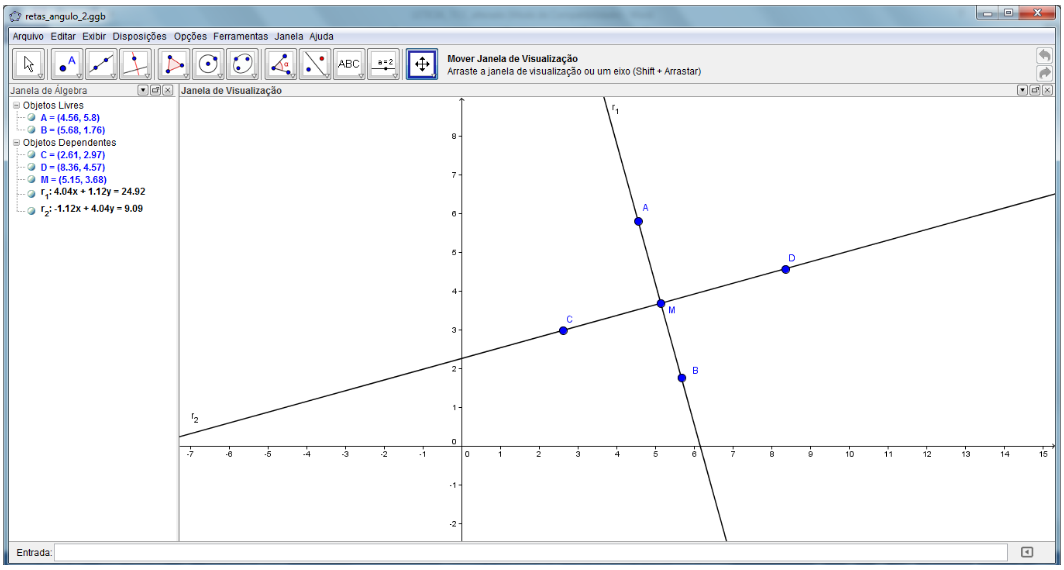


Imagem do arquivo "retas_angulo_2.ggb"

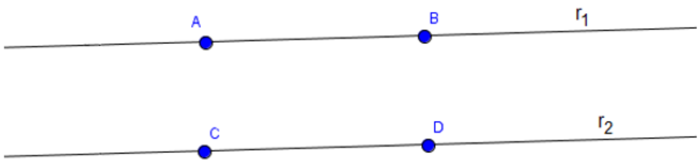
Fonte: A autora

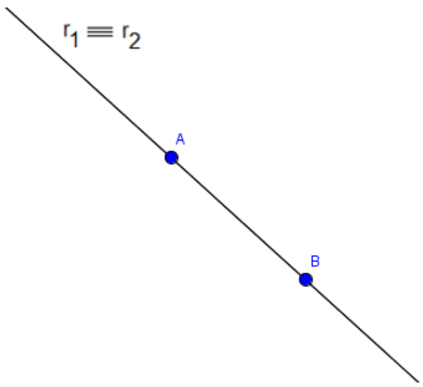
Qual é a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 ? Porque?

Neste caso, qual dos quatro ângulos devemos considerar como sendo o ângulo entre as retas r_1 e r_2 ?

Retas paralelas

A figura abaixo à esquerda ilustra r_1 e r_2 retas paralelas e _________________. Já a figura abaixo à direita ilustra r_1 e r_2 retas paralelas e __________________________.





Retas paralelas

Fonte: A autora

---

46 Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mzfPXFvpS.

Nestes dois casos, qual será a medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2 ? Porque?

Retas concorrentes e não perpendiculares

Seja θ a medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2 . Sendo assim, quais são os valores que θ pode assumir no caso em que r_1 e r_2 são retas concorrentes e não perpendiculares?

Abre o arquivo "retas_angulo_3.ggb"[47] (veja a figura abaixo) no programa Geogebra e responde às perguntas a seguir:

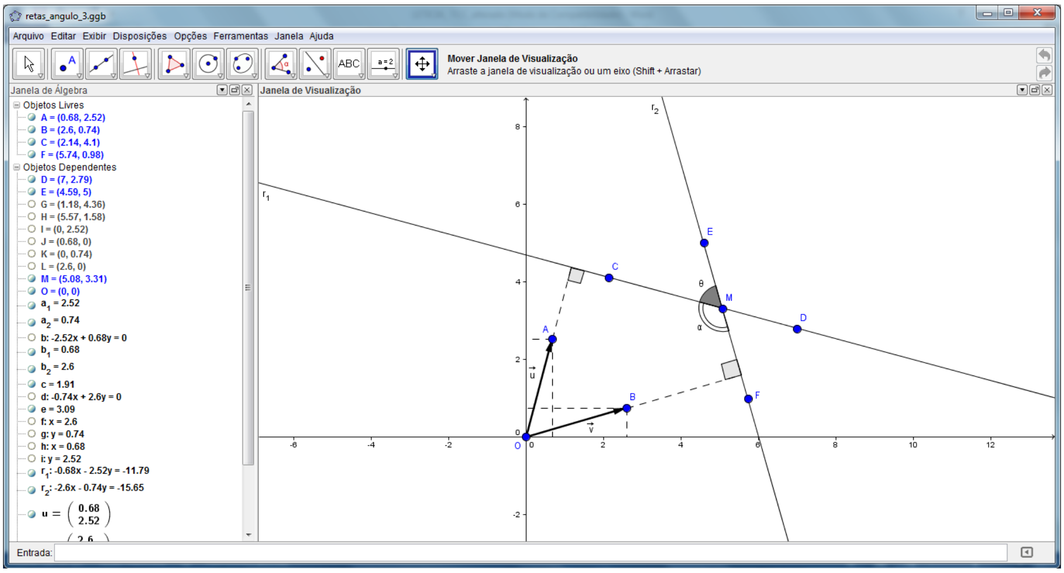


Imagem do arquivo "retas_angulo_3.ggb"

Fonte: A autora

Qual é a posição relativa entre as retas r_1 e r_2 ? Porque?

Podemos considerar o ângulo $F\hat{M}C$ como sendo o ângulo entre as retas r_1 e r_2 ? Porque?

O ângulo $C\hat{M}E$ é agudo ou obtuso? Porque?

Qual é a medida do ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$? Como você obteve esta resposta?

Neste caso, de que maneira podemos obter a medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2 ?

---

47 Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mBMkseZIb.

Agora, abre o arquivo “retas_angulo_4.ggb”[48] (observe a figura abaixo) no programa Geogebra e responde às perguntas a seguir:

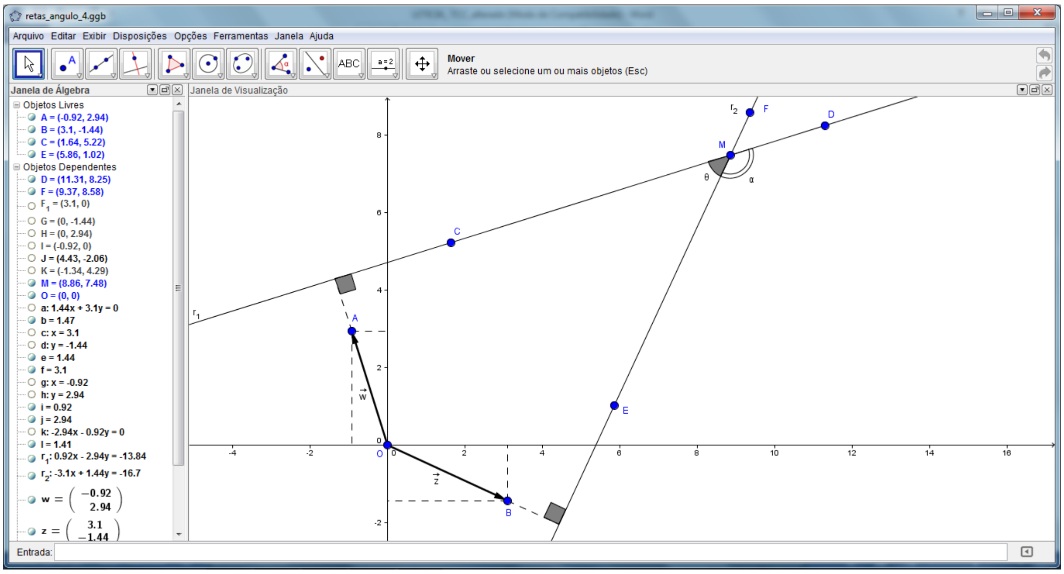


Imagem do arquivo "retas_angulo_4.ggb"

Fonte: A autora

Você percebe alguma mudança do caso anterior (referente ao arquivo “retas_angulo_3.ggb”) para este? Se sim, qual?

Qual é o ângulo entre as retas r_1 e r_2? Qual é a medida deste ângulo?

O ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é agudo ou obtuso? Porque?

Sendo assim, dadas duas retas r_1 e r_2, como neste caso, de que maneira podemos obter a medida do ângulo entre estas retas?

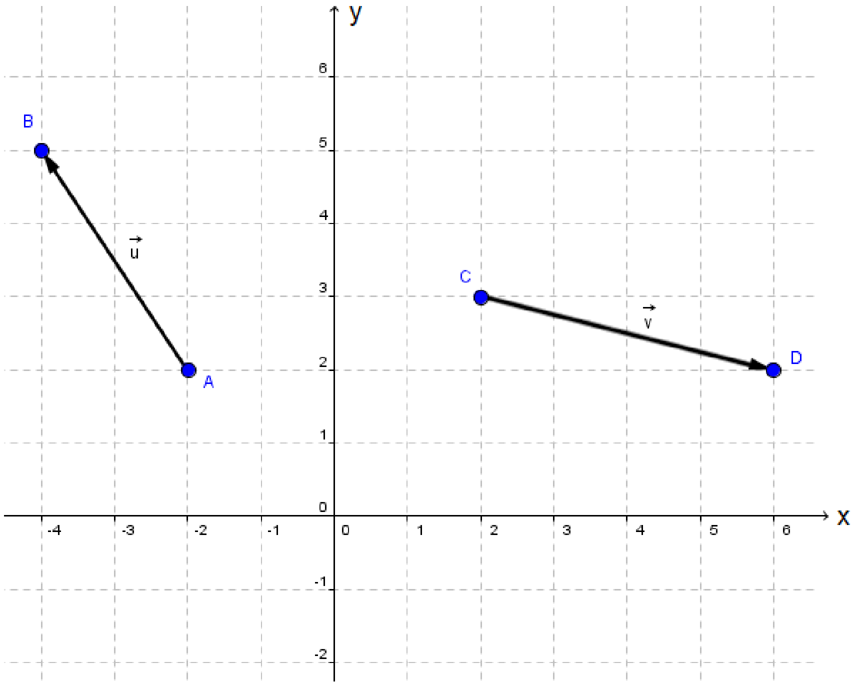
Generalizando: Dadas duas retas quaisquer r_1 e r_2 concorrentes e não perpendiculares, para obtermos a medida θ do ângulo entre estas duas retas, como devemos proceder?

[48] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/meAEoY0HU.

Atividades

1) Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ a seguir:

a)



Vetores $\overrightarrow{u}$ **e** $\overrightarrow{v}$

Fonte: A autora

2) Em um quadrado ABCD, o ponto M é médio do lado CD. Determine o cosseno do ângulo $A\hat{M}B$.

3) Abre o arquivo "aula_7_questao_4.ggb"[49] (observe a figura a seguir) no programa GeoGebra e faz o que se pede abaixo:

[49] Este arquivo encontra-se disponível para download no GeoGebraTube em http://tube.geogebra.org/student/mD6LrGVsS.

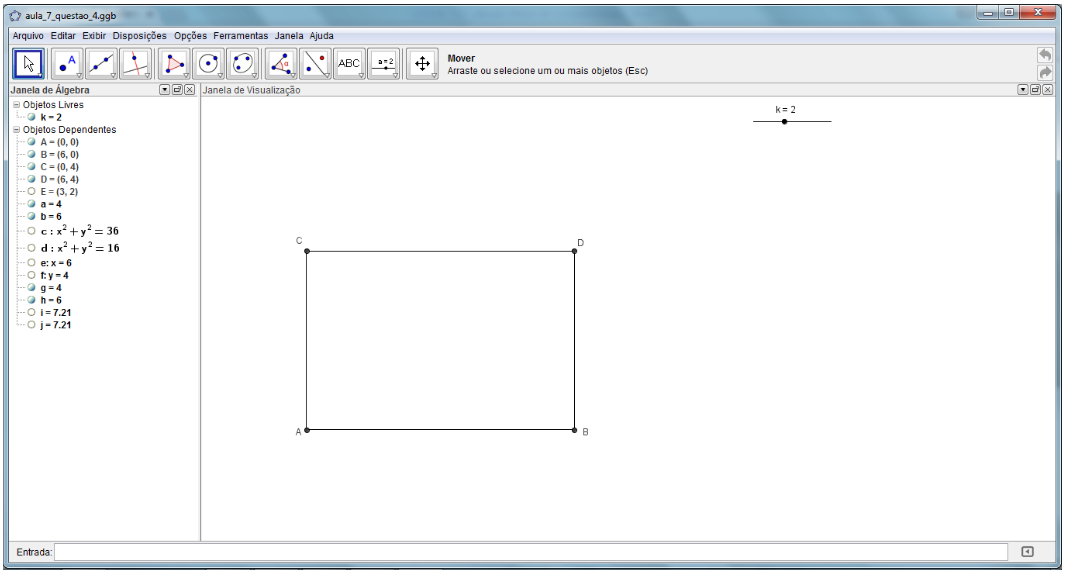


Imagem do arquivo "aula_7_questao_4"

Fonte: A autora

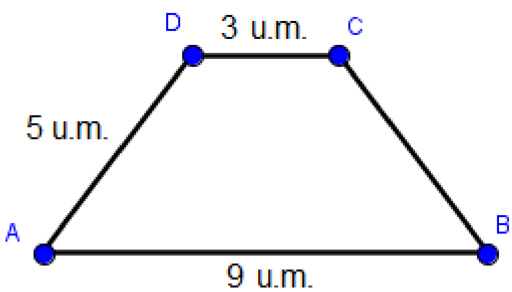
a) Digite no campo de “Entrada” k = 1. Que figura você visualiza? Quais são as medidas dos lados desta figura. Qual é o valor do ângulo entre as diagonais?

b) Digite no campo de “Entrada” k = 2. Quais são as medidas dos lados desta figura. Qual é o valor do ângulo entre as diagonais?

c) Escolha um valor para k e repita o procedimento do item anterior.

Qual é a relação entre as figuras dos itens a), b) e c) acima? O que você conclui a respeito da medida do ângulo entre as diagonais destas figuras?

4) Seja ABCD um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Temos que m($\overline{AB}$) = 9 u.m., m($\overline{CD}$) = 3 u.m. e m($\overline{DA}$) = 5 u.m. Qual é o valor do ângulo entre as diagonais?



Trapézio ABCD

Fonte: A autora

Abre o programa GeoGebra e faz a construção deste trapézio. Descreve a seguir os passos desta construção. Depois, utilize a ferramenta “Ângulo” para verificar a medida do ângulo entre as diagonais. Qual a medida informada no GeoGebra? Esta medida coincide com a que você encontrou anteriormente ao resolver o problema de maneira algébrica?

5) Dois lados de um paralelogramo medem 2 e 3 e fazem entre si um ângulo de 60º. Qual é o cosseno do ângulo formado pelas diagonais?

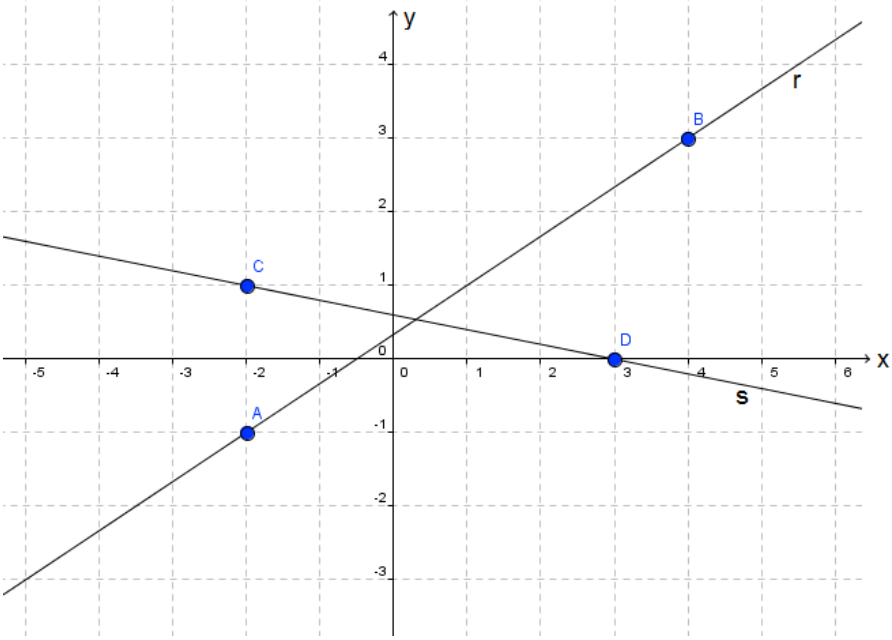
6) Determine o ângulo entre as retas s e t:

a) s: $2x + 3y = 4$ e t: $-6x + 4y - 7 = 0$

7) Observe as retas r e s no sistema de coordenadas abaixo. Temos que os pontos A e B pertencem a reta r e os pontos C e D pertencem a reta s.

a) Qual é a medida do ângulo entre as retas r e s?

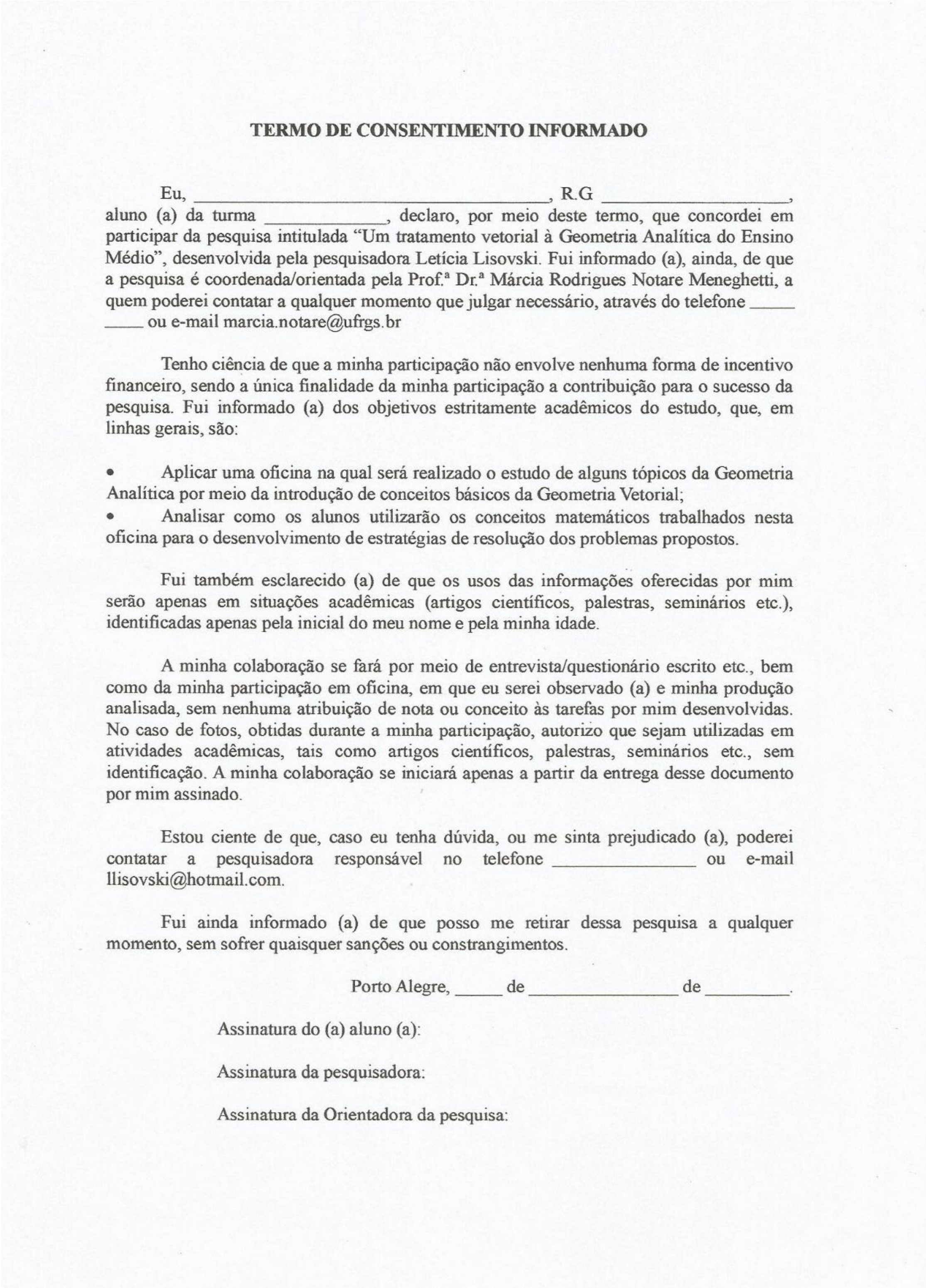
b) Determine a equação geral das retas r e s.



Retas r e s no sistema de coordenadas

Fonte: A autora

APÊNDICE B - Termo de consentimento informado



TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G ____________________, aluno (a) da turma _____________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada "Um tratamento vetorial à Geometria Analítica do Ensino Médio", desenvolvida pela pesquisadora Letícia Lisovski. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone __________ ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade da minha participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Aplicar uma oficina na qual será realizado o estudo de alguns tópicos da Geometria Analítica por meio da introdução de conceitos básicos da Geometria Vetorial;
- Analisar como os alunos utilizarão os conceitos matemáticos trabalhados nesta oficina para o desenvolvimento de estratégias de resolução dos problemas propostos.

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial do meu nome e pela minha idade.

A minha colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc., bem como da minha participação em oficina, em que eu serei observado (a) e minha produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas por mim desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. A minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar a pesquisadora responsável no telefone _______________ ou e-mail llisovski@hotmail.com.

Fui ainda informado (a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _________.

Assinatura do (a) aluno (a):

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura da Orientadora da pesquisa:

APÊNDICE C - Questionário

Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont

Oficina de Vetores

Questionário

Nome:________________________________ Idade:_____ Ano: 3° ano. Turma:_____

1) O conteúdo de Geometria Analítica já foi abordado pelo (a) seu (sua) professor (a) de matemática em sala de aula? Se sim, quais tópicos foram abordados e como se deu está abordagem?

2) Você já estudou algo sobre vetores nas aulas de matemática? E nas aulas de Física?

3) O laboratório de informática já foi utilizado nas aulas de matemática? Se sim, que atividades de matemática foram propostas no laboratório de informática?

4) Você conhece o software Geogebra? Se sim, que atividades realizou com este programa?

5) Você já trabalhou com algum outro software nas aulas de matemática? Qual?

6) O que você espera desta "Oficina de Vetores"?

APÊNDICE D - Autorização para desenvolvimento de trabalho na instituição de ensino

Autorização para desenvolvimento de trabalho na Instituição

Ilmo. Sr. Paulo André Custódio
Diretor da Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont

Solicito sua autorização para que a acadêmica Letícia Lisovski, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, desenvolva seu trabalho de conclusão de curso, intitulado "Um tratamento vetorial à Geometria Analítica do Ensino Médio", na Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont, durante o segundo semestre de 2014. A experiência ocorrerá em oito (8) encontros, com duração prevista de uma hora e trinta minutos (1h30min), com a participação de dez (10) alunos do 3° ano do Ensino Médio.

Os objetivos do trabalho, estritamente acadêmicos, em linhas gerais, consistem em aplicar uma oficina por meio da qual serão introduzidos conceitos básicos da Geometria Vetorial para o estudo de alguns tópicos da Geometria Analítica abordados no Ensino Médio tendo para isto o auxílio do software Geogebra e analisar como os alunos utilizarão os conceitos matemáticos trabalhados nesta oficina para o desenvolvimento de estratégias de resolução dos problemas propostos. Neste sentido, torna-se importante proceder à coleta de dados, incluindo registros em vídeo e fotográfico, para futuras análises e obtenção dos resultados relacionados com a aprendizagem da Matemática.

Dessa forma, nessa oportunidade, estamos solicitando sua autorização para a realização da coleta de dados mencionada.

Para manifestação de sua concordância, é suficiente sua declaração e assinatura nesse documento.

Ao seu dispor para quaisquer esclarecimentos, envio cordiais saudações.

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática – UFRGS
Porto Alegre, 22 de outubro de 2014.

APÊNDICE E - Autorização para a utilização do nome da escola

Autorização para a utilização do nome da instituição de ensino

Autorizo a acadêmica Letícia Lisovski do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul que, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, desenvolveu o trabalho de conclusão de curso intitulado "Um tratamento vetorial à Geometria Analítica do Ensino Médio", com estudantes do 3º ano do Ensino Médio a utilizar o nome da Escola Estadual de Ensino Médio Santos Dumont em seu trabalho.

Atenciosamente,

Paulo André Custódio
Diretor
ID 1896890/02
E.E.E. Médio Santos Dumont

Porto Alegre, 22 de outubro de 2014