

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Um Novo Modelo para Decaimentos de Mésons \*

**Daniel Tavares da Silva**

Dissertação realizada sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef (IFM-UFPEL) e co-orientação do Professor Dr. César Augusto Zen Vasconcellos (IF-UFRGS) e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre  
Outubro de 2006.

---

\* Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Este trabalho é dedicado

a meus pais, Jovelino (in memorium) e Alda,  
a meu sogro e minha sogra, Edgar e Gilda,  
a minha esposa, Caroline,  
e a meu filho, Israel,  
pelo apoio e incentivo que  
sempre me deram,

agradeço antes de tudo a Deus.

# Agradecimentos

★ Ao meu orientador Prof. Dimiter Hadjimichef, pela orientação dedicada, pela confiança no meu trabalho, pelos questionamentos e discussões (que foram muito importantes para a realização deste trabalho) e, sobretudo, pelo apoio e amizade.

★ Ao meu amigo e co-orientador Prof. Cesar Augusto Zen Vasconcellos, cuja confiança foi fundamental durante todo esse período.

★ À minha família pelo apoio, amor e principalmente compreensão pela minha ausência.

★ Aos amigos, Mario, Luis Fernando, Aldomar e Juliana, que gentilmente me cederam lugar em seus lares para que eu pudesse desenvolver este trabalho nesta cidade (Porto Alegre).

★ Aos meus amigos da sala M204 e M201, além das demais salas, que contribuíram para uma agradável convivência no IF-UFRGS.

★ Aos meus amigos não-físicos.

★ Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFPel, que deram todo o incentivo para que este sonho se tornasse realidade.

★ Aos professores e funcionários do IF-UFRGS, que de alguma forma contribuíram para a minha formação e para a realização deste trabalho.

*Muito Obrigado*

# Resumo

A representação de Fock-Tani é um formalismo de teoria de campos para tratar problemas envolvendo simultaneamente partículas compostas e seus constituintes. O formalismo foi originalmente desenvolvido para tratar problemas de física atômica e mais tarde estendido para problemas da física hadrônica. Nesta dissertação, inicialmente apresentamos uma breve revisão da Cromodinâmica Quântica e um detalhado estudo dos modelos de decaimentos. Revisamos também a representação de Fock-Tani para mésons e buscamos estendê-la para incluir processos de decaimento de mésons.

Há muito tempo os modelos de *criação de pares* para decaimentos hadrônicos fortes têm sido formulados. O modelo  ${}^3P_0$  é um típico modelo de decaimento que considera apenas decaimentos do tipo OZI-permitidos para as interações fortes. O modelo  ${}^3P_0$  descreve a criação de um par quark-antiquark adicional na presença do méson do estado inicial. Neste modelo o par quark-antiquark criado tem os números quânticos do vácuo. Este modelo também pode ser formulado pelo limite não-relativístico de um Hamiltoniano de *criação de par*.

É mostrado que a aplicação da transformação de Fock-Tani ao Hamiltoniano de *criação de par* produz a característica expansão em potências da função de onda, onde o modelo  ${}^3P_0$  é obtido em ordem mais baixa desta expansão e representado pelo Hamiltoniano  $H_{FT}$ . O passo seguinte é a introdução das correções de ortogonalidade para corrigir o modelo de “ordem zero”. O Hamiltoniano associado à correção contém termos que dependem de apenas uma  $\Delta$ , chamado de *kernel de estado ligado*. É, então proposto o modelo  ${}^3P_0$  corrigido, que é chamado de  $C^3P_0$ . Para obter o modelo  $C^3P_0$  é feita *hipótese da soma*, onde uma aproximação é introduzida no sentido de representar efetivamente o resultado da soma da série de potência em  $\Delta$ .

O modelo é aplicado ao decaimento de dois mésons leves:  $\rho \rightarrow \pi + \pi$  e  $b_1 \rightarrow \omega + \pi$ . As amplitudes e suas respectivas taxas de decaimento são avaliadas. No caso do decaimento de  $b_1$  é ainda calculado a razão  $a_D/a_S$ .

# Abstract

Fock-Tani is a field theory formalism appropriated for the simultaneous treatment of composite particles and their constituents. The formalism was originally developed for the treatment of problems in atomic physics and it was extended later on to the treatment of problems on hadron physics. In this dissertation, we initially present a brief review of Quantum Chromodynamics and a more detailed survey of the decay models.

For a long time *the pair creation models* for strong hadronic decays have been formulated. The  ${}^3P_0$  model is typical decay model which considers only OZI-allowed strong decays. The  ${}^3P_0$  model considers a quark-antiquark pair creation in the presence of the initial state meson. The quark-antiquark pair is created with the vacuum quantum numbers. This model can also be obtained from the non-relativistic limit of the *pair creation* Hamiltonian.

Applying the Fock-Tani transformation to the *pair creation* Hamiltonian produces the characteristic expansion in powers of the wave function, where the  ${}^3P_0$  model is the lowest order term of this expansion and represented by the Hamiltonian  $H_{FT}$ . The next step is to introduce the orthogonality corrections to this “zero order” model. The Hamiltonian associated to this correction contains terms dependent on only one  $\Delta$ , called the *bound state kernel*. A new model is introduced in order to correct the  ${}^3P_0$ , which we call the  $C^3P_0$  model. To obtain the  $C^3P_0$  model the *sum hypothesis* will be introduced, in order to represent effectively the sum of the  $\Delta$  power series.

The model is applied to the decay of two light meson:  $\rho \rightarrow \pi + \pi$  e  $b_1 \rightarrow \omega + \pi$ . The decay amplitudes and rates are evaluated. For the  $b_1$  decay the  $a_D/a_S$  ratio is calculated.

# Índice

<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>1. A Física de Mésons e o Modelo de Decaimento <math>{}^3P_0</math></b> . . . . .	10
1.1 Introdução . . . . .	10
1.2 Os Mésons e os seus Números Quânticos . . . . .	11
1.3 Modelo de Decaimento ${}^3P_0$ . . . . .	14
<b>2. O Formalismo de Fock-Tani para Mésons: uma revisão</b> . . . . .	22
2.1 A Representação de Fock-Tani. . . . .	22
2.1.1 Espaço de Vetores de Estado Ideais . . . . .	25
2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais . . . . .	27
2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores. . . . .	29
2.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores . . . . .	29
2.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento” . . . . .	30
2.3 O Hamiltoniano na representação Fock-Tani. . . . .	37
2.4 Formalismo Fock-Tani e o “Método do Grupo Ressonante”. . . . .	45
<b>3. Decaimento Mesônico no Formalismo de Fock-Tani</b> . . . . .	49
3.1 Hamiltoniano de Decaimento Mesônico de Fock-Tani . . . . .	49
3.2 O modelo ${}^3P_0$ corrigido ( $C^3P_0$ ) . . . . .	52
<b>4. Aplicações do Formalismo de Fock-Tani</b> . . . . .	64
4.1 Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+\pi^0$ . . . . .	64
4.2 Decaimento $b_1 \rightarrow \omega\pi$ . . . . .	70
4.3 A Correção de Ortogonalidade para o Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+\pi^0$ . . . . .	74
4.3.1 Cálculo do primeiro termo da correção de ortogonalidade . . . . .	75
4.3.2 Cálculo do segundo e terceiro termos da correção de ortogonalidade . . . . .	79
4.4 A Correção de Ortogonalidade para o Decaimento $b_1 \rightarrow \omega\pi$ . . . . .	80
4.4.1 Cálculo do primeiro termo da correção de ortogonalidade: . . . . .	81

---

4.4.2	Cálculo do segundo termo da correção de ortogonalidade . . . . .	85
4.4.3	Cálculo do terceiro termo da correção de ortogonalidade . . . . .	85
<b>Conclusões e Perspectivas . . . . .</b>		<b>89</b>
<b>A. Unidades, Notação, Convenções . . . . .</b>		<b>94</b>
<b>B. Função de Onda do Méson . . . . .</b>		<b>98</b>
<b>C. Cálculo de Comutadores . . . . .</b>		<b>102</b>
<b>D. O Gerador de Quarta Ordem . . . . .</b>		<b>113</b>
<b>E. O Gerador de Quinta Ordem . . . . .</b>		<b>119</b>
<b>F. Transformação de Observáveis e a Ausência de Termos Seculares . . . . .</b>		<b>125</b>
<b>G. Equação de Movimento Adicionais Até Terceira Ordem . . . . .</b>		<b>130</b>
G.1	Cálculo de $M_\alpha^{(0)}(t)$ : . . . . .	133
G.2	Cálculo de $M_\alpha^{(2)}(t)$ : . . . . .	134
G.3	Cálculo de $M_\alpha^{(3)}(t)$ : . . . . .	134
<b>H. Cálculo do <math>\bar{q}</math> de Quarta Ordem . . . . .</b>		<b>136</b>
<b>I. Cálculo da Parte de Spin do Potencial <math>V_{\mu\nu}</math> . . . . .</b>		<b>147</b>
<b>Referências . . . . .</b>		<b>150</b>

# Introdução

A física de mésons assim como o estudo da interação forte estão profundamente conectados desde o advento do méson  $\pi$ , introduzido teoricamente por Yukawa (1935) e detectado experimentalmente por Lattes, Occhialini e Powell (1947).

A teoria fundamental das interações fortes é a Cromodinâmica Quântica, uma teoria de campos de calibre, não-Abeliana e que descreve as interações entre quarks e glúons. É tradicional, inclusive na comunidade brasileira de Física Hadrônica, Partículas Elementares e Teoria Quântica de Campos, referir-se a esta teoria pela sigla inglesa *QCD* associada à expressão *Quantum Chromodynamics*. O mesmo ocorre para a Eletrodinâmica Quântica, cuja a sigla em inglês é *QED* (Quantum Electrodynamics). Nesta dissertação adotaremos estas convenções.

Murray Gell-Mann e Yuval Ne'eman propuseram em 1961 um esquema de classificação e ordenamento da, já então extraordinária, quantidade de bárions e mésons conhecidos na natureza, denominado de Método dos Octetos (Eightfold Way). Este método, baseado na teoria matemática do grupo de simetria  $SU(3)$  (o S significa *Special*, o U significa *Unitary* e o três designando a quantidade de elementos básicos da teoria), tinha como propósito descrever a estrutura intrínseca das partículas fortemente interagentes em termos de entidades fundamentais, os blocos elementares de construção de mésons e bárions.

Alguns anos mais tarde, Gell-Mann denominou estes blocos elementares de quarks, adotando o termo após a leitura de um trecho do romance “Finnegans Wake”, de James Joyce (1882-1941). Na proposta, um quark tinha carga elétrica  $2/3$  da carga do próton e os outros dois quarks  $-1/3$ . Entre 1967 e 1973, usando o Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), Jeromes Isaac Frideman, Henri W. Kendall e Richard E. Taylor notaram que o espalhamento de elétrons por prótons e nêutrons indicava que estes eram compostos por partículas menores, com valores para suas cargas elétricas consistentes com a teoria de quarks. Os três receberam o prêmio Nobel de física, em 1990, pela descoberta. Gell-Mann então identificou na teoria de grupos  $SU(3)$  o elemento três como o número de sabores dos quarks fundamentais e se buscou à época confirmar, de maneira indireta, através de operações lógicas envolvendo esta teoria, a existência dos quarks. Com aquela identificação do papel dos quarks como elementos do grupo  $SU(3)$ , tornou-se possível, através da atribuição *a priori* de algumas propriedades físicas fundamentais aos quarks (como por exemplo cargas

fracionárias, caráter fermiônico entre outros), a determinação de propriedades físicas dos hádrons então conhecidos a partir da composição das respectivas propriedades de seus elementos constituintes. Por exemplo, o caráter fermiônico atribuído aos quarks, isto é, spins intrínsecos semi-inteiros; a partir da adição vetorial dos spins de três quarks constituintes é possível determinar-se o spin do hádron correspondente. Através de procedimentos desta natureza, e da comparação das predições físicas com os dados experimentais de propriedades intrínsecas aos hádrons, o número de quarks e algumas de suas propriedades, como por exemplo sua massa, puderam ser então inferidas.

Gell-Mann postulou então que havia três sabores de quarks na natureza, designados  $u$ ,  $d$  e  $s$ , com cargas elétricas fracionárias. Os quarks  $u$  e  $d$  compõem a matéria ordinária (formada por prótons e nêutrons) enquanto que os quarks  $s$  compõem, por exemplo, o méson *kaon*, bem como uma enorme quantidade de outras partículas de vida curta encontradas nos raios cósmicos ou produzidas em reações de altas energias.

De maneira independente, e no mesmo ano, George Zweig desenvolveu uma teoria similar à de Gell-Mann e denominou os elementos fundamentais da teoria de azes.

A presença da cor originou uma teoria que apresenta similaridades, em muitos aspectos, com a Eletrodinâmica Quântica. Nesta última, a presença de partículas carregadas origina uma interação mediada por partículas neutras, de massa nula, denominadas de fótons. Similarmente, a interação entre os quarks se dá através da troca de partículas, também de massa nula, que carregam cor e anticor, bem como carga de cor, denominadas de glúons (da palavra inglesa *glue* = cola). Evidentemente cor e carga de cor são nomenclaturas que não têm nada a ver com as cores do espectro eletromagnético. Estes nomes estão associados a um tipo de carga forte cuja natureza, embora ainda não bem compreendida, apresenta algumas características especiais: quarks e glúons são, aparentemente, absolutamente confinados no interior dos bárions e mésons em condições normais; jamais foram observados como partículas livres na natureza, independentemente da intensidade da interação externa utilizada para isolá-los. Apenas para exemplificar, prótons e nêutrons, constituídos por três quarks elementares, fazem parte da família dos bárions, enquanto os mésons, do qual o pión é a partícula mais conhecida, são constituídos de pares quark-antiquark. A existência destes quarks é inferida de maneira indireta através de experiências especiais, como por exemplo em processos de colisões de elétrons altamente energéticos com prótons ou nêutrons e que envolvem, neste caso, a observação da distribuição angular dos elétrons espalhados. Os resultados experimentais são compatíveis, nestes casos, com a presença, no interior dos prótons e nêutrons, de três centros pontuais de espalhamento. Em síntese, em nível sub-nuclear, prótons e nêutrons revelam assim ricas estruturas interiores, sendo constituídos então por três quarks que carregam cores e cargas de cor, e interagem através da troca de glúons.

As denominações cor e carga de cor foram propostas em 1965 por Moo-Young Han e

Yoichiro Nambu em que quarks poderiam possuir uma de três cores fundamentais, vermelho, verde e azul e as suas antipartículas, os antiquarks, as anticores antivermelha (ou ciano), antiverde (ou magenta) e antiazul (ou amarelo). Estas designações são utilizadas para caracterizar o fato de que, devido ao confinamento, a propriedade da cor não é observada quando mésons e bárions são tratados como partículas elementares. Similarmente à cor branca, formada pelas três cores fundamentais do espectro eletromagnético, as cores de três quarks, formando um bárion elementar, ou de um par quark-antiquark, formando um méson elementar, se recombinariam originando uma cor neutra para os bárions e os mésons.

Os diferentes tipos (sabores) de quarks hoje conhecidos são representados pelas letras  $u$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $b$ , para designar, na nomenclatura inglesa, as palavras: *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ), *charm* ( $c$ ), *strange* ( $s$ ), *top* ( $t$ ) e *bottom* ( $b$ ). Os quarks  $t$  e  $b$  são também denominados de *truth* (verdade) e *beauty* (beleza). Os quarks são assim partículas com sabor, charme, estranheza, beleza, verdade e cor...

A QCD é presentemente a mais importante candidata à teoria fundamental da interação forte. A interação forte em nível sub-nuclear, envolvendo portanto cargas de cor, é uma das quatro interações fundamentais encontradas na natureza juntamente com as interações gravitacional, fraca e eletromagnética. A QCD prediz que a interação forte apresenta, adicionalmente ao confinamento, uma característica única na natureza, a liberdade assintótica. Esta predição da QCD, experimentalmente confirmada, indica que os quarks são assintoticamente livres (para grandes valores de momentum transferidos ou, equivalentemente, quando muito próximos uns dos outros).

Diferente da QED, onde a força eletromagnética decresce com a separação das cargas elétricas, a QCD descreve um tipo de força que aumenta de intensidade à medida que os quarks se afastam e diminui assim que eles se aproximam. Desta forma, na região de altas energias (distâncias pequenas), os quarks encontram-se essencialmente livres, condição conhecida como *liberdade assintótica*. Este fato permite o uso de técnicas perturbativas para testar a teoria neste limite. Na região de baixas energias (distâncias longas), e que corresponde ao domínio da física nuclear, os quarks apresentam-se em estados fortemente ligados e os hádrons aparecem como singletos de cor, ocorrendo então o fenômeno conhecido como *confinamento de cor*. Os mésons apresentam-se como os graus de liberdade ideais para o estudo de regimes fortemente acoplados e não-perturbativos da interação forte, pois diretamente da QCD pouco é conhecido sobre os estados físicos da teoria.

O nosso conhecimento sobre a física hadrônica, em larga escala, é baseada em modelos fenomenológicos, em particular no chamado *modelo de quarks constituintes*. A espectroscopia de mésons e bárions é surpreendentemente bem descrita se considerarmos os hádrons como compostos por estes tipos de quarks (também chamados de quarks de valência). Além do tipo usual de méson descrito pelo modelo de quarks, isto é, composto por um par  $q\bar{q}$ ,

a QCD prevê a existência de estados em que os graus de liberdade dos glúons aparecem explicitamente. Os hádrons formados apenas por glue são chamados de *glueballs*. Em outras palavras os glueballs são hádrons, mas não possuem quarks na sua constituição. Um outro tipo de hádron previsto em teoria é um que mistura graus de liberdade de quarks constituintes com graus de liberdade de glúons constituintes. Estes hádrons são denominados de *híbridos*. Tanto os glueballs quanto os hádrons híbridos representam o que é classificado de novos estados hadrônicos ou muitas vezes apresentados na literatura sob o nome *hádrons exóticos*.

Na década de '70 iniciou-se um vigoroso estudo sobre as propriedades de decaimentos de *mésons leves*. Embora esta denominação não seja rigorosa, entende-se por méson leve os mésons apresentados na tabela (0.1). Há outros mésons que, na literatura, também se encaixam nesta classificação [1], porém na tabela (0.1) há um conjunto representativo dos mais leves, sendo alguns destes objeto do estudo nesta dissertação. A primeira coluna desta tabela apresenta o estado físico na notação usual da espectroscopia, ou seja,  $^{2S+1}L_J$ . Nas demais colunas temos o spin  $S$ , o momento angular  $L$ , o momento angular total  $J$ , a paridade  $P$ , a conjugação de carga  $C$ . A importância destas quantidades na identificação e classificação dos hádrons será discutida no próximo capítulo.

Estado	$S$	$L$	$J$	$P$	$C$	$J^{PC}$	Mésons	Tipo
$^1S_0$	0	0	0	-	+	$0^{-+}$	$\pi, \eta, \eta', K$	pseudo-escalar
$^3S_1$	1	0	1	-	-	$1^{--}$	$\rho, \omega, \phi, K^*$	vetor
$^1P_1$	0	1	1	+	-	$1^{+-}$	$b_1, h_1, h'_1, K_1$	pseudo-vetor
$^3P_0$	1	1	0	+	+	$0^{++}$	$a_0, f_0, f'_0, K_0^*$	escalar
$^3P_1$	1	1	1	+	+	$1^{++}$	$a_1, f_1, f'_1, K_1$	vetor-axial
$^3P_2$	1	1	2	+	+	$2^{++}$	$a_2, f_2, f'_2, K_2^*$	tensor

**Tab. 0.1:** *Mésons leves*

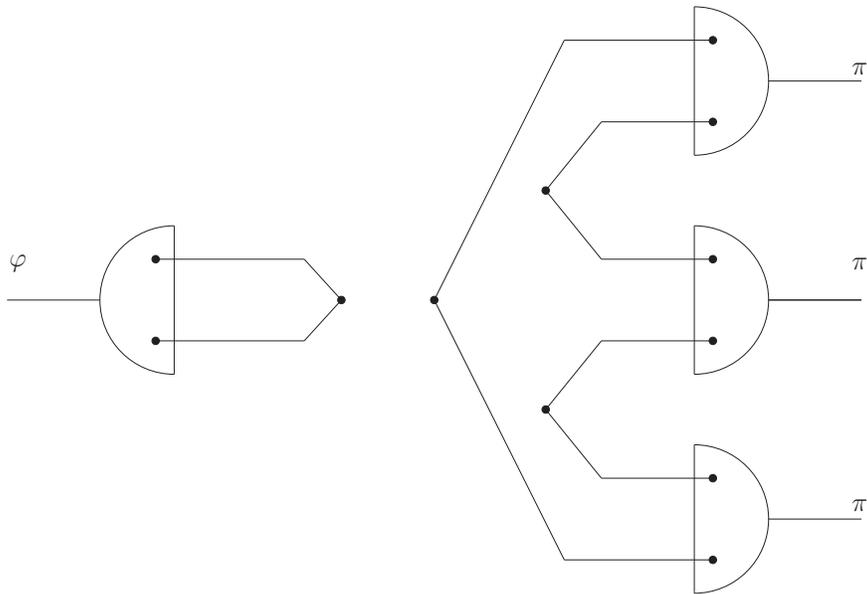
No estudo dos decaimentos há dois tipos fundamentais de processos elementares de decaimentos onde o mecanismo básico é a criação de um par  $q\bar{q}$  a partir do vácuo, juntamente com uma recombinação de linhas de quarks. Esta vai ser a essência do modelo  $^3P_0$  a ser estudado neste trabalho e que será descrito no próximo capítulo. Um processo é dito ser proibido pela *regra de Okubo-Zweig-Iizuka* (ou OZI-proibido) quando um diagrama de linha de quarks pode ser dividido em partes e estas partes conter apenas hádrons completos (singletos de cor) sem cortar a linha de quarks (Fig. 0.1). Caso contrário diz-se que o

processo é OZI-permitido (Fig. 0.2). Os processos OZI-proibidos são fortemente suprimidos e não representam os canais principais de decaimento.

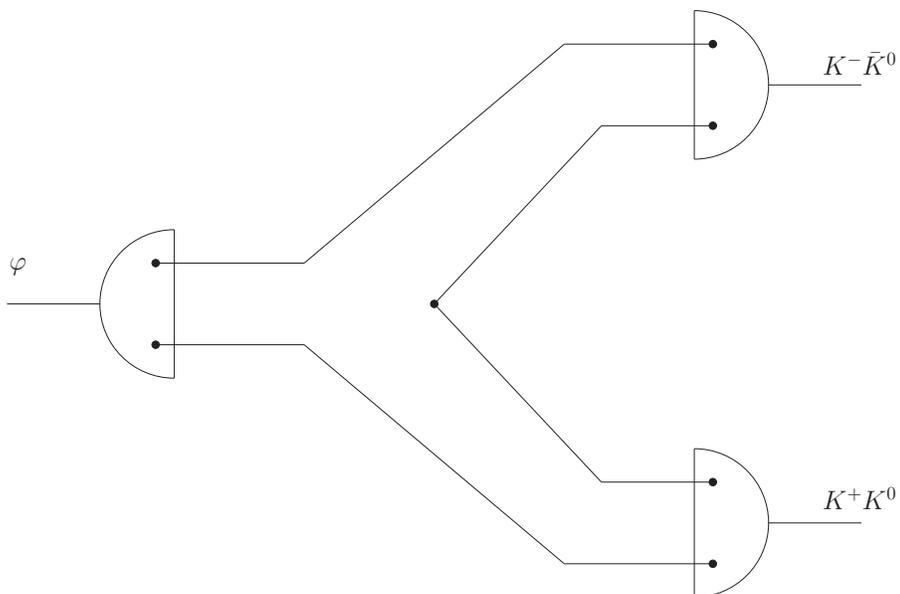
A espectroscopia hadrônica, por sua vez, desenvolveu uma nomenclatura própria para descrever os diversos setores dos hádrons, por exemplo *quarkônio estranho* são mésons leves ( $u, d, s$ ) com ao menos um quark ou antiquark estranho na sua componente  $q\bar{q}$  de valência. Estes mésons são chamados de *kaônio* se o estado de base dominante é  $n\bar{s}$  (onde  $n \equiv u, d$ ) e *antikaônio* se  $s\bar{n}$  e *estranhônio* se  $s\bar{s}$ . Um estado ligado  $c\bar{c}$  é, por sua vez, denominado de *charmônio*. De um modo geral quando um méson é composto por dois quarks de sabores diferentes (por exemplo,  $d\bar{s}$ ) ele é chamado de *méson de sabor aberto*. O respectivo *méson de sabor fechado* é o *estranhônio*, *charmônio* etc.

Historicamente, a grande explosão no conhecimento sobre a espectroscopia hadrônica iniciou-se após a chamada *Revolução de Novembro* [2], há mais de 30 anos, com a descoberta do méson  $J/\psi$ . Esta descoberta conseqüentemente implicou na confirmação da existência de um novo quark: o charme. Hoje, um dos desafios consiste em descrever a espectroscopia do setor de charme sob a luz da descoberta do enigmático méson escalar  $D_{s0}(2317)$ , anunciado por BaBar em abril (2003) [3] e do méson vetorial  $D_{s1}(2460)$  por CLEO [4] em agosto (2003). Estas descobertas demonstram que o modelo de potencial de quarks não é tão preciso quanto se imaginava. Nesta abordagem os mésons são descritos por um estado ligado formado por par  $q\bar{q}$ , movendo-se sob o efeito do potencial. Os potenciais típicos usados no modelo são o potencial de Coulomb de cor com confinamento linear, acrescentado de interações dependentes de spin com troca de um glúon. Por exemplo, o estado escalar  $D_{s0}$  formado por um par  $c\bar{s}$  é previsto, pelo modelo, a aparecer com uma massa de 2.48 GeV [5]. Entretanto, este valor está aproximadamente 160 MeV acima da massa experimental do  $D_{s0}(2317)$ . Antes desta descoberta as discrepâncias no setor de charme eram da ordem de apenas 10 MeV. Uma explicação existente na literatura descreve estas discrepâncias como de origem dinâmica relacionada com um acoplamento forte do  $D_{s0}$  ao canal DK para um decaimento em onda-S na região de massa de 2360 MeV. Nesta interpretação sugere-se a existência da molécula hadrônica formada pelos mésons charmosos  $D$  com o káons  $K$  [6]. Como ilustração, pode-se ver a concordância global do modelo de quarks com a experiência na Fig. (0.3).

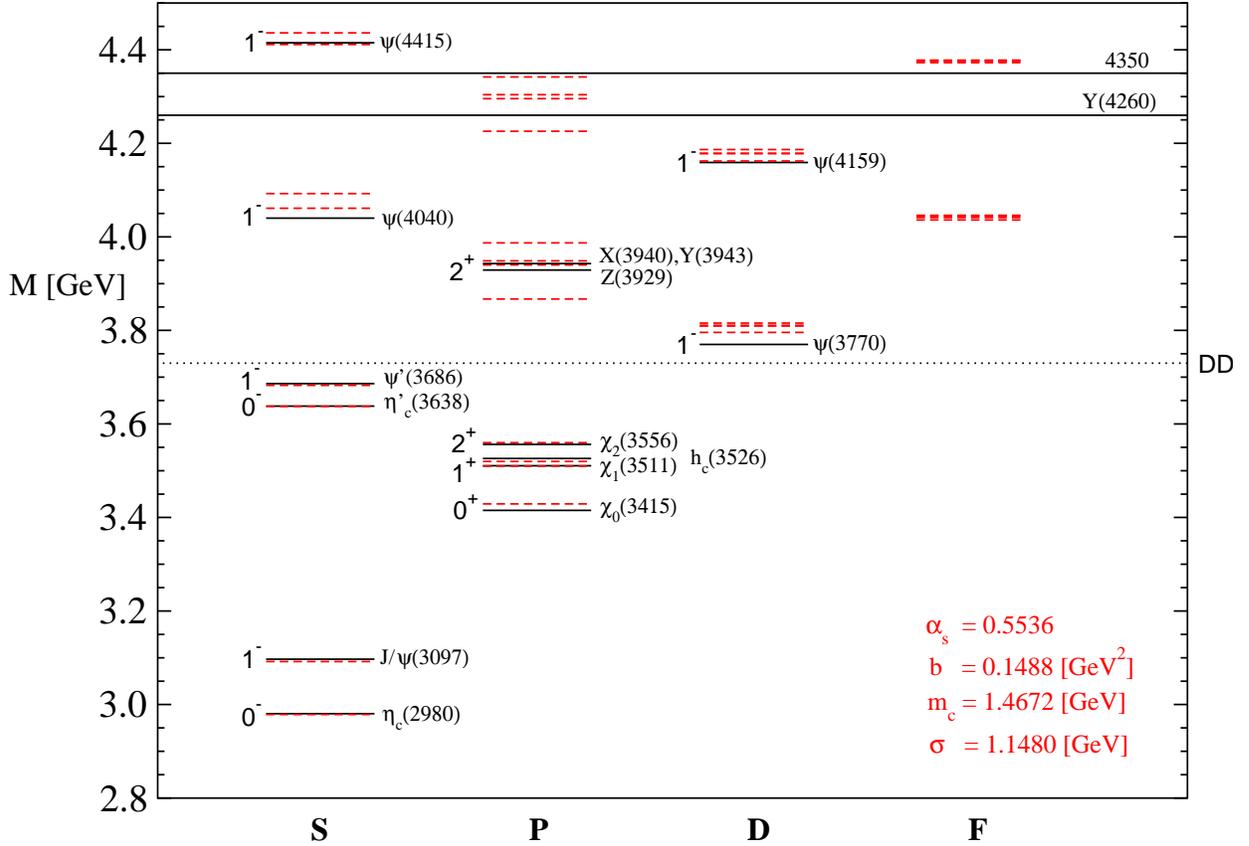
Nesta dissertação faremos a dedução de um novo modelo para descrever os decaimentos mesônicos. Este será um estudo exploratório onde as bases deste modelo serão apresentadas e testadas em um número limitado de exemplos. A idéia geral do novo modelo consiste em perceber que mésons são estados ligados entre quarks e antiquarks e que nos decaimentos esta informação sobre a sua estrutura interna não pode ser desconsiderada. Há muitos exemplos de sistemas nos quais os graus de liberdade internos de partículas compostas não podem ser desprezados. Para estes sistemas o formalismo em segunda quantização da



**Fig. 0.1:** Um processo OZI-proibido, exemplo:  $\varphi \rightarrow \pi\pi\pi$



**Fig. 0.2:** Um processo OZI-permitido, exemplo:  $\varphi \rightarrow K\bar{K}$



**Fig. 0.3:** O conhecimento experimental atual sobre a espectroscopia do charmônio (e possíveis mésons híbridos) em comparação às previsões do modelo de potencial não-relativístico. As linhas sólidas são experimentais e as linhas tracejadas são teóricas.

mecânica quântica torna-se uma ferramenta matemática muito difícil de ser usada uma vez que a presença de estados ligados torna mais complexa a aplicação direta do teorema de Wick, bem como o cálculo de funções de Green entre outros aspectos.

Por isso foi desenvolvida a idéia de fazer um mapeamento do espaço de Hilbert físico para um espaço de Hilbert ideal onde as partículas compostas são representadas por operadores elementares ideais, obedecendo regras de comutação canônicas. A informação sobre a sua estrutura interna é transferida para um Hamiltoniano de interação efetivo. O desenvolvimento posterior de uma transformação capaz de realizar este mapeamento foi conseguido por S. Tani [7] e generalizado por M. D. Girardeau [8]. Esta transformação generalizada construída por Girardeau e colaboradores [9]-[17] , sendo por eles denominada de *transformação de Fock-Tani*, está relacionada com o método de quasi-partícula de Weinberg [18, 19] , onde os

estados ligados são subtraídos do problema, restando apenas uma interação residual fraca.

Os operadores de criação e destruição de partículas compostas não obedecem relações de (anti)comutação canônicas, devido à presença da estrutura interna. Após realizar a transformação unitária de Fock-Tani  $U$  sobre o operador de criação do estado ligado, um novo estado ligado é obtido sendo definido como a aplicação de um operador de criação ideal sobre o vácuo. Os operadores ideais obedecem a relações de (anti)comutação canônicas. Além de se transformar o estado também se efetua a transformação dos operadores da teoria (operadores de quarks, mésons, bárions, glueballs, entre outras partículas) obtendo-se, de forma iterativa, uma expansão em potências da função de onda. Com estes operadores efetivos torna-se possível construir quantidades efetivas em termos das quantidades fundamentais. Uma destas quantidades efetivas importantes que podem ser construídas é o Hamiltoniano  $H_{efetivo} = U^{-1}HU$  que possui, entre outras estruturas, diagramas correspondendo a espalhamentos hadrônicos com troca de constituintes, decaimentos etc.

Desta forma pretende-se, neste trabalho de mestrado, deduzir um novo modelo para decaimentos de mésons. O modelo consagrado na literatura e que obtém, de um modo geral, o maior sucesso na descrição dos processos de decaimento é chamado de modelo  ${}^3P_0$ . Os resultados deste modelo podem ser obtidos partindo do limite não-relativístico de um Hamiltoniano de dois corpos que será apresentado no próximo capítulo. O nosso modelo será obtido aplicando a transformação de Fock-Tani sobre este Hamiltoniano. Mostraremos que o  $H_{efetivo}$ , em ordem mais baixa da teoria transformada, reproduz os resultados da literatura com o modelo  ${}^3P_0$ . Entretanto, na estrutura da teoria efetiva representada por  $H_{efetivo}$ , há contribuições que se originam em ordens mais altas da transformação. Desta forma a proposta deste novo modelo consiste em avaliar a próxima “correção” ao Hamiltoniano do modelo  ${}^3P_0$  e fazer comparações com a experiência. Esta dissertação estará longe de avaliar o real potencial deste modelo, pois isto demandaria um estudo minucioso de todo espectro hadrônico, em particular, o setor do charmônio.

A divisão dos capítulos é a seguinte: no capítulo 1 apresentamos uma revisão da Cromodinâmica Quântica, mésons e seus números quânticos e do modelo  ${}^3P_0$ . O capítulo 2 é destinado a uma revisão do formalismo de Fock-Tani para mésons.

No capítulo 3, é apresentado a parte inédita desenvolvida nesta dissertação onde faremos a dedução, a partir de um Hamiltoniano de criação de par (que origina o modelo  ${}^3P_0$ ) do Hamiltoniano efetivo, do novo modelo.

O capítulo 4, será destinado às aplicações e comparações com a experiência. Após no capítulo 4, apresentamos as conclusões, apêndices e bibliografia consultada.

## Capítulo 1

# A Física de Mésons e o Modelo de Decaimento ${}^3P_0$

### 1.1 Introdução

A QCD baseia-se no postulado de simetria local (invariância de calibre) associada à simetria unitária  $SU(3)$  de carga de cor. O Lagrangiano é definida na QCD na forma

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

onde  $\psi_\xi(x)$  representa os campos dos quarks,  $\xi \equiv (f, s, c)$  simboliza os índices de sabor, spin e cor dos quarks;  $\gamma^\mu$  ( $\mu = (0, 1, 2, 3)$ ) são as matrizes de Dirac e  $m$  a matriz de massa dos quarks. Na expressão (1.1) os índices  $\xi \equiv (f, s, c)$  foram suprimidos por simplicidade formal. A derivada covariante  $D_\mu$  é definida na forma

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu \quad (1.2)$$

com  $\partial_\mu$  simbolizando a derivada espaço-temporal,  $g_{QCD}$  a constante de acoplamento da interação forte e

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2}\lambda^a A_\mu^a(x) \quad (1.3)$$

onde  $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) representa os campos dos glúons e  $\lambda^a$  denota as matrizes de Gell-Mann (foi utilizado a convenção de Einstein de soma para índices repetidos). O tensor de campo gluônico é dado por

$$G_{\mu\nu}^a(x) = F_{\mu\nu}^a(x) - gf^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x), \quad (1.4)$$

onde  $f_{abc}$  é a constante de estrutura do grupo  $SU(3)$  e

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x). \quad (1.5)$$

Para entender o espectro de massa hadrônico a partir da QCD bem como as propriedades de interação entre os hádrons, é necessário saber algo sobre a força de longo alcance responsável pelo confinamento dos quarks nos mésons e bárions. No entanto, não existe nenhuma descrição completamente satisfatória para esta região de energias da QCD. Algumas informações podem ser extraídas diretamente da formulação da QCD na rede. Neste sentido, a construção de modelos fenomenológicos é parte essencial para o entendimento das interações fortes a baixas energias.

## 1.2 Os Mésons e os seus Números Quânticos

Com a consolidação do modelo de quarks constituintes, tornou-se possível estudar a estrutura hadrônica. Por exemplo, o estudo da chamada *espectroscopia mesônica* passa, em primeiro lugar, pela identificação dos números quânticos relevantes dos mésons, considerados como partículas compostas por quarks constituintes. Desta forma faremos uma breve revisão dos números quânticos importantes na caracterização destes estados.

Os quarks possuem spin  $S$  igual a  $1/2$  e número bariônico  $B$  igual a  $1/3$ ; os *antiquarks*, por sua vez, têm spin  $1/2$ ; porém o seu número bariônico é  $-1/3$ . Desta forma os quarks e *antiquarks* podem se combinar para formar os chamados *mésons convencionais* (com  $B = 0$ ) e spin total 1 ou 0. O momento angular total  $\vec{J}$  é obtido, obedecendo às regras usuais de soma de momento angular da Mecânica Quântica,  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Os mésons como objetos do tipo *quark-antiquark*, isto é,  $q\bar{q}$  podem ter as seguintes propriedades

1. **Paridade-P:**  $P = (-1)^{L+1}$ .

A paridade é um operador de reflexão de coordenadas espaciais em torno da origem e, se a função de onda for um auto-estado do operador paridade, então

$$P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \eta_P \psi(\vec{r}), \quad (1.6)$$

onde  $\eta_P$  representa o auto-valor correspondente. Ao aplicar-se duas vezes o operador  $P$  a  $\Phi$ , o estado original é recuperado; conseqüentemente os autovalores  $\eta_P$  podem assumir apenas os valores  $\pm 1$ . Frequentemente podemos separar a função de onda  $\psi$  em uma parte radial,  $R(r)$ , e em outra angular,  $Y_{LM}(\theta, \phi)$ ,

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y_{LM}(\theta, \phi). \quad (1.7)$$

Neste caso, a operação de paridade  $P_{orb}$  sobre a função de onda espacial não modifica a parte radial, mas transforma a parte angular na forma  $Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi)$ , em que

$$P_{orb}Y_{LM}(\theta, \phi) = Y_{LM}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^LY_{LM}(\theta, \phi). \quad (1.8)$$

Ademais, quarks e *antiquarks* têm paridades intrínsecas opostas, assim  $P_q \cdot P_{\bar{q}} = -1$  o que leva a uma paridade total  $P = P_{orb}P_qP_{\bar{q}}$ :

$$P|q\bar{q}\rangle = (-1)^L(-1)|q\bar{q}\rangle = (-1)^{L+1}|q\bar{q}\rangle. \quad (1.9)$$

## 2. Paridade-C : $C = (-1)^{L+S}$ .

A conjugação de carga  $C$  muitas vezes é chamada de paridade- $C$  e representa a operação matemática que simula a transformação de uma partícula na sua respectiva antipartícula. Esta operação reverte propriedades intrínsecas da partícula como a sua carga elétrica e seu momento magnético. Uma partícula neutra representa um auto-estado do operador  $C$ ; por exemplo, pode-se considerar o pión  $\pi^0$

$$C|\pi^0\rangle = \eta_C|\pi^0\rangle \quad (1.10)$$

onde  $\eta_C = \pm 1$ . Se um méson for constituído, por exemplo, por quarks do tipo  $u$ , então  $|q\bar{q}\rangle = u\bar{u}$  e a função de onda total, contendo a parte de spin  $\chi(\vec{S})$ , caso possa ser expressa em uma forma separável, torna-se

$$\psi(\vec{r}, \vec{S}) = R(r)Y_{LM}(\theta, \phi)\chi(\vec{S}), \quad (1.11)$$

onde  $\vec{r}$  é a coordenada relativa de separação entre os quarks.

Desta forma o efeito do operador  $C$  sobre o par  $u\bar{u}$  será a troca  $u \longleftrightarrow \bar{u}$  o que efetivamente corresponde a realizar a troca  $\vec{r} \longleftrightarrow -\vec{r}$ , ou seja, uma operação de paridade sobre o sistema. Assim a conjugação de carga introduz um fator igual ao obtido para a paridade, isto é  $(-1)^{L+1}$ . Esta operação também inverte o spin na função de onda de spin, o que resulta em um fator  $(-1)$  para o caso  $\vec{S} = 0$  e em um fator  $(+1)$  se  $\vec{S} = 1$ , ou seja, um fator geral  $(-1)^{S+1}$ . Este resultado, quando combinado com o fator correspondente que vem da contribuição do momento angular orbital  $\vec{L}$  fornece

$$C|q\bar{q}\rangle = (-1)^{L+S}|q\bar{q}\rangle. \quad (1.12)$$

## 3. Paridade-G: $G = (-1)^{L+S+I}$ .

Ficou claro da discussão anterior que partículas carregadas não podem ser auto-estados de  $C$ , por exemplo,

$$C|\pi^+\rangle = \eta|\pi^-\rangle. \quad (1.13)$$

Entretanto, se aplicarmos o operador  $C$  em um estado de partícula carregada seguido de uma rotação no espaço de isospin, sendo o operador rotado representado por  $R = \exp(i\pi I_2)$ , tal que

$$|I, I_z\rangle \longrightarrow |I, -I_z\rangle, \quad (1.14)$$

então partículas carregadas podem ser auto-estados deste novo operador. Vamos definir o operador de paridade- $G$  como

$$G = C R. \quad (1.15)$$

Desta definição não é difícil ver que, para um sistema do tipo  $q\bar{q}$ , temos que  $G = C \cdot (-1)^I$ , ou seja,

$$G = (-1)^{L+S+I}. \quad (1.16)$$

Pode-se resumir as relações deduzidas recentemente como

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}; \quad P = (-1)^{L+1}; \quad (1.17)$$

$$C = (-1)^{L+S}; \quad G = (-1)^{L+S+I}. \quad (1.18)$$

Estes operadores geram então números quânticos que são importantes, pois representam quantidades conservadas em processos que envolvem a interação forte. Utilizando estas relações podemos construir os valores admissíveis da grandeza  $J^{PC}$ , pelo modelo de quarks, para os mésons:

$$0^{-+}, 0^{++}, 1^{--}, 1^{+-}, 1^{-+}, 2^{--}, 2^{+-}, 2^{++}, 3^{--}, 3^{+-}, 3^{++}, \dots \quad (1.19)$$

Olhando com cuidado para a seqüência de números contidos na expressão (1.19) nota-se que há uma seqüência de valores de  $J^{PC}$  que não são admissíveis em um sistema do tipo  $q\bar{q}$

$$0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+}, \dots \quad (1.20)$$

Os números quânticos apresentados em (1.20) são conhecidos como números quânticos *explicitamente exóticos*. Caso fosse encontrado um estado destes na natureza, com estes números quânticos, seria possível afirmar que foi encontrado algo diferente do que um sistema do tipo  $q\bar{q}$ . De um modo geral pode-se escrever um méson como

$$|\text{méson}\rangle = |q\bar{q}\rangle + |\text{não-}q\bar{q}\rangle. \quad (1.21)$$

Numa investigação para encontrar novos estados da matéria, estados que não são puros como (1.21) apresentam a dificuldade adicional de avaliar-se o grau de mistura do estados  $|q\bar{q}\rangle$  e  $|\text{não-}q\bar{q}\rangle$ . Os mésons conhecidos atualmente têm  $|\text{não-}q\bar{q}\rangle = 0$ , porém há muitos candidatos, previstos por diversos modelos, que seguem (1.21).

### 1.3 Modelo de Decaimento ${}^3P_0$

Há muito tempo os modelos de *criação de pares* para decaimentos hadrônicos fortes têm sido formulados e estudados por muitos autores [20]. O modelo  ${}^3P_0$  é um modelo de decaimento que considera apenas decaimentos do tipo OZI-permitidos para as interações fortes.

O modelo  ${}^3P_0$  descreve a criação de um par quark-antiquark adicional na presença do méson do estado inicial. O modelo foi introduzido há mais de trinta anos por Micu [21] e aplicado em decaimento de mésons, na década de setenta por LeYaouanc *et al* [22]. Esta descrição é uma consequência natural de hádrons descritos pelo modelo de quarks constituinte. Neste modelo o par quark-antiquark criado tem os números quânticos do vácuo e em relação aos números quânticos aditivos, deve ser neutro. Em outras palavras, o par deve ser um singlete de cor e sabor, deve ter paridade positiva, enquanto o momento linear e angular total iguais a zero. Um par férmion-antiférmion que possui estas propriedades deve ter  $J^{PC} = 0^{++}$ , isto é,  $L = 1$  (onda-P) e  $S = 1$ .

As mais extensas aplicações para o decaimento de mésons foram obtidas por Kokoski e Isgur [23]. Estes autores além de calcularem quase 400 amplitudes diferentes (das quais umas 60 já foram medidas) eles também colocaram o modelo numa base teórica mais firme, mostrando que ele podia ser deduzido a partir de uma formulação de tubo de fluxo (*flux-tube*) baseada na QCD na rede.

A formulação do  ${}^3P_0$  que adotaremos nesta dissertação foi deduzida por E. S. Ackleh, T. Barnes e E. S. Swanson [24]. Os cálculos e aplicações que mostraremos no restante deste capítulo resultam deste estudo. Esta formulação do  ${}^3P_0$  considera os decaimentos como sendo originados pelo limite não-relativístico do Hamiltoniano abaixo

$$H_I = g \int d\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}). \quad (1.22)$$

Os decaimentos estudados são do tipo

$$(q\bar{q})_A \rightarrow (q\bar{q})_B + (q\bar{q})_C, \quad (1.23)$$

isto é, um méson que decai em dois. Note que este tipo de decaimento exige a criação de um par quark-antiquark, que do Hamiltoniano (1.22) será obtido através do termo  $b^\dagger d^\dagger$ . O acoplamento  $g$  é substituído pelo parâmetro  $\gamma$  relacionado com a massa do quark constituinte  $m_q$  por

$$\gamma = \frac{g}{2m_q}. \quad (1.24)$$

Neste modelo não se faz referência a cor, o qual se incluído simplesmente mudará a definição da força de interação  $\gamma$ , pois o fator de cor é um fator global. Visto que  $\gamma$  é ajustado para

os dados experimentais, a inclusão da cor não mudará as predições para os decaimentos de mésons. Para determinar uma taxa de decaimento, é necessário avaliar o elemento de matriz do Hamiltoniano de decaimento, o qual é da forma

$$\langle BC|H_I|A\rangle = \delta(\vec{P}_A - \vec{P}_B - \vec{P}_C) h_{fi}. \quad (1.25)$$

A definição geral de uma taxa de decaimento é

$$\Gamma = 2\pi P(\text{EF}) \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (1.26)$$

onde EF é o elemento do espaço de fase. Em muitos modelos de decaimento os cálculos são não-relativísticos, já em outras situações o momento de decaimento é muito grande e o EF deve ser relativístico. Assim temos

$$(\text{EF}) = \frac{M_B M_C}{M_A} \longrightarrow \text{não - relativístico} \quad (1.27)$$

$$(\text{EF}) = \frac{E_B E_C}{M_A} \longrightarrow \text{relativístico.} \quad (1.28)$$

Esta amplitude de decaimento  $h_{fi}$  pode ser combinada com o espaço de fase relativístico para dar a taxa de decaimento, a qual é

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \int d\Omega |h_{fi}|^2 \quad (1.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{p}_A &= 0 \\ P &= |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Um resultado equivalente é obtido por Geiger e Swanson [20]. O momento  $P$  de decaimento pode ser avaliado de forma simples. Ele é o momento do sistema dos mésons B e C vistos do referencial (em repouso) do méson A. Assim por conservação da energia relativística temos

$$\sqrt{p_A^2 + m_A^2} = \sqrt{p_B^2 + m_B^2} + \sqrt{p_C^2 + m_C^2}. \quad (1.31)$$

Usando (1.30) e elevando (1.31) ao quadrado, obtemos

$$m_A^2 = 2P^2 + m_B^2 + m_C^2 + 2\sqrt{(P^2 + m_B^2)(P^2 + m_C^2)}. \quad (1.32)$$

Após algumas manipulações algébricas simples pode-se isolar  $P$

$$P = \frac{\sqrt{[m_A^2 - (m_B + m_C)^2][m_A^2 - (m_B - m_C)^2]}}{2m_A}. \quad (1.33)$$

A parte espacial das funções de onda dos mésons A, B e C a ser usada no cálculo do elemento de matriz (1.25) é do tipo oscilador harmônico mostrada no apêndice B.

Usualmente os resultados, para decaimentos, são expressos em termos da amplitude  $\mathcal{M}_{L_{BC}S_{BC}}$  e desta forma a taxa  $\Gamma_{A \rightarrow BC}$  fica reescrita

$$\Gamma_{A \rightarrow BC} = 2\pi P \frac{E_B E_C}{M_A} \sum_{LS} |\mathcal{M}_{LS}|^2. \quad (1.34)$$

Para a situação  $S_{BC} = 0$  este  $\mathcal{M}_{LS}$  é o coeficiente do harmônico esférico  $Y_{LM}$  em  $h_{fi}$ , e em geral é a amplitude  $\langle JM(L_{BC}S_{BC}) | BC \rangle$  no estado final de  $BC$ . Visto que o modelo  ${}^3P_0$  envolve uma força de interação fenomenológica, a comparação com o experimento requer um ajuste para taxas distintas (para determinar  $\gamma$  e o parâmetro  $\beta$  da função de onda).

Uma amplitude de decaimento  $\mathcal{M}_{LS}$  no modelo  ${}^3P_0$  com funções de onda do oscilador harmônico simples (OHS) é proporcional a um polinômio  $\mathcal{P}_{LS}(x)$  com  $x = P/\beta$  vezes uma exponencial

$$\mathcal{M}_{LS} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \mathcal{P}_{LS}(x) e^{-x^2/2}. \quad (1.35)$$

Para os casos considerados aqui estes polinômios são dados pelas expressões abaixo (entre parênteses um exemplo de decaimento para o respectivo canal)

$$\mathcal{P}_{10}^{({}^3S_1 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0)} = -\frac{2^5}{3^3} x \quad (\rho \rightarrow \pi + \pi) \quad (1.36)$$

$$\mathcal{P}_{20}^{({}^3P_2 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0)} = +\frac{2^6}{3^4 5^{1/2}} x^2 \quad (f_2 \rightarrow \pi + \pi) \quad (1.37)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{({}^3P_2 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^{11/2}}{3^7 2^5 5^{1/2}} x^2 \quad (a_2 \rightarrow \rho + \pi) \quad (1.38)$$

$$\mathcal{P}_{01}^{({}^3P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = +\frac{2^5}{3^5 2} \left( 1 - \frac{2}{9} x^2 \right) \quad (a_1 \rightarrow \rho + \pi) \quad (1.39)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{({}^3P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^{11/2}}{3^9 2} x^2 \quad (a_1 \rightarrow \rho + \pi) \quad (1.40)$$

$$\mathcal{P}_{00}^{({}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0)} = +\frac{2^9 2}{3^2} \left( 1 - \frac{2}{9} x^2 \right) \quad (f_0 \rightarrow \pi + \pi) \quad (1.41)$$

$$\mathcal{P}_{01}^{({}^1P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^9 2}{3^5 2} \left( 1 - \frac{2}{9} x^2 \right) \quad (b_1 \rightarrow \omega + \pi) \quad (1.42)$$

$$\mathcal{P}_{21}^{({}^1P_1 \rightarrow {}^3S_1 + {}^1S_0)} = -\frac{2^6}{3^9 2} x^2 \quad (b_1 \rightarrow \omega + \pi). \quad (1.43)$$

O parâmetro  $\beta$  situado numa faixa 0.35 - 0.4 GeV resulta numa descrição precisa das taxas de decaimento. Na tabela (1.2) são mostradas as taxas de decaimento, resultado do ajuste de um conjunto representativo de sete mésons  $q\bar{q}$  de onda-S e onda-P bem estabelecidos. Neste ajuste  $\beta$  e  $\gamma$  são considerados parâmetros livres [24]. As massas têm os

seguintes valores  $M_\pi = 0.138$  GeV,  $M_K = 0.496$  GeV,  $M_\rho = 0.77$  GeV,  $M_\omega = 0.782$  GeV,  $M_{h_1} = 1.17$  GeV,  $M_{a_1} = 1.23$  GeV,  $M_{b_1} = 1.231$  GeV,  $M_{f_0} = 1.3$  GeV,  $M_{a_2} = 1.318$  GeV e  $M_{K_0^*} = 1.429$  GeV.

T. Barnes *et al* incluíram no cálculo o processo  $K_0^*(1430) \rightarrow K\pi$ , pois a taxa  ${}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 + {}^1S_0$  se mostrou muito sensível aos valores de  $\beta$  e também pelo fato de  $K_0^*(1430)$  ser a única ressonância  ${}^3P_0$  bem estabelecida. O resultado do ajuste foi completado minimizando

$$\sum_{i=1}^7 \left( \frac{\Gamma_{A \rightarrow BC}^{teo.}}{\Gamma_{A \rightarrow BC}^{exp.} - 1} \right)^2, \quad (1.44)$$

obtendo os seguintes parâmetros

$$\beta = 0.397 \text{ GeV}, \quad \gamma = 0.506. \quad (1.45)$$

A discrepância mais significativa na tabela (1.2) está no processo  $\rho \rightarrow \pi\pi$  e também associado ao  $K_0^*(1430)$ . Na figura (1.1) vemos os gráficos das taxas  $\Gamma_{A \rightarrow BC}$  como função do parâmetro  $\beta$ .

Desta forma pode-se calcular, por exemplo, o decaimento do méson  $\rho$ , concentrando-se num canal específico:  $\rho^+(+\hat{z}) \rightarrow \pi^+\pi^0$ , resultando em

$$h_{fi} \Big|_{\rho^+(+\hat{z}) \rightarrow \pi^+\pi^0} = -\frac{2^{7/2}}{3^3} \pi^{-1/4} \frac{g}{m_q} \frac{P}{\beta^{3/2}} e^{-P^2/12\beta^2} Y_{11}(\Omega_B) \quad (1.46)$$

Substituindo (1.46) em (1.29) obtemos a expressão para  $\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi}$

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = \sqrt{\pi} \left( \frac{2^{10}}{3^6} \right) \gamma^2 \frac{M_\rho}{4} x^3 e^{-x^2/6}. \quad (1.47)$$

É possível se realizar um teste muito mais refinado em decaimentos hadrônicos, quando há mais de uma onda parcial. Nestes casos pode-se medir as fases relativas, assim como as magnitudes das amplitudes de decaimento nestes processos. Para se ter um decaimento de múltiplas amplitudes é necessário ter pelo menos um méson no estado final com spin diferente de zero. No exemplo mostrado acima em (1.46) o estado final contém apenas píons (que tem spin zero), logo a amplitude  $h_{fi}$  contém apenas uma onda parcial. Para os decaimentos que iremos considerar, os estados finais relevantes irão conter  $\rho\pi$  e  $\omega\pi$ . Estes estados têm  $J^P = 1^+$ , portanto eles vão possuir mais de uma onda parcial na amplitude e consequentemente decair em estados que contém uma sobreposição de ondas-S e ondas-D acrescentados de mésons pseudoscalares. Aumentando o valor de  $L_{q\bar{q}}$ , ondas mais altas serão encontradas na amplitude, por exemplo  $\pi_2 \rightarrow \rho\pi$  ondas-P e F;  $\pi_2 \rightarrow f_2\pi$  ondas-S, D e G. Na relação de mésons leves da tabela (0.1) os canais

$$\begin{aligned} b_1 &\rightarrow \omega\pi \\ a_1 &\rightarrow \rho\pi \\ h_1 &\rightarrow \rho\pi, \end{aligned} \quad (1.48)$$

apresentam a característica de múltiplas amplitudes no canal final. O cálculo da razão D/S para estes mésons fornece o teste preciso para o modelo. Estas razões são conhecidas experimentalmente para alguns mésons. Em particular o canal  $b_1 \rightarrow \omega\pi$  é atraente, pois as larguras de  $b_1$  e do  $\omega$  são estreitas.

Para fins de cálculo pode-se tomar um  $b_1$  com uma polarização e canal de carga inicial definidas e calcular o respectivo elemento de matriz  $h_{fi}$ . Assim considera-se  $b_1^+(J_z = +1)$  e escolhe-se um estado final de polarização para o  $\omega$  de  $\omega(S_z = +1)$ . Então

$$h_{fi} \Big|_{b_1^+(+\hat{z}) \rightarrow \omega(+\hat{z})\pi^+} = -\frac{\gamma}{\pi^{1/4}\beta^{1/2}} \frac{2^4}{3^{5/2}} \left\{ \left(1 - \frac{2}{9}x^2\right) Y_{00}(\Omega) + \frac{2}{3^{25/2}} x^2 Y_{20}(\Omega) \right\} e^{-x^2/12}. \quad (1.49)$$

Substituindo (1.49) em (1.29) obtemos a expressão para  $\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi}$

$$\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = \sqrt{\pi} \left(\frac{2^9}{3^5}\right) \frac{E_\omega E_\pi}{M_{b_1}} \gamma^2 x \left[ 1 - \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{3}\right)^4 \right] e^{-x^2/6} \quad (1.50)$$

Este elemento de matriz determina os valores relativos das amplitudes S e D no estado final  $|\omega\pi\rangle$ . Como o valor de momento angular total é  $J^P = 1^+$ , o estado  $|\omega\pi\rangle$  deve ser uma mistura de onda-S e onda-D da seguinte forma

$$|\omega\pi\rangle = a_S |{}^3S_1\rangle + a_D |{}^3D_1\rangle. \quad (1.51)$$

A projeção deste estado genérico (1.51) sobre o estado  $|\omega(+\hat{z})_\Omega \pi_{-\Omega}\rangle$  consiste num  $\omega$  polarizado na direção  $\hat{z}$  com  $S_z = +1$  e de um pión recuando com  $L = 2$ , mas com  $J = 1$ . Segue da decomposição com Clebsch-Gordons, para acoplamentos de momento angular, que a onda-D da amplitude deva ter um fator  $\sqrt{1/10}$

$L_z$	$S_\omega(\hat{z})$	$J=1 ; J_z = +1$
+2	-1	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
+1	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$
0	+1	$\sqrt{\frac{1}{10}}$

**Tab. 1.1:** Possíveis valores para os coeficientes de Clebsch-Gordons

Assim,

$$\langle \omega(+\hat{z})_\Omega \pi_{-\Omega} | \omega\pi \rangle = a_S Y_{00}(\Omega) + a_D \sqrt{\frac{1}{10}} Y_{20}(\Omega). \quad (1.52)$$

Portanto, a razão  $a_D/a_S$  sai diretamente do elemento de matriz  $h_{fi}$  (descontado do fator  $\sqrt{1/10}$ ) em (1.49)

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = +\frac{2^{3/2}}{3^2} \frac{x^2}{\left(1 - \frac{2}{9}x^2\right)}. \quad (1.53)$$

Procedendo de forma similar obtém-se para  $a_1 \rightarrow \rho\pi$

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = -\frac{2^{1/2}}{3^2} \frac{x^2}{\left(1 - \frac{2}{9}x^2\right)}. \quad (1.54)$$

A *razão* das razões D/S nestes decaimentos é especialmente interessante, pois no modelo  ${}^3P_0$ , a dependência na função de onda espacial se cancela. Encontramos

$$\frac{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi}}{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi}} = -\frac{1}{2}. \quad (1.55)$$

Experimentalmente estas razões são

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = +0.260 \pm 0.035 \quad (1.56)$$

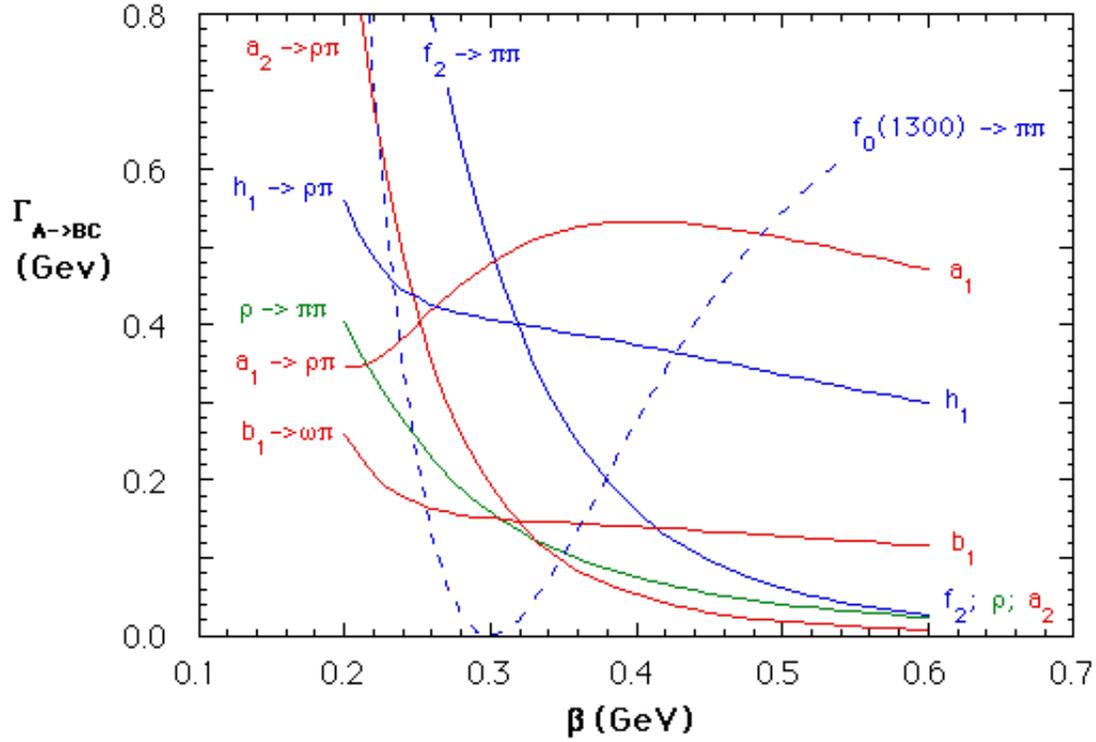
e dos dados de ARGUS [25]

$$\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = -0.09 \pm 0.02, \quad (1.57)$$

portanto a razão

$$\frac{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{a_1 \rightarrow \rho\pi}}{\frac{a_D}{a_S} \Big|_{b_1 \rightarrow \omega\pi}} = -0.35 \pm 0.09. \quad (1.58)$$

Teoria e experimento para estas razões D/S são comparadas na figura Fig. 1.2. O melhor ajuste fornece  $\beta = 0.448$  GeV, para o qual  $(D/S)_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = +0.219$  e  $(D/S)_{a_1 \rightarrow \rho\pi} = -0.115$ .



**Fig. 1.1:** Decaimentos de alguns mésons leves no modelo  ${}^3P_0$  para  $\gamma = 0.5$

Decaimento	Exp.[26]	Teoria ( ${}^3P_0$ )	D/S Exp. [25, 26]	D/S (Teoria ${}^3P_0$ )
$\rho \rightarrow \pi\pi$	$150.2 \pm 2.4$ MeV	79 MeV		
$f_2 \rightarrow \pi\pi$	$156.9 +3.9 -1.2$ MeV	170 MeV		
$a_2 \rightarrow \rho\pi$	$74.9 \pm 3.5$ MeV	54 MeV		
$a_1 \rightarrow \rho\pi$	250 a 600 MeV	545 MeV	-0.09(2)	-0.154
$b_1 \rightarrow \omega\pi$	$142 \pm 9$ MeV	143 MeV	+0.260(35)	+0.292
$h_1 \rightarrow \rho\pi$	$360 \pm 40$ MeV	383 MeV	-	-0.111
$K_0^*(1430) \rightarrow K\pi$	$294 \pm 23$ MeV	166 MeV		
$f_0 \rightarrow \pi\pi$	200 a 500 MeV	271 MeV		

**Tab. 1.2:** Ajuste do modelo  ${}^3P_0$  para as taxas de decaimento dos mésons leves ( $\gamma = 0.506$  e  $\beta = 0.397$  GeV )

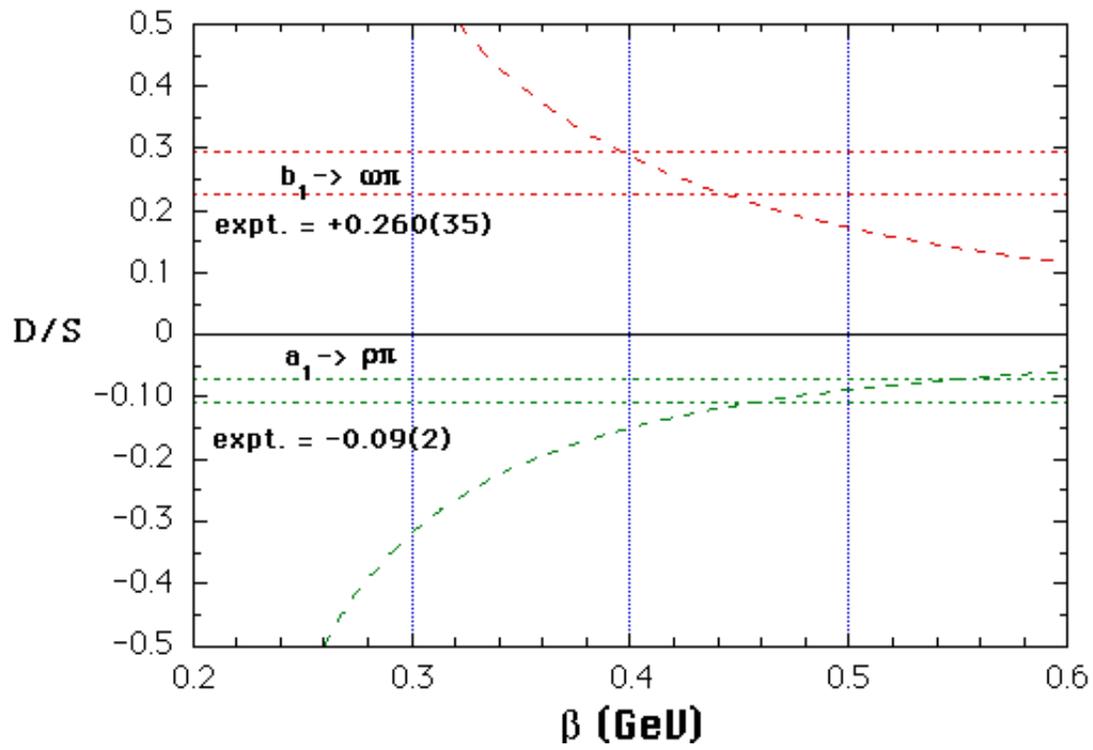


Fig. 1.2: Razões  $D/S$  para os decaimentos  $b_1 \rightarrow \omega\pi$  e  $a_1 \rightarrow \rho\pi$

## Capítulo 2

# O Formalismo de Fock-Tani para Mésons: uma revisão

Neste capítulo será apresentada uma revisão dos aspectos gerais do formalismo de Fock-Tani e a sua aplicação às interações entre mésons. Inicialmente, o formalismo de Fock-Tani foi desenvolvido por M. Girardeau e colaboradores [7]-[17] nas décadas de '70 e '80 para estudar interações entre átomos para energias nas quais os seus graus de liberdade internos, de elétrons e prótons, não podiam ser desprezados.

Este formalismo foi estendido para a física dos hádrons, no estudo de bárions no trabalho de doutorado de Dimiter Hadjimichef (IFT/1995) [27], no estudo de mésons no trabalho de doutorado de Sérgio Szpigel (USP/1995) [28] e em publicações posteriores [29]-[31]. Outras aplicações foram para sistemas mistos com interações entre bósons e férmions como, por exemplo, no sistema káon-núcleon [32] e também para interações entre glueballs (trabalho de mestrado de Mário L. L. da Silva, UFRGS - 2004) [33, 34]. Nesta dissertação iremos seguir a notação utilizada no trabalho dos mésons realizado por Sérgio Szpigel. Os aspectos a serem discutidos a seguir neste capítulo serão fundamentais mais adiante nos capítulos seguintes, pois o desenvolvimento da transformação de Fock-Tani para decaimentos de mésons segue como uma extensão deste trabalho de doutorado.

## 2.1 A Representação de Fock-Tani.

No formalismo de Fock-Tani (FT) partimos da representação do sistema no espaço de Fock, usando operadores de criação e aniquilação para as partículas constituintes elementares.

Consideremos um sistema contendo quarks e antiquarks (constituintes elementares) que podem formar estados ligados (mésons compostos). Nesta representação, os estados de um méson podem ser construídos a partir de operadores de criação de mésons aplicados ao vácuo, operadores estes que podem ser definidos em termos de combinações lineares de

produtos de operadores de criação de quarks e antiquarks.

Consideremos o estado de um méson composto por um quark e um antiquark. O vetor de estado  $|\alpha\rangle$  no espaço de Fock,  $\mathcal{F}$ , que descreve esse méson, de acordo com o apresentado no apêndice B, é dado por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (2.1)$$

onde  $M_\alpha^\dagger$  é o operador de criação de um méson composto no estado  $\alpha$  e  $|0\rangle$  é o estado de vácuo, definido por:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0; \quad (2.2)$$

nesta representação  $q_\mu$  representa o operador aniquilação de um quark contendo números quânticos representados por  $\mu$  e  $\bar{q}_\nu$  denota o operador aniquilação de um antiquark com números quânticos representados por  $\nu$ ; o operador  $M_\alpha^\dagger$  é definido como:

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (2.3)$$

onde  $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$  é a função de onda do estado ligado do méson sendo  $q_\mu^\dagger$  e  $\bar{q}_\nu^\dagger$  os correspondentes conjugados hermitianos de  $q_\mu$  e  $\bar{q}_\nu$ . O índice  $\alpha$  representa, de uma maneira compacta, os números quânticos do méson:  $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$ . Os índices  $\mu$  e  $\nu$  identificam os números quânticos de quarks e antiquarks:  $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$ . É conveniente ademais trabalhar com funções de onda orto-normalizadas:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

Os operadores de quark e antiquark satisfazem relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0, \\ \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Utilizando estas relações de anticomutação, juntamente com a condição de orto-normalização apresentada na equação (2.4), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos (ver Apêndice C):

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0 \quad , \quad [M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu. \quad (2.7)$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0, \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger, \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O termo  $\Delta_{\alpha\beta}$  apresentado na Eq. (2.7) e que aparece na relação não-canônica (2.6) é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons. A presença deste termo é indicativo do alto nível de complexidade que surge no tratamento de problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos, tais como a utilização de funções de Green, do teorema de Wick, entre outros, aplicam-se a operadores que satisfazem relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato de que os comutadores  $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$  e  $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$  não se anulam expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson,  $M_\alpha$  e  $M_\alpha^\dagger$ , não são variáveis dinâmicas convenientes.

A idéia do formalismo de Fock-Tani é fazer uma mudança de representação, de forma que os operadores das partículas compostas sejam redescritos por operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Naturalmente, as complicações da natureza composta dos mésons aparecerão em algum outro ponto do formalismo. A mudança de representação é realizada por meio de um operador unitário,  $U$ , de modo que os estados de um méson composto sejam redescritos por estados de um méson ideal, descritos por operadores de destruição e criação de partículas “ideais”,  $m_\alpha$  e  $m_\alpha^\dagger$ . Em outras palavras, queremos efetuar a seguinte substituição

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \hline M_\alpha^\dagger|0\rangle & \implies & m_\alpha^\dagger|0\rangle \\ \hline M_\alpha & & m_\alpha \\ \hline \textit{físico} & & \textit{ideal} \\ \hline \hline \end{array} \tag{2.9}$$

Dessa forma, se  $|\alpha\rangle$  representa um estado de um méson composto, ele será redescrito por um méson elementar “ideal” sob a transformação

$$|\alpha\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger|0\rangle . \tag{2.10}$$

Note-se que na nova representação, onde os estados de mésons elementares ideais são representados por “bras” e “kets” circulares ao invés de angulares. O estado  $|0\rangle$  representa o vácuo para os graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons “ideais” na nova representação e operadores de méson “ideal”,  $m_\alpha^\dagger$  e  $m_\alpha$ , satisfazem, por definição, relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [m_\alpha, m_\beta] &= 0 , \\ [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} , \end{aligned} \tag{2.11}$$

e são cinematicamente independentes dos operadores de quarks e antiquarks

$$[q_\mu, m_\alpha] = [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha^\dagger] = 0. \quad (2.12)$$

### 2.1.1 Espaço de Vetores de Estado Ideais

Seja  $|\Omega\rangle$  um vetor de estado arbitrário em segunda quantização e  $O$  um operador arbitrário, ambos expressos em termos dos operadores de quarks e antiquarks,  $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$ , da representação de Fock original e  $|\Omega\rangle$  e  $O_{\text{FT}}$  as quantidades correspondentes na nova representação:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\longrightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \\ O &\longrightarrow O_{\text{FT}} = U^{-1}OU. \end{aligned} \quad (2.13)$$

O operador  $U$  deve ser unitário, pois assim as normas dos produtos escalares entre os vetores de estado bem como os elementos de matriz (valores esperados) dos operadores serão preservados sob a mudança de representação:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\Omega\rangle &= (\Omega|\Omega), \\ \langle\Omega|O|\Omega\rangle &= (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

O operador unitário  $U$  é construído expandindo-se o espaço de Fock original de modo que os estados de méson “ideal” sejam incluídos. Consideremos o espaço de Fock físico, indicado por  $\mathcal{F}$ . Esse é o espaço de estados gerado por todas as combinações lineares de operadores de quarks e antiquarks, atuando no vácuo físico na forma

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0\rangle, \quad (2.15)$$

onde  $l$  e  $m$  são parâmetros arbitrários. Definimos um espaço de Hilbert  $\mathcal{M}$ , o espaço de mésons ideais, independente do espaço de Fock físico  $\mathcal{F}$ , como o espaço gerado por todas as combinações lineares de estados constituídos de operadores de “méson ideal”,

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (2.16)$$

onde  $|0\rangle_{\mathcal{M}}$  é o vácuo de  $\mathcal{M}$ , definido por

$$m_\alpha |0\rangle_{\mathcal{M}} = 0. \quad (2.17)$$

Agora, define-se um novo espaço de Hilbert, chamado “espaço de estados ideais”, como o produto direto dos espaços de Fock físico  $\mathcal{F}$  e de mésons ideais  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}, \quad (2.18)$$

onde o símbolo  $\otimes$  representa produto interno.

As relações de comutação das Eqs. (2.6)-(2.8), inicialmente definidas em  $\mathcal{F}$ , como também as da Eq. (2.11), inicialmente definidas em  $\mathcal{M}$ , são válidas também em  $\mathcal{I}$ . Por definição, os operadores de quark e de méson ideal são cinematicamente independentes e, portanto, também satisfazem a Eq. (2.12) em  $\mathcal{I}$ .

O vácuo de  $\mathcal{I}$  é dado pelo produto direto dos vácuos de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{F}$ ,

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle_{\mathcal{M}} . \quad (2.19)$$

Dessa forma,  $|0\rangle$  é o vácuo dos graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons ideais:

$$q_\mu|0\rangle = \bar{q}_\nu|0\rangle = m_\alpha|0\rangle = 0 . \quad (2.20)$$

Note-se porém que os operadores de quarks e antiquarks atuam no vácuo físico  $|0\rangle$  e os operadores de mésons ideais atuam no vácuo ideal de mésons  $|0\rangle_{\mathcal{M}}$  na Eq. (2.19).

Estabelecemos, assim, uma correspondência um-para-um entre os estados do espaço de Fock físico  $\mathcal{F}$  e os estados de um sub-espaço de  $\mathcal{I}$ . Em  $\mathcal{I}$ , existe um sub-espaço  $\mathcal{I}_0$  que é isomórfico ao espaço de Fock original  $\mathcal{F}$  e consiste dos estados  $|\Omega\rangle \in \mathcal{F}$  sem mésons ideais,

$$m_\alpha|\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha , \quad \text{ou} \quad N_m|\Omega\rangle = 0 , \quad (2.21)$$

onde  $N_m$  é o operador número total de mésons ideais

$$N_m = m_\alpha^\dagger m_\alpha . \quad (2.22)$$

A Eq. (2.21) passa a ser um vínculo a ser satisfeito pelos estados permitidos em  $\mathcal{I}$ .

A equação de vínculo, ou condição subsidiária, exige que em  $\mathcal{I}_0$  os mésons ideais sejam modos redundantes, ou seja, correspondam a estados totalmente desocupados. Esta condição é necessária para evitar múltipla contagem de graus de liberdade.

O operador unitário  $U$  atua sobre estados de  $\mathcal{I}$  e não pode ser definido apenas em  $\mathcal{F}$ . Contudo,  $U$  está definido em  $\mathcal{I}_0$ , que é isomórfico a  $\mathcal{F}$ . Definimos, então, o espaço de Fock-Tani  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  como o espaço imagem de  $\mathcal{I}_0$ :

$$\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1}\mathcal{I}_0 . \quad (2.23)$$

Assim, o espaço  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  é o sub-espaço de  $\mathcal{I}$  cujos vetores de estado, representados por  $|\Omega\rangle$  na nova representação estão relacionados aos vetores de estado de  $\mathcal{I}_0$  por

$$|\Omega\rangle = U|\Omega\rangle \Rightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle . \quad (2.24)$$

Qualquer cálculo efetuado no espaço físico  $\mathcal{F}$  é equivalente ao cálculo no espaço de Fock-Tani. Para dois vetores de estados quaisquer,  $|\Omega\rangle$  e  $|\Omega'\rangle$ , e para qualquer observável  $O \in \mathcal{F}$ , temos

$$\langle\Omega|O|\Omega'\rangle = \langle\Omega|U^{-1}OU|\Omega'\rangle = \langle\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega'\rangle . \quad (2.25)$$

É claro que em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ , a condição que garante que não há dupla contagem,

$$U^{-1}m_\alpha U|\Omega\rangle = 0, \quad (2.26)$$

deve sempre ser satisfeita.

A vantagem de trabalhar em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  é que neste espaço todos os operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de comutação ou anti-comutação canônicas. No entanto, a natureza composta dos mésons será transferida para outro lugar. Os operadores transformados,

$$O_{\text{FT}} = U^{-1}OU, \quad (2.27)$$

dão origem a séries infinitas que fisicamente representam, de algum modo, uma expansão na densidade do sistema [30].

O método apresentado será eficiente para cálculos práticos se forem necessários poucos termos da série para descrever as interações entre os mésons e os quarks. A obtenção de forças efetivas de muitos corpos entre os mésons requer uma expansão até altas ordens na função de onda do méson. No entanto, interações efetivas entre dois mésons podem ser obtidas em ordens relativamente baixas.

Outra complicação potencial relaciona-se com a condição subsidiária anteriormente apresentada em (2.21). Em problemas envolvendo muitos mésons deve-se tomar cuidado para não violar esse vínculo. Para um estado contendo vários mésons compostos,  $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = M_{\alpha_1}^\dagger \cdots M_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$ , a transformação através do operador  $U$  não resulta, em geral, em um estado produto de mésons ideais, pois  $U^{-1}M_\alpha^\dagger U$  difere de  $m_\alpha^\dagger$  por uma série infinita contendo operadores de quarks. No entanto, é possível mostrar que um estado em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  da forma  $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$  satisfaz a condição subsidiária Eq. (2.26) e, portanto, pode representar um estado físico. A imagem deste estado em  $\mathcal{I}_0$  é um estado complexo contendo quarks, antiquarks e mésons. Para processos de espalhamento, a matriz- $S$  é definida em termos de estados assintóticos, os quais, por definição, não se superpõem, de forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \rightarrow U^{-1}|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle &= |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \\ &= m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Portanto, para estados assintóticos, a condição subsidiária é trivialmente satisfeita.

### 2.1.2 Representação de Mésons Elementares Ideais

Uma forma de implementar a substituição (2.9) consiste em definir um novo operador

$$f_0 = m_\alpha^\dagger M_\alpha \quad (2.29)$$

que atua sobre o estado mesônico composto; combinando-o com as expressões (2.1) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} f_0 | \beta \rangle &= m_\alpha^\dagger M_\alpha | \beta \rangle = m_\alpha^\dagger M_\alpha M_\beta^\dagger | 0 \rangle = m_\alpha^\dagger (M_\beta^\dagger M_\alpha + \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}) | 0 \rangle \\ &= m_\beta^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Desta expressão vemos que a atuação de  $f_0$  sobre o estado composto produz efetivamente um estado elementar “ideal” na forma buscada.

Podemos construir, a partir de (2.29), um operador  $F_0$ , anti-hermitiano,  $F_0^\dagger = -F_0$ , da seguinte forma

$$F_0 = f_0 - f_0^\dagger = m_\alpha^\dagger M_\alpha - M_\alpha^\dagger m_\alpha, \quad (2.31)$$

onde a atuação de  $F_0$  sobre os estados composto e elementar resulta, respectivamente, em

$$\begin{aligned} F_0 |\alpha \rangle &= m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ F_0 m_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -|\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Finalmente, podemos construir, a partir da definição (2.31) do operador anti-hermitiano  $F_0$ , uma transformação unitária capaz de implementar a substituição expressa na equação (2.9), isto é, podemos definir

$$U(t) = \exp(tF_0) \quad (2.33)$$

onde o operador  $F_0$ , o gerador da transformação buscada, depende de um parâmetro real,  $t$ , como será visto a seguir ( $t$  representa na realidade um ângulo de rotação no espaço de Hilbert). Utilizando (2.32), podemos obter as expressões para as potências de  $F_0$  aplicadas aos estados composto (físico) e elementar (ideal), respectivamente:

$$\begin{aligned} F_0^2 M_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -M_\alpha^\dagger | 0 \rangle & F_0^2 m_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ F_0^3 M_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= -m_\alpha^\dagger | 0 \rangle & F_0^3 m_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (2.34)$$

Desta forma, podemos realizar a transformação unitária completa sobre o estado composto

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle &= \left( 1 - tF_0 + \frac{t^2}{2!} F_0^2 - \frac{t^3}{3!} F_0^3 + \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &= \left( 1 + \frac{t^2}{2!} F_0^2 + \frac{t^4}{4!} F_0^4 + \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &\quad - \left( tF_0 + \frac{t^3}{3!} F_0^3 + \frac{t^5}{5!} F_0^5 + \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &= \left( 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle - \left( t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right) m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \\ &= (\cos t) M_\alpha^\dagger | 0 \rangle - (\sin t) m_\alpha^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se tomarmos  $t = -\pi/2$  obtemos o estado transformado

$$U^{-1} M_\alpha^\dagger |0\rangle = m_\alpha^\dagger |0\rangle \equiv |\alpha\rangle. \quad (2.36)$$

## 2.2 A Transformação de Fock-Tani dos Operadores.

### 2.2.1 Cálculo de Múltiplos Comutadores

O primeiro passo na implementação do método requer a transformação dos operadores básicos do modelo em estudo. À primeira vista, a transformação unitária poderia ser avaliada com uma expansão em múltiplos comutadores envolvendo todas as ordens de produtos dos operadores de criação e destruição de mésons físicos e ideais. A transformação de um operador de méson, por exemplo, seria da seguinte forma

$$M_\alpha^\dagger(t) = U^{-1}(t) M_\alpha^\dagger U(t) = \exp(-tF_0) M_\alpha^\dagger \exp(tF_0) = M_\alpha^\dagger + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} [M_\alpha^\dagger, F_0]_j \quad (2.37)$$

onde  $[M_\alpha^\dagger, F_0]_j$  denota o múltiplo comutador de ordem  $j$  definido de maneira recursiva por

$$\begin{aligned} [M_\alpha^\dagger, F_0]_1 &= [M_\alpha^\dagger, F_0] & ; & \quad [M_\alpha^\dagger, F_0]_2 = [[M_\alpha^\dagger, F_0]_1, F_0] \\ \dots [M_\alpha^\dagger, F_0]_{j+1} &= [[M_\alpha^\dagger, F_0]_j, F_0]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Através da relação operatorial simples

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (2.39)$$

podemos calcular  $[M_\alpha^\dagger, F_0]_j$  para diferentes valores de  $j$ . De (2.31) temos, por exemplo, para o termo de primeira ordem

$$[M_\alpha^\dagger, F_0] = [M_\alpha^\dagger, m_\beta^\dagger M_\beta - M_\beta^\dagger m_\beta] = m_\beta^\dagger (\Delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.40)$$

Nos demais termos das ordens subsequentes aparecem potências das mais diferentes ordens em  $\Delta_{\alpha\beta}$ . Se desprezarmos os termos envolvendo potências de  $\Delta_{\alpha\beta}$  o cálculo fica simplificado. No entanto estamos, com isso, eliminando do problema os efeitos da estrutura interna dos mésons. Este caso, apenas para efeito ilustrativo, é mostrado abaixo (um procedimento mais elaborado será mostrado mais adiante).

$$\begin{aligned} [M_\alpha^\dagger, F_0]_1 &\approx -m_\alpha^\dagger & , & \quad [M_\alpha^\dagger, F_0]_2 \approx -M_\alpha^\dagger \\ [M_\alpha^\dagger, F_0]_3 &\approx m_\alpha^\dagger & , & \quad [M_\alpha^\dagger, F_0]_4 \approx M_\alpha^\dagger \\ [M_\alpha^\dagger, F_0]_5 &\approx -m_\alpha^\dagger & , & \quad [M_\alpha^\dagger, F_0]_6 \approx -M_\alpha^\dagger \\ & & & \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Destas expressões encontramos

$$M_{\alpha}^{\dagger}(t) \approx (\cos t) M_{\alpha}^{\dagger} - (\sin t) m_{\alpha}^{\dagger}; \quad (2.42)$$

em particular quando  $t = -\pi/2$  temos

$$M_{\alpha}^{\dagger}(t) \approx m_{\alpha}^{\dagger}. \quad (2.43)$$

A expansão em múltiplos comutadores (2.37) usada para determinar a transformação de operadores não é do ponto de vista prático muito útil. A razão disto reside no fato de até a aproximação de “ordem zero” ( Eq. (2.42) ) envolver uma série infinita. À medida que levarmos em conta o termo operatorial  $\Delta_{\alpha\beta}$ , a série gerada pela expansão em múltiplos comutadores torna-se muito mais complexa. Há nestes termos, devido à sua complexidade, pouca esperança em reconhecermos termos gerais da série relevante e procedermos na busca de efetuar a sua soma de maneira fechada. Então, torna-se uma necessidade desenvolvermos um método consistente e eficiente para avaliarmos os operadores transformados.

Na próxima subseção mostraremos uma técnica chamada de *método das equações de movimento*, que servirá para construir a transformação de Fock-Tani dos operadores de maneira iterativa.

### 2.2.2 O Método Iterativo das “Equações de Movimento”

Os operadores básicos de um determinado modelo aplicado a física de mésons compostos, tais como o operador Hamiltoniano, correntes eletromagnéticas, entre outros, são expressos em termos de operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks. Dessa forma, para obtermos os operadores do modelo na nova representação, aquela que, envolve mésons ideais, necessitamos dos operadores de criação e destruição de quarks e antiquarks transformados. Apresentamos abaixo os operadores de destruição de quarks e antiquarks na nova representação simbolizados respectivamente por  $q_{\text{FT}}$  e  $\bar{q}_{\text{FT}}$

$$\begin{aligned} q_{\text{FT}} &= U^{-1}qU \\ \bar{q}_{\text{FT}} &= U^{-1}\bar{q}U. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os operadores de criação correspondentes são obtidos de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano da Eq. (2.44) e lembrando que  $U^{-1} = U^{\dagger}$ .

Os cálculos dessas expressões pelo método de multicomutadores é complexo, envolvendo em geral séries infinitas e não podem, em geral, ser expressos em uma forma fechada. No entanto, as transformações destes operadores podem ser obtidas iterativamente através do método denominado de “equações de movimento”, sugerido por Girardeau[9]. Para qualquer operador  $O$ , define-se:

$$O(t) = \exp(-tF_0)O \exp(tF_0). \quad (2.45)$$

Diferenciando-se a expressão acima com relação a  $t$ , obtemos a equação de movimento para o operador  $O$ :

$$\frac{dO(t)}{dt} = [O(t), F_0], \quad (2.46)$$

com a “condição inicial”:

$$O(t=0) = O. \quad (2.47)$$

Os operadores transformados de Fock-Tani são obtidos das soluções das Eqs. (2.46)-(2.47) para  $t = -\frac{\pi}{2}$ :

$$O_{\text{FT}}(t) |_{t=-\pi/2} = U^{-1}(t) O U(t) |_{t=-\pi/2} = O(-\pi/2). \quad (2.48)$$

Deste modo, usando a Eq. (2.46) e o gerador da transformação dado na Eq. (2.31), obtemos as equações de movimento para os operadores de quarks e antiquarks:

$$\frac{dq_\mu(t)}{dt} = [q_\mu(t), F_0] = -\Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger(t) m_\alpha(t), \quad (2.49)$$

e

$$\frac{d\bar{q}_\nu(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu(t), F_0] = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger(t) m_\alpha(t). \quad (2.50)$$

Uma vez que as equações de movimento para  $q$  e  $\bar{q}$  envolvem  $m_\alpha(t)$ , é necessário obter também a equação de movimento para  $m_\alpha(t)$ :

$$\frac{dm_\alpha(t)}{dt} = [m_\alpha(t), F_0] = M_\alpha(t). \quad (2.51)$$

Da mesma forma,

$$\frac{dM_\alpha(t)}{dt} = [M_\alpha(t), F_0] = -[\delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}(t)] m_\beta(t). \quad (2.52)$$

As Eqs. (2.49)-(2.52), juntamente com suas equações conjugadas hermitianas, formam um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, e que apresentam um grau elevado de complexidade no que se refere a sua resolução, comparável à técnica de multi-comutadores. No entanto, essas equações podem ser resolvidas de maneira direta através do método de iteração.

Partindo de uma aproximação de ordem zero, onde é desprezado o termo  $\Delta_{\alpha\beta}$ , coletamos os termos de mesma ordem na função de onda do estado ligado,  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ . Dessa forma, escrevemos os operadores criação e destruição como uma expansão

$$\begin{aligned} q_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_\mu^{(i)}(t), & \bar{q}_\mu(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(t), \\ m_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(t), & M_\alpha(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} M_\alpha^{(i)}(t), \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde  $(i)$  indica a ordem nas funções de onda. Para que se tenha uma contagem de potências consistente, como pode ser visto nas Eqs. (2.55) a seguir, a presença implícita das funções de onda na definição dos operadores  $M_\alpha$  e  $M_\alpha^\dagger$  via Eq. (2.3), não devem entrar na contagem. Desta forma, as expansões da Eq. (2.53) pode ser entendidas como expansões na densidade do sistema[9].

Assim, as equações de movimento em ordem zero nas funções de onda são obtidas desprezando-se os termos  $\Delta_{\alpha\beta}(t)$  e  $\Phi_\alpha$  nas Eqs. (2.49)-(2.52):

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(0)}(t)}{dt} &= 0 \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(t)}{dt} = 0 \quad ; \\ \frac{dM_\alpha^{(0)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(0)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(0)}(t) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Usando as condições iniciais da Eq. (2.47), as soluções resultam em

$$\begin{aligned} q_\mu^{(0)}(t) &= q_\mu \quad ; \quad \bar{q}_\nu^{(0)}(t) = \bar{q}_\nu \quad ; \\ m_\alpha^{(0)}(t) &= m_\alpha \cos t + M_\alpha \sin t \quad ; \quad M_\alpha^{(0)}(t) = M_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Deve-se notar que as condições iniciais foram impostas sobre o termo de ordem zero na expansão da Eq. (2.53). Assim, para que esta expansão seja consistente com a Eq. (2.47), devemos ter como condições iniciais para os termos de ordem  $i \geq 1$  que:

$$q_\mu^{(i)}(t=0) = \bar{q}_\nu^{(i)}(t=0) = m_\alpha^{(i)}(t=0) = M_\alpha^{(i)}(t=0) = 0 , \text{ para } i \geq 1 . \quad (2.56)$$

Uma vez que o termo  $\Delta_{\alpha\beta}$  não contribui para as equações de movimento em primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(1)}(t)}{dt} &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \quad \frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(t)}{dt} = \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^{\dagger(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \quad ; \\ \frac{dM_\alpha^{(1)}(t)}{dt} &= -m_\alpha^{(1)}(t) \quad ; \quad \frac{dm_\alpha^{(1)}(t)}{dt} = M_\alpha^{(1)}(t) . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Com as condições iniciais da Eq. (2.56) e a condição em  $t = -\pi/2$ , ao integrar-se as expressões da Eq. (2.57) combinadas com as expressões da Eq. (2.55), obtemos:

$$\begin{aligned} q_\mu^{(1)}(t) &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\ \bar{q}_\nu^{(1)}(t) &= \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^\dagger [m_\alpha \sin t + M_\alpha (1 - \cos t)] , \\ m_\alpha^{(1)}(t) &= 0 , \\ M_\alpha^{(1)}(t) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Esse processo iterativo pode ser estendido diretamente até ordens mais altas. No entanto, as soluções de segunda ordem em diante darão origem a termos seculares, isto é, termos

que envolvem polinômios em  $t$ , além de funções trigonométricas em  $t$ . Entre outras coisas, os termos seculares introduzem as familiares discrepâncias “post-prior” [16] na análise de processos de espalhamento e processos reativos. A origem dos termos seculares está na assimetria das equações de movimento para  $m_\alpha$  e  $M_\alpha$ , Eqs. (2.51) e (2.52). A simetria é quebrada pelo termo  $\Delta_{\alpha\beta}$ . Formalmente o problema foi resolvido por Girardeau e Stratton [15]. A solução consiste em adicionar a  $F$  um termo dependente de  $\Delta_{\alpha\beta}$  de modo que as equações tornem-se simétricas. Seguimos, aqui, o procedimento de Lo e Girardeau [16], que embora seja equivalente ao procedimento de Girardeau e Stratton, é mais elegante e sistemático.

O gerador da transformação é definido neste caso como

$$F = m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha - \tilde{M}_\alpha^\dagger m_\alpha, \quad (2.59)$$

ou seja, como uma superposição de termos do tipo do operador anti-hermitiano definido na Eq.(2.31) e onde o operador  $\tilde{M}_\alpha$  é uma função somente dos operadores de quark e antiquark.  $\tilde{M}_\alpha$  é escolhido de tal forma que satisfaça relações de comutação canônicas, ou seja:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta] &= 0, \\ [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

isto é, incorporando em sua definição termos que eliminam a presença de  $\Delta_{\alpha\beta}$  em (2.6). Isto leva a equações de movimento simétricas para  $m_\alpha$  e  $\tilde{M}_\alpha$  em todas as ordens nas funções de onda de estado ligado  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha(t)}{dt} &= [m_\alpha(t), F] = \tilde{M}_\alpha(t), \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha(t)}{dt} &= [\tilde{M}_\alpha(t), F] = -m_\alpha(t), \end{aligned} \quad (2.61)$$

e que representam assim uma extensão das Eqs.(2.51) e (2.52). Note-se que diferentemente da Eq.(2.52) a segunda das expressões acima não contém explicitamente a presença do termo  $\Delta_{\alpha\beta}$  que está contido implicitamente na definição de  $\tilde{M}_\alpha$ . As soluções destas equações

$$\begin{aligned} m_\alpha(t) &= \tilde{M}_\alpha \sin t + m_\alpha \cos t, \\ \tilde{M}_\alpha(t) &= \tilde{M}_\alpha \cos t - m_\alpha \sin t, \end{aligned} \quad (2.62)$$

contêm somente funções trigonométricas em  $t$ . Não é difícil mostrar que isto elimina também os termos seculares dos operadores de quark e antiquark.

O operador  $\tilde{M}_\alpha$  é, também determinado iterativamente, ou seja, ordem a ordem em  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ , de modo que  $\tilde{M}_\alpha$  pode ser expandido similarmente às definições apresentadas em (2.53), como

$$\tilde{M}_\alpha(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{M}_\alpha^{(i)}(t), \quad (2.63)$$

onde, novamente,  $(i)$  indica a ordem considerada em  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ . O termo de ordem zero é trivialmente dado por:

$$\tilde{M}_\alpha^{(0)} = M_\alpha , \quad (2.64)$$

que certamente satisfaz a Eq. (2.60), em ordem zero. Isto porque nesta ordem de aproximação, despreza-se a presença de  $\Delta_{\alpha\beta}$  em (2.6), e (2.64) reproduz portanto os resultados originais para primeira e segunda ordem. O termo seguinte é o de segunda ordem:

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(2)} , \quad (2.65)$$

onde  $\tilde{M}_\alpha^{(2)}$  deve ser escolhido de forma que

$$[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3) . \quad (2.66)$$

A escolha apropriada que satisfaz esta condição é:

$$\tilde{M}_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta . \quad (2.67)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos o operador em terceira ordem em  $i$ ,

$$\tilde{M}_\alpha^{(3)} = \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma . \quad (2.68)$$

Assim, até terceira ordem em  $\Phi_\alpha$ , verifica-se que o operador  $\tilde{M}_\alpha$  é dado por:

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma . \quad (2.69)$$

Pode-se mostrar, usando estas relações, que:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta] &= \mathcal{O}(\Phi^4) \\ [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) . \end{aligned} \quad (2.70)$$

As equações de movimento em segunda ordem para  $m_\alpha$  e  $\tilde{M}_\alpha$ , usando a transformação de Fock-Tani generalizada, são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [m_\alpha^{(2)}(t), F] = \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) , \\ \frac{d\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t)}{dt} &= [M_\alpha^{(2)}(t), F] = -m_\alpha^{(2)}(t) . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ao considerarmos as equações de movimento para os operadores  $q$  e  $\bar{q}$ , temos que incluir as contribuições adicionais que resultam da mudança do gerador da transformação. Assim,

temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu^{(2)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(2)}(t), F] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^\dagger(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} M_\gamma^\dagger(t) q_{\mu_2}^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) , \\
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(2)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(2)}(t), F] &= \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^\dagger(t) M_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) \\
 &- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} M_\alpha^\dagger(t) m_\gamma^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(t) .
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

As condições iniciais para  $\tilde{M}_\alpha^{(i)}(t)$  são dadas por

$$\tilde{M}_\alpha^{(i)}(t=0) = \tilde{M}_\alpha^{(i)} \quad , \quad \forall i \quad . \tag{2.73}$$

Assim, temos  $\tilde{M}_\alpha^{(2)}(t=0) = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta$  e, integrando-se as Eqs. (2.71)-(2.72) obtemos

$$\begin{aligned}
 m_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \sin t , \\
 \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \cos t ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\beta^{\mu\nu_1} \left[ m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] q_{\mu_2} \\
 \bar{q}_\nu^{(2)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu} \left[ m_\alpha^\dagger M_\beta \sin t \cos t - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 t - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos t \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 t) - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin t - \sin t \cos t) \right] \bar{q}_{\nu_2} .
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

As equações de movimento em terceira ordem para os operadores de quarks e antiquarks são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu^{(3)}(t)}{dt} = [q_\mu^{(3)}(t), F] &= -\frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \left[ \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) + \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(2)}(t) \right] \right. \\
 &+ \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \left[ m_\alpha^\dagger(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) M_\gamma^{(0)}(t) - M_\alpha^\dagger(t) q_{\mu_2}^{(1)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \right] \\
 &+ \Phi_\alpha^{\mu_1\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho_1\sigma} \Phi_\delta^{\rho_1\sigma_1} M_\gamma^\dagger(t) \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\
 &+ \Phi_\alpha^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{*\rho\sigma_1} \Phi_\delta^{\mu_1\sigma_1} M_\gamma^\dagger(t) \bar{q}_\sigma^\dagger(t) M_\delta^{(0)}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \\
 &\left. - \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(t) \Delta_{\gamma\alpha}(t) m_\alpha^{(0)}(t) \right\} ,
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\frac{d\bar{q}_\nu^{(3)}(t)}{dt} = [\bar{q}_\nu^{(3)}(t), F] = \frac{1}{2} \left\{ 2\Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \left[ q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(2)}(t) + q_{\mu_1}^\dagger(t) m_\alpha^{(0)}(t) \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \left[ m_\alpha^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_\sigma^{(1)}(t) M_\beta^{(0)}(t) - M_\alpha^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_\sigma^{(1)}(t) m_\beta^{(0)}(t) \right] \\
 & - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu_1} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} M_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t) M_\beta^{(0)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \\
 & - \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} M_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_{\rho_1}^{\dagger(0)}(t) M_\beta^{(0)}(t) m_\gamma^{(0)}(t) \\
 & + \Phi_\gamma^{\rho\nu_1} q_\rho^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\gamma\beta}(t) m_\beta^{(0)}(t) \} . \tag{2.76}
 \end{aligned}$$

Integrando-se estas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(3)}(t) & = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \left[ m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 & + M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 & + (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 & + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 & + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 & \left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta (\cos t - 1) - m_\beta \sin t] \\
 \bar{q}_\nu^{(3)}(t) & = -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{\rho\nu} \Phi_\gamma^{\rho_1\sigma} q_{\rho_1}^\dagger \left[ m_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma \sin^3 t + M_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma (\sin t - \sin^3 t) \right. \\
 & + M_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (2 \sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \\
 & + (M_\alpha^\dagger m_\beta m_\gamma + m_\alpha^\dagger M_\beta m_\gamma) (-\cos t + \cos^3 t) \\
 & + m_\alpha^\dagger m_\beta M_\gamma (-\cos t + \cos^3 t + \sin^2 t) \\
 & + M_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (2 - \cos t - \cos^3 t - \sin^2 t) \\
 & \left. + m_\alpha^\dagger M_\beta M_\gamma (\sin t - \sin t \cos t - \sin^3 t) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \Phi_\beta^{\rho\sigma_1} q_{\mu_1}^\dagger \bar{q}_{\sigma_1}^\dagger \bar{q}_\sigma [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \Phi_\beta^{\rho_1\sigma} q_{\mu_1}^\dagger q_{\rho_1}^\dagger q_\rho [2M_\beta (1 - \cos t) + m_\beta \sin t] . \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

Em princípio, este processo pode ser estendido até qualquer ordem, ainda que a complexidade das expressões obtidas aumente muito com a ordem considerada. Sabe-se, no entanto, que para obter uma interação efetiva méson-méson, bem como outros processos envolvendo quarks e mésons, necessita-se ir somente até a terceira ordem nos operadores de quarks transformados[30].

## 2.3 O Hamiltoniano na representação Fock-Tani.

O Hamiltoniano que descreve a propagação e a interação entre quarks e antiquarks na representação de Fock-Tani é obtido pela aplicação da transformação unitária  $U$  sobre o Hamiltoniano microscópico original, expresso em termos dos operadores dos constituintes fundamentais,  $q, q^\dagger, \bar{q}$  e  $\bar{q}^\dagger$ . Consideramos o Hamiltoniano microscópico envolvendo quarks e antiquarks, expresso de forma geral como uma soma de termos envolvendo contribuições de energia cinética e potencial na forma:

$$\begin{aligned} H &= T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ &+ \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Nesta expressão identificamos, nos dois primeiros termos, contribuições de energia cinética e nos demais contribuições de energia potencial envolvendo interações de dois corpos. Vários Hamiltonianos de modelos de quarks utilizados na literatura podem ser escritos nessa forma. A equação de movimento para a função de onda de um méson é dada por

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\alpha^{\mu'\nu'} = \epsilon_{[\alpha]} \Phi_{[\alpha]}^{\mu\nu} , \quad (2.79)$$

onde  $\epsilon_\alpha$  é a energia total do méson, isto é, a soma de sua energia de centro de massa e de sua energia interna, e  $H(\mu\nu; \sigma\rho)$  é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu[\mu']}\delta_{\nu[\nu']} [T([\mu']) + T([\nu'])] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') . \quad (2.80)$$

Usamos nesta parte do texto a convenção de que não há soma nos índices repetidos entre colchetes. O Hamiltoniano exato e transformado é dado, na nova representação, por

$$\mathcal{H}_{\text{FT}} \equiv U^{-1} H U , \quad (2.81)$$

isto é, o Hamiltoniano é avaliado em todas as ordens na função de onda do méson e descreve todos os processos possíveis envolvendo quarks e mésons. Tais processos incluem interações de dois corpos do tipo (anti)quark-(anti)quark, méson-(anti)quark, méson-méson, bem como outros processos de muitos corpos envolvendo interações em que várias partículas (quarks, antiquarks e mésons) participam. Até a ordem em que os operadores de quark e antiquark foram determinados (ordem três), é possível obter-se um Hamiltoniano efetivo truncado, que descreve apenas interações de poucas partículas. O Hamiltoniano na representação de Fock-Tani,  $H_{\text{FT}}$  tem, assim, a seguinte estrutura geral:

$$\mathcal{H}_{\text{FT}} = H_q + H_{\text{mq}} + H_m , \quad (2.82)$$

onde  $H_q$  indica termos contendo somente operadores de quarks e antiquarks,  $H_{\text{mq}}$  indica termos contendo operadores de mésons e quarks e  $H_m$  contém apenas operadores de mésons.

O procedimento para obter a Eq. (2.82) é substituir na Eq. (2.78) os operadores de quarks transformados, fazendo em seguida o ordenamento normal dos operadores.

Por exemplo, o termo  $H_q$  tem estrutura idêntica àquela apresentada na Eq. (2.78), exceto pelo termo que descreve a interação quark-antiquark, que é modificado de forma a não produzir neste modelo estados ligados quark-antiquark. Os operadores  $q$  e  $\bar{q}$  presentes em  $H$  e  $H_q$  têm também significados distintos, pois em  $H_q$  estes operadores representam somente estados de quarks e antiquarks não ligados. Assim,

$$\begin{aligned} H_q &= T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ &+ \frac{1}{2} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma . \end{aligned} \quad (2.83)$$

O termo importante a salientar é aquele que descreve a interação quark-antiquark modificada e que é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) &= V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) - \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma\rho) - H(\mu\nu; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) \\ &+ \Delta(\mu\nu; \mu'\nu') H(\mu'\nu'; \sigma'\rho') \Delta(\sigma'\rho'; \sigma\rho) , \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde  $\Delta(\mu\nu; \mu'\nu')$  é conhecido como “*kernel* de estado ligado”

$$\Delta(\mu\nu; \mu'\nu') = \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\mu'\nu'} , \quad (2.85)$$

e  $H(\mu\nu; \sigma\rho)$  é dado por:

$$H(\mu\nu; \mu'\nu') = \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') . \quad (2.86)$$

A origem destes termos é a seguinte:

- primeiro termo em  $\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$ : este termo representa as contribuições de ordem zero nas funções de onda de estado ligado para os operadores de quarks:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(0)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)} ; \quad (2.87)$$

- segundo termo: é dado pelas contribuições dos termos de primeira ordem nas funções de onda de estado ligado, ou seja,

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(0)} , \quad T(\nu) q_\nu^{\dagger(1)} q_\nu^{(0)} , \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(0)} ; \quad (2.88)$$

- terceiro termo: este termo representa o conjugado Hermitiano das contribuições anteriores.

- quarto termo: é dado pelas contribuições dos termos de segunda ordem, nas funções de onda mencionadas anteriormente.

$$T(\mu)q_\mu^{\dagger(1)}q_\mu^{(1)}, \quad T(\nu)q_\nu^{\dagger(1)}q_\nu^{(1)}, \quad V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^{\dagger(1)}\bar{q}_\nu^{\dagger(0)}\bar{q}_\rho^{(0)}q_\sigma^{(1)}. \quad (2.89)$$

O fato de que a interação quark-antiquark remanescente não pode formar estados ligados, em particular aqueles estados ligados empregados na transformação unitária, está em um certo sentido de acordo com a idéia de quase-partículas de Weinberg [18, 19]. O formalismo de quase-partículas de Weinberg foi introduzido com o objetivo de calcular amplitudes de espalhamento para potenciais para os quais a teoria de perturbação não pode ser empregada. Neste formalismo, partículas elementares fictícias são introduzidas na teoria, em correspondência direta com os estados ligados da teoria. Para que a física do problema não seja modificada, Weinberg argumenta que é necessário mudar simultaneamente o potencial de forma que contribuições de interação sejam incorporadas gradativamente nas propriedades intrínsecas destas partículas. Como os aspectos dos estados ligados da teoria original são incorporadas em grande parte na forma de modificações das estruturas intrínsecas das partículas originais, o potencial modificado não deve produzir os estados ligados originais. Neste procedimento, o potencial modificado torna-se mais fraco e, por isso, a teoria de perturbação pode ser em geral usada. No formalismo Fock-Tani, o potencial enfraquecido de Weinberg é realizado pelo potencial da Eq. (2.84).

O termo do Hamiltoniano transformado, que descreve interações envolvendo mésons e quarks,  $H_{\text{mq}}$ , corresponde ao acoplamento dos estados ligados aos estados do contínuo. Em um modelo de quarks com confinamento de cor, estes processos não contribuem em ordem mais baixa na aproximação de Born, pois não há estados assintóticos de quarks livres. No entanto, estes processos irão contribuir em ordens mais altas como estados intermediários de processos físicos com estados assintóticos confinados sem cor. Por outro lado, na matéria hadrônica densa e quente, quando espera-se que haja desconfinamento, estas interações certamente irão contribuir em processos de espalhamento e reações em que os quarks e antiquarks aparecem como estados físicos no meio.

Um exemplo específico de um processo que representa a interação entre um méson e um quark é dado por:

$$H_{\text{mq} \rightarrow \text{mq}} = H_{\text{mq}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu)m_{\alpha'}^\dagger q_{\mu'}^\dagger q_\mu m_\alpha \quad (2.90)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{\text{mq}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) &= V_{\text{mq}}^{\text{dir}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) + V_{\text{mq}}^{\text{corr}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) \\ &+ V_{\text{mq}}^{\text{intra}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) + V_{\text{mq}}^{\text{ex}}(\alpha'\mu'; \alpha\mu) \end{aligned} \quad (2.91)$$

com

$$V_{\text{mq}}^{\text{dir}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) = \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} V_{q\bar{q}}(\mu' \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\rho \nu} + \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu} V_{qq}(\mu' \rho'; \mu \rho) \Phi_{\alpha}^{\rho \nu}. \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{mq}}^{\text{ort}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) &= -\Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} \left( \frac{3}{4} T_{\rho'} + \frac{1}{2} T_{\nu'} + \frac{1}{2} T_{\nu} + \frac{1}{8} T_{\mu'} + \frac{1}{8} T_{\mu} \right) \Delta(\mu' \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\rho' \nu} \\ &- \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} V_{q\bar{q}}(\rho' \nu'; \rho \nu) \Delta(\mu' \nu; \mu \sigma) \Phi_{\alpha}^{\rho \sigma} \\ &- \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\mu' \rho'} \Delta(\mu' \sigma; \mu \nu') V_{q\bar{q}}(\rho' \nu'; \rho \nu) \Phi_{\alpha}^{\rho \nu} \\ &- \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} V_{q\bar{q}}(\mu' \nu'; \rho \nu) \Delta(\rho \nu; \mu \sigma) \Phi_{\alpha}^{\rho' \sigma} \\ &- \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \sigma} \Delta(\mu' \sigma; \rho \nu') V_{q\bar{q}}(\rho \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\rho' \nu} \\ &- \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} V_{qq}(\rho' \mu'; \lambda \rho) \Delta(\rho \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda \nu} \\ &- \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} \Delta(\mu' \nu'; \rho \nu) V_{qq}(\rho' \rho; \lambda \mu) \Phi_{\alpha}^{\lambda \nu}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{mq}}^{\text{intra}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\mu \nu'} H(\mu' \nu'; \lambda \nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda \nu} - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\lambda \nu'} H(\lambda \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\mu' \nu} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\mu \sigma} \Delta(\mu' \sigma; \rho \nu') H(\rho \nu'; \lambda \nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda \nu} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\lambda \nu'} H(\lambda \nu'; \rho \nu) \Delta(\rho \nu; \mu \sigma) \Phi_{\alpha}^{\mu' \sigma}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{mq}}^{\text{ex}}(\alpha' \mu'; \alpha \mu) &= -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\mu \nu'} V_{q\bar{q}}(\mu' \nu'; \lambda \nu) \Phi_{\alpha}^{\lambda \nu} - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\lambda \nu'} V_{q\bar{q}}(\lambda \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\mu' \nu} - \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu} V_{qq}(\mu' \rho'; \rho \mu) \Phi_{\alpha}^{\rho \nu} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\lambda \sigma} \Delta(\mu' \sigma; \rho \nu') V_{q\bar{q}}(\lambda \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\rho \nu} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho \nu'} V_{q\bar{q}}(\mu' \nu'; \lambda \nu) \Delta(\rho \nu'; \mu \sigma) \Phi_{\alpha}^{\lambda \sigma} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} V_{qq}(\mu' \rho'; \rho \lambda) \Delta(\lambda \nu'; \mu \nu) \Phi_{\alpha}^{\rho \nu} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{\alpha'}^{*\rho' \nu'} \Delta(\mu' \nu'; \rho \nu) V_{qq}(\rho' \rho; \mu \lambda) \Phi_{\alpha}^{\lambda \nu}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

O termo  $V_{\text{mq}}^{\text{dir}}$ , de segunda ordem em  $\Phi$ , é o termo de interação direto. O termo  $V_{\text{mq}}^{\text{ort}}$  é de quarta ordem em  $\Phi$  e corresponde às correções de ortogonalidade ao termo direto. O termo  $V_{\text{mq}}^{\text{intra}}$  corresponde à interação com troca de um glúon dentro do méson seguida da troca de quarks, incluindo as correções de ortogonalidade de ordem quatro em  $\Phi$ . O termo  $V_{\text{mq}}^{\text{ex}}$  representa a interação com troca de um glúon entre o méson e o quark livre seguida da troca de quarks, mais as correções de ortogonalidade de ordem quatro.

No formalismo de FT, os termos de ortogonalidade aparecem em ordem mais alta nos elementos de matriz, como consequência da transformação dos operadores. Esse resultado tem a vantagem de que os operadores de quark e antiquark continuam satisfazendo relações de anticomutação canônicas, o que não ocorreria se fossem utilizados os operadores projetados [36]. No caso em que as funções de onda  $\Phi$  são auto-estados do Hamiltoniano microscópico, o termo  $V_{mq}^{\text{intra}}$  torna-se nulo, por um argumento análogo ao que exige o cancelamento dos termos de ionização e recombinação de um méson livre. Esse cancelamento mostra que as correções de ortogonalização podem ser muito importantes.

Consideremos, agora, o termo do Hamiltoniano transformado contendo somente operadores de mésons,  $H_m$  de (2.82). Em ordem mais baixa, este termo tem a forma geral

$$H_m^{(0)} = T_m^{(0)} + V_{mm}^{(0)}. \quad (2.96)$$

$T_m^{(0)}$  é o termo de um único méson ideal, dado por

$$T_m^{(0)} = T(\alpha, \beta) m_\alpha^\dagger m_\beta, \quad (2.97)$$

onde

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta) &= \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \{ \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'} [T(\mu') + T(\nu')] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \} \Phi_\beta^{\mu'\nu'} \\ &= \Phi_\alpha^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\beta^{\mu'\nu'}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Nesta expressão, os termos em  $T(\mu)$  e  $T(\nu)$  vêm das contribuições dos termos de segunda ordem em:

$$T(\mu) q_\mu^{\dagger(1)} q_\mu^{(1)}, \quad T(\mu) \bar{q}_\nu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{(1)}. \quad (2.99)$$

O termo  $V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$  vem também da contribuição do termo de segunda ordem em:

$$V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \bar{q}_\rho^{(0)} q_\sigma^{(1)}. \quad (2.100)$$

Se  $\Phi_\alpha$  é um auto-estado do Hamiltoniano microscópico de quarks, temos

$$T(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_\beta, \quad (2.101)$$

de modo que o termo  $T_m^{(0)}$  reduz-se a:

$$T_m^{(0)} = \epsilon_\alpha m_\alpha^\dagger m_\alpha. \quad (2.102)$$

$V_{mm}^{(0)}$  corresponde ao potencial efetivo envolvendo pares méson-méson ideais:

$$V_{mm}^{(0)} = \frac{1}{2} V_{mm}(\alpha\beta; \gamma\delta) m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\delta m_\gamma, \quad (2.103)$$

onde  $V_{\text{mm}}(\alpha\beta; \gamma\delta)$  é dado por:

$$V_{\text{mm}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{\text{mm}}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta). \quad (2.104)$$

O termo  $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$  abaixo corresponde à interação dos dois mésons com troca de um glúon no interior do méson seguida da troca de um quark

$$\begin{aligned} V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Ademais o termo  $V_{\text{mm}}^{\text{dir}}$  abaixo corresponde à interação dos dois mésons através da troca de um glúon, sem troca de quark

$$\begin{aligned} V_{\text{mm}}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & + 2\Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & + \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_{\delta}^{\rho'\nu} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & + \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu\sigma'}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

o termo  $V_{\text{mm}}^{\text{ex}}$  abaixo corresponde à interação dos dois mésons através da troca de um glúon, seguida da troca de um quark

$$\begin{aligned} V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu'} \\ & - \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{qq}(\mu\rho; \mu'\rho') \Phi_{\delta}^{\mu'\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho'\sigma} \\ & - \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} V_{\bar{q}\bar{q}}(\sigma\nu; \sigma'\nu') \Phi_{\delta}^{\mu\nu'} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma'}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Dadas auto-funções do Hamiltoniano, representadas por  $\Phi$ , o termo  $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$  reduz-se à:

$$\begin{aligned} V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) = & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\alpha]} \Phi_{[\alpha]}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Phi_{\delta}^{\mu'\sigma} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu'} \\ & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\beta]} \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{[\beta]}^{*\mu'\nu'} \Phi_{\delta}^{\rho\nu'} \Phi_{\gamma}^{\mu'\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\delta]} \Phi_{\alpha}^{*\mu\sigma} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Phi_{[\delta]}^{\mu\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \epsilon_{[\gamma]} \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\sigma} \Phi_{\delta}^{\rho\sigma} \Phi_{[\gamma]}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\phi_{\alpha}^{\mu\nu} \equiv \alpha \begin{array}{|c} \bullet \\ \hline \bullet \end{array} \begin{array}{l} \nu \\ \mu \end{array}$$
  

$$\phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \equiv \begin{array}{|c} \sigma \\ \hline \rho \end{array} \bullet \beta$$

**Fig. 2.1:** Notação diagramática para a função de onda.

As expressões para  $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$ ,  $V_{\text{mm}}^{\text{dir}}$  e  $V_{\text{mm}}^{\text{ex}}$  das Eqs. (2.105) a (2.107) têm respectivamente uma representação diagramática. Com a identificação que aparece na Fig. (2.1), as Fig. (2.2), (2.3), (2.4) mostram os diagramas de troca correspondentes a esses termos.

É importante notar que a Eq. (2.103) representa a contribuição de ordem mais baixa na função de onda  $\Phi$  para o potencial méson-méson (quarta ordem). Existem outras contribuições de ordens mais altas que correspondem às correções de ortogonalidade, análogas as que aparecem no termo  $H_{mq \rightarrow mq}$ . Por exemplo, consideremos a integração até quinta ordem do quinto termo da Eq. (2.75),

$$\frac{dq_{\mu}^{(5)}(t)}{dt} = -\delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_{\gamma}^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\gamma\alpha}^{(4)}(t) m_{\alpha}^{(0)}(t). \quad (2.109)$$

Integrando-se esta expressão, obtemos

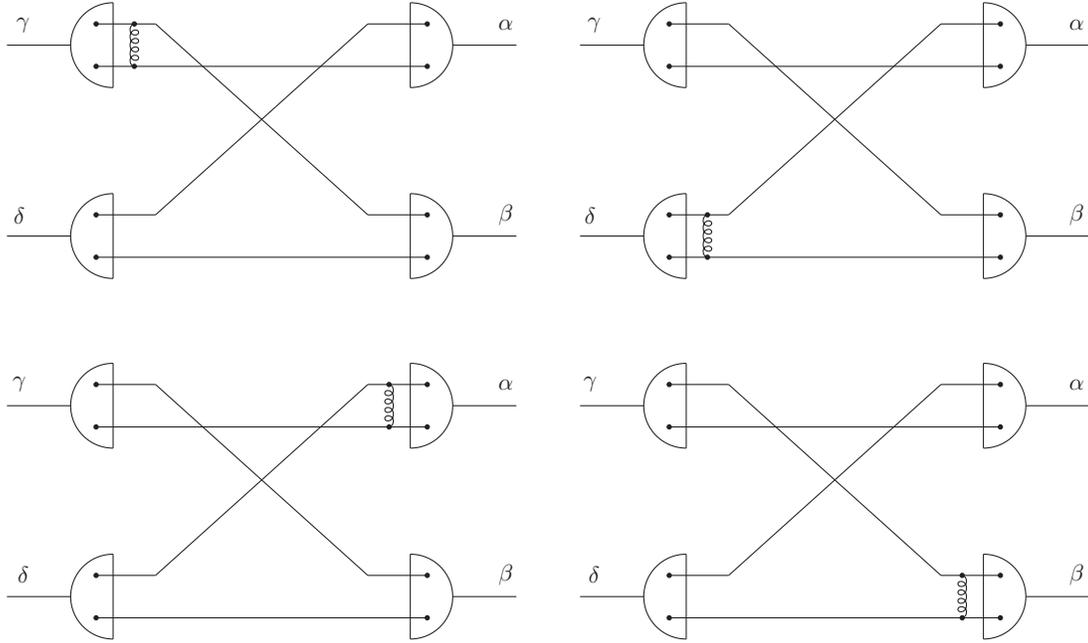
$$\begin{aligned} q_{\mu}^{(5)} = & + \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_{\gamma}^{*\rho\tau'} \Phi_{\alpha}^{\lambda\tau'} \Phi_{\beta}^{\rho'\tau} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\beta} m_{\alpha} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} q_{\rho} q_{\rho'}^{\dagger} \\ & + \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_{\gamma}^{*\lambda'\sigma} \Phi_{\alpha}^{\lambda'\tau} \Phi_{\beta}^{\lambda\sigma'} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\beta} m_{\alpha} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\sigma} q_{\sigma'}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Analogamente, para o operador de antiquark, temos da Eq. (2.76)

$$\frac{d\bar{q}_{\nu}^{(5)}(t)}{dt} = \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_{\gamma}^{\rho\nu_1} q_{\rho}^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\gamma\beta}^{(4)}(t) m_{\beta}^{(0)}(t), \quad (2.111)$$

cuja solução é:

$$\bar{q}_{\nu}^{(5)} = - \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_{\gamma}^{*\rho\tau'} \Phi_{\alpha}^{\lambda\tau'} \Phi_{\beta}^{\rho'\tau} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\beta} m_{\alpha} q_{\mu}^{\dagger} q_{\rho} q_{\rho'}^{\dagger}$$



**Fig. 2.2:** Diagramas correspondentes às contribuições do termo  $V_{mm}^{intra-ex}$ .

$$- \frac{1}{6} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) \Phi_\gamma^{*\lambda'\sigma} \Phi_\alpha^{\lambda'\tau} \Phi_\beta^{\lambda\sigma'} m_\gamma^\dagger m_\beta m_\alpha q_\mu^\dagger \bar{q}_\sigma q_{\sigma'}^\dagger \quad (2.112)$$

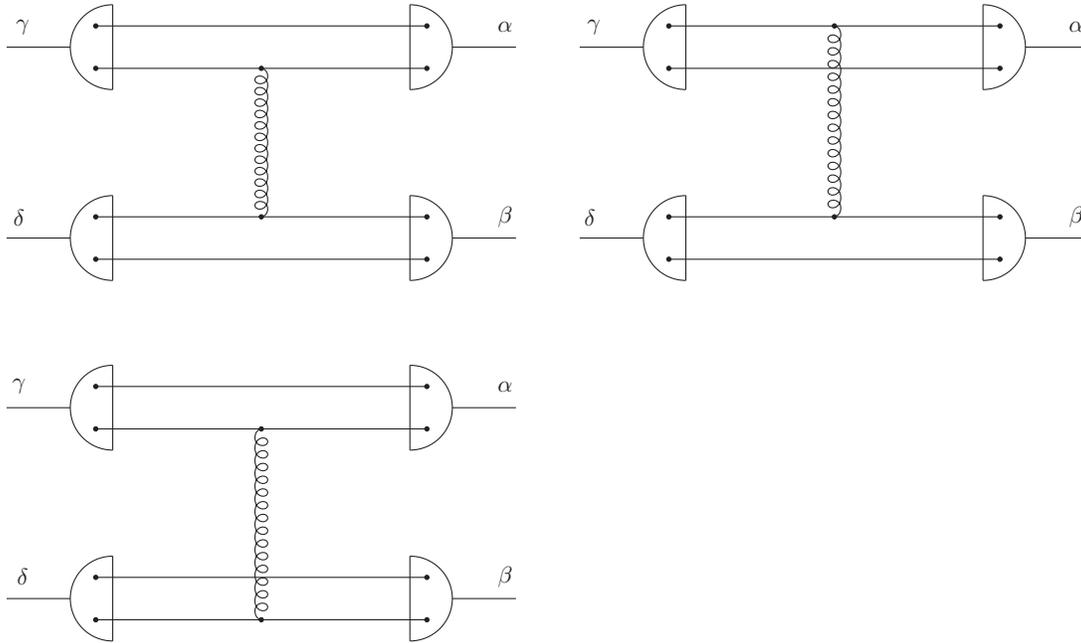
Utilizando esses operadores de quinta ordem na transformação do Hamiltoniano microscópico, obtemos uma contribuição para  $V_{mm}$  dada por

$$\begin{aligned} & T(\mu) q_\mu^{\dagger(5)} q_\mu^{(1)} + T(\nu) \bar{q}_\nu^{\dagger(5)} \bar{q}_\nu^{(1)} + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \rho\sigma) q_\mu^{(5)\dagger} \bar{q}_\nu^{(0)\dagger} \bar{q}_\sigma^{(0)} q_\rho^{(5)} + (\text{h.c.}) = \\ & = \frac{1}{6} \left[ \Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\nu'} \Phi_\gamma^{\rho\sigma} \right. \\ & \left. + \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\mu\sigma} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau\mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right] m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\delta m_\gamma + (\text{h.c.}) . \quad (2.113) \end{aligned}$$

Naturalmente, existem outras contribuições do mesmo tipo provenientes do operador  $\tilde{M}_\alpha^{(5)}$  (ver apêndice E). Dessa forma, o termo  $H_m$  pode ser escrito como

$$H_m = H_m^{(0)} + \Delta H_m , \quad (2.114)$$

onde  $\Delta H_m$  representa as correções de ortogonalidade. Essas correções de ortogonalidade têm o efeito, entre outros, de enfraquecer o termo  $V_{mm}^{intra-ex}$ . No caso em que as funções de onda  $\Phi$  são auto-estados do Hamiltoniano microscópico pode-se mostrar que a correção de ortogonalização de ordem mais baixa cancela exatamente o termo  $V_{mm}^{intra-ex}$ , restando correções de ordem mais alta.



**Fig. 2.3:** Diagramas correspondentes às contribuições do termo  $V_{mm}^{dir}$ .

Retornaremos a este problema da correção de ortogonalidade no contexto do formalismo de Fock-Tani no próximo capítulo quando desenvolvermos a parte inédita desta dissertação que consiste em deduzir um modelo de decaimento para mésons, no contexto do formalismo de Fock-Tani, incluindo as correções de ortogonalidade.

## 2.4 Formalismo Fock-Tani e o “Método do Grupo Ressonante”.

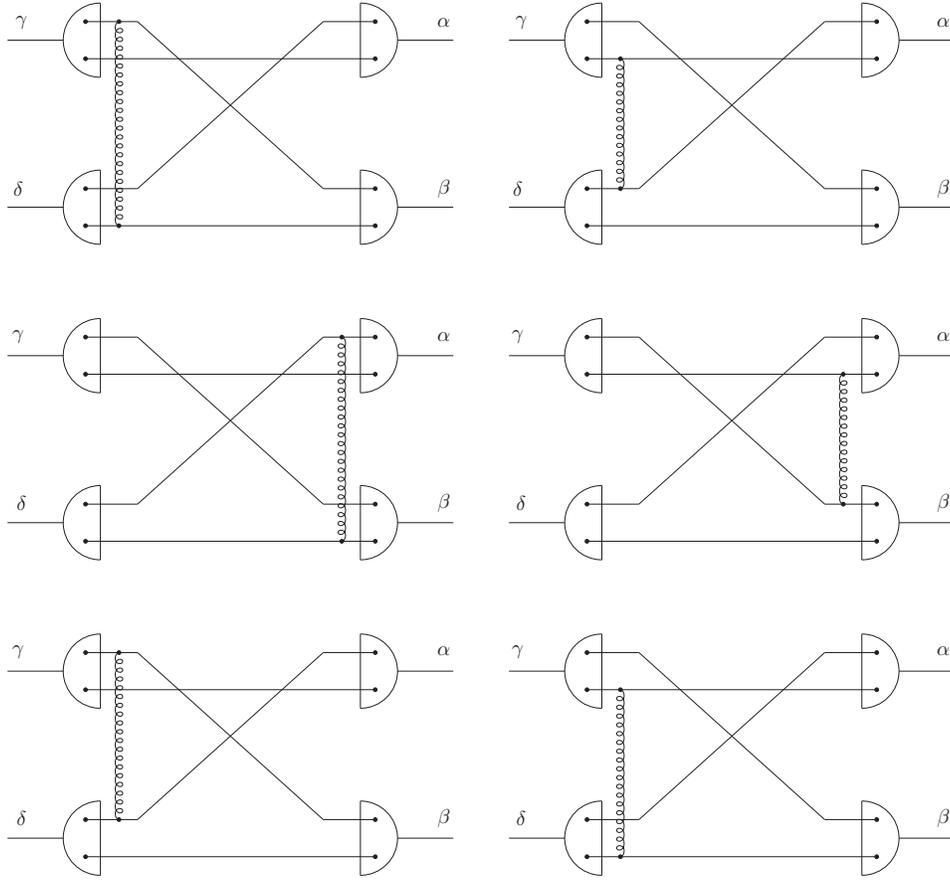
Nesta seção vamos mostrar a existência de um paralelo, no problema do espalhamento de dois “clusters”<sup>1</sup> de partículas, usando o *método do grupo ressonante* (Resonating Group Method - RGM) na linguagem de segunda quantização e o formalismo de Fock-Tani. Nesta linguagem, o “ansatz” para o estado de dois mésons é dado por:

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\Lambda}^{\alpha\beta} M_{\alpha}^{\dagger} M_{\beta}^{\dagger} |0\rangle, \quad (2.115)$$

onde  $\Psi_{\Lambda}^{\alpha\beta}$  é a função de onda ansatz para o estado de dois mésons, que descreve o movimento do centro de massa e o movimento relativo dos dois “clusters”. Os operadores de méson

---

<sup>1</sup> cluster=aglomerado



**Fig. 2.4:** Diagramas correspondentes às contribuições do termo  $V_{mm}^{ex}$ .

são os mesmos utilizados anteriormente na Eq. (2.1).  $\Lambda$  identifica os números quânticos do estado de dois mésons. A condição de normalização para  $\Psi_{\Lambda}^{\alpha\beta}$  é dada por

$$\langle \Lambda | \Lambda' \rangle = \Psi_{\Lambda}^{*\alpha\beta} N(\alpha\beta; \alpha'\beta') \Psi_{\Lambda'}^{\alpha'\beta'}, \quad (2.116)$$

onde  $N(\alpha\beta; \alpha'\beta')$  é o “kernel de normalização”,

$$N(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} - N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta'), \quad (2.117)$$

e

$$N_E(\alpha\beta; \alpha'\beta') = \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta'}^{\mu\sigma} \Phi_{\alpha'}^{\rho\nu}. \quad (2.118)$$

é o “kernel” de troca. A equação de movimento para  $\Psi_{\Lambda}^{\alpha\beta}$  é obtida por meio do princípio variacional:

$$\delta \langle \Lambda | (H - E_{\Lambda}) | \Lambda \rangle = 0. \quad (2.119)$$

A equação RGM obtida é

$$[H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_\Lambda N(\alpha\beta; \gamma\delta)] \Psi_\Lambda^{\gamma\delta} = 0, \quad (2.120)$$

onde a matriz Hamiltoniana

$$H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (2.121)$$

onde  $T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta)$  é dado por

$$T_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \delta_{\alpha\gamma} \Phi_\beta^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\nu'}, \quad (2.122)$$

e

$$V_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (2.123)$$

onde  $V_{\text{mm}}$  está definido na Eqs. (2.104)-(2.107). O Hamiltoniano RGM “renormalizado” é então dado por:

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) \equiv N^{-\frac{1}{2}}(\alpha\beta; \alpha'\beta') H_{RGM}(\alpha'\beta'; \gamma'\delta') N^{-\frac{1}{2}}(\gamma'\delta'; \gamma\delta), \quad (2.124)$$

de modo que a equação de movimento RGM “renormalizada” pode ser escrita como:

$$[\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) - E_\Lambda \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}] \bar{\Psi}_\Lambda^{\gamma\delta} = 0. \quad (2.125)$$

Expandindo a matriz  $N^{-\frac{1}{2}}$  de acordo com

$$N^{-\frac{1}{2}} = (1 - N_E)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} N_E + \frac{3}{8} N_E^2 + \dots \quad (2.126)$$

obtemos

$$\bar{H}_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) = H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta) + \Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (2.127)$$

onde  $\Delta H_{RGM}(\alpha\beta; \gamma\delta)$  contém potências do fator  $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma) = \Phi_\alpha^{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma}$ . Usando a expansão dada na Eq. (2.126) até primeira ordem em  $N_E$ , obtemos o potencial efetivo méson-méson com a correção de ortogonalidade de ordem mais baixa em  $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$  dado por

$$V_{\text{mm}}^{\text{orto}(1)}(\alpha\beta; \gamma\delta) = V_{\text{mm}}^{\text{dir}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta) + \Delta H_{RGM}^{(1)}(\alpha\beta; \gamma\delta) + V_{\text{mm}}^{\text{ex}}(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (2.128)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta H_{RGM}^{(1)}(\alpha\beta; \gamma\delta) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} H(\mu\nu; \lambda\tau) \Delta(\lambda\tau; \mu'\sigma') \Phi_\delta^{\mu'\sigma} \Phi_\gamma^{\rho\sigma'} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\nu} H(\mu\nu; \lambda\tau) \Delta(\lambda\tau; \mu'\sigma') \Phi_\delta^{\rho\sigma'} \Phi_\gamma^{\mu'\sigma} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\mu'\nu'} \Phi_\gamma^{\rho\sigma} \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\mu\sigma} \Delta(\mu\nu; \lambda\tau) H(\lambda\tau; \mu'\nu') \Phi_\delta^{\rho\sigma} \Phi_\gamma^{\mu'\nu'}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Agora, para  $\Phi$ 's auto-funções do Hamiltoniano, e utilizando a propriedade

$$\Delta(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{\sigma\rho} = \Phi_\alpha^{\mu\nu} \quad (2.130)$$

obtemos que a correção de ortogonalização de ordem mais baixa cancela exatamente o termo  $V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}}$

$$V_{\text{mm}}^{\text{intra-ex}} + \Delta H_{\text{m}}^{(1)} = 0. \quad (2.131)$$

Podemos agora avaliar o “kernel de normalização” dado na Eq. (2.117). Inicialmente, separamos a parte espacial da parte de spin, sabor e cor:

$$N(\alpha\beta; \gamma\delta) = 1 - \omega N_E^{\text{esp}}(\mathbf{P}_\alpha \mathbf{P}_\beta; \mathbf{P}_\gamma \mathbf{P}_\delta), \quad (2.132)$$

onde

$$\omega = I_{\text{spin}} I_{\text{sabor}} I_{\text{cor}}. \quad (2.133)$$

Após avaliar os fatores de  $\omega$  encontramos

$$\omega = \frac{1}{6}. \quad (2.134)$$

No caso de funções de onda espaciais gaussianas, pode-se mostrar que  $N_E^{\text{esp}}$  satisfaz a seguinte propriedade:

$$[N_E^{\text{esp}}]^n = N_E^{\text{esp}}, \quad (2.135)$$

onde  $[N_E^{\text{esp}}]^n$  representa a n-ésima potência do “kernel de troca”. Essa propriedade permite obtermos uma expressão exata para a expansão da Eq. (2.126)

$$\begin{aligned} N^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}\omega N_E^{\text{esp}} + \frac{3}{8}\omega^2 [N_E^{\text{esp}}]^2 + \dots \\ &= 1 + \left[ -1 + 1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{8}\omega^2 \right] N_E^{\text{esp}} + \dots \end{aligned} \quad (2.136)$$

o que resulta em

$$N^{-\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon N_E^{\text{esp}} \quad (2.137)$$

onde

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1-\omega}} - 1. \quad (2.138)$$

Como  $\omega = \frac{1}{6}$ , obtemos

$$\varepsilon = 0.095441. \quad (2.139)$$

## Capítulo 3

# Decaimento Mesônico no Formalismo de Fock-Tani

A partir deste capítulo apresentaremos a parte inédita desta dissertação. Em particular, neste capítulo descrevemos em detalhe a representação de Fock-Tani para decaimentos mesônicos com a correção de ortogonalidade para este tipo de processo. Este cálculo será desenvolvido utilizando o Hamiltoniano de criação de par de quark-antiquark a partir do vácuo (1.22).

Como foi mencionado no capítulo 2, a idéia do formalismo de Fock-Tani consiste em efetuar-se uma mudança de representação, tal que os operadores associados às partículas compostas sejam reescritos em termos de operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Toda a complexidade formal relacionada com a estrutura interna do méson sendo transferida neste procedimento para a estrutura da interação efetiva entre mésons.

### 3.1 Hamiltoniano de Decaimento Mesônico de Fock-Tani

Nesta seção vamos desenvolver o formalismo de Fock-Tani para decaimentos mesônicos. Primeiramente descrevemos a obtenção do Hamiltoniano efetivo  $H_{FT}$  que representa o decaimento de um méson A em outros dois mésons B e C. Como é usual no formalismo de Fock-Tani o ponto de partida sempre é um Hamiltoniano microscópico que descreve a interação entre os constituintes. No nosso estudo, este Hamiltoniano será o  $H_I$  da Eq. (1.22). Inicia-se no cálculo escrevendo  $H_I$  na representação de momento, isto é, partindo de

$$H_I = g \int d\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}), \quad (3.1)$$

substituímos as expressões para os campos de Dirac dos quarks. Estes são expandidos, para um dado instante de tempo ( $t = 0$ ), em termos de contribuições de frequências positivas e

negativas (onde foram suprimidos os índices de sabor e cor, para simplificar)

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p} \sum_s e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[ u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p}) d_s^\dagger(-\vec{p}) \right] \quad (3.2)$$

com a seguinte normalização

$$u_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) = v_s^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) = \delta_{sr}. \quad (3.3)$$

Sendo os espinores dados por

$$u_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi_s \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$v_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}\chi_s^c \\ \chi_s^c \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Como  $\bar{\psi}(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x}) \gamma^0$ , a Eq. (3.1) pode ser escrita assim

$$\begin{aligned} H_I &= g \int d\vec{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} d\vec{p}' \sum_{ss'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \left[ u_{s'}^\dagger(\vec{p}') b_{s'}^\dagger(\vec{p}') + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}') d_{s'}^\dagger(-\vec{p}') \right] \gamma^0 \\ &\times \left[ u_s(\vec{p}) b_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p}) d_s^\dagger(-\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como foi visto no capítulo 1, para o decaimento mesônico o termo que é relevante para este tipo de processo é o termo  $b^\dagger d^\dagger$ , pois este é o termo que efetivamente cria um par quark-antiquark a partir do vácuo. Assim, considerando somente este termo, a Eq. (3.6) é reduzida a

$$\begin{aligned} H_{q\bar{q}} &= g \int d\vec{x} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} d\vec{p}' \sum_{ss'} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \left[ u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}) \right] \\ &= g \int d\vec{p} d\vec{p}' \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}) \\ &= g \int d\vec{p} d\vec{p}' \delta(\vec{p}-\vec{p}') \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(-\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(-\vec{p}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} = \delta(\vec{p}-\vec{p}'). \quad (3.8)$$

Trocando  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  obtemos

$$H_{q\bar{q}} = g \delta_{ff'} \delta_{cc'} \int d\vec{p} d\vec{p}' \delta(\vec{p}+\vec{p}') \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}') \gamma^0 v_s(\vec{p}) b_{s'}^\dagger(\vec{p}') d_s^\dagger(\vec{p}), \quad (3.9)$$

onde  $\delta_{ff'}$  e  $\delta_{cc'}$  são de sabor e cor respectivamente. Introduzindo a seguinte notação

$$\begin{array}{l}
 b \rightarrow q \\
 d \rightarrow \bar{q}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \mu = \begin{cases} \vec{p}' \\ s' \\ c' \\ f' \end{cases} \\
 \nu = \begin{cases} \vec{p} \\ s \\ c \\ f \end{cases}
 \end{array}
 \right.
 \quad (3.10)$$

obtemos uma nova representação para  $H_{q\bar{q}}$ , isto é,

$$H_{q\bar{q}} = V_{\mu\nu} q_{\mu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu}^{\dagger}, \quad (3.11)$$

onde  $V_{\mu\nu}$  é uma notação compacta para o potencial de criação de pares, definida por

$$V_{\mu\nu} \equiv g \delta_{f_{\mu} f_{\nu}} \delta_{c_{\mu} c_{\nu}} \int d^3 p_{\mu} d^3 p_{\nu} \delta(\vec{p}_{\mu} + \vec{p}_{\nu}) \sum_{s_{\mu} s_{\nu}} u_{s_{\mu}}^{\dagger}(\vec{p}_{\mu}) \gamma^0 v_{s_{\nu}}(\vec{p}_{\nu}). \quad (3.12)$$

Na expressão (3.11) usamos novamente a convenção da soma sobre índices repetidos (soma e/ou integração).

A aplicação da transformação de Fock-Tani sobre o Hamiltoniano (3.11) irá produzir uma expansão com inúmeras contribuições para os processos de decaimento. Isto significa que em termos de estrutura operatorial deve-se reter termos do tipo

$$m^{\dagger} m^{\dagger} m. \quad (3.13)$$

Esta escolha corresponde a um decaimento do tipo  $A \rightarrow B + C$ . A estrutura (3.13) implica que, em ordem mais baixa na expansão em potências da função de onda, deve-se truncar esta expansão em terceira ordem. A contribuição para a Eq. (3.11) será

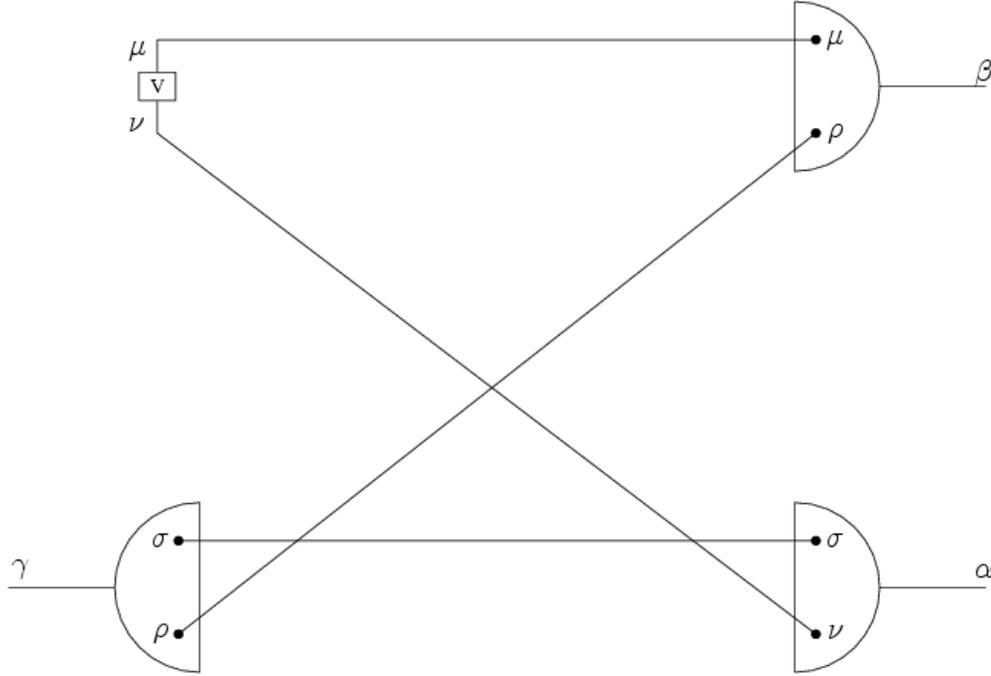
$$H_{FT} = V_{\mu\nu} q_{\mu}^{\dagger(3)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)} + V_{\mu\nu} q_{\mu}^{\dagger(1)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(2)}. \quad (3.14)$$

Das eqs. (2.55), (2.58), (2.74) e (2.77), temos que as contribuições destes termos são

$$\begin{aligned}
 q_{\mu}^{\dagger(3)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(0)} &\sim (m^{\dagger} m^{\dagger} m \bar{q}) \bar{q}^{\dagger} \\
 q_{\mu}^{\dagger(1)} \bar{q}_{\nu}^{\dagger(2)} &\sim (m^{\dagger} \bar{q}) \bar{q}^{\dagger} m^{\dagger} m.
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Desta forma, considerando as Eqs. dadas e inserindo no Hamiltoniano, Eq. (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}
 H_{FT} &= V_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_1} \Phi_{\beta}^{\rho\nu_1} \Phi_{\gamma}^{*\rho\sigma} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta} \bar{q}_{\sigma} \right] \bar{q}_{\nu}^{\dagger} + V_{\mu\nu} \left[ \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_1} m_{\alpha}^{\dagger} \bar{q}_{\nu_1} \right] \left[ -\frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{\mu_1\nu_2} \Phi_{\gamma}^{*\mu_1\nu} \bar{q}_{\nu_2}^{\dagger} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\beta} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_1} \Phi_{\beta}^{\rho\nu_1} \Phi_{\gamma}^{*\rho\sigma} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta} \bar{q}_{\sigma} \bar{q}_{\nu}^{\dagger} - \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_1} \Phi_{\beta}^{\mu_1\nu_2} \Phi_{\gamma}^{*\mu_1\nu} m_{\alpha}^{\dagger} \bar{q}_{\nu_1}^{\dagger} \bar{q}_{\nu_2}^{\dagger} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\beta} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$



**Fig. 3.1:** Representação diagramática de  $H_{FT}$  em (3.18).

Após o ordenamento normal dos quarks obteremos, os termos que nos interessam para o processo de decaimento. Assim,

$$H_{FT} = -\frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_1} \Phi_{\beta}^{\rho\nu_1} \Phi_{\gamma}^{*\rho\nu} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta} - \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \Phi_{\alpha}^{*\mu\nu_1} \Phi_{\beta}^{\mu_1\nu_1} \Phi_{\gamma}^{*\mu_1\nu} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\gamma}^{\dagger} m_{\beta}. \quad (3.17)$$

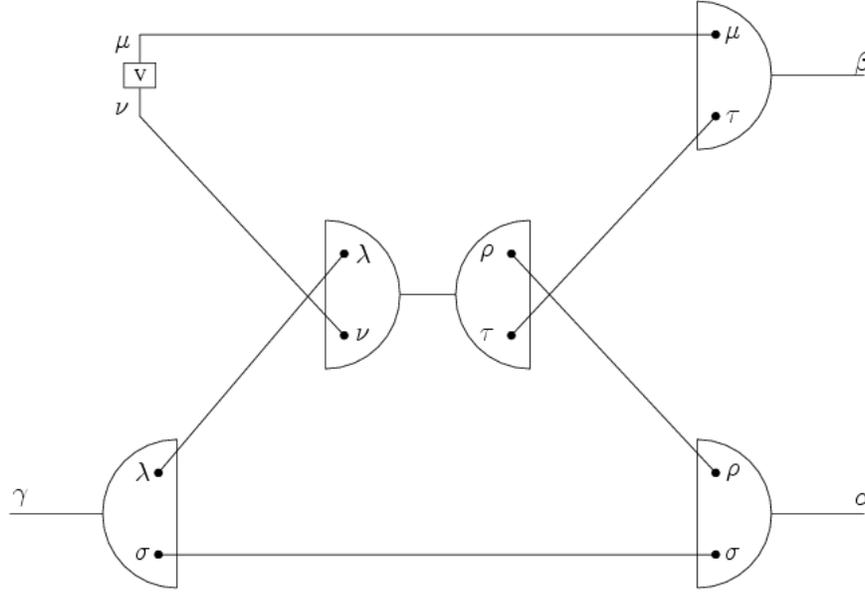
Se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os dois termos e então obter,

$$H_{FT} = -\Phi_{\alpha}^{*\mu\lambda} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \quad (3.18)$$

que é o Hamiltoniano de Fock-Tani para decaimentos de mésons. Uma representação diagramática de  $H_{FT}$  pode ser visto na figura (3.1). Mostraremos no próximo capítulo que  $H_{FT}$  é equivalente ao modelo  ${}^3P_0$  quando  $V_{\mu\nu}$  for o potencial de criação de pares e as funções de onda sendo gaussianas.

## 3.2 O modelo ${}^3P_0$ corrigido ( $C^3P_0$ )

O resultado da seção anterior pode ser colocado desta forma, se imaginarmos a característica expansão em potências da função de onda do formalismo de Fock-Tani, percebe-se que o modelo  ${}^3P_0$  é obtido em ordem mais baixa desta expansão, quando se considera como



**Fig. 3.2:** Primeiro diagrama da correção de ortogonalidade.

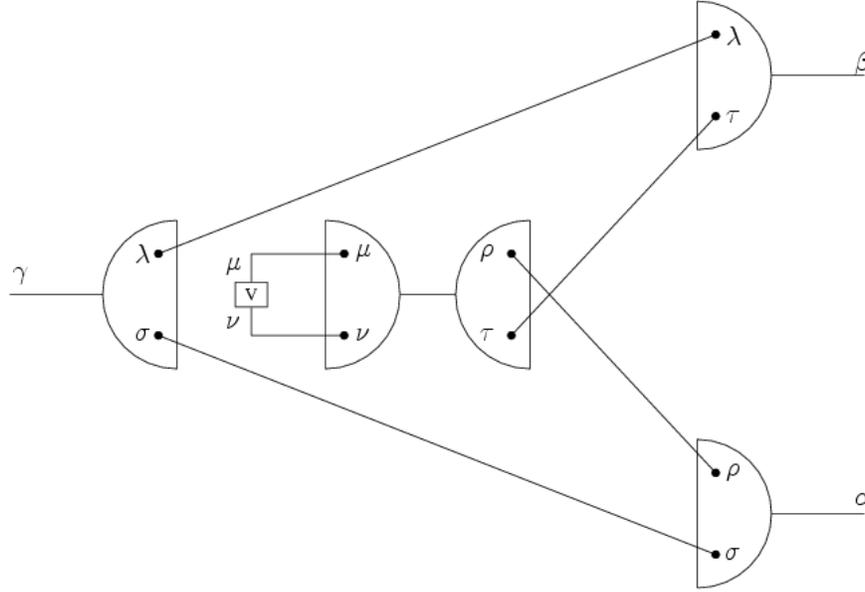
interação microscópica, o Hamiltoniano de criação de par  $H_{q\bar{q}}$  da Eq. (3.11), Como foi descrito no capítulo 2, o formalismo de Fock-Tani fornece um método para se obter interações efetivas e a introdução das correções de ortogonalidade corrigem o modelo de “ordem zero”

Vamos agora iniciar a dedução da primeira correção ao Hamiltoniano  $H_{FT}$  (3.18). Como esta correção irá implicar em corrigir os resultados do modelo  ${}^3P_0$ , adotaremos como o nome para este novo modelo corrigido de *modelo  $C^3P_0$* . Seguindo a lógica do que foi discutido no capítulo anterior, sobre o efeito de renormalização que as correções de ortogonalidade têm nos diversos setores da interação mesônica, podemos inicialmente escrever uma estrutura diagramática representativa deste efeito no setor de decaimento. O Hamiltoniano da correção irá conter termos que dependem de apenas uma  $\Delta(\mu\nu; \rho\sigma)$ , lembrando que na transformação de Fock-Tani irão surgir termos que contenham potências mais altas em  $\Delta$ .

Esta estrutura é descrita nos diagramas das figuras (3.2), (3.3) e (3.4). Destes diagramas podemos escrever uma expressão para a correção do Hamiltoniano  $H_{FT}$  (3.18)

$$\begin{aligned}
 H^{CO} = & \left[ -a_1 \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} + a_2 \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right. \\
 & \left. - a_3 \Phi_\alpha^{*\sigma\tau} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\rho\tau; \mu\lambda) \Phi_\gamma^{\sigma\lambda} \right] V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

A expressão (3.19) contém todas as possíveis conexões das linhas de quarks entre  $V_{\mu\nu}$  e o *kernel de estado ligado*  $\Delta$ . Os sinais relativos estão associados ao número de cruzamentos de linhas de quarks. Um cruzamento implica em uma mudança de sinal, enquanto dois cruzamentos não modifica o sinal. O sinal original de  $H_{FT}$  é negativo, assim o diagrama



**Fig. 3.3:** Segundo diagrama da correção de ortogonalidade.

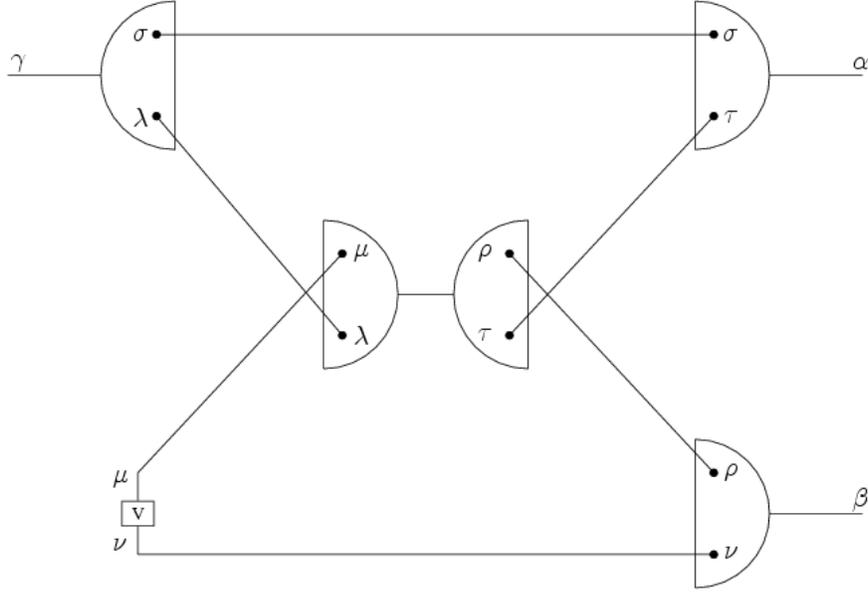
(3.2), que corresponde ao primeiro termo de (3.19), deve ser negativo (2 cruzamentos). O diagrama (3.3) contém um cruzamento, portanto em relação a  $H_{FT}$  ele deve ser positivo [segundo termo de (3.19)]. O último termo de (3.19) corresponde ao diagrama (3.4) e tem o mesmo comportamento que o diagrama (3.2). Os parâmetros  $a_i$  da Eq. (3.19) serão determinados no cálculo a seguir.

Desta discussão geral e qualitativa podemos utilizar o Hamiltoniano  $H^{CO}$  de (3.19) como guia para efetivamente obter, a partir do formalismo de Fock-Tani, os operadores de quark  $q_\mu$  e antiquark  $\bar{q}_\nu$  transformados que fornecem esta estrutura. Num primeiro momento observamos que  $H^{CO}$ , em termos de potências da função de onda, corresponde à potência 5. Em outras palavras, para um par  $q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger$  do Hamiltoniano  $H_{q\bar{q}}$  da Eq. (3.11), devemos escrever combinações de ordem 5. Desta forma, o Hamiltoniano transformado correspondente, que incorpora esta restrição, é obtido pela seguinte combinação de operadores

$$H^{CO} = H_1^{CO} + H_2^{CO} + H_3^{CO} = V_{\mu\nu} \left[ q_\mu^{\dagger(3)} \bar{q}_\nu^{\dagger(2)} + q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(4)} + q_\mu^{\dagger(5)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} \right]. \quad (3.20)$$

Não é difícil perceber que será necessário avaliar os operadores de quarta e quinta ordem no Fock-Tani. A obtenção de  $H_1^{CO}$  é simples e segue, utilizando as equações (2.74) e (2.77) que após ordenamento normal fornece

$$H_1^{CO} = V_{\mu\nu} q_\mu^{\dagger(3)} \bar{q}_\nu^{\dagger(2)} = \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.21)$$



**Fig. 3.4:** Terceiro diagrama da correção de ortogonalidade.

A obtenção de  $H_2^{CO}$  implica em avaliar o seguinte produto

$$q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(4)} = \left( \Phi_\alpha^{*\mu\tau} m_\alpha^\dagger \bar{q}_\tau \right) \bar{q}_\nu^{\dagger(4)}. \quad (3.22)$$

Desta forma vemos que  $\bar{q}_\nu^{\dagger(4)}$  deve contribuir com a estrutura operatorial que segue

$$\bar{q}_\nu^{\dagger(4)} \sim m^\dagger m \bar{q}^\dagger. \quad (3.23)$$

O cálculo de  $\bar{q}_\nu^{\dagger(4)}$  é bastante longo e exige a presença do gerador de quarta ordem. A obtenção deste gerador bem como de  $\bar{q}_\nu^{(4)}$  é apresentado, em detalhe, nos apêndices D e H. Substituindo as Eqs. (2.58) e (H.35), onde tomamos o hermitiano da Eq. (H.35), na expressão para  $H_2^{CO}$  e efetuando o ordenamento normal obtemos

$$H_2^{CO} = V_{\mu\nu} q_\mu^{\dagger(1)} \bar{q}_\nu^{\dagger(4)} = -\frac{1}{8} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.24)$$

Uma observação que pode ser feita do cálculo feito até o momento é que

$$H_1^{CO} + H_2^{CO} = \frac{1}{8} V_{\mu\nu} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.25)$$

Desta forma, concluímos que as contribuições mais relevantes para a correção de ortogonalidade vão ser oriundas do  $H_3^{CO}$  e em essência do operador  $q_\mu^{\dagger(5)}$ . A estrutura de  $H_3^{CO}$  em (3.20) contém

$$q_\mu^{\dagger(5)} \bar{q}_\nu^{\dagger(0)} = q_\mu^{\dagger(5)} \bar{q}_\nu^\dagger \quad (3.26)$$

e isto significa que

$$q_\mu^{\dagger(5)} \sim m^\dagger m^\dagger m \bar{q}. \quad (3.27)$$

A equação de movimento para o  $q_\mu^{\dagger(5)}$  é obtida a partir da equação abaixo (expandida até quinta ordem)

$$\begin{aligned} \frac{dq_\nu^\dagger}{dt} = & -\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}(t) \\ & -\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^\dagger(t) \Delta_{\beta\alpha}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) \\ & +\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} \Phi_\beta^{\sigma\nu'} [\tilde{M}_\alpha^\dagger(t) q_\sigma^\dagger(t) m_\beta(t) - m_\alpha^\dagger(t) q_\sigma^\dagger(t) \tilde{M}_\beta(t)] \\ & +\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} \Phi_\beta^{\rho\nu'} \Phi_\gamma^{\rho\sigma} [m_\gamma^\dagger(t) \tilde{M}_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_\sigma(t) \tilde{M}_\beta(t) + m_\alpha^\dagger(t) \tilde{M}_\gamma^\dagger(t) \bar{q}_\sigma(t) \tilde{M}_\beta(t)] \\ & +\frac{1}{2}\left\{ \Delta(\rho\nu'; \mu\nu) \Phi_\alpha^{\mu'\sigma} \Phi_\gamma^{*\mu'\nu'} + \Delta(\mu'\sigma; \mu\nu) \Phi_\alpha^{\rho\nu'} \Phi_\gamma^{*\mu'\sigma} \right\} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger \bar{q}_\nu m_\alpha \\ & +\frac{1}{2}\left\{ \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \Phi_\alpha^{*\mu'\sigma} \Phi_\beta^{*\rho\nu'} + \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \Phi_\alpha^{*\rho\nu'} \Phi_\beta^{*\mu'\sigma} \right\} m_\alpha^\dagger M_\beta^\dagger \bar{q}_\sigma q_\rho \bar{q}_\nu \\ & + [q_\mu^\dagger, m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha^{(4)} - \tilde{M}_\alpha^{(4)} m_\alpha] \\ & + [q_\mu^\dagger, m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha^{(5)} - \tilde{M}_\alpha^{(5)} m_\alpha]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Vamos estudar termo a termo.

$$(a) \quad -\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}(t)$$

Expandindo este termo até quinta ordem em potências da função de onda, temos

$$\begin{aligned} -\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}(t) = & -\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} [m_\alpha^{\dagger(3)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(1)}(t) + m_\alpha^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(4)}(t) + m_\alpha^{\dagger(4)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(0)}(t) \\ & + m_\alpha^{\dagger(2)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(2)}(t)]. \end{aligned}$$

De onde vemos que o primeiro e o quarto termo não contribuem pois não geram  $m$  ou  $m^\dagger$ , mas ao contrário geram contribuições com  $M$  ou  $M^\dagger$ . O terceiro termo também não contribui por já estar em ordenamento normal, visto que  $\bar{q}_{\nu'}^{(0)}(t) = \bar{q}_{\nu'}$ . A única contribuição que resulta será

$$-\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}(t) = -\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(4)}(t) = -\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^\dagger \cos t \bar{q}_{\nu'}^{(4)}(t).$$

Novamente temos

$$\bar{q}_{\nu'}^{(4)}(t) \sim m^\dagger m \bar{q} \quad (3.29)$$

usando o resultado calculado no apêndice H para  $\bar{q}_{\nu'}^{(4)}(t)$ , Eq. (H.35), obtemos

$$\bar{q}_{\nu'}^{(4)}(t) = -\frac{1}{8} \Delta(\mu'\nu', \lambda\omega) \Phi_\gamma^{*\mu'\tau} \Phi_\beta^{\lambda\tau} \bar{q}_\omega m_\gamma^\dagger m_\beta \sin^2 t \quad (3.30)$$

ou seja,

$$-\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}(t) = \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\omega) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \bar{q}_\omega m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \cos t \sin^2 t. \quad (3.31)$$

Para obter a contribuição para  $q^{\dagger(5)}$  é preciso integrar

$$\int_0^{-\pi/2} dt \cos t \sin^2 t = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{-\pi/2} = -\frac{1}{3}. \quad (3.32)$$

A contribuição para  $q_\mu^{\dagger(5)}$  deste termo é

$$-\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\alpha^\dagger(t) \bar{q}_{\nu'}(t) = -\frac{1}{24} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\omega) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_\omega. \quad (3.33)$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$H_{3a}^{CO} = -\frac{1}{24} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.34)$$

(b)  $-\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^\dagger(t) \Delta_{\beta\alpha}(t) \bar{q}_{\nu'}(t)$ :

Expandindo este termo até quinta ordem em potências da função de onda, temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^\dagger(t) \Delta_{\beta\alpha}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu'} \left[ m_\beta^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(4)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(0)}(t) \right. \\ &\quad + m_\beta^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(2)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(2)}(t) \\ &\quad + m_\beta^{\dagger(2)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(2)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(0)}(t) \\ &\quad + m_\beta^{\dagger(1)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(3)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(0)}(t) \\ &\quad + m_\beta^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(3)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(1)}(t) \\ &\quad \left. + m_\beta^{\dagger(1)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(2)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(1)}(t) \right]. \end{aligned}$$

De onde vemos que o quarto e o sexto termo são nulos e assim não contribuem. O segundo termo também não contribui visto que a  $\Delta \sim \bar{q}^\dagger \bar{q} + q^\dagger q$ , e o  $\bar{q}^{(2)} \sim \bar{q}$ , ou seja, já estão em ordenamento normal. Finalmente, o terceiro termo também não contribui visto que  $\bar{q}^{(0)} = \bar{q}$ , ou seja, também já esta em ordenamento normal. Assim,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^\dagger(t) \Delta_{\beta\alpha}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) &= -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu'} \left[ m_\beta^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(4)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(0)}(t) \right. \\ &\quad \left. + m_\beta^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(3)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(1)}(t) \right]. \end{aligned}$$

O primeiro termo fica

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(4)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(0)}(t) &= -\frac{1}{2} \Phi_\beta^{*\rho\tau} \Delta(\rho\epsilon; \mu\nu') \Phi_\gamma^{*\omega\epsilon} \Phi_\delta^{\omega\tau} m_\beta^\dagger m_\gamma^\dagger m_\delta \bar{q}_{\nu'} \sin^2 t \cos t \\ &\quad -\frac{1}{2} \Phi_\beta^{*\rho\tau} \Delta(\eta\tau; \mu\nu') \Phi_\gamma^{*\eta\omega} \Phi_\delta^{\rho\omega} m_\beta^\dagger m_\gamma^\dagger m_\delta \bar{q}_{\nu'} \sin^2 t \cos t. \end{aligned}$$

O segundo termo fornece

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^\dagger{}^{(0)}(t) \Delta_{\beta\alpha}^{(3)}(t) \bar{q}_{\nu'}^{(1)}(t) &= \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\rho\tau} \Phi_\gamma^{*\omega\epsilon} \Delta(\rho\epsilon; \mu\nu') \Phi_\delta^{\omega\nu'} m_\beta^\dagger m_\gamma^\dagger m_\delta \bar{q}_\tau \sin^2 t \cos t \\
 &+ \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\rho\tau} \Phi_\gamma^{*\eta\omega} \Delta(\eta\tau; \mu\nu') \Phi_\delta^{\rho\nu'} m_\beta^\dagger m_\gamma^\dagger m_\delta \bar{q}_\omega \sin^2 t \cos t.
 \end{aligned}$$

A contribuição

$$-\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^\dagger(t) \Delta_{\beta\alpha}(t) \bar{q}_{\nu'}(t)$$

é a soma dos dois termos acima e após a integração de 0 a  $-\pi/2$  resulta em

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu\nu'} m_\beta^\dagger(t) \Delta_{\beta\alpha}(t) \bar{q}_{\nu'}(t) &= \frac{1}{3}\Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{*\omega\epsilon} \Delta(\rho\epsilon; \mu\nu') \Phi_\gamma^{\omega\tau} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_{\nu'} \\
 &- \frac{1}{3}\Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{*\omega\epsilon} \Delta(\rho\epsilon; \mu\nu') \Phi_\gamma^{\omega\nu'} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_\tau.
 \end{aligned}$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$H_{3b}^{CO} = \frac{1}{3} \left[ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} - \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right] V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.35)$$

(c)  $\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'} \phi_\beta^{\sigma\nu'} \tilde{M}_\alpha^\dagger(t) q_\sigma^\dagger(t) m_\beta(t)$ :

Expandindo este termo até quinta ordem em potências da função de onda, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'} \phi_\beta^{\sigma\nu'} \tilde{M}_\alpha^\dagger(t) q_\sigma^\dagger(t) m_\beta(t) &= \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'} \phi_\beta^{\sigma\nu'} \left[ \tilde{M}_\alpha^{\dagger(3)}(t) q_\sigma^{\dagger(0)}(t) m_\beta^{(0)}(t) \right. \\
 &+ \tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_\sigma^{\dagger(3)}(t) m_\beta^{(0)}(t) + \tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_\sigma^{\dagger(0)}(t) m_\beta^{(3)}(t) \\
 &\left. + \tilde{M}_\alpha^{\dagger(2)}(t) q_\sigma^{\dagger(1)}(t) m_\beta^{(0)}(t) + \tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(t) q_\sigma^{\dagger(1)}(t) m_\beta^{(2)}(t) \right]
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

De onde vemos que estes termos não contribuem, na forma usual de  $\tilde{M}$ , para a correção de ortogonalidade, pois não geram a estrutura da Eq. (3.27) que buscamos para os termos de  $q_\mu^{\dagger(5)}$ . Porém, utilizando as equações de movimento adicionais apresentadas em detalhes no apêndice G, vemos que, da Eq. (G.24), o primeiro termo da Eq. (3.36) contribui para a correção de ortogonalidade. Assim, o primeiro termo fica

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'} \phi_\beta^{\sigma\nu'} \tilde{M}_\alpha^{\dagger(3)}(t) q_\sigma^{\dagger(0)}(t) m_\beta^{(0)}(t) &= \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'} \phi_\beta^{\sigma\nu'} M_\delta^{\dagger(0)}(t) M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \\
 &[\Delta_{\gamma\alpha}, M_\delta] q_\sigma^{\dagger(0)}(t) m_\beta^{(0)}(t)
 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo as Eqs. (2.54) e (C.61), colocando em ordenamento normal, encontramos

$$\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'} \phi_\beta^{\sigma\nu'} \tilde{M}_\alpha^{\dagger(3)}(t) q_\sigma^{\dagger(0)}(t) m_\beta^{(0)}(t) = -\frac{1}{2}\phi_\delta^{*\xi\tau} \phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Delta(\xi\eta; \mu\nu') \phi_\beta^{\sigma\nu'} m_\delta^\dagger m_\gamma^\dagger \bar{q}_\tau m_\beta \cos t \sin^2 t \quad (3.38)$$

Redefinindo os índices mudos da Eq. (3.38), temos

$$\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}\tilde{M}_\alpha^{\dagger(3)}(t)q_\sigma^{\dagger(0)}(t)m_\beta^{(0)}(t) = -\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\rho\nu'}\phi_\beta^{*\lambda\tau}\Delta(\rho\tau,\mu\sigma)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger\bar{q}_\nu m_\gamma \cos t \sin^2 t \quad (3.39)$$

Integrando a Eq. (3.39) de 0 a  $-\pi/2$ , encontramos para esta contribuição

$$\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}\tilde{M}_\alpha^\dagger(t)q_\sigma^\dagger(t)m_\beta(t) = \frac{1}{6}\phi_\alpha^{*\rho\nu'}\phi_\beta^{*\lambda\tau}\Delta(\rho\tau,\mu\sigma)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_\nu \quad (3.40)$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$H_{3c}^{CO} = \frac{1}{6}\phi_\alpha^{*\rho\nu'}\phi_\beta^{*\lambda\tau}\Delta(\rho\tau,\mu\sigma)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}V_{\mu\nu}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \quad (3.41)$$

(d)  $-\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}m_\alpha^\dagger(t)q_\sigma^\dagger(t)\tilde{M}_\beta(t)$ :

Expandindo este termo até quinta ordem em potências da função de onda, temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}m_\alpha^\dagger(t)q_\sigma^\dagger(t)\tilde{M}_\beta(t) &= -\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}\left[m_\alpha^{\dagger(3)}(t)q_\sigma^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \right. \\ &+ m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_\sigma^{\dagger(3)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) + m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_\sigma^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(3)}(t) \\ &+ \left. m_\alpha^{\dagger(2)}(t)q_\sigma^{\dagger(1)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) + m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_\sigma^{\dagger(1)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t)\right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

De onde vemos que estes termos não contribuem, na forma usual de  $\tilde{M}$ , para a correção de ortogonalidade, pois não geram a estrutura da Eq. (3.27) que buscamos para os termos de  $q_\mu^{\dagger(5)}$ . Porém, utilizando as equações de movimento adicionais apresentadas em detalhes no apêndice G, vemos que, da Eq. (G.21), o quinto termo da Eq. (3.42) contribui para a correção de ortogonalidade. Assim, substituindo as Eqs. (2.54), (2.58) e (G.21) no quinto termo da Eq. (3.42), colocando em ordenamento normal, encontramos

$$-\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_\sigma^{\dagger(1)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t) = \frac{1}{4}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\delta^{*\sigma\chi}\Delta(\sigma\nu',\xi\eta)\phi_\gamma^{\xi\chi}m_\alpha^\dagger m_\delta^\dagger\bar{q}_\eta m_\gamma \cos t \sin^2 t \quad (3.43)$$

Redefinindo os índices mudos da Eq. (3.43), temos

$$-\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_\sigma^{\dagger(1)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t) = \frac{1}{4}\phi_\alpha^{*\rho\sigma}\phi_\beta^{*\mu\tau}\Delta(\rho\tau,\lambda\eta)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger\bar{q}_\eta m_\gamma \cos t \sin^2 t \quad (3.44)$$

Integrando a Eq. (3.44) de 0 a  $-\pi/2$ , encontramos para esta contribuição

$$-\frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\sigma\nu'}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)q_\sigma^{\dagger(1)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t) = -\frac{1}{12}\phi_\alpha^{*\rho\sigma}\phi_\beta^{*\mu\tau}\Delta(\rho\tau,\lambda\eta)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_\eta \quad (3.45)$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$H_{3d}^{CO} = -\frac{1}{12}\phi_\alpha^{*\rho\sigma}\phi_\beta^{*\mu\tau}\Delta(\rho\tau, \lambda\nu)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}V_{\mu\nu}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \quad (3.46)$$

$$(e) \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}\left[m_\gamma^\dagger(t)\tilde{M}_\alpha^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t) + m_\alpha^\dagger(t)\tilde{M}_\gamma^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t)\right]:$$

Expandindo cada um deste termos até quinta ordem em potências da função de onda, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^\dagger(t)\tilde{M}_\alpha^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t) &= \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(2)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\alpha^{\dagger(2)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^{\dagger(2)}(t)\tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^\dagger(t)\tilde{M}_\gamma^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t) &= \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(2)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\gamma^{\dagger(2)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\ &+ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^{\dagger(2)}(t)\tilde{M}_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \end{aligned} \quad (3.48)$$

De onde vemos que os termos que contribuem são:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^\dagger(t)\tilde{M}_\alpha^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t) &= \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t) \\ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^\dagger(t)\tilde{M}_\gamma^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t) &= \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^{\dagger(0)}(t)\tilde{M}_\gamma^{\dagger(0)}(t)\bar{q}_\sigma^{(0)}(t)\tilde{M}_\beta^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Substituindo as Eqs. (II.42) e (mdt-ad-22), colocando em ordenamento normal e integrando de 0 a  $-\pi/2$  as Eqs. de (3.49), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\gamma^\dagger(t)\tilde{M}_\alpha^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t) &= \frac{1}{12}\phi_\alpha^{*\rho\sigma}\phi_\beta^{*\mu\tau}\Delta(\rho\tau, \lambda\eta)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_\eta \\ \frac{1}{2}\phi_\alpha^{*\mu\nu'}\phi_\beta^{\rho\nu'}\phi_\gamma^{*\rho\sigma}m_\alpha^\dagger(t)\tilde{M}_\gamma^\dagger(t)\bar{q}_\sigma(t)\tilde{M}_\beta(t) &= \frac{1}{12}\phi_\alpha^{*\rho\sigma}\phi_\beta^{*\mu\tau}\Delta(\rho\tau, \lambda\eta)\phi_\gamma^{\lambda\sigma}m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_\eta \end{aligned} \quad (3.50)$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$  na Eq. (3.50), temos

$$H_{3e}^{CO} = \frac{1}{6} \phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\nu) \phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \quad (3.51)$$

$$(f) \frac{1}{2} \left\{ \Delta(\rho\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{\mu'\sigma} \phi_{\gamma}^{*\mu'\nu'} + \Delta(\mu'\sigma; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{\rho\nu'} \phi_{\gamma}^{*\mu'\nu'} \right\} M_{\gamma}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\sigma}^{\dagger}(t) q_{\rho}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\nu}(t) m_{\alpha}(t):$$

De onde vemos que o único termo que contribue é

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta(\rho\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{\mu'\sigma} \phi_{\gamma}^{*\mu'\nu'} + \Delta(\mu'\sigma; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{\rho\nu'} \phi_{\gamma}^{*\mu'\nu'} \right\} M_{\gamma}^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma}^{\dagger(1)}(t) q_{\rho}^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\nu}^{(0)}(t) m_{\alpha}^{(0)}(t) \quad (3.52)$$

Substituindo as Eqs. (2.54) e (2.58), colocando em ordenamento normal e integrando de 0 a  $-\pi/2$  a Eq. (3.52), obtemos para esta contribuição

$$\frac{1}{3} \left\{ \Delta(\rho\tau; \mu\xi) \phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \bar{q}_{\xi} \quad (3.53)$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$H_{3f}^{CO} = \frac{1}{3} \left\{ \phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} V_{\mu\nu} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \quad (3.54)$$

$$(g) \frac{1}{2} \left\{ \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{*\mu'\sigma} \phi_{\beta}^{*\rho\nu'} + \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{*\rho\nu'} \phi_{\beta}^{*\mu'\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger}(t) M_{\beta}^{\dagger}(t) \bar{q}_{\sigma}(t) q_{\rho}(t) \bar{q}_{\nu}(t):$$

De onde vemos que os únicos termos que contribuem são

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{*\mu'\sigma} \phi_{\beta}^{*\rho\nu'} + \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{*\rho\nu'} \phi_{\beta}^{*\mu'\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger(0)} M_{\beta}^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma}^{(0)}(t) q_{\rho}^{(1)}(t) \bar{q}_{\nu}^{(0)}(t) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{*\mu'\sigma} \phi_{\beta}^{*\rho\nu'} + \Delta(\mu'\nu'; \mu\nu) \phi_{\alpha}^{*\rho\nu'} \phi_{\beta}^{*\mu'\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger(0)} M_{\beta}^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\sigma}^{(0)}(t) q_{\rho}^{(0)}(t) \bar{q}_{\nu}^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Substituindo as Eqs. (2.54) e (2.58), colocando em ordenamento normal e integrando de 0 a  $-\pi/2$  na Eq. (3.55), obtemos para estas contribuições

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{3} \left\{ \phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\xi) \phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \bar{q}_{\xi} \\ &+ \frac{1}{3} \left\{ \phi_{\alpha}^{*\rho\xi} \phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\sigma) \phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \bar{q}_{\xi} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$\begin{aligned} H_{3g}^{CO} &= -\frac{1}{3} V_{\mu\nu} \left\{ \phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \\ &+ \frac{1}{3} V_{\mu\nu} \left\{ \phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \phi_{\beta}^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\sigma) \phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta}^{\dagger} m_{\gamma} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$(h) \left[ q_\mu^\dagger, m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha^{(4)} - \tilde{M}_\alpha^{\dagger(4)} m_\alpha \right]:$$

O gerador de quarta ordem é apresentado no apêndice D. A única contribuição para o cálculo da correção de ortogonalidade será

$$\left[ q_\mu^\dagger, m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha^{(4)} - \tilde{M}_\alpha^{\dagger(4)} m_\alpha \right] = \frac{1}{6} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu') \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_{\nu'}. \quad (3.58)$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$H_{3h}^{CO} = \frac{1}{6} \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.59)$$

$$(i) \left[ q_\mu^\dagger, m_\alpha^\dagger \tilde{M}_\alpha^{(5)} - \tilde{M}_\alpha^{\dagger(5)} m_\alpha \right]$$

O gerador de quinta ordem é apresentado no apêndice E. A única contribuição para o cálculo da correção de ortogonalidade será

$$-\frac{5}{12} \left[ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\nu') \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} + \Phi_\alpha^{*\rho\nu'} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau, \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right] m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \bar{q}_{\nu'}.$$

Incluindo  $V_{\mu\nu}$ , temos

$$H_{3i}^{CO} = -\frac{5}{12} \left[ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau, \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} + \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau, \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right] V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.60)$$

Substituindo as contribuições para a correção de ortogonalidade que são dadas pelas Eqs. (3.25), (3.34), (3.35), (3.41), (3.46), (3.51), (3.54), (3.57), (3.59) e (3.60)) na Eq. (3.20), obtemos finalmente

$$H^{CO} = \frac{1}{4} \left[ -\Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} + 2 \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} - \Phi_\alpha^{*\sigma\tau} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\rho\tau; \mu\lambda) \Phi_\gamma^{\sigma\lambda} \right] V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (3.61)$$

Comparando a Eq. (3.61) com a Eq. (3.19), encontramos

$$a_1 = \frac{1}{4}; \quad a_2 = \frac{1}{2}; \quad a_3 = \frac{1}{4}. \quad (3.62)$$

Da discussão do capítulo anterior sobre as propriedades das correções de ortogonalidade, foi mostrado que existirão outras contribuições de ordem mais alta. Estas contribuições formarão uma série contendo potências da  $\Delta$ . Para o problema de espalhamento de mésons foi comentado que no caso de funções de onda espaciais gaussianas,  $N_E^{\text{esp}}$  tinha a seguinte propriedade:

$$[N_E^{\text{esp}}]^n = N_E^{\text{esp}}, \quad (3.63)$$

onde  $[N_E^{\text{esp}}]^n$  representa a n-ésima potência do “kernel de troca”, o que permitia escrever

$$N^{-\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon N_E^{\text{esp}}. \quad (3.64)$$

No problema que estamos estudando agora, não conhecemos a série inteira e talvez, pela sua complexidade algébrica, não seja possível obter termos dependentes de  $\Delta$  com potências superiores a um. Desta forma fica quase impossível visualizar qualquer estrutura lógica que indique uma forma de somar a série. Um solução para este problema consiste em proceder de forma conservadora, isto é, admitir como um “ansatz” uma condição similar à (3.63). No contexto que estamos tratando uma relação que incorpora os mesmos aspectos físicos da relação (3.63) é

$$[\Delta]^n \approx \Delta. \quad (3.65)$$

Esta hipótese é razoável tendo em visto que no modelo de quarks (não - relativístico) utiliza-se universalmente funções de onda gaussianas. Assumindo esta *hipótese de soma* da série podemos, escrever  $H^{CO}$

$$\begin{aligned} H^{CO} \approx \varepsilon \left[ -\Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Delta(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} + 2 \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \Delta(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right. \\ \left. - \Phi_\alpha^{*\sigma\tau} \Phi_\beta^{*\rho\nu} \Delta(\rho\tau; \mu\lambda) \Phi_\gamma^{\sigma\lambda} \right] V_{\mu\nu} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Esta expressão obtida na Eq. (3.66) representa a soma da série, onde todos os efeitos de mais alta ordem estão contidos efetivamente no parâmetro  $\varepsilon$ . Este parâmetro será tomado como um parâmetro livre no nosso modelo, com liberdade para variar de 0 a 1. No caso do espalhamento de mésons, o respectivo parâmetro  $\varepsilon$  era numericamente pequeno ( $\varepsilon = 0.095441$ ). Portanto, não será surpreendente se as correções de ortogonalidade para decaimentos também se ajustarem melhor para valores pequenos de  $\varepsilon$ . Desta maneira chegamos na forma final para o modelo  $C^3P_0$  somando as Eqs. (3.18) e (3.66), ou seja,

$$H^{C3P0} = H_{FT} + H^{CO}. \quad (3.67)$$

No próximo capítulo faremos aplicações do modelo para os decaimentos dos mésons discutidos no capítulo 1.

## Capítulo 4

# Aplicações do Formalismo de Fock-Tani

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações do formalismo de Fock-Tani para decaimentos de mésons. Usaremos, como interação microscópica,  $V_{\mu\nu}$ , a equação (3.12) associada ao modelo  ${}^3P_0$  apresentada no capítulo 3. Entre as aplicações que pretendemos apresentar estão os processos de decaimentos  $\rho \rightarrow \pi\pi$  e  $b_1 \rightarrow \omega\pi$ , demonstrando o cálculo para decaimentos onde todas as partículas tem funções de onda com  $L = 0$  e um segundo exemplo onde temos partículas com  $L = 1$  (neste caso o  $b_1$ ), e também a correção de ortogonalidade para os mesmos processos. Além disso, será feita uma comparação entre o modelo  ${}^3P_0$  e o  $C^3P_0$ . Resultados parciais destes cálculos foram apresentados na *11th International Conference on Hadron Spectroscopy (Hadron05)* [37].

### 4.1 Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+\pi^0$

O objetivo desta seção é o de mostrar explicitamente o cálculo para um processo de decaimento no qual as partículas envolvidas neste processo possuem momento angular  $L = 0$  e encontrar a taxa de decaimento  $\Gamma$  do processo aqui desenvolvido. Para isto, visto que  $\Gamma$  é proporcional ao módulo quadrado da amplitude de decaimento  $h_{fi}$ , iremos primeiramente encontrar a amplitude de decaimento, bem como calcular explicitamente as partes de cor, sabor, spin e espaço. Consideremos a transição  $m_\gamma \rightarrow m_\alpha + m_\beta$ , onde

$$\begin{aligned} |i\rangle &= m_\gamma^\dagger |0\rangle \\ |f\rangle &= m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

Da Eq. (3.18), o elemento de matriz resultante é

$$\langle f | H_{FT} | i \rangle = -\Phi_{\alpha'}^{*\mu\lambda} \Phi_{\beta'}^{*\rho\nu} \Phi_{\gamma'}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} V \langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_{\gamma'} m_\gamma^\dagger | 0 \rangle. \quad (4.2)$$

Avaliando a Eq. (4.2), temos que

$$\langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_{\gamma'} m_\gamma^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\gamma\gamma'} \langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | m_\alpha m_\beta m_{\alpha'}^\dagger m_{\beta'}^\dagger m_{\gamma'} m_\gamma^\dagger | 0 \rangle = \delta_{\gamma\gamma'} (\delta_{\alpha'\beta} \delta_{\alpha\beta'} + \delta_{\beta\beta'} \delta_{\alpha\alpha'}). \quad (4.3)$$

Assim, levando a Eq. (4.3) na Eq. (4.2), obtemos

$$\begin{aligned} \langle f | H_{FT} | i \rangle &= -\Phi_{\alpha'}^{*\mu\lambda} \Phi_{\beta'}^{*\rho\nu} \Phi_{\gamma'}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \delta_{\gamma\gamma'} (\delta_{\alpha'\beta} \delta_{\alpha\beta'} + \delta_{\beta\beta'} \delta_{\alpha\alpha'}) \\ &= -\Phi_{\alpha'}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\lambda} \Phi_{\gamma}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} - \Phi_{\alpha}^{*\mu\lambda} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ou ainda,

$$\langle f | H_{FT} | i \rangle = -d_1 - d_2 \quad (4.5)$$

onde  $d_1$  e  $d_2$  são dados por

$$\begin{aligned} d_1 &= \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\mu\lambda} \Phi_{\gamma}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \\ d_2 &= \Phi_{\alpha}^{*\mu\lambda} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho\lambda} V_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo  $V_{\mu\nu}$  o potencial de interação definido de forma genérica

$$V_{\mu\nu} = V_{f_\mu f_\nu} V_{c_\mu c_\nu}^c V_{s_\mu s_\nu}^{s-e} (\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \quad (4.7)$$

Assim, calcularemos os termos de cor, sabor e spin para depois calcularmos o termo espacial.

- Cálculo da parte de sabor:

Como foi discutido no apêndice B sobre a função de onda, a parte de sabor resulta em

$$\begin{aligned} d_1^f &= f_3^{f\rho f_\nu} f_2^{f\mu f_\lambda} f_1^{f\rho f_\lambda} V_{f_\mu f_\nu} \\ d_2^f &= f_3^{f\mu f_\lambda} f_2^{f\rho f_\nu} f_1^{f\rho f_\lambda} V_{f_\mu f_\nu}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como não há interação que mude o sabor, o potencial de interação (parte de sabor)  $V_{f_\mu f_\nu}$  fica

$$V_{f_\mu f_\nu} = \delta_{f_\mu f_\nu}. \quad (4.9)$$

Combinando as Eqs. (4.8) e (4.9), temos então

$$\begin{aligned} d_1^f &= f_3^{f\rho f_\nu} f_2^{f\mu f_\lambda} f_1^{f\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_2^f &= f_3^{f\mu f_\lambda} f_2^{f\rho f_\nu} f_1^{f\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

- Cálculo da parte de cor:

Quanto ao cálculo da parte de cor, sabemos que a função de onda da parte de cor é dada por

$$C^{c_\mu c_\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_2^{c_\mu c_\nu} \quad (4.11)$$

Introduzindo a definição da função de onda de cor (Eq. (4.11)) na Eq. (4.6) e analisando somente a parte de cor, temos

$$\begin{aligned} d_1^c &= C^{c_\rho c_\nu} C^{c_\mu c_\lambda} C^{c_\rho c_\lambda} V_{c_\mu c_\nu}^c \\ d_2^c &= C^{c_\mu c_\lambda} C^{c_\rho c_\nu} C^{c_\rho c_\lambda} V_{c_\mu c_\nu}^c \end{aligned} \quad (4.12)$$

Mas como (neste modelo) não há interação que mude a cor, o potencial de interação (parte de cor)  $V_{c_\mu c_\nu}^c$  fica

$$V_{c_\mu c_\nu}^c = \delta^{c_\mu c_\nu} \quad (4.13)$$

Combinando as Eqs. (4.12) e (4.13), temos então

$$\begin{aligned} d_1^c &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \delta^{c_\rho c_\nu} \delta^{c_\mu c_\lambda} \delta^{c_\rho c_\lambda} \delta^{c_\mu c_\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_2^c &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \delta^{c_\mu c_\lambda} \delta^{c_\rho c_\nu} \delta^{c_\rho c_\lambda} \delta^{c_\mu c_\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como pode ser visto a parte de cor resulta no mesmo fator numérico. Para outros mésons um comportamento similar ocorre. Sendo assim, este fator pode ser incorporada no parâmetro  $\gamma$  [Eq. (1.24)]. Nos cálculos que desenvolveremos a seguir, iremos omitir a parte de cor.

- Cálculo da parte de spin:

No apêndice B mostramos a forma da função de onda de spin para um singleto, (B.6), e para um tripleto, (B.8). O pión é uma partícula de spin  $S = 0$ , enquanto que o méson  $\rho$  tem spin  $S = 1$ . Para o nosso cálculo iremos orientar o meson  $\rho$  em uma direção preferencial, introduzindo uma polarização. A direção escolhida será  $(+\hat{z})$  o que implica, na parte de spin de  $d_i^s$

$$\begin{aligned} d_1^s &= \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ d_2^s &= \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Utilizando as propriedades do apêndice B obtemos

$$\begin{aligned} d_1^s &= \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &= \chi_3^{12} \chi_2^{21} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{2} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$\begin{aligned} d_2^s &= \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ &= \chi_3^{21} \chi_2^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{2} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Assim encontramos, para a parte de spin da Eq. (4.6), que

$$d_1^s = d_2^s = -\frac{1}{2} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \quad (4.18)$$

A contribuição da parte de spin do potencial de interação está contida em

$$\begin{aligned} u_{s_\mu}^\dagger(\vec{p}_\mu) \gamma^0 v_{s_\nu}(\vec{p}_\nu) &= \sqrt{\frac{E_{p_\mu} + m}{2E_{p_\mu}}} \left[ \chi_{s_\mu}^* \quad \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu}{E_{p_\mu} + m} \chi_{s_\mu}^* \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu}{E_{p_\nu} + m} \chi_{s_\nu}^c \\ \chi_{s_\nu}^c \end{bmatrix} \sqrt{\frac{E_{p_\nu} + m}{2E_{p_\nu}}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

o qual, após algumas manipulações algébricas simples, se reduz a

$$\begin{aligned} u_{s_\mu}^\dagger(\vec{p}_\mu) \gamma^0 v_{s_\nu}(\vec{p}_\nu) &= \left[ \frac{(E_{p_\mu} + m)(E_{p_\nu} + m)}{4E_{p_\mu} E_{p_\nu}} \right]^{1/2} \\ &\times \left[ \chi_{s_\mu}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu}{E_{p_\nu} + m} \chi_{s_\nu}^c - \chi_{s_\mu}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu}{E_{p_\mu} + m} \chi_{s_\nu}^c \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo a Eq. (4.20) na Eq. (3.12) de onde tomamos somente a parte spin-espaco, encontramos

$$\begin{aligned} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) &\equiv -g \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \left[ \frac{(E_{p_\mu} + m)(E_{p_\nu} + m)}{4E_{p_\mu} E_{p_\nu}} \right]^{1/2} \\ &\times \left[ \chi_{s_\mu}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu}{E_{p_\mu} + m} \chi_{s_\nu}^c - \chi_{s_\mu}^* \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu}{E_{p_\nu} + m} \chi_{s_\nu}^c \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Porém, no limite não-relativístico onde  $E \rightarrow m$ , temos

$$V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \equiv -\frac{g}{2m_q} \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \left[ \chi_{s_\mu}^* \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu \chi_{s_\nu}^c - \chi_{s_\mu}^* \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu \chi_{s_\nu}^c \right]. \quad (4.22)$$

Substituindo a Eq. (1.24) na Eq. (4.22) obtemos então

$$V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \equiv -\gamma \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_{s_\mu}^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_{s_\nu}^c. \quad (4.23)$$

E assim temos que a Eq. (4.18), fica

$$d_1^s = d_2^s = \frac{1}{2} \gamma \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c. \quad (4.24)$$

O cálculo da parte espacial esta diretamente ligado com o cálculo da parte de spin. Assim sendo, iremos no decorrer deste capítulo sempre desenvolver o cálculo da parte espacial com a contribuição da parte de spin (spin-espaco).

- Cálculo da parte spin-espaco:

Introduzindo a definição da função de onda espacial do apêndice B, obtemos

$$\begin{aligned}
 d_1^{s-e} &= \frac{1}{2} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\lambda \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\
 &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \\
 &\times \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda). \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Calculando a integral nas variáveis de momento, onde ao empregar as deltas temos o cancelamento de várias integrais, resultando em

$$\begin{aligned}
 d_1^{s-e} &= \frac{\gamma}{2} \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta) \int d^3 p_\mu \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu + \vec{p}_\mu)] \chi_2^c \\
 &\times \varphi(2\vec{p}_\mu + \vec{P}_\alpha) \varphi(\vec{P}_\alpha - \vec{P}_\beta + 2\vec{p}_\mu) \varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\beta). \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

No capítulo 1, o elemento de matriz  $\langle BC|H_I|A\rangle$  é proporcional a uma  $\delta$  de conservação de momento, como aparece na Eq. (1.25). A origem desta  $\delta$  está explícita na Eq. (4.26) acima e portanto será suprimida, pois ela é um termo global. O méson será tomado em repouso no estado inicial, ou seja,  $\vec{P}_\gamma = 0$  e por conservação de momento do estado final podemos escrever tudo em termos de  $\vec{P}_\beta$ . Desta forma

$$\begin{aligned}
 d_1^{s-e} &= \gamma \delta^3(\vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta) \int d^3 p_\mu \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\mu] \chi_2^c \\
 &\varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\beta) \varphi(2\vec{p}_\mu - 2\vec{P}_\beta) \varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\beta). \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade (I.22) na Eq. (4.27) obtemos a seguinte integral

$$d_1^{s-e} = \gamma \int d^3 K (K_x + iK_y) \varphi(2\vec{K} - \vec{P}) \varphi(2\vec{K} - 2\vec{P}) \varphi(2\vec{K} - \vec{P}). \quad (4.28)$$

Substituindo a expressão para a função de onda (B.31)

$$d_1^{s-e} = \left( \frac{\gamma}{\pi^{9/4} \beta^{9/2}} \right) \int d^3 K (K_x + iK_y) \exp \left[ -\frac{3}{2\beta^2} K^2 + \frac{2}{\beta^2} \vec{K} \cdot \vec{P} - \frac{3}{4\beta^2} P^2 \right] \quad (4.29)$$

e integrando usando (A.23) resulta

$$d_1^{s-e} = \left( \frac{2^{5/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{3/2}} \right) (P_x + iP_y) \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right) \quad (4.30)$$

Os harmônicos esféricos usuais pode ser escritos em coordenadas cartesianas

$$Y_{11}(\Omega_P) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\Phi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{(P_x + iP_y)}{P}, \quad (4.31)$$

temos finalmente que

$$d_1^{s-e} = -\left(\frac{2^4}{3^3}\right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}}\right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp\left(-\frac{P^2}{12\beta^2}\right). \quad (4.32)$$

Entretanto, ainda nos resta calcular  $d_2^{s-e}$ , dado por

$$\begin{aligned} d_2^{s-e} &= \frac{1}{2} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\lambda \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\ &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \\ &\times \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda), \end{aligned} \quad (4.33)$$

a qual se reduz a (afora a  $\delta$  global)

$$\begin{aligned} d_2^{s-e} &= \frac{\gamma}{2} \int d^3 p_\mu \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\ &\varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\alpha) \varphi(2\vec{p}_\mu - 2\vec{P}_\alpha) \varphi(2\vec{p}_\mu - \vec{P}_\alpha). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Analisando a Eq. (4.34), podemos ver que ela é da mesma forma que a Eq. (4.27) utilizada o cálculo do  $d_1^{s-e}$ . Sendo assim, temos

$$d_2^{s-e} = -\left(\frac{2^4}{3^3}\right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}}\right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp\left(-\frac{P^2}{12\beta^2}\right), \quad (4.35)$$

ou seja,

$$d_1^{s-e} = -d_2^{s-e} = -\left(\frac{2^4}{3^3}\right) \gamma \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}}\right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp\left(-\frac{P^2}{12\beta^2}\right). \quad (4.36)$$

- Cálculo da taxa de decaimento:

No capítulo 1 foi feito um estudo sobre a taxa de decaimento, onde da Eq. (1.29) vimos que ela tem a seguinte forma

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = 2\pi P \frac{E_\pi E_\pi}{M_\rho} \int d\Omega_P |h_{fi}|^2 \quad (4.37)$$

Desta forma as expressões para  $d_1$  e  $d_2$  resulta

$$\begin{aligned} d_1 &= \gamma \left(\frac{2^{7/2}}{3^3}\right) \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \frac{P}{\beta} Y_{11}(\Omega_P) \exp\left(-\frac{P^2}{12\beta^2}\right) \\ d_2 &= \gamma \left(\frac{2^{7/2}}{3^3}\right) \left(\frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \frac{P}{\beta} Y_{11}(\Omega_P) \exp\left(-\frac{P^2}{12\beta^2}\right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

e a amplitude de decaimento  $h_{fi}$ , tem a seguinte forma

$$h_{fi} = -\gamma \left( \frac{2^{9/2}}{3^3} \right) \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \frac{P}{\beta} Y_{11}(\Omega_P) \exp\left(-\frac{P^2}{12\beta^2}\right). \quad (4.39)$$

Combinando as equações (4.37) e (4.39), temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} &= 2\pi P \frac{E_\pi E_\pi}{M_\rho} \gamma^2 \left( \frac{2^9}{3^6} \right) \left( \frac{1}{\pi^{1/2} \beta} \right) \frac{P^2}{\beta^2} \exp\left(-\frac{P^2}{6\beta^2}\right) \\ &\times \int d\Omega |Y_{11}(\Omega_P)|^2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sabendo que

$$\int Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) d\Omega = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (4.41)$$

(chamada de relação de ortonormalidade dos harmônicos esféricos) e que  $E_\pi^2/M_\rho \approx M_\rho/4$ , temos

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = \pi^{1/2} M_\rho \gamma^2 \left( \frac{2^8}{3^6} \right) x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{6}\right). \quad (4.42)$$

## 4.2 Decaimento $b_1 \rightarrow \omega\pi$

O objetivo desta seção é o de mostrar explicitamente como se dá o cálculo para um processo de decaimento no qual as partículas envolvidas neste processo possuem momento angular com  $L = 1$  e  $L = 0$ , e encontrar a taxa de decaimento  $\Gamma$  do processo aqui desenvolvido. No qual, para este caso em particular de decaimento, da tabela 0.1, vemos que os mésons  $\omega$  e  $\pi$  possuem momento angular nulo, enquanto que o méson  $b_1$  possui momento com  $L = 1$ .

Para este cálculo, vamos proceder da mesma forma como foi desenvolvido na seção anterior. Assim, iremos primeiramente calcular as partes de sabor e spin para depois calcularmos a parte espacial.

- Cálculo da parte de sabor:

Para calcularmos a parte de sabor necessitamos saber a função de onda de sabor de cada um dos mésons. As funções de onda são dadas no apêndice B. Novamente a parte de sabor é

$$\begin{aligned} d_1^f &= f_3^{f_\rho f_\nu} f_2^{f_\mu f_\lambda} f_1^{f_\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} \\ d_2^f &= f_3^{f_\mu f_\lambda} f_2^{f_\rho f_\nu} f_1^{f_\rho f_\lambda} \delta_{f_\mu f_\nu} \end{aligned} \quad (4.43)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} d_1^f &= f_3^{f_\rho f_\mu} f_2^{f_\mu f_\lambda} f_1^{f_\rho f_\lambda} = f_3^{12} f_2^{22} f_1^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_2^f &= f_3^{f_\mu f_\lambda} f_2^{f_\rho f_\mu} f_1^{f_\rho f_\lambda} = f_3^{12} f_2^{11} f_1^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

que são as contribuições de sabor.

- Cálculo da parte de spin:

Para calcularmos a parte de spin necessitamos saber a função de onda de spin de cada um dos mésons. O méson  $\pi$  tem spin  $S = 0$  enquanto que os mésons  $b_1$  e  $\omega$  tem spin  $S = 1$ . Existem três possibilidades para o  $b_1$  e o  $\omega$ , o que nos leva a considerar uma direção polarizada, ou seja, a direção  $(+\hat{z})$ . Sendo assim, Estas funções de onda estão no apêndice B Novamente a parte de spin fica

$$\begin{aligned} d_1^s &= \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ d_2^s &= \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu), \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde obtemos

$$\begin{aligned} d_1^s &= \chi_3^{s_\rho s_\nu} \chi_2^{s_\mu s_\lambda} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_1^{21} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{2} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\ d_2^s &= \chi_3^{s_\mu s_\lambda} \chi_2^{s_\rho s_\nu} \chi_1^{s_\rho s_\lambda} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_1^{12} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{2} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu). \end{aligned} \quad (4.46)$$

- Cálculo da parte spin-espço:

Como foi visto anteriormente o cálculo da parte espacial esta ligado ao cálculo da parte de spin, por isso desenvolvemos o cálculo de spin-espço.

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= -\frac{1}{2} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\lambda \chi_1^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_1^c \\ &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) \\ &\times \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\nu) \phi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda) Y_{11}(\Omega_{\vec{p}_\rho - \vec{p}_\lambda}) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\lambda). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Em (4.47) aparece  $Y_{11}$  que provém da função de onda (B.32)  $Y_{1m}$  com  $m = 1$ . Este valor é devido a escolha de orientar o spin do  $b_1$  na direção  $\hat{z}$  e usar como função de onda dos quarks a componente  $S = 0$ . Utilizando a propriedade (I.10) encontramos

$$\begin{aligned} d_1^{s-e} &= -\gamma \int d^3 K (K_x - iK_y) \varphi(\vec{P} - 2\vec{K}) \\ &\times \phi(2\vec{P} - 2\vec{K}) Y_{11}(\Omega_{2\vec{P} \hat{z} 2\vec{K}}) \varphi(\vec{P} - 2\vec{K}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Substituindo as definições para as funções de onda obtemos

$$\begin{aligned}
 d_1^{s-e} &= \gamma \left( \frac{2}{3} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\pi^{7/4} \beta^{11/2}} \right) \int d^3 K (K_x - iK_y) |2\vec{P} - 2\vec{K}| \\
 &\times \left[ -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{(2(P_x - K_x) + 2i(P_y - K_y))}{|2\vec{P} - 2\vec{K}|} \right] \\
 &\times \exp \left\{ - \left[ \frac{3}{2\beta^2} K^2 - \frac{2}{\beta^2} \vec{K} \cdot \vec{P} + \frac{3}{4\beta^2} P^2 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 d_1^{s-e} &= -\gamma \left( \frac{1}{\pi^{9/4} \beta^{11/2}} \right) \int d^3 K \\
 &\times \left[ -K_x^2 - K_y^2 + K_x P_x + K_y P_y + i K_x P_y - i K_y P_x \right] \\
 &\times \exp \left\{ - \left[ \frac{3}{2\beta^2} K^2 - \frac{2}{\beta^2} \vec{K} \cdot \vec{P} + \frac{3}{4\beta^2} P^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Após a integração encontramos

$$d_1^{s-e} = \left( \frac{2^{5/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{1/2}} \right) \left[ 1 - \frac{(P_x^2 + P_y^2)}{3\beta^2} \right] \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right). \tag{4.51}$$

Introduzindo as seguintes relações de harmônicos esféricos, que

$$\begin{aligned}
 Y_{00}(\Omega_P) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\
 Y_{20}(\Omega_P) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left( \frac{3P_z^2}{P^2} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

encontramos, após algumas manipulações algébricas, que

$$\begin{aligned}
 d_1^{s-e} &= \left( \frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \\
 &\times \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{9} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

A obtenção de  $d_2^{s-e}$  é mediante a troca de  $\vec{P} \rightarrow -\vec{P}$  e assim

$$\begin{aligned}
 d_2^{s-e} &= \left( \frac{2^{7/2}}{3^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \\
 &\times \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{9} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

- Cálculo da taxa de decaimento

Na seção anterior vimos que, para encontrarmos a taxa de decaimento se faz necessário primeiramente encontrarmos a sua amplitude de decaimento. Sendo assim, das Eqs. (4.44), (4.53) e (4.54) na Eq. (4.5), encontramos que

$$\begin{aligned}
 d_1 &= d_2 \\
 &= \left( \frac{2^3}{3^{5/2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \\
 &\times \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{9} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right) \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

e a amplitude de decaimento  $h_{fi}$ , tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= - \left( \frac{2^4}{3^{5/2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \\
 &\times \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{9} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega) + \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega) \right\} \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right) \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_S &= - \left( \frac{2^4}{3^{5/2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \left[ 1 - \frac{2}{9} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 \right] \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right) \\
 a_D &= - \left( \frac{2^4}{3^{5/2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \frac{2}{3^2 \sqrt{5}} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right), \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

mas como foi visto no capítulo 1, Eq. (1.52), para considerarmos o decaimento ocorrendo em todas as direções e não apenas na direção polarizada, temos que retirar o fator da decomposição em Clebsch-Gordon, que para este caso é  $1/\sqrt{10}$ . Assim, a amplitude de decaimento é fica

$$\begin{aligned}
 h_{fi} &= - \left( \frac{2^4}{3^{5/2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \\
 &\times \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{9} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 \right] Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{3/2}}{3^2} \left( \frac{P}{\beta} \right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right\} \exp \left( -\frac{P^2}{12\beta^2} \right). \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

Combinando as equações (4.37) e (4.58), temos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} &= 2\pi P \frac{E_\pi E_\pi}{M_\rho} \gamma^2 \left(\frac{2^8}{3^5}\right) \left(\frac{1}{\pi^{1/2}\beta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{6}\right) \\
 &\times \left\{ \left(1 - \frac{2}{9}x^2\right)^2 \int d\Omega |Y_{00}(\Omega_P)|^2 \right. \\
 &\quad + \frac{2^3}{3^4} x^4 \int d\Omega |Y_{20}(\Omega_P)|^2 \\
 &\quad + \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \frac{2^{3/2}}{3^2} x^2 \times \int d\Omega_P Y_{00}^*(\Omega_P) Y_{20}(\Omega_P) \\
 &\quad \left. + \left[1 - \frac{2}{9}x^2\right] \frac{2^{3/2}}{3^2} x^2 \times \int d\Omega_P Y_{00}(\Omega_P) Y_{20}^*(\Omega_P) \right\} \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

onde  $x = (P/\beta)$ . Da relação de ortonormalidade dos harmônicos esféricos, Eq. (4.41), obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} &= 2\pi P \frac{E_\pi E_\pi}{M_\rho} \gamma^2 \left(\frac{2^8}{3^5}\right) \left(\frac{1}{\pi^{1/2}\beta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{6}\right) \\
 &\times \left\{ \left(1 - \frac{2}{9}x^2\right)^2 + \frac{2^3}{3^4} x^2 \right\}. \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

### 4.3 A Correção de Ortogonalidade para o Decaimento $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^0$

Nas seções anteriores desenvolvemos exemplos de aplicações do Formalismo de Fock-Tani para decaimentos mesônicos, no qual analisamos dois tipos de processos: o processo do  $\rho \rightarrow \pi\pi$  no qual para este cálculo foi utilizado a função de onda com  $L = 0$  para o  $\rho$  e o  $\pi$ , e o processo de  $b_1 \rightarrow \omega\pi$  no qual utilizamos a função de onda com  $L = 1$  para o  $b_1$  e a função de onda com  $L = 0$  para os mésons  $\omega$  e  $\pi$ . Nesta seção e na próxima iremos desenvolver exemplos de aplicações da correção de ortogonalidade em primeira ordem para os mesmos processos analisados nas seções anteriores.

Inicialmente, pela da Eq. (3.66), sabemos que a correção de ortogonalidade é dada por

$$\begin{aligned}
 H^{CO} &= -\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \\
 &\quad + 2\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma \\
 &\quad - \varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\nu} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} m_\alpha^\dagger m_\beta^\dagger m_\gamma. \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

Na  $\Delta$  acima há um índice novo  $i$ , cuja finalidade é indicar sobre qual a partícula está se fazendo a correção. No nosso estudo  $i = 2$  corresponde a  $\pi^+$  e  $i = 3$  a  $\pi^0$ . Da Eq. (4.61) é

dado por

$$\begin{aligned}
 \langle f | H^{CO} | i \rangle &= -\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \left( \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} + \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \right) \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} \\
 &+ 2\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \left( \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\lambda\tau} + \Phi_{\alpha}^{*\lambda\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \right) \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} \\
 &- \varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \left( \Phi_{\alpha}^{*\rho\nu} \Phi_{\beta}^{*\lambda\tau} + \Phi_{\alpha}^{*\lambda\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\nu} \right) \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\sigma) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\}, \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

onde há três termos da correção de ortogonalidade a serem calculados.

### 4.3.1 Cálculo do primeiro termo da correção de ortogonalidade

Da Eq. (4.62) o primeiro termo da correção de ortogonalidade é dado por

$$\begin{aligned}
 \langle f | H^{1CO} | i \rangle &= -\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} \\
 &- \varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\}. \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

Introduzindo a seguinte notação

$$\langle f | H^{1CO} | i \rangle = d_1^{1CO} + d_2^{1CO} \quad (4.64)$$

onde

$$\begin{aligned}
 d_1^{1co} &= -\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\} \\
 d_2^{1co} &= -\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} \right\}. \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

Redefinindo os termos da Eq. (4.65),

$$\begin{aligned}
 d_1^{1co} &= -\varepsilon \left( d_{12}^{1co} + d_{13}^{1co} \right) \\
 d_2^{1co} &= -\varepsilon \left( d_{22}^{1co} + d_{23}^{1co} \right) \quad (4.66)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{1co} &= \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta_{\pi^+}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\
 d_{13}^{1co} &= \Phi_{\alpha}^{*\rho\sigma} \Phi_{\beta}^{*\mu\tau} \Delta_{\pi^0}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\
 d_{22}^{1co} &= \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Delta_{\pi^+}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu} \\
 d_{23}^{1co} &= \Phi_{\alpha}^{*\mu\tau} \Phi_{\beta}^{*\rho\sigma} \Delta_{\pi^0}(\rho\tau; \lambda\nu) \Phi_{\gamma}^{\lambda\sigma} V_{\mu\nu}. \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Vamos primeiramente calcular as partes de sabor e spin para depois calcularmos a parte espacial.

- Cálculo da parte de sabor:

Para o cálculo da parte de sabor da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 4.1, deste capítulo. A parte de sabor da Eq. (4.67) é dada por

$$\begin{aligned}
 d_{12}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\lambda f\nu} f_1^{f\lambda f\sigma} V_{f_\mu f_\nu} \\
 d_{13}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\mu f\tau} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\lambda f\nu} f_1^{f\lambda f\sigma} V_{f_\mu f_\nu} \\
 d_{22}^f &= f_3^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\lambda f\nu} f_1^{f\lambda f\sigma} V_{f_\mu f_\nu} \\
 d_{23}^f &= f_3^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\lambda f\nu} f_1^{f\lambda f\sigma} V_{f_\mu f_\nu}
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Sabendo que, não há interação que mude o sabor, temos que

$$\begin{aligned}
 d_{12}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{22} f_2^{12} f_2^{22} f_2^{11} f_1^{12} = 0 \\
 d_{13}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\mu f\tau} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{22} f_2^{12} f_3^{22} f_3^{11} f_1^{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 d_{22}^f &= f_3^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{22} f_2^{12} f_2^{12} f_2^{12} f_1^{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 d_{23}^f &= f_3^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{11} f_2^{12} f_3^{11} f_3^{11} f_1^{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

- Cálculo da parte de spin:

Para o cálculo da parte de spin da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 4.1,

$$\begin{aligned}
 d_{12}^s &= \chi_3^{s\rho s\sigma} \chi_2^{s\mu s\tau} \chi_2^{s\rho s\tau} \chi_2^{s\lambda s\nu} \chi_1^{s\lambda s\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{13}^s &= \chi_3^{s\rho s\sigma} \chi_2^{s\mu s\tau} \chi_3^{s\rho s\tau} \chi_3^{s\lambda s\nu} \chi_1^{s\lambda s\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{22}^s &= \chi_3^{s\mu s\tau} \chi_2^{s\rho s\sigma} \chi_2^{s\rho s\tau} \chi_2^{s\lambda s\nu} \chi_1^{s\lambda s\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{23}^s &= \chi_3^{s\mu s\tau} \chi_2^{s\rho s\sigma} \chi_3^{s\rho s\tau} \chi_3^{s\lambda s\nu} \chi_1^{s\lambda s\sigma} V_{s_\mu s_\nu}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu)
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

resultando em

$$d_{12}^s = \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu)$$

$$\begin{aligned}
 d_{13}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_3^{21} \chi_3^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{22}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{21} \chi_2^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{23}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{21} \chi_3^{21} \chi_3^{12} \chi_1^{11} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = -\frac{1}{4} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu)
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

que são as contribuições da parte de spin.

- Cálculo da parte spin-espaço:

Agora vamos efetuar o cálculo da parte spin-espaço para  $d_{12}^{s-e}$ ,  $d_{13}^{s-e}$ ,  $d_{22}^{s-e}$  e  $d_{23}^{s-e}$ , de onde as relações abaixo são válidas

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= d_{13}^{s-e} \\
 d_{22}^{s-e} &= d_{23}^{s-e}.
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Introduzindo a definição da função de onda de espaço na Eq. (4.67) obtemos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= \frac{1}{4} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\sigma d^3 p_\tau d^3 p_\lambda d^3 U \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\
 &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\
 &\times \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \\
 &\times \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\
 &\times \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma).
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Após a integração em momento (afora a  $\delta$  global) encontramos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= \frac{\gamma}{2} \int d^3 p_\nu d^3 p_\lambda \chi_2^* (-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu) \chi_2^c \\
 &\times \varphi(2\vec{p}_\lambda - \vec{P}_\beta) \varphi(-2\vec{p}_\nu - \vec{P}_\beta) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu - 2\vec{P}_\beta) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \varphi(2\vec{p}_\lambda)
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

que pode ser escrito

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= -\frac{\gamma}{2} \int d^3 K d^3 q (K_x + iK_y) \\
 &\times \varphi(2\vec{q} - \vec{P}) \varphi(-2\vec{K} - \vec{P}) \varphi(\vec{q} - \vec{K} - 2\vec{P}) \varphi(\vec{q} - \vec{K}) \varphi(2\vec{q}).
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Após substituir as definições das partes espaciais (gaussianas) das funções de onda, a integral resulta em

$$d_{12}^{s-e} = \gamma \left( \frac{2^{11/2}}{7^{5/2}} \right) \left( \frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{3/2}} \right) [P_x + iP_y] \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right). \tag{4.76}$$

Introduzindo o harmônico esférico, Eq. (4.31), obtemos

$$d_{12}^{s-e} = - \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \quad (4.77)$$

Levando o resultado obtido, Eq. (4.77), na Eq. (4.72), encontramos que

$$d_{13}^{s-e} = - \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \quad (4.78)$$

Entretanto, ainda nos resta calcular  $d_{22}^{s-e}$  e  $d_{23}^{s-e}$ , onde  $d_{22}^{s-e}$  é dado por

$$\begin{aligned} d_{22}^{s-e} &= \frac{1}{4} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\sigma d^3 p_\tau d^3 p_\lambda d^3 U \chi_2^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_2^c \\ &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \\ &\times \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \\ &\times \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\ &\times \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma). \end{aligned} \quad (4.79)$$

A obtenção de  $d_{12}^{s-e}$  é obtido trocando  $\vec{P} = -\vec{P}$ , mas como  $d_{12}^{s-e}$ ,  $d_{13}^{s-e}$ ,  $d_{22}^{s-e}$  e  $d_{23}^{s-e}$  são funções ímpares em relação a  $\vec{P}$ , temos

$$d_{22}^{s-e} = \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \quad (4.80)$$

Levando o resultado obtido, Eq. (4.80), na Eq. (4.72), encontramos que

$$d_{23}^{s-e} = \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \quad (4.81)$$

Resumindo

$$\begin{aligned} d_{12}^{s-e} &= - \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{13}^{s-e} &= - \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{22}^{s-e} &= \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\ d_{23}^{s-e} &= \left( \frac{2^7}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

que são as contribuições da parte de spin-espaço.

- Cálculo da amplitude de decaimento:

No início desta seção vimos que a amplitude de decaimento, Eq. (4.64), é dada pela soma de  $d_1^{1CO}$  e  $d_2^{1CO}$ , onde estes dois termos são dados pelas Eqs. (4.66) e (4.67). Assim, para encontrarmos a amplitude de decaimento vamos ter que encontrar cada um dos termos. Desta forma, substituindo as Eqs. (4.69) e (4.82) na Eq. (4.67), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{1CO} &= 0 \\
 d_{13}^{1CO} &= - \left( \frac{2^{11/2}}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 d_{22}^{1CO} &= - \left( \frac{2^{13/2}}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 d_{23}^{1CO} &= \left( \frac{2^{11/2}}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Levando os resultados obtidos em (4.83) na Eq. (4.66), encontramos que

$$\begin{aligned}
 d_1^{1CO} &= \varepsilon \left( \frac{2^{11/2}}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \\
 d_2^{1CO} &= \varepsilon \left( \frac{2^{11/2}}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Desta forma a amplitude de decaimento  $h_{fi}^{1CO}$  resulta na seguinte expressão

$$h_{fi}^{1CO} = \varepsilon \left( \frac{2^{13/2}}{3^{1/2} 7^{5/2}} \right) \gamma \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \right) Y_{11}(\Omega_P) P \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right). \tag{4.85}$$

### 4.3.2 Cálculo do segundo e terceiro termos da correção de ortogonalidade

Da Eq. (4.62) temos que o segundo termo da correção de ortogonalidade é dado por

$$\begin{aligned}
 \langle f | H^{2CO} | i \rangle &= 2\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\rho\sigma} \Phi_\beta^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} \\
 &\quad + 2\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \Phi_\alpha^{*\lambda\tau} \Phi_\beta^{*\rho\sigma} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \Phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Utilizando a mesma notação vemos que a parte de sabor é zero:

$$\begin{aligned}
 d_{12}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\lambda f\tau} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\mu f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{22} f_2^{12} f_2^{22} (f_2^{11} + f_2^{22}) f_1^{12} = 0 \\
 d_{13}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\lambda f\tau} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\mu f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{22} f_2^{12} f_3^{22} (f_3^{11} + f_3^{22}) f_1^{12} = 0 \\
 d_{22}^f &= f_3^{f\lambda f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\mu f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{11} f_2^{12} f_2^{11} (f_2^{11} + f_2^{22}) f_1^{12} = 0 \\
 d_{23}^f &= f_3^{f\lambda f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\mu f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{11} f_2^{12} f_3^{11} (f_3^{11} + f_3^{22}) f_1^{12} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

A amplitude de decaimento é definida em função destas expressões, consequentemente concluímos que

$$h_{fi}^{2CO} = 0. \quad (4.88)$$

Desta forma, não se faz necessário o cálculo da parte de spin e espaço, pois vemos que este termo não contribui para a correção de ortogonalidade deste processo de decaimento. A contribuição para  $h_{fi}^{3CO}$  é igual a  $h_{fi}^{1CO}$ .

- Cálculo da taxa de decaimento

Nesta seção iremos apresentar o cálculo da taxa de decaimento no modelo  $C^3P_0$ . Tendo em vista que, para calcularmos a taxa de decaimento se faz necessário primeiramente a amplitude de decaimento, onde  $h_{fi}^{C3P0} = h_{fi} + h_{fi}^{1CO} + h_{fi}^{3CO}$ , isto é,

$$h_{fi}^{C3P0} = - \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) x Y_{11}(\Omega_x) \left[ \frac{2^{9/2}}{3^3} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{15/2} \varepsilon}{3^{1/2} 7^{5/2}} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right] \quad (4.89)$$

Definindo

$$C_{10} \equiv - \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) x \left[ \frac{2^{9/2}}{3^3} \exp\left(-\frac{x^2}{12}\right) - \frac{2^{15/2} \varepsilon}{3^{1/2} 7^{5/2}} \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \right], \quad (4.90)$$

a Eq. (4.89) pode ser reescrita

$$h_{fi}^{C3P0} = C_{10} Y_{11}(\Omega_x). \quad (4.91)$$

Da Eq. (1.29) temos que

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = 2\pi P \frac{E_\pi E_\pi}{M_\rho} C_{10}^2 \int d\Omega_x |Y_{11}(\Omega_x)|^2 \quad (4.92)$$

Utilizando a propriedade de ortonormalidade dos harmônicos esféricos, Eq. (4.41), e tendo em vista que  $E_\pi^2/M_\rho \approx M_\rho/4$ , encontramos então

$$\Gamma_{\rho \rightarrow \pi\pi} = \pi P \frac{M_\rho}{2} C_{10}^2 \quad (4.93)$$

que é a taxa de decaimento para o decaimento do méson  $\rho$  em dois pions com a correção de ortogonalidade.

## 4.4 A Correção de Ortogonalidade para o Decaimento $b_1 \rightarrow \omega\pi$

Nesta seção iremos desenvolver um segundo exemplo de aplicação da correção de ortogonalidade em primeira ordem para o processo analisado na seção 4.2. Sendo que, do elemento

de matriz, Eq. (4.62), iremos calcular cada um dos três termos em separado. E, como foi visto na seção anterior, analisaremos o efeito da correção de ortogonalidade somente no estado final, para ver o quanto isto afeta a sobreposição de ondas ( $a_S$  e  $a_D$ ).

#### 4.4.1 Cálculo do primeiro termo da correção de ortogonalidade:

Como foi feito na seção anterior vamos primeiramente calcular as partes de sabor e spin para depois calcularmos a parte espacial. A diferença está na estrutura da Eq. (4.67) para o processo  $b_1 \rightarrow \omega + \pi$ , onde as  $\Delta$  do estado final correspondem a  $\Delta_\omega$  e  $\Delta_{\pi^+}$  respectivamente.

- Cálculo da parte de sabor:

Para o cálculo da parte de sabor da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 4.2. A parte de sabor é dada por

$$\begin{aligned}
 d_{12}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{12} f_2^{f11} f_2^{11} f_2^{f11} f_1^{f12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 d_{13}^f &= f_3^{f\rho f\sigma} f_2^{f\mu f\tau} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{12} f_2^{f22} f_3^{12} f_3^{f12} f_1^{f12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 d_{22}^f &= f_3^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{f12} f_2^{f22} f_2^{f22} f_2^{f11} f_1^{f12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 d_{23}^f &= f_3^{f\mu f\tau} f_2^{f\rho f\sigma} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\lambda f\mu} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{f12} f_2^{f22} f_3^{f22} f_3^{f11} f_1^{f12} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

- Cálculo da parte de spin:

Para o cálculo da parte de spin da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 4.1. A parte de spin é dada por

$$\begin{aligned}
 d_{12}^s &= \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_1^{12} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{2} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{13}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_3^{21} \chi_3^{21} \chi_1^{21} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{4} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{22}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_2^{22} \chi_1^{21} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = 0 \\
 d_{23}^s &= \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_3^{12} \chi_3^{21} \chi_1^{21} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{4} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu).
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

•Cálculo da parte spin-espço:

Agora vamos efetuar o calculo da parte spin-espço para  $d_{12}^{s-e}$ ,  $d_{13}^{s-e}$ ,  $d_{22}^{s-e}$  e  $d_{23}^{s-e}$ , no qual, as seguintes relações são verificadas

$$2d_{12}^{s-e} = d_{13}^{s-e} = d_{23}^{s-e}; \quad d_{22}^{s-e} = 0, \quad (4.96)$$

Introduzindo a definição da função de onda de espço obtemos

$$\begin{aligned} d_{13}^{s-e} &= -\frac{1}{4} \gamma \int d^3 p_\mu d^3 p_\nu d^3 p_\rho d^3 p_\sigma d^3 p_\tau d^3 p_\lambda d^3 U \chi_1^* [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu)] \chi_1^c \\ &\times \delta^3(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu) \delta^3(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \delta^3(\vec{P}_\beta - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \\ &\times \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \delta^3(\vec{U} - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \\ &\times \delta^3(\vec{P}_\gamma - \vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma) \phi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) Y_{11}(\Omega_{\vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma}) \\ &\times \varphi(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\tau) \varphi(\vec{p}_\rho - \vec{p}_\tau) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\sigma). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Integrando esta expressão encontramos

$$\begin{aligned} d_{13}^{s-e} &= -\frac{\gamma}{2} \int d^3 p_\nu d^3 p_\lambda \chi_1^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_\nu) \chi_1^c \\ &\times \varphi(2\vec{p}_\lambda - \vec{P}_\beta) \varphi(-2\vec{p}_\nu - \vec{P}_\beta) \\ &\times \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu - 2\vec{P}_\beta) \varphi(\vec{p}_\lambda - \vec{p}_\nu) \phi(2\vec{p}_\lambda) Y_{11}(\Omega_{2\vec{p}_\lambda}) \end{aligned} \quad (4.98)$$

Utilizando a propriedade (I.10), podemos escrever

$$\begin{aligned} d_{13}^{s-e} &= -\frac{g}{4} \int d^3 K d^3 q \left( \frac{K_x - iK_y}{m} \right) \\ &\times \varphi(2\vec{q} - \vec{P}) \varphi(-2\vec{K} - \vec{P}) \\ &\times \varphi(\vec{q} - \vec{K} - 2\vec{P}) \varphi(\vec{q} - \vec{K}) \phi(2\vec{q}) Y_{11}(\Omega_{2\vec{q}}) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Substituindo as definições para a função de onda resulta em

$$\begin{aligned} d_{13}^{s-e} &= \gamma \left( \frac{1}{3^{1/2} 2^{3/2}} \right) \left( \frac{1}{\pi^{13/4} \beta^{17/2}} \right) \int d^3 K d^3 q (K_x - iK_y) |2\vec{q}| Y_{11}(\Omega_{2\vec{q}}) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{8\beta^2} \left[ (2\vec{q} - \vec{P})^2 + (-2\vec{K} - \vec{P})^2 + (\vec{q} - \vec{K} - 2\vec{P})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\vec{q} - \vec{K})^2 + (2\vec{q})^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Após a integração encontramos

$$d_{13}^{s-e} = -\left( \frac{2^{7/2}}{7^{5/2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\pi^{3/4} \beta^{1/2}} \right) \left[ 1 - \frac{4}{7\beta^2} (P_x^2 + P_y^2) \right] \exp \left( -\frac{9P^2}{28\beta^2} \right) \quad (4.101)$$

Das definições dos harmônicos esféricos a expressão acima fica

$$\begin{aligned}
 d_{13}^{s-e} &= -\left(\frac{2^{9/2}}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right]
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Levando o resultado obtido, Eq. (4.102) e usando Eq. (4.96), encontramos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= -\left(\frac{2^{11/2}}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{13}^{s-e} &= -\left(\frac{2^{9/2}}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{23}^{s-e} &= -\left(\frac{2^{9/2}}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{22}^{s-e} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

que são as contribuições da parte de spin-espaço.

- Cálculo da amplitude de decaimento:

No início desta seção vimos que a amplitude de decaimento, Eq. (4.64), é dada pela soma de  $d_1^{1CO}$  e  $d_2^{1CO}$ . Estes dois termos são dados pelas Eqs. (4.66) e (4.67) com  $\Delta_\omega$  e  $\Delta_\pi^+$ . Assim, para encontrarmos a amplitude de decaimento vamos ter que encontrar cada um dos termos. Desta forma, substituindo as Eqs. (4.94) e (4.103) na Eq. (4.67), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{1CO} &= -\left(\frac{2^4}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{13}^{1CO} &= -\left(\frac{2^4}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{22}^{1CO} &= 0 \\
 d_{23}^{1CO} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

Levando os resultados obtidos em (4.104) na Eq. (4.66), encontramos que

$$\begin{aligned}
 d_1^{1CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^5}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_2^{1CO} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

Substituindo as Eqs. (4.105) na Eq. (4.64), temos que a amplitude de decaimento  $h_{fi}^{1CO}$  tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 h_{fi}^{1CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^5}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8x^2}{21}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} x^2 Y_{20}(\Omega_P) \right]
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_S^{1CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^5}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \left(1 - \frac{8x^2}{21}\right) \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 a_D^{1CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^{17/2}}{7^{7/2} 3}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \sqrt{\frac{1}{10}} x^2 \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right),
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

com a troca de  $P/\beta$  por  $x$ . Mas como foi visto no capítulo 1, Eq. (1.52), para considerarmos o decaimento se dando em todas as direções e não apenas na direção polarizada, temos que retirar o fator da decomposição em Clebsch-Gordon da onda  $a_D$ , que para este caso é  $1/\sqrt{10}$ . Assim a amplitude de decaimento é fica

$$\begin{aligned}
 h_{fi}^{1CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^5}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 &\times \left[ \left(1 - \frac{8x^2}{21}\right) Y_{00}(\Omega_x) + \frac{2^{7/2}}{21} x^2 Y_{20}(\Omega_x) \right].
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

### 4.4.2 Cálculo do segundo termo da correção de ortogonalidade

Da Eq. (4.62) temos que o elemento de matriz do segundo termo da correção de ortogonalidade é dado por

$$\begin{aligned} \langle f | H_{FT}^{2CO} | i \rangle &= 2\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\tau} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\} \\ &+ 2\varepsilon V_{\mu\nu} \left\{ \phi_\alpha^{*\lambda\tau} \phi_\beta^{*\rho\sigma} \sum_{i=2}^3 \Delta_i(\rho\tau; \mu\nu) \phi_\gamma^{\lambda\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Como foi visto anteriormente, para o cálculo da correção de ortogonalidade do processo de decaimento  $\rho \rightarrow \pi\pi$ , este termo da correção de ortogonalidade não contribui, devido a sua parte espacial ser sempre nula.

### 4.4.3 Cálculo do terceiro termo da correção de ortogonalidade

Como foi feito na seção anterior primeiramente vamos calcular as partes de sabor e spin para depois calcularmos a parte espacial.

- Cálculo da parte de sabor:

Para o cálculo da parte de sabor da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 4.2, deste capítulo.

A parte de sabor é dada por

$$\begin{aligned} d_{12}^f &= f_3^{f\rho f\mu} f_2^{f\lambda f\tau} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\mu f\sigma} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{12} f_2^{11} f_2^{11} f_2^{22} f_1^{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ d_{13}^f &= f_3^{f\rho f\mu} f_2^{f\lambda f\tau} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\mu f\sigma} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{12} f_2^{12} f_3^{12} f_3^{22} f_1^{12} = 0 \\ d_{22}^f &= f_3^{f\lambda f\tau} f_2^{f\rho f\mu} f_2^{f\rho f\tau} f_2^{f\mu f\sigma} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{12} f_2^{22} f_2^{22} f_2^{22} f_1^{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ d_{23}^f &= f_3^{f\lambda f\tau} f_2^{f\rho f\mu} f_3^{f\rho f\tau} f_3^{f\mu f\sigma} f_1^{f\lambda f\sigma} = f_3^{12} f_2^{11} f_3^{12} f_3^{12} f_1^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

- Cálculo da parte de spin:

Para o cálculo da parte de spin da correção de ortogonalidade, vamos utilizar as mesmas considerações, propriedades e definições apresentadas na seção 4.1.

A parte de spin é dada por

$$d_{12}^s = \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_2^{22} \chi_1^{12} V_{22}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = 0$$

$$\begin{aligned}
 d_{13}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_3^{21} \chi_3^{12} \chi_1^{12} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{4} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{22}^s &= \chi_3^{21} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_2^{11} \chi_1^{21} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{2} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \\
 d_{23}^s &= \chi_3^{12} \chi_2^{11} \chi_3^{12} \chi_3^{12} \chi_1^{12} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) = \frac{1}{4} V_{11}^{s-e}(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu).
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

- Cálculo da parte spin-espaco:

Agora vamos efetuar o cálculo da parte spin-espaco para  $d_{12}^{s-e}$ ,  $d_{13}^{s-e}$ ,  $d_{22}^{s-e}$  e  $d_{23}^{s-e}$ , no qual, temos que

$$2d_{22}^{s-e} = d_{23}^{s-e} = d_{13}^{s-e}; \quad d_{12}^{s-e} = 0. \tag{4.111}$$

Na seção anterior, vimos que a parte spin-espaco do primeiro termo era igual ao do terceiro termo da correção de ortogonalidade. Sendo assim, comparando as Eqs. (4.110) e (4.111) com (4.95) e (4.96), vemos que  $d_{12}^{s-e}$  do primeiro termo corresponde ao  $d_{22}^{s-e}$  do terceiro termo, enquanto que  $d_{13}^{s-e} = d_{23}^{s-e}$  do primeiro termo correspondem a  $d_{13}^{s-e} = d_{23}^{s-e}$  do terceiro termo da correção de ortogonalidade, obtemos

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{s-e} &= 0 \\
 d_{13}^{s-e} &= -\left(\frac{2^{9/2}}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{22}^{s-e} &= -\left(\frac{2^{11/2}}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{23}^{s-e} &= -\left(\frac{2^{9/2}}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right].
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

- Cálculo da amplitude de decaimento:

No início desta seção vimos que a amplitude de decaimento é dada pela soma de  $d_1^{3CO}$  e  $d_2^{3CO}$ . Assim, para encontrarmos a amplitude de decaimento vamos ter que encontrar cada um dos termos. Desta forma,

$$\begin{aligned}
 d_{12}^{3CO} &= 0 \\
 d_{13}^{3CO} &= 0 \\
 d_{22}^{3CO} &= -\left(\frac{2^4}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \\
 d_{23}^{3CO} &= -\left(\frac{2^4}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right]. \tag{4.113}
 \end{aligned}$$

Levando os resultados obtidos em (4.104) na Eq. (4.66), encontramos que

$$\begin{aligned}
 d_1^{3CO} &= 0 \\
 d_2^{3CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^5}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9P^2}{28\beta^2}\right) \\
 &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{8P^2}{21\beta^2}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} \left(\frac{P}{\beta}\right)^2 Y_{20}(\Omega_P) \right]. \tag{4.114}
 \end{aligned}$$

Desta forma a amplitude de decaimento  $h_{fi}^{3CO}$  fica

$$\begin{aligned}
 h_{fi}^{3CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^5}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 &\quad \times \left[ \left(1 - \frac{8x^2}{21}\right) Y_{00}(\Omega_P) + \frac{2^{7/2}}{21} \sqrt{\frac{1}{10}} x^2 Y_{20}(\Omega_P) \right] \tag{4.115}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_S^{3CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^5}{7^{5/2}}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \left(1 - \frac{8x^2}{21}\right) \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right) \\
 a_D^{3CO} &= \varepsilon \left(\frac{2^{17/2}}{7^{7/2} 3}\right) \left(\frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}}\right) \sqrt{\frac{1}{10}} x^2 \exp\left(-\frac{9x^2}{28}\right), \tag{4.116}
 \end{aligned}$$

Finalmente a amplitude de decaimento para este termo é fica

$$\begin{aligned}
 h_{fi}^{3CO} &= \varepsilon \left( \frac{2^5}{7^{5/2}} \right) \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \exp \left( -\frac{9x^2}{28} \right) \\
 &\times \left[ \left( 1 - \frac{8x^2}{21} \right) Y_{00}(\Omega_x) + \frac{2^{7/2}}{21} x^2 Y_{20}(\Omega_x) \right]
 \end{aligned} \tag{4.117}$$

- Cálculo da taxa de decaimento

Nesta seção iremos desenvolver o calculo da taxa de decaimento no modelo  $C^3P_0$ . Tendo em vista que, para calcularmos a taxa de decaimento se faz necessário primeiramente a amplitude de decaimento, onde  $h_{fi}^{C3P0} = h_{fi} + h_{fi}^{1CO} + h_{fi}^{3CO}$ ,

$$\begin{aligned}
 h_{fi}^{C3P0} &= - \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) Y_{00}(\Omega_x) \\
 &\times \left\{ \frac{2^4}{3^{5/2}} \left[ 1 - \frac{2}{9} x^2 \right] \exp \left( -\frac{x^2}{12} \right) - \frac{2^6 \varepsilon}{7^{5/2}} \left[ 1 - \frac{8}{21} x^2 \right] \exp \left( -\frac{9x^2}{28} \right) \right\} \\
 &- \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) x^2 Y_{20}(\Omega_x) \\
 &\times \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp \left( -\frac{x^2}{12} \right) - \frac{2^{19/2} \varepsilon}{7^{7/2} 3} \exp \left( -\frac{9x^2}{28} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

Definindo

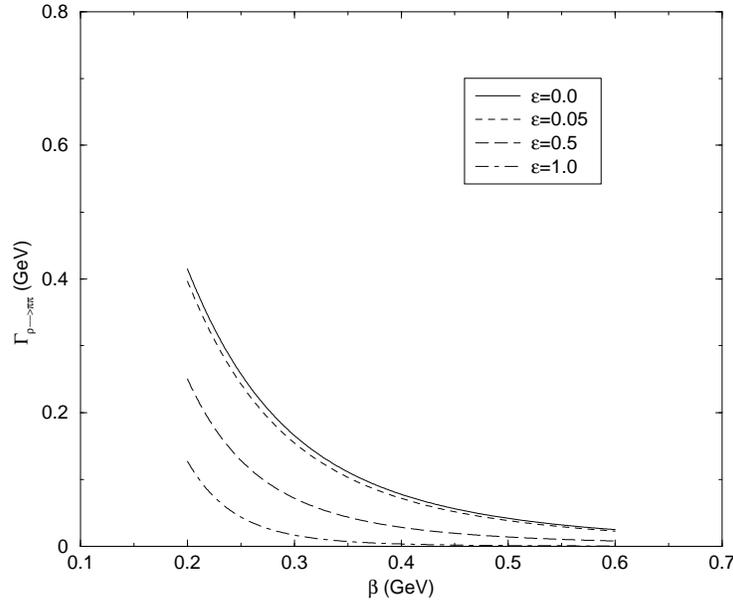
$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{01} &\equiv - \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) \\
 &\times \left\{ \frac{2^4}{3^{5/2}} \left[ 1 - \frac{2}{9} x^2 \right] \exp \left( -\frac{x^2}{12} \right) - \frac{2^6 \varepsilon}{7^{5/2}} \left[ 1 - \frac{8}{21} x^2 \right] \exp \left( -\frac{9x^2}{28} \right) \right\} \\
 \mathcal{C}_{21} &\equiv - \left( \frac{\gamma}{\pi^{1/4} \beta^{1/2}} \right) x^2 \\
 &\times \left\{ \frac{2^{11/2}}{3^{9/2}} \exp \left( -\frac{x^2}{12} \right) - \frac{2^{19/2} \varepsilon}{7^{7/2} 3} \exp \left( -\frac{9x^2}{28} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

a Eq. (4.118) fica

$$h_{fi}^{C3P0} = \mathcal{C}_{01} Y_{00}(\Omega_x) + \mathcal{C}_{21} Y_{20}(\Omega_x), \tag{4.120}$$

sendo que, as ondas  $a_S^{C3P0}$  e  $a_D^{C3P0}$  são dadas por  $\mathcal{C}_{01}$  e  $\mathcal{C}_{21}$ , respectivamente. Da Eq. (1.29) temos que

$$\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = 2\pi P \frac{E_\pi E_\pi}{M_\rho} \int d\Omega |\mathcal{C}_{01} Y_{00}(\Omega_x) + \mathcal{C}_{21} Y_{20}(\Omega_x)|^2 \tag{4.121}$$



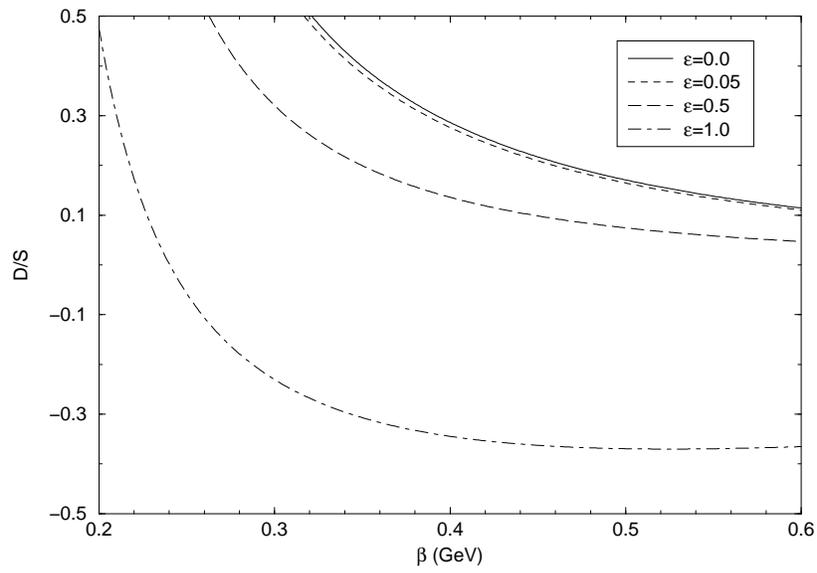
**Fig. 4.1:** Taxa de decaimento para  $\rho \rightarrow \pi\pi$

Utilizando a propriedade de ortonormalidade dos harmônicos esféricos, encontramos então

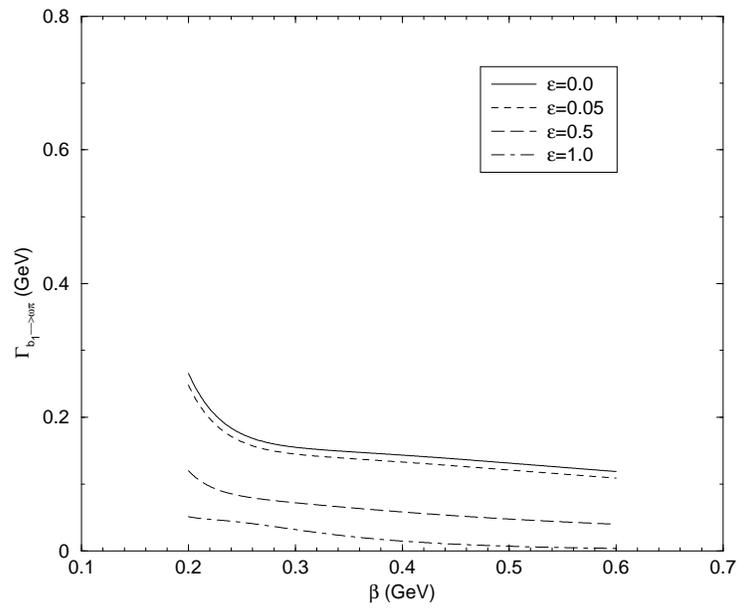
$$\Gamma_{b_1 \rightarrow \omega\pi} = 2\pi P \frac{E_\omega E_\pi}{M_{b_1}} \left( C_{01}^2 + C_{21}^2 \right) \quad (4.122)$$

que é a taxa de decaimento para o decaimento do méson  $b_1$  em  $\omega\pi$  com a correção de ortogonalidade.

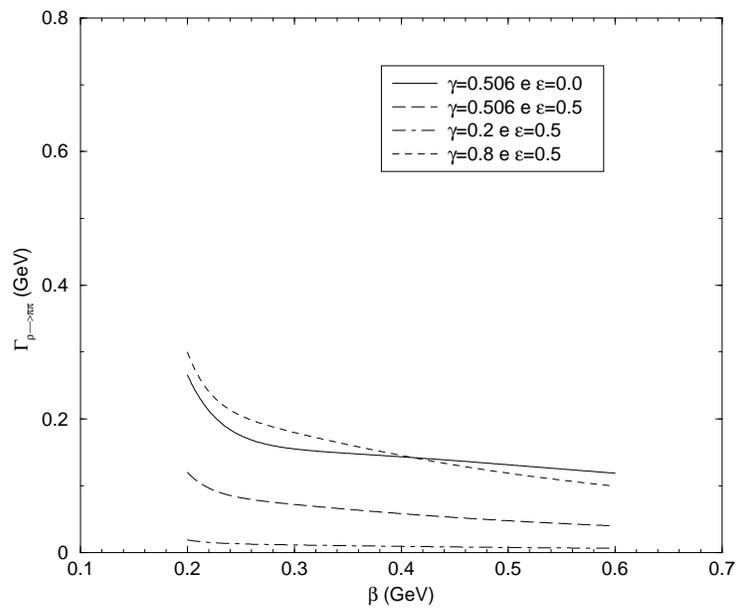
Nos gráficos (4.1) a (4.4) apresentamos vários gráficos que ilustram a dependência da taxa de decaimento e da razão D/S nos parâmetros do modelo. Em (4.1) está traçado a curva para o decaimento do  $\rho \rightarrow \pi\pi$ . A curva com  $\varepsilon = 0$  corresponde ao resultado obtido por T. Barnes *et al.* Nesta situação o valor experimental (151 MeV) é obtido com  $\beta = 0.311$  GeV. A medida que aumentamos o valor de  $\varepsilon$  há um deslocamento para baixo da curva. Para um valor de  $\varepsilon = 0.05$  o valor experimental é obtido em  $\beta = 0.302$  GeV. Enquanto para  $\varepsilon = 0.5$  e  $\varepsilon = 1$  este valor só ocorre para  $\beta = 0.237$  GeV e  $\beta < 0.2$ . Um comportamento similar ocorre para o decaimento  $b_1 \rightarrow \omega\pi$  na taxa de decaimento e na razão D/S para este processo. Na (4.4) está mostrado o efeito da variação combinada de  $\gamma$  e  $\varepsilon$ . A curva sólida é a curva de referência do modelo  ${}^3P_0$  (sem a correção de ortogonalidade). As outras três curvas são tomadas com  $\varepsilon = 0.5$ . Ao variar o valor de  $\gamma$  o que pode ser observado é um aumento no valor da curva a medida que se aumenta  $\gamma$ . Este comportamento é coerente com toda a discussão feita até agora, qual seja, o parâmetro  $\gamma$  representa a intensidade da interação enquanto  $\varepsilon$  é um parâmetro que atenua a interação.



**Fig. 4.2:** Razões  $D/S$  para o decaimento  $b_1 \rightarrow \omega\pi$



**Fig. 4.3:** Taxa de decaimento para  $b_1 \rightarrow \omega\pi$



**Fig. 4.4:** *Competição entre o comportamento de  $\gamma$  e  $\varepsilon$  para  $b_1 \rightarrow \omega\pi$*

# Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação fizemos um estudo exploratório sobre o decaimento de mésons. Para este estudo usou-se uma técnica amplamente desenvolvida na física atômica e recentemente aplicada à física hadrônica chamada de formalismo de Fock-Tani. Há muitos exemplos de sistemas nos quais os graus de liberdade internos de partículas compostas não podem ser desprezados. Para estes sistemas o formalismo em segunda quantização da mecânica quântica torna-se uma ferramenta matemática muito difícil de ser usada. A presença de estados ligados torna mais complexa a aplicação do teorema de Wick, o cálculo de funções de Green e assim por diante.

Por isso foi desenvolvida a idéia de se fazer um mapeamento do espaço de Hilbert físico para um espaço de Hilbert ideal onde as partículas compostas são representadas por operadores elementares ideais, obedecendo regras de comutação canônicas. A informação sobre a sua estrutura interna é então transferida para um Hamiltoniano de interação efetivo. Desta forma foi deduzido um novo modelo para decaimentos de mésons. O modelo consagrado na literatura e que obtém, de um modo geral, o maior sucesso na descrição dos processos de decaimento é chamado de modelo  ${}^3P_0$ . Os resultados deste modelo podem ser obtidos partindo do limite não-relativístico de um Hamiltoniano de criação de pares. O nosso modelo foi obtido aplicando a transformação de Fock-Tani sobre este Hamiltoniano e mostramos que o  $H_{efetivo}$ , em ordem mais baixa da teoria transformada, reproduz os resultados da literatura com o modelo  ${}^3P_0$ . Na estrutura da teoria efetiva representada por  $H_{efetivo}$ , havia contribuições que se originaram em ordens mais altas da transformação. Desta forma a proposta deste novo modelo consistiu em avaliar a correção de ortogonalidade ao Hamiltoniano do modelo  ${}^3P_0$  e fazer comparações com a experiência.

Esta dissertação está longe de avaliar o real potencial deste modelo, pois isto demandaria um estudo minucioso de todo espectro hadrônico, em particular, o setor do charmônio. Como perspectiva futura é necessário fazer um estudo detalhado iniciando, por exemplo, com os sete méson leves da tabela (1.2) e fazer um ajuste cuidadoso do modelo  $C^3P_0$  aos dados experimentais. O ajuste pode ser do tipo apresentado em (1.44). Ao fixar esta parametrização pode-se usar o modelo ajustado para, inicialmente estudar, o setor do quarkônio.

A inclusão do quark com estranheza permite estudar o setor do kaônio. Pode-se então abordar o problema do momento referente aos mésons com charme, como por exemplo os  $D_{s0}$  e  $D_{s1}$ .

## Apêndice A

# Unidades, Notação, Convenções

### (A) Unidades Naturais

No sistema internacional de unidades, a velocidade da luz,

$$c = 299792458 \text{ m/s} , \quad (\text{A.1})$$

e a constante de Planck,

$$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-31} \text{ kg m}^2/\text{s} , \quad (\text{A.2})$$

são iguais à unidade:

$$c = \hbar = 1 . \quad (\text{A.3})$$

A conversão entre unidades do sistema internacional (S. I.) e unidades do sistema natural (S. N.) é dada pela tabela A.1.

quantidade física	unidade S.I.	unidade S.N.	fator de conversão S.I. $\rightarrow$ S.N.
distância	m	m	1
tempo	s	m	c
massa	g	$\text{m}^{-1}$	$c/\hbar$
velocidade	m/s	adimensional	$1/c$
momentum linear	kg·m/s	$\text{m}^{-1}$	$1000/\hbar$
momentum angular	kg·m <sup>2</sup> /s	adimensional	$1000/\hbar$
energia	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	$\text{m}^{-1}$	$1000/\hbar c$
ação	kg·m <sup>2</sup> /s	adimensional	$1000/\hbar$

**Tab. A.1:** *Unidades dos sistemas internacional e natural*

Em particular, um resultado útil é

$$1 \text{ fm}^{-1} = 197.327052 \text{ MeV}. \quad (\text{A.4})$$

## (B) Métrica

Neste trabalho foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell para a métrica. O quadri-vetor contravariante é

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z), \quad (\text{A.5})$$

e o vetor covariante correspondente é

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z), \quad (\text{A.6})$$

onde o tensor métrico é definido por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Usamos a convenção de que índices latinos ( $i, j, k, \dots$ ) assumem os valores 1,2,3 e índices gregos assumem os valores 0,1,2,3. Na equação (A.6) e em todo este trabalho, a repetição de índices gregos indica soma implícita.

O produto escalar entre dois quadri-vetores é denotado por

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (\text{A.8})$$

As derivadas parciais são definidas de acordo com

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (\text{A.9})$$

Usamos a convenção de que a derivada  $\partial_\mu A B$  atua somente em  $A$ , enquanto que  $\partial_\mu(A B)$  atua sobre o produto  $A B$ :

$$\begin{aligned} \partial_\mu A B &= (\partial_\mu A) B \\ \partial_\mu(A B) &= (\partial_\mu A) B + A(\partial_\mu B) = \partial_\mu A B + A \partial_\mu B. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

O operador de momentum linear é

$$p^\mu = i \partial^\mu = \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i \vec{\nabla} \right). \quad (\text{A.11})$$

## (C) Matrizes de Pauli

As matrizes de Pauli obedecem a lei de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.12})$$

e a lei de anti-comutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2I \delta_{ij}, \quad (\text{A.13})$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker e  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo totalmente anti-simétrico. Uma relação útil envolvendo operadores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  que comutam com as matrizes de Pauli, mas não necessariamente um com o outro, é

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (\text{A.14})$$

A representação padrão para as matrizes de Pauli é

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

No espaço de isospin, as mesmas matrizes são denotadas por  $\vec{\tau}$ .

## (D) Matrizes de Dirac

Neste trabalho foi utilizada a convenção de Bjorken e Drell para as matrizes de Dirac. A propriedade fundamental destas matrizes é a lei de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.16})$$

As matrizes  $\alpha_i$  e  $\beta$  são definidas por

$$\gamma_i = \beta \alpha_i \quad \gamma^0 = \gamma_0 = \beta. \quad (\text{A.17})$$

A matriz  $\gamma_5$  é definida por

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.18})$$

Note-se que 5 não é um índice tensorial. A representação padrão para  $\gamma^\mu$  é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Nesta representação, a matriz adjunta hermitiana de  $\gamma^\mu$  é

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (\text{A.20})$$

e a matriz  $\gamma_5$  é:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

### (E) Integrais Gaussianas

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \exp \left[ -ak^2 + \vec{b} \cdot \vec{k} \right] = \left( \frac{\pi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ \frac{b^2}{4a} \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k k_x \exp \left[ -ak^2 + \vec{b} \cdot \vec{k} \right] = \left( \frac{\pi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{b_x}{2a} \exp \left[ \frac{b^2}{4a} \right] \quad (\text{A.23})$$

## Apêndice B

# Função de Onda do Méson

No formalismo de Fock-Tani, consideramos os estados de méson em segunda quantização, dados por

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$  é a função de onda do méson, normalizada na forma

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.2})$$

Considerando os graus de liberdade spin, sabor, cor e espaço, a função de onda do méson pode ser escrito na forma

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \chi_{S_\alpha}^{s_1 s_2} f_{f_\alpha}^{f_1 f_2} C^{c_1 c_2} \Phi_{nl}^{\vec{p}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2}. \quad (\text{B.3})$$

As funções de onda de spin,  $\chi_{S_\alpha}^{s_1 s_2}$ , são dadas pelos coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes aos estados de spin do méson, onde  $s_1, s_2$  são as projeções de spin do quark e do antiquark ( $s = 1 \rightarrow \uparrow \equiv +\frac{1}{2}$  e  $s = 2 \rightarrow \downarrow \equiv -\frac{1}{2}$ ). O índice  $S_\alpha$  é um índice que denota o méson específico. Desta forma se estivermos estudando, por exemplo, o decaimento  $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^0$

$$\begin{aligned} S_\alpha &= 1 \rightarrow \rho \\ S_\alpha &= 2, 3 \rightarrow \pi \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

O outro processo a ser estudado nesta dissertação será  $b_1^+ \rightarrow \omega \pi^+$  e neste caso

$$\begin{aligned} S_\alpha &= 1 \rightarrow b_1^+ \\ S_\alpha &= 2, \rightarrow \omega \\ S_\alpha &= 3 \rightarrow \pi^+. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

O estado de singlete de spin ( $S = 0 ; S_z = 0$ ) é dado por:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (\text{B.6})$$

Assim,

$$\chi_{S_\alpha}^{12} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \chi_{S_\alpha}^{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (\text{B.7})$$

O estado de tripleto de spin ( $S = 1$  ;  $S_z = 1, 0, -1$ ) são representados por:

$$\begin{aligned} & |\uparrow\uparrow\rangle \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ & |\downarrow\downarrow\rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Desta forma

$$\chi_{S_\alpha}^{11} = 1 \quad (\text{B.9})$$

$$\chi_{S_\alpha}^{12} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \chi_{S_\alpha}^{21} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.10})$$

$$\chi_{S_\alpha}^{22} = 1 . \quad (\text{B.11})$$

Explicitamente as funções de onda de spin para os dois processos que usaremos são

$$\begin{aligned} |\rho\rangle &= |\uparrow\bar{\uparrow}\rangle \\ |\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\bar{\downarrow}\rangle - |\downarrow\bar{\uparrow}\rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

e

$$\begin{aligned} |b_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\bar{\downarrow}\rangle - |\downarrow\bar{\uparrow}\rangle) \\ |\omega\rangle &= |\uparrow\bar{\uparrow}\rangle \\ |\pi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\bar{\downarrow}\rangle - |\downarrow\bar{\uparrow}\rangle) . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

A função de onda de sabor  $f_{f_\alpha}^{f_\mu f_\nu}$  segue a mesma lógica do spin. Considerando o mesmo exemplo de decaimento temos

$$\begin{aligned} |\rho^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\ |\pi^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\ |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Valores para  $f_{f_\alpha}^{f_\mu f_\nu}$

$$f_\alpha = 3 \rightarrow \rho; \quad f_\alpha = 2 \rightarrow \pi^+; \quad f_\alpha = 1 \rightarrow \pi^0 \quad (\text{B.15})$$

e

$$f_\mu = 1 \rightarrow u; \quad f_\mu = 2 \rightarrow d \quad (\text{B.16})$$

Assim para o  $\rho$ , encontramos

$$f_1^{12} = -1; \quad f_1^{11} = f_1^{21} = f_1^{22} = 0, \quad (\text{B.17})$$

mas como o  $\rho$  e o  $\pi^+$  tem a mesma função de onde de sabor,

$$f_1^{ij} = f_2^{ij}, \quad (\text{B.18})$$

e para  $\pi^0$ , temos

$$f_3^{11} = -f_3^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad f_3^{12} = f_3^{21} = 0. \quad (\text{B.19})$$

Do mesmo modo para o  $b_1 \rightarrow \omega + \pi$

$$\begin{aligned} |b_1^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\ |\pi^+\rangle &= -|u\bar{d}\rangle \\ |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Valores para  $f_{f_\alpha}^{f_\mu f_\nu}$

$$f_\alpha = 3 \rightarrow \pi^+; \quad f_\alpha = 2 \rightarrow \omega; \quad f_\alpha = 1 \rightarrow b_1^+ \quad (\text{B.21})$$

e

$$f_\mu = 1 \rightarrow u; \quad f_\mu = 2 \rightarrow d \quad (\text{B.22})$$

Assim para o  $b_1^+$ , temos

$$f_1^{12} = -1; \quad f_1^{11} = f_1^{21} = f_1^{22} = 0. \quad (\text{B.23})$$

Mas, como o  $b_1^+$  e o  $\pi^+$  tem a mesma função de onde de sabor, então

$$f_1^{ij} = f_3^{ij} \quad (\text{B.24})$$

E para  $\omega$ , temos

$$f_2^{11} = f_2^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad f_2^{12} = f_2^{21} = 0 \quad (\text{B.25})$$

A função de onda de cor será

$$C^{c_1 c_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{c_1 c_2}. \quad (\text{B.26})$$

A parte espacial das funções de onda dos mésons é do tipo oscilador harmônico

$$\Phi_{nl}^{\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2} = \delta(\vec{P}_\alpha - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Phi_{nl}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \quad (\text{B.27})$$

onde  $\Phi_{nl}(\vec{p}_i, \vec{p}_j)$  é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{nl}(\vec{p}_i, \vec{p}_j) &= \left(\frac{1}{2\beta}\right)^l N_{nl} |\vec{p}_i - \vec{p}_j|^l \exp\left[-\frac{(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2}{8\beta^2}\right] \\ &\times \mathcal{L}_n^{l+\frac{1}{2}}\left[\frac{(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2}{4\beta^2}\right] Y_{lm}(\Omega_{\vec{p}_i - \vec{p}_j}) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

em que  $p_{i(j)}$  é o momento interno,  $Y_{lm}$  o harmônico esférico e  $\beta$  um parâmetro de escala, a constante de normalização  $N_{nl}$  depende dos números quânticos radiais e orbitais  $n, l$  com

$$N_{nl} = \left[\frac{2(n!)}{\beta^3 \Gamma(n+l+3/2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.29})$$

Os polinômios de Laguerre são dados por

$$\mathcal{L}_n^{l+\frac{1}{2}}(p) = \sum_{k=0}^n \frac{(-)^k \Gamma(n+l+3/2)^{(n-k)!}}{k! \Gamma(k+l+3/2)} p^k \quad (\text{B.30})$$

Os mésons que serão estudados serão mésons leves não-estranhos com  $L_{q\bar{q}} = 0$  e  $L_{q\bar{q}} = 1$ . Desta forma

- $L_{q\bar{q}} = 0$

$$\varphi(\vec{p}) \equiv \Phi_{00}(\vec{p}) = \frac{1}{\pi^{3/4} \beta^{3/2}} \exp\left[-\frac{p^2}{8\beta^2}\right] \quad (\text{B.31})$$

- $L_{q\bar{q}} = 1$

$$\Phi_{1m}(\vec{p}) = \phi(\vec{p}) Y_{1m}(\Omega_{\vec{p}}) \quad (\text{B.32})$$

onde

$$\phi(\vec{p}) = \left[\frac{2}{3\sqrt{\pi}\beta^5}\right]^{\frac{1}{2}} p \exp\left[-\frac{p^2}{8\beta^2}\right]. \quad (\text{B.33})$$

## Apêndice C

# Cálculo de Comutadores

Neste apêndice vamos apresentar, em detalhes, o cálculo de comutadores que são utilizados no decorrer deste trabalho. Como foi definido em (2.3) o operador de criação de um méson no espaço físico é dado por

$$M_\alpha^\dagger = \phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger. \quad (\text{C.1})$$

Esta definição, em segunda quantização permite calcular vários comutadores importantes para esta dissertação. Também iremos utilizar as seguintes propriedades

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (\text{C.2})$$

e

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\} \quad (\text{C.3})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = -\bar{q}_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu, \bar{q}_\xi\} + \{\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \quad (\text{C.4})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = \delta_{\nu\sigma} \bar{q}_\xi \quad (\text{C.5})$$

- Cálculo de  $[q_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[q_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi] = -q_\sigma^\dagger \{q_\nu, q_\xi\} + \{q_\nu, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \quad (\text{C.6})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[q_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi] = \delta_{\nu\sigma} q_\xi \quad (\text{C.7})$$

- Cálculo de  $[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger] = -\bar{q}_\sigma^\dagger \{q_\nu, q_\xi^\dagger\} + \{q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} q_\xi^\dagger \quad (\text{C.8})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger] = -\delta_{\nu\xi} \bar{q}_\sigma^\dagger \quad (\text{C.9})$$

- Cálculo de  $[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = -\bar{q}_\sigma^\dagger \{q_\nu, \bar{q}_\xi\} + \{q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \quad (\text{C.10})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[q_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = 0 \quad (\text{C.11})$$

- Cálculo de  $[q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi] = -q_\sigma \{q_\nu, \bar{q}_\xi\} + \{q_\nu, q_\sigma\} \bar{q}_\xi \quad (\text{C.12})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi] = 0 \quad (\text{C.13})$$

E desta expressão, expandindo para outros comutadores de mesma natureza, obtemos

$$[q_\nu, q_\sigma \bar{q}_\xi] = [q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi^\dagger] = [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\xi q_\sigma] = [\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\xi^\dagger q_\sigma^\dagger] = 0 \quad (\text{C.14})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger] = -\bar{q}_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu, q_\xi^\dagger\} + \{\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger\} q_\xi^\dagger \quad (\text{C.15})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\xi^\dagger] = \delta_{\nu\sigma} q_\xi^\dagger \quad (\text{C.16})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi] = -q_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu, q_\xi\} + \{\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \quad (\text{C.17})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, q_\sigma^\dagger q_\xi] = 0 \quad (\text{C.18})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi] = -q_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \quad (\text{C.19})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi] = 0 \quad (\text{C.20})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = -\bar{q}_\sigma^\dagger \{\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\xi\} + \{\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \quad (\text{C.21})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = -\delta_{\xi\nu} \bar{q}_\sigma^\dagger \quad (\text{C.22})$$

- Cálculo de  $[q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi] = -q_\sigma^\dagger \{q_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger\} q_\xi \quad (\text{C.23})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[q_\nu^\dagger, q_\sigma^\dagger q_\xi] = -\delta_{\xi\nu} q_\sigma^\dagger \quad (\text{C.24})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi] = -\bar{q}_\sigma \{\bar{q}_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma\} q_\xi \quad (\text{C.25})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi] = \delta_{\sigma\nu} q_\xi \quad (\text{C.26})$$

- Cálculo de  $[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi] = -\bar{q}_\sigma \{q_\nu^\dagger, q_\xi\} + \{q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma\} q_\xi \quad (\text{C.27})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma q_\xi] = -\delta_{\xi\nu} \bar{q}_\sigma \quad (\text{C.28})$$

- Cálculo de  $[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.3), logo podemos escrever,

$$[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = -\bar{q}_\sigma^\dagger \{q_\nu^\dagger, \bar{q}_\xi\} + \{q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger\} \bar{q}_\xi \quad (\text{C.29})$$

Com a propriedade (2.5), podemos escrever,

$$[q_\nu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi] = 0 \quad (\text{C.30})$$

- Cálculo de  $[q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = [q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger] \bar{q}_\xi + \bar{q}_\omega^\dagger [q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\xi] \quad (\text{C.31})$$

Com as propriedades (C.18) e (C.20), podemos escrever,

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = 0 \quad (\text{C.32})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = \bar{q}_\sigma^\dagger [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] + [\bar{q}_\sigma^\dagger, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] \bar{q}_\nu \quad (\text{C.33})$$

Com as propriedades (C.5) e (C.22), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi] = \delta_{\nu\omega} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi - \delta_{\xi\sigma} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu \quad (\text{C.34})$$

- Cálculo de  $[q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda] = q_\rho^\dagger [q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda] + [q_\rho^\dagger, q_\tau^\dagger q_\lambda] q_\mu \quad (\text{C.35})$$

Com as propriedades (C.7) e (C.24), podemos escrever,

$$[q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda] = \delta_{\mu\tau} q_\rho^\dagger q_\lambda - \delta_{\lambda\rho} q_\tau^\dagger q_\mu \quad (\text{C.36})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$\left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] = \bar{q}_\sigma^\dagger \left[ \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] + \left[ \bar{q}_\sigma^\dagger, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] \bar{q}_\nu \quad (\text{C.37})$$

Com as propriedades (C.14) e (C.16), podemos escrever,

$$\left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] = -\bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger \delta_{\nu\tau} \quad (\text{C.38})$$

- Cálculo de  $\left[ q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $\left[ q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$\left[ q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] = q_\eta^\dagger \left[ q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] + \left[ q_\eta^\dagger, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] q_\mu \quad (\text{C.39})$$

Com as propriedades (C.9) e (C.14), podemos escrever,

$$\left[ q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] = q_\eta^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \delta_{\mu\rho} \quad (\text{C.40})$$

ou ainda

$$\left[ q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger \right] = -\bar{q}_\tau^\dagger q_\eta^\dagger \delta_{\mu\rho} \quad (\text{C.41})$$

- Cálculo de  $\left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $\left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$\left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right] = \bar{q}_\sigma^\dagger \left[ \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right] + \left[ \bar{q}_\sigma^\dagger, \bar{q}_\tau q_\rho \right] \bar{q}_\nu \quad (\text{C.42})$$

Com as propriedades (C.14) e (C.26), podemos escrever,

$$\left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right] = \delta_{\tau\sigma} q_\rho \bar{q}_\nu \quad (\text{C.43})$$

ou ainda

$$\left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right] = -\delta_{\tau\sigma} \bar{q}_\nu q_\rho \quad (\text{C.44})$$

- Cálculo de  $[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho] = q_\eta^\dagger [q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho] + [q_\eta^\dagger, \bar{q}_\tau q_\rho] q_\mu \quad (\text{C.45})$$

Com as propriedades (C.13) e (C.28), podemos escrever,

$$[q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho] = -\bar{q}_\tau q_\mu \delta_{\rho\eta} \quad (\text{C.46})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger]$ , que é realizado a partir da Eq. (C.2), logo podemos escrever,

$$[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] = \bar{q}_\xi [q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] + [\bar{q}_\xi, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] q_\omega \quad (\text{C.47})$$

Com as propriedades (C.9) e (C.16), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] = -\bar{q}_\xi \bar{q}_\sigma^\dagger \delta_{\omega\rho} + \delta_{\xi\sigma} q_\rho^\dagger q_\omega \quad (\text{C.48})$$

Ou ainda,

$$[\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] = -\delta_{\xi\sigma} \delta_{\omega\rho} + \delta_{\omega\rho} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi + \delta_{\xi\sigma} q_\rho^\dagger q_\omega \quad (\text{C.49})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}]$ , que é realizado a partir da Eq. (2.7), logo podemos escrever,

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}] &= [\bar{q}_\nu, (\phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau + \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger q_\mu)] \\ &= \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\sigma} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau] + \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} [\bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger q_\mu] \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Com as propriedades (C.5) e (C.18), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}] = \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\tau \delta_{\nu\sigma} \quad (\text{C.51})$$

Então a solução fica

$$[\bar{q}_\nu, \Delta_{\alpha\beta}] = \phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\mu\nu} \bar{q}_\tau \quad (\text{C.52})$$

- Cálculo de  $[q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}]$ , que é realizado a partir da Eq. (2.7), logo podemos escrever,

$$\begin{aligned} [q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}] &= [q_\mu^\dagger, (\phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\mu'\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau + \phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger q_{\mu'})] \\ &= \phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\mu'\sigma} [q_\mu^\dagger, \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\tau] + \phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} [q_\mu^\dagger, q_\rho^\dagger q_{\mu'}] \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

Com as propriedades (C.24) e (C.30), podemos escrever,

$$[q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}] = -\phi_\alpha^{*\mu'\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \delta_{\mu'\mu} \quad (\text{C.54})$$

Então a solução fica

$$[q_\mu^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}] = -\phi_\alpha^{*\mu\tau} \phi_\beta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \quad (\text{C.55})$$

- Cálculo de  $[\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]$ . Este cálculo é realizado a partir das Eqs. (C.1) e (2.7), logo podemos escrever

$$\begin{aligned} [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger] &= [(\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} q_\eta^\dagger q_\mu), \phi_\delta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] \\ &= [\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \phi_\delta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] + [\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} q_\eta^\dagger q_\mu, \phi_\delta^{\rho\tau} q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] \\ &= \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\tau} [\bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} \phi_\delta^{\rho\tau} [q_\eta^\dagger q_\mu, q_\rho^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

Com as propriedades (C.38) e (C.41), podemos escrever,

$$\begin{aligned} [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger] &= -\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\tau} \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger \delta_{\nu\tau} - \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} \phi_\delta^{\rho\tau} \bar{q}_\tau^\dagger q_\eta^\dagger \delta_{\mu\rho} \\ &= -\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger - \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\eta\nu} \phi_\delta^{\mu\tau} \bar{q}_\tau^\dagger q_\eta^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os dois termos e obter,

$$[\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger] = -\{\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger \quad (\text{C.58})$$

- Cálculo de  $[\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta]$ . Este cálculo é realizado a partir das Eqs. (C.1) e (2.7), logo podemos escrever

$$\begin{aligned} [\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta] &= \left[ \left( \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\eta\nu} q_\eta^\dagger q_\mu \right), \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\tau q_\rho \right] \\ &= \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\sigma} \phi_\delta^{*\rho\tau} \left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau q_\rho \right] \\ &+ \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\eta\nu} \phi_\delta^{*\rho\tau} \left[ q_\eta^\dagger q_\mu, \bar{q}_\tau q_\rho \right] \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Com as propriedades (C.44) e (C.46), podemos escrever,

$$\begin{aligned} [\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta] &= -\phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\sigma} \phi_\delta^{*\rho\tau} \delta_{\tau\sigma} \bar{q}_\nu q_\rho - \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\eta\nu} \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\tau q_\mu \delta_{\rho\eta} \\ &= -\phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\mu\tau} \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\nu q_\rho - \phi_\gamma^{*\mu\nu} \phi_\beta^{\rho\nu} \phi_\delta^{*\rho\tau} \bar{q}_\tau q_\mu \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os dois termos e obter,

$$[\Delta_{\gamma\beta}, M_\delta] = -\left\{ \phi_\gamma^{*\mu\sigma} \phi_\beta^{\mu\nu} \phi_\delta^{*\rho\nu} + \phi_\gamma^{*\rho\nu} \phi_\beta^{\mu\nu} \phi_\delta^{*\mu\sigma} \right\} \bar{q}_\sigma q_\rho \quad (\text{C.61})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]]$ . Este cálculo é realizado a partir das Eqs. (C.61) e (C.3), logo podemos escrever

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]] &= \left[ \bar{q}_\nu, \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\omega} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} \bar{q}_\omega q_\rho \right] \\ &= \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\omega} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega q_\rho] \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

Com a propriedade (C.14), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]] = 0 \quad (\text{C.63})$$

- Cálculo de  $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]]$ . Este cálculo é realizado a partir das Eqs. (C.61) e (C.3), logo podemos escrever

$$\begin{aligned} [\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]] &= \left[ \bar{q}_\nu, -\left\{ \phi_\alpha^{\rho\nu'} \phi_\beta^{\mu'\omega} \phi_\gamma^{*\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{\mu'\omega} \phi_\beta^{\rho\nu'} \phi_\gamma^{*\mu'\nu'} \right\} \bar{q}_\omega^\dagger q_\rho^\dagger \right] \\ &= -\left\{ \phi_\alpha^{\rho\nu'} \phi_\beta^{\mu'\omega} \phi_\gamma^{*\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{\mu'\omega} \phi_\beta^{\rho\nu'} \phi_\gamma^{*\mu'\nu'} \right\} [\bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger q_\rho^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Com a propriedade (C.16), podemos escrever,

$$[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]] = - \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\omega} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\omega} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} \delta_{\nu\omega} q_\rho^\dagger \quad (\text{C.65})$$

ou ainda

$$[\bar{q}_\nu, [\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger]] = - \left\{ \phi_\alpha^{*\rho\nu'} \phi_\beta^{*\mu'\nu} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} + \phi_\alpha^{*\mu'\nu} \phi_\beta^{*\rho\nu'} \phi_\gamma^{\mu'\nu'} \right\} q_\rho^\dagger \quad (\text{C.66})$$

- Cálculo de  $[\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}]$ , que é realizado a partir da Eq. (2.7), logo podemos escrever,

$$\begin{aligned} [\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}] &= \left[ \left( \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu \right), \left( \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi + \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} q_\tau^\dagger q_\lambda \right) \right] \\ &= \left[ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \left( \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi + \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} q_\tau^\dagger q_\lambda \right) \right] \\ &+ \left[ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu, \left( \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi + \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} q_\tau^\dagger q_\lambda \right) \right] \\ &= \left[ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi \right] + \left[ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} q_\tau^\dagger q_\lambda \right] \\ &+ \left[ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu, \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi \right] + \left[ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu, \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} q_\tau^\dagger q_\lambda \right] \\ &= \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi \right] + \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} \left[ \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu, q_\tau^\dagger q_\lambda \right] \\ &+ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \left[ q_\rho^\dagger q_\mu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\xi \right] + \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} \left[ q_\rho^\dagger q_\mu, q_\tau^\dagger q_\lambda \right] \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

Com as propriedades (C.32), (C.34) e (C.36), podemos escrever,

$$\begin{aligned} [\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}] &= \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \left( \delta_{\nu\omega} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi - \delta_{\xi\sigma} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu \right) \\ &+ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} \left( \delta_{\mu\tau} q_\rho^\dagger q_\lambda - \delta_{\lambda\rho} q_\tau^\dagger q_\mu \right) \\ &= \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \delta_{\nu\omega} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \delta_{\xi\sigma} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu \\ &+ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} \delta_{\mu\tau} q_\rho^\dagger q_\lambda - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} \delta_{\lambda\rho} q_\tau^\dagger q_\mu \\ &= \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\xi} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu \\ &+ \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\mu\xi} q_\rho^\dagger q_\lambda - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\lambda\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} q_\tau^\dagger q_\mu \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

Então a solução fica

$$\begin{aligned} [\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}] &= \phi_\alpha^{*\mu\xi} \phi_\gamma^{\mu\omega} \phi_\beta^{*\lambda\nu} \phi_\delta^{\lambda\xi} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\xi} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu \\ &+ \phi_\alpha^{*\lambda\nu} \phi_\gamma^{\tau\nu} \phi_\beta^{*\mu\xi} \phi_\delta^{\lambda\xi} q_\tau^\dagger q_\mu - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\lambda\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\delta^{\tau\xi} q_\tau^\dagger q_\mu \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

Mas se trocarmos os índices convenientemente, podemos somar os termos e obter,

$$\begin{aligned} [\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}] &= \left\{ \phi_\alpha^{*\mu\xi} \phi_\beta^{*\lambda\nu} \phi_\gamma^{\mu\omega} \phi_\delta^{\lambda\xi} - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\gamma^{\mu\xi} \phi_\delta^{\lambda\omega} \right\} \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\nu \\ &+ \left\{ \phi_\alpha^{*\lambda\nu} \phi_\beta^{*\mu\xi} \phi_\gamma^{\tau\nu} \phi_\delta^{\lambda\xi} - \phi_\alpha^{*\mu\nu} \phi_\beta^{*\lambda\xi} \phi_\gamma^{\lambda\nu} \phi_\delta^{\tau\xi} \right\} q_\tau^\dagger q_\mu \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

- Cálculo de  $[M_\alpha, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]]$

Nesta seção vamos apresentar o cálculo de  $[M_\alpha, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]]$ , que é realizado a partir das Eq. (C.1) e (C.58), logo podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 [M_\alpha, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]] &= [\phi_\alpha^{*\omega\xi} \bar{q}_\xi q_\omega, -\{\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] \\
 &= -\phi_\alpha^{*\omega\xi} \{\phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} [\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] \\
 &= -\{\phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} [\bar{q}_\xi q_\omega, \bar{q}_\sigma^\dagger q_\rho^\dagger] \quad (C.71)
 \end{aligned}$$

Com as propriedades (C.49), podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 [M_\alpha, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]] &= -\{\phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} [-\delta_{\xi\sigma} \delta_{\omega\rho}] \\
 &\quad - \{\phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} \delta_{\omega\rho} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi \\
 &\quad - \{\phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} \delta_{\xi\sigma} q_\rho^\dagger q_\omega \quad (C.72)
 \end{aligned}$$

Então a solução fica

$$\begin{aligned}
 [M_\alpha, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]] &= \{\phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\xi} \phi_\delta^{\omega\nu} + \phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\omega\nu} \phi_\delta^{\mu\xi}\} \\
 &\quad - \{\phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\sigma} \phi_\delta^{\omega\nu} + \phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\omega\nu} \phi_\delta^{\mu\sigma}\} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\xi \\
 &\quad - \{\phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\mu\xi} \phi_\delta^{\rho\nu} + \phi_\alpha^{*\omega\xi} \phi_\beta^{*\mu\nu} \phi_\gamma^{\rho\nu} \phi_\delta^{\mu\xi}\} q_\rho^\dagger q_\omega \quad (C.73)
 \end{aligned}$$

## Apêndice D

# O Gerador de Quarta Ordem

Nesta seção vamos apresentar o cálculo do gerador de quarta ordem, que é realizado a partir da Eq. (2.69), logo podemos escrever o gerador  $\tilde{M}$  até ordem 3 como

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma \quad (\text{D.1})$$

Definindo

$$T_{\alpha\beta\gamma} = -[M_\alpha, \Delta_{\beta\gamma}] = [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] \quad (\text{D.2})$$

termo este de terceira ordem, temos

$$\tilde{M}_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger T_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma \quad (\text{D.3})$$

e também

$$T_{\alpha\beta\gamma}^\dagger = -[M_\alpha, \Delta_{\beta\gamma}]^\dagger = [M_\alpha^\dagger, \Delta_{\gamma\beta}] = -[\Delta_{\gamma\beta}, M_\alpha^\dagger] \quad (\text{D.4})$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\alpha &= M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger T_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma \\ \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger &= M_{\alpha'}^\dagger + \frac{1}{2}M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{1}{2}M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}M_{\beta'} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Vamos calcular o comutador  $[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger]$ . Sabemos que até terceira ordem ele é dado pela eq. (2.70), e desta forma para quarta ordem esta equação fica

$$[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha'} + O(\phi^{(5)}) \quad (\text{D.6})$$

Desta forma vamos investigar as contribuições de ordem 4 para este comutador. Assim

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'} + C(\alpha, \alpha') + \frac{1}{2}[M_\alpha, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'}] \\ &+ \frac{1}{2}[M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}M_{\beta'}] + \frac{1}{2}[\Delta_{\alpha\beta}M_\beta, M_{\alpha'}^\dagger] \\ &+ \frac{1}{4}[\Delta_{\alpha\beta}M_\beta, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'}] + \frac{1}{2}[M_\beta^\dagger T_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma, M_{\alpha'}^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Porém temos que  $C(\alpha, \alpha')$  não contribui para ordem 4, por ir até terceira ordem. Ent olhando o resultado anterior vemos que temos 5 termos que v dar origem ao gerador. Assim:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} [M_\alpha, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta' \alpha'}] \\ C_2 &= \frac{1}{2} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \\ C_3 &= \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha \beta} M_\beta, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta' \alpha'}] \end{aligned} \quad (D.8)$$

Calculando a contribuição de (D.8):

$$C_1 = \frac{1}{2} [M_\alpha, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta' \alpha'} + \frac{1}{2} M_{\beta'}^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\beta' \alpha'}] \quad (D.9)$$

De onde vemos que o segundo termo não contribui para o gerador de quarta ordem pois é um termo de terceira ordem. Daí

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha \beta'} - \Delta_{\alpha \beta'}) \Delta_{\beta' \alpha'} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha \beta'} \Delta_{\beta' \alpha'} - \Delta_{\alpha \beta'} \Delta_{\beta' \alpha'}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha \alpha'} - \frac{1}{2} \Delta_{\alpha \beta'} \Delta_{\beta' \alpha'} \\ &= -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha \beta'} \Delta_{\beta' \alpha'} \end{aligned} \quad (D.10)$$

Assim, a única contribuição de (D.8) é

$$C_1 = -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha \beta'} \Delta_{\beta' \alpha'} \quad (D.11)$$

Calculando a contribuição de (D.8):

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger] T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha \gamma'} - \Delta_{\alpha \gamma'}) T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} \\ &\quad + \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger] M_{\beta'} + \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger [M_\alpha, M_{\beta'}] \\ &= \frac{1}{2} (T_{\alpha' \beta' \alpha}^\dagger M_{\beta'} - \Delta_{\alpha \gamma'} T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'}) \\ &\quad + \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger] M_{\beta'} \end{aligned} \quad (D.12)$$

A única contribuição de (D.8) é

$$C_2 = \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger] M_{\beta'} \quad (D.13)$$

Calculando a contribuição de (D.8):

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} [M_\beta, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'}] + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} [M_\beta, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger [M_\beta, \Delta_{\beta'\alpha'}] \\
 &+ \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta + \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} (\delta_{\beta\beta'} - \Delta_{\beta\beta'}) \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger [M_\beta, \Delta_{\beta'\alpha'}] \\
 &+ \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta + \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\beta\alpha'} - \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\beta\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger [M_\beta, \Delta_{\beta'\alpha'}] \\
 &+ \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta + \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \tag{D.14}
 \end{aligned}$$

Assim de (D.8), temos duas contribuições que são

$$C_3 = \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\beta\alpha'} + \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \tag{D.15}$$

Resumindo

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'} \\
 C_2 &= \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} \\
 C_3 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\beta\alpha'} + \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \tag{D.16}
 \end{aligned}$$

Levando o resultado obtido das contribuições dado por (D.16) na equação (D.7), temos

$$\begin{aligned}
 [\widetilde{M}_\alpha, \widetilde{M}_{\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'} - \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'} \\
 &+ \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} \\
 &+ \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\beta\alpha'} + \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \\
 &+ \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [T_{\alpha\beta\gamma}, M_{\alpha'}^\dagger] M_\gamma - \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\beta\alpha'} \tag{D.17}
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 [\widetilde{M}_\alpha, \widetilde{M}_{\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'} - \frac{3}{4} \Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\beta\alpha'} \\
 &+ \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} - \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [M_{\alpha'}^\dagger, T_{\alpha\beta\gamma}] M_\gamma \\
 &+ \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \tag{D.18}
 \end{aligned}$$

Vamos propôr um gerador de acordo com a eq. (D.18). E o gerador proposto de ordem 4 é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\alpha^{(4)} &= a\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\gamma}M_\gamma + bM_\beta^\dagger[\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}]M_\delta M_\gamma - cM_\beta^\dagger[M_\alpha, T_{\delta\gamma\beta}^\dagger]M_\gamma M_\delta \\ \tilde{M}_{\alpha'}^{(4)} &= aM_\gamma^\dagger\Delta_{\gamma\beta}\Delta_{\beta\alpha'} - bM_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger[\Delta_{\gamma\alpha'}, \Delta_{\delta\beta}]M_\beta + cM_\delta^\dagger M_\gamma^\dagger[M_{\alpha'}^\dagger, T_{\delta\gamma\beta}^\dagger]M_\beta\end{aligned}\quad (\text{D.19})$$

Mas para chegarmos ao gerador completo de quarta ordem se faz necessário descobriremos quem são as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , da equação (D.19). Assim de (D.6) temos

$$\begin{aligned}[M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(4)}, M_{\alpha'}^\dagger + \tilde{M}_{\alpha'}^{(4)}] &= [M_\alpha, M_{\alpha'}^\dagger] + [M_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^{(4)}] + [\tilde{M}_\alpha^{(4)}, M_{\alpha'}^\dagger] \\ [M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(4)}, M_{\alpha'}^\dagger + \tilde{M}_{\alpha'}^{(4)}] &= \delta_{\alpha\alpha'} - \frac{3}{4}\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\alpha'} \\ &+ \frac{1}{2}M_{\gamma'}^\dagger[M_\alpha, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger]M_{\beta'} - \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[M_{\alpha'}^\dagger, T_{\alpha\beta\gamma}]M_\gamma \\ &+ \frac{1}{4}M_{\beta'}^\dagger[\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}]M_\beta \\ &+ [M_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^{(4)}] + [\tilde{M}_\alpha^{(4)}, M_{\alpha'}^\dagger] \\ [M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(4)}, M_{\alpha'}^\dagger + \tilde{M}_{\alpha'}^{(4)}] &= \delta_{\alpha\alpha'} - \frac{3}{4}\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\alpha'} \\ &+ \frac{1}{2}M_{\gamma'}^\dagger[M_\alpha, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger]M_{\beta'} - \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[M_{\alpha'}^\dagger, T_{\alpha\beta\gamma}]M_\gamma \\ &+ \frac{1}{4}M_{\beta'}^\dagger[\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}]M_\beta \\ &+ [M_\alpha, aM_\gamma^\dagger\Delta_{\gamma\beta}\Delta_{\beta\alpha'}] \\ &- [M_\alpha, bM_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger[\Delta_{\gamma\alpha'}, \Delta_{\delta\beta}]M_\beta] \\ &+ [M_\alpha, cM_\delta^\dagger M_\gamma^\dagger[M_{\alpha'}^\dagger, T_{\delta\gamma\beta}^\dagger]M_\beta] \\ &+ [a\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\gamma}M_\gamma, M_{\alpha'}^\dagger] \\ &+ [bM_\beta^\dagger[\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}]M_\delta M_\gamma, M_{\alpha'}^\dagger] \\ &- [cM_\beta^\dagger[M_\alpha, T_{\delta\gamma\beta}^\dagger]M_\gamma M_\delta, M_{\alpha'}^\dagger]\end{aligned}\quad (\text{D.20})$$

Utilizando a propriedade (C.1) para abrir os comutadores de (D.20) e após alguns cálculos, obtemos

$$\begin{aligned}[M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(4)}, M_{\alpha'}^\dagger + \tilde{M}_{\alpha'}^{(4)}] &= \delta_{\alpha\alpha'} - \left(\frac{3}{4} - 2a\right)\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\alpha'} \\ &+ \left(\frac{1}{4} + 2b\right)M_{\beta'}^\dagger[\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}]M_\beta \\ &- \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[M_{\alpha'}^\dagger, T_{\alpha\beta\gamma}]M_\gamma \\ &+ cM_\beta^\dagger\left([M_{\alpha'}^\dagger, T_{\alpha\beta\gamma}] + [M_{\alpha'}^\dagger, T_{\beta\alpha\gamma}]\right)M_\gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} M_\gamma^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha'\beta\gamma}^\dagger] M_\beta \\
 & - c M_\gamma^\dagger \left( [M_\alpha, T_{\alpha'\beta\gamma}^\dagger] + [M_\alpha, T_{\beta\alpha'\gamma}^\dagger] \right) M_\beta \quad (D.21)
 \end{aligned}$$

Da eq. (D.21) vemos que

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{3}{8} \\
 b &= -\frac{1}{8} \quad (D.22)
 \end{aligned}$$

Porém ainda nos resta determinar quem é a constante  $c$ . Sabemos que a identidade de Jacobi é dada por

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \quad (D.23)$$

e levando em conta que

$$T_{\alpha\beta\gamma} = [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] = [[M_\beta, M_\gamma^\dagger], M_\alpha] \quad (D.24)$$

Operando com a propriedade (D.23) em (D.24), podemos escrever

$$[[M_\beta, M_\gamma^\dagger], M_\alpha] + [[M_\alpha, M_\beta], M_\gamma^\dagger] + [[M_\gamma^\dagger, M_\alpha], M_\beta] = 0 \quad (D.25)$$

E com a propriedade (2.6) a eq. (D.25) fica

$$[[M_\beta, M_\gamma^\dagger], M_\alpha] + [[M_\gamma^\dagger, M_\alpha], M_\beta] = 0 \quad (D.26)$$

ou ainda

$$T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\beta\alpha\gamma} \quad (D.27)$$

e da mesma forma obtemos

$$T_{\alpha\beta\gamma}^\dagger = T_{\beta\alpha\gamma}^\dagger \quad (D.28)$$

Assim

$$\begin{aligned}
 [M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(4)}, M_{\alpha'}^\dagger + \tilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(4)}] &= \delta_{\alpha\alpha'} \\
 &- \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [M_{\alpha'}^\dagger, T_{\alpha\beta\gamma}] M_\gamma + 2c M_\beta^\dagger [M_{\alpha'}^\dagger, T_{\alpha\beta\gamma}] M_\gamma \\
 &+ \frac{1}{2} M_\gamma^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha'\beta\gamma}^\dagger] M_\beta - 2c M_\gamma^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha'\beta\gamma}^\dagger] M_\beta \quad (D.29)
 \end{aligned}$$

o que nos leva a

$$c = \frac{1}{4} \quad (D.30)$$

Então temos para o gerador de quarta ordem é dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_\alpha^{(4)} &= \frac{3}{8}\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\gamma}M_\gamma - \frac{1}{8}M_\beta^\dagger[\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}]M_\delta M_\gamma \\
&\quad - \frac{1}{4}M_\beta^\dagger[M_\alpha, T_{\delta\gamma\beta}^\dagger]M_\gamma M_\delta \\
\tilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(4)} &= \frac{3}{8}M_\gamma^\dagger\Delta_{\gamma\beta}\Delta_{\beta\alpha'} + \frac{1}{8}M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger[\Delta_{\gamma\alpha'}, \Delta_{\delta\beta}]M_\beta \\
&\quad + \frac{1}{4}M_\delta^\dagger M_\gamma^\dagger[M_{\alpha'}, T_{\delta\gamma\beta}^\dagger]M_\beta
\end{aligned} \tag{D.31}$$

## Apêndice E

# O Gerador de Quinta Ordem

Nesta seção vamos apresentar o cálculo do gerador de quinta ordem, que é realizado a partir da Eq. (D.31), logo podemos escrever o gerador  $\tilde{M}$  até ordem 4 como

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\alpha &= M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger[\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha]M_\gamma \\ &+ \frac{3}{8}\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\gamma}M_\gamma + \frac{1}{4}M_\beta^\dagger Q_{\alpha\beta\gamma\delta}M_\delta M_\gamma\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

onde

$$Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}[\Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\beta\delta}] + [M_\alpha, [\Delta_{\beta\gamma}, M_\delta^\dagger]]\quad (\text{E.2})$$

é um termo de quarta ordem. E do cálculo do gerador de quarta ordem temos que  $T_{\alpha\beta\gamma}$  e  $T_{\alpha\beta\gamma}^\dagger$  são dados pelas equações (D.2) e (D.4), sendo estes termos de terceira ordem. Assim a equação (E.1) e o seu complexo conjugado pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\alpha &= M_\alpha + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta + \frac{1}{2}M_\beta^\dagger T_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma + \frac{3}{8}\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\beta\gamma}M_\gamma \\ &+ \frac{1}{4}M_\beta^\dagger Q_{\alpha\beta\gamma\delta}M_\delta M_\gamma \\ \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger &= M_{\alpha'}^\dagger + \frac{1}{2}M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{1}{2}M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{3}{8}M_{\gamma'}^\dagger \Delta_{\gamma'\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'} \\ &+ \frac{1}{4}M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} M_{\beta'}\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

Vamos calcular o comutador  $[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger]$ , sabendo que até quarta ordem  $[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha'}$ , ou seja,

$$[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha'} + O(\phi^{(5)}).\quad (\text{E.4})$$

Desta forma vamos investigar as contribuições de quinta ordem para este comutador. Assim, utilizando a propriedade (C.1), e partindo das equações (E.3) e (E.4), temos

$$[\tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_{\alpha'}^\dagger] = \delta_{\alpha\alpha'} + C(\alpha, \alpha') + \frac{1}{2}[M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'}]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{8} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger \Delta_{\gamma' \beta'} \Delta_{\beta' \alpha'}] + \frac{1}{4} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger Q_{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} M_{\beta'}] \\
 & + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha \beta} M_\beta, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta' \alpha'}] + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha \beta} M_\beta, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \\
 & + \frac{1}{2} [M_\beta^\dagger T_{\alpha \beta \gamma} M_\gamma, M_{\alpha'}^\dagger] + \frac{1}{4} [M_\beta^\dagger T_{\alpha \beta \gamma} M_\gamma, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta' \alpha'}] \\
 & + \frac{3}{8} [\Delta_{\alpha \beta} \Delta_{\beta \gamma} M_\gamma, M_{\alpha'}^\dagger] + \frac{1}{4} [M_\beta^\dagger Q_{\alpha \beta \gamma \delta} M_\delta M_\gamma, M_{\alpha'}^\dagger] \tag{E.5}
 \end{aligned}$$

Porém temos que  $C(\alpha, \alpha')$  não contribui para o cálculo de quinta ordem, por ir até quarta ordem. Então observando o resultado anterior podemos identificar que temos 5 termos que vão dar origem ao gerador de quinta ordem. Assim:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \\
 C_2 &= \frac{3}{8} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger \Delta_{\gamma' \beta'} \Delta_{\beta' \alpha'}] \\
 C_3 &= \frac{1}{4} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger Q_{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} M_{\beta'}] \\
 C_4 &= \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha \beta} M_\beta, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \\
 C_5 &= \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha \beta} M_\beta, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta' \alpha'}] \tag{E.6}
 \end{aligned}$$

Vamos agora calcular cada uma destas contribuições, sendo que, para estes cálculos vamos considerar somente termos de quinta ordem. Ou seja, termos de outras ordens serão desconsiderados.

Cálculo da contribuição (E.6):

$$C_1 = \frac{1}{2} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger] T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{2} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \tag{E.7}$$

De onde vemos que o segundo termos não contribui para o gerador de quinta ordem pois é um termo de quarta ordem. Daí

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha \gamma'} - \Delta_{\alpha \gamma'}) T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} \\
 &= \frac{1}{2} \delta_{\alpha \gamma'} T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} - \frac{1}{2} \Delta_{\alpha \gamma'} T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} \\
 &= -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha \gamma'} T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} \tag{E.8}
 \end{aligned}$$

Assim, a única contribuição de (E.6) é

$$C_1 = -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha \gamma'} T_{\alpha' \beta' \gamma'}^\dagger M_{\beta'} \tag{E.9}$$

Cálculo da contribuição (E.6):

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{3}{8} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger] \Delta_{\gamma'\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma'\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'}] \\
 &= \frac{3}{8} (\delta_{\alpha\gamma'} - \Delta_{\alpha\gamma'}) \Delta_{\gamma'\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma'\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'}] \\
 &= \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma'\beta'}] \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger \Delta_{\gamma'\beta'} [M_\alpha, \Delta_{\beta'\alpha'}] \quad (E.10)
 \end{aligned}$$

De onde vemos que de (E.6) temos duas contribuições , que são

$$C_2 = \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma'\beta'}] \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger \Delta_{\gamma'\beta'} [M_\alpha, \Delta_{\beta'\alpha'}] \quad (E.11)$$

Cálculo da contribuição (E.6):

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \frac{1}{4} [M_\alpha, M_{\gamma'}^\dagger] M_{\delta'}^\dagger Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} M_{\beta'} + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, M_{\delta'}^\dagger Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} M_{\beta'}] \\
 &= \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, M_{\delta'}^\dagger Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} M_{\beta'}] \\
 &= \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, M_{\delta'}^\dagger] Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} M_{\beta'} + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} M_{\beta'}] \\
 &= \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}] M_{\beta'} + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} [M_\alpha, M_{\beta'}] \\
 &= \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}] M_{\beta'} \quad (E.12)
 \end{aligned}$$

Desta forma podemos ver que a única contribuição de (E.6) é

$$C_3 = \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}] M_{\beta'} \quad (E.13)$$

Cálculo da contribuição (E.6):

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta} M_\beta, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} [M_\beta, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'}] + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'}] M_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} [M_\beta, M_{\gamma'}^\dagger] T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\gamma'}^\dagger [M_\beta, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'}] \\
 &+ \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\gamma'}^\dagger] T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} M_\beta + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'}] M_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} (\delta_{\beta\gamma'} - \Delta_{\beta\gamma'}) T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\gamma'}^\dagger [M_\beta, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} \\
 &+ \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'}] M_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma'} T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} M_\beta \\
 &+ \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}] M_\beta \\
 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma'} T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} M_\beta \quad (E.14)
 \end{aligned}$$

Assim as contribuições de (E.6) são

$$C_4 = \frac{1}{4}\Delta_{\alpha\gamma'}T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{4}M_{\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} M_\beta \quad (\text{E.15})$$

Cálculo da contribuição (E.6):

$$\begin{aligned} C_5 &= \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta} M_\beta, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'}] \\ &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} [M_\beta, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'}] + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \\ &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} [M_\beta, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger [M_\beta, \Delta_{\beta'\alpha'}] \\ &+ \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta + \frac{1}{4} M_{\beta'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\beta'\alpha'}] M_\beta \\ &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger [M_\beta, \Delta_{\beta'\alpha'}] + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Finalmente, as contribuições do último termo (E.6) são

$$C_5 = \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger [M_\beta, \Delta_{\beta'\alpha'}] + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta \quad (\text{E.17})$$

Resumindo

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha\gamma'} T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} \\ C_2 &= \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma'\beta'}] \Delta_{\beta'\alpha'} + \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger \Delta_{\gamma'\beta'} [M_\alpha, \Delta_{\beta'\alpha'}] \\ C_3 &= \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}] M_{\beta'} \\ C_4 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\gamma'} T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} M_\beta \\ C_5 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger [M_\beta, \Delta_{\beta'\alpha'}] + \frac{1}{4} [\Delta_{\alpha\beta}, M_{\beta'}^\dagger] \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha\gamma'} T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} \\ C_2 &= -\frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger T_{\alpha\gamma'\beta'} \Delta_{\beta'\alpha'} - \frac{3}{8} M_{\gamma'}^\dagger \Delta_{\gamma'\beta'} T_{\alpha\beta'\alpha'} \\ C_3 &= \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger M_{\delta'}^\dagger [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}] M_{\beta'} \\ C_4 &= \frac{1}{4} \Delta_{\alpha\gamma'} T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger M_{\beta'} + \frac{1}{4} M_{\gamma'}^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'\gamma'}^\dagger] M_{\beta'} M_\beta \\ C_5 &= -\frac{1}{4} \Delta_{\alpha\beta} M_{\beta'}^\dagger T_{\beta\beta'\alpha'} - \frac{1}{4} T_{\beta'\beta\alpha}^\dagger \Delta_{\beta'\alpha'} M_\beta \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Assim, levando o resultado das contribuições obtido em (E.19) na equação (E.5), obtemos

$$\begin{aligned}
 [\widetilde{M}_\alpha, \widetilde{M}_{\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'} - \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\gamma}T_{\alpha'\beta\gamma}^\dagger M_\beta - \frac{3}{8}M_\gamma^\dagger T_{\alpha\gamma\beta}\Delta_{\beta\alpha'} - \frac{3}{8}M_\gamma^\dagger \Delta_{\gamma\beta}T_{\alpha\beta\alpha'} \\
 &+ \frac{1}{4}M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta\gamma\delta}] M_\beta - \frac{1}{4}\Delta_{\alpha\beta}M_\gamma^\dagger T_{\beta\gamma\alpha'} - \frac{1}{4}T_{\gamma\beta\alpha}^\dagger \Delta_{\gamma\alpha'} M_\beta \\
 &+ \frac{1}{4}\Delta_{\alpha\gamma}T_{\alpha'\beta\gamma}^\dagger M_\beta + \frac{1}{4}M_\gamma^\dagger [\Delta_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\delta\gamma}^\dagger] M_\delta M_\beta - \frac{1}{2}M_\beta^\dagger T_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma\alpha'} \\
 &- \frac{3}{8}\Delta_{\alpha\beta}T_{\alpha'\gamma\beta}^\dagger M_\gamma - \frac{3}{8}T_{\alpha'\beta\alpha}^\dagger \Delta_{\beta\gamma}M_\gamma - \frac{1}{4}M_\beta^\dagger [M_{\alpha'}^\dagger, Q_{\alpha\beta\gamma\delta}] M_\delta M_\gamma \\
 &+ \frac{1}{4}M_\beta^\dagger T_{\alpha\beta\gamma}\Delta_{\gamma\alpha'} - \frac{1}{4}M_\beta^\dagger M_\delta^\dagger [\Delta_{\beta\alpha'}, T_{\alpha\delta\gamma}] M_\gamma
 \end{aligned} \tag{E.20}$$

Manipulando os termos de forma a agrupar os termos semelhantes, podemos reescrever a equação (E.20) como

$$\begin{aligned}
 [\widetilde{M}_\alpha, \widetilde{M}_{\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'} \\
 &+ \left( -\frac{1}{4}T_{\gamma\beta\alpha}^\dagger \Delta_{\gamma\alpha'} - \frac{5}{8}\Delta_{\alpha\gamma}T_{\alpha'\beta\gamma}^\dagger - \frac{3}{8}T_{\alpha'\gamma\alpha}^\dagger \Delta_{\gamma\beta} \right) M_\beta \\
 &+ M_\gamma^\dagger \left( -\frac{5}{8}T_{\alpha\gamma\beta}\Delta_{\beta\alpha'} - \frac{3}{8}\Delta_{\gamma\beta}T_{\alpha\beta\alpha'} - \frac{1}{4}\Delta_{\alpha\beta}T_{\beta\gamma\alpha'} \right) \\
 &+ \frac{1}{4}M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger \left( [M_\alpha, Q_{\alpha'\beta\gamma\delta}^\dagger] - [\Delta_{\gamma\alpha'}, T_{\alpha\delta\beta}] \right) M_\beta \\
 &- \frac{1}{4}M_\beta^\dagger \left( [M_{\alpha'}^\dagger, Q_{\alpha\beta\gamma\delta}] - [\Delta_{\alpha\gamma}, T_{\alpha'\delta\beta}^\dagger] \right) M_\delta M_\gamma
 \end{aligned} \tag{E.21}$$

E o gerador completo de ordem 5 é dado por

$$\begin{aligned}
 \widetilde{M}_\alpha^{(5)} &= aM_\gamma^\dagger Z_{\alpha\gamma\beta}M_\beta + bM_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\omega\beta\gamma\delta}M_\beta M_\omega \\
 \widetilde{M}_{\alpha'}^{(5)\dagger} &= aM_\beta^\dagger Z_{\alpha'\gamma\beta}^\dagger M_\gamma - bM_\omega^\dagger M_\beta^\dagger W_{\alpha'\omega\beta\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma
 \end{aligned} \tag{E.22}$$

onde

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha\omega\beta\gamma\delta} &= [M_\alpha, Q_{\omega\beta\gamma\delta}^\dagger] - [\Delta_{\gamma\omega}, T_{\alpha\delta\beta}] \\
 W_{\alpha'\omega\beta\gamma\delta}^\dagger &= [M_{\alpha'}^\dagger, Q_{\omega\beta\gamma\delta}] - [\Delta_{\omega\gamma}, T_{\alpha'\delta\beta}^\dagger]
 \end{aligned} \tag{E.23}$$

E também

$$\begin{aligned}
 Z_{\alpha\gamma\beta} &= -\frac{3}{8}\Delta_{\gamma\delta}T_{\alpha\delta\beta} - \frac{5}{8}T_{\alpha\gamma\delta}\Delta_{\delta\beta} - \frac{1}{4}\Delta_{\alpha\delta}T_{\delta\gamma\beta} \\
 Z_{\alpha'\gamma\beta}^\dagger &= -\frac{3}{8}T_{\alpha'\delta\beta}^\dagger \Delta_{\delta\gamma} - \frac{5}{8}\Delta_{\beta\delta}T_{\alpha'\gamma\delta}^\dagger - \frac{1}{4}T_{\delta\gamma\beta}^\dagger \Delta_{\delta\alpha'}
 \end{aligned} \tag{E.24}$$

Porém, para chegarmos ao gerador completo de quinta ordem necessitamos encontrar as constantes  $a$  e  $b$  da equação (E.22). Para isto vamos utilizar a propriedade (C.1) e

da eq. (E.4) temos

$$\begin{aligned}
 [M_\alpha + \widetilde{M}_\alpha^{(5)}, M_{\alpha'}^\dagger + \widetilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(5)}] &= [M_\alpha, M_{\alpha'}^\dagger] + [\widetilde{M}_\alpha^{(5)}, \widetilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(5)}] \\
 &+ [M_\alpha, \widetilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(5)}] + [\widetilde{M}_\alpha^{(5)}, M_{\alpha'}^\dagger] \\
 &= \delta_{\alpha\alpha'} + Z_{\alpha'\beta\alpha}^\dagger M_\beta + M_\gamma^\dagger Z_{\alpha\gamma\alpha'} \\
 &+ \frac{1}{4} M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\alpha'\beta\gamma\delta} M_\beta - \frac{1}{4} M_\beta^\dagger W_{\alpha'\alpha\beta\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma \\
 &+ [M_\alpha, \widetilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(5)}] + [\widetilde{M}_\alpha^{(5)}, M_{\alpha'}^\dagger] \\
 &= \delta_{\alpha\alpha'} + Z_{\alpha'\beta\alpha}^\dagger M_\beta + M_\gamma^\dagger Z_{\alpha\gamma\alpha'} \\
 &+ \frac{1}{4} M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\alpha'\beta\gamma\delta} M_\beta - \frac{1}{4} M_\beta^\dagger W_{\alpha'\alpha\beta\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma \\
 &+ [M_\alpha, a M_\beta^\dagger Z_{\alpha'\gamma\beta}^\dagger M_\gamma - b M_\omega^\dagger M_\beta^\dagger W_{\alpha'\omega\beta\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma] \\
 &+ [a M_\delta^\dagger Z_{\alpha\delta\beta} M_\beta + b M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\omega\beta\gamma\delta} M_\beta M_\omega, M_{\alpha'}^\dagger] \quad (\text{E.25})
 \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade (C.1) para abrir os comutadores de (E.25) e após alguns cálculos, obtemos

$$\begin{aligned}
 [M_\alpha + \widetilde{M}_\alpha^{(5)}, M_{\alpha'}^\dagger + \widetilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(5)}] &= \delta_{\alpha\alpha'} + Z_{\alpha'\gamma\alpha}^\dagger M_\gamma + M_\gamma^\dagger Z_{\alpha\gamma\alpha'} \\
 &+ a Z_{\alpha'\gamma\alpha}^\dagger M_\gamma + a M_\gamma^\dagger Z_{\alpha\gamma\alpha'} + \frac{1}{4} M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\alpha'\beta\gamma\delta} M_\beta \\
 &- \frac{1}{4} M_\beta^\dagger W_{\alpha'\alpha\beta\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma - b M_\beta^\dagger W_{\alpha'\alpha\beta\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma \\
 &- b M_\omega^\dagger W_{\alpha'\omega\alpha\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma + b M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\alpha'\beta\gamma\delta} M_\beta \\
 &+ b M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\omega\alpha'\gamma\delta} M_\omega \quad (\text{E.26})
 \end{aligned}$$

Da eq. (E.26) encontramos que

$$\begin{aligned}
 a &= -1 \\
 b &= -\frac{1}{8} \quad (\text{E.27})
 \end{aligned}$$

Então temos que o gerador de quinta ordem é dado por

$$\begin{aligned}
 \widetilde{M}_\alpha^{(5)} &= -M_\gamma^\dagger Z_{\alpha\gamma\beta} M_\beta - \frac{1}{8} M_\gamma^\dagger M_\delta^\dagger W_{\alpha\omega\beta\gamma\delta} M_\beta M_\omega \\
 \widetilde{M}_{\alpha'}^{\dagger(5)} &= -M_\beta^\dagger Z_{\alpha'\gamma\beta}^\dagger M_\gamma + \frac{1}{8} M_\omega^\dagger M_\beta^\dagger W_{\alpha'\omega\beta\gamma\delta}^\dagger M_\delta M_\gamma \quad (\text{E.28})
 \end{aligned}$$

## Apêndice F

# Transformação de Observáveis e a Ausência de Termos Seculares

Dedicaremos este apêndice à demonstração da eliminação dos termos seculares pela transformação de Fock-Tani geral . A transformação de Fock-Tani para um operador genérico  $A_\alpha$  é

$$\frac{dA_\alpha}{dt} = \exp(-tF) [A_\alpha, F] \exp(tF) \quad (\text{F.1})$$

com

$$F = x_\alpha^\dagger X_\alpha - X_\alpha^\dagger x_\alpha. \quad (\text{F.2})$$

onde  $x_\alpha$  é o operador de partícula ideal, satisfazendo a seguinte relação de comutação :

$$\begin{aligned} [x_\alpha, x_\beta] &= 0 \\ [x_\alpha, x_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

No caso particular do estudo de decaimento de mésons

$$x_\alpha \equiv m_\alpha; \quad X_\alpha \equiv \tilde{M}_\alpha. \quad (\text{F.4})$$

O comutador em (F.1) resulta em

$$[A_\alpha, F] = x_\beta^\dagger [A_\alpha, X_\beta] - [A_\alpha, X_\beta^\dagger] x_\beta - X_\beta^\dagger [A_\alpha, x_\beta] + [A_\alpha, x_\beta^\dagger] X_\beta. \quad (\text{F.5})$$

Desta forma a equação de movimento (F.1) resulta em

$$\begin{aligned} \dot{A}_\alpha(t) &= x_\beta^\dagger(t) [A_\alpha(t), X_\beta(t)] - [A_\alpha(t), X_\beta^\dagger(t)] x_\beta(t) \\ &\quad - X_\beta^\dagger(t) [A_\alpha(t), x_\beta(t)] + [A_\alpha(t), x_\beta^\dagger(t)] X_\beta(t) \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Se  $A_\alpha = X_\alpha$  ou  $A_\alpha = x_\alpha$  encontramos as equações usuais

$$\dot{X}_\alpha(t) = -x_\alpha(t) \quad (\text{F.7})$$

$$\dot{x}_\alpha(t) = X_\alpha(t). \quad (\text{F.8})$$

Na situação de  $A_\alpha$  ser genérico a equação de movimento (F.6) se reduz a

$$\dot{A}_\alpha(t) = x_\beta^\dagger(t) [A_\alpha(t), X_\beta(t)] - [A_\alpha(t), X_\beta^\dagger(t)] x_\beta(t) \quad (\text{F.9})$$

pelo fato de

$$[A_\alpha, x_\beta] = [A_\alpha, x_\beta^\dagger] = 0. \quad (\text{F.10})$$

Substituindo a equação (F.7) em (F.9) obtemos

$$\dot{A}_\alpha(t) = [A_\alpha(t), X_\beta^\dagger(t)] \dot{X}_\beta(t) - \dot{X}_\beta^\dagger(t) [A_\alpha(t), X_\beta(t)] \quad (\text{F.11})$$

Para o restante da demonstração podemos usar a seguinte forma para a expressão (F.11)

$$\dot{A}_\alpha(t) = [A_\alpha(t) \cdot X_\beta^\dagger(t)] \dot{X}_\beta(t) - \dot{X}_\beta^\dagger(t) [A_\alpha(t) \cdot X_\beta(t)] \quad (\text{F.12})$$

onde  $A \cdot X$  representa a aplicação do teorema de Wick para converter o produto  $A X$  numa série em ordenamento normal. O termo  $X A$  é omitido para simplificar a conta e em nada afeta o resultado final. O mesmo procedimento é considerado para  $A X^\dagger$ . Integrando por partes o lado direito de (F.12) de 0 a  $t$  encontramos

$$\begin{aligned} A_\alpha(t) &= A + [A_\alpha(t) \cdot X_\beta^\dagger(t)] X_\beta(t) - X_\beta^\dagger(t) [A_\alpha(t) \cdot X_\beta(t)] \\ &\quad - [A_\alpha \cdot X_\beta^\dagger] X_\beta + X_\beta^\dagger [A_\alpha \cdot X_\beta] \\ &\quad - \int_0^t dt \left( \frac{d}{dt} [A_\alpha(t) \cdot X_\beta^\dagger(t)] X_\beta(t) - X_\beta^\dagger(t) \frac{d}{dt} [A_\alpha(t) \cdot X_\beta(t)] \right) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Usando as expressões (F.7) e (F.10) para calcular as derivadas na última linha de (F.13)

$$\frac{d}{dt} [A_\alpha(t) \cdot X_\beta(t)] = - [X_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot X_\gamma^\dagger(t)]] \dot{X}_\gamma(t) + \dot{X}_\gamma^\dagger(t) [X_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot X_\gamma(t)]]$$

onde a segunda derivada em (F.13) é obtida simplesmente tomando o conjugado de  $X_\beta(t)$  na expressão acima. Colocando este resultado na última linha de (F.13) e

usando (F.10)

$$\begin{aligned}
 A_\alpha(t) &= [A_\alpha(t) \cdot X_\beta^\dagger(t)] X_\beta(t) - X_\beta^\dagger(t) [A_\alpha(t) \cdot X_\beta(t)] \\
 &\quad - [A_\alpha \cdot X_\beta^\dagger] X_\beta + X_\beta^\dagger [A_\alpha \cdot X_\beta] + A \\
 &\quad - \int_0^t dt \dot{X}_\gamma^\dagger(t) [X_\beta^\dagger(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot X_\gamma(t)]] X_\beta(t) \\
 &\quad + \int_0^t dt \dot{X}_\gamma^\dagger(t) X_\beta^\dagger(t) [X_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot X_\gamma(t)]] \\
 &\quad - \int_0^t dt X_\beta^\dagger(t) [X_\beta(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot X_\gamma^\dagger(t)]] \dot{X}_\gamma(t) \\
 &\quad + \int_0^t dt [X_\beta^\dagger(t) \cdot [A_\alpha(t) \cdot X_\gamma^\dagger(t)]] X_\beta(t) \dot{X}_\gamma(t) \tag{F.14}
 \end{aligned}$$

Uma nova integração por partes pode ser aplicada à expressão (F.14), substituindo este resultado em (F.13). As derivadas de anticomutadores duplos são eliminadas em termos de anticomutadores triplos, obtendo após este procedimento, uma expressão explícita em termos de anticomutadores duplos mais uma integral envolvendo anticomutadores triplos e as suas derivadas. Este processo pode ser repetido indefinidamente, resultando numa série para  $A_\alpha(t)$  livre de derivadas ou integrais. Se realizarmos esta expansão até quinta ordem, encontramos que

$$\begin{aligned}
 A_\alpha(t) &= A_\alpha - [X_\beta^\dagger(\varepsilon)S_\beta(\varepsilon) + U_\beta(\varepsilon)X_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{2}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)S_{\lambda\beta}(\varepsilon) + V_{\beta\lambda}(\varepsilon)X_\lambda(\varepsilon)X_\beta(\varepsilon) + 2X_\beta^\dagger(\varepsilon)U_{\lambda\beta}(\varepsilon)X_\lambda(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{6}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)X_\gamma^\dagger(\varepsilon)S_{\gamma\beta\lambda}(\varepsilon) + N_{\lambda\beta\gamma}(\varepsilon)X_\gamma(\varepsilon)X_\lambda(\varepsilon)X_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{2}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)U_{\gamma\beta\lambda}(\varepsilon)X_\gamma(\varepsilon) + X_\beta^\dagger(\varepsilon)V_{\lambda\gamma\beta}(\varepsilon)X_\gamma(\varepsilon)X_\lambda(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{24}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)X_\gamma^\dagger(\varepsilon)X_\delta^\dagger(\varepsilon)S_{\delta\gamma\beta\lambda}(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{24}[N_{\lambda\beta\gamma\delta}(\varepsilon)X_\delta(\varepsilon)X_\gamma(\varepsilon)X_\lambda(\varepsilon)X_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{6}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)X_\gamma^\dagger(\varepsilon)U_{\delta\gamma\beta\lambda}(\varepsilon)X_\delta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad + \frac{1}{6}[X_\delta^\dagger(\varepsilon)O_{\lambda\beta\gamma\delta}(\varepsilon)X_\gamma(\varepsilon)X_\lambda(\varepsilon)X_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{4}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)V_{\gamma\delta\lambda\beta}(\varepsilon)X_\delta(\varepsilon)X_\gamma(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{120}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)X_\gamma^\dagger(\varepsilon)X_\delta^\dagger(\varepsilon)X_\omega^\dagger(\varepsilon)S_{\omega\delta\gamma\beta\lambda}(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{120}[N_{\lambda\beta\gamma\delta\omega}(\varepsilon)X_\omega(\varepsilon)X_\delta(\varepsilon)X_\gamma(\varepsilon)X_\lambda(\varepsilon)X_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &\quad - \frac{1}{24}[X_\beta^\dagger(\varepsilon)X_\lambda^\dagger(\varepsilon)X_\gamma^\dagger(\varepsilon)X_\delta^\dagger(\varepsilon)U_{\omega\delta\gamma\beta\lambda}(\varepsilon)X_\omega(\varepsilon)]|_0^t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{24} \left[ X_\omega^\dagger(\varepsilon) O_{\lambda\beta\gamma\delta\omega}(\varepsilon) X_\delta(\varepsilon) X_\gamma(\varepsilon) X_\lambda(\varepsilon) X_\beta(\varepsilon) \right] \Big|_0^t \\
 & - \frac{1}{24} \left[ X_\beta^\dagger(\varepsilon) X_\lambda^\dagger(\varepsilon) X_\gamma^\dagger(\varepsilon) V_{\delta\omega\gamma\beta\lambda}(\varepsilon) X_\omega(\varepsilon) X_\delta(\varepsilon) \right] \Big|_0^t \\
 & - \frac{1}{24} \left[ X_\delta^\dagger(\varepsilon) X_\omega^\dagger(\varepsilon) G_{\lambda\beta\gamma\omega\delta}(\varepsilon) X_\gamma(\varepsilon) X_\lambda(\varepsilon) X_\beta(\varepsilon) \right] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{120} \int_0^t d\varepsilon \left[ X_\beta^\dagger X_\lambda^\dagger X_\gamma^\dagger X_\delta^\dagger X_\omega^\dagger \dot{S}_{\omega\delta\gamma\beta\lambda} + \dot{N}_{\lambda\beta\gamma\delta\omega} X_\omega X_\delta X_\gamma X_\lambda X_\beta \right] \\
 & + \frac{1}{24} \int_0^t d\varepsilon \left[ X_\beta^\dagger X_\lambda^\dagger X_\gamma^\dagger X_\delta^\dagger \dot{U}_{\omega\delta\gamma\beta\lambda} X_\omega + X_\omega^\dagger \dot{O}_{\lambda\beta\gamma\delta\omega} X_\delta X_\gamma X_\lambda X_\beta \right] \\
 & + \frac{1}{24} \int_0^t d\varepsilon \left[ X_\beta^\dagger X_\lambda^\dagger X_\gamma^\dagger \dot{V}_{\delta\omega\gamma\beta\lambda} X_\omega X_\delta + X_\delta^\dagger X_\omega^\dagger \dot{G}_{\lambda\beta\gamma\omega\delta} X_\gamma X_\lambda X_\beta \right], \quad (\text{F.15})
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_\beta &= [A_\alpha, X_\beta] \\
 U_\beta &= [X_\beta^\dagger, A_\alpha] \quad (\text{F.16})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\beta\lambda} &= S_{\lambda\beta} = [[A_\alpha, X_\beta], X_\lambda] = [S_\beta, X_\lambda] \\
 U_{\beta\lambda} &= [[X_\beta^\dagger, A_\alpha], X_\lambda] = [X_\beta^\dagger, [A_\alpha, X_\lambda]] = [U_\beta, X_\lambda] \\
 V_{\beta\lambda} &= V_{\lambda\beta} = [X_\lambda^\dagger, [X_\beta^\dagger, A_\alpha]] = [X_\lambda^\dagger, U_\beta] \quad (\text{F.17})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\beta\lambda\gamma} &= [[[A_\alpha, X_\beta], X_\lambda], X_\gamma] = [S_{\beta\lambda}, X_\gamma] = S_{\lambda\beta\gamma} = S_{\beta\gamma\lambda} \\
 U_{\beta\lambda\gamma} &= [[[X_\beta^\dagger, A_\alpha], X_\lambda], X_\gamma] = [U_{\beta\lambda}, X_\gamma] = U_{\beta\gamma\lambda} \\
 V_{\beta\lambda\gamma} &= [[X_\beta^\dagger, [X_\lambda^\dagger, A_\alpha]], X_\gamma] = [V_{\beta\lambda}, X_\gamma] = V_{\lambda\beta\gamma} \\
 R_{\lambda\beta\gamma} &= [X_\lambda^\dagger, U_{\beta\gamma}] = [V_{\beta\lambda}, X_\gamma] = V_{\beta\lambda\gamma} \\
 N_{\lambda\beta\gamma} &= [X_\lambda^\dagger, [X_\beta^\dagger, [X_\gamma^\dagger, A_\alpha]]] = [X_\lambda^\dagger, V_{\beta\gamma}] \quad (\text{F.18})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\delta\gamma\beta\lambda} &= [[[[A_\alpha, X_\delta], X_\gamma], X_\beta], X_\lambda] = [S_{\delta\gamma\beta}, X_\lambda] \\
 U_{\delta\gamma\beta\lambda} &= [[[[X_\delta^\dagger, A_\alpha], X_\gamma], X_\beta], X_\lambda] = [U_{\delta\gamma\beta}, X_\lambda] \\
 O_{\lambda\beta\gamma\delta} &= [X_\lambda^\dagger, [X_\beta^\dagger, [X_\gamma^\dagger, [A_\alpha, X_\delta]]]] = [X_\lambda^\dagger, V_{\beta\gamma\delta}] \\
 N_{\lambda\beta\gamma\delta} &= [X_\lambda^\dagger, [X_\beta^\dagger, [X_\gamma^\dagger, [X_\delta^\dagger, A_\alpha]]]] = [X_\lambda^\dagger, N_{\beta\gamma\delta}] \\
 V_{\gamma\delta\lambda\beta} &= [[[[X_\gamma^\dagger, [X_\delta^\dagger, A_\alpha]], X_\lambda], X_\beta] = [V_{\gamma\delta\lambda}, X_\beta] \quad (\text{F.19})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\omega\delta\gamma\beta\lambda} &= [[[[[A_\alpha, X_\omega], X_\delta], X_\gamma], X_\beta], X_\lambda] = [S_{\omega\delta\gamma\beta}, X_\lambda] \\
 O_{\lambda\beta\gamma\delta\omega} &= [X_\lambda^\dagger, [X_\beta^\dagger, [X_\gamma^\dagger, [X_\delta^\dagger, [[A_\alpha, X_\omega]]]]]] = [X_\lambda^\dagger, O_{\beta\gamma\delta\omega}] \\
 N_{\lambda\beta\gamma\delta\omega} &= [X_\lambda^\dagger, [X_\beta^\dagger, [X_\gamma^\dagger, [X_\delta^\dagger, [X_\omega^\dagger, A_\alpha]]]]] = [X_\lambda^\dagger, N_{\beta\gamma\delta\omega}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{\delta\omega\gamma\beta\lambda} &= \left[ \left[ \left[ \left[ X_\delta^\dagger, [A_\alpha, X_\omega] \right], X_\gamma \right], X_\beta \right], X_\lambda \right] = [U_{\delta\omega\gamma\beta}, X_\lambda] \\
 V_{\delta\omega\gamma\beta\lambda} &= \left[ \left[ \left[ \left[ X_\gamma^\dagger, [X_\delta^\dagger, A_\alpha] \right], X_\lambda \right], X_\beta \right], X_\lambda \right] = [V_{\delta\omega\gamma\beta}, X_\lambda] \\
 G_{\gamma\delta\omega\lambda\beta} &= \left[ \left[ \left[ \left[ X_\gamma^\dagger, [X_\delta^\dagger, [X_\omega^\dagger, A_\alpha]] \right], X_\lambda \right], X_\beta \right] = [O_{\gamma\delta\omega\lambda}, X_\beta]. \quad (\text{F.20})
 \end{aligned}$$

Podemos ainda substituir as expressões explícitas para  $X_\alpha(t)$ , que contém apenas  $\sin t$  ou  $\cos t$ , em (F.15). O resultado final para  $A_\alpha(t)$  será uma expressão cuja dependência em  $t$  será apenas por através de fatores envolvendo potências do tipo  $(\sin t)^n(\cos t)^m$ .

## Apêndice G

# Equação de Movimento Adicionais Até Terceira Ordem

Neste apêndice vamos apresentar, em detalhes, o cálculo da equação de movimento adicional para os operadores de mésons ( $M_\alpha$ ) que é realizado a partir das Eqs. (F.15) e (F.4), utilizando a forma integral de obtenção das equações de movimento apresentada no apêndice (F). Para este cálculo o operador genérico  $A_\alpha = M_\alpha$ , logo a Eq. (F.15) até terceira ordem fica

$$\begin{aligned}
M_\alpha(t) &= M_\alpha - [\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)S_\beta(\varepsilon) + U_\beta(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{2}[\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\delta^\dagger(\varepsilon)S_{\delta\beta}(\varepsilon) + V_{\beta\delta}(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon) + 2\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)U_{\delta\beta}(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{6}[\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\delta^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma^\dagger(\varepsilon)S_{\gamma\beta\delta}(\varepsilon) + N_{\delta\beta\gamma}(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{2}[\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\delta^\dagger(\varepsilon)U_{\gamma\beta\delta}(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon) + \tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)V_{\delta\gamma\beta}(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)]|_0^t \quad (G.1)
\end{aligned}$$

onde, das Eqs. (F.16), (F.17) e (F.18), temos que os comutadores até terceira ordem são dados por

$$\begin{aligned}
S_\beta &= [M_\alpha, \tilde{M}_\beta] \\
U_\beta &= [\tilde{M}_\beta^\dagger, M_\alpha] \\
S_{\beta\delta} &= S_{\delta\beta} = [[M_\alpha, \tilde{M}_\beta], \tilde{M}_\delta] = [S_\beta, \tilde{M}_\delta] \\
U_{\beta\delta} &= [[\tilde{M}_\beta^\dagger, M_\alpha], \tilde{M}_\delta] = [\tilde{M}_\beta^\dagger, [M_\alpha, \tilde{M}_\delta]] = [U_\beta, \tilde{M}_\delta] \\
V_{\beta\delta} &= V_{\delta\beta} = [\tilde{M}_\delta^\dagger, [\tilde{M}_\beta^\dagger, M_\alpha]] = [\tilde{M}_\delta^\dagger, U_\beta] \\
S_{\beta\delta\gamma} &= [[[M_\alpha, \tilde{M}_\beta], \tilde{M}_\delta], \tilde{M}_\gamma] = [S_{\beta\delta}, \tilde{M}_\gamma] = S_{\delta\beta\gamma} = S_{\beta\gamma\delta} \\
U_{\beta\delta\gamma} &= [[[ \tilde{M}_\beta^\dagger, M_\alpha ], \tilde{M}_\delta ], \tilde{M}_\gamma] = [U_{\beta\delta}, \tilde{M}_\gamma] = U_{\beta\gamma\delta} \\
V_{\beta\delta\gamma} &= [[\tilde{M}_\beta^\dagger, [\tilde{M}_\delta^\dagger, M_\alpha]], \tilde{M}_\gamma] = [V_{\beta\delta}, \tilde{M}_\gamma] = V_{\delta\beta\gamma} \\
R_{\delta\beta\gamma} &= [\tilde{M}_\delta^\dagger, U_{\beta\gamma}] = [V_{\beta\delta}, \tilde{M}_\gamma] = V_{\beta\delta\gamma}
\end{aligned}$$

$$N_{\delta\beta\gamma} = \left[ \tilde{M}_\delta^\dagger, \left[ \tilde{M}_\beta^\dagger, \left[ \tilde{M}_\gamma^\dagger, M_\alpha \right] \right] \right] = \left[ \tilde{M}_\delta^\dagger, V_{\beta\gamma} \right] \quad (\text{G.2})$$

Vamos primeiramente calcular os comutadores da Eq. (F.15), que são dados pelas Eqs. (G.2), onde desprezamos os termos acima de terceira ordem da função de onda.

\* Cálculo de  $S_\beta = \left[ M_\alpha, \tilde{M}_\beta \right]$  até terceira ordem:

Da primeira equação de (G.2), temos que

$$S_\beta = \left[ M_\alpha, \tilde{M}_\beta \right] \quad (\text{G.3})$$

Utilizando a Eq. (2.69) para o operador  $\tilde{M}_\beta$  at terceira ordem, encontramos

$$S_\beta = \left[ M_\alpha, M_\beta + \frac{1}{2} \Delta_{\beta\gamma} M_\gamma - \frac{1}{2} M_\gamma^\dagger [M_\beta, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta \right] \quad (\text{G.4})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} S_\beta &= \frac{1}{2} [M_\alpha, \Delta_{\beta\gamma}] M_\gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} [M_\alpha, M_\gamma^\dagger] [M_\beta, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta \\ &\quad - \frac{1}{2} M_\gamma^\dagger [M_\alpha, [M_\beta, \Delta_{\gamma\delta}]] M_\delta \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Substituindo as Eq. (2.6) e (C.61), obtemos

$$\begin{aligned} S_\beta &= \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{*\alpha\nu} \Phi_\gamma^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{\mu\nu} \right\} \bar{q}_\tau q_\alpha M_\gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\gamma^{\mu\nu} + \Phi_\beta^{*\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{\mu\nu} \right\} \bar{q}_\tau q_\alpha M_\gamma \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

\* Cálculo de  $U_\beta = \left[ \tilde{M}_\beta^\dagger, M_\alpha \right]$  até terceira ordem:

Da segunda equação de (G.2) e considerando a Eq. (2.6), temos que

$$U_\beta = \left[ M_\beta^\dagger + \frac{1}{2} M_\gamma^\dagger \Delta_{\gamma\beta} + \frac{1}{2} M_\gamma^\dagger [M_\beta^\dagger, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta, M_\alpha \right] \quad (\text{G.7})$$

Abrindo os comutadores da Eq. (G.7) e substituindo as Eqs. (2.6) e (C.58), encontramos

$$\begin{aligned} U_\beta &= -\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{*\alpha\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\gamma^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{\mu\nu} \right\} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\tau q_\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\beta^{\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\alpha\nu} + \Phi_\beta^{\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\mu\tau} \right\} \bar{q}_\tau^\dagger q_\alpha^\dagger M_\delta. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

\* Cálculo de  $S_{\beta\delta} = [S_\beta, \tilde{M}_\delta]$  até terceira ordem:

Da terceira equação de (G.2) e considerando a Eq. (G.6), temos que

$$\begin{aligned} S_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{*\alpha\nu} \Phi_\gamma^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{\mu\nu} \right\} [\bar{q}_\tau q_\alpha M_\gamma, \tilde{M}_\delta] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\beta^{*\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\gamma^{\mu\nu} + \Phi_\beta^{*\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{\mu\nu} \right\} [\bar{q}_\tau q_\alpha M_\gamma, \tilde{M}_\delta] \end{aligned} \quad (G.9)$$

Abrindo os comutadores da Eq. (G.9) e da Eq. (2.6), encontramos

$$S_{\beta\delta} = 0. \quad (G.10)$$

\* Cálculo de  $U_{\beta\delta} = [U_\beta, \tilde{M}_\delta]$  até ordem 3:

Da quarta equação de (G.2) e considerando a Eq. (G.8), temos que

$$\begin{aligned} U_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} [\Delta_{\alpha\beta}, \tilde{M}_\delta] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{*\alpha\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\gamma^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{\mu\nu} \right\} [M_\gamma^\dagger \bar{q}_\tau q_\alpha, \tilde{M}_\delta] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\beta^{\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\alpha\nu} + \Phi_\beta^{\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\mu\tau} \right\} [\bar{q}_\tau^\dagger q_\alpha^\dagger M_\delta, \tilde{M}_\delta] \end{aligned} \quad (G.11)$$

Abrindo os comutadores da Eq. (G.9) e das Eqs. (2.6) e (C.61), encontramos

$$\begin{aligned} U_{\beta\delta} &= -\frac{1}{2} \left\{ \Phi_\delta^{*\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\delta^{*\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{\mu\nu} \right\} \bar{q}_\tau q_\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\delta^{*\alpha\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\delta^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{\mu\nu} \right\} \bar{q}_\tau q_\alpha \end{aligned} \quad (G.12)$$

\* Cálculo de  $V_{\beta\delta} = [\tilde{M}_\delta^\dagger, U_\beta]$  até terceira ordem:

Da quinta equação de (G.2) e considerando a Eq. (G.8), temos que

$$\begin{aligned} V_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} [\tilde{M}_\delta^\dagger, \Delta_{\alpha\beta}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Phi_\gamma^{*\alpha\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu} \Phi_\gamma^{*\mu\tau} \Phi_\beta^{\mu\nu} \right\} [\tilde{M}_\delta^\dagger, M_\gamma^\dagger \bar{q}_\tau q_\alpha] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\beta^{\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\alpha\nu} + \Phi_\beta^{\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\mu\tau} \right\} [\tilde{M}_\delta^\dagger, \bar{q}_\tau^\dagger q_\alpha^\dagger M_\delta] \end{aligned} \quad (G.13)$$

Abrindo os comutadores da Eq. (G.9) e das Eqs. (2.6) e (C.58), encontramos

$$\begin{aligned} V_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\delta^{\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\alpha\nu} + \Phi_\delta^{\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\tau} \right\} \bar{q}_\tau^\dagger q_\alpha^\dagger \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\beta^{\mu\tau} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\alpha\nu} + \Phi_\beta^{\alpha\nu} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\delta^{\mu\tau} \right\} \bar{q}_\tau^\dagger q_\alpha^\dagger \end{aligned} \quad (G.14)$$

As outras equações de (G.2), que são os comutadores de terceira ordem, são nulos como podemos ver. Visto que,  $S_{\beta\delta}$  é nulo e  $U_{\beta\delta}$  e  $V_{\beta\delta}$  já estão em terceira ordem e não possuem  $M$  para produzirem deltas (Eq. (2.6)), o que possibilitaria a criação de novos termos. Assim, levando os resultados obtidos nas Eqs. (G.6), (G.8), (G.10), (G.12) e (G.14) na Eq. (G.1), temos

$$\begin{aligned}
 M_\alpha(t) &= M_\alpha + [\delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t - \frac{1}{2}[\Delta_{\alpha\beta}(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &- \frac{1}{2}\left\{\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Phi_\beta^{*\alpha\nu}\Phi_\gamma^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu}\Phi_\beta^{*\mu\tau}\Phi_\gamma^{\mu\nu}\right\}[\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\tau(\varepsilon)q_\alpha(\varepsilon)M_\gamma(\varepsilon)]|_0^t \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\Phi_\beta^{*\mu\tau}\Phi_\alpha^{*\alpha\nu}\Phi_\gamma^{\mu\nu} + \Phi_\beta^{*\alpha\nu}\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Phi_\gamma^{\mu\nu}\right\}[\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\tau(\varepsilon)q_\alpha(\varepsilon)M_\gamma(\varepsilon)]|_0^t \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Phi_\gamma^{*\alpha\nu}\Phi_\beta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu}\Phi_\gamma^{*\mu\tau}\Phi_\beta^{\mu\nu}\right\}[M_\gamma^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\tau(\varepsilon)q_\alpha(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\Phi_\beta^{\mu\tau}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\delta^{\alpha\nu} + \Phi_\beta^{\alpha\nu}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\delta^{\mu\tau}\right\}[\bar{q}_\tau^\dagger(\varepsilon)q_\alpha^\dagger(\varepsilon)M_\delta(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &- \frac{1}{4}\left\{\Phi_\delta^{\mu\tau}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\alpha\nu} + \Phi_\delta^{\alpha\nu}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\mu\tau}\right\}[\bar{q}_\tau^\dagger(\varepsilon)q_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &- \frac{1}{4}\left\{\Phi_\beta^{\mu\tau}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\delta^{\alpha\nu} + \Phi_\beta^{\alpha\nu}\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\delta^{\mu\tau}\right\}[\bar{q}_\tau^\dagger(\varepsilon)q_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\Phi_\beta^{*\mu\tau}\Phi_\alpha^{*\alpha\nu}\Phi_\delta^{\mu\nu} + \Phi_\beta^{*\alpha\nu}\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Phi_\delta^{\mu\nu}\right\}[\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\tau(\varepsilon)q_\alpha(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)]|_0^t \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\Phi_\alpha^{*\mu\tau}\Phi_\beta^{*\alpha\nu}\Phi_\delta^{\mu\nu} + \Phi_\alpha^{*\alpha\nu}\Phi_\beta^{*\mu\tau}\Phi_\delta^{\mu\nu}\right\}[\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\tau(\varepsilon)q_\alpha(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)]|_0^t \quad (G.15)
 \end{aligned}$$

Simplificando e substituindo (C.61) na Eq. (G.15), obtemos

$$\begin{aligned}
 M_\alpha(t) &= M_\alpha + \tilde{M}_\alpha(t) - \tilde{M}_\alpha - \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}(t)\tilde{M}_\beta(t) + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta \\
 &+ \frac{3}{2}\tilde{M}_\beta^\dagger(t)[M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}]\tilde{M}_\delta(t) \\
 &- \frac{3}{2}M_\beta^\dagger[M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}]M_\delta \quad (G.16)
 \end{aligned}$$

## G.1 Cálculo de $M_\alpha^{(0)}(t)$ :

Da Eq. (G.16), considerando até ordem zero, temos

$$M_\alpha^{(0)}(t) = M_\alpha - \tilde{M}_\alpha + \tilde{M}_\alpha(t) \quad (G.17)$$

Expandindo em potências da função de onda até ordem zero a Eq. (G.17) e utilizando a propriedade (2.64), encontramos que

$$M_\alpha^{(0)}(t) = M_\alpha - M_\alpha + \tilde{M}_\alpha^{(0)}(t) = \tilde{M}_\alpha^{(0)}(t). \quad (G.18)$$

## G.2 Cálculo de $M_\alpha^{(2)}(t)$ :

Da Eq. (G.16), considerando até segunda ordem, temos

$$M_\alpha^{(2)}(t) = \tilde{M}_\alpha(t) - \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta(t) + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta - \tilde{M}_\alpha \quad (\text{G.19})$$

Expandindo em potências da função de onda até segunda ordem a Eq. (G.19), encontramos que

$$M_\alpha^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}M_\beta \cos t - \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta - \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta. \quad (\text{G.20})$$

Substituindo a Eq. (2.74) em (G.20), obtemos então

$$M_\alpha^{(2)}(t) = \tilde{M}_\alpha^{(2)}(t) - \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \quad (\text{G.21})$$

## G.3 Cálculo de $M_\alpha^{(3)}(t)$ :

Da Eq. (G.16), considerando até terceira ordem, temos

$$\begin{aligned} M_\alpha^{(3)}(t) &= M_\alpha + \tilde{M}_\alpha(t) - \tilde{M}_\alpha - \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}(t)\tilde{M}_\beta(t) + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}\tilde{M}_\beta \\ &+ \frac{3}{2}\tilde{M}_\beta^\dagger(t) [M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}] \tilde{M}_\delta(t) \\ &- \frac{3}{2}M_\beta^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}] M_\delta \end{aligned} \quad (\text{G.22})$$

Expandindo em potências da função de onda até terceira ordem a Eq. (G.22), encontramos que

$$\begin{aligned} M_\alpha^{(3)}(t) &= -\frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta}^{(3)}(t)\tilde{M}_\beta^{(0)}(t) + \tilde{M}_\alpha^{(3)}(t) \\ &+ \frac{3}{2}\tilde{M}_\beta^{\dagger(0)}(t) [M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}] \tilde{M}_\delta^{(0)}(t) \\ &- \frac{3}{2}M_\beta^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}] M_\delta + \frac{1}{2}M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

Da Eq. (2.7), temos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}^{(3)}(t) &= \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\rho\epsilon} \left( \bar{q}_\epsilon^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_\tau^{(1)}(t) + \bar{q}_\epsilon^{\dagger(1)}(t) \bar{q}_\tau^{(0)}(t) \right) \\ &+ \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\xi\tau} \left( q_\xi^{\dagger(0)}(t) q_\rho^{(1)}(t) + q_\xi^{\dagger(1)}(t) q_\rho^{(0)}(t) \right) \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

e considerando as propriedades (2.54) e (2.58), vemos que a Eq. (G.24) fica

$$\begin{aligned}
 M_\alpha^{(3)}(t) &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\rho\epsilon} \Phi_\delta^{\mu'\tau} \bar{q}_\epsilon^\dagger q_{\mu'}^\dagger \tilde{M}_\delta^{(0)}(t) \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\xi\tau} \Phi_\delta^{\rho\nu'} q_\xi^\dagger \bar{q}_{\nu'}^\dagger \tilde{M}_\delta^{(0)}(t) \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\rho\epsilon} \Phi_\delta^{*\mu'\epsilon} \tilde{M}_\delta^{\dagger(0)}(t) q_{\mu'} \bar{q}_\tau \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\xi\tau} \Phi_\delta^{*\xi\nu'} \tilde{M}_\delta^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\nu'} q_\rho \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\xi\tau} \Phi_\delta^{\rho\nu'} q_\xi^\dagger \bar{q}_{\nu'}^\dagger M_\delta \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\rho\epsilon} \Phi_\delta^{\mu'\tau} \bar{q}_\epsilon^\dagger q_{\mu'}^\dagger M_\delta \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\rho\epsilon} \Phi_\delta^{*\mu'\epsilon} M_\delta^\dagger q_{\mu'} \bar{q}_\tau \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\xi\tau} \Phi_\delta^{*\xi\nu'} M_\delta^\dagger \bar{q}_{\nu'} q_\rho \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &+ \tilde{M}_\alpha^{(3)}(t) + \frac{3}{2} \tilde{M}_\beta^{\dagger(0)}(t) [M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}] \tilde{M}_\delta^{(0)}(t) \\
 &- M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta
 \end{aligned} \tag{G.25}$$

Simplificando e substituindo as Eqs. (C.58) e (C.61) na Eq. (G.25), obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}
 M_\alpha^{(3)}(t) &= \frac{1}{2} [M_\beta^\dagger, \Delta_{\alpha\delta}] \tilde{M}_\delta^{(0)}(t) \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &- \frac{1}{2} [M_\beta^\dagger, \Delta_{\alpha\delta}] M_\delta \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &+ \tilde{M}_\beta^{\dagger(0)}(t) [M_\alpha, \Delta_{\beta\delta}] \tilde{M}_\delta^{(0)}(t) \\
 &+ \frac{1}{2} M_\delta^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\delta\beta}] \tilde{M}_\beta^{(0)}(t) \\
 &+ \tilde{M}_\alpha^{(3)}(t) - M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta
 \end{aligned} \tag{G.26}$$

## Apêndice H

# Cálculo do $\bar{q}$ de Quarta Ordem

Neste apêndice vamos apresentar, em detalhes, o cálculo da equação de movimento para o  $\bar{q}_\nu$  de quarta ordem que é realizado a partir das Eqs. (F.15) e (F.4), utilizando a forma integral de obtenção das equações de movimento apresentada no apêndice (F). Para este cálculo o operador genérico  $A_\alpha = \bar{q}_\nu$ , logo a Eq. (F.15) até quarta ordem fica

$$\begin{aligned}
\bar{q}_\nu(t) &= \bar{q}_\nu - [\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)S_\alpha(\varepsilon) + U_\alpha(\varepsilon)\tilde{M}_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{2}[\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)S_{\beta\alpha}(\varepsilon) + V_{\alpha\beta}(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)\tilde{M}_\alpha(\varepsilon) + 2\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)U_{\beta\alpha}(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{6}[\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma^\dagger(\varepsilon)S_{\gamma\alpha\beta}(\varepsilon) + N_{\beta\alpha\gamma}(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)\tilde{M}_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{2}[\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)U_{\gamma\alpha\beta}(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon) + \tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)V_{\beta\gamma\alpha}(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{24}[\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\delta^\dagger(\varepsilon)S_{\delta\gamma\alpha\beta}(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{24}[N_{\beta\alpha\gamma\delta}(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)\tilde{M}_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{6}[\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma^\dagger(\varepsilon)U_{\delta\gamma\alpha\beta}(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)]|_0^t \\
&+ \frac{1}{6}[\tilde{M}_\delta^\dagger(\varepsilon)O_{\beta\alpha\gamma\delta}(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)\tilde{M}_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\
&- \frac{1}{4}[\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\beta^\dagger(\varepsilon)V_{\gamma\delta\beta\alpha}(\varepsilon)\tilde{M}_\delta(\varepsilon)\tilde{M}_\gamma(\varepsilon)]|_0^t
\end{aligned} \tag{H.1}$$

onde, das Eqs. (F.16), (F.17), (F.18) e (F.19), temos que os comutadores até quarta ordem são dados por

$$\begin{aligned}
S_\alpha &= [\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\alpha] \\
U_\alpha &= [\tilde{M}_\alpha^\dagger, \bar{q}_\nu] \\
S_{\alpha\beta} &= S_{\beta\alpha} = [[\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\alpha], \tilde{M}_\beta] = [S_\alpha, \tilde{M}_\beta] \\
U_{\alpha\beta} &= [[\tilde{M}_\alpha^\dagger, \bar{q}_\nu], \tilde{M}_\beta] = [\tilde{M}_\alpha^\dagger, [\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\beta]] = [U_\alpha, \tilde{M}_\beta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha\beta} &= V_{\beta\alpha} = [\tilde{M}_\beta^\dagger, [\tilde{M}_\alpha^\dagger \cdot \bar{q}_\nu]] = [\tilde{M}_\beta^\dagger, U_\alpha] \\
 S_{\alpha\beta\gamma} &= [[[\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\alpha], \tilde{M}_\beta], \tilde{M}_\gamma] = [S_{\alpha\beta}, \tilde{M}_\gamma] = S_{\beta\alpha\gamma} = S_{\alpha\gamma\beta} \\
 U_{\alpha\beta\gamma} &= [[[\tilde{M}_\alpha^\dagger, \bar{q}_\nu], \tilde{M}_\beta], \tilde{M}_\gamma] = [U_{\alpha\beta}, \tilde{M}_\gamma] = U_{\alpha\gamma\beta} \\
 V_{\alpha\beta\gamma} &= [[\tilde{M}_\alpha^\dagger, [\tilde{M}_\beta^\dagger, \bar{q}_\nu]], \tilde{M}_\gamma] = [V_{\alpha\beta}, \tilde{M}_\gamma] = V_{\beta\alpha\gamma} \\
 R_{\beta\alpha\gamma} &= [\tilde{M}_\beta^\dagger, U_{\alpha\gamma}] = [V_{\alpha\beta}, \tilde{M}_\gamma] = V_{\alpha\beta\gamma} \\
 N_{\beta\alpha\gamma} &= [\tilde{M}_\beta^\dagger, [\tilde{M}_\alpha^\dagger, [\tilde{M}_\gamma^\dagger, \bar{q}_\nu]]] = [\tilde{M}_\beta^\dagger, V_{\alpha\gamma}] \\
 S_{\delta\gamma\alpha\beta} &= [[[[\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\delta], \tilde{M}_\gamma], \tilde{M}_\alpha], \tilde{M}_\beta] = [S_{\delta\gamma\alpha}, \tilde{M}_\beta] \\
 U_{\delta\gamma\alpha\beta} &= [[[[\tilde{M}_\delta^\dagger, \bar{q}_\nu], \tilde{M}_\gamma], \tilde{M}_\alpha], \tilde{M}_\beta] = [U_{\delta\gamma\alpha}, \tilde{M}_\beta] \\
 O_{\beta\alpha\gamma\delta} &= [\tilde{M}_\beta^\dagger, [\tilde{M}_\alpha^\dagger, [\tilde{M}_\gamma^\dagger, [\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\delta]]]] = [\tilde{M}_\beta^\dagger, V_{\alpha\gamma\delta}] \\
 N_{\beta\alpha\gamma\delta} &= [\tilde{M}_\beta^\dagger, [\tilde{M}_\alpha^\dagger, [\tilde{M}_\gamma^\dagger, [\tilde{M}_\delta^\dagger, \bar{q}_\nu]]]] = [\tilde{M}_\beta^\dagger, N_{\alpha\gamma\delta}] \\
 V_{\gamma\delta\beta\alpha} &= [[[\tilde{M}_\gamma^\dagger, [\tilde{M}_\delta^\dagger, \bar{q}_\nu]], \tilde{M}_\beta], \tilde{M}_\alpha] = [V_{\gamma\delta\beta}, \tilde{M}_\alpha] \tag{H.2}
 \end{aligned}$$

Vamos primeiramente calcular os comutadores da Eq. (F.15), que são dados pelas Eqs. (H.2), onde desprezamos os termos acima de quarta ordem da função de onda.

\* Cálculo de  $S_\alpha = [\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\alpha]$  até quarta ordem:

Da primeira equação de (H.2), temos que

$$S_\alpha = [\bar{q}_\nu, \tilde{M}_\alpha] \tag{H.3}$$

Utilizando as Eqs. (E.1) e (E.2) para o operador  $\tilde{M}_\alpha$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned}
 S_\alpha &= [\bar{q}_\nu, M_\beta + \frac{1}{2}\Delta_{\beta\gamma}M_\gamma + \frac{1}{2}M_\gamma^\dagger[\Delta_{\gamma\delta}, M_\beta]M_\delta] \\
 &+ [\bar{q}_\nu, \frac{3}{8}\Delta_{\beta\gamma}\Delta_{\gamma\lambda}M_\lambda - \frac{1}{8}M_\gamma^\dagger[\Delta_{\beta\lambda}, \Delta_{\gamma\delta}]M_\delta M_\lambda] \\
 &+ [\bar{q}_\nu, \frac{1}{4}M_\gamma^\dagger[M_\beta, [\Delta_{\gamma\lambda}, M_\delta^\dagger]]M_\lambda M_\delta] \tag{H.4}
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 S_\alpha &= [\bar{q}_\nu, M_\beta] + \frac{1}{2}[\bar{q}_\nu, \Delta_{\beta\gamma}M_\gamma] + \frac{1}{2}[\bar{q}_\nu, M_\gamma^\dagger[\Delta_{\gamma\delta}, M_\beta]M_\delta] \\
 &+ \frac{3}{8}[\bar{q}_\nu, \Delta_{\beta\gamma}\Delta_{\gamma\lambda}M_\lambda] - \frac{1}{8}[\bar{q}_\nu, M_\gamma^\dagger[\Delta_{\beta\lambda}, \Delta_{\gamma\delta}]M_\delta M_\lambda] \\
 &+ \frac{1}{4}[\bar{q}_\nu, M_\gamma^\dagger[M_\beta, [\Delta_{\gamma\lambda}, M_\delta^\dagger]]M_\lambda M_\delta] \tag{H.5}
 \end{aligned}$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.8), (C.52), (C.61), (C.63), (C.70) e (C.73) na Eq. (H.5), encontramos

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\sigma\eta}\Phi_\gamma^{\sigma\nu}\bar{q}_\eta M_\gamma + \frac{3}{8}\Phi_\gamma^{*\sigma\eta}\Phi_\lambda^{\sigma\nu}\Delta_{\beta\gamma}\bar{q}_\eta M_\lambda + \frac{3}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\eta}\Phi_\gamma^{\sigma\nu}\bar{q}_\eta\Delta_{\gamma\lambda}M_\lambda$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \left\{ \Phi_\beta^{*\xi\tau} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\rho} + \Phi_\beta^{*\sigma\rho} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\xi\tau} \Phi_\delta^{\xi\rho} \right\} q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\delta \\
 & - \frac{1}{8} \left\{ \Phi_\beta^{*\mu\xi} \Phi_\gamma^{*\lambda\rho} \Phi_\gamma^{\mu\omega} \Phi_\delta^{\lambda\xi} - \Phi_\beta^{*\mu\rho} \Phi_\gamma^{*\lambda\xi} \Phi_\gamma^{\mu\xi} \Phi_\delta^{\lambda\omega} \right\} M_\gamma^\dagger \left[ \bar{q}_\nu, \bar{q}_\omega^\dagger \bar{q}_\rho \right] M_\delta M_\lambda \\
 & - \frac{1}{4} \left\{ \Phi_\beta^{*\sigma\omega} \Phi_\gamma^{*\xi\rho} \Phi_\lambda^{\xi\tau} \Phi_\delta^{\sigma\rho} + \Phi_\beta^{*\sigma\omega} \Phi_\gamma^{*\xi\rho} \Phi_\lambda^{\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\tau} \right\} M_\gamma^\dagger \left[ \bar{q}_\nu, \bar{q}_\tau^\dagger \bar{q}_\omega \right] M_\lambda M_\delta
 \end{aligned} \tag{H.6}$$

Colocando em ordenamento normal e levando a Eq. (C.5) na Eq. (H.6), temos

$$\begin{aligned}
 S_\alpha & = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \bar{q}_\eta M_\gamma + \frac{3}{8} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\lambda^{\sigma\nu} \Delta_{\alpha\gamma} \bar{q}_\eta M_\lambda \\
 & + \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Delta_{\gamma\lambda} \bar{q}_\eta M_\lambda + \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Phi_\gamma^{*\rho\tau} \Phi_\lambda^{\rho\eta} \bar{q}_\tau M_\lambda \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\xi\tau} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\rho} q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\delta - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\rho} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\xi\tau} \Phi_\delta^{\xi\rho} q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\delta \\
 & - \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\mu\xi} \Phi_\gamma^{*\lambda\rho} \Phi_\delta^{\lambda\xi} \Phi_\lambda^{\mu\nu} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\rho M_\delta M_\lambda + \frac{1}{8} \Phi_\gamma^{*\lambda\xi} \Phi_\alpha^{*\mu\rho} \Phi_\lambda^{\mu\xi} \Phi_\delta^{\lambda\nu} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\rho M_\delta M_\lambda \\
 & - \frac{1}{4} \Phi_\gamma^{*\xi\rho} \Phi_\alpha^{*\sigma\omega} \Phi_\delta^{\sigma\rho} \Phi_\lambda^{\xi\nu} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\omega M_\lambda M_\delta - \frac{1}{4} \Phi_\gamma^{*\xi\rho} \Phi_\alpha^{*\sigma\omega} \Phi_\lambda^{\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\nu} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\omega M_\lambda M_\delta
 \end{aligned} \tag{H.7}$$

Simplificando a Eq. (H.7), obtemos

$$\begin{aligned}
 S_\alpha & = \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \bar{q}_\eta M_\gamma + \frac{3}{8} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\lambda^{\sigma\nu} \Delta_{\alpha\gamma} \bar{q}_\eta M_\lambda \\
 & + \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Delta_{\gamma\lambda} \bar{q}_\eta M_\lambda + \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Phi_\gamma^{*\rho\tau} \Phi_\lambda^{\rho\eta} \bar{q}_\tau M_\lambda \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\xi\tau} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\rho} q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\delta - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\rho} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\xi\tau} \Phi_\delta^{\xi\rho} q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\delta \\
 & - \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{*\xi\omega} \Phi_\delta^{\xi\eta} \Phi_\lambda^{\sigma\nu} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\omega M_\delta M_\lambda - \frac{3}{8} \Phi_\gamma^{*\xi\rho} \Phi_\alpha^{*\sigma\omega} \Phi_\lambda^{\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\nu} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\omega M_\lambda M_\delta
 \end{aligned} \tag{H.8}$$

\* Cálculo de  $U_\alpha = \left[ \tilde{M}_\alpha^\dagger, \bar{q}_\nu \right] = - \left[ \bar{q}_\nu, \tilde{M}_\alpha^\dagger \right]$  até quarta ordem:

Da segunda equação de (H.2), utilizando as Eqs. (E.2) e (E.3) para o operador  $\tilde{M}_\alpha^\dagger$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned}
 U_\alpha & = - \left[ \bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger + \frac{1}{2} M_\gamma^\dagger \Delta_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2} M_\delta^\dagger \left[ \Delta_{\delta\gamma}, M_\alpha^\dagger \right] M_\gamma \right] \\
 & - \left[ \bar{q}_\nu, \frac{3}{8} M_\lambda^\dagger \Delta_{\lambda\gamma} \Delta_{\gamma\alpha} + \frac{1}{8} M_\lambda^\dagger M_\delta^\dagger \left[ \Delta_{\lambda\alpha}, \Delta_{\delta\gamma} \right] M_\gamma \right] \\
 & - \left[ \bar{q}_\nu, \frac{1}{4} M_\delta^\dagger M_\lambda^\dagger \left[ M_\alpha^\dagger, \left[ \Delta_{\lambda\gamma}, M_\delta \right] \right] M_\gamma \right]
 \end{aligned} \tag{H.9}$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.8), (C.5), (C.18), (C.52), (C.61), (C.66), (C.70) e (C.73) na Eq. (H.9), colocando em ordenamento normal e simplificando, encontramos

$$\begin{aligned}
 U_\alpha &= \Phi_\alpha^{\mu'\nu} q_{\mu'}^\dagger - \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} M_\gamma^\dagger \bar{q}_\eta + \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} q_{\mu'}^\dagger \Delta_{\gamma\alpha} \\
 &- \frac{1}{2} \Phi_\delta^{*\tau\lambda} \Phi_\alpha^{\tau\nu} \Phi_\gamma^{\sigma\lambda} M_\delta^\dagger q_\sigma^\dagger M_\gamma - \frac{1}{2} \Phi_\delta^{*\tau\lambda} \Phi_\gamma^{\tau\nu} \Phi_\alpha^{\sigma\lambda} M_\delta^\dagger q_\sigma^\dagger M_\gamma \\
 &- \frac{3}{8} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} M_\lambda^\dagger \Delta_{\lambda\gamma} \bar{q}_\eta - \frac{3}{8} \Phi_\lambda^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} M_\lambda^\dagger \Delta_{\gamma\alpha} \bar{q}_\eta - \frac{3}{8} \Phi_\lambda^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Phi_\gamma^{*\rho\tau} \Phi_\alpha^{\rho\eta} M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{\rho\tau} \Phi_\delta^{*\rho\eta} \Phi_\delta^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{\sigma\eta} q_{\mu'}^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger q_\sigma^\dagger M_\gamma + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{\sigma\eta} \Phi_\delta^{*\rho\eta} \Phi_\delta^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{\rho\tau} q_{\mu'}^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger q_\sigma^\dagger M_\gamma \\
 &+ \frac{1}{8} \Phi_\delta^{*\sigma\rho} \Phi_\lambda^{*\xi\tau} \Phi_\alpha^{\xi\rho} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} M_\lambda^\dagger M_\delta^\dagger \bar{q}_\tau M_\gamma + \frac{3}{8} \Phi_\lambda^{*\sigma\rho} \Phi_\delta^{*\xi\tau} \Phi_\gamma^{\xi\rho} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} M_\lambda^\dagger M_\delta^\dagger \bar{q}_\tau M_\gamma \quad (\text{H.10})
 \end{aligned}$$

\* Cálculo de  $S_{\alpha\beta} = [S_\alpha, \tilde{M}_\beta]$  até quarta ordem:

Da terceira equação de (H.2), a partir da Eq. (H.8) para o operador  $S_{\alpha\beta}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned}
 S_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\bar{q}_\eta M_\gamma, \tilde{M}_\beta] - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\xi\tau} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\rho} [q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\delta, \tilde{M}_\beta] \\
 &- \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\rho} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{*\xi\tau} \Phi_\delta^{\xi\rho} [q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\delta, \tilde{M}_\beta] + \frac{3}{8} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\lambda^{\sigma\nu} [\Delta_{\alpha\gamma} \bar{q}_\eta M_\lambda, \tilde{M}_\beta] \\
 &+ \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\Delta_{\gamma\lambda} \bar{q}_\eta M_\lambda, \tilde{M}_\beta] + \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Phi_\gamma^{*\rho\tau} \Phi_\lambda^{\rho\eta} [\bar{q}_\tau M_\lambda, \tilde{M}_\beta] \\
 &- \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\mu\xi} \Phi_\gamma^{*\lambda\rho} \Phi_\lambda^{\mu\nu} \Phi_\delta^{\lambda\xi} [M_\gamma^\dagger \bar{q}_\rho M_\delta M_\lambda, \tilde{M}_\beta] \\
 &+ \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\mu\rho} \Phi_\gamma^{*\lambda\xi} \Phi_\lambda^{\mu\xi} \Phi_\delta^{\lambda\nu} [M_\gamma^\dagger \bar{q}_\rho M_\delta M_\lambda, \tilde{M}_\beta] \\
 &- \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\sigma\omega} \Phi_\gamma^{*\xi\rho} \Phi_\lambda^{\xi\nu} \Phi_\delta^{\sigma\rho} [M_\gamma^\dagger \bar{q}_\omega M_\lambda M_\delta, \tilde{M}_\beta] \\
 &- \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\sigma\omega} \Phi_\gamma^{*\xi\rho} \Phi_\lambda^{\sigma\rho} \Phi_\delta^{\xi\nu} [M_\gamma^\dagger \bar{q}_\omega M_\lambda M_\delta, \tilde{M}_\beta] \quad (\text{H.11})
 \end{aligned}$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8), (C.52), e (E.1) para  $\tilde{M}_\beta$  até segunda ordem na Eq. (H.9), colocando em ordenamento normal e simplificando, encontramos

$$S_{\alpha\beta} = \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\beta^{*\rho\omega} \Phi_\lambda^{\rho\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \bar{q}_\omega M_\gamma M_\lambda + \frac{3}{8} \Phi_\beta^{*\xi\rho} \Phi_\alpha^{*\sigma\omega} \Phi_\lambda^{\sigma\rho} \Phi_\gamma^{\xi\nu} \bar{q}_\omega M_\gamma M_\lambda \quad (\text{H.12})$$

\* Cálculo de  $U_{\alpha\beta} = [U_\alpha, \tilde{M}_\beta]$  até quarta ordem:

Da quarta equação de (H.2), a partir da Eq. (H.10) para o operador  $U_{\alpha\beta}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta} &= \Phi_\alpha^{\mu'\nu} [q_{\mu'}^\dagger, \tilde{M}_\beta] - \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} [M_\gamma^\dagger \bar{q}_\eta, \tilde{M}_\beta] + \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} [q_{\mu'}^\dagger \Delta_{\gamma\alpha}, \tilde{M}_\beta] \\
 &+ \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{\rho\tau} \Phi_\delta^{*\rho\eta} \Phi_\delta^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{\sigma\eta} [q_{\mu'}^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger q_\sigma^\dagger M_\gamma, \tilde{M}_\beta] + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{\sigma\eta} \Phi_\delta^{*\rho\eta} \Phi_\delta^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{\rho\tau} [q_{\mu'}^\dagger \bar{q}_\tau^\dagger q_\sigma^\dagger M_\gamma, \tilde{M}_\beta]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{\tau\nu} \Phi_{\delta}^{*\tau\lambda} \Phi_{\gamma}^{\sigma\lambda} \left[ M_{\delta}^{\dagger} q_{\sigma}^{\dagger} M_{\gamma}, \tilde{M}_{\beta} \right] - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{\sigma\lambda} \Phi_{\delta}^{*\tau\lambda} \Phi_{\gamma}^{\tau\nu} \left[ M_{\delta}^{\dagger} q_{\sigma}^{\dagger} M_{\gamma}, \tilde{M}_{\beta} \right] \\
 & - \frac{3}{8} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} \left[ M_{\lambda}^{\dagger} \Delta_{\lambda\gamma} \bar{q}_{\eta}, \tilde{M}_{\beta} \right] - \frac{3}{8} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} \left[ M_{\lambda}^{\dagger} \Delta_{\gamma\alpha} \bar{q}_{\eta}, \tilde{M}_{\beta} \right] \\
 & - \frac{3}{8} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} \Phi_{\gamma}^{*\rho\tau} \Phi_{\alpha}^{\rho\eta} \left[ M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau}, \tilde{M}_{\beta} \right] \\
 & - \frac{1}{8} \Phi_{\delta}^{*\xi\tau} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho} \Phi_{\gamma}^{\xi\rho} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} \left[ M_{\lambda}^{\dagger} M_{\delta}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma}, \tilde{M}_{\beta} \right] + \frac{1}{8} \Phi_{\delta}^{*\sigma\rho} \Phi_{\lambda}^{*\xi\tau} \Phi_{\alpha}^{\xi\rho} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} \left[ M_{\lambda}^{\dagger} M_{\delta}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma}, \tilde{M}_{\beta} \right] \\
 & + \frac{1}{4} \Phi_{\delta}^{*\xi\tau} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho} \Phi_{\gamma}^{\xi\rho} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} \left[ M_{\delta}^{\dagger} M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma}, \tilde{M}_{\beta} \right] + \frac{1}{4} \Phi_{\delta}^{*\sigma\rho} \Phi_{\lambda}^{*\xi\tau} \Phi_{\gamma}^{\xi\rho} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} \left[ M_{\delta}^{\dagger} M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma}, \tilde{M}_{\beta} \right]
 \end{aligned} \tag{H.13}$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8), (C.28), (C.52), (C.55), (C.61) e (E.1) para  $\tilde{M}_{\beta}$  até terceira ordem na Eq. (H.13), colocando em ordenamento normal e simplificando, encontramos

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\mu'\eta} \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} \bar{q}_{\eta} + \frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\tau\lambda} \Phi_{\alpha}^{\sigma\lambda} \Phi_{\gamma}^{\tau\nu} q_{\sigma}^{\dagger} M_{\gamma} \\
 & - \frac{3}{8} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} \Delta_{\beta\gamma} \bar{q}_{\eta} - \frac{1}{8} \Phi_{\beta}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} \Delta_{\gamma\alpha} \bar{q}_{\eta} - \frac{1}{8} \Phi_{\beta}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} \Phi_{\gamma}^{*\rho\tau} \Phi_{\alpha}^{\rho\eta} \bar{q}_{\tau} \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\rho\tau} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta} \Phi_{\mu'}^{\mu'\nu} \Phi_{\alpha}^{\rho\eta} q_{\mu'}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} q_{\sigma} - \frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{*\rho\tau} \Phi_{\mu'}^{\mu'\nu} \Phi_{\alpha}^{\rho\eta} q_{\mu'}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} q_{\sigma} \\
 & + \frac{3}{8} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho} \Phi_{\beta}^{*\xi\tau} \Phi_{\alpha}^{\xi\rho} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma} - \frac{1}{8} \Phi_{\beta}^{*\sigma\rho} \Phi_{\lambda}^{*\xi\tau} \Phi_{\alpha}^{\xi\rho} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma} \\
 & + \frac{1}{8} \Phi_{\beta}^{*\sigma\rho} \Phi_{\lambda}^{*\xi\tau} \Phi_{\gamma}^{\xi\rho} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma} + \frac{3}{8} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho} \Phi_{\beta}^{*\xi\tau} \Phi_{\gamma}^{\xi\rho} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma}
 \end{aligned} \tag{H.14}$$

\* Cálculo de  $V_{\alpha\beta} = [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, U_{\alpha}]$  até quarta ordem:

Da quinta equação de (H.2), a partir da Eq. (H.10) para o operador  $U_{\alpha\beta}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha\beta} &= \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, q_{\mu'}^{\dagger}] - \frac{1}{2} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\gamma}^{\dagger} \bar{q}_{\eta}] \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, q_{\mu'}^{\dagger} \Delta_{\gamma\alpha}] - \frac{1}{2} \Phi_{\delta}^{*\tau\lambda} \Phi_{\alpha}^{\tau\nu} \Phi_{\gamma}^{\sigma\lambda} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\delta}^{\dagger} q_{\sigma}^{\dagger} M_{\gamma}] \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_{\delta}^{*\tau\lambda} \Phi_{\gamma}^{\tau\nu} \Phi_{\alpha}^{\sigma\lambda} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\delta}^{\dagger} q_{\sigma}^{\dagger} M_{\gamma}] - \frac{3}{8} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger} \Delta_{\lambda\gamma} \bar{q}_{\eta}] \\
 & - \frac{3}{8} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger} \Delta_{\gamma\alpha} \bar{q}_{\eta}] - \frac{3}{8} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} \Phi_{\gamma}^{*\rho\tau} \Phi_{\alpha}^{\rho\eta} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger} \bar{q}_{\tau}] \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{\rho\tau} \Phi_{\delta}^{*\rho\eta} \Phi_{\delta}^{\mu'\nu} \Phi_{\gamma}^{\sigma\eta} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, q_{\mu'}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} q_{\sigma}^{\dagger} M_{\gamma}] + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{\sigma\eta} \Phi_{\delta}^{*\rho\eta} \Phi_{\delta}^{\mu'\nu} \Phi_{\gamma}^{\rho\tau} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, q_{\mu'}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} q_{\sigma}^{\dagger} M_{\gamma}] \\
 & + \frac{1}{8} \Phi_{\delta}^{*\sigma\rho} \Phi_{\lambda}^{*\xi\tau} \Phi_{\alpha}^{\xi\rho} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger} M_{\delta}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma}] + \frac{3}{8} \Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho} \Phi_{\delta}^{*\xi\tau} \Phi_{\gamma}^{\xi\rho} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger} M_{\delta}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma}]
 \end{aligned} \tag{H.15}$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8), (C.14), (C.52), (C.55), (C.58) e (E.3) para  $\tilde{M}_\beta^\dagger$  até terceira ordem na Eq. (H.15), colocando em ordenamento normal e simplificando, encontramos

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\Phi_\gamma^{*\sigma\eta}\Phi_\beta^{\rho\eta}\Phi_\alpha^{\sigma\nu}M_\gamma^\dagger q_\rho^\dagger + \frac{1}{2}\Phi_\delta^{*\sigma\eta}\Phi_\alpha^{\rho\eta}\Phi_\beta^{\sigma\nu}M_\delta^\dagger q_\rho^\dagger \\ &\quad - \frac{1}{8}\Phi_\delta^{*\sigma\rho}\Phi_\lambda^{*\xi\tau}\Phi_\alpha^{\xi\rho}\Phi_\beta^{\sigma\nu}M_\lambda^\dagger M_\delta^\dagger \bar{q}_\tau - \frac{1}{8}\Phi_\lambda^{*\sigma\rho}\Phi_\delta^{*\xi\tau}\Phi_\beta^{\xi\rho}\Phi_\alpha^{\sigma\nu}M_\lambda^\dagger M_\delta^\dagger \bar{q}_\tau \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

\* Cálculo de  $S_{\alpha\beta\gamma} = [S_{\alpha\beta}, \tilde{M}_\gamma]$  até quarta ordem:

Da sexta equação de (H.2), a partir da Eq. (H.12) para o operador  $S_{\alpha\beta}$  até quarta ordem, encontramos

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{8}\Phi_\alpha^{*\sigma\eta}\Phi_\beta^{*\rho\omega}\Phi_\lambda^{\rho\eta}\Phi_\delta^{\sigma\nu}[\bar{q}_\omega M_\delta M_\lambda, \tilde{M}_\gamma] + \frac{3}{8}\Phi_\beta^{*\xi\rho}\Phi_\alpha^{*\sigma\omega}\Phi_\lambda^{\sigma\rho}\Phi_\delta^{\xi\nu}[\bar{q}_\omega M_\delta M_\lambda, \tilde{M}_\gamma] \quad (\text{H.17})$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8) e (E.1) para  $\tilde{M}_\gamma$  até ordem zero na Eq. (H.17), colocando em ordenamento normal e simplificando, encontramos

$$S_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (\text{H.18})$$

\* Cálculo de  $U_{\alpha\beta\gamma} = [U_{\alpha\beta}, \tilde{M}_\gamma]$  até quarta ordem:

Da sétima equação de (H.2), a partir da Eq. (H.14) para o operador  $U_{\alpha\beta}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned} U_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\tau\lambda}\Phi_\alpha^{\sigma\lambda}\Phi_\omega^{\tau\nu}[q_\sigma^\dagger M_\omega, \tilde{M}_\gamma] - \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\mu'\eta}\Phi_\alpha^{\mu'\nu}[\bar{q}_\eta, \tilde{M}_\gamma] \\ &\quad - \frac{3}{8}\Phi_\omega^{*\sigma\eta}\Phi_\alpha^{\sigma\nu}[\Delta_{\beta\omega}\bar{q}_\eta, \tilde{M}_\gamma] - \frac{1}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\eta}\Phi_\omega^{\sigma\nu}[\Delta_{\omega\alpha}\bar{q}_\eta, \tilde{M}_\gamma] \\ &\quad - \frac{1}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\eta}\Phi_\omega^{\sigma\nu}\Phi_\omega^{*\rho\tau}\Phi_\alpha^{\rho\eta}[\bar{q}_\tau, \tilde{M}_\gamma] \\ &\quad - \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\rho\tau}\Phi_\omega^{*\sigma\eta}\Phi_\omega^{\mu'\nu}\Phi_\alpha^{\rho\eta}[q_{\mu'}^\dagger \bar{q}_\tau q_\sigma, \tilde{M}_\gamma] - \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\sigma\eta}\Phi_\omega^{*\rho\tau}\Phi_\omega^{\mu'\nu}\Phi_\alpha^{\rho\eta}[q_{\mu'}^\dagger \bar{q}_\tau q_\sigma, \tilde{M}_\gamma] \\ &\quad + \frac{3}{8}\Phi_\lambda^{*\sigma\rho}\Phi_\beta^{*\xi\tau}\Phi_\alpha^{\xi\rho}\Phi_\omega^{\sigma\nu}[M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau M_\omega, \tilde{M}_\gamma] - \frac{1}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\rho}\Phi_\lambda^{*\xi\tau}\Phi_\alpha^{\xi\rho}\Phi_\omega^{\sigma\nu}[M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau M_\omega, \tilde{M}_\gamma] \\ &\quad + \frac{1}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\rho}\Phi_\lambda^{*\xi\tau}\Phi_\omega^{\xi\rho}\Phi_\alpha^{\sigma\nu}[M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau M_\omega, \tilde{M}_\gamma] + \frac{3}{8}\Phi_\lambda^{*\sigma\rho}\Phi_\beta^{*\xi\tau}\Phi_\omega^{\xi\rho}\Phi_\alpha^{\sigma\nu}[M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau M_\omega, \tilde{M}_\gamma] \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8), (C.52), e (E.1) para  $\tilde{M}_\gamma$  até segunda ordem na Eq. (H.19), colocando em ordenamento normal e simplificando,

encontramos

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha\beta\gamma} &= -\frac{3}{8}\Phi_{\beta}^{*\sigma\rho}\Phi_{\gamma}^{*\xi\tau}\Phi_{\alpha}^{\xi\rho}\Phi_{\lambda}^{\sigma\nu}\bar{q}_{\tau}M_{\lambda} \\
 &\quad - \frac{3}{8}\Phi_{\beta}^{*\sigma\rho}\Phi_{\gamma}^{*\xi\tau}\Phi_{\lambda}^{\xi\rho}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu}\bar{q}_{\tau}M_{\lambda} \\
 &\quad - \frac{3}{8}\Phi_{\gamma}^{*\sigma\rho}\Phi_{\beta}^{*\xi\tau}\Phi_{\alpha}^{\xi\rho}\Phi_{\lambda}^{\sigma\nu}\bar{q}_{\tau}M_{\lambda} \\
 &\quad - \frac{3}{8}\Phi_{\gamma}^{*\sigma\rho}\Phi_{\beta}^{*\xi\tau}\Phi_{\lambda}^{\xi\rho}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu}\bar{q}_{\tau}M_{\lambda}
 \end{aligned} \tag{H.20}$$

\* Cálculo de  $V_{\alpha\beta\gamma} = [V_{\alpha\beta}, \tilde{M}_{\gamma}]$  até quarta ordem:

Da oitava equação de (H.2), a partir da Eq. (H.16) para o operador  $V_{\alpha\beta}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta}\Phi_{\beta}^{\rho\eta}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} [M_{\lambda}^{\dagger}q_{\rho}^{\dagger}, \tilde{M}_{\gamma}] + \frac{1}{2}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta}\Phi_{\alpha}^{\rho\eta}\Phi_{\beta}^{\sigma\nu} [M_{\lambda}^{\dagger}q_{\rho}^{\dagger}, \tilde{M}_{\gamma}] \\
 &\quad - \frac{1}{8}\Phi_{\delta}^{*\sigma\rho}\Phi_{\lambda}^{*\xi\tau}\Phi_{\alpha}^{\xi\rho}\Phi_{\beta}^{\sigma\nu} [M_{\lambda}^{\dagger}M_{\delta}^{\dagger}\bar{q}_{\tau}, \tilde{M}_{\gamma}] \\
 &\quad - \frac{1}{8}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho}\Phi_{\delta}^{*\xi\tau}\Phi_{\beta}^{\xi\rho}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} [M_{\lambda}^{\dagger}M_{\delta}^{\dagger}\bar{q}_{\tau}, \tilde{M}_{\gamma}]
 \end{aligned} \tag{H.21}$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8) e (E.1) para  $\tilde{M}_{\gamma}$  até ordem zero na Eq. (H.21), simplificando, encontramos

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha\beta\gamma} &= -\frac{1}{2}\Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta}\Phi_{\beta}^{\rho\eta}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu}q_{\rho}^{\dagger} - \frac{1}{2}\Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta}\Phi_{\alpha}^{\rho\eta}\Phi_{\beta}^{\sigma\nu}q_{\rho}^{\dagger} \\
 &\quad - \frac{3}{8}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho}\Phi_{\gamma}^{*\xi\tau}\Phi_{\alpha}^{\xi\rho}\Phi_{\beta}^{\sigma\nu}M_{\lambda}^{\dagger}\bar{q}_{\tau} + \frac{1}{8}\Phi_{\gamma}^{*\sigma\rho}\Phi_{\lambda}^{*\xi\tau}\Phi_{\alpha}^{\xi\rho}\Phi_{\beta}^{\sigma\nu}M_{\lambda}^{\dagger}\bar{q}_{\tau} \\
 &\quad - \frac{3}{8}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho}\Phi_{\gamma}^{*\xi\tau}\Phi_{\beta}^{\xi\rho}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu}M_{\lambda}^{\dagger}\bar{q}_{\tau} + \frac{1}{8}\Phi_{\gamma}^{*\sigma\rho}\Phi_{\lambda}^{*\xi\tau}\Phi_{\beta}^{\xi\rho}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu}M_{\lambda}^{\dagger}\bar{q}_{\tau}
 \end{aligned} \tag{H.22}$$

\* Cálculo de  $N_{\beta\alpha\gamma} = [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, V_{\alpha\gamma}]$  até ordem 4:

Da nona equação de (H.2), a partir da Eq. (H.16) para o operador  $V_{\alpha\gamma}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned}
 N_{\beta\alpha\gamma} &= \frac{1}{2}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta}\Phi_{\gamma}^{\rho\eta}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger}q_{\rho}^{\dagger}] + \frac{1}{2}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\eta}\Phi_{\alpha}^{\rho\eta}\Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger}q_{\rho}^{\dagger}] \\
 &\quad - \frac{1}{8}\Phi_{\delta}^{*\sigma\rho}\Phi_{\lambda}^{*\xi\tau}\Phi_{\alpha}^{\xi\rho}\Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger}M_{\delta}^{\dagger}\bar{q}_{\tau}] \\
 &\quad - \frac{1}{8}\Phi_{\lambda}^{*\sigma\rho}\Phi_{\delta}^{*\xi\tau}\Phi_{\gamma}^{\xi\rho}\Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} [\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}, M_{\lambda}^{\dagger}M_{\delta}^{\dagger}\bar{q}_{\tau}]
 \end{aligned} \tag{H.23}$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8) e (E.3) para  $\tilde{M}_{\beta}^{\dagger}$  até ordem zero na Eq. (H.23), encontramos

$$N_{\beta\alpha\gamma} = 0 \tag{H.24}$$

\* Cálculo de  $S_{\delta\gamma\alpha\beta} = [S_{\delta\gamma\alpha}, \tilde{M}_\beta]$  até quarta ordem:

Da décima equação de (H.2), a partir da Eq. (H.18) para o operador  $S_{\delta\gamma\alpha}$  até quarta ordem, encontramos

$$S_{\delta\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (\text{H.25})$$

\* Cálculo de  $U_{\delta\gamma\alpha\beta} = [U_{\delta\gamma\alpha}, \tilde{M}_\beta]$  até quarta ordem:

Da décima primeira equação de (H.2), a partir da Eq. (H.20) para o operador  $U_{\delta\gamma\alpha}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned} U_{\delta\gamma\alpha\beta} &= -\frac{3}{8}\Phi_\gamma^{*\sigma\rho}\Phi_\alpha^{*\xi\tau}\Phi_\delta^{\xi\rho}\Phi_\lambda^{\sigma\nu} [\bar{q}_\tau M_\lambda, \tilde{M}_\beta] - \frac{3}{8}\Phi_\gamma^{*\sigma\rho}\Phi_\alpha^{*\xi\tau}\Phi_\lambda^{\xi\rho}\Phi_\delta^{\sigma\nu} [\bar{q}_\tau M_\lambda, \tilde{M}_\beta] \\ &- \frac{3}{8}\Phi_\alpha^{*\sigma\rho}\Phi_\gamma^{*\xi\tau}\Phi_\delta^{\xi\rho}\Phi_\lambda^{\sigma\nu} [\bar{q}_\tau M_\lambda, \tilde{M}_\beta] - \frac{3}{8}\Phi_\alpha^{*\sigma\rho}\Phi_\gamma^{*\xi\tau}\Phi_\lambda^{\xi\rho}\Phi_\delta^{\sigma\nu} [\bar{q}_\tau M_\lambda, \tilde{M}_\beta] \end{aligned} \quad (\text{H.26})$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8) e (E.1) para  $\tilde{M}_\beta$  até ordem zero na Eq. (H.26), encontramos

$$U_{\delta\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (\text{H.27})$$

\* Cálculo de  $O_{\beta\alpha\gamma\delta} = [\tilde{M}_\beta^\dagger, V_{\alpha\gamma\delta}]$  até quarta ordem:

Da décima segunda equação de (H.2), a partir da Eq. (H.22) para o operador  $V_{\alpha\gamma\delta}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned} O_{\beta\alpha\gamma\delta} &= -\frac{1}{2}\Phi_\delta^{*\sigma\eta}\Phi_\gamma^{\rho\eta}\Phi_\alpha^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\beta^\dagger, q_\rho^\dagger] - \frac{1}{2}\Phi_\delta^{*\sigma\eta}\Phi_\alpha^{\rho\eta}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\beta^\dagger, q_\rho^\dagger] \\ &- \frac{3}{8}\Phi_\lambda^{*\sigma\rho}\Phi_\delta^{*\xi\tau}\Phi_\alpha^{\xi\rho}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\beta^\dagger, M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau] + \frac{1}{8}\Phi_\delta^{*\sigma\rho}\Phi_\lambda^{*\xi\tau}\Phi_\alpha^{\xi\rho}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\beta^\dagger, M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau] \\ &- \frac{3}{8}\Phi_\lambda^{*\sigma\rho}\Phi_\delta^{*\xi\tau}\Phi_\gamma^{\xi\rho}\Phi_\alpha^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\beta^\dagger, M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau] + \frac{1}{8}\Phi_\delta^{*\sigma\rho}\Phi_\lambda^{*\xi\tau}\Phi_\gamma^{\xi\rho}\Phi_\alpha^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\beta^\dagger, M_\lambda^\dagger \bar{q}_\tau] \end{aligned} \quad (\text{H.28})$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8) e (E.3) para  $\tilde{M}_\beta^\dagger$  até ordem zero na Eq. (H.28), encontramos

$$O_{\beta\alpha\gamma\delta} = 0 \quad (\text{H.29})$$

\* Cálculo de  $N_{\beta\alpha\gamma\delta} = [\tilde{M}_\beta^\dagger, N_{\alpha\gamma\delta}]$  até quarta ordem:

Da décima terceira equação de (H.2), a partir da Eq. (H.24) para o operador  $N_{\alpha\gamma\delta}$  até quarta ordem, encontramos

$$N_{\beta\alpha\gamma\delta} = 0 \quad (\text{H.30})$$

\* Cálculo de  $V_{\gamma\delta\beta\alpha} = [V_{\gamma\delta\beta}, \tilde{M}_\alpha]$  até quarta ordem:

Da décima quarta equação de (H.2), a partir da Eq. (H.22) para o operador  $V_{\gamma\delta\beta}$  até quarta ordem, encontramos

$$\begin{aligned} V_{\gamma\delta\beta\alpha} &= -\frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\sigma\eta}\Phi_\delta^{\rho\eta}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [q_\rho^\dagger, \tilde{M}_\alpha] - \frac{1}{2}\Phi_\beta^{*\sigma\eta}\Phi_\gamma^{\rho\eta}\Phi_\delta^{\sigma\nu} [q_\rho^\dagger, \tilde{M}_\alpha] \\ &- \frac{3}{8}\Phi_\lambda^{*\sigma\rho}\Phi_\beta^{*\xi\tau}\Phi_\gamma^{\xi\rho}\Phi_\delta^{\sigma\nu} [M_\lambda^\dagger\bar{q}_\tau, \tilde{M}_\alpha] + \frac{1}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\rho}\Phi_\lambda^{*\xi\tau}\Phi_\gamma^{\xi\rho}\Phi_\delta^{\sigma\nu} [M_\lambda^\dagger\bar{q}_\tau, \tilde{M}_\alpha] \\ &- \frac{3}{8}\Phi_\lambda^{*\sigma\rho}\Phi_\beta^{*\xi\tau}\Phi_\delta^{\xi\rho}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [M_\lambda^\dagger\bar{q}_\tau, \tilde{M}_\alpha] + \frac{1}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\rho}\Phi_\lambda^{*\xi\tau}\Phi_\delta^{\xi\rho}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [M_\lambda^\dagger\bar{q}_\tau, \tilde{M}_\alpha] \end{aligned} \quad (\text{H.31})$$

Abrindo os comutadores e substituindo as Eqs. (2.6), (2.8) e (E.1) para  $\tilde{M}_\alpha$  até ordem zero na Eq. (H.31), simplificando, encontramos

$$\begin{aligned} V_{\gamma\delta\beta\alpha} &= \frac{3}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\rho}\Phi_\alpha^{*\xi\tau}\Phi_\delta^{\xi\rho}\Phi_\gamma^{\sigma\nu}\bar{q}_\tau + \frac{3}{8}\Phi_\beta^{*\sigma\rho}\Phi_\alpha^{*\xi\tau}\Phi_\gamma^{\xi\rho}\Phi_\delta^{\sigma\nu}\bar{q}_\tau \\ &+ \frac{3}{8}\Phi_\alpha^{*\sigma\rho}\Phi_\beta^{*\xi\tau}\Phi_\gamma^{\xi\rho}\Phi_\delta^{\sigma\nu}\bar{q}_\tau + \frac{3}{8}\Phi_\alpha^{*\sigma\rho}\Phi_\beta^{*\xi\tau}\Phi_\delta^{\xi\rho}\Phi_\gamma^{\sigma\nu}\bar{q}_\tau \end{aligned} \quad (\text{H.32})$$

Substituindo as Eqs. (H.8), (H.10), (H.12), (H.14), (H.16), (H.18), (H.20), (H.22), (H.24), (H.25), (H.27), (H.29), (H.30) e (H.32) na Eq. (H.1), simplificando, encontramos que

$$\begin{aligned} \bar{q}_\nu^{(4)}(t) &= -\Phi_\alpha^{\mu'\nu} [q_{\mu'}^\dagger(\varepsilon)\tilde{M}_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\ &+ \frac{1}{2}\Phi_\gamma^{*\sigma\eta}\Phi_\alpha^{\sigma\nu} [M_\gamma^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\eta(\varepsilon)\tilde{M}_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\ &+ \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\mu'\eta}\Phi_\beta^{\mu'\nu} [\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\eta(\varepsilon)\tilde{M}_\beta(\varepsilon)]|_0^t \\ &- \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\sigma\eta}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\alpha^\dagger(\varepsilon)\bar{q}_\eta(\varepsilon)M_\gamma(\varepsilon)]|_0^t \\ &- \frac{1}{2}\Phi_\gamma^{\mu'\nu} [q_{\mu'}^\dagger(\varepsilon)\Delta_{\gamma\alpha}(\varepsilon)M_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\ &+ \frac{1}{2}\Phi_\alpha^{*\tau\lambda}\Phi_\beta^{\sigma\lambda}\Phi_\gamma^{\tau\nu} [M_\alpha^\dagger(\varepsilon)q_\sigma^\dagger(\varepsilon)M_\beta(\varepsilon)M_\gamma(\varepsilon)]|_0^t \\ &+ \frac{3}{8}\Phi_\gamma^{*\sigma\eta}\Phi_\alpha^{\sigma\nu} [M_\lambda^\dagger(\varepsilon)\Delta_{\lambda\gamma}(\varepsilon)\bar{q}_\eta(\varepsilon)M_\alpha(\varepsilon)]|_0^t \\ &+ \frac{1}{8}\Phi_\alpha^{*\sigma\eta}\Phi_\gamma^{\sigma\nu} [M_\alpha^\dagger(\varepsilon)\Delta_{\gamma\beta}(\varepsilon)\bar{q}_\eta(\varepsilon)M_\beta(\varepsilon)]|_0^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Phi_\gamma^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\rho\eta} [M_\alpha^\dagger(\varepsilon) \bar{q}_\tau(\varepsilon) M_\beta(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & - \Phi_\alpha^{\sigma\eta} \Phi_\delta^{*\rho\eta} \Phi_\delta^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{\rho\tau} [q_{\mu'}^\dagger(\varepsilon) \bar{q}_\tau^\dagger(\varepsilon) q_\sigma^\dagger(\varepsilon) M_\alpha(\varepsilon) M_\gamma(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & - \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\rho} \Phi_\beta^{*\xi\tau} \Phi_\delta^{\xi\rho} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} [M_\alpha^\dagger(\varepsilon) M_\beta^\dagger(\varepsilon) \bar{q}_\tau(\varepsilon) M_\delta(\varepsilon) M_\gamma(\varepsilon)] \Big|_0^t \quad (\text{H.33})
 \end{aligned}$$

Expandindo a Eq. (H.33) em potência da função de onda até quarta ordem, temos

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_\nu^{(4)}(t) & = -\Phi_\alpha^{\mu'\nu} [q_{\mu'}^{\dagger(0)}(\varepsilon) \tilde{M}_\alpha^{(3)}(\varepsilon) + q_{\mu'}^{\dagger(3)}(\varepsilon) \tilde{M}_\alpha^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} [M_\gamma^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(2)}(\varepsilon) \tilde{M}_\alpha^{(0)}(\varepsilon) + M_\gamma^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) \tilde{M}_\alpha^{(2)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} [M_\gamma^{\dagger(2)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) \tilde{M}_\alpha^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu'\eta} \Phi_\beta^{\mu'\nu} [\tilde{M}_\alpha^{\dagger(2)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) \tilde{M}_\beta^{(0)}(\varepsilon) + \tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(2)}(\varepsilon) \tilde{M}_\beta^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu'\eta} \Phi_\beta^{\mu'\nu} [\tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) \tilde{M}_\beta^{(2)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\alpha^{\dagger(2)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) M_\gamma^{(0)}(\varepsilon) + \tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(2)}(\varepsilon) M_\gamma^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} [\tilde{M}_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) M_\gamma^{(2)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{\mu'\nu} [q_{\mu'}^{\dagger(1)}(\varepsilon) \Delta_{\gamma\alpha}^{(2)}(\varepsilon) M_\alpha^{(0)}(\varepsilon) + q_{\mu'}^{\dagger(0)}(\varepsilon) \Delta_{\gamma\alpha}^{(3)}(\varepsilon) M_\alpha^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\tau\lambda} \Phi_\beta^{\sigma\lambda} \Phi_\gamma^{\tau\nu} [M_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) q_\sigma^{\dagger(1)}(\varepsilon) M_\beta^{(0)}(\varepsilon) M_\gamma^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{3}{8} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} [M_\lambda^{\dagger(0)}(\varepsilon) \Delta_{\lambda\gamma}^{(2)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) M_\alpha^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} [M_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) \Delta_{\gamma\beta}^{(2)}(\varepsilon) \bar{q}_\eta^{(0)}(\varepsilon) M_\beta^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & + \frac{1}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} \Phi_\gamma^{*\rho\tau} \Phi_\beta^{\rho\eta} [M_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\tau^{(0)}(\varepsilon) M_\beta^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & - \Phi_\alpha^{\sigma\eta} \Phi_\delta^{*\rho\eta} \Phi_\delta^{\mu'\nu} \Phi_\gamma^{\rho\tau} [q_{\mu'}^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\tau^{\dagger(0)}(\varepsilon) q_\sigma^{\dagger(0)}(\varepsilon) M_\alpha^{(0)}(\varepsilon) M_\gamma^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \\
 & - \frac{3}{8} \Phi_\alpha^{*\sigma\rho} \Phi_\beta^{*\xi\tau} \Phi_\delta^{\xi\rho} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} [M_\alpha^{\dagger(0)}(\varepsilon) M_\beta^{\dagger(0)}(\varepsilon) \bar{q}_\tau^{(0)}(\varepsilon) M_\delta^{(0)}(\varepsilon) M_\gamma^{(0)}(\varepsilon)] \Big|_0^t \quad (\text{H.34})
 \end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (2.7), (2.55), (2.58), (2.62), (2.64), (2.67), (2.68), (2.74), (2.77), (G.18), (G.21) e (2.23) na Eq. (H.34), calculando de 0 a  $t$ , encontramos que

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_\nu^{(4)}(t) & = -\frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\sigma\xi} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_\beta^{\rho\xi} M_\gamma^\dagger q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\beta \cos t \\
 & - \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\rho\tau} \Delta(\mu'\nu; \sigma\xi) \Phi_\beta^{\rho\xi} M_\gamma^\dagger q_{\mu'}^\dagger q_\sigma \bar{q}_\tau M_\beta \cos t \\
 & - \frac{1}{4} \Phi_\alpha^{*\sigma\eta} \Phi_\gamma^{\sigma\nu} M_\beta^\dagger \Delta_{\beta\alpha} \bar{q}_\eta M_\gamma^{(0)}(t) \cos t \\
 & + \frac{1}{4} \Phi_\gamma^{*\sigma\eta} \Phi_\alpha^{\sigma\nu} M_\gamma^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\alpha\delta} \bar{q}_\eta M_\delta \cos t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \Phi_{\alpha}^{*\mu'\eta} \Delta(\mu'\nu; \sigma\tau) \Phi_{\gamma}^{\sigma\eta} M_{\alpha}^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\tau} M_{\gamma} \cos t \\
& + \Phi_{\delta}^{*\mu'\rho} \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} M_{\gamma}^{\dagger} \Delta_{\gamma\delta} \bar{q}_{\rho} M_{\alpha}^{(0)}(t) + \frac{1}{2} \Phi_{\delta}^{*\mu'\rho} \Phi_{\gamma}^{\mu'\nu} M_{\delta}^{\dagger} \Delta_{\gamma\alpha} \bar{q}_{\rho} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\mu'\rho} \Delta(\mu'\nu; \xi\tau) \Phi_{\beta}^{\xi\rho} M_{\alpha}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\beta}^{(0)}(t) \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{\rho\epsilon} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\beta}^{\sigma\tau} q_{\mu'}^{\dagger} q_{\sigma}^{\dagger} \bar{q}_{\epsilon}^{\dagger} M_{\alpha}^{(0)}(t) M_{\beta} \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{\rho\epsilon} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\beta}^{\sigma\tau} q_{\mu'}^{\dagger} q_{\sigma}^{\dagger} \bar{q}_{\epsilon}^{\dagger} M_{\alpha} M_{\beta}^{(0)}(t) \\
& - \frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\xi\sigma} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\alpha}^{\xi\tau} M_{\beta}^{\dagger} q_{\mu'}^{\dagger} q_{\rho} \bar{q}_{\sigma} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& - \frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\sigma\epsilon} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\alpha}^{\rho\epsilon} M_{\beta}^{\dagger} q_{\mu'}^{\dagger} q_{\sigma} \bar{q}_{\tau} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& - \frac{3}{8} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\eta} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} M_{\lambda}^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\lambda\gamma} \bar{q}_{\eta} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& - \frac{1}{8} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\alpha}^{\dagger(0)}(t) \Delta_{\gamma\beta} \bar{q}_{\eta} M_{\beta}^{(0)}(t) \\
& - \frac{1}{8} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\eta} \Delta(\sigma\nu; \rho\tau) \Phi_{\beta}^{\rho\eta} M_{\alpha}^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\tau} M_{\beta}^{(0)}(t) \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\xi\sigma} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\alpha}^{\xi\tau} M_{\beta}^{\dagger(0)}(t) q_{\mu'}^{\dagger} q_{\rho} \bar{q}_{\sigma} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\beta}^{*\sigma\epsilon} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\alpha}^{\rho\epsilon} M_{\beta}^{\dagger(0)}(t) q_{\mu'}^{\dagger} q_{\sigma} \bar{q}_{\tau} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& - \frac{1}{2} \Phi_{\delta}^{*\mu'\rho} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\tau} \Phi_{\beta}^{\sigma\rho} \Phi_{\alpha}^{\mu'\nu} M_{\delta}^{\dagger} M_{\gamma}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\beta} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& + \frac{1}{4} \Phi_{\delta}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{*\xi\rho} \Phi_{\beta}^{\xi\eta} \Phi_{\alpha}^{\sigma\nu} M_{\delta}^{\dagger(0)}(t) M_{\gamma}^{\dagger} \bar{q}_{\rho} M_{\beta} M_{\alpha}^{(0)}(t) \\
& - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\rho} \Phi_{\delta}^{*\xi\tau} \Phi_{\beta}^{\xi\rho} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\alpha}^{\dagger(0)}(t) M_{\delta}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\beta}^{(0)}(t) M_{\gamma}^{(0)}(t) \\
& + \frac{3}{8} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\rho} \Phi_{\beta}^{*\xi\tau} \Phi_{\delta}^{\xi\rho} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\alpha}^{\dagger(0)}(t) M_{\beta}^{\dagger(0)}(t) \bar{q}_{\tau} M_{\delta}^{(0)}(t) M_{\gamma}^{(0)}(t) \\
& - \frac{3}{8} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\beta}^{\dagger} \Delta_{\beta\alpha} \bar{q}_{\eta} M_{\gamma} - \frac{5}{8} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\eta} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\alpha}^{\dagger} \Delta_{\gamma\beta} \bar{q}_{\eta} M_{\beta} \\
& - \frac{3}{4} \Phi_{\alpha}^{*\mu'\eta} \Delta(\mu'\nu; \sigma\tau) \Phi_{\gamma}^{\sigma\eta} M_{\alpha}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\gamma} \\
& + \frac{1}{8} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\eta} \Delta(\sigma\nu; \rho\tau) \Phi_{\beta}^{\rho\eta} M_{\alpha}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\beta} \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\gamma}^{*\sigma\xi} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\beta}^{\rho\xi} M_{\gamma}^{\dagger} q_{\mu'}^{\dagger} q_{\sigma} \bar{q}_{\tau} M_{\beta} \\
& + \frac{1}{2} \Phi_{\gamma}^{*\rho\tau} \Delta(\mu'\nu; \sigma\xi) \Phi_{\beta}^{\rho\xi} M_{\gamma}^{\dagger} q_{\mu'}^{\dagger} q_{\sigma} \bar{q}_{\tau} M_{\beta} \\
& - \Phi_{\alpha}^{\rho\epsilon} \Delta(\mu'\nu; \rho\tau) \Phi_{\beta}^{\sigma\tau} q_{\mu'}^{\dagger} q_{\sigma}^{\dagger} \bar{q}_{\epsilon}^{\dagger} M_{\alpha} M_{\beta} \\
& + \frac{3}{8} \Phi_{\alpha}^{*\sigma\rho} \Phi_{\beta}^{*\xi\tau} \Phi_{\delta}^{\xi\rho} \Phi_{\gamma}^{\sigma\nu} M_{\alpha}^{\dagger} M_{\beta}^{\dagger} \bar{q}_{\tau} M_{\delta} M_{\gamma}
\end{aligned} \tag{H.35}$$

## Apêndice I

# Cálculo da Parte de Spin do Potencial $V_{\mu\nu}$

Neste apêndice vamos apresentar, em detalhes, o cálculo da parte de spin para o potencial  $V_{\mu\nu}$ , que é utilizado no decorrer deste trabalho. Como foi definido em (A.15), as matrizes de Pauli são escritas como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

e ainda temos que os espinores são definidos como

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \chi_2^c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

A parte de spin do potencial  $V_{\mu\nu}$ , é dada por

$$V_{s_\mu s_\nu}^s = \sum_{s, s'} \chi_{s'}^* \left[ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2m} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{2m} \right] \chi_s^c \quad (\text{I.3})$$

ou ainda

$$V_{s_\mu s_\nu}^s = \sum_{s, s'} \chi_{s'}^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_s^c \quad (\text{I.4})$$

onde  $\vec{P} = (\vec{p} - \vec{p}')/2m$ . Também sabemos que

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{P} = \sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z. \quad (\text{I.5})$$

De posse dessas duas relações e expandindo este termo, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{s, s'} \chi_{s'}^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_s^c &= \chi_1^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_1^c + \chi_1^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_2^c + \chi_2^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_1^c + \chi_2^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_2^c \\ &= \chi_1^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_1^c + \chi_1^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_2^c \\ &+ \chi_2^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_1^c + \chi_2^* (\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_2^c \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Avaliando termo a termo, temos:

\*O primeiro termo  $\chi_1^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z)\chi_1^c$  é dado por

$$\chi_1^*(\sigma_x P_x)\chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = P_x \quad (\text{I.7})$$

$$\chi_1^*(\sigma_y P_y)\chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_y = -iP_y \quad (\text{I.8})$$

$$\chi_1^*(\sigma_z P_z)\chi_1^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_z = 0 \quad (\text{I.9})$$

Assim, dos resultados obtidos em (I.7), (I.8) e (I.9), temos que o primeiro termo fica

$$\chi_1^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z)\chi_1^c = P_x - iP_y \quad (\text{I.10})$$

\*O segundo termo  $\chi_1^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z)\chi_2^c$  é dado por

$$\chi_1^*(\sigma_x P_x)\chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = 0 \quad (\text{I.11})$$

$$\chi_1^*(\sigma_y P_y)\chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_y = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$\chi_1^*(\sigma_z P_z)\chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_z = -P_z \quad (\text{I.13})$$

Logo, dos resultados obtidos em (I.11), (I.12) e (I.13), temos que o segundo termo fica

$$\chi_1^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z)\chi_2^c = -P_z \quad (\text{I.14})$$

\*O terceiro termo  $\chi_2^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z)\chi_1^c$  é dado por

$$\chi_2^*(\sigma_x P_x)\chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_x = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\chi_2^*(\sigma_y P_y)\chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_y = 0 \quad (\text{I.16})$$

$$\chi_2^*(\sigma_z P_z) \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} P_z = -P_z \quad (\text{I.17})$$

Logo, dos resultados obtidos em (I.15), (I.16) e (I.17), temos que o terceiro termo fica

$$\chi_1^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_2^c = -P_z \quad (\text{I.18})$$

\*E por fim, o quarto termo  $\chi_2^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_2^c$  é dado por

$$\chi_2^*(\sigma_x P_x) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_x = -P_x \quad (\text{I.19})$$

$$\chi_2^*(\sigma_y P_y) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_y = -iP_y \quad (\text{I.20})$$

$$\chi_2^*(\sigma_z P_z) \chi_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} P_z = 0 \quad (\text{I.21})$$

Assim, dos resultados obtidos em (I.19), (I.20) e (I.21), temos que o quarto termo fica

$$\chi_2^*(\sigma_x P_x + \sigma_y P_y + \sigma_z P_z) \chi_2^c = -(P_x + iP_y) \quad (\text{I.22})$$

E, finalmente, levando as eqs. (I.10), (I.14), (I.18) e (I.22) em (I.6), encontramos

$$\sum_{s,s'} \chi_{s'}^* (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \chi_s^c = P_x - iP_y - P_z - P_z - P_x - iP_y = -2(P_z + iP_y) \quad (\text{I.23})$$

# Referências

- [1] GODFREY, S.; NAPOLITANO, J., Light-meson spectroscopy, *Rev. Mod. Phys.* v. 71, n. 5, Out., 1411-1462, 1999.
- [2] AUGUSTIN, J.-E.; *et al* Discovery of a Narrow Resonance in  $e^+e^-$  Annihilation, *Phys. Rev. Lett.* 33, 1406 Nov. 1974.
- [3] AUBERT, B.; *et al* [BABAR Collaboration], Observation of a Narrow Meson State Decaying to  $D_s^+ \pi^0$  at a Mass of 2.32 GeV/ $c^2$ , *Phys. Rev. Lett.* 90, 242001 Apr. 2003.
- [4] BESSON, D.; *et al* (CLEO Collaboration) Observation of a Narrow Resonance of Mass 2.46 GeV/ $c^2$  Decaying to  $D_s^* + \pi^0$  and Confirmation of the  $D_s J^*(2317)$  State *Phys.Rev. D* 68, 032002 Aug. 2003.
- [5] GODFREY, S.; ISGUR, I., Mesons in a relativized quark model with chromodynamics *Phys.Rev. D* 32, 189 Maio 1985.
- [6] BARNES, T.; CLOSE, F. E.; LIPKIN, H. J., Implications of a DK molecule at 2.32 GeV, *Phys. Rev. D* 68, 054006 Set. 2003.
- [7] TANI, S. Scattering Involving a Bound State. *Phys. Rev.*, New York, v. 117, n. 1, p. 252-260, Jan. 1960.
- [8] GIRARDEAU, M. D. Second-Quantization Representation for Systems of Atoms, Nuclei, and Electrons. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 27, n. 21, p. 1416-1419, Nov. 1971.
- [9] GIRARDEAU, M. D. Second-Quantization Representation for a Nonrelativistic System of Composite Particles. I. Generalized Tani Transformation and its Iterative Evaluation. *J. Math. Phys.*, New York, v. 16, n. 9, p. 1901-1919, Sep. 1975.
- [10] GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D. Fock-Tani Representation for the Quantum Theory of Reactive Collisions. *Physica A*, Amsterdam, v. 97, n. 1, p. 42-74, Jun. 1979.

- [11] GILBERT, J. D. Second Quantized Representation for a Model System with Composite Particles. *J. Math. Phys.*, New York, v. 18, n. 4, p. 791-805, Apr. 1977.
- [12] GIRARDEAU, M. D. Fock-Tani representation for positron-hydrogen scattering. *Phys. Rev. A*, New York, v 26, n. 1, p. 217-236, Jul. 1982.
- [13] OJHA, P. C.; GIRARDEAU, M. D.; GILBERT, J. D.; STRATON, J. C. Fock-Tani transformation and a first-order theory of charge transfer. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 33, n. 1, p. 112-123, Jan. 1986.
- [14] STRATON, J. C. Reduced-mass Fock-Tani representations for  $a^+ + (b^+c^-) \rightarrow (a^+c^-) + b^+$  and first-order results for  $\{abc\} = \{ppe, epe, \mu p \mu, \mu d \mu, \text{ and } \mu t \mu\}$ . *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 35, n. 9, p. 3725-3740, May 1987.
- [15] STRATON, J. C.; GIRARDEAU, M. D. Post-prior symmetrical first-order T matrix for charge transfer. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 40, n. 6, p. 2991-3001, Sept. 1989.
- [16] LO, C.; GIRARDEAU, M. D. Symmetric orthogonalized-plane-wave Born approximation for charge exchange. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 41, n. 1, p. 158-164, Jan. 1990.
- [17] STRATON, J. C. Fock-Tani Hamiltonian for reactions involving two-electron atoms. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 43, n. 11, p. 6018-6026, Jun. 1991.
- [18] WEINBERG, S. Elementary Particle Theory of Composite Particles. *Phys. Rev.*, New York, v. 130, n. 2, p. 776-783, Apr. 1963.
- [19] WEINBERG, S. Quasiparticles and the Born Series. *Phys. Rev.*, New York, v. 131, n. 1, p. 440-460, July 1963.
- [20] GEIGER, P.; SWANSON, E. S. *Phys. Rev. D*, New York, v. 50, p. 6855, 1994.
- [21] MICU, L., Decay rates of meson resonances in a quark model *Nuclear Physics B* 10, 521 1969.
- [22] LE YAOUANC, A.; OLIVIER, L.; PÈNE, O.; RAYNAL J. "Naive" Quark-Pair-Creation Model of Strong-Interaction Vertices, *Phys. Rev. D* 8, 2223 1973.
- [23] KOKOSKI, R.; ISGUR, N *Phys. Rev. D*, New York, v. 35, p. 907, 1987.
- [24] ACKLEH, E. S.; BARNES, T.; SWANSON, E. S. On the mechanism of open-flavor strong decays. *Phys. Rev. D*, New York, v. 54, n. 11 p. 6711-6829, 1996.
- [25] ALBRECHT, H.; *et al.* (ARGUS Collaboration), *Z. Phys. C* 58, 61 1993.
- [26] YAO W. M.; *et al.*(Particle Data Group), *Journal of Physics G* 33, 1 (2006).

- [27] HADJIMICHEF, D. *Formalismo de Fock-Tani para a Física Hadrônica*. 1995. 131 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1995.
- [28] SZPIGEL, S. *Interação Méson-Méson no Formalismo Fock-Tani*. 1995. 183 p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.
- [29] GIRARDEAU, M. D.; KREIN, G.; HADJIMICHEF, D. Field-Theoretic Approach for Systems of Composite Hadrons. *Mod. Phys. Lett. A*, Singapore, v. 11, n. 14, p. 1121-1129, May. 1996.
- [30] HADJIMICHEF, D.; KREIN G.; SZPIGEL S.; DA VEIGA, J. S. Mapping of Composite Hadrons into Elementary Hadrons and Effective Hadronic Hamiltonians. *Ann. Phys.*, New York, v. 268, n. 1, p. 105-148, Mar. 1998.
- [31] HADJIMICHEF, D.; HAIDENBAUER, J.; KREIN, G., *Phys. Rev. C*, v.66, 055214 2002.
- [32] HADJIMICHEF, D.; HAIDENBAUER, J.; KREIN, G. Long- and medium-range components of the nuclear force in quark-model based calculations. *Phys. Rev. C*, Melville, v. 63, n. 3, 035204 8p., Feb. 2001.
- [33] MÁRIO LUIZ LOPES DA SILVA, dissertação de Mestrado, *Uma Nova Assinatura para Glueballs*, Instituto de Física da Universidade Federal do Sul 2004.
- [34] Da SILVA, M. L. L.; HADJIMICHEF, D.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; BODMANN, B. E. J., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. G* 32 475, 2006.
- [35] GIRARDEAU, M.D. e SAGE, M.L. , *Physica* 32, 1521 1966.
- [36] GIRARDEAU, M.D., *Phys. Rev. A* 26, 217 1982.
- [37] Da SILVA, D. T.; Da SILVA, M. L. L.; HADJIMICHEF, D.; VASCONCELLOS, C. A. Z.; Meson decay in the Fock-Tani formalism. Oct 2005. 5pp. Apresentado na "11th International Conference on Hadron Spectroscopy (Hadron05)", Rio de Janeiro, Brazil, 21-26 Ago 2005. Arquivo e-Print: hep-ph/0510387.