

**UM MODELO DE FISSURA INCORPORADA PARA ANÁLISE
DA FISSURAÇÃO EM PEÇAS DE CONCRETO ARMADO
FLETIDAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Daiane de Sena Brisotto

Porto Alegre
Setembro 2006

DAIANE DE SENA BRISOTTO

**UM MODELO DE FISSURA INCORPORADA PARA ANÁLISE
DA FISSURAÇÃO EM PEÇAS DE CONCRETO ARMADO
FLETIDAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia na modalidade Acadêmico

Porto Alegre
Setembro de 2006

DAIANE DE SENA BRISOTTO

**UM MODELO DE FISSURA INCORPORADA PARA ANÁLISE
DA FISSURAÇÃO EM PEÇAS DE CONCRETO ARMADO
FLETIDAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 01 de setembro de 2006

Prof. Eduardo Bittencourt

Dr. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Prof.a Virgínia Maria R. d'Avila

Dra. pela Univ. Federal do Rio Grande do Sul
Co-Orientador

Prof. Fernando Schnaid

Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)

Dr. pelo PPGEC / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal (UFRGS)

Ph.D. pela North Carolina State University

Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)

Dr. pelo PPGEC / Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho a meus pais,
João e Iolanda e aos meus irmãos, Giovane, Daniele e
Geison pelo apoio e compreensão durante este período.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, por ter me dado força de vontade para chegar ao fim de mais uma etapa na vida profissional.

Aos professores Eduardo Bittencourt e Virgínia Maria Rosito d'Avila pela orientação e incentivo recebidos. Pela compreensão e satisfação de trabalharmos juntos.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

A todos os professores e funcionários do PPGEC/UFRGS e a todos responsáveis do CEMACOM/UFRGS pela colaboração prestada durante o período de desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais e irmãos, que apesar da distância, estiveram sempre ao meu lado me incentivando.

Aos meus amigos e colegas pelo companheirismo, ajuda e carinho dedicados.

RESUMO

BRISOTTO, D.S. **Um modelo de fissura incorporada para a análise da fissuração em peças de concreto armado fletidas via Método dos Elementos Finitos.** 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A análise da formação e crescimento de fissuras em peças de concreto armado permanece como uma das principais dificuldades no campo da engenharia estrutural. Considerando que as fissuras têm uma influência muito grande no comportamento estrutural global, estudos para prever e controlar a fissuração do concreto são de essencial importância.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo numérico do tipo incorporado para representar as fissuras em peças de concreto armado submetidas aos esforços de flexão e corte, ou seja, um modelo que seja capaz de simular, além das fissuras perpendiculares ao eixo da peça, fissuras inclinadas.

Os modelos de fissura incorporada se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões. No modelo empregado neste trabalho, a fissura é representada através de uma descontinuidade no campo interno de deslocamentos do elemento.

O modelo incorporado implementado é uma continuação do trabalho desenvolvido por d'Ávila, que baseou-se no modelo de Dvorkin Cuitiño e Gioia que, por sua vez, não inclui a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento. A interação entre as barras de aço e o concreto é simulada através um modelo de transferência de tensão por aderência entre os dois materiais, conforme Russo, Zingone e Romano e FIB - Bulletin 10.

Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen. Já para representar as barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey, que permite uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto. O modelo constitutivo adotado para a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento.

Foi possível simular a fissuração em flexão e corte em vigas de concreto armado com boa correlação com resultados experimentais. Tais situações não poderiam ser analisadas pelo modelo básico sem as modificações propostas nesta dissertação.

Palavras-chave: concreto armado; fissuração; método dos elementos finitos; modelo incorporado.

ABSTRACT

BRISOTTO, D.S. **An embedded crack model for reinforced concrete cracking analysis in bending by the Finite Element Analysis.** 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The analysis of the formation and growth of cracks in reinforced concrete members remains as one of the main difficulties in the field of structural engineering. Considering that the crack has a considerable influence in the global structural behavior, studies to predict and to control concrete cracking are of essential importance.

The aim of this work is to present a numerical model of the embedded type to represent the cracks in reinforced concrete members under bending and shearing efforts, i. e. , a model that is capable to simulate not only cracks that are perpendicular to the axle of the members but also inclined cracks.

The embedded crack models are based on the concept of incorporated discontinuities inside of standard finite elements. In the model used in this work, the crack is represented by a discontinuity in the internal field of the element displacements.

The embedded model proposed is a continuation of the work developed by d'Avila, which is based on the model of Dvorkin, Cuitiño e Gioia, that does not consider the inclusion of the reinforced contribution in the internal force equilibrium of the element. A bond stress-transfer approach is used to include this reinforcement contribution.

To represent the behavior of the uncracked concrete, the Ottosen constitutive model was used. The embedded model presented by Elwi and Hrudey was employed to represent the reinforcement bars, that allows an arbitrary disposal of the bars of steel inside of the concrete elements. The constitutive model adopted for reinforcement is elasto-plastic with hardening.

It was possible to simulate the cracking in bending and shearing in reinforced concrete beams with good agreement with experimental results. These cases could not be analyzed by the basic model without the present proposed modifications.

Key-words: reinforced concrete; cracking; finite element modeling; embedded model.

SUMÁRIO

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
1 INTRODUÇÃO	p.1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	p.1
1.2 OBJETIVO DO TRABALHO	p.2
1.3 METODOLOGIA APLICADA	p.3
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	p.4
2.1 INTRODUÇÃO	p.4
2.2 MODELOS DE REPRESENTAÇÃO DA FISSURA	p.6
3 O MODELO EMPREGADO	p.11
3.1 MODELOS CONSTITUTIVOS	p.12
3.1.1 Modelo constitutivo para o concreto	p.12
3.1.2 Modelo constitutivo para o aço	p.13
3.1.3 Modelos constitutivos para a fissura	p.14
3.1.3.1 Amolecimento linear	p.14
3.1.3.2 Amolecimento exponencial	p.15
3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA	p.16
3.3 LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES	p.19
3.4 MODELO DE TRANFERÊNCIA DE TENSÃO POR ADERENCIA	p.23
3.4.1 Análise da fissuração progressiva da peça	p.31

3.5 MODELO DE FISSURA INCORPORADA IMPLEMENTADO	p.34
3.5.1 Modelo de Dvorkin, Cuitino e Gioia	p.35
3.5.2 O modelo de d'Avila	p.41
3.5.3 Modelo Proposto	p.45
3.5.3.1 Limitações do modelo de d'Avila	p.46
3.5.3.2 Alterações propostas	p.47
4 RESULTADOS	p.55
4.1 EXEMPLO 1	p.55
4.2 EXEMPLO 2	p.59
5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	p.71
5.1 CONCLUSÕES	p.71
5.2 SUGESTÕES PRA TRABALHOS FUTUROS	p.72
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	p.73

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1: Definição do índice de não-linearidade	p.12
Figura 3.2: Modelo constitutivo para o aço	p.14
Figura 3.3: Amolecimento linear	p.14
Figura 3.4: Amolecimento exponencial	p.15
Figura 3.5: Barra de armadura no interior de um elemento de concreto	p.17
Figura 3.6: Coordenadas ao longo do eixo da armadura	p.17
Figura 3.7: Domínio contínuo	p.19
Figura 3.8: Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional de Energia Potencial Total	p.21
Figura 3.9: Domínio com uma superfície interna	p.21
Figura 3.10: Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total com o campo adicional de tração na superfície interna	p.22
Figura 3.11: Peça de concreto armado tracionada axialmente	p.24
Figura 3.12: Tensões e deformações na barra de aço e na camada de concreto adjacente	p.25
Figura 3.13: Relação tensão de aderência x escorregamento relativo	p.27
Figura 3.14: Distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço a) peça longa; b) peça curta.....	p.30
Figura 3.15: Fissuração em uma peça longa	p.32
Figura 3.16: Fissuração em uma peça curta	p.32
Figura 3.17: Elemento QMITC a) nós da interpolação de deslocamentos; b) pontos de interpolação das deformações	p.35
Figura 3.18: Elemento com a linha de descontinuidade	p.37
Figura 3.19: Peça de concreto armado com elementos sem armadura	p.46

Figura 3.20: Procedimento adotado a) configuração inicial; b) configuração final	p.47
Figura 3.21: Divisão dos grupos de fissuração a) grupo 1; b) grupo 2	p.48
Figura 3.22: Situações possíveis para a fissura interceptar a armadura	p.50
Figura 3.23: Procedimento adotado a) força do aço no domínio do elemento; b) força do aço na fissura	p.51
Figura 4.1: Características geométricas da viga analisada	p.55
Figura 4.2: Relação constitutiva para o amolecimento na fissura do modelo incorporado	p.56
Figura 4.3: Discretização adotada para a análise numérica – Malha 1	p.57
Figura 4.4: Discretização adotada para a análise numérica – Malha 2	p.57
Figura 4.5: Diagrama carga aplicada x deslocamento do nó central	p.58
Figura 4.6: Variação da tensão no concreto ao longo da peça para as cargas de 23 kN, 53 kN , e 93 kN, respectivamente	p.59
Figura 4.7: Detalhamento das vigas com diferentes larguras de alma	p.60
Figura 4.8: Discretização adotada para a análise numérica	p.61
Figura 4.9: Configuração final das fissuras para as vigas ET1, ET2, ET3 e ET4	p.62
Figura 4.10: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET1	p.62
Figura 4.11: Tensão no aço x carga aplicada	p.63
Figura 4.12: Abertura total das fissuras x carga aplicada	p.64
Figura 4.13: Número total de fissuras do elemento 17 x carga aplicada	p.64
Figura 4.14: Abertura de uma fissura do elemento 17 x carga aplicada	p.65
Figura 4.15: Tensão transmitida na fissura no elemento 17 x carga aplicada	p.65
Figura 4.16: Comparação entre a abertura total das fissuras, na altura da armadura tracionada, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto	p.66

Figura 4.17: Comparação entre as aberturas máximas de fissura, na altura da armadura tracionada, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto	p.66
Figura 4.18: Comparação das tensões nos estribos, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto	p.67
Figura 4.19: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET2	p.68
Figura 4.20: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET2, para o trecho analisado pelo modelo proposto	p.68
Figura 4.21: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET3	p.69
Figura 4.22: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET3, para o trecho analisado pelo modelo proposto	p.69
Figura 4.23: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET4	p.70
Figura 4.24: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET4, para o trecho analisado pelo modelo proposto	p.70

LISTA DE SÍMBOLOS

A_c	Área da seção transversal do concreto
A_s	Área da seção transversal do aço
\mathbf{B}	Matriz das derivadas das funções de interpolação padrões
\mathbf{B}_s	Vetor das relações deformação-deslocamento para a armadura
\mathbf{D}^e	Matriz das constantes elástica
\mathbf{D}^{cr}	Matriz de rigidez tangente da linha de localização
E_s	Módulo de deformação longitudinal do aço
FCR	Força no concreto transmitida na fissura
FCT	Força total transmitida na fissura
FEL	Força no concreto no domínio do elemento
FES	Força no aço no domínio do elemento
FET	Força total no domínio do elemento
FS	Força no aço transmitida na fissura
\mathbf{F}	Vetor forças internas do elemento
$\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_i$	Vetor forças internas do elemento referentes aos nós externos e internos
G_f	Energia de fratura
H_j	Funções de interpolação da armadura
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana
\mathbf{K}^*	Matriz de rigidez tangente
\mathbf{K}_c	Matriz de rigidez do elemento de concreto
\mathbf{K}_s	Matriz de rigidez da armadura
$\mathbf{K}_{ee}, \mathbf{K}_{ii}$	Submatrizes de rigidez do elemento
$\mathbf{K}_{ei}, \mathbf{K}_{ie}$	
NF	Número de fissuras por elemento

N	Matriz de interpolação padrão
P	Matriz que seleciona as componentes de tensão que serão transmitidas pela fissura
R	Matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade para o sistema global
S_j	Superfície interna
S_L	Superfície da fissura
S_t	Superfície onde as forças de superfície são impostas
S_u	Superfície onde o corpo está sujeito à deslocamentos prescritos
UC	Valor da abertura da fissura por elemento
UC1	Valor da abertura de cada uma das fissuras
U	Vetor deslocamento
U^e	Vetor deslocamentos nodais
V	Volume do elemento
V_1, V_2	Subdomínios dos elementos
$\hat{\mathbf{b}}$	Força de volume
$\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$	Vetor dos deslocamentos para os subdomínios V_1 e V_2
\mathbf{d}_N	Deslocamento que causa deformação do elemento
e	Vetor dos modos de deformação adicionais
\mathbf{e}'	Vetor das componentes no sistema local da descontinuidade do vetor e
f_c	Resistência à compressão uniaxial do concreto
f_{ck}	Resistência característica do concreto
f_t	Resistência à tração uniaxial do concreto
f_y	Tensão de escoamento do aço
\mathbf{f}_{ext}	Vetor forças externas padrão
\mathbf{f}_{int}	Vetor forças internas
p	Carga externa

s	Escorregamento relativo entre a barra de armadura e o concreto adjacente
s_0	Escorregamento entre o concreto e a armadura na extremidade carregada
\mathbf{t}	Forças transmitidas através da fissura
\mathbf{t}_j	Forças de superfície na superfície interna
$\hat{\mathbf{t}}$	Forças de superfície impostas
\mathbf{u}	Campo de deslocamentos do elemento
$\hat{\mathbf{u}}$	Deslocamentos impostos
x, y	Coordenadas cartesianas
x_{Rcrack}	Distância da fissura à extremidade carregada
w, w_c	Abertura da fissura
w_i	Fator de peso da integração numérica
w_{max}	Máxima abertura de fissura que permite transferência de tensão
Ψ	Coefficiente que determina a relação entre a tensão média e a máxima tensão na camada de concreto adjacente à armadura
Σ_0	Perímetro da seção transversal da armadura
β	Índice de não-linearidade
χ	Coordenada normalizada da armadura
ε	Deformação longitudinal
ε_c	Deformação longitudinal no concreto
ε_{ct}	Deformação de fissuração do concreto
ε_{cmax}	Deformação máxima do concreto
ε_s	Deformação longitudinal da armadura
ε_{sm}	Deformação longitudinal média da armadura
ε_{s0}	Deformação no aço na extremidade carregada
$\varepsilon_{s0crack}$	Deformação no aço na extremidade carregada que determina a fissuração do concreto
$\hat{\varepsilon}_{ij}$	Componentes naturais covariantes do tensor deformação

ε	Campo de deformações do elemento
ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Taxa de armadura na zona tracionada
σ	Tensão
σ_{cm}	Tensão média no concreto
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais no concreto
σ_s	Tensão no aço
σ	Campo de tensões do elemento
σ_c	Tensor de tensão no concreto
τ	Tensão de aderência
ξ, η	Coordenadas normalizadas

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em estruturas de concreto, o processo de evolução da fissuração devido ao carregamento externo é caracterizado pelo crescimento de microfissuras através da argamassa e a junção destas em microfissuras. Estas microfissuras permanecem descontínuas durante um período, permitindo a transferência de esforços através das mesmas. Isto faz com que o concreto não rompa quando a tensão máxima é alcançada, mas sim que ele sofra um decréscimo gradual de tensão com o aumento de deformação, chamado amolecimento.

O processo de fissuração em estruturas de concreto simples evolui de forma diferenciada do processo de fissuração em estruturas de concreto armado.

No concreto simples, quando as microfissuras se formam, elas tendem a se localizar dentro de uma faixa estreita, chamada de banda de fissuração. Assim, em uma análise numérica via Método dos Elementos Finitos, os resultados obtidos podem depender significativamente do tamanho do elemento finito utilizado para representar esta banda de fissuração. Uma forma de tornar os resultados objetivos é aplicar os princípios da mecânica da fratura ao longo da análise.

Na quase totalidade dos casos encontrados na prática, a inclusão da armadura em uma estrutura de concreto faz com que ela se torne insensível aos princípios da mecânica da fratura. A explicação para este fato é que, no concreto armado, a aderência possibilita a transmissão da tensão de tração do concreto para a armadura e vice-versa, fazendo com que o concreto entre fissuras permaneça com uma significativa capacidade de absorver tensões. Este fenômeno é chamado de “*tension-stiffening*”, pois acarreta uma resposta mais rígida do que a resposta de comportamento frágil. Isto faz com que as fissuras, na sua formação, não se concentrem dentro de uma faixa estreita, mas que se distribuam ao longo da estrutura. Assim, a análise por elementos finitos de estruturas de concreto armado via mecânica do contínuo convencional é bem sucedida.

As duas formas clássicas usadas, em análise via método dos elementos finitos, para representar a fissuração em estruturas de concreto são: modelar as fissuras de forma discreta ou de forma distribuída. Recentemente, modelos de *fissura incorporada* têm sido desenvolvidos como uma alternativa para a simulação numérica da fissuração em estruturas de concreto simples e armado.

1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

As fissuras causadas por flexão são as mais frequentes em concreto armado. Elas começam no bordo tracionado das peças e avançam em direção à linha neutra. Este tipo de fissura tem abertura variável: são mais abertas no bordo tracionado da seção e vão diminuindo de abertura à medida que chegam perto da linha neutra. As fissuras causadas por esforço cortante são, em geral, inclinadas (entre 30° e 45°, aproximadamente), atravessam toda a peça, e são localizadas próximas aos apoios dos elementos (regiões de força cortante grande).

O modelo incorporado implementado é uma continuação do trabalho desenvolvido por d'Ávila (2003), em sua tese de doutorado, que por sua vez baseou-se no modelo de Dvorkin et al. (1990), o qual não inclui a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento. A inclusão da parcela da armadura no modelo implementado por d'Ávila, é feita através de um modelo de transferência de tensão por aderência, conforme Russo et al. (1990).

Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen (1979). Já para representar as barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989). O modelo constitutivo adotado para a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento. O algoritmo incremental iterativo empregado é do tipo Newton-Raphson modificado, porém com o passo de incremento de carga determinado através do Método de Controle por Deslocamentos Generalizado, conforme Yang e Shieh (1990).

O modelo em que este trabalho de baseia, proposto por d'Ávila (2003), é capaz de simular corretamente o comportamento de peças de concreto armado tracionadas. Porém, como só consegue simular a transferência de tensões em fissuras normais ao eixo longitudinal das barras de armadura, quando as peças estão submetidas à flexão ou ao corte, o modelo é

bastante limitado, não sendo capaz de representar a transferência de tensões em fissuras inclinadas.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo numérico, em linguagem FORTRAN, que seja capaz de simular o comportamento de fissuração em peças de concreto armado submetidas aos esforços de flexão e corte, através de um modelo de fissura do tipo incorporado. Além disso, pretende-se investigar a transferência de tensão através da fissura pelos elementos sem armadura em peças de concreto armado, e também a contribuição da armadura transversal no fenômeno da fissuração. O processo numérico utilizado é o Método dos Elementos Finitos.

1.3 METODOLOGIA EMPREGADA

Inicialmente, no capítulo 2, é feito um histórico da modelagem da fissuração em estruturas de concreto via Método dos Elementos Finitos, através de modelos incorporados. Ao mesmo tempo em que se desenvolve esta revisão tem-se o objetivo de situar o leitor em relação ao tema desta dissertação. Assim, é possível um entendimento mais claro das limitações e das potencialidades do presente tema.

A seguir, no capítulo 3, é apresentada a formulação referente ao modelo de fissura incorporada. Inicialmente, é feita uma descrição dos modelos empregados para simular o comportamento do concreto e das barras de armadura. Posteriormente, é apresentado o modelo incorporado para representar o comportamento do concreto fissurado: o modelo original de Dvorkin et al. (1990), o modelo modificado por d'Avila (2003) e as alterações propostas neste trabalho pelo modelo proposto.

No capítulo 4, são mostrados os resultados obtidos, bem como comparações com os resultados de um programa que representa a fissura através de um modelo do tipo distribuído, também implementado por d'Avila (2003), e com resultados experimentais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo deste capítulo é fazer uma breve revisão bibliográfica dos modelos existentes para representar a fissuração no concreto, com atenção especial aos modelos do tipo incorporado, que será o utilizado neste trabalho. Apesar de ainda não existir muitos trabalhos que contemplem o assunto da fissuração através do modelo incorporado, provavelmente existe uma gama maior de informações do que estas aqui referenciadas. Contudo, as mesmas podem ser tomadas como um proveitoso ponto de partida para um estudo mais aprofundado.

2.1 INTRODUÇÃO

A perda da integridade estrutural no concreto devido à fissuração tem atraído muita atenção dos engenheiros e pesquisadores nos últimos anos, já que, devido à natureza localizada, a correta modelagem da fissura é um tópico difícil. Particularmente, três aspectos têm especial importância: como representar a fissura; como simular o comportamento do material fissurado; e, como representar a armadura.

Historicamente, em análise via Método dos Elementos Finitos de estruturas de concreto, as fissuras têm sido representadas de duas formas distintas: discreta ou distribuída.

Um modelo de fissura discreta trata a fissura como uma entidade geométrica. A fissura é modelada pela separação dos lados dos elementos. No método dos elementos finitos, a menos que a trajetória da fissura seja conhecida antecipadamente, as fissuras discretas são modeladas alterando-se a malha para suportar a propagação das mesmas, o que dificulta a utilização destes modelos quando se têm várias fissuras espalhadas ao longo da peça, como no caso de estruturas de concreto armado.

Nos modelos de fissuração distribuída, a fissura é modelada através de uma alteração na equação constitutiva do contínuo nas vizinhanças da fissura. A descontinuidade do campo de deslocamentos causada pela fissura é espalhada ao longo do elemento. Embora sejam usados com sucesso na análise da maioria das estruturas de concreto armado, os modelos de fissura

distribuída apresentam algumas deficiências quando empregados para estudar situações de fraturamento localizado que ocorrem, principalmente, nas estruturas de concreto simples.

Recentemente, modelos de fissura incorporada têm sido desenvolvidos como uma alternativa para a simulação numérica da fissuração em estruturas de concreto simples e armado. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrões. Portanto, combinam os pontos favoráveis das duas técnicas anteriores: as fissuras podem se propagar em qualquer direção e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada. Basicamente, estes modelos podem ser divididos em três grandes grupos: nos que utilizam elementos híbridos; nos que incorporam uma descontinuidade de deformação; e, nos que incorporam uma descontinuidade de deslocamentos.

Outro aspecto importante na análise numérica de estruturas de concreto armado é a escolha de qual modelo utilizar para simular o comportamento pós-início de fissuração de peças de concreto armado. Existem vários modelos teóricos, que podem ser divididos, genericamente, em três grupos: modelos semi-empíricos; modelos com transferência de tensão; e, modelos baseados na mecânica da fratura. Nos modelos dos dois primeiros grupos, a fissuração do material é governada pela resistência à tração do concreto; já nos modelos do terceiro grupo, é a energia de fratura o parâmetro governante.

Como são baseados em valores experimentais, os modelos semi-empíricos apresentam a vantagem de poder simular não só os vários fenômenos que acontecem durante a fissuração do concreto armado, tais como o amolecimento do concreto e a contribuição do concreto entre fissuras ("*tension-stiffening*"), mas também a interação entre estes fenômenos. Contudo, quando estes modelos são empregados, não se consegue analisar separadamente a influência de cada um destes fenômenos na resposta global da estrutura.

Os modelos com transferência de tensão se baseiam na transferência de tensão por aderência entre o aço e o concreto. A formação de novas fissuras, até que uma configuração final seja estabelecida, está associada ao fato de se ter espaço suficiente para a transferência de tensão por aderência entre os materiais. Já os modelos baseados na Mecânica da Fratura se baseiam em um critério energético para a propagação das fissuras.

A escolha de qual grupo utilizar está vinculada ao tipo de problema a ser analisado. Na análise da fissuração de peças de concreto simples, onde normalmente se forma uma fissura predominante, a energia de fratura deve ser o parâmetro governante. Já em peças de concreto armado, pode-se obter bons resultados empregando a resistência à tração como parâmetro governante.

Finalmente, também a representação das barras de aço que compõem a armadura, em análises via Método dos Elementos Finitos, pode ser feita de várias maneiras distintas. Na representação de forma distribuída, o concreto e o aço são combinados e tratados como um material composto. Quando a armadura é representada discretamente, os nós das barras da armadura devem coincidir com os nós dos elementos de concreto, o que causa restrições na geração da malha de elementos finitos. Na representação de forma incorporada, a armadura é considerada como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. As barras são representadas por nós independentes daqueles usados pelos elementos de concreto, o que possibilita que as barras de aço possam ocupar qualquer posição dentro destes elementos.

2.2 MODELOS PARA REPRESENTAR A FISSURA

A seguir, são apresentados alguns modelos incorporados existentes na literatura para simular o comportamento do concreto armado fissurado via Método dos Elementos Finitos.

Em 1981, Grootenboer, Leijten e Blaauwendraad (1981) apresentaram um modelo numérico para estruturas de concreto armado sujeitas ao estado plano de tensão, no qual as fissuras podem se desenvolver no interior dos elementos em qualquer direção e são contínuas sobre o contorno. Os elementos de concreto são elementos híbridos triangulares, nos quais deslocamentos são interpolados no contorno para cada lado do elemento, usando graus de liberdade separados para cada lado. Desta forma, o equilíbrio inter-elementar de tensões ao longo do elemento pode ser melhorado. O modelo considera uma camada de vinculação, entre o concreto e o aço, capaz de representar o escorregamento relativo entre a armadura e o concreto circundante. Na implementação computacional, esta camada de vinculação é agrupada com o elemento de aço, resultando um elemento de barra combinado. Este elemento é conectado com os elementos de concreto nos nós. Isto implica que dois elementos de concreto em ambos os lados do elemento da barra deverão ter os mesmos deslocamentos nesta

posição. O modelo constitutivo para o concreto consiste de uma relação tensão-deformação não-linear, um critério de fissuração e um critério de esmagamento do concreto em compressão. É considerado um modelo de engrenamento do agregado na fissura. Considera-se um comportamento elastoplástico para o aço, assim como para a camada de contato entre concreto e armadura. Para as forças de pino, é adotada uma relação elastoplástica ideal entre deslocamentos relativos perpendicular à linha central da barra e forças atuando nesta linha.

Em 1987, um trabalho seminal para materiais com amolecimento foi publicado por Ortiz, Leroy e Needleman (1987). Eles propuseram modificar o campo de deformações específicas de tal forma que uma descontinuidade fraca pudesse ser representada. A modificação do campo de deformações específicas é feita através da adição de apropriadas funções de forma na interpolação das variáveis do elemento. Os graus de liberdade adicionais relativos à descontinuidade são eliminados por condensação estática.

A idéia inicial de Ortiz et al. foi desenvolvida por Belytschko, Fish e Engelmann (1988). Eles propuseram incorporar uma zona de localização de deformações dentro do elemento finito. Neste trabalho, a largura da banda de fissuração é independente do tamanho do elemento e pode ser considerada como um parâmetro do material, mas deve ser conhecida a priori. No caso em que a largura da zona de localização é igual ao tamanho do elemento, o modelo se torna igual ao tipo distribuído. Para larguras de banda maiores que o tamanho do elemento, o modelo não pode ser usado, pois a localização extrapola os domínios do elemento.

Uma descontinuidade forte, uma linha de localização incorporada (descontinuidade do campo de deslocamento), foi considerada por Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990) e Dvorkin e Assanelli (1991). Eles usaram o Princípio dos Trabalhos Virtuais com um termo adicional representando o trabalho das forças de superfície sobre a abertura da fissura.

Um trabalho similar ao de Dvorkin et al. foi desenvolvido por Klisinski, Runesson e Sture (1991) e Tano e Klisinski (1998), onde as equações básicas foram desenvolvidas a partir de considerações físicas, não sendo necessária a aplicação de princípios variacionais.

O desenvolvimento de um elemento híbrido com uma descontinuidade forte totalmente consistente sob o ponto de vista variacional, denominado pelos autores de fissura incorporada, foi demonstrado por Lotfi e Shing (1995).

Bolzon (1996) e Bolzon e Corigliano (2000) propõem uma formulação genérica para elementos finitos híbridos baseada no conceito de variáveis generalizadas. O campo de deslocamentos dentro do elemento é modelado pela soma de duas contribuições: uma parte regular, contínua, e outra descontínua, adicional. Os graus de liberdade adicionais são mantidos com o intuito de garantir a conformidade entre elementos.

Sluys e Berends (1998) apresentaram um modelo de elementos finitos com uma banda de corte incorporada nas funções de forma. Uma função descontínua dos gradientes de deslocamento é empregada como um modo adicional de localização. Esta função tem um parâmetro de escala independente do tamanho do elemento.

Wells e Sluys (2000) adicionaram funções de descontinuidade no campo de deslocamento de elementos finitos padrões com o objetivo de representar zonas de grande localização de deformação. Através da incorporação de descontinuidades dentro de um elemento conseguiram efetivamente modelar o fenômeno da localização com um número relativamente pequeno de elementos finitos.

Jirásek e Zimmermann (2001) apresentam um elemento finito triangular com uma descontinuidade incorporada no campo de deslocamentos, que representa uma fissura. O modelo constitutivo é formulado baseado nos princípios da teoria do dano. São considerados os efeitos de fechamento da fissura e fricção entre as faces da mesma.

Em 2003, d'Ávila (2003) apresenta um modelo no qual a contribuição da armadura é adicionada ao modelo original de Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990). A contribuição da armadura é feita dentro do equilíbrio interno de forças do elemento. Este modelo servirá de base para o trabalho proposto nesta dissertação e será detalhado no capítulo 3.

Dominguez, Brancherie, Davenne e Ibrahimbegovic (2005) apresentam um modelo capaz de simular numericamente a distribuição das fissuras em estruturas de concreto armado tracionadas. Isto é feito pela combinação de um modelo de aderência para a armadura, com um modelo de descontinuidade forte para a fissuração do concreto. O modelo é capaz de prever o máximo e mínimo espaçamento entre as fissuras e mostra que a consideração da heterogeneidade do concreto em uma análise numérica pode alterar significativamente a configuração da distribuição padrão das fissuras.

Embora os modelos apresentados acima sejam todos do tipo incorporado, a grande maioria deles serve apenas para representar o comportamento do concreto simples. Assim, devido à escassez de trabalhos que contemplem o assunto da fissuração através do modelo incorporado em peças de concreto armado, e as semelhanças existentes entre os modelos do tipo incorporado e discreto, a seguir são descritos alguns trabalhos recentes que utilizam o modelo discreto para a representação da fissura.

Foster, Budiono, Gilbert (1994), apresentaram um modelo de fissura rotatória para análise de estruturas de concreto armado e concreto protendido, carregadas no plano da estrutura. Elementos discretos são usados para modelar o concreto e o aço, com os efeitos da aderência e escorregamento incorporados na formulação dos elementos da armadura. Este modelo foi implementado dentro do programa de elementos finitos RECAP, usado para a análise de estruturas de concreto. A armadura é modelada usando elementos parabólicos de três nós. O concreto é modelado utilizando elementos isoparamétricos de oito nós. O elemento pode estar em umas das quatro situações: intacto, fissurado, esmagado, ou fissurado e esmagado. O elemento de concreto intacto é formulado usando o princípio de equivalência de deformações com modificações para possibilitar o uso do modelo de fissura rotatória. A relação entre as deformações principais mudam à medida que os elementos fissuram. Ou seja, o modelo permite a rotação das tensões principais com o incremento de cargas.

Tijssens, Sluys, Giessen (2000), apresentaram um modelo discreto baseado no conceito de interfaces coesivas. A resposta da estrutura é governada por uma lei de dano isotrópica, na qual a evolução do dano está de acordo com uma lei de amolecimento linear ou exponencial. Interfaces coesivas são imersas no contínuo para permitir uma maior liberdade de propagação das fissuras.

Sato e Fujii (2002), apresentaram um procedimento analítico para a análise da fissuração devido ao corte puro em peças de concreto armado. O procedimento considera que as tensões médias na peça não são iguais às tensões locais na fissura, devido à aderência entre o concreto e a armadura. As equações de equilíbrio e compatibilidade locais consideram os efeitos da aderência e fricção entre as faces da fissura, permitindo a determinação do ângulo, abertura das fissuras e espaçamento entre elas. A formação de uma nova fissura divide o espaço entre fissuras pela metade, e reduz a força de compressão no concreto em torno de 86%. O ângulo da fissura é substituído no instante de formação de cada nova fissura de acordo com as

direções das tensões locais, e o novo ângulo é considerado como uma média entre o ângulo anterior e o atual.

Prasad e Krishnamoorthy (2002), apresentaram um modelo computacional, do tipo discreto, para a aplicação em peças de concreto armado submetidas a tensões uniaxiais. O modelo foi desenvolvido pela junção de um modelo de fratura para o concreto simples com um modelo de aderência-escorregamento para a região de contato entre o concreto e a armadura. O processo de formação e crescimento da fissura e o comportamento na superfície de contato são analisados. A orientação da fissura é função do campo de tensões na ponta da fissura fictícia.

Yang e Chen (2005), desenvolveram um modelo de fissuras discretas que modela automaticamente a propagação de múltiplas fissuras em vigas de concreto armado. As fissuras são modeladas com base no conceito de fissura fictícia, usando elementos de interface de quatro nós não lineares, com uma lei de amolecimento para o concreto bi-linear. Este modelo não é capaz de simular as fissuras devido ao corte. Já as fissuras devido à flexão são modeladas somente até certo nível, por não se considerar os efeitos da plasticidade e compressão do concreto no modelo. Os resultados obtidos pelo programa coincidem com os valores experimentais até o ponto em que as fissuras de compressão passam a ser dominantes.

3 O MODELO EMPREGADO

O modelo de fissura incorporada implementado neste trabalho é o modelo apresentado por d'Avila (2003), baseado no modelo originalmente proposto por Dvorkin et al. (1990). O modelo original de Dvorkin não inclui a contribuição da armadura. A inclusão da parcela da armadura proposta por d'Avila é feita através da transferência de tensão por aderência entre o concreto e as barras de aço da armadura.

O modelo empregado é composto por um modelo incorporado para modelar as fissuras, um modelo com transferência de tensão por aderência para simular o comportamento do material fissurado, e um modelo incorporado para representar as barras da armadura. Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen.

A seguir, antes de introduzir o modelo incorporado empregado, apresentam-se alguns conceitos necessários para a compreensão do trabalho.

Inicialmente, são apresentados os modelos constitutivos utilizados para o concreto e aço, bem como o modelo de elementos finitos empregado para a armadura.

Em seguida, estuda-se a incorporação de uma localização de deformações específicas no interior de um elemento. Também, é feita uma breve exposição do modelo de transferência de tensão por aderência proposto por Russo e Romano (1992).

Posteriormente, apresentam-se as modificações que foram feitas no modelo original de fissura incorporada para incluir a parcela da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento, dando origem ao modelo proposto por d'Avila (2003), que será o modelo implementado neste trabalho. E, finalmente, introduzem-se as modificações propostas nesta dissertação

3.1 MODELOS CONSTITUTIVOS

3.1.1 Modelo constitutivo para o concreto

Os modelos constitutivos empregados para simular o comportamento do concreto, são os mesmos utilizados por d'Avila (2003).

Para representar o comportamento do concreto intacto, o modelo utilizado é o de Ottosen (1979). Este modelo fica completo quando se definem três fatores: um modelo constitutivo, um critério de ruptura e uma superfície de ruptura.

Trata-se de um modelo elástico não-linear, tridimensional, que utiliza valores secantes dos parâmetros do material. O modelo está baseado no conceito do índice de não-linearidade (β), que é uma medida da proximidade do estado de tensão com a superfície de ruptura. A determinação do valor de β é feita pela relação entre o valor da tensão atual, $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$, pelo valor correspondente da tensão na ruptura, σ_{3f} . Os valores $\beta < 1$, $\beta = 1$ e $\beta > 1$ correspondem, respectivamente, a estados de tensão localizados dentro, sobre e fora da superfície de ruptura.

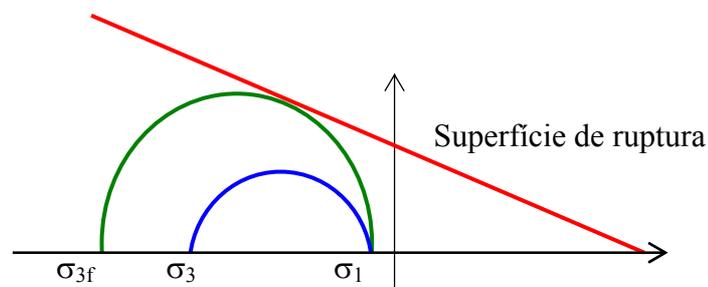


Figura 3.1: Definição do índice de não-linearidade.

O critério de ruptura usado também foi proposto por Ottosen (1977). Neste critério, todas as componentes de tensão são consideradas. A superfície de ruptura é suave e convexa, com exceção do vértice, e sua projeção no plano desviador muda de triangular para circular com o aumento da pressão hidrostática; e os meridianos são parabólicos e se abrem no sentido do eixo hidrostático negativo.

Quando ocorre ruptura em um determinado estado de tensão ($\beta \geq 1$), a verificação necessária para identificar se a ruptura ocorre por esmagamento (compressão) ou fraturamento (tração) do concreto é a seguinte:

- a) se $\sigma_1 \geq f_t/2$ a ruptura é por tração e, deste instante em diante, o ponto em análise passa a se comportar conforme o modelo constitutivo para o concreto fissurado (σ_1 é a máxima tensão principal de tração e f_t a resistência à tração do concreto);
- b) caso contrário, a ruptura é por esmagamento e, imediatamente, a tensão no ponto é zerada, ou seja, o ponto não oferece mais resistência ao carregamento externo.

Após o concreto ter rompido por fraturamento ($\beta \geq 1$ e $\sigma_1 \geq f_t / 2$), as três direções do estado de tensão são desvinculadas, isto é, cada direção passa a se comportar de forma unidimensional independente.

Para o estado de tensão que causou a fissuração, são determinadas as direções principais. A fissura se forma perpendicularmente à direção principal referente a σ_1 . Assim, as direções locais, normal e tangenciais da fissura, ficam determinadas e não são mais alteradas ao longo do processo. Na análise numérica, também existe a possibilidade de se utilizar um modelo elástico-linear bidimensional para simular o comportamento do concreto não-fissurado.

Para representar o comportamento do concreto entre fissuras, o concreto no domínio dos elementos fissurados, emprega-se um modelo elástico linear bidimensional.

3.1.2 Modelo constitutivo para o aço

O modelo constitutivo implementado para simular o comportamento das barras de aço que compõem a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento linear.

Emprega-se um modelo unidimensional devido ao fato de que, no modelo de elementos finitos empregado para simular a armadura, um modelo de armadura incorporada, as barras de aço resistem apenas a esforços normais, na direção de seu próprio eixo.

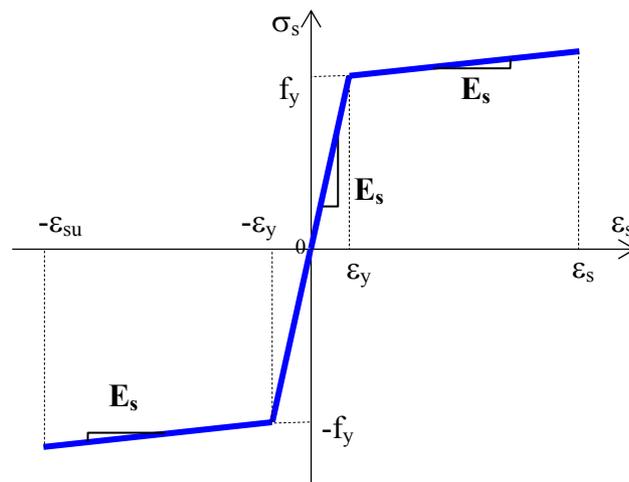


Figura 3.2: Modelo constitutivo do aço.

3.1.3 Modelos constitutivos para a fissura

São apresentados, a seguir, os modelos constitutivos empregados para representar a transferência de tensões através da fissura.

3.1.3.1 Amolecimento linear

O modelo utilizado é o de Hillerborg et al. (1976), e está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura, já que a área limitada pela curva *tensão transmitida através da fissura x abertura da fissura* ($\sigma_c \times w_c$) é igual à energia de fratura do material (G_f).

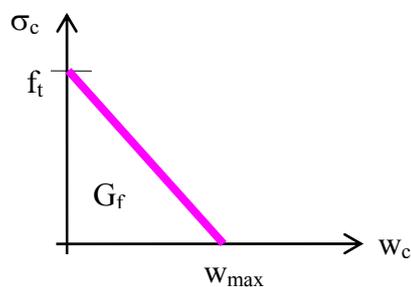


Figura 3.3: Amolecimento linear.

Assim, o valor da máxima abertura de fissura que permite a transferência de tensão, w_{max} , é dado por

$$w_{\max} = 2G_f / f_t \quad (3.1)$$

A energia de fratura é definida, segundo o Código Modelo CEB-FIB 1990, CEB (1993), para o diâmetro de agregados de 16 mm, por

$$G_f = 0,0003 (f_t)^{0,7} \quad (3.2)$$

Observando-se as expressões anteriores, verifica-se que o modelo necessita de um único parâmetro, a resistência à tração do concreto, f_t , como informação a ser fornecida externamente.

3.1.3.2 Amolecimento exponencial

Como no modelo linear, este modelo também está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura. A expressão que define a curva de amolecimento é, segundo Dvorkin et al. (1990)

$$\sigma_c = f_t \exp(-aw_c) \quad (3.3)$$

sendo $a = 0,95 f_t / G_f$.

O valor da máxima abertura de fissura que permite a transferência de tensão, w_{\max} , é determinado impondo-se um limite para o fator $\exp(-aw_c) = 0,05$.

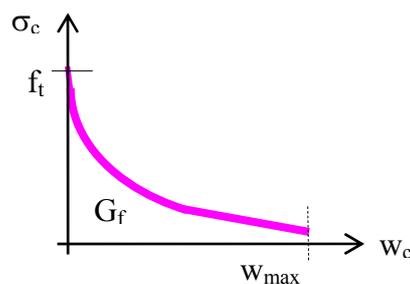


Figura 3.4: Amolecimento exponencial.

3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

O modelo empregado para representar as barras de aço da armadura é o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hrudey (1989). Na implementação numérica destes modelos, foram utilizadas subrotinas desenvolvidas por Dantas (2000), e empregadas por d'Avila (2003). A seguir, embasado no trabalho de Machado (2002), se dá uma visão global da formulação empregada.

A formulação apresentada é desenvolvida visando sua aplicação em análise não-linear de estruturas sob estado plano de tensões com solução em deslocamentos.

O modelo implementado está baseado no fato que a armadura resiste apenas a tensões axiais em sua direção longitudinal e que os deslocamentos de um ponto qualquer da barra são iguais aos do elemento de concreto no qual ela está embebida. Desta forma, as barras da armadura contribuem apenas para a rigidez no sentido longitudinal e podem ser dispostas dentro do elemento de concreto de forma arbitrária, não introduzindo novas incógnitas no modelo global de elementos finitos.

Os deslocamentos ao longo da barra são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto nos quais a mesma está inserida. Logo, a matriz de rigidez da armadura, \mathbf{K}_s , tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto, \mathbf{K}_c , e a matriz de rigidez total (concreto armado) é a soma das duas.

A matriz de rigidez para cada barra de armadura é expressa por

$$\mathbf{K}_s = E_s A_s \int_S \mathbf{B}_s \mathbf{B}_s^T dS \quad (3.4)$$

sendo E_s o módulo de deformação longitudinal do aço; A_s a área da seção transversal da barra de armadura; \mathbf{B}_s o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura, e, S é o comprimento da barra.

As barras de armadura são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos, permitindo-se modelar barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para barras curvas, são necessários três pontos.

Um elemento de concreto, com uma barra em seu interior, é mostrado na figura 3.5.

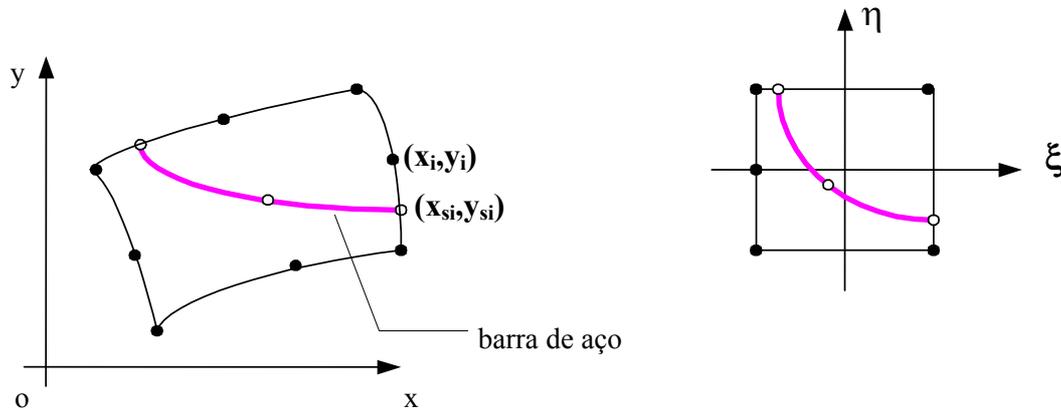


Figura 3.5: Barra de armadura no interior de um elemento de concreto.

Uma importante vantagem desta formulação é que a localização e geometria das barras da armadura independem da malha de elementos finitos de concreto. Como a armadura é especificada por um conjunto de pontos independentes, se faz necessária a colocação de pontos adicionais nos elementos de barra, para garantir a continuidade inter-elementar adequada. Estes pontos devem estar localizados onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos pontos das barras de aço, entre os pontos de definição da mesma, são obtidas por interpolação. Desta maneira, pontos adicionais são criados dentro dos elementos finitos, onde há presença de armadura. As funções de interpolação unidimensionais, H_j , são expressas em termos de uma coordenada normalizada, χ , ver figura 3.6.

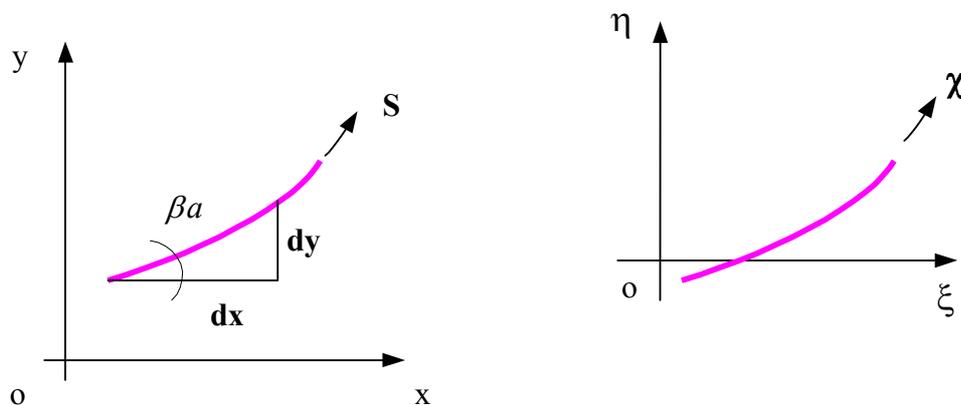


Figura 3.6 Coordenadas ao longo do eixo de armadura.

As forças internas associadas à armadura são integradas àquelas do elemento de concreto para a obtenção do vetor de forças internas totais do elemento. Portanto, precisa-se saber quais barras interceptam cada elemento para poder adicionar a contribuição das mesmas tanto na rigidez como no vetor de forças do elemento. A determinação dos segmentos de barras de armadura que ficam no interior de cada elemento de concreto é feita numericamente de forma automática.

Para representar as funções de interpolação dos elementos de armadura são usados polinômios de Lagrange. Segundo Zienkiewicz (1977), estas funções são expressas por

$$H^m(\chi) = \prod_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(\chi - \chi_i)}{(\chi_k - \chi_i)} \quad (3.5)$$

Esta função é um polinômio de grau $m = n-1$, em termos de χ , tendo valor unitário em $\chi = \chi_k$ e nulo para $\chi = \chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_n$, onde n é o número de nós do elemento de armadura.

Considerando-se aderência perfeita entre concreto e aço, a expressão para a deformação do aço, em uma forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hrudey (1989), resulta

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_s = \Delta \epsilon_x \cos^2 \beta a + \Delta \epsilon_y \sin^2 \beta a + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta a \cos \beta a = B_s^T \Delta U^e \quad (3.6)$$

onde βa está definido na figura 3.6 e U^e é o campo de deslocamentos do elemento de concreto.

Após alguns arranjos, e aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, tem-se para a variação do trabalho interno

$$\delta \Delta W = \delta \Delta U^T (K_s \Delta U + Q_s) \quad (3.7)$$

onde o vetor de força nodal equivalente Q_s é determinado por

$$\mathbf{Q}_s = \int_{\chi} \mathbf{B}_s \sigma_s \frac{ds}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.8)$$

e a matriz \mathbf{K}_s pode ser representada, numericamente, pela expressão

$$\mathbf{K}_s = \sum_{l=1}^{ng} \mathbf{B}_{sl} E_s \mathbf{B}_{sl}^T \frac{ds}{d\chi} A_s w_i \quad (3.9)$$

onde w_i é o fator de peso e ng é o número de pontos de integração na direção axial da barra de armadura.

3.3 LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

Uma dificuldade que surge na implementação numérica de um modelo de fissura incorporada é a simulação do processo de localização, que está sempre presente na falha. Localização é a deformação intensa de um material dentro de uma zona estreita. A seguir, baseado nos trabalhos de Spencer (2002, apud d'Avila, 2003) e Jirásek (2000, apud d'Avila, 2003), se dá uma visão global da implementação de uma localização de deformações em um modelo de elementos finitos.

Para se poder entender, ou visualizar, melhor as dificuldades que aparecem em um modelo de Elementos Finitos devido à incorporação de uma descontinuidade no interior de um elemento, far-se-á uma descrição das modificações feitas em um princípio variacional para poder representar a descontinuidade.

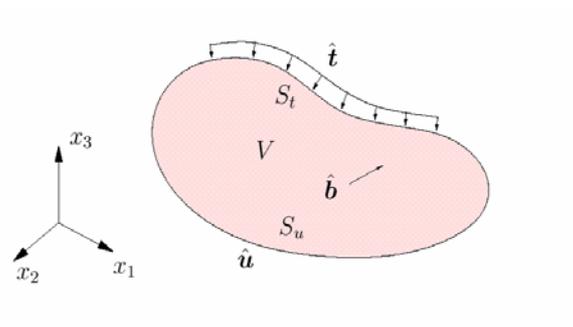


Figura 3.7- Domínio contínuo.

Considere o domínio mostrado na figura 3.7. Três campos são definidos sobre o volume, V , do domínio: o campo de deslocamentos, \mathbf{u} ; o campo de deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$; e, o campo de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$. Também, uma força de volume, $\hat{\mathbf{b}}$, é definida sobre o volume V . A superfície, S , é dividida em duas partes: S_u onde o corpo está sujeito à deslocamentos impostos, $\hat{\mathbf{u}}$; e, S_t onde as forças de superfície, $\hat{\mathbf{t}}$, são impostas.

O campo de deformações está vinculado com o campo de deslocamentos pela equação cinemática ($\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}$); o campo de tensões com o campo de deformações pela equação constitutiva ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$) e a equação de equilíbrio ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{b}} = 0$) relaciona o campo de tensões com as forças de volume prescritas.

Para solucionar o problema via Método dos Elementos Finitos, algumas das equações de campo devem ser enfraquecidas, fazendo com que elas só possam ser estabelecidas de forma integral, através de um princípio variacional. Para isto, um (ou mais) campo deve ser designado como principal. Os campos que são conectados com o principal por intermédio de equações de campo de forma forte se tornam dependentes do principal.

O diagrama de Tonti é uma boa ferramenta para visualizar as conexões fortes e fracas entre os campos e as condições de contorno. Cada campo é representado por um retângulo, que tem linha contínua se o campo é principal ou tracejada se é dependente. As condições de contorno são representadas por retângulos pintados. Vínculos fortes entre campos são mostrados com linhas cheias e os fracos com linhas tracejadas. O sobrescrito em um campo denota que ele é dependente do campo sobrescrito. O diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total está representado na figura 3.8. Nele, \mathbf{u} é tomado como campo principal, $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ e $\boldsymbol{\sigma}^u$ como campos dependentes. A equação de equilíbrio e as condições de contorno de força, que vinculam $\boldsymbol{\sigma}^u$ a $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$, respectivamente, são estabelecidas de forma fraca.

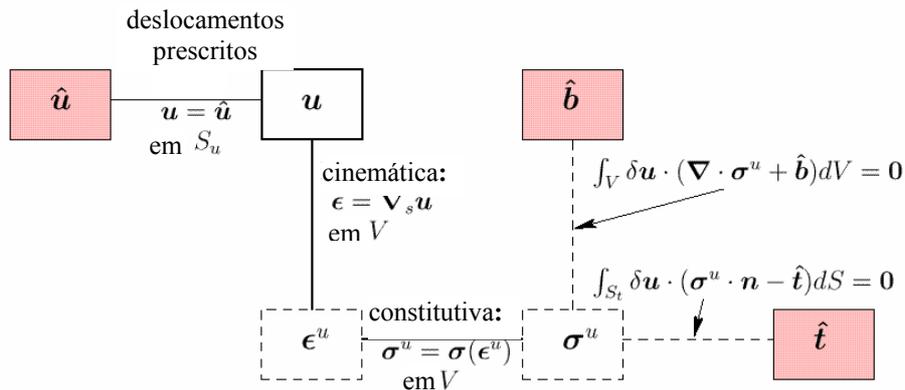


Figura 3.8 - Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total.

O Princípio Variacional da Energia Potencial Total pode ser estendido para um corpo com uma interface interna. A figura 3.9 mostra um domínio similar ao da figura 3.7, exceto pela introdução de uma superfície interna, S_j . O volume V , os domínios das condições de contorno, S_u e S_t , foram divididos em duas partes, "+" e "-", separadas pela superfície interna.

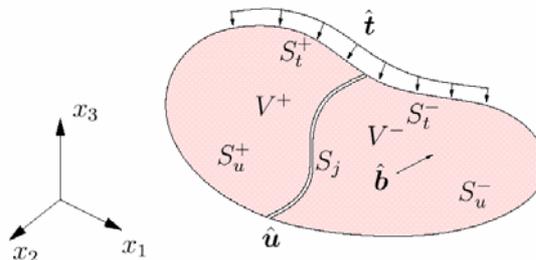


Figura 3.9 - Domínio com uma superfície interna.

Um campo de forças de superfície, \mathbf{t}_j , é definido na superfície interna. Este campo de forças é função da descontinuidade de deslocamentos através da interface interna. A figura 3.10 mostra o diagrama de Tonti com este campo adicional incorporado no Princípio Variacional padrão da Energia Potencial Total.

O campo de forças da interface é dependente do campo de deslocamentos, sendo, assim, representado por \mathbf{t}_j^u . O equilíbrio entre \mathbf{t}_j^u e σ^u é imposto de forma fraca. V não inclui S_j , e, como consequência disto, existem agora dois conjuntos paralelos de equações de campo. Na interface S_j , o campo (dependente) de tensões está relacionado com o campo (principal) de

deslocamentos através do campo (dependente) de forças de superfície, enquanto que no volume V , eles estão relacionados por intermédio do campo (dependente) de deformações.

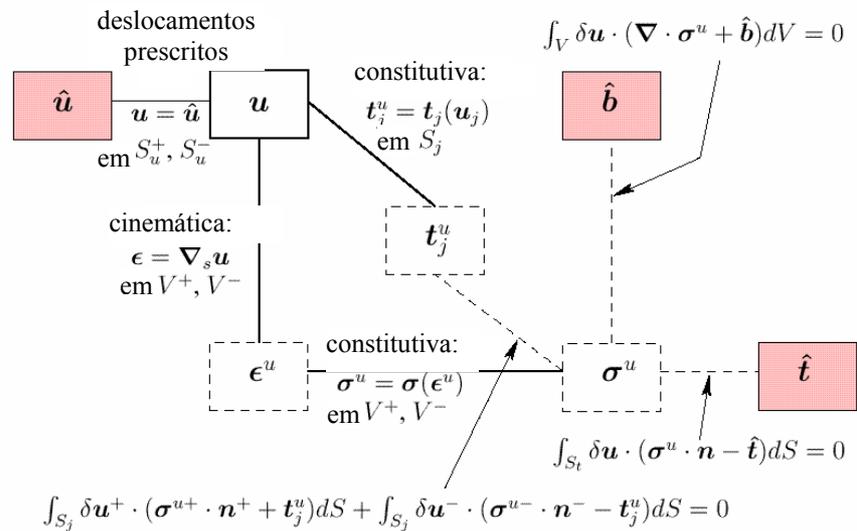


Figura 3.10 - Diagrama de Tonti para o Princípio Variacional da Energia Potencial Total com o campo adicional de forças na superfície interna.

A existência de dois conjuntos paralelos de equações de campo possibilita que se obtenha valores diferentes de tensões para um mesmo deslocamento, dependendo de qual conjunto de equações foi utilizado. Como os dois conjuntos não conduzem ao mesmo resultado de forma natural, algum mecanismo deve ser imposto para que isto ocorra. Detalhes sobre esta questão são discutidos no item 3.5.1.

O problema real que se está querendo representar é a fissuração no concreto. Uma fissura acontece como resultado de uma intensa localização de deformações ao longo de uma zona relativamente estreita do material. Antes que a fissura seja considerada uma fissura aberta, quando não é mais possível a transmissão de esforços através da mesma, existe um período no qual, apesar do material já ter fissurado, ainda é possível a transmissão de esforços. Este período, que é caracterizado por uma diminuição de esforços transmitidos com o aumento da abertura da fissura, é chamado de amolecimento. Portanto, a fissura é uma descontinuidade do campo de deslocamentos que gera uma interface interna no elemento. Simular a relação entre as forças de superfície nesta interface (os esforços transmitidos através da fissura) e a abertura da fissura (a descontinuidade do campo de deslocamentos interno do elemento) é o objetivo da implementação dos modelos incorporados.

No modelo implementado, as modificações propostas devem ser implementadas via Método dos Elementos Finitos com solução em deslocamentos. Como este método é amplamente empregado em análise estrutural, existe uma gama de elementos, já implementados e com formulação bem conhecida, sobre os quais se pode fazer as alterações necessárias. A dificuldade na implementação numérica de modelos incorporados, baseados na rigidez, está relacionada com o fato que o campo de forças de superfície está conectado com o campo de tensões no interior do elemento de forma fraca. Conseqüentemente, as forças nodais, que são computadas através de integrais do campo de forças de superfície ao longo do contorno do elemento, não fornecem informações suficientes para reconstruir o campo de forças de superfície. Não existe solução única para o campo de forças de superfície baseado somente nas forças nodais. Para contornar este empecilho, um processo iterativo, à nível do elemento, deve ser realizado para compatibilizar o campo de tensões obtidas no interior do elemento com o campo de forças de superfície na descontinuidade interna.

3.4 MODELO DE TRANSFERÊNCIA DE TENSÃO POR ADERÊNCIA

A seguir, far-se-á uma breve descrição do modelo de transferência de tensão por aderência, proposto por Russo e Romano (1992, apud d'Avila, 2003) e Russo, Zingone e Romano (1990, apud d'Avila, 2003).

Em peças de concreto armado tracionadas, ocorre um escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente sempre que as deformações dos dois materiais têm valores diferenciados. O escorregamento está associado à degradação do vínculo entre concreto e aço e ao aparecimento de fissuras no entorno das barras da armadura. Basicamente, estas fissuras são devidas à tensão de tração proveniente da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência. Para que o concreto fissure em uma determinada seção, a tensão no concreto, nesta seção, deve ser igual a resistência à tração do concreto, f_t , fazendo com que, conseqüentemente, a deformação de fissuração do concreto, ε_{ct} , seja atingida.

Assim, o estudo do fenômeno da fissuração deve ser baseado na análise da distribuição das deformações ao longo da peça de concreto armado, pois sempre que a deformação no concreto for igual a ε_{ct} uma nova fissura se formará. Devido à formação da fissura, a tensão de tração no concreto imediatamente adjacente à fissura deve cair à zero. Novas distribuições de

tensão e deformação no concreto e no aço vão acontecer após a fissuração. Se a carga é incrementada além daquela que causou a primeira geração de fissuras, novas fissuras poderão se formar, até que uma configuração final de fissuras seja estabelecida.

Uma peça de concreto armado tracionada é mostrada na figura 3.11, que tanto pode estar representando um tirante de concreto armado carregado por forças externas aplicadas na barra de aço, como um trecho entre duas fissuras de uma peça fissurada.

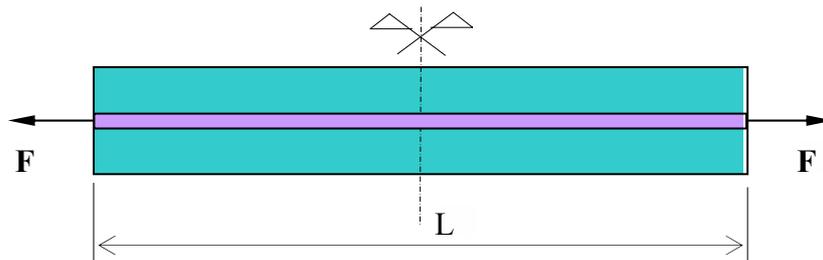


Figura 3.11 - Peça de concreto armado tracionada axialmente.

As equações diferenciais de equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações para a peça, ver figura 3.12, são dadas, respectivamente, por

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = -\tau(s)\Sigma_0 \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_s - \varepsilon_c = -\frac{ds}{dx} = -s' \quad (3.11)$$

sendo σ_s : tensão no aço; $\tau(s)$: tensão de aderência como função do escorregamento relativo; A_s : área de aço; Σ_0 : perímetro da armadura; ε_s : deformação do aço; ε_c : deformação do concreto adjacente à interface aço/concreto; e, $s(x)$: escorregamento relativo entre a barra de armadura e o concreto adjacente.

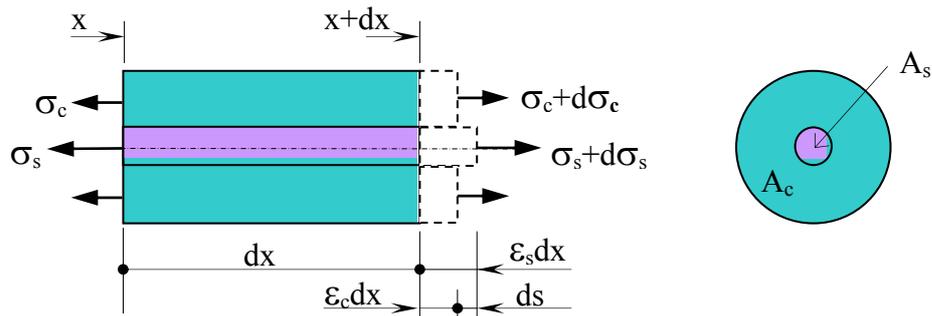


Figura 3.12 - Tensões e deformações na barra de aço e na camada de concreto adjacente.

A transferência de tensão entre o concreto e a armadura, pode ser expressa por:

$$A_c \frac{d\sigma_{cm}}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (3.12)$$

onde A_c é área de concreto da seção transversal envolvida na transferência de tensão e σ_{cm} é a tensão média no concreto na área A_c . O tamanho da área de concreto efetivamente envolvida na transferência de tensão, assim como a distribuição de tensões ao longo da mesma, ainda é um tema em discussão. No presente estudo, se está considerando um parâmetro ψ que indica a relação entre a tensão média σ_{cm} e a máxima tensão no concreto, que acontece na camada mais próxima da barra.

Considerando que ψ não varie ao longo da barra, isto é, seja independente de x , a expressão (3.12) pode ser reescrita

$$\Psi A_c \frac{d\sigma_c}{dx} = -A_s \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (3.13)$$

Derivando a equação (3.11), e considerando as equações (3.10) e (3.12), chega-se a

$$s''(x) - \chi \hat{\tau}[s(x)] = 0 \quad (3.14)$$

sendo

$$\chi = \frac{\Sigma_0}{A_s E_s} (1 + \xi) \quad (3.15)$$

$$\xi = \frac{n\rho}{\Psi} \quad (3.16)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.17)$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (3.18)$$

e E_c e E_s , respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal do concreto e do aço.

A equação (3.14) é uma equação diferencial de segunda ordem cuja primeira integral é

$$s'(x) = \mp \sqrt{2(F(s) + C)} \quad (3.19)$$

onde o sinal negativo representa tensão de tração no aço, C é uma constante de integração e

$$F(s) = \chi \int \hat{\tau}[s(x)] ds \quad (3.20)$$

Objetivando obter uma relação explícita ou implícita do escorregamento s como função de x , $s = s(x)$ ou $x = x(s)$, e considerando o aço tracionado, integra-se a expressão (3.19), resultando

$$x = B - \int \frac{ds}{\sqrt{2[F(s) + C]}} \quad (3.21)$$

onde B é uma segunda constante de integração.

A equação (3.14), a equação diferencial de aderência, é geral e pode ser resolvida para qualquer relação *tensão de aderência x escorregamento*. O modelo de aderência adotado neste trabalho está representado na figura 3.13

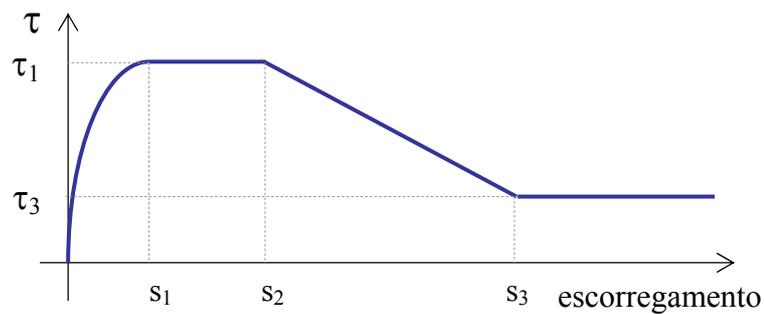


Figura 3.13 - Relação tensão de aderência x escorregamento relativo.

De acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990, CEB (1993), para concreto não confinado, com barras nervuradas e em boas condições de aderência, os valores que devem ser adotados para os parâmetros do diagrama apresentado na figura 3.13 são: $s_1 = s_2 = 0,6mm$; $s_3 = 10mm$; $\tau_1 = 2f_{ck}^{1/2}$; $\tau_3 = 0,3f_{ck}^{1/2}$; e, $\alpha = 0,4$. O trecho curvo é dado pela expressão:

$$\hat{\tau} = \tau_1 \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad 0 \leq s \leq s_1 \quad (3.22)$$

Para o trecho curvo, $0 \leq s \leq s_1$, a função $F(s)$, expressão (3.20), resulta

$$F(s) = \gamma s(x)^{1+\alpha} \quad (3.23)$$

sendo γ , o denominado parâmetro de aderência, dado por

$$\gamma = \chi \frac{\tau_1}{(1+\alpha)s_1^\alpha} \quad (3.24)$$

Substituindo-se o valor de $F(s)$, dado por (3.23) na equação (3.21), se obtém

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\gamma s^{1+\alpha} + C)^{-1/2} ds \quad (3.25)$$

Desenvolvendo-se o binômio da expressão anterior em série e integrando resulta

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\gamma}{C}\right)^k \frac{s^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad 0 \leq s < \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.26)$$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{C}{\gamma}\right)^k \frac{s^{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)}}{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)} \quad \text{para} \quad \left|\frac{C}{\gamma}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}} < s \quad (3.27)$$

As equações (3.26) e (3.27) mostram, de forma implícita, o escorregamento s como função de x .

Quando a função $s(x)$ apresenta um ponto com $s = 0$ e $s' = 0$, a constante de integração C é nula e a solução da equação diferencial (3.19) pode ser escrita na forma explícita

$$s = \left[-\frac{1-\alpha}{2} \sqrt{2\gamma} (x-B) \right]^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (3.28)$$

Pela integração da equação (3.13), e considerando relações lineares para os materiais, chega-se a

$$\varepsilon_c = -\xi \varepsilon_s + D \quad (3.29)$$

sendo D uma constante de integração dada por $D = \xi \varepsilon_{s0}$, onde ε_{s0} é a deformação do aço na extremidade carregada.

Utilizando as relações dadas por (3.11), (3.19) e (3.23) em (3.29), chega-se as expressões que permitem determinar as deformações no aço e no concreto em função do escorregamento

$$\varepsilon_s = \frac{\xi \varepsilon_{s0} + \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\xi \varepsilon_{s0} - \xi \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (3.31)$$

Utilizando as equações apresentadas anteriormente, é possível obter as distribuições, ao longo da peça, de variáveis tais como o escorregamento relativo e as deformações no concreto e na armadura. As constantes de integração são determinadas para cada problema específico.

Antes de prosseguir, cabe fazer alguns comentários a respeito da formulação apresentada. O problema que se está querendo resolver não pode ser resolvido de forma explícita para todas as situações. Para os casos que não existe solução explícita, o problema deve ser resolvido através de um processo iterativo, chegando-se a determinadas situações para as quais não existe solução. Assim, é recomendável que se faça uma avaliação qualitativa prévia da

possível distribuição de algumas variáveis ao longo do elemento antes de tentar resolver o problema.

Em particular, a existência de um ponto ou região com $s' = 0$ deve ser averiguada, já que nesta região as deformações no aço e no concreto apresentam o mesmo valor, ver equação (3.11). Também, a existência de uma seção ou região com escorregamento nulo, $s = 0$, deve ser analisada. A existência de uma região onde $s = s' = 0$ permite o uso da expressão explícita (3.28). Assim, fazendo esta avaliação prévia, é possível saber qual função ou conjunto de funções que deve ser utilizado na solução do problema.

Para cada tipo de problema, dois comportamentos típicos são possíveis, figura 3.14, diretamente relacionados com o valor da carga externa e o comprimento da peça: (a) comportamento de peça longa, ou (b) comportamento de peça curta.

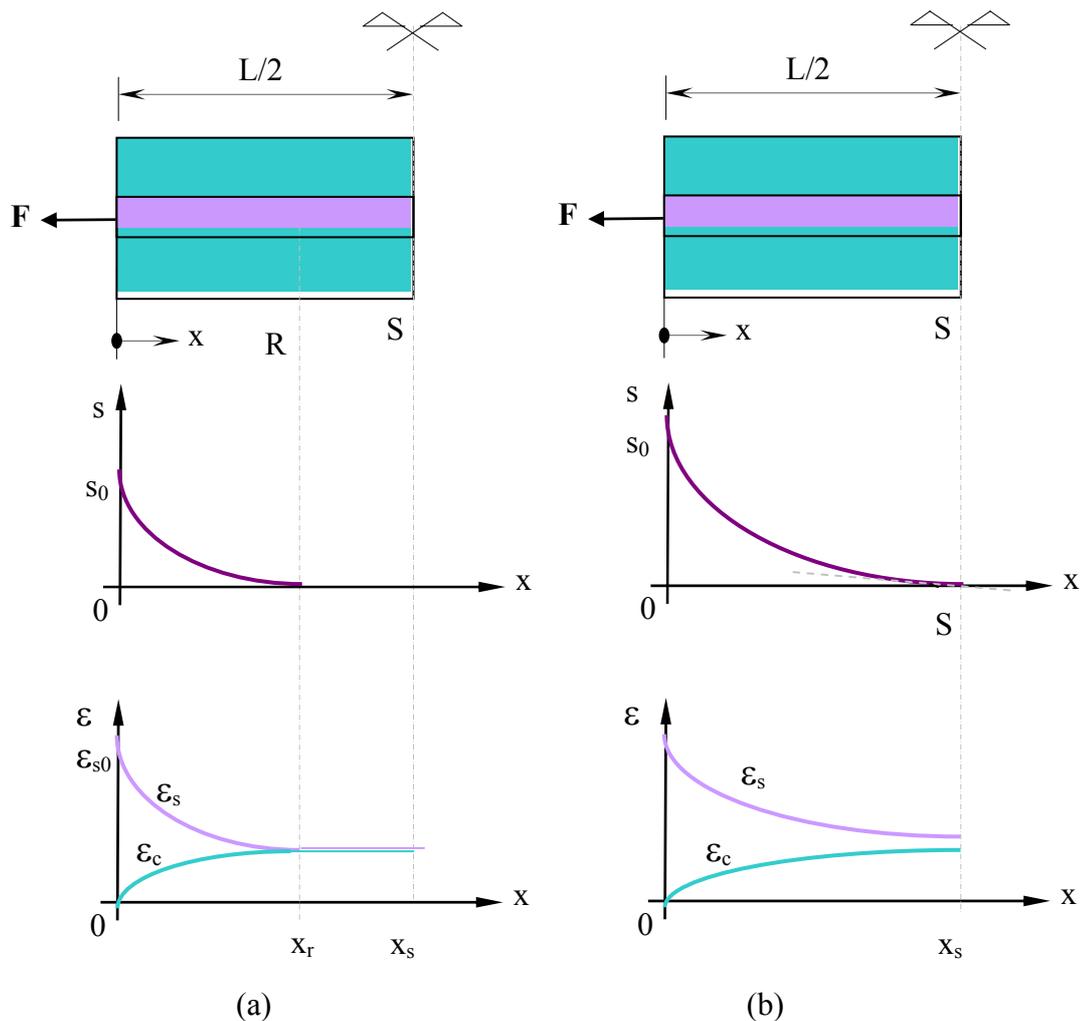


Figura 3.14 - Distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço: a) Peça Longa, b) Peça Curta.

O comportamento de peça longa é caracterizado pela existência de uma região onde não existe escorregamento relativo entre o aço e o concreto adjacente, e onde os dois materiais possuem a mesma deformação, figura 3.14(a). Isto ocorre devido ao fato que a peça é longa o suficiente para que a barra de armadura possa transferir para o concreto, por aderência, a força necessária para que isso aconteça. O escorregamento relativo s é determinado pela expressão (3.28) no intervalo $0 \leq x \leq x_R$ e é nulo, $s = 0$, para $x_R \leq x \leq L/2$. O comprimento x_R requerido para satisfazer a condição de igualdade entre as deformações no aço (valor mínimo) e no concreto (valor máximo) é chamado de comprimento de transferência, L_t .

Por outro lado, o que caracteriza o comportamento de uma peça curta é o fato de o aço e o concreto apresentarem deformações diferentes ao longo de todo o comprimento da peça, $\varepsilon_s > \varepsilon_c$, figura 3.14(b), e o escorregamento relativo entre os materiais é zero apenas no centro da peça devido à simetria. A deformação máxima no concreto para peça curta ocorre na seção S , de simetria, e é função do escorregamento s_0 . Não existe uma solução de forma explícita para a equação diferencial (3.19) para esta situação e a distribuição do escorregamento é obtida através das equações gerais, (3.26) e (3.27). Além disto, para

$$s = s_d = \left(\frac{C}{\gamma} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.32)$$

as duas equações, (3.26) e (3.27), não têm solução.

3.4.1 Análise da fissuração progressiva da peça

A seguir, se analisará a fissuração progressiva de uma peça inicialmente não fissurada, considerando que a carga é incrementada monotonicamente.

Para valores muito baixos de carga e, conseqüentemente, de deformação na extremidade carregada, ε_{s0} , o escorregamento relativo se anula antes do eixo de simetria, como em peças longas. O elemento ainda não fissurou, e $\varepsilon_{cr} < \varepsilon_{ct}$, sendo ε_{cr} o valor de ε_c no ponto R da figura 3.14(a) com $s' = 0$ e $\varepsilon_c = \varepsilon_{cmax}$. Qualquer incremento de carga desloca o ponto R em direção ao eixo de simetria e ε_{cr} aumenta.

Um incremento de carga maior pode produzir duas respostas diferentes na peça:

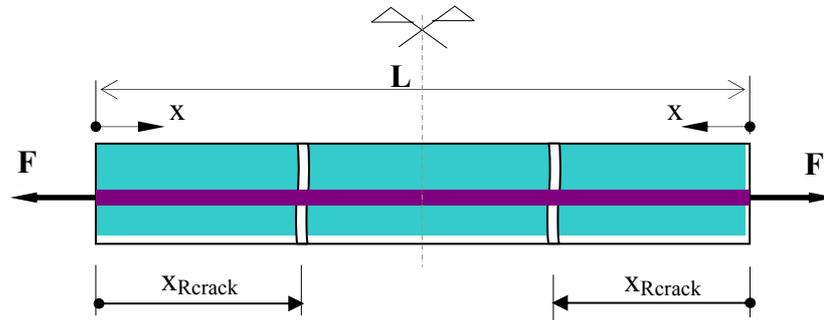


Figura 3.15 - Fissuração em uma peça longa.

a) Pode ocorrer que a deformação no concreto alcance o valor de fissuração no ponto R com $x_R \leq L/2$. Neste caso, $x_R = x_{Rcrack}$, sendo x_{Rcrack} a distância da fissura até a extremidade carregada. As primeiras fissuras primárias se formam e a peça é subdividida em " m " partes, figura 3.15. O número de fissuras que se originam é igual a $NF=L/x_{Rcrack}$. Este caso pode ser definido como a fissuração de uma peça longa.

b) Por outro lado, pode acontecer que o ponto R alcance o eixo de simetria ($x_R = L/2$) com a deformação do concreto permanecendo menor que ε_{ct} . Para fissurar a peça, uma carga ainda maior deve ser aplicada. Com o incremento da carga, a deformação do concreto vai aumentar, mas seu valor máximo, ε_{cmax} , continuará acontecendo no centro da peça já que o valor de x_R não pode ir além de $L/2$ devido à simetria. Conseqüentemente, a primeira fissura aparecerá, na seção de simetria, quando ε_{cmax} alcançar o valor ε_{ct} . Assim, na fissuração, a peça é dividida em duas partes iguais, de dimensão $L/2$, figura 3.16. Este caso é definido como fissuração de uma peça curta.

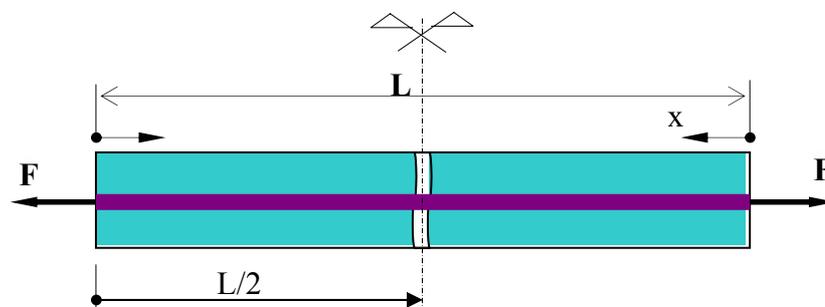


Figura 3.16 - Fissuração em uma peça curta

A condição que garante que a fissuração da peça irá acontecer antes que x_R alcance o eixo de simetria, ou seja, que a peça funcionará como peça longa é

$$\varepsilon_{s0crack} \leq \varepsilon_{s0L} \quad (3.33)$$

sendo $\varepsilon_{s0crack}$, a deformação no aço, na extremidade carregada, que determina a fissuração do concreto, dada por

$$\varepsilon_{s0crack} = \left(\frac{\xi + 1}{\xi} \right) \varepsilon_{ct} \quad (3.34)$$

e

$$\varepsilon_{s0L} = (2\gamma)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{(1-\alpha)L}{4} \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \quad (3.35)$$

Neste caso, x_{Rcrack} , a distância da fissura até a extremidade carregada, é determinada pela expressão

$$x_{Rcrack} = \frac{2}{1-\alpha} \left[\varepsilon_{s0crack} \left(\frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (3.36)$$

Caso contrário, ou seja, $\varepsilon_{s0crack} > \varepsilon_{s0L}$, a peça funcionará como peça curta desde a primeira fissura, o que gera apenas uma fissura na seção de simetria da peça.

Depois da formação das primeiras fissuras, uma segunda geração de fissuras pode ocorrer, para um nível de carga ainda maior. Antes desta segunda geração, cada parte originária da primeira geração de fissuras está em uma situação de carga similar à de uma peça curta.

Mesmo as originadas de peças longas terão comprimento igual a x_{Rcrack} , o que faz com que a segunda geração de fissuras possa acontecer somente na seção de simetria de cada parte. Baseado nas considerações acima, e considerando um material homogêneo (o que não é propriamente o caso do concreto, cujas propriedades físicas e mecânicas têm uma considerável dispersão), conclui-se que, sob cargas monotonicamente crescentes, depois da primeira geração de fissuras primárias, novas fissuras podem ocorrer apenas pela fissuração da seção central de cada parte.

O estado de fissuração estabilizada é atingido quando o comprimento de cada parte não é mais suficiente para permitir que a deformação do concreto atinja o valor de fissuração na tração, ε_{ct} , no meio do vão, por maior que seja o incremento de ε_{s0} .

Já que a deformação, ε_{max} , depende do valor do escorregamento na extremidade carregada, s_0 , que é a variável principal do problema em estudo, a distância mínima entre as fissuras é determinada pela análise da fissuração progressiva da peça e suas divisões em partes menores.

O escorregamento da extremidade carregada, s_0 , dá a diferença entre os alongamentos do aço e do concreto na metade da peça. Assim, em uma peça fissurada, a abertura da fissura na superfície do aço, w , é dada por

$$w = s_{01} + s_{02} \quad (3.37)$$

sendo s_{01} e s_{02} os escorregamentos das extremidades de dois trechos consecutivos.

3.5 MODELO DE FISSURA INCORPORADA IMPLEMENTADO

Os modelos de fissura incorporada surgem como uma excelente alternativa na simulação numérica do colapso das estruturas. Eles conseguem simular a localização de deformações específicas no seu interior de forma objetiva e sem o conhecimento prévio da dimensão da banda de fissuração.

3.5.1 Modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia

Os principais aspectos da formulação do modelo originalmente proposto por Dvorkin et al. (1990), quando o mesmo foi utilizado para simular o comportamento de peças de concreto simples são:

- 1) A localização de deformações específicas envolve o elemento completo como domínio mínimo, ao invés de trabalhar com pontos de integração.
- 2) Considera-se a localização de deformações específicas na forma de uma linha de descontinuidade de deslocamentos incorporada no domínio do elemento.
- 3) Existem duas equações constitutivas definindo o comportamento pós-localização do material: uma relação tensão-deslocamento para a linha de descontinuidade e uma relação convencional tensão-deformação para o resto do domínio.
- 4) Os elementos finitos resultantes são não-conformes.

O elemento finito usado neste modelo é o QMITC (Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components), Dvorkin e Vassolo (1989). Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional baseado no método de interpolação mista dos componentes tensoriais, ou seja, adota uma interpolação para os deslocamentos e uma para as deformações específicas e realiza as duas interpolações em conjunto.

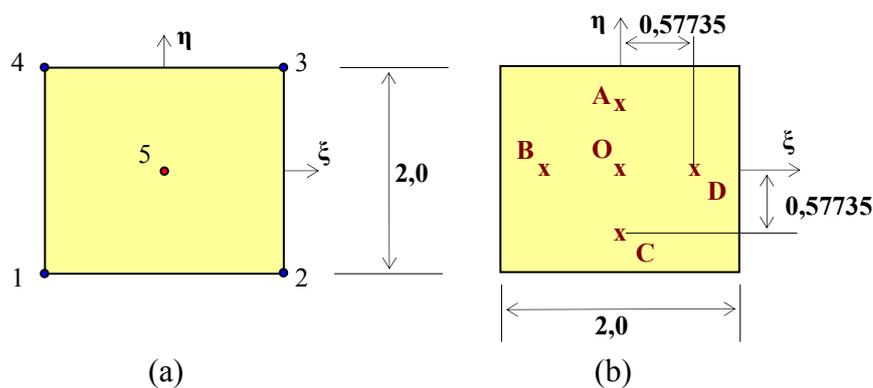


Figura 3.17 - Elemento QMITC
a) nós da interpolação de deslocamentos, b) pontos de interpolação das deformações.

Para interpolar os deslocamentos, se utiliza as funções de interpolação do elemento isoparamétrico com 5 (cinco) nós, ver figura 3.17(a).

A interpolação do campo de deformações dentro do elemento é feita por

$$\hat{\varepsilon}_{\xi\xi} = \hat{\varepsilon}_{\xi\xi}|_O^{DI} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{\varepsilon}_{\xi\xi}|_D^{DI} - \hat{\varepsilon}_{\xi\xi}|_B^{DI})\frac{|J_O|}{|J|}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{\varepsilon}_{\xi\xi}|_A^{DI} - \hat{\varepsilon}_{\xi\xi}|_C^{DI})\frac{|J_O|}{|J|}\eta \quad (3.38)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\eta\eta} = \hat{\varepsilon}_{\eta\eta}|_O^{DI} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{\varepsilon}_{\eta\eta}|_D^{DI} - \hat{\varepsilon}_{\eta\eta}|_B^{DI})\frac{|J_O|}{|J|}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}(\hat{\varepsilon}_{\eta\eta}|_A^{DI} - \hat{\varepsilon}_{\eta\eta}|_C^{DI})\frac{|J_O|}{|J|}\eta \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\xi\eta} = \hat{\varepsilon}_{\xi\eta}|_O^{DI}$$

onde

- $\hat{\varepsilon}_{ij}|_{A,B,C,D,O}^{DI}$ são as componentes naturais covariantes do tensor deformação ($i = \xi, \eta$) nos pontos A, B, C, D e O , ver figura 3.17(b), determinadas pela interpolação dos deslocamentos;
- $|J_O|$ é o determinante da matriz Jacobiana no centro do elemento;
- $|J|$ é o determinante do Jacobiano no ponto de coordenadas naturais (ξ, η) .

Como os deslocamentos estão referidos ao sistema cartesiano (x, y) , e as deformações ao sistema de coordenadas naturais (ξ, η) , para se poder trabalhar com as duas interpolações em conjunto, deve-se referir todas as grandezas ao mesmo sistema de coordenadas. A determinação das deformações no sistema cartesiano está detalhada em d'Avila (2003).

Os dois deslocamentos correspondentes ao nó 5 (cinco), ver figura 3.17(a), são condensados à nível do elemento. A matriz de rigidez do elemento QMITC é calculada usando integração numérica com 2x2 pontos de Gauss.

Na figura 3.18 está representado o elemento finito com a linha de descontinuidade de deslocamento. A linha de descontinuidade divide o elemento em dois subdomínios: $V1$ e $V2$.

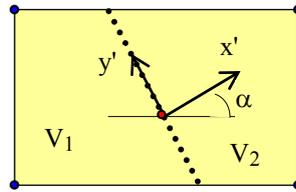


Figura 3.18 - Elemento com a linha de descontinuidade.

O vetor \mathbf{e} , que contém as componentes do deslocamento rígido incremental relativo de $V2$ em relação à $V1$, ou seja, o valor da abertura da fissura no sistema global, é dado por

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (3.41)$$

sendo \mathbf{e}' : o vetor que contém as componentes no sistema local (x', y') do vetor \mathbf{e} ; \mathbf{R} : a matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade (x', y') para o sistema de coordenadas do elemento.

As interpolações dos deslocamentos para $V1$ e $V2$, já considerando a linha de descontinuidade, resultam, respectivamente

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{U} - \phi\mathbf{R}\mathbf{e}') = \mathbf{N}\mathbf{U} - \mathbf{N}\phi\mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (3.42)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{N}\mathbf{U} - (\mathbf{N}\phi - \mathbf{I})\mathbf{R}\mathbf{e}' = \mathbf{N}\mathbf{U} - \mathbf{N}\phi\mathbf{R}\mathbf{e}' - \mathbf{R}\mathbf{e}', \quad (3.43)$$

onde \mathbf{N} é a matriz que contém as funções de interpolação padrão, \mathbf{U} é o vetor deslocamento nodal, \mathbf{e}' é o vetor descontinuidade interna de deslocamentos, e \mathbf{I} é a matriz identidade.

A matriz ϕ é definida por

$$\phi^T = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_n] \quad (3.44)$$

onde n é o número de nós do elemento, e cada uma das submatrizes ϕ_i , de dimensão (2×2) para o caso bidimensional, depende da posição do nó i em relação à linha de localização, de acordo com

$$\phi_i = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{em } V_1 \\ \mathbf{I} & \text{em } V_2 \end{cases} \quad (3.45)$$

Para dois pontos vizinhos, um do lado esquerdo e outro do lado direito da linha de localização, a descontinuidade de deslocamento é dada por

$$\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^- = \mathbf{R}\mathbf{e}' \quad (3.46)$$

Derivando as equações (3.42) e (3.43) se obtém a mesma deformação incremental. Assim, para qualquer ponto em $V1$ ou $V2$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{U} - \phi\mathbf{R}\mathbf{e}') = \mathbf{B}\mathbf{d}_N \quad (3.47)$$

sendo \mathbf{d}_N o vetor deslocamento que vai causar deformação no elemento.

Considerando que cada um dos subdomínios nos quais a linha de localização subdividiu o elemento deve continuar em equilíbrio, pode-se escrever

$$\int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} \, dS = \int_{S_L} \mathbf{t} \, dS \quad (3.48)$$

A matriz \mathbf{P} tem a função de seleccionar as componentes de tensão que serão transmitidas pela físsura.

As relações constitutivas, colocadas agora de forma incremental e linearizadas, para a linha de localização e o resto do domínio são definidas, respectivamente, como

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' \quad (3.49)$$

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.50)$$

onde \mathbf{D}^e é a matriz de rigidez elástica do material e \mathbf{D}^{cr} é a matriz de rigidez tangente da linha de localização.

Substituindo-se as equações (3.50) e (3.47) na equação de equilíbrio de forças ($\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_{int}$) e após alguns arranjos chega-se a

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} (\mathbf{U} - \phi \mathbf{R} \mathbf{e}') dV = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} - {}^t \mathbf{F} \quad (3.51)$$

onde

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} = \int_S \mathbf{N}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} dS \quad (3.52)$$

$${}^t \mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T {}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.53)$$

Ainda, substituindo-se na equação (3.48) as relações constitutivas dadas em (3.49) e (3.50) e considerando

$$\mathbf{S}_{uu} = \int_{S_L} \mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} dS \quad (3.54)$$

e

$$\mathbf{S}_{cc} = \int_{S_L} (\mathbf{P}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \phi \mathbf{R} + \mathbf{D}^{cr}) dS \quad (3.55)$$

chega-se a expressão que relaciona os graus de liberdade internos e externos de forma direta

$$\mathbf{e}' = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu} \mathbf{U} \quad (3.56)$$

Assim, pode-se condensar os graus de liberdade correspondentes à linha de localização à nível de elemento. Usando (3.56) na equação (3.51), finalmente chega-se ao passo linearizado

$${}^t \mathbf{K}^* \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{F} \quad (3.57)$$

sendo

$${}^t \mathbf{K}^* = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} \left(\mathbf{I} - \phi \mathbf{R} \mathbf{S}_{cc}^{-1} \mathbf{S}_{uu} \right) dV \quad (3.58)$$

a matriz de rigidez tangente consistente da nova formulação.

A configuração final de equilíbrio é obtida efetuando-se duas etapas de iterações: no elemento até que a igualdade (3.48) seja estabelecida; e na estrutura global, equação (3.57), a iteração padrão, amplamente utilizada em análise via Elementos Finitos. A iteração da equação (3.48) até que o equilíbrio entre as forças transmitidas na fissura e as forças no domínio do elemento seja estabelecido é o ponto decisivo do modelo. A seguir, apresenta-se como o processo é feito no modelo original, considerando apenas a contribuição do concreto.

Quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento, para a *i*-ésima iteração em (3.57), os seguintes procedimentos devem ser realizados à nível do elemento:

1) $k=0$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'_{(0)}{}^{(i)} = {}^t \mathbf{e}' \text{ - abertura da fissura}$$

2) ${}^{t+\Delta t} \mathbf{d}_{N(k)}{}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \phi \mathbf{R} \mathbf{e}'_{(k)}{}^{(i)}$ - deslocamento que vai causar deformação no elemento

3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno (condensado), resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} {}^t \mathbf{K}_{ee}^{(i)} & {}^t \mathbf{K}_{ei}^{(i)} \\ {}^t \mathbf{K}_{ie}^{(i)} & {}^t \mathbf{K}_{ii}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{Ne(k)}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{d}_{Ni(k)}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_e^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i^{(i-1)} \end{bmatrix}$$

O subíndice "i" refere-se ao nó interno e o subíndice "e" aos quatro nós externos do elemento.

4) Calcular, utilizando (3.47) para determinar as deformações, as tensões incrementais no domínio do elemento, $\boldsymbol{\sigma}_{(k)}^{(i)}$, por (3.50).

5) Calcular as tensões incrementais na linha de localização, $\mathbf{t}_{(k)}^{(i)}$, usando a relação (3.49).

6) $\Delta \mathbf{e}_{(k)}^{(i)} = \mathbf{S}_{cc}^{-1} \left[\int_{S_L} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_{(k)}^{(i)} dS - \int_{S_L} \mathbf{t}_{(k)}^{(i)} dS \right]$ - incremento da abertura da fissura

7) Se $(|\Delta \mathbf{e}'|) < (\text{tolerância})$ então a convergência, à nível do elemento, foi alcançada; se não,

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}_{(k+1)}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{e}_{(k)}^{(i)} + \Delta \mathbf{e}_{(k)}^{(i)} \quad \text{- nova abertura da fissura}$$

$$k = k+1$$

voltar para 2)

Para os elementos onde a linha de localização foi aberta, a valor da tensão só é relevante no centro do elemento.

3.5.2 O Modelo de d'Avila

A fissuração de estruturas de concreto armado é caracterizada pelo aparecimento de várias fissuras espalhadas ao longo da peça. Desta forma, d'Avila (2003) fez algumas alterações no modelo original proposto por Dvorkin et al. (1990), para que este seja capaz de representar esta situação. O modelo resultante é capaz de representar um número variável de fissuras em cada elemento e considera a parcela referente à armadura no equilíbrio de forças no elemento.

A inclusão da armadura altera significativamente o processo de formação e abertura da fissura e, conseqüentemente, a transmissão de forças através da mesma. O surgimento de uma fissura acontece quando as deformações nas barras de aço da armadura e o concreto adjacente têm valores diferenciados, havendo um escorregamento relativo entre os dois materiais. Assim, a

abertura da fissura é governada pelas diferenças entre as distribuições de deformações do aço e do concreto na região da fissura.

Antes de mostrar o procedimento proposto por d'Avila (2003) para inclusão da armadura no modelo original, para poder representar o comportamento do concreto armado, cabe ainda salientar alguns aspectos importantes para a compreensão do mesmo.

Como já foi destacado anteriormente, o modelo de d'Avila (2003) somente pode simular a transferência de tensão através de fissuras que sejam ortogonais às armaduras. Conseqüentemente, somente as tensões (ou forças, ou deformações) na direção normal à fissura (e longitudinal à barra de aço) são determinadas. Porém, mesmo podendo-se trabalhar com as grandezas envolvidas de forma escalar (já que somente uma direção é considerada), a forma tensorial de representação das variáveis é mantida.

Para o concreto armado, a configuração de equilíbrio para a igualdade (3.48) não é mais obtida pela iteração descrita anteriormente. Agora, o processo é governado pela transferência de tensões por aderência entre as barras de armadura e o concreto adjacente.

O procedimento para quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento e para a *i-ésima* iteração da estrutura global, é o seguinte:

- 1) Considerar a abertura da fissura igual à abertura da fissura da iteração global anterior (como no processo original).
- 2) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que vai causar deformação no elemento (como no processo original).
- 3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno (como no processo original).
- 4) Determinar as deformações, $\epsilon_c^{(i)}$, e as tensões, $\sigma_{(k)}^{(i)}$, do concreto no domínio do elemento, respectivamente pelas equações (3.47) e (3.50) (como no processo original).
- 5) Considerar a deformação média no aço ao longo do elemento e à na fissura igual aos valores da iteração global anterior

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i-1)} \quad (3.59)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i-1)} \quad (3.60)$$

6) Calcular a tensão na armadura no domínio do elemento, $\boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)}$, considerando comportamento elasto-plástico perfeito para o material.

7) Determinar as tensões na linha de localização, $\mathbf{t}_{(k)}^{(i)}$, usando a relação (3.49) (como no processo original).

8) Calcular as forças atuantes:

- a força resultante do concreto no domínio do elemento, $\mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)}$, utilizando a parte esquerda na igualdade (3.48);

- a força resultante do aço no domínio do elemento:

$$\mathbf{F}_{ES(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)} A_s \quad (3.61)$$

- a força resultante total no domínio do elemento:

$$\mathbf{F}_{ET(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)} + \mathbf{F}_{ES(k)}^{(i)} \quad (3.62)$$

- a força resultante do concreto transmitida na linha de localização, $\mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)}$, utilizando a parte direita na igualdade (3.48);

- a força resultante no aço na fissura:

$$\mathbf{F}_S^{(k)} = \mathbf{F}_{ET(k)}^{(i)} - \mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)} \quad (3.63)$$

9) Determinar a deformação na armadura na fissura por

$$\epsilon_{s0(k)}^{(i)} = F_{S(k)}^{(i)} / E_s / A_s \quad (3.64)$$

10) Com o valor da deformação na armadura na fissura, $\epsilon_{s0(k)}^{(i)}$, para cada nível de carga, entrar na rotina do modelo de transferência de tensão por aderência e calcular:

- o comprimento de transferência x_{Rcrack} , através de (3.36);
- a deformação média do aço ao longo do elemento, $\epsilon_{sm(k)}^{(i)}$, utilizando a equação (3.30) para determinar os valores extremos;
- a deformação média do concreto no domínio do elemento, $\epsilon_{cm(k)}^{(i)}$, utilizando a equação (3.31) para determinar os valores extremos;
- o espaçamento entre fissuras, DLS , e a quantidade de fissuras do elemento, NF , conforme o caso de peça longa ou curta;
- o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente, s_0 , utilizando a Equação (3.28) ou as (3.26) e (3.27).

11) Calcular o valor da abertura de cada fissura (que será utilizado na equação (3.49) para determinar o valor da tensão na fissura) por

$$UC1 = e'(1) = 2s_0 \quad (3.65)$$

12) Calcular o valor total da abertura da fissura por elemento, que será utilizado nas equações (3.42) e (3.43) na determinação do deslocamento que vai causar deformação no elemento

$$UC = e'(1) = UC1 \times NF \quad (3.66)$$

13) Repetir os itens 6), 7) e 8-a), 8-b), 8-c), 8-d)

14) Calcular as forças:

- a força resultante no aço na fissura:

$$\mathbf{F}_{\text{CRS}(k)}^{(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} E_s A_s \quad (3.67)$$

- a força resultante total na linha de localização:

$$\mathbf{F}_{\text{CT}(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{\text{CR}(k)}^{(i)} + \mathbf{F}_{\text{CRS}(k)}^{(i)} \quad (3.68)$$

15) Repetir o processo todo mais uma vez.

No modelo de Dvorkin, apenas uma fissura pode formar-se em cada elemento, passando pelo nó central. No concreto armado, surgem várias fissuras espalhadas ao longo do elemento, mas, para o equilíbrio interno de forças, considera-se todas agrupadas no centro do elemento.

O procedimento exposto acima é repetido somente duas vezes para cada iteração global, à nível da estrutura. Isto se deve ao fato que, durante este procedimento, ser utilizada a rotina do modelo de transferência de tensão, cujos parâmetros também são determinados via processo iterativo.

Quando a convergência à nível da estrutura é alcançada, a convergência a nível do elemento também é atingida.

Após o surgimento da fissura, todas as solicitações são determinadas apenas para o nó central do elemento, por onde passa a linha de localização. As solicitações que serão utilizadas na iteração da estrutura global, equação (3.57), são as tensões no concreto no domínio do elemento e na armadura ao longo do elemento.

3.5.3 Modelo Proposto

Como já mencionado, o modelo incorporado que está sendo desenvolvido neste trabalho é uma continuação das alterações propostas em d'Avila (2003).

A seguir, antes de expor as alterações implementadas, far-se-á um relato sobre as limitações do modelo de d'Avila com o intuito de proporcionar uma melhor compreensão da necessidade das modificações propostas.

3.5.3.1 Limitações do modelo de d'Avila

O modelo original é capaz de simular corretamente o comportamento de peças de concreto armado tracionadas. Porém, como só é possível simular a transferência de tensão por aderência em fissuras normais ao eixo longitudinal das barras de armadura, quando as peças estão submetidas à flexão ou ao corte, o modelo é limitado, não sendo capaz de representar as forças transmitidas através das fissuras inclinadas corretamente.

Mesmo na análise de peças de concreto armado submetidas à tração, existe a restrição em relação à posição da barra da armadura na malha de elementos finitos. Todos os elementos devem possuir pelo menos uma barra de armadura, ou então, considerando a existência de elementos sem armadura dentro da zona de concreto envolvido na transferência de tensão por aderência, somente o elemento inferior da peça pode possuir barras no seu interior, como mostra a figura 3.19.

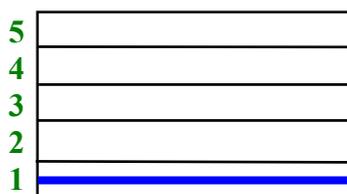


Figura 3.19: Peça de concreto armado com elementos sem armadura

Além disso, na existência de elementos sem armadura, a malha empregada na análise fica limitada a apenas uma coluna de elementos fissurados, ou seja, não é possível simular duas zonas de fissuração independentes.

Também, não está sendo considerada a influência da armadura transversal no processo de fissuração. Elementos somente com estribos são considerados como elementos sem armadura.

Cabe ainda salientar alguns aspectos importantes do modelo de d'Avila que não foram expostos no item 3.5.2.

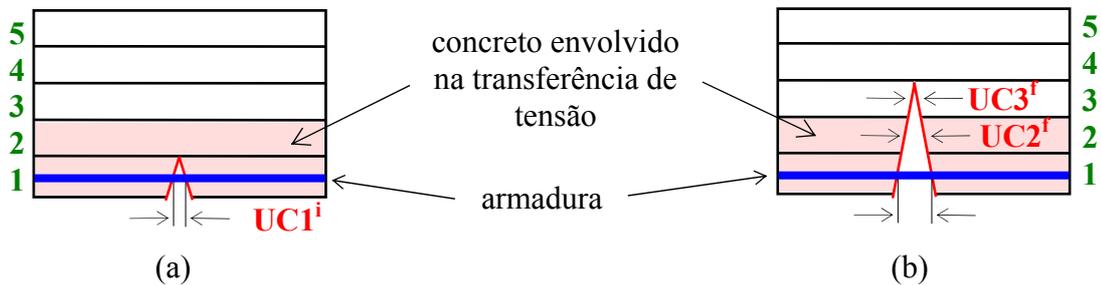


Figura 3.20: Procedimento adotado a) configuração inicial; b) configuração final.

A área de concreto da seção transversal envolvida na transferência de tensão, utilizada na rotina de transferência de tensão é determinada, seguindo as recomendações do Código Modelo CEB-FIP 1990, por $A_c = b h^*$, sendo b a largura da viga e h^* a parcela da altura da viga compreendida a uma distância de $7,5\phi$ acima e abaixo da barra de aço (ϕ é o diâmetro da barra de aço). Para o caso representado na figura 3.20, $h^* = \text{altura dos elementos 1 e 2}$.

A transferência de tensões através da fissura é feita somente pelo elemento que possui armadura, no caso da figura 3.20, o elemento 1. Portanto, o processo iterativo apresentado no item 3.5.2, é feito somente para o elemento com armadura. Para os elementos fissurados e sem armadura, elementos 2 e 3 da figura 3.20(b), a solicitação que deve-se determinar é a tensão, e conseqüentemente a deformação, no domínio do elemento, respectivamente pelas equações (3.50) e (3.47). Para isto é necessário determinar o valor do deslocamento que vai causar deformação no elemento, d_N . Basicamente, o valor de d_N é determinado subtraindo-se do deslocamento total, U , o valor da abertura da fissura, UC . O valor da abertura da fissura para os elementos 2 e 3 da figura 3.20(b), $UC2^f$ e $UC3^f$, são determinados considerando-se uma variação linear para a abertura da fissura. Portanto, para a configuração final da figura 3.20(b), $UC2^f = 2/3 UC1^f$ e $UC3^f = 1/3 UC1^f$.

3.5.3.2 Alterações propostas

Para contornar as limitações do modelo original, expostas em 3.5.3.1, novas subrotinas e alterações nas já existentes foram feitas. A seguir, apresentam-se as modificações propostas.

a) Grupos de fissuração

Primeiramente considerou-se, para o caso onde existam elementos sem armadura, a possibilidade das barras de armadura ocuparem qualquer posição dentro da malha de elementos finitos, e também a possibilidade de existir mais de um elemento com barras no seu interior.

A existência de uma malha de elementos finitos com mais de uma coluna de elementos envolvidos na fissuração, bem como a existência de barras de armaduras de aços diferentes, também foram consideradas.

Para isso, uma subrotina que considera a existência de grupos e subgrupos de fissuração foi implementada. O procedimento adotado é o seguinte:

- cada coluna de elementos finitos representa um grupo de fissuração;
- dentro de cada grupo de fissuração, cada elemento com armadura longitudinal e os elementos sem armaduras seguintes, representam um subgrupo, aonde a fissuração de cada subgrupo é independente.

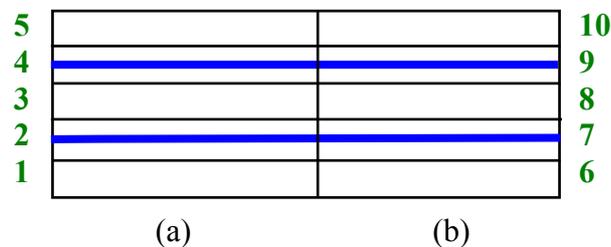


Figura 3.21: Divisão dos grupos de fissuração a) grupo 1; b) grupo 2.

No exemplo mostrado na figura 3.21, existem dois grupos de fissuração. Dentro de cada grupo, existem três subgrupos.

Grupo 1 → subgrupo 1 → elemento 1
 → subgrupo 2 → elementos 2, 3
 → subgrupo 3 → elementos 4, 5

Grupo 2 → subgrupo 1 → elemento 6
 → subgrupo 2 → elementos 7, 8
 → subgrupo 3 → elementos 9, 10

Como mostra a figura 3.21, os elementos inferiores dos grupos de fissuração (elementos 1 e 6), não possuem armadura. Desta forma, antes que o primeiro elemento com armadura de cada grupo fissure, a fissuração dos elementos inferiores é analisada como se a peça fosse de concreto simples, ou seja, conforme o modelo de Dvorkin, Cuitiño e Gioia (1990), exposto no item 3.5.1. Após o primeiro elemento com armadura do grupo fissurar, considera-se a peça de concreto armado para a análise de todos os elementos fissurados do grupo.

b) Determinação das barras que cruzam a fissura

O passo seguinte é a verificação das barras de armadura que são interceptadas pela fissura. Quando a linha de localização surge no elemento, é determinado o ângulo da fissura. A partir da relação entre o ângulo da fissura e um ângulo limite, calculado a partir das dimensões dos lados do elemento, é possível determinar quais barras são cortadas pela fissura. Assim, são possíveis os seguintes casos, mostrados na figura 3.22:

- Fig. 3.22(a) – elemento com armadura longitudinal e estribo, e ambas as armaduras interceptadas pela fissura;
- Fig. 3.22(b) – elemento com armadura longitudinal e estribo, e somente a armadura longitudinal interceptada pela fissura;
- Fig. 3.22(c) – elemento com armadura longitudinal e estribo, e somente o estribo interceptado pela fissura;
- Fig. 3.22(d) – elemento só com armadura longitudinal, e a mesma interceptada pela fissura;
- Fig. 3.22(e) - elemento só com armadura longitudinal, e a mesma não interceptada pela fissura;
- Fig. 3.22(f) - elemento só com estribo, e o mesmo interceptado pela fissura;
- Fig. 3.22(g) - elemento só com estribo, e o mesmo não interceptado pela fissura.

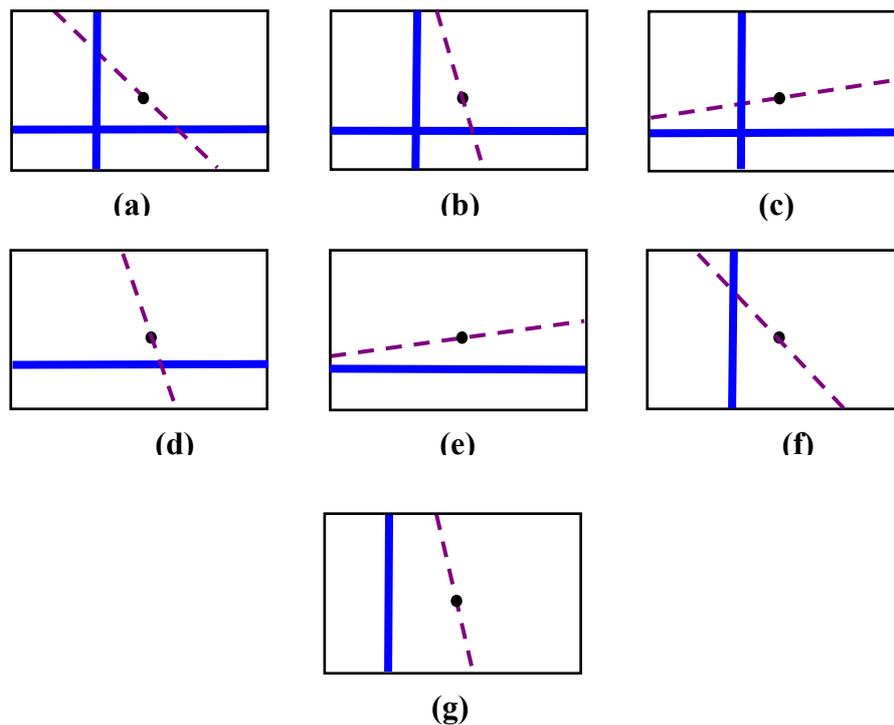


Figura 3.22– Situações possíveis para a fissura interceptar a armadura.

Conseqüentemente, podem existir elementos só com armaduras transversais, e estas por sua vez, serem interceptadas pela fissura. Também, podem existir elementos só com armaduras longitudinais, e estas não serem cortadas pela fissura. Dessa forma, um procedimento de atualização dos subgrupos de fissuração foi desenvolvido para contemplar estes casos. Assim, quando existirem elementos só com armaduras transversais, e estas forem cortadas pela fissura, ver figura 3.22(f), um novo subgrupo de fissuração surge e, para o caso em que existam elementos só com armaduras longitudinais, e estas não forem cortadas pela fissura, como mostra a figura 3.22(e), um subgrupo deixa de existir, e este elemento passa a ser considerado como um elemento sem armadura na análise da fissuração. Assim, a transferência de tensões através da fissura passa a ser feita por todos elementos que possuem a armadura interceptada pela fissura, independente da armadura ser horizontal ou vertical.

c) Consideração de fissuras inclinadas

Mesmo com as alterações propostas em a) e b), ainda existe a restrição do modelo simular somente a transferência de tensão por aderência em fissuras normais ao eixo longitudinal das barras de armadura. Portanto, no processo iterativo apresentado no item 3.5.2, todas as

solicitações são calculadas na direção normal à fissura, que coincide com a direção da barra de aço. Agora, o próximo passo para a análise das fissuras inclinadas, é a consideração do ângulo de inclinação da fissura no cálculo das solicitações na linha de localização.

Para isso, inicialmente, no cálculo da tensão, σ_{ES} , e da força resultante, F_{ES} , da armadura no domínio do elemento, são determinadas as contribuições da armadura longitudinal ($\sigma_{ES}(1)$ e $F_{ES}(1)$), e do estribo ($\sigma_{ES}(2)$ e $F_{ES}(2)$), conforme as situações apresentadas na figura 3.22. Assim, para as situações da figura 3.22 (b) e (d), são determinados somente os valores de $\sigma_{ES}(1)$ e $F_{ES}(1)$; para as da figura 3.22 (c) e (f), somente $\sigma_{ES}(2)$ e $F_{ES}(2)$; já para a da figura 3.22 (a) são determinados os dois valores de tensão e de força. Em seguida, é feita a rotação da força, F_{ES} , do sistema de coordenadas global para o sistema de coordenadas local da fissura, F_{ES}' , como mostra a figura 3.23(a). A força resultante no aço na fissura, F_{S}' , dada pela equação (3.63), passa a ser calculada nas direções normal e tangencial à fissura, ver figura 3.23(b). Em seguida, para a realização dos demais passos do processo iterativo, é feita a rotação desta força do sistema local para o global, F_S . Assim, é possível simular a transferência de tensões também em fissuras inclinadas, bem como a influência dos estribos no processo de fissuração.

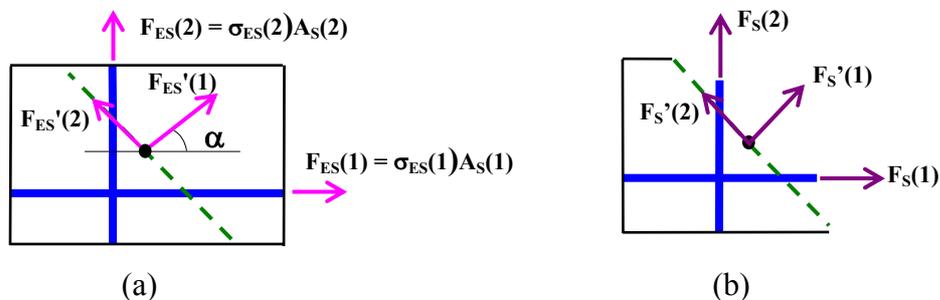


Figura 3.23 – Forças na armadura: a) no domínio do elemento; b) na linha de localização.

d) Procedimento proposto

Considerando as modificações apresentadas nos item a), b) e c), o procedimento proposto, para quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento e para a i -ésima iteração da estrutura global, é descrito a seguir.

1) Considerar a abertura da fissura, $e'_{(0)}^{(i)}$, igual à abertura da fissura da iteração global anterior.

- 2) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que vai causar deformação no elemento, $\mathbf{d}_{N(k)}^{(i)}$.
- 3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno, $\mathbf{d}_{Ni(k)}^{(i)}$.
- 4) Determinar as deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{(i)}$, e as tensões, $\boldsymbol{\sigma}_{(k)}^{(i)}$, do concreto no domínio do elemento, respectivamente pelas equações (3.47) e (3.50).
- 5) Considerar a deformação média no aço ao longo do elemento, $\boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i)}$, e na fissura, $\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)}$, igual aos valores da iteração global anterior.
- 6) Calcular a tensão na armadura no domínio do elemento, $\boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)}$, considerando comportamento elasto-plástico perfeito para o material.
- 7) Determinar as tensões na linha de localização, $\mathbf{t}_{(k)}^{(i)}$, usando a relação (3.49).
- 8) Calcular as forças atuantes:
 - a força resultante do concreto no domínio do elemento, $\mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)}$, utilizando a parte esquerda na igualdade (3.48);
 - a força resultante do aço no domínio do elemento:

$$\mathbf{F}_{ES'(k)}^{(i)} = (\boldsymbol{\sigma}_{ES(k)}^{(i)} \mathbf{A}s) \mathbf{R}^{-1} \quad (3.69)$$

onde \mathbf{R} é a matriz que rotaciona as componentes cartesianas do vetor no sistema (x', y') , para o sistema de coordenadas global.

- a força resultante total no domínio do elemento:

$$\mathbf{F}_{ET(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{EL(k)}^{(i)} + \mathbf{F}_{ES'(k)}^{(i)} \quad (3.70)$$

- a força resultante do concreto transmitida na linha de localização, $\mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)}$, utilizando a parte direita na igualdade (3.48);

- a força resultante no aço na fissura:

$$\mathbf{F}_S'_{(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_{ET(k)}^{(i)} - \mathbf{F}_{CR(k)}^{(i)} \quad (3.71)$$

9) Determinar a deformação na armadura na fissura por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)} = \mathbf{F}_S'_{(k)}^{(i)} / E_s / A_s \quad (3.72)$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{R} \mathbf{F}_S' \quad (3.73)$$

10) Com o valor da deformação na armadura na fissura, $\boldsymbol{\varepsilon}_{s0(k)}^{(i)}$, para cada nível de carga, entrar na rotina do modelo de transferência de tensão por aderência e calcular:

- o comprimento de transferência x_{Rcrack} , através de (3.36);

- a deformação média do aço ao longo do elemento, $\boldsymbol{\varepsilon}_{sm(k)}^{(i)}$, utilizando a equação (3.30) para determinar os valores extremos;

- a deformação média do concreto no domínio do elemento, $\boldsymbol{\varepsilon}_{cm(k)}^{(i)}$, utilizando a equação (3.31) para determinar os valores extremos;

- o espaçamento entre fissuras, DLS , e a quantidade de fissuras do elemento, NF , conforme o caso de peça longa ou curta;

- o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente, s_0 , utilizando a Equação (3.28) ou as (3.26) e (3.27).

11) Calcular o valor da abertura de cada fissura (que será utilizado na equação (3.49) para determinar o valor da tensão na fissura) por

$$UC1 = \mathbf{e}(1) = 2s_0 \quad (3.74)$$

12) Calcular o valor total da abertura da fissura por elemento, que será utilizado nas equações (3.42) e (3.43) na determinação do deslocamento que vai causar deformação no elemento

$$UC = \mathbf{e}(1) = UC1 \times NF \quad (3.75)$$

13) Repetir os itens 6), 7) e 8-a), 8-b), 8-c), 8-d)

14) Calcular as forças:

- a força resultante no aço na fissura:

$$\mathbf{F}_S^{(k)(i)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{s0}^{(k)(i)} E_s A_s \quad (3.76)$$

- a força resultante total na linha de localização:

$$\mathbf{F}_{CT}^{(k)(i)} = \mathbf{F}_{CR}^{(k)(i)} + \mathbf{F}_S'^{(k)(i)} \quad (3.77)$$

15) $k = k + 1$ e voltar para o passo 2).

No capítulo 4, são apresentados exemplos para comprovar a eficácia destas rotinas implementadas no modelo.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, são mostrados dois exemplos numéricos com o objetivo de verificar a aplicabilidade dos procedimentos expostos no item 3.5.3.

4.1 EXEMPLO 1

O objetivo deste exemplo é validar o procedimento que considera a existência de grupos de fissuração, fazendo uma comparação com os resultados obtidos pelo modelo de d'Avila (2003). Neste exemplo, ainda não está sendo considerada a influência do ângulo da fissura no cálculo das solicitações.

O exemplo consiste de uma viga simétrica, simplesmente apoiada, carregada verticalmente por duas cargas concentradas. O detalhamento da viga é mostrado na figura 4.1.

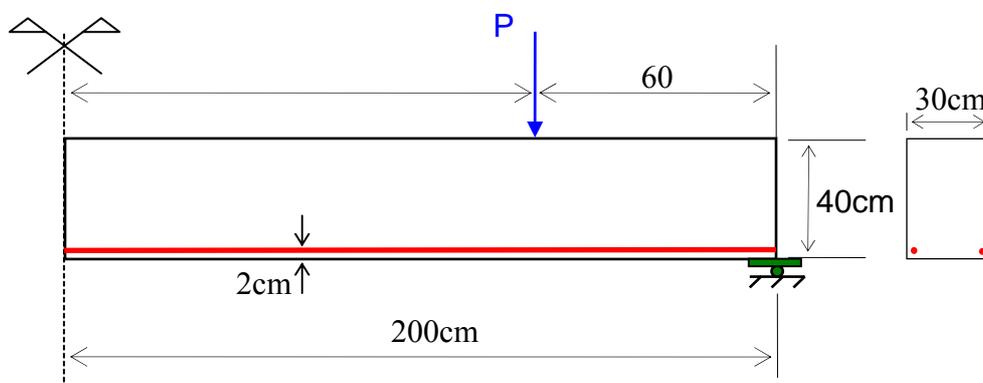


Figura 4.1: Características geométricas da viga analisada.

Este exemplo também foi rodado com o modelo incorporado proposto por d'Avila, onde só é possível simular uma zona de fissuração. Desta forma, foram utilizados dois tipos de concretos diferentes ao longo da viga. O que diferencia os dois materiais é o valor das resistências à tração e à compressão. O material 2, empregado nos elementos 11 a 20 (ver figura 4.3), apresenta valores de resistência bem maiores do que o material 1, empregado nos elementos 1 a 10. O objetivo é fazer com que os elementos 11 a 20 não fissurem. As características físicas dos materiais são as seguintes:

- resistência à tração do material 2 - $f_t = 1,58 \text{ kN/cm}^2$
- resistência à compressão do material 2 - $f_c = 20,0 \text{ kN/cm}^2$
- resistência à tração do material 1 - $f_t = 0,158 \text{ kN/cm}^2$
- resistência à compressão do material 1 - $f_c = 2,0 \text{ kN/cm}^2$
- módulo de elasticidade - $E_c = 3224 \text{ kN/cm}^2$
- coeficiente de Poisson - $\nu = 0,2$
- energia de fratura - $G_f = 4,87E-4 \text{ kN/cm}$.

A armadura longitudinal inferior é composta por duas barras de aço com área igual a 1 cm^2 em cada barra, com tensão de escoamento, f_y , igual a 50 kN/cm^2 , aço com patamar de escoamento definido.

Empregou-se o modelo constitutivo de Ottosen, apresentado no item 3.1.1 do capítulo 3, para simular o comportamento do concreto não fissurado. Considerou-se um diagrama de amolecimento linear para a transmissão de forças através da fissura (ver figura 4.2).

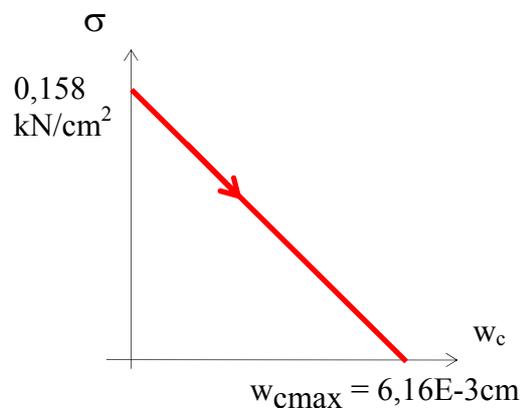


Figura 4.2: Relação constitutiva para o amolecimento na fissura do modelo incorporado.

Na análise computacional, aproveitando a simetria da peça, d'Avila empregou uma malha de vinte elementos finitos para detalhar a metade da viga, conforme mostrado na figura 4.3.

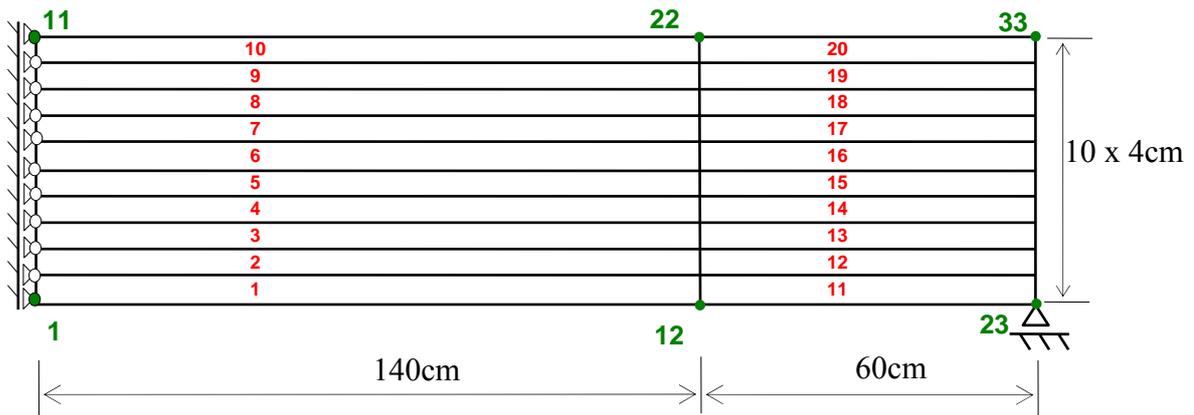


Figura 4.3: Discretização adotada para a análise numérica – Malha 1

Agora, considerando as modificações implementadas no modelo, o passo seguinte foi rodar o exemplo adotando uma malha de 50 elementos, conforme mostrado na figura 4.4, fazendo com que, ao invés de uma, se tenha quatro zonas de fissuração. A intenção é mostrar que o modelo proposto admite mais de uma zona de fissuração independente. De forma análoga à malha 1, os elementos 41 a 50 são constituídos pelo material 2 (que apresenta resistência à tração elevada) e os demais elementos (1 a 40) são constituídos pelo material 1.

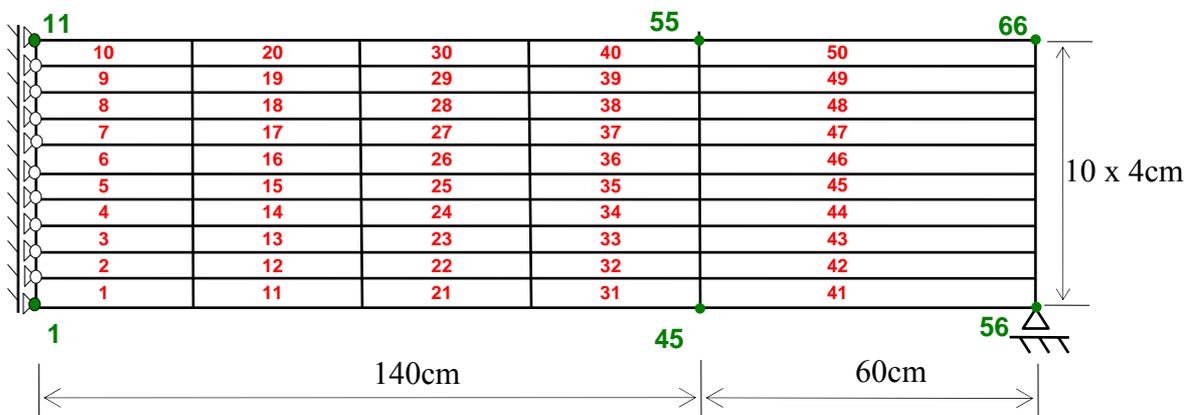


Figura 4.4: Discretização adotada para a análise numérica - Malha 2

As barras de armadura localizam-se nos elementos inferiores das malhas: elementos 1 e 11, para a malha 1; elementos 1, 11, 21, 31 e 41, para a malha 2. Verifica-se que as tensões na armadura, obtidas pelos dois modelos foram coerentes, ou seja, as tensões na armadura nos elementos 1, 11, 21 e 31 (malha 2) apresentam valores próximos aos do elemento 1 (malha1). O mesmo ocorre entre o elemento 11 (malha1) e o elemento 41 (malha2). Isso é mostrado na

tabela 4.1, que apresenta os valores referentes à tensão no aço na fissura e o outro relativo à tensão média na armadura no trecho entre fissuras para uma carga de 53 kN.

Tabela 4.1: Tensões na armadura

elemento	Modelo Proposto		Modelo de d'Ávila	
	Tensão média (kN/cm ²)	Tensão na fissura (kN/cm ²)	Tensão média (kN/cm ²)	Tensão na fissura (kN/cm ²)
1	30	32	33	35
11	36	38	1,7	1,6
21	38	40	-	-
31	38	40	-	-
41	1,9	1,7	-	-

Os diagramas carga aplicada x deslocamento vertical *do nó central*, nó 1, obtidos nas análises numéricas, até a carga de ruptura, estão representados na figura 4.5.

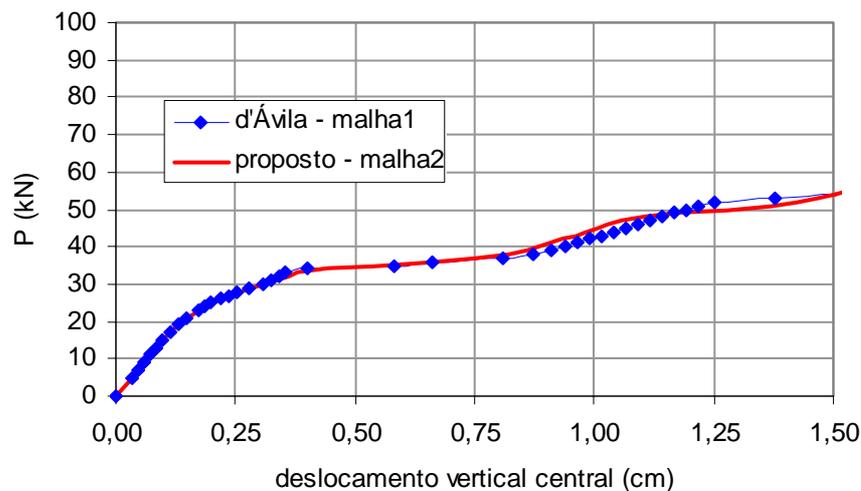


Figura 4.5: Diagrama carga aplicada x deslocamento vertical do nó central

Para a malha adotada por d'Ávila, a quantidade de fissuras em cada elemento fissurado foi de 3,6 fissuras. Já para a malha 2 (modelo proposto), para cada zona de fissuração, surgiram 0,9 fissuras, ou seja, considerando a contribuição das quatro zonas de fissuração, a quantidade total de fissuras foi igual ao valor obtido com a malha 1 ($0,9 \times 4 = 3,6$ fissuras), como era esperado. Assim, pode-se concluir que os valores obtidos com o modelo de d'Ávila e o modelo proposto são praticamente coincidentes, comprovando que o modelo é capaz de

simular de forma correta a existência de mais de uma zona de fissuração ao longo da peça de concreto armado. O fato da quantidade de fissuras ter dado menor que 1 na análise com o modelo proposto, pode ser explicado pelo fato de que, neste caso, o comprimento de transferência x_R é maior que a dimensão do elemento. Desta forma, o elemento fissura, mas não há espaço suficiente para a formação de mais de uma fissura no seu interior.

Na figura 4.6, está representada a variação da tensão no concreto, σ_{xx} , ao longo da peça, para os níveis de carga inicial (23 kN), intermediário (53 kN) e final (93kN).

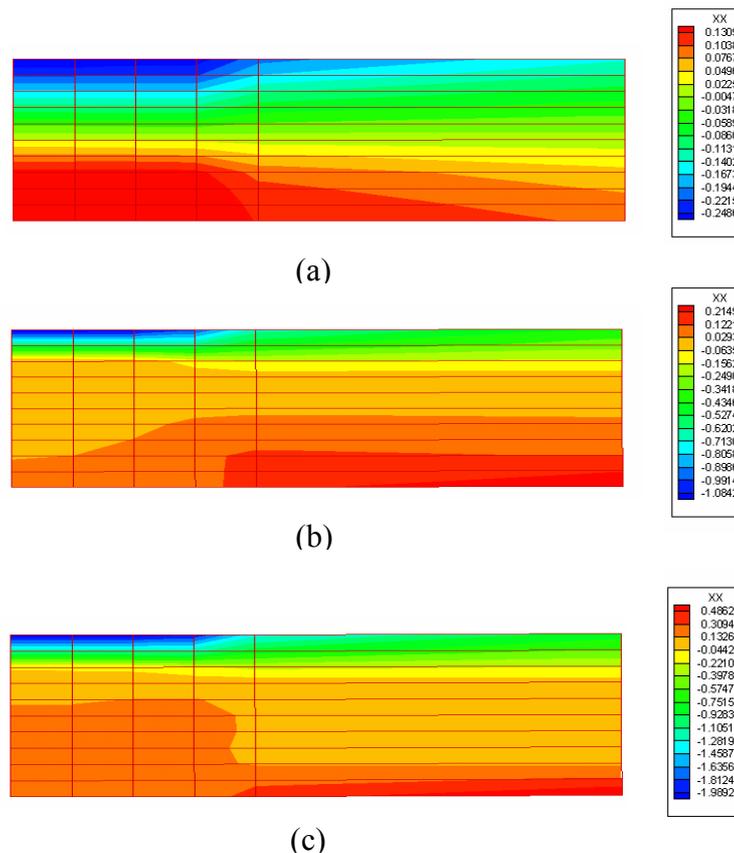


Figura 4.6: Variação da tensão no concreto ao longo da peça para as cargas de a) 23 kN; b) 53 kN ; c) 93 kN.

4.2 EXEMPLO 2

Neste exemplo são analisadas uma série de quatro vigas simétricas (ET1, ET2, ET3 e ET4), simplesmente apoiadas, carregadas verticalmente por duas cargas concentradas. As quatro vigas estudadas são armadas com a mesma quantidade de armadura tanto longitudinalmente

como transversalmente, mas possuem diferentes larguras de alma. O detalhamento do conjunto de vigas (dimensões em centímetros) é mostrado na figura 4.7.

Os resultados numéricos são comparados com resultados experimentais apresentados por Leonhardt e Walther (1962), referentes a um estudo sobre o comportamento ao cisalhamento de peças de concreto armado.

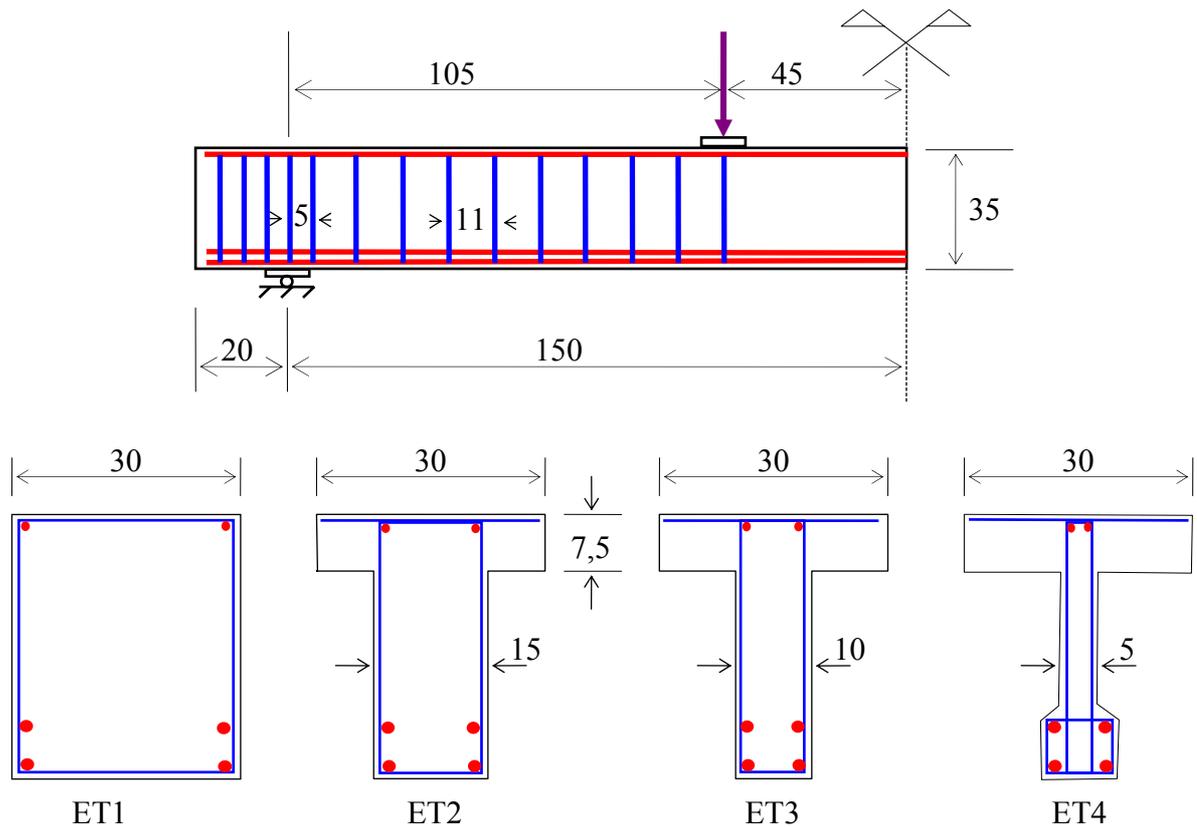


Figura 4.7: Detalhamento das vigas com diferentes larguras de alma.

A armadura longitudinal inferior é composta por quatro barras de 20 mm de diâmetro, dispostas em duas camadas, com tensão de escoamento, f_y , de 42,8 kN/cm², aço classe B. A armadura longitudinal superior consiste de duas barras de 8mm de diâmetro com tensão de escoamento, f_y , de 46,5 kN/cm², aço classe B.

Os estribos são verticais, com diâmetro de 6mm e com tensão de escoamento, f_y , de 32,0 kN/cm², aço com patamar de escoamento definido. O espaçamento variável dos estribos está representado na figura 4.7. As características físicas do concreto são as seguintes:

- resistência à tração - $f_t = 0,233$ kN/cm²

- resistência à compressão - $f_c = 2,42 \text{ kN/cm}^2$
- módulo de elasticidade - $E_c = 3400 \text{ kN/cm}^2$
- coeficiente de Poisson - $\nu = 0,2$
- energia de fratura - $G_f = 4,87E-4 \text{ kN/cm}$.

Empregou-se o modelo de Ottosen para simular o comportamento do concreto não fissurado. Considerou-se o modelo constitutivo de amolecimento linear para a transmissão de forças através da fissura

Na análise computacional, empregou-se uma malha de vinte elementos QMITC, conforme a figura 4.8. A integração numérica é feita com 2×2 pontos de Gauss.

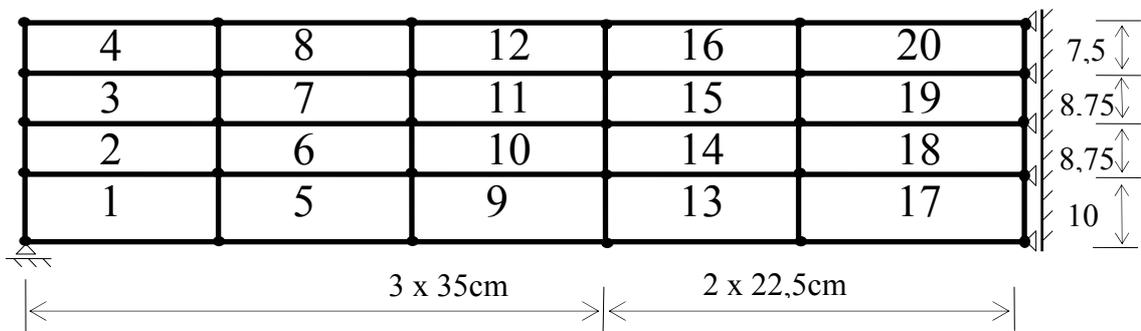


Figura 4.8: Discretização adotada para a análise numérica.

Este mesmo exemplo também foi rodado com um modelo do tipo distribuído, implementado por d'Avila (2003), com o objetivo de comparar resultados. Nesta análise, foi utilizada uma malha de 20 elementos quadrangulares quadráticos de 8 nós para o estado plano de tensões.

Na figura 4.9, mostra-se a configuração final das fissuras ao longo da peça para as quatro vigas (ET1, ET2, ET3 e ET4), obtidas durante os ensaios experimentais.

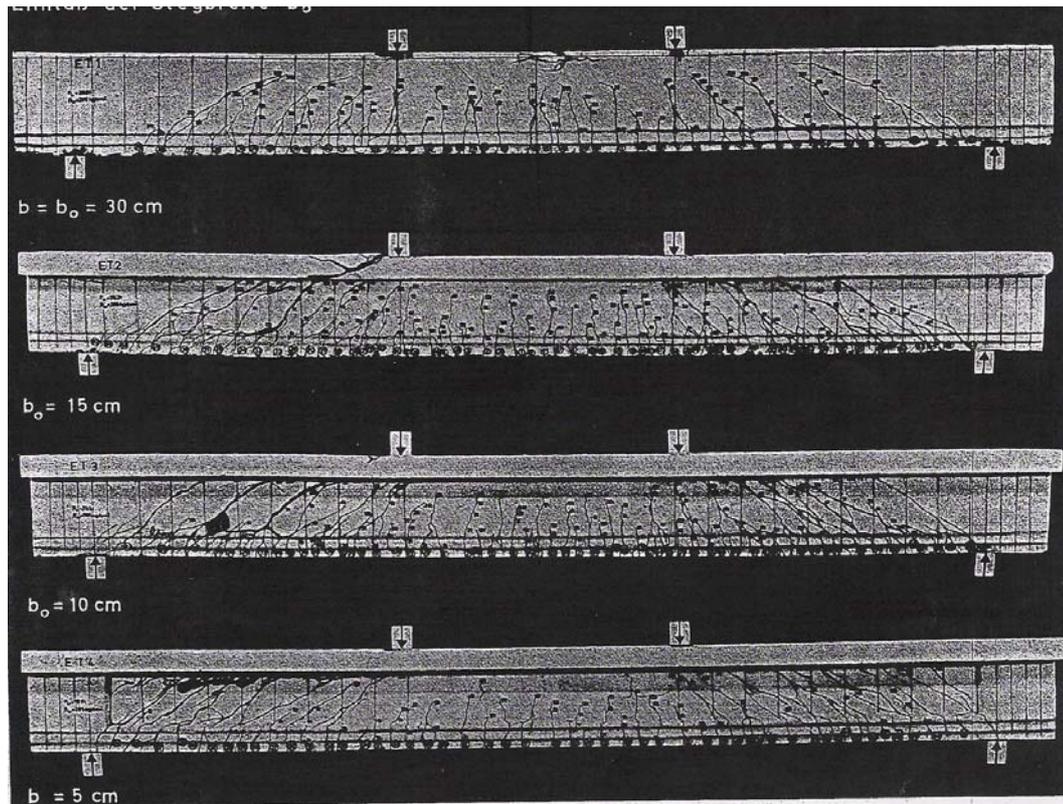


Figura 4.9: Configuração final das fissuras para as vigas ET1, ET2, ET3 e ET4.
(Leonhardt e Walther (1962))

Nas figuras 4.10 a 4.20, mostra-se uma série de resultados obtidos para a viga ET1.

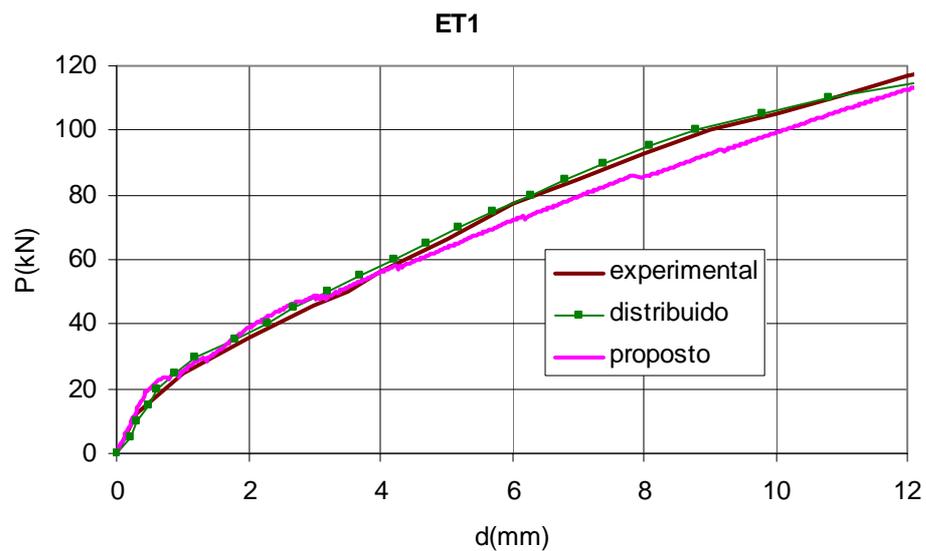


Figura 4.10: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET1.

Na figura 4.10, mostra-se a evolução da flecha ao longo do carregamento, até a carga de ruptura, segundo os resultados obtidos experimentalmente e os obtidos através do modelo proposto e o modelo distribuído. Verifica-se uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos pelos dois modelos e pela análise experimental.

A variação da tensão na armadura longitudinal inferior, ao longo do carregamento, obtidas nesta simulação, para os elementos 5 e 17, está representada na figura 4.11.

Foram plotados dois valores de tensão para o modelo incorporado proposto: um relativo à tensão no aço na fissura (determinado a partir da deformação específica, ε_{s0} , e o outro relativo à tensão média na armadura no trecho entre fissuras (determinado a partir da deformação específica, ε_{sm}). Além disso, estes valores foram plotados em dois pontos distintos da peça: um correspondente ao elemento 17, situado na seção de simetria, e outro relativo ao elemento 5, próximo ao apoio da viga. Verifica-se que a tensão no aço na fissura é maior que a tensão média na armadura no trecho entre fissuras, para os dois elementos fissurados, como era esperado.

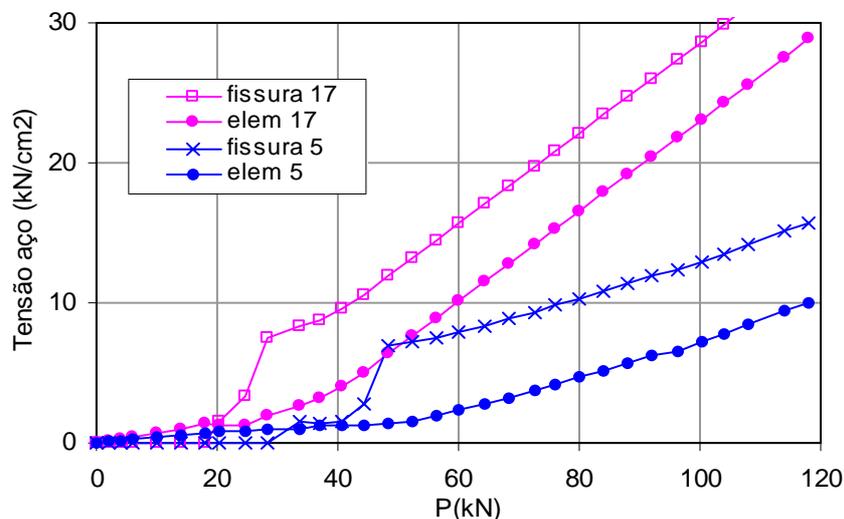


Figura 4.11: Tensão no aço x carga aplicada.

Na figura 4.12, está desenhada a evolução da abertura total das fissuras (número de fissuras x abertura de cada fissura) ao longo do carregamento para todos os elementos fissurados.

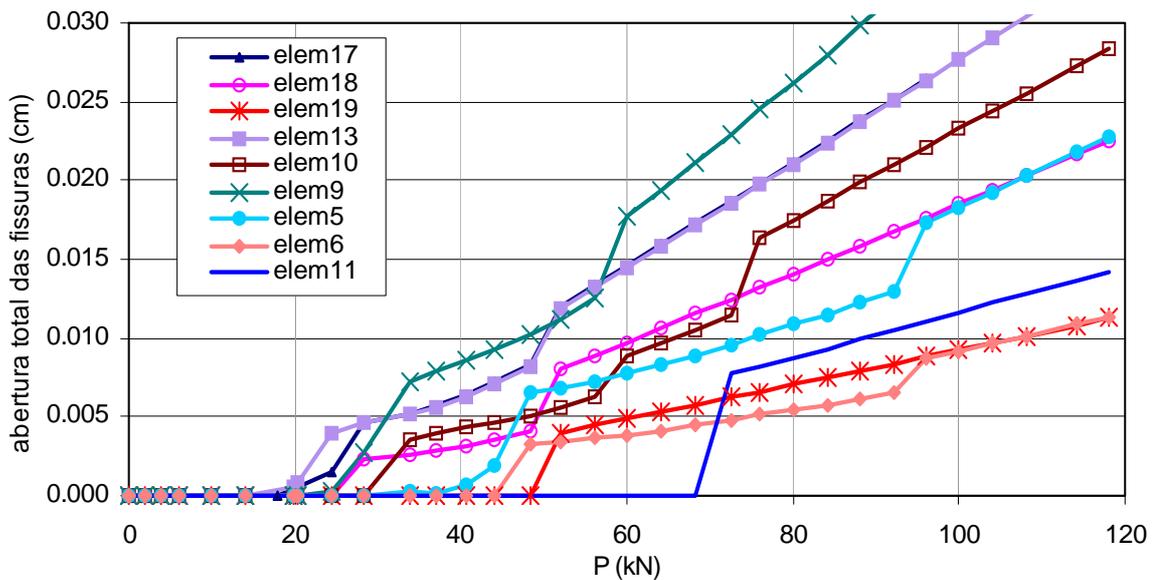


Figura 4.12: Abertura total das fissuras x carga aplicada

A evolução do número total de fissuras ao longo do carregamento para o elemento 17 está graficada na figura 4.13. A formação da primeira geração de fissuras acontece para um nível de carga igual a 19 kN . A segunda geração de fissuras, a configuração final, se forma no nível de carga de 48 kN . O fato da quantidade de fissuras ter dado menor que 1 na análise com o modelo proposto, pode ser explicado pelo fato de que, neste caso, o comprimento de transferência x_R é maior que a dimensão do elemento. Desta forma, o elemento fissa, mas não há espaço suficiente para a formação de mais de uma fissura no seu interior.

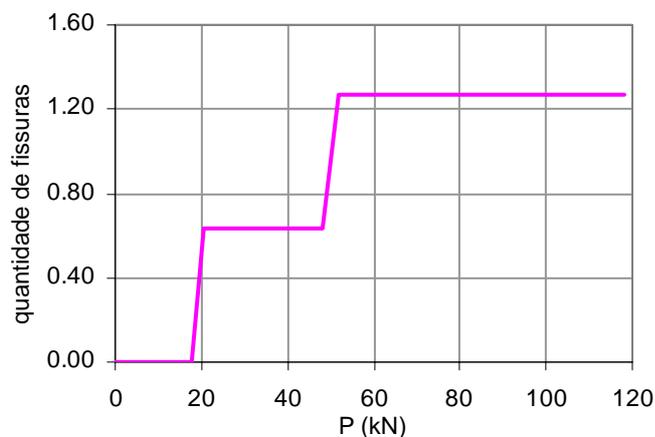


Figura 4.13: Número total de fissuras do elemento 17 x carga aplicada.

Na figura 4.14, está representada o crescimento da abertura de cada uma das fissuras do elemento 17 ao longo do carregamento. Verifica-se que há uma diminuição da abertura de cada fissura no instante da formação da segunda geração de fissuras. Contudo, a abertura total das fissuras, figura 4.12, é sempre crescente.

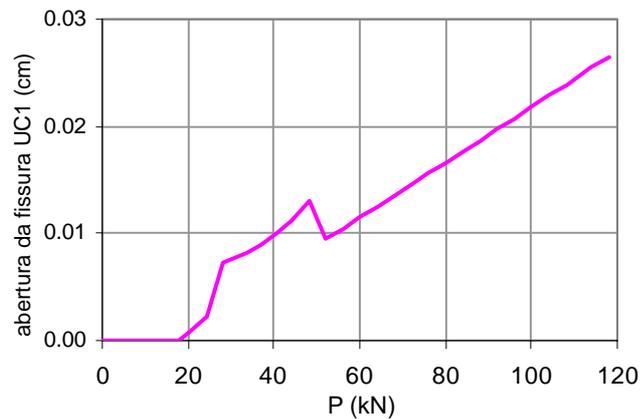


Figura 4.14: Abertura de uma fissura do elemento 17 x carga aplicada.

Na figura 4.15, está plotada a curva *tensão transmitida na fissura no elemento 17 x carga aplicada*. A partir da carga de 29 kN, a fissura não transmite mais tensão.

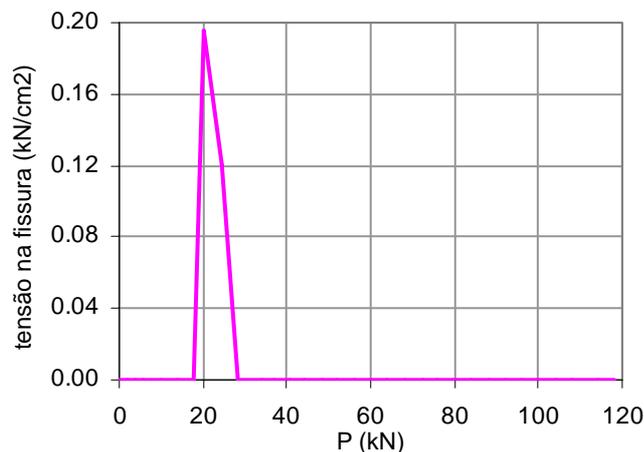


Figura 4.15: Tensão transmitida na fissura no elemento 17 x carga aplicada.

Nas figuras 4.16 e 4.17 comparam resultados obtidos através do modelo proposto e experimentalmente, para os valores de abertura de fissuras, na região compreendida entre o apoio e a carga concentrada.

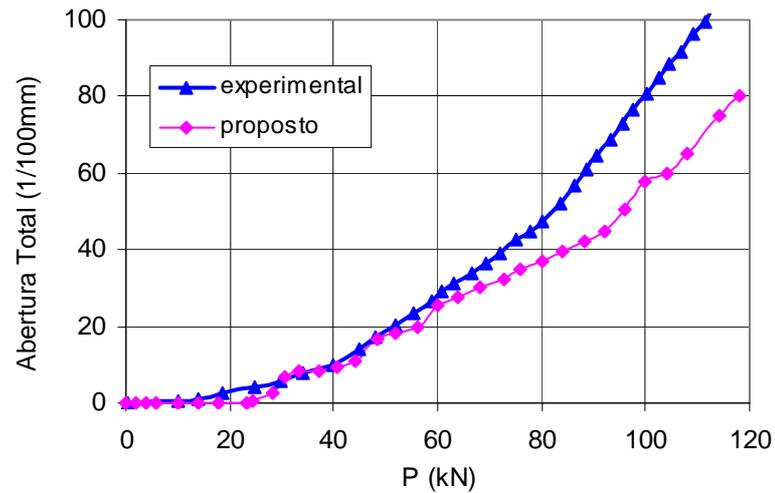
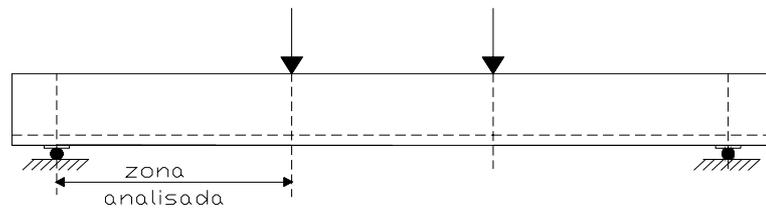


Figura 4.16: Comparação entre a abertura total das fissuras, na altura da armadura tracionada, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto.

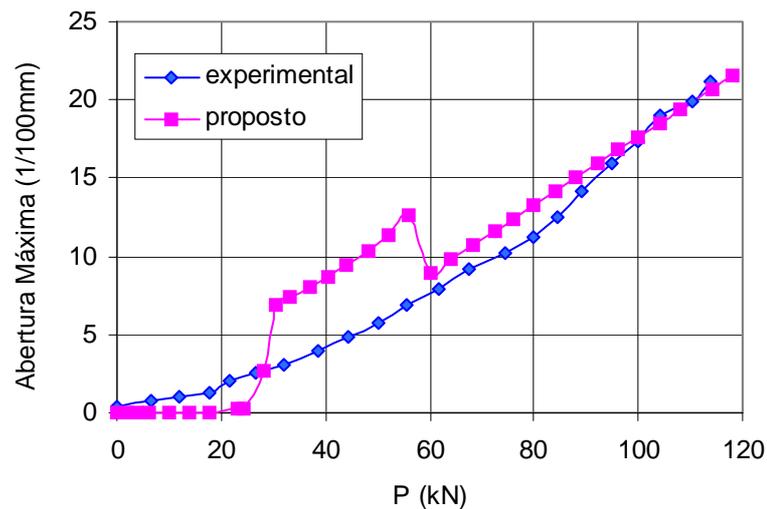


Figura 4.17: Comparação entre as aberturas máximas de fissura, na altura da armadura tracionada, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto.

Na figura 4.16, os valores correspondem a abertura total de fissuras (UC), enquanto que na figura 4.17, analisam-se os valores da abertura máxima da fissura (UC1). Os valores correspondem a aberturas de fissuras na altura da armadura tracionada. A diferença de valores para a abertura máxima de fissuras, encontrada no trecho entre 30 e 60kN, na figura 4.17, pode ser explicada pelo fato da quantidade de fissuras ser menor que 1 para estes níveis de carga.

Finalmente, na figura 4.18, comparam-se as tensões nos estribos, obtidas pelo modelo proposto e experimentalmente. Os valores analisados são as tensões médias, na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 38 e 71 cm a partir do apoio.

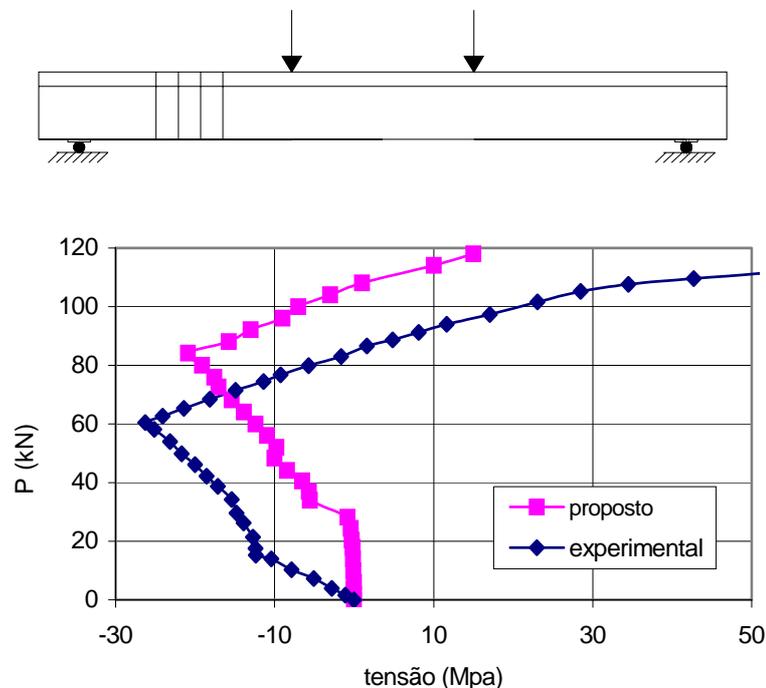


Figura 4.18: Comparação das tensões nos estribos, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto.

Já as vigas (ET2, ET3 e ET4), devido às condições de geometria e carregamento, apresentam fissuras inclinadas que atravessam mais de uma zona de fissuração independente, situação esta não contemplada pelo modelo. Assim, as curvas de evolução da flecha ao longo do carregamento não foram obtidas até a carga de ruptura. Contudo, os resultados obtidos até o ponto onde o programa convergiu, são coerentes com os resultados obtidos experimentalmente e pelo modelo distribuído, como mostram as figuras 4.19 a 4.24.

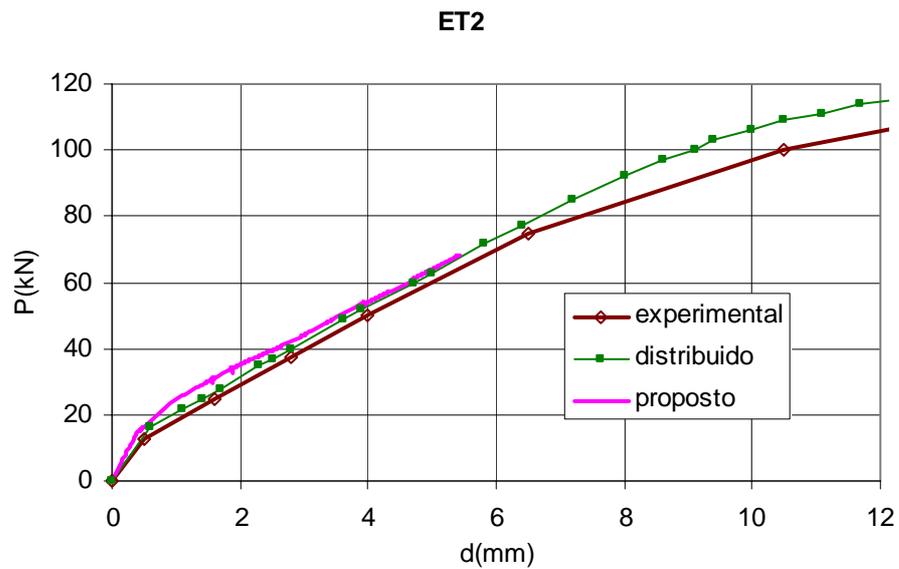


Figura 4.19: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET2.

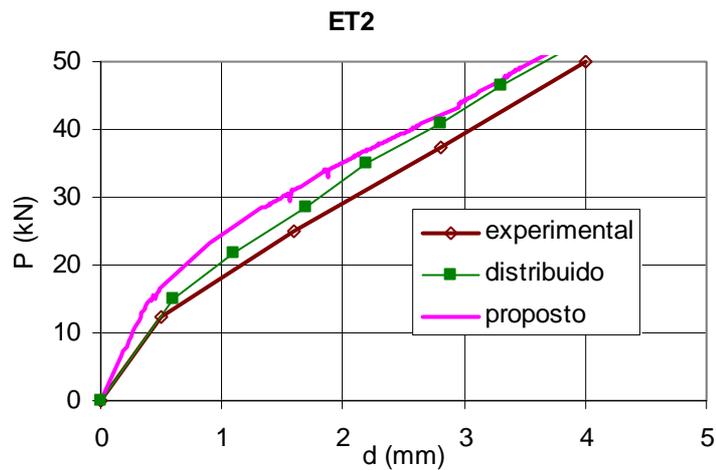


Figura 4.20: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET2, para o trecho analisado pelo modelo proposto.

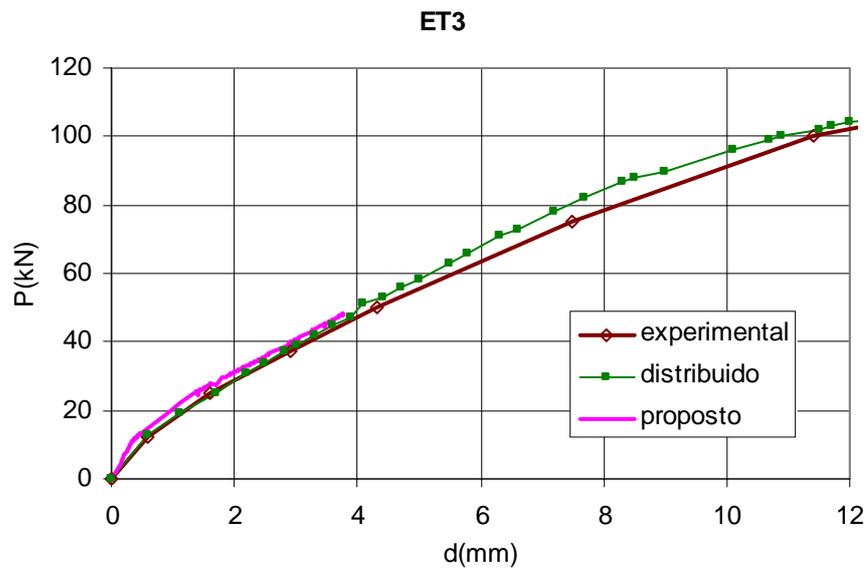


Figura 4.21: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET3.

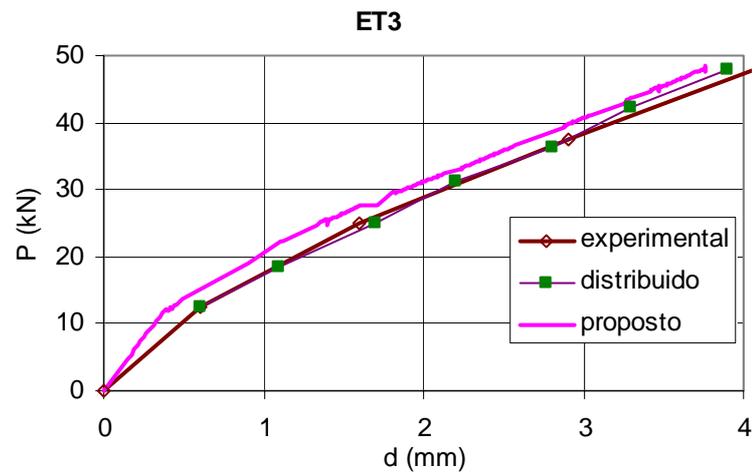


Figura 4.22: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET3, para o trecho analisado pelo modelo proposto.

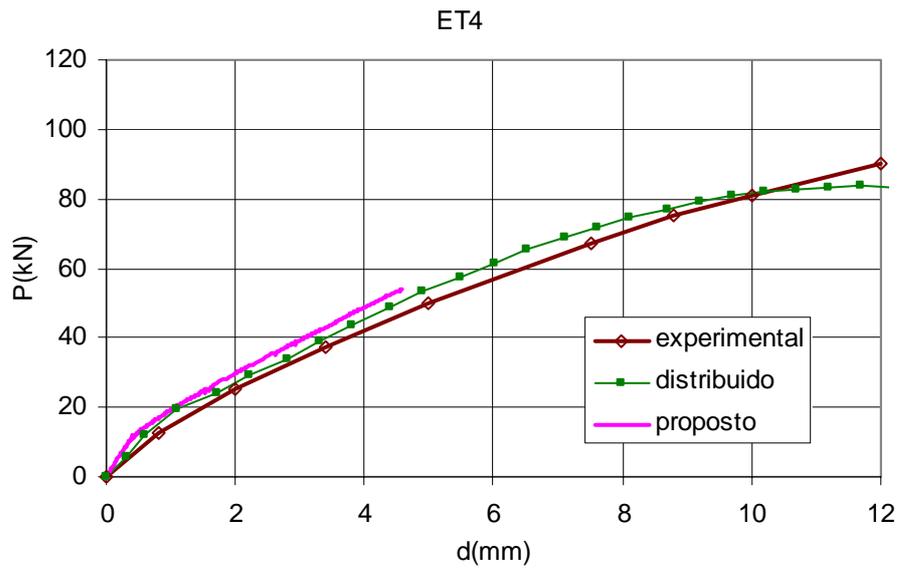


Figura 4.23: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET4.

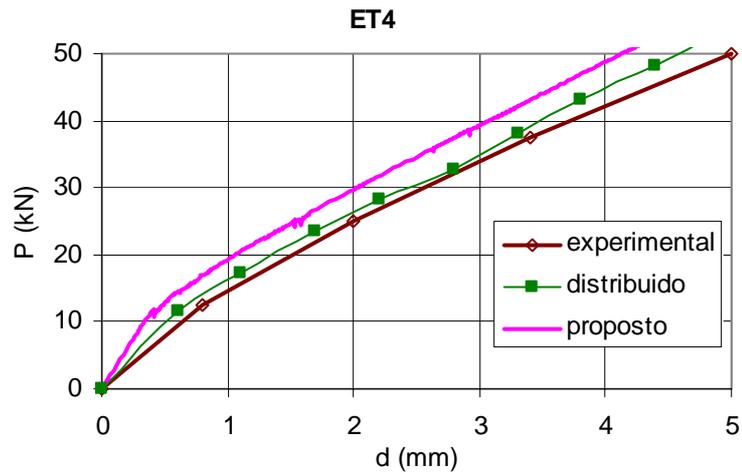


Figura 4.24: Comparação entre as flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais para a viga ET4, para o trecho analisado pelo modelo proposto.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A seguir, são apresentados algumas conclusões obtidas da análise dos resultados mostrados no capítulo anterior e, também, são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros.

5.1 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um modelo numérico para simular o comportamento de fissuração de peças de concreto armado submetidas aos esforços de corte e flexão, através de um modelo de fissura do tipo incorporada.

Da análise dos resultados anteriores, pode-se afirmar que o comportamento de peças de concreto armado pode ser simulada de forma correta pelo modelo proposto, tendo sido alcançada uma boa aproximação frente aos resultados experimentais analisados, considerando a variabilidade inerente ao comportamento destas estruturas. Esta concordância é uma forma de validar o modelo.

Pode-se concluir que o modelo proposto é capaz de simular bastante bem o comportamento de vigas isostáticas de concreto armado. O modelo simula de forma correta não só a flecha no meio do vão, mas também a evolução da tensão nas barras da armadura longitudinal e transversal e da tensão do concreto, ao longo do carregamento. Modelos de fissura do tipo distribuído também conseguem simular este comportamento global de estruturas de concreto armado com menor custo computacional, menor complexidade do algoritmo e maior generalidade de situações. No entanto nos modelos do tipo incorporado consegue-se informações adicionais tais como: abertura e número de fissuras e tensão no aço na fissura. Estas informações são fundamentais quando se deseja entender melhor o processo de fissuração de estruturas de concreto armado, permitindo uma utilização mais otimizada do material.

Outra constatação, é que o modelo consegue representar de forma correta a existência de mais de uma zona de fissuração independente ao longo da peça de concreto armado. Também, as modificações implementadas nesta dissertação permitiram que as barras de armadura, envolvidas no processo de transferência de tensão por aderência nas fissuras, ocupassem qualquer posição dentro da malha de elementos finitos.

O modelo também é capaz de representar a transferência de tensão por aderência, não só em fissuras normais ao eixo longitudinal das barras da armadura, como no modelo original de d'Avila, mas também em fissuras inclinadas.

Também a influência dos estribos no processo de fissuração foi introduzida, sem a qual não seria possível simular o comportamento de vigas de concreto armado fissuradas.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir, são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros. Os aspectos que ainda necessitam ser considerados para a análise do processo de fissuração em peças de concreto armado são:

- Implementação de um procedimento para a análise de vigas contínuas de concreto armado.
- Análise da situação em que o comprimento de transferência, x_R , é maior que a dimensão do elemento, fazendo com que a fissuração de um grupo de elementos tenha influência sobre outro.
- Análise das fissuras devido ao corte, localizadas próximas aos apoios dos elementos (regiões de força cortante grande), que atravessam a peça, atingindo mais de uma zona de fiss do mais de uma zona de fissuração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELYTSCHKO, T.; FISH, J.; ENGELMANN, B.E. A Finite Element with Embedded Localization Zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.70, n.1, p.59-89, sep. 1988.
- BOLZON, G. Hybrid Finite Element Approach to Quasi-Brittle Fracture. **Computer & Structure**, v.60, n.5, p.733-741, 1996.
- BOLZON, G.; CORIGLIANO, A. Finite elements with embedded displacement discontinuity: a generalized variable formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.49, n.10, p.1227-1266, dec. 2000.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Code Model 1990**. Bulletin d'Information n.213/214, Lausanne: CEB, mar. 1993.
- DANTAS, A.U. **Simulação numérica dos processos de recuperação e reforço de peças estruturais em concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.
- D'AVILA, V.M.R. **Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- DOMINGUEZ, N.; BRANCHERIE, D; IBRAHIMBEGOVIC, A; DAVENNE, L. Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong discontinuity model of concrete cracking and a bond-slip of reinforced model. **International Journal for Computer-Aided Engineering and Software**, v.22, n.5/6, p.558-582, jan. 2005.
- DVORKIN, E. N.; VASSOLO, S. A quadrilateral 2-D finite element based on mixed interpolation of tensorial components. **Engineering Computations**, Pineidge Press, v.6, p.217-224, sep. 1989.
- DVORKIN, E.N.; CUITIÑO, A.M.; GIOIA, G. Finite Elements with Displacement Interpoled Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distorcions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.30, p.541-564, 1990.
- DVORKIN, E.N.; ASSANELLI, A.P. 2D finite-elements with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.90 n.1-3, p.829-844, sep. 1991.
- ELWI, A.E.; HRUDEY, M. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics**, New York, ASCE, v.115, n.4, p.740-754, apr. 1989.

- FOSTER, S.J.; BUDIONO B.; GILBERT R.I.. Rotating crack finite element model for reinforced concrete structures. **Computer & Structure**, v.58, n.1, p.43-50, 1996.
- GROOTENBOER, H.J.; LEIJTEN, S.F.C.H.; BLAAUWENDRAD, J. Numerical Models for Reinforced Concrete Structures in Plane Stress. **HERON**, Delft, v.26, n.1C, 1981.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSON, P.E. Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. **Cement and Concrete Reserch**, v.6, p.773-782, 1976.
- JIRÁSEK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.188, p.307-330, 2000.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Embedded crack model.: I. Basic formulation; II: Combination with smeared cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v.50, p.1269-1305, 2001.
- KLISINSKI, M.; RUNESSON, K.; STURE, S. Finite-Element With Inner Softening Band. **Journal of Engineering Mechanics**, New York: ASCE, v.117, n.3, p.575-587, mar 1991.
- LEONHARDT, F.; WALTHER, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau. **Beton- und Stahlbetonbau**, v.57, n.7, p.161-173, Berlin, 1962.
- LOTFI, H.R.; SHING, P.B. Embedded Representation of Fracture in Concrete with Mixed Finite Elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, p.1307-1325, 1995.
- MACHADO, M.A.S. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elasto-Viscoplástica de Peças de Concreto Armado e Protendido, Submetidas a Estados Planos de Tensão**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.
- ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.61 p.189-214, 1987.
- OTTOSEN, N.S. A Failure Criterion for Concrete. **Jornal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.103, n.EM4, p.527-535, aug. 1977.
- OTTOSEN, N.S. Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete. **Jornal of the Engineering Mechanics Division**, New York: ASCE, v.105, n.EM1, p.127-142, feb. 1979.

- PRASAD, M.V.K.V; KRISHNAMOORTHY, C.S. Computacional model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v.191, n.25-26, p.2699-2725, sep. 2002.
- RUSSO, G.; ZINGONE, G.; ROMANO, F. Analytical Solution for Bond-Slip of Reinforced Bars in R.C. Joints. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.116, n.2, p.336-355, feb. 1990.
- RUSSO, G.; ROMANO, F. Cracking Response of RC Members Subjected to Uniaxial Tension. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.118, n.5, p.1172-1190, may 1992.
- SATO, Y.; FUJIII, S. Local stresses and crack displacements in reinforced concrete elements. **Journal of Structural Engineering**, New York: ASCE, v.128, n.10, p.1263-1271, oct. 2002.
- SLUYS, L.J.; BERENDS, A.H. Discontinuous failure analysis for mode-I and mode-II localization problems. **International Journal Solids Structures**, v.35, n.31-32, p.4257-4274, nov. 1998.
- SPENCER, B. **Embedded Crack Elements for Analysis of Reinforced Concrete**. Ph.D. Thesis Proposal, University of Colorado, Boulder, Colorado, July 2000.
- TANO, R.; KLISINSKI, M. Crack modelling of concrete, rock and soil with inner softening bands. **Engineering Geology**, v.49, n.3-4, p.271-276, apr. 1998.
- TIJSSENS, M. G. A.; SLUYS, B. L. J.; GIESSEN, V. D. Numerical simulation of quasi-brittle fracture using damaging cohesive surface. **European Journal of mechanics A/Solids**, v.19, p.761-779, 2000.
- ZIENKIEWICKZ, O. C. **The finite element method**. London: McGraw-Hill, 1977.
- WELLS,G.N.; SLUYS, L.J. Application of embedded discontinuities for softening solids. **Engineering Fracture Mechanics**, v.65, p.263-281, 2000.
- YANG, Z.J.; CHEN, J. Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams. **Engineering Fracture Mechanics**, v.72, n.14, p.2280-2297, sep. 2005.