

Alan Delgado de Oliveira

**Modelo de Administração de Ativos e Passivos -
Uma Abordagem de Otimização Estocástica**

Brasil

Dezembro, 2014

Alan Delgado de Oliveira

Modelo de Administração de Ativos e Passivos - Uma Abordagem de Otimização Estocástica

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Curso de Mestrado Acadêmico em Adminis-
tração da Escola de Administração na Uni-
versidade Federal do Rio Grande do Sul.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Escola de Administração

Programa de Pós-Graduação em Administração

Orientador: Prof. Tiago Pascoal Filomena, Ph.D.

Brasil

Dezembro, 2014

CIP - Catalogação na Publicação

Oliveira, Alan Delgado
Modelo de Administração de Ativos e Passivos - Uma
Abordagem de Otimização Estocástica / Alan Delgado
Oliveira. -- 2014.
59 f.

Orientador: Tiago Pascoal Filomena.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa
de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS,
2014.

1. ALM. 2. Programação Estocástica. 3. Otimização
Combinatória. 4. Árvore de Cenários. I. Filomena,
Tiago Pascoal, orient. II. Título.

Alan Delgado de Oliveira

Modelo de Administração de Ativos e Passivos - Uma Abordagem de Otimização Estocástica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Administração da Escola de Administração na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Brasil, 17 de dezembro de 2014:

Tiago Pascoal Filomena, Ph.D.
UFRGS
Orientador

Prof. João Luiz Becker, Ph.D.
UFRGS
Convidado 1

Prof. Marcelo Scherer Perlin, Ph.D.
UFRGS
Convidado 2

Prof. Cristiano Machado Costa, Ph.D.
UNISINOS
Convidado 3

Prof. Dr. Guilherme Ribeiro de Macêdo
UFRGS
Convidado 4

Agradecimentos

*À Jesus de Nazaré,
que me encontrou quando eu andava perdido.
À minha família e à minha noiva,
que sempre se fizeram presentes e me incentivaram.
À meu orientador Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena,
um amigo construído nessa caminhada.*

Porque dele, por meio dele, e para ele são todas as coisas. (Bíblia Sagrada, Rm 11:36)

Resumo

Este trabalho trata de uma aplicação de programação estocástica para administração de passivos e ativos. Inicialmente, um modelo de administração de ativos e passivos utilizando valores de retorno de ativos determinísticos é formalizado, constatando-se as suas limitações, justificando-se a necessidade de abranger formalmente a incerteza inerente aos mercados financeiros. Para isso, um modelo para administração de ativos e passivos que utiliza otimização e programação estocástica baseado em uma árvore de cenários multi-estágio balanceada é apresentado, descrito, e implementado. Os seus resultados determinam uma política de investimento de ativos para o instante inicial do período considerado, definindo-se também uma regra que possibilita, a partir do equilíbrio entre o patrimônio inicial e total de passivo a ser pago ao final do período considerado, estimar a probabilidade de insolvência do fundo de pensão. Além disso, realiza-se o estudo do impacto da redução de uma proxy da taxa de juros básico na composição do portfólio administrado por essas empresas.

Palavras-chaves: ALM. Programação Estocástica. Otimização Combinatória. Árvore de Cenários.

Abstract

This work discusses an application of stochastic programming for asset-liability management. Initially, a deterministic asset-liability model is formalized. Its limitations become clear which justify the need to include uncertainty in the model. Then, a stochastic programming model based on a balanced multistage scenario tree is presented, described and implemented for an asset-liability environment. The main results are: (i) an investment policy for the fund, and, (ii) the pension's fund insolvency probability considering an initial relation between the current assets and the present value of the future liabilities. The impact of a possible reduction in interested rate on the pension's fund optimal portfolio is also presented.

Key-words: ALM. Stochastic Programming. Combinatorial Optimization. Scenario Tree.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Dinâmica do Modelo	18
Figura 2 – Classes de Problemas	22
Figura 3 – Componentes da Programação Estocástica	22
Figura 4 – Estrutura do Modelo 2 Estágios	26
Figura 5 – Estrutura do Modelo Multi-Estágios	27
Figura 6 – Árvore de Preços CDI	44
Figura 7 – Árvore de Preços IBOV	45
Figura 8 – Probabilidade de Insolvência	50
Figura 9 – Evolução Portfólio - Fundo Equilibrado	51
Figura 10 – Evolução Portfólio - Fundo 80% de Patrimônio Inicial	51
Figura 11 – Evolução Portfólio - Fundo 60% de Patrimônio Inicial	52

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dimensões do Problema	33
Tabela 2 – Parâmetros do Problema	33
Tabela 3 – Variáveis de Decisão do Problema	33
Tabela 4 – Variáveis Internas do Problema	34
Tabela 5 – Preços Esperados dos Ativos	34
Tabela 6 – Variação relativa dos preços dos ativos	35
Tabela 7 – Passivos Futuros	35
Tabela 8 – Qtd de <i>shares</i> investidas no ativo <i>i</i> no período de tempo <i>t</i>	37
Tabela 9 – Qtd <i>shares</i> vendidas do ativo <i>i</i> no período de tempo <i>t</i>	37
Tabela 10 – Valor de mercado do Fundo a cada período de tempo <i>t</i>	38
Tabela 11 – Retorno Médio e Desvio Padrão da Amostra	47
Tabela 12 – Composição do Portfólio para Carteira Inicial	49

Lista de abreviaturas e siglas

ALM	Asset Liability Management - Administração de Passivos e Ativos
ABRAPP	Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar
CDI	Certificados de Depósito Interbancário
DB	Defined Benefit Pension Funds - Benefícios de Pensão Definidos
DC	Defined Contribution Pension Funds - Contribuição Definida
EFPC	Entidades Fechadas de Previdência Complementar
IBOV	Índice de Cotação da empresa IBOVESPA
SP	Stochastic Programming - Programação Estocástica

Lista de símbolos

\mathcal{F}	Campo Sigma
Ω	Espaço de Eventos de Parâmetros Incertos
ω	Dado Evento de Parâmetros Incertos
μ, σ, σ^2	Parâmetros da distribuição Normal
\in	Pertence
\forall	Para Todo

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Tema	14
1.2	Objetivo	16
1.3	Contribuições	16
1.3.1	Dinâmica do Modelo	17
1.4	Limitações	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	Asset Liability Management	19
2.2	Programação Estocástica	21
2.2.1	Modelos de Valor Esperado	24
2.2.2	Modelos Aguardar e Ver	24
2.2.3	Modelos de Programação Estocástica com Recursividade (Aqui e Agora)	25
2.2.3.1	Modelo de programação estocástica de um estágio	25
2.2.3.2	Modelo de programação estocástica de dois estágios	25
2.2.3.3	Modelo de Programação Estocástica Multi-Estágio	26
2.2.4	Ferramentas de Software para Programação Estocástica	28
2.3	Árvores de Cenários	28
2.4	Geração de Cenários	30
3	MODELOS	32
3.1	Modelo Determinístico	32
3.1.1	Modelando os dados	34
3.1.2	Modelo Algébrico	36
3.1.2.1	Restrições de manutenção dos ativos	36
3.1.2.2	Restrições de Balanceamento do Fundo	36
3.1.2.3	Função Objetivo	36
3.1.3	Resultados	37
3.2	Modelos Estocásticos	38
3.2.1	Modelo de Programação Estocástica Multi-Estágio	39
3.2.2	Restrições de Manutenção do Fundo	39
3.2.3	Restrições de Balanceamento do Fundo	40
3.2.4	Restrições Regulatórias	41
3.2.5	Função Objetivo	41
3.3	Modelo de Precificação de Ativos	42
3.3.1	Processo de Wiener	42

3.3.2	Random Walk Correlacionado	43
3.3.3	Geração dos preços	43
4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	46
4.1	Resumo do Modelo	46
4.2	Definição de Parâmetros	47
4.3	Alocação do fundo no instante inicial	48
4.4	Probabilidade de Insolvência	49
4.5	Comportamento do Fundo com o decréscimo da Taxa de Juros	50
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	Referências	56
	Índice	59

1 Introdução

O alinhamento das operações da companhia e táticas em um ambiente de incerteza têm sido percebidos como a chave estratégica para todos os negócios. Essa indeterminação dos parâmetros relacionados ao processo decisório demanda investimentos de recursos por parte de executivos e diretores de conselhos por todo o mundo. Segundo [Zenios e Ziemba \(2007\)](#), a administração de ativos de risco e passivos incertos em uma modelo integrado e coerente não é o núcleo do problema apenas de instituições financeiras atuais, mas também tem permeado demais modelos de negócios. O fundamento para os desafios encontrados hoje foram estabelecidos há mais de cinquenta anos pela tese de doutorado de Harry M. Markowitz, ([MARKOWITZ, 1952](#)), que eliciou o estudo de finanças moderna.

Através das décadas passadas, modelos de programação estocástica (SP) ganharam ampla aceitação pelos pesquisadores no campo da pesquisa operacional ([VALENTE et al., 2009a](#)). Estes modelos de otimização ainda continuam sendo elementos cruciais aos sistemas de suporte a decisão para engenheiros financeiros nos dias atuais. [Zenios e Ziemba \(2007\)](#) afirmam que a necessidade de integrar fatores de riscos múltiplos e inter-relacionados de empresas globais tem trazido à tona o poder dos modelos de administração de ativos e passivos. Ao mesmo tempo, o desenvolvimento de técnicas de otimização numérica de larga escala, avanços nos modelos de otimização para planejamento sob incerteza, e o surgimento de linguagens de modelagem mais amigáveis, disponibilizou muitas ferramentas para os pesquisadores. Assim como afirma [Adam \(2007\)](#), o trabalho do administrador de ativos é encontrar a sua melhor alocação com a ajuda de sua equipe de pesquisadores, este modelo retrata um esforço nessa direção.

Neste trabalho, trata-se da aplicação desses conceitos de SP a planos de previdência complementar fechada, cuja oferta se dá por Entidades Fechadas de Previdência Complementar (EFPC), também conhecidas como fundos de pensão. Essas instituições se destinam essencialmente aos colaboradores de companhias privadas, aos servidores públicos vinculados a algumas organizações estatais brasileiras, a associados ou membros de pessoas jurídicas de caráter profissional, classista ou setorial, mais conhecidos como instituidores, ou ainda a trabalhadores ligados a entidades representativas como, por exemplo, sindicatos.

Utiliza-se a mesma terminologia adotada por [Figueiredo \(2011\)](#), ou seja, as empresas que disponibilizam aos seus colaboradores planos de benefício de natureza previdenciária operado por um fundo de pensão são denominadas patrocinadoras do plano. Os trabalhadores que aderem a estes planos são chamados de participantes do plano de benefícios. Por último, as empresas responsáveis pela gestão dos recursos do fundo serão

chamadas administradoras ou gestoras do fundo.

Segundo [Valladão \(2008\)](#) e [Yao et al. \(2014\)](#), fundos de pensão podem ser divididos em dois tipos: o fundo de pensão de benefício definido (DB) e o fundo de pensão de contribuição definida (DC). No fundo de pensão DB, os benefícios a serem pagos aos participantes são conhecidos com antecedência. Em tais fundos de pensão, as contribuições não são fixadas, podendo ser ajustados de maneira a garantir que o fundo permaneça em equilíbrio, e o risco fica sob a responsabilidade do administrador do fundo, visto que ele terá que realizar o pagamento dos compromissos financeiros acertados ao final do período de contratação. Em um fundo de pensão DC, as contribuições são fixadas e os benefícios dependem somente da acumulação e retorno dos investimentos, transferindo o risco financeiro para os seus participantes. Historicamente, fundos de pensão DB tem sido mais populares e preferidos pelos trabalhadores já que o risco está sob responsabilidade dos administradores do fundo. Contudo, devido a evolução demográfica e o desenvolvimento dos mercados de capital, especialmente pelo problema de envelhecimento da população e risco de longevidade, os fundos DC tem se tornado mais e mais populares e muitos países tem mudado completamente ou parcialmente de fundos DB para fundos DC. No Brasil, segundo [Valor Econômico \(2014a\)](#), os fundos do tipo DC já respondem por, pelo menos, dois terços do patrimônio das fundações, segundo números oficiais, incluindo planos dos maiores fundos de pensão do país, como o dos funcionários da Petrobras (Petros), do Banco do Brasil (Previ), e da Caixa Econômica Federal (Funcef).

1.1 Tema

Um fundo de pensão tem o objetivo de fazer pagamentos de benefícios aos participantes que terminaram sua trajetória de ganho de renda ativa. Assume-se que o fundo de pensão tenha três fontes de financiamento de seus passivos: receitas de seu portfólio, contribuições regulares feitas pelos patrocinadores do fundo e contribuições corretivas ([BAUER; HOEVENAARS; STEENKAMP, 2009](#)). Então, de acordo com esse autor, um fundo tem como balanço característico os ativos à esquerda; as responsabilidades à direita, e o restante se refere ao seu superávit ou ao seu déficit. O passivo é calculado como o valor presente (descontado os juros atuariais) dos direitos de pensão ganhos. Os valores futuros de superávit (déficit) são influenciados por um grande número de variáveis exógenas e decisões de políticas a serem adotadas.

Administrar um fundo pode não ser uma tarefa fácil. Ao considerar-se a incerteza futura, a fim de se realizar um planejamento a médio e longo prazo, torna-se fundamental a avaliação e a análise de diferentes cenários para variáveis econômicas reputadas importantes para a administração correta e robusta de ativos e passivos (ALM), que garanta os benefícios a serem pagos. No mercado brasileiro, de acordo com [Valor Econômico \(2014a\)](#),

os fundos estão enfrentando dificuldades para cumprirem metas atuárias, ou seja, atingirem o retorno das aplicações necessário para garantir o pagamento das aposentadorias e pensões. Ainda segundo essa revista, os fundos de pensão, com quase R\$ 700 bilhões em recursos, apresentaram um déficit acumulado, de janeiro a julho de 2014, de 27,6 bilhões de reais. Um dos motivos se deve a expectativa de queda da taxa básica de juros, o que não ocorreu a curto prazo. Essa mudança de cenário trouxe surpresa, causando prejuízo e a necessidade de mudança, inclusive na legislação, na medida em que há a possibilidade de ser atribuída à Superintendência Nacional de Previdência Complementar a responsabilidade de calcular e de divulgar periodicamente a taxa de juros que será usada pelos fundos para calcular a sua meta atuarial. A modelagem ALM possibilita aos gestores de fundos de pensão considerarem cenários extremos, como o citado anteriormente, no planejamento da política de investimentos, evitando perdas financeiras. Uma das maneiras de simular esses cenários se baseia em entradas quantitativas com ajuda de modelos estocásticos, utilizando árvores de cenários multiestágio. Nesse contexto, [Bauer, Hoevenaars e Steenkamp \(2009\)](#) explicam que um modelo algébrico de ALM pode contribuir, por meio da saída deste processo de modelagem, para um conjunto de distribuição de probabilidade das principais variáveis de decisão para o conselho, subsidiando-o com informações que considerem as possíveis variações no cenário econômico.

Os parâmetros de entrada utilizados nesse modelo podem ser os retornos de ativos e a política de portfólio de ativos, os quais seriam adicionados ao modelo utilizando suas séries históricas, a fim de determinar quais são seus retornos médios durante o período avaliado e suas correlações em uma carteira de ativos. Além disso, o passivo nominal também é visto como uma informação entrada importante, visto que consiste no saldo de todas as contribuições realizadas ao fundo subtraídos os benefícios a serem pagos aos contribuintes, ou seja, valor a ser provido a partir somente da gestão dos ativos do fundo. O passivo pode ser obtido, por exemplo, de balanços públicos de fundos de pensão, ou ainda através de consulta a divulgação de dados da Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (ABRAPP). Então, mediante essas informações exógenas, desenvolveria-se um número significativo de cenários discretos e independentes entre si, possibilitando a derivação de uma distribuição de probabilidade para todas as variáveis de saídas relevantes do modelo ALM a cada período futuro. Assim, é razoável a estimação da perspectiva de insolvência do fundo, ou seja, a esperança de que o fundo não exerça o pagamento de suas responsabilidades (passivo) ao final do período considerado, por exemplo, cinco anos de agora.

Portanto, a programação estocástica aplicada à administração de ativos e de passivos pode ser implementada por meio de cenários estocásticos, utilizados na construção de distribuições de probabilidade das variáveis de decisão do modelo para cada período futuro. A partir disso, avalia-se o resultado dessa projeção a termos das expectativas, das desvantagens, e das vantagens. Essa simulação também permite o estudo do impacto de

uma estratégia particular de portfólio de ativos, possibilita a identificação de informações e indícios importantes relacionados a saúde financeira da instituição previdenciária, a indexação e a política de contribuição ligadas aos interesses dos principais envolvidos no fundo de pensão. [Ziamba e Fellow \(2003\)](#) definem ALM da seguinte maneira: “ativos devem ser investidos através do tempo de modo a atingir retornos suficientes para cobrir o passivo, garantindo os objetivos, sujeito a várias incertezas, políticas e restrições legais”. [Valladão \(2008\)](#) define ALM semelhantemente, estabelecendo-o como um processo de formulação, implementação, monitoramento e revisão das estratégias relacionadas com ativos, futuros investimentos e passivos com a finalidade de atingir os objetivos financeiros, necessidades de caixa e requisitos de capital, *solvência*, dado a tolerância ao risco e outras restrições da organização. Neste trabalho, o modelo apresentado é caracterizado pelo uso de uma árvore de cenários multi-estágio, assim como utilizado por [Kouwenberg \(2001\)](#), [Valladão \(2008\)](#), [Dupacová e Polívka \(2009\)](#), [Figueiredo \(2011\)](#).

1.2 Objetivo

Apresentar, descrever e analisar os resultados de um modelo para administração de ativos e passivos através do tempo utilizando otimização e programação estocástica em período de tempo discreto baseada em uma árvore de cenários multi-estágio balanceada.

1.3 Contribuições

Anteriormente, modelos de ALM considerando a realidade brasileira já foram implementados, entre eles [Valladão \(2008\)](#), [Figueiredo \(2011\)](#). No entanto, neste trabalho, realiza-se uma análise com um número muito maior de amostras. Para possibilitar tal feito, foi necessário a construção de estruturas computacionais que possibilitassem a implementação do modelo de forma otimizada, que considerasse o ambiente computacional de recursos limitados, já que o objetivo era proporcionar escalabilidade às soluções do problema, aferindo resultados mais robustos e distribuições de probabilidade mais ajustadas aos dados. O total de execuções realizadas para as análises do problema foi de 39500 corridas. Essas execuções consideraram uma árvore com de 10 cenários, totalizando de 2046 nós, cuja representação é maior ao comparar-se os trabalhos mencionados anteriormente. Além disso, neste trabalho, realiza-se um exercício de aplicação do modelo, para fins de ilustração, ao tratar-se do impacto da tendência de redução a longo prazo da taxa de juros, representada por uma proxy, na composição do portfólio de investimentos do fundo de pensão, uma vez que essa tem sido a tendência de comportamento de longo prazo dessa taxa principalmente em países em desenvolvimento.

O modelo proposto por essa dissertação também apresenta função objetivo distinta das apresentadas por [Valladão \(2008\)](#), [Figueiredo \(2011\)](#), cuja definição encontra-se na seção [3.1.2.3](#). Diferentemente dos trabalhos supracitados, que definem uma meta atuarial e estimam valores de bonificação e penalidade respectivamente para os cenários em que há resultados superiores e inferiores a esse limiar, este trabalho maximiza a riqueza final do portfólio, considerando o cumprimento do passivo a própria meta atuarial. A decisão por esta formalização foi realizada à medida que, embora essa função seja vista como uma medida de aversão a risco do investidor, entende-se que a definição desses parâmetros não se dá de maneira trivial, principalmente em um ambiente mais aplicado. Outra distinção de trabalhos brasileiros apresentados anteriormente ocorre na apresentação e análise, na seção [3.1.2](#), de limitações de um modelo de valor esperado juntamente com o modelo objeto de estudo, o modelo estocástico. Essa comparação é enriquecedora, visto que se pode salientar os motivos pelos quais a abordagem determinística do problema do ALM torna-se ineficaz de maneira prática.

Por fim, na seção [1.3.1](#), apresenta-se, então, a proposta do sistema conceitual e da implementação computacional do funcionamento do modelo de ALM, o qual se trata de uma adaptação do modelo proposto por [Hilli et al. \(2007\)](#). A figura [1](#) ilustra o relacionamento informacional entre as diferentes etapas do processo de modelagem de ALM, e pode ser vista como a principal contribuição deste trabalho. Esta modificação se dá principalmente na forma como a transação informacional é vista, já que o balanceamento das decisões de primeiro estágio é vista de maneira cíclica enquanto a árvore de cenários não alcança seu último estágio, diferentemente do que [Hilli et al. \(2007\)](#) propõe ao supor que esse caminho seja acíclico.

1.3.1 Dinâmica do Modelo

As etapas do modelo podem ser definidas pela simulação dos parâmetros que compõem o cenário, pela geração da estrutura de cenários, que determinará a dinâmica das diferentes simulações e suas interações, pela otimização do modelo que toma cenário e variáveis de decisão como entrada, e, por fim, pelo resultado que implica uma política de investimentos, a probabilidade de *underfunding* e insolvência do fundo, e a maximização do valor final do fundo. A Figura [1](#), que é inspirada no sistema de otimização estocástica de [Hilli et al. \(2007\)](#), e ilustra o funcionamento do modelo.

Após o processo de entrada de dados, os cenários são formados por meio de uma árvore de cenários multiestágio, que é pormenorizada na seção [2.3](#), essa árvore apresenta estrutura binária, e se constitui de cenários independentes entre si. O processo *Geração de Cenários* consiste em respeitar as não antecipatividades do modelo, e em possibilitar a formação de cada parâmetro no seu correto momento na árvore, respeitando as interdepen-

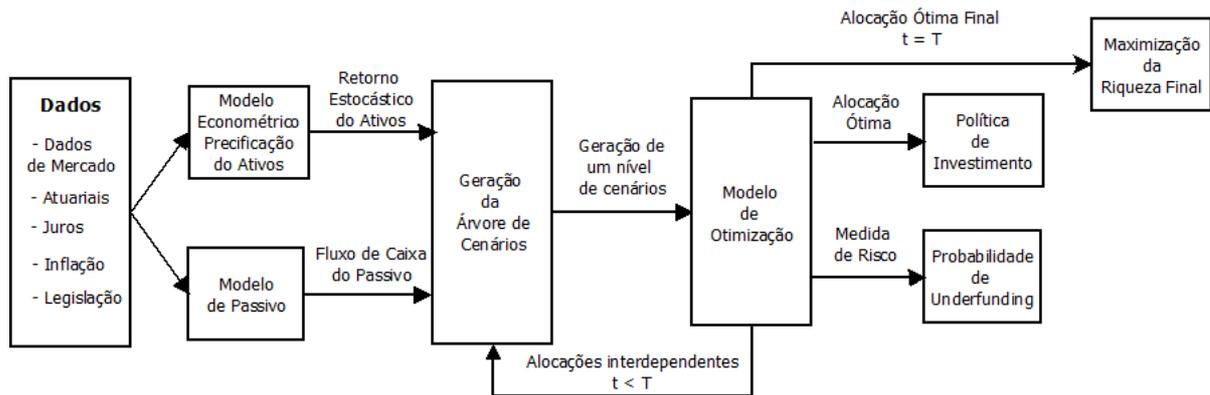


Figura 1 – Dinâmica do Modelo

Fonte: Adaptado de Hilli et al. (2007, pg. 15)

dências, e o fato da variável de um determinado nível ser dependente a variável de alocação do nível anterior. Cada um desses cenários, é formalizado pela seção 3.2 e otimizado, o que descreve o processo *Modelo de Otimização*, resultando em uma política de investimento, já que a variável de decisão será a determinação de quantas participações manter, comprar ou vender. Além disso, pode-se adotar *chance constraints* para possibilitar o subfinanciamento do fundo, e por isso, uma medida de probabilidade de *underfunding*. De acordo com (MURARKA et al., 2014), esse modelo pode ser considerado recursivo porque todas as decisões terão impacto no último período do nível, que é o que deve ser maximizado.

1.4 Limitações

As principais limitações do trabalho se relacionam a questões tecnológicas. Devido às restrições de processamento computacional, não é possível a geração de muitos cenários ou períodos, já que o custo computacional do problema é exponencial. Então, a distribuição de probabilidade resultante do modelo de ALM torna-se limitada à capacidade de gerenciamento de múltiplos cenários proporcionada pelos dispositivos computacionais atuais. Além disso, atualmente ainda não há um solver puramente estocástico. Por isso, os problemas são traduzidos para modelos algébricos equivalentes deterministicamente, ou seja, o campo de soluções é discretizado, e são realizadas amostras no tempo, a fim de torná-lo computacionalmente tratável, o que pode significar perda na precisão dos resultados. As análises realizadas neste trabalho foram executadas utilizando um processador *intel Core i5-4200U CPU @ 1.60hz*, cuja memória RAM é de 4 GB. O sistema operacional é o Windows 8. O tempo médio para execução de 300 corridas é de 25 minutos, ou seja, cada execução do modelo toma em média 5 segundos.

2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, apresenta-se um referencial teórico sobre ALM. Então, são destacados aspectos importantes, que servem como fundamento teórico, para o entendimento do assunto. Inicialmente, na seção Asset Liability Management, trata-se da evolução do estudo de ALM, e referenciam-se trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento do assunto; em seguida, há uma revisão de programação estocástica, que traz as definições das classes dos problemas e do espaço solução a ser adotado; então, discorre-se sobre as ferramentas de *software* utilizadas atualmente para tratar esse tipo de problema; e, por fim, aborda-se a estrutura de dados dos cenários, e geração dos cenários, que são os componentes utilizados para discretizar o tempo e realizar as projeções e previsões dos possíveis estados da economia.

2.1 Asset Liability Management

Conforme [Consigli e Dempster \(1998\)](#), a literatura sobre o uso de modelagem recursiva de multi-estágio para formalizar problemas de otimização de portfólios complexos data do início dos anos setenta, quando a técnica foi primeiramente adotada para resolver um problema de portfólio de seguro com renda fixa. Inicialmente [Eppen e Fama \(1968\)](#), [Eppen e Fama \(1971\)](#) modelaram problemas de dois e três ativos usando programação dinâmica e estocástica e [Daellenbach e Archer \(1969\)](#) ampliaram o seu trabalho para incluir um passivo. Esses modelos consideraram incerteza para os retornos e são dinâmicos, mas, nesses casos, somente problemas com muito poucos instrumentos financeiros poderiam ser analisados simultaneamente. Por isso, eles são muito limitados na prática.

[Wolf \(1969\)](#), [Bradley e Crane \(1972\)](#), [Bradley e Crane \(1980\)](#), [Lane e Hutchinson \(1980\)](#) usaram modelos com árvores de cenário. [Bradley e Crane \(1972\)](#) introduziram a abordagem de inventário para modelar decisões financeiras nas quais cada ativo ou passivo no modelo tem uma variável inicial, uma variável de posição de investimento, e uma variável para o final para cada período. Eles aplicaram seu modelo dinâmico estocástico para administração de portfólio de títulos de dívidas. Seu modelo, a medida que era útil para pequenos problemas, tornou-se intratável computacionalmente, mesmo com poucos períodos e poucas saídas.

[Kusy e Ziemba \(1986\)](#) discutiram a abordagem da programação estocástica linear sob incerteza e a comparou com os modelos de Bradley e Crane. Eles mostraram por simulação que essa técnica era superior à estratégia de programação dinâmica com árvores de decisão desenvolvidas por Bradley e Crane; porém, o modelo de Kusy e Ziemba não

considerava os efeitos nos períodos finais, nem era verdadeiramente dinâmico, já que era resolvido em dois períodos por vez, na forma de rolagem.

Dempster e Ireland (1991) iniciaram a pesquisa do contexto moderno de sistemas de informação necessários para tais modelos. Essa pesquisa desenvolveu-se com o trabalho de Domenica et al. (2007) que também dá continuidade a análise sistêmica da implementação de problemas de programação estocástica. Cariño et al. (1994) realizaram o primeiro estudo que descreveu a programação dinâmica e estocástica em escala comercial, apesar do fato de que a maioria de seus antecessores estiveram envolvidos em protótipos de aplicações para instituições financeiras. Os modelos de administração de passivos e ativos foram implementados em diversos países, entre eles pode-se mencionar Kouwenberg (2001), que propõe um modelo de programação estocástica de multi-estágio para um fundo de pensão Alemão, utilizando árvores de eventos que adequam-se a média e covariância da distribuição de retornos para gerar os coeficientes da sua programação; Hilli et al. (2004) também desenvolveu um modelo para companhias de segura finlandesas; bem como Dupacová e Polívka (2009) que obteve sucesso apresentando um modelo de programação estocástica aplicável à Rússia, embora tivesse que lidar com a falta de dados históricos confiáveis e planos de pensão totalmente não estabilizados devido à grandes mudanças governamentais; e, por fim, menciona-se Valladão (2008), Figueiredo (2011) que realizaram a implementação de modelos considerando a realidade brasileira.

Ao considerar realidade brasileira, Valladão (2008) desenvolve um modelo de programação estocástica juntamente com um método de mediação e controle do risco de equilíbrio de um fundo de pensão no contexto brasileiro. Esta forma de gestão do risco considera a possibilidade de o gestor do fundo reagir à evolução dos fatores de risco rebalanceando a carteira. A técnica utilizada por Valladão (2008) para amostragem dos retornos futuros é o bootstrap. O autor também utiliza um *Vector Auto-Regressive Model VAR* de reversão a média para modelar a rentabilidade das classes de ativos considerados. Afora isso, Valladão (2008) também simula um modelo de passivo. Os resultados encontrados pelo autor demonstram uma diferenciação entre a probabilidade de *underfunding* e probabilidade de insolvência calculada pelo método proposto pelo autor. Além disso, o autor defende que a probabilidade de *underfunding* se trata de uma medida subestimada do risco levando a interpretações equivocadas do estado de solvência do fundo. O estudo também destaca o capital inicial do fundo como o principal fator determinante para o estado de equilíbrio do fundo.

Ao longo do tempo, os modelos foram aprimorados a fim de se adequarem melhor a realidade do mercado financeiro. Ziemba e Fellow (2003) contribui com a inclusão de algumas complexidades ao tratamento do problema, tais como custos de transação, liquidez, impostos, preferências do investidor, incluindo controle de risco, políticas e outras restrições, retorno incertos, e retornos com prazo limite. Yao et al. (2014) investiga o

problema de alocação de ativos para fundos de pensão com contribuição definida, receita estocástica e risco de mortalidade sob um modelo de média-variância de multiperíodo. Há também livros que tratam sobre programação estocástica, entre eles pode-se encontrar [Kall e Wallace \(1994\)](#) e [Birge e Louveaux \(2010\)](#) que compilaram livros introdutórios sobre o assunto, em que definem modelos estocásticos que servem como base para implementação do problema tratado nesse trabalho, [Cornuejols e Tutuncu \(2007\)](#) que também publicou um livro no qual discute muitos modelos de otimização para ALM. Além disso, a literatura também dispõe de livros especializados em Asset Liability Management como, por exemplo, [Adam \(2007\)](#) e [Mitra e Schwaiger \(2011\)](#).

2.2 Programação Estocástica

Por meio dos modelos de programação matemática, é possível quantificar os efeitos de uma decisão em termos de um conjunto de objetivos estabelecidos pelo decisor, e ainda garantir que a decisão não viole nenhuma de suas restrições. Esses modelos podem ser implementados via programação linear, por meio de programação quadrática, entre outros. Apesar dessas vantagens, de acordo com [Murarka et al. \(2014\)](#), a suposição fundamental dessa classe de modelos de decisão é que os parâmetros que definem os modelos sejam determinados previamente. Essa suposição determinística não pode ser mantida em muitos casos. Poderia-se, por exemplo, imaginar que os valores futuros dos preços dos ativos fossem parâmetros conhecidos com certeza. Nesse caso, tal pressuposto poderia implicar solução não ótimas ou até mesmo não possíveis no mundo real.

[Murarka et al. \(2014\)](#) ainda afirma que, quando uma decisão ótima tem que ser tomada sob incerteza, a conjectura do determinismo é relaxada e procedimentos e paradigmas diferentes surgem. A estimação dos parâmetros é crucial, e tomada como primeira ação do processo de modelagem para a aplicação da programação matemática a um problema estocástico. Contudo, apesar da atenção dada à previsão, os resultados dos eventos não são determinísticos, ou seja, as suas previsões possuem incertezas. O modelador precisa, portanto, considerar o efeito introduzido pela incerteza nos modelos de otimização e estudar como, por exemplo, limitações de estimação podem afetar a qualidade da solução obtida.

O desenvolvimento do estudo dos modelos de programação estocástica resultou em uma completa investigação da família de modelos (problemas de valor esperado, problemas de cenário, problemas aguardar e ver, e problemas aqui e agora), algumas informações estocásticas relacionadas tais como o valor da informação perfeita (EVPI), e o valor da solução estocástica (VSS). [Gassman e Ireland \(1996\)](#) propuseram uma taxonomia para problemas de programação estocástica, que é apresentada na Figura 2.

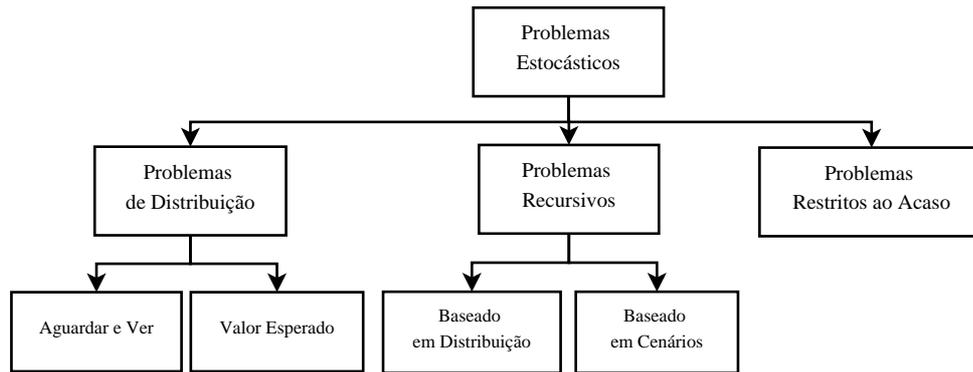


Figura 2 – Classes de Problemas

Fonte: (GASSMAN; IRELAND, 1996)

A classe de modelos de programação estocástica considerada mais importante dentro do ALM são os modelos recursivos, segundo Valladão (2008). Um modelo recursivo é aquele em que uma decisão de primeiro estágio é tomada sem o conhecimento dos valores futuros dos fatores de risco e, em seguida, uma decisão recursiva é tomada dependendo da realização obtida. Além disso, uma vez que se define o modelo ao qual pertence o problema que será tratado, também é necessário definir uma metodologia para abordar os parâmetros incertos. Uma das metodologias disponíveis nesse caso, conforme Murarka et al. (2014) é a Análise Baseada em Cenários. Nessa técnica, o planejador assume que certas combinações de possíveis valores de parâmetros incertos deveriam ser consideradas conjuntamente, tais combinações são chamadas de cenários e o modelo é resolvido para diferentes cenários. As decisões de solução ótima e os valores das funções objetivos correspondentes são então agregados de uma maneira heurística. Por meio dessa linha de investigação, uma faixa de soluções, parâmetros sensíveis podem ser destacados e uma solução apropriada é escolhida heurísticamente. Então, Domenica et al. (2007) e Murarka et al. (2014) defendem que há dois elementos principais que compõem a Programação Estocástica, a Geração de Cenários, que permite uma avaliação mais robusta da geração dos parâmetros aleatórios, e a Modelagem de Decisão que consiste na alocação ótima dos recursos, respeitando os objetivos e restrições encontradas no modelo.

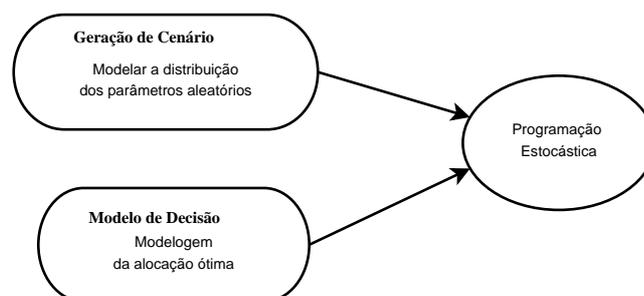


Figura 3 – Componentes da Programação Estocástica

Fonte: (DOMENICA et al., 2007)

As classes de problemas estocásticos podem ser ilustradas considerando primeiramente um problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
 & \min c_{\omega}^{\top} x \\
 \text{sujeito a} & \quad Ax = b \\
 & \quad x \geq 0 \\
 \text{onde} & \quad A \in \mathbb{R}; c_{\omega}, x \in \mathbb{R}^n; b \in \mathbb{R}^m
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Denota-se P como uma distribuição de probabilidade, \mathcal{F} seja um campo sigma e a tupla (Ω, \mathcal{F}, P) seja um espaço probabilidade onde $\omega \in \Omega$ denote as realizações de parâmetros incertos. Considera-se que as realizações de A, b, c para um dado evento ω seja definido como:

$$\xi(\omega) \text{ ou } \xi_{\omega} = (A, b, c)_{\omega} \tag{2.2}$$

As probabilidades associadas a essas realizações são frequentemente denotadas como $p(\xi(\omega))$ ou $p_{\xi(\omega)}$. Por uma conveniência notacional, essas probabilidades são denotadas simplesmente como $p(\omega)$.

Por essa mesma razão, considera-se as regiões factíveis para o problema declarado em 2.1 e 2.2 definidas como:

$$F^{\omega} = \{x | A_{\omega}x = b_{\omega}, x \geq 0\} \text{ para } \xi(\omega) \tag{2.3}$$

Assim como exemplifica [Domenica et al. \(2007\)](#) e [Murarka et al. \(2014\)](#), o problema definido em 2.1, 2.2 e 2.3 é um modelo de programação matemática com incerteza sobre os valores de alguns parâmetros. Se a distribuição de $\xi(\omega)$ é contínua, o problema é chamado de problema recursivo baseado em distribuição; exceto por alguns casos triviais, tais problemas dificilmente podem ser resolvidos. Se essa distribuição é discreta, a cardinalidade do espaço de soluções é limitada pelo poder computacional disponível, denominando-o de deterministicamente equivalente. Então, para a maioria das aplicações práticas, as distribuições de parâmetros estocásticos tem sido aproximadas por distribuições discretas com um número limitado de saídas.

Na configuração discreta do problema dado por 2.1, 2.2 e 2.3, os parâmetros de eventos toma a faixa de valores $\omega = 1, \dots, |\Omega|$; há realizações de vetores aleatórios $\xi(\omega)$ e probabilidades $p(\omega)$ tais que:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \text{ e } \Xi = \bigcup_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \tag{2.4}$$

A discretização de Ξ é normalmente chamada de *conjunto de cenários*, e suas representações seguem um problema estrutura dinâmica conhecido como árvore de cenários. O problema estocástico cujos eventos de saída são representados por uma árvore são chamados *problemas recursivos baseados em cenários*, assim como representados na Figura 2. A seguir, uma breve descrição de cada classe de problema estocástico é apresentada.

2.2.1 Modelos de Valor Esperado

De acordo com [Domenica et al. \(2007\)](#) e [Valente et al. \(2009a\)](#), o modelo de Valor Esperado (EV) é construído pela substituição dos parâmetros pelos seus valores esperados. Esses modelos são caracterizados pela programação com a incerteza resolvida antes de sua introdução no modelo fundamental de otimização. Esses modelos são implementados principalmente para obter informações sobre o problema de decisão. Eles também podem ser vistos como problemas determinísticos, já que, embora haja incerteza quanto aos parâmetros aleatórios, ela deve ser resolvida antes da execução da otimização.

Denota-se X_{EV}^* o vetor de decisão resultante da otimização do modelo de valor esperado, esse é o seu retorno após a avaliação de todos os possíveis cenários:

$$c^\top X_{EV}^* \tag{2.5}$$

2.2.2 Modelos Aguardar e Ver

Segundo [Domenica et al. \(2007\)](#) e [Valente et al. \(2009a\)](#), os problemas Aguardar e Ver (WS) assumem que o decisor, de alguma maneira, é capaz de esperar até que a incerteza seja resolvida antes de implementar as decisões ótimas. Essa abordagem confia na informação perfeita quanto ao futuro. Diferentemente da classe de problemas EV, que definem valores esperados para os parâmetros e variáveis aleatórios, esses problemas utilizam realizações futuras. Muitas de suas suposições tais como, por exemplo, algumas soluções, não podem ser implementadas. Esta classe de problemas é conhecido como “abordagem passiva”. Modelos Aguardar e Ver são frequentemente usados para analisar a distribuição de probabilidade de um valor objetivo ótimo. Operacionalmente, resolve-se um problema de programação matemática separado para cada cenário disponível, obtendo-se a melhor estratégia para cada cenário. Designa-se para expectativa dos valores objetivos de todos os modelos Aguardar e Ver resolvidos por meio de $c(\omega)x$.

$$\begin{aligned} \min c^\top(\omega)x \\ \text{onde } x \in F^\omega \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.3 Modelos de Programação Estocástica com Recursividade (Aqui e Agora)

Os modelos descritos a seguir são baseados no trabalho de (MURARKA et al., 2014).

2.2.3.1 Modelo de programação estocástica de um estágio

Um simples modelo estocástico (único estágio) é formulado como:

$$\begin{aligned} & \min E[c(\omega)x] \\ \text{onde } & x \in F \\ \text{e } & F = \bigcap_{\omega \in \Omega} F^\omega \end{aligned} \tag{2.7}$$

O valor ótimo da função objetivo denota os custos mínimos esperados do problema de otimização estocástica. Como a solução ótima $x^* \in F$, ela contempla todos os possíveis eventos $\omega \in \Omega$ que podem acontecer no futuro.

2.2.3.2 Modelo de programação estocástica de dois estágios

O clássico modelo de dois estágios de programação estocástica com recursão é formulado como:

$$\begin{aligned} & \min c(\omega)x + E_\omega[Q(x, \omega)] \\ \text{sujeito a } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde,

$$\begin{aligned} & Q(x, \omega) = \min f(\omega)y(\omega) \\ \text{sujeito a } & D(\omega)y(\omega) = d(\omega) + B(\omega)x, \\ & y(\omega) \geq 0, \\ & \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.9}$$

A matriz A e o vetor b são conhecidos com certeza. A função $Q(x, \omega)$ é denotada como função recursiva, e por sua vez definida pelo programa matemático dado pela equação 2.9. A matriz recursiva $D(\omega)$, o lado direito $d(\omega)$, a matriz de tecnologia $B(\omega)$, e os coeficientes da função objetivo $f(\omega)$ desse modelo podem ser aleatórios. Se a matriz

recursiva D é fixa para todos as realizações do problema, então o problema é conhecido como problema de programação estocástica com recursão fixa; se D tem a forma $D = (I, -I)$, esse problema é conhecido como problema de programação estocástica com recursão simples.

Os problemas de programação estocástica de dois estágios com recursão separam as variáveis de decisão do modelos em primeiro estágio e segundo estágio. A natureza da dinâmica do problema pode ser facilmente vista como: uma decisão ótima de primeiro estágio em que x é determinado de tal maneira que seja possível para todas as realizações de $\omega \in \Omega$ e tenha um custo mínimo, enquanto o segundo estágio de decisão $y(\omega)$ é tomado depois que a saída de ω é observada, e compensado e adaptado para as diferentes realizações.

A estrutura do modelo de dois estágios pode ser representada pela Figura 4.

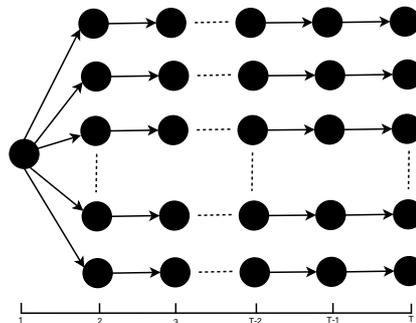


Figura 4 – Estrutura do Modelo 2 Estágios

Fonte: (MURARKA et al., 2014)

2.2.3.3 Modelo de Programação Estocástica Multi-Estágio

A classe de problemas de dois estágios especificada por 2.8 e 2.9 pode ser estendida para um programa recursivo de multi-estágio considerando propriedades mais dinâmicas e complexas: ao invés de ter as duas decisões x e $y(\omega)$, considera-se agora T decisões sequenciais x_0, x_1, \dots, x_T para serem tomadas nos estágios $t = 1, 2, \dots, T$. O termo estágios podem ser interpretados como “períodos de tempo”; embora esses conceitos coincidam com muitas aplicações, um estágio pode ser independente do todo, como um passo onde nova informação a respeito do estado de natureza é fornecida.

A decisão realizada no estágio t deve ser baseada no conhecimento das decisões anteriores e realizações $(x_i, \xi_i | i \in 1, \dots, t-1)$ e tais decisões afetam somente as decisões subsequentes $(x_i | i \in t+1, \dots, T)$. Na programação estocástica, esse conceito é conhecido como não-antecipação e tem que ser levado em conta quando se realiza a formulação do modelo em um padrão equivalente deterministicamente. O problema de programação estocástica multi-estágio recursivo tem a seguinte forma, (DEMPSTER, 1988; ERMOLIEV; WETS,

2.2.4 Ferramentas de Software para Programação Estocástica

A programação estocástica também apresenta limitações. Verifica-se que a resolução dos seus problemas cresce exponencialmente com o número de estágios de decisão considerados pelos modelos e com o número de possíveis saídas dos parâmetros aleatórios a cada estágio. Essa questão desafia a tratabilidade computacional, em termos de modelagem e de algoritmos para solução desses problemas. A implementação em larga escala de modelos de programação matemática requer a geração de matrizes que representam as restrições do problema e que são guardadas na máquina de uma maneira legível para ser interpretada pelos *solvers*.

Para modelos determinísticos, desenvolveram-se classes de linguagens de programação declarativas conhecidas como *Algebraic Modelling Languages* (AML), que são ferramentas poderosas e flexíveis para a geração instâncias de modelos de dados. As entidades de otimização são (conjuntos, variáveis de decisão, parâmetros, restrições, objetivos, etc.) são definidos de maneira muito próxima a recompor a notação algébrica. Conforme [Valente et al. \(2009a\)](#), as linguagens que mais se popularizaram foram AMPL, GAMS, AIMMS, MPL. Como modelos de programação estocástica são caracterizados pela presença de incerteza associada com alguns parâmetros do modelo, é apropriado considerar essas variáveis aleatórias com um distribuição de probabilidade específica.

Sendo assim, os modelos algébricos implementados foram mapeados para componentes da linguagem AMPL e resolvidos com a ajuda do solver CPLEX, versão 12.5. Além disso, para a construção dos parâmetros de entrada, utilizou-se a linguagem C++ dada a sua habilidade de prover performance na execução e tratamento de estrutura de dados maiores. Essas tecnologias adotadas tem sido consideradas um padrão na indústria de *quantitative trading*.

2.3 Árvores de Cenários

[Kall e Wallace \(1994\)](#) afirma que uma árvore de decisão consiste em nodos e arcos. Os nodos representam estados, os arcos são vistos como decisões. Para cada possível estado em cada estágio, deve-se criar um arco para cada possível decisão. Então, o número de decisões possíveis deve ser muito limitado para que esse método seja plausível, já que existe uma folha na árvore para cada sequência de decisões. Nessa modelagem, pode-se dizer que os cenários representariam a percepção do modelador a respeito do futuro.

Sendo assim, utiliza-se frequentemente a estrutura de árvores para suporte de projeções e previsões futuras dos possíveis estados da economia, assim como se encontra em muitos trabalhos da literatura, entre eles cita-se [Cariño et al. \(1994\)](#), [Consigli e Dempster \(1998\)](#), [Kouwenberg \(2001\)](#), [Ziemba e Fellow \(2003\)](#), [Valladão \(2008\)](#), [Yao et al. \(2014\)](#).

Neste caso, poderia-se simular preços e tendências de cada ativo, já que esses aspectos influenciam diretamente quanto às avaliações de mercado. A partir desses resultados, analistas poderiam defender seus posicionamentos e investidores alocariam seu dinheiro de acordo com risco e retorno de cada ativo.

Quando consideramos os modelos de dois estágios, assim como explica [Domenica et al. \(2007\)](#), a estrutura de árvore encapsula as fases de primeiro e segundo estágio. Inicialmente, temos uma representação somente por um nó raiz que se estende linearmente até o final do primeiro estágio, visto que as realizações do mundo real, ou seja, dos seus parâmetros são conhecidos com certeza, movendo-se para o segundo estágio, os ramos da árvore a partir do $t = 2$, como mostra a Figura 4. De cada um desses nós, cenários discretos independentes começam com nós a cada período de tempo, e uma decisão ótima tem de ser tomada até o nível $t = T$. Isso significa que a árvore de cenário nada mais é do que um conjunto de cenários individuais $\omega_s = \{\omega_{1,s}, \dots, \omega_{T,s}\}$ que ocorrem com probabilidades $p_s = P(\omega_{k,s}) \forall s$.

Uma representação de árvore de cenário correspondente a programação estocástica multi-estágio pode ser visualizada como uma árvore começando similarmente com o caso anterior, com uma raiz única em $t = 1$ e ramos em um número finito de nós no período de tempo $t = 2$. Essa ramificação continua por todos os estágios do problema até o nível T . É importante notar que, embora um nodo possa ter um número finito de descendentes, um descendente pode apenas ter um antecessor imediato. Uma árvore de cenários de multi-estágio é considerada balanceada se o número de todos os descendentes dos nós em todos os períodos $1 < t < T$ é completa. Pode-se visualizar um modelo de árvore de cenário de multi-estágio na Figura 5.

Como resultado, na programação estocástica de dois estágios, os nós são fixados dois a dois, dependendo do número de período de tempos utilizado para recursividade, que pode ser dois ou mais, adicionados à decisão. Em geral, estágios e períodos de tempo se referem a pontos no tempo, que são importantes para o decisor. Temos, como exemplo, as datas que um fundo de pensão deve pagar as contribuições aos participantes.

De acordo com [Ziemba e Fellow \(2003\)](#) a abordagem de cenários tem uma série de vantagens tais como:

- Normalidade e Log-Normal usado em outras abordagens não precisa ser assumido, à medida que não é uma representação precisa dos preços atuais dos ativos especialmente para perdas.
- Eventos de cauda podem ser incluídos facilmente; estudos mostram que as probabilidades baixas, estimadas dos preços das opções atuais, são muito maiores do que o lognormal.

- Matrizes de correlação entre cenários dependentes através dos ativos podem ser modeladas e usadas no processo de tomada de decisão de maneira que tempos econômicos de crises e normais (com sinais de correlação alto) podem ser considerados separadamente.
- O cenário exato que irá ocorrer e as probabilidades e valores para todos os cenários não precisam ser exatamente determinados para fornecer um modelo de desempenho superior quando comparado a outros modelos, e estratégias como média-variância, portfólio fixo, portfólio segurado, etc.
- Esta técnica se trata de uma abordagem de otimização sobre o tempo para determinar as melhores decisões, levando em consideração as restrições relevantes, as incertezas, e as preferências do tomador de decisão.
- A maioria dos aspectos naturais e práticos das aplicações de Asset Liability Management podem ser modelados bem na abordagem de programação estocástica multi-estágio. Métodos de solução para resolver tais modelos são atualmente bastante desenvolvidos e podem ser comportados com alto desempenho por computadores. A saída do modelo é fácil de entender e interpretar usando boas interfaces gráficas que são amigáveis e entendíveis por aqueles que não são especialistas em otimização tais como administradores de fundos de pensão. Os modelos podem ser testados via simulação e métodos estatísticos e consideráveis evidências independentes demonstram sua superioridade a outras abordagens e estratégias padrões.
- A abordagem tende a proteger os investidores de grande perdas no mercado considerando os efeitos de cenários extremos, considerando também outros aspectos chave do problema. O mundo está muito mais complexo agora com muitos cenários mais extremos. Por exemplo, derivativos no mundo inteiro são agora uma indústria de aproximadamente \$142 trilhões de dólares.
- A determinação de portfólios de tamanho ideal e verdadeiramente diversificados por meio do tempo é crucial para a proteção contra cenários extremos assim os resultados serão bons em tempos normais e evitam desastres.

2.4 Geração de Cenários

Os dados para os modelos de otimização estocástica são fornecidos na forma de árvores de cenários; eles são criados usando métodos de geração de cenários, que podem ser muito específicos ao domínio da aplicação. O principal foco da geração de cenários é criar uma estrutura de árvore de cenários que “melhor” aproxima uma dada distribuição fundamental dos parâmetros aleatórios. Segundo [Domenica et al. \(2007\)](#), o critério para

escolher a melhor aproximação é frequentemente baseado em alguma medida que quantifica a distância da árvore de cenário gerada da distribuição fundamental. O autor defende que, em geral, o procedimento de geração de cenários (para problemas de multi-estágio) envolve algum ou todos os passos seguintes:

1. Suposição de um modelo, que explica o comportamento dos parâmetros aleatórios (por exemplo, modelos econométricos para taxa de juros, etc.);
2. Estimativa/Ajuste dos parâmetros para o modelo escolhido, usando dados históricos e visão subjetiva;
3. Geração de caminhos de trajetória de dados de acordo com o modelo escolhido, ou discretização das distribuições usando a aproximação de propriedades estatísticas;
4. Amostragem condicional das trajetórias de modo que a árvore de cenário com as propriedades desejadas possa ser construída.

Em muitos casos, pesquisadores também aplicam algumas técnicas de redução para árvores de cenários resultantes a fim de modelar instâncias que podem ser realisticamente otimizadas pela avaliação de recursos computacionais. Para uma lista das principais técnicas utilizadas, consultar ([DOMENICA et al., 2007](#)).

Como alternativa para a geração de cenários, que são então usados para instanciar grandes modelos determinísticos equivalentes, há técnicas de amostragem interna, que são métodos para resolver problemas de programação estocástica, que amostram de distribuições fundamentais durante o procedimento de solução.

3 Modelos

Os modelos fornecem uma maneira de pensar a respeito, organizar e realizar cálculos baseados em como alguém deveria escolher um portfólio de ativos através do tempo para atingir objetivos, alvos e metas de longo prazo. Os modelos forçam a diversificação e a consideração de cenários inusitados para proteger a si mesmo de efeitos de retornos extremos e apresentar bons retornos em períodos normais. Eles pretendem evitar que os indivíduos e instituições entrem em situações nas quais cenários pouco prováveis, mas plausíveis, poderiam levar a verdadeiras consequências desastrosas tais como a perda de metade ou mais dos valores investidos em ativos. Uma vez que esses modelos forçam a consideração de todos os cenários relevantes, a prática comum de assumir baixa probabilidade para cenários que não tendem a acontecer é evitada. Por isso os desastres que frequentemente seguem desses erros podem ser evitados (ZIEMBA; FELLOW, 2003).

Assim como Ziemba e Fellow (2003) declara: os mercados são imprevisíveis a maior parte do tempo. Contudo, preços reais dos ativos tem caudas mais gordas porque eventos extremos ocorrem muito mais do que distribuições lognormal ou normais indicam. Então, deve-se ter uma maneira para combinar modelos, preços, que sejam precisos a maioria do tempo com aspectos inexplicáveis e irracionais que ocorrem de vez em quando. Essa suposição torna crucial que se considere os eventos de diferentes níveis com várias chances.

3.1 Modelo Determinístico

O modelo de administração de passivo e ativo apresentado nessa seção se baseia em [Domenica et al. \(2007\)](#), [Valente et al. \(2009a\)](#) e [Murarka et al. \(2014\)](#). Implementa-se um modelo de Valor Esperado, que é definido formalmente por [Gassman e Ireland \(1996\)](#) e usado por [Valente et al. \(2009a\)](#), [Valente et al. \(2009b\)](#) e [Murarka et al. \(2014\)](#). O modelo pode ser definido como a seguir.

Um investidor encontra o problema de criar um portfólio alocando um conjunto de ativos pertencentes ao universo N . Cada classe de ativos está caracterizada pelo preço P . O objetivo do investidor é maximizar a riqueza do portfólio no final de um horizonte de tempo T predefinido. Ele precisa considerar futuras obrigações (passivo) L , nesse modelo não se considera os possíveis custos de transação. Em cada período do horizonte de tempo, e para cada ativo considerado, o modelo precisa determinar:

- A quantidade de ativos para comprar;

- A quantidade de ativos para vender;

Pode-se então definir os índices, os parâmetros do problema e as variáveis de decisão como estabelecidas na tabela 1, 2 e 3

Tabela 1 – Dimensões do Problema

Índice	Notação	Descrição	Faixa
Ativos	N	Classes de ativos	$i= 1...N$; $N=3$
Período	T	Período de Tempo	$t= 1..T$; $T=12$

Tabela 2 – Parâmetros do Problema

Nome	Notação	Descrição
Preço	P_{it}	Preço do ativo i no período de tempo t
Passivos	L_t	Passivo no período de tempo t
Entrada	F_t	Valor Retorno e Contribuição no período t

Tabela 3 – Variáveis de Decisão do Problema

Nome	Notação	Descrição
QtdComp	B_{it}	Quantidade <i>shares</i> a ser investidas no ativo i no período de tempo t
QtdVend	S_{it}	Quantidade <i>shares</i> a ser vendidas do ativo i no período de tempo t

Tabela 4 – Variáveis Internas do Problema

Nome	Notação	Descrição
QtdAtivo	X_{it}	Quantidade de <i>shares</i> investidas no ativo i no período de tempo t
ValorMercado	V_t	Valor de mercado do Fundo a cada período de tempo t , preço do ativo multiplicado pelo valor do ativo investido
RiquezaFund	W_{it}	Valor arrecadado com a diferença entre a compra e venda a cada período de tempo t

3.1.1 Modelando os dados

Em uma versão determinística do modelo, implementando o modelo de Valor Esperado, o investidor pode computar o retorno esperado para cada ativo olhando para os dados históricos e assumindo que os retornos seguiram um “*random walk*”, modelo que considera o valor atual do ativo como uma composição do valor passado somado a um ruído branco e a uma tendência. Os valores obtidos são mostrados na tabela 5

Tabela 5 – Preços Esperados dos Ativos

Período	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3
1	18.09	19.40	19.01
2	18.78	18.25	17.36
3	20.30	20.75	18.70
4	21.83	20.92	17.56
5	17.00	19.83	19.82
6	19.77	20.94	21.53
7	21.53	18.39	22.96
8	20.83	19.72	19.28
9	21.64	20.32	21.69
10	18.83	22.21	22.18
11	20.64	19.31	19.52
12	20.41	19.40	18.76

Apresentam-se também a tabela 6 de preços relativos do modelo, considerando a diferença entre preços entre períodos, e usando como base o período imediatamente anterior.

Tabela 6 – Variação relativa dos preços dos ativos

Período	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3
1	-	-	-
2	0.69	-1.15	-1.66
3	1.52	2.51	1.34
4	1.53	0.16	-1.14
5	-4.83	-1.09	2.26
6	2.77	1.11	1.71
7	1.76	-2.55	1.43
8	-0.70	1.33	-3.68
9	0.81	0.60	2.42
10	-2.81	1.89	0.49
11	1.81	-2.89	-2.66
12	-0.24	0.09	-0.76

O investidor assume que o valor dos futuros passivos são conhecidos com certeza e que não haverá outros futuros financiamentos ao fundo além do investimento de capital inicial de R\$ 1000,00 reais, ou seja, os valores de F_t , com exceção do valor de F_1 , são zero. Na tabela 7, exibe-se a tabela dos passivos conhecidos e utilizados no modelo.

Tabela 7 – Passivos Futuros

Período	Passivo
1	32134
2	36567
3	39549
4	33884
5	33362
6	37487
7	35359
8	31848
9	33586
10	37541
11	34282
12	3516

Inicialmente, o portfólio se encontra vazio, então não há nenhum valor financeiro investido em ações, ou seja, X_{i0} é zero para cada ativo i .

3.1.2 Modelo Algébrico

3.1.2.1 Restrições de manutenção dos ativos

Durante o horizonte de planejamento, o portfólio é rebalanceado em pontos discretos no tempo (no início de cada período de tempo). O modelo compra ativos com os maiores retornos esperados e vende aqueles com pior desempenho. A *restrição de manutenção de ativos* mostra a evolução da composição do portfólio sobre o tempo. No período de tempo $t = 1$, quando a decisão inicial é tomada, o portfólio ou já consiste de um conjunto conhecido de ativos, ou as posições do portfólio são zero. Para períodos de tempo $t > 1$, a quantidade de cada ativo individual mantida no portfólio é associada a quantidade mantida para cada ativo durante o período de tempo anterior.

$$X_{it} = X_{it-1} + B_{it} - S_{it} \quad t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

3.1.2.2 Restrições de Balanceamento do Fundo

Durante todo o período de planejamento do fundo ocorre fluxo de entrada e saída de caixa. Aquelas são devidas às vendas de ativos, ou bom resultado de ativos selecionados anteriormente; esta é devido aos pagamentos da empresa e outras responsabilidades, que devem ser cumpridas como, por exemplo, a compra de ações. Em outras palavras, essa restrição reflete a evolução do balanço do caixa do investidor ao longo do período de tempo.

$$\sum_{i=1}^N P_{i0} X_{i0} = F_t \quad t = 1 \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^N P_{it} S_{it} - \sum_{i=1}^N P_{it} B_{it} = L_t - F_t \quad t = 2, \dots, T \quad (3.3)$$

3.1.2.3 Função Objetivo

O objetivo do investidor é maximizar a riqueza terminal do portfólio. Isso pode ser expresso pela equação a seguir:

$$\max \sum_{i=1}^N P_{iT} X_{iT} \quad (3.4)$$

A expressão acima pode ser usada para calcular o valor de mercado do portfólio a cada período de tempo substituindo T com $t = 1, \dots, T$.

3.1.3 Resultados

Abaixo, são apresentadas tabelas com resultados obtidos a partir da resolução da definição do problema algébrico. Para tal realização, utilizamos o solver *CPLEX* versão 12.5, e as equações foram programadas utilizando o AMPL, “*A modelling programming language*”. Os valores apresentados nas tabelas a seguir correspondem a quantidades financeiras em reais.

Tabela 8 – Qtd de *shares* investidas no ativo *i* no período de tempo *t*

Período	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3
1	1776.34	0	0
2	0	3831.6	0
3	5864.76	0	0
4	0	0	9220.49
5	12712.5	0	0
6	1896.16	0	0
7	0	19025.7	0
8	0	0	21111.8
9	0	24188	0
10	30523.5	0	0
11	0	34401.1	0
12	0	0	35762.2

Tabela 9 – Qtd *shares* vendidas do ativo *i* no período de tempo *t*

Período	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3
1	0	0	0
2	1776.34	0	0
3	0	3831.6	0
4	5864.76	0	0
5	0	0	9220.49
6	0	0	0
7	14608.6	0	0
8	0	19025.7	0
9	0	0	21111.8
10	0	24188	0
11	30523.5	0	0
12	0	34401.1	0

Ao analisar-se a tabela 6, juntamente com os resultados do modelo determinístico, percebe-se que a estratégia do modelo a cada período é procurar quais são os ativos que representam maior retorno no próximo período, comprar seus ativos e vendê-los posteriormente. Como o modelo não apresenta custos de transação, e nenhuma restrição de meta atuarial, o modelo compra e venda toda a sua posição em cada período.

Tabela 10 – Valor de mercado do Fundo a cada período de tempo t

Período	Valor do Fundo
1	0
2	69926.7
3	119055
4	161912
5	216112
6	288813
7	349883
8	407035
9	491500
10	574757
11	664286
12	670898

Então, caso houvesse a possibilidade de obter-se os valores esperados dos ativos com alto grau de confiança previamente, o modelo poderia ser considerado trivial. No entanto, a realidade é diferente, supondo-se a hipótese do mercado perfeito na forma forte, torna-se impossível antever totalmente o valor das ações no dia seguinte. Por isso, utilizar essas previsões poderia causar grandes perdas já que a realidade não seria retratada de maneira adequada.

3.2 Modelos Estocásticos

Os modelos determinísticos vistos anteriormente oferecem decisões ótimas assumindo que os parâmetros do modelo são conhecidos previamente, considerando os valores esperados das variáveis. Contudo, tem sido mostrado como a estimação errada desses parâmetros, os preços futuros dos ativos no nosso modelo de administração de ativos e passivos, pode levar a uma decisão não ótima, que resulta na perda de rendimentos. A incerteza nos preços dos ativos tem de ser considerada e introduzida no modelo a fim de se obter uma solução robusta. Neste caso, a programação estocástica proporcionaria maior visibilidade, já que a incerteza é mantida até o momento da otimização combinatória.

Em casos determinísticos, o investidor faz suposições sobre os retornos esperados baseado diretamente nos dados históricos, calcula os componentes necessários para medida de risco e seleciona um modelo apropriado, que é normalmente relacionado com o ponto de vista do investidor em relação ao risco. Logo, o perfil de risco do investidor e o modelo adequado de otimização resultarão na decisão ótima mais segura.

De acordo com [Murarka et al. \(2014\)](#), evidências empíricas demonstram que a geração de valores esperados a partir de uma normal, empregada mais cedo, não reflete

a realidade, uma vez que o retorno de ativos financeiros demonstram caudas grandes, ou seja, eventos raros acontecem nos mercados com certa frequência. Por isso, torna-se fundamental a introdução de um método mais sofisticado para estimação dos preços dos ativos. Os sub-modelos de aleatoriedade, introduzidos na programação estocástica, podem descrever tais características de maneira mais adequada. Sendo assim, o seu resultado representa mais precisamente o comportamento dos ativos.

Então, a otimização do modelo de decisão é integrada com um modelo de aleatoriedade. A modelagem da aleatoriedade utiliza o conjunto de dados históricos disponíveis com a ajuda de submodelos construídos para cada parâmetro estocástico individual. Então, esses submodelos são empregados para gerar um conjunto de cenários que encapsulam a percepção do modelador a respeito do futuro. De outro lado, um modelo determinístico representando uma instituição ou as necessidades particulares e restrições de um investidor tem de ser modelado inicialmente. Esse modelo é definido por meio de equações algébricas. A representação por meio de programação matemática integrada com um modelo de aleatoriedade implementado por meio de cenários fornece o instrumento para lidar com a incerteza.

3.2.1 Modelo de Programação Estocástica Multi-Estágio

O modelo de otimização considerado é um refinamento do modelo de ALM investigado na seção 3.1. Dado N como um conjunto de ativos, utiliza-se um gerador de cenários para simular a realização de cada ativo e passivo, esse processo é melhor discutido na seção 3.3. Essas possíveis realizações são simuladas em horizonte de tempo discreto, $t \in T$, para os preços de cada ativo, $i \in N$, de cada cenário, $s \in S$. Os preços dos ativos são denotados como P_{its} , que se trata de uma variável aleatória. Os passivos são obtidos para cada cenário, e eles são denotados pela variável L_{ts} para todos os elementos em conjunto de cenários S e em um dado período de tempo $t \in T$ considerado no modelo ALM.

As restrições serão melhor detalhadas nos próximos tópicos. Então, de acordo com [Murarka et al. \(2014\)](#), a formulação de programação estocástica equivalente deterministicamente do problema ALM é dado por:

3.2.2 Restrições de Manutenção do Fundo

A quantidade de *shares* do portfólio é rebalanceada em pontos discretos do tempo. A quantidade mantida de cada ativo é expressa pela restrição 3.5, quando se considera $t = 1$, tem-se a posição inicial do ativo, nos períodos $t > 1$, administra-se a evolução do portfólio de ativos. A quantidade de *shares* de um dado ativo é resultado da quantidade anterior somada ao quantidade comprada B_{it} durante o período de tempo menos a aquelas

que foram vendidas S_{it} .

$$X_{it} = X_{it-1} + B_{it} - S_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

3.2.3 Restrições de Balanceamento do Fundo

O fluxo de caixa do fundo é dividido em entradas e saídas. Essas entradas são devido à venda de ativos, ou ao bom rendimento dos investimentos nos ativos, além disso o fundo pode obter um financiamento adicional, F_t . Essas saídas se referem aos pagamentos que o fundo deve fazer ou outras obrigações que possam existir, bem como a compra de ativos. Estas restrições que são relacionadas a evolução do fluxo de caixa do fundo ao longo tempo são definidas pela equação 3.6.

$$\sum_{i=1}^N P_{its} S_{its} - \sum_{i=1}^N P_{its} B_{its} + F_t + U_{ts} = L_{ts} \quad (3.6)$$

$$\forall t \in 1, \dots, T; \forall s \in 1, \dots, S$$

$$\bar{U} = \sum_{t=1}^T U_{ts} \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^N P_{its} S_{its} \geq \sum_{i=1}^N P_{its} B_{its} \quad \forall t \in 1, \dots, T; \forall s \in 1, \dots, S \quad (3.8)$$

$$p_{s \in 1, \dots, S} \{U_{ts} \leq 0\} \geq R_t \quad \forall t \quad (3.9)$$

$$E_{s \in 1, \dots, S} [\bar{U}] \leq W \quad (3.10)$$

$$0 \leq U_{ts} \leq M \quad (3.11)$$

$$X_{it}, B_{it}, S_{it} \geq 0, \quad R_t \in [0, \dots, 1] \quad \forall i \in N, t \in T, s \in S$$

Incluiu-se também *chance constraints* e *integrated chance constraints* no modelo. Elas se tratam de um relaxamento das restrições de fluxo de caixa para permitir algum nível de *underfunding*, em outras palavras, em certos momentos do tempo, a entrada líquida do fundo não é suficiente para honrar os compromissos do fundo, essa diferença poderia ser vista como um empréstimo realizado pelo fundo. Essa dinâmica é implementada permitindo que o balanço do fundo seja negativo. A partir disso, dois conceitos importantes são definidos: o de *underfunding* e o de insolvência para o fundo de pensão. Assim como esclarece [Valladão e Álvaro Veiga \(2008\)](#), *underfunding* é visto como uma riqueza negativa no final do horizonte de programação estocástica, enquanto o estado de insolvência é descrita pelo deficit no final da existência do fundo. A probabilidade de *underfunding* é calculada a partir do número de cenários incapazes de honrar suas obrigações em um determinado período de tempo.

O *underfunding* para cada cenário é denotado por $U_{ts} \geq 0$, e $\leq M$, que é um parâmetro exógeno, cujo objetivo é estabelecer a extensão de dívida em cada cenário. As *integrated chance constraints* é a soma de todos os *underfunding* em um dado ramo da árvore. Ele é descrito pela equação 3.7 e 3.10, onde W é a um parâmetro usado para medir quantitativamente qual nível de insolvência de um caminho da árvore. Logo, com 3.10, coloca-se um limite para o total desta dívida de um ramo da árvore, impedindo-o de ultrapassar W .

Quando se permite *underfunding*, a quantidade dessa variável U_{ts} poderia ser realocada pelo investidor também no futuro, de modo que um dinheiro poderia aparecer indevidamente no fluxo de caixa. Por isso, define-se pela equação 3.8 a fim de garantir que o investidor use apenas o dinheiro das entradas do fluxo de caixa. De acordo com (MURARKA et al., 2014), essa restrição é chamada de *balanço financeiro*. A *chance constraint* para o balanço financeiro é formalizada pela equação 3.9, na qual a variável R é o nível de confiança para determinar qual a probabilidade de os cenários não apresentarem condições de honrar seus compromissos.

3.2.4 Restrições Regulatórias

Além das restrições referentes à modelagem da dinâmica de administração de ativos e passivos (ALM), o modelo deve contemplar também a legislação brasileira relacionada a regulação dos investimentos nos fundos de pensão de previdência complementar fechada, visto que sua atividade é disciplinada pelo Estado. Para este fim, adicionou-se ao modelo a restrição 3.12. Atualmente, a Resolução CMN nº 3.792/2009 prevê que a alocação em ativos de Renda Variável seja no máximo 70% do valor total do portfólio de investimentos do fundo.

$$X_{3t} \leq \pi X_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad \pi \in [0, \dots, 1] \quad \forall i, i = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

O índice 3 representa o ativo de renda variável. O parâmetro π corresponde à alocação máxima relativa ao total de recursos disponíveis legalmente permitida.

3.2.5 Função Objetivo

O modelo irá procurar pela maximização da riqueza no último período da árvore de cenários.

$$\max \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N p_s P_{iT_s} X_{iT_s} \quad (3.13)$$

3.3 Modelo de Precificação de Ativos

O preço dos ativos é visto como um processo estocástico de período discreto, já que seu valor muda de maneira incerta ao longo do tempo, e, embora essa alteração possa ocorrer a qualquer momento, utiliza-se intervalos de tempo para realizar a amostragem dos preços, (HULL, 2008). Além disso, os preços são independentes das realizações passadas mas convergem para um estado estável ao longo de um período de tempo (média e desvio), o que também o caracteriza como processo markoviano. Essa independência é vista a partir da suposição de mercados perfeitos na forma forte, a qual determina que os preços atuais refletem toda a informação disponível até agora. A base do modelo é fundamentada no processo de Wiener generalizado, cuja definição formal se dá pela equação 3.14.

3.3.1 Processo de Wiener

$$\Delta x = a dt + b dW \quad (3.14)$$

A equação 3.14 implica dizer que x apresenta média a e desvio padrão b . Sendo assim, o parâmetro a define a taxa de retorno do ativo por unidade de tempo, e, então, é multiplicado pelo intervalo de tempo considerado. Esse valor é somado ao parâmetro b , que se trata da taxa de variância, a qual é multiplicada por dW , um ruído ou variabilidade que é definido pela equação 3.15.

$$dW = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.15)$$

A variável dW é considerada um processo de Wiener padronizado. O argumento ϵ tem uma distribuição normal padronizada, ou seja, média zero e desvio padrão um, ou $\phi(0, 1)$. Então, considerando-se P_t como o preço dos ativos, a variável dP_t poderia ser vista como uma pequena variação de preço em um determinado intervalo de tempo Δt , com retorno esperado μ , e desvio padrão σ . Para a definição desses parâmetros, realiza-se uma pequena aproximação de μ e σ , visto que eles são considerados constantes no intervalo de tempo t e $t + \Delta t$. Logo, o processo de modelagem para um ativo pode ser dado pela equação 3.16 e 3.17.

$$P_t = P_{t-1} + \Delta P_t \quad (3.16)$$

$$\Delta P_t = \mu P_{t-1} \Delta t + \sigma \epsilon P_{t-1} \sqrt{\Delta t} \quad (3.17)$$

De acordo com Hull (2008), o modelo definido pelas equações 3.16 e 3.17 é o mais amplamente utilizado para modelar o comportamento dos preços de ativos. Ele também

representa um *random walk* com valor esperado $\mu\Delta t$, e componente estocástico $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$. A variância do componente estocástico é $\sigma^2\Delta t$, e, por conseguinte, o desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

$$\Delta P_t \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t) \quad (3.18)$$

3.3.2 Random Walk Correlacionado

Se mais de um ativo é utilizado na composição da simulação, é necessário considerar a correlação entre eles, ou seja, a maneira como o resultado de cada um deles influencia na evolução do outro. Para tal, de acordo com Brandimarte (2006), a maneira mais simples de expressar essa interação é generalizar o movimento Browniano geométrico, como também é conhecido o processo de Wiener. Então, por meio dessa abordagem, assume-se que o preço P_{it} do ativo $i = 1, \dots, n$ satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{dP_{it}}{P_{it}} = \mu_i dt + \sigma_i dW_i \quad (3.19)$$

onde o processo de Wiener W_i são correlacionados. Eles apresentam um conjunto de coeficientes de correlação ρ_{ij} , cujo significado pode ser apreendido pela seguinte formalização:

$$dW_i \cdot dW_j = \rho_{ij} dt \quad \forall i, j \quad (3.20)$$

$$\rho_{ii} = 1 \quad (3.21)$$

Sendo assim, *random walk* correlacionados são simulados por normais padronizadas que sejam correlacionados, ou uma normal multivariada, que apresente o número de dimensões iguais ao número de ativos respeitando 3.20 e 3.21.

3.3.3 Geração dos preços

Para a simulação do modelo utiliza-se a aproximação dos retornos por meio da função log, com base e . Essa função permite que os retornos logarítmicos dos ativos durante Δt períodos possam ser escritos como a soma desses períodos. Logo, pode-se

dizer o seguinte,

$$\begin{aligned}\Delta t P_t &= \log P_t - \log P_{t-\Delta t} = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \dots \frac{P_{t-(\Delta t-1)}}{P_{t-\Delta t}} \right) \\ &= \Delta P_t + \Delta P_{t-1} + \dots + \Delta P_{t-(\Delta t-1)} \\ &= \sum_{j=1}^{\Delta t} \Delta P_{t-(j-1)}\end{aligned}\quad (3.22)$$

De acordo com Brandimarte (2006), considera-se que a soma desses retornos também seja distribuída normalmente. Então, o autor declara que a distribuição desses retornos estariam de acordo com,

$$E[\Delta t P_t] = \mu, \quad Var(\Delta t P_t) = \sigma^2, \quad (3.23)$$

A partir dessas definições, adotou-se, como entrada do modelo a ser simulado, os retornos mensais logarítmicos de três ativos, Money Market, CDI e IBOV, buscando representar a possibilidade de valores financeiros em caixa, de investimento de menor volatilidade e de outro, de maior volatilidade. A amostra utilizada continha dados a partir de janeiro de 2004 até julho de 2014, e foi aplicada para definir-se os parâmetros μ , σ^2 , bem como a matriz de correlação entre os ativos. A simulação de preços deu-se utilizando as equações 3.16 e 3.17, considerando-se a correlação entre os ativos explicitada por 3.20 e 3.21. Como o retorno utilizado era mensal, o Δt utilizado foi 1. O exemplo de uma das iterações pode ser visto pelas Figuras 6 e 7.

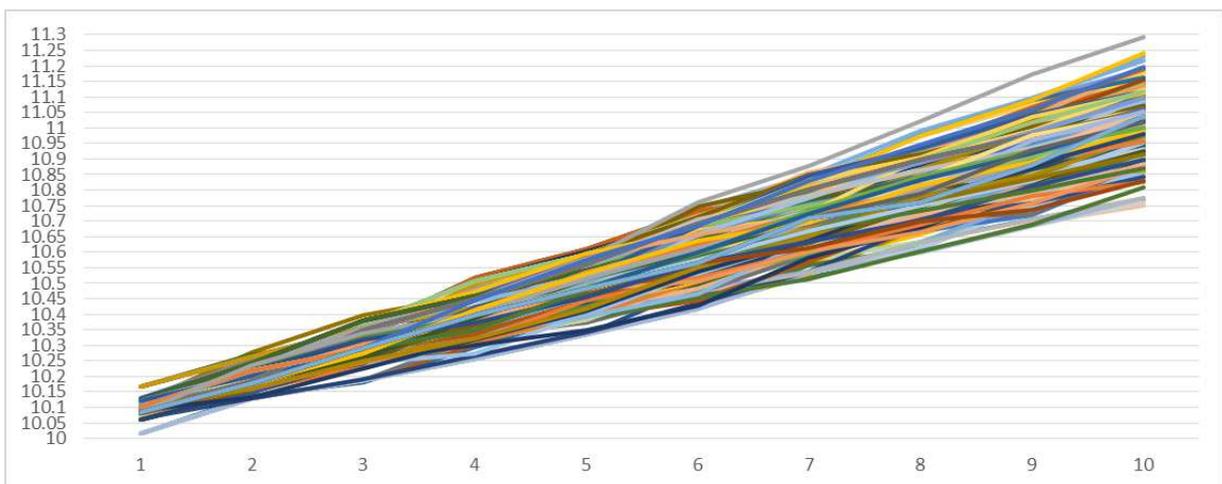


Figura 6 – Árvore de Preços CDI

Fonte: Elaborado pelo Autor

O roteiro do processo de geração dos preços se deu pelos seguintes passos:

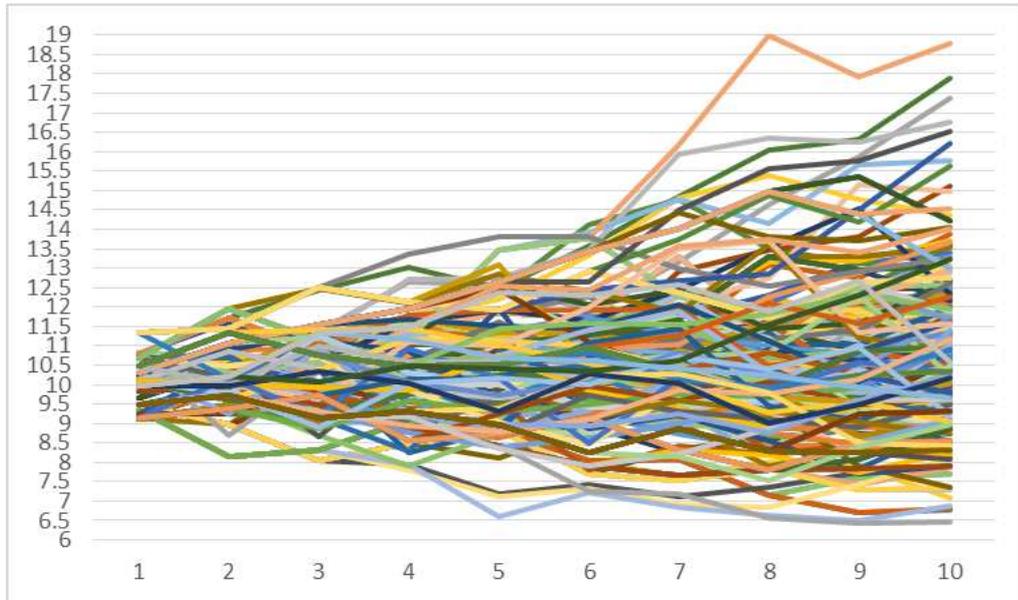


Figura 7 – Árvore de Preços IBOV

Fonte: Elaborado pelo Autor

- 1 Verificação da média, variância e desvio padrão a partir da série de retornos logarítmicos dos ativos.
- 2 Gerar os números pseudoaleatórios amostrados de uma variável aleatória com distribuição normal padrão e multivariada, cujo parâmetro de entrada é uma matriz semi-definida positivamente da correlação entre os retornos logarítmicos dos ativos.
- 3 Aplicar o modelo das equações 3.16 e 3.17 utilizando os parâmetros do item [1] e utilizar o dW_i do passo [2] para a geração dos valores, considerando apenas o último valor encontrado para a geração do novo preço.

4 Simulações e Resultados

Neste capítulo, aplica-se o modelo estocástico apresentado no capítulo anterior. A estimação dos seus parâmetros é realizada, o que, por consequência, possibilita o cálculo da probabilidade de insolvência versus a riqueza inicial do fundo. Propõe-se também uma discussão do impacto da mudança da estrutura da taxa de juros no perfil de investimentos destes fundos. A fim de facilitar o entendimento dos resultados, exhibe-se, nesta seção, um resumo do modelo implementado.

4.1 Resumo do Modelo

$$\max \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N p_s P_{iT_s} X_{iT_s}$$

sujeito a :

$$X_{it} = X_{it-1} + B_{it} - S_{it} \quad t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N P_{its} S_{its} - \sum_{i=1}^N P_{its} B_{its} + F_t + U_{ts} = L_{ts}$$

$$\forall t \in 1, \dots, T; \forall s \in 1, \dots, S$$

$$\bar{U} = \sum_{t=1}^T U_{ts}$$

$$\sum_{i=1}^N P_{its} S_{its} \geq \sum_{i=1}^N P_{its} B_{its} \quad \forall t \in 1, \dots, T; \forall s \in 1, \dots, S$$

$$X_{3t} \leq \pi X_{it} \quad \forall t \in 1, \dots, T \quad \forall i, i = 1, \dots, N$$

$$p_{s \in 1, \dots, S} \{U_{ts} \leq 0\} \geq R_t \quad \forall t$$

$$E_{s \in 1, \dots, S} [\bar{U}] \leq W$$

$$0 \leq U_{ts} \leq M$$

$$X_{it}, B_{it}, S_{it} \geq 0, \quad i \in N, t \in T, s \in S$$

Além disso, referência-se novamente as equações definidas para a geração de cenários, as quais seguem abaixo:

$$P_t = P_{t-1} + \Delta P_t$$

$$\Delta P_t = \mu P_{t-1} \Delta t + \sigma \epsilon P_{t-1} \sqrt{\Delta t}$$

As definições e explicações do modelo podem ser encontradas nas seções 3.3 e 1.3.1. Ao se comparar o modelo proposto com àqueles apresentados por (VALLADÃO, 2008; FIGUEIREDO, 2011), nota-se distinção principalmente na formalização da função objetivo. Esse autores optam por uma função linear que avalie o desempenho do retorno dos fundos, medindo-os a partir de uma meta atuarial. Esses parâmetros de bonificação e de penalidade adotados buscam formalizar a medida de aversão a risco do investidor. Entende-se que a definição desses parâmetros não se dá de maneira trivial, principalmente em um ambiente mais aplicado. Por isso, neste trabalho, procurou-se modelar diferentemente o posicionamento do administrador do fundo. Este modelo tem como prioridade o cumprimento das restrições, que representam o passivo e responsabilidades a serem pagas pelo fundo, e em segundo plano maximiza o retorno.

4.2 Definição de Parâmetros

O modelo implementado foi o formalizado na seção 3.2.1, e resumido na seção 4.1. Ele utilizou uma árvore de cenários binária com $T = 10$, ou seja, dez estágios. Assim como mencionado na seção 3.3.2, adotou-se $N = 3$, que compreende, os retornos mensais logarítmicos de três ativos, definidos pelos certificados de depósito interbancários (CDI), como uma proxy para taxa de juros, pelo Money Market, e pelo índice de cotação do índice IBOVESPA (IBOV). Esses ativos foram escolhidos a fim de representar a possibilidade de valores financeiros em caixa, de investimento de menor volatilidade e de outro, de maior volatilidade. Utilizou-se o modelo de precificação apresentado na seção 3.3.1, e resumido na seção 4.1. A amostra utilizada continha dados a partir de janeiro de 2004 até julho de 2014, e foi aplicada para definir-se os parâmetros μ , σ^2 , bem como a matriz de correlação entre os ativos. O número de estágios a cada período é de $2^t \forall t = 1, \dots, T$, resultando num total de 2046 nós da árvore de cenários para cada execução, organizados em dez cenários independentes. Os dados extraídos dessas séries são apresentados na tabela 11.

Tabela 11 – Retorno Médio e Desvio Padrão da Amostra

Ativo	Retorno Médio Logarítmico %	Desvio Padrão Logarítmico %
Money Market	5.65	0.0
CDI	11.3	9.26
IBOV	8.7	22.13

Assim como exibido na tabela 11, adota-se como retorno do ativo Money Market sempre a metade do retorno utilizado para o CDI. A estrutura de passivo empregado no modelo foi fornecido por um grande fundo de pensão. Além disso, como indicado por muitos especialistas da área atuarial, e descrito na maioria dos normativos dos fundos de pensão brasileiro, como por exemplo Previ (2013), a metodologia para trazer o valor

do passivo à valor presente é adotar como taxa de desconto somente os juros atuariais. Esse procedimento justifica-se pelo critério prospectivo, ou seja, que projeta futuramente, o qual é utilizado por essas instituições. Dessa forma, eles realizam somente o desconto atuarial, desconsiderando o financeiro. O valor utilizado é de 5%, o mesmo praticado por [Previ \(2013\)](#). Defini-se também o π a ser adotado na equação 3.12 como valor máximo de alocação permitida em ativos de renda variável. Para este trabalho, emprega-se o limite máximo de 70 % do total de recursos disponíveis para alocação em ativos de maior volatilidade.

Além disso, optou-se por não adotar a possibilidade de *underfunding* no fundo de pensão, mesmo definindo-o algebricamente. O *underfunding*, assim como percebido por [Valladão \(2008\)](#), pode ser visto como uma medida subestimada do risco levando a interpretações equivocadas do estado de solvência do fundo. O motivo para tanto é o propósito para o qual o dinheiro será empregado pelo modelo. Pode-se observar que, enquanto a taxa de juros imposta para a retirada desse valor for menor do que os possíveis rendimentos prováveis dos investimentos considerados, como o modelo busca otimizar o retorno final do portfólio, ele sempre utilizará esse valor para se alavancar, ainda que não seja necessário para o pagamento exclusivo do passivo relacionado ao respectivo período. Como o principal objetivo deste trabalho era identificar uma política de investimento que maximizasse o retorno do portfólio a partir somente dos retornos dos ativos, o *underfunding* foi desprezado nas análises. Uma das implicações dessa decisão se dá pelo fato de que nenhum dos estágios apresentar valores negativos, mesmo em meio a execução do modelo. Essa restrição resultou na garantia de que todos esses estágios resultavam valores positivos para o patrimônio, ou seja, em todos os períodos de tempo considerados, o modelo deveria ser capaz de realizar o pagamento do passivo e ainda indicar um saldo positivo de patrimônio.

4.3 Alocação do fundo no instante inicial

As variáveis de decisão do modelo são referentes a alocação dos recursos. Então, a resposta esperada é definida por uma política de investimento que maximize a riqueza do portfólio respeitando as regras e restrições apresentadas nas seções anteriores. Assim como realizado por [Figueiredo \(2011\)](#), Ao tratar-se da incerteza no modelo, ainda que a cada iteração sejam produzidos dez cenários, faz-se necessário identificar se há convergência quanto a proporção de alocação de recursos em ativos, por meio dos parâmetros de entrada empregados. Para tal, realizou-se diferentes números de execuções a fim de buscar se havia convergência do portfólio inicial. Seguem os resultados na tabela 12.

Dado o equilíbrio do portfólio inicial na composição de carteira a partir de 300 iterações, verificado na tabela 12, elegeu-se esse número como adequado para as demais

Tabela 12 – Composição do Portfólio para Carteira Inicial

Nº Iterações	Money Market %	Renda Fixa%	Renda Variável%
50	18	44	38
100	16	48	36
200	16	51	33
300	16	51	33
500	17	50	33

análises e verificações a serem realizadas a partir do modelo. O número de iterações apropriado foi selecionado após a simulação de 11500 cenários diferentes.

4.4 Probabilidade de Insolvência

Assim como definida mais extensamente na seção 3.2.3, o estado de insolvência é descrita pelo deficit no final da existência do fundo, ou seja, ao final do período considerado, o modelo não foi capaz de cumprir com o passivo, terminando com ao menos um dos 10 cenários com o patrimônio negativo. Sendo assim, ao verificar-se o último estágio de uma execução, nenhum dos 1024 nós pertencentes ao décimo nível da árvore pode ter patrimônio resultante negativo. Como parâmetro para verificação, utilizou-se o fundo inicialmente equilibrado, ou seja, o valor do patrimônio inicial era o mesmo do total do passivo, trazido a valor presente, a ser pago. Posteriormente, o valor do patrimônio inicial foi sendo decrementado até chegar à medida de apenas 60% do total do passivo. Esse experimento considerou dezenove valores para patrimônio inicial, desde patrimônio referente a 100% do passivo até 60% do passivo. Executou-se trezentas corridas para cada uma dessas faixas de valor de patrimônio inicial. A partir disso, aferiu-se quantas vezes o fundo tornou-se insolvente, definindo-se a probabilidade da ocorrência de tal evento para a respectiva faixa. O resultado pode ser verificado na Figura 8.

A probabilidade de insolvência foi testada diferentes níveis de confiança, mas devido à restrição que garante que todos os estágios de todos os períodos do fundo sejam positivos, o nível de confiança se tornou um condicionante *lower bound* para o modelo, não influenciando os resultados. A partir da Figura 8, percebe-se um comportamento esperado por parte do modelo, uma vez que conforme o decréscimo do valor inicial do patrimônio inicial, o fundo deverá buscar um retorno maior a fim de garantir o pagamento de suas responsabilidades. Como os investimentos apresentam maior risco, o modelo se expõe cada vez a um nível maior de risco, aumentando a probabilidade de insolvência do fundo de pensão. Foram realizadas 300 iterações para cada nível de equilíbrio entre patrimônio inicial e passivo do fundo, totalizando 5700 iterações para cada nível de confiança considerado.

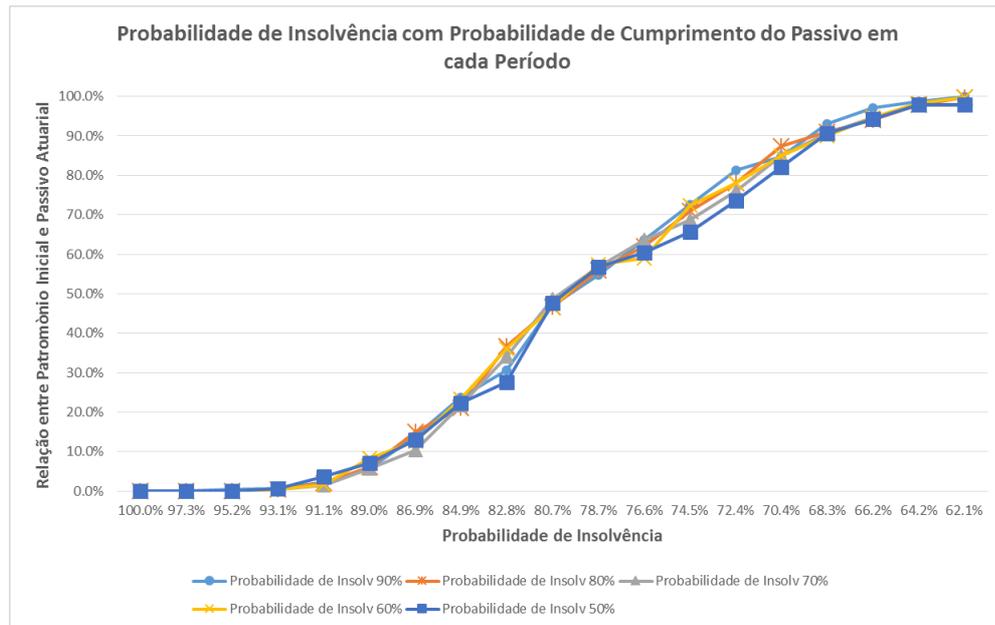


Figura 8 – Probabilidade de Insolvência

Fonte: Elaborado pelo Autor

4.5 Comportamento do Fundo com o decréscimo da Taxa de Juros

Um exemplo de aplicação plausível para o modelo apresentado poderia ser análise do comportamento de alocação de investimentos do fundo dado o cenário de queda da taxa de juros. O decréscimo da taxa de juros pode ser visto como uma tendência de longo prazo no Brasil. Assim como nesta nação, há outros países que já apresentaram o mesmo comportamento, especialmente países em desenvolvimento. [Dupacová e Polívka \(2009\)](#) observaram a mesma tendência, no período entre 1999 e 2001, na Rússia. Dessa maneira, procurou-se realizar um estudo inovador no Brasil, uma análise do impacto do decréscimo da taxa de juros na política de investimentos de um fundo de pensão, uma tendência de longo prazo no país. Como mencionado anteriormente, os certificados de depósito interbancários (CDI) foram vistos como uma proxy para taxa de juros. Sendo assim, analisou-se o impacto na política de investimentos do fundo de pensão ao avaliar essa possível queda na taxa de juros. Considerou-se três cenários para o estudo do comportamento do portfólio sob decréscimo da taxa de Juros. Eles são exibidos pelas Figuras 9, 10 e 11.

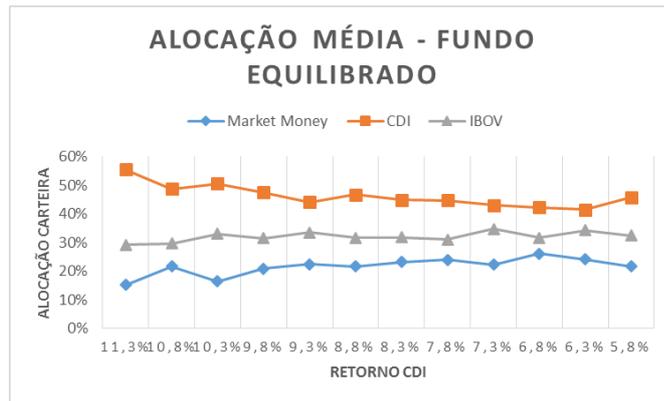


Figura 9 – Evolução Portfólio - Fundo Equilibrado

Fonte: Elaborado pelo Autor

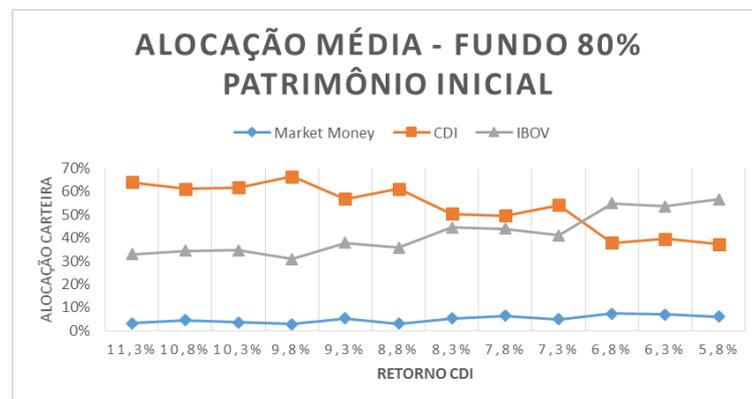


Figura 10 – Evolução Portfólio - Fundo 80% de Patrimônio Inicial

Fonte: Elaborado pelo Autor

O cenário ilustrado pela Figura 9, ocorreu de forma previsível. Quando o fundo detém recursos suficientes para pagar o passivo, independente dos retornos dos ativos, mesmo quando o retorno da renda fixa é menor, ele mantém a carteira, com uma leve tendência a migrar investimentos para a renda variável. Esse comportamento pode ser visto porque nesse caso a taxa de juros não atua como uma restrição *hard*, já que o modelo tem disposição financeira suficiente para o pagamento do passivo independentemente dos retornos de seus investimentos. Então, ele mantém a carteira ótima, já apresentada pela tabela 12. O cenário representado pela Figura 10, também exibiu comportamento esperado. Enquanto o retorno do CDI estava superior ao retorno verificado com IBOV, o modelo manteve a carteira ótima, que apresenta rentabilidade média maior. A partir do momento que os juros do CDI ficaram abaixo do retorno obtido no IBOV, ele começou gradualmente a migrar investimentos para a renda variável. Esse comportamento se dá até o momento que ele aloca a maior parte de seus investimentos em renda variável a fim de garantir a solvência do fundo e a maximização de seu retorno. Além disso, nota-se que a probabilidade de insolvência também aumenta a partir desse instante, já que temos grande volatilidade de retorno na renda variável. Então, o fundo aumenta a sua

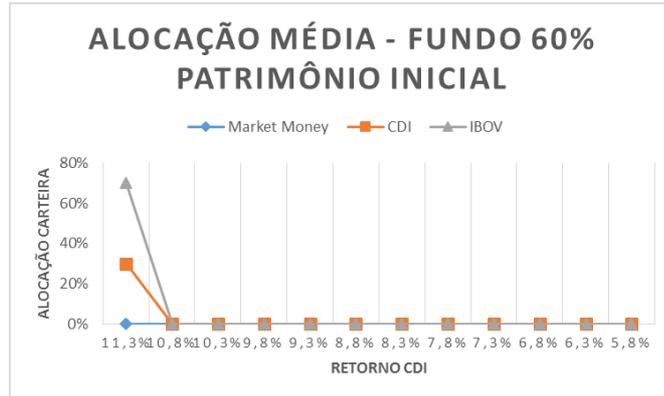


Figura 11 – Evolução Portfólio - Fundo 60% de Patrimônio Inicial

Fonte: Elaborado pelo Autor

probabilidade de insolvência. No cenário representado pela Figura 11, o modelo conseguiu formar uma carteira somente com o primeiro nível de retorno, posteriormente não conseguiu formar mais carteiras, já que todos os cenários não ofereciam viabilidade para o cumprimento passivo no final dos dez períodos com um nível de confiança de 90% para todos os estágios. Nesta carteira, ele aloca o máximo possível em renda variável a fim de viabilizar o pagamento do passivo do fundo.

5 Considerações finais

De acordo com [Adam \(2007\)](#), ALM deve procurar encontrar pontos de equilíbrio entre a aversão à risco e o prêmio sob risco, e ganho a partir das posições tomadas. Neste trabalho, implementou-se, descreveu-se e analisou-se os resultados de um modelo para administração de ativos e passivos aplicado a fundos de pensão de benefício definido. A abordagem adotada foi a otimização e programação estocástica em período de tempo discreto baseada em uma árvore de cenários multi-estágio balanceada. Uma visão geral do funcionamento e interação de todos esses componentes é encontrada na seção [1.3.1](#), que é ilustrada pela [Figura 1](#). O resultado encontrado caracterizou-se por uma distribuição de probabilidade da alocação dos ativos no instante inicial da simulação, e da probabilidade de insolvência quantificada com base na medida de equilíbrio financeiro do fundo. Para tornar a modelagem de ALM possível, foi necessária a formalização do ambiente estocástico, visto na seção [2.3](#), a modelagem algébrica, cuja realização ocorreu na seção [3.2](#), a definição da metodologia de precificação dos ativos, apresentada na seção [3.3](#). Toda a estrutura para execução das simulações se estabeleceu a fim de permitir escalabilidade ao problema. Aproximadamente 40000 simulações foram executadas, contendo 2046 nós em cada corrida. A proporção desse experimento é inédita na literatura, e procura contemplar um número significativo de cenários de modo a tornar o resultado do modelo robusto o suficiente para minimizar perdas em cenários extremos.

Quando se compara um modelo em que os valores esperados são usados como parâmetros, visto na seção [3.1](#), com modelos de natureza estocástica, como exibido na seção [3.2](#), nota-se a limitação daqueles modelos, assim como defendem [Valente et al. \(2009a\)](#). Por isso, esse trabalho, pela primeira vez no Brasil, propõe a apresentação desses dois modelos conjuntamente para facilitar a percepção da inadequação de modelos determinísticos à realidade de um fundo de pensão. Esses modelos de valor esperado buscam quais são os ativos que representam maior retorno no próximo período, compram esses ativos e os vendem posteriormente. Entretanto, eles não são capazes de incorporar a incerteza inerente ao mercado financeiro à projeção dos próximos períodos, levando-os a análises não realísticas e pouco informacionais. Como, de acordo com a teoria de mercado perfeito, não é possível prever totalmente o valor das ações no dia seguinte, devido à influência que novidades de mercado exercem na precificação de ativos, torna-se imprescindível a incorporação desse elemento à modelagem.

Tratando-se do modelo estocástico, os valores encontrados para a composição do portfólio no instante inicial são julgados adequados e condizentes com a realidade brasileira, veja [tabela 12](#), uma vez que estão muito próximos das composições de carteiras de fundos brasileiros como, por exemplo, Previ e BB, os quais de acordo com

Paixão, Pinheiro e Chedeak (2005), no ano de 2004, compunham seu portfólio com 62,20% de renda fixa, 30,07% de renda variável, e 7,73% de outros investimentos. Os resultados apresentados nesse trabalho indicam maior investimento em renda fixa, com uma tendência de migração para renda variável. Essa inclinação pode ser explicada pela propensão a longo prazo de queda da taxa de juros básico do país, cujo valor naquele período era aproximadamente 16%, o valor da taxa considerado é de 11%, cerca de 30% menor. A Petros, fundo de pensão da Petrobras, também teve sua composição de portfólio divulgada recentemente. Segundo, Valor Econômico (2014b), a sua representação em ativos ocorre por 49% em Renda Fixa, 36,9% em Renda Variável, e 13,4% em outros ativos. Esses números encontrados são muito próximos aos valores exibidos pelo modelo deste trabalho.

Na seção 4.4, detalhou-se as probabilidades de insolvência do fundo, realizando-se também diversas análises de sensibilidade. Essa verificação é alvo de muitos pesquisadores. Estudos semelhantes podem ser encontrados em Bauer, Hoevenaars e Steenkamp (2009), Dupacová e Polívka (2009), Figueiredo (2011). Os resultados poderiam ser aplicados por fundos de pensão como uma regra *ad-hoc* para a constatação de sua saúde financeira, bastando enquadrar-se em qual cenário o fundo se encontra. Então, verificaria-se, sob condições de mercado atuais, qual seria a sua probabilidade de insolvência. Por fim, na seção 4.5, ilustra-se o comportamento do fundo mediante a uma possível queda da taxa de juros. Essa análise evidencia a importância crescente de modelos de ALM dentro desse cenário econômico, uma vez que a redução da taxa de juros básica deverá impor aos administradores de fundo de pensão um cenário de maior risco, a fim de poderem honrar os compromissos definidos previamente com os participantes do fundo. A exposição a esse risco deve se dar de maneira responsável, controlada e medida. Por isso, os modelos de ALM são grandes aliados, uma vez que permitem simular, projetar e planejar o posicionamento estratégico mediante diferentes futuros cenários econômicos. Essa facilidade traz visibilidade e transparência ao processo de planejamento de políticas de investimento de um fundo de pensão, valores associados a uma governança empresarial de qualidade.

Ao desprezar-se o *underfunding*, as análises do comportamentos do fundo em diferentes nível de confianças, retratados pela Figura 8, podem ter ficado comprometidos, a medida que um dos intuitos desta análise de sensibilidade corresponde a análise sob relaxamento dessa restrição. O resultado esperado seria uma redução da probabilidade de insolvência nos estágios finais, tomando-se um nível de confiança menor. Por isso, uma definição para taxa de juros praticável para financiamentos tomados pelos fundos, bem como a formalização do regulamento para esse recurso, traria mais informações a respeito da dinâmica de alocação de ativos na administração do fundo de pensão. As taxas inerentes à operações financeiras também não foram contempladas. Por isso, verificou-se uma dinâmica muito grande relacionada à composição do portfólio em diferentes estágios de uma mesma iteração. Então, também poderia-se incluir essa informação no modelo, a fim permitir que ele considerasse essa despesa ao realizar suas compras e suas vendas.

Além disso, como a natureza do problema de administração de ativos e passivo pode ser vista a partir da perspectiva da incerteza em todos os seus elementos. Embora, nesse trabalho, uma estrutura de passivo determinística tenha sido considerada, poderia-se sofisticar o modelo acrescentando incerteza também a essa estrutura, desenvolvendo-se um modelo atuarial mais completo para retratar a realidade inerente à esse passivo, onde a taxa de mortalidade, a taxa de desemprego e outros atributos estocásticos seriam incluídos. Outro desenvolvimento a ser sugerido seria também a abordagem dos possíveis cupons provenientes de títulos de dívida do governo, e prováveis proventos relacionados às ações, os quais poderiam ser considerados juntamente com suas datas de vencimento. Esses aspectos também influenciam na decisão do administrador do fundo de pensões adiando estrategicamente a sua negociação em mercado.

Referências

- ADAM, A. *Handbook of asset liability management: from models to optimal return strategies*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and Son, 2007.
- BAUER, R.; HOEVENAARS, R.; STEENKAMP, T. Oxford handbook of pensions and retirement income, asset liability management. In: _____. [S.l.]: Oxford University Press, 2009. cap. 21, p. 417–440.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. *Introduction to Stochastic Programming*. University of Chicago and University of Namur: Springer Series in Operational Research and Financial Engineering, 2010.
- BRADLEY, S. P.; CRANE, D. B. A dynamic model for bond portfolio management. *Management Science*, n. 19, p. 139–151, 1972.
- BRADLEY, S. P.; CRANE, D. B. Managing a bank bond portfolio over time. In: DEMPSTER, M. A. H. (Ed.). *Stochastic Programming*. [S.l.]: Academic Press, 1980.
- BRANDIMARTE, P. *Numerical Methods in Finance and Economics*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2006.
- CARIÑO, D. R.; KENT, T.; MEYERS, D. H.; STACY, C.; SYLVANUS, M.; TURNER, A. L.; WATANABE, K.; ZIEMBA, W. T. The russel-yasuda kasai model: An asset/liability model for japanese insurance company using multistage stochastic programming. *INTERFACES*, January-February, n. 24, p. 29–49, 1994.
- CONSIGLI, G.; DEMPSTER, M. Dynamic stochastic programming for asset - liability management. *Annals of Operations Research*, n. 81, p. 131–161, 1998.
- CORNUEJOLS, G.; TUTUNCU, R. *Optimization Methods in Finance*. Cambridge University: Cambridge University Press, 2007.
- DAELLENBACH, H. G.; ARCHER, S. A. The optimal bank liquidity: a multi-period stochastic model. *Journal of Quantitative Analytics*, 1969.
- DEMPSTER, M. A. H. On stochastic programming ii: dynamic problems under risk. *Stochastics*, v. 1, n. 25, p. 15–42, 1988.
- DEMPSTER, M. A. H.; IRELAND, A. M. Object-oriented model integration in a financial decision support system. *Decision Support Systems*, v. 7 Issue 4, p. 329–340, 1991.
- DOMENICA, N. D.; MITRA, G.; VALENTE, P.; BIRBILIS, G. Stochastic programming and scenario generation within a simulation framework: An information system perspective. *Decision Support Systems*, v. 42, p. 2197–2218, 2007.
- DUPACOVÁ, J.; POLÍVKA, J. Asset-liability management for czech pension funds using stochastic programming. *Annals Operacional Resource*, v. 165, p. 5–28, 2009.

- EPPEN, G. D.; FAMA, E. F. Solutions for cash balance and simple dynamic portfolio problems. *Journal of Business*, n. 41, p. 94–112, 1968.
- EPPEN, G. D.; FAMA, E. F. Three asset cash balance and dynamic portfolio problems. *Management Science*, n. 17, p. 311–319, 1971.
- ERMOLIEV, Y.; WETS, R. J. Stochastic programming, an introduction. *Numerical techniques for Stochastic Optimization*, p. 1–32, 1988.
- FIGUEIREDO, D. Z. *Tomada de decisão de investimento em um fundo de pensão com plano de benefício do tipo benefício definido - uma abordagem via programação estocástica multiestágio linear*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.
- GASSMAN, H. I.; IRELAND, A. M. On the formulation of stochastic linear programs using algebraic modeling languages. *Annals of Operation Research*, v. 64, p. 83–112, 1996.
- HILLI, P.; KOIVU, M.; PENNANEN, T.; RANNE, A. A stochastic programming model for asset liability management of finnish pension company. *Kluwer Academic Publishers*, 2004.
- HILLI, P.; KOIVU, M.; PENNANEN, T.; RANNE, A. A stochastic programming model for asset liability management of a finnish pension company. *Annals Operacional Research*, v. 152, p. 115–119, 2007.
- HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 7. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2008.
- KALL, P.; WALLACE, S. W. Stochastic programming. In: _____. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1994. cap. 2, p. 121–157.
- KOUWENBERG, R. Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. *European Journal Operacional Research*, v. 134, p. 279–292, 2001.
- KUSY, M. I.; ZIEMBA, W. T. A bank asset and liability management model. *Operations Research*, n. 34, p. 356–376, 1986.
- LANE, M.; HUTCHINSON, P. A model for managing a certificate of deposit portfolio under uncertainty. In: DEMPSTER, M. A. H. (Ed.). *Stochastic Programming*. [S.l.]: Academic Press, 1980.
- MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. *Journal of Finance*, n. 7, p. 77–91, 1952.
- MITRA, G.; SCHWAIGER, K. *Asset and liability management handbook*. 1. ed. [S.l.]: PALGRAVE E MACMILLAN, 2011.
- MURARKA, N.; ZVEROVICH, V.; VALENTE, C.; VALLE, C. A.; MITRA, G. *AMPLDEV User Guide*. [S.l.], 2014.
- PAIXÃO, L. A.; PINHEIRO, R. P.; CHEDEAK, J. C. S. Regulação dos investimentos nos fundos de pensão: evolução histórica, tendências recentes e desafios regulatórios. *Revista de Previdência*, v. 3, p. 35–53, 2005.

- PREVI. *Regulamento do Plano de Benefícios 1 (vigente a partir de 22/04/13)*. 2013. [Online; accessed 14-Novembro-2014]. Disponível em: <<http://www.previ.com.br/plano-1/normativos/regulamento-do-plano-de-beneficios-1/normativecontent-pagination/4-2.htm#index1>>.
- VALENTE, C.; MITRA, G.; SADKI, M.; FOURER, R. Extending algebraic modelling languages for stochastic programming. *INFORMS*, v. 21 Issue 1, n. Winter, p. 107–122, 2009.
- VALENTE, C.; MITRA, G.; ZVIAROVICH, V.; VALENTE, P.; POOJARI, C.; ELLISON, F.; DOMENICA, N. D. *SAMPL/SPInE User Manual*. 1 Oxford Road, Uxbridge, Middlesex, UB8 3PH, United Kingdom, 2009.
- VALLADÃO, D. M. *Alocação ótima e medida de risco de um ALM para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Atuária, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- VALLADÃO, D. M.; ÁLVARO VEIGA. Optimum allocation and risk measure in an asset liability management model for pension fund via multistage stochastic programming and bootstrap. *International Conference on Engineering Optimization*, 2008.
- VALOR ECONÔMICO. *Fundo de Pensão terá meta variável*. [S.l.], 2014. Publicado em 13/11/2014.
- VALOR ECONÔMICO. *Petros deve reduzir fatia em ações*. [S.l.], 2014. Publicado em 12/11/2014.
- WOLF, C. R. A model for selecting commercial bank government security portfolios. *Review of Economics and Statistics*, n. 1, p. 40–52, 1969.
- YAO, H.; LAI, Y.; MA, Q.; JIAN, M. Asset allocation for a dc pension fund with stochastic income and mortality risk: A multi-period mean-variance framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 54, p. 84–92, 2014.
- ZENIOS, S. A.; ZIEMBA, W. T. (Ed.). *Handbook of Asset and Liability Management - Volume 2 - Applications and Case Studies*. 1. ed. Cambridge University: North-holland, 2007.
- ZIEMBA, W. T.; FELLOW, N. V. S. R. *The Stochastic Programming Approach to Asset, Liability and Wealth Management*. Vancouver, Canada and Londres, Inglaterra: AIMR Publisher, 2003.

Índice

- árvore de cenários, 28
- alocação instantânea inicial, 48
- asset liability management, 19
- Contribuições, 16
- decréscimo da Taxa de Juros, 50
- dinâmica do modelo estocástico, 17
- ferramentas de software para programação estocástica, 28
- função objetivo do modelo estocástico, 41
- geração de cenários, 30
- geração dos preços, 43
- introdução, 13
- limitações, 18
- modelagem dos dados determinísticos, 34
- modelo algébrico determinístico, 36
- modelo de precificação de ativos, 42
- modelo de programação estocástica de dois estágios, 25
- modelo de programação estocástica de um estágio, 25
- modelo de programação estocástica multi-estágio, 39
- modelo de programação estocástica multi-estágio, 26
- modelo de sp com recursividade (aqui e agora), 25
- modelo determinístico, 32
- modelos, 32
- modelos aguardar e ver, 24
- modelos de valor esperado, 24
- modelos estocásticos, 38
- objetivo, 16
- probabilidade de insolvência, 49
- processo de wiener, 42
- programação estocástica, 21
- random walk correlacionado, 43
- restrições de fluxo de caixa do modelo estocástico, 40
- restrições de manutenção de ativos do modelo estocástico, 39
- restrições regulatórias, 41
- resultados do modelo determinísticos, 37
- resumo do modelo estocástico, 46
- revisão bibliográfica, 19
- simulações e resultados, 46
- tema, 14