Álgebra Max-Plus

Vinicius Medeiros Gomes da Silveira
Flávia Malta Branco

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

A Álgebra Max-Plus $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$ é o conjunto dos reais extendidos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ munido de duas operações binárias:

$$a \oplus b \equiv \max\{a, b\} \quad \text{e} \quad a \otimes b \equiv a + b$$

chamadas, respectivamente, de adição (ou soma) e multiplicação (ou produto). Adota-se, também, a seguinte convenção:

$$x \otimes (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + x = (-\infty) \otimes x$$

Propriedades

Para $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$

1. Associatividade: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ e $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$
2. Comutatividade: $a \oplus b = b \oplus a$ e $a \otimes b = b \otimes a$
3. Distributividade: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
4. Identidade aditiva: $a \oplus (-\infty) = a = (-\infty) \oplus a$
5. Identidade multiplicativa: $a \otimes 0 = a = 0 \otimes a$
6. Inverso multiplicativo: $a \neq -\infty \Rightarrow \exists! b, a \otimes b = 0$
7. Elemento absorvente: $a \otimes (-\infty) = -\infty = (-\infty) \otimes a$
8. Idempotência: $a \oplus a = a$

Essas propriedades qualificam a álgebra Max-Plus como um semicorpo (semi-anél com divisão) idempotente.

Motivações

Tempo Necessário Para Realizar Tarefas Combinadas

O tempo total t de realização da tarefa de um trabalhador que leva um tempo τ_i para completar sua parte da tarefa e que deve esperar por pelo menos dois outros (que levam tempos t_{ij} e t_{jk} para completarem suas tarefas) para realizá-la é dado pela seguinte expressão:

$$t = \max\{t_{ij}, t_{ik}\} + \tau_i = (t_{ij} \oplus t_{ik}) \otimes \tau_i$$

Um exemplo claro e direto de aplicação da Álgebra Max-Plus.

Ganho com Tarefas em Sequência

O ganho obtido com a realização de uma tarefa i seguida de uma tarefa k e uma tarefa j é dado por:

$$m_{ij} = m_{ik} + m_{kj} = m_{ik} \otimes m_{kj},$$

onde m_{ij} é o ganho obtido começando com uma tarefa i e terminando com uma tarefa j e m_{ik} e m_{ij} são os ganhos obtidos com uma tarefa intermediária k.

O ganho máximo m_{ij}^{max}, obtido pela otimização da tarefa intermediária, é dado pela expressão

$$m_{ij}^{max} = \max_k\{m_{ik} + m_{kj}\} = \bigoplus_k m_{ik} \otimes m_{kj},$$

que é precisamente a expressão para o produto matricial na Álgebra Max-Plus.

Crescimento Exponencial

O crescimento exponencial de uma função real $h(x)$ é definido como:

$$e(h) \equiv \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log h(x)$$

Não é difícil verificar que $e(fg) = e(f) + e(g) = e(f) \otimes e(g)$ e, com um pouco de engenhosidade, é possível mostrar que $e(f+g) = \max\{e(f), e(g)\} = e(f) \oplus e(g)$. Tendo em vista essa propriedade do crescimento exponencial, pode-se ver a Álgebra Max-Plus como limite de uma família de semicorpos isomórficos a $\mathbb{R}_+$ por meio das transformações $\log_t(x)$ [IMS].

Álgebra Linear

Apesar de não termos a estrutura de corpo (e, consquentemente, não termos a estrutura dos espaços vetoriais) na Álgebra Max-Plus, o formalismo da álgebra linear e a álgebra matricial mantêm várias características.

Vetores

Considere o conjunto $\overline{\mathbb{R}}^d$. Seus elementos são os vetores de dimensão d e são denotados da forma tradicional.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix}$$

A soma vetorial $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ é definida de maneira análoga à tradicional (coordenada a coordenada) e o produto por um escalar $\alpha \otimes \mathbf{v}$ também (o produto é tomado em todas as coordenadas).

As propriedades da soma de vetores são análogas às da soma de escalares e as propriedades do produto por escalar são as mesmas da álgebra linear tradicional.

As ideias de linearidade e de bases se mantém.

Matrizes

A representação de matrizes é idêntica à tradicional, com seu produto definido de forma análoga:

$$(AB)_{ij} = \bigoplus_k (a_{ik} \otimes b_{kj})$$

A matriz identidade Max-Plus I é análoga à tradicional: apresenta a identidade multiplicativa 0 na diagonal principal e a identidade aditiva $-\infty$ nas outras entradas.

Autovalores e Autovetores

Se considerarmos matrizes quadradas, podemos nos perguntar se existem autovalores e autovetores associados. A resposta é afirmativa no caso de matrizes reais e é detalhada no seguinte resultado [BB]:

Teorema 1. *Seja M uma matriz $d \times d$ com todas entradas reais. Então, existe um único $\lambda \in \mathbb{R}$ e ao menos um $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ tal que $M \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$.*

Demonstração. Dada M, tome $A = \alpha \otimes M$, sendo α um escalar. Então $M \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v} \Rightarrow A \otimes \mathbf{v} = (\alpha \otimes M) \otimes \mathbf{v} = \alpha \otimes (\lambda \otimes \mathbf{v}) = (\alpha + \lambda) \otimes \mathbf{v} = \mu \otimes \mathbf{v}$. Sem perda de generalidade (vide a observação anterior), tomamos $0 \leq A_{ij} \leq L$. Seja $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ com:

$$(T\mathbf{x})_i = \bigoplus_j (A_{ij} \otimes x_j) - \min_k \left\{ \bigoplus_j (A_{kj} \otimes x_j) \right\}$$

É fácil ver que $(T\mathbf{x})_i \geq 0$ e que:

$$(T\mathbf{x})_i \leq \bigoplus_j (L \otimes x_j) - \min_k \left\{ \bigoplus_j (0 \otimes x_j) \right\} \leq \bigoplus_j (L \otimes x_j) - \bigoplus_j (x_j) = L$$

Tomando a restrição de T à região $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | \forall j (0 \leq x_j \leq L)\right\}$, um conjunto convexo, fechado e limitado (e, portanto, compacto), e notando que T é uma aplicação contínua, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer garante a existência de ao menos um ponto fixo $\mathbf{v} = T(\mathbf{v})$. Fazendo $\lambda = \min_k \left\{\bigoplus_j (A_{kj} \otimes v_j)\right\}$, temos:

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \Rightarrow (T\mathbf{v})_i = \bigoplus_j (A_{ij} \otimes v_j) - \lambda = v_i \iff A \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$$

E assim fica provada a existência. Para a unicidade, suponhemos que μ e λ são autovalores associados aos autovetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, respectivamente. Suponhemos também $\lambda < \mu$. Consideremos as n aplicações do produto Max-Plus de A por A. Então temos $A^{(n)} \otimes \mathbf{v} = n\lambda \otimes \mathbf{v}$. Tomando t suficientemente grande, tal que $\forall i, t \otimes v_i \geq u_i$, temos $(t \otimes \mathbf{v}) \oplus \mathbf{u} = (t \otimes \mathbf{v})$. Assim, $A^{(n)} \otimes (t \otimes \mathbf{v}) = A^{(n)} \otimes [(t \otimes \mathbf{v}) \oplus \mathbf{u}] = A^{(n)} \otimes (t \otimes \mathbf{v}) \oplus A^{(n)} \otimes \mathbf{u}$, logo, $t \otimes (n\lambda) \otimes \mathbf{v} = (t \otimes (n\lambda) \otimes \mathbf{v}) \oplus (n\mu) \otimes \mathbf{u}$ ou, $\forall i, t + v_i - u_i \geq n(\mu - \lambda)$. Mas, sendo ambos os lados da desigualdade postivios, existe algum valor de n tal que vale $\forall i, n(\mu - \lambda) > t + v_i - u_i$. Portanto, $\mu = \lambda$.

□

Polinômios

Um polinômio Max-Plus de grau n é uma função $p : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ com:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 \oplus (a_1 \otimes x) \oplus (a_2 \otimes x \otimes x) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x \otimes \cdots \otimes x) \\ &= a_0 \oplus (a_1 \otimes x) \oplus \left(a_2 \otimes x^{(2)}\right) \oplus \cdots \oplus \left(a_n \otimes x^{(n)}\right) \\ &= \max\{a_0, a_1 + x, a_2 + 2x, \ldots, a_n + nx\}, \end{aligned}$$

com $a_j \in \overline{\mathbb{R}}, a_n \neq -\infty$.

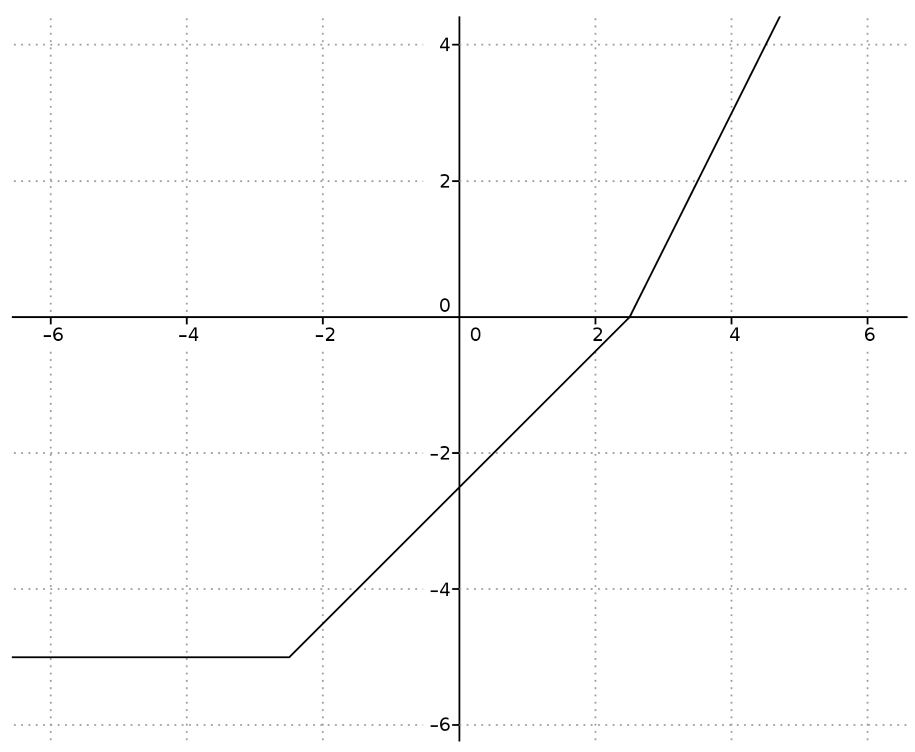

Figura 1: Gráfico do Polinômio $p(x) = -5 \oplus \left(-\frac{15}{2} \otimes x\right) \oplus \left(-5 \otimes x^{(2)}\right)$

Propriedades

Seja p um polinômio de grau maior ou igual a 1. Então valem as seguintes propriedades [BB]:

1. p é contínuo
2. p é monótono não-decrescente
3. Existe x_0 tal que $x \geq x_0$ implica p estritamente crescente
4. $\lim_{x \to -\infty} p(x) = a_0$
5. $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

Quanto às raízes de p, temos três possibilidades no que diz respeito ao seu comportamento:

1. Se $a_0 > 0$, não há raízes.
2. Se $a_0 = 0$, há infinitas raízes
3. Se $a_0 < 0$, há exatamente uma raiz

Um polinômio é dito *irredundante* se todos seus termos são *essenciais*, isto é, existe ao menos um valor de x para cada termo $a_k \otimes r_k x^{(k)}$, em que r_k é um inteiro, tal que $p(x) = a_k \otimes r_k x^{(k)}$.

Seja $p(x)$ um polinômio essencial. Definimos $\beta_k = \frac{b_{k-1} - b_k}{r_k - r_{k-1}}$ os *vértices* de $p(x)$. Não é difícil de ver que os valores $x = \beta_k$ são pontos de não diferenciabilidade de $p(x)$ e correspondem aos vértices do seu gráfico. Para esse caso, temos o seguinte teorema [CM]:

Teorema 2. *Seja $p(x) = \bigoplus_{k=0}^n a_k \otimes r_k x^{(k)}$ um polinômio irredundante de grau n. Então $p(x)$ pode ser fatorado na forma $p(x) = x^{r_0} \otimes a_n \otimes q(x)$ em que $q(x) = 0$ para $n = 0$ e para $n \geq 1$, $q(x) = \bigotimes_{k=1}^n (x \oplus \beta_k)^{(e_k)}$, onde $e_k = r_k - r_{k-1}$ é dita a* ordem *de β_k. Essa fatoração é única e toda expressão dessa forma é a fatoração de algum polinômio Max-Plus.*

Polinômio Característico de uma Matriz

Um resultado clássico da Álgebra Linear é o da existência de autovalores para uma matriz e sua relação com o polinômio característico dessa matriz $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ e suas raízes.

Há um resultado análogo para a matrizes e polinômios Max-Plus, relacionando os autovalores com os vértices do polinômio caracteristico, obtido a partir do *permanente* dessa matriz, definido a seguir.

Definição 1 (Permanente)**.** *Seja uma M uma matriz Max-Plus $d \times d$ de entradas m_{ij}. Seu* permanente *é dado pela seguinte expressão:*

$$perm(M) = \bigoplus_\sigma \left(\bigotimes_{t=1}^d m_{t\sigma(t)} \right)$$

O permanente de uma matriz é similar ao determinante, porém, com todos os termos positivos no somatório.

A partir do permanente de uma matriz, definimos o seu polinômio característico $\pi_M(x) = perm\,[M \oplus (x \otimes I)]$.

Com essa definição e os teoremas 1 e 2, obtém-se o seguinte resultado [C]:

Teorema 3. *Seja M uma matriz $d \times d$ e $\pi_M(x)$ seu polinômio caracteístico. O maior vértice de π_M é o autovalor de M.*

Referências

[BLL] BARAVIERA, A. T.; LEPLAIDEUR, R.; LOPES, A. O.
Ergodic Optimization, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. p. 80-88.

[IMS] ITENBERG, I.; MIKHALKIN, G.; SHUSTIN, E.
Tropical Algebraic Geometry. Basel - Boston - Berlim: Birkhäuser Verlag AG

[BB] BARAVIERA, A. T.; BRANCO, F. M.
Introdução à Álgebra Max-Plus. III Colóquio de Matemática da Região Sul. Florianópolis. 2014. Notas.

[CM] CUNINGHAME-GREEN, R. A.; MEIJER, P. F. J.
An Algebra For Piecewise-Linear Minimax Problems. *Discrete Applied Mathematics*, v.2, p. 267-294, 1980.

[C] CUNINGHAME-GREEN, R. A.
The Characteristic Maxployonomial of a Matrix. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.55, p. 110-116, 1983.