Subgrafos Induzidos Conexos Não Rotulados

Pesquisador

Rafael Souza Fernandes
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
rafaelfernandys@hotmail.com

Orientador

Dr. Carlos Hoppen
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
choppen@ufrgs.br

Introdução

Este trabalho de pesquisa trata de um problema de enumeração na Teoria dos Grafos que está relacionado com o Problema do Autovalor Complementar. A partir do estudo de resultados conhecidos acerca deste problema e partindo de um teorema inicial (*Teorema 1*), propomo-nos a determinar o número de autovalores complementares em diferentes classes de grafos, focando na contagem dos subgrafos induzidos conexos não rotulados de cada uma dessas.

Nos casos em que encontramos uma fórmula fechada para o número de subgrafos com essa propriedade, realizamos um estudo do comportamento assintótico em termos de n, isto é, o número de vértices do grafo. Isto nos possibilita estabelecer comparações entre suas ordens de grandeza, na busca de uma cota superior para o número de subgrafos desse tipo em um grafo qualquer.

Problema do Autovalor Complementar

Com o intuito de conhecer o *Problema do Autovalor Complementar*, apresentamos os conceitos e definições fundamentais para compreendê-lo.

Autovalor
Um Autovalor de uma matriz M de ordem n é um escalar λ tal que $Mx - \lambda x = 0$, para $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Tal vetor x é dito autovetor associado a λ.

Dada uma matriz real M de ordem n e $w \in \mathbb{R}^n$, o *Problema do Autovalor Complementar* consiste em encontrar $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} &w = Mx - \lambda x \\ &x \geq 0; w \geq 0 \\ &x^T w = 0 \end{aligned}$$

O valor λ associado à solução (x, λ) é chamado de *Autovalor Complementar* de M. A diferença entre um autovalor complementar e um autovalor está no fato de que nos complementares podemos ter $w \geq 0$, enquanto que para um autovalor devemos ter necessariamente $w = 0$. Por outro lado, um *autovetor* x associado a um autovalor pode assumir qualquer valor, enquanto que, para autovalores complementares, as coordenadas de x devem ser não-negativas.

A partir disso surgem questões como "Quantos são os autovalores complementares associados a certa matriz M?"ou "Existe alguma cota superior para o número de autovalores complementares associados a certa matriz M?". Propomo-nos a analisar estas questões em casos mais específicos de matrizes.

Autovalores Complementares de Grafos

O *Problema do Autovalor Complementar* relaciona-se coma Teoria dos Grafos a partir do momento em que analisamos a *Matriz de Adjacências* de um Grafo.

Matriz de Adjacências
A Matriz de Adjacências de um grafo G é uma matriz A com linhas e colunas indexadas por $V(G)$, onde cada elemento $a_{ij} = 1$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes e $a_{ij} = 0$ caso contrário.

A partir das definições explicitadas acima, apresentamos os dois resultados que são tomados como base para este trabalho:

Teorema 1
Seja G um grafo conexo e A sua Matriz de Adjacência. O número de autovalores complementares de G é o número de Subgrafos Induzidos Conexos não rotulados de G.

Teorema 2
Seja G um grafo conexo com n vértices. Então o número $\mathfrak{c}(G)$ de autovalores complementares de G satisfaz:

$$n \leq \mathfrak{c}(G) < 2^n + 3 - \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

Conhecidos estes dois teoremas, estabelecemos os objetivos da pesquisa:

- Pesquisar diferentes classes de grafos;
- Encontrar o número de subgrafos induzidos conexos não rotulados de cada classe;
- Confirmar que a ordem de grandeza do número de Subgrafos Induzidos Conexos Não Rotulados de cada classe satisfaz ou não o *Teorema 2*;
- Verificar se existe uma cota superior menor do que a dada no *Teorema 2*.

Referências

[1] G. W. Ford e G.E. Uhlembeck. **Combinatorial problems in the Theory of Graphs**. IV, Proceedings of the National Academy of Sciences of US. 1957, vol.3.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashinik. **Matemática concreta**: Fundamentos para a ciência da computação. Rio de Janeiro: LTC, ed.2, 1995.

[3] G. E. Andrews. **The Theory of Partitions**. Cambridge Univesity Press: 1984.

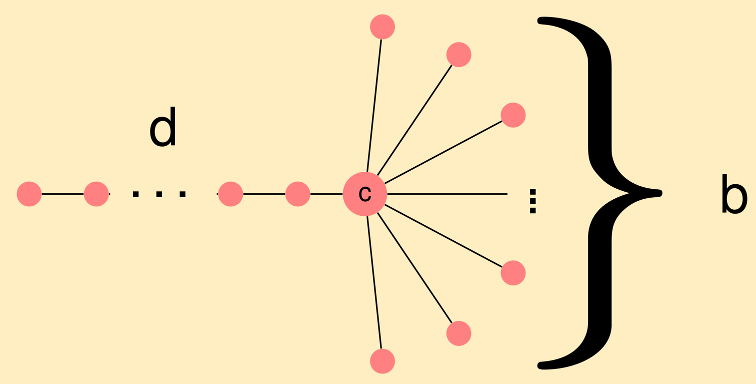
[4] Link <http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html> Acesso em: 04/10/2014.

Resultados Obtidos

Duas classes de grafos para as quais conseguimos estabelecer o número de subgrafos induzidos conexos não rotulados: *Broom* e *Starlike*. A classe *Broom* foi o primeiro objeto de estudo e abriu caminho para outras classes de ordem n^2. A classe *Starlike* foi o primeiro caso de ordem exponencial menor do que 2^n.

Notação: Denotamos o número de Subgrafos Induzidos Conexos Não Rotulados de um grafo G por $\mathfrak{s}(G)$

Broom
Uma Broom é uma árvore formada por um caminho P_d conectado ao centro c de uma estrela S por um de seus extremos. O diâmetro d é o número de vértices de P_d. Uma cerda é um vértice de S conectado ao centro. Dizemos que b é o número de cerdas.



Notemos que o número de vértices de uma *Broom* é $n = b + d + 1$.

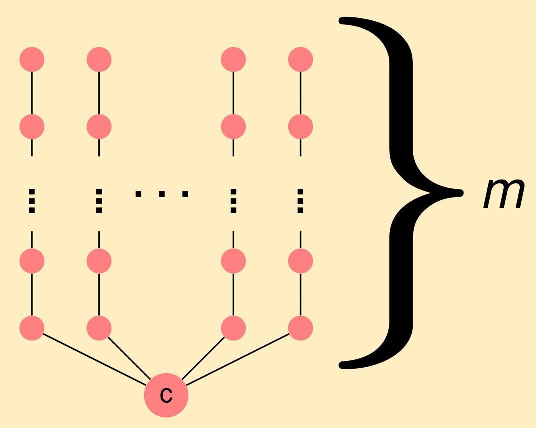
Proposicao 2
Seja B uma Broom com $b, d \geq 1$. Então $\mathfrak{s}(B)$ com $m \geq 1$ vértices é dado por:

$$\mathfrak{s}(B) = b.d + 2$$

Assintoticamente podemos verificar que se $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1$, isto é, $b = d = \frac{n}{2}$, temos que:

$$\mathfrak{s}(B) = \frac{n^2}{4} + 2 = \theta(n^2)$$

***Starlike* (Ordem Exponencial)**
Uma Starlike é um grafo formado por r caminhos P_m conectados a uma raiz comum. O número de vértices em cada caminho é m.



Notemos que o número de vértices de uma *Starlike* é $n = m.r + 1$.

Proposicao 3
Seja S uma "Starlike"com $r \geq 2$. Então:

$$\mathfrak{s}(S) = \binom{m+r}{r} - \binom{m}{2}$$

Aplicando a *Fórmula de Stirling* em $\mathfrak{s}(S)$ obtemos:

$$\binom{m+r}{r} - \binom{m}{2} \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{r}\right)} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m \left(1 + \frac{m}{r}\right)^r$$

Se tomarmos $n = \sqrt{n}.\sqrt{n} + 1$, isto é, $m = r = \sqrt{n}$, obteremos o seguinte resultado:

Teorema 3
O número $\mathfrak{s}(S)$ com $m = r = \sqrt{n}$ é dado assintoticamente por:

$$\frac{2^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{\pi\sqrt{n}}}$$

Agradecemos a FAPERGS pela oportunidade e pelo apoio.