Bases de Gröbner para conjuntos finitos de pontos

Luísa Bürgel Borsato
Orientadora: Prof.ª Virgínia M. Rodrigues

Definição. No anel de polinômios $F[x_1, \dots, x_n]$, onde F é um corpo, sejam > uma ordem monomial e I um ideal. Um conjunto finito $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ é uma base de Gröbner para I com respeito à ordem > se:

$$\langle lt(g_1), \dots, lt(g_t)\rangle = \langle lt(\mathrm{I})\rangle$$

onde $\mathrm{lt}(g_i)$ e o termo líder do polinômio g_i, para i = 1, ..., t.

Equivalentemente, G é uma base de Gröbner para I com respeito à ordem > se, e somente se, o termo líder de todo polinômio não-nulo de I é divisível por algum $\mathrm{lt}(g_i)$, para i = 1, ..., t.

Definição. Dizemos que uma base de Gröbner G para um ideal I de $F[x_1, \dots, x_n]$ é minimal se para todo $g \in G$:

(i) g é mônico;
(ii) $\mathrm{lt}(g) \notin \langle lt(G \backslash \{g\})\rangle$.

Definição. Fixada uma ordem monomial $>$ em $F[x_1, \dots, x_n]$, a base monomial de um ideal I deste anel é o conjunto:

$$B(I) = \{x^\alpha \in F[x_1, \dots, x_n] \mid x^\alpha \notin \langle lt(I)\rangle\}.$$

O conjunto de vetores de expoentes da base monomial é chamado de *delta set*:

$$\Delta(I) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid x^\alpha \in B(I)\}.$$

A base monomial B(I) é uma base para o anel quociente $F[x_1, \dots, x_n] \backslash I$.

A partir de uma base de Gröbner para um ideal I de $F[x_1, \dots, x_n]$, podemos facilmente obter os termos líderes da base de Gröbner minimal, a base monomial e o *delta set* correspondentes.

A partir de uma base de Gröbner para um ideal I de $F[x_1, \dots, x_n]$, podemos facilmente obter os termos líderes da base de Gröbner minimal, a base monomial e o *delta set* correspondentes.

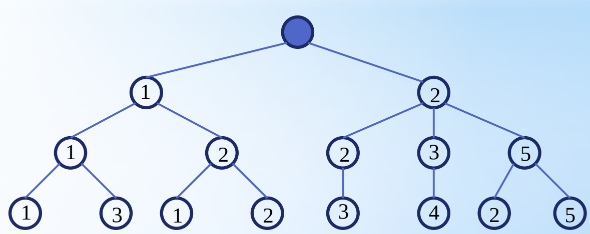
Por outro lado, se tivermos um conjunto finito de pontos distintos $\mathscr{P}$ e considerarmos seu ideal

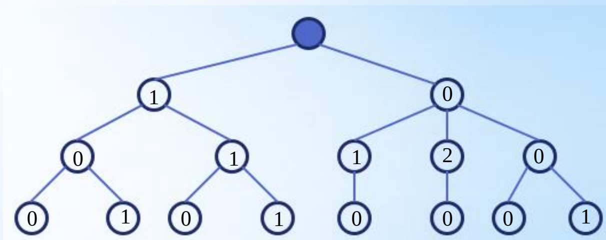
$$I(\mathscr{P}) = \{f \in F[x_1, \dots, x_n] \mid f(P) = 0, \text{ para todo } P \in \mathscr{P}\},$$

chamado ideal de pontos, apresentamos um algoritmo para calcular o *delta set* $\Delta(I(\mathscr{P}))$ com respeito à ordem lexicográfica. Este algoritmo depende apenas da estrutura dos pontos, sem a necessidade de calcular-se uma base de Gröbner. Conhecendo o *delta set*, podemos calcular a base monomial e os termos líderes da base de Gröbner minimal deste ideal.

Exemplo.

Considere o conjunto de pontos
$\mathscr{P} = \{(1,1,1), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (2,2,3), (2,3,4), (2,5,2), (2,5,5)\} \subset \mathbb{Z}^3$.





Pelo algoritmo, o *delta set* $I(\mathscr{P})$ é o conjunto:
$\Delta(I(\mathscr{P})) = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,2,0), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

Bibliografia:
Cox, D.; Little, J.; O'Shea, D. Ideals, Varieties and Algorithms.
Rodrigues, V. Multivariate Polynomials: Irreducibility and Gröbner Bases. Tese de Doutorado.