

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Elementos de Geometria Hiperbólica

Bruno Capoani

Professora Orientadora: Miriam Telichevesky

Introdução

A geometria euclidiana surgiu por volta de 300 a.C. quando Euclides escreveu a obra Elementos. Nela, foram utilizados dez axiomas divididos entre noções comuns e postulados.

O Quinto Postulado

Se uma reta ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Desde a época de Euclides muitos matemáticos tentaram, sem sucesso, provar o quinto postulado e apenas no século XIX chegaram a conclusão de que isto era impossível. Nessas tentativas foram criadas várias afirmações equivalentes, tais como:

Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada ou que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° .

Os Precusores

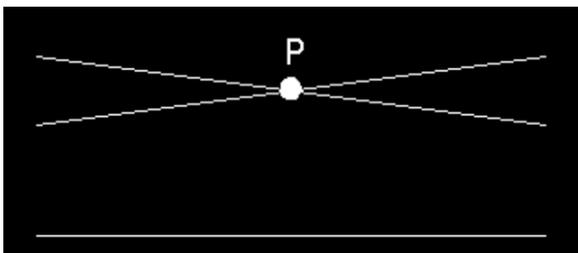
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Johann Bolyai (1802-1860)

Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856)

A Geometria Hiperbólica

Quinto postulado da geometria hiperbólica: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.



Retas Paralelas

Devido ao grande número de retas que não interceptam n , precisamos de uma nova definição de retas paralelas:

Dados uma reta n e um ponto P fora desta reta, existem exatamente duas retas m e m' que passam pelo ponto P e que separam o conjunto das retas que interceptam n do conjunto das que não interceptam n .

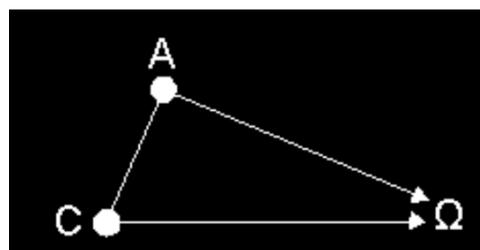
Essas são as retas paralelas a n passando por P em uma determinada direção. Estas retas formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de P à reta n . Além disso, o ângulo mencionado é agudo.

O Ponto Ideal

É um ponto antes de todos os pontos de uma reta ou um ponto depois de todos os pontos desta mesma reta. Retas paralelas têm em comum um ponto ideal na direção do paralelismo.

Triângulo Generalizado

Um triângulo generalizado é formado por: Dois pontos ordinários e um ponto ideal; um ponto ordinário e dois pontos ideais ou três pontos ideais.



Teorema do ângulo externo: Um ângulo externo de um triângulo generalizado $AC\Omega$ é sempre maior que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

Uma propriedade curiosa que torna a geometria hiperbólica bem diferente da euclidiana é dada pelos critérios de congruência dos triângulos generalizados.

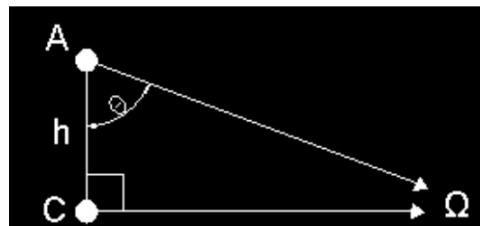
Dados dois triângulos generalizados $AC\Omega$ e $A'C'\Omega'$. Eles serão congruentes se:

- $AC = A'C'$ e $C\hat{A}\Omega = C'\hat{A}'\Omega'$;
- $A\hat{C}\Omega = A'\hat{C}'\Omega'$ e $C\hat{A}\Omega = C'\hat{A}'\Omega'$;
- $AC = A'C'$, $A\hat{C}\Omega = C'\hat{A}'\Omega'$ e $C\hat{A}\Omega = A'\hat{C}'\Omega'$

Além disso, na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor do que 180° .

O Ângulo de Paralelismo

Dado um triângulo generalizado $AC\Omega$, com ângulo $\hat{C} = 90^\circ$, então o ângulo $\hat{A} = \Theta$ é o ângulo de paralelismo, e depende apenas do comprimento h do segmento AC . $\Theta(h)$ é uma função decrescente, ou seja, se $h_1 < h_2$ então $\Theta(h_1) > \Theta(h_2)$, definida para qualquer valor real não negativo, sendo 90° quando $h = 0$ e tende a zero quando h tende ao infinito.



Referências

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria hiperbólica. Rio de Janeiro, IMPA, 2003.