O Critério de Normalidade

Autor: Matheus Frederico Stapenhorst
Orientador: Jairo Krás Mengue

INTRODUÇÃO

Nosso trabalho consistiu no estudo do Critério de Normalidade de Pjateckii-Sapiro. A partir dele podemos concluir a normalidade de certas constantes, como por exemplo, a normalidade da Constante de Champernowne 0,1234567891011... obtida concatenando-se os números naturais em ordem crescente. O Critério de Normalidade pode ser usado para concluir a *2/3*-normalidade da constante α escrita em base dois

α= 011 00 0101 1010 11111111 000 001001...

obtida concatenando-se todos os blocos de dígitos em ordem lexicográfica e crescente de tamanho de tal forma que cada bloco que possua *m* uns se repita *2m* vezes.

SOBRE O CRITÉRIO DE NORMALIDADE

Dado um número real β escrito em base *b*, dizemos que β é normal em base *b* se cada bloco *B* de *k* dígitos ocorrer em β com frequência igual a $(1/b)^k$. O Critério de Normalidade afirma que se existe uma constante real *C* maior que zero tal que para todo bloco finito de dígitos *B* a frequência de ocorrência de *B* em β fica limitada pelo produto entre $(1/b)^k$ e *C* então β é normal em base *b*. Portanto, basta verificarmos uma desigualdade.

Ao estudarmos *p*-normalidade em base dois, o Critério de Normalidade assume uma forma parecida: dados um número real β escrito em base dois, um número natural *k* e um bloco finito *B* de *k* dígitos, sendo *m* deles uns e $n=k-m$ zeros, se existe uma constante real *C* maior que zero tal que a frequência de ocorrência de *B* em β fica limitada pelo produto entre $p^m(1-p)^n$ e *C* então β é *p*-normal em base dois.

IDEIAS SOBRE *p*-NORMALIDADE EM BASE DOIS

Dado um número real *x* escrito em base dois, estamos interessados em estudar o comportamento da frequência de ocorrência de cada bloco finito de dígitos em *x*. Assim, dizemos que *x* é *p*-normal se a frequência de ocorrência de cada bloco de k dígitos, sendo *m* deles uns e $n=k-m$ zeros, valer

$$p^m(1-p)^n.$$

Em particular, a frequência de ocorrência dos dígitos um e zero em *x* devem valer respectivamente *p* e *1-p*.

Note que no caso em que $p=1/2$, temos que cada bloco de *k* dígitos ocorre com frequência $(½)^k$, coincidindo com a definição de normalidade.

Um dos focos do nosso trabalho foi mostrar que o número α definido ao lado é *2/3*-normal, ou seja, a frequência de ocorrência em α de cada bloco de *k* dígitos, sendo *m* deles uns e $n=k-m$ zeros, vale $2^m/3^k$.

REFERÊNCIAS

Mengue, J. K.; Ripoll, C.C. Introdução aos números normais. Londrina : Universidade Estadual de Londrina, 2012.

Postnikov, A. G. "*Ergodic problems in the theory of congruences and of diophantine approximations" (Russo), Trudy Mat. Inst. Steklov. 82* (1966); Engl. trad., Proc. Steklov Inst. Math. 82, Americ. Math. Society, Province, R.I., 1967, seção 7, capítulo II.