Distribuição uniforme de uma sequência de números reais

Arthur Tonietto Lovato
Orientador: Paolo Giulietti
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Resumo: Apresentaremos um teorema de teoria ergódica sobre a distribuição uniforme de uma sequência de números reais. Mostraremos que uma sequência $\{n\xi\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente distribuída se, e somente se, ξ é irracional. Sabemos que o número π é irracional, logo a sequência $\{n\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente distribuída, entretanto um problema em aberto é saber se π apresenta uma distribuição normal (ou seja se a sequencia $\{10^n\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente distribuída). Essa conjetura é sustentada por simulações computacionais, onde é possível visualizar que todos dígitos aparecem na mesma proporção. Todos os teoremas apresentados, junto com as referências históricas corretas, podem ser achados em [1].

Definições

Definição 1. *Um número normal, é um número real cuja expansão infinita de dígitos em cada base b é distribuída uniformemente, no sentido que cada um dos "b" aparece na mesma proporção que os demais.*

Um exemplo de número normal é $0,12345678901234567890...$, é visível que essa sequência apresenta todos os dígitos na mesma proporção em sua expansão infinitesimal em base decimal.
O número $0,10110111011101111...$ é um bom exemplo de número cuja distribuição não é normal.

Definição 2. *Uma sequência $\{x_n\}$ é dita uniformemente distribuída módulo 1, se para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, tal que $0\le\alpha<\beta\le 1$, ela satisfaz:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\{1\le n\le N:(x_n)\in[\alpha,\beta)\}=\beta-\alpha$$

Pode-se dizer que um número x é normal em base b se a sequência de números $\{b^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente distribuída módulo 1. Como todas as nossas sequências são indexadas para $n\in\mathbb{N}$ iremos eliminar o índice abaixo $n\in\mathbb{N}$.

Teoremas

Teorema 1. *Uma sequência $\{x_n\}$ de números reais é uniformemente distribuída modulo 1, se, e somente se, para qualquer função $f:[0,1]\to\mathbb{C}$, integrável à Riemann,*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)=\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

Sendo f uma função de variável complexa iremos usar o fato que $f=Re(f)+iIm(f)$ e que $\int f=\int Re(f)+i\int Im(f)$.

Teorema 2. *Uma sequência $\{x_n\}$ de números reais é uniformemente distribuída modulo 1, se, e somente se, para qualquer inteiro $m\neq 0$,*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}exp(2\pi imx_n)=0 \tag{2}$$

Demonstração: Considerando $\{x_n\}$ uniformemente distribuída, temos que a igualdade em (1) é válida.
Tomando $f_m(x)=exp(2\pi imx_n)$ teremos que:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}exp(2\pi imx_n)=\int_0^1 exp(2\pi imx)\,dx.$$

Para qualquer inteiro $m\neq 0$ o lado direito da igualdade é zero:

$$\int_0^1 exp(2\pi imx)\,dx=\int_0^1 cos(2\pi mx)+i\int_0^1 sen(2\pi mx)=0+0i=0.$$

Agora tomando (2) como verdadeiro, definimos o polinômio trigonométrico

$$P(x)=\sum_{m=-M}^{M}a_m exp(2\pi imx) \quad , \quad a_m\in\mathbb{C}$$

Temos que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(x_n)=\sum_{m=-M}^{M}a_m.\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}exp(2\pi imx_n)$$
$$=a_0=\int_0^1 P(x)\,dx.$$

Sabendo que a aproximação de Weierstrass afirma que para qualquer $\epsilon>0$ toda função continua periódica, de período 1, pode ser aproximada por um polinômio trigonométrico P tal que

$$|f(x)-P(x)|<\epsilon \quad , \quad 0\le x<1 \tag{3}$$

Através dessa aproximação polinomial deduz-se

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)-\int_0^1 f(x)\,dx\right|\le\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n)-P(x_n))\right|$$
$$+\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(x_n)-\int_0^1 P(x)\,dx\right|+\left|\int_0^1(P(x)-f(x))\,dx\right|.$$

Percebe-se que os três termos à direita da desigualdade são menores que ϵ. Então (1) é válido para todas funções contínuas 1-periódicas. Tomando $\chi_{[\alpha,\beta)}$ a função indicadora do intervalo $[\alpha,\beta)$, usando novamente o teorema da aproximação de Weierstrass, para qualquer $\epsilon>0$, existem funções contínuas 1-periódicas $f_-;f_+$, tal que

$$f_-(x)\le\chi_{[\alpha,\beta)}\le f_+(x) \qquad \text{para todo} \quad 0\le x<1$$

e

$$\int_0^1(f_+(x)-f_-(x))\,dx<\epsilon$$

Logo

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{[\alpha,\beta)}(x_n)=\int_0^1\chi_{[\alpha,\beta)}(x)\,dx.$$

■

Corolários

Corolário 1. *Dado um número real ξ, a sequência $\{n\xi\}_n$ é uniformemente distribuída modulo 1, se e somente se, ξ é irracional.*

Demonstração: Se $\xi\in\mathbb{Q}$ logo $\xi=\frac{p}{q}$. Basta aplicar o teorema 2 com $m=q$, então teremos:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}exp(2\pi ipn)=1$$

Pois

$$\sum_{n=1}^{N}exp(2\pi ipn)=\sum_{n=1}^{N}cos(2\pi ipn)+sen(2\pi ipn)=\sum_{n=1}^{N}1=N$$

■

Referências

[1] "Ergodic Theory: With a View Towards Number Theory" Einsiedler, M. and Ward, T. Springer 2011.
[2] "Ergodic Number Theory - A Course at Nagoya University" Steuding, J. Online notes.