

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS

---

# ANÁLISE NUMÉRICA DE UMA CAMADA DE MISTURA ESTAVELMENTE ESTRATIFICADA COM EFEITOS DE DECLIVIDADE

---

**Davi Eugênio Taira Inácio Ferreira**

**Orientador: Profa. Dra. Edith Beatriz Camaño Schettini**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Jorge Hugo Silvestrini**

Tese a ser submetida ao Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental.

**Banca Examinadora:**

Profa. Dra. Denise Maria Varella Martinez - IMEF - FURG

Prof. Dr. Márcio Teixeira de Mendonça - IAE - DCTA

Prof. Dr. Rafael Manica - IPH - UFRGS

Dezembro, 2014.

*À minha esposa **Andréia**,  
que sempre me apoiou nas horas difíceis e  
compartilhou comigo, os momentos de alegria.*

# Resumo

Camadas de mistura estratificadas estão presentes na natureza, seja na atmosfera devido à interação entre as correntes de ar ou no encontro da água doce com o meio oceânico. A estratificação enfraquece movimentos verticais, influenciando a mistura de nutrientes e a distribuição de partículas biológicas e químicas. A combinação de forças externas e características topográficas, como a declividade, resulta em vários tipos de instabilidades na interface da camada cisalhante. O objetivo principal deste trabalho é analisar como o grau da estratificação e a declividade influenciam a amplificação das perturbações geradas em uma camada de mistura estavelmente estratificada. Configurações temporais e espaciais por meio da Simulação Numérica Direta (*DNS*), para diferentes números de Richardson ( $Ri_H$ ) e declividades ( $\theta$ ), são empregadas para compreender o processo físico da mistura e as importantes estruturas que se formam. As simulações temporais são comparadas com a análise de estabilidade linear por meio das aproximações de Chebyshev. Estes testes permitem validar o código numérico e estudar o comportamento das taxas máximas de amplificação. Para as simulações espaciais, o efeito da estratificação reduz a taxa de crescimento das perturbações, enquanto o efeito da declividade acelera o desenvolvimento de instabilidades. Simulações espaciais bidimensionais são empregadas para examinar a camada baroclínica e a evolução das instabilidades primárias e secundárias de Kelvin-Helmholtz. Os resultados obtidos em simulações espaciais tridimensionais apresentam a formação das instabilidades translativas e o desenvolvimento de vórtices longitudinais que são mais intensos para o caso homogêneo. O nível de estratificação e declividade interfere na dinâmica do escoamento tridimensional, especificamente, na geração das instabilidades primária e secundária influenciando no fluxo turbulento vertical de massa.

# Abstract

Stratified mixing layer are found in nature, either in the atmosphere due to the interaction between air currents or in the merging of fresh and salt water. The stratification weakens vertical motions, influencing the mixture of nutrient and the distribution of biological and chemical particles. The combination of external forces and topographic features, such as the slope, results in various types of instabilities in the shear layer interface. The main objective of this work is to analyze how the degree of stratification and the slope influence the amplification of perturbations generated in a stably stratified mixing layer. Temporal and spatial configurations are used in Direct Numerical Simulation (*DNS*) for different Richardson numbers ( $Ri_H$ ) and slopes ( $\theta$ ) in order to better understand the physical mixing process and the important structures that are formed. The temporal simulations are compared with the linear stability analysis through Chebyshev approximations. These tests allow the validation of the numerical code and the study of the behavior of the maximum rates of amplification. For spatial simulations, the stratification effect reduces the perturbation growth rate while the slope effect accelerates the development of instabilities. Spatially simulations are employed to examine the baroclinic layer and the evolution of primary and secondary Kelvin-Helmholtz instabilities. The results obtained in three-dimensional spatial simulations show the formation of the transverse instability and development of longitudinal vortices that are more intense for the homogeneous case. The level of stratification and slope influence the dynamics of three-dimensional flow, specifically, the generation of primary and secondary instabilities, influencing the turbulent buoyancy flux.

# Agradecimentos

Durante o período de desenvolvimento desta pesquisa inúmeras pessoas e instituições contribuíram para que esta investigação fosse realizada. Meus sinceros agradecimentos:

Aos Orientadores Beatriz e Jorge Silvestrini, pelo apoio, a partilha do saber e as valiosas contribuições para o trabalho. Obrigado pela persistência e dedicação que foram imprescindíveis para o sucesso desta pesquisa.

Aos colegas da Coordenadoria de Matemática (IFSul-Pelotas) pela liberação de minhas atividades.

Aos parceiros do NETT cujas discussões representaram uma oportunidade de crescimento acadêmico e também pessoal.

Um agradecimento especial ao professor Fábio Souto de Azevedo (PPGMap) pelo enorme interesse e disposição em colaborar com este trabalho.

Ao meu orientador do mestrado, Álvaro de Bortoli, pelo incentivo em sempre continuar nos estudos e nas pesquisas.

Agradeço à UFRGS, ao IPH, ao CESUP e ao CNPq, pela infraestrutura adequada e apoio financeiro.

Sou muito grato a todos os meus familiares pelo incentivo recebido ao longo destes anos. À Andréia, agradeço a amizade, o amor, a atenção e a paciência que me dedicou. Obrigado pelos constantes incentivos necessários por mais esta etapa concluída. Aos meus pais, agradeço por minha formação, incentivo e apoio.

O meu profundo agradecimento a todas as pessoas que contribuíram para a concretização deste trabalho, estimulando-me intelectual e emocionalmente.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Relevância . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Organização do trabalho . . . . .	4
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Análise das perturbações . . . . .	8
2.2 Estudos experimentais e numéricos . . . . .	16
<b>3 Metodologia numérica</b>	<b>27</b>
3.1 Configuração do domínio de cálculo . . . . .	27
3.2 Equações do movimento . . . . .	28
3.3 Condições de contorno . . . . .	30
3.4 Condições iniciais . . . . .	32
3.4.1 Simulação temporal . . . . .	32
3.4.2 Simulação espacial . . . . .	33
3.5 Discretização temporal . . . . .	33
3.6 Discretização espacial . . . . .	34
3.6.1 Discretização dos termos convectivo-difusivo e de transporte-difusão . . . . .	35
3.6.2 Representação no espaço de Fourier e dissipação numérica . . . . .	37
3.6.3 Método de solução da equação de Poisson . . . . .	41
3.7 Metodologias de cálculo . . . . .	43
3.8 Decomposição do domínio . . . . .	44
3.9 Identificação das estruturas coerentes . . . . .	49
<b>4 Análise de estabilidade linear</b>	<b>52</b>
4.1 Equações . . . . .	52
4.2 Solução por operadores Diferenciais de Chebyshev . . . . .	57
4.3 Equação de <i>Rayleigh</i> . . . . .	59

---

4.4	Equação de <i>Taylor-Goldstein</i> . . . . .	61
4.5	Inclusão da estratificação e da declividade . . . . .	64
4.6	Análise via <i>DNS</i> . . . . .	66
4.7	Comparação entre as técnicas . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Análise espacial em domínio bidimensional</b>	<b>76</b>
5.1	Formação da camada baroclínica . . . . .	77
5.2	Influência da declividade . . . . .	90
5.3	Simulação a $Ri_H = 0.10$ e $\theta = 0.10$ . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Estruturas tridimensionais</b>	<b>103</b>
6.1	Testes no cluster GAUSS . . . . .	104
6.2	Camada de mistura não estratificada . . . . .	106
6.3	Camada de mistura estratificada . . . . .	111
6.4	Simulações a $Ri_H = 0.05$ e $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Conclusões e recomendações</b>	<b>132</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo de escoamento estratificado. Encontro das águas dos rios Negro e Solimões (WebEduc, 2013) [157]. . . . .	2
2.1	Camada de mistura em desenvolvimento espacial à jusante de uma placa separadora. (Adaptado de Batchelor <i>et al.</i> , 2000 [8]). . . . .	6
2.2	Exemplos de camada de mistura temporal: (a) Atmosfera na região do Ártico canadense (Scott McAuliffe, Oregon State University); (b) Reprodução experimental em um tanque (Thorpe, 1971 [148]). . . . .	6
2.3	Resposta ao impulso no plano $(x, t)$ : (a) Instabilidade convectiva; (b) Instabilidade absoluta (Huerre & Monkewitz, 1985 [59]). . . . .	10
2.4	Curva de estabilidade neutra para uma camada de mistura estratificada (Hazel, 1972) [55] . . . . .	13
2.5	Instabilidade de Holmboe, $Pr = 25$ , $\delta_i/\delta_\rho = 5$ (Carpenter <i>et al.</i> , 2010 [19]). . . . .	13
2.6	Efeito da razão $R = \Delta U/(2U_C)$ no perfil de velocidade da camada de mistura (Batchelor <i>et al.</i> , 2000 [8]). . . . .	15
2.7	Perfis de velocidade e densidade (Ortiz <i>et al.</i> , 2002 [111]). . . . .	16
2.8	Resposta do impulso no plano $(x, t)$ : (a, d) Absolutamente instável; (b, c, e) Convectivamente instável. Para $Ri > 0.07$ e $a > 0$ , apresentam-se dois modos de Holmboe que amplificam-se (Ortiz <i>et al.</i> , 2002 [111]). . . . .	16
2.9	Fases da formação da instabilidade de Kelvin-Helmholtz (Lesieur, 1997 [89]).	17
2.10	Processo de emparelhamento (Lasheras & Choi, 1988 [85]). . . . .	18
2.11	Campos de densidade. Simulação em desenvolvimento espacial ( $Re = 1000$ , $Ri_H = 0.05$ ): (a) Processo de entranhamento; (b) Instabilidade convectiva gravitacional. . . . .	19
2.12	Simulação em desenvolvimento espacial ( $Re = 1000$ , $Ri_H = 0.05$ ): (a) Campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ); (b) Campo de densidade correspondente. . . . .	20
2.13	Instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Campo de vorticidade transversal de uma simulação em desenvolvimento espacial ( $Re = 1000$ , $Ri_H = 0.05$ ). . . . .	20
2.14	Taxa de alargamento da camada de cisalhamento (Adaptado de Champagne <i>et al.</i> , 1976 [23]). . . . .	22
2.15	Diferentes configurações para a placa separadora [81] . . . . .	23



2.16 Surgimento do emparelhamento helicoidal em uma simulação temporal (Silvestrini, 1996 [129]). . . . .	24
2.17 Surgimento do emparelhamento helicoidal em uma simulação espacial (Laizet <i>et al.</i> , 2010 [81]). . . . .	24
2.18 Instabilidade translativa (Schoppa <i>et al.</i> , 1995 [124]). . . . .	25
2.19 Diferentes estruturas nos campos de densidade. À esquerda, $Re \cong 1.75 \times 10^3$ , e à direita, $Re \cong 2.3 \times 10^4$ (Koochesfahani & Dimotakis, 1986 [73]) . . . . .	26
3.1 Representação tridimensional do domínio de cálculo. . . . .	28
3.2 Perfis de velocidade e densidade para a camada de mistura espacial. . . . .	29
3.3 Esquema das condições de contorno da simulação temporal. . . . .	31
3.4 Esquema das condições de contorno da simulação espacial. . . . .	32
3.5 Número de onda modificado $k'_m$ e $k''_m$ para diferentes ordens de derivação, (a) primeira derivada, (b) segunda derivada, e diferentes esquemas numéricos: (i) esquema explícito de segunda ordem; (ii) esquema explícito de sexta ordem; (iii) esquema compacto de quarta ordem; (iv) esquema compacto de sexta ordem; (v) solução exata. (Lele [88]). . . . .	38
3.6 Número de onda modificado para esquema de 6ª ordem. Impondo $k'_c(\Delta x)^2 = n\pi^2$ com $n = 1, \dots, 10$ (Linha contínua, de baixo para cima) comparado com a solução exata $k^2(\Delta x)^2$ (Linha pontilhada) e com o esquema convencional de 6ª ordem ( $c = 0$ ) (Linha tracejada). A figura a direita é uma ampliação da figura a esquerda (Lamballais <i>et al.</i> , 2011 [83]). . . . .	40
3.7 Localização dos pontos médios onde são calculados os valores da pressão ( $\circ$ ) e velocidade ( $\bullet$ ). . . . .	41
3.8 Ilustração esquemática da decomposição 1D utilizando quatro processos MPI: (a) decomposição na direção z; (b) decomposição na direção y. . . . .	45
3.9 Ilustração esquemática da decomposição 2D utilizando 4x3 processos MPI. . . . .	46
3.10 Gráfico do Speedup na plataforma HECToR (Laizet <i>et al.</i> (2010)[82]). . . . .	48
3.11 Comparação entre os critérios de identificação das estruturas coerentes. (a) Isosuperfície de $\ \omega\  = 1.2$ ; (b) isosuperfície de $Q = 0.05$ ; (c) isosuperfície de $Q = 0.15$ . . . . .	51
4.1 Representação matricial do operador diferencial $D_C$ (Trefethen, 2000 [154]). . . . .	58
4.2 Análise de estabilidade da equação de Rayleigh ( $Ri_H = 0$ ): (a) perfil $u(y) = -\tanh(y)$ [55]; (b) perfil $u(y) = 0.5[1 - \tanh(y)]$ [101]. . . . .	60
4.3 Autovalores $c = c_r + jc_i$ para o caso em que $Ri_H = 0$ , utilizando o perfil $u(y) = -\tanh(y)$ [55]. Destaque para o modo mais amplificado quando $\alpha_r = 0.4455$ e $c_i = 0.4257$ . . . . .	60
4.4 Autovalores $c = c_r + jc_i$ para os comprimentos de onda mais amplificados (Tab. 4.2). Casos em que $Ri_H > 0$ . . . . .	63
4.5 Ampliação da Fig. 4.4 próxima da região $c_i = 0$ . . . . .	63

4.6	Taxa máxima de amplificação para diferentes $Ri_H$ e declividades $\theta$ , utilizando operadores diferenciais de <i>Chebyshev</i> (Taira <i>et al.</i> , 2014 [145]). . . . .	65
4.7	Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade $v'$ para diferentes $Ri_H$ (Malha $N3 = 128 \times 129$ ). . . . .	68
4.8	Taxa máxima de amplificação para diferentes números de Richardson, $Ri_H$ , e declividades, $\theta$ . . . . .	70
4.9	Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade $v'$ para $Ri_H = 0.01$ , com variação de ângulos: $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ . . . . .	71
4.10	Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade $v'$ para $Ri_H = 0.05$ , com variação de ângulos: $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ . . . . .	71
4.11	Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade $v'$ para $Ri_H = 0.10$ , com variação de ângulos: $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ . . . . .	72
4.12	Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade $v'$ para $Ri_H = 0.15$ , com variação de ângulos: $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ . . . . .	72
4.13	Comparação entre o número de onda ( $\alpha_r$ ), a celeridade ( $c_i$ ) e a taxa máxima de amplificação ( $\omega_i$ ), com variação apenas da estratificação, $Ri_H$ . Os resultados derivam da análise de estabilidade utilizando os operadores diferenciais de <i>Chebyshev</i> e <i>DNS</i> , em comparação com a referência (Hazel, 1972 [55]). . . . .	73
4.14	Comparação entre as técnicas <i>Chebyshev</i> e <i>DNS</i> , com variação do número de Richardson ( $Ri_H$ ) para cada declividade ( $\theta$ ). . . . .	74
4.15	Comparação entre as técnicas <i>Chebyshev</i> e <i>DNS</i> , com variação do número de Richardson ( $Ri_H$ ) para cada declividade ( $\theta$ ). . . . .	75
5.1	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0$ (Simulação $2DS 1_A$ ). Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 5$ ; (c) $t = t_0 + 10$ ; (d) $t = t_0 + 15$ ; (e) $t = t_0 + 20$ ; (f) $t = t_0 + 25$ ; (g) $t = t_0 + 30$ ; (h) $t = t_0 + 35$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	78
5.2	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.025$ (Simulação $2DS 2_A$ ). Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 3$ ; (c) $t = t_0 + 6$ ; (d) $t = t_0 + 9$ ; (e) $t = t_0 + 12$ ; (f) $t = t_0 + 15$ ; (g) $t = t_0 + 18$ ; (h) $t = t_0 + 21$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	80
5.3	Ampliação do campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) da Fig. 5.2g ( $t = t_0 + 18$ ). Simulação a $Ri_H = 0.025$ ( $2DS 2_A$ ): (a) $x = 110$ ; (b) $x = 160$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	81
5.4	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.05$ (Simulação $2DS 3_A$ ). Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 5$ ; (c) $t = t_0 + 10$ ; (d) $t = t_0 + 15$ ; (e) $t = t_0 + 20$ ; (f) $t = t_0 + 25$ ; (g) $t = t_0 + 30$ ; (h) $t = t_0 + 35$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	82

5.5	Simulação a $Ri_H = 0.05$ (2DS3 <sub>A</sub> ): (a) Ampliação do campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) em $x = 155$ , $t = t_0 + 25$ (Fig. 5.4f); (b) Corte longitudinal de densidade em $x = 155$ , $t = t_0 + 25$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	83
5.6	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.10$ (Simulação 2DS4 <sub>A</sub> ). Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 4.5$ ; (c) $t = t_0 + 9$ ; (d) $t = t_0 + 13.5$ ; (e) $t = t_0 + 18$ ; (f) $t = t_0 + 22.5$ ; (g) $t = t_0 + 27$ ; (h) $t = t_0 + 31.5$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	84
5.7	Ampliação do campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.10$ (Simulação 2DS4 <sub>A</sub> ): (a) $x = 86$ , $t = t_0 + 13.5$ (Fig. 5.6d); (b) $x = 138$ , $t = t_0 + 18$ (Fig. 5.6e). Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	85
5.8	(a) Evolução espacial da espessura de vorticidade ( $\theta = 0$ ) (Taira <i>et al.</i> , 2014 [145]); (b) Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0$ ( $t = t_0$ ), $Ri_H = 0.025$ ( $t = t_0 + 18$ ), $Ri_H = 0.05$ ( $t = t_0 + 25$ ) e $Ri_H = 0.10$ ( $t = t_0 + 13.5$ ). Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho) . . . . .	85
5.9	Taxa da espessura de vorticidade ( $\bullet$ ) em função do número de Richardson ( $\theta = 0$ ) e a função de ajuste ( $-$ ). Simulações 2DS1 <sub>A</sub> , 2DS2 <sub>A</sub> , 2DS3 <sub>A</sub> e 2DS4 <sub>A</sub> . . . . .	86
5.10	Alargamento para $Ri_H = 0$ e $Ri_H = 0.025$ . . . . .	87
5.11	Alargamento para $Ri_H = 0.05$ e $Ri_H = 0.10$ . . . . .	87
5.12	(a) Taxa de alargamento da camada de mistura ( $\blacktriangle$ ) em função do número de Richardson ( $\theta = 0$ ) e a função de ajuste ( $-$ ) ( $\theta = 0$ ); (b) Evolução espacial da energia cinética máxima para $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ (Taira <i>et al.</i> , 2014 [145]). . . . .	88
5.13	Fluxo turbulento vertical de massa para diferentes posições, $x = 80$ , $x = 100$ e $x = 120$ . Simulação a $Ri_H = 0.025$ (2DS2 <sub>A</sub> ). . . . .	88
5.14	Fluxo turbulento vertical de massa para diferentes posições, $x = 80$ , $x = 100$ e $x = 120$ . Simulação a $Ri_H = 0.05$ (2DS3 <sub>A</sub> ). . . . .	89
5.15	Fluxo turbulento vertical de massa para diferentes posições, $x = 80$ , $x = 100$ e $x = 120$ . Simulação a $Ri_H = 0.10$ (2DS4 <sub>A</sub> ). . . . .	89
5.16	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.05$ e $\theta = 0.02$ (Simulação 2DS3 <sub>B</sub> ). Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 5$ ; (c) $t = t_0 + 10$ ; (d) $t = t_0 + 15$ ; (e) $t = t_0 + 20$ ; (f) $t = t_0 + 25$ ; (g) $t = t_0 + 30$ ; (h) $t = t_0 + 35$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	92
5.17	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.05$ e $\theta = 0.05$ (Simulação 2DS3 <sub>C</sub> ). Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 4$ ; (c) $t = t_0 + 8$ ; (d) $t = t_0 + 12$ ; (e) $t = t_0 + 16$ ; (f) $t = t_0 + 20$ ; (g) $t = t_0 + 24$ ; (h) $t = t_0 + 28$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	93
5.18	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.05$ e $\theta = 0.10$ (Simulação 2DS3 <sub>D</sub> ). Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 4.5$ ; (c) $t = t_0 + 9$ ; (d) $t = t_0 + 13.5$ ; (e) $t = t_0 + 18$ ; (f) $t = t_0 + 22.5$ ; (g) $t = t_0 + 27$ ; (h) $t = t_0 + 31.5$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	94

5.19	Simulação 2DS3: (a) Evolução espacial da espessura de vorticidade para $Ri_H = 0.05$ ( $\theta = 0, 0.02, 0.05, 0.10$ ); (b) Campos de densidade para $\theta = 0$ ( $t = t_0 + 25$ ), $\theta = 0.02$ ( $t = t_0 + 5$ ), $\theta = 0.05$ ( $t = t_0 + 24$ ), $\theta = 0.10$ ( $t = t_0 + 22.5$ ). . . . .	95
5.20	Evolução espacial da energia cinética máxima para $Ri_H = 0.05$ ( $\theta = 0, 0.02, 0.05, 0.10$ ). Simulação 2DS3 (Taira <i>et al.</i> , 2014 [145]). . . . .	95
5.21	Tensões de Reynolds $\langle v'v' \rangle$ nas posições $x = 80$ , $x = 100$ e $x = 120$ , para $Ri_H = 0.05$ ( $\theta = 0, 0.02, 0.05$ e $0.10$ ). Simulação 2DS3. . . . .	96
5.22	Alargamento da camada de mistura a $Ri_H = 0.05$ ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ). . . . .	97
5.23	Taxa de alargamento da camada de mistura ( $\bullet$ ) em função da declividade ( $\theta$ ) e a função de ajuste ( $-$ ). Simulação a $Ri_H = 0.05$ . . . . .	97
5.24	Simulação a $Ri_H = 0.10$ e $\theta = 0.10$ , no tempo $t = t_0 + 21$ (Simulação 2DS4D): (a) Campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ); (b) Campo de densidade. . . . .	98
5.25	Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para $Ri_H = 0.10$ e $\theta = 0.10$ (Simulação 2DS4D): Nos tempos: (a) $t = t_0$ ; (b) $t = t_0 + 4.5$ ; (c) $t = t_0 + 9$ ; (d) $t = t_0 + 13.5$ ; (e) $t = t_0 + 18$ ; (f) $t = t_0 + 22.5$ ; (g) $t = t_0 + 27$ ; (h) $t = t_0 + 31.5$ . Escala de valores variando de $-1.2$ (azul) a $1.2$ (vermelho). . . . .	100
5.26	Sucessivas instabilidades secundárias na camada baroclínica ( $Ri_H = 0.10$ , $\theta = 0.10$ ). Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) na região $110 \leq x \leq L_x$ (Simulação 2DS4D). . . . .	101
5.27	Campos de densidade. Simulação a $Ri_H = 0.10$ e $\theta = 0.10$ na região $110 \leq x \leq L_x$ (Simulação 2DS4D). . . . .	102
6.1	Variação no tempo em função do número de núcleos/unidade no cluster GAUSS. . . . .	104
6.2	Malha refinada na direção $y$ . O refinamento concentra os pontos na interface da camada de mistura ( $y = 0$ ). . . . .	106
6.3	Isosuperfície do escalar passivo $\rho = 0.7\rho_0$ , no tempo $t = t_0 + 6$ . Simulação a $Ri_H = 0$ (3DS1A). . . . .	107
6.4	Isosuperfície do módulo da vorticidade $\ \vec{\omega}\  = 0.75$ , no tempo $t = t_0 + 6$ : (a) Vista em perspectiva; (b) Vista superior. Simulação a $Ri_H = 0$ (3DS1A). . . . .	107
6.5	Evolução espacial do perfil médio de velocidade. Simulação a $Ri_H = 0$ (3DS1A). . . . .	108
6.6	Tensões de Reynolds em coordenadas similares em diferentes posições: (a) $\langle u'u' \rangle$ ; (b) $\langle v'v' \rangle$ ; (c) $\langle w'w' \rangle$ ; (d) $\langle u'v' \rangle$ . Simulação a $Ri_H = 0$ (3DS1A). . . . .	109
6.7	Simulação a $Ri_H = 0$ (3DS1A): (a) Evolução espacial do perfil médio de pressão; (b) Evolução espacial da espessura de vorticidade para 3 tempos iniciais. . . . .	109
6.8	Isosuperfície de pressão, $P = -0.0027\rho_0 U^2$ , em $t = t_0 + 6$ . Simulação a $Ri_H = 0$ (3DS1A). . . . .	110
6.9	Isosuperfície de $Q = 0.3$ . Simulação a $Ri_H = 0$ (3DS1A). . . . .	112
6.10	(a) Evolução espacial da espessura de vorticidade para diferentes estratificações, $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ ; (b) Vista lateral da isosuperfície do módulo da vorticidade $\ \vec{\omega}\  = 1.0$ para diferentes estratificações. . . . .	114

6.11	Alargamento da camada de mistura. Simulações 3DS: (a)3DS 1 <sub>A</sub> ; (b)3DS 2 <sub>A</sub> ; (c)3DS 3 <sub>A</sub> ; (d)3DS 4 <sub>A</sub> ; (e)3DS 5 <sub>A</sub> ; (f) Taxa de alargamento da camada de mistura (●) em função do número de Richardson e a função de ajuste (–). . . . .	116
6.12	Isosuperfície do critério $Q$ . Simulações 3DS: (a) $Ri_H = 0.025$ , $Q = 0.35$ ; (b) $Ri_H = 0.05$ , $Q = 0.35$ ; (c) $Ri_H = 0.07$ , $Q = 0.35$ ; (d) $Ri_H = 0.10$ , $Q = 0.20$ . . . . .	118
6.13	Posições das sondas: $S 1$ à $S 8$ . . . . .	119
6.14	Espectro da energia cinética para diferentes posições (sondas $S 1$ a $S 8$ ) e números de Richardson $0 \leq Ri_H \leq 0.07$ . Simulações 3DS 1 <sub>A</sub> , 3DS 2 <sub>A</sub> , 3DS 3 <sub>A</sub> e 3DS 4 <sub>A</sub> . . . . .	120
6.15	Espectro da energia cinética para diferentes posições (sondas $S 1$ a $S 8$ ) para $Ri_H = 0.10$ . Simulação 3DS 5 <sub>A</sub> . . . . .	120
6.16	Evolução da energia cinética máxima e das tensões de Reynolds máximas $\langle u'u' \rangle_{max}$ ( $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ , $\theta = 0$ ). Simulações: 3DS 1 <sub>A</sub> , 3DS 2 <sub>A</sub> , 3DS 3 <sub>A</sub> , 3DS 4 <sub>A</sub> e 3DS 5 <sub>A</sub> (Tab. 6.1). . . . .	121
6.17	Evolução das tensões de Reynolds máximas $\langle v'v' \rangle_{max}$ e $\langle w'w' \rangle_{max}$ ( $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ , $\theta = 0$ ). Simulações: 3DS 1 <sub>A</sub> , 3DS 2 <sub>A</sub> , 3DS 3 <sub>A</sub> , 3DS 4 <sub>A</sub> e 3DS 5 <sub>A</sub> . . . . .	122
6.18	(a) Evolução espacial das tensões de Reynolds máximas $\langle u'v' \rangle_{max}$ para diferentes $Ri_H$ ; (b) Fluxo turbulento vertical máximo de massa para diferentes $Ri_H$ . . . . .	123
6.19	Cortes longitudinais de densidade para diferentes $Ri_H$ ( $z = 0$ ). Escala de valores variando de -1.2 (azul) a 1.2 (vermelho). . . . .	124
6.20	Evolução espacial da espessura de vorticidade. Simulação a $Ri_H = 0.05$ ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ) . . . . .	125
6.21	Alargamento da camada de mistura. Simulações 3DS 3: (a)3DS 3 <sub>A</sub> ; (b)3DS 3 <sub>B</sub> ; (c)3DS 3 <sub>C</sub> ; (d)3DS 3 <sub>D</sub> . . . . .	126
6.22	Isosuperfícies do critério $Q$ e isosuperfícies de densidade ( $Ri_H = 0.05$ , $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ , $t = t_0$ ). Simulações: (a)(b) 3DS 3 <sub>B</sub> ; (c)(d) 3DS 3 <sub>C</sub> ; (e)(f) 3DS 3 <sub>D</sub> . . . . .	127
6.23	Espectro da energia cinética para diferentes posições (sondas $S 1$ a $S 8$ ) e ângulos $0 \leq \theta \leq 0.10$ . Simulações 3DS 3 <sub>A</sub> , 3DS 3 <sub>B</sub> , 3DS 3 <sub>C</sub> e 3DS 3 <sub>D</sub> . . . . .	128
6.24	Corte longitudinal de densidade ( $Ri_H = 0.05$ , $\theta = 0.05$ ). Escala de valores variando de -1.2 (azul) a 1.2 (vermelho). . . . .	128
6.25	Evolução da energia cinética máxima e das tensões de Reynolds máximas $\langle u'u' \rangle_{max}$ ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ , $Ri_H = 0.05$ ). Simulações: 3DS 3 <sub>A</sub> , 3DS 3 <sub>B</sub> , 3DS 3 <sub>C</sub> e 3DS 3 <sub>D</sub> (Tab. 6.1). . . . .	129
6.26	Evolução das tensões de Reynolds máximas $\langle v'v' \rangle_{max}$ e $\langle w'w' \rangle_{max}$ ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ , $Ri_H = 0.05$ ). Simulações: 3DS 3 <sub>A</sub> , 3DS 3 <sub>B</sub> , 3DS 3 <sub>C</sub> e 3DS 3 <sub>D</sub> (Tab. 6.1). . . . .	129
6.27	Cortes longitudinais de densidade para diferentes $\theta$ ( $z = 0$ ). Escala de valores variando de -1.2 (azul) a 1.2 (vermelho). . . . .	130
6.28	(a) Evolução espacial das tensões de Reynolds máximas $\langle u'v' \rangle_{max}$ ; (b) Fluxo turbulento vertical máximo de massa para diferentes ângulos. . . . .	131

# Lista de Símbolos

## Alfabeto Latino

$A_f$	Amplitude da perturbação para a simulação temporal
$A_{2d}$	Amplitude da perturbação para a simulação espacial bidimensional
$A_{3d}$	Amplitude da perturbação para a simulação espacial tridimensional
$A_l$	Taxa de abertura da espessura de vorticidade
$A', B'$	Decomposições de matrizes pelo método <i>QZ</i>
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$c_r$	Velocidade de fase
$c_i$	Modo de crescimento ou decaimento da onda
$D_C$	Operador diferencial de <i>Chebyshev</i>
<i>DNS</i>	<i>Direct Numerical Simulation</i> (Simulação Numérica Direta)
<i>GEP</i>	<i>Generalized Eigenvalue Problem</i> (Problema de autovalor generalizado)
$\vec{l}_x, \vec{l}_y, \vec{l}_z$	Vetores unitários nas direções x, y e z
$f$	Frequência de oscilação das instabilidades de Kelvin-Helmholtz
$\vec{F}$	Termo convectivo-difusivo da Equação de Navier-Stokes
$\vec{G}$	Termo de transporte e difusão da Equação de Transporte
<i>KH</i>	Kelvin-Helmholtz
$k$	Número de onda
$k_x$	Número de onda na direção longitudinal
$k'_m$	Número de onda modificado para a primeira derivada
$k''_m$	Número de onda modificado para a segunda derivada
$k_c$	Número de onda de corte
$L_x$	Dimensão longitudinal do domínio de cálculo
$L_y$	Dimensão vertical do domínio de cálculo
$L_z$	Dimensão transversal do domínio de cálculo
<i>MPI</i>	<i>Message Passing Interface</i>
$N_{BV}$	Frequência de Brunt-Vaisälä
$N_{GL}$	Número de graus de liberdade
$n_x$	Número de pontos da malha na direção x
$n_y$	Número de pontos da malha na direção y
$n_z$	Número de pontos da malha na direção z
$p$	Campo de pressões modificadas
$Pr$	Número de Prandtl
$P_{row}, P_{col}$	Números que representam a quantidade de processos <i>MPI</i>
$Q$	Critério $Q$ de identificação de estruturas
<i>QZ</i>	Método de resolução de problema de autovalores generalizados
$R$	Razão que quantifica a magnitude $\Delta U$ em relação a velocidade média $U_C$

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$Re$	Número de Reynolds
$Re_{crit}$	Número de Reynolds crítico
$Ri_H$	Número de Richardson Global
$Ri_L(y)$	Número de Richardson Local
$St$	Número de Strouhal
$t$	Tempo
$t_0$	Tempo inicial para o cálculo das médias
$T$	Período de cálculo para as médias
$T_k$	Polinômio de <i>Chebyshev</i> de grau $k$
$T_{v'}$	Período de cálculo para a taxa de amplificação de $v'$
$\vec{u}$	Vetor velocidade $\vec{u} = (u, v, w)$
$U$	Escala de velocidade
$U_1$	Velocidade máxima
$U_2$	Velocidade mínima
$U_C$	Velocidade de convecção $U_C = (U_1 + U_2)/2$
$u'_0$	Campo bidimensional de perturbação na direção longitudinal
$v'_0$	Campo bidimensional de perturbação na direção vertical
$x$	Direção longitudinal
$y$	Direção vertical
$y_\alpha$	Ordenada posicionada no perfil médio de velocidade $u$
$z$	Direção transversal

Alfabeto Grego

$\alpha_a$	Número de onda mais amplificado
$\alpha_r$	Número de onda
$\alpha_i$	Taxa de amplificação espacial
$\delta_i$	Espessura inicial de vorticidade
$\delta_\omega$	Espessura de vorticidade ao longo do comprimento longitudinal
$\delta_\rho$	Espessura inicial da densidade
$\Delta t$	Passo de tempo
$\Delta U$	$\Delta U = U_1 - U_2$
$\Delta x$	Discretização espacial na direção $x$
$\Delta y$	Discretização espacial na direção $y$
$\Delta z$	Discretização espacial na direção $z$
$\epsilon$	Taxa de dissipação da turbulência
$\eta$	Escala de Kolmogorov
$\phi$	Autofunção
$\gamma_{A_i}, \gamma_{B_i}$	Autovalores associados às matrizes $A'$ e $B'$
$\Gamma$	Função auxiliar para o problema de autovalor generalizado
$\kappa$	Difusividade térmica
$\lambda_a$	Comprimento de onda fundamental
$\lambda_x$	Comprimento de onda longitudinal
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\vec{\omega}$	Campo de vorticidade

$\omega_i$	Taxa de amplificação temporal
$\omega_r$	Frequência
$\Pi$	Campo de pressão adimensional
$\psi$	Função corrente
$\rho$	Massa específica do fluido
$\tau$	Função auxiliar para o problema de autovalor generalizado
$\theta$	Ângulo em radianos
$\xi$	Autofunção, $\xi = (\phi, \zeta, \tau)^T$
$\zeta$	Função auxiliar para o problema de autovalor generalizado



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Relevância

Camadas de mistura estratificadas estão presentes em meios geofísicos, como na mistura da água do Oceano Atlântico com a água salgada do mar Mediterrâneo, através do Estreito de Gibraltar, ou, quando a água doce entra no espaço oceânico. A presença da estratificação inibe movimentos verticais, influenciando assim a mistura de nutrientes, a distribuição de partículas biológicas e químicas, e a qualidade da água. Constatase que no interior de corpos d'água, as maiores concentrações de nutrientes são normalmente encontradas em profundidades onde a fotossíntese não pode ser realizada, de modo que a mistura vertical é necessária para o transporte dessas substâncias para as regiões produtivas (Lawrence *et al.*, 2004 [87]).

A combinação de forças externas e características topográficas, como a declividade, resulta em vários tipos de instabilidades na interface da camada cisalhante, sendo bem reconhecida a importância desses tipos de instabilidades hidrodinâmicas no processo de mistura em oceanos, lagos e atmosfera. Em estudos atmosféricos, estimou-se que a instabilidade na interface de duas correntes de densidades diferentes que se movem com velocidades desiguais produz um aumento significativo na mistura dos escoamentos atmosféricos e, assim, é importante para a modelagem de fluxo atmosférico e previsão meteorológica (Afanasyev & Peltier, 2001 [1]). Problemas que envolvem camada de mistura e que possuem aplicações geofísicas, ocorrem frequentemente em cenários complexos, em que ambos, a estratificação e as mudanças topográficas, podem ter efeitos significativos sobre a dinâmica da camada cisalhante. Um cenário

importante, no qual o comportamento hidráulico e o processo de mistura na interface da camada cisalhante são indissociáveis, é o escoamento estuarino.

Um fenômeno físico que geralmente ocorre em meios estratificados é o desenvolvimento das instabilidades de Kelvin-Helmholtz (*KH*), que evoluem até a formação dos chamados turbilhões de *KH*. Estas estruturas podem ser encontradas na atmosfera, como uma série de nuvens em forma de ondas, no mar, em regiões de gradiente brusco de temperatura (termoclinas), e em estuários (Woods, 1968 [160]; Geyer & Farmer, 1989 [46]). A Figura 1.1 apresenta um exemplo de escoamento com estratificação horizontal e vertical. As águas do rio Solimões, mais claras, densas e velozes, estão situadas à direita na fotografia, ao lado das águas escuras do rio Negro. Além de diferenças de velocidade, quantidade de sedimentos e matéria orgânica, a temperatura do rio Negro é mais alta que a do rio Solimões, havendo, portanto, estratificações de temperatura e densidade.



Figura 1.1: Exemplo de escoamento estratificado. Encontro das águas dos rios Negro e Solimões (WebEduc, 2013) [157].

Para compreender o processo físico da mistura, a amplificação das perturbações e as importantes estruturas que se formam, será utilizada a técnica de Simulação Numérica Direta (*Di-*

*rect Numerical Simulation - DNS*) no estudo da camada de mistura estavelmente estratificada e inclinada, em desenvolvimento temporal e espacial. Este estudo visa contribuir para o melhor entendimento das configurações bidimensionais e tridimensionais em meios estratificados, tema em aberto em camada de mistura em desenvolvimento espacial. Outro tema abordado é o estudo da amplificação das perturbações infinitesimais, utilizando análise de estabilidade linear em uma configuração temporal.

O Núcleo de Estudos em Transição e Turbulência - NETT, formado por pesquisadores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, foi criado com o intuito de modelar numericamente problemas envolvendo escoamentos incompressíveis. Dentre as diferentes configurações de escoamento que foram tratados pelo grupo, utilizando o código `Imcompact3d`, podemos citar: escoamento ao redor de cilindros [132, 131, 156, 118], canal plano [79], canal ondulado [37], transferência de calor [48], correntes de densidade [41] e camadas de mistura homogênea e estratificada [82, 78, 94, 96]. Esta última configuração é o objeto do presente trabalho.

## 1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo principal analisar como o grau da estratificação do escoamento e a declividade do domínio influenciam a amplificação das perturbações geradas, em uma camada de mistura estavelmente estratificada. Utilizando a teoria de estabilidade linear e Simulação Numérica Direta (*DNS*), buscou-se compreender os fenômenos físicos que ocorrem em uma camada de mistura estavelmente estratificada.

Para alcançar o objetivo principal é necessário responder os seguintes questionamentos:

- A estratificação e a declividade interferem nas taxas máximas de amplificação?
- No escoamento bidimensional, os parâmetros adimensionais  $Ri_H$  e  $\theta$  interferem na dinâmica do escoamento?
- Nas simulações espaciais tridimensionais, a estratificação e a declividade influenciam a formação das estruturas longitudinais e transversais?

## 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho foi dividido em sete capítulos, sendo que a introdução corresponde ao primeiro. No capítulo dois é apresentado uma revisão bibliográfica de estudos relacionados à camada de mistura. Serão introduzidos conceitos e pesquisas envolvendo teoria de estabilidade linear, vários tipos de instabilidades e outros fenômenos que ocorrem em camada de mistura.

O terceiro capítulo apresenta as características gerais do código numérico, as equações que modelam o fenômeno, as condições iniciais e de contorno, as metodologias numéricas empregadas na solução destas equações, os métodos de decomposição do domínio e de identificação das estruturas coerentes.

No capítulo quatro são realizadas análises de estabilidade linear utilizando o operador diferencial de Chebyshev e Simulação Numérica Direta (*DNS*). Para tais análises são empregados diferentes números de Richardson ( $0 \leq Ri_H \leq 0.30$ ) e ângulos ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ).

Os resultados das simulações bidimensionais espaciais são analisados no capítulo cinco. Estes resultados permitiram avaliar a influência da estratificação ( $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ ) e da declividade ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ) na formação das instabilidades de *KH* e secundárias.

O capítulo seis destaca as estruturas tridimensionais e as consequências decorrentes da variação do número de Richardson ( $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ ) para uma declividade nula e variação do ângulo ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ) utilizando um número de Richardson específico ( $Ri_H = 0.05$ ).

O último capítulo, sete, resume as principais conclusões obtidas com este trabalho e apresenta algumas recomendações para pesquisas futuras.

## Capítulo 2

### Revisão Bibliográfica

A camada de mistura é um escoamento importante para a compreensão do desenvolvimento da turbulência em sistemas geofísicos e de engenharia. Este escoamento apresenta, obrigatoriamente, um perfil de velocidade base com um ponto de inflexão, permitindo verificar como as pequenas perturbações se amplificam no sistema, através de experimentos, simulações numéricas e estudos analíticos. Em corpos d'água ou na atmosfera, locais onde ocorre variação da temperatura ou densidade, a estratificação é mais um elemento que pode influenciar os processos de mistura e o desenvolvimento de instabilidades.

No escoamento estratificado, onde a difusão produz uma região de mistura, possui gradientes muito intensos na direção vertical em comparação com a direção longitudinal, quando é perturbada a interface entre dois fluidos ou duas camadas de velocidades diferentes, devido à inflexionalidade do perfil de velocidade (Fig. 2.1), ocorre a formação da instabilidade de Kelvin-Helmholtz (*KH*). Este tipo de instabilidade desenvolve-se na direção longitudinal do escoamento, formando os turbilhões de *KH*, que se movem com uma velocidade média (Brown & Roshko, 1974 [16]; Browand & Weidman, 1976 [15]). Após a formação da instabilidade primária de *KH*, esta torna-se propícia a diferentes instabilidades secundárias.

Batchelor *et al.* (2000) [8] utilizaram uma placa separadora e duas correntes distintas de velocidade, para estudar o comportamento de uma camada de mistura homogênea em desenvolvimento espacial. A Figura 2.1 mostra uma representação dos perfis de velocidade que se formam à jusante de uma placa separadora e o aumento da espessura da camada de mistura ( $\delta_\omega$ ).

É interessante notar que a evolução temporal da camada de mistura pode ocorrer na at-

mosfera (Fig. 2.2a), pela aceleração do escoamento sobre o topo de uma corrente de ar quente ascendente, ou pode ser obtida experimentalmente, através da inclinação de um tanque contendo um fluido estavelmente estratificado (Fig. 2.2b). Já em outros trabalhos experimentais (Lasheras & Choi (1988) [85], Schowalter *et al.* (1994) [125], Pierrehumbert & Widnall (1982) [117], Bell & Mehta (1993) [10], Winant & Browand (1974) [159]), utilizou-se uma placa separadora para estudar o desenvolvimento espacial da camada de mistura.

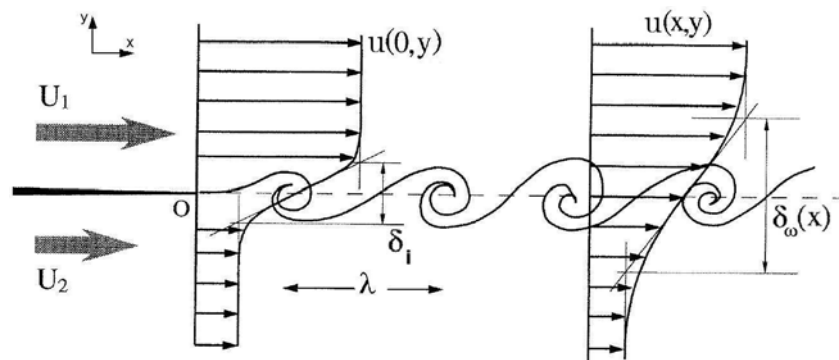


Figura 2.1: Camada de mistura em desenvolvimento espacial à jusante de uma placa separadora. (Adaptado de Batchelor *et al.*, 2000 [8]).

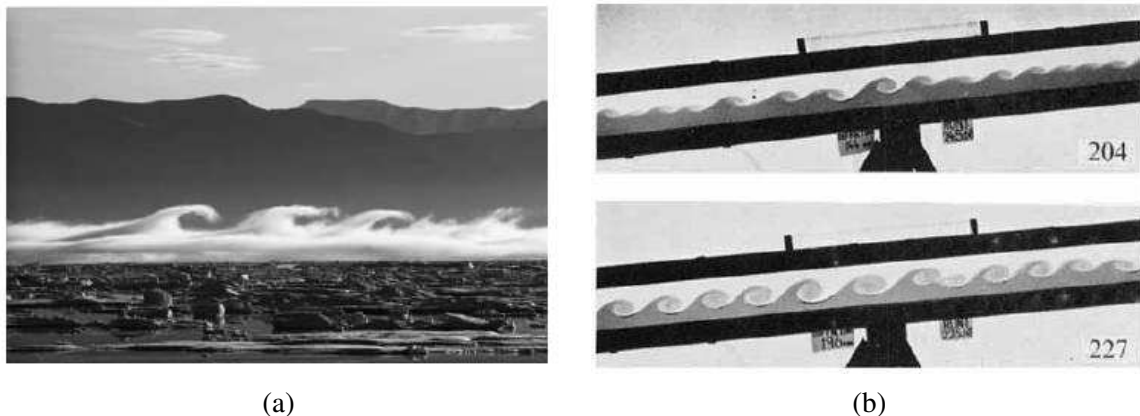


Figura 2.2: Exemplos de camada de mistura temporal: (a) Atmosfera na região do Ártico canadense (Scott McAuliffe, Oregon State University); (b) Reprodução experimental em um tanque (Thorpe, 1971 [148]).

A instabilidade em desenvolvimento espacial é gerada entre dois escoamentos paralelos de velocidades  $U_1$  e  $U_2$  ( $U_1 > U_2$  conforme Fig. 2.1) que se desenvolvem ao longo da direção longitudinal  $x$ . A camada de mistura temporal, que é periódica na direção do escoamento e desenvolve-se no tempo, é uma aproximação da camada de mistura espacial, onde se observa o escoamento em um sistema galileano de referência movendo-se com velocidade de convecção

$U_C = (U_1 + U_2)/2$ . A transformação utilizada para relacionar os enfoques espacial e temporal é dada por

$$x = U_C t. \quad (2.1)$$

Esta relação faz com que as velocidades superior e inferior da camada de mistura temporal sejam, respectivamente, iguais a

$$U = U_1 - \frac{(U_1 + U_2)}{2} = \frac{U_1 - U_2}{2}, \quad (2.2)$$

e

$$-U = U_2 - \frac{(U_1 + U_2)}{2} = \frac{U_2 - U_1}{2}. \quad (2.3)$$

Nos modelos numéricos, tem sido investigada, na formulação temporal e espacial, a dinâmica bidimensional e tridimensional de uma camada de mistura estratificada. Patnaik *et al.* (1976) [114], Mallier (1995) [93], Staquet (1995) [141], Reinaud *et al.* (2000) [121], Miller *et al.* (2001) [104], Smyth (2003) [139], Martinez (2006) [94], Rahmani (2011) [120], entre outros autores, estudaram a camada de mistura bidimensional na formulação temporal. Utilizando esta mesma formulação para analisar a tridimensionalidade destacam-se, Smyth & Peltier (1991, 1994) [137, 138], Knio & Ghoniem (1991) [70], Comte (1992) [25], Scinocca (1995) [43], Cortesi *et al.* (1998, 1999) [29, 30], Caulfield & Peltier (2000) [22], Staquet (2000) [142], Smyth & Moum (2000) [135], Smyth & Winters (2003) [139], Balaras *et al.* (2001) [6], Peltier & Caulfield (2003) [116], Martinez *et al.* (2007) [97], Brucker & Sarkar (2007) [17], Mashayek & Peltier (2011) [98].

Os modelos numéricos que utilizam camada de mistura em desenvolvimento espacial requer um domínio computacional com tamanho longitudinal muito extenso. Para tais modelos, os seguintes autores utilizaram simulações bidimensionais: Ghoniem & Ng (1987) [47], Korczak & Wessel (1989) [75], Pruett (1989) [119], Ko *et al.* (2008) [71], Maghrebi & Zarghami (2010) [92], Wei *et al.* (2012) [158], entre outros. E nos estudos numéricos tridimensionais destacam-se: Silvestrini (1996) [129], Comte *et al.* (1998) [26], Bernard (2008) [12], Druzhinin & Elghobahi (2001) [39], Laizet *et al.* (2010) [81].

Nos estudos analíticos, destaca-se a teoria de estabilidade linear, que investiga como as perturbações infinitesimais superpostas ao escoamento base são amortecidas ou amplificadas, e de que modo sua evolução determina a transição do escoamento para a turbulência. Para tal análise, Taylor e Goldstein (1931) [146, 49], Howard (1961) [57] e Miles (1961) [103] foram os pioneiros a investigar as condições em que as pequenas perturbações podem crescer nas camadas de mistura homogênea e estratificada. Outros autores (Huerre & Monkewitz [59]) estudaram a direção de propagação das perturbações, abrindo um campo no estudo das instabilidades convectiva, absoluta e global.

Instabilidades importantes se formam em uma camada de mistura com a amplificação das perturbações. Após a formação da instabilidade primária de Kelvin-Helmholtz (Fig. 2.1, 2.2a e 2.2b), esta torna-se propícia a diferentes instabilidades secundárias que podem ser observadas em laboratório (Thorpe, 1971 [148] e Batchelor *et al.*, 2000 [8]), na atmosfera (Gossard *et al.*, 1970 [51]) e em meios estratificados (Haury *et al.*, 1979 [54]) constatadas numericamente por Staquet (1995 [141]) e Martinez (2006 [94]).

## 2.1 Análise das perturbações

O modelo matemático que analisa se as perturbações infinitesimais se amplificam ou não, em um escoamento, é baseado na decomposição das variáveis dependentes, em um campo de base mais uma pequena perturbação:

$$u(x, y, t) = \bar{u}(y) + u'(x, y, t), \quad (2.4)$$

onde  $t$ ,  $x$  e  $y$ , correspondem, respectivamente, ao tempo e às direções longitudinal e vertical.

Assume-se que o escoamento base é invariante na direção principal do mesmo e que a componente vertical da velocidade base é nula ( $\bar{v}(y) = 0$ ). As variáveis dependentes decompostas dessa maneira são substituídas nas equações de Navier-Stokes e de transporte-difusão, resultando em equações diferenciais em função das perturbações, uma vez que o escoamento base satisfaz identicamente estas equações. Desprezando-se os termos não lineares e introduzindo a função de corrente  $\psi$ , onde as componentes horizontal e vertical de velocidade são definidas



como  $u' = \psi_y$  e  $v' = -\psi_x$ , pode-se propor uma solução na forma de modos normais, em que as perturbações tomam a forma,

$$\Phi'(x, y, t) = \hat{\Phi}(y) \exp[j(\alpha x - \varpi t)], \quad (2.5)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha$  e  $\varpi$  são números complexos ( $\alpha = \alpha_r + j\alpha_i$  e  $\varpi = \varpi_r + j\varpi_i$ ). A frequência da onda  $\varpi$  é definida por  $\varpi = \alpha c$ ,  $\hat{\Phi}$  representa a amplitude das perturbações e  $c$  é a velocidade da onda.

Dois tipos de análises podem ser realizadas: uma utilizando aproximação espacial e a outra por meio de aproximação temporal.

Utilizando aproximação temporal,  $\alpha$  é um número real e a frequência  $\varpi$  um número complexo. Portanto, a amplitude da perturbação cresce no tempo ( $\alpha_i = 0$ ) e  $\varpi = \varpi_r$  corresponde à frequência da onda,  $\alpha_r$  ao número de onda e  $\varpi_i = \alpha_r c_i$  é a taxa de crescimento das perturbações. Então se:

- $\varpi_i < 0 \Rightarrow$  o escoamento é estável;
- $\varpi_i = 0 \Rightarrow$  o escoamento é neutramente estável;
- $\varpi_i > 0 \Rightarrow$  o escoamento é instável.

Na aproximação espacial, o número de onda  $\alpha$  é complexo e a frequência  $\varpi$  é um número real. Nesta análise, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento ( $\varpi_i = 0$ ) e a frequência da onda é dada por  $\varpi = \varpi_r$ , o número de onda por  $\alpha_r$  e  $\alpha_i$  representa a taxa de crescimento das perturbações. Assim se:

- $\alpha_i < 0 \Rightarrow$  o escoamento é instável;
- $\alpha_i = 0 \Rightarrow$  o escoamento é neutramente estável;
- $\alpha_i > 0 \Rightarrow$  o escoamento é estável.

Então, utilizando a Eq. 2.5, as perturbações para os casos temporal e espacial seguem, respectivamente, as expressões

$$\vec{u}'_i(x, y, t) = \vec{A}(y) \exp[\varpi_i t] \exp[j\alpha_r(x - c_r t)], \quad (2.6)$$

$$\vec{u}'_e(x, y, t) = \vec{A}(y) \exp[-\alpha_i x] \exp[j\alpha_r(x - c_r t)], \quad (2.7)$$

em que os subíndices  $t$  e  $e$  representam, respectivamente, os casos temporal e espacial.

Detalhes da análise de estabilidade linear podem ser encontradas em Drazin & Reid (1989 [38]) e Mendonça (2003 [99]).

No presente trabalho é analisada a taxa de amplificação das perturbações no escoamento em uma configuração temporal, empregando uma abordagem analítica via operador diferencial de Chebyshev e utilizando Simulação Numérica Direta (*DNS*).

Uma forma de classificar problemas de instabilidade é levar em consideração como as perturbações se propagam no escoamento. Caso a perturbação cresça ao longo do tempo em um ponto fixo do espaço, trata-se de *instabilidade absoluta* (Fig. 2.3b [59]). Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{u}'(x, t)\| = \infty. \quad (2.8)$$

No entanto, se a perturbação cresce ao se propagar na direção do escoamento, por exemplo, mas decresce em um ponto fixo no espaço, ela é denominada *instabilidade convectiva* (Fig. 2.3a [59]). Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{u}'(x, t)\| = 0. \quad (2.9)$$

Porém, neste caso, existe uma velocidade  $V_c$ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{u}'(x + V_c t, t)\| = \infty. \quad (2.10)$$

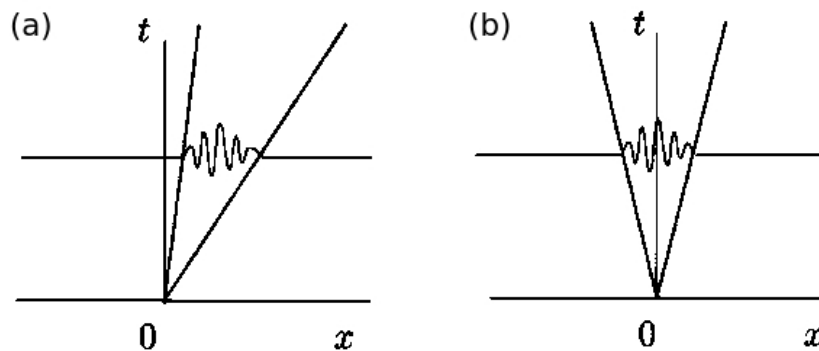


Figura 2.3: Resposta ao impulso no plano  $(x, t)$ : (a) Instabilidade convectiva; (b) Instabilidade absoluta (Huerre & Monkewitz, 1985 [59]).

Em certas circunstâncias, a instabilidade convectiva é associada com outros mecanismos de perturbação, no qual a amplificação dos turbilhões de *KH* interagem com um obstáculo, de modo que um sinal transiente retorna para o ponto de origem da perturbação. Isto pode desencadear uma nova perturbação, que se move à jusante, interagindo com o obstáculo, enviando um outro sinal, e assim por diante. Portanto, a oscilação auto-sustentável parece mais uma instabilidade convectiva deliberadamente estimulada (Sherman, 1990 [128]). Este fenômeno, cuja amplificação das perturbações é dependente do perfil base em todo o domínio, passou a ser denominado *instabilidade global* (Huerre & Monkewitz, 1990 [60]).

No escoamento cisalhante estratificado, utiliza-se o número de Richardson Gradiente ou Local para quantificar as variações de densidade e o efeito de empuxo. Turner (1973) [155] define este adimensional por:

$$Ri_L(y) = \frac{N_{BV}^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \frac{-g \frac{\partial \rho}{\partial y}}{\rho_o \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}, \quad (2.11)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e o termo  $N_{BV} = \left(\frac{-g \partial \rho}{\rho_o \partial y}\right)^{1/2}$  representa uma frequência denominada frequência de empuxo (ou de flutuabilidade), ou como é mais conhecida, frequência de Brunt-Väisälä, fundamental no estudo de escoamentos estratificados. Esta frequência está associada ao deslocamento vertical de um elemento de fluido em relação a sua posição de equilíbrio. Se  $N_{BV}^2 < 0$ , a estratificação é instável, e se  $N_{BV}^2 > 0$ , a estratificação é estável. Quando  $N_{BV}^2 = 0$ , o elemento de fluido está em equilíbrio e o escoamento é dito homogêneo ou não estratificado (Turner, 1973 [155]). A única força de campo atuante na camada de mistura estavelmente estratificada é a força da gravidade. Desta forma, uma componente da força de campo na direção vertical pode ser incorporada à dinâmica do escoamento e, ele pode ainda ser tratado como incompressível. Tal consideração corresponde ao movimento do fluido onde a densidade não varia devido às forças de pressão, senão somente devido às forças de empuxo. Assim pode ser utilizado a aproximação de Boussinesq, que despreza as variações de densidade nos termos inerciais das equações do escoamento e somente as leva em consideração no termo que envolve a gravidade [7, 32]. Uma justificativa formal das condições propostas por Boussinesq pode ser vista com mais detalhes em Spiegel & Veronis (1960 [140]). Tal formulação foi utilizada nas

equações da continuidade, de Navier-Stokes e de transporte-difusão.

Para a configuração temporal, na análise de estabilidade linear de um escoamento bidimensional, estratificado, cisalhante, não-viscoso, incompressível e paralelo, considera-se a seguinte equação diferencial (Hazel, 1972 [55]):

$$(\phi_{yy} - \alpha^2 \phi) - \frac{u_{yy}}{(u - c)} \phi - Ri_H \frac{\rho_y}{(u - c)^2} \phi = 0, \quad (2.12)$$

onde os termos viscosos e de difusão da densidade foram desprezados.

Os perfis de velocidade e densidade são respectivamente,  $u(y)$  e  $\rho(y)$ , e  $\alpha = \alpha_r$  é o número de onda;  $\phi$  é a amplitude da perturbação linear para o modo temporal, definida através da função corrente  $\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp[j\alpha_r(x - c_r t)]$ . A celeridade da onda é dado por  $c = \varpi/\alpha_r = c_r + jc_i$ .

A Equação (2.12), denominada equação de Taylor-Golstein, descreve o comportamento de uma perturbação infinitesimal em um escoamento estratificado, onde a variação de densidade é ignorada, exceto no termo de empuxo (aproximação de Boussinesq). Quando o escoamento é homogêneo, isto é, não estratificado, a Eq. (2.12) é denominada de equação de Rayleigh. O número de Richardson Global, que surge na Eq. 2.12, é expresso por

$$Ri_H = \frac{g\Delta\rho\delta_i}{2\rho_0 U^2}, \quad (2.13)$$

onde  $\delta_i$  é a espessura inicial da vorticidade,  $U$  é a metade da diferença da velocidade cisalhante (Eq. 2.2) e  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ . Este adimensional é uma relação entre forças de fluabilidade e de inércia [77], e é fundamental no estudo da estabilidade linear e não linear da camada de mistura estratificada.

Por meio da teoria de estabilidade linear, Hazel [55] estabeleceu a curva de estabilidade neutra  $Ri_H = \alpha(1 - \alpha)$ , utilizando perfis tangente hiperbólico para a velocidade e densidade. A Figura 2.4 contém as taxas máximas de amplificação,  $\omega_i = \alpha_r c_i$  para vários números de Richardson,  $Ri_H$ . Verifica-se que a medida que  $Ri_H$  cresce, a taxa  $\omega_i$  diminui, e que, a partir de  $Ri_H = 0.25$ , o escoamento passa a ser estável. O número de onda mais amplificado é  $\alpha_a = 0.444\delta_0^{-1}$  ( $\delta_i = 2\delta_0$ ), que corresponde aproximadamente a um comprimento de onda  $\lambda_a = 2\pi/\alpha_a = 7\delta_i$ , o mesmo valor encontrado por Michalke (1964) [101], para uma camada de

mistura homogênea. Portanto, quando o número de Richardson é baixo o suficiente, desenvolvem-se as instabilidades de  $KH$ , mas se o número de Richardson está acima de 0.25, as instabilidades são inibidas, iniciando na interface as instabilidades de Holmboe.

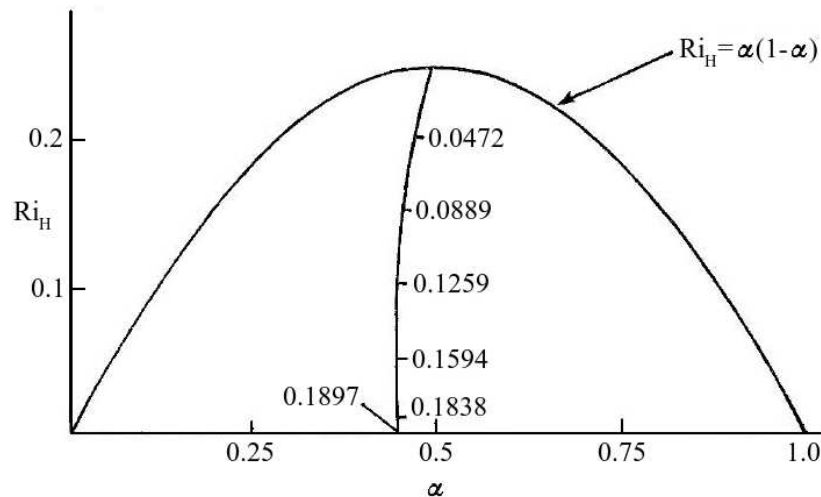


Figura 2.4: Curva de estabilidade neutra para uma camada de mistura estratificada (Hazel, 1972) [55]

As instabilidades de Holmboe consistem de duas sequências de ondas paralelas, que viajam em direções opostas em relação ao escoamento base (Fig. 2.5). A análise de estabilidade linear, bem como o estudo experimental, para o caso em que a espessura da camada de mistura é maior, comparando-se com a espessura da camada de densidade,  $\delta_i \gg \delta_\rho$ , foi investigada por Lawrence *et al.* (1991) [86] e Haigh & Lawrence (1999) [53]. Em ambos trabalhos, os modos não-dispersivos de K-H ocorrem somente para  $Ri < 0.07$ . O fenômeno da instabilidade de Holmboe foi encontrado também por Carpenter *et al.* [19], utilizando Simulação Numérica Direta (*DNS*) e razão entre espessura de vorticidade e densidade  $\delta_i/\delta_\rho = 5$ .

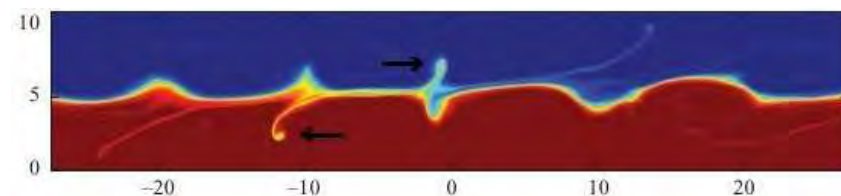


Figura 2.5: Instabilidade de Holmboe,  $Pr = 25$ ,  $\delta_i/\delta_\rho = 5$  (Carpenter *et al.*, 2010 [19]).

O desenvolvimento das instabilidades de Kelvin-Helmholtz e Holmboe na camada de mistura estratificada pode ocorrer de acordo com a relação entre os valores de  $\delta_i$  e  $\delta_\rho$  [94]. Na tabela (2.1) são listadas as instabilidades primárias que surgem na camada de mistura, de acordo

com a relação entre as espessuras dos perfis de velocidade ( $\delta_i$ ) e densidade ( $\delta_\rho$ ) e o número de Richardson ( $Ri_H$ ). Se  $\delta_i < 2\delta_\rho$  e  $Ri_H < 0.25$ , a camada de mistura torna-se instável para todos os comprimentos de onda e a instabilidade de Kelvin-Helmholtz pode se desenvolver. A maioria dos estudos experimentais de camada de mistura estratificada obedece à relação  $\delta_i > 2\delta_\rho$  [55, 74, 144]. Nestes casos, quando  $Ri_H > 0.07$ , ocorre a instabilidade de Holmboe [55, 74, 86, 147].

Tabela 2.1: Instabilidades primárias em função da relação entre  $\delta_i$  e  $\delta_\rho$ . Tabela adaptada de Martinez (2006 [94]).

Relação entre $\delta_i$ e $\delta_\rho$	$Ri_H$	Instabilidades	Referência
$\delta_i \gg \delta_\rho$	$Ri_H \leq 0.07$	Kelvin-Helmholtz	[53, 86]
$\delta_i \gg \delta_\rho$	$Ri_H > 0.07$	Holmboe	[53, 86]
$\delta_i \gg \delta_\rho$	$Ri_H = 0.046$	Transição Kelvin-Helmholtz à Holmboe	[53, 86]
$\delta_i \gg \delta_\rho$	$Ri_H < 0$	Kelvin-Helmholtz	[53, 86]
$\delta_i \leq 2\delta_\rho$	$Ri_H < 0.25$	Kelvin-Helmholtz	[55]
$\delta_i > 2\delta_\rho$	$Ri_H < 0.25$	Kelvin-Helmholtz e Holmboe	[55]

Em grande parte das pesquisas experimentais relativas à transição da camada cisalhante, o escoamento base é gerado pela mistura de duas correntes de velocidades à jusante de uma placa separadora. A razão  $R = \Delta U / (2U_C)$  quantifica a magnitude de  $\Delta U = U_1 - U_2$  em relação à velocidade média  $U_C = (U_1 + U_2) / 2$ . De acordo com a Fig. 2.6, quando  $R = 0$ , não há cisalhamento e o escoamento torna-se uniforme. Uma camada de mistura pode se formar no intervalo  $0 < R < 1$ . Quando  $R = 1$ , o escoamento inferior está em repouso, mas, quando  $R > 1$ , forma-se uma camada de mistura com a camada inferior de sentido contrário ao escoamento da camada superior.

Michalke (1964, 1965) [101, 102] investigou analiticamente a evolução temporal e espacial da camada de mistura homogênea, utilizando como perfil de velocidade  $u(y) = 0.5(1 + \tanh y)$ . Os autovalores e autofunções, encontrados nesses trabalhos, mostraram que a formulação espacial é a que melhor se aproxima dos resultados experimentais.

Brown & Roshko (1974 [16]) e Oster & Wygnanski (1982 [112]) mostraram que a taxa de amplificação da camada de mistura turbulenta decai de acordo com o aumento ou diminuição da razão de velocidade  $R = \Delta U / (2U_C)$ . Este resultado é muito importante na análise de estabilidade linear ao arbitrar valores para  $R$ . Huerre & Monkewitz (1985)[59] mostraram que para

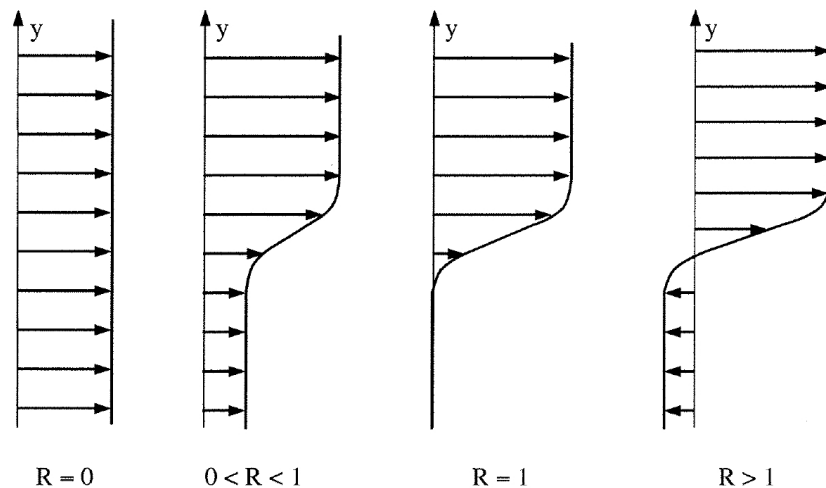


Figura 2.6: Efeito da razão  $R = \Delta U/(2U_C)$  no perfil de velocidade da camada de mistura (Batchelor *et al.*, 2000 [8]).

$R < 1.315$  a camada de mistura homogênea é convectivamente instável, ou seja, as perturbações crescem ou decrescem ao se propagar na direção do escoamento.

A primeira tentativa de relacionar as taxas de crescimento temporal e espacial foi proposta por Gaster (1962 [44]). Ele considerou uma forma geral para relacionar  $\alpha = \alpha(\omega)$  e  $\omega = \omega(\alpha)$  no plano complexo, onde as taxas de amplificação temporal e espacial estão conectadas pela velocidade de grupo, dada por:

$$c_g = \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r}. \quad (2.14)$$

Duas décadas depois, Monkewitz & Huerre (1982 [106]) retiraram parcialmente as restrições da transformação de Gaster (Eq. 2.14), acrescentando que o estudo em desenvolvimento temporal pode ser extrapolado para o caso espacial, desde que a velocidade de convecção,  $U_C$ , seja maior em comparação com a velocidade  $U$  (Eq. 2.2).

Ortiz, Chomaz & Loiseleux (2002 [111]) estudaram a validade da transformação de Gaster (Eq. 2.14) para uma camada de mistura estratificada. Para este fim, eles utilizaram um perfil de velocidade segmentado e um perfil de densidade estável, mas com uma mudança muito brusca na interface (Fig. 2.7). Suas considerações previram muito bem a instabilidade espacial, exceto nas regiões de transição entre instabilidades convectiva e absoluta. Os resultados apresentaram um novo cenário de transição (Fig. 2.8), com a presença de ondas de propagação. Para  $Ri < 0.07$ , o sinal comporta-se como um pacote de ondas, contendo modos de transição Kelvin-Holmboe. O parâmetro utilizado para comparações é  $a = 2U_C/\Delta U = R^{-1}$ .

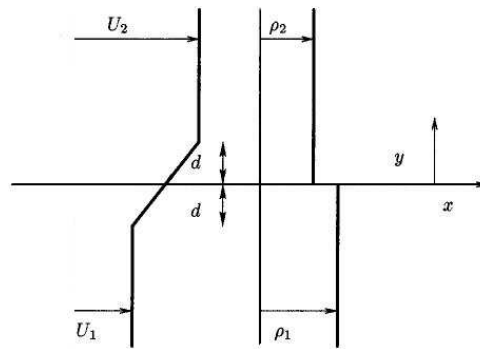


Figura 2.7: Perfis de velocidade e densidade (Ortiz *et al.*, 2002 [111]).

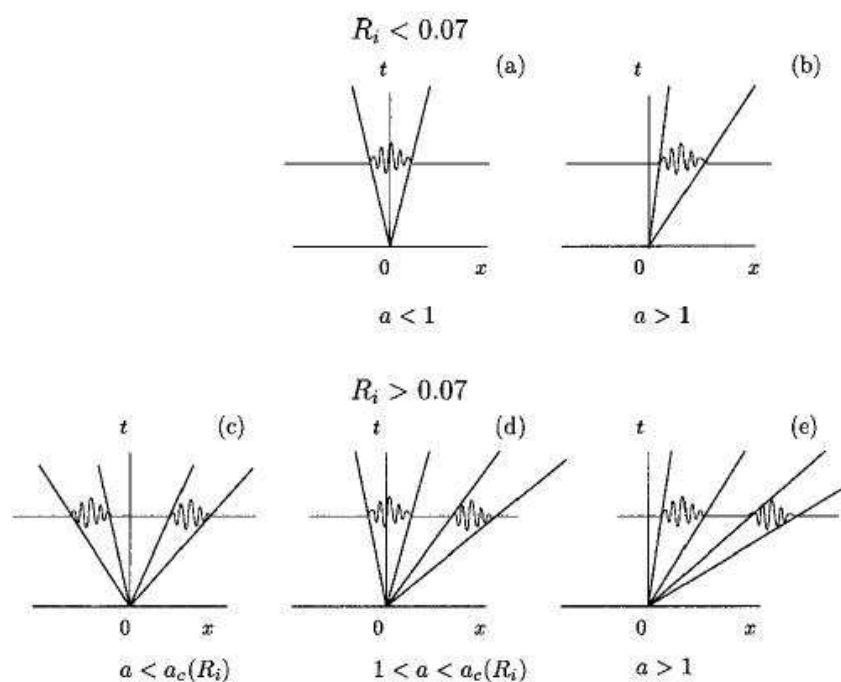


Figura 2.8: Resposta do impulso no plano  $(x, t)$ : (a, d) Absolutamente instável; (b, c, e) Convectivamente instável. Para  $Ri > 0.07$  e  $a > 0$ , apresentam-se dois modos de Holmboe que amplificam-se (Ortiz *et al.*, 2002 [111]).

## 2.2 Estudos experimentais e numéricos

A instabilidade de  $KH$  ocorre quando é perturbada a interface entre dois fluidos ou duas camadas de velocidade diferentes. Devido à inflexionalidade do perfil de velocidade, a instabilidade de  $KH$  se desenvolve e gera uma camada de vorticidade (Fig. 2.9a), de comprimento de onda  $\lambda_a$ . Estas estruturas, com vorticidade perpendicular ao escoamento base, crescem como uma onda na interface (Fig. 2.9b). Em seguida, enrola-se a interface e forma-se a estrutura primária de Kelvin-Helmholtz ( $KH$ ), conforme pode ser visto na Fig. 2.9c.



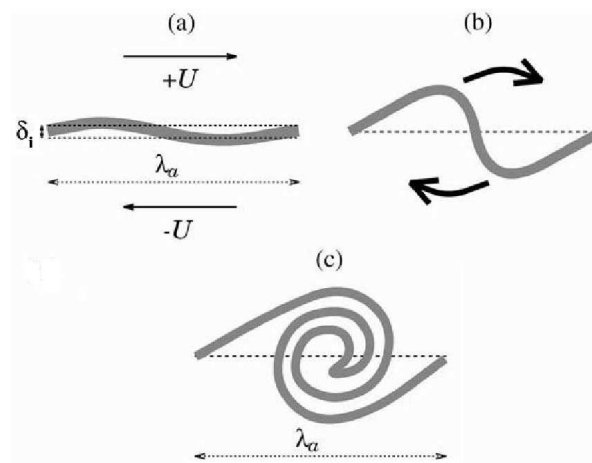


Figura 2.9: Fases da formação da instabilidade de Kelvin-Helmholtz (Lesieur, 1997 [89]).

A interface cisalhante dos turbilhões de *KH* torna-se instável quando o número de Richardson Gradiente é inferior ao valor crítico de Miles-Howard de 0.25 (Thorpe, 1973 [149]). Outros trabalhos interessantes, realizados por Scotti & Corcos (1972[127]) e Lawrence et al. (1991[86]), determinaram em laboratório a taxa de crescimento inicial das perturbações e o comprimento de onda entre os turbilhões de *KH*, estando em boa concordância com suas previsões através da teoria de estabilidade linear.

Logo após o crescimento, a instabilidade primária de *KH* torna-se suscetível a diferentes tipos de instabilidades secundárias, as mais importantes ocorrem no interior do turbilhão de *KH* e na zona entre os turbilhões de *KH*, que são os principais mecanismos da transição para a turbulência (Bernal & Roshko, 1986 [11]; Schowalter et al., 1994 [125]). A instabilidade que permanece confinada na parte central do núcleo do vórtice de *KH*, é denominada *instabilidade elíptica* [20, 65, 84]. Esta se desenvolve primeiro mas sua taxa de crescimento decai antes que o turbilhão de *KH* atinja a máxima amplitude. De acordo com análise de estabilidade linear de Klaassen & Peltier [67, 68, 69], em escoamentos estratificados, os resultados mostram que a instabilidade elíptica perde a intensidade dos vórtices para a instabilidade centrada na região entre os turbilhões, a *instabilidade hiperbólica*. Mas, em escoamentos não estratificados, as duas instabilidades competem por dominância [69].

Um característica importante na formação de uma série de ondas de *KH* é o emparelhamento dos turbilhões (Fig. 2.10). Este fenômeno físico aumenta o entranhamento dentro da região do turbilhão (Winant & Browand, 1974 [159]; Patterson et al., 2006 [115]). De acordo com



Figura 2.10: Processo de emparelhamento (Lasheras & Choi, 1988 [85]).

Atsavaprane & Gharib (1997 [5]), o aumento da estratificação suprime substancialmente o emparelhamento.

Em camadas cisalhantes homogêneas ou com baixa estratificação, formam-se os turbilhões contra-rotativos, que são causados pelo alongamento da região entre os turbilhões de  $KH$ , mecanismo explicado na teoria de Lin & Corcos (1984) [91]. Estas estruturas foram indicadas primeiramente pelas experiências de Brown & Roshko (1974) [16], Konrad (1976) [72], Breidenthal (1981) [13], e posteriormente, por Jimenez (1983) [64], Bernal & Roshko (1986), Lasheras e Choi (1988) [85], Schowalter *et al.* (1994) [125].

A instabilidade elíptica ocorre no núcleo do vórtice de  $KH$  e é comum a ambos escoamentos, estratificado e homogêneo. Em meios estratificados, a instabilidade elíptica ocorre devido à força de empuxo, conhecida na literatura como *instabilidade convectiva gravitacional*, sendo confirmada por Thorpe (1985 [150]) e por Schowalter *et al.* (1994 [125]). Tal instabilidade ocorre devido a inversão local do gradiente de densidade vertical e está associada à desestabilização convectiva das subcamadas de densidade, que são geradas durante o enrolamento dos turbilhões de  $KH$ . Como a estratificação aumenta este tipo de instabilidade no interior do núcleo do turbilhão, torna-se mais dominante na formação dos vórtices longitudinais (Schowalter *et al.*, 1994 [125]). Segundo Brown & Roshko (1974) [16] e Bernal & Roshko (1986) [11], vórtices secundários longitudinais melhoram significativamente o entranhamento e a mistura.

A instabilidade convectiva gravitacional está associada com a desestabilização das subcamadas de densidade, geradas durante o enrolamento dos turbilhões de  $KH$ . Uma nova região instável é criada para cada rotação do núcleo do turbilhão [67], e esta região, ao redor do vór-

tice de  $KH$ , inclui movimentos convectivos, onde o campo de tensões é forte. Como pode ser identificado na Fig. 2.11, o vórtice de  $KH$ , em meio estratificado, envolve o entranhamento de duas subcamadas de fluido. Uma das subcamadas contém fluido mais denso, de cor vermelha, enquanto a outra contém fluido menos denso, de cor azul. Posteriormente, o vórtice se enrola e as subcamadas se entrelaçam com o fluido fortemente rotacional, formando subcamadas de fluido mais denso e menos denso, na forma espiral. A instabilidade convectiva gravitacional ocorre quando o fluido mais denso se encontra acima do menos denso [67, 69, 125, 150, 94].

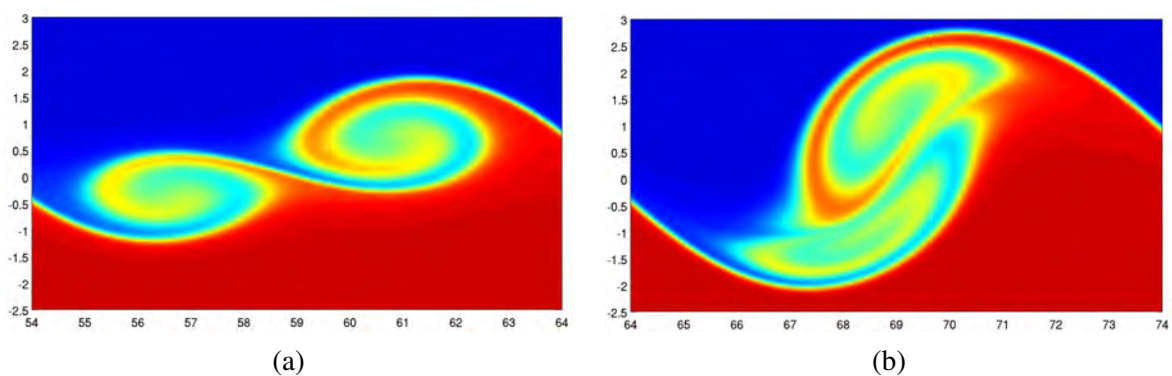


Figura 2.11: Campos de densidade. Simulação em desenvolvimento espacial ( $Re = 1000$ ,  $Ri_H = 0.05$ ): (a) Processo de entranhamento; (b) Instabilidade convectiva gravitacional.

A região onde aparecem finas camadas de vorticidade entre os turbilhões de  $KH$ , Staquet (1995 [141]) definiu como *camada baroclínica*. Devido à geração baroclínica da vorticidade, esta região torna-se instável para instabilidades secundárias. Estas instabilidades têm a mesma estrutura do turbilhão primário de  $KH$  e foram observadas nas experiências de Atsavapranee & Gharib (1997) [5], na atmosfera por Gossard *et al.* (1970) [51], no oceano por Haury *et al.* (1979) [54] e confirmada numericamente por Staquet (1995 [141]), Martinez *et al.* (2006 [94]) e Smyth (2003 [134]). A Figura 2.12 ilustra o campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ), destacando a camada baroclínica (Fig. 2.12a) e o campo de densidade correspondente (Fig. 2.12b). As instabilidades secundárias, atribuídas à camada de mistura estratificada com alto número de Reynolds (Fig. 2.13), contribuem significativamente no processo de transporte e mistura.

O crescimento destas diferentes estruturas secundárias e suas interações entre si com o módulo primário, cria pequenas estruturas no escoamento e uma transição para a fase turbulenta. Enquanto os movimentos de pequena escala se desenvolvem completamente através do tur-

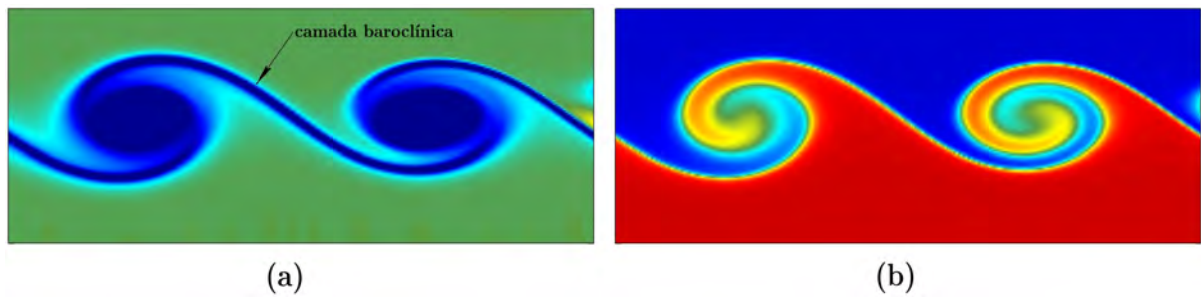


Figura 2.12: Simulação em desenvolvimento espacial ( $Re = 1000$ ,  $Ri_H = 0.05$ ): (a) Campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ); (b) Campo de densidade correspondente.

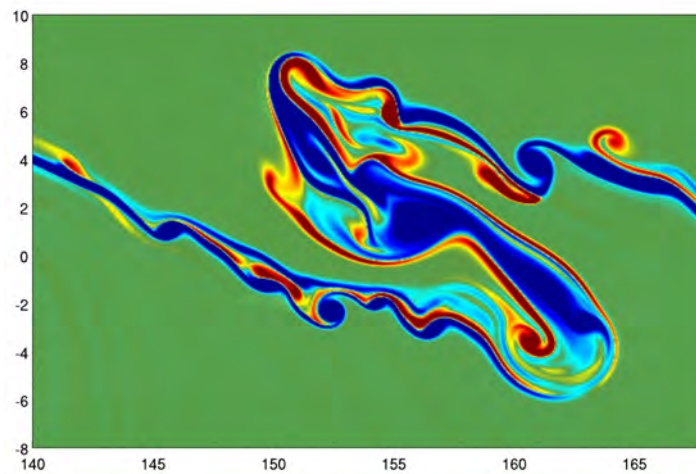


Figura 2.13: Instabilidade secundária de Kelvin-Helmholtz na camada baroclínica. Campo de vorticidade transversal de uma simulação em desenvolvimento espacial ( $Re = 1000$ ,  $Ri_H = 0.05$ ).

bilhão, os experimentos de Brown & Roshko (1974) [16] e Dimotakis & Brown (1976) [36] sugerem que a estrutura do turbilhão primário desempenha um papel importante na transição para a turbulência e na dinâmica do escoamento turbulento.

Medições de perfis de densidade e velocidade realizadas por Thorpe (1973) [149], indicam que cerca de 25% da energia extraída do escoamento base, através das instabilidades de  $KH$ , é convertida para mistura. A evolução no tempo de entranhamento e de mistura em escoamentos estratificados, medidos em um tanque por Patterson *et al.* (2006) [115], mostraram uma forte dependência do estágio de evolução do turbilhão de  $KH$ . Os autores realizaram dois experimentos variando o número de Reynolds e de Richardson, em função da declividade do tanque.

Em uma camada de mistura em desenvolvimento espacial, Brown & Roshko (1974 [16])

determinaram a taxa de crescimento da espessura de vorticidade, definida por

$$\frac{1}{R} \frac{d\delta_\omega}{dx} = C_{BR}, \quad (2.15)$$

onde  $R = (U_1 - U_2)/(U_1 + U_2)$ . As velocidades máxima e mínima, são respectivamente,  $U_1$  e  $U_2$ , e a espessura inicial da vorticidade,  $\delta_i$ , é determinada por

$$\delta_i = \frac{2U}{|du/dy|_{max}}. \quad (2.16)$$

Winant & Browand (1974) [159] mostraram que o crescimento da camada cisalhante é comandado principalmente pelos emparelhamentos dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz. Experimentos mostram que o valor  $C_{BR}$  pode variar entre 0.15 (Browand & Latigo, 1979 [14]) e 0.27 (Huang & Ho, 1990 [58]). Estas diferenças são ainda mais marcantes quando  $R \rightarrow 1$  [16].

Outros autores identificaram a evolução da espessura da camada cisalhante, medindo a taxa de crescimento da camada de forma diferente. Wygnanski & Fiedler (1970 [161]), Champagne *et al.* (1976 [23]) e Patel (1973 [113]) consideraram as posições  $y_{0.95}$  e  $y_{0.1}$  definidas pelo perfil médio de velocidade, de modo que

$$\langle u(x, y_\alpha) \rangle = U_2 + \alpha(U_1 - U_2). \quad (2.17)$$

Para calcular a taxa de alargamento da camada de mistura, os autores [161, 23, 113] utilizaram a equação

$$Al(x) = \frac{|y_{0.95} - y_{0.1}|}{(x - x_0)}, \quad (2.18)$$

onde  $x_0$  é a coordenada longitudinal referente à localização hipotética do vértice apresentado na Fig. 2.14.

Os resultados de Patel (1973 [113]) e Champagne *et al.* (1976 [23]) estão apresentados na Fig. 2.14. Eles obtiveram taxas de  $Al = 0.19$  e  $Al = 0.21$ , respectivamente. Estas diferenças são atribuídas à forma como são introduzidas as perturbações nos experimentos.

Simulações numéricas foram utilizadas pela primeira vez por Rosenhead (1931) [123] no estudo da formação dos turbilhões de *KH* utilizando perturbações senoidais. Desde então, as

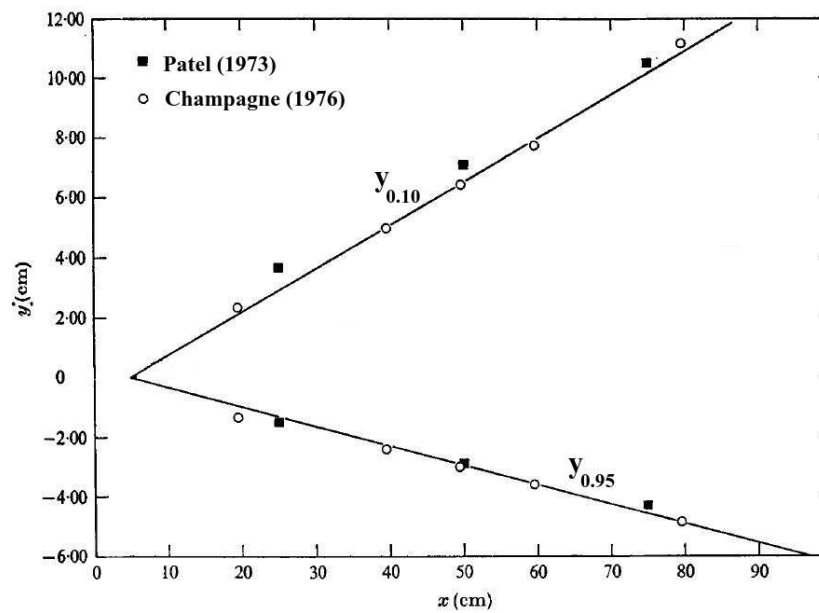


Figura 2.14: Taxa de alargamento da camada de cisalhamento (Adaptado de Champagne *et al.*, 1976 [23]).

simulações numéricas foram utilizadas para simular a evolução das instabilidades de  $KH$  e quantificar as características da geração da turbulência e da mistura.

O crescimento das instabilidades primárias de  $KH$ , assim como a transição para as instabilidades secundárias, foram amplamente investigadas em vários trabalhos, no qual destacamos, Patnaik *et al.* [114], Klaassen & Peltier [66, 67, 69], Staquet [141], Caulfield & Peltier [21], Smyth, 2003 [134]. A natureza das instabilidades secundárias, sua evolução e contribuição para o desencadeamento da turbulência foram examinadas em detalhes por Caulfield & Peltier [22], Peltier & Caulfield [116] e Martinez [94].

Smyth (1999) [133] examinou o processo de dissipação de escalares em pequenas escalas na turbulência gerada pelas instabilidades de  $KH$ . A evolução no tempo da mistura e as quantidades que caracterizam o comportamento de mistura, tais como a eficiência de mistura, foram examinadas ao longo do ciclo de vida total ou parcial dos turbilhões de  $KH$  em numerosas simulações numéricas (Scinocca, 1995 [43]; Cortesi *et al.*, 1999 [30]; Caulfield & Peltier, 2000 [22]; Staquet, 2000 [142]; Carpenter *et al.*, 2010 [19]; Inoue & Smyth, 2009 [62]). No entanto, esses estudos, concentram-se sobre o efeito da estratificação na mistura (Caulfield & Peltier, 2000 [22]), ou consideram um intervalo muito limitado do número de Reynolds ( $Re$ ) e do número de Prandtl ( $Pr$ ) em escoamentos que envolvem mistura (Smyth *et al.*, 2001 [136]; Cortesi

*et al.*, 1999 [30]; Staquet, 2000 [142]). Por outro lado, Rahmani (2011) [120] realizou uma investigação sobre o efeito dos adimensionais,  $Re$  e  $Pr$ , na mistura.

Laizet *et al.* (2010) [81] incluíram três diferentes geometrias de placa separadora (Fig. 2.15). No desenvolvimento espacial da camada de mistura homogênea, os autores notaram forte dependência da geometria na formação das esteiras e estruturas coerentes. Em geometrias semelhantes, Breidenthal (1981) [13] observou em um canal a consequência dos emparelhamentos e o desenvolvimento de pequenos turbilhões devidos aos movimentos tridimensionais no escoamento.

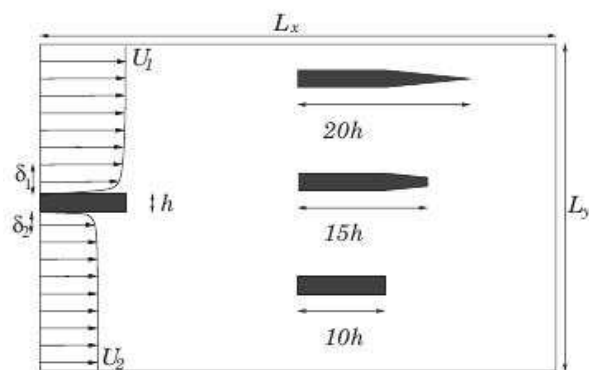


Figura 2.15: Diferentes configurações para a placa separadora [81]

Um outro mecanismo que caracteriza a organização dos turbilhões de  $KH$  é o *emparelhamento helicoidal*, estrutura na forma de uma treliça. Este fenômeno só pode ser observado em escoamentos não estratificados, como pode ser verificado nas Figuras 2.16 e 2.17. Este tipo de instabilidade foi constatado por Comte *et al.* (1992) [25], Silvestrini (1996) [129] e Laizet *et al.* (2010) [81]. Em tais trabalhos foram utilizados Simulações Numéricas Diretas ( $DNS$ ), que resolvem todas as escalas espaciais e temporais do escoamento (Martinez, 2006 [94]; Fontane & Joly, 2008 [42]; Alexakis, 2009 [3]). Neste trabalho esta técnica é utilizada para investigar os efeitos da gravidade na direção longitudinal, em uma camada de mistura estavelmente estratificada. A técnica  $DNS$  é um excelente instrumento para investigar as estruturas que se formam na camada de mistura em desenvolvimento temporal e espacial.

Os movimentos tridimensionais produzem instabilidades transversais que formam os vórtices longitudinais, localizados entre os vórtices de  $KH$ . Pierrehumbert & Widnall (1982) [117] sugerem que estas instabilidades, que induzem as oscilações transversais, são caracterizadas

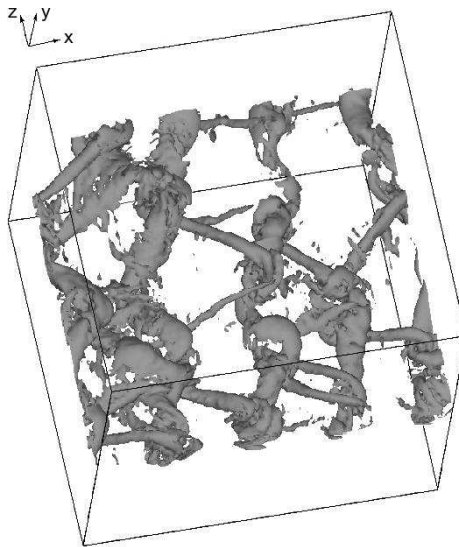


Figura 2.16: Surgimento do emparelhamento helicoidal em uma simulação temporal (Silvestrini, 1996 [129]).



Figura 2.17: Surgimento do emparelhamento helicoidal em uma simulação espacial (Laizet *et al.*, 2010 [81]).

por uma oscilação de fase com os turbilhões primários de *KH* (Fig. 2.18). Os autores denominam estas oscilações tridimensionais de *instabilidades translativas*, responsáveis pelo início da tridimensionalização da camada de mistura homogênea. De acordo com Pierrehumbert & Widnall [117], o comprimento de onda transversal mais instável tem aproximadamente  $2/3$  do comprimento de onda longitudinal. A linha que aparece na Fig. 2.18 é uma representação da evolução ao longo do tempo, da instabilidade translativa.

O processo da tridimensionalidade, nas camadas de mistura estratificadas, é mais complexo, em virtude das instabilidades causadas por efeitos baroclínicos. Além da instabilidade translativa, os movimentos tridimensionais são afetados pela instabilidade convectiva gravitacional, que ocorre durante o enrolamento do turbilhão de *KH*, e pela instabilidade secundária bidimensional, que surge devido o gradiente de densidade longitudinal [22, 29, 125]. De acordo com Martinez *et al.* [96, 97], a estratificação afeta a formação dos vórtices longitudinais devido aos gradientes de densidade, que contribuem com um mecanismo extra de geração ou destruição de



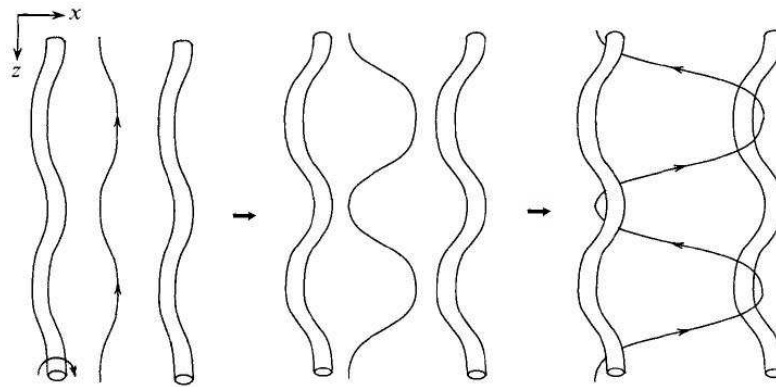


Figura 2.18: Instabilidade translativa (Schoppa *et al.*, 1995 [124]).

vorticidade local, por meio do torque baroclínico.

O estágio de transição para o regime turbulento inicia no número de Reynolds, onde o efeito das forças de inércia supera o efeito de dissipação das forças viscosas para desenvolver movimentos tridimensionais. Com o aumento do número de Reynolds, estes movimentos tornam-se mais intensos. O desenvolvimento de uma ampla gama de tamanhos de vórtices no escoamento facilita o processo de agitação de escalares e, portanto, aumenta a mistura no escoamento. Isso explica o aumento da quantidade de mistura, de acordo com o número de Reynolds (Rahmani, 2011[120]). Para um aumento suficiente do número de Reynolds, o espectro de escalas de comprimento inclui todos os tamanhos de vórtices, a partir da maior escala até as menores, e abaixo destas, a difusão molecular dissipa todas as perturbações. Nesta situação, a turbulência está totalmente desenvolvida e outros acréscimos no número de Reynolds não causam aumento significativo da mistura. Um exemplo de uma turbulência sub-desenvolvida e plenamente desenvolvida em camadas de cisalhamento é ilustrado na Fig. 2.19, mostrando a estrutura da densidade para diferentes  $Re$ . Ao analisar um amplo número de estudos sobre a transição em diferentes escoamentos em regime turbulento, Dimotakis (2000) [35] conclui que uma turbulência plenamente desenvolvida é alcançada para  $Re \gtrsim 10^4$ .

Em camadas de cisalhamento, a transição da camada de mistura para regime turbulento foi notada pela primeira vez por Konrad (1976) [72] em uma camada de cisalhamento envolvendo gases, formada por duas camadas paralelas de diferentes velocidades a jusante de uma placa separadora. A transição da camada de mistura para o regime turbulento, em meio líquido, foi medida por Breidenthal (1981) [13] e Koochesfahani & Dimotakis (1986) [73] através da rea-

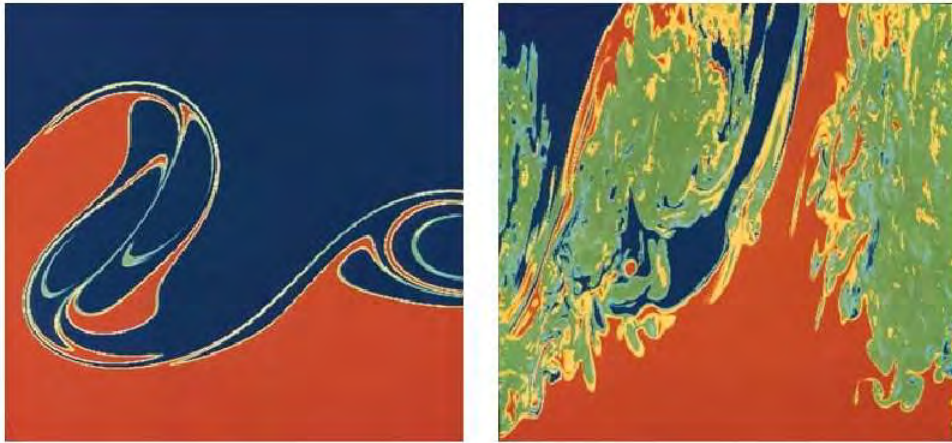


Figura 2.19: Diferentes estruturas nos campos de densidade. À esquerda,  $Re \cong 1.75 \times 10^3$ , e à direita,  $Re \cong 2.3 \times 10^4$  (Koochesfahani & Dimotakis, 1986 [73])

ção química entre duas camadas. Para a mesma razão de velocidade, a transição do escoamento observada nestes dois estudos ocorreram ao longo do mesmo intervalo de números de Reynolds observados por Konrad (1976) [72]. O aumento de uma ordem de magnitude na quantidade de mistura nas medições de Breidenthal (1981) [13] e Koochesfahani & Dimotakis (1986) [73], foi associado com o desenvolvimento de movimentos turbulentos de pequena escala no escoamento.

Compreender a transição do escoamento, em faixas de  $Re$  sobre a qual esta transição ocorre, é importante para os estudos dos processos de mistura que ocorrem no oceano e na atmosfera. Como estes escoamentos têm geralmente número de Reynolds muito elevados ( $Re > 10^5$ ), podem ser assumidos que exibem comportamento de uma turbulência totalmente desenvolvida (Rahmani, 2011 [120]).

# Capítulo 3

## Metodologia numérica

Neste capítulo será abordada a metodologia numérica utilizada neste trabalho. Serão descritos a configuração do domínio de cálculo, as equações que descrevem o escoamento, as condições de contorno e condições iniciais, as discretizações temporal e espacial, as escalas de comprimento, a decomposição do domínio e a identificação das estruturas coerentes.

O código computacional utilizado no presente trabalho é o Incompact3d, baseado na técnica de Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation* - DNS). Este código resolve as equações que modelam o escoamento, discretizando-as em uma malha cartesiana, utilizando o método de diferenças finitas. O método de Adams-Bashfort de segunda ordem é utilizado para discretização temporal das equações, enquanto que, para a discretização espacial, utilizou-se um esquema de diferenças finitas compactas de sexta ordem (Lele, 1992[88]).

### 3.1 Configuração do domínio de cálculo

O domínio de cálculo para os casos bidimensional e tridimensional são respectivamente de tamanho,  $(L_x, L_y)$  e  $(L_x, L_y, L_z)$ , empregados para o estudo da camada de mistura. A Fig. 3.1 apresenta o domínio tridimensional, onde a direção  $x$  é a direção principal do escoamento (longitudinal),  $y$  é a direção vertical e  $z$  é a transversal.

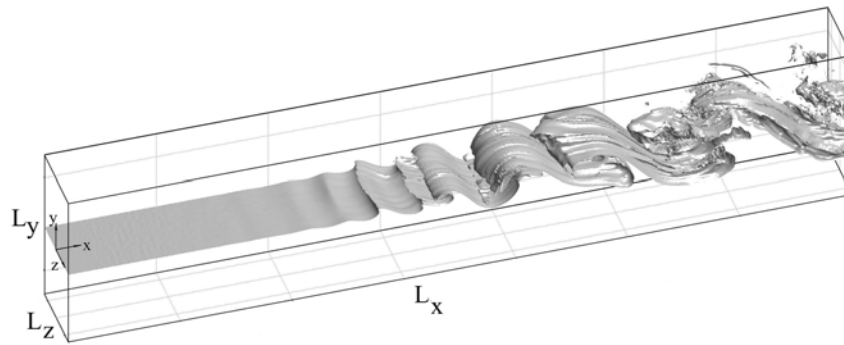


Figura 3.1: Representação tridimensional do domínio de cálculo.

## 3.2 Equações do movimento

Para compreender a dinâmica de uma camada de mistura estavelmente estratificada, foram realizadas Simulações Numéricas Diretas (*DNS*), onde são resolvidas as equações da continuidade e de Navier-Stokes na aproximação de Boussinesq, em um sistema cartesiano de referência  $(x, y, z)$ . A equação da quantidade de movimento para o campo de velocidade  $\vec{u} = (u, v, w)$ , é dada por

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} [\vec{\nabla}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] = -\vec{\nabla}\Pi + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{u} + Ri_H \rho \vec{e}_\theta, \quad (3.1)$$

onde  $\Pi$  é o campo de pressão adimensional ( $\Pi = p/\rho U^2$ ) e  $\vec{e}_\theta = (\sin\theta, -\cos\theta, 0)$ . O tempo é adimensionalizado utilizando a escala advectiva  $\delta_i/U$  e a declividade é representada por  $\theta$  (em radianos), conforme ilustra a Fig. 3.2. O termo convectivo refere-se à operação em notação indicial  $\frac{1}{2} [\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{u_j \partial u_i}{\partial x_j}]$ . Este termo, escrito na forma anti-simétrica, permite reduzir os erros de dobramento ("aliasing"). Estes aparecem quando os termos não-lineares são calculados numericamente no espaço físico, em um domínio discretizado [18, 76].

As outras equações do movimento são, a equação da continuidade, dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.2)$$

e a equação de transporte-difusão, derivada da equação de energia, como segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho = \frac{1}{RePr} \nabla^2 \rho, \quad (3.3)$$

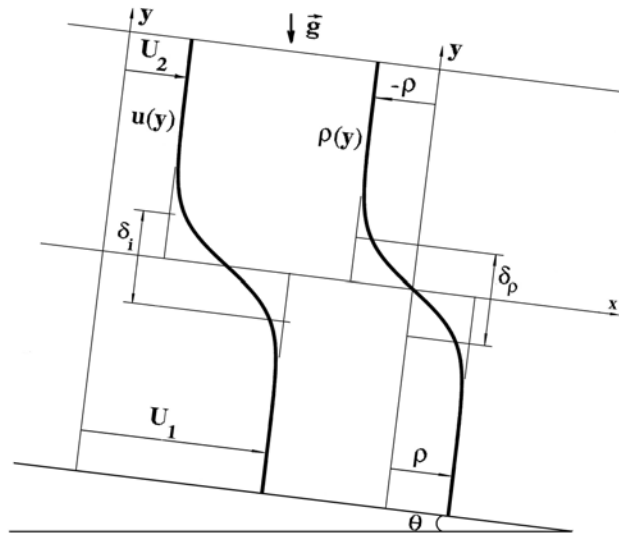


Figura 3.2: Perfis de velocidade e densidade para a camada de mistura espacial.

onde  $\rho$  é a densidade.

A teoria matemática da difusão (*Crank* [31]) em substâncias isotrópicas é baseada na hipótese de que a taxa de transferência de uma substância difusiva através de uma seção é proporcional ao gradiente da densidade normal a esta mesma seção. Esta hipótese é expressada pela equação  $q_i = -D(\partial\rho/\partial n_i)$ , onde  $q_i$  é a taxa de transferência por unidade de área da seção,  $D$  é o coeficiente de difusão e  $n_i$  é a coordenada espacial normal à seção do volume elementar. No presente trabalho  $D$  é representado pela difusividade térmica ( $\kappa$ ).

As variáveis utilizadas nas equações (3.1) a (3.3) são adimensionais. O número de Reynolds ( $Re$ ), o número de Richardson ( $Ri_H$ ) e o número de Prandtl ( $Pr$ ) são os parâmetros adimensionais utilizados. O número de Reynolds, baseado na metade da diferença da velocidade através da camada cisalhante ( $U$ ) e na espessura inicial de vorticidade ( $\delta_i$ ), é definido por

$$Re = \frac{U\delta_i}{\nu}, \quad (3.4)$$

A espessura inicial da vorticidade ( $\delta_i$ ) e o número de Richardson Global ( $Ri_H$ ) foram definidos nas Equações 2.16 e 2.13, respectivamente.

O número de Prandtl é dado por

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (3.5)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\kappa$  a difusividade térmica.

A equação de vorticidade, obtida aplicando o rotacional à equação de movimento na aproximação de Boussinesq (Eq. 3.1), é dada por:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = Ri_H (\nabla \rho \times \vec{e}_\theta) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (3.6)$$

onde

$$\nabla \rho \times \vec{e}_\theta = (\rho_z \cos \theta) \vec{i}_x + (\rho_z \sin \theta) \vec{i}_y + (-\rho_x \cos \theta - \rho_y \sin \theta) \vec{i}_z, \quad (3.7)$$

é o torque baroclínico. Quando  $\theta = 0$ , o torque tem componentes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \quad \text{na direção longitudinal } x \quad (3.8)$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{na direção transversal } z \quad (3.9)$$

O segundo termo da Eq. 3.6 pode ser escrito como

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = -(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{u}). \quad (3.10)$$

Como o escoamento é incompressível ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ), a Eq. 3.6 é reescrita como

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + Ri_H (\nabla \rho \times \vec{e}_\theta) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (3.11)$$

onde  $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega}$  é a taxa de variação de  $\vec{\omega}$ ,  $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}$  é o termo de produção de vorticidade ("vortex stretching") e  $\frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega}$  é o termo de dissipação de vorticidade por viscosidade.

### 3.3 Condições de contorno

As condições de contorno utilizadas para a camada de mistura temporal e espacial se diferem na direção longitudinal ( $x$ ). Para a camada de mistura temporal, as condições de contorno são periódica na direção longitudinal ( $x$ ) e semi-periódica (condição de deslizamento livre) na direção vertical ( $y$ ). Para a camada de mistura espacial foi utilizada a condição de entrada e saída na direção longitudinal, e condição de contorno periódica na direção transversal ( $z$ ) para as

simulações tridimensionais. As Figuras 3.3 e 3.4 apresentam, esquematicamente, as condições de contorno para as configurações em desenvolvimento temporal e espacial.

**Condição periódica:** se  $n$  é o número de pontos em uma direção, então  $\xi_{n+1}=\xi_1$  e  $\xi_0=\xi_n$ ;

**Condição de deslizamento livre:** utilizada nos contornos superior e inferior,  $y = \pm L_y/2$ . Esta condição equivale a uma condição de simetria (função par) ou antissimetria (função ímpar), segundo a componente da velocidade e impõe as seguintes restrições:  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$  e  $v = 0$  em  $y = \pm L_y/2$ .

**Condição de entrada e saída:** Na entrada do domínio  $x = 0$  são utilizados perfis de velocidade e densidade. Além disto, foi acrescentado na entrada, campos de perturbações aleatórias para as três componentes de velocidades.

Para a condição de contorno na saída são utilizadas equações de convecção para  $\vec{u}$  e  $\rho$ , dadas por:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + U_C \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_C \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (3.13)$$

sendo  $U_C$  a velocidade de convecção ( $U_C=(U_1 + U_2)/2$ ). De acordo com Akselvoll e Moint (1996, [2]), devido a esta condição, a degradação do escoamento permanece confinada próxima à região de saída.

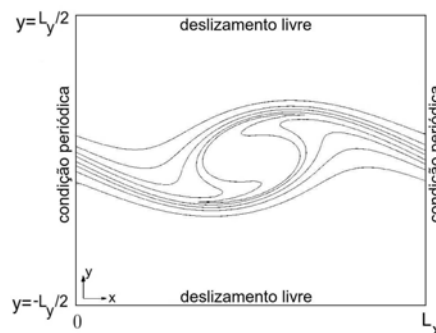


Figura 3.3: Esquema das condições de contorno da simulação temporal.

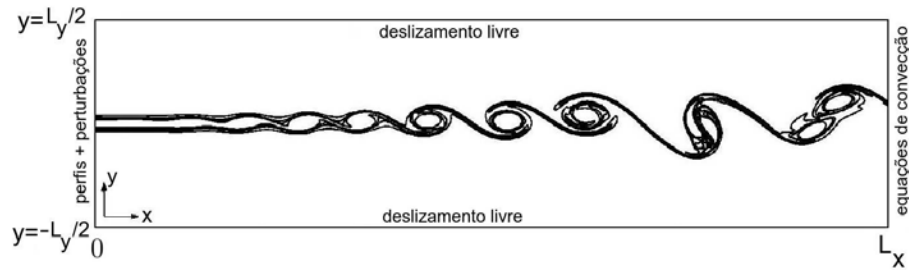


Figura 3.4: Esquema das condições de contorno da simulação espacial.

## 3.4 Condições iniciais

Os perfis utilizados para a velocidade e densidade tanto para a simulação temporal quanto para a simulação espacial são do tipo tangente hiperbólico. O campo de perturbações adicionadas aos perfis de velocidade são do tipo senóides para as simulações temporais e randômicas para as simulações espaciais.

### 3.4.1 Simulação temporal

Os perfis de velocidade e densidade de base empregados nas simulações temporais (bidimensionais), no instante de tempo  $t = 0$ , são dados por:

$$u(x, y, t = 0) = -U \tanh\left(\frac{2y}{\delta_i}\right), \quad (3.14)$$

e

$$\rho(x, y, t = 0) = -\tanh\left(\frac{2y}{\delta_\rho}\right), \quad (3.15)$$

onde  $-L_y/2 \leq y \leq +L_y/2$ .

O campo bidimensional de perturbações  $(u'_0, v'_0)$ , no instante inicial ( $t = 0$ ), adicionado ao perfil de base para as simulações bidimensionais e domínio com um comprimento de onda ( $L_x = \lambda_a$ ), é da forma:

$$u'_0(x, y, t = 0) = -4A_f y \frac{L_x}{2\pi} e^{-2y^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right), \quad (3.16)$$



e

$$v'_0(x, y, t = 0) = -A_f e^{-2y^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right), \quad (3.17)$$

onde  $u'_0$  e  $v'_0$  satisfazem a equação de continuidade. No presente trabalho nenhuma flutuação de densidade é adicionada ao perfil  $\rho(y)$ .

### 3.4.2 Simulação espacial

Os perfis de velocidade e densidade empregados nas simulações espaciais (bidimensionais e tridimensionais), na entrada do domínio ( $x = 0$ ), são dados por:

$$u(x = 0, y, z, t) = U_C - U \tanh\left(\frac{2y}{\delta_i}\right), \quad (3.18)$$

e

$$\rho(x = 0, y, z, t) = - \tanh\left(\frac{2y}{\delta_\rho}\right), \quad (3.19)$$

onde  $U_1 = 3U$  e  $U_2 = U$ . A representação gráfica dos perfis 3.18 e 3.19 está na Fig. (3.2). O termo  $\delta_\rho$  representa a espessura inicial de densidade.

Os campos de perturbações adicionados às três componentes de velocidades, são moduladas por funções gaussianas do tipo

$$f(x = 0, y, z, t) = A_j \exp\left(-0.5 \frac{y^2}{\delta_i}\right), \quad (3.20)$$

que tendem a diminuir as perturbações à medida que se afastam da interface do escoamento. A amplitude desta perturbação,  $A_j$ , é representada por  $A_{2d}$  para o caso bidimensional e  $A_{3d}$  para o caso tridimensional.

## 3.5 Discretização temporal

O avanço no tempo das Equações 3.1 e 3.3 é feito usando o esquema temporal Adams-Bashforth de segunda ordem. Primeiramente é calculado o termo convectivo-difusivo da Eq. 3.1, para um tempo  $t_k$ :

$$\vec{F}^k = -\frac{1}{2}[\vec{\nabla}(\vec{u}^k \otimes \vec{u}^k) + (\vec{u}^k \cdot \vec{\nabla})\vec{u}^k] + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}^k + Ri_H\rho^k\vec{e}_\theta, \quad (3.21)$$

e em seguida é calculada a velocidade intermediária  $\vec{u}^*$ :

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^k}{\Delta t} = a_1\vec{F}^k + b_1\vec{F}^{k-1}. \quad (3.22)$$

No esquema Adams-Bashforth de segunda ordem, o passo de tempo não é subdividido, e os parâmetros assumem os valores  $(a_1, b_1) = (3/2, -1/2)$ .

O campo de velocidade  $\vec{u}^{k+1}$  é corrigido pelo gradiente de pressão (no contorno). A equação a ser resolvida será:

$$\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\vec{\nabla}\Pi^{k+1} \quad (3.23)$$

após a resolução de uma equação de Poisson, deduzida da condição de incompressibilidade (equação 3.2). Aplicando-se o divergente na Eq. 3.23, chega-se à equação de Poisson para a solução do campo de pressão:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Pi^{k+1} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*}{\Delta t}. \quad (3.24)$$

A equação de transporte e difusão, Eq. (3.3), é resolvida fazendo,

$$\frac{\rho^{(k+1)} - \rho^{(k)}}{\Delta t} = a_1G^{(k)} + b_1G^{(k-1)}, \quad (3.25)$$

onde

$$G = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\rho + \frac{1}{Re Pr}\nabla^2\rho.$$

Nas próximas seções são apresentados os esquemas numéricos usados na solução dos termos das equações 3.21 e 3.25.

## 3.6 Discretização espacial

Nesta seção será apresentada a diferença entre a discretização espacial da pressão e das outras variáveis. Posteriormente, será discutida a dissipação numérica via aproximação da se-

gunda derivada, em seguida, o método de solução da equação de Poisson.

### 3.6.1 Discretização dos termos convectivo-difusivo e de transporte-difusão

A discretização espacial dos termos convectivo-difusivo (Eq. 3.21) e transporte-difusão (Eq. 3.3) é feita utilizando um esquema de diferenças finitas centradas, compacto, proposto por Lele (1992)[88]. Os esquemas compactos são esquemas implícitos, que relacionam o valor da derivada em um ponto ao valor da derivada em pontos vizinhos. Dado uma distribuição de pontos sobre uma malha uniforme  $x_i = (i - 1)\Delta x$ , existe uma relação entre a aproximação  $\xi'_i = \xi(x_i) = \frac{d\xi(x_i)}{dx}$  e os valores de  $\xi$ , que é dado por:

$$\alpha_{1,6}\xi'_{i-1} + \xi'_i + \alpha_{1,6}\xi'_{i+1} = a_{1,6}\frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2\Delta x} + b_{1,6}\frac{\xi_{i+2} - \xi_{i-2}}{4\Delta x} + c_{1,6}\frac{\xi_{i+3} - \xi_{i-3}}{6\Delta x}. \quad (3.26)$$

No código `Incompact3d` foi utilizado, na resolução da primeira derivada, um esquema numérico tridiagonal de sexta ordem de precisão onde, de acordo com Lele (1992)[88], a equação resultante é:

$$\alpha_{1,6}\xi'_{i-1} + \xi'_i + \alpha_{1,6}\xi'_{i+1} = a_{1,6}\frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2\Delta x} + b_{1,6}\frac{\xi_{i+2} - \xi_{i-2}}{4\Delta x}. \quad (3.27)$$

Na fronteira do domínio ( $i = 1$  e  $i = N$ ) foi utilizado um esquema de terceira ordem descentrado, dado por:

$$\xi'_1 + \alpha_{1,3}\xi'_2 = \frac{a_{1,3}\xi_1 + b_{1,3}\xi_2 + c_{1,3}\xi_3}{\Delta x}, \quad (3.28)$$

$$\xi'_N + \alpha_{1,3}\xi'_{N-1} = \frac{-a_{1,3}\xi_N - b_{1,3}\xi_{N-1} - c_{1,3}\xi_{N-2}}{\Delta x}, \quad (3.29)$$

E para os pontos vizinhos aos contornos ( $i = 2$  e  $i = N - 1$ ) é utilizado um esquema centrado de quarta ordem:

$$\alpha_{1,4}\xi'_1 + \xi'_2 + \alpha_{1,4}\xi'_3 = a_{1,4}\frac{\xi_3 - \xi_1}{2\Delta x}, \quad (3.30)$$

$$\alpha_{1,4}\xi'_{N-2} + \xi'_{N-1} + \alpha_{1,4}\xi'_N = a_{1,4}\frac{\xi_N - \xi_{N-2}}{2\Delta x}, \quad (3.31)$$

Estes esquemas de terceira e quarta ordem serão utilizados somente quando as condições de contorno não são periódicas ou semi-periódicas. Os coeficientes utilizados na aproximação da primeira derivada estão relacionados na Tab. 3.1.

Tabela 3.1: Valores dos coeficientes para a aproximação da 1ª derivada (Lele (1992)[88]).

Ordem da 1ª derivada	$\alpha_{1,k}$	$a_{1,k}$	$b_{1,k}$	$c_{1,k}$
3ª ordem ( $k = 3$ )	2	$-5/2$	2	$1/2$
4ª ordem ( $k = 4$ )	$1/4$	$3/2$	–	–
6ª ordem ( $k = 6$ )	$1/3$	$14/9$	$1/9$	0

A aproximação para a segunda derivada é feita de forma análoga à da primeira derivada. O esquema para esta aproximação é o seguinte:

$$\alpha_{2,6}\xi''_{i-1} + \xi''_i + \alpha_{2,6}\xi''_{i+1} = a_{2,6}\frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2} + b_{2,6}\frac{\xi_{i+2} - 2\xi_i + \xi_{i-2}}{4(\Delta x)^2} + c_{2,6}\frac{\xi_{i+3} - 2\xi_i + \xi_{i-3}}{9(\Delta x)^2}. \quad (3.32)$$

O esquema tridiagonal de sexta ordem adotado no código para o cálculo das segundas derivadas é dado por:

$$\alpha_{2,6}\xi''_{i-1} + \xi''_i + \alpha_{2,6}\xi''_{i+1} = a_{2,6}\frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2} + b_{2,6}\frac{\xi_{i+2} - 2\xi_i + \xi_{i-2}}{4(\Delta x)^2}, \quad (3.33)$$

O esquema de terceira ordem descentrado para o cálculo das segundas derivadas nos pontos de contorno ( $i = 1$  e  $i = N$ ) é:

$$\xi''_1 + \alpha_{2,3}\xi''_2 = \frac{a_{2,3}\xi_1 + b_{2,3}\xi_2 + c_{2,3}\xi_3 + d_{2,3}\xi_4}{(\Delta x)^2}, \quad (3.34)$$

$$\xi''_N + \alpha_{2,3}\xi''_{N-1} = \frac{a_{2,3}\xi_N + b_{2,3}\xi_{N-1} + c_{2,3}\xi_{N-2} + d_{2,3}\xi_{N-3}}{(\Delta x)^2}, \quad (3.35)$$

Nos pontos vizinhos aos contornos ( $i = 2$  e  $i = N - 1$ ), o esquema de quarta ordem centrado é dado por:

$$\alpha_{2,4}\xi_1'' + \xi_2'' + \alpha_{2,4}\xi_3'' = a_{2,4} \frac{\xi_3 - 2\xi_2 + \xi_1}{2(\Delta x)^2}, \quad (3.36)$$

$$\alpha_{2,4}\xi_{N-2}'' + \xi_{N-1}'' + \alpha_{2,4}\xi_N'' = a_{2,4} \frac{\xi_N - 2\xi_{N-1} + \xi_{N-2}}{2(\Delta x)^2}, \quad (3.37)$$

Para a aproximação da segunda derivada foram utilizados os coeficientes  $\alpha_{2,k}$ ,  $a_{2,k}$ ,  $b_{2,k}$ ,  $c_{2,k}$  e  $d_{2,k}$  que estão relacionados na Tab. 3.2.

Tabela 3.2: Valores dos coeficientes para a aproximação da 2ª derivada (Lele (1992)[88]).

Ordem da 2ª derivada	$\alpha_{2,k}$	$a_{2,k}$	$b_{2,k}$	$c_{2,k}$	$d_{2,k}$
3ª ordem ( $k = 3$ )	11	13	-27	15	-1
4ª ordem ( $k = 4$ )	1/10	6/5	-	-	-
6ª ordem ( $k = 6$ )	2/11	12/11	3/11	-	-

A completa descrição do desenvolvimento matemático desses esquemas pode ser encontrada em Lele (1992)[88], Moin (2001)[105] e Guerreiro (2000)[52].

### 3.6.2 Representação no espaço de Fourier e dissipação numérica

Com a finalidade de verificar a equivalência entre as derivadas no espaço físico e as derivadas no espaço espectral, compara-se a derivada exata de uma dada função  $f(x) = \exp(ikx)$ , calculada no espaço de Fourier da forma  $f'(x) = ikf(x)$ , com a derivada obtida numericamente pelo esquema compacto. A derivada no espaço de Fourier pode ser discretizada utilizando um número de onda modificado para cada uma das direções. Na direção  $x$  temos

$$k'_x \Delta x = \frac{a \sin(k_x \Delta x) + (b/2) \sin(2k_x \Delta x)}{1 + 2a \cos(k_x \Delta x)}, \quad (3.38)$$

onde  $k_x = \frac{2\pi}{L_x}$ . Logo, no espaço espectral a primeira derivada apresenta-se da forma,  $\widehat{f}' = ik'_x \widehat{f}$  [79].

Para a segunda derivada,  $\widehat{f}'' = -k''_x \widehat{f}$ , a formulação do segundo número de onda  $k''$  [83] segue a expressão,

$$k_m''(\Delta x)^2 = \frac{2a[1 - \cos(k_x \Delta x)] + (b/2)[1 - \cos(2k_x \Delta x)] + (2c/9)[1 - \cos(3k_x \Delta x)]}{1 + 2\alpha \cos(k_x \Delta x)}. \quad (3.39)$$

Uma representação dos números de onda modificados  $k'_m$  e  $k''_m$  em função de  $k$  é apresentada na Fig. 3.5, para a primeira e segunda derivadas. Verifica-se que os esquemas compactos fornecem valores de  $k'_m$  e  $k''_m$  mais próximos dos obtidos pela diferenciação exata, para uma faixa de números de onda maior do que os esquemas explícitos [88]. O limite do menor comprimento de onda bem resolvido,  $k'_f$ , depende da tolerância admitida,  $\varepsilon$ , conforme a inequação  $|k'_m - k|/k \leq \varepsilon$ . Portanto,  $k'_f$  depende somente do esquema empregado e não do número de pontos,  $N$ , usados na discretização.

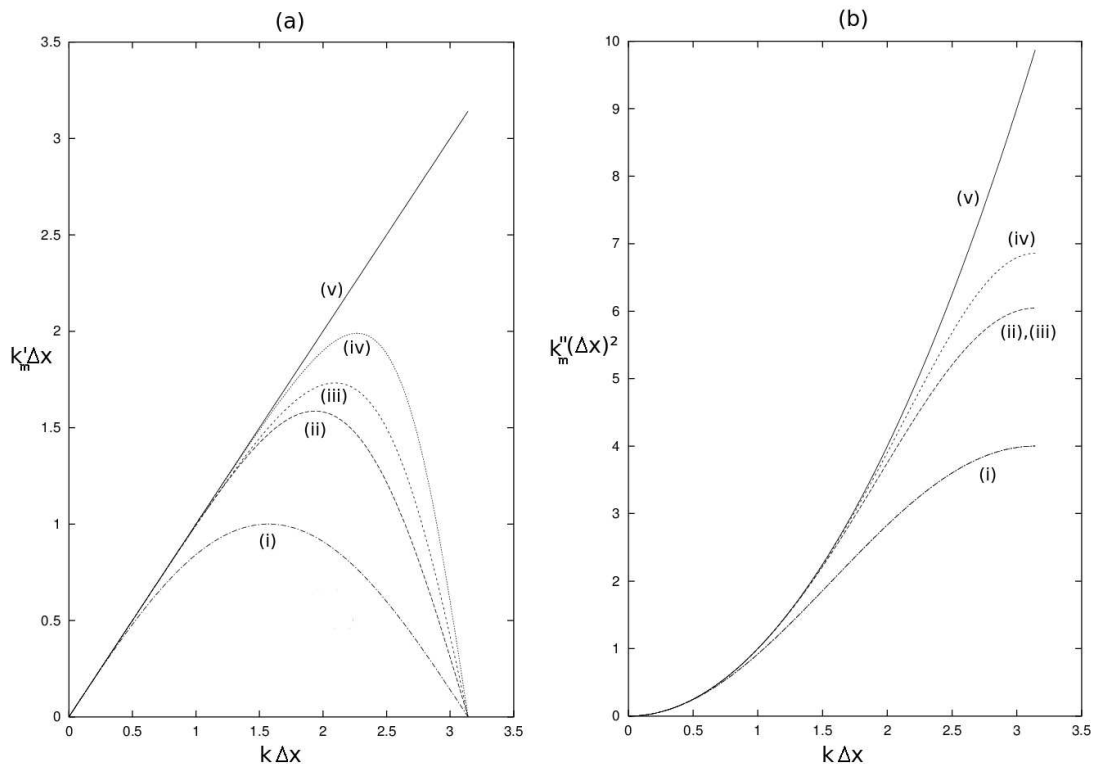


Figura 3.5: Número de onda modificado  $k'_m$  e  $k''_m$  para diferentes ordens de derivação, (a) primeira derivada, (b) segunda derivada, e diferentes esquemas numéricos: (i) esquema explícito de segunda ordem; (ii) esquema explícito de sexta ordem; (iii) esquema compacto de quarta ordem; (iv) esquema compacto de sexta ordem; (v) solução exata. (Lele [88]).

A seguinte formulação para a segunda derivada:

$$\alpha \xi_{i-1}'' + \xi_i'' + \alpha \xi_{i+1}'' = a \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2} + b \frac{\xi_{i+2} - 2\xi_i + \xi_{i-2}}{4(\Delta x)^2} + c \frac{\xi_{i+3} - 2\xi_i + \xi_{i-3}}{9(\Delta x)^2}. \quad (3.40)$$

pode ter oitava ordem de precisão dependendo da combinação dos parâmetros  $(\alpha, a, b, c)$  do esquema de diferenças finitas através de quatro restrições:

$$a + b + c = 1 + 2\alpha, \quad (3.41)$$

$$a + 4b + 9c = 12\alpha, \quad (3.42)$$

$$a + 16b + 81c = 30\alpha, \quad (3.43)$$

$$a + 64b + 729c = 56\alpha, \quad (3.44)$$

onde 3.41, 3.42, 3.43 e 3.44, são de  $2^a$ ,  $4^a$ ,  $6^a$  e  $8^a$  ordem, respectivamente.

Nota-se que  $k_x''$  na Eq. 3.39 admite uma singularidade para  $\alpha = 1/2$  no número de onda de corte  $k_c \Delta x = \pi$ . A proposta de Lamballais *et al.* (2011 [83]) é ajustar  $\alpha$  e, conseqüentemente, controlar  $k_x''$  de forma que preserve sexta ordem de precisão através da relação 3.43. Na prática os autores tiraram proveito da singularidade de  $k''$ , para que este seja cada vez mais próximo do número de onda de corte, e desta forma  $\alpha \rightarrow 1/2$ . Observe que  $k_c''$  é o valor esperado de  $k''$  no número de onda de corte, isto é,  $k''|_{\pi} = k_c''$ . Segundo Lamballais *et al.* (2011 [83]), pode ser demonstrado que este requisito combinado com o esquema de sexta ordem de precisão, pode ser satisfeito utilizando os coeficientes:

$$\alpha = \frac{272 - 45k_c''(\Delta x)^2}{416 - 90k_c''(\Delta x)^2}, \quad (3.45)$$

$$a = \frac{48 - 135k_c''(\Delta x)^2}{1664 - 360k_c''(\Delta x)^2}, \quad (3.46)$$

$$b = \frac{528 - 81k_c''(\Delta x)^2}{208 - 45k_c''(\Delta x)^2}, \quad (3.47)$$

$$c = \frac{-432 + 63k_c''(\Delta x)^2}{1664 - 360k_c''(\Delta x)^2}. \quad (3.48)$$

Para ilustrar a precisão e flexibilidade do esquema resultante, curvas de  $k''_c(\Delta x)^2$  são apresentados na figura 3.6, onde  $k''_c(\Delta x)^2 = n\pi^2$ ,  $n$  é um número inteiro de modo que  $1 \leq n \leq 10$ . O esquema compacto de sexta ordem com  $c = 0$  [88], onde  $k''_c(\Delta x)^2 = 48/7$ , com um comportamento sub-dissipativo, é também apresentado para comparação. Lamballais *et al.* [83] observaram que para os maiores números de onda,  $k''$  superestima o valor exato de  $k^2$ .

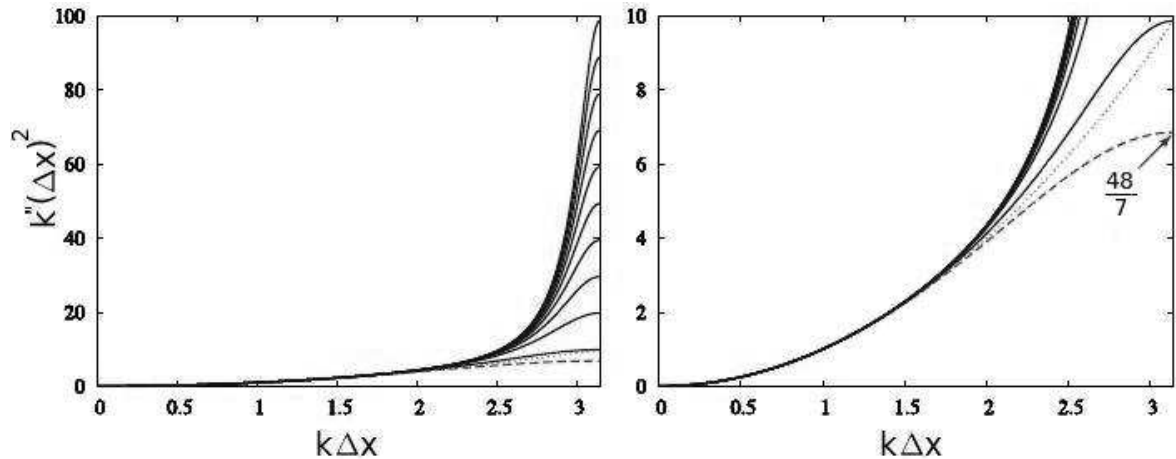


Figura 3.6: Número de onda modificado para esquema de 6ª ordem. Impondo  $k''_c(\Delta x)^2 = n\pi^2$  com  $n = 1, \dots, 10$  (Linha contínua, de baixo para cima) comparado com a solução exata  $k^2(\Delta x)^2$  (Linha pontilhada) e com o esquema convencional de 6ª ordem ( $c = 0$ ) (Linha tracejada). A figura a direita é uma ampliação da figura a esquerda (Lamballais *et al.*, 2011 [83]).

Por meio da Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation - DNS*) e Simulação de Grandes Escalas (*Large Eddy Simulation - LES*), Lamballais *et al.* (2011 [83]) utilizaram o código *Incompact3d* no estudo do escoamento em um canal plano. Os termos viscosos, por meio da *DNS*, foram discretizados utilizando um esquema de 4ª ordem [83] e impondo  $k''_c(\Delta x)^2 = 4\pi^2$ . Esta técnica dissipa as pequenas escalas perto do número de onda de corte  $k_c$ . Na comparação dos perfis médios de velocidade e perfis de intensidade turbulenta, os resultados foram excelentes [83]. Outra aplicação estudada pelos autores, foi o estudo da acústica emitida por uma camada de mistura compressível e bidimensional. Para uma resolução de malha, os autores [83] notaram que utilizando o esquema dados pelas equações (3.40, 3.45 a 3.48), obtiveram melhor resultado que o esquema convencional de 6ª ordem (Eq. 3.40,  $c = 0$ ), em relação à dissipação acústica.



### 3.6.3 Método de solução da equação de Poisson

Neste trabalho, a equação de Poisson (Eq. 3.24) é resolvida no espaço espectral usando a Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform - FFT*) com rotinas que, ao contrário da solução no espaço físico, tem baixo custo computacional. Os valores da pressão são calculados em pontos escalonados da malha, isto é, no centra da malha, como mostra a Fig. 3.7.

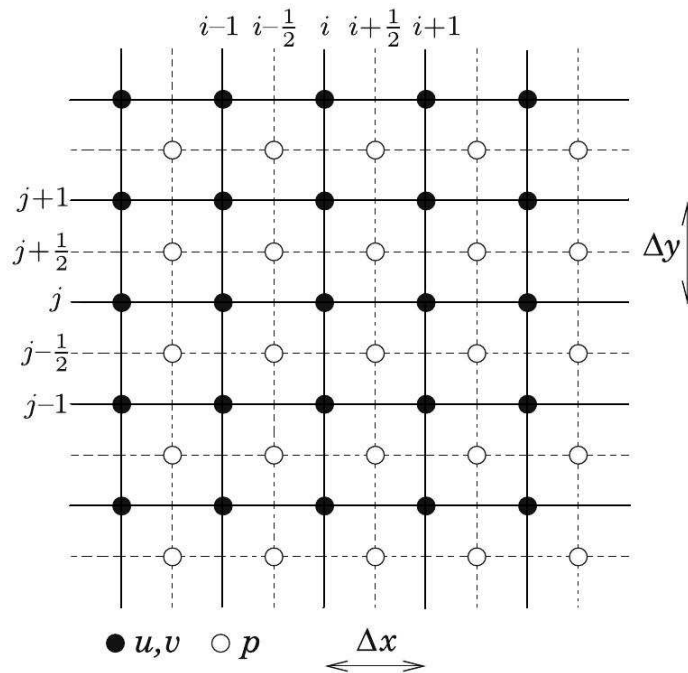


Figura 3.7: Localização dos pontos médios onde são calculados os valores da pressão (○) e velocidade (●).

Os valores da primeira derivada da pressão nos pontos escalonados da malha, utilizando esquema de sexta ordem, é expresso por,

$$\alpha_p \xi'_{i-1/2} + \xi'_{i+1/2} + \alpha_p \xi'_{i+3/2} = a_p \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x} + b_p \frac{\xi_{i+2} - \xi_{i-1}}{3\Delta x}, \quad (3.49)$$

com  $\alpha_p = 9/62$ ,  $a_p = 63/62$  e  $b_p = 17/62$ . Segundo Laizet (2009)[79], este esquema tem um comportamento espectral melhor que o esquema não escalonado (Equação 3.27), mas para melhor avaliação, é necessário considerar o seu comportamento em combinação com o processo de interpolação do ponto médio, dado por,

$$\alpha_l \xi_{i-1/2}^l + \xi_{i+1/2}^l + \alpha_l \xi_{i+3/2}^l = a_l \frac{\xi_{i+1} + \xi_i}{2} + b_l \frac{\xi_{i+2} + \xi_{i-1}}{2}, \quad (3.50)$$

que fornece a aproximação para  $\xi_{i+1/2}^l$  (Nagarajan *et al.*, 2003 [108]). Tal esquema assume a sexta ordem de precisão quando  $\alpha_l = 3/10$ ,  $a_l = 3/4$  e  $b_l = 1/20$ .

Assumindo  $\xi(x_i)$  como uma função puramente harmônica em um domínio  $[0, L_x]$  e sendo,  $L_x$ , o período desta função, é possível demonstrar (Moin (2001)[105]) que os coeficientes de Fourier  $\hat{\xi}_l^l$  associados com a aproximação (Eq. 3.26) estão relacionados com a Transformada de Fourier Discreta ( $\hat{\xi}_l$ ) pela seguinte relação espectral:

$$\hat{\xi}_l^l = k'_x \hat{\xi}_l, \quad (3.51)$$

onde  $k'_x$  é o número de onda modificado associado com o número de onda  $k_x = \pi l/L_x$ , para  $0 \leq l \leq N_x - 1$ , pelo esquema de discretização espacial. O número de onda modificado associado com o esquema (Eq. 3.49) é expresso por,

$$k'_x \Delta x = \frac{2a \sin(k_x \Delta x / 2) + (2b/3) \sin(3k_x \Delta x / 2)}{1 + 2\alpha \cos(k_x \Delta x)}. \quad (3.52)$$

No mesmo caminho, a relação entre os coeficientes de Fourier  $\hat{\xi}_l$  e o termo  $\hat{\xi}_l^l$  associado com o processo de interpolação do ponto médio (Eq. 3.50), é estabelecida por,

$$\hat{\xi}_l^l = T_x(k_x \Delta x) \hat{\xi}_l, \quad (3.53)$$

onde  $T_x(k_x \Delta x)$  é a função de transferência relativa ao número de onda  $k_x$ , dada por,

$$T_x(k_x \Delta x) = \frac{2\alpha \cos(k_x \Delta x / 2) + (2b/3) \cos(3k_x \Delta x / 2)}{1 + 2\alpha \cos(k_x \Delta x)}. \quad (3.54)$$

Portanto, para a solução da equação de Poisson (Eq. 3.24), inicialmente é aplicada a Transformada Rápida de Fourier (*FFT*),

$$\hat{D}_{lmn} = FFT(\nabla \cdot \vec{u}^*). \quad (3.55)$$

E posteriormente, realiza-se a divisão de cada modo de Fourier  $\hat{D}_{lmn}$  pelo seu respectivo

fator  $F_{lmn}$ :

$$\hat{p}_{lmn}^{k+1} = \frac{\hat{D}_{lmn}}{F_{lmn}}, \quad (3.56)$$

sendo:

$$F_{lmn} = -[(k'_x T_y T_z)^2 + (k'_y T_x T_z)^2 + (k'_z T_x T_y)^2] \Delta t. \quad (3.57)$$

A partir dos valores de  $\hat{p}_{lmn}^{k+1}$ , usa-se a transformada inversa para o cálculo do campo de pressões no espaço físico. O gradiente de pressão,  $\vec{\nabla} p^{k+1}$ , pode então ser obtido pelo esquema dado pela Equação 3.49. Por fim, o campo de velocidade  $\vec{u}^{k+1}$  pode ser calculado utilizando a Equação 3.23.

## 3.7 Metodologias de cálculo

O avanço da tecnologia dos sistemas computacionais possibilita a utilização da Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation - DNS*) na resolução das equações de Navier-Stokes.

Segundo Silvestrini (2003)[130], numa turbulência homogênea e isotrópica, ou seja, onde os valores médios turbulentos não variam ante uma translação e uma rotação dos eixos coordenados, a escala integral de comprimento  $L$  (escala das maiores estruturas) pode ser expressa por:

$$L \sim \frac{v^3}{\epsilon}, \quad (3.58)$$

sendo  $v$  uma escala característica de velocidades e  $\epsilon$  a taxa de dissipação da energia da turbulência, a qual pode ser computada, para um dado volume de controle, pela variação temporal da energia cinética. A escala das menores estruturas (escala de *Kolmogorov*) pode ser estimada a partir de:

$$\eta \sim \left( \frac{v^3}{\epsilon} \right)^{1/4}, \quad (3.59)$$

em que  $\nu$  é a viscosidade cinemática. O número de graus de liberdade  $N_{GL}$  necessários para se resolver todas as escalas da turbulência é dado pela razão entre estas duas escalas:

$$N_{GL} \sim \frac{L}{\eta} \sim \left(\frac{L\nu}{\nu}\right)^{3/4} \sim Re_L^{3/4}. \quad (3.60)$$

sendo  $Re_L$  o número de Reynolds baseado na escala integral  $L$ .

A *DNS* resolve as equações de Navier-Stokes para todas as escalas do escoamento, das maiores e mais energéticas (impostas pela configuração e pela escala integral  $L$ ) até as menores (escala de Kolmogorov,  $\eta$ ). Porém, resulta num alto custo de cálculo computacional, pois o número de graus de liberdade é função do número de Reynolds. Segundo Silvestrini (2003)[130], na *DNS* de um escoamento turbulento tridimensional são necessários  $N_{GL} = n_x n_y n_z$  graus de liberdade, o que limita a aplicação da *DNS* a números de Reynolds da ordem de:

$$Re_L \sim (n_x n_y n_z)^{4/9}. \quad (3.61)$$

A *DNS* pode fornecer dados de referência em relação aos principais mecanismos que desempenham um papel no escoamento turbulento. O crescimento das capacidades computacionais e o desenvolvimento de processos de cálculo em paralelo são os principais elementos de estímulo para a utilização desta técnica, extendendo gradualmente a sua gama de aplicabilidade em problemas diversos [79, 83, 118].

## 3.8 Decomposição do domínio

O código Incompact3D programado em FORTRAN 90, inicialmente foi desenvolvido para processar cálculos em série e, recentemente, convertido para processos em paralelo usando a plataforma *Message Passing Interface - MPI* [80]. Esta versão em paralelo foi desenvolvida com o objetivo de proporcionar: portabilidade (capacidade de ser processado em uma ampla faixa de plataformas), escalabilidade (preservação da eficiência do código quando milhares de processadores são usados) e conservação da estrutura original (solução direta da equação de Poisson e uso de esquemas compactos de sexta ordem de precisão nas três direções espaciais) (Laiet *et al.*, 2010 [80]).

Para garantir a escalabilidade e manter a mesma estrutura do código, a estratégia da primeira versão de paralelização foi baseada no método de decomposição  $1D$ . O algoritmo é estruturado de forma que o domínio computacional é subdividido em subdomínios de mesmo tamanho e os cálculos de cada subdomínio é realizado por cada núcleo disponível no sistema. O domínio é primeiramente subdividido em blocos na direção  $z$  (Fig. 3.8a) e os cálculos de derivação e interpolação são realizados no plano  $xy$ . Posteriormente, realiza-se uma operação global de transposição, e em seguida, divide-se o subdomínio na direção  $y$  (Fig 3.8b), e desta forma os cálculos são processados no plano  $xz$ . Depois é executado uma operação de transposição inversa (Fig. 3.8a). Estas operações de transposição requerem transferência de informações, que é obtida utilizando a técnica de paralelismo  $MPI$ , permitindo um avanço significativo no tempo de processamento de cálculo.

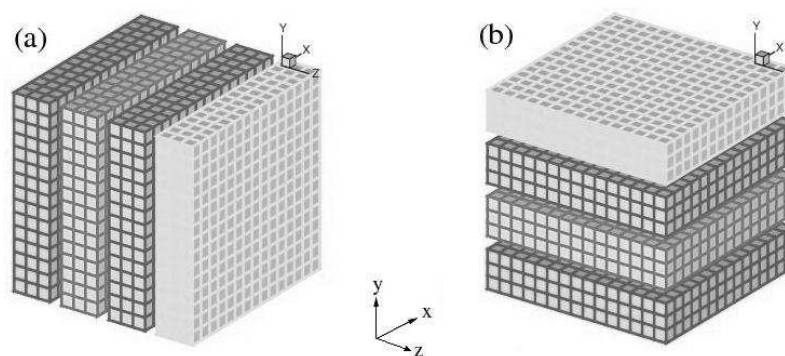


Figura 3.8: Ilustração esquemática da decomposição  $1D$  utilizando quatro processos  $MPI$ : (a) decomposição na direção  $z$ ; (b) decomposição na direção  $y$ .

A segunda versão de paralelização é baseada na decomposição do domínio em lâpis, também denominada decomposição  $2D$ . Esta técnica reduz drasticamente o tempo relógio das simulações, em comparação com a técnica de decomposição  $1D$ . Além disso, é compatível com esquemas implícitos no espaço, também utilizadas no *Incompact3D* (Laizet, 2010 [82]), e pode ser visto como uma extensão da estratégia de decomposição  $1D$ .

A figura 3.9 mostra que o domínio tridimensional pode ser particionado em duas dimensões. Os três níveis (a), (b) e (c), serão referenciados como lâpis- $X$ , lâpis- $Y$  e lâpis- $Z$ , respectivamente. Uma decomposição  $2D$  necessita executar operações globais para a transposição entre os três diferentes níveis. No código *Incompact3D* são utilizadas quatro operações globais de transposição:  $(a \rightarrow b)$ ,  $(b \rightarrow c)$ ,  $(c \rightarrow b)$  e  $(b \rightarrow a)$ . Esta técnica foi utilizada neste trabalho

para executar simulações tridimensionais da camada de mistura espacial.

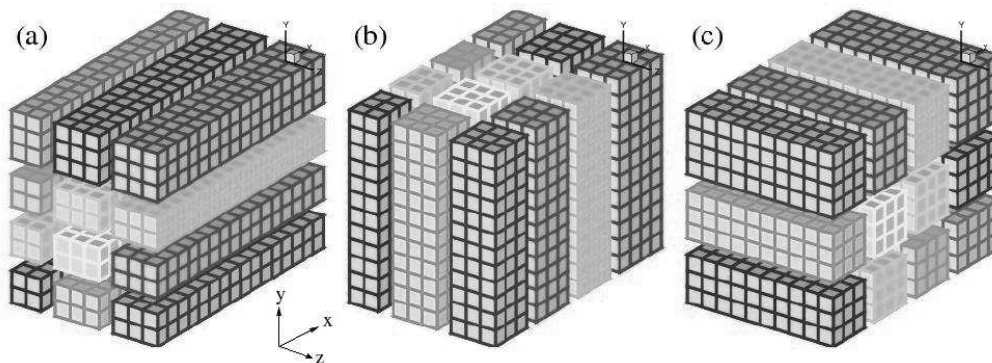


Figura 3.9: Ilustração esquemática da decomposição 2D utilizando 4x3 processos MPI.

Na figura 3.9, as divisões são designadas pelas dimensões  $P_{row} = 4$  e  $P_{col} = 3$ . Para uma malha de decomposição 2D com  $(P_{row} \times P_{col})$  processos,  $P_{row}$  grupos de  $P_{col}$  processos MPI necessitam trocar dados entre si para a transposição ( $a \leftrightarrow b$ );  $P_{col}$  grupos de  $P_{row}$  processos MPI também precisam intercambiar dados entre si para a transposição ( $b \leftrightarrow c$ ).

Por exemplo, na transposição ( $b \rightarrow c$ ) na figura 3.9, o processo MPI da primeira linha dos lápis-Y em (b), na direção x, troca informações com a primeira linha dos lápis-Z em (c) na mesma direção. Isto é possível através de comunicações em sub-grupos, reduzindo drasticamente o tempo gasto em comunicações globais. Por isso, não ocorre transposições nas direções ( $a \leftrightarrow c$ ), já que não se permite comunicações em sub-grupos e as implementações das rotinas de comunicações são muito sensíveis às orientações dos lápis.

Computadores de última geração são necessários para a eficiente utilização do código. Devem ter capacidade de realizar o processamento dos cálculos com um alto poder de desempenho. Segundo Laizet *et al.* (2010)[80] a quantidade de memória necessária para uma simulação pode ser estimada em função do número de matrizes 3D alocadas pelo código. No Incompact3D paralelizado são necessárias em torno de 43 matrizes 3D. A quantidade de memória necessária,  $A_m$ , (em Gb) numa simulação, pode então ser estimada por:

$$A_m \approx N_a S_d \frac{n_x n_y n_z}{2^{30}}, \quad (3.62)$$

sendo  $N_a$  o número de matrizes 3D e  $S_d$  o número de bytes para representação de um número real.

No trabalho de Laizet *et al.*, (2010) [80] são encontrados resultados relacionados a escalabilidade, eficiência e custo computacional, relativos a simulações em várias plataformas e para diferentes quantidades de processadores. Utilizando o código `Incompact3D` na sua forma paralelizada, foram realizadas simulações em várias plataformas e para diferentes quantidades de processadores. Para a medição da escalabilidade e eficiência do código, os autores utilizaram dois parâmetros. O fator speedup  $S_f$  é definido por:

$$S_f(c_{used}) = \frac{T(c_{ref})}{T(c_{used})}, \quad (3.63)$$

onde  $T(c_{ref})$  é o tempo decorrido na simulação com um número  $c_{ref}$  de núcleos computacionais correspondentes à simulação de referência. A memória disponível para um núcleo computacional é diferente em cada plataforma. Logo,  $c_{ref}$  é o número mínimo de núcleos necessários para rodar uma simulação utilizando o máximo de memória disponível em cada um destes núcleos. O termo  $T(c_{used})$  é o tempo decorrido numa simulação com  $c_{used}$  núcleos computacionais utilizados.

O segundo parâmetro é o fator de eficiência  $E_f$  (Laizet *et al.*, (2010) [80]), que mensura a eficiência do código e é definido por:

$$E_f(c_{used}) = \frac{S_f(c_{used})}{c_{used}/c_{ref}}, \quad (3.64)$$

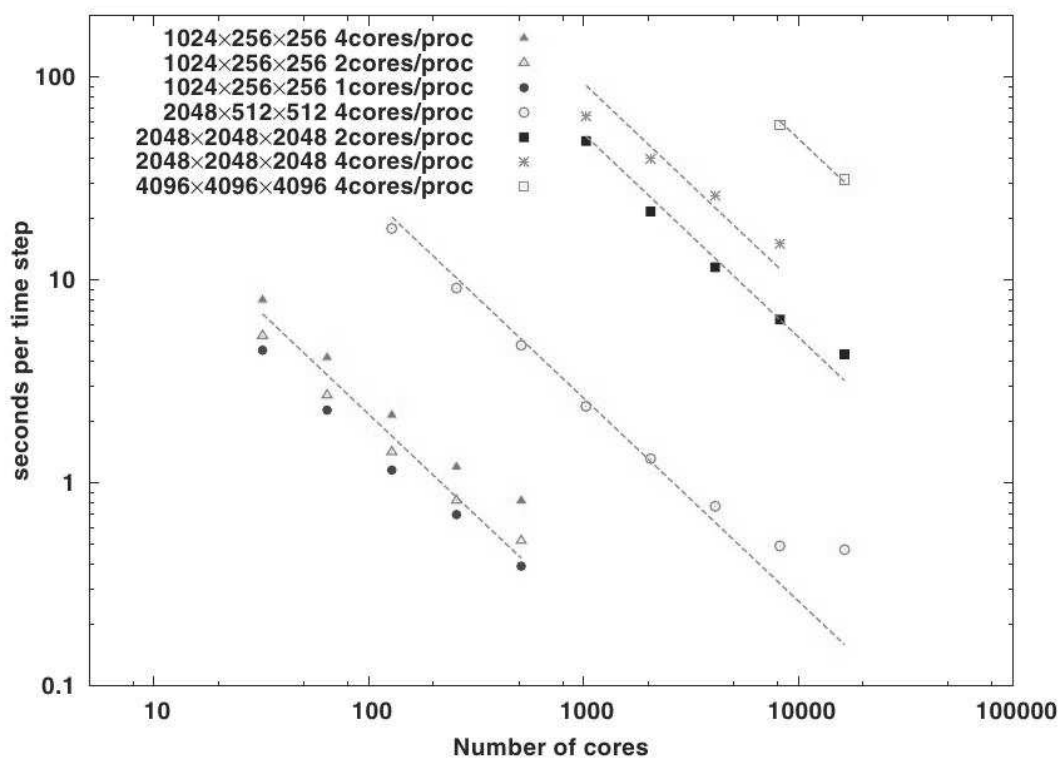
Os parâmetros utilizados nos testes realizados por Laizet *et al.* (2010)[82], com a nova técnica de paralelização 2D, são apresentados na Tab. 3.3. Tais testes foram realizados em quatro diferentes plataformas: HECTOR instalada no Reino Unido, JADE na França e Jugene na Alemanha. Uma descrição detalhada destas plataformas podem ser encontradas em Laizet *et al.* (2010)[82]. Para as plataformas HECTOR, Jugene e JADE, foi possível utilizar  $8192^3$  nós da malha (aproximadamente 550 bilhões de nós) nas simulações.

Os resultados de escalabilidade das simulações realizadas com o `Incompact3D`, correspondente à plataforma HECTOR, são comparados com o resultado ideal (linha tracejada) e apresentados na Fig. 3.10. Para uma malha de  $512^3$  nós e usando 1024 núcleos, o código `Incompact3D` apresentou menor tempo de simulação quando se utiliza  $P_{row} \cong P_{col}$ .

Tabela 3.3: Parâmetros das simulações investigadas (Laizet *et al.* (2010)[82]).

$(n_x, n_y, n_z)$	Núcleos computacionais	Plataforma
(512, 512, 512)	1024	JADE, HECTOR, Jugene
(1024, 256, 256)	32 $\rightarrow$ 512	HECTOR
(2048, 512, 512)	128 $\rightarrow$ 4096	JADE
(2048, 512, 512)	128 $\rightarrow$ 16384	HECTOR
(2048, 512, 512)	1024 $\rightarrow$ 131072	Jugene
(2048, 2048, 2048)	1024 $\rightarrow$ 16384	HECTOR
(2048, 2048, 2048)	2048 $\rightarrow$ 131072	Jugene
(4096, 4096, 2048)	131072 $\rightarrow$ 262144	Jugene
(4096, 4096, 4096)	8192 $\rightarrow$ 16384	HECTOR

As simulações com menor número de núcleo por processador, para um mesmo tamanho de malha, apresentaram menores tempos de simulação. O mesmo ocorreu para as outras plataformas (JADE e Jugene).

Figura 3.10: Gráfico do Speedup na plataforma HECTOR (Laizet *et al.* (2010)[82]).

No presente trabalho, as primeiras simulações foram executadas no servidor CLARO, uma estação com dois processadores Quad-Core Intel Xeon 1.6 GHz, 4GB RAM, e performance de



42,28 GFlops, o qual permite a divisão da simulação em 4 processos simultâneos. A quantidade de memória necessária para uma simulação com 15,64 milhões de pontos é  $Am = 5,36\text{GB}$ , mas o servidor CLARO conta com 4GB de memória RAM, a qual não é suficiente para comportar uma simulação deste nível se utilizados todos os núcleos dos processadores. Em função disto o resultado da eficiência para a simulação com 8 núcleos é da ordem de 50% da eficiência ideal.

Para o problema tridimensional em destaque, camada de mistura em desenvolvimento espacial, exigirá uma malha de 52 milhões de pontos, sendo necessário a utilização do Centro de Super Computação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CESUP/UFRGS). Mais detalhes desta plataforma será comentado no capítulo 4.

O programa `Incompact3d` utiliza como compilador o `gfortran`, e para a paralelização o aplicativo `OpenMPI 1.4.2`. Para a solução das equações é necessário ainda o pacote de transformadas `fftw 2.1.5` que realiza as transformadas de Fourier no espaço espectral.

### 3.9 Identificação das estruturas coerentes

Uma estrutura coerente é definida como uma região do espaço de alta concentração de vorticidade, que conserva uma forma definida durante um tempo de vida  $T_c$  superior ao seu tempo de rotação  $\omega^{-1}$  e possui a propriedade de sensibilidade às condições iniciais, ou seja, imprevisível (Lesieur, (1997) [89]). A escolha do melhor método para identificação destas altas concentrações de vorticidade depende das estruturas que se queiram destacar em uma simulação. Neste trabalho, são utilizados o critério da vorticidade e o critério  $Q$ .

A vorticidade é dada por

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \omega_x \vec{i}_x + \omega_y \vec{i}_y + \omega_z \vec{i}_z. \quad (3.65)$$

As estruturas coerentes nas simulações bidimensionais são visualizadas através da vorticidade transversal

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.66)$$

As visualizações tridimensionais são representadas graficamente através das isosuperfícies

do módulo da vorticidade

$$\|\vec{\omega}\| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (3.67)$$

onde as isosuperfícies são determinadas para  $\|\vec{\omega}\| = A$ , sendo que o valor de  $A$  define a isosuperfície que melhor representa a estrutura coerente. As regiões de alta vorticidade, em geral, correspondem a locais de estruturas coerentes, mas podem corresponder a zonas de alto cisalhamento, sem qualquer estrutura. A visualização por meio do módulo da vorticidade destaca vórtices de escalas intermediárias de acordo com o parâmetro  $A$ . Assim, o critério do módulo da vorticidade, embora usado com sucesso em escoamentos cisalhantes livres, pode ser inconveniente se o cisalhamento é comparável à magnitude da vorticidade dentro da estrutura [63].

Uma outra técnica de identificação das estruturas coerentes é o critério  $Q$  [63], que se caracteriza na observação do segundo invariante do tensor gradiente de velocidade ( $\vec{\nabla}\vec{u}$ ). O valor de  $Q$  pode ser expresso por:

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (3.68)$$

onde

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.69)$$

e

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.70)$$

são, respectivamente, as componentes anti-simétrica e simétrica do tensor gradiente de deformação. Assim,  $Q$  é o balanço entre a taxa de rotação  $\Omega_{ij}\Omega_{ij}$  e a taxa de deformação  $S_{ij}S_{ij}$ . Se o valor de  $Q$  é positivo, a taxa de rotação é maior que a taxa de deformação, indicando uma zona turbilhonar no escoamento. Na Figura 3.11 são apresentados exemplos do campo instantâneo das isosuperfícies do módulo da vorticidade ( $\|\vec{\omega}\| = 1.2$ ) e do critério  $Q$  ( $Q = 0.05$  e  $Q = 0.15$ ). A Figura 3.11c, para o valor  $Q = 0.15$ , isola melhor a região turbilhonar da camada de mistura.

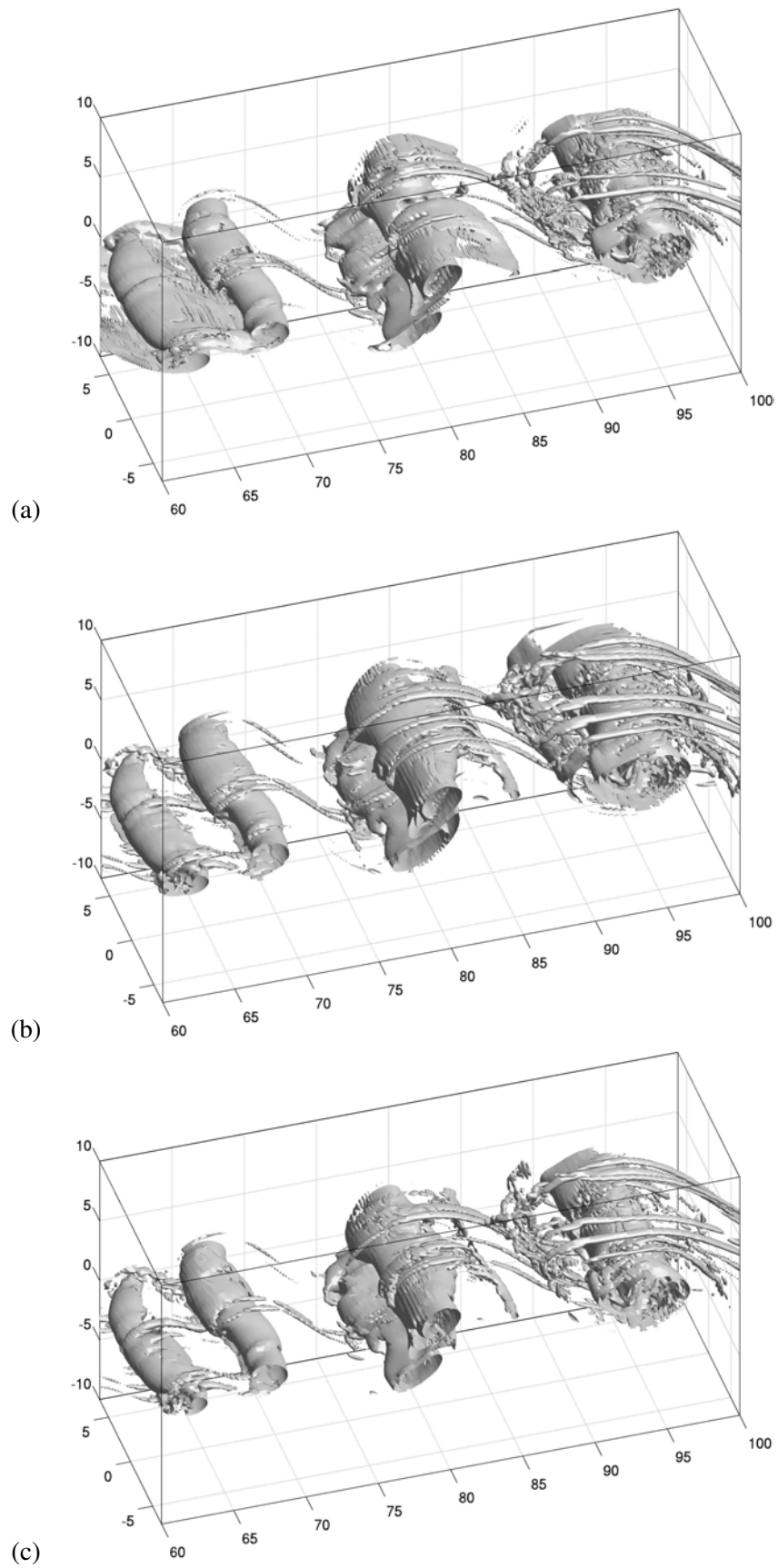


Figura 3.11: Comparação entre os critérios de identificação das estruturas coerentes. (a) Isosuperfície de  $\|\omega\| = 1.2$ ; (b) isosuperfície de  $Q = 0.05$ ; (c) isosuperfície de  $Q = 0.15$ .

# Capítulo 4

## Análise de estabilidade linear

O objetivo deste trabalho é compreender como as perturbações infinitesimais se amplificam em uma camada de mistura estratificada com efeitos de declividade. São apresentados resultados de testes numéricos com variação do número de Richardson e da declividade. Para tal fim, utiliza-se o código computacional *Incompact3d*, descrito no capítulo anterior, para resolver as equações que descrevem um escoamento incompressível. Inicialmente é realizada a análise de estabilidade linear utilizando operadores diferenciais de Chebyshev. Em seguida, utiliza-se o código *Incompact3d* para modelar uma camada de mistura estratificada em desenvolvimento temporal e, posteriormente, compara-se com os resultados via operador de Chebyshev. Nos capítulos seguintes são apresentados os resultados das simulações em desenvolvimento espacial em domínios bidimensional e tridimensional.

### 4.1 Equações

Os resultados a seguir servem como base de validação do código numérico. Serão apresentados os resultados da análise de estabilidade linear utilizando aproximação de Chebyshev e *DNS*, e posteriormente, comparados com as referências [55, 101].

Em escoamentos cisalhantes livres, as perturbações bidimensionais tornam-se instáveis antes das tridimensionais (Drazin & Reid, 1989 [38]), e, de acordo com o Teorema de Squire, para cada perturbação tridimensional existe uma perturbação bidimensional com maior taxa de amplificação (Criminale, 2003 [32]; Drazin & Reid, 1989 [38]). Desta forma, a análise de

estabilidade será baseada em um modelo bidimensional.

Para o estudo da análise de estabilidade, assume-se que o escoamento base é invariante na direção principal do escoamento e que a componente vertical da velocidade base é nula,  $\bar{v} = 0$ .

Decompondo as variáveis em uma parte base mais uma perturbação, obtém-se:

$$u(x, y, t) = \bar{u}(y) + u'(x, y, t), \quad (4.1)$$

$$v(x, y, t) = v'(x, y, t), \quad (4.2)$$

$$p(x, y, t) = P(y) + p'(x, y, t), \quad (4.3)$$

$$\rho(x, y, t) = \bar{\rho}(y) + \rho'(x, y, t). \quad (4.4)$$

Substituindo as expressões (4.1) a (4.4) nas equações bidimensionais da continuidade, da quantidade de movimento, e de transporte-difusão, descritas respectivamente por

$$u_x + v_y = 0, \quad (4.5)$$

$$u_t + uu_x + vv_y = -p_x + \frac{1}{Re} (u_{xx} + u_{yy}) + Ri_H \rho \operatorname{sen}\theta, \quad (4.6)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -p_y + \frac{1}{Re} (v_{xx} + v_{yy}) - Ri_H \rho \operatorname{cos}\theta, \quad (4.7)$$

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y = \frac{1}{RePr} (\rho_{xx} + \rho_{yy}), \quad (4.8)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o eixo axial da camada de mistura e a horizontal (Fig. 3.2).

Do sistema de equações resultante (Eq. 4.5 a Eq. 4.8), subtrai-se as equações do escoamento base e desprezam-se os termos viscosos ( $Re \rightarrow \infty$ ). Desta forma, obtém-se as equações para as perturbações:

$$u'_x + v'_y = 0, \quad (4.9)$$

$$u'_t + \bar{u}u'_x + v'\bar{u}_y + [u'u'_x + v'u'_y] = -p'_x + Ri_H \rho' \operatorname{sen}\theta, \quad (4.10)$$

$$v'_t + \bar{u}v'_x + [u'v'_x + v'v'_y] = -p'_y - Ri_H \rho' \operatorname{cos}\theta, \quad (4.11)$$

$$\rho'_t + \bar{u}\rho'_x + v'\bar{\rho}_y + [u'\rho'_x + v'\rho'_y] = 0. \quad (4.12)$$

Os termos entre colchetes são termos não lineares. Assumindo-se que as amplitudes das perturbações são pequenas, pode-se desprezar os termos não lineares. Como as equações resultantes são lineares e os coeficientes das equações não dependem de  $t$  e  $x$ , busca-se soluções por separação de variáveis na forma de modo normal:

$$u'(x, y, t) = \hat{u}(y)\exp[j\alpha(x - ct)], \quad (4.13)$$

$$v'(x, y, t) = \hat{v}(y)\exp[j\alpha(x - ct)], \quad (4.14)$$

$$p'(x, y, t) = \hat{p}(y)\exp[j\alpha(x - ct)], \quad (4.15)$$

$$\rho'(x, y, t) = \varphi(y)\exp[j\alpha(x - ct)]. \quad (4.16)$$

As Equações 4.13 a 4.16 indicam que as perturbações se propagam como ondas com comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/\alpha$ , frequência  $\omega$ , celeridade da onda  $c = \omega/\alpha$  e amplitudes  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{p}$  e  $\varphi$ . Substituindo-se as equações 4.13 a 4.16 nas equações Eq. 4.9 a Eq. 4.12, obtém-se:

$$j\alpha\hat{u} + \hat{v}_y = 0, \quad (4.17)$$

$$j\alpha(\bar{u} - c)\hat{u} + \bar{u}_y\hat{v} + j\alpha\hat{p} = Ri_H\varphi\text{sen}\theta, \quad (4.18)$$

$$j\alpha(\bar{u} - c)\hat{v} + \hat{p}_y = -Ri_H\varphi\text{cos}\theta, \quad (4.19)$$

$$j\alpha(\bar{u} - c)\varphi + v'\bar{\rho}_y = 0. \quad (4.20)$$

O sistema de equações, Eq. 4.17 a Eq. 4.20, pode ser simplificado, derivando-se a Eq. 4.18 em relação a  $y$  e subtraindo-se o resultado da Eq. 4.19 multiplicada por  $j\alpha$ . Utilizando a equação da continuidade (Eq. 4.17), elimina-se  $\hat{u}$  da equação resultante. A seguinte equação é uma equação diferencial para as variáveis dependentes  $\hat{v}$ ,  $\varphi$  e  $\varphi_y$ :

$$(\bar{u} - c)(\hat{v}_{yy} - \alpha^2\hat{v}) - \bar{u}_{yy}\hat{v} + (j\alpha)Ri_H\varphi\text{cos}\theta + Ri_H\varphi_y\text{sen}\theta = 0. \quad (4.21)$$

A função corrente representada por modo normal é dada por

$$\psi(x, y, t) = \phi(y)exp[j\alpha(x - ct)], \quad (4.22)$$

onde  $\psi$  é definido de modo que

$$u'(x, y, t) = \psi_y, \quad (4.23)$$

$$v'(x, y, t) = -\psi_x. \quad (4.24)$$

Utilizando a Eq. 4.22 chega-se em

$$v'(x, y, t) = -j\alpha\phi(y)exp[j\alpha(x - ct)], \quad (4.25)$$

e, igualando as equações 4.14 e 4.25, o termo  $\hat{v}$  fica:

$$\hat{v}(y) = -j\alpha\phi(y). \quad (4.26)$$

Substituindo a Eq. 4.25 na Eq. 4.20, encontra-se  $\varphi$  e  $\varphi_y$ , dados por

$$\varphi = \frac{\bar{\rho}_y}{\bar{u} - c}\phi, \quad (4.27)$$

$$\varphi_y = \frac{1}{\bar{u} - c} \left[ \bar{\rho}_y\phi_y + \rho_{yy}\phi - \frac{\bar{\rho}_y\bar{u}_y}{\bar{u} - c}\phi \right]. \quad (4.28)$$

A equação final na variável dependente  $\phi(y)$  é deduzida substituindo as equações 4.26, 4.27 e 4.28 na Eq. 4.21, obtendo-se:

$$(\phi_{yy} - \alpha^2\phi) - \frac{u_{yy}}{(u - c)}\phi - Ri_H \cos\theta \frac{\rho_y}{(u - c)^2}\phi - \frac{Ri_H \sin\theta}{j\alpha(u - c)^2} \left[ \rho_{yy}\phi - \frac{\rho_y u_y}{u - c}\phi + \rho_y\phi_y \right] = 0, \quad (4.29)$$

onde a barra sobre as variáveis foi eliminada para simplificar a notação. A equação 4.29 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem para a variável  $\phi$ , e refere-se a um escoamento bidimensional, estratificado, cisalhante, não-viscoso, incompressível e paralelo a uma superfície plana e inclinada (Fig. 3.2). Quando  $Ri_H = 0$ , a Eq. 4.29 é denominada equação de *Rayleigh*, e se  $\theta = 0$ , a Eq. 4.29 é chamada de equação de *Taylor-Golstein* (Eq. 2.12). Os perfis para a

velocidade  $u(y)$  e a densidade  $\rho(y)$  utilizados na análise, são do tipo tangente hiperbólica.

A Equação (4.29) resulta em um problema de autovalores. Por se tratar de uma análise de estabilidade linear em uma configuração temporal, considera-se  $\alpha = \alpha_r$  (real) e  $c = c_r + jc_i$  (complexo), onde  $c_r = u(y = 0)$ . A taxa de amplificação nesta configuração é dada por  $\omega_i = \alpha_r c_i$ , onde  $c_i$  e  $\alpha_r$  são positivos.

Especificado o parâmetro  $\alpha$ , encontra-se o autovalor  $c$ . Seguindo esta idéia, a relação  $c = f(\alpha)$  é denominada *relação de dispersão*. Esta relação, a partir da Eq. (4.29), pode ser representada da forma polinomial:

$$(A - cB)X = 0. \quad (4.30)$$

A Eq. 4.30 é denominada problema de autovalor generalizado (Demmel, 1997 [34]), em que  $c$  é o autovalor de  $A - cB$ . Por definição [34], os autovalores de  $A - cB$  são as raízes do polinômio característico  $p(c) = \det(A - cB) = 0$ . Portanto, os autovalores de  $A - cB$  são os mesmos de  $AB^{-1}$  ou  $B^{-1}A$ , desde que a matriz  $B$  seja não singular.

No caso do problema de autovalor generalizado, que em inglês é denominado *Generalized Eigenvalue Problem (GEP)*, os métodos são aplicados à matriz  $AB^{-1}$ , quando esta é não singular. O método *QZ*, que será apresentado logo a seguir, difere neste sentido pois trata-se de um método a ser aplicado às matrizes  $A$  e  $B$  (Golub & Van Loan, 1996).

O método *QZ* [50] fundamenta-se no *Teorema Generalizado de Schur*: se  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , então existem matrizes unitárias  $Q, Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e matrizes triangulares superiores  $A', B' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , de tal maneira que  $A' = Q^*AZ$  e  $B' = Q^*BZ$  são triangulares superiores. Os números  $\gamma_{A_i}/\gamma_{B_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) são os autovalores de  $A - cB$ , sendo  $\gamma_{A_i}$  e  $\gamma_{B_i}$ , os autovalores associados às matrizes  $A'$  e  $B'$ , respectivamente. Por convenção,  $\gamma_{A_i}/\gamma_{B_i} \rightarrow \infty$  quando  $\gamma_{B_i} = 0$ .

A matriz  $Q^*$  é denominada matriz transposta conjugada, isto é,  $Q^*$  é formada pelo complexo conjugado de cada elemento da matriz transposta  $Q^T$ . Se  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , então existem matrizes  $Q$  e  $Z$  ortogonais, tais que  $A'$  é uma matriz quase-triangular superior e  $B'$  é uma matriz triangular superior. Neste caso,  $A'$  contém uma diagonal não nula abaixo da diagonal principal.

A solução para a Eq. (4.30) pode ser obtida pela função do MATLAB:  $\text{eig}(A, B, 'qz')$ , onde  $qz$  representa o método *QZ*.



## 4.2 Solução por operadores Diferenciais de Chebyshev

A teoria dos polinômios ortogonais tem aplicações relevantes em várias áreas das Ciências Exatas. Essa teoria é fundamental para as soluções de diversos problemas relacionados ao estudo de Equações Diferenciais, Estabilidade Numérica, Processamento de Sinais, entre outros. Dentre os polinômios ortogonais, as aproximações de Chebyshev podem ser utilizadas para resolver problema de autovalores.

Um problema clássico de autovalores, em estabilidade hidrodinâmica, é a resolução da equação de *Orr-Sommerfeld*, em que Orszag em 1971 [110], utilizando polinômios de Chebyshev e aproximações por diferenças finitas, determinou o número de Reynolds crítico ( $Re_{crit} = 5772$ ) para o escoamento de Poiseuille plano, por meio da análise de estabilidade linear. Gelfgat & Kit (2006) [45], através das aproximações de Chebyshev, estudaram a instabilidade temporal e espacial de uma camada de mistura estratificada, com número de Prandtl  $Pr = 9$ , e um perfil de velocidade cuja espessura é maior que a espessura da camada de temperatura ( $\delta_i = 3\delta_{temp}$ ). Através de análises inviscida e viscosa, os autores [45] compararam as características das instabilidades de Kelvin-Helmholtz e Holmboe.

O algoritmo implementado neste trabalho, adaptado de Trefethen (2000) [154], foi bastante eficiente na resolução da equação de *Orr-Sommerfeld*. A coordenada definida por esta técnica utiliza a formulação de Gauss-Lobatto,

$$\hat{y}_j = \cos(j\pi/N), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (4.31)$$

sendo  $N$  um número inteiro positivo e  $-1 \leq \hat{y}_j \leq 1$ .

Os polinômios de Chebyshev de grau  $k$  são definidos por

$$T_k(\hat{y}) = \cos(k \cos^{-1} \hat{y}), \quad (4.32)$$

e pelo modo recursivo estes polinômios podem ser obtidos da seguinte forma

$$T_{k+1}(\hat{y}) = 2yT_k(\hat{y}) - T_{k-1}(\hat{y}), \quad k \geq 1, \quad (4.33)$$

onde  $T_0(\hat{y}) = 1$ .

Para o cálculo da derivada primeira é utilizado o operador diferencial de Chebyshev,  $D_C$ , definido por

$$(D_C)_{00} = -(D_C)_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \tag{4.34}$$

$$(D_C)_{jj} = \frac{-\hat{y}_j}{2(1 - \hat{y}_j^2)}, \quad j = 1, \dots, N - 1, \tag{4.35}$$

$$(D_C)_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j (\hat{y}_i - \hat{y}_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, N, \tag{4.36}$$

onde  $c_0 = c_N = 2$  e  $c_j = 1$ , para  $j = 1, \dots, N - 1$ . Portanto, a derivada de  $f(y_i)$  torna-se

$$f'_i = \sum_{j=1}^N (D_C)_{ij} f_j, \quad i = 0, \dots, N. \tag{4.37}$$

A Figura 4.1 representa a forma matricial do operador diferencial  $D_C$ , definida pelas equações 4.34, 4.35 e 4.36, e utilizada na resolução do problema de autovalores.

$$D_C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2 + 1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{2(-1)^j}{1 - \hat{y}_j} & \\ \hline & & \frac{(-1)^{i+j}}{\hat{y}_i - \hat{y}_j} \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1 - \hat{y}_i} & \frac{-\hat{y}_j}{2(1 - \hat{y}_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1 + \hat{y}_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{\hat{y}_i - \hat{y}_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1 + \hat{y}_j} & -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Figura 4.1: Representação matricial do operador diferencial  $D_C$  (Trefethen, 2000 [154]).

Os perfis utilizados nesta análise foram do tipo tangente hiperbólico, com variação de Richardson entre  $0 \leq Ri_H \leq 0.30$ . O domínio computacional para a coordenada genérica  $y$  é

definido por  $y = L_C \hat{y}$ . Neste caso,  $y \in [-L_C, L_C]$ , onde o comprimento  $L_C = 10$  foi escolhido de modo que os resultados são independentes do aumento adicional no seu valor.

### 4.3 Equação de *Rayleigh*

A equação de *Rayleigh*, que trata de um escoamento não viscoso e não estratificado ( $Ri_H = 0$ ), foi examinada detalhadamente por Michalke (1964 [101]) e Hazel (1972 [55]). Esta equação representada por

$$(u - c)(\phi_{yy} - \alpha^2 \phi) - u'' \phi = 0, \quad (4.38)$$

pode ser escrita na forma matricial como:

$$(A_R - cB_R)\phi = 0, \quad (4.39)$$

onde

$$A_R = -u_{yy} + uD_\alpha^2, \quad (4.40)$$

$$B_R = D_\alpha^2, \quad (4.41)$$

sendo,  $D_C^2 = D_C D_C$ , o operador diferencial de segunda ordem,  $I$  a matriz identidade, e  $\phi$  a autofunção. O outro operador diferencial definido a partir do operador de Chebyshev é da forma

$$D_\alpha^2 = D_C^2 - \alpha_r^2 I. \quad (4.42)$$

Assim, as matrizes  $A_R$  e  $B_R$  são matrizes reais de dimensões  $N \times N$ , onde  $N = 500$ .

A Figura 4.2 apresenta a análise de estabilidade para a equação de *Rayleigh*, onde os perfis de velocidade axial utilizados foram  $u(y) = -\tanh(y)$  [55] e  $u(y) = 0.5[1 - \tanh(y)]$  [101]. Para cada  $\alpha_r$  no intervalo  $[0, 1]$ , foram encontrados os autovalores  $c = c_r + jc_i$  ( $j = \sqrt{-1}$ ), e estes foram selecionados de modo que a parte real satisfaça a condição  $c_r = u(y = 0)$ , e a parte imaginária ( $c_i$ ) é tal que  $c_i > 0$  e a taxa  $\omega_i = \alpha_r c_i$  seja máxima. A Figura 4.3 apresenta os autovalores  $c$  para o modo mais amplificado  $\alpha_r = 0.4455$  e destaca um par de complexos  $-6.5 \times 10^{-9} \pm 0.4257j$ , cuja parte imaginária positiva,  $c_i = 0.4257$ , é a solução do problema de

autovalor (Eq. 4.39).

Os números de onda mais amplificados ( $\alpha_r$ ) e suas correspondentes taxas ( $\omega_i$ ) são apresentados na Tab. 4.1. Nota-se que as taxas máximas de amplificação determinadas nas análises estão próximas das referências [55, 101], com erro máximo de 0.03%.

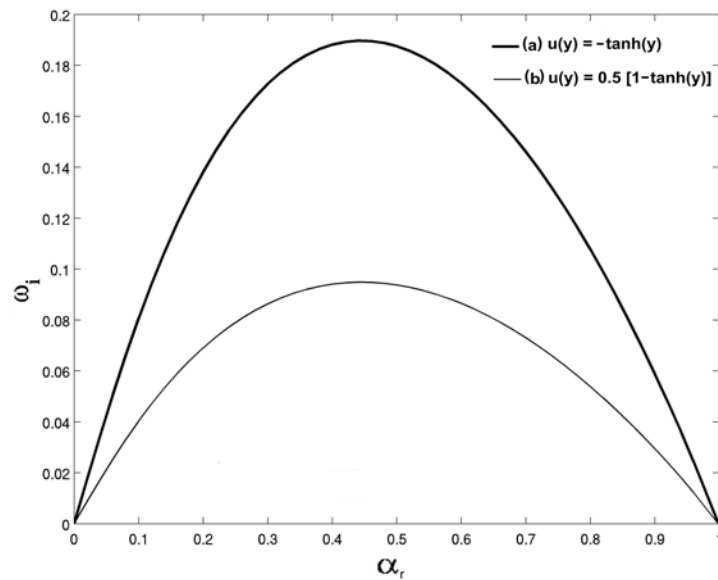


Figura 4.2: Análise de estabilidade da equação de Rayleigh ( $Ri_H = 0$ ): (a) perfil  $u(y) = -\tanh(y)$  [55]; (b) perfil  $u(y) = 0.5[1 - \tanh(y)]$  [101].

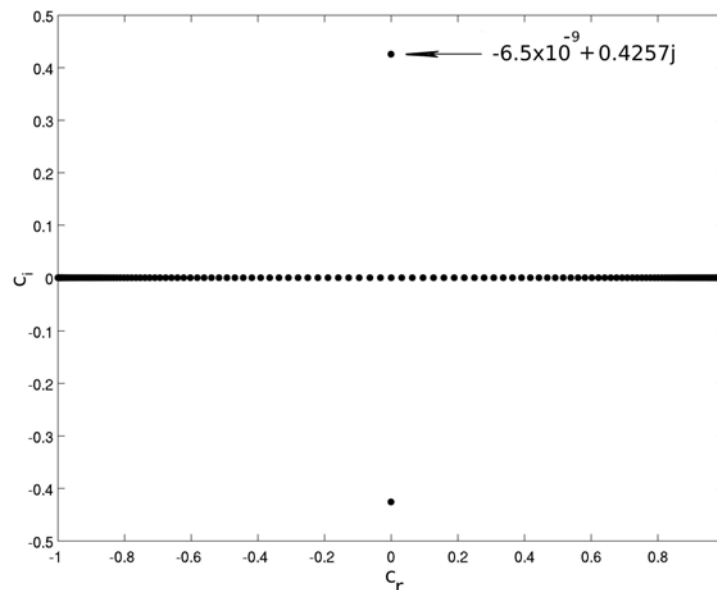


Figura 4.3: Autovalores  $c = c_r + jc_i$  para o caso em que  $Ri_H = 0$ , utilizando o perfil  $u(y) = -\tanh(y)$  [55]. Destaque para o modo mais amplificado quando  $\alpha_r = 0.4455$  e  $c_i = 0.4257$ .

Tabela 4.1: Comparação da taxa de amplificação com os valores de referência (*Hazel*, 1972 [55], *Michalke*, 1964 [101],  $Ri_H = 0$ ).

Perfil		Análise	Valor Ref.	Erro
$u(y) = -\tanh(y)$ [55]	$\alpha_r$	0.4455	0.4440	
	$\omega_i$	0.18964	0.18970	-0.03%
$u(y) = 0.5[1 - \tanh(y)]$ [101]	$\alpha_r$	0.4455	0.4446	
	$\omega_i$	0.09483	0.09485	-0.02%

## 4.4 Equação de *Taylor-Goldstein*

Na próxima análise será incluído o número de Richardson,  $0 \leq Ri_H \leq 0.20$ , e para os perfis de velocidade e densidade será empregado  $u = \rho = -\tanh(y)$ . A equação que identifica este modelo é a equação de *Taylor-Goldstein* (Eq. 2.12), que pode ser representada da forma polinomial

$$P(c) = (P_0 + P_1c + P_2c^2)\phi = 0, \quad (4.43)$$

onde

$$P_0 = u^2 D_\alpha^2 - Ri_H \rho_y - uu_{yy}, \quad (4.44)$$

$$P_1 = -2uD_\alpha^2 + u_{yy}, \quad (4.45)$$

$$P_2 = D_\alpha^2, \quad (4.46)$$

sendo,  $P_0, P_1, P_2$ , matrizes reais. A Equação 4.43 representa um problema de autovalores quadráticos, onde  $c$  é o autovalor quadrático. O problema (Eq. 4.43) surge em várias aplicações, incluindo dinâmica estrutural [162], vibração [126] e engenharia sísmica [24]. De acordo com Tisseur & Meerbergen (2001 [153]), este problema pode ser convertido em um problema de autovalores generalizados (Eq. 4.30), da seguinte maneira

$$\begin{cases} \Gamma - c\phi = 0, \\ P_0\phi + P_1\Gamma + P_2\Gamma c = 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Reescrevendo a Eq. (4.47) na forma de blocos de operadores:

$$(A_T - cB_T)X = \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P_0 & -P_1 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi \\ \Gamma \end{bmatrix} = 0, \quad (4.48)$$

tem-se uma linearização de  $P(c)$ , para o sistema (Eq. 4.48) de tamanho  $2N \times 2N$ , onde  $N = 500$ . A expressão entre parêntese é denominada primeira forma da matriz companheira. Segundo Tisseur & Meerbergen (2001) [153] e Scotti (2007) [126], existem outras formas de representação da matriz companheira para resolver o problema de autovalores generalizados.

Como o interesse é nos modos mais amplificados, não há necessidade de avaliar o espectro completo do número de onda para o caso estratificado (Eq. 2.12), como foi apresentado na análise anterior. Na Tab. 4.2, estão apresentados os números de onda e as taxas máximas de amplificação para cada número de Richardson ( $Ri_H$ ). Estas apresentam erros na ordem de  $10^{-4}$ , comparando-se a solução utilizando operadores de Chebyshev e a referência [55].

Tabela 4.2: Comparação da taxa de amplificação (Eq. 2.12) com o valor de referência (Hazel, 1972 [55]). Caso  $0 \leq Ri_H \leq 0.2$ .

$Ri_H$	$\alpha$	$\omega_i$ Oper. de Chebyshev	$\omega_i$ Valor Ref. [55]
0	0.4455	0.1896	0.1897
0.01	0.4447	0.1837	0.1838
0.05	0.4425	0.1592	0.1594
0.1	0.4437	0.1259	0.1259
0.15	0.4523	0.0888	0.0889
0.2	0.4700	0.0471	0.0472

A Figura 4.4 apresenta os autovalores  $c = c_r + jc_i$ , dado o número de onda mais amplificado  $\alpha = \alpha_r$  para cada número de Richardson,  $Ri_H$ , conforme Tab. 4.2. As soluções ( $c$ ) do problema de autovalor generalizado (Eq. 4.48), cuja taxa é máxima, apresentam a parte real,  $c_r$ , com valores na ordem de  $10^{-8}$ , conforme é destacado na Fig. 4.4. Resultado este esperado, pois de acordo com o perfil de velocidade, tem-se  $c_r = u(0) = 0$ . A Fig. 4.5 é uma ampliação da Fig. (4.4). Nota-se que a medida que  $c \rightarrow jc_i$ , a parte imaginária ( $c_i$ ) cresce de acordo com o aumento do número de Richardson.

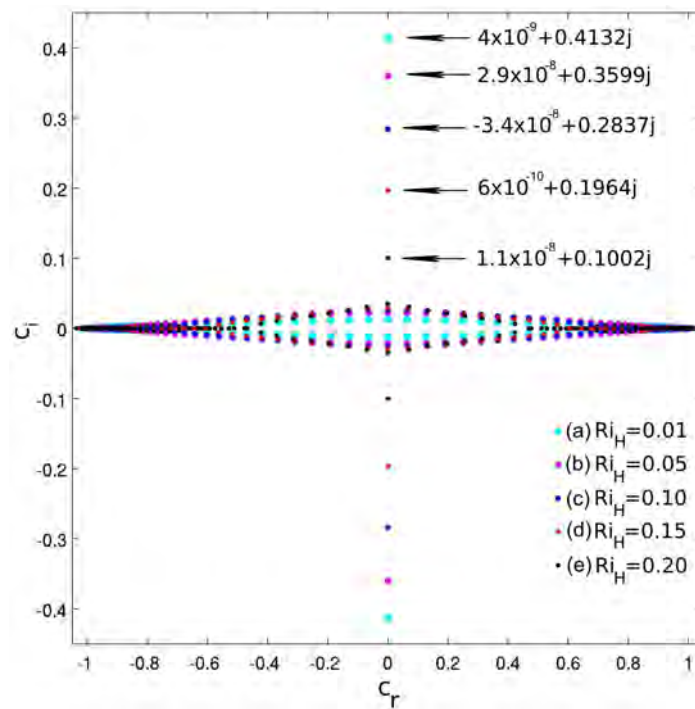


Figura 4.4: Autovalores  $c = c_r + jc_i$  para os comprimentos de onda mais amplificados (Tab. 4.2). Casos em que  $Ri_H > 0$ .

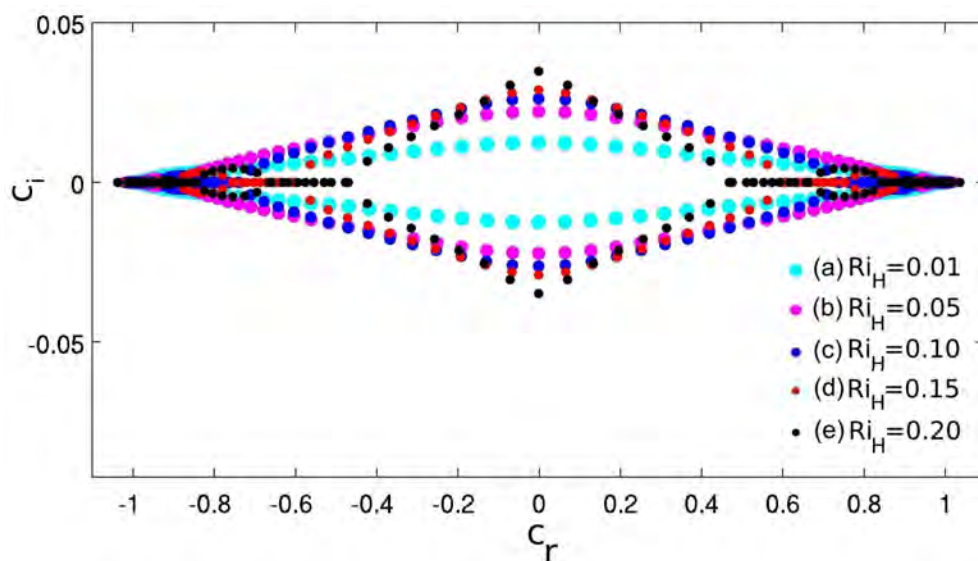


Figura 4.5: Ampliação da Fig. 4.4 próxima da região  $c_i = 0$ .

## 4.5 Inclusão da estratificação e da declividade

Ao incluir a declividade  $\theta$  (Fig. 3.2), considera-se a Eq. 4.29 na análise de estabilidade linear. Na forma matricial, a Eq. 4.29 pode ser representada por,

$$(P_0 + P_1c + P_2c^2 + P_3c^3)\phi = 0, \quad (4.49)$$

onde

$$P_0 = u^3 D_\alpha^2 - u^2 u_{yy} - Ri_H \cos\theta \rho_y u + (j/\alpha) Ri_H \sin\theta [u \rho_{yy} + u \rho_y D_C - \rho_y u_y], \quad (4.50)$$

$$P_1 = -3u^2 D_\alpha^2 + 2uu_{yy} + Ri_H \cos\theta \rho_y - (j/\alpha) Ri_H \sin\theta [\rho_{yy} + \rho_y D_C], \quad (4.51)$$

$$P_2 = 3uD_\alpha^2 - u_{yy}, \quad (4.52)$$

$$P_3 = -D_\alpha^2, \quad (4.53)$$

A Equação 4.49 representa um problema de autovalores do terceiro grau, onde  $P_2, P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P_0, P_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , caso  $\theta > 0$ . Este problema pode ser convertido em um problema de autovalores generalizados (Eq. 4.30), da seguinte maneira

$$\begin{cases} \zeta - c\phi = 0, \\ \tau - c\zeta = 0, \\ P_0\phi + P_1\zeta + P_2\tau + P_3\tau c = 0, \end{cases} \quad (4.54)$$

e que, reescrito na forma de blocos de operadores, fica:

$$(A_S - cB_S)\xi = \left( \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -P_0 & -P_1 & -P_2 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \phi \\ \zeta \\ \tau \end{bmatrix} = 0. \quad (4.55)$$

O sistema 4.55, é uma linearização de  $P(c) = P_0 + P_1c + P_2c^2 + P_3c^3$ , e o termo entre parêntese é denominado primeira forma da matriz companheira, para o sistema  $3N \times 3N$  (Eq.



4.55), onde  $N = 500$ .

Os ângulos utilizados na análise foram  $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$  e  $0.10$ , e os números de Richardson empregados variam,  $0 \leq Ri_H \leq 0.30$ . A Figura (4.6) ilustra os resultados do trabalho de Taira *et al.* (2014 [145]). Nota-se que as taxas máximas de amplificação estão próximas quando  $0 \leq \theta \leq 0.01$ , portanto não sofrem interferência substancial da estratificação. Para  $\theta \geq 0.05$ , a taxa máxima de amplificação cresce de acordo com o aumento da declividade para cada  $Ri_H$  fixo mas diminui com o aumento do número de Richardson até atingir  $Ri_H \cong 0.25$ , a partir daí, até  $Ri_H = 0.30$ , a taxa máxima  $\omega_i$  permanece quase constante.

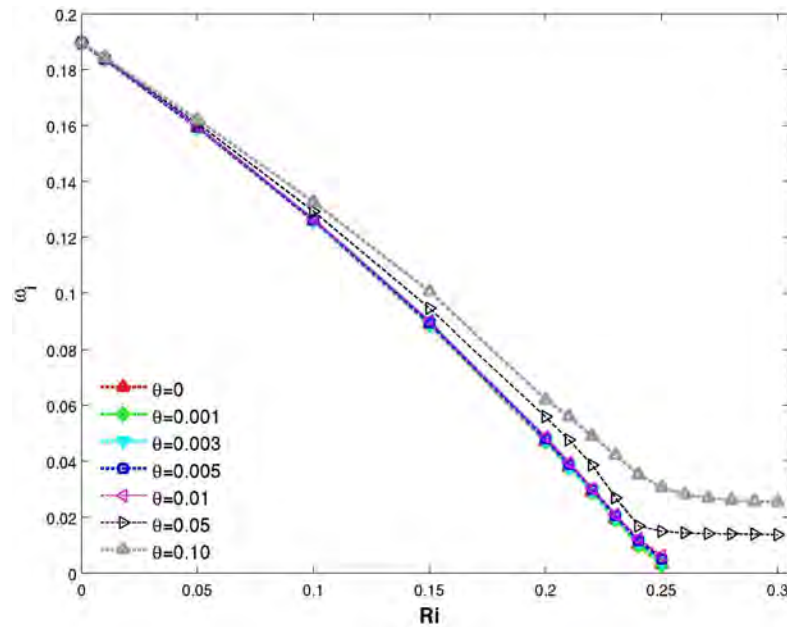


Figura 4.6: Taxa máxima de amplificação para diferentes  $Ri_H$  e declividades  $\theta$ , utilizando operadores diferenciais de *Chebyshev* (Taira *et al.*, 2014 [145]).

Um problema de autovalor polinomial de grau  $m \geq 2$  do tipo

$$P(c)X = 0, \quad (4.56)$$

onde,

$$P(c) = P_0 + P_1c + P_2c^2 + \dots + c^{m-1}P_{m-1} + c^mP_m, \quad (4.57)$$

também pode ser linearizado, utilizando uma mudança de variáveis  $X_i - cX_{i-1} = 0$ , onde  $i =$

2, ..., m. Logo, a Eq. 4.56 pode ser escrita como um problema de autovalor generalizado

$$(A - cB)X = 0, \quad (4.58)$$

sendo,  $A$  e  $B$ , matrizes definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & I \\ -P_0 & -P_1 & & \dots & -P_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

$$B = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & \\ & & & & P_m \end{bmatrix}.$$

Maiores informações desta formulação, podem ser vistas no trabalho realizado por Tisseur [152].

## 4.6 Análise via DNS

Nesta seção será apresentada a análise de estabilidade linear utilizando Simulação Numérica Direta (DNS). Para esta técnica, foi utilizado como domínio de cálculo bidimensional, um quadrado de lado  $L = \lambda_a$ , que corresponde a um comprimento de onda fundamental ( $\lambda_a$ ), baseado na análise de estabilidade linear (Michalke, 1964 [101]; Hazel, 1972 [55]). Para  $\theta = 0$ , foi empregado o comprimento  $L = 7\delta_i$ , que corresponde ao número de onda  $\alpha_a = 0.4446/\delta_0$  ( $\delta_i = 2\delta_0$ ), dado pela teoria de estabilidade linear. Quando  $\theta > 0$ , o comprimento do domínio varia de acordo com o número de onda mais amplificado. Esta medida é máxima quando  $Ri_H = 0.20$  e  $\theta = 0.05$ . A amplitude da perturbação senoidal empregada é  $A_f = 10^{-6}$ .

Nos testes numéricos foram empregados uma faixa do número de Richardson,  $0 \leq Ri_H \leq 0.20$ , e da declividade,  $0.001 \leq \theta \leq 0.05$ . Os outros adimensionais utilizados foram  $Re = 300$  e  $Pr = 1$ , que também foram empregados por Martinez (2006 [94]). A escolha dos números de Richardson utilizados se baseiam na análise de estabilidade linear por meio das aproximações de Chebyshev.

As diferentes malhas apresentam  $n_x \times n_y$  pontos, onde  $n_x$  é o número de pontos na direção do escoamento e  $n_y$  é o número de pontos na direção vertical. A resolução de cada uma das malhas é dada por  $\Delta x = L/(n_x - 1)$  e  $\Delta y = L/(n_y - 1)$ . As malhas computacionais quando  $\theta = 0$  estão representadas por N1 a N5 (Tabelas 4.3 e 4.4).

No estudo da estabilidade linear, optou-se pela análise da componente de velocidade  $v$  pois as taxas máximas de amplificação ocorreram na região do núcleo do turbilhão (aproximadamente em  $x = L_x/2$  e  $y = 0$  na Fig. 3.3), diferentemente da análise da componente  $u$ , cuja taxa máxima não ocorre na região de maior vorticidade, devido ao campo de perturbações (Eq. 3.16 e Eq. 3.17) adicionado aos perfis de velocidade. Para tal análise, calcula-se a declividade da parte linear do sinal  $v'$  (Fig. 4.7).

A Figura 4.7 mostra a evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $v'$ , para diferentes números de Richardson. Observa-se uma região de amplificação exponencial, que corresponde ao regime governado pela teoria de estabilidade linear. A taxa de crescimento das perturbações é reduzida devido o efeito do empuxo.

Para a análise de estabilidade do escoamento paralelo é cancelado o termo de difusão vertical, correspondente à velocidade longitudinal  $\partial^2 u / \partial y^2$ , pois esta difusão aumenta a espessura da camada cisalhante durante a simulação e infere uma variação no tempo do escoamento base. Como consequência, haverá uma variação correspondente na taxa de amplificação, até o regime linear (aproximação de escoamento paralelo). O artifício utilizado aqui é o mesmo adotado por Medeiros *et al.* (2002) e Martinez (2006a). Seguindo o mesmo raciocínio, também foram cancelados os outros termos de difusão vertical, correspondentes à velocidade vertical  $\partial^2 v / \partial y^2$  e à densidade  $\partial^2 \rho / \partial y^2$ .

Nas Tabelas 4.3 e 4.4 pode-se visualizar as taxas de amplificação para o caso sem declividade ( $\theta = 0$ ). Os resultados apresentam erro máximo de 0.21% para o caso não estratificado, e

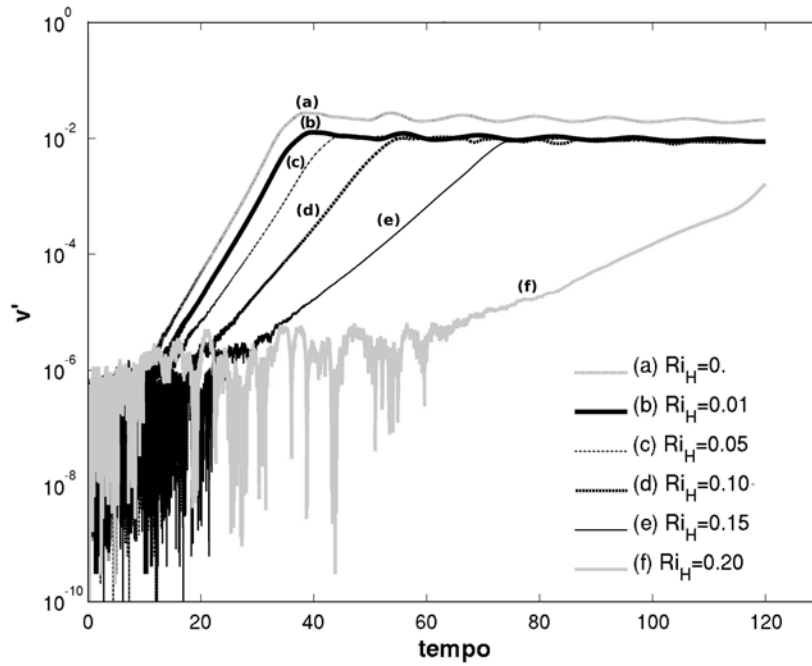


Figura 4.7: Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $v'$  para diferentes  $Ri_H$  (Malha  $N3 = 128 \times 129$ ).

Tabela 4.3: Comparação da taxa de amplificação com o valor de referência (Hazel, 1972 [55]).  $Ri_H=0, 0.01, 0.05, 0.10$ .

$Ri_H$		$N1$	$N2$	$N3$	$N4$	Valor Ref. [55]
		$64 \times 65$	$64 \times 129$	$128 \times 129$	$128 \times 257$	
0	$\alpha_r c_i$	0.1895	0.1893	0.1894	0.1899	0.1897
	erro	-0.10%	-0.21%	-0.16%	0.10%	
0.01	$\alpha_r c_i$	0.1836	0.1839	0.1840	0.1836	0.1838
	erro	-0.11%	0.05%	0.11%	-0.11%	
0.05	$\alpha_r c_i$	0.1593	0.1601	0.1595	0.1600	0.1594
	erro	-0.06%	0.44%	0.06%	0.37%	
0.1	$\alpha_r c_i$	0.1264	0.1256	0.1261	0.1262	0.1259
	erro	0.40%	-0.24%	0.16%	0.24%	

de 0.44% para os casos em que  $0.01 \leq Ri_H \leq 0.1$ . Observa-se uma grande influência nas taxas de amplificação para os casos mais estratificados, quando  $Ri_H = 0.15$  e  $Ri_H = 0.20$ , sendo que não houve melhora significativa nas taxas, variando-se a malha. À medida que aumenta-se o número de Richardson, a taxa de amplificação decai.

Lembrando-se que neste tipo de análise, utilizando *DNS*, os termos viscosos não foram cancelados, como ocorre na análise de estabilidade (Hazel, 1972 [55]; Drazin e Reid [38], 1989; Negretti *et al.*, 2008 [109]). Diante dessas considerações, os resultados foram bastante

Tabela 4.4: Comparação da taxa de amplificação com o valor de referência (Hazel, 1972 [55]).  $Ri_H = 0.15$  e  $0.20$ .

$Ri_H$		$N3$ $128 \times 129$	$N4$ $128 \times 257$	$N5$ $256 \times 257$	Valor Ref. [55]
0.15	$\alpha_r c_i$	0.0951	0.0941	0.0940	0.0889
	erro	6.97%	5.85%	5.74%	
0.20	$\alpha_r c_i$	0.0505	0.0506	0.0504	0.0472
	erro	7%	7.2%	6.78%	

satisfatórios.

Nos testes numéricos em que inclui a declividade ( $\theta > 0$ ), o comprimento do domínio varia de acordo com o número de onda mais amplificado, conforme consta na Tab. 4.5. Nesta mesma Tabela estão indicadas as malhas utilizadas para cada caso.

Tabela 4.5: Comprimento do domínio ( $L$ ) e malhas empregadas nas simulações ( $N3 = 128 \times 129$  e  $N5 = 256 \times 257$ ) para número de Richardson ( $Ri_H$ ) e declividade ( $\theta$ ).

	$Ri_H$ 0.01	$Ri_H$ 0.05	$Ri_H$ 0.10	$Ri_H$ 0.15	$Ri_H$ 0.20
$\theta = 0.001$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N5$	$L = 7\delta_i$ $N5$
$\theta = 0.003$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N5$	$L = 7\delta_i$ $N5$
$\theta = 0.005$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N5$	$L = 7\delta_i$ $N5$
$\theta = 0.01$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7.1\delta_i$ $N5$	$L = 7.1\delta_i$ $N5$
$\theta = 0.05$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7\delta_i$ $N3$	$L = 7.4\delta_i$ $N3$	$L = 7.4\delta_i$ $N5$	$L = 7.7\delta_i$ $N5$

As taxas máximas de amplificação crescem quando comparadas com o caso não inclinado, como previsto pela análise analítica (Seção 4.5). A Figura 4.8 destaca as taxas de amplificação para diferentes números de Richardson,  $Ri_H$ , e declividades,  $\theta$ . À medida que a estratificação ( $Ri_H$ ) e a declividade ( $\theta$ ) aumentam, a taxa máxima de amplificação  $\omega_i$  é afetada, ou seja, o termo  $Ri_H \text{sen}\theta$ , que consta na equação de quantidade de movimento em  $x$  (Eq. 3.1), é influenciado por estes dois parâmetros. Por exemplo, para uma declividade pequena,  $\theta = 0.001$ , e um número de Richardson,  $Ri_H = 0.1$ , o termo  $Ri_H \text{sen}\theta$  é da ordem de  $10^{-4}$ . Este valor é maior quando

comparado com a perturbação inicial ( $t = 0$ ), imposta ao escoamento base, cuja amplitude é de  $10^{-6}$ . Conseqüentemente, o valor deste termo aumenta para números de Richardson e ângulos maiores (Fig. 4.8), atuando como um termo fonte sobre o escoamento.

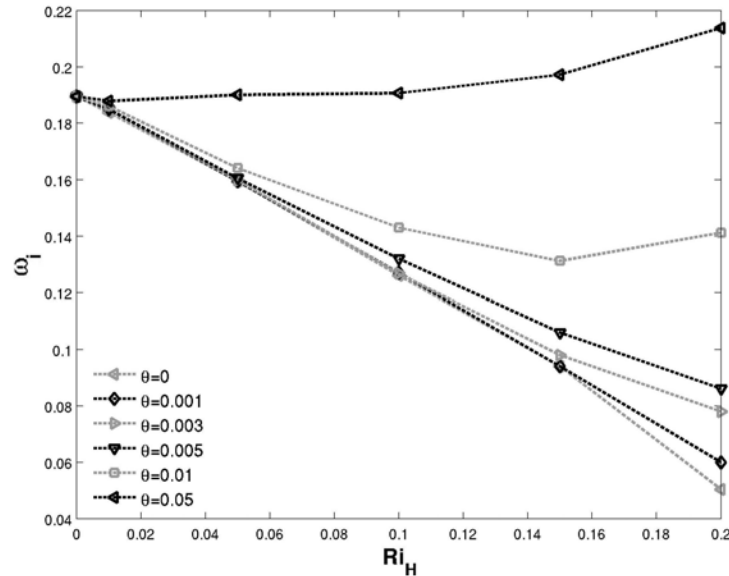


Figura 4.8: Taxa máxima de amplificação para diferentes números de Richardson,  $Ri_H$ , e declividades,  $\theta$ .

A evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $v'$ , para diferentes números de Richardson ( $Ri_H$ ) e declividades ( $\theta$ ), é apresentada nas Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12. Para  $Ri_H = 0.01$  (Fig.4.9), os gráficos apresentam taxas de amplificação muito próximas, mesmo com variações das declividades. Aumentando-se a estratificação,  $Ri_H = 0.05$  (Fig.4.10), nota-se uma grande influência para o ângulo  $\theta = 0.05$  na taxa máxima de amplificação, já que o termo  $Ri_H \sin \theta$  é da ordem de  $10^{-3}$ .

O intervalo de tempo  $T_{v'}$  proposto no cálculo da taxa de amplificação deve satisfazer a condição:

$$T_{v'} \geq 10\delta_i/U. \quad (4.60)$$

Para os casos em que não é satisfeita a desigualdade 4.60, torna-se difícil o cálculo da taxa máxima de amplificação. Tal proposta foi empregada para os casos em que a declividade é nula. Para  $\theta = 0.001$  e  $\theta = 0.003$  com  $Ri_H = 0.15$  e  $Ri_H = 0.20$ , e para  $\theta = 0.005$  com  $0.10 \leq Ri_H \leq 0.20$ , o período  $T_{v'}$  não satisfaz a condição (4.60) e, portanto, apenas efeitos não lineares estão presentes (Figuras 4.11 e 4.12).

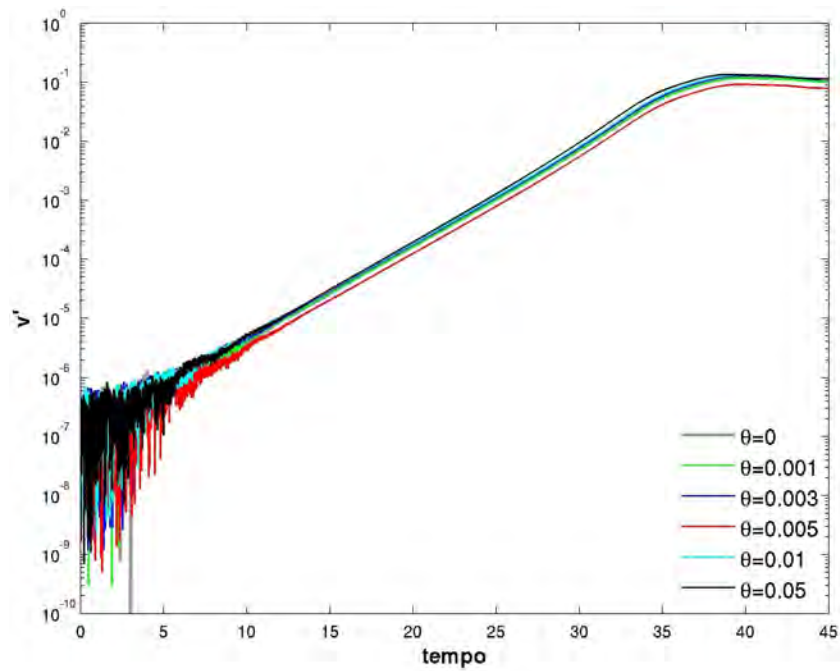


Figura 4.9: Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $v'$  para  $Ri_H = 0.01$ , com variação de ângulos:  $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ .

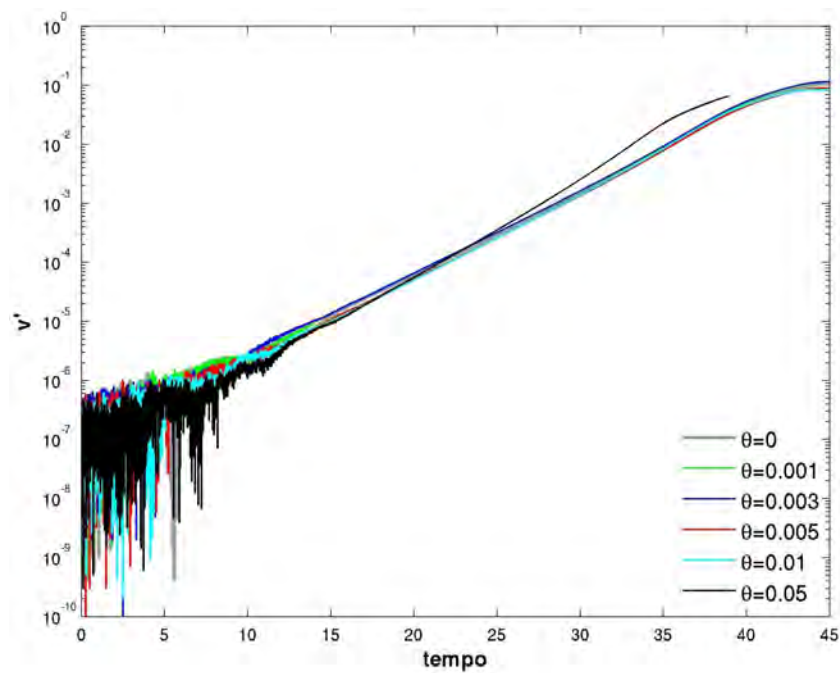


Figura 4.10: Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $v'$  para  $Ri_H = 0.05$ , com variação de ângulos:  $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ .

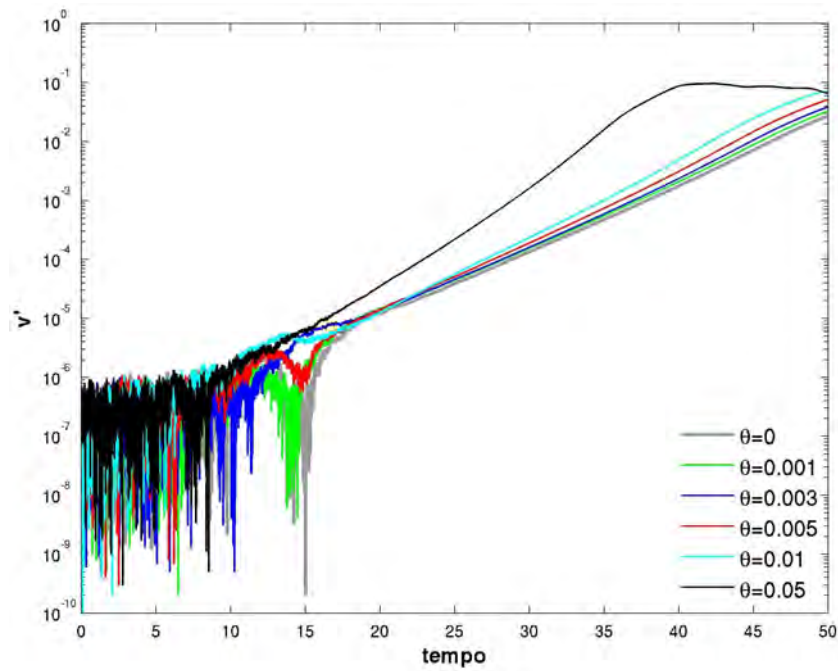


Figura 4.11: Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $v'$  para  $Ri_H = 0.10$ , com variação de ângulos:  $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ .

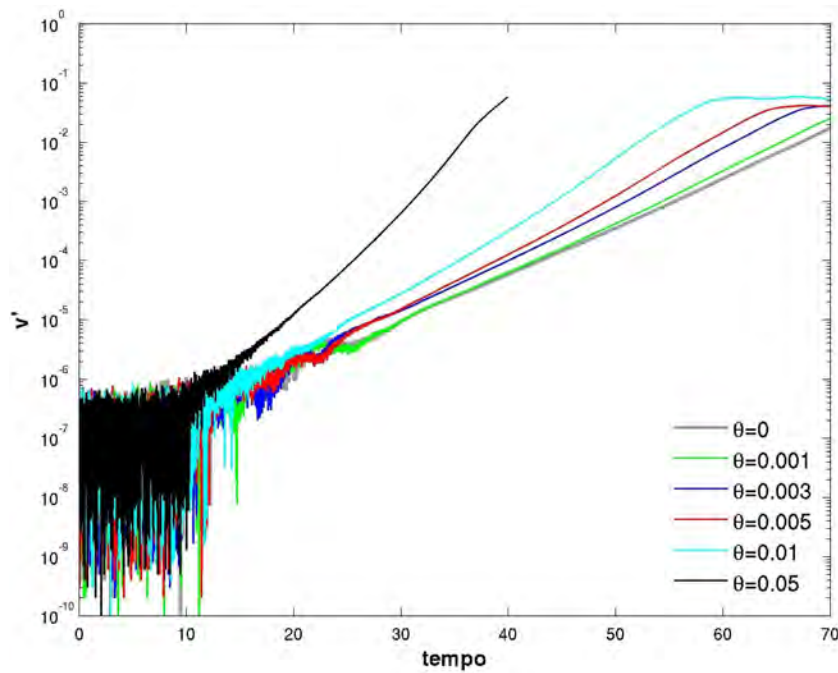


Figura 4.12: Evolução temporal da amplitude da flutuação de velocidade  $v'$  para  $Ri_H = 0.15$ , com variação de ângulos:  $\theta = 0, 0.001, 0.003, 0.005, 0.01, 0.05$ .



## 4.7 Comparação entre as técnicas

A Figura 4.13 ilustra uma comparação entre as técnicas *DNS* e aproximação de Chebyshev com a literatura (Hazel (1972 [55])), para o caso sem declividade ( $\theta = 0$ ), destacando-se o número de onda ( $\alpha_r$ ), a celeridade ( $c_i$ ) e a taxa máxima de amplificação ( $\omega_i$ ). Utilizando operador diferencial de Chebyshev as taxas máximas de amplificação apresentam erros da ordem de  $10^{-4}$  em comparação com Hazel (1972 [55]). Por meio de *DNS*, os erros máximos foram de 0.16% quando  $Ri_H \leq 0.10$  (malha *N3*) e, 5.74% para  $Ri_H = 0.15$  e 6.78% para  $Ri_H = 0.20$  ao utilizar a malha *N5*. Com o aumento da estratificação, a taxa de amplificação  $\omega_i$  e a celeridade  $c_i$  apresentam uma tendência de decaimento linear, enquanto o número de onda,  $\alpha_r$  aumenta para  $Ri_H = 0.15$  e  $Ri_H = 0.20$ , mas não o suficiente para interferir na taxa máxima de amplificação  $\omega_i$ .

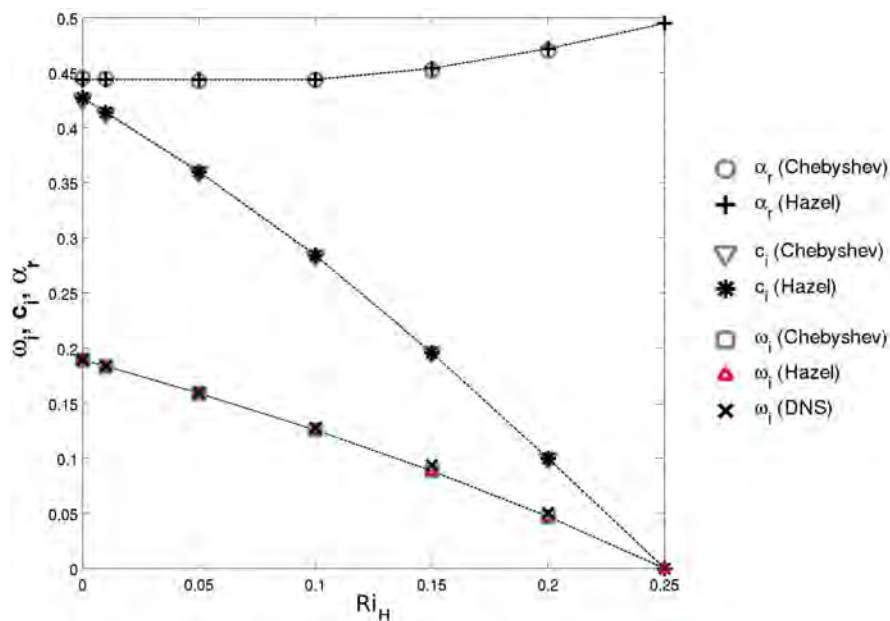


Figura 4.13: Comparação entre o número de onda ( $\alpha_r$ ), a celeridade ( $c_i$ ) e a taxa máxima de amplificação ( $\omega_i$ ), com variação apenas da estratificação,  $Ri_H$ . Os resultados derivam da análise de estabilidade utilizando os operadores diferenciais de Chebyshev e *DNS*, em comparação com a referência (Hazel, 1972 [55]).

À medida que  $\theta$  e  $Ri_H$  aumentam, o termo  $Ri_H \text{sen} \theta$ , presente na equação de quantidade de movimento (direção  $x$ ), provoca uma diferença gradual da taxa de amplificação  $\omega_i$  entre os resultados analíticos e das simulações via *DNS*. A tabela 4.6 apresenta os erros ao comparar as taxas máximas de amplificação utilizando análise analítica e por meio de *DNS*. Utilizando

Tabela 4.6: Comparação entre as taxas máximas de amplificação utilizando aproximação de Chebyshev e por meio de *DNS*. Os erros são apresentados em porcentagem.

	$Ri_H = 0.01$	$Ri_H = 0.05$	$Ri_H = 0.10$
$\theta = 0.001$	0.65%	0.13%	0.79%
$\theta = 0.003$	0.65%	0.31%	0.55%
$\theta = 0.005$	0.65%	0.69%	–
$\theta = 0.01$	1.25%	–	–
$\theta = 0.05$	2.12%	–	–

Simulação Numérica Direta, conclui-se que a solução é linear ao incluir a declividade, somente quando  $Ri_H \leq 0.10$  para  $\theta \leq 0.003$ ,  $Ri_H \leq 0.05$  para  $\theta = 0.005$  e  $Ri_H = 0.01$  para  $\theta = 0.01$ , cujo erro máximo foi de 1.25%. Para  $Ri_H = 0.01$  e  $\theta = 0.05$ , o erro aumentou para 2.12%. As Figuras 4.14 e 4.15 ilustram uma comparação entre as técnicas *Chebyshev* e *DNS*, com variação do número de Richardson ( $Ri_H$ ) para cada declividade ( $\theta$ ). Observa-se na Fig. 4.15b que para  $\theta = 0.01$  há uma grande diferença entre as taxas de amplificação obtidas pelas técnicas *Chebyshev* e *DNS* quando  $Ri_H \geq 0.05$ . Este fato provavelmente se deve aos termos viscosos que não foram cancelados e a existência do termo  $Ri_H \text{sen} \theta$  presente na equação da quantidade de movimento na simulação via *DNS*.

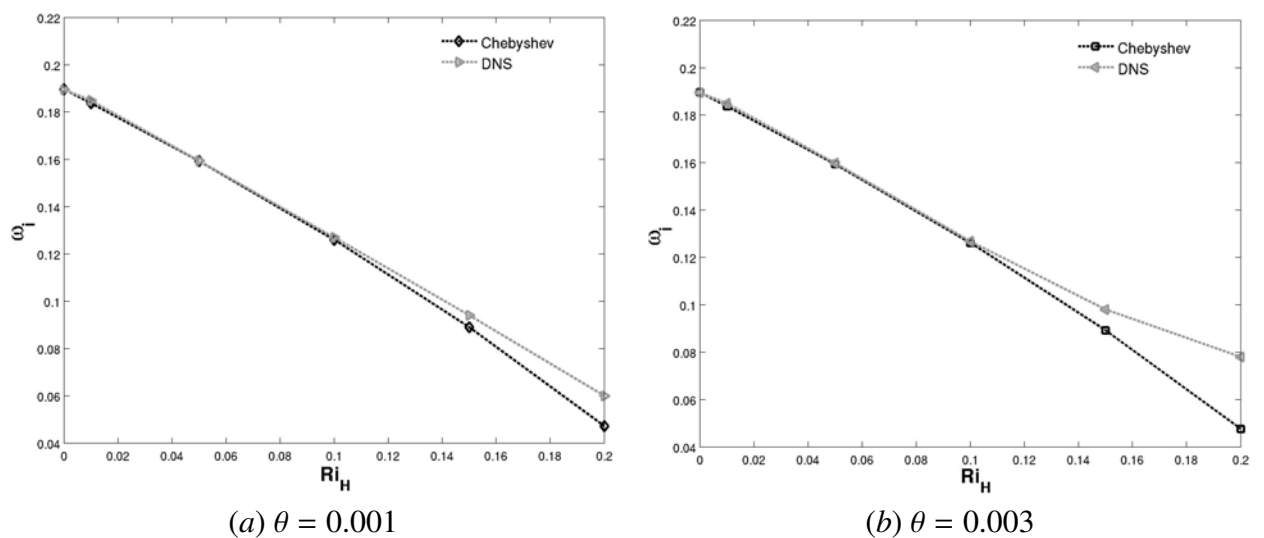


Figura 4.14: Comparação entre as técnicas *Chebyshev* e *DNS*, com variação do número de Richardson ( $Ri_H$ ) para cada declividade ( $\theta$ ).

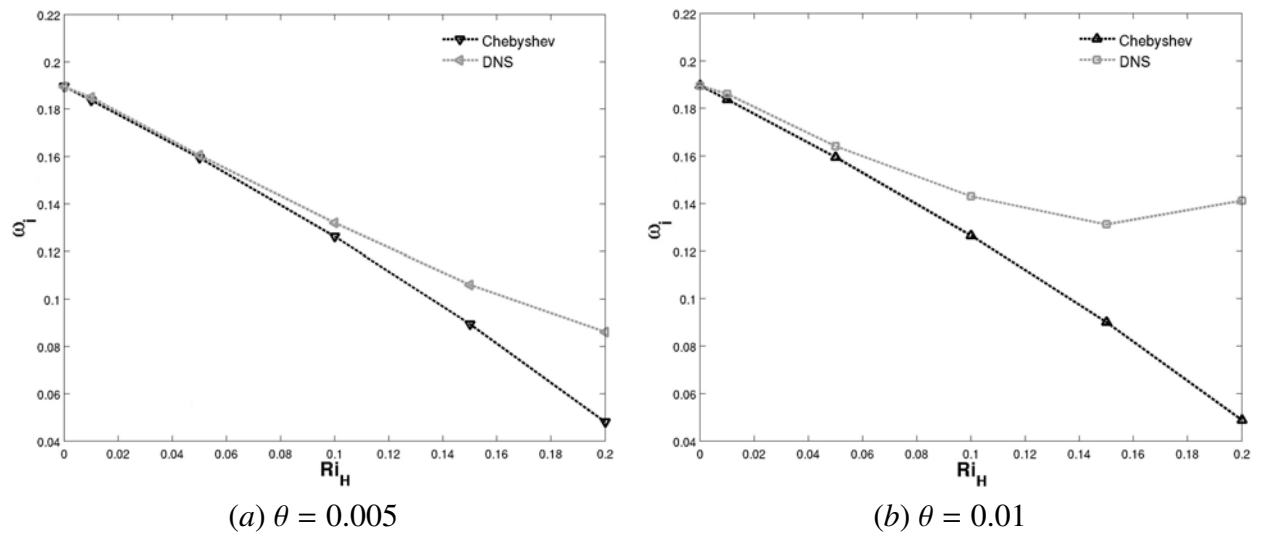


Figura 4.15: Comparação entre as técnicas *Chebyshev* e *DNS*, com variação do número de Richardson ( $Ri_H$ ) para cada declividade ( $\theta$ ).

## Capítulo 5

# Análise espacial em domínio bidimensional

As simulações bidimensionais foram realizadas em um PC AMD Phenom II, 2.8GHz e 8GB de memória, no servidor CLARO que possui dois processadores Quad-Core Intel Xeon 1.6 GHz, 4GB RAM, localizados no Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH), da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Nas simulações em desenvolvimento espacial foram consideradas a estratificação,  $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ , e ângulos com inclinação máxima de  $10 \text{ rad}$  (Tab. 5.1), que corresponde à declividade de 10%, valor considerado alto em aplicações geofísicas e ambientais. Os outros adimensionais utilizados foram  $Re = 1000$  e  $Pr = 1$ . Para o escoamento base são utilizados perfis tangente hiperbólico para a velocidade  $u$  (Eq. 3.18) e densidade  $\rho$  (Eq. 3.19).

Os diferentes parâmetros utilizados nas simulações podem ser verificados na Tab. 5.1. O tamanho do domínio é  $(L_x, L_y) = (147, 35)$  para  $Ri_H = 0$ , e  $(L_x, L_y) = (168, 28)$  para os outros casos. O parâmetro  $A_{2d}$  refere-se à amplitude máxima da função gaussiana introduzida na entrada do domínio bidimensional. Os índices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , que constam na enumeração das simulações (Tab. 5.1), referem-se, respectivamente, aos ângulos 0, 0.02, 0.05 e 0.10 (radianos). A duração das simulações é de  $210\delta_i U$ , ou, aproximadamente, 29 emissões de turbilhões de  $KH$ . A escolha da malha  $(n_x \times n_y)$  apresentada na Tab. 5.1 é baseada no comportamento físico da camada de mistura estratificada. À medida que a estratificação aumenta, os gradientes se concentram cada vez mais na região próxima à interface da camada de mistura, necessitando de resoluções  $(\Delta x, \Delta y)$  cada vez menores.

O comportamento da condição de contorno em  $x = L_x$  (Equações 3.12 e 3.13), permite

a saída dos turbilhões, conforme constam nas evoluções temporal e espacial apresentadas nos campos de vorticidade transversal ( $\varpi_z$ ).

Tabela 5.1: Parâmetros das simulações bidimensionais.

Simulação	$Ri_H$	$\theta$	$A_{2d}$	Malha $n_x \times n_y$	$\Delta t$ ( $\times 10^{-3}$ )	$\Delta x$ ( $\times 10^{-2}$ )	$\Delta y$ ( $\times 10^{-2}$ )
2DS 1 <sub>A</sub>	0	0	0.06	2497 × 545	2.5	5.9	6.4
2DS 2 <sub>A</sub>	0.025	0	0.06	2801 × 521	3	6	5.4
2DS 3 <sub>A</sub>	0.05	0	0.06	2881 × 541	2.5	5.8	5.2
2DS 3 <sub>B</sub>	0.05	0.02	0.06	2881 × 541	2.5	5.8	5.2
2DS 3 <sub>C</sub>	0.05	0.05	0.06	3201 × 577	2	5.2	4.8
2DS 3 <sub>D</sub>	0.05	0.10	0.06	3201 × 673	1.5	5.2	4.2
2DS 4 <sub>A</sub>	0.10	0	0.10	3201 × 673	1.5	5.2	4.2
2DS 4 <sub>D</sub>	0.10	0.10	0.10	3201 × 673	1.5	5.2	4.2

## 5.1 Formação da camada baroclínica

Nesta seção trataremos do caso sem declividade ( $\theta = 0$ ), analisando a influência da estratificação na formação da camada baroclínica utilizando um domínio bidimensional. Na figura 5.1 é apresentada uma sequência de campos de vorticidade para o caso não estratificado,  $Ri_H = 0$  (simulação 2DS 1<sub>A</sub>), para oito diferentes tempos. Modulada por uma pequena perturbação,  $A_{2d} = 0.06$ , a vorticidade inicial acumula progressivamente em regiões periodicamente espaçadas, os núcleos dos turbilhões de *KH* (Fig. 5.1).

O mecanismo de transição à turbulência no escoamento bidimensional se evidencia em dois estágios principais. No primeiro, o comprimento de onda mais amplificado, o modo fundamental, amplifica na interface da camada e se desenvolve a instabilidade de *KH*. No segundo estágio, o segundo modo mais amplificado, o subharmônico, induz o emparelhamento dos turbilhões bidimensionais de *KH*. Na Figura 5.1 surge a formação do primeiro e do segundo emparelhamentos, respectivamente, em  $x = 70$  (5.1a) e  $x = 125$  (Fig. 5.1f). Na camada de mistura homogênea, depois do emparelhamento, o turbilhão de *KH* satura, já que não há fonte de energia para a geração de outras instabilidades. Observa-se nas Figuras 5.2, 5.4 e 5.6 o efeito da estratificação no desenvolvimento do escoamento, se verificando que à medida que aumenta a

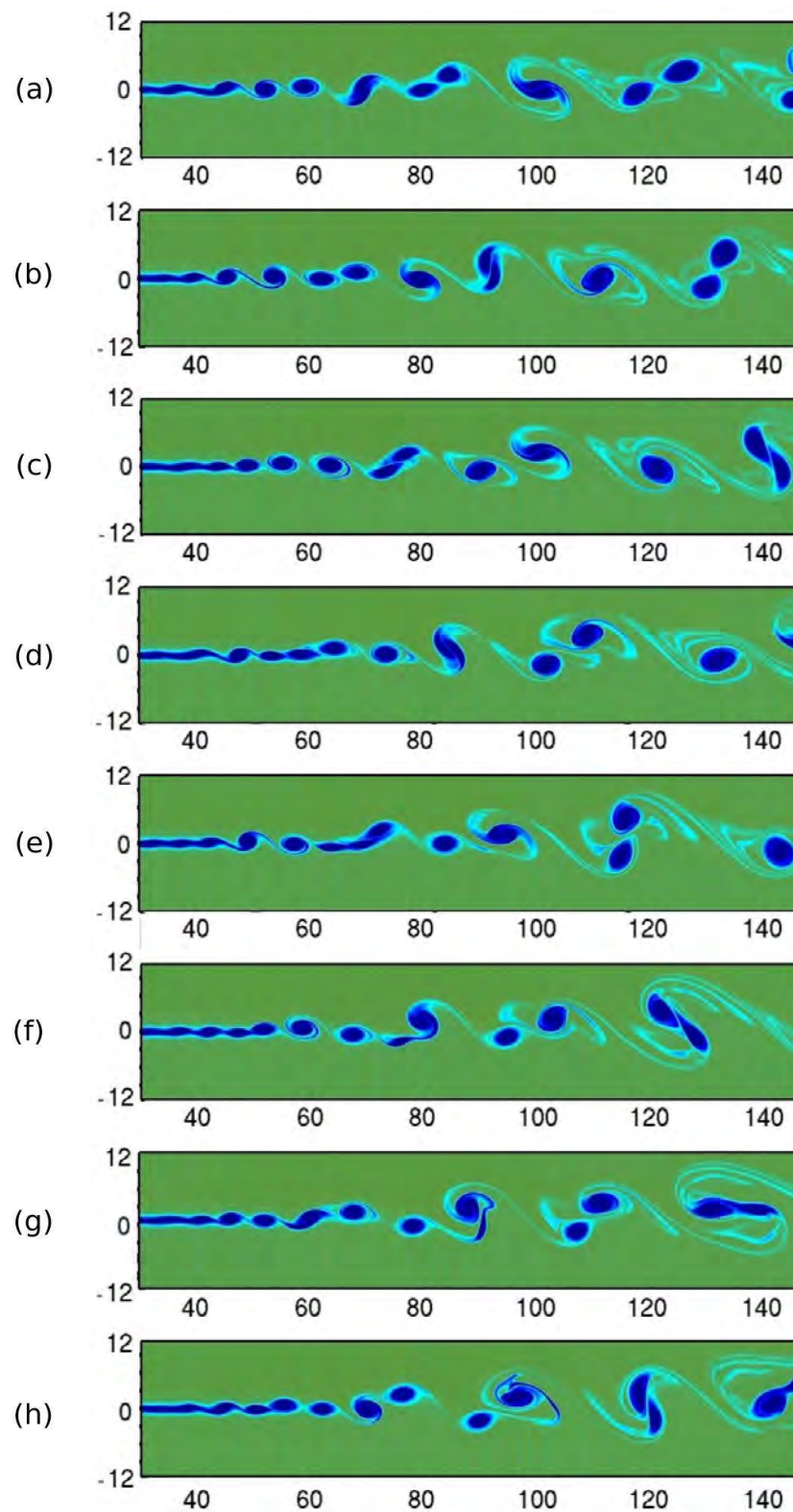


Figura 5.1: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0$  (Simulação 2DS1<sub>A</sub>). Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 5$ ; (c)  $t = t_0 + 10$ ; (d)  $t = t_0 + 15$ ; (e)  $t = t_0 + 20$ ; (f)  $t = t_0 + 25$ ; (g)  $t = t_0 + 30$ ; (h)  $t = t_0 + 35$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

estratificação é retardado o crescimento do subharmônico e, como consequência, o processo de emparelhamento dos turbilhões de  $KH$ .

Em escoamentos estratificados, as camadas estiradas de vorticidade juntamente com as camadas de densidade formam a camada baroclínica, localizada entre os vórtices de  $KH$  (Staquet, 1995 [141]). O gradiente longitudinal de densidade ( $\partial\rho/\partial x$ ) intensifica a camada baroclínica, reforçando a vorticidade nesta camada e diminuindo no núcleo do turbilhão. Portanto, o termo fonte,  $\partial\rho/\partial x$ , contribui com um mecanismo extra para a geração da vorticidade na camada estratificada bidimensional [94]. De acordo com Klaassen & Peltier (1991) [69], Staquet (1995) [141], Caulfield & Peltier (2000) [22] e Martinez *et al.* (2005) [95], a camada baroclínica definida como finas camadas de vorticidade na região entre os turbilhões de  $KH$ , surge após o enrolamento destes.

Utilizando um domínio bidimensional, Staquet (1995 [141]) e Martinez *et al.* (2006 [94]) investigaram a instabilidade secundária de  $KH$  na camada baroclínica de uma camada de mistura estavelmente estratificada. De acordo com este trabalho, fatores como o número de Reynolds ( $Re$ ) e o número de Richardson ( $Ri_H$ ) podem contribuir para a formação da instabilidade na camada baroclínica. Se estes fatores forem favoráveis para que ocorra tal instabilidade podem originar uma outra instabilidade, denominada instabilidade próxima ao núcleo do turbilhão de  $KH$  (*near-core instability*). Esta instabilidade, descoberta pela autora [141], propaga-se em direção à camada baroclínica.

Para  $Ri_H = 0.025$  (Simulação  $2DS2_A$ ), a camada baroclínica enfraquece devido a formação da instabilidade subharmônica e, ganha força, após o primeiro emparelhamento (Fig. 5.2c em  $x = 90$ ). Em seguida, ocorre a formação da instabilidade próxima ao núcleo, de vorticidade positiva (cor vermelha, Fig. 5.2d em  $x = 95$ ). Este mecanismo que gera a formação da instabilidade secundária de  $KH$ , desestabiliza a camada baroclínica. A instabilidade próxima ao núcleo se propaga em direção à camada baroclínica, proporcionando a formação de pares de vórtices contra-rotativos (cor vermelha, Fig. 5.3a) próximos ao ponto de estagnação da camada baroclínica. Os vórtices secundários de  $KH$  apresentam-se bem desenvolvidos na Fig. 5.3b, em  $x = 160$ .

A formação da instabilidade próxima ao núcleo é mais forte para os casos em que a estrati-

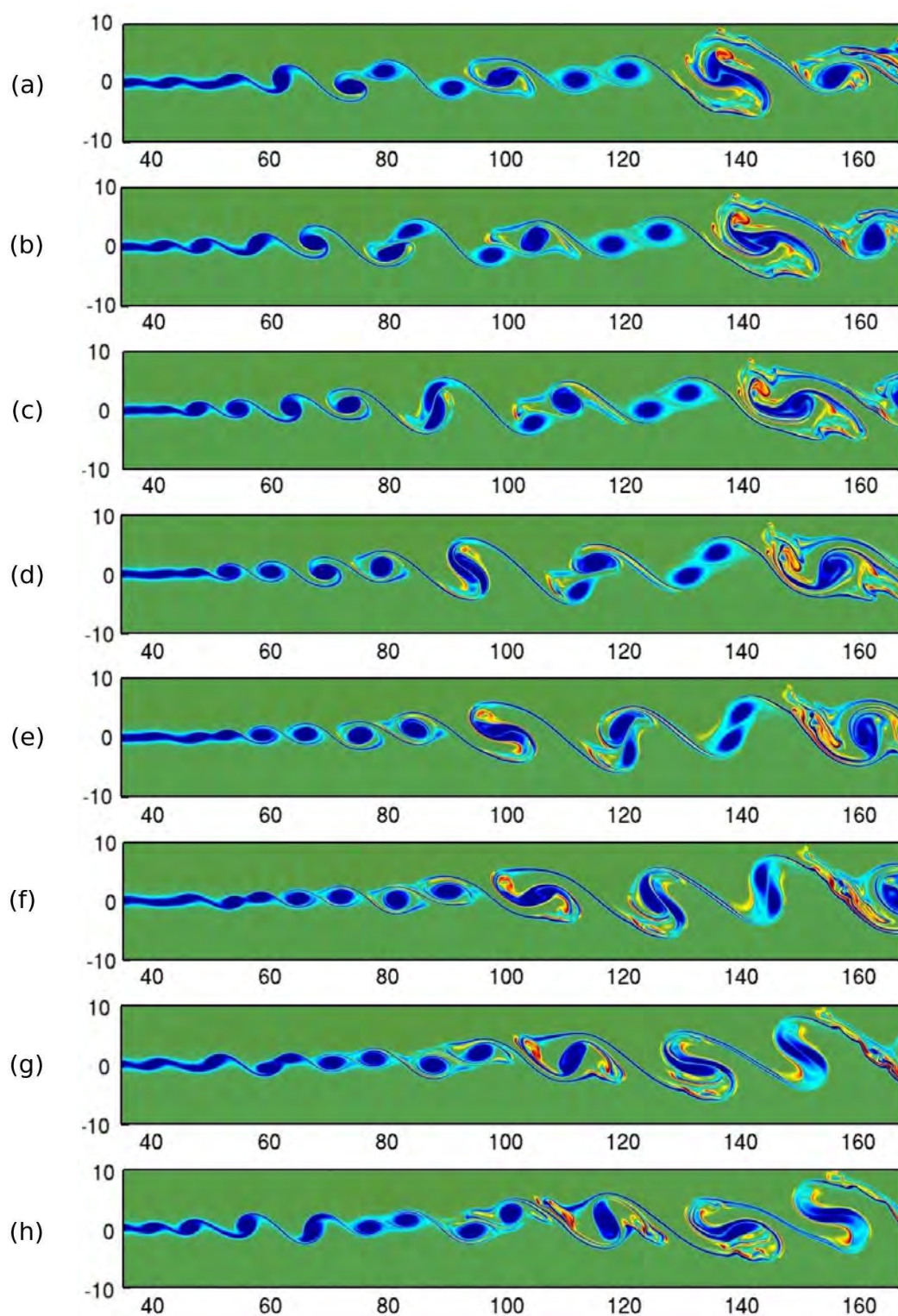


Figura 5.2: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.025$  (Simulação  $2DS_{2A}$ ). Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 3$ ; (c)  $t = t_0 + 6$ ; (d)  $t = t_0 + 9$ ; (e)  $t = t_0 + 12$ ; (f)  $t = t_0 + 15$ ; (g)  $t = t_0 + 18$ ; (h)  $t = t_0 + 21$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).



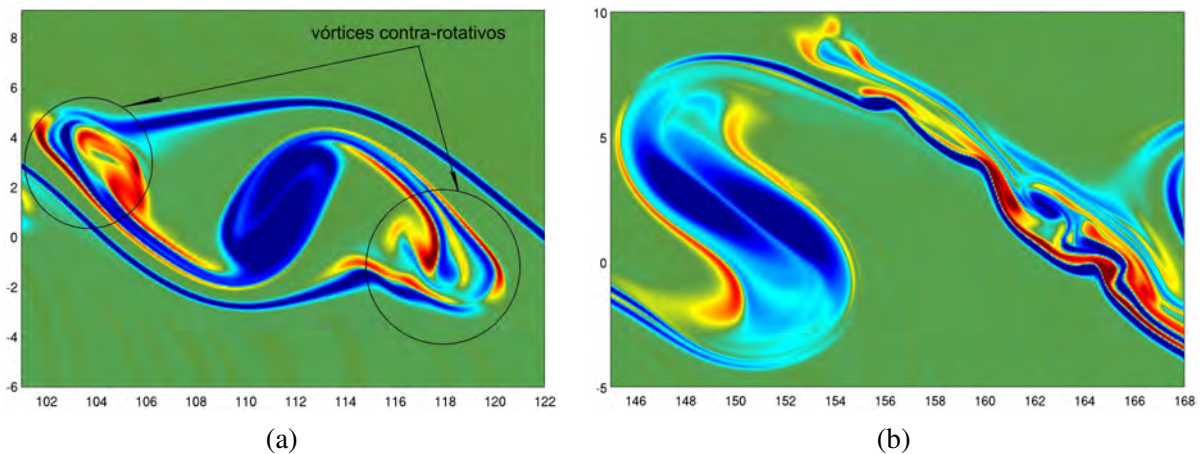


Figura 5.3: Ampliação do campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) da Fig. 5.2g ( $t = t_0 + 18$ ). Simulação a  $Ri_H = 0.025$  ( $2DS2_A$ ): (a)  $x = 110$ ; (b)  $x = 160$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

ficação é mais alta,  $Ri_H = 0.05$  e  $Ri_H = 0.10$ . Quando  $Ri_H = 0.05$  é mais evidente a presença das instabilidades secundárias de  $KH$  (Fig. 5.4 para  $x \geq 130$ ). A Figura 5.5a apresenta uma ampliação do campo de vorticidade transversal em  $x = 155$  da Fig. 5.4f, destacando as instabilidades secundárias e vórtices contra-rotativos. O campo de densidade para esta mesma região está ilustrada na Fig. 5.5b.

Na camada estratificada a  $Ri_H = 0.10$  (Fig. 5.6), onde a amplitude máxima de perturbação é  $A_{2d} = 0.10$ , não ocorre a formação do segundo emparelhamento, devido à forte estratificação que inibe o modo subharmônico. Antes do primeiro emparelhamento ocorre nitidamente a formação da instabilidade próxima ao núcleo (Fig. 5.7a). Com o crescimento da instabilidade próxima ao núcleo, destacam-se os turbilhões secundários de  $KH$  e os vórtices contra-rotativos (Fig. 5.7b).

O fato da instabilidade próxima ao núcleo se manifestar antes do emparelhamento foi verificado também por Martinez (2006 [94]) e Staquet (1995 [141]). Ambos utilizaram  $Re = 1000$  e  $Ri_H = 0.083$  em uma simulação temporal.

Para quantificar o efeito da estratificação, analisa-se a evolução espacial da espessura de vorticidade ( $\delta_\omega$ ). A Figura 5.8a apresenta os resultados de simulações numéricas do trabalho de Taira *et al.* (2014 [145]), onde as posições  $x = 80$  ( $Ri_H = 0$ ),  $x = 90$  ( $Ri_H = 0.025$ ),  $x = 100$  ( $Ri_H = 0.05$ ) e  $x = 150$  ( $Ri_H = 0.10$ ), constam os primeiros picos na evolução espacial da espessura de vorticidade e são coincidentes com as posições dos primeiros emparelhamentos.

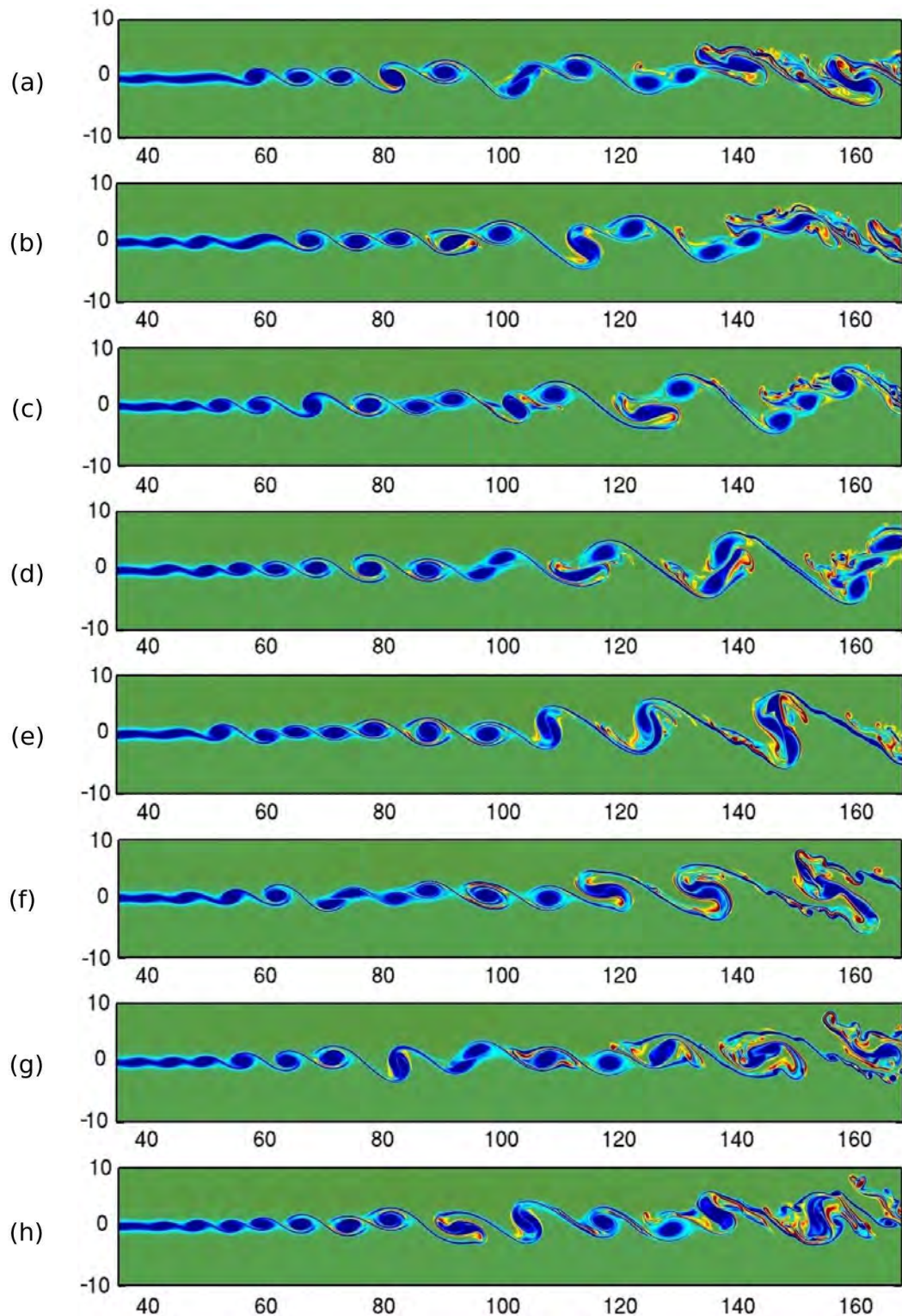


Figura 5.4: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.05$  (Simulação 2DS3A). Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 5$ ; (c)  $t = t_0 + 10$ ; (d)  $t = t_0 + 15$ ; (e)  $t = t_0 + 20$ ; (f)  $t = t_0 + 25$ ; (g)  $t = t_0 + 30$ ; (h)  $t = t_0 + 35$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

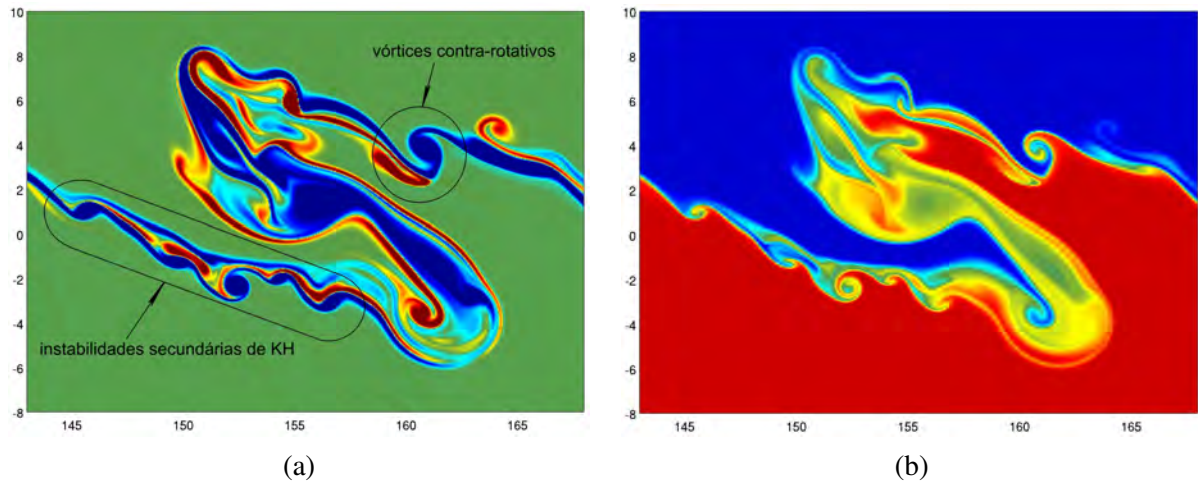


Figura 5.5: Simulação a  $Ri_H = 0.05$  ( $2DS3_A$ ): (a) Ampliação do campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) em  $x = 155$ ,  $t = t_0 + 25$  (Fig. 5.4f); (b) Corte longitudinal de densidade em  $x = 155$ ,  $t = t_0 + 25$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

É evidente para o último caso, que a posição seja mais afastada devido à alta estratificação, pois inibe a formação do subharmônico. Além disto, nota-se na Fig. 5.8a que a espessura de vorticidade é fortemente influenciada pelo número de Richardson. A Figura 5.8b apresenta os campos de vorticidade transversal para cada número de Richardson ( $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ ). Nos campos de vorticidade observa-se que há uma diminuição no tamanho dos turbilhões conforme o  $Ri$  aumenta, comprovando o efeito estabilizante da estratificação sobre o escoamento. O aumento da estratificação faz com que as forças de empuxo prevaleçam sobre a dinâmica do escoamento enfraquecendo o cisalhamento. Conseqüentemente, os vórtices ficam confinados em uma camada menos espessa de vorticidade, onde os movimentos verticais são enfraquecidos [94].

A Figura 5.9 ilustra a taxa da espessura de vorticidade,  $(1/R)d\delta_\omega/dx$ , para cada número de Richardson ( $Ri_H$ ), onde a razão  $R$  é definida como  $R = \Delta U/(2U_C)$  e cujas taxas foram calculadas na região  $40 \leq x \leq L_x$ . Esta taxa, definida por Brown & Roshko (1974 [16]) para a camada de mistura homogênea, foi estendida para o caso estratificado. Para  $Ri_H = 0$  (Simulação  $2DS1_A$ ), a taxa é 0.15, que coincide com o valor encontrado experimentalmente por Browand & Latigo (1979 [14]). A função  $f(Ri_H) = a_{2d} + b_{2d}10^{-c_{2d}Ri_H}$  foi ajustada pelos resultados, obtendo-se uma aproximação significativa (Fig. 5.9), com  $a_{2d} = 0.034$ ,  $b_{2d} = 0.116$ ,  $c_{2d} = -8.6$ , onde  $a_{2d} + b_{2d}$  coincide com o valor da taxa para o caso não estratificado.

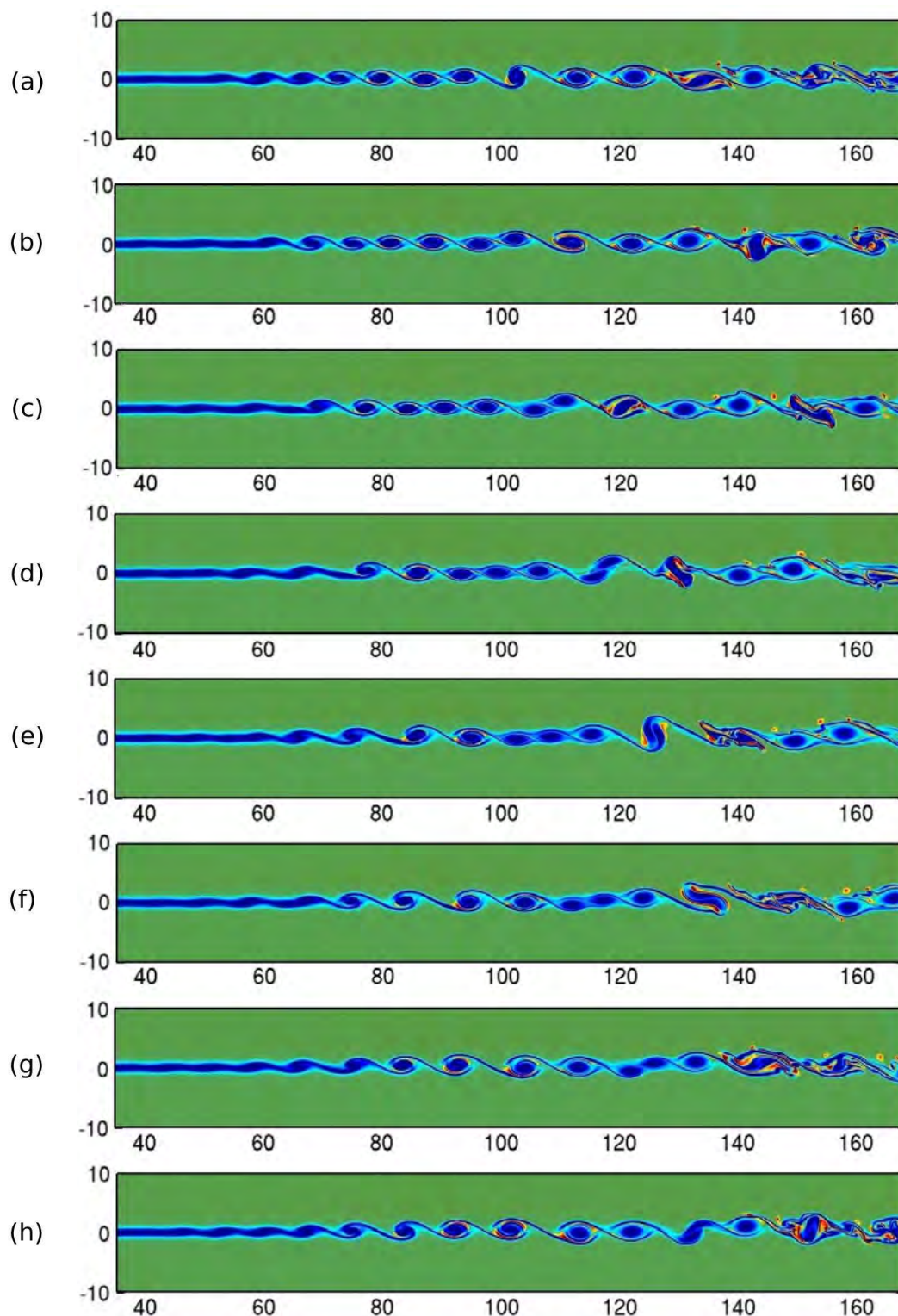


Figura 5.6: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.10$  (Simulação  $2DS4_A$ ). Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 4.5$ ; (c)  $t = t_0 + 9$ ; (d)  $t = t_0 + 13.5$ ; (e)  $t = t_0 + 18$ ; (f)  $t = t_0 + 22.5$ ; (g)  $t = t_0 + 27$ ; (h)  $t = t_0 + 31.5$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

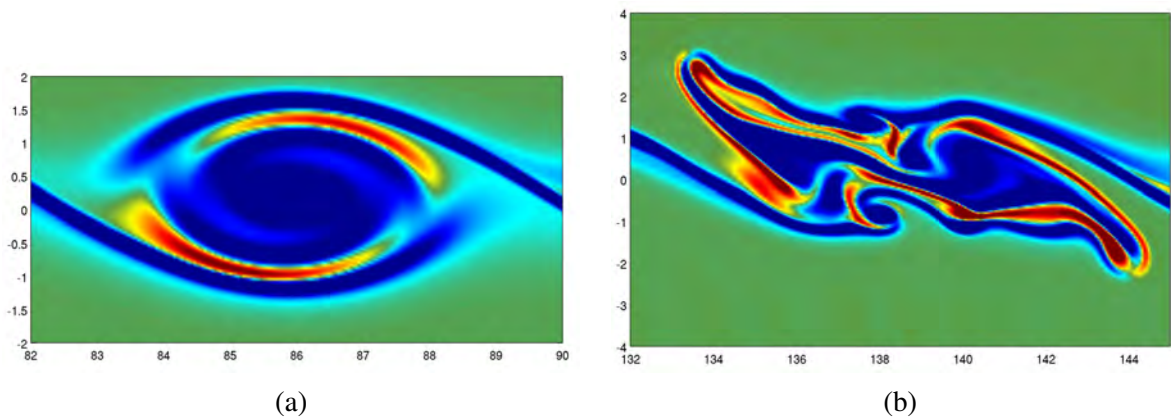


Figura 5.7: Ampliação do campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.10$  (Simulação 2DS4<sub>A</sub>): (a)  $x = 86$ ,  $t = t_0 + 13.5$  (Fig. 5.6d); (b)  $x = 138$ ,  $t = t_0 + 18$  (Fig. 5.6e). Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

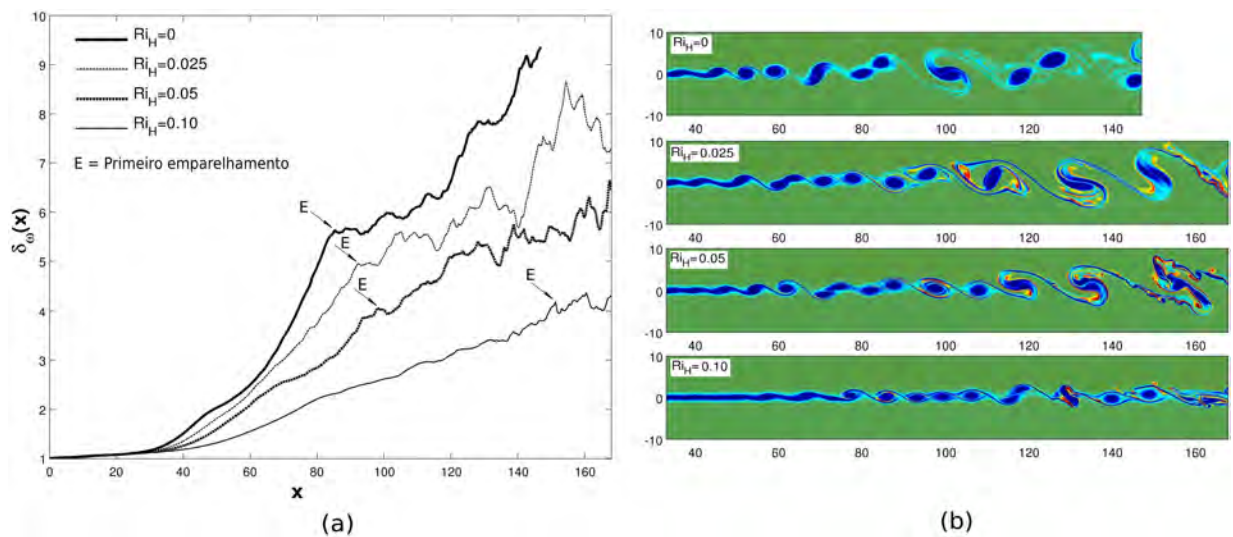


Figura 5.8: (a) Evolução espacial da espessura de vorticidade ( $\theta = 0$ ) (Taira *et al.*, 2014 [145]); (b) Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0$  ( $t = t_0$ ),  $Ri_H = 0.025$  ( $t = t_0 + 18$ ),  $Ri_H = 0.05$  ( $t = t_0 + 25$ ) e  $Ri_H = 0.10$  ( $t = t_0 + 13.5$ ). Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho)

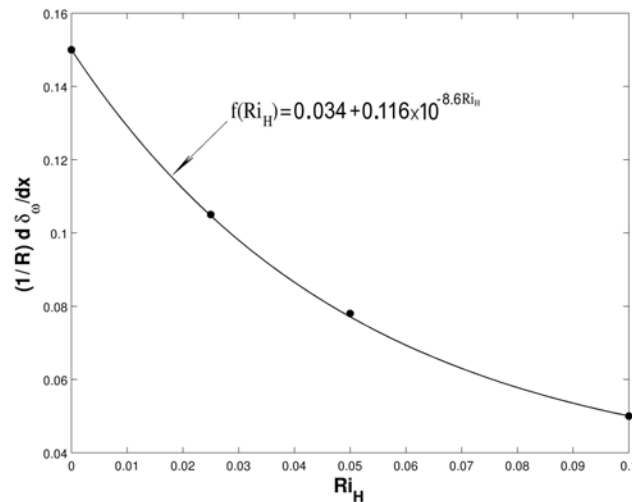


Figura 5.9: Taxa da espessura de vorticidade (●) em função do número de Richardson ( $\theta = 0$ ) e a função de ajuste (—). Simulações  $2DS 1_A$ ,  $2DS 2_A$ ,  $2DS 3_A$  e  $2DS 4_A$ .

Outros autores como Wygnanski & Fiedler (1970 [161]), Champagne *et al.* (1976 [23]) e Patel (1973 [113]) consideraram as posições  $y_\alpha$  definidas a partir do perfil médio de velocidade (Eq. 2.17), para o cálculo da taxa de crescimento da camada de mistura. A taxa de alargamento da camada cisalhante é definida por

$$Al(x) = \frac{|y_{0.95} - y_{0.05}|}{(x - x_0)}. \quad (5.1)$$

As Figuras 5.10 e 5.11 ilustram a localização das ordenadas  $y_\alpha$  nos perfis médios de velocidade  $u$ . A taxa de alargamento (Eq. 5.1) da camada de mistura homogênea foi de  $Al(x) = 0.102$ . Para os casos estratificados, os valores de  $Al(x)$  estão representados pela Fig. 5.12a. A função  $f(Ri_H) = 0.042 + 0.06 \times 10^{-7.5 Ri_H}$  é ajustada por estes resultados (Fig. 5.12a). Da mesma forma como ocorreu na evolução da espessura de vorticidade ( $\delta_\omega$ ), estas taxas quantificam a influência da estratificação.

Outra variável que caracteriza o efeito da estratificação é a energia cinética máxima ( $K_{max}$ ), onde a energia cinética  $K$  é dada pela equação

$$K(x, y) = \frac{1}{2}(\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle), \quad (5.2)$$

onde  $u' = u - \langle u \rangle$  e  $\langle u(x, y) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x, y, t) dt$ .

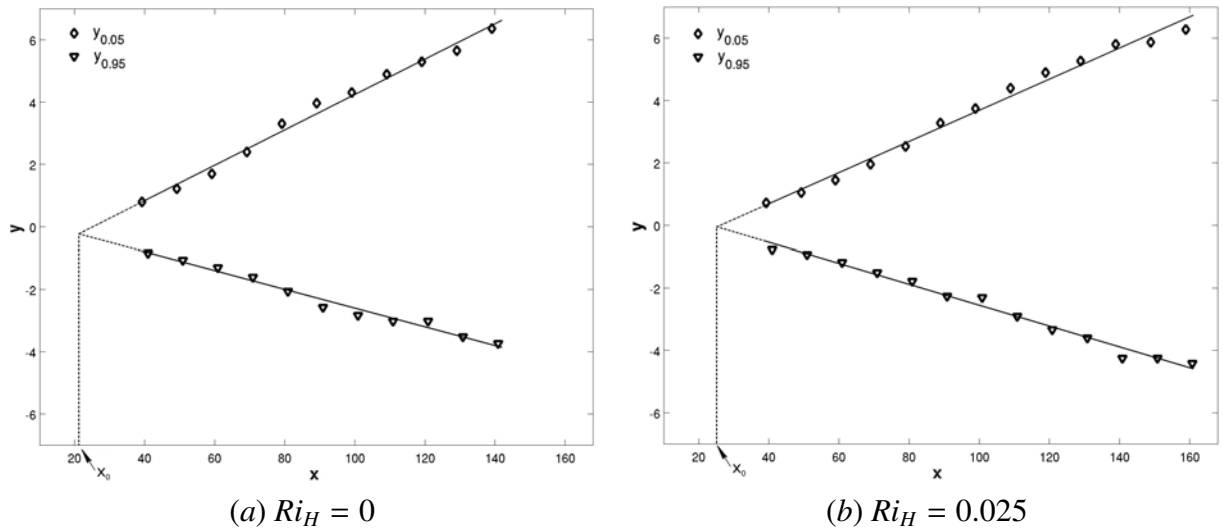


Figura 5.10: Alargamento para  $Ri_H = 0$  e  $Ri_H = 0.025$ .

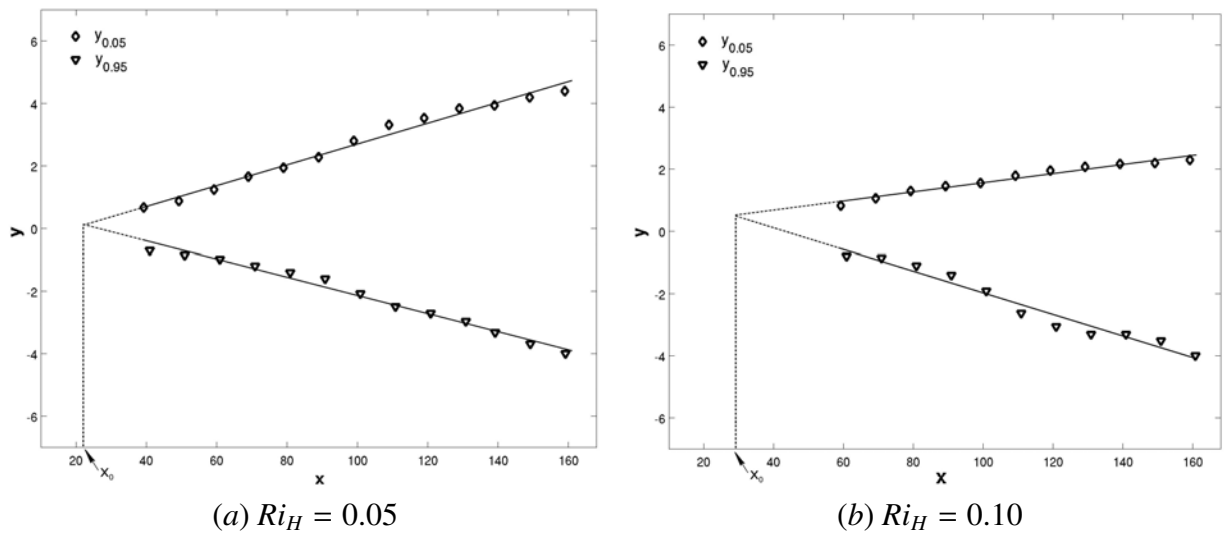


Figura 5.11: Alargamento para  $Ri_H = 0.05$  e  $Ri_H = 0.10$ .

A Figura 5.12b apresenta a evolução espacial da energia cinética máxima,  $K_{max}$ , para diferentes números de Richardson (Taira *et al.*, 2014 [145]). Verifica-se que para cada posição longitudinal fixa, a energia  $K_{max}$  diminui a medida que o número de Richardson aumenta. Nas simulações com  $Ri_H > 0$ , esta diminuição ocorre pois a estratificação diminui os movimentos verticais e tende a estabilizar o escoamento. Nos casos de forte estratificação, o cisalhamento, que é uma fonte de energia cinética, perde dominância para a força de empuxo [94].

Medidas do fluxo vertical de massa são ilustradas nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15. A influência da estratificação torna-se visível na redução da média do fluxo turbulento vertical de massa,

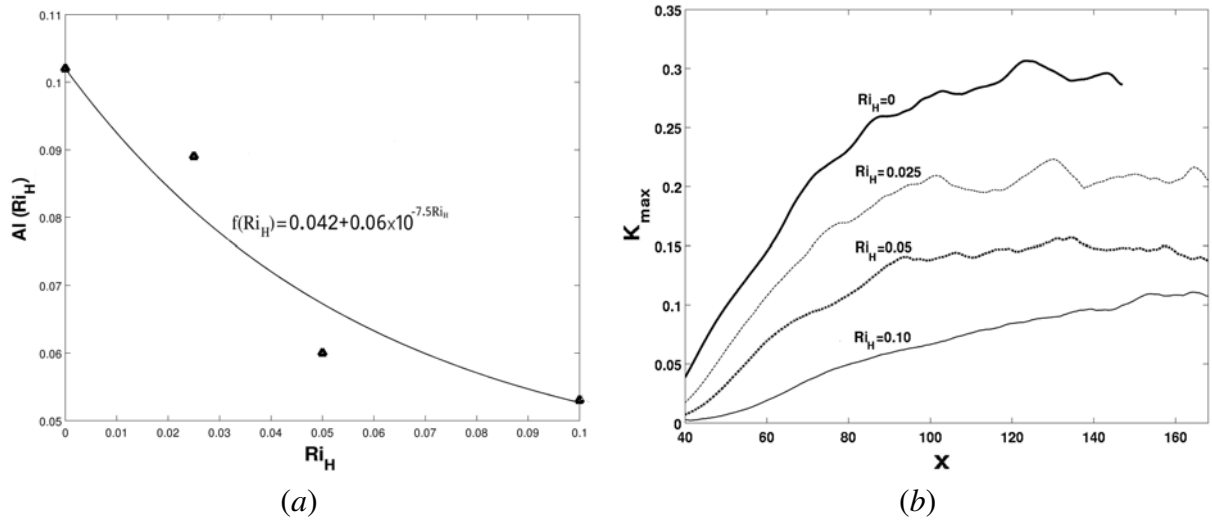


Figura 5.12: (a) Taxa de alargamento da camada de mistura ( $\blacktriangle$ ) em função do número de Richardson ( $\theta = 0$ ) e a função de ajuste ( $-$ ) ( $\theta = 0$ ); (b) Evolução espacial da energia cinética máxima para  $0 \leq Ri_H \leq 0.10$  (Taira *et al.*, 2014 [145]).

$\langle \rho'v' \rangle$ , para diversos Richardson ( $Ri_H = 0.025, 0.05, 0.10$ ), nas posições  $x = 80, x = 100$  e  $x = 120$ . Esta redução é causada pelo efeito de empuxo, que reduz a flutuação de velocidade vertical  $v'$ . Para o caso não estratificado, estes efeitos não são preponderantes e, além disso, a densidade é um escalar passivo, sendo transportado como um corante.

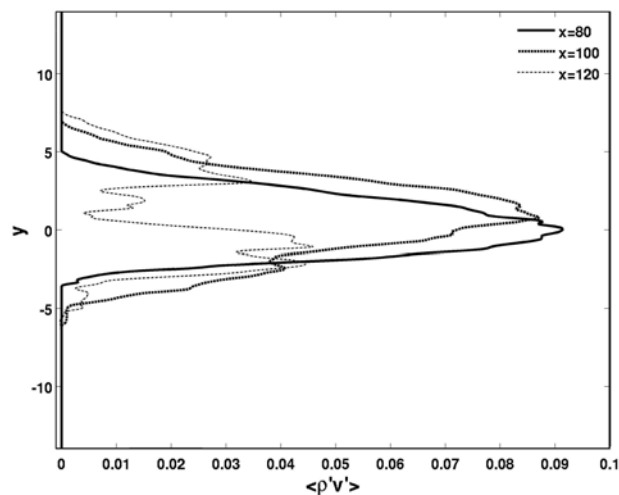


Figura 5.13: Fluxo turbulento vertical de massa para diferentes posições,  $x = 80, x = 100$  e  $x = 120$ . Simulação a  $Ri_H = 0.025$  ( $2DS2_A$ ).



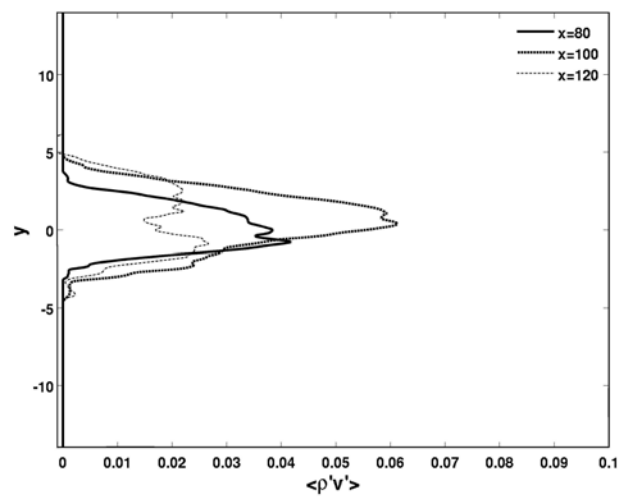


Figura 5.14: Fluxo turbulento vertical de massa para diferentes posições,  $x = 80$ ,  $x = 100$  e  $x = 120$ . Simulação a  $Ri_H = 0.05$  ( $2DS3_A$ ).

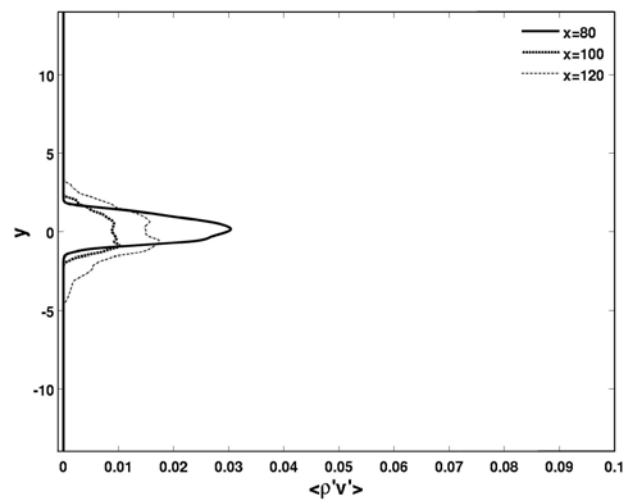


Figura 5.15: Fluxo turbulento vertical de massa para diferentes posições,  $x = 80$ ,  $x = 100$  e  $x = 120$ . Simulação a  $Ri_H = 0.10$  ( $2DS4_A$ ).

## 5.2 Influência da declividade

Os resultados das simulações  $2DS3_B$ ,  $2DS3_C$  e  $2DS3_D$  (Tab. 5.1) são agora considerados para analisar as mudanças no desenvolvimento longitudinal da camada de mistura estavelmente estratificada ( $Ri_H = 0.05$ ) quando os efeitos da inclinação ( $\theta = 0.02$ ,  $\theta = 0.05$  e  $\theta = 0.10$ ) são levados em conta. Comparando-se a simulação  $2DS3_A$  ( $\theta = 0$ , Fig. 5.4) com a simulação  $2DS3_B$  ( $\theta = 0.02$ , Fig. 5.16) é nítida a influência da declividade. Provavelmente devido à atuação da componente horizontal de aceleração  $Ri_H \rho \sin\theta$ , presente na Eq. 3.1, existe uma intensificação na formação das instabilidades secundárias que conduz a um maior número de vórtices secundários de  $KH$  ( $x \geq 120$ ). Além disso, a declividade acelera o desenvolvimento das instabilidades primárias de  $KH$  e da formação dos emparelhamentos.

Nas simulações  $2D3_C$  (Fig. 5.17) e  $2DS3_D$  (Fig. 5.18), a forma do turbilhão de  $KH$ , após o emparelhamento, não se sustenta devido à maior declividade ( $\theta = 0.05$  e  $\theta = 0.10$ ). Logo após o modo subharmônico, ocorre a formação de quatro vórtices de direções positivas (Fig. 5.18c, em  $x = 115$ ) para uma alta declividade ( $\theta = 0.10$ ).

A camada baroclínica formada entre dois emparelhamentos é mais estirada com o aumento da declividade, principalmente quando  $\theta = 0.10$  (Fig. 5.18h em  $x = 120$ ). Os estiramentos geram localmente gradientes de densidades e estão associados à componente transversal do torque baroclínico. Ao incluir a declividade, o torque baroclínico (Eq. 3.7), resultante da aplicação à equação do movimento com aproximação de Boussinesq (Eq. 3.1), tem um papel fundamental na formação dos vórtices longitudinais bidimensionais. A componente transversal do torque baroclínico,  $-(\cos\theta \rho_x + \sin\theta \rho_y)$ , reforça a vorticidade na camada baroclínica. O termo extra da componente transversal do torque baroclínico ao incluir a inclinação,  $-\sin\theta \rho_y$ , contribui com um mecanismo diferenciado na geração de vorticidade.

A Figura 5.19a ilustra a evolução espacial da espessura de vorticidade. Com o aumento do ângulo, a espessura inicial da camada de mistura diminui, sendo mais acentuada para  $\theta = 0.10$ . Os campos de densidade para diferentes ângulos,  $\theta = 0$ ,  $\theta = 0.02$ ,  $\theta = 0.05$  e  $\theta = 0.10$  são apresentados na Figura 5.19b. Na camada de mistura com alta declividade ( $\theta = 0.10$  e  $Ri_H = 0.05$ ) o processo de enrolamento dos turbilhões de  $KH$  modifica fortemente a distribuição de densidade, favorecendo o crescimento da camada de densidade.

Foi observado na seção anterior que para  $\theta = 0$ , o aumento da estratificação resultou na diminuição da energia cinética máxima ( $K_{max}$ ), para cada posição fixa na direção  $x$  (Fig. 5.12b). Porém, ao incluir a declividade, para o caso em que  $Ri_H = 0.05$ , a energia  $K_{max}$  aumenta, a medida que o ângulo ( $\theta$ ) cresce (Fig. 5.20). Um dos fatores que afetou no aumento da energia cinética é o efeito desestabilizador produzido pela componente horizontal  $Ri_H \rho \sin \theta$  (Eq. 3.1). Como os movimentos verticais são mais intensos, o aumento da energia cinética  $K_{max}$ , para cada posição, é também caracterizado pelo aumento das tensões de Reynolds  $\langle v'v' \rangle$ . Na Figura 5.21 são apresentadas as tensões de Reynolds  $\langle v'v' \rangle$ , para as posições  $x = 80$ ,  $x = 100$  e  $x = 120$ , e para os ângulos  $\theta = 0, 0.02, 0.05$  e  $0.10$ .

O alargamento da camada de mistura está representado na Fig. 5.22, para os casos em que  $0 \leq \theta \leq 0.10$  quando  $Ri_H = 0.05$ . Esta figura apresenta as posições  $y_{0.05}$  e  $y_{0.95}$  definidas a partir do perfil médio de velocidade  $u$ . A origem hipotética do alargamento é em torno de  $x_0 = 22$  quando  $0 \leq \theta \leq 0.05$  e  $x_0 = 29.16$  quando  $\theta = 0.10$ . A taxa de alargamento ( $Al(x)$ ), cujo valor está indicado na Fig. 5.23, quantifica a influência da declividade ( $\theta$ ), apresentando um crescimento linear à medida que a declividade aumenta. A função  $f(\theta) = 0.412 + 0.064\theta$  é ajustada pelas taxas de alargamento encontradas.

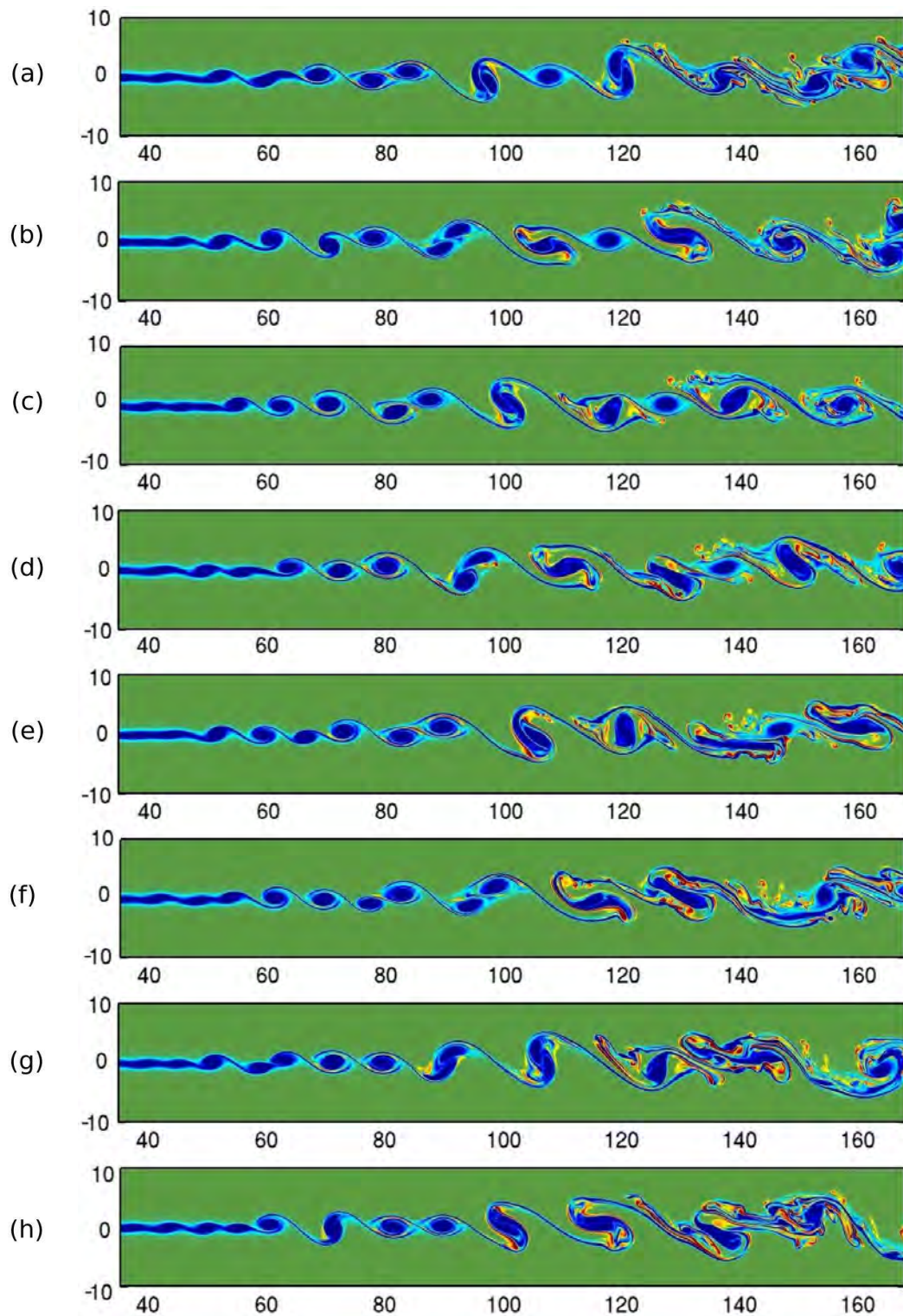


Figura 5.16: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.05$  e  $\theta = 0.02$  (Simulação  $2DS3_B$ ). Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 5$ ; (c)  $t = t_0 + 10$ ; (d)  $t = t_0 + 15$ ; (e)  $t = t_0 + 20$ ; (f)  $t = t_0 + 25$ ; (g)  $t = t_0 + 30$ ; (h)  $t = t_0 + 35$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

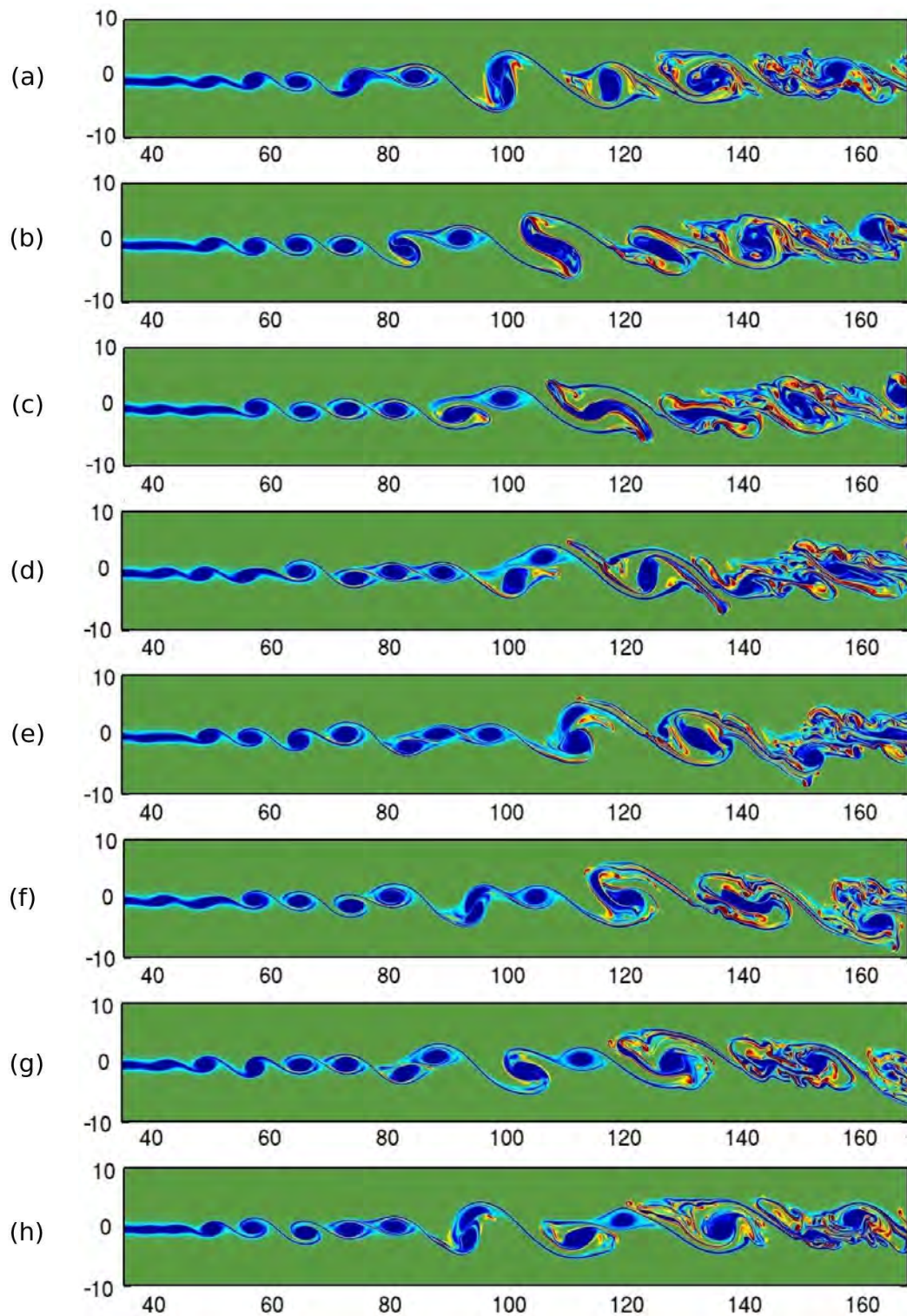


Figura 5.17: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.05$  e  $\theta = 0.05$  (Simulação  $2DS3_C$ ). Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 4$ ; (c)  $t = t_0 + 8$ ; (d)  $t = t_0 + 12$ ; (e)  $t = t_0 + 16$ ; (f)  $t = t_0 + 20$ ; (g)  $t = t_0 + 24$ ; (h)  $t = t_0 + 28$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

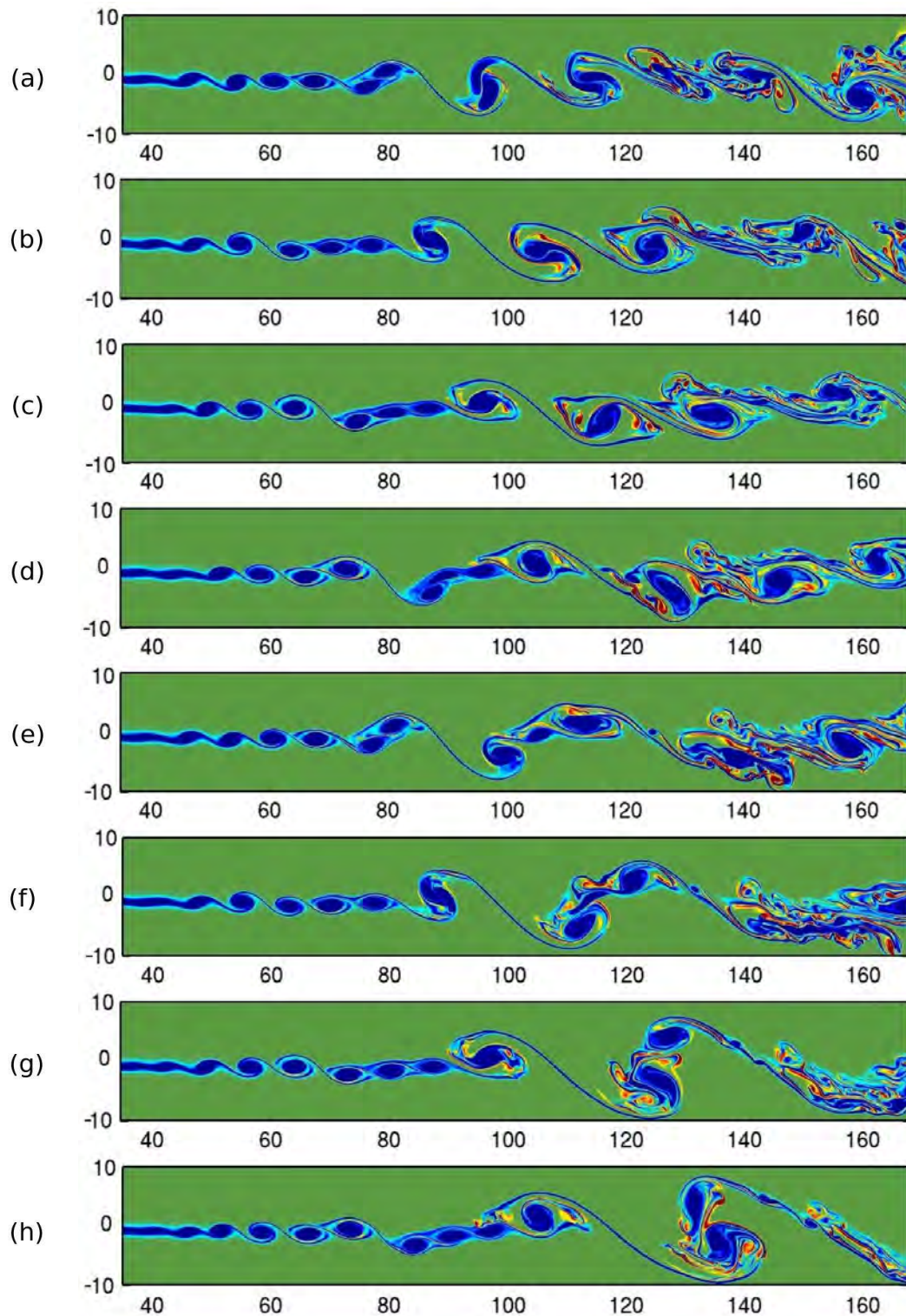


Figura 5.18: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.05$  e  $\theta = 0.10$  (Simulação  $2DS3D$ ). Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 4.5$ ; (c)  $t = t_0 + 9$ ; (d)  $t = t_0 + 13.5$ ; (e)  $t = t_0 + 18$ ; (f)  $t = t_0 + 22.5$ ; (g)  $t = t_0 + 27$ ; (h)  $t = t_0 + 31.5$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

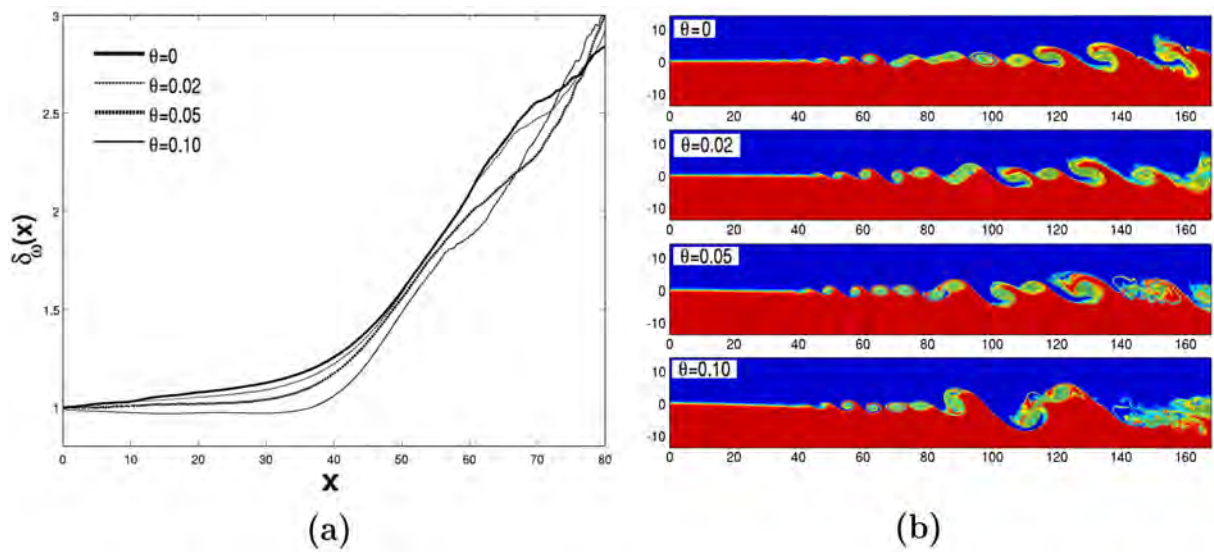


Figura 5.19: Simulação 2DS3: (a) Evolução espacial da espessura de vorticidade para  $Ri_H = 0.05$  ( $\theta = 0, 0.02, 0.05, 0.10$ ); (b) Campos de densidade para  $\theta = 0$  ( $t = t_0 + 25$ ),  $\theta = 0.02$  ( $t = t_0 + 5$ ),  $\theta = 0.05$  ( $t = t_0 + 24$ ),  $\theta = 0.10$  ( $t = t_0 + 22.5$ ).

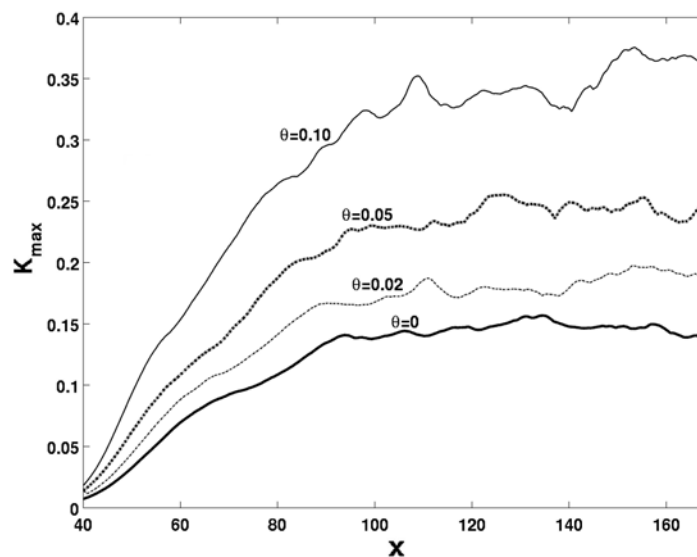


Figura 5.20: Evolução espacial da energia cinética máxima para  $Ri_H = 0.05$  ( $\theta = 0, 0.02, 0.05, 0.10$ ). Simulação 2DS3 (Taira *et al.*, 2014 [145]).

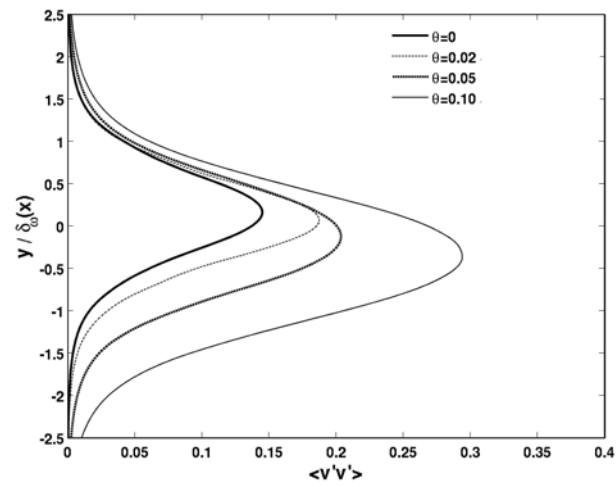
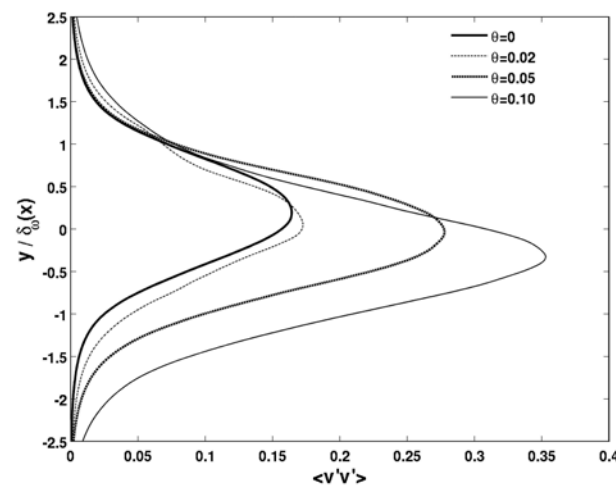
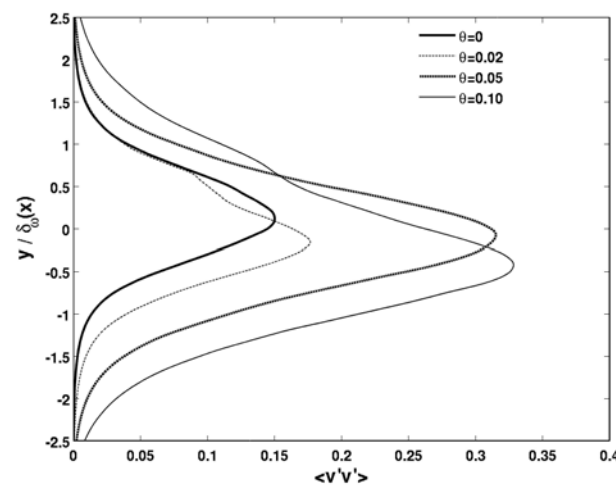
(a)  $x = 80$ (b)  $x = 100$ (c)  $x = 120$ 

Figura 5.21: Tensões de Reynolds  $\langle v'v' \rangle$  nas posições  $x = 80$ ,  $x = 100$  e  $x = 120$ , para  $Ri_H = 0.05$  ( $\theta = 0, 0.02, 0.05$  e  $0.10$ ). Simulação 2DS3.



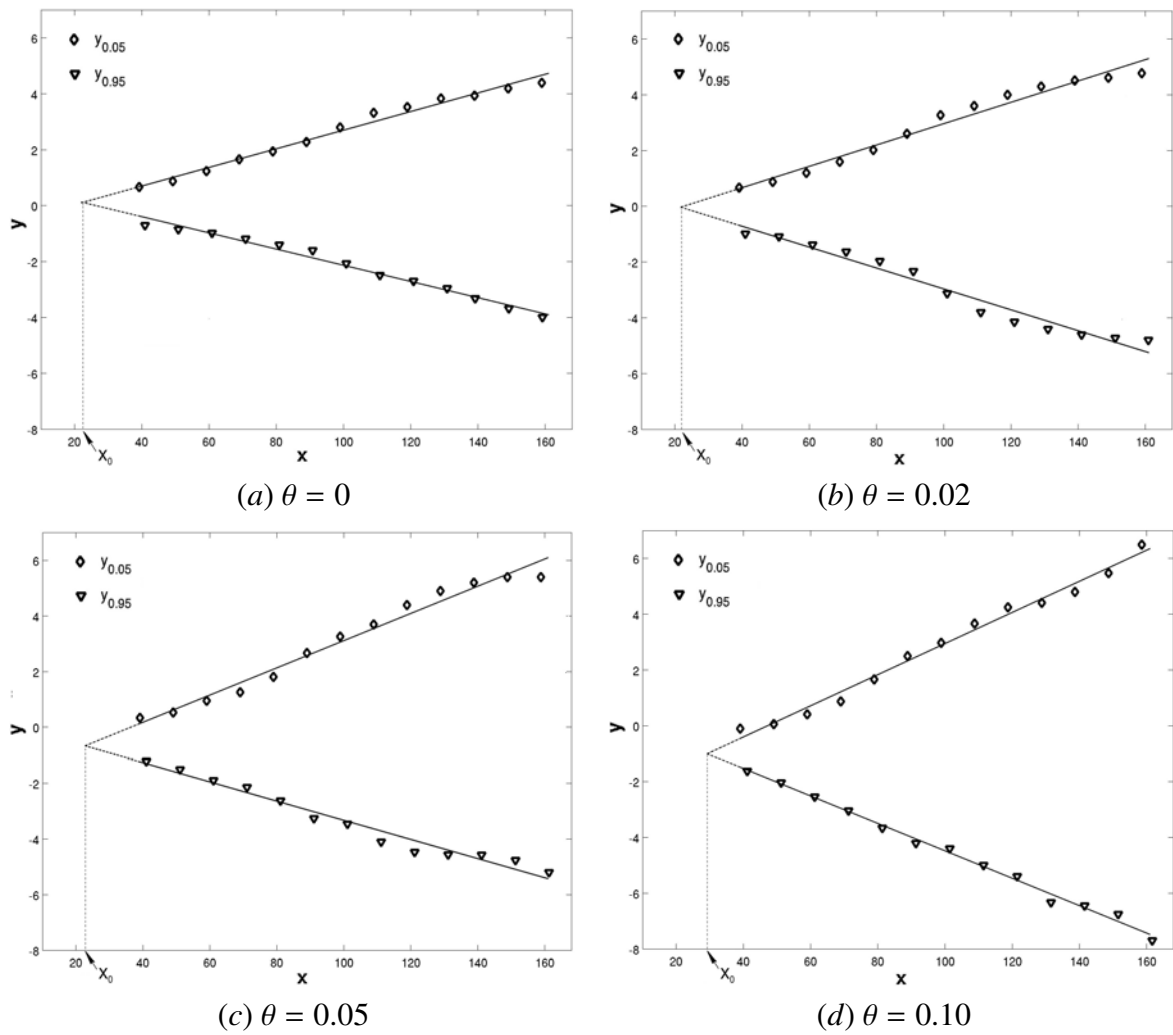


Figura 5.22: Alargamento da camada de mistura a  $Ri_H = 0.05$  ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ).

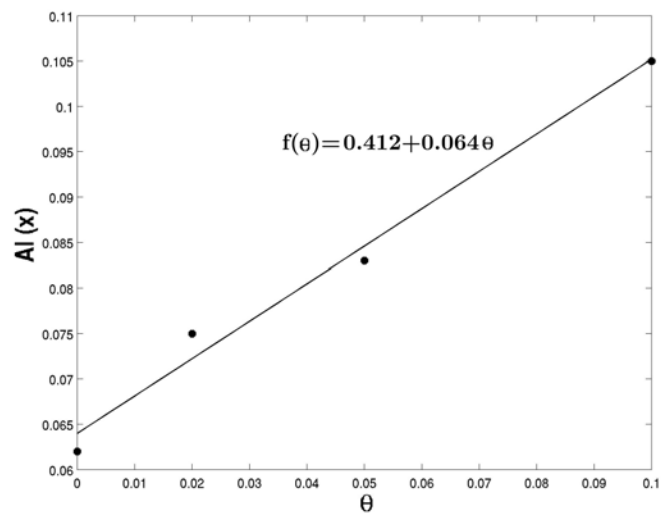


Figura 5.23: Taxa de alargamento da camada de mistura (●) em função da declividade ( $\theta$ ) e a função de ajuste (—). Simulação a  $Ri_H = 0.05$ .

### 5.3 Simulação a $Ri_H = 0.10$ e $\theta = 0.10$

Na seção anterior, para um número de Richardson fixo ( $Ri_H = 0.05$ ), verificou-se que a declividade potencializa a transição à turbulência no escoamento estratificado, pois acelera o desenvolvimento das instabilidades de  $KH$  e dos emparelhamentos, aumenta a energia cinética, causados pela componente horizontal  $Ri_H \sin\theta$  da equação de quantidade de movimento (Eq. 3.1). Nesta seção, o aumento do número de Richardson, de  $Ri_H = 0.05$  para  $Ri_H = 0.10$  a uma declividade de  $\theta = 0.10$ , permitirá que os vórtices sejam fortemente deformados e que surjam diversas instabilidades secundárias de  $KH$ . Na simulação  $2DS4_D$ , nota-se uma inclinação mais acentuada da interface entre as camadas na região  $0 \leq x \leq 40$ , como podem ser verificadas nos campos de vorticidade transversal (Fig. 5.24a) e de densidade (Fig. 5.24b), para o mesmo instante. Esta alta estratificação ( $Ri_H = 0.10$ ) e declividade ( $\theta = 0.10$ ) modificou o processo de enrolamento dos vórtices de  $KH$  interferindo na distribuição de densidade e proporcionando o crescimento das camadas de vorticidade e de densidade.

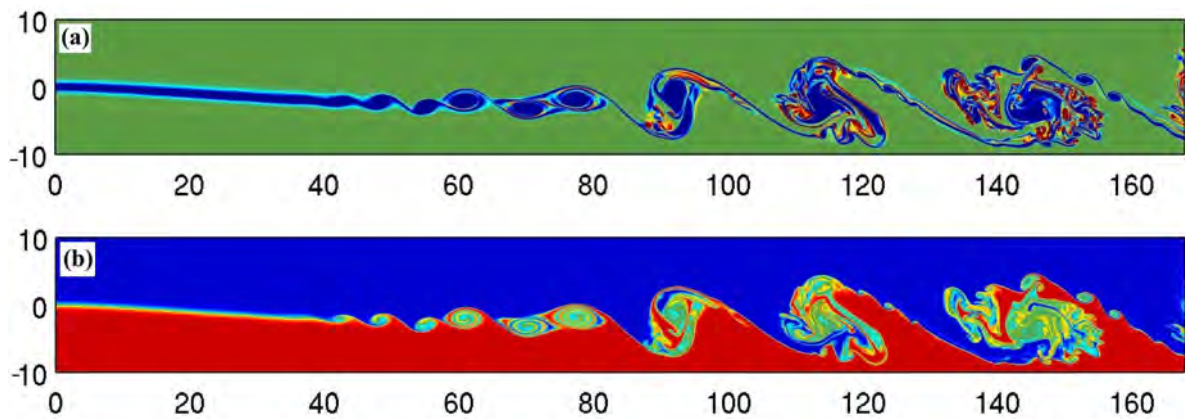


Figura 5.24: Simulação a  $Ri_H = 0.10$  e  $\theta = 0.10$ , no tempo  $t = t_0 + 21$  (Simulação  $2DS4_D$ ): (a) Campo de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ); (b) Campo de densidade.

Na Figura 5.25 observa-se que uma alta declividade  $\theta = 0.10$  acelera o desenvolvimento das instabilidades primárias e secundárias de  $KH$ . A transferência de energia através das pequenas escalas que pode ocorrer de forma semelhante na turbulência tridimensional, na simulação a  $Ri_H = 0.10$  e  $\theta = 0.10$  ( $2DS4_D$ ) desencadeia o desenvolvimento de sucessivas instabilidades secundárias na camada baroclínica. No trabalho de Martinez (2006 [94]) ocorreu o mesmo fenômeno a  $Re = 2000$ ,  $Ri_H = 0.083$ , sem declividade, em uma simulação temporal bidimensi-

onal.

Na Figura 5.26 é apresentada uma sequência de campos de vorticidade, destacando-se a formação de pequenas escalas indicadas pelas setas. Os estiramentos que ocorrem na camada baroclínica, por exemplo na região  $129 \leq x \leq 144$  (Fig. 5.26a), possibilitam a formação de novos pontos de estagnação (setas 4 a 8, na Fig. 5.26e). O surgimento de estruturas devido às instabilidades em pequenas escalas também foi observada nos experimentos de Thorpe (1971 [148]). O modelo teórico criado por Corcos & Sherman (1976 [28]), baseado na teoria de similaridade, analisa a evolução do escoamento próximo ao ponto de estagnação e considera a possibilidade do surgimento de pequenas escalas na camada baroclínica.

Nas maiores escalas, as subcamadas se entrelaçam com o fluido fortemente rotacional em direção ao centro da camada, formando subcamadas de fluido mais denso e menos denso. À medida que os vórtices secundários de  $KH$  são entranhados, a camada de vorticidade entre eles é novamente estirada e reforçada pelos efeitos baroclínicos, de modo que novas instabilidades podem se desenvolver na camada estirada [141].

A estratificação e a declividade afetam a formação dos vórtices longitudinais. Tal fenômeno ocorre devido aos gradientes de densidade, que contribuem localmente com mecanismos na geração ou destruição da vorticidade, por meio do torque baroclínico,  $-(\cos\theta \rho_x + \sin\theta \rho_y)$  (Eq. 3.7). A evolução no tempo do campo de densidade para a simulação  $2DS4_D$  é ilustrada na Fig. 5.27, que mostra também as sucessivas instabilidades secundárias.

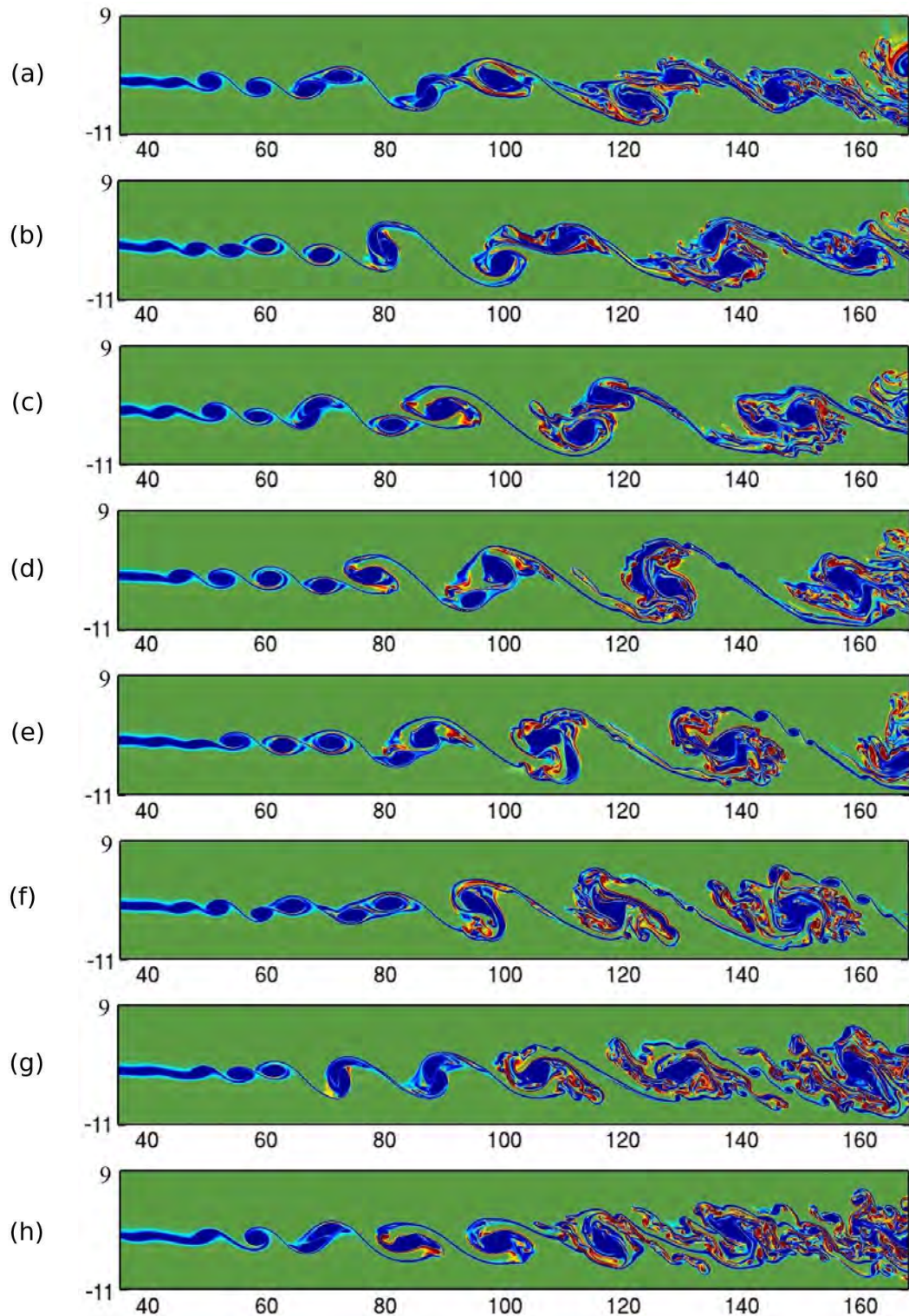


Figura 5.25: Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) para  $Ri_H = 0.10$  e  $\theta = 0.10$  (Simulação  $2DS4_D$ ): Nos tempos: (a)  $t = t_0$ ; (b)  $t = t_0 + 4.5$ ; (c)  $t = t_0 + 9$ ; (d)  $t = t_0 + 13.5$ ; (e)  $t = t_0 + 18$ ; (f)  $t = t_0 + 22.5$ ; (g)  $t = t_0 + 27$ ; (h)  $t = t_0 + 31.5$ . Escala de valores variando de  $-1.2$  (azul) a  $1.2$  (vermelho).

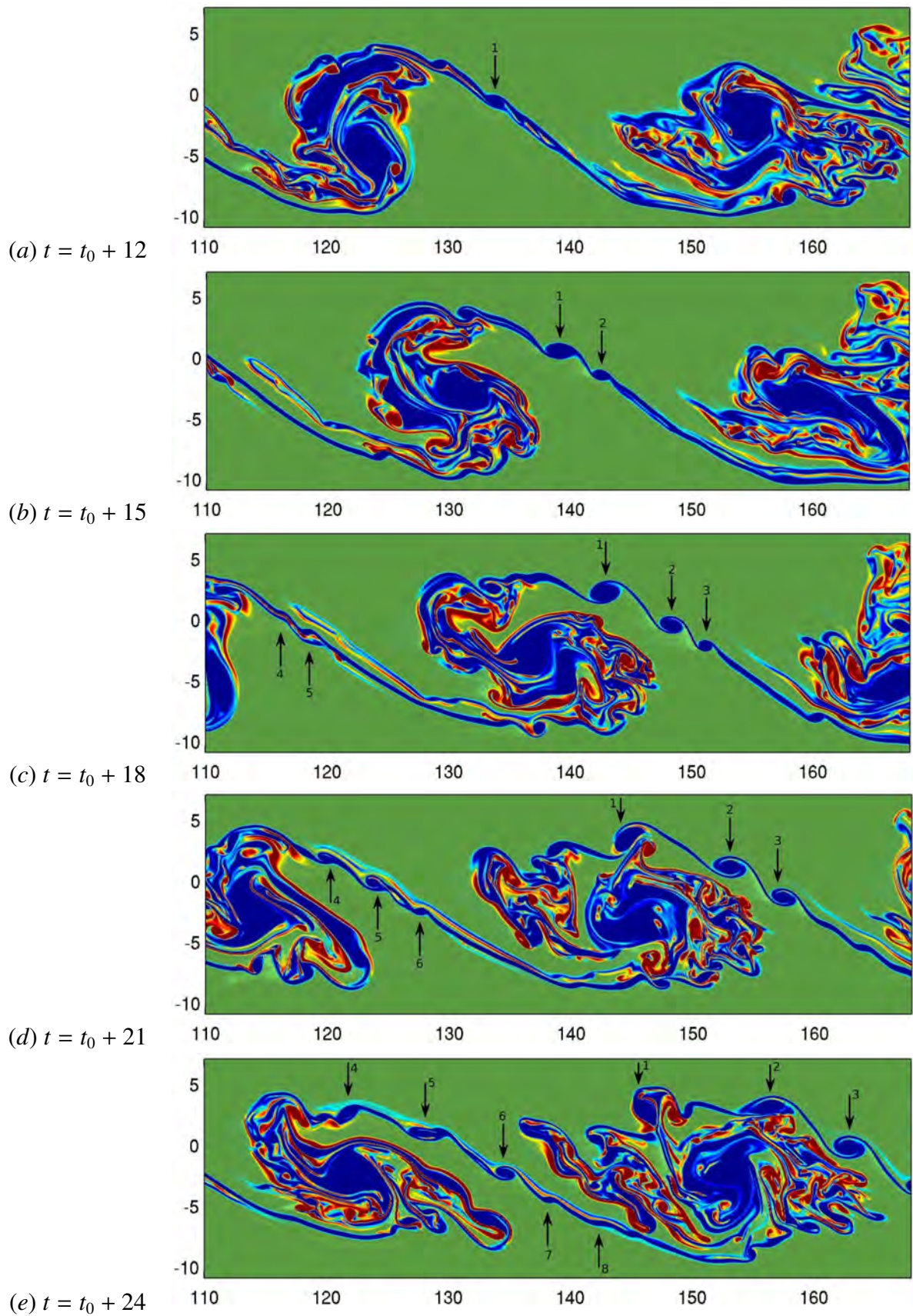


Figura 5.26: Sucessivas instabilidades secundárias na camada baroclínica ( $Ri_H = 0.10$ ,  $\theta = 0.10$ ). Campos de vorticidade transversal ( $\omega_z$ ) na região  $110 \leq x \leq L_x$  (Simulação  $2DS4_D$ ).

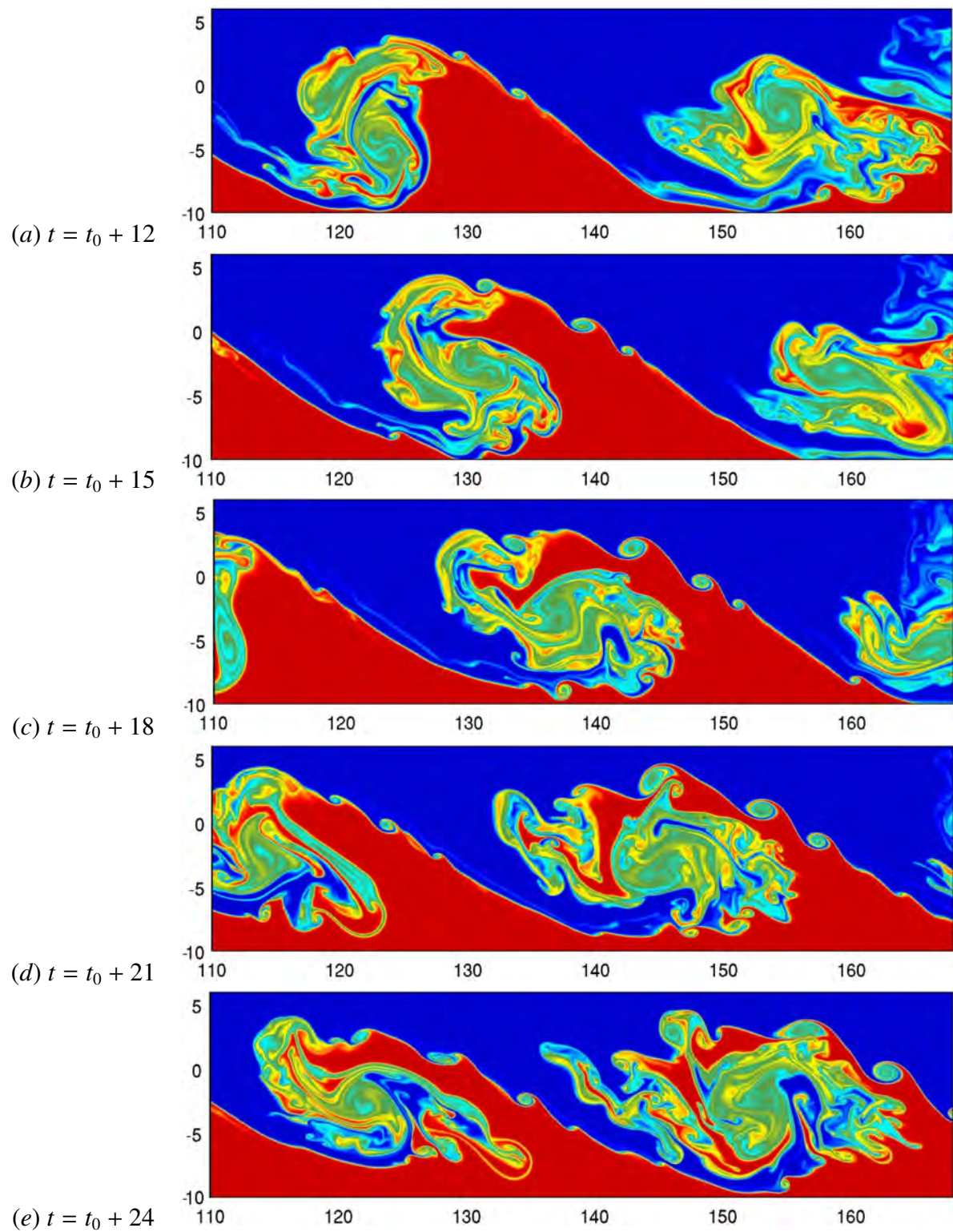


Figura 5.27: Campos de densidade. Simulação a  $Ri_H = 0.10$  e  $\theta = 0.10$  na região  $110 \leq x \leq L_x$  (Simulação  $2DS4_D$ ).

## Capítulo 6

# Estruturas tridimensionais

Em uma simulação em desenvolvimento espacial, a estrutura do escoamento na camada de mistura tridimensional é mais complexa do que na bidimensional (Delville *et al.*, 1999 [33]), e a organização dos vórtices na direção longitudinal tem uma forte influência sobre as estruturas dos turbilhões na direção transversal (Metcalf *et al.*, 1987 [100]; Bernal & Roshko, 1986 [11]). Portanto, é natural querer saber como os resultados serão impactados pela tridimensionalidade e o nível de turbulência de uma simulação tridimensional mais realista. Vimos nas simulações bidimensionais espaciais (*2DS*) que o principal mecanismo de crescimento na camada de mistura é por meio das interações de emparelhamento. Embora este mecanismo domine a região de pré transição da camada de mistura tridimensional, como veremos a seguir, isto não parece ocorrer após a região de transição (Ko *et al.*, 2008 [71]).

Utilizando Simulação Numérica Direta *DNS*, pretende-se analisar as estruturas longitudinais e transversais que se formam em camadas de mistura homogêneas e estavelmente estratificadas. Além da influência do número de Richardson, será avaliada a presença da declividade.

As simulações tridimensionais foram realizadas no Centro Nacional de Supercomputação (CESUP) da UFRGS, que disponibiliza o cluster SGI Altix (batizado Gauss) e opera com 64 estações de processamento, cada qual com 64 GB de RAM e 2 processadores dodecacore AMD Opteron (32 unidades com o modelo 6176 SE de 2.3 GHz e 32 outras com o modelo 6238, de 2.9GHz de frequência), totalizando 1536 núcleos de processamento e um desempenho teórico de 15.97 TFlops.

## 6.1 Testes no cluster GAUSS

Na Figura 6.1 são apresentados os resultados do tempo médio gasto para simular 100 passos de tempo. Nota-se que ocorre um decaimento no tempo de processamento, e, a partir de 19 núcleos por unidade de processamento, forma-se um patamar em torno de cinco segundos de duração.

O critério do sistema de filas no cluster GAUSS foi realizado com base nos resultados (Fig. 6.1) e na disponibilidade do cluster para cada usuário ( $21 \leq \text{núcleos/unidade} \leq 24$ ). A malha utilizada nestes testes e nas simulações tridimensionais, a serem apresentadas, é  $(n_x \times n_y \times n_z) = (1417 \times 505 \times 72)$ . Para o domínio computacional foi utilizado  $(L_x \times L_y \times L_z) = (140 \times 49 \times 14)$ , sendo que o mesmo foi baseado no trabalho de Silvestrini (1996 [129]). A quantidade de pontos escolhida para cada direção exige que  $n_x - 1$ ,  $n_y - 1$  e  $n_z$  sejam divisíveis por  $P_{row}$  e  $P_{col}$ . Neste caso foi utilizado  $P_{row} = P_{col} = 8$ , num total de 64 processos.

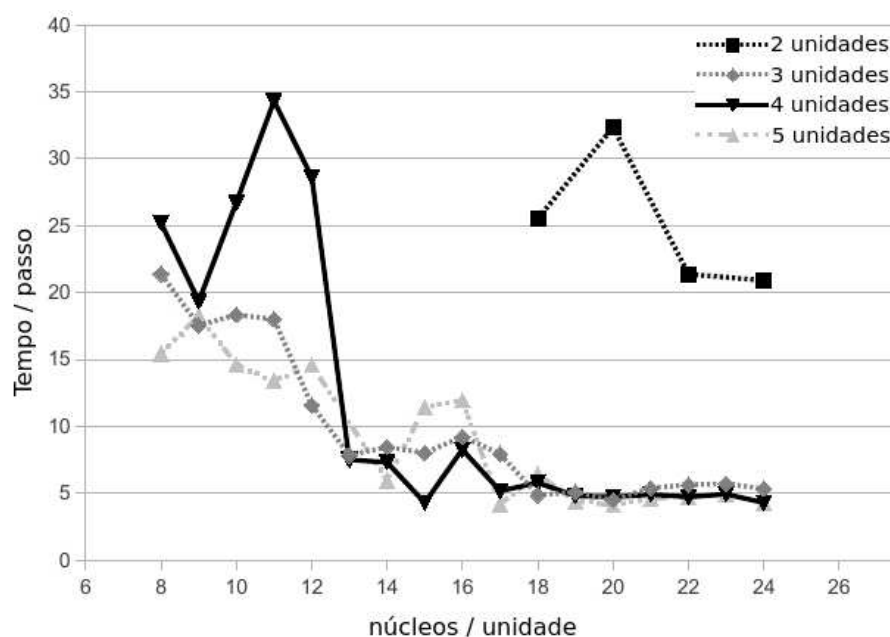


Figura 6.1: Variação no tempo em função do número de núcleos/unidade no cluster GAUSS.

O parâmetro  $A_{3d} = 0.12$  (Tab. 6.1), refere-se a amplitude máxima da função gaussiana introduzida na entrada do domínio e utilizada nas três direções. Os outros parâmetros utilizados nas simulações foram: passo de tempo  $\Delta t = 0.004$ , número de Reynolds  $Re = 1000$ , número de Prandtl  $Pr = 1$ , número de Richardson  $0 \leq Ri_H \leq 0.10$  e declividade  $0 \leq \theta \leq 0.10$ . De



acordo com os parâmetros citados, para uma simulação com cem mil iterações são necessários, aproximadamente, sete dias de simulações no cluster GAUSS.

Quando a declividade é nula ( $\theta = 0$ ), o domínio computacional é discretizado em uma malha cartesiana com refinamento na direção  $y$ , e ao incluir a declividade ( $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ ), o  $\Delta y$  é uniforme, conforme consta na Tab. 6.1. De acordo com a Fig. 6.2, o refinamento da malha concentra os pontos na interface da camada de mistura, em  $y = 0$ , apresentando resolução mínima  $\Delta y_{min} \cong 0.064$ , e resolução máxima  $\Delta y_{max} \cong 0.15$  no contorno  $y = \pm L_y/2$ , e nas outras direções a resolução satisfaz a relação  $\Delta_x = 2\Delta_z \cong 0.10$ . A grande vantagem de utilizar o refinamento é o aumento de 70% no número de pontos na região da espessura inicial da camada de mistura. Mais detalhes da técnica de refinamento utilizada no código *Incompact3d* podem ser conferidos no trabalho de Laizet & Lamballais (2009 [79]). Para o escoamento base são utilizados perfis tangente hiperbólico para a velocidade  $u$  (Eq. 3.18) e densidade  $\rho$  (Eq. 3.19).

Tabela 6.1: Parâmetros das simulações tridimensionais.

Simulação	$Ri_H$	$\theta$	$A_{3d}$	Malha	$\Delta t (\times 10^{-3})$
3DS 1 <sub>A</sub>	0	0	0.12	Refinada na direção $y$	4
3DS 2 <sub>A</sub>	0.025	0	0.12	Refinada na direção $y$	4
3DS 3 <sub>A</sub>	0.05	0	0.12	Refinada na direção $y$	4
3DS 3 <sub>B</sub>	0.05	0.02	0.12	Uniforme	4
3DS 3 <sub>C</sub>	0.05	0.05	0.12	Uniforme	4
3DS 3 <sub>D</sub>	0.05	0.10	0.12	Uniforme	4
3DS 4 <sub>A</sub>	0.07	0	0.12	Refinada na direção $y$	4
3DS 5 <sub>A</sub>	0.10	0	0.12	Refinada na direção $y$	4

Na tabela 6.1 consta a enumeração das simulações a serem apresentadas. O índice  $A$  representa as simulações da camada de mistura sem incluir a declividade, e  $B, C, D$ , referem-se aos ângulos 0.02, 0.05 e 0.10, respectivamente.

Nos termos viscosos da equação de Navier-Stokes (Eq. 3.1) foi introduzida uma técnica de dissipação numérica,  $k_c''(\Delta x)^2 = 4\pi^2$ , para o cálculo da segunda derivada. Esta técnica dissipa as pequenas escalas perto do número de onda de corte  $k_c$ , garantindo alta precisão e praticamente, livre de qualquer dissipação numérica em grandes escalas. Lamballais *et al.* (2011 [83]) utilizaram tal esquema no estudo do escoamento em um canal plano e na acústica emitida por uma camada de mistura compressível, obtendo ótimos resultados.

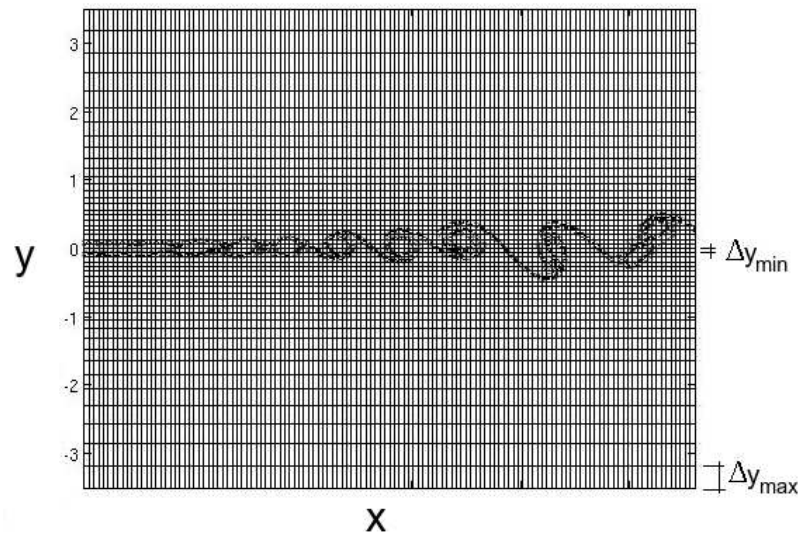


Figura 6.2: Malha refinada na direção  $y$ . O refinamento concentra os pontos na interface da camada de mistura ( $y = 0$ ).

## 6.2 Camada de mistura não estratificada

A instabilidade primária de  $KH$  se desenvolve completamente de maneira bidimensional, revelando a existência de estruturas coerentes bidimensionais [16]. Os turbilhões criados por esta instabilidade atingem a máxima amplitude (saturam), desenvolvendo as instabilidades secundárias, e por consequência, geram os movimentos tridimensionais. As tridimensionalidades, por sua vez, produzem instabilidades transversais, formando os vórtices longitudinais.

Pierrehumbert & Widnall (1982) [117] investigaram a origem dos vórtices longitudinais. Tais autores caracterizaram a instabilidade translativa como uma oscilação em fase com os turbilhões primários de  $KH$ . Tal instabilidade, responsável por desencadear a formação dos vórtices longitudinais, foi confirmada em vários trabalhos [11, 26, 27, 85, 94, 107, 129].

As Figuras 6.3 e 6.4a mostram, respectivamente, a evolução espacial da interface do escalar passivo  $\rho = 0.7\rho_0$  e da isosuperfície do módulo da vorticidade  $\|\vec{\omega}\| = 0.75$ , no tempo  $t = t_0 + 6$ . Ambas figuras, apresentam evidências da instabilidade de Kelvin-Helmholtz ( $KH$ ): a formação dos turbilhões primários e seus emparelhamentos. O turbilhão formado de  $KH$  aparece aproximadamente em  $x = 59$  e o primeiro emparelhamento em  $x = 81$ . Estas localizações são aproximadas pois variam de acordo com as estruturas a serem formadas ao longo do tempo. Em particular, foi identificada a localização das estruturas produzidas pelo enrolamento primário,

onde sua posição varia na direção longitudinal, com uma distância de cerca de um comprimento de onda  $\lambda_x \cong 7\delta_i$ , que corresponde também à distância de separação entre as estruturas primárias. Esse resultado confere com o experimento de Huang & Ho (1990) [58]. Na Figura 6.4b é apresentada a vista superior do módulo da vorticidade, onde se destacam as estruturas longitudinais, localizadas antes e depois do primeiro emparelhamento. As estruturas longitudinais concentram linhas de vorticidade que se esticam, devido ao campo de tensão criado entre os vórtices de *KH*.

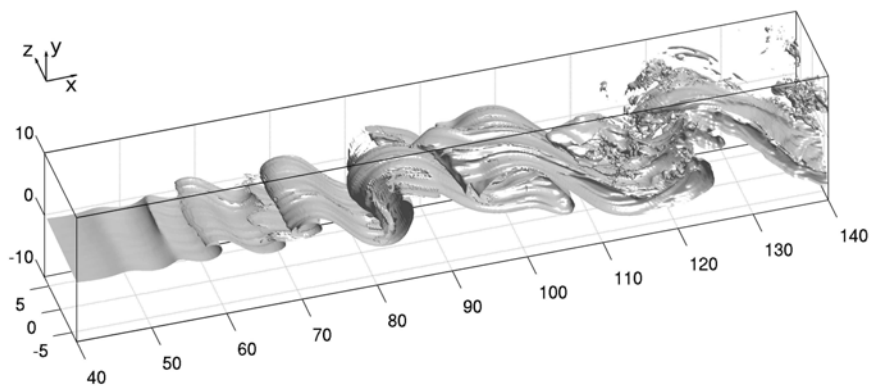


Figura 6.3: Isosuperfície do escalar passivo  $\rho = 0.7\rho_0$ , no tempo  $t = t_0 + 6$ . Simulação a  $Ri_H = 0$  (3DS 1<sub>A</sub>).

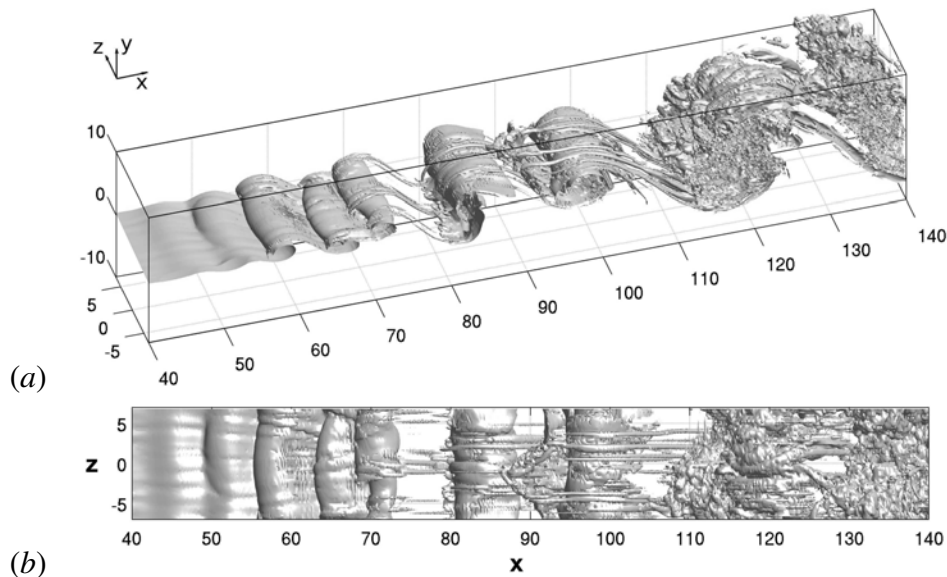


Figura 6.4: Isosuperfície do módulo da vorticidade  $\|\vec{\omega}\| = 0.75$ , no tempo  $t = t_0 + 6$ : (a) Vista em perspectiva; (b) Vista superior. Simulação a  $Ri_H = 0$  (3DS 1<sub>A</sub>).

Os perfis médios e as tensões de Reynolds indicadas nas Figuras 6.5 e 6.6, respectivamente, apresentam indícios de auto similaridade na região entre  $x = 83$  e  $x = 100$ . A coordenada verti-

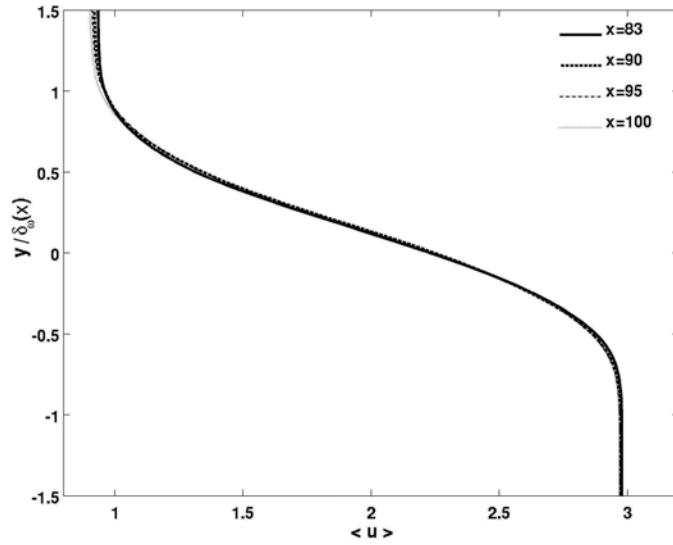


Figura 6.5: Evolução espacial do perfil médio de velocidade. Simulação a  $Ri_H = 0$  ( $3DS 1_A$ ).

cal é normalizada com a espessura de vorticidade local, correspondente à posição longitudinal.

O perfil médio de  $u$  foi calculado utilizando a equação

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \frac{1}{L_z} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{L_z} u(x, y, z, t) dz dt, \quad (6.1)$$

sendo,  $t_0$  o tempo inicial para o cálculo das médias e  $T$  o período.

A Figura 6.7a apresenta perfis médios da pressão,  $x = 83, 90, 95, 100$ , destacando uma variação na pressão superior e inferior. A existência de um gradiente de pressão evidencia o avanço da camada inferior, mais rápida, em relação à superior, mais lenta. Este fato pode explicar a variação da velocidade superior na Fig. 6.5, ao longo do comprimento longitudinal.

O crescimento da camada de mistura, que evolui conforme os perfis médios de velocidade, é mostrado na Fig. 6.7b. Nota-se que os tempos iniciais para o cálculo das médias influencia a evolução longitudinal da espessura  $\delta_\omega$ , já que é necessário para o cálculo de todas as estatísticas que o escoamento esteja totalmente desenvolvido. Para os tempos  $t_2 = 80$  e  $t_3 = 96$ , a espessura de vorticidade apresenta na região  $60 \leq x \leq 140$  (Fig. 6.7b), uma declividade  $d\delta_\omega/dx = 0.20R$ , que está entre os valores encontrados na literatura (Browand & Latigo ( $0.15R$ ) [14], Huang & Ho ( $0.27R$ ) [58]). O período de cálculo para as médias é  $T = 320\delta_i/U$ , ou aproximadamente, 45 emissões dos turbilhões de Kelvin- Helmholtz ( $KH$ ). Este mesmo período também foi utilizado para os casos estratificados. Na região de auto-similaridade,  $83 \leq x \leq 100$ , o crescimento

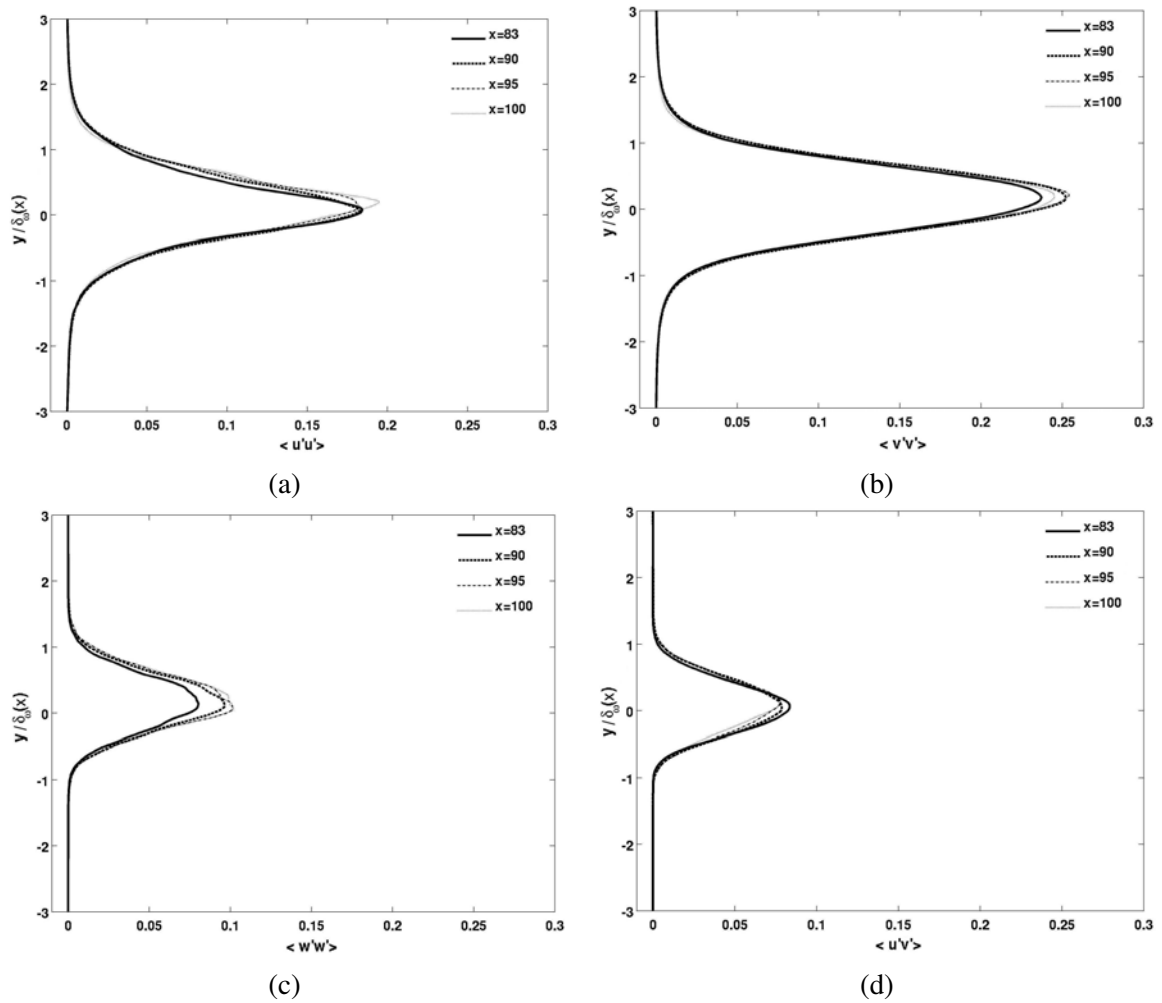


Figura 6.6: Tensões de Reynolds em coordenadas similares em diferentes posições: (a)  $\langle u'u' \rangle$ ; (b)  $\langle v'v' \rangle$ ; (c)  $\langle w'w' \rangle$ ; (d)  $\langle u'v' \rangle$ . Simulação a  $Ri_H = 0$  ( $3DS 1_A$ ).

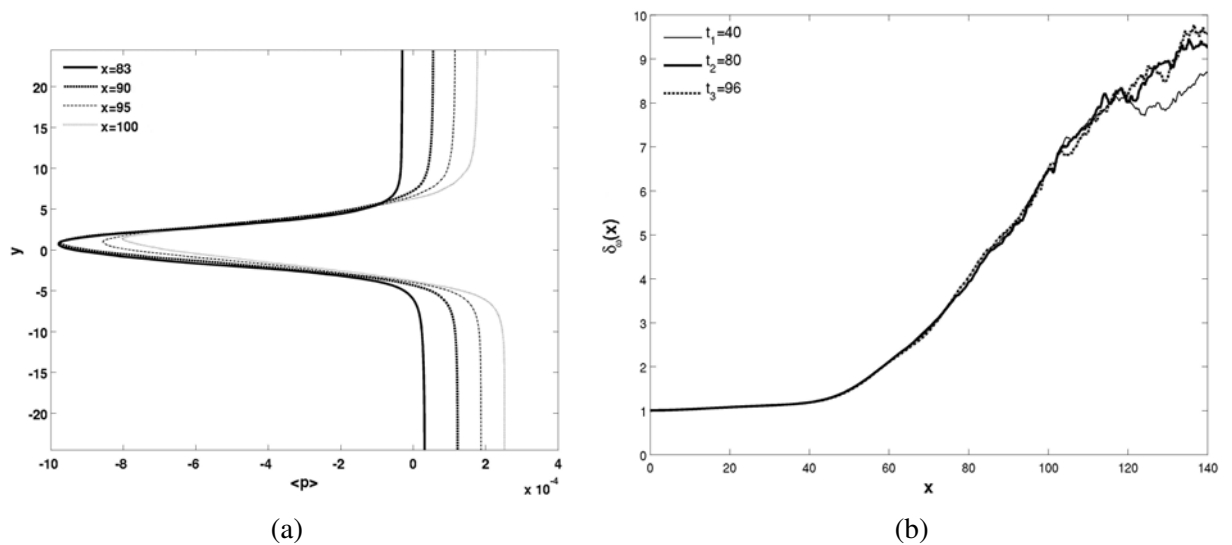


Figura 6.7: Simulação a  $Ri_H = 0$  ( $3DS 1_A$ ): (a) Evolução espacial do perfil médio de pressão; (b) Evolução espacial da espessura de vorticidade para 3 tempos iniciais.

da camada de mistura é aproximadamente linear, condição necessária para a existência de um regime auto-similar (Bell & Mehta, 1990 [9]). Para todas as simulações tridimensionais será utilizado o tempo inicial para o cálculo das médias de  $t = 96$ , visto que o escoamento apresenta-se totalmente desenvolvido.

Na Figura 6.8 são apresentadas as isosuperfícies de pressão para o valor  $P = -0.0027\rho_0 U^2$ , em  $t = t_0 + 6$ . O critério para identificar as estruturas coerentes através de isosuperfícies de pressão não evidencia a existência de vórtices longitudinais, como no critério  $Q$ , mas destaca os modos fundamentais de  $KH$  e os modos subharmônicos (emparelhamentos) (Dubief & Delcayre, 2000 [40]).

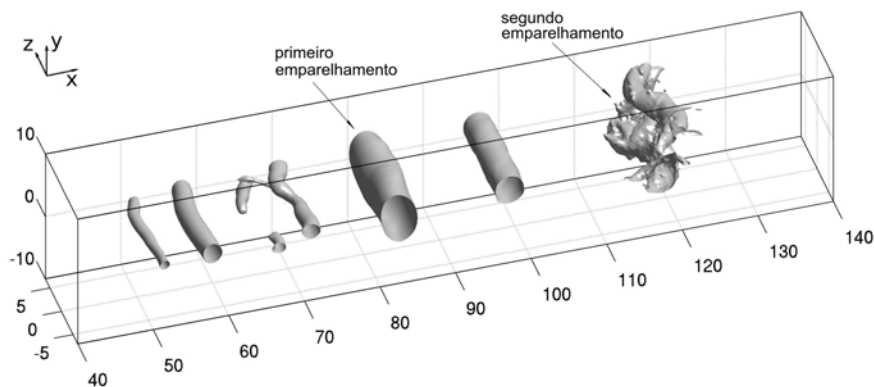
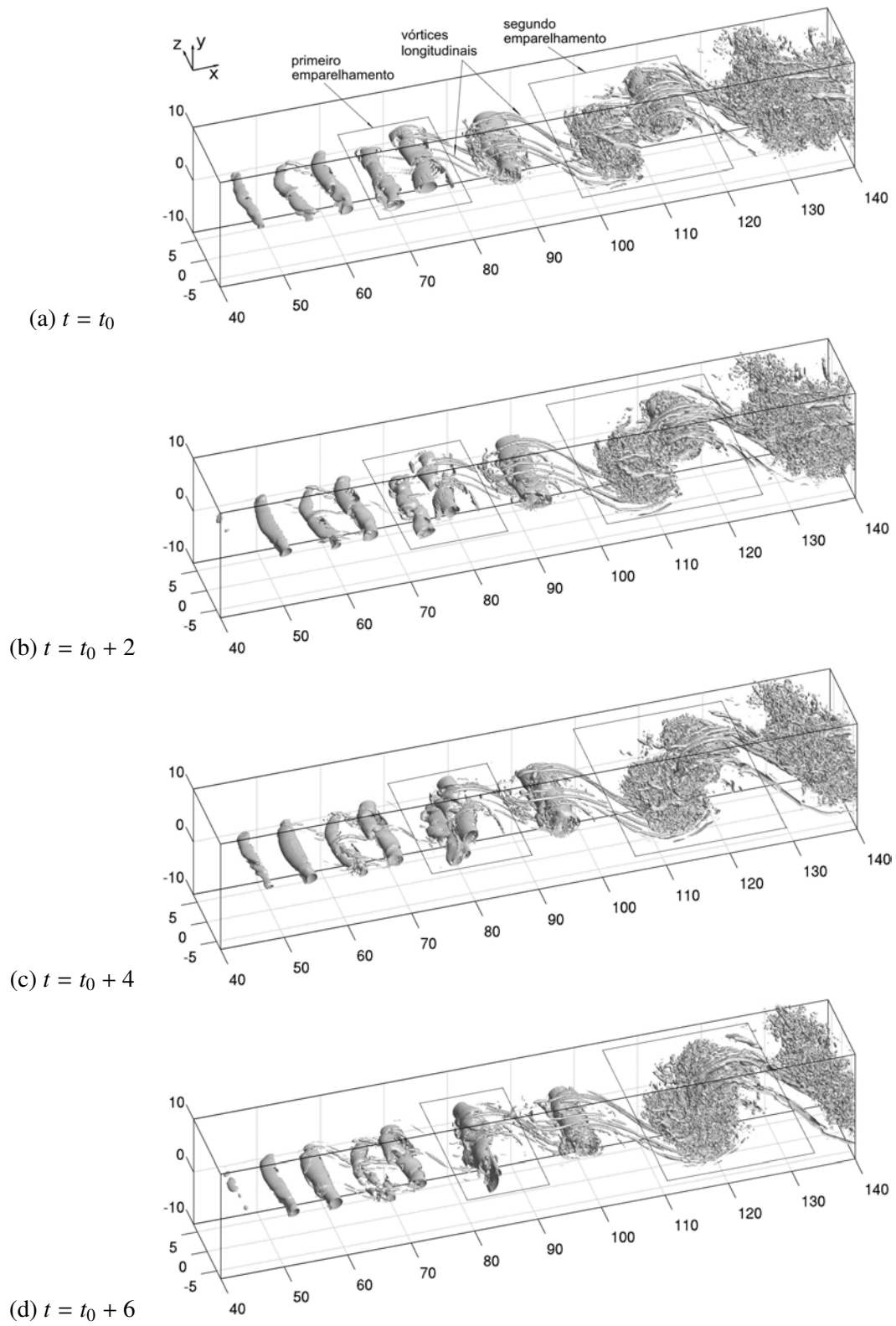


Figura 6.8: Isosuperfície de pressão,  $P = -0.0027\rho_0 U^2$ , em  $t = t_0 + 6$ . Simulação a  $Ri_H = 0$  (3DS 1<sub>A</sub>).

Os resultados de Klaassen & Peltier [67, 68, 69], baseados na superposição de perturbações tridimensionais e infinitesimais, mostraram que a instabilidade elíptica (centrada no núcleo) desenvolve-se antes da instabilidade hiperbólica (centrada na região entre os turbilhões), mas sua taxa de crescimento decai antes que o turbilhão de  $KH$  atinja a máxima amplitude. A instabilidade elíptica é posteriormente superada por um crescimento mais rápido da instabilidade hiperbólica. Segundo os autores, em situações de escoamento estratificado, a instabilidade elíptica perde a dominância para a instabilidade hiperbólica. Porém, nos casos de escoamentos homogêneos, as duas instabilidades competem por dominância (Klaassen & Peltier, 1991 [69]).

A dinâmica da camada de mistura não estratificada,  $Ri_H = 0$ , é apresentada na Fig. 6.9, através das isosuperfícies do critério  $Q$ . A evolução no tempo permite a visualização das estruturas em dois estágios. No primeiro, o comprimento de onda mais amplificado, o modo

fundamental, se amplifica e desenvolve os turbilhões transversais de  $KH$ . No segundo estágio, o segundo modo mais amplificado, o subharmônico, induz o emparelhamento dos turbilhões de  $KH$  que se manifesta duas vezes, no primeiro e segundo emparelhamento (Fig. 6.9a). A instabilidade translativa, a qual surgiu antes do primeiro emparelhamento, é sugerida pela teoria de Pierrehumbert & Widnall (1982) [117], como a responsável pelo surgimento dos vórtices longitudinais em camadas homogêneas. O comportamento da condição de contorno em  $y = L_x$  (Equações 3.12 e 3.13) permite a saída dos turbilhões, conforme constam na evolução temporal e espacial apresentadas nas Fig. 6.9.

Figura 6.9: Isosuperfície de  $Q = 0.3$ . Simulação a  $Ri_H = 0$  ( $3DS 1_A$ ).



## 6.3 Camada de mistura estratificada

Nesta seção são apresentadas as simulações  $3DS2_A$ ,  $3DS3_A$ ,  $3DS4_A$  e  $3DS5_A$  para o caso não inclinado ( $\theta = 0$ ). Quando o turbilhão de  $KH$  atinge a máxima amplitude e satura, este é suscetível a uma família de instabilidades secundárias tridimensionais (Bernal & Roshko, 1986 [11]; Schowalter *et al.*, 1994 [125]). Em um escoamento fortemente estratificado, o mecanismo das instabilidades secundárias está associado com a desestabilização convectiva das subcamadas instáveis. As instabilidades convectivas gravitacionais são criadas durante o enrolamento dos turbilhões de  $KH$ , e ocorrem quando o fluido mais denso se encontra acima do menos denso.

As estruturas vorticais primárias ao se desenvolverem em uma camada de mistura estão sujeitas a uma grande variedade de instabilidades secundárias, dentre essas destaca-se os emparelhamentos, ou instabilidades subharmônicas (Winant & Browand, 1974 [159]). Os vórtices primários de  $KH$  giram em torno de si e, eventualmente, fundem-se para formar um turbilhão maior. No entanto, evidências experimentais têm apresentado que em camadas estratificadas e não estratificadas, sugerem que o aparecimento espontâneo de movimentos tridimensionais em pequenas escalas é um precursor essencial da transição para a turbulência completamente desenvolvida (Caulfiel & Peltier, 2000 [22]).

Em domínios tridimensionais, a instabilidade secundária de  $KH$  pode ocorrer de maneira bidimensional. Martinez (2006 [94]), através de *DNS* realizada a  $Re = 500$ ,  $Ri_H = 0.083$ , com uma perturbação de amplitude infinitesimal de  $10^{-6}$  na direção transversal, constatou que a instabilidade secundária de  $KH$  é de natureza bidimensional. Em outro trabalho, Martinez *et al.* (2007 [97]), utilizando  $Re = 2000$  e *LES*, observaram evidências das instabilidades secundárias de  $KH$  na camada de mistura tridimensional, para os casos estratificados a  $Ri_H = 0.025$  e  $Ri_H = 0.05$ .

Em camadas de mistura estratificada, as experiências têm mostrado que a região entre os vórtices, tornam-se o local de fortes movimentos tridimensionais, que assumem a forma de estrias vorticais longitudinais, referidas na língua inglesa como "ribs" (Hussain, 1983 [61]). Essas estruturas vorticais, em camada de mistura homogênea, que estabelecem o surgimento de movimentos em pequena escala e a transição para a turbulência, têm sido foco de estudo, tanto numericamente como experimentalmente. Entre os experimentalistas destacam-se Corcos

& Lin (1984 [27]), Bernal & Roshko (1986 [11]), Metcalfe *et al.* (1987 [100]), Lasheras & Choi (1988 [85]), Schowalter *et al.* (1994 [125]). Entre os numericistas, podem ser citados os trabalhos de Rogers & Moser (1992 [122]), Lesieur *et al.* (1995 [90]), Silvestrini (1996 [129]), Comte *et al.* (1998 [26]), Druzhinin *et al.* (2001 [39]), Peltier & Caulfield (2003 [116]), Martinez *et al.* (2007 [97]), Laizet *et al.* (2010 [81]), Arratia *et al.* (2013 [4]).

Em seus experimentos clássicos, Thorpe [150, 151] observou que em camadas de mistura estratificada ocorrem o surgimento do enrolamento dos vórtices transversais em distintos turbilhões de  $KH$ , e sendo estes, sujeitos a várias instabilidades secundárias. Koop & Browand (1979 [74]) e Schowalter *et al.* (1994 [125]) apresentaram evidências de que a estratificação inibe a formação das instabilidades subharmônicas. Estruturas periódicas longitudinais foram também observadas na região entre os turbilhões e na periferia dos núcleos dos turbilhões de  $KH$  [150, 86, 125].

Ao analisar a presença da estratificação nas instabilidades tridimensionais, serão apresentadas várias simulações numéricas para diversos números de Richardson  $0.025 \leq Ri_H \leq 0.10$ , conforme mostra a Tab. 6.1. Na Fig. 6.10a, destaca-se a evolução da espessura da camada de mistura ( $\delta_\omega$ ), quantificando a influência do número de Richardson ( $Ri_H$ ) e mostrando que quanto maior o número de Richardson menor a espessura da camada de vorticidade. Simulações numéricas espaciais e bidimensionais, apresentadas no capítulo 5, e simulações temporais existentes na literatura [94, 143, 22, 69, 134], corroboram esta influência. Comparando-se as Figuras 6.10a (simulação  $3DS$ ) e 5.8a (simulação  $2DS$ ), nota-se que a tridimensionalidade produz um efeito diferenciado no crescimento da espessura de vorticidade. As figuras mostram que há um alargamento da espessura de vorticidade a partir de  $x = 30$  nas simulações  $2DS$  enquanto que nas simulações  $3DS$  somente a partir de  $x = 40$ . Nas simulações bidimensionais em desenvolvimento espacial (cap. 5), os campos de vorticidade confinam-se em um plano, formando estruturas diferenciadas, quando comparadas com as simulações tridimensionais, principalmente, após o emparelhamento. A organização dos vórtices na direção longitudinal tem uma forte influência sobre as estruturas dos turbilhões na direção transversal [100, 11]. Enquanto, nas simulações bidimensionais, o principal mecanismo na evolução da camada de mistura ocorre através das interações entre os emparelhamentos, nas simulações tridimensionais, o mesmo não

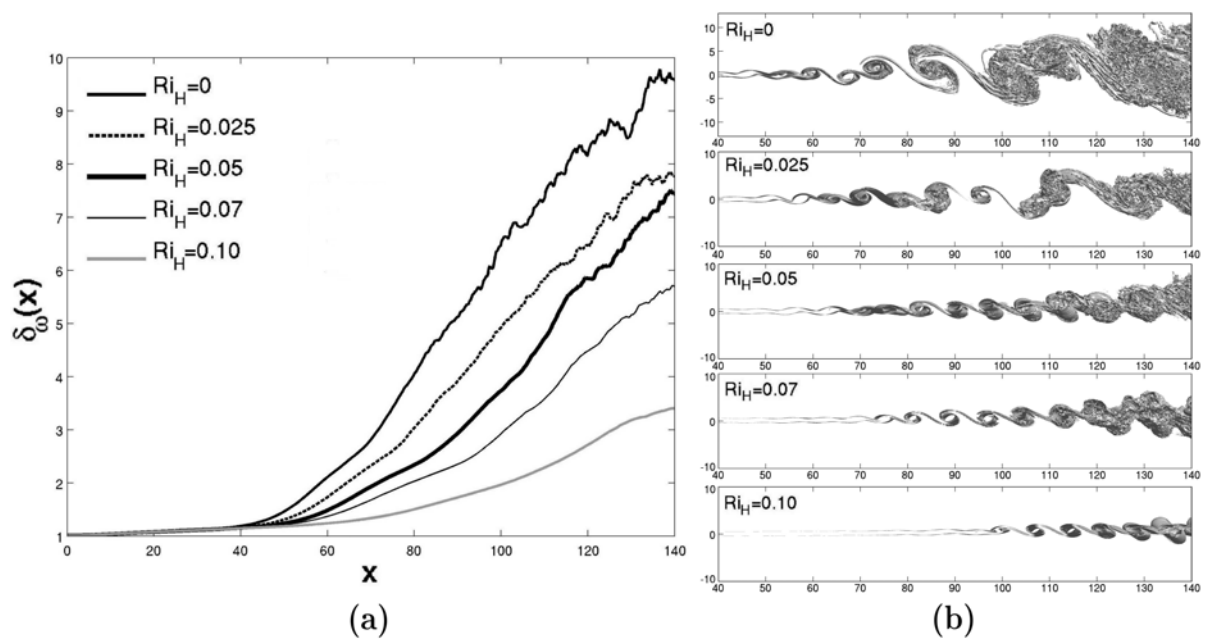


Figura 6.10: (a) Evolução espacial da espessura de vorticidade para diferentes estratificações,  $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ ; (b) Vista lateral da isosuperfície do módulo da vorticidade  $\|\vec{\omega}\| = 1.0$  para diferentes estratificações.

ocorre após a região de transição à turbulência.

Nas vistas laterais das isosuperfícies do módulo de vorticidade  $\|\vec{\omega}\| = 1.0$  (Fig. 6.10b), nota-se o efeito da estratificação na diminuição do tamanho dos turbilhões de  $KH$  e na espessura de vorticidade, conforme o  $Ri_H$  aumenta. O crescimento da estratificação desencadeia a dominância da força de empuxo, diminuindo o cisalhamento, que é uma fonte de energia cinética das perturbações. A variação do gradiente longitudinal de densidade,  $\rho_x$ , reduz a vorticidade dentro do turbilhão. Esta redução, conseqüentemente, promove uma atenuação dos movimentos geradores das instabilidades elíptica e translativa (Martinez, 2006 [94]).

A taxa da espessura de vorticidade, definida por Brown & Roshko (1974 [16]) para a camada de mistura homogênea e aplicada nos casos estratificados  $2D$  (cap. 5), é novamente aplicada nas simulações tridimensionais para  $Ri > 0$ . Na tabela 6.2 são apresentadas as declividades da espessura de vorticidade para  $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ , e suas respectivas regiões de cálculo. A declividade  $(1/R)d\delta_{\omega}/dx$ , normalizada pela razão  $R$ , configura a influência da estratificação na evolução da espessura de vorticidade.

Uma outra forma de verificar o crescimento longitudinal da camada de mistura pode ser estimada pelo perfil médio de velocidade  $\langle u(x, y_{\alpha}) \rangle$ , definido na Eq. 2.17. A Figura 6.11 apresenta

Tabela 6.2: Declividade da espessura de vorticidade.

$Ri_H$	Intervalo	$(1/R)d\delta_\omega/dx$
0	$60 \leq x \leq 140$	0.201
0.025	$60 \leq x \leq 140$	0.172
0.05	$60 \leq x \leq 140$	0.159
0.07	$60 \leq x \leq 140$	0.118
0.10	$60 \leq x \leq 140$	0.062

a localização das ordenadas  $y_\alpha$  nos perfis médios de velocidade  $u$ . A taxa de alargamento (Eq. 5.1) da camada de mistura homogênea foi de  $Al(x) = 0.159$  no intervalo  $50 \leq x \leq 130$ . Apesar deste resultado estar abaixo dos resultados dos autores, Patel [113] ( $Al(x) = 0.19$ ) e Champagne *et al.* [23] ( $Al(x) = 0.21$ ), a taxa de alargamento é um referencial que indica o comportamento do crescimento da camada de mistura e este indicativo poderá permitir um comparativo com os casos estratificados.

O efeito da estratificação sobre o alargamento da camada de mistura, pode ser verificado na Fig. 6.11a-e. O início da formação do modo fundamental de  $KH$  desloca-se para a direita, a medida que o número de Richardson aumenta, e desta forma, diminui a região de turbulência. As taxas  $Al(x)$ , como era previsto, decrescem com o aumento da estratificação. Para os casos em que  $0 \leq Ri_H \leq 0.07$ , a origem hipotética do alargamento da camada de mistura é em torno de  $x_0 = 40$ , e para  $Ri_H = 0.10$ , é  $x_0 = 3.61$ . A função  $f(Ri_H) = 0.159 \times 10^{-7.75Ri_H}$ , cujo gráfico possui linha contínua, foi ajustada pelos resultados, onde 0.159 é igual ao valor da taxa para o caso homogêneo (Fig. 6.11f).

Pierrehumbert & Widnall (1982) [117] investigaram a formação dos vórtices longitudinais em camada não estratificadas. A teoria [117] sugere que a instabilidade translativa é a responsável pelo surgimento dos vórtices longitudinais. Tal instabilidade é caracterizada por uma oscilação transversal em fase com os turbilhões de  $KH$ . Na Figura 6.12 são apresentadas as iso-superfícies do critério  $Q$ , onde  $0.025 \leq Ri \leq 0.10$ . Verificam-se que a instabilidade translativa atua antes do emparelhamento e os vórtices longitudinais são mais evidentes para  $Ri_H \leq 0.07$  (Fig. 6.12). Ao final do domínio, parecem surgir algumas estruturas longitudinais para o caso mais estratificado, quando  $Ri_H = 0.10$  (Fig. 6.12d). As estruturas vorticais longitudinais são estiradas entre os turbilhões de  $KH$  para o caso homogêneo (Fig. 6.9). Para  $Ri_H > 0$ , essas

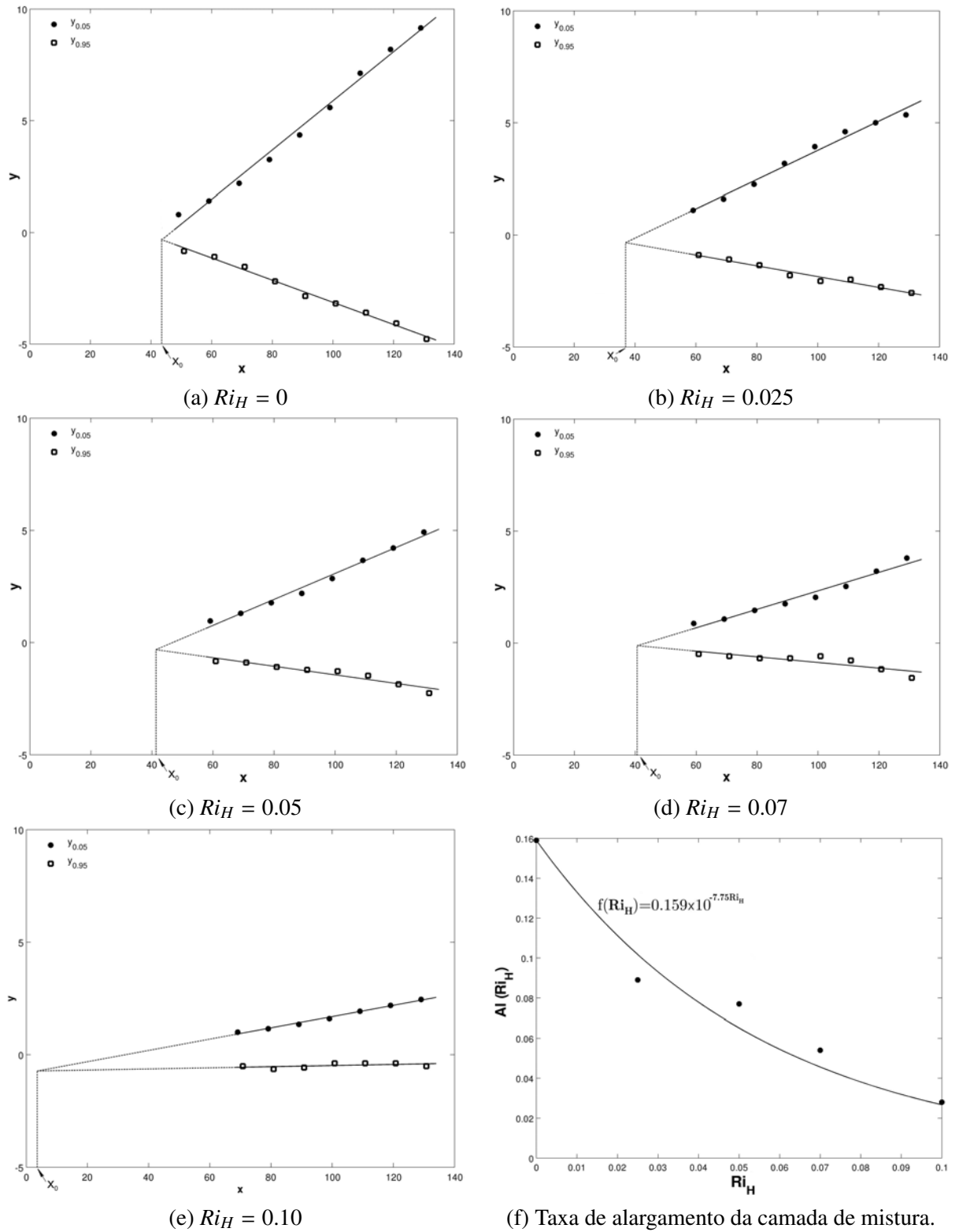


Figura 6.11: Alargamento da camada de mistura. Simulações 3DS: (a)3DS 1<sub>A</sub>; (b)3DS 2<sub>A</sub>; (c)3DS 3<sub>A</sub>; (d)3DS 4<sub>A</sub>; (e)3DS 5<sub>A</sub>; (f) Taxa de alargamento da camada de mistura (●) em função do número de Richardson e a função de ajuste (–).

estruturas são enfraquecidas devidas ao efeito da estratificação. O surgimento dessas estruturas longitudinais também foram obtidas por Martinez *et al.* (2007 [97]), utilizando Simulação de Grandes Escalas (*LES*) em uma configuração temporal. Os referidos autores utilizaram como parâmetros adimensionais,  $Re = 2000$  e  $Ri_H \leq 0.05$ .

Comparando-se as figuras 5.8b e 6.12, nota-se que a instabilidade primária de *KH* se desenvolve de maneira bidimensional mas, após o primeiro emparelhamento, as configurações das simulações bidimensionais e tridimensionais são completamente distintas. Enquanto nas simulações bidimensionais formam-se a camada baroclínica, as instabilidades secundárias e os vórtices contra-rotativos, nas simulações tridimensionais desenvolvem-se uma quantidade maior de pequenas estruturas após o surgimento do primeiro modo subharmônico. Portanto, o efeito da tridimensionalidade tem um papel preponderante na dinâmica da camada de mistura estratificada. Nos testes numéricos tridimensionais, à medida que o número de Richardson aumenta ocorre um aumento da quantidade de estruturas bidimensionais e uma diminuição das pequenas estruturas.

No intuito de analisar o comportamento de oscilação da formação dos turbilhões de *KH*, foram computados os sinais das componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  da velocidade, ao longo do tempo em  $y = 0$  e nas posições  $x = 47, 59, 71, 83, 95, 107, 119$  e  $130$ . Estas sondas são definidas por sondas  $S1$  a  $S8$ , conforme a Fig. 6.13. Foi realizada uma média na direção transversal para cada componente e, a partir destes sinais, calcula-se o espectro da energia cinética, obtida a partir da transformada de Fourier. Na simulação da camada de mistura homogênea (Fig. 6.14a), distinguem-se picos com frequência aproximada de  $St = f\delta_i/U_C = 0.14$ , em  $x = 47$  e  $x = 59$ , respectivamente nas sondas  $S1$  e  $S2$ . O pico torna-se mais pronunciado em  $x = 59$ , onde os turbilhões de *KH* estão bem formados. O valor da frequência fundamental confere com estudos de Monkewitz & Huerre (1982) [106] e Ho & Huerre (1984) [56], que utilizaram  $R = \Delta U/(2U_C) = 1/2$ . Em  $x = 83$  (sonda  $S4$ ) e  $x = 119$  (sonda  $S7$ ), posições respectivas das frequências do primeiro e do segundo subharmônicos, as energias cinéticas não são tão intensas em comparação com a posição,  $x = 59$ . Nas outras sondas aparecem outras frequências,  $St=0.025$  e  $St=0.0375$ , cujas energias cinéticas são menos intensas.

Na Tabela 6.3 são apresentadas as frequências do modo fundamental de *KH* para cada po-

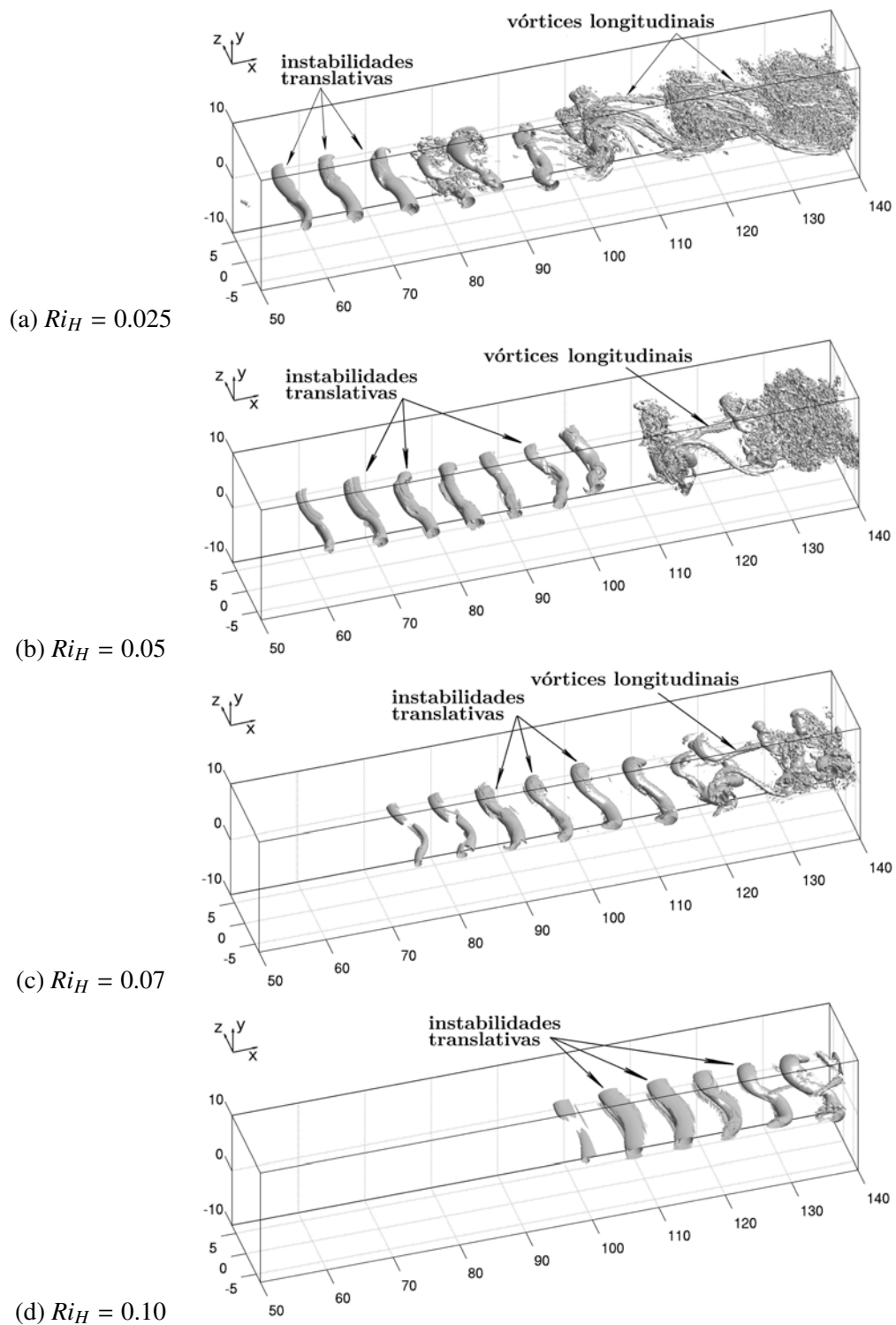


Figura 6.12: Isosuperfície do critério  $Q$ . Simulações 3DS: (a)  $Ri_H = 0.025$ ,  $Q = 0.35$ ; (b)  $Ri_H = 0.05$ ,  $Q = 0.35$ ; (c)  $Ri_H = 0.07$ ,  $Q = 0.35$ ; (d)  $Ri_H = 0.10$ ,  $Q = 0.20$ .

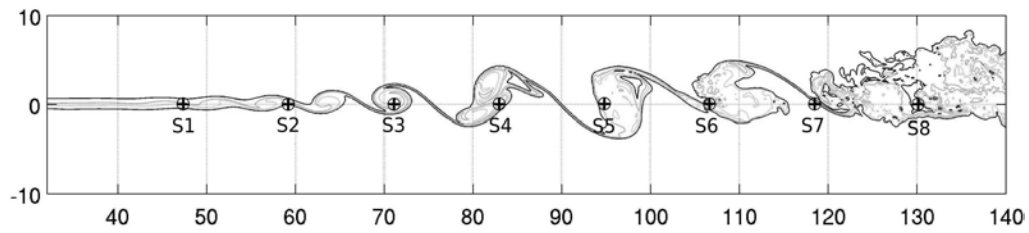


Figura 6.13: Posições das sondas: S1 à S8.

sição (sondas S1 a S6) e para diferentes  $Ri_H$ . Assim como nas vistas laterais das isosuperfícies do módulo de vorticidade (Fig. 6.10b), o crescimento de  $Ri_H$  possibilita o deslocamento da formação do modo fundamental de  $KH$ , o mesmo está presente nos picos mais pronunciados das frequências ( $St$ ), cujos valores apresentam-se em negrito na Tab. 6.3.

O aumento da estratificação proporciona a diminuição da energia cinética posicionada nas frequências abaixo de  $St=0.14$  e intensifica o modo fundamental. Apesar da influência do número de Richardson nas baixas frequências, o  $St$  do modo fundamental permanece 0.14, como é ilustrado nas Figuras 6.14b-d e 6.15).

Tabela 6.3: Frequências do modo fundamental de  $KH$  para cada posição (sondas S1 a S6) e para diferentes  $Ri_H$ . Em negrito destacam-se as frequências cujas energias cinéticas são mais pronunciadas.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
$Ri_H = 0$	0.14	<b>0.14</b>				
$Ri_H = 0.025$	0.14	0.14	<b>0.14</b>			
$Ri_H = 0.05$	0.14	0.14	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>		
$Ri_H = 0.07$	0.14	0.14	0.14	<b>0.14</b>	0.14	
$Ri_H = 0.10$			0.14	0.14	0.14	<b>0.14</b>

Foi utilizado a equação

$$K(x, y) = \frac{1}{2}(\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle), \quad (6.2)$$

para o cálculo da energia cinética máxima  $K_{max}$ , onde  $u' = u - \langle u \rangle$ . Para a média  $\langle u \rangle$  utiliza-se a Eq. 6.1. A Figura 6.16a apresenta a evolução espacial de  $K_{max}$  para diferentes estratificações. Da mesma forma como ocorreu nas simulações bidimensionais (2DS), nota-se que para cada posição longitudinal fixa, no intervalo  $60 \leq x \leq 130$ , a energia cinética  $K_{max}$  diminui a



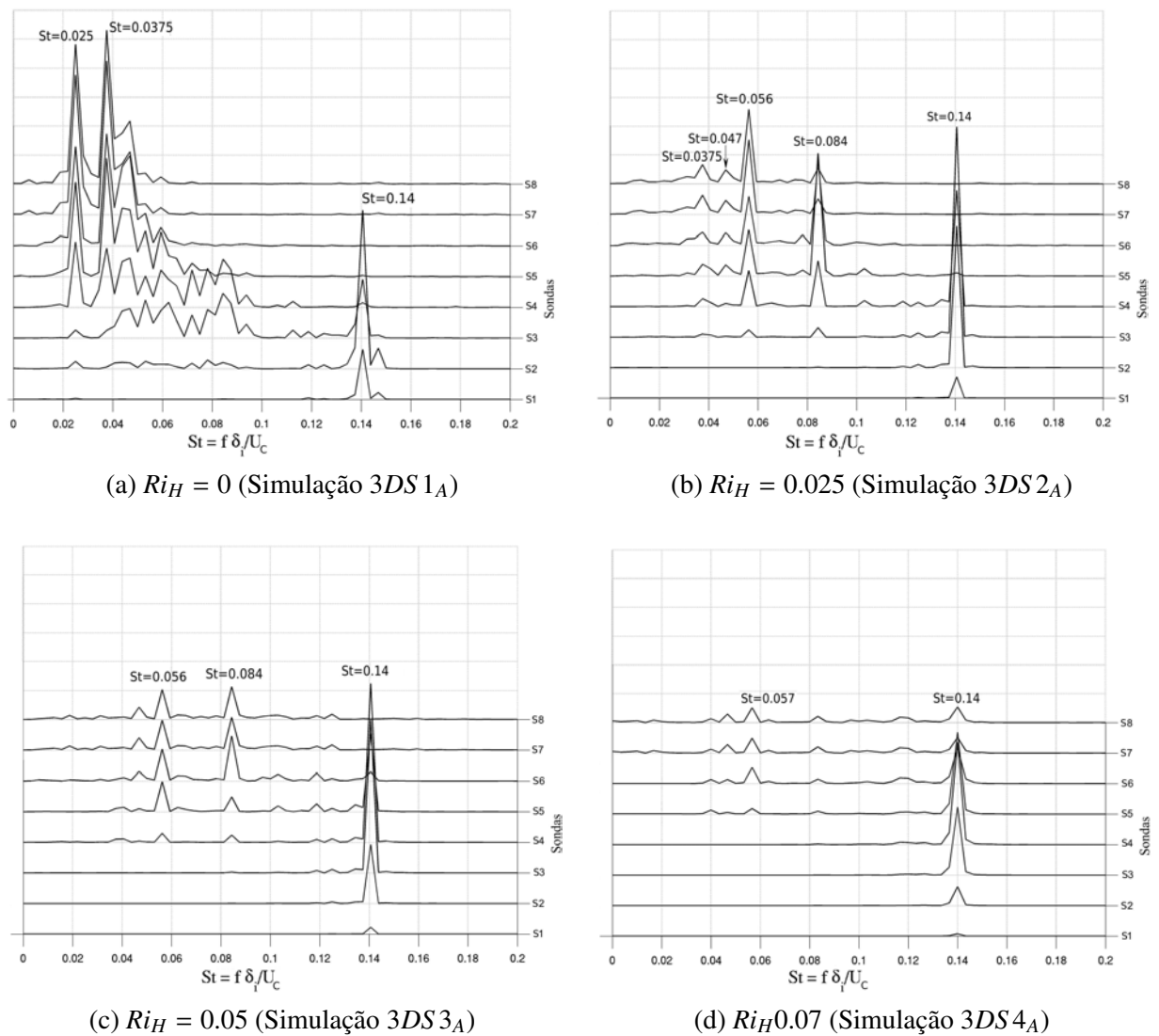


Figura 6.14: Espectro da energia cinética para diferentes posições (sondas  $S_1$  a  $S_8$ ) e números de Richardson  $0 \leq Ri_H \leq 0.07$ . Simulações 3DS 1<sub>A</sub>, 3DS 2<sub>A</sub>, 3DS 3<sub>A</sub> e 3DS 4<sub>A</sub>.

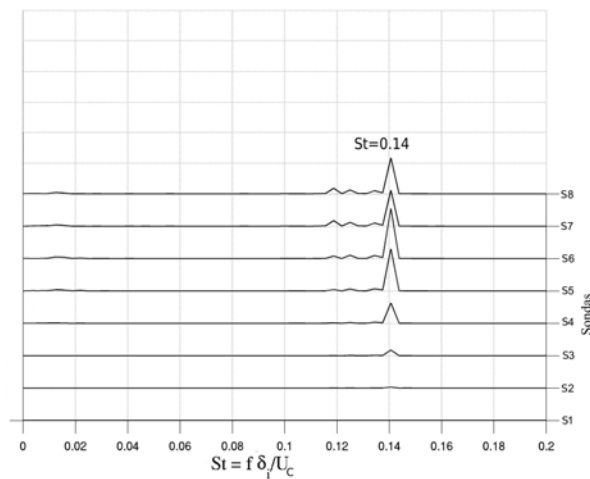


Figura 6.15: Espectro da energia cinética para diferentes posições (sondas  $S_1$  a  $S_8$ ) para  $Ri_H = 0.10$ . Simulação 3DS 5<sub>A</sub>.

medida que o número de Richardson ( $Ri_H$ ) aumenta, já que a estratificação tende a diminuir os movimentos verticais. Comparando-se as Figuras 6.16a, 6.16b e 6.17a, pode-se afirmar que a queda de  $K_{max}$ , no intervalo  $115 \leq x \leq 140$  para os casos em que  $0 \leq Ri_H \leq 0.05$ , é devido à diminuição das tensões de Reynolds  $\langle u'u' \rangle_{max}$  e  $\langle v'v' \rangle_{max}$ , neste mesmo intervalo. Na região  $115 \leq x \leq 140$  para  $0 \leq Ri_H \leq 0.05$ , ocorre uma diminuição das tensões de Reynolds máximas  $\langle v'v' \rangle_{max}$ , e para  $Ri_H = 0.025$ , as tensões de Reynolds máximas  $\langle u'u' \rangle_{max}$  também diminuem. No intervalo  $110 \leq x \leq 140$ , como não ocorre diminuição considerável de  $\langle w'w' \rangle_{max}$  (Fig. 6.17b), este não interfere no decaimento de  $K_{max}$  nesta mesma região.

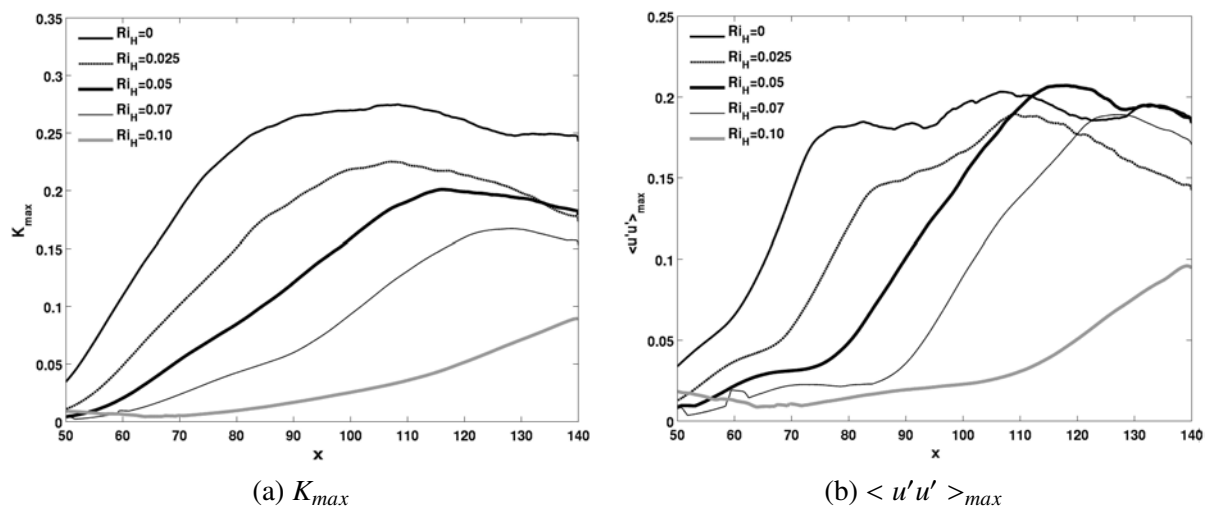


Figura 6.16: Evolução da energia cinética máxima e das tensões de Reynolds máximas  $\langle u'u' \rangle_{max}$  ( $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ ,  $\theta = 0$ ). Simulações:  $3DS 1_A$ ,  $3DS 2_A$ ,  $3DS 3_A$ ,  $3DS 4_A$  e  $3DS 5_A$  (Tab. 6.1).

As posições do modo fundamental (MF) e do primeiro emparelhamento (E) são caracterizadas pelos picos apresentados nas tensões de Reynolds máximas  $\langle u'v' \rangle_{max}$ . O número de Richardson interfere na intensidade desses picos ilustrados na Fig. 6.18a. Para analisar a mistura no escoamento estratificado foi quantificado o fluxo turbulento vertical médio de massa  $\langle \rho'v' \rangle$ . O máximo desse fluxo, dado por  $\langle \rho'v' \rangle_{max}$  na Fig. 6.18b, apresenta a influência da estratificação. A redução de  $\langle \rho'v' \rangle_{max}$  é causada pelo efeito do empuxo, que reduz a flutuação de velocidade vertical  $v'$ . Para a camada de mistura homogênea esta influência não é importante, visto que, a densidade é um escalar passivo. O modo fundamental de  $KH$  e o primeiro emparelhamento se destacam em  $\langle \rho'v' \rangle_{max}$  para cada número de Richardson. A Figura 6.19 ilustra os cortes longitudinais de densidade em  $z = 0$  para diferentes números de Richardson. Na camada

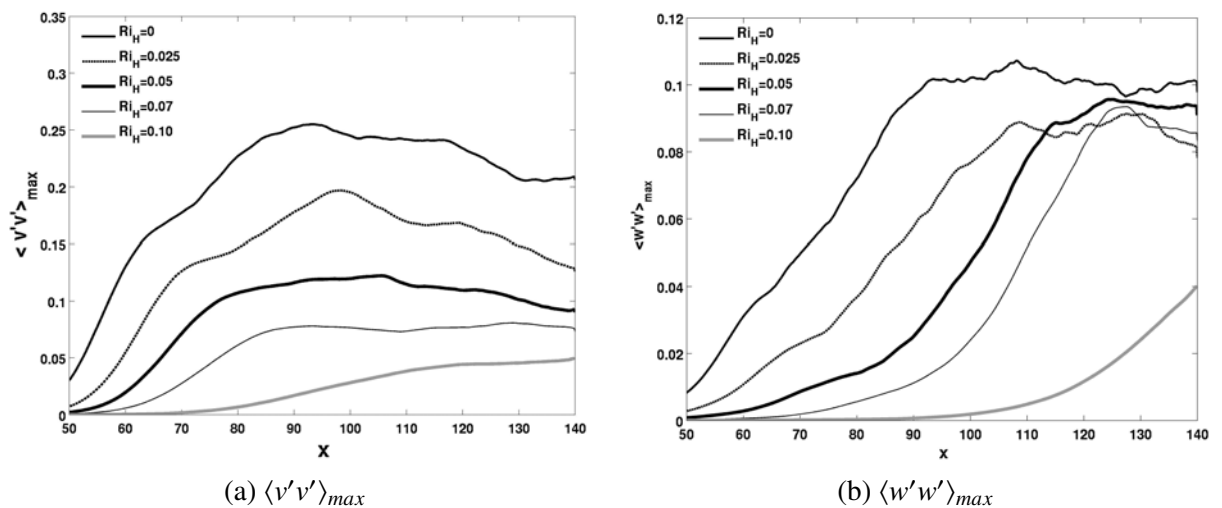


Figura 6.17: Evolução das tensões de Reynolds máximas  $\langle v'v' \rangle_{max}$  e  $\langle w'w' \rangle_{max}$  ( $0 \leq Ri_H \leq 0.10$ ,  $\theta = 0$ ). Simulações:  $3DS 1_A$ ,  $3DS 2_A$ ,  $3DS 3_A$ ,  $3DS 4_A$  e  $3DS 5_A$ .

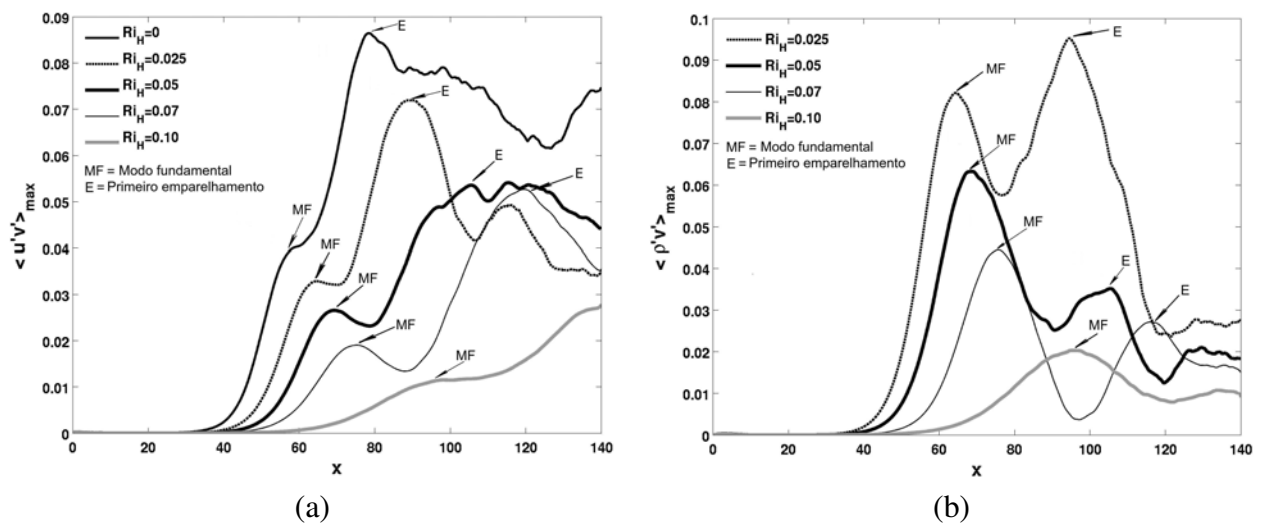


Figura 6.18: (a) Evolução espacial das tensões de Reynolds máximas  $\langle u'v' \rangle_{max}$  para diferentes  $Ri_H$ ; (b) Fluxo turbulento vertical máximo de massa para diferentes  $Ri_H$ .

com alta estratificação ( $0.05 \leq Ri_H \leq 0.10$ ) a distribuição da densidade é intensamente modificada pelo processo de enrolamento dos turbilhões de  $KH$ , que diminui o entranhamento do fluido dentro do núcleo do vórtice. A forte estratificação ( $Ri_H = 0.10$ ) enfraquece a formação dos emparelhamentos.

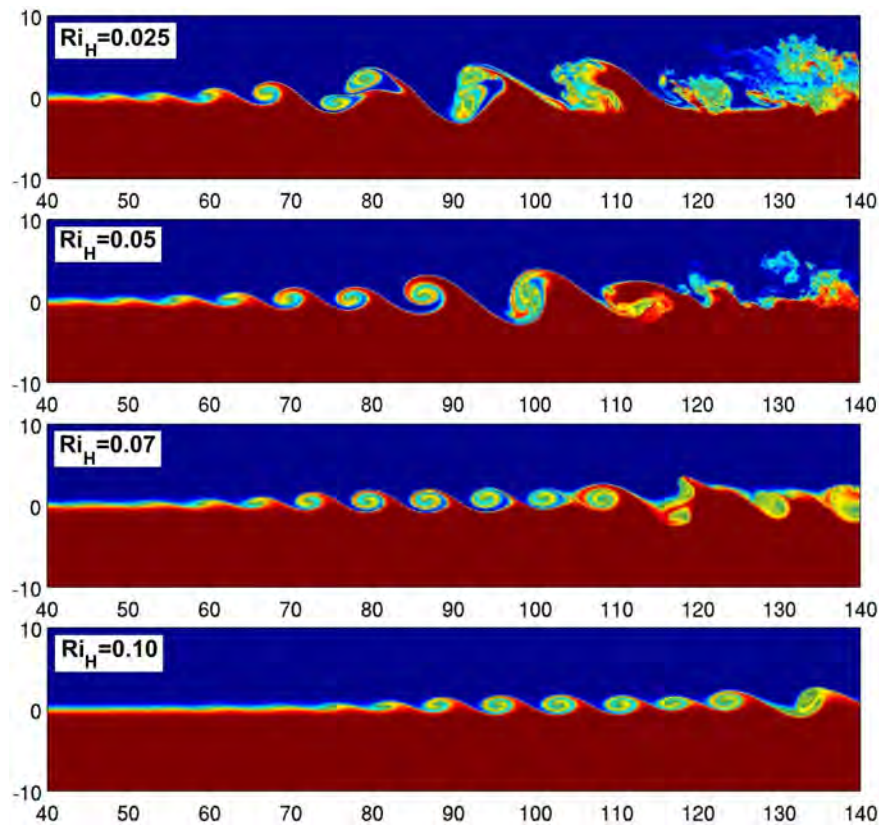


Figura 6.19: Cortes longitudinais de densidade para diferentes  $Ri_H$  ( $z = 0$ ). Escala de valores variando de -1.2 (azul) a 1.2 (vermelho).

## 6.4 Simulações a $Ri_H = 0.05$ e $0.02 \leq \theta \leq 0.10$

Um fluido denso que escoar ao longo de um fundo inclinado é um processo geofísico encontrado em muitos ambientes aquáticos naturais e na atmosfera. Prever a taxa com que a mistura é realizada e a interação com os corpos d'água vizinhos é importante em estudos ambientais e ecológicos, como a modelagem da qualidade da água e a poluição da mesma. Na interface desses escoamentos se desenvolvem as instabilidades de Kelvin-Helmholtz, que conduzem a mistura entre as camadas superior e inferior. Estes fenômenos afetam fortemente a qualidade da água, bem como a circulação do escoamento em corpos d'água.

Utilizando  $Ri_H = 0.05$ , será analisado nesta seção a influência da declividade ( $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ ) na dinâmica da camada de mistura estavelmente estratificada. A evolução da espessura de vorticidade, mostrada na Fig. 6.20, apresenta a mesma característica detectada nas simulações bidimensionais 2DS3 (Fig. 5.19), isto é, a espessura  $\delta_\omega$  diminui a medida que o ângulo  $\theta$

aumenta, na região  $0 \leq x \leq 40$ .

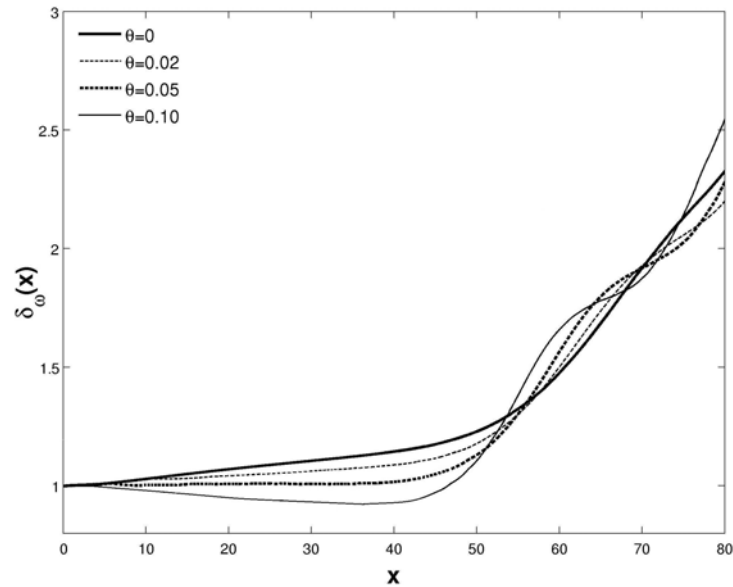


Figura 6.20: Evolução espacial da espessura de vorticidade. Simulação a  $Ri_H = 0.05$  ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ )

O outro parâmetro que mede o crescimento longitudinal da camada de mistura é a taxa de alargamento. Este parâmetro, que outrora era influenciado pela estratificação (Fig. 6.11), agora apresenta uma variação muito pequena em relação à declividade que, em termos práticos, pode ser desconsiderada. A Figura 6.21 ilustra o alargamento da camada de mistura para os casos  $0 \leq \theta \leq 0.10$ . As taxas  $Al(x)$  apresentadas na Tab. 6.4 estão próximas de 0.10 e a origem hipotética da taxa de alargamento varia.

Tabela 6.4: Taxa de alargamento da camada de mistura ( $Ri_H = 0.05$ ,  $0 \leq \theta \leq 0.10$ ).

$\theta$	$x_0$	$Al(x) = \frac{ y_{0.95} - y_{0.05} }{x - x_0}$
0.	41.34	0.077
0.02	46.47	0.097
0.05	44.73	0.105
0.10	39.80	0.106

As isosuperfícies do critério  $Q$  e de densidade são apresentadas na Fig. 6.22. Como a posição do modo fundamental desloca-se para a esquerda de acordo como o aumento da declividade ( $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ ), aumenta-se a região turbulenta. A declividade acelera o desenvolvimento da instabilidade primária de  $KH$  e, portanto, afeta a localização do modo fundamental para cada

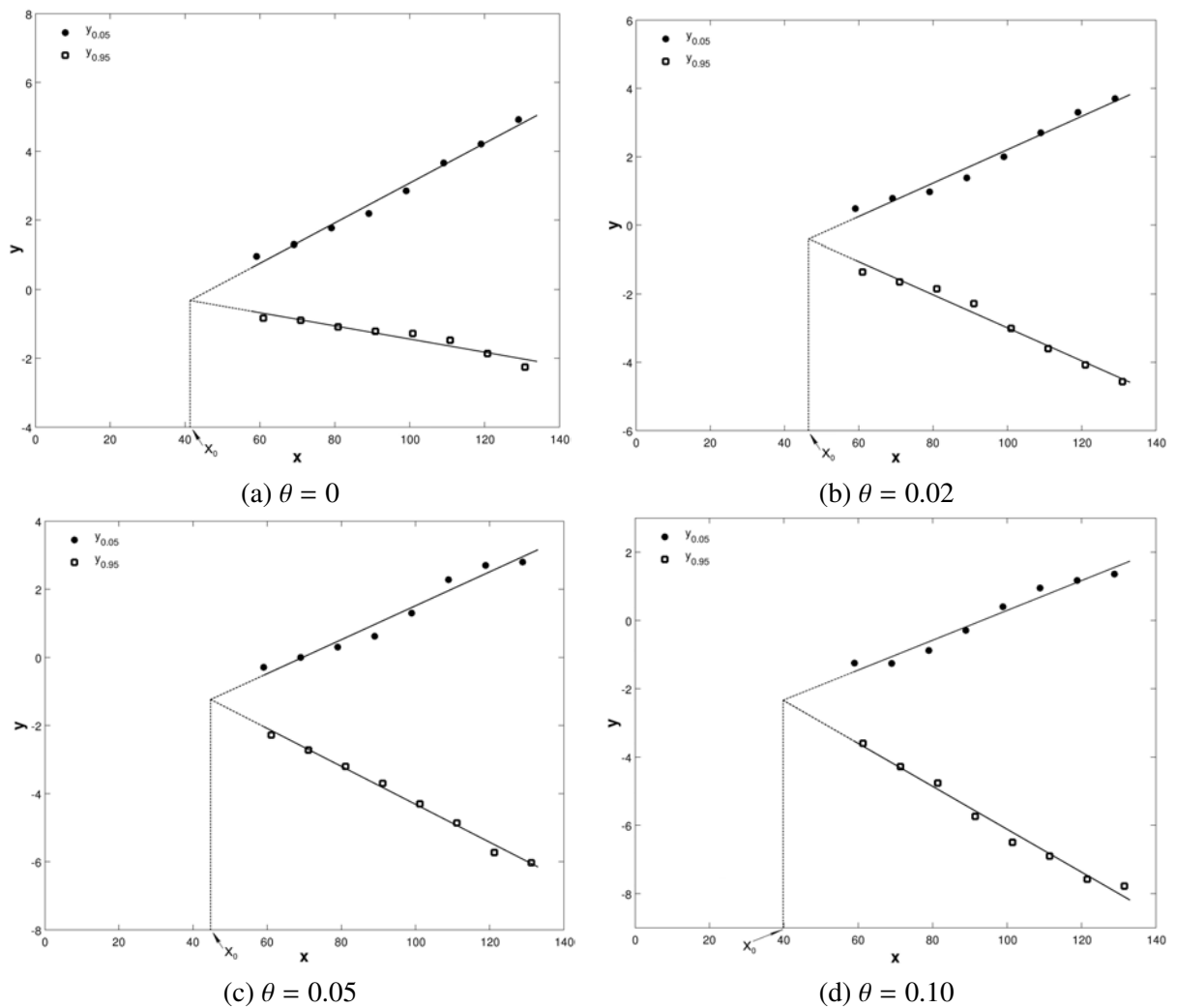


Figura 6.21: Alargamento da camada de mistura. Simulações 3DS3: (a)3DS3<sub>A</sub>; (b)3DS3<sub>B</sub>; (c)3DS3<sub>C</sub>; (d)3DS3<sub>D</sub>.

caso. A instabilidade translativa, causada pela instabilidade elíptica que se manifesta no núcleo do turbilhão de  $KH$ , bem como o modo subharmônico estão presentes nas isosuperfícies do critério  $Q$  (Figuras 6.22a, 6.22c, 6.22e). E nas isosuperfícies de densidade (Figuras 6.22b, 6.22d, 6.22f) estão presentes as ondas de Kelvin-Helmholtz e os emparelhamentos. A declividade acelera a formação do modo fundamental de  $KH$  e do modo subharmônico e proporciona a formação das estruturas vorticiais longitudinais. Comparando os campos de vorticidade transversal das simulações bidimensionais a  $Ri_H = 0.05$  e  $0.02 \leq \theta \leq 0.10$  (Figuras 5.16, 5.17 e 5.18) com as isosuperfícies do critério  $Q$  (Figuras 6.22a, 6.22c, 6.22e), nota-se que a instabilidade primária de  $KH$  ocorre de maneira bidimensional. Por outro lado, há uma grande diferença após a formação do modo subharmônico. À medida que a declividade aumenta ocorre um aumento das

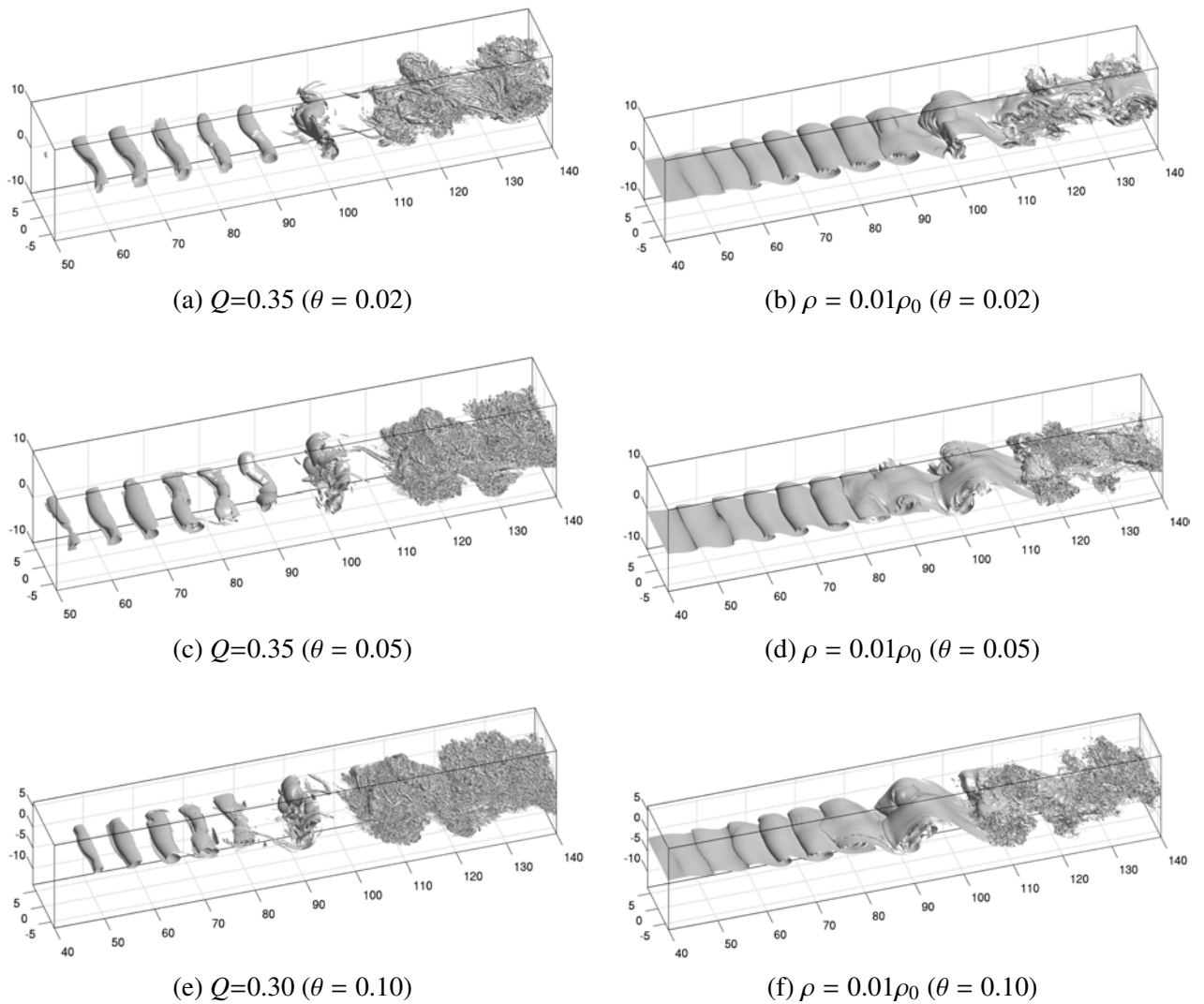


Figura 6.22: Isosuperfícies do critério  $Q$  e isosuperfícies de densidade ( $Ri_H = 0.05$ ,  $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ ,  $t = t_0$ ). Simulações: (a)(b)  $3DS_{3B}$ ; (c)(d)  $3DS_{3C}$ ; (e)(f)  $3DS_{3D}$ .

pequenas estruturas nas simulações tridimensionais em relação às simulações bidimensionais. Nestas, a declividade interfere na formação das instabilidades secundárias e no estiramento da camada baroclínica. Nos testes bidimensionais, a componente transversal do torque baroclínico, dada por  $-(\cos\theta \rho_x + \sin\theta \rho_y)$  (Eq. 3.7), modifica as estruturas longitudinais, principalmente após o primeiro emparelhamento.

Na Figura 6.23 distinguem-se picos com frequência aproximada de  $St = f\delta_i/U_C = 0.14$ , apesar da variação da declividade. As frequências do modo fundamental de  $KH$  para as sondas  $S1$  a  $S4$ , e para diferentes ângulos, são apresentadas na Tab. 6.5. Em negrito destacam-se as frequências cujas energias cinéticas são mais pronunciadas. Devido à declividade mais acentuada da interface entre as camadas no intervalo  $0 \leq x \leq 40$  (Fig. 6.24), quando  $0.05 \leq \theta \leq 0.10$ ,

foram utilizadas posições verticais diferenciadas para as sondas (Tab. 6.5).

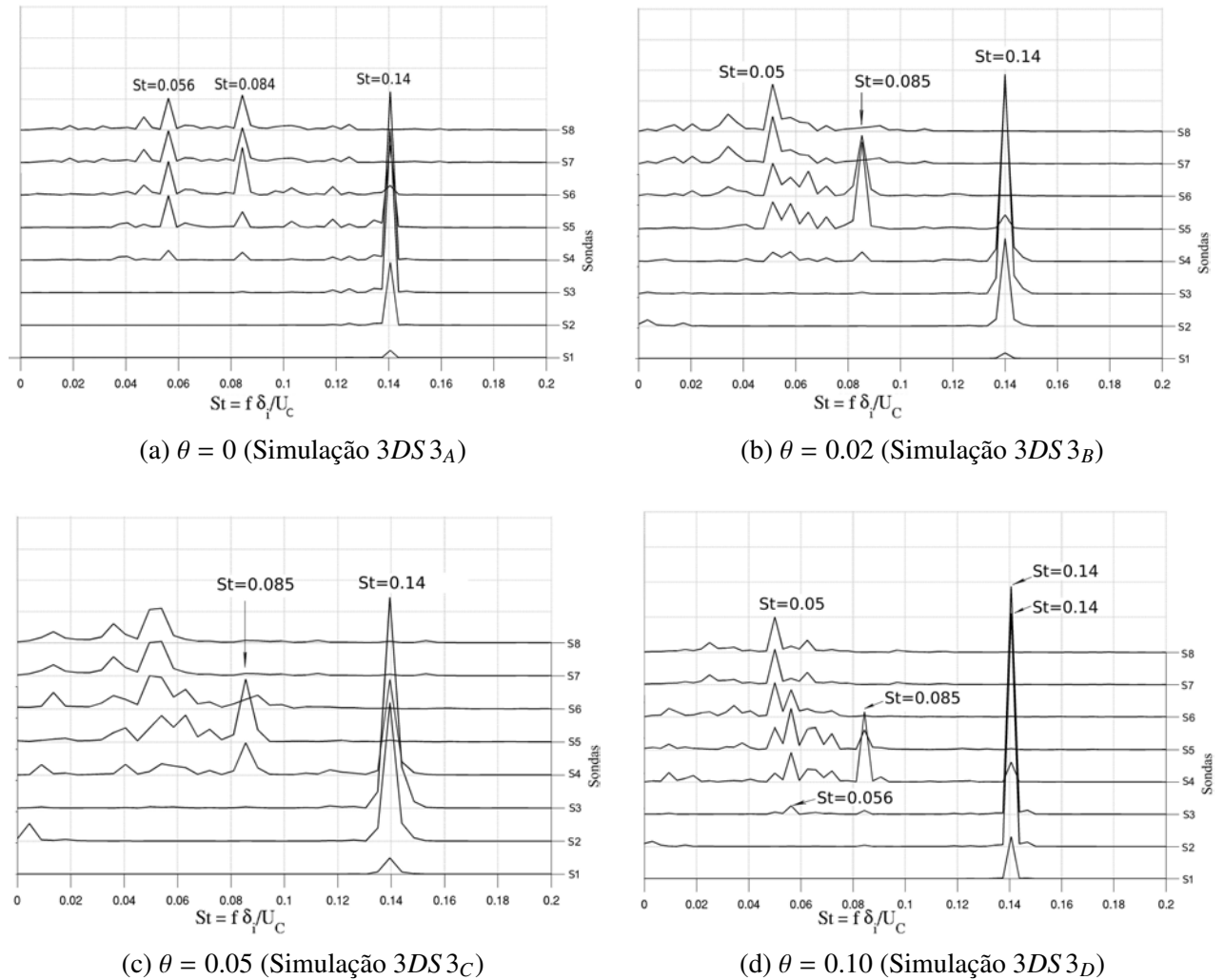


Figura 6.23: Espectro da energia cinética para diferentes posições (sondas S1 a S8) e ângulos  $0 \leq \theta \leq 0.10$ . Simulações 3DS3A, 3DS3B, 3DS3C e 3DS3D.

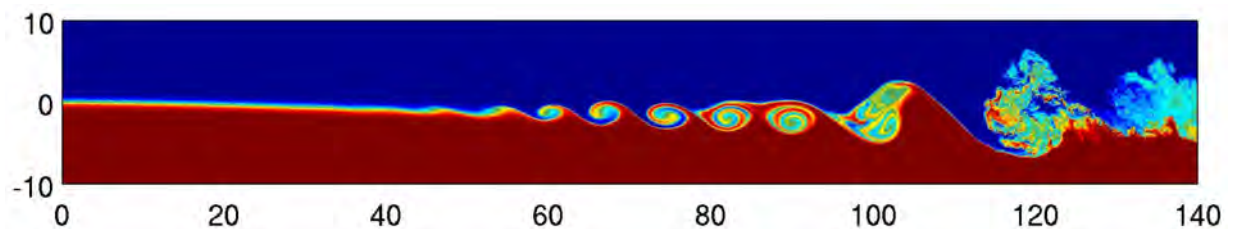


Figura 6.24: Corte longitudinal de densidade ( $Ri_H = 0.05$ ,  $\theta = 0.05$ ). Escala de valores variando de -1.2 (azul) a 1.2 (vermelho).

A evolução da energia cinética máxima e das tensões de Reynolds máximas ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ,  $Ri_H = 0.05$ ) estão apresentadas nas Figuras 6.25 e 6.26. Aumentando-se a declividade, para cada posição  $x$  ocorre um crescimento da energia cinética máxima  $K_{max}$  e das tensões de Reynolds máximas  $\langle u'_i u'_i \rangle_{max}$ . Entre  $x = 95$  e  $x = 115$ , e para os ângulos  $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ ,



Tabela 6.5: Frequências do modo fundamental de  $KH$  para cada posição (sondas  $S1$  a  $S4$ ) e para diferentes ângulos ( $Ri_H = 0.05$ ). Em negrito destacam-se as frequências cujas energias cinéticas são mais pronunciadas.

Posições verticais das sondas		$S1$	$S2$	$S3$	$S4$
$\theta = 0$	$y = 0$	0.14	0.14	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>
$\theta = 0.02$	$y = 0$	0.14	0.14	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>
$\theta = 0.05$	$y = -1.17$	0.14	0.14	<b>0.14</b>	0.14
$\theta = 0.10$	$y = -2.33$	0.14	<b>0.14</b>	<b>0.14</b>	0.14

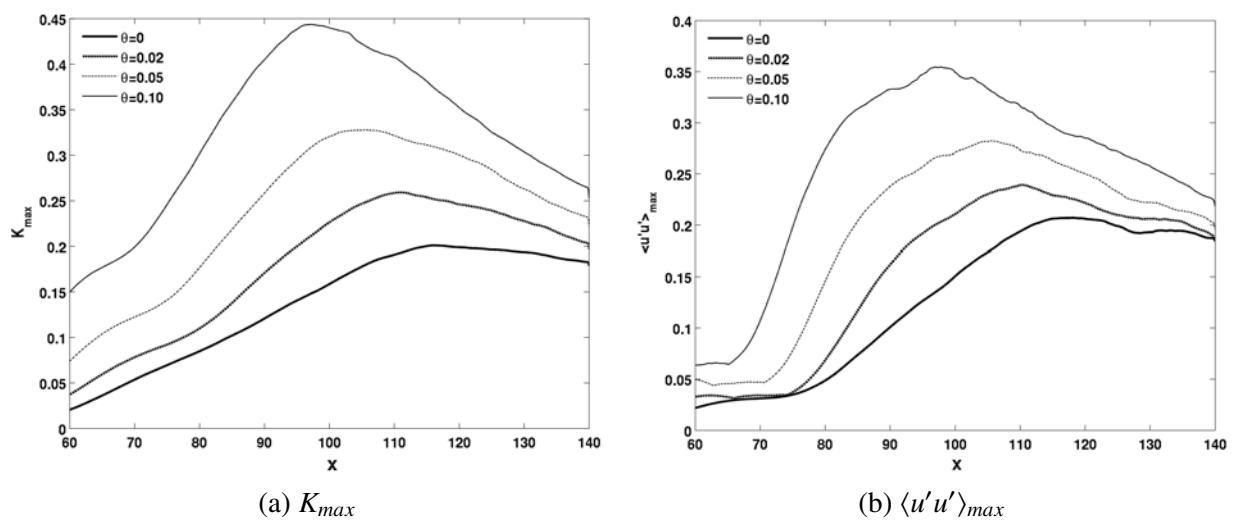


Figura 6.25: Evolução da energia cinética máxima e das tensões de Reynolds máximas  $\langle u'u' \rangle_{max}$  ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ,  $Ri_H = 0.05$ ). Simulações:  $3DS3_A$ ,  $3DS3_B$ ,  $3DS3_C$  e  $3DS3_D$  (Tab. 6.1).

os picos nos gráficos de  $K_{max}$ ,  $\langle u'u' \rangle_{max}$  e  $\langle w'w' \rangle_{max}$  se destacam. Nas tensões de Reynolds  $\langle v'v' \rangle_{max}$ , para estes mesmos ângulos, ocorrem a presença de dois picos. As identificações do modo fundamental ( $MF$ ) e do primeiro emparelhamento ( $E$ ) também estão presentes ao incluir a declividade. A posição do primeiro emparelhamento se localiza na região do pico da energia cinética máxima (Fig. 6.25a) e das tensões de Reynolds máximas  $\langle u'u' \rangle_{max}$  (Fig. 6.25b) e  $\langle w'w' \rangle_{max}$  (Fig. 6.26b). Nas tensões  $\langle v'v' \rangle_{max}$  (Fig. 6.26a) acrescenta-se a presença do pico associado à posição do modo fundamental.

Na Fig. 6.27 são apresentados cortes longitudinais de densidade para ângulos ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ), destacando as posições aproximadas da formação do modo fundamental ( $MF$ ) e do primeiro emparelhamento ( $E$ ).

As tensões de Reynolds máximas ( $\langle u'u' \rangle_{max}$ ) para cada declividade ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ) é ilustrada

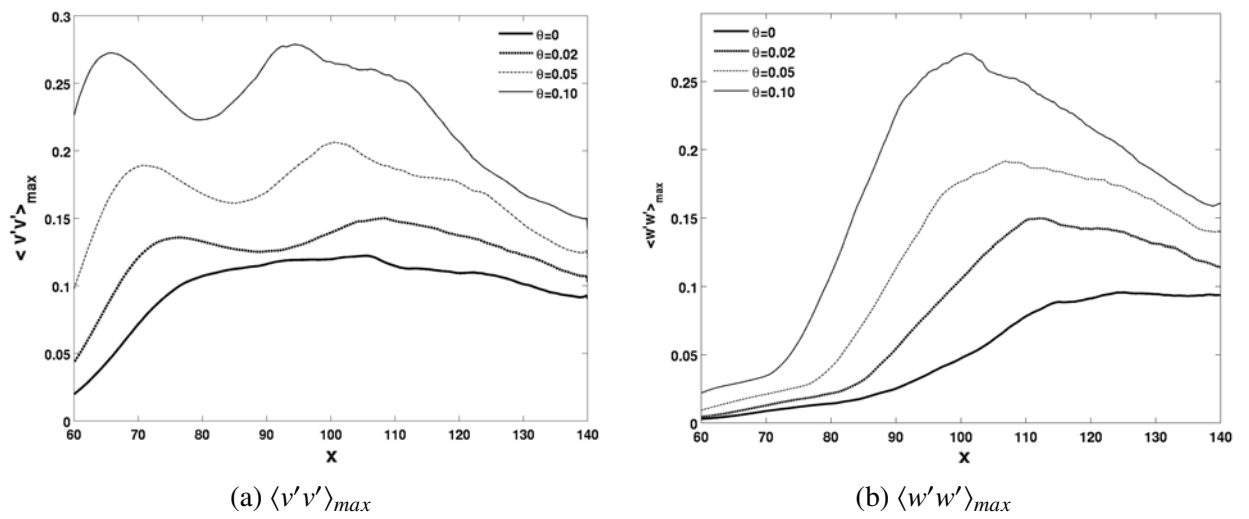


Figura 6.26: Evolução das tensões de Reynolds máximas  $\langle v'v' \rangle_{max}$  e  $\langle w'w' \rangle_{max}$  ( $0 \leq \theta \leq 0.10$ ,  $Ri_H = 0.05$ ). Simulações:  $3DS3_A$ ,  $3DS3_B$ ,  $3DS3_C$  e  $3DS3_D$  (Tab. 6.1).

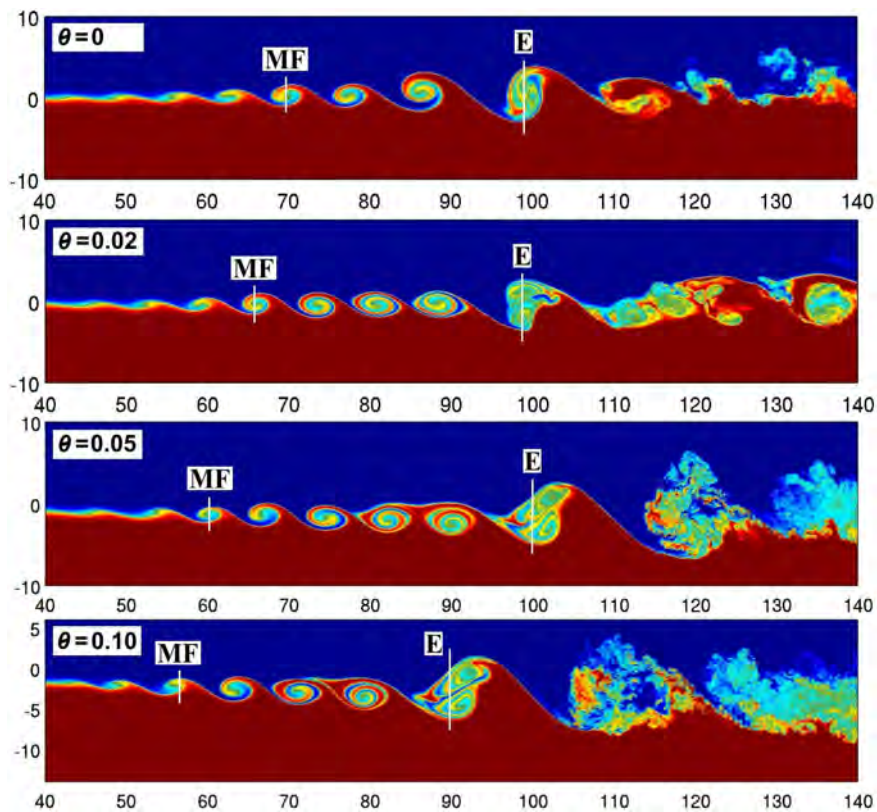


Figura 6.27: Cortes longitudinais de densidade para diferentes  $\theta$  ( $z = 0$ ). Escala de valores variando de -1.2 (azul) a 1.2 (vermelho).

na Fig. 6.28a. A intensidade dos picos do modo fundamental e do primeiro emparelhamento cresce de acordo como o aumento da declividade  $\theta$ . O aumento do ângulo acelera o desenvolvimento das instabilidades primária e secundária de Kelvin-Helmholtz.

O fluxo turbulento vertical de massa  $\langle \rho'v' \rangle$  desempenha um papel importante na dinâmica do escoamento estratificado, sendo que o processo de mistura é dependente desta grandeza. Peltier & Caulfield (2003) [116] mostraram que este parâmetro quantifica a variação entre a energia cinética total média do escoamento e a energia potencial total média. Durante o enrolamento do turbilhão de  $KH$  a energia potencial é convertida em energia cinética, quando o fluido mais denso, que foi erguido com a camada de vorticidade inicial, gira e move-se em direção ao centro do vórtice [94]. Na Figura 6.28b é apresentado o fluxo turbulento vertical máximo de massa para diferentes declividades. O termo  $Ri_H \rho \sin \theta$  presente na Eq. 3.1 intensifica os parâmetros  $\langle u'v' \rangle_{max}$  e  $\langle \rho'v' \rangle_{max}$ , e os níveis mais elevados, representados pelos picos, se destacam em ambas Figuras (6.28a-b).

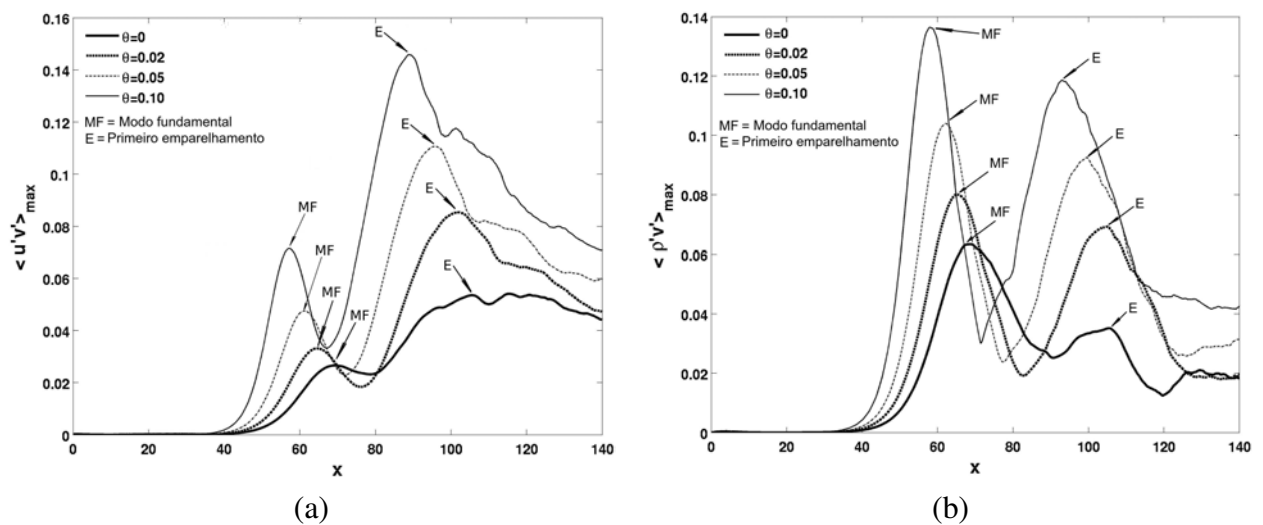


Figura 6.28: (a) Evolução espacial das tensões de Reynolds máximas  $\langle u'v' \rangle_{max}$ ; (b) Fluxo turbulento vertical máximo de massa para diferentes ângulos.

# Capítulo 7

## Conclusões e recomendações

O presente trabalho investigou como o grau de estratificação e a declividade influenciam a amplificação das perturbações de uma camada de mistura estavelmente estratificada. Para tal investigação foram empregadas análise de estabilidade linear, por meio de aproximações de Chebyshev e Simulação Numérica Direta (*DNS*) das equações de Navier-Stokes, usando aproximação de Boussinesq e de transporte-difusão. A análise de estabilidade linear foi realizada em uma configuração temporal e, nas simulações numéricas espaciais foram utilizados domínios bidimensionais e tridimensionais.

As simulações em desenvolvimento espacial ( $Re = 1000$ ,  $Pr = 1$ ) apresentaram, para os casos bidimensionais, a formação da camada baroclínica, e para os testes tridimensionais, o desenvolvimento das instabilidades translativas e a formação dos vórtices longitudinais.

Durante a pesquisa os seguintes questionamentos, apresentados no primeiro capítulo, foram respondidos:

- **A estratificação e a declividade interferem nas taxas máximas de amplificação?**

Sim. As taxas máximas de amplificação, analisadas através da análise de estabilidade linear, são influenciadas pela estratificação e pela declividade. A análise temporal permitiu avaliar a influência das perturbações infinitesimais na camada de mistura estavelmente estratificada e inclinada.

Para o caso não inclinado, as taxas máximas de amplificação, determinadas via operadores diferenciais de Chebyshev, apresentaram erros máximos da ordem de  $10^{-4}$ , quando comparadas

com os resultados de Hazel (1972 [55]). As soluções do problema de autovalor generalizado apresentam taxas que decaem com o aumento da estratificação. Os resultados obtidos por meio de *DNS* em uma configuração temporal apresentaram uma boa concordância com a teoria de estabilidade linear [55]. Os erros máximos foram de 0.21% para o caso não estratificado, 0.40% para  $0.01 \leq Ri_H \leq 0.1$ , e 7.2% para alta estratificação ( $Ri_H = 0.15$  e  $Ri_H = 0.20$ ). Os resultados foram satisfatórios, considerando que neste tipo de análise (*DNS*), os termos viscosos não foram cancelados.

As taxas obtidas via operadores de Chebyshev não são modificadas substancialmente pela estratificação quando  $0 \leq \theta \leq 0.1$ . Para  $\theta \geq 0.05$ , a taxa máxima de amplificação cresce de acordo com o aumento da declividade para cada  $Ri_H$  fixo mas diminui com o aumento do número de Richardson até atingir  $Ri_H \cong 0.25$ , a partir daí, até  $Ri_H = 0.30$ , a taxa máxima  $\omega_i$  permanece quase constante.

O termo  $Ri_H \sin \theta$ , presente na equação de quantidade de movimento (direção  $x$ ), é o fator que determina a diferença entre os resultados obtidos analiticamente e os obtidos por meio de *DNS* e modifica consideravelmente o escoamento base. A região de crescimento exponencial da flutuação de velocidade vertical é bastante afetada para  $\theta \geq 0.01$  quando  $Ri_H = 0.05$  e  $Ri_H = 0.10$ . As taxas máximas de amplificação para  $Ri_H = 0.01$  resultam em diferenças de 1.25% quando  $\theta = 0.01$ , e aumenta para 2.12% quando  $\theta = 0.05$ .

- **No escoamento bidimensional, os parâmetros adimensionais  $Ri_H$  e  $\theta$  interferem na dinâmica do escoamento?**

Sim. O nível de estratificação interfere na dinâmica do escoamento, especialmente a geração da camada baroclínica, a qual é intensificada quando o número de Richardson aumenta. O aumento da inclinação propicia a intensificação das instabilidades secundárias que conduz a um maior número de vórtices secundários de *KH*.

As simulações da camada de mistura bidimensional em desenvolvimento espacial mostraram que a estratificação atenua a formação da instabilidade de Kelvin-Helmholtz, devido ao gradiente longitudinal de densidade que reforça a vorticidade entre os vórtices de *KH*, formando a camada baroclínica. Como reforça a vorticidade entre os turbilhões de *KH*, atenua a

vorticidade no núcleo do turbilhão, evitando assim que amplifique. À medida que aumenta o número de Richardson, o crescimento do subharmônico é retardado e também o processo de emparelhamento dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz.

Em escoamentos estratificados bidimensionais, a camada baroclínica, localizada entre os vórtices de Kelvin-Helmholtz, é formada pelas camadas estiradas de vorticidade em conjunto com as camadas de densidade. O gradiente longitudinal de densidade, gerada pela presença da força de empuxo, contribui com um mecanismo extra para a geração da vorticidade na camada estratificada bidimensional. Na simulação a  $Ri_H = 0.025$ , a camada baroclínica é enfraquecida em virtude da formação da instabilidade subharmônica e, após o primeiro emparelhamento, a camada baroclínica ganha força. As instabilidades secundárias que ocorrem na camada baroclínica são menos intensos para alta estratificação ( $Ri_H = 0.10$ ).

Outro mecanismo que ocorre na dinâmica do escoamento estratificado é a formação da instabilidade próxima ao núcleo do turbilhão de  $KH$ , que além de ser importante na formação da instabilidade secundária de  $KH$ , desestabiliza a camada baroclínica. Quando  $Ri_H = 0.025$ , a instabilidade próxima ao núcleo se propaga em direção à camada baroclínica, proporcionando a formação de pares de vórtices contra-rotativos próximos ao ponto de estagnação da camada baroclínica. Enquanto a instabilidade próxima ao núcleo ganha força antes do primeiro emparelhamento quando a estratificação é baixa ( $Ri_H = 0.025$ ) ou média ( $Ri_H = 0.05$ ), a mesma instabilidade, para alta estratificação ( $Ri_H = 0.10$ ), ocorre após o modo subharmônico.

O aumento da estratificação, além de intensificar a formação da instabilidade secundária, diminui a espessura da camada de mistura ao longo do comprimento longitudinal, reduz o fluxo vertical de massa e diminui a troca de energia cinética máxima entre os vórtices de  $KH$  e o escoamento. A diminuição da energia cinética máxima ocorre pois a estratificação diminui os movimentos verticais e tende a estabilizar o escoamento, enquanto a redução do fluxo vertical de massa é causada pelo efeito do empuxo, que reduz a flutuação de velocidade vertical.

A taxa da espessura da vorticidade, definida para a camada de mistura homogênea [16], foi estendida para o caso estratificado, sendo  $(1/R)d\delta_\omega/dx = 0.15$  para  $Ri_H = 0$ , cujo valor coincide com a literatura (Browand & Latigo, 1979 [14]). Uma função exponencial, ajustada pelos resultados, foi proposta neste trabalho. A taxa de alargamento é outro parâmetro que mede o

crescimento longitudinal da camada de mistura. Assim como a taxa da espessura da vorticidade, este parâmetro diminui com o aumento da estratificação, cujos resultados se relacionam com uma função exponencial proposta.

Nas simulações a  $Ri_H = 0.05$ , a declividade apresenta um fator importante na aceleração do desenvolvimento das instabilidades primárias e secundárias de Kelvin-Helmholtz. A presença da componente horizontal de aceleração  $Ri_H \rho \sin\theta$ , presente na equação da quantidade movimento (direção  $x$ ), intensifica a formação das instabilidades secundárias conduzindo a um maior número de vórtices secundários de Kelvin-Helmholtz. Quando  $\theta = 0.05$  e  $\theta = 0.10$ , a forma do turbilhão de  $KH$ , após o emparelhamento, não se sustenta devido à maior declividade. O aumento da declividade propicia um estiramento maior na camada baroclínica localizada entre dois emparelhamentos, principalmente quando a declividade é de 10%. Os estiramentos, que estão associados à componente transversal do torque baroclínico, geram localmente gradientes de densidades. Com o acréscimo da declividade, o torque baroclínico tem um papel importante na formação dos vórtices longitudinais bidimensionais. A componente transversal do torque baroclínico,  $-(\cos\theta \rho_x + \sin\theta \rho_y)$ , aumenta a vorticidade na camada baroclínica. Ao incluir a inclinação, o termo extra da componente transversal do torque baroclínico,  $-\sin\theta \rho_y$ , fornece um mecanismo a mais na produção de vorticidade.

À medida que ocorre um aumento da declividade, a interface da camada de mistura se inclina, aumenta a energia cinética máxima ao longo do comprimento longitudinal e interfere na espessura inicial da camada de mistura. O aumento da energia cinética é caracterizado pelo crescimento das tensões de Reynolds  $\langle v'v' \rangle$ . A taxa de alargamento também é influenciada pela declividade, apresentando um crescimento linear de acordo com o aumento da inclinação ( $\theta$ ).

Aumentando-se a estratificação ( $Ri_H = 0.10$ ) e a declividade ( $\theta = 0.10$ ), os vórtices são fortemente deformados, ocorrendo o desenvolvimento de sucessivas instabilidades secundárias na camada baroclínica. Nota-se também uma inclinação mais acentuada da interface entre as camadas e uma modificação no processo de enrolamento dos vórtices de  $KH$ , interferindo na distribuição de densidade e propiciando o crescimento longitudinal mais acentuado da camada de mistura.

- **Nas simulações espaciais tridimensionais, a estratificação e a declividade influenciam a formação das estruturas longitudinais e transversais?**

Sim. Nos testes numéricos tridimensionais foi possível verificar a influência do número de Richardson ( $Ri_H$ ) e da declividade ( $\theta$ ) na formação das estruturas longitudinais e transversais. A flutuabilidade reduz a taxa de crescimento das perturbações enquanto a inclinação acelera o desenvolvimento de instabilidades. A competição entre os dois mecanismos resulta em vários tipos de instabilidades dependendo da estratificação e da inclinação da camada de mistura.

O aumento da estratificação possibilita a dominância da força de empuxo, diminuindo o cisalhamento, que é uma fonte de energia cinética das perturbações. A variação do gradiente longitudinal de densidade ( $\rho_x$ ) reduz a vorticidade dentro do turbilhão, e por consequência, atenua os movimentos geradores das instabilidades elíptica e translativa [94].

Na camada de mistura homogênea tridimensional, o modo subharmônico, que se manifesta duas vezes, permite o estiramento dos turbilhões, resultando em estruturas vorticais longitudinais. As estruturas longitudinais concentram linhas de vorticidade que se esticam, devido ao campo de tensão criado entre os vórtices de  $KH$ . Quando  $Ri_H > 0$ , os vórtices longitudinais enfraquecem devido ao efeito da estratificação, mas podem ser observados até mesmo para  $Ri_H = 0.10$ , o mais alto nível de estratificação aqui considerado.

Na camada de mistura não estratificada foi identificado indícios de auto-similaridade por meio dos perfis médios de  $u$  e das tensões de Reynolds. Um dos adimensionais que quantifica a influência da estratificação é a espessura da camada de mistura. A taxa da espessura da vorticidade,  $d\delta_\omega/dx$ , definida para a camada de mistura homogênea [16], foi estendida para o caso estratificado 3D, sendo que a taxa determinada para o caso homogêneo está entre os valores de referência [14, 58].

Comparando-se as simulações bidimensionais e tridimensionais, nota-se que a instabilidade primária de  $KH$  se desenvolve de maneira bidimensional mas, após o primeiro emparelhamento, as configurações dos escoamentos estratificados são completamente distintas. Enquanto nas simulações bidimensionais formam-se a camada baroclínica, as instabilidades secundárias e os vórtices contra-rotativos, nas simulações tridimensionais desenvolvem-se pequenas estruturas caracterizando uma riqueza maior de escalas em relação aos testes bidimensionais. Portanto,



o efeito da tridimensionalidade tem um papel preponderante na dinâmica da camada de mistura estratificada. Nos testes tridimensionais, à medida que o número de Richardson aumenta ocorre um aumento da quantidade de estruturas bidimensionais e uma diminuição das pequenas estruturas.

Uma outra forma de verificar o crescimento longitudinal da camada de mistura estratificada tridimensional pode ser estimada pela taxa de alargamento, que possibilitou uma comparação com os casos estratificados. Uma função que caracteriza o decaimento da taxa de alargamento à medida que o número de Richardson aumenta foi definida neste trabalho.

A energia cinética máxima e a tensão de Reynolds  $\langle v'v' \rangle$  apresentam os efeitos de amortecimento com o aumento da estratificação. Esta atenuação ocorre pois a estratificação tende a diminuir os movimentos verticais. Os efeitos de amortecimento também são notáveis nos valores máximos das tensões de Reynolds  $\langle u'v' \rangle$  e dos fluxos turbulentos verticais de massa  $\langle \rho'v' \rangle$ . A redução de  $\langle \rho'v' \rangle_{max}$  é causada pelo efeito do empuxo, que reduz a flutuação de velocidade vertical  $v'$ .

Para caracterizar a influência da declividade a  $Ri_H = 0.05$  na dinâmica da camada de mistura estratificada foi analisado a evolução da espessura da vorticidade, no qual apresentou uma diminuição na região  $0 \leq x \leq 40$ . O mesmo ocorreu para o caso bidimensional. Já a taxa de alargamento da camada cisalhante não é influenciada pela variação da declividade.

Nas simulações bidimensionais e tridimensionais a  $Ri_H = 0.05$  e  $0.02 \leq \theta \leq 0.10$ , a instabilidade primária ocorre de maneira bidimensional, por outro lado, há uma grande diferença após a formação do modo subharmônico. Nos testes bidimensionais, a inclinação interfere na formação das instabilidades secundárias e no estiramento da camada baroclínica. Já nas simulações tridimensionais, com o aumento da declividade, a região das pequenas escalas amplia em relação às simulações bidimensionais. Após o primeiro emparelhamento, as estruturas longitudinais dos testes bidimensionais são modificadas pela componente transversal do torque baroclínico,  $-(\cos\theta \rho_x + \sin\theta \rho_y)$ .

Os valores máximos da energia cinética e das tensões de Reynolds  $\langle u_i u_i' \rangle$  crescem para posição longitudinal, de acordo com o aumento da declividade. O fluxo turbulento vertical de massa máximo  $\langle \rho'v' \rangle_{max}$  e a tensão de Reynolds máxima  $\langle u'v' \rangle_{max}$  são interferidos pelo aumento da in-

clinação. O crescimento desses parâmetros é devido a presença do termo  $Ri_H \rho \sin \theta$  presente na Eq. 3.1.

A posição do modo fundamental e do primeiro emparelhamento são perceptíveis no fluxo turbulento vertical de massa máximo  $\langle \rho' v' \rangle_{max}$  e na tensão de Reynolds máxima  $\langle u' v' \rangle_{max}$ , seja variando o número de Richardson ou mesmo, a declividade.

O número de Strouhal é o adimensional que representa a frequência de oscilação da formação do turbilhão primário de  $KH$ . O valor da frequência fundamental na camada de mistura homogênea confere com a literatura [106, 56]. Esta mesma frequência se repetiu para os casos estratificados e com variação da inclinação.

Diante dos resultados alcançados, pretende-se dar continuidade à pesquisa tendo em vista as seguintes propostas:

- Analisar detalhadamente a eficiência com que o escoamento estratificado é misturado pelos processos turbulentos, em função do número de Richardson e da inclinação.
- Calcular os coeficientes de difusão e dispersão envolvidos em uma camada de mistura estavelmente estratificada e inclinada.
- Investigar as instabilidades de Kelvin-Helmholtz que se formam em escoamentos horizontalmente estratificados. Um exemplo deste tipo de escoamento, é o encontro dos rios Negro e Solimões.
- Realizar testes numéricos tridimensionais a números de Reynolds mais altos, por meio de uma configuração espacial e utilizando diferentes  $Ri$  e declividades.
- Aplicar a teoria de estabilidade linear em outros problemas como correntes de densidade, plumas e "fingers".
- Estudar a camada de mistura estratificada sem utilizar a aproximação de Boussinesq, visando maiores variações de densidade.

# Referências Bibliográficas

- [1] AFANASYEV, Y. D., AND PELTIER, W. R. On breaking internal waves over the sill in knight inlet. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **457** (2001), 2799.
- [2] AKSELVOLL, K., AND MOIN, P. Large-Eddy Simulation of turbulent confined coannular jets. *J. Fluid Mech.* **315** (1996), 387–411.
- [3] ALEXAKIS, A. Stratified shear flow instabilities at large Richardson numbers. *Phys. Fluids* **21** (2009), 054108.
- [4] ARRATIA, C., CAULFIELD, C. P., AND CHOMAZ, J. M. Transient perturbation growth in time-dependent mixing layers. *J. Fluid Mech.* **717** (2013), 90–133.
- [5] ATSAVAPRANEE, P., AND GHARIB, M. Structures in stratified plane mixing layers and the effects of cross-shear. *J. Fluid Mech.* **342** (1997), 53–86.
- [6] BALARAS, E., PIOMELLI, U., AND WALLACE, J. M. Self-similar states in turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech.* **446** (2001), 1–24.
- [7] BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, London, 1967.
- [8] BATCHELOR, G. K., MOFFATT, H. K., AND WORSTER, M. G. *Perspectives in Fluid Dynamics: A Collective Introduction to Current Research*. Cambridge University Press, New York, 2000. 163p.
- [9] BELL, J. H., AND METHA, R. D. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA Journal* **28** (1990), 2034–2042.

- [10] BELL, J. H., AND METHA, R. D. Effects of imposed spanwise perturbations on plane mixing-layer structure. *J. Fluid Mech.* **257** (1993), 33–63.
- [11] BERNAL, L. P., AND ROSHKO, A. Streamwise vortex structure in mixing layer. *J. Fluid Mech.* **170** (1986), 499–525.
- [12] BERNARD, P. S. Grid-free simulation of the spatially growing turbulent mixing layer. *AIAA Journal* **46** (2008), 1725–1737.
- [13] BREIDENTHAL, R. Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction. *J. Fluid Mech.* **109** (1981), 1–24.
- [14] BROWAND, F. K., AND LATIGO, B. O. Growth of the two-dimensional mixing layers from a turbulent and nonturbulent boundary layer. *Phys. Fluids* **22** (1979), 1011–1019.
- [15] BROWAND, F. K., AND WEIDMAN, P. D. Large scales in the developing mixing layer. *J. Fluid Mech.* **76** (1976), 127–144.
- [16] BROWN, G. L., AND ROSHKO, A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.* **64** (1974), 775–816.
- [17] BRUCKER, K. A., AND SARKAR, S. Evolution of an initially turbulent stratified shear layer. *Phys. Fluids* **19** (2007), 105105.
- [18] CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A., AND ZANG, T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer - Verlag, New York, 1988. 557p.
- [19] CARPENTER, J. R., TEDFORD, E. W., RAHMANI, M., AND LAWRENCE, G. A. Holmboe waves fields in simulation and experiment. *J. Fluid Mech.* **648** (2010), 205–223.
- [20] CAULFIELD, C. P., AND KERSWELL, R. R. The nonlinear development of three-dimensional disturbances at hyperbolic stagnation points: A model of the braid region in mixing layers. *Phys. Fluids A* **12** (2000), 1032–1043.
- [21] CAULFIELD, C. P., AND PELTIER, W. R. Three-dimensionalization of the stratified mixing layer. *Phys. Fluids* **6** (1994), 3803–3805.

- [22] CAULFIELD, C. P., AND PELTIER, W. R. The anatomy of the mixing transition in homogeneous and stratified free shear layers. *J. Fluid Mech.* **413** (2000), 1–47.
- [23] CHAMPAGNE, F. H., PAO, Y. H., AND WYGNANSKI, I. J. On the two-dimensional mixing region. *J. Fluid Mech.* **74** (1976), 209–250.
- [24] CLOUGH, R. W., AND MOJTAHEDI, S. Earthquake response analysis considering non-proportional damping. *Earthquake Engineering Structural Dynamics* **4** (1976), 489–496.
- [25] COMTE, P., LESIEUR, M., AND LAMBALLAIS, E. Large and small-scale stirring of vorticity and a passive scalar in a 3D temporal mixing layer. *Phys. Fluids A* **4** (1992), 2761–2778.
- [26] COMTE, P., SILVESTRINI, J. H., AND BÉGOU, P. Streamwise vortices in Large Eddy Simulation of mixing layers. *Eur. J. Mech. - B/Fluids* **17** (1998), 615–637.
- [27] CORCOS, G. M., AND LIN, S. J. The mixing layer: deterministic models of a turbulent flow. Part 2: The origin of the three-dimensional motion. *J. Fluid Mech.* **139** (1984), 67–95.
- [28] CORCOS, G. M., AND SHERMAN, F. S. Vorticity concentration and the dynamics of unstable free shear layers. *J. Fluid Mech.* **73** (1976), 241–264.
- [29] CORTESI, A. B., YADIGAROGLU, G., AND BANERJEE, S. Numerical investigation of the formation of three-dimensional structures in stably-stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **10** (1998), 1449–1473.
- [30] CORTESI, A. B., YADIGAROGLU, G., AND BANERJEE, S. Numerical investigation of the entrainment and mixing processes in neutral and stably-stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **11** (1999), 162–185.
- [31] CRANK, J. *The mathematics of diffusion*. Oxford University Press, London, 1975.
- [32] CRIMINALE, W. O., JACKSON, T. L., AND JOSLIN, R. D. *Theory and Computation in Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, London, 2003.
- [33] DELVILLE, J., UKEILEY, L., L. CORDIER, J. P. BONNET., AND GAUSER, M. Examination of large-scale structures in a turbulent plane mixing layer. part 1. proper orthogonal decomposition. *J. Fluid Mech.* **391** (1999), 91–122.

- [34] DEMMEL, J. W. *Applied Numerical Linear Algebra*, vol. 1. SIAM, 1997, pp. 139–187.
- [35] DIMOTAKIS, P. E. The mixing transition in turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **409** (2000), 69–98.
- [36] DIMOTAKIS, P. E., AND BROWN, G. L. The mixing layer at high Reynolds number: the large-structure dynamics and entrainment. *J. Fluid Mech.* **78** (1976), 535–560.
- [37] DIOGO, C. B. *Simulação Numérica Direta de um escoamento turbulento em um canal com fundo ondulado*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Porto Alegre, 2007.
- [38] DRAZIN, P. G., AND REID, W. H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, New York, 1989.
- [39] DRUZHININ, O. A., AND ELGHOBABI, E. Direct Numerical Simulation of a three-dimensional spatially developing bubble-laden mixing layer with two-way coupling. *J. Fluid Mech.* **429** (2001), 23–61.
- [40] DUBIEF, Y., AND DELCAYRE, F. On coherent-vortex identification in turbulence. *J. Turbulence* **1** (2000), 1–22.
- [41] ESPATH, L. F. R., PINTO, L. C., LAIZET, S., AND SILVESTRINI, J. H. Two- and three-dimensional Direct Numerical Simulation of particle-laden gravity currents. *Computers & Geosciences* **63** (2014), 9–16.
- [42] FONTANE, J., AND JOLY, L. The stability of the variable density Kelvin-Helmholtz billow. *J. Fluid Mech.* **612** (2008), 237–260.
- [43] F.SCINOCCA, J. The mixing of mass and momentum by Kelvin-Helmholtz billows. *J. Atmos. Sci.* **52** (1995), 2509–2530.
- [44] GASTER, M. A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* **14** (1962), 222–224.

- [45] GELFGAT, A. Y., AND KIT, E. Spatial versus temporal instabilities in a parametrically forced stratified mixing layer. *J. Fluid Mech.* **552** (2006), 189–227.
- [46] GEYER, W. R., AND FARMER, D. Tide-induced variation of the dynamics of salt wedge estuary. *J. Phys. Oceanogr.* **19** (1989), 1060–1072.
- [47] GHONIEM, A. F., AND NG, K. K. Numerical study of the dynamics of a forced shear flow layer. *J. Fluid Mech.* **30** (1987), 706–721.
- [48] GIACOMELLO, M. V., ROCHA, L. A., SCHETTINI, E. B. C., AND SILVESTRINI, J. H. Estudo numérico do escoamento ao redor de três cilindros com transferência de calor. In *11th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences* (Curitiba - Brasil, 2006).
- [49] GOLDSTEIN, S. On the stability of superposed streams of fluids of different densities. *Proc. Roy. Soc. A* **132(820)** (1931), 524–548.
- [50] GOLUB, G. H., AND VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*, vol. 1. Johns Hopkins University Press, 1996, pp. 375–377.
- [51] GOSSARD, E. E., RICHTER, J. H., AND ATLAS, D. Internal waves in the atmosphere from high-resolution radar measurements. *J. Geophys. Res.* **75** (1970), 3523–3535.
- [52] GUERREIRO, C. B. P. Resolução numérica das equações de Navier-Stokes com esquemas de diferenças finitas de quarta ordem. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2000.
- [53] HAIGH, S. P., AND LAWRENCE, G. A. Symmetric and nonsymmetric Holmboe instabilities in an inviscid flow. *Phys. Fluids* **11** (1999), 1459–1468.
- [54] HAURY, L. R., BRISCOE, M. G., AND ORR, M. H. Tidally generated internal wave packets in massachusetts bay. *Nature* **278** (1979), 312–317.
- [55] HAZEL, P. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. *J. Fluid Mech.* **51** (1972), 39–61.

- [56] HO, C., AND HUERRE, P. Perturbed free shear layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **16** (1984), 365–424.
- [57] HOWARD, L. N. Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.* **10** (1961), 509–512.
- [58] HUANG, L., AND HO, C. Small-scale transition in a plane mixing layer. *J. Fluid Mech.* **210** (1990), 475–500.
- [59] HUERRE, P., AND MONKEWITZ, P. A. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **159** (1985), 151–168.
- [60] HUERRE, P., AND MONKEWITZ, P. A. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22** (1990), 473–537.
- [61] HUSSAIN, A. K. M. F. *Turbulence & Chaotic Phenomena in Fluids*, vol. 1. T. Tatsumi, 1983, pp. 453–460.
- [62] INOUE, R., AND D.SMYTH, W. Efficiency of mixing forced by unsteady shear flow. *J. Phys. Oceanogr.* **39** (2009), 1150–1166.
- [63] JEONG, J., AND HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.* **285** (1995), 69–94.
- [64] JIMENEZ, J. A spanwise structure in the plane shear layer. *J. Fluid Mech.* **132** (1983), 319–336.
- [65] KERSWELL, R. R. Elliptical instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34** (2001), 83–113.
- [66] KLAASSEN, G. P., AND PELTIER, W. R. The effect of prandtl number on the evolution and stability of Kelvin-Helmholtz billows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **32** (1985), 23–60.
- [67] KLAASSEN, G. P., AND PELTIER, W. R. The onset of turbulence in finite-amplitude Kelvin-Helmholtz billows. *J. Fluid Mech.* **155** (1985), 1–35.
- [68] KLAASSEN, G. P., AND PELTIER, W. R. The role of transverse secondary instabilities in the evolution of free shear layers. *J. Fluid Mech.* **202** (1989), 367–402.



- [69] KLAASSEN, G. P., AND PELTIER, W. R. The influence of stratification on secondary instability in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **227** (1991), 71–106.
- [70] KNIO, O. M., AND GHONIEM, A. F. Three-dimensional vortex simulation of rollup and entrainment in a shear layer. *J. Comp. Phys.* **97** (1991), 172–223.
- [71] KO, J., LUCOR, D., AND SAGAUT, P. Sensivity of two-dimensional spatially developing mixing layers with respect to uncertain inflow conditions. *Phys. Fluids* **20** (2008), 077102.
- [72] KONRAD, J. H. *An experimental investigation of mixing in two-dimensional turbulent shear flows with applications to diffusion-limited chemical reactions*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1976.
- [73] KOOCHESFAHANI, M. M., AND DIMOTAKIS, P. E. Mixing and chemical reaction in a turbulent liquid mixing layer. *J. Fluid Mech.* **170** (1986), 83–112.
- [74] KOOP, C. G., AND BROWAND, F. K. Instability and turbulence in a stratified fluid with shear. *J. Fluid Mech.* **93** (1979), 135–159.
- [75] KORCZAK, K. Z., AND WESSEL, R. A. Mixing control in a plane shear layer. *AIAA Journal* **27** (1989), 1744–1751.
- [76] KRAVCHENKO, A. G., AND MOIN, P. On the effect of numerical erros in Large Eddy Simulations of turbulent flows. *J. Comp. Phys.* **131** (1997), 310–322.
- [77] KUNDU, P. K., COHEN, I., AND DOWLING, D. R. *Fluid Mechanics*. Academic Press, Oxford, 2011. 920p.
- [78] LAIZET, S., AND LAMBALLAIS, E. Simulation numérique directe de l’influence de la forme aval d’une plaque séparatrice sur une couche de mélange. *Comptes Rendus Mecanique* **334** (2006), 454–460.
- [79] LAIZET, S., AND LAMBALLAIS, E. High-order compact schemes for incompressible flows: A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *J. Comp. Phys.* **228** (2009), 5989–6015.

- [80] LAIZET, S., LAMBALLAIS, E., AND VASSILICOS, J. C. A numerical strategy to combine high-order schemes, complex geometry and massively parallel computing for dns of fractal generated turbulence. *Journal Computers and Fluids* **39** (2010), 471–484.
- [81] LAIZET, S., LARDEAU, S., AND LAMBALLAIS, E. Direct Numerical Simulation of a mixing layer downstream a thick splitter plate. *Phys. Fluids* **22** (2010), 015104.
- [82] LAIZET, S., AND LI, N. Incompact3d: A powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $O(10^5)$  computational cores. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **67** (2010), 1735–1757.
- [83] LAMBALLAIS, E., FORTUNÉ, V., AND LAIZET, S. Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and Large Eddy Simulation. *J. Comp. Phys.* **230** (2011), 3270–3275.
- [84] LAPORTE, F., AND CORJON, A. Direct Numerical Simulations of the elliptic instability of a vortex pair. *Phys. Fluids* **12** (2000), 1016–1031.
- [85] LASHERAS, J. C., AND CHOI, H. Three-dimensional instability of a plane free shear layer: an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **189** (1988), 53–86.
- [86] LAWRENCE, G. A., BROWAND, F. K., AND REDEKOPP, L. B. The stability of a sheared density interface. *Phys. Fluids* **A3** (1991), 2360–2370.
- [87] LAWRENCE, G. A., PIETERS, R., ZAREMBA, L., TEDFORD, T., GU, L., GRECO, S., AND HAMBLIN, P. Summer exchange between hamilton harbor and lake ontario. *Deep-Sea Res., Part II* **51** (2004), 475.
- [88] LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.* **103** (1992), 16–42.
- [89] LESIEUR, M. *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997. 515p.
- [90] LESIEUR, M., COMTE, P., AND MÈTAIS, O. Numerical simulation of coherent vortices in turbulence. *Appl. Mech. Rev.* **48** (1995), 121–149.

- [91] LIN, S. J., AND CORCOS, G. M. The mixing layer: Deterministic models of a turbulent flow. Part 3: The effect of plane strain on the dynamics of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.* **141** (1984), 139–178.
- [92] MAGHREBI, M. J., AND ZARGHAMI, A. Dns of forced mixing layer. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling* **7** (2010), 173–193.
- [93] MALLIER, R. The nonlinear temporal evolution of a disturbance to a stratified mixing layer. *J. Fluid Mech.* **291** (1995), 287–297.
- [94] MARTINEZ, D. M. V. *Transição à Turbulência na Camada de Mistura Estavelmente Estratificada utilizando Simulação Numérica Direta e Simulação de Grandes Escalas*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Porto Alegre, 2006.
- [95] MARTINEZ, D. M. V., SCETTINI, E. B. C., AND SILVESTRINI, J. H. Secondary Kelvin-Helmholtz instability in a stably stratified temporal mixing layer. In *18th International Congress of Mechanical Engineering* (Ouro Preto, MG, Brazil, 2005), pp. 6–11.
- [96] MARTINEZ, D. M. V., SCETTINI, E. B. C., AND SILVESTRINI, J. H. Secondary Kelvin-Helmholtz instability in a 3D stably stratified temporal mixing layer by Direct Numerical Simulation. In *Congresso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones* (Santa Fé, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2006), p. 13.
- [97] MARTINEZ, D. M. V., SCETTINI, E. B. C., AND SILVESTRINI, J. H. The formation of streamwise vortices in a 3D stably stratified temporal mixing layer by Large-Eddy-Simulation. In *19th International Congress of Mechanical Engineering* (Brasília, DF, Brazil, 2007), p. 9.
- [98] MASHAYEK, A., AND PELTIER, W. R. Three-dimensionalization of the stratified mixing layer at high Reynolds number. *Phys. Fluids* **23** (2011), 111701.
- [99] MENDONÇA, M. T. *Turbulência, cap: Estabilidade de escoamentos Laminares: Teoria Linear*, vol. 2. ABCM, 2003, pp. 245–304.

- [100] METCALFE, R. W., ORSZAG, S. A., BRACHET, M. E., MENON, S., AND RILEY, J. J. Secondary instability of a temporally growing mixing layer. *J. Fluid Mech.* **184** (1987), 207–243.
- [101] MICHALKE, A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* **19** (1964), 543–556.
- [102] MICHALKE, A. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.* **23** (1965), 521–544.
- [103] MILES, J. W. On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.* **10** (1961), 496–508.
- [104] MILLER, R. S., HARSTAD, K. G., AND BELLAN, J. Direct Numerical Simulation of supercritical fluid mixing layers applied to heptane-nitrogen. *J. Fluid Mech.* **436** (2001), 1–39.
- [105] MOIN, P. *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*. Cambridge University Press, Stanford University, 2001. 209p.
- [106] MONKEWITZ, P. A., AND HUERRE, P. Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers. *J. Phys. Oceanogr.* **25** (1982), 1137–1143.
- [107] MOSER, R., AND ROGERS, M. M. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: pairing and transition to turbulence. *J. Fluid Mech.* **247** (1993), 275–320.
- [108] NAGARAJAN, S., K. LELE, S., AND FERZIGER, J. K. A robust high-order compact method for Large Eddy Simulation. *J. Comp. Phys.* **191** (2003), 392–419.
- [109] NEGRETTI, M. E., SOCOLOFSKY, S. A., AND JIRKA, G. H. Linear stability analysis of inclined two-layer stratified flows. *Phys. Fluids* **20** (2008), 094104.
- [110] ORSZAG, S. A. Accurate solution of the orr-sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.* **50** (1971), 689–703.
- [111] ORTIZ, S., CHOMAZ, J. M., AND LOISELEUX, T. Spatial Holmboe instability. *Phys. Fluids* **14** (2002), 2585–2597.

- [112] OSTER, D., AND WYGNANSKI, I. The forced mixing layer between parallel streams. *J. Fluid Mech.* **123** (1982), 91–130.
- [113] PATEL, R. P. An experimental study of a plane mixing layer. *AIAA Journal* **11** (1973), 67–71.
- [114] PATNAIK, P. C., SHERMAN, F. S., AND CORCOS, G. M. A numerical simulation of Kelvin-Helmholtz waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.* **73** (1976), 215–240.
- [115] PATTERSON, M. D., CAULFIELD, C. P., McELWAIN, J. N., AND DALZIEL, S. B. Time-dependent mixing in stratified Kelvin-Helmholtz billows: Experimental observations. *Geophys. Res. Lett* **33** (2006), L15608, doi:10.1029/2006GL026949.
- [116] PELTIER, W. R., AND CAULFIELD, C. P. Mixing efficiency in stratified shear flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **35** (2003), 135–167.
- [117] PIERREHUMBERT, R. T., AND WIDNALL, S. E. The two and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear flows. *J. Fluid Mech.* **114** (1982), 59–82.
- [118] PINTO, L. C. *Análise por simulação numérica direta do escoamento ao redor de um cilindro submetido a vibração induzida por vórtices*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Porto Alegre, 2012.
- [119] PRUETT, C. D. A fast algorithm for simulation of a spatially evolving two-dimensional planar mixing layer. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering* **76** (1989), 275–298.
- [120] RAHMANI, M. *Kelvin-Helmholtz instabilities in sheared density stratified flows*. PhD thesis, The University of British Columbia, 2011.
- [121] REINAUD, J., JOLLY, L., AND CHASSAING, P. The baroclinic secondary instability of the twodimensional shear layer. *Phys. Fluids* **12** (2000), 2489–2505.
- [122] ROGERS, M. M., AND MOSER, R. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin-Helmholtz rollup. *J. Fluid Mech.* **243** (1992), 183–226.

- [123] ROSENHEAD, L. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. Roy. Soc. A* **134(823)** (1931), 170–192.
- [124] SCHOPPA, W., HUSSAIN, F., AND METCALFE, R. W. A new mechanism of small-scale transition in a plane mixing layer: core dynamics of spanwise vortices. *J. Fluid Mech.* **298** (1995), 23–80.
- [125] SCHOWALTER, D. G., VAN ATTA, C. W., AND LASHERAS, J. C. A study of streamwise vortex structure in a stratified shear layer. *J. Fluid Mech.* **281** (1994), 247–291.
- [126] SCOTTI, M. *O Problema Quadrático de Autovalor em Vibrações e Nanotecnologia*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2007.
- [127] SCOTTI, R. S., AND CORCOS, G. M. An experiment on the stability of small disturbances in a stratified shear layer. *J. Fluid Mech.* **52** (1982), 499–528.
- [128] SHERMAN, F. S. *Viscous Flow*. McGraw-Hill, USA, 1990. 746p.
- [129] SILVESTRINI, J. H. *Simulation des grandes échelles des zones de mélange: application à la propulsion solide des lanceurs spatiaux*. PhD thesis, l’Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [130] SILVESTRINI, J. H. *Turbulência, cap: Simulação Numérica Direta e de Grandes Escalas de Escoamentos Transicionais e Turbulentos*, vol. 2. ABCM, 2003, pp. 01–81.
- [131] SILVESTRINI, J. H., AND LAMBALLAIS, E. Direct Numerical Simulations of wakes with virtual cylinders. *Int. J. Comp. Fluid Dyn.* **16 (4)** (2002), 305–314.
- [132] SILVESTRINI, J. H., AND LAMBALLAIS, E. Direct Numerical Simulations of oblique vortex shedding from a cylinder in shear flow. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **25** (2004), 431–470.
- [133] SMYTH, W. D. Dissipation range geometry and scalar spectra in sheared, stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **401** (1999), 209–242.

- [134] SMYTH, W. D. Secondary Kelvin-Helmholtz instability in weakly stratified shear flow. *J. Fluid Mech.* **497** (2003), 67–98.
- [135] SMYTH, W. D., AND J. MOUM. Length scales of turbulence in stably stratified mixing layers. *Phys. Fluids* **12** (2000b), 1327–1342.
- [136] SMYTH, W. D., MOUM, J., AND CALDWELL, D. The efficiency of mixing in turbulent patches: inferences from direct and microstructure observations. *J. Phys. Oceanogr.* **31** (2001), 1969–1992.
- [137] SMYTH, W. D., AND PELTIER, W. R. Instability and transition in finite-amplitude Kelvin-Helmholtz and Holmboe waves. *J. Fluid Mech.* **228** (1991), 387–415.
- [138] SMYTH, W. D., AND PELTIER, W. R. Three-dimensionalization of barotropic vortices on the  $f$ -plane. *J. Fluid Mech.* **265** (1994), 25–64.
- [139] SMYTH, W. D., AND WINTERS, K. B. Turbulence and mixing in Holmboe waves. *J. Phys. Oceanogr.* **33** (2003), 694–711.
- [140] SPIEGEL, E. A., AND VERONIS, G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophysical Journal* **131** (1960), 442–447.
- [141] STAQUET, C. Two-dimensional secondary instabilities in a strongly stratified shear layer. *J. Fluid Mech.* **296** (1995), 73–126.
- [142] STAQUET, C. Mixing in a stably stratified shear layer: two and three-dimensional numerical experiments. *Fluid Dynamics Research* **27** (2000), 367–404.
- [143] STAQUET, C., AND BOURUET-AUBERTOT, P. Mixing in weakly turbulent stably stratified flows. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **34** (2001), 81–102.
- [144] STRANG, E. J., AND FERNANDO, H. J. S. Entrainment and mixing in stratified shear flows. *J. Fluid Mech.* **428** (2001), 349–386.
- [145] TAIRA, D. E., SCETTINI, E. B. C., AND SILVESTRINI, J. H. The influence of stratification and slope in a mixing layer. In *IUTAM ABCM Symposium on Laminar Turbulent Transition* (Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 2014), p. 3.

- [146] TAYLOR, G. I. Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. *Proc. Roy. Soc. A* **132(820)** (1931), 499–523.
- [147] THORPE, S. A. A method of producing a shear flow in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **32** (1968), 693–704.
- [148] THORPE, S. A. Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids. *J. Fluid Mech.* **46** (1971), 299–319.
- [149] THORPE, S. A. Experiments on instability and turbulence in stratified shear flows. *J. Fluid Mech.* **61** (1973), 731–751.
- [150] THORPE, S. A. Laboratory observations of secondary structures in Kelvin-Helmholtz billows and consequences for ocean mixing. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **34** (1985), 175–199.
- [151] THORPE, S. A. Transitional phenomena and the development of turbulence in stratified fluids: A review. *J. Geophys. Res.* **92C** (1987), 5231–5248.
- [152] TISSEUR, F. Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems. *Linear Algebra and its Applications* **309** (2000), 339–361.
- [153] TISSEUR, F., AND MEERBERGEN, K. The quadratic eigenvalue problem. *Society for Industrial and Applied Mathematics* **43** (2001), 235–286.
- [154] TREFETHEN, L. N. *Spectral methods in MATLAB*, vol. 1. SIAM, 2000, pp. 145–152.
- [155] TURNER, J. S. *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, London, 1973. 368.
- [156] VITOLA, M. A. *Influência de um contorno plano sobre o desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro circular*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Pesquisas Hidráulicas. Programa de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, Porto Alegre, 2006.



- [157] WEBEDUC. Portal de Conteúdos Educacionais do MEC. [http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/quimica/cd1/conteudo/recursos/17\\_exp\\_pratico/Encontro\\_das\\_aguas.html](http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/quimica/cd1/conteudo/recursos/17_exp_pratico/Encontro_das_aguas.html), Maio - 2013.
- [158] WEI, M., QAWASMEH, B. R., BARONE, M., WAANDERS, B. G. B., AND ZHOU, L. Low-dimensional model of spatial shear layers. *Phys. Fluids* **24** (2012), 014108.
- [159] WINANT, C. D., AND BROWAND, F. K. Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing layer growth of moderate Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **63** (1974), 238–258.
- [160] WOODS, J. D. Wave-induced shear instability in the summer thermocline. *J. Fluid Mech.* **32** (1968), 791–800.
- [161] WYGNANSKI, I., AND FIEDLER, H. E. The two-dimensional mixing region. *J. Fluid Mech.* **41** (1970), 327–361.
- [162] ZHENG, Z. C., REN, G. X., AND WANG, W. J. A reduction method for large scale unsymmetric eigenvalue problems in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration* **199** (1997), 253–268.