UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Operadores Integrais Singulares e Aplicações em EDPs

por

Robert Guterres

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo
Orientador

Porto Alegre, Setembro de 2014.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Guterres, Robert

Operadores Integrais Singulares e Aplicações em EDPs / Robert Guterres.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2014.

115 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2014.
Orientador: Barrionuevo, José Afonso

Dissertação: Matemática Aplicada
Navier-Stokes, Calderón-Zygmund, Poisson.

Operadores Integrais Singulares e Aplicações em EDPs

por

Robert Guterres

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo

Banca examinadora:

Prof. Dr. Lucas Da Silva Oliveira
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
PPGMAp/UFRGS

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Janaína Pires Zingano
DMPA/UFRGS

Prof. Dr. Márcio Luís Miotto
PPGMAT/UFSM

Dissertação apresentada e aprovada em 12/09/2014.

Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Maria Cristina Varrialle
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Gostaria inicialmente de agradecer a Deus e a minha família.

Agradeço a banca examinadora todas as suas valiosas sugestões para deixarem o texto mais agradável. As eventuais incorreções, naturalmente, devem ser atribuídas ao autor. Também agradeço aos meus orientadores, José Afonso Barrionuevo e Paulo Ricardo de Avila Zingano, sem os quais esse trabalho não poderia ter sido feito.

Agradeço a Cilon Perusato, Douglas Machado dos Santos, Gustavo Lopes Rodrigues, Jéssica Duarte, Otávio de Macedo Menezes ,Rangel Baldasso e a todos os outros amigos e colegas pela amizade e por todas conversas.

Agradeço a todos os professores e funcionários do IM-UFRGS o apoio e atenção que recebi. Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos algumas técnicas de Análise Harmônica (envolvendo operadores integrais singulares, teoria de Calderón-Zygmund e o teorema Hardy-Littlewood-Sobolev) para a investigação das soluções da equação de Poisson $\Delta u = f$ em $\mathbb{R}^n$, no caso em que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 < p < \infty$. Nesta situação, as soluções não são (em geral) clássicas, mesmo assim exibem interessantes propriedades de regularidade que são analisadas com o uso destas técnicas. Em particular, mostramos como construir soluções e indicamos condições garantindo sua unicidade. Além disso, são obtidas diversas estimativas de interesse para as soluções construídas. Finalmente, aproveitamos parte da teoria desenvolvida para estabelecer alguns resultados importantes conhecidos sobre a pressão hidrodinâmica $p(\cdot, t)$ em escoamentos descritos pelas equações de Navier-Stokes para fluidos viscosos incompressíveis.

ABSTRACT

In this work, we show some harmonic analysis techniques (involving singular integral operators, Calderón-Zygmund theory and the Hardy-Littlewood-Sobolev theorem) to investigate the solution of the Poisson equation $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$, in the case $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ for some $1 < p < \infty$. In this situation, the solutions are not (in general) classics, but they still show interesting regularity properties that will be analyzed with the use of these technics. In particular, we show how to build solutions, and indicate conditions ensuring its uniqueness. In addition, various estimates of interest for solutions built are obtained. Finally, we take advantage of the theory developed to establish some important known results on the hydrodynamic pressure $p(\cdot, t)$ in flows described by the Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids.

1 INTRODUÇÃO

Um operador integral, tipo convolução tem a forma

$$Tf(x) = K * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy. \tag{1.1}$$

Quando $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{p}$ e $K \in L^r(\mathbb{R}^n)$, a desigualdade de Young

$$||K * f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p,q)||K||_{L^r(\mathbb{R}^n)}||f||_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

mostra que $T : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ é limitado. Existem diferentes provas da desigualdade de Young na literatura mas a constante optimal foi obtida apenas nos anos 70 (ver [6]).

Quando o núcleo K não pertence a um espaço $L^r(\mathbb{R}^n)$, o operador é chamado de integral singular. Estamos interessados em duas classes de integrais singulares, as integrais fracionárias, I_α, correspondendo aos núcleos $K^\alpha(x) = c_n|x|^{\alpha-n}$, e as integrais singulares de Calderón-Zygmund, em particular as transformadas de Riesz, R_j correspondendo aos núcleos $K_j(x) = c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}$. Os teoremas de Hardy-Littlewood-Sobolev e Calderón-Zygmund estabelecem a continuidade em espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ desses operadores.

Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$, considere o problema de Poisson

$$-\Delta u = f.$$

Vamos estudar esse problema utilizando a forma integral

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy,$$

onde $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\Gamma(x) = \Gamma(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & \text{, se } n > 2 \\ \frac{-1}{2\pi} log|x-y| & \text{, se } n = 2. \end{cases}$$

Com ω_n sendo a área da superfície esférica de raio 1 em $\mathbb{R}^n$.

É um fato clássico que sob hipóteses adequadas sobre f, $u(x) = I_2 f(x)$ satisfaz $-\Delta u = f$. Também é um corolário imediato do teorema de Calderón-Zygmund que para $u \in C_0^\infty$ e $1 < p < \infty$,

$$||D_i D_j u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p ||\Delta u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Nesta Dissertação, vamos utilizar os Teoremas acima nas equações de Poisson e Navier-Stokes.

Vamos abordar também os problemas $-\Delta u = D_i f$ e $-\Delta u = D_i D_j f$, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, mostrando a existência de uma solução fraca u. Indicamos condições garantindo sua unicidade, e mostramos algumas estimativas, tais como

$$||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p) ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para o problema } -\Delta u = D_i f$$

e

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p) ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para o problema } -\Delta u = D_i D_j f.$$

No capítulo 2, serão apresentados resultados já conhecidos, mas que serão importantes para a teoria desenvolvida nos capítulos seguintes. Entre os resultados mais importantes discutidos nesse capítulo, estão o Teorema de Calderón-Zygmund e de Hardy-Littlewood-Sobolev, além de outros teoremas necessários as suas demonstrações, tais como o teorema de interpolação de Marcinkiewicz e o teorema de decomposição de Calderón-Zygmund.

No capítulo 3, trabalhamos com a forma integral da solução da equação de Poisson $-\Delta u = f$, com $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ (para $1 < p < \frac{n}{2}$) Hölder contínua. Mostramos que ela está bem definida $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e obtemos a importante desigualdade

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K||f||_{L^p(\mathbb{R})} \text{ para } 1 < p < \frac{n}{2}$$

Nos capítulos seguintes, enfraquecemos as hipóteses sobre f, e mostramos que a forma integral ainda representa a solução no sentido das distribuições. Como $L^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$, os resultados aqui obtidos vão ser fortemente usados nos capítulos seguintes através de argumentos de densidade.

No capítulo 4, trabalhamos com o problema de Poisson $-\Delta u = f$, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $1 < p < \infty$. Mostramos como construir uma solução fraca u para o problema e obtemos estimativas para a norma da solução. O espaço em que se encontra a solução, muda de acordo com a região de $\mathbb{R}$ em que se encontra o p. Por exemplo, temos que $Du \in L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < n$ enquanto que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ para $n < p < \infty$. Em todos os casos, pelo teorema de Calderón-Zygmund, temos que

$$||D^2u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

No capítulo 5, trabalhamos com o problema de Poisson $-\Delta u = D_if$, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ e $1 \leq i \leq n$. Mostramos a existência e obtemos estimativas para a solução fraca u do problema. Mais uma vez, essas estimativas mudam de acordo com a região de $\mathbb{R}$ em que se encontra o p. Os resultados obtidos nesse capítulo podem ser vistos como consequências do capítulo 4, mas escolhemos obtê-las de maneira independente por uma questão de clareza e simplicidade dos argumentos. Fazemos também uma aplicação para as equações de Navier-Stokes, obtendo estimativas envolvendo a velocidade e vorticidade da solução.

No capítulo 6, trabalhamos com o problema de Poisson $-\Delta u = D_i D_j f$, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ e $1 \leq i, j \leq n$. Mostramos a existência e obtemos estimativas para a solução fraca u do problema. Obtemos, por Calderón-Zygmund, a importante desigualdade

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Fazemos também uma aplicação para as equações de Navier-Stokes, obtendo a unicidade da pressão nas regiões em que a solução u da equação de Navier-Stokes é clássica.

Resultados mais gerais sobre a solubilidade de $P(D)u = f$ podem ser encontrados em [4]. Muitos dos resultados apresentados podem ser obtidos dos métodos em [9] e [3], porém nossa apresentação é mais elementar e direta, elaborada por P.R. Zingano, usando representações integrais e utilizando apenas rudimentos da teoria de distribuições.

2 TÓPICOS EM OPERADORES SINGULARES

Neste Capítulo faremos uma revisão da Teoria de Calderón-Zygmund e dos Teoremas de Hardy-Littlewood-Sobolev.

2.1 Algumas definições

Definição 2.1. Definimos a bola $B(x,R)$ aberta de centro x e raio R como

$$B(x,R) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < R\}.$$

Definimos ω_n como a área da superfície esférica de raio 1 em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2. Vamos denotar a derivada parcial de uma função f em relação a coordenada x_i por $D_i f$, isto é

$$D_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

Definição 2.3. Definimos $L^p_\sigma(\mathbb{R}^n)$ como

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \nabla \cdot f = 0\}.$$

Definição 2.4. Dizemos que a sequência $\{\phi_m\}$ de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ converge em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, quando existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, tal que $supp(\phi_m) \subset K$ para todo m e existe $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que para todo α, $D^\alpha \phi_m \to D^\alpha \phi$ uniformemente em K.

Definição 2.5. Dado um funcional linear u no espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, vamos denotar $u(\phi)$ por $< u, \phi >$. Uma distribuição é um funcional linear u que é contínuo no seguinte sentido: se $\phi_m \to \phi$ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $< u, \phi_m > \to < u, \phi >$. O espaço das distribuições será denotado por D'. Vamos utilizar a topologia fraca em D', isto é, $u_m \to u$ em D' se e somente se $< u_m, \phi > \to < u, \phi >$, para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.6. Vamos definir a norma L^p da derivada e da derivada de segunda ordem de uma função u por

$$||Du||_{L^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$||D^2u||_{L^p} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} ||D_i D_j u||_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.7. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos $W^{k,p}(\Omega)$ como

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para } 0 \leq \alpha \leq k\},$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições de u.

Definição 2.8. Seja $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$. T é dita de tipo fraco (p, q) ($1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$), quando

$$m\{x : Tf(x) > \alpha\} \leq \left(\frac{A||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\alpha}\right)^q$$

para todo $\alpha > 0$, onde A não depende de f e nem de α.

2.2 Teorema de interpolação

Definição 2.9. Definimos o espaço $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$, como

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n) = \{f : f = f_1 + f_2,\ f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \text{ e } f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)\}$$

Proposição 2.10. $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n) + L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ p_1 \leq p \leq p_2$

Demonstração. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\gamma > 0$, defina

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } |f(x)| > \gamma \\ 0 & , \text{se } |f(x)| \leq \gamma \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } |f(x)| \leq \gamma \\ 0 & , \text{se } |f(x)q| > \gamma \end{cases}$$

Temos $\int |f_1(x)|^{p_1} dx = \int |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1 - p} dx \leq \gamma^{p1-p} \int |f(x)|^p dx < \infty$, já que $p_1 - p \leq 0$. De maneira semelhante temos que

$$\int |f_2(x)|^{p_2} dx = \int |f_2(x)|^p |f_2(x)|^{p_2 - p} dx \leq \gamma^{p2-p} \int |f(x)|^p dx < \infty, \text{ se } p_2 < \infty.$$

Se $p_2 = \infty$, basta notar que $|f_2(x)| \leq \gamma \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Logo $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$, com $f = f_1 + f_2$, concluindo a prova da proposição.

□

Teorema 2.11. ***(Teorema de Marcinkiewicz)****Seja $1 < r \leq \infty$, e T um operador. Suponha que:*

i.

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|, \ \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n)$$

ii.

$$m(\{x : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq \frac{A_1}{\alpha} ||f||_1, \ \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \ \alpha > 0$$

iii.

$$m(\{x : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq (\frac{A_r}{\alpha} ||f||_r)^r, \ \forall f \in L^r(\mathbb{R}^n), \ \alpha > 0, \ se \ r < \infty$$

iv.

$$||Tf||_\infty \leq A_\infty ||f||_\infty,\ \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ se\ r = \infty$$

Então

$$||Tf||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ ,\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

para todo p tal que $1 < p < r$, onde A_p depende apenas de A_1, A_r, p, e r.

Demonstração. Suponha primeiro que $r < \infty$. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda(\alpha) = m(\{x : |tf(x)| > \alpha\})$. Vamos aplicar a proposição (2.10) para f. Escrevendo $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^r(\mathbb{R}^n)$, onde

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & ,\text{ se } |f(x)| > \alpha \\ 0 & ,\text{ se } |f(x)| \leq \alpha \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & ,\text{ se } |f(x)| \leq \alpha \\ 0 & ,\text{ se } |f(x)| > \alpha \end{cases}$$

Como $|Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$, temos que

$$\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \subset \{x : |Tf_1(x)| > \alpha/2\} \cup \{x : |Tf_2(x)| > \alpha/2\}$$

e portanto

$$\lambda(\alpha) = m(\{x : |Tf(x)| > \alpha\}) \leq m(\{x : |Tf_1(x)| > \alpha/2\}) + m(\{x : |Tf_2(x)| > \alpha/2\}),$$

e logo, pelas hipóteses (ii) e (iii), temos que

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{A_1}{\alpha/2} \int |f_1(x)| dx + \frac{A_r^r}{(\alpha/2)^r} \int |f_2(x)|^r dx.$$

Pelas definições de f_1 e f_2, obtemos

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{2A_1}{\alpha} \int_{|f|>\alpha} |f(x)| dx + \frac{(2A_r)^r}{\alpha^r} \int_{|f|\leq\alpha} |f(x)|^r dx. \tag{2.1}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\alpha &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\int_{|Tf|>\alpha} 1 dx d\alpha = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}\{|Tf|>\alpha\} dx d\alpha \\ &= p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \alpha^{p-1}\mathbb{1}\{|Tf|>\alpha\} d\alpha dx = \int_{\mathbb{R}^n} p\int_0^{|Tf|} \alpha^{p-1} d\alpha dx = \int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^p dx. \end{aligned}$$

Logo, para estimar $||Tf||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ temos que multiplicar (2.1) por $p\alpha^{p-1}$ e integrar com respeito a α. Para isso observe que

$$\int_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-1}\int_{|f|>\alpha} |f| dx d\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \int_0^{|f|} \alpha^{p-2} d\alpha dx = \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f||f|^{p-1} dx$$

pois $p > 1$. De maneira semelhante

$$\int_0^\infty \alpha^{p-1}\alpha^{-r}\int_{|f|\leq\alpha} |f|^r dx d\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^r \int_{|f|}^\infty \alpha^{p-1-r} d\alpha dx = \frac{1}{r-p}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r |f|^{p-r} dx$$

pois $p < r$. Colocando os dois juntos temos, por (2.1), que

$$||Tf||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \text{ com } A_p^p = \frac{2A_1}{p-1} + \frac{(2A_r)^r}{r-p}$$

No caso em que $r = \infty$, defina f_1 e f_2 como acima mas cortando a f em $\alpha/(2A_\infty)$, obtendo

$$|T(f)| = |T(f_1 + f_2)| \leq |Tf_1| + |Tf_2| \leq |Tf_1| + A_\infty ||Tf_2|| \leq |Tf_1| + \alpha/2$$

Logo, $\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \subset \{x : |Tf_1(x)| > \alpha/2\}$

Agora basta fazer as mesmas estimativa que antes para f_1, obtendo novamente que

$$||Tf||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \text{ mas com } A_p^p = \frac{2^p A_1 (A_\infty)^{p-1}}{p-1}$$

$\square$

2.3 Os Teoremas de Calderón-Zygmund

Lema 2.12. ***(Lema da Cobertura de Vitali).*** *Seja $B = \{B_1, B_2, ..., B_N\}$ uma coleção de bolas abertas do $\mathbb{R}^d$. Então existe uma sub-coleção disjunta $B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k}$ tal que*

$$m(\bigcup_{l=1}^{N} B_l) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

Demonstração. O argumento e construtivo, e se utiliza da seguinte observação: Suponha que B e B' são duas bolas que se interceptam, com o raio de B' não maior do que o raio de B. Então B' está contida na bola $\tilde{B}$ que é concêntrica com B, mas com o raio 3 vezes maior.

Primeiro escolha $B_{i_1} \in B$ a bola com maior raio, então retire de B a bola B_{i_1} e todas as outras bolas que interceptam B_{i_1}.

As bolas restantes formam uma nova coleção B' para a qual repetimos o procedimento anterior. Escolhemos $B_{i_2} \in B'$ com o maior raio, retirando de B', B_{i_2} e todas as bolas que interceptam B_{i_2}. Continuando esse procedimento temos, após no máximo N passos, uma coleção de bolas disjuntas $B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k}$. Como toda bola B_l está contida em alguma bola $\tilde{B}_{i_j}$ e $m(\tilde{B}_{i_j}) = 3m(B_{i_j})$, temos que

$$m(\bigcup_{l=1}^{N} B_l) \leq m(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{k} m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j})$$

□

Definição 2.13. Seja f uma função integrável, definimos sua função maximal f^* como

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy, \; x \in \mathbb{R}^d$$

Onde o supremo é tomado sobre todas as bolas que contém x.

Teorema 2.14. ***(Teorema de Hardy-Littlewood)***. *Suponha que f é integrável em $\mathbb{R}^d$. Então:*

i. *f^* é mensurável*

ii. *$f^*(x) < \infty$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^d$*

iii. *f^* satisfaz*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \tag{2.2}$$

Para todo $\alpha > 0$, onde $A = 3^d$.

iv. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ então $||f^*||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq A_\infty ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$*

v. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *então* $||f^*||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq A_p||f||_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, $1 < p \leq \infty$

Demonstração. Vamos provar *i*. Seja $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ e $\bar{x} \in E_\alpha$, então existe uma bola B, com $\bar{x} \in B$ e

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy > \alpha$$

logo $f^*(x) > \alpha \ \forall x \in B$, isto é, $B \subseteq E_\alpha$, o que prova que f^* é mensurável.

ii é consequência de *iii*, pois $\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) = \infty\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ para todo α. Tomando o limite quando α vai para infinito, por *iii* temos que $m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) = \infty\}) = 0$.

Vamos demonstrar *iii*. Para cada $x \in E_\alpha$ existe uma bola B_x com $x \in B_x$ e

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|dy > \alpha.$$

Logo para cada bola B_x, temos

$$m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|dy. \tag{2.3}$$

Seja $K \subset E_alpha$ compacto. Como K é coberto por $\bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$, podemos tomar uma sub-cobertura finita de K, $k \subset \bigcup_{l=1}^N B_l$. O lema 2.12 garante a existência de uma sub-coleção $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ de bolas abertas disjuntas com

$$m(\bigcup_{l=1}^N B_l) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}). \tag{2.4}$$

Como as bolas $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$ são disjuntas, e satisfazem (2.3) e (2.4), temos que

$$
\begin{aligned}
m(K) &\leq m(\bigcup_{l=1}^{N} B_l) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{i_j}} |f(y)|dy \\
&= \frac{3^d}{\alpha} \int_{\cup_{j=1}^{k} B_{i_j}} |f(y)|dy \leq \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy = \frac{3^d}{\alpha} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}
$$

Como essa desigualdade é válida para todo subconjunto compacto K de E_α, a desigualdade é válida também para E_α e prova de *iii* está completa.

Temos também que se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ então

$$
f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy \leq \sup_{x \in B} ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{m(B)} \int_B 1dy = ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
$$

O que demonstra *iv*.

v está demonstrado para $p = \infty$, para $1 < p < \infty$, por *iii*, *iv* e pelo fato de $(f+g)^* \leq f^* + g^*$ podemos aplicar o Teorema 2.11, o que conclui a demonstração. □

Corolário 2.15. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ou mais geralmente, se f é localmente integrável, então*

$$
\lim_{r \to \infty} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) = f(x) \textit{para quase todo } x \in \mathbb{R}^n.
$$

Demonstração. Ver página 5 de [9]. □

Teorema 2.16. ***(Decomposição de Calderón-Zygmund)****Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ não negativa e $\alpha > 0$ constante. Então existe uma decomposição de $\mathbb{R}^n$ tal que*

1. *$\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$.*

2. $f(x) \leq \alpha$ *em quase toda parte em* F

3. Ω *é a união de cubos,* $\Omega = \bigcup_k Q_k$*, cujos interiores são disjuntos, e para cada* Q_k *vale que*

$$\alpha < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)dx \leq 2^n \alpha \tag{2.5}$$

Demonstração. Vamos decompor $\mathbb{R}^n$ em uma malha de cubos de mesmo tamanho, tais que $\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} f(x)dx \leq \alpha$, para todo cubo Q' na malha.

Seja Q' um cubo fixo na malha. Vamos dividir cada um dos seus lados ao meio, gerando assim 2^n cubos congruentes. Seja Q" um desses cubos.

Primeiro caso: $\frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} f(x)dx \leq \alpha$.

Segundo caso: $\frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} f(x)dx > \alpha$.

No segundo caso Q'' não é subdividido. Q'' é selecionado como um dos cubos Q_k do teorema. Tal cubo satisfaz a desigualdade (2.5), pois

$$\alpha < \frac{1}{m(Q'')} \int_{Q''} f(x)dx \leq \frac{1}{2^{-n} m(Q')} \int_{Q'} f(x)dx \leq 2^n \alpha.$$

No primeiro caso, continuamos com a subdivisão de Q'', e continuamos esse processo até (se for o caso) cair no segundo caso. Escrevemos $\Omega = \bigcup_k Q_k$, a união dos cubos obtidos no segundo caso, onde começamos o processo com todos os cubos Q' da malha inicial. Afirmamos que $f(x) \leq \alpha$ para quase todo x em $F = \Omega^c$. De fato, para quase todo $x \in F$, temos, pelo Corolário 2.15, que

$$f(x) = \lim_{|Q| \to 0} \frac{1}{m(Q)} \int_Q f(y)dy$$

Onde o limite é tomado sobre todos os cubos Q contendo x. Porém, para cada um dos cubos que entram na nossa de composição e contém $x \in F$, vale o primeiro caso, o que prova o teorema.

$\square$

Lema 2.17. *Seja F um conjunto fechado com $m(^C F) < \infty$ e $\delta(x)$ a distância de x até F. Defina $I(x)$ por*

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}} dy.$$

Então existe $c > 0$ tal que

$$\int_F I(x) dx \leq cm(^C F).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\int_F I(x)dx &= \int_F \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}} dydx = \int_f \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dydx \\
&= \int_F \int_{^C F} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dydx = \int_{^C F} \int_F \frac{1}{|x-y|^{n+1}} dx \delta(y) dy.
\end{aligned}$$

O menos valor de $|x-y|$ (quando $x \in F$) é por definição $\delta(y)$, que é a distância de y até F. Portanto

$$\int_F \frac{1}{|x-y|^{n+1}} dx \leq \int_{|x| \geq \delta(y)} \frac{1}{|x|^{n+1}} \leq c(\delta(y))^{-1}.$$

Isso mostra que

$$\int_F I(x)dx \leq \int_{^C F} c(\delta(y))^{-1} \delta(y) dy = cm(^C F).$$

$\square$

Teorema 2.18. *Seja $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{K}$ a transformada de Fourier de K. Suponha:*

$$|\hat{K}| \leq B \tag{2.6}$$

$$|\nabla K(x)| \leq B/|x|^{n+1} \tag{2.7}$$

Para $f \in L^1 \cap L^p$ seja

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy \tag{2.8}$$

Então existe $A_p \in \mathbb{R}$ (que depende apenas de B, p e n) tal que

$$||T(f)||_p \leq A_p||f||_p, 1 < p < \infty \tag{2.9}$$

Demonstração. Primeiro mostramos que f é de tipo fraco (2,2):

Usando a Transformada de Fourier temos que $\hat{Tf}(y) = \hat{K}(y)\hat{f}(y)$ para $f \in L^1 \cap L^2$, então pela hipótese (2.6) e o Teorema de Plancherel temos

$$||T(f)||_2 \leq B||f||_2 \tag{2.10}$$

Por (2.10) temos que T tem extensão única para todo L^2, onde (2.10) ainda é válido. Logo T é de tipo (2,2) e portanto de tipo fraco (2,2).

$$m\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq (B^2/\alpha^2) \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx, f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.11}$$

Agora mostramos que T é de tipo fraco (1,1).

Para isso precisamos encontrar uma constance C [1] tal que

$$m\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx, f \in L(\mathbb{R}^n). \tag{2.12}$$

Para isso fixe α, e para este α e $|f(x)|$ aplique o Teorema 2.16. Temos então que $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$ com $F \cap \Omega = \emptyset$, $|f(x)| \leq \alpha$ para $x \in F$ e $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, onde os interiores de Q_j são dois a dois disjuntos;

$$m(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|dx, \text{ e } \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)|dx \leq C\alpha.$$

Definimos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } x \in F \\ \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(x)dx & , \text{se } x \in Q_j \end{cases} \tag{2.13}$$

$g(x)$ está definida em quase toda parte. Definindo $b(x) = f(x) - g(x)$ temos que

$$\begin{aligned} b(x) = 0, \text{ para } x \in F \\ \int_{Q_j} b(x)dx = 0, \text{ para cada cubo } Q_j \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $Tf = Tg + Tb$, segue que

$$m\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq m\{x : |Tg(x)| > \alpha/2\} + m\{x : |Tb(x)| > \alpha/2\}$$

[1] C vai denotar uma constante geral (não necessariamente a mesma cada vez que ela aparece) que depende apenas de B e da dimensão n.

É suficiente estabelecer desigualdades análogas à desigualdade (2.12) para cada um dos termos do lado direito da desigualdade acima.

Estimativa para Tg: Temos que $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pois por (2.13)

$$\begin{aligned} ||g||_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx = \int_F |g(x)|^2 dx + \int_\Omega |g(x)|^2 dx \\ &\leq \int_F \alpha |f(x)| dx + C^2\alpha^2 m(\Omega) \leq (C^2\alpha + 1)\alpha ||f||_1 \end{aligned}$$

Logo a desigualdade (2.11) também é válida para g. Obtemos

$$m\{x : |Tg(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{C}{\alpha}||f||_1 \tag{2.15}$$

Estimativa para Tb: Defina

$$b_j(x) = \begin{cases} b(x) & , \text{se } x \in Q_j \\ 0 & , \text{se } x \notin Q_j \end{cases}$$

Assim, temos que $b(x) = \sum_j b_j(x)$ e $(Tb)(x) = \sum_j (Tb_j)(x)$, com

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x-y) b_j(y) dy \tag{2.16}$$

Vamos obter uma boa estimativa para (2.16) quando $x \in F$. Primeiro, podemos escrever

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-y^j)] b_j(y) dy$$

com y^j o centro do cubo Q_j, pois $\int_{Q_j} b_j(y)dy = 0$. Como $|\nabla K| \leq B|x|^{-n-1}$, segue que

$$|K(x-y) - K(x-y^j)| \leq C\frac{\text{diâmetro}(Q_j)}{|x-\overline{y}^j|^{n+1}}$$

Onde $\overline{y}^j$ é um ponto do segmento de reta ligando y^j com y.

Os cubos Q_j podem ser escolhidos de forma que o seus diâmetros são proporcionais a suas distâncias até F. Isso significa que fixado $x \in F$, o conjunto das distâncias $\{|x-y| : y \in Q_j\}$ são todas comparáveis umas com as outras. Por isso

$$|Tb_j(x)| \leq C\text{diâmetro}(Q_j)\int_{Q_j}\frac{|b(y)|dy}{|x-y|^{n+1}}$$

Entretanto $\int_{Q_j}|b(y)|dy \leq \int_{Q_j}|f(y)|dy + C\alpha\int_{Q_j}dy$, logo $\int_{Q_j}|b(y)|dy \leq (1+C)\alpha m(Q_j)$. Isso tem a seguinte consequência, se $\delta(y)$ denotar a distância de y a F, como diâmetro$(Q_j)m(Q_j) \leq C\int_{Q_j}\delta(y)dy$, então

$$|Tb_j(x)| \leq C\alpha\int_{Q_j}\frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}}dy,\ x \in F$$

Finalmente,

$$|Tb(x)| \leq C\alpha\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}},\ x \in F \tag{2.17}$$

Usando o lema 2.17, temos que

$$\int_F |Tb(x)|dx \leq C\alpha m(\Omega) \leq C||f||_1, \tag{2.18}$$

dessa desigualdade segue que

$$m\{x \in F : |Tb(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{2C}{\alpha}||f||_1, \tag{2.19}$$

como $m({}^cF) = m(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha}||f||_1$, temos a estimativa desejada para Tb, isto é

$$m\{x : |Tb(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{C}{\alpha}||f||_1, \tag{2.20}$$

combinando (2.19) com (2.15), obtemos (2.12), logo T é de tipo fraco (1,1).

A desigualdade (2.9) foi provada para $p = 2$ em (2.10). Para $1 < p < 2$, é suficiente verificar as hipóteses do Teorema 2.11 para o caso $r = 2$. T está bem definido para $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ e é linear. É de tipo fraco (1,1) e de tipo fraco (2,2). Pelo Teorema 2.11, temos que

$$||T(f)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)},\ 1 < p < 2,\ f \in L^p,$$

onde A_p depende apenas de B, p e n.

Para $2 < p < \infty$, vamos explorar a dualidade entre L^p e L^q, $1/p + 1/q = 1$, e o fato de que o Teorema está provado para L^q. Observe o seguinte: se uma função ψ é localmente integrável e se $\sup|\int \psi\varphi dx| = A < \infty$, onde o sup é tomado sobre todas as funções contínuas φ de suporte compacto com $||\varphi||_q \leq 1$, então $\psi \in L^p$ e $||\psi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = A$.

Seja $f \in L^1 \cap L^p$ $(2 < p < \infty)$ e φ como acima. Como $K \in L^2$, pela nossa escolha de f e φ, a integral dupla

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\varphi(x)dxdy$$

converge absolutamente, podemos escrever então

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(x)dxdy$$

O teorema é verdadeiro para $1 < q < 2$ (com kernel $K(-x)$ no lugar de $K(x)$, mas com a mesma constante A_q). Logo $\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\varphi(x)dx \in L^q$, e sua norma L^q é majorada por $A_q||\varphi||_q \leq A_q$, pela desigualdade de Hölder temos que $|\int_{\mathbb{R}^n}(Tf)\varphi dx| = |I| \leq A_q||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, tomando o supremo sobre todos os φ obtemos

$$||Tf||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_q||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)},\ 2 < p < \infty$$

provando o Teorema.

□

Corolário 2.19. *A condição 2.7 do teorema 2.18 pode ser substituída por*

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leq B,\ |y| > 0 \tag{2.21}$$

Demonstração. O argumento é o mesmo do Teorema 2.18, exceto a parte que prova que T é de tipo fraco (1,1), portanto vamos mostrar este fato. Considere para cada cubo Q_j o cubo Q_j^* com o mesmo centro y^j, mas expandido $2n^{\frac{1}{2}}$ vezes. Temos:

1. $Q_j \subset Q_j^*$; se $\Omega^* = \cup Q_j^*$, então $\Omega \subset \Omega^*$ e $m(\Omega^*) \leq (2n^{\frac{1}{2}})^n m(\Omega)$; se $F^* =^c \Omega^*$, então $F^* \subset F$.

2. se $x \notin Q_j^*$, então $|x - y^j| \geq 2|y - y^j| \forall y \in Q_j$.

A outra diferença é que não vamos majorar $|Tb(x)|$ pela integral da distância, vamos estimá-la diretamente, como consequência da estimativa favorável obtida para F^*, ao invés de F.

Como no Teorema 2.18,

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-y^j)]b_j(y)dy$$

obtemos,

$$\int_{F^*} |Tb(x)|dx \leq \sum_j \int_{x \notin Q_j^*} \int_{y \in Q_j} |K(x-y) - K(x-y^j)||b(y)|dydx$$

no entanto por (2.) para $y \in Q_j$,

$$\int_{x \notin Q_j^*} |K(x-y) - K(x-y^j)|dx \leq \int_{|x'| \geq 2|y'|} |K(x'-y') - K(x')|dx' \leq B$$

onde a última desigualdade é válida por hipótese. Logo

$$\int_{F^*} |Tb(x)|dx \leq B \sum_j \int_{Q_j} |b(y)|dy \leq C||f||_1. \tag{2.22}$$

Isso nos traz de volta a (2.18) na demonstração do Teorema 2.18, o resto segue como na outra demonstração.

□

Lema 2.20. *Suponha que $K(x)$ satisfaça as condições*

$$\begin{gathered} |K(x)| \leq B|x|^{-n},\ 0 < |x| \\ \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leq B,\ 0 < |y| \end{gathered} \tag{2.23}$$

e

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)dx = 0,\ 0 < R_1 < R_2 < \infty. \tag{2.24}$$

Seja,

$$K_\epsilon(x) = \begin{cases} K(x) & , \, se\, |x| \geq \epsilon \\ 0 & , \, se\, |x| < \epsilon \end{cases}$$

Então $K_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\sup_y |\hat{K}_\epsilon(y)| \leq CB, \ \epsilon > 0 \tag{2.25}$$

onde C *depende apenas da dimensão* n.

Demonstração. Como $|K(x)| \leq B|x|^{-n}$, temos que $K_\epsilon(x) \leq B_\epsilon(x)$, onde

$$B_\epsilon(x) = \begin{cases} B|x|^{-n} & , \text{ se } |x| \geq \epsilon \\ 0 & , \text{ se } |x| < \epsilon \end{cases}$$

como $B_\epsilon(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, temos que $K_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Vamos provar a desigualdade (2.25) primeiro para o caso especial $\epsilon = 1$.

Observe que $K_1(x)$ satisfaz as mesmas condições (2.23) e (2.24) que $K(x)$, onde a cota superior B deve ser substituída por CB onde C depende apenas da dimensão n. Temos que

$$\hat{K}_1(y) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leq R} e^{2\pi i x.y} K_1(x)dx = \int_{|x|\leq 1/|y|} e^{2\pi i x.y} K_1(x)dx$$
$$+ \lim_{R\to\infty} \int_{1/|y|\leq|x|\leq R} e^{2\pi i x.y} K_1(x)dx = I_1 + I_2$$

No entanto, $\int_{|x|\leq 1/|y|} e^{2\pi i x.y} K_1(x)dx = \int_{|x|\leq 1/|y|} [e^{2\pi i x.y} - 1] K_1(x)dx$, pois K_1 satisfaz a condição (2.24). Logo$|I_1| \leq C|y| \int_{|x|\leq 1/|y|} |x||K_1(x)|dx \leq CB$ por (2.23)

Para estimar I_2 defina $z = z(y)$ com $z = \frac{y}{2|y|^2}$. Temos então que $e^{2\pi i y.z} = -1$. Observe que $\int_{\mathbb{R}^n} K_1(x)e^{2\pi i y.z}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}[K_1(x) - K_1(x-z)]e^{2\pi i y.z}dx$ logo,

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{1/|y|<|x|\leq R} K_1(x)e^{2\pi i y.z}dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \int\limits_{1/|y|<|x|\leq R} [K_1(x) - K_1(x-z)]e^{2\pi i y.z}dx$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{1/|y|\leq|x+z|,\ |x|\leq 1/|y|} K_1(x)e^{2\pi i y.z}dx$$

A última integral é feita sobre uma área contida na casca esférica, $\frac{1}{2}|y| \leq |x| \leq 1/|y|$, e é limitada já que $|K_1(x)| \leq B|x|^{-n}$. A primeira integral do lado direito é majorada por $\frac{1}{2}\int_{|x|\geq 1/|y|} |K_1(x-z) - K_1(x)|dx$. Como $|z| = (2|y|)^{-1}$, a condição análoga a (2.23) aplicada a K_1 mostra que essa integral também é limitada por CB. Se somarmos as limitações de I_1 e I_2obtemos a prova do lema para $\epsilon = 1$. Vamos passar agora para o caso geral $\epsilon > 0$.

Seja τ_ϵ a dilatação pelo fator ϵ, isto é, $(\tau_\epsilon f)(x) = f(\epsilon x)$. Assim se T é um operador de convolução $T(f) = \varphi * f$, então $\tau_{\epsilon^{-1}} T \tau_\epsilon = \varphi_\epsilon * f$, onde $\varphi_\epsilon = \epsilon^{-n}\varphi(\epsilon^{-1}x)$. No nosso caso T corresponde ao kernel $K(x)$ e $\tau_{\epsilon^{-1}} T \tau_\epsilon$ corresponde ao kernel $\epsilon^{-n}K(\epsilon^{-1}x)$. Note que se K satisfaz as condições do teorema, então $\epsilon^{-n}K(\epsilon^{-1}x)$ também satisfaz essas condições, e com as mesmas constantes. Assim, dado K como na hipótese, seja $K' = \epsilon^n K(\epsilon x)$. Então K' satisfaz as condições do lema com a mesma constante B, definindo $K'_1(x) = \begin{cases} K'(x), \text{ se } |x| > 1 \\ 0, \text{ se } |x| \leq 1 \end{cases}$, sabemos que $\widehat{K'_1(x)} \leq CB$. A transformada de Fourier de $\epsilon^{-n}K'_1(\epsilon^{-1}x)$ é $\widehat{K'_1(\epsilon x)}$ que também é limitada por CB. Como $\epsilon^{-n}K'_1(\epsilon^{-1}x) = K_\epsilon(x)$, o lema está provado.

□

Teorema 2.21. *Suponha que $K(x)$ satisfaça (2.23) e (2.24).*

Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, seja

$$T_\epsilon(f)(x) = \int_{|y|\geq\epsilon} f(x-y)K(y)dy, \; \epsilon > 0. \tag{2.26}$$

Então

$$||T_\epsilon(f)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.27}$$

onde A_p não depende de f e de ϵ. Além disso para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(f) = T(f)$ existe na norma L^p. O operador T assim definido também satisfaz a desigualdade (2.27).

Demonstração. Como $K(x)$ satisfaz as condições (2.23) e (2.24), $K_\epsilon(x)$ satisfaz as mesmas condições. Cada $K_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\epsilon > 0$. Logo aplicando diretamente o Teorema 2.18 e o Corolário 2.19 obtemos (2.27). Seja $f_1 \in C_0^1$. Então, pela condição (2.24)

$$\begin{aligned} T_\epsilon(f_1)(x) &= \int_{|y|\geq\epsilon} K(y)f_1(x-y)dy \\ &= \int_{|y|\geq 1} K(y)f_1(x-y)dy + \int_{1\geq|y|\geq\epsilon} K(y)[f_1(x-y) - f_1(x)]dy \end{aligned}$$

A primeira integral representa uma função L^p pois é a convolução de $f_1 \in L^1$ com $K \in L^p$, já que $|K(y)| \leq B|y|^{-n}$, se $|y| \geq 1$. A segunda integral é feita sobre um conjunto compacto, e converge uniformemente em x quando $\epsilon \to 0$ pois $|f_1(x-y) - f_1(x)| \leq A|y|$, pela diferenciabilidade de f_1. Resumindo, temos que $T_\epsilon(f_1)$ converge na norma L^p quando $\epsilon \to 0$.

Dado $f \in L^p$ podemos escrever $f = f_1 + f_2$, onde f_1 é como acima e $||f_2||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ é pequena. Se aplicarmos a desigualdade (2.27) para f_2 no lugar de f, vemos que $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(f)$ existe na norma L^p. Basta fazer $\epsilon \to 0$ para verificar que o operador limite T também satisfaz desigualdade (2.27), o que completa a prova do teorema.

$\square$

Teorema 2.22. ***(Teorema de Calderón-Zygmund).*** *Seja Ω limitada e homogênea de grau 0 e $\omega(\delta) = \sup\{|\Omega(x) - \Omega(x')| : |x - x'| \leq \delta\ ,\ |x| = |x'| = 1\}$, suponha que*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty \tag{2.28}$$

e que

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x) d\sigma = 0 \tag{2.29}$$

onde σ é a medida euclidiana induzida em S^{n-1}.

Para $1 < p < \infty$, e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ seja

$$T_\epsilon(f)(x) = \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x - y) dy.$$

então

1. *$\exists A_p \in \mathbb{R}$ (independente de f e de ϵ) tal que*

$$||T_\epsilon(f)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

2. *$\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon(f) = T(f)$ existe em L^p, e*

$$||T(f)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. As conclusões (1) e (2) do teorema são consequências diretas do Teorema 2.21, uma vez que tenhamos mostrado que qualquer $K(x)$ da forma $\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ (com Ω homogênea de grau 0) satisfaz (2.23).

Como Ω é limitado temos que claramente que $K(x) \leq \frac{B}{|x|^n}$. Temos também que

$$K(x-y) - K(x) = (\frac{\Omega(x-y) - \Omega(x)}{|x-y|^n}) + \Omega(x)(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}).$$

O segundo grupo de termos satisfaz a estimativa, pois

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n}|dx \leq C$$

e Ω é limitado. Para estimar o primeiro grupo de termos, observe que a distância entre as projeções de $x-y$ e x em S^{n-1}, $|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}|$, é limitada por $C|\frac{y}{x}|$, se $|x| \geq 2|y|$. Logo a integral correspondendo ao primeiro grupo de termos é dominada por

$$C' \int_{|x|\geq 2|y|} \omega(C\frac{|y|}{|x|})\frac{dx}{|x|^n} = C'' \int_0^{c/2} \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty.$$

□

2.4 Os Teoremas de Hardy-Littlewood-Sobolev

Definição 2.23. Definimos I_α, o Potencial de Riez, como

$$I_\alpha[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

Lema 2.24. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado mensurável, $d = diam(\Omega)$ o diâmetro de Ω e $0 < \alpha < n$. Então*

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \leq \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha} \ \forall x \in \Omega.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy &\leq \int\limits_{B(x,d)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \\ &\leq \int\limits_{B(0,d)} \frac{1}{|z|^{n-\alpha}}dy = \omega_n \int_0^d r^{-n+\alpha+n-1}dr = \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.25. *Dada $f \in L^p(\Omega)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado mensurável, $d = diam(\Omega)$ o diâmetro de Ω e $0 < \alpha < n$ temos que*

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy < \infty \text{ para quase todo } x \in \Omega. \tag{2.30}$$

Além disso, $I_\alpha[f](x) \in L^p(\Omega)$, com

$$||I_\alpha[f](x)||_{L^p(\Omega)} \leq \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}||f||_{L^p(\Omega)} \tag{2.31}$$

Demonstração. Para $p = \infty$, temos que

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy \leq ||f(y)||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy.$$

Pelo lema (2.24), temos que

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \leq \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}$$

e portanto

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy \leq ||f(y)||_{L^\infty(\Omega)}\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}\ \forall x \in \Omega.$$

O que demonstra (2.30) e (2.31) no caso em que $p = \infty$.

Para $p = 1$, temos que

$$\int_\Omega |I_\alpha[f](x)|dx \leq \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy\right]dx$$
$$= \int_\Omega |f(y)|\left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dx\right]dy.$$

Pelo lema (2.24), temos que

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \leq \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}$$

e portanto

$$\int_\Omega |I_\alpha[f](x)|dx \leq \int_\Omega |f(y)|\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}dy = \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}||f||_{L^1(\Omega)}.$$

O que demonstra (2.30) e (2.31) no caso em que $p = 1$.

Para $1 < p < \infty$, seja $q > 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos que

$$\begin{aligned} u(x) &\equiv \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy \\ &= \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)\frac{1}{q}}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{(n-\alpha)\frac{1}{p}}}dy \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(x)^p dx &\le \left(\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{p}{q}} \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} |f(y)|^p dy\right] dx \\
&= \left(\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{p}{q}} \int_\Omega |f(y)|^p \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx\right] dy \\
&\le \left(\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{p}{q}} \int_\Omega |f(y)|^p \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha} dy \\
&= \left(\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)^{1+\frac{p}{q}} ||f||^p_{L^p(\Omega)} = \left(\omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}\right)^p ||f||^p_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

e portanto

$$||I_\alpha[f]||_{L^p(\Omega)} \le ||u||_{L^p(\Omega)} \le \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha} ||f||_{L^p(\Omega)}.$$

O que demonstra (2.30) e (2.31) no caso em que $1 < p < \infty$, completando a demonstração. □

Teorema 2.26. ***(Potencial de Riesz para regiões limitadas).*** *Seja $n \ge 1$, $0 < \alpha < n$ e $1 \le p \le \infty$ dados. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável limitado e $d = diam(\Omega)$ o diâmetro de Ω. Dado $f \in L^p(\Omega)$, considere $I_\alpha[f]$ dado por*

$$I_\alpha[f](x) = \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy \text{ para quase todo } x \in \Omega. \tag{2.32}$$

Então

1. *Se $1 \le p < \frac{n}{\alpha}$, então $I_\alpha[f](x) \in L^q(\Omega)$ $\forall$ $p \le q < \frac{np}{n-\alpha p}$, com*

$$||I_\alpha[f]||_{L^q(\Omega)} \le K(n, d, \alpha, p, q) ||f||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.33}$$

2. *Se $p = \frac{n}{\alpha}$, então $I_\alpha[f](x) \in L^q(\Omega)$ $\forall$ $\frac{n}{\alpha} \le q < \infty$, com*

$$||I_\alpha[f]||_{L^q(\Omega)} \le K(n, d, \alpha, p, q) ||f||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.34}$$

3. Se $\frac{n}{\alpha} < p < \infty$, *então* $I_\alpha[f](x) \in L^q(\Omega)\ \forall\ p \leq q \leq \infty$, *com*

$$||I_\alpha[f]||_{L^q(\Omega)} \leq K(n,d,\alpha,p,q)||f||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.35}$$

4. Se $p = \infty$, *então* $I_\alpha[f] \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *com*

$$||I_\alpha[f]||_{L^\infty(\Omega)} \leq K(n,d,\alpha,p,q)||f||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.36}$$

Demonstração. O caso em que $p = q \in [1,\infty]$, foi demonstrado no Lema 2.25 acima, onde obtemos que

$$||I_\alpha[f]||_{L^p(\Omega)} \leq \omega_n \frac{d^\alpha}{\alpha}||f||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.37}$$

Vamos considerar agora, o caso em que $p = 1$ e $1 \leq q < \frac{n}{n-\alpha}$ (este é o caso (2.33) para p=1). O caso $q = 1$ é dado em (2.37) acima, portanto vamos considerar o caso $1 < q < \frac{n}{n-\alpha}$.

Escrevendo

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)| = \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|^{\frac{1}{q}}|f(y)|^{1-\frac{1}{q}}$$

obtemos que

$$|I_\alpha[f](x)| \leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy \leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}}|f(y)|dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f(y)|dy\right)^{1-\frac{1}{q}}. \tag{2.38}$$

Observe que $(n-\alpha)q < n$, pois $q < \frac{n}{n-\alpha}$, de modo que

$$|I_\alpha[f](x)|^q \leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}}|f(y)|dy||f||^{q-1}_{L^1(\Omega)}, \tag{2.39}$$

e portanto, pelo lema (2.24), temos que

$$
\begin{aligned}
||I_\alpha[f](x)||^q_{L^q(\Omega)} &\leq \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}}|f(y)|dy\right] dx ||f||^{q-1}_{L^1(\Omega)} \\
&= \int_\Omega |f(y)| \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q}} dx\right] dy ||f||^{q-1}_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \omega_n \frac{d^{n-(n-\alpha)q}}{n-(n-\alpha)q} \int_\Omega |f(y)|dy ||f||^{q-1}_{L^1(\Omega)} = \omega_n \frac{d^{n-(n-\alpha)q}}{n-(n-\alpha)q} ||f||^q_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

e portanto

$$
||I_\alpha[f](x)||_{L^q(\Omega)} \leq \left(\omega_n \frac{d^{n-(n-\alpha)q}}{n-(n-\alpha)q}\right)^{\frac{1}{q}} ||f||_{L^1(\Omega)} \ \forall\ 1 \leq q < \frac{n}{n-\alpha}. \tag{2.41}
$$

Agora vamos considerar o caso $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ e $p \leq q < \frac{np}{n-\alpha p}$. Como o caso $q = p$ já foi feito em (2.37) acima, vamos tratar apenas o caso $p < q < \frac{np}{n-\alpha p}$. Seja

$$
\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \tag{2.42}
$$

temos que $0 < \delta < \frac{\alpha}{n} < 1$. Seja r dado por

$$
\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 1 - \delta, \text{ isto é, } r = \frac{1}{1-\delta}. \tag{2.43}
$$

Observe que $r < q$, escrevendo

$$
\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)| = \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{\frac{r}{q}} |f(y)|^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{1-\frac{r}{q}} |f(y)|^{1-\frac{p}{q}}, \tag{2.44}
$$

temos que

$$\begin{aligned}
u(x) &\equiv \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy \\
&= \int_\Omega \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{\frac{r}{q}}|f(y)|^{\frac{p}{q}}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{1-\frac{r}{q}}|f(y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}dy \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)(1-\frac{r}{q})\frac{p}{p-1}}}\right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Observe que a expressão acima faz sentido, pois

$$\frac{1}{r} = 1-\delta > 1-\frac{\alpha}{n} \Rightarrow (n-\alpha)r < n$$

e

$$(n-\alpha)(1-\frac{r}{q})\frac{p}{p-1} = (n-\alpha)r(1-\frac{1}{p})\frac{p}{p-1} = (n-\alpha)r.$$

Da equação (2.45), temos que

$$|u(x)|^q \leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)}\left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}\right)^{(1-\frac{1}{p})q}, \tag{2.46}$$

de modo que

$$|u(x)|^q \leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)}\left(\omega_n \frac{d^{n-(n-\alpha)r}}{n-(n-\alpha)r}\right)^{q-\frac{q}{p}} \tag{2.47}$$

e portanto, escrevendo $\beta = n-(n-\alpha)r$, temos que

$$
\begin{aligned}
||I_\alpha[f]||^q_{L^q(\Omega)} &\leq \int_\Omega |u(x)|^q dx \leq ||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)} \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q-\frac{q}{p}} \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}} |f(y)|^p dy\right] dx \\
&= ||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)} \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q-\frac{q}{p}} \int_\Omega |f(y)|^p \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}} dx\right] dy \\
& ||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)} \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q-\frac{q}{p}} \omega_n \frac{d^\beta}{\beta} ||f||^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
||I_\alpha[f]||_{L^q(\Omega)} \leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{q}} ||f||_{L^p(\Omega)} \tag{2.48}
$$

$\forall\ 1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ e $p \leq q < \frac{np}{n-\alpha p}$.

Vamos considerar agora o caso $p = \frac{n}{\alpha}$ e $\frac{n}{\alpha} \leq q < \infty$. O caso $q = p$ já foi estudado em (2.37) acima. Vamos considerar então, apenas o caso $\frac{n}{\alpha} < q < \infty$.

Defina δ e r como

$$
\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{q} \tag{2.49}
$$

e

$$
\frac{1}{r} = 1 - \delta = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \tag{2.50}
$$

Observe que $0 < \delta < \frac{\alpha}{n} < 1$ e $r < \frac{n}{n-\alpha}$. Podemos escrever

$$
\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} |f(y)| = \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{\frac{r}{q}} |f(y)|^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{r(1-\frac{1}{p})} |f(y)|^{1-\frac{p}{q}} \tag{2.51}
$$

De modo que obtemos, por Hölder e pelo Lema 2.24, que

$$
\begin{aligned}
u(x) &\equiv \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy \\
&= \int_\Omega \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{\frac{r}{q}}|f(y)|^{\frac{p}{q}}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{r(1-\frac{1}{p})}|f(y)|^{1-\frac{p}{q}}dy \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\omega_n \frac{d^{n-(n-\alpha)r}}{n-(n-\alpha)r}\right)^{1-\frac{1}{p}}||f||_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{p}{q}}.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Obtemos então que

$$
|u(x)|^q \leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})}||f||_{L^p(\Omega)}^{q-p}, \tag{2.53}
$$

onde $\beta = n-(n-\alpha)r$. Observe que $\beta > 0$, pois $r < \frac{n}{n-\alpha}$. Portanto

$$
\begin{aligned}
||I_\alpha[f]||_{L^q(\Omega)}^q &\leq \int_\Omega |u(x)|^q dx \\
&\leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})}||f||_{L^p(\Omega)}^{q-p}\int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\right]dx \\
&= \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})}||f||_{L^p(\Omega)}^{q-p}\int_\Omega |f(y)|^p\left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}dx\right]dy \\
&\leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})}||f||_{L^p(\Omega)}^{q-p}\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\int_\Omega |f(y)|^p dy,
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

isto é,

$$
||I_\alpha[f]||_{L^q(\Omega)} \leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}||f||_{L^p(\Omega)} \ \forall \ p \leq q < \infty, \tag{2.55}
$$

onde $p = \frac{n}{\alpha}$ e $\beta = n-(n-\alpha)r$.

Vamos considerar agora o caso em que

$$\frac{n}{\alpha} < p < \infty \text{ e } p \leq q \leq \infty.$$

Como o caso $q = p$ já foi considerado acima em (2.37), vamos considerar apenas o caso $p < q \leq \infty$. Vamos começar pelo caso $p < q < \infty$. Seja

$$\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \tag{2.56}$$

e

$$\frac{1}{r} = 1 - \delta = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \tag{2.57}$$

Temos que $0 < \delta < \frac{\alpha}{n}$ e $1 < r < \frac{n}{n-\alpha}$. Escrevendo

$$\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)| = \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{\frac{r}{q}}|f(y)|^{\frac{p}{q}}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^{1-\frac{r}{q}}|f(y)|^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{2.58}$$

Como $1 - \frac{r}{q} = r(1 - \frac{1}{p})$, temos, pela desigualdade de Hölder e pelo lema (2.24), que

$$\begin{aligned} u(x) &\equiv \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)|dy \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{1-\frac{1}{p}}||f||_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{p}{q}}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Temos então que

$$|u(x)|^q \leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})} ||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)} \tag{2.60}$$

e portanto

$$\begin{aligned} ||I_\alpha(f)||^q_{L^q(\Omega)} &\leq \int_\Omega |u(x)|^q dx \\ &\leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})} ||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)} \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}}|f(y)|^p dy\right] dx \\ &= \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})} ||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)} \int_\Omega |f(y)|^p \left[\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}} dx\right] dy \\ &\leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{q(1-\frac{1}{p})} ||f||^{q-p}_{L^p(\Omega)} \omega_n \frac{d^\beta}{\beta} ||f||^p_{L^p(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

isto é,

$$||I_\alpha(f)||_{L^q(\Omega)} \leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} ||f||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.62}$$

Vamos considerar agora o último caso, isto é

$$\frac{n}{\alpha} < p < \infty \text{ e } q = \infty.$$

Temos, pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 2.24, que

$$\begin{aligned} |I_\alpha(f)(x)| &\leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}|f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)r}} dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{1-\frac{1}{p}} ||f||_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Observe que $\beta = n-(n-\alpha)r > 0$, pois $p > \frac{n}{\alpha}$. Temos então que

$$||I_\alpha[f]||_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\omega_n \frac{d^\beta}{\beta}\right)^{1-\frac{1}{p}} ||f||_{L^p(\Omega)}. \tag{2.64}$$

Finalmente, o caso $p = q = \infty$, já foi considerado em (2.37) acima. □

Teorema 2.27. ***(Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev)*** *Se $0 < \alpha < n$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, então g definida por*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)dy$$

está bem definida para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e

$$||g||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A(n,p,\alpha)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ onde } q = \frac{n}{n-\alpha p} p$$

Demonstração. Uma demonstração utilizando a decomposição de Calderón-Zygmund e o Teorema de Marcinkiewicz está em [9] e [3]. Uma demonstração mais elementar utilizando somente o operador maximal de Hardy-Littlewood pode ser encontrada em [8]. Em [6] uma outra prova via rearranjos de funções é apresentada bem como o argumento com as constantes ótimas. □

3 PRELIMINARES

Neste capítulo vamos tratar da forma integral da solução da equação de Poisson. Supomos uma grande regularidade nas funções para obtermos soluções clássicas para a equação de Poisson. Os resultados aqui obtidos serão fortemente utilizados nos capítulos seguintes.

3.1 Solução Clássica

Nesta seção, vamos apresentar uma solução para o problema $-\Delta u = f$, quando $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < n/2$. Além de obter algumas estimativas para a solução. Seja $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) = \Gamma(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n}|x|^{2-n} & , \text{se } n > 2 \\ \frac{-1}{2\pi} log|x-y| & , \text{se } n = 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

e u definida por

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy, \tag{3.2}$$

onde $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < n/2$.

Lema 3.1. *$u(x)$ está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja q' tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, observe que $1 < q < n/2 \Rightarrow (n-2)q' > n$. Temos então que, dado $x \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x-y)||f(y)|dy = \int\limits_{|x-y|\leq 1} |\Gamma(x-y)||f(y)|dy + \int\limits_{|x-y|>1} |\Gamma(x-y)||f(y)|dy \\
&\leq M_x \int\limits_{|x-y|\leq 1} |\Gamma(x-y)|dy + \Bigg(\int\limits_{|x-y|>1} |\Gamma(x-y)|^{q'} \Bigg)^{1/q'} \Bigg(\int\limits_{|x-y|>1} |f(y)|^{q} \Bigg)^{1/q} \\
&= M_x \int\limits_{|y|\leq 1} |\Gamma(y)|dy + \Bigg(\int\limits_{|y|>1} |\Gamma(y)|^{q'} \Bigg)^{1/q'} \Bigg(\int\limits_{|x-y|>1} |f(y)|^{q} dy \Bigg)^{1/q} \\
&\leq M_x \int\limits_{|y|\leq 1} |\Gamma(y)|dy + C_n \Bigg(\int\limits_{|y|>1} |y|^{-(n-2)q'} dy \Bigg)^{1/q'} ||f||_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty
\end{aligned}
$$

Logo $u(x)$ está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. □

Para mostrar que $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ vamos usar uma função de corte $\Phi \in C^\infty([0,\infty))$, tal que

$$
\Phi(r) = \begin{cases} 0 & , \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ 1 & , \text{se } r \geq 2 \end{cases}
$$

e $r \in [1,2] \Rightarrow \Phi(r) \in [0,1]$. Além disso podemos supor que $\Phi'(r) \geq 0$ $\forall r \geq 0$ e $\Phi'(r) \leq 2$ $\forall$ $1 \leq r \leq 2$.

Definição 3.2.

$$
\Phi_\delta(y) = \Phi\left(\frac{|y|}{\delta}\right) \tag{3.3}
$$

$$
\Gamma_\delta(y) = \Gamma(y)\Phi_\delta(y) \tag{3.4}
$$

$$
u_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_\delta(x-y)f(y)dy = \int\limits_{|x-y|\geq\delta} \Gamma(x-y)\Phi\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)f(y)dy \tag{3.5}
$$

Lema 3.3. *$u_\delta \in C^0(\mathbb{R}^n)$ $\forall$ $\delta > 0$.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$, $B_\delta(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \delta\}$ e $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Temos então que pra todo $x \in B_\delta(\hat{x})$:

$$\begin{aligned} u_\delta(x) - u_\delta(\hat{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} [\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)] f(y) dy \\ &= \int\limits_{|\hat{x}-y|\leq 2\delta} [\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)] f(y) dy \\ &+ \int\limits_{|\hat{x}-y|>2\delta} [\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)] f(y) dy = J_1(x) + J_2(x). \end{aligned}$$

Para $J_1(x)$ temos que:

$$\begin{aligned} |J_1(x)| &\leq \int\limits_{|\hat{x}-y|\leq 2\delta} |\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)||f(y)| dy \\ &\leq \left(\int\limits_{|\hat{x}-y|\leq 2\delta} |\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)|^{q'} dy \right)^{1/q'} \left(\int\limits_{|\hat{x}-y|\leq 2\delta} |f(y)|^q dy \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int\limits_{|\hat{x}-y|\leq 2\delta} |\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)|^{q'} dy \right)^{1/q'} ||f||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to\hat{x}} |\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)| = 0$,$\Gamma_\delta(\xi) \leq c_n \delta^{-n+2}$ $\forall$ $\xi \in \mathbb{R}^n$ e constantes são integráveis na bola $B(\hat{x}, \delta)$, temos pelo Teorema da convergência limitada que

$$\lim_{x\to\hat{x}} \left(\int\limits_{|\hat{x}-y|\leq 2\delta} |\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)|^{q'} dy \right)^{1/q'} = 0$$

e portanto $\lim\limits_{x\to\hat{x}} J_1(x) = 0$.

Para $J_2(x)$ temos que:

$$
\begin{aligned}
|J_2(x)| &\leq \int\limits_{|\hat{x}-y|>2\delta} |\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)||f(y)|dy \\
&\leq \Bigg(\int\limits_{|\hat{x}-y|>2\delta} |\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)|^{q'} dy \Bigg)^{1/q'} \Bigg(\int\limits_{|\hat{x}-y|>2\delta} |f(y)|^q dy \Bigg)^{1/q} \\
&\leq c_n \Bigg(\int\limits_{|\hat{x}-y|>2\delta} \left| |x-y|^{-n+2} - |\hat{x}-y|^{-n+2} \right|^{q'} dy \Bigg)^{1/q'} ||f||_{L^q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

Como para $x \in B(\hat{x}, \delta)$ e $y \notin B(\hat{x}, 2\delta)$, temos que:

$$
\frac{|y-\hat{x}|}{2} \leq |y - (\hat{x} + \delta \frac{y-\hat{x}}{|y-\hat{x}|})| \leq |y-x|
$$

e portanto, $|y-x|^{(-n+2)q'} \leq 2^{(-n+2)q'} |y-\hat{x}|^{(-n+2)q'}$. Como $|y-\hat{x}|^{(-n+2)q'} \chi_{\{|y-\hat{x}|>2\delta\}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, obtemos pelo Teorema da convergência dominada que

$$
\lim_{x \to \hat{x}} \Bigg(\int\limits_{|\hat{x}-y|>2\delta} \left| |x-y|^{-n+2} - |\hat{x}-y|^{-n+2} \right|^{q'} dy \Bigg)^{1/q'} = 0
$$

e portanto

$$
\lim_{x \to \hat{x}} J_2(x) = 0.
$$

Finalmente obtemos que

$$
\lim_{x \to \hat{x}} u_\delta(x) = u_\delta(\hat{x}).
$$

O que conclui a demonstração do lema. □

Lema 3.4. *Temos que $u_\delta(x) \to u(x)$, quando $\delta \to 0$, uniformemente para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto ($n > 2$).*

Demonstração. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, temos que:

$$\begin{aligned} u_\delta(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \big[\Gamma_\delta(x-y) - \Gamma(x-y)\big] f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\big[\Phi\Big(\frac{|x-y|}{\delta}\Big) - 1\big] f(y)dy \\ &= \int\limits_{|x-y|\leq 2\delta} \Gamma(x-y)\big[\Phi\Big(\frac{|x-y|}{\delta}\Big) - 1\big] f(y)dy, \end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned} |u_\delta(x) - u(x)| &\leq \int\limits_{|x-y|\leq 2\delta} |\Gamma(x-y)|\Big|\Phi\Big(\frac{|x-y|}{\delta}\Big) - 1\Big||f(y)|dy \\ &\leq \int\limits_{|x-y|\leq 2\delta} c_n|x-y|^{-n+2}|f(y)|dy. \end{aligned}$$

Logo, se $x \in B(0,R)$ (para algum $R > 0$ dado) e $\delta < 1$, temos que

$$\begin{aligned} |u_\delta(x) - u(x)| &\leq \int\limits_{|x-y|\leq 2\delta} c_n|x-y|^{-n+2}|f(y)|dy \\ &\leq \sup_{|y|<R+2} |f(y)| \int\limits_{|x-y|\leq 2\delta} c_n|x-y|^{-n+2}dy \\ &\leq c_n \sup_{|y|<R+2} |f(y)| \int\limits_{|\xi|\leq 2\delta} |\xi|^{-n+2}d\xi. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{|\xi|\leq 2\delta} |\xi|^{-n+2}d\xi = 0$$

Temos que $\lim_{\delta\to 0} u_\delta = u$, uniformemente em $B(0,R)$.

□

Obs.: O Lema 3.4 também é verdadeiro para $n=2$, assumindo que $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e $\int_{|\xi|>1} \log|\xi||f(\xi)|d\xi < \infty$.

Teorema 3.5. *Se $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < n/2$. Então $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, pelo Lema 3.4, existe $\hat{\delta} > 0$, tal que

$$|u_{\hat{\delta}}(x) - u(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} \; \forall \; x \in B(\hat{x}, 1).$$

Como, pelo Lema 3.3, $u_{\hat{\delta}} \in C^0(\mathbb{R}^n)$, existe $0 < \eta < 1$ tal que

$$|u_{\hat{\delta}}(x) - u_{\hat{\delta}}(\hat{x})| \leq \frac{\epsilon}{3}, \text{ se } |x - \hat{x}| \leq \eta.$$

Logo, para todo $x \in B(\hat{x}, \eta)$, temos que

$$|u(x) - u(\hat{x})| \leq |u(x) - u_{\hat{\delta}}(x)| + |u_{\hat{\delta}}(x) - u_{\hat{\delta}}(\hat{x})| + |u_{\hat{\delta}}(\hat{x}) - u(\hat{x})| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Isto é, $|x - \hat{x}| < \eta \Rightarrow |u(x) - u(\hat{x})| \leq \epsilon$. □

Obs.: O Teorema 3.5 também é verdadeiro para $n = 2$, assumindo que $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e $\int_{|\xi|>1} \log|\xi||f(\xi)|d\xi < \infty$.

Seja $v_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$v_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y) f(y) dy. \tag{3.6}$$

De modo similar ao Lema 3.1, pode-se mostrar que v está bem definida.

Lema 3.6. *Se* $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < n/2$. *Então* $u_\delta \in C^1(\mathbb{R}^n)$. *Nesse caso:*

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial x_j}(x-y) f(y)dy \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \ 1 \leq j \leq n. \tag{3.7}$$

Demonstração. Dado $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, seja $|h| < \delta/4$. Como

$$|\hat{x}-y| \leq \frac{3\delta}{4} \Rightarrow |\hat{x}+he_j-y| \leq |\hat{x}-y|+|h| \leq \frac{3\delta}{4}+\frac{\delta}{4} = \delta \Rightarrow \Gamma_\delta(\hat{x}-y) = \Gamma_\delta(\hat{x}+he_j-y) = 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{u_\delta(\hat{x}+he_j-y) - u_\delta(\hat{x}-y)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_\delta(\hat{x}+he_j-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)}{h} f(y)dy \\
&= \int\limits_{|\hat{x}-y|>\frac{3\delta}{4}} \frac{\Gamma_\delta(\hat{x}+he_j-y) - \Gamma_\delta(\hat{x}-y)}{h} f(y)dy \\
&= \int\limits_{|\hat{x}-y|>\frac{3\delta}{4}} \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}+\theta(h,y)e_j-y) f(y)dy.
\end{aligned}$$

Onde $|\theta(h,y)| < |h|$. Como

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}+\theta(h,y)e_j-y)f(y) = \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}-y)f(y) = 0$$

para quase todo $y \in B(\hat{x}, \frac{3\delta}{4})$ e

$$|\hat{x}+\theta(h,y)e_j-y| \geq |\hat{x}-y| - |he_j| = |\hat{x}-y| - |h| \geq |\hat{x}-y| - \frac{\delta}{4} \geq \frac{2}{3}|\hat{x}-y|$$

para todo $y \notin B(\hat{x}, \frac{3\delta}{4})$. Temos que

$$\left|\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}+\theta(h,y)e_j-y)f(y)\right|\leq g(\hat{x},y),\ \forall\ y\in B\big(\hat{x},\frac{3\delta}{4}\big)^c \text{ com } g(\hat{x},.)\in L^1(B\big(\hat{x},\frac{3\delta}{4}\big)^c).$$

Logo pelo Teorema da convergência dominada, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int\limits_{|\hat{x}-y|>\frac{3\delta}{4}}\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}+\theta(h,y)e_j-y)f(y)dy &= \int\limits_{|\hat{x}-y|>\frac{3\delta}{4}}\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}-y)f(y)dy\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}-y)f(y)dy\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}=\lim_{h\to 0}\frac{u_\delta(\hat{x}+he_j-y)-u_\delta(\hat{x}-y)}{h}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}-y)f(y)dy.$$

Vamos mostrar agora que $\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}\in C^0(\mathbb{R}^n)$ para que possamos concluir que $u_\delta\in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Dado $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$, considere $x\in B(\hat{x},\delta/4)$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(\hat{x})\right| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(x-y)-\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}-y)\right||f(y)|dy\\ &= \int\limits_{|\hat{x}-y|>3\delta/4}\left|\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(x-y)-\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}-y)\right||f(y)|dy\end{aligned}$$

Como acima, pelo Teorema da convergência limitada, temos que

$$\lim_{x\to\hat{x}}\int\limits_{|\hat{x}-y|>3\delta/4}\left|\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(x-y)-\frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}-y)\right||f(y)|dy=0$$

e portanto

$$\lim_{x\to\hat{x}} \left| \frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(\hat{x}) \right| = 0.$$

Assim, $\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j} \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, ..., n$. Portanto, $u_\delta \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$\square$

Lema 3.7. $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_j} = v_j$ *uniformemente para todo* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto.*

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial x_j}(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y)\Phi\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) f(y)dy \\ + \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Phi'\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\frac{x_j-y_j}{|x-y|} f(y)dy.\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x) - v_j(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y)\left[\Phi\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) - 1\right] f(y)dy \\ &+ \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Phi'\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\frac{x_j-y_j}{|x-y|} f(y)dy \\ &= \int\limits_{|x-y|\leq 2\delta} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y)\left[\Phi\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) - 1\right] f(y)dy \\ &+ \frac{1}{\delta}\int_{\delta\leq|x-y|\leq 2\delta} \Gamma(x-y)\Phi'\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\frac{x_j-y_j}{|x-y|} f(y)dy\end{aligned}$$

Para $|x| < R$ ($R > 0$ dado) e $0 < \delta < 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x) - v_j(x)\right| \leq & \int\limits_{|x-y|\leq 2\delta} \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y)\right|\left|\Phi\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) - 1\right||f(y)|dy \\
& + \frac{1}{\delta}\int\limits_{\delta\leq|x-y|\leq 2\delta} |\Gamma(x-y)|\left|\Phi'\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\right|\left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|}\right||f(y)|dy \\
& \leq M_{R+2}\int\limits_{|x-y|\leq 2\delta}\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y)\right|dy + \frac{2}{\delta}M_{R+2}\int\limits_{\delta\leq|x-y|\leq 2\delta}|\Gamma(x-y)|dy \\
& = M_{R+2}\int\limits_{|\xi|\leq 2\delta}\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_j}(\xi)\right|dy + \frac{2}{\delta}M_{R+2}\int\limits_{|\xi|\leq 2\delta}|\Gamma(\xi)|dy \\
& \leq M_{R+2}\frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{|\xi|\leq 2\delta}|\xi|^{-n+1}d\xi + \frac{2}{n(n-2)\omega_n}\frac{M_{R+2}}{\delta}\int\limits_{|\xi|\leq 2\delta}|\xi|^{-n+2}d\xi \\
& = M_{R+2}2\delta + \frac{2}{n(n-2)}\frac{M_{R+2}}{\delta}4\delta^2 \to 0, \text{ ao } \delta \to 0.
\end{aligned}
$$

Onde $M_{R+2} = ||f||_{L^\infty(B(0,R+2))}$, o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Obs.: O lema acima também é válido para $n = 2$, repetindo o argumento acima, obtemos que

$$|D_j u_\delta(x) - v_j(x)| \leq C_R\delta|log(\delta)| \text{ para todo } |x| \leq R,\ 0 < \delta \leq 1.$$

Segue dos Lemas 3.4, 3.6 e 3.7 o seguinte resultado fundamental:

Teorema 3.8. *Seja $n \geq 3$ e $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq q < \frac{n}{2}$. Seja $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ dado por*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

Então $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $1 \leq j \leq n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y)f(y)dy, \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Demonstração. Pelo Lema 3.7, sabemos que $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_j} = v_j$ em todo conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Temos então que $v_j \in C^0(\mathbb{R}^n)$ (pois pelo lema 3.6, $\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j} \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $\forall \; \delta > 0$).

Basta apenas mostrar então que

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = v_j(x). \tag{3.10}$$

Onde v_j é definido, como acima, por

$$v_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}(x-y)f(y)dy, \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Dado $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, seja $(x', a) = (x_1, ..., x_{j-1}, a, x_{j+1}, ..., x_n)$, $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Como

$$u_\delta(x) = u_\delta(x', 0) + \int_0^{x_j} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x', t)dt, \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$$

para todo $\delta > 0$. Fazendo $\delta \to 0$, obtemos, pelo Lema 3.4

$$\begin{aligned} u(x) = u(x', 0) &+ \int_0^{x_j} v_j(x', t)dt \\ u(x_1, ..., x_{j-1}, a, x_{j+1}, ..., x_n) &+ \int_0^{x_j} v_j(x_1, ..., x_{j-1}, a, x_{j+1}, ..., x_n)dt \end{aligned}$$

Derivando em relação a j-ésima variável, obtemos $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = v_j(x)$. □

Com um argumento parecido, é possível demonstrar que o Teorema 3.8 também é verdadeiro para $n = 2$, com a seguinte hipótese adicional

$$\int\limits_{|\xi|>1} \log|\xi||f(\xi)|d\xi < \infty.$$

Definição 3.9. f é dita Hölder Contínua em compactos quando para cada $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, existem $C > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ tais que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \ \forall \ x, y \in K.$$

Lema 3.10. *Seja $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $\rho \in L^\infty(\Omega)$ localmente Hölder contínua em Ω. Defina*

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\rho(y)dy \ \forall \ x \in \Omega. \tag{3.12}$$

Então $w(x) \in C^2(\Omega)$ e temos, para cada aberto limitado $\Omega_0 \supset \Omega$ onde o Teorema da divergência é valido, que

$$D_iD_jw(x) = \int_{\Omega_0} (D_iD_j\Gamma)(x-y)(\hat{\rho}(y) - \rho(x))dy - \rho(x)\int_{\partial\Omega_0} (D_i\Omega)(x-y)v_j(y)d\sigma(y) \tag{3.13}$$

$\forall x \in \Omega$, $1 \leq i, j \leq n$.

Onde $\hat{\rho}(y) = \rho(y)$ se $y \in \Omega$, $\hat{\rho}(y) = 0$ se $y \in \Omega_0$ e $v_j(y)$ é o vetor normal unitário de $\partial\Omega_0$ no ponto $y \in \partial\Omega_0$ que aponta para fora.

Demonstração. Ver página 55 de [2]. □

Lema 3.11. *Temos, para cada $1 \leq j \leq n$, que*

$$\int\limits_{|\xi|=R} \xi_j^2 d\sigma(\xi) = \frac{1}{n}\omega_n R^{n+1} \ \forall R > 0, \ n \geq 2.$$

Demonstração. Por simetria, temos que

$$\int\limits_{|\xi|=R} \xi_1^2 d\sigma(\xi) = \int\limits_{|\xi|=R} \xi_2^2 d\sigma(\xi) = ... = \int\limits_{|\xi|=R} \xi_n^2 d\sigma(\xi)$$

e portanto

$$\int_{|\xi|=R} \xi_j^2 d\sigma(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{|\xi|=R} \xi_i^2 d\sigma(\xi) = \frac{1}{n}\int_{|\xi|=R} |\xi|^2 d\sigma(\xi) = \frac{1}{n}\int_{|\xi|=R} R^2 d\sigma(\xi) = \frac{1}{n}\omega_n R^{n+1}$$

$\square$

Teorema 3.12. *Seja $n \geq 2$ e $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ localmente Hölder contínua. Se $n = 2$, suponha que $\int_{|\xi|>1} log|\xi||f(\xi)|d\xi < \infty$. Se $n \geq 3$, suponha que $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq q < \frac{n}{2}$. Seja u definida por*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy.$$

Então $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e para todo $\epsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$:

$$D_iD_ju(x) = \int_{|x-y|\geq\epsilon} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy + \int_{|x-y|<\epsilon} D_iD_j\Gamma(x-y)[f(y)-f(x)]dy \text{ se } i \neq j. \quad (3.14)$$

$$D_iD_iu(x) = \int_{|x-y|\geq\epsilon} D_iD_i\Gamma(x-y)f(y)dy + \int_{|x-y|<\epsilon} D_iD_i\Gamma(x-y)[f(y)-f(x)]dy - \frac{1}{n}f(x). \quad (3.15)$$

Em particular, fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$D_iD_ju(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x-y|\geq\epsilon} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy \text{ se } i \neq j. \quad (3.16)$$

$$D_iD_iu(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x-y|\geq\epsilon} D_iD_i\Gamma(x-y)f(y)dy - \frac{1}{n}f(x). \quad (3.17)$$

Demonstração. Defina $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\zeta(r) = 1 \ \forall \ r \leq 2$, $\zeta(r) = 0 \ \forall \ r \geq 3$ e $\zeta_R(y) = \zeta\left(\frac{|y|}{R}\right)$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $R > |x|$, temos que

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)[1-\zeta_R(y)]f(y)dy \\
&= \int\limits_{|y|<3R} \Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy + \int\limits_{|y|>2R} \Gamma(x-y)[1-\zeta_R(y)]f(y)dy \\
&= \int\limits_{|y|<2R} \Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy + \int\limits_{2R<|y|<3R} \Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy \\
&+ \int\limits_{|y|>2R} \Gamma(x-y)[1-\zeta_R(y)]f(y)dy := u_1(x) + u_2(x) + u_3(x).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Onde

$$u_1(x) = \int\limits_{|y|<2R} \Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy. \tag{3.19}$$

$$u_2(x) = \int\limits_{2R<|y|<3R} \Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy. \tag{3.20}$$

$$u_3(x) = \int\limits_{|y|>2R} \Gamma(x-y)[1-\zeta_R(y)]f(y)dy. \tag{3.21}$$

É fácil ver que $u_2 \in C^\infty(B(0,R))$, $u_3 \in C^\infty(B(0,R))$ e para cada i, j, temos

$$D_iD_ju_2(x) = \int\limits_{2R<|y|<3R} D_iD_j\Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy \ \forall \ x \in B(0,R). \tag{3.22}$$

$$D_iD_ju_3(x) = \int\limits_{|y|>2R} D_iD_j\Gamma(x-y)[1-\zeta_R(y)]f(y)dy \ \forall\ x \in B(0,R). \tag{3.23}$$

É fácil ver também que

$$\lim_{R\to\infty} D_iD_ju_2(x) = \lim_{R\to\infty} D_iD_ju_3(x) = 0. \tag{3.24}$$

Tomando $\Omega = \Omega_0 = B(0,2R)$ e aplicando o Lema 3.10, temos que $u_1 \in C^2(B(0,2R))$. Em particular, como $u = u_1 + u_2 + u_3$, temos que $u \in C^2(B(0,R))$.

Tomando $0 < \epsilon < R$ temos, pelo Lema 3.10, que

$$
\begin{aligned}
D_iD_ju_1(x) &= \int\limits_{B(0,2R)} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int\limits_{|y|=2R} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)d\sigma(y)\\
&= \int\limits_{\epsilon<|y-x|<2R} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy\\
&+ \int\limits_{B(x,\epsilon)} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int\limits_{|y|=2R} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)d\sigma(y)\\
&= \int\limits_{\epsilon<|y-x|<2R} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{B(x,\epsilon)} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy\\
&- f(x)\int\limits_{\epsilon<|y-x|<2R} D_iD_j\Gamma(x-y)dy - f(x)\int\limits_{|y|=2R} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)d\sigma(y)\\
&= \int\limits_{\epsilon<|y-x|<2R} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{B(x,\epsilon)} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy\\
&+ f(x)\int\limits_{|y|=2R} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)d\sigma(y) - f(x)\int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_i\Gamma(x-y)\frac{y_j-x_j}{\epsilon}d\sigma(y)\\
&- f(x)\int\limits_{|y|=2R} D_i\Gamma(x-y)v_j(y)d\sigma(y)\\
&= \int\limits_{\epsilon<|y-x|<2R} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{B(x,\epsilon)} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy\\
&- f(x)\frac{1}{\omega_n\epsilon^{n+1}}\int\limits_{|x-y|=\epsilon} (y_i-x_i)(y_j-x_i)d\sigma(y)\\
&= \int\limits_{\epsilon<|y-x|<2R} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{B(x,\epsilon)} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy\\
&- f(x)\frac{1}{\omega_n\epsilon^{n+1}}\int\limits_{|\xi|=\epsilon} (\xi_i)(\xi_j)d\sigma(\epsilon)
\end{aligned}
$$

onde o último termo é zero, se $i \neq j$. Portanto obtemos pelo Lema 3.11, que

$$
D_iD_ju_1(x) = \int\limits_{\epsilon<|y|<2R} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{B(x,\epsilon)} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy \tag{3.25}
$$

$\forall x \in B(0,R)$, se $i \neq j$, e

$$D_iD_iu_1(x) = \int\limits_{\epsilon<|y|<2R} D_iD_i\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{B(x,\epsilon)} D_iD_i\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - \frac{1}{n}f(x). \tag{3.26}$$

Por (3.22), (3.23) e pelo fato de ser $u(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$, temos que

$$\begin{aligned} D_iD_ju(x) = D_iD_ju_1(x) + \int\limits_{2R<|y|<3R} D_iD_j\Gamma(x-y)\zeta_R(y)f(y)dy \\ + \int\limits_{|y|>2R} D_iD_j\Gamma(x-y)[1-\zeta_R(y)]f(y)dy \end{aligned} \tag{3.27}$$

$\forall x \in B(0,R)$ e $0 < \epsilon < R$

Fazendo $R \to \infty$, temos que (uma vez que as duas últimas integrais vão a zero quando R vai a infinito)

$$D_iD_ju(x) = \int\limits_{|x-y|>\epsilon} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{|x-y|<\epsilon} D_iD_j\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy \text{ se } i \neq j \tag{3.28}$$

e

$$D_iD_iu(x) = \int\limits_{|x-y|\geq\epsilon} D_iD_i\Gamma(x-y)f(y)dy + \int\limits_{|x-y|<\epsilon} D_iD_i\Gamma(x-y)[f(y)-f(x)]dy - \frac{1}{n}f(x). \tag{3.29}$$

para $\epsilon > 0$ arbitrário, obtendo (3.14) e (3.15). Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos (3.16) e (3.17), o que completa a demonstração.

$\square$

Proposição 3.13.

$$\sum_{i=1}^{n} D_i D_i \Gamma(x-y) = 0 \ \forall x \neq y \tag{3.30}$$

Demonstração. Derivando Γ duas vezes, obtemos que

$$D_i D_i \Gamma(x-y) = \frac{|x-y|^{-n}}{n\omega_n} - \frac{(x_i-y_i)^2}{\omega_n}|x-y|^{-n-2}$$

Somando em i, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n} D_i D_i \Gamma(x-y) = \frac{|x-y|^{-n}}{\omega_n} - \frac{|x-y|^2}{\omega_n}|x-y|^{-n-2} = 0$$

□

Teorema 3.14. *Seja $n \geq 2$ e $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ localmente Hölder contínua. Se $n = 2$, suponha que $\int\limits_{|\xi|>1} log|\xi||f(\xi)|d\xi < \infty$. Se $n \geq 3$, suponha que $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq q < \frac{n}{2}$. Seja u definida por*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

Então

$$-\Delta u = f(x)$$

Demonstração. Pelo teorema (3.12) temos que

$$D_i D_i u(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|\geq\epsilon} D_i D_i \Gamma(x-y) f(y) dy - \frac{1}{n} f(x).$$

Somando em i, e utilizando a Proposição 3.13 obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n} D_i D_i u(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|\geq\epsilon} \sum_{i=1}^{n} [D_i D_i \Gamma(x-y)] f(y) dy - f(x) = -f(x)$$

□

Lema 3.15. ***(Lema de Weyl)****Se $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta u = 0$, então $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*

Demonstração. Ver página 28 de [1]. □

Proposição 3.16. *Considere f e u como no Teorema 3.12, sabemos (pelo mesmo Teorema) que $-\Delta u = f$. Seja $v \in D'(\mathbb{R}^n)$ outra solução, isto é $-\Delta v = f$. Então $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Temos que $v - u \in D'(\mathbb{R}^n)$ e que $\Delta(v-u) = 0$, pelo Lema 3.15, $v - u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, temos que $v = u + (v-u) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ □

Uma condição fisicamente interessante que podemos impor para o problema $-\Delta u = f$ é a de que $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Vamos verificar que essa condição torna de fato a solução única quando impomos certa regularidade a f e que a solução u que construímos satisfaz essa condição.

Teorema 3.17. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde $1 \leq p < \frac{n}{2}$, e u definida por*

$$u(x) = K \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)dy, \text{ onde } K = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}.$$

Então $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Demonstração. Suponha primeiro que $p = 1$. Dado $\epsilon > 0$ seja $R > 0$ tal que

$$K \frac{1}{R^{n-2}} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{3},$$

existe também δ >0 suficientemente pequeno tal que

$$K||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|z|<\delta} \frac{1}{|z|^{n-2}} dz < \frac{\epsilon}{3},$$

além disso, como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|x|$ suficientemente grande vale que

$$\frac{K}{\delta^{n-2}} \int\limits_{|y-x|<R} |f(y)|dy < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, para $|x|$ suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq K \int\limits_{|y-x|<\delta} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}|f(y)|dy \\
&+ K \int\limits_{\delta<|y-x|<R} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}|f(y)|dy + K \int\limits_{R<|y-x|} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}|f(y)|dy \\
&\leq K \int_{|z|<\delta} \frac{1}{|z|^{n-2}}dz + \frac{K}{\delta^{n-2}} \int\limits_{|y-x|<R} |f(y)|dy + K\frac{1}{R^{n-2}}||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração para $p = 1$.

Suponha agora que $1 < p < \frac{n}{2}$. Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Existe $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$K||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_{|z|>R} \frac{1}{|z|^{(n-2)q}}dz < \frac{\epsilon}{2}$$

pois $1 < p < \frac{n}{2} \Rightarrow (n-2)q > n$. Como no caso $p = 1$, seja δ suficientemente pequeno tal que

$$K||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|z|<\delta} \frac{1}{|z|^{n-2}}dz < \frac{\epsilon}{4},$$

além disso, como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $|x|$ suficientemente grande vale que

$$\frac{K}{\delta^{n-2}}|B(0,R)|^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_{|y-x|<R} |f(y)|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{4}$$

Portanto, para $|x|$ suficientemente grande,

$$|u(x)| \leq K \int\limits_{|y-x|<R} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}|f(y)|dy + K \int\limits_{R\geq|y-x|} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}|f(y)|dy = I_1 + I_2$$

Para I_1, temos que

$$\begin{aligned} I_1 &= K \int\limits_{|y-x|<\delta} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}|f(y)|dy + K \int\limits_{\delta<|y-x|<R} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}|f(y)|dy \\ &\leq K||f(y)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{|z|<\delta} \frac{1}{|z|^{n-2}}dy + K\Bigg(\int\limits_{\delta<|y-x|<R} \frac{1}{|x-y|^{(n-2)^q}}dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_{\delta<|y-x|<R} |f(y)|^p dy\Bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &< \frac{\epsilon}{4} + K\frac{1}{\delta^{n-2}}|B(0,R)|^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_{|y-x|<R} |f(y)|^p dy\Bigg)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Para I_2, temos que

$$\begin{aligned} I_2 &= K\Bigg(\int\limits_{|y-x|\geq R} \frac{1}{|x-y|^{(n-2)^q}}dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_{|y-x|\geq R} |f(y)|^p dy\Bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq K||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Bigg(\int_{|z|>R} \frac{1}{|z|^{(n-2)q}}dz\Bigg)^{\frac{1}{q}} < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

e portanto

$$|u(x)| \leq I_1 + I_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\square$

Seja v uma outra solução, isto é $-\Delta v = f$, definindo $\theta = v - u$, temos que $\Delta\theta = 0$. Pela Proposição 3.16, segue que v e θ são contínuas. Se impormos a condição

$\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$, pelo teorema acima temos que $\lim_{|x|\to\infty} \theta(x) = 0$, e portanto, $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema de Liouville θ é constante, como $\lim_{|x|\to\infty} \theta(x) = 0$, só pode ser $\theta(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Portanto $u = v$. Isso mostra que se impormos a condição $\lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$, a solução do problema $-\Delta v = f$ é única e é dada por

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy.$$

Para mostrar que a hipótese $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, utilizada em vários teoremas que provamos até agora, não é uma hipótese artificial. Considere

$$f(x) = \frac{1}{|x|^2}e^{-|x|}.$$

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall\ 1 < p < \frac{n-1}{2}$ $(n > 2)$, porém

$$\lim_{x\to 0} K \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{1}{|y|^2} e^{-|y|}dy = K \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} e^{-|y|}dy = \infty.$$

Agora vamos aplicar a teoria de Calderón-Zygmund à equação de Poisson, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ localmente Hölder contínua. Onde $1 < p < \frac{n}{2}$.

Considere Γ definida em (3.1), se calcularmos as derivadas de Γ, obtemos que

$$D_iD_j\Gamma(x) = \frac{1}{n\omega_n}[nx_ix_j - |x|^2\delta_{ij}]\frac{1}{|x|^{n+2}}.$$

Utilizando a notação $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, podemos reescrever a equação acima como

$$D_iD_j\Gamma(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \tag{3.31}$$

onde

$$\Omega(x) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{[nx_ix_j - |x|^2\delta_{ij}]}{|x|^2}. \tag{3.32}$$

Observe que $\Omega(rx) = \Omega(x)\ \forall r > 0$ e que

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \Omega(x)d\sigma &= \int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}\frac{[nx_ix_j - |x|^2\delta_{ij}]}{|x|^2}d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n} nx_ix_j - \delta_{ij}d\sigma.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Proposição 3.18. *Se $i \neq j$, então*

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}[nx_ix_j - \delta_{ij}]d\sigma = 0.$$

Demonstração. Considere $1 \leq i < j \leq n$ fixos. Definindo os conjuntos:

$A_1 = S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < 0, x_j < 0\}$, $A_2 = S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, x_j < 0\}$,

$A_3 = S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, x_j > 0\}$ e $A_4 = S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i < 0, x_j > 0\}$.

Temos pela simetria de S^{n-1} que

$$\int_{A_1} x_ix_jd\sigma = \int_{A_3} x_ix_jd\sigma = -\int_{A_2} x_ix_jd\sigma = -\int_{A_4} x_ix_jd\sigma$$

Portanto,

$$\int_{S^{n-1}} x_ix_jd\sigma = \int_{A_1} x_ix_jd\sigma + \int_{A_2} x_ix_jd\sigma + \int_{A_3} x_ix_jd\sigma + \int_{A_4} x_ix_jd\sigma = 0.$$

Como, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, temo que

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}[nx_ix_j - \delta_{ij}]d\sigma = 0.$$

□

Proposição 3.19.

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}[nx_i^2 - 1]d\sigma = 0.$$

Demonstração.

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}[nx_i^2 - 1]d\sigma = \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\omega_n}x_i^2 d\sigma - \int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}d\sigma = I_1 - I_2.$$

Por simetria, temos que

$$\int_{S^{n-1}} x_1^2 d\sigma = ... = \int_{S^{n-1}} x_n^2 d\sigma$$

e portanto

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\omega_n}x_i^2 d\sigma &= \frac{1}{n\omega_n}\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}} x_j^2 d\sigma \\ &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} |x|^2 d\sigma = \frac{1}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} 1 d\sigma = \frac{1}{n\omega_n}\omega_n = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

e

$$I_2 = \int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}d\sigma = \frac{1}{n\omega_n}\omega_n = \frac{1}{n}.$$

Portanto,

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n}[nx_i^2 - 1]d\sigma = I_1 - I_2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

□

Proposição 3.20. *Seja Ω definida como em (3.32), isto é,*

$$\Omega(x) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{[nx_i x_j - |x|^2 \delta_{ij}]}{|x|^2}.$$

Considere $\omega(\delta) = \sup\{|\Omega(x) - \Omega(x')| : |x - x'| \leq \delta \ , \ |x| = |x'| = 1\}$. *Então*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty$$

Demonstração. Como $\Omega \in C^1(S^{n-1})$, temos que $\omega(x) \leq M\delta$, onde

$$M = \max_{x \in S^{n-1}} |D\Omega(x)|$$

e portanto

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta \leq \int_0^1 \frac{M\delta}{\delta} d\delta = \int_0^1 M d\delta < \infty.$$

□

Definição 3.21.

$$pv \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{\epsilon to 0} \int_{\mathbb{R}^n \ B(0,\epsilon)} f(x)dx.$$

Podemos obter agora, o importante teorema:

Teorema 3.22. *Seja $n \geq 2$ e $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ localmente Hölder contínua. Se $n = 2$, suponha que $\int\limits_{|\xi|>1} log|\xi||f(\xi)|d\xi < \infty$. Se $n \geq 3$, suponha que $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq q < \frac{n}{2}$. Seja u definida por*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y) f(y) dy.$$

Então

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.34}$$

e

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||\Delta u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.35}$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.12 temos que

$$D_iD_ju(x) = pv \int_{\mathbb{R}^n} D_iD_j\Gamma(x-y)f(y)dy \text{ se } i \neq j.$$

$$D_iD_iu(x) = pv \int_{\mathbb{R}^n} D_iD_i\Gamma(x-y)f(y)dy - \frac{1}{n}f(x).$$

Pela equação (3.31) temos que

$$D_iD_j\Gamma(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$$

onde

$$\Omega(x) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{[nx_ix_j - |x|^2\delta_{ij}]}{|x|^2}.$$

Pelas Proposições 3.18, 3.19 e 3.20, podemos aplicar o Teorema 2.22, obtendo que

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como, pelo Teorema 3.14, temos que $-\Delta u = f$, obtemos também que

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||\Delta u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Como, pelo Teorema 3.14, sabemos que $-\Delta u = f$, Obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.23. *Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ localmente Hölder contínua, onde $1 < p < \frac{n}{2}$. Então existe $A_p > 0$ tal que*

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||\Delta u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Defina $f(x) = -\Delta u$. u é claramente uma solução do problema $-\Delta u = f$. Sabemos que u_* definida por

$$u_*(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy$$

também é uma solução. Pela discussão acima, sabemos que

$$||D_iD_ju_*||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||\Delta u_*||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\theta = u - u_*$ é harmônica e limitada, temos que θ é constante, de modo que, $D_iD_ju = D_iD_ju_*$, para todo $1 \leq i \leq j \leq n$. E portanto

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||\Delta u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Corolário 3.24. *Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ localmente Hölder contínua, onde $1 < p < \frac{n}{2}$. Então existe $A_p > 0$ tal que*

$$||D^2u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||\Delta u||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

4 O PROBLEMA $-\Delta U = F$, $F \in L^P(\mathbb{R}^N)$

Agora vamos obter um resultado um pouco mais geral, removendo as hipóteses: $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e f Hölder contínua.

4.1 O problema $-\Delta u = f$, para $1 < p < \frac{n}{2}$

Teorema 4.1. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $n \geq 3$ e $1 \leq p < \frac{n}{2}$. Seja u definida como em (3.2), isto é,*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy, \tag{4.1}$$

Então u está bem definida para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$

Demonstração. Suponha que $p > 1$, seja $R > 0$ fixo, considere a integral

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x-y)||f(y)| dy dx &= \int_{|x|<R} \int_{|y|<2R} |\Gamma(x-y)||f(y)| dy dx \\ &+ \int_{|x|<R} \int_{|y|\geq 2R} |\Gamma(x-y)||f(y)| dy dx = I_1 + I_2\end{aligned}$$

Vamos estimar I_1 e I_2 separadamente e concluir que são ambos finitos. Para I_1, temos que

$$I_1 = \int\limits_{|y|<2R}\int\limits_{|x|<R} |\Gamma(x-y)||f(y)|dxdy = \int\limits_{|y|<2R}\int\limits_{|y+z|<R} |\Gamma(z)||f(y)|dzdy$$
$$< \int\limits_{|y|<2R}\int\limits_{|z|<3R} |\Gamma(z)|dz|f(y)|dy = K_R \int\limits_{|y|<2R} |f(y)|dy < \infty$$

onde a última desigualdade vale por Hölder, pois $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e portanto $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para I_2, temos que $|x-y| \geq |y| - R \geq |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2}$, e portanto

$$I_2 \leq 2^{n-2} \int\limits_{|x|<R}\int\limits_{|y|\geq 2R} |\Gamma(y)||f(y)|dydx$$
$$= 2^{n-2}|B(0,R)| \int\limits_{|y|\geq 2R} |\Gamma(y)||f(y)|dy \leq 2^{n-2}|B(0,R)|||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big(\int\limits_{|y|\geq 2R} |\Gamma(y)|^q dy\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observe que $\int\limits_{|y|\geq 2R} \Gamma(y)^q dy < \infty$, pois $1 \leq p < \frac{n}{2} \Rightarrow (n-2)q > n$.

Concluímos então que $\int\limits_{B(0,R)} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x-y)||f(y)|dydx < \infty$ e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x-y)||f(y)|dy < \infty \text{ para quase todo } x \in B(0,R)$$

Como R>0 é arbitrário, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x-y)||f(y)|dy < \infty \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^n$$

O caso em que $p = 1$ é análogo. $\square$

O resultado acima também é verdadeiro para $n = 2$, trocando a hipótese $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ por

$$\int\limits_{|\xi|>1} log|\xi||f(\xi)|d\xi < \infty \tag{4.2}$$

Proposição 4.2. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se $\{f_m\}$ é uma sequência de funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$ convergindo para f em $L^p(\mathbb{R}^n)$ então $\{f_m\}$ converge como distribuição para f.*

Demonstração. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$| < f_m, \phi > - < f, \phi > | = | < f_m - f, \phi > | \leq ||f_m - f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}||\phi||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 0, \text{ ao } m \to \infty.$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

Vamos mostrar agora que $-\Delta u = f$, no sentido das distribuições, isto é, vamos mostrar que

$$-\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \ \forall \ \phi \in L_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.3}$$

Para isso, vamos primeiro definir uma noção de convergência em C_0^∞.

Definição 4.3. Seja $\{\phi_m\}$ uma sequência de funções em C_0^∞, dizemos que ϕ_m converge a $\phi \in C_0^\infty$ e escreveremos $\phi_m \to \phi$ quando existe $R > 0$ tal que $supp\phi_m \subset B(0, R)$ $\forall m$ e $D^\alpha\phi_m \to D^\alpha\phi$ uniformemente para todo multi-índice α.

Teorema 4.4. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < \frac{n}{2}$. Se u é definida como em (4.1), então $-\Delta u = f$ no sentido das distribuições.*

Demonstração. Seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $f_m \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Definindo u_m por

$$u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f_m(y)dy,$$

temos pelo Teorema 3.14 que $-\Delta u_m = f_m$. Pelo Teorema 2.27,

$$||u_m - u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C||f_m - f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \text{ onde } q = \frac{n}{n-2p}p.$$

Como $f_m \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, então $u_m \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Pela Proposição 4.2 temos que $u_m \to u$ como distribuição, e portanto $\Delta u_m \to \Delta u$ como distribuição. Por outro lado, $-\Delta u_m = f_m \to f$, como o limite é único, temos que $-\Delta u = f$ no sentido das distribuições. $\square$

Agora vamos aplicar a teoria de Calderón-Zygmund à equação de Poisson, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Onde $1 < p < \frac{n}{2}$. Como antes, seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $f_m \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, definimos u_m e u por

$$u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f_m(y) dy,$$

e

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

Proposição 4.5. *Dado $1 \leq i \leq n$, $D_i u_m \to D_i u$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $q = \frac{np}{n-p}$. Além disso, existe $K > 0$ constante, tal que*

$$||D_i u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Pelos Teoremas 2.27 e 3.80, temos que

$$||D_i u_m||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.4}$$

e que

$$||D_i u_m - D_i u_l||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K||f_m - f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{D_i u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^q(\mathbb{R}^n)$, e portanto existe $v_i = \lim D_i u_m$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, sabemos pela demonstração do Teorema 4.4, que $u_m \to u$ como distribuição e portanto $D_i u_m \to D_i u$ como distribuição. Pela unicidade do limite, temos que $v_i = D_i u$. Portanto $D_i u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e aplicando o limite em (4.4), obtemos que

$$||D_i u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Proposição 4.6. *Dado* $1 \leq i \leq j \leq n$*,* $D_i D_j u_m \to D_i D_j u$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$*. Além disso, existe* $K > 0$ *constante, tal que*

$$||D_i D_j u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.22, temos que

$$||D_i D_j u_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.5}$$

e que

$$||D_i D_j u_m - D_i D_j u_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K||f_m - f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{D_i D_j u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, e portanto existe $v_{ij} = \lim D_i D_j u_m$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, sabemos pela demonstração do Teorema 4.4, que $u_m \to u$ como distribuição e portanto $D_iD_ju_m \to D_iD_ju$ como distribuição. Pela unicidade do limite, temos que $v_{ij} = D_iD_ju$. Portanto $D_iD_ju \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e aplicando o limite em (4.5), obtemos que

$$||D_iD_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

4.2 O problema $-\Delta u = f$, para $\frac{n}{2} \leq p < n$

Nesta seção, como nas anteriores, vamos apresentar uma solução para a equação de Poisson com algumas estimativas, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Porém, dessa vez, supomos que $\frac{n}{2} \leq p < n$.

Lema 4.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo limitado e $u \in W^{1,1}(\Omega)$ (equivalentemente para $u \in C^1(\Omega)$). Dado $S \subset \Omega$, com $|S| > 0$, seja*

$$u_s = \frac{1}{|S|}\int_S u(x)dx.$$

Então

$$|u(x) - u_s| \leq \frac{d^n}{n|S|}\int_\Omega \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy \text{ para quase todo } x \in \Omega$$

onde $d = diam(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega}|x-y|$.

Demonstração. Ver página 155 de [2]. □

Corolário 4.8. *Seja* $u \in L^1(\Omega)$ *com* $Du \in L^p(\Omega)$, *onde* $1 \leq p \leq \infty$. *Então*

$$||u - u_s||_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\omega_n d^{n+1}}{n|S|}||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Vamos definir $g(x)$ como

$$g(x) = \int_\Omega \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy.$$

Vamos supor primeiro que $p = 1$. Então

$$\int_\Omega |g(x)|dx = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}dydx = \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}}dx|Du(y)|dy$$

e

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}}dx \leq \int\limits_{B(y,d)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}dx = \int\limits_{B(0,d)} \frac{1}{|z|^{n-1}}dx$$
$$= \int\limits_{|\omega|=1} \int_0^d \frac{1}{r^{n-1}}r^{n-1}drd\sigma(\omega) = \omega_n \int_0^d 1dr = \omega_n d.$$

Portanto,

$$\int_\Omega |g(x)|dx \leq \omega_n d \int_\Omega |Du(y)|dy = \omega_n d||Du||_{L^1(\Omega)},$$

e, pelo Lema 4.7,

$$||u - u_s||_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x) - u_s|dx \leq \frac{d^n}{n|S|}\int_\Omega g(x)dx \leq \frac{\omega_n d^{n+1}}{n|S|}||Du||_{L^1(\Omega)}$$

O caso $p = \infty$ segue diretamente do lema (4.7). Para $1 < p < \infty$, seja $q > 0$ tal que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos que

$$|g(x)| = \int_\Omega \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy = \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{\frac{(n-1)}{q}}} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{\frac{(n-1)}{p}}} dy$$
$$\leq \left(\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \frac{|Du(y)|^p}{|x-y|^{n-1}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\omega_n d)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \frac{|Du(y)|^p}{|x-y|^{n-1}} dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Logo (usando os resultados obtidos para $p = 1$),

$$\int_\Omega |g(x)|^p dx \leq (\omega_n d)^{p-1} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|Du(y)|^p}{|x-y|^{n-1}} dy dx$$
$$\leq (\omega_n d)^{p-1} \int_\Omega \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dx |Du(y)|^p dy \leq (\omega_n d)^p ||Du||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Pelo Lema 4.7,

$$||u - u_s||^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x) - u_s|^p dx \leq \left(\frac{d^n}{n|S|} \right)^p \int_\Omega |g(x)|^p dx \leq \left(\frac{\omega_n d^{n+1}}{n|S|} \right)^p ||Du||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto

$$||u - u_s||_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\omega_n d^{n+1}}{n|S|} ||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

□

Agora podemos considerar o problema $-\Delta u = f$ para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $\frac{n}{2} < p < n$.

Teorema 4.9. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $\frac{n}{2} < p < n$. Então existe $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $-\Delta u = f$ no sentido das distribuições. Além disso $Du \in L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $q = \frac{np}{n-p}$, $D^2 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e valem* *as desigualdades*

$$||Du||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_1(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

$$||D^2u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_2(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $f_m \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Vamos escrever $B_r = B(0,r)$, a bola de centro 0 e raio r. Definindo u_m por

$$u_m(x) = c_m + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f_m(y)dy,$$

onde $c_m \in \mathbb{R}$ é tal que

$$\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} u_m(x)dx = 0$$

Temos pelo Teorema 3.14 que $-\Delta u_m = f_m$. Dado $R > 1$, pelo Lema 4.7, temos que

$$|u_m(x)| \leq \frac{(2R)^n}{n|B_1|}\int_{B_R} \frac{|Du_m(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy, \ \forall x \in B_R.$$

e portanto

$$|u_m(x) - u_l(x)| \leq \frac{(2R)^n}{n|B_1|}\int_{B_R} \frac{|Du_m(y) - Du_l(x)|}{|x-y|^{n-1}}dy, \ \forall x \in B_R \text{ e } \forall m,l. \tag{4.6}$$

Temos, pela teoria desenvolvida no capítulo 3 que

$$D_iu_m(y) - D_iu_l(x) = \frac{-1}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{x_i - y_i}{|x-y|}(f_m(y) - f_l(y))dy,$$

logo

$$|D_i u_m(y) - D_i u_l(x)| \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |f_m(y) - f_l(y)| dy.$$

Pelo Teorema 2.27, como $p < n$, temos que

$$||D_i u_m - D_i u_l||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_1(n,p)||f_m - f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \text{ onde } q = \frac{np}{n-p}.$$

Como $\{f_m\}$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, vale que $\{D_i u_m\}$ é de Cauchy em $L^q(\mathbb{R}^n)$ e portanto existe $v_i \in L^q(\mathbb{R}^n)$ tal que $v_i = \lim D_i u_m$, $1 \leq i \leq n$.

Seja $q' > 0$ tal que $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$, retomando (4.6), temos que

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_l(x)| &\leq \frac{(2R)^n}{n|B_1|} \int_{B_R} \frac{|Du_m(y) - Du_l(x)|}{|x-y|^{n-1}} dy \\ &\leq \frac{(2R)^n}{n|B_1|} \left(\int_{B_R} \frac{dy}{|x-y|^{(n-1)q'}} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{B_R} |Du_m - Du_l|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{(2R)^n}{n|B_1|} \left(\int_{B_{2R}} \frac{dy}{|z|^{(n-1)q'}} \right)^{\frac{1}{q'}} ||Du_m - Du_l||_{L^q(B_R)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{n}{2} < p$, temos que $q = \frac{np}{n-p} > n$. Como $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$, vale que $(n-1)q' < n$ e portanto temos que

$$\left(\int_{B_{2R}} \frac{1}{|z|^{(n-1)q'}} \right)^{\frac{1}{q'}} < \infty.$$

Portanto, como $\{D_i u_m\}$ é de Cauchy em $L^q(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em cada compacto B_R, com $R > 1$. Logo $\{u_m\}$ converge uniformemente em cada compacto B_R, com $R > 1$, isto é, existe $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim u_m = u$ uniformemente em compactos, onde u pode ser construído como o limite ponto a ponto de $\{u_m\}$.

Como $u_m \to u$ uniformemente em compactos, então $u_m \to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. De maneira análoga como $D_i u_m \to v_i$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, então $D_i u_m \to v_i$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, temos que $D_i u_m \to D_i u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Pela unicidade do limite, temos que $D_i u = v_i$, e portanto $D_i u \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Pela teoria de Calderón-Zygmund desenvolvida no capítulo (3), temos que

$$||D^2 u_m - D^2 u_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_2(n,p)||f_m - f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto, como $\{f_m\}$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que, para cada $1 \leq i \leq j \leq n$, $\{D_{ij} u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Logo $\{D_{ij} u_m\}$ converge em $L^p(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe $v_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $D_{ij} u_m \to v_{ij}$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Temos então que $D_{ij} u_m \to v_{ij}$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, como $u_m \to u$ uniformemente em compactos, então $u_m \to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e portanto $D_{ij} u_m \to D_{ij} u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Pela unicidade do limite, temos que $D_{ij} u = v_{ij}$, e portanto $D_{ij} u \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando o limite nas desigualdades

$$||Du_m||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_1(n,p)||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

$$||D^2 u_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_2(n,p)||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

obtemos que

$$||Du||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_1(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

$$||D^2 u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_2(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Para completar a demonstração, basta notar que temos $-\Delta u_m \to -\Delta u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e que $-\Delta u_m = f_m \to f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Pela unicidade do limite, temos que $-\Delta u = f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Uma questão interessante para o problema acima, é que condições devemos impor sobre u para obtermos uma solução única. Pela solução obtida acima, seria fisicamente interessante impor que $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e que $Du \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $q = \frac{np}{n-p}$. Porém, como vamos ver agora, essas condições não serão suficientes para obter a unicidade da solução.

Seja u e v duas soluções do problema, isto é $-\Delta u = -\Delta v = f$. Suponha que u e v satisfazem as condições acima, isto é, suponha que $u, v \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e que $Du, D_v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $q = \frac{np}{n-p}$. Definindo $\theta = u - v$, temos que $\Delta(D_i\theta) = 0$ e que $D_i\theta = D_iu - D_iv \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema das médias para funções harmônicas, temos que $D_i\theta = 0$ e portanto $\theta = c$ constante. Portanto a solução não é única. Para obtermos solução única, podemos fixar um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e impor a condição $u(x_0) = \alpha$. Então $\theta(x) = \theta(x_0) = u(x_0) - v(x_0) = \alpha - \alpha = 0$, e portanto $u = v$.

A discussão acima tratou do caso $\frac{n}{2} < p < n$, para $p = \frac{n}{2}$, podemos utilizar o Corolário 4.8, obtendo

$$||u_m - u_l||_{L^q(B_R)} \leq \frac{\omega_n (2R)^{n+1}}{n|B_R|} ||Du_m - Du_l||_{L^q(|B_R|)}.$$

Como $||Du_m - Du_l||_{L^q(|B_R|)} \to 0$ ao $m, l \to \infty$, existe $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tal que $u_m \to u$ em $L^q(B_R)$ $\forall R > 1$. Repetindo todos os argumentos acima, obtemos que $-\Delta u = f$, com $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $Du \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e $D^2u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Colocando as condições $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $Du \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e $u(x_0) = \alpha_0$, obtemos uma solução única.

4.3 O problema $-\Delta u = f$, para $n \leq p < \infty$

Vamos começar tratando o caso $p = n$.

Teorema 4.10. *Seja $n \geq 2$ e $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ arbitrária. Existe uma solução $u_* \in C^0(\mathbb{R}^n)$ para o problema*

$$-\Delta u = f \text{ em } D'(\mathbb{R}^n), \tag{4.7}$$

satisfazendo

- $$u_* \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ para cada } 0 < \alpha < 1. \tag{4.8}$$

- $$\nabla u_* \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ para cada } 1 \leq q < \infty. \tag{4.9}$$

- $$D^2 u_* \in L^n(\mathbb{R}^n), \text{ com } ||D^2 u_*||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.10}$$

  Onde $K(n)$ depende apenas da dimensão n.

Além disso, todas as soluções $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ com $D^2 u \in L^n(\mathbb{R}^n)$ da equação (4.7) satisfazem

- $$u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ para cada } 0 < \alpha < 1. \tag{4.11}$$

- $$\nabla u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ para cada } 1 \leq q < \infty. \tag{4.12}$$

- $$D^2u \in L^n(\mathbb{R}^n),\ com\ ||D^2u_*||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.13}$$

Onde $K(n)$ depende apenas da dimensão n.

Demonstração. Primeiro, observe que as propriedades (4.11), (4.12) e (4.13) acima, seguem diretamente das propriedades (4.8), (4.9) e (4.10), válidas para u_*. De fato, dada $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ com $D^2u \in L^n(\mathbb{R}^n)$, solução de (4.7), temos que

$$\theta = u - u_* \in D'(\mathbb{R}^n) \cap W^{2,n}(\mathbb{R}^n) \text{ é harmônica em } \mathbb{R}^n,$$

e portanto, $D_iD_j\theta \in D'(\mathbb{R}^n) \cap L^n(\mathbb{R}^n)$ é harmônica ($\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$), assim $D_iD_j\theta = 0$ e portanto

$$u(x) = u_*(x) + a + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

para certas constantes $a, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, o que nos dá as propriedades (4.11), (4.12) e (4.13).

Dada $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$, seja $f_m \to f$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ \forall m$. Para cada m, seja u_m dada por

$$u_m(x) = a^{(m)} + \sum_{j=1}^{n} b_j^{(m)} x_j + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f_m(y) dy \tag{4.14}$$

onde $a^{(m)}, b_1^{(m)}, ..., b_n^{(m)} \in \mathbb{R}$ são constantes (que serão definidas em (4.18) e (4.19) abaixo) e $\Gamma(\cdot)$ é definida em (3.1).

Temos (pelo o que foi visto no capítulo anterior) que $D^2u_m \in L^n(\mathbb{R}^n)$ para cada m, com

$$||D^2u_m||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)||f_m||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \tag{4.15}$$

e

$$-\Delta u_m = f_m. \tag{4.16}$$

De maneira semelhante, temos também que

$$||D^2u_m - D^2u_l||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)||f_m - f_l||_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.17}$$

Para escolhermos $a^{(m)}, b_1^{(m)}, ..., b_n^{(m)} \in \mathbb{R}$ em (4.14) acima, fazemos o seguinte:

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, com $|S| > 0$ e $S \subset B(0,1)$. Escolhemos $b_1^{(m)}, ..., b_n^{(m)} \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\frac{1}{|S|}\int_S D_i u_m(y)dy = 0, \; \forall \; 1 \leq j \leq n \tag{4.18}$$

e, dados $b_1^{(m)}, ..., b_n^{(m)} \in \mathbb{R}$ satisfazendo (4.18), escolhemos $a^{(m)}$ tal que

$$\frac{1}{|S|}\int_S u_m(y)dy = 0. \tag{4.19}$$

Por (4.14), (4.18) e pelo Lema 4.7, temos que

$$|D_i u_m(x) - 0| \leq \frac{2^n R^n}{n|S|}\int_{B(0,R)} \frac{|\nabla D_i u_m(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy, \; \forall \; x \in B(0,R) \; (\forall R \geq 1) \tag{4.20}$$

para cada m, e cada $1 \leq i \leq n$. Além disso, por (4.18) e pelo Lema 4.7, temos também que

$$|D_i u_m(x) - D_i u_l(x)| \leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla D_i u_m(y) - \nabla D_i u_l(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy, \ \forall\ x \in B(0,R)\ (\forall R \geq 1) \tag{4.21}$$

para cada m, l e cada $1 \leq j \leq n$. Seja

$$I[f](x) = \int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} f(y) dy.$$

Pelo Teorema 2.26, se $\tilde{f} \in L^n(B(0,R))$, temos que $I[\tilde{f}] \in L^q(B(0,R))$ $\forall 1 \leq q < \infty$ e

$$||I[\tilde{f}]||_{L^q(B(0,R))} \leq K(n,R,q)||\tilde{f}||_{L^n(B(0,R))}. \tag{4.22}$$

Aplicando (4.22) ao operador integral do lado direito de (4.21), obtemos que $D_i u_m - D_i u_l \in L^q(B(0,R))$ $\forall 1 \leq q < \infty$, com

$$\begin{aligned} ||D_i u_m - D_i u_l||_{L^q(B(0,R))} &\leq \frac{2^n R^n}{n|S|} K(n,R,q)||\nabla D_i u_m - \nabla D_i u_l||_{L^n(B(0,R))} \\ & \frac{2^n R^n}{n|S|} K(n,R,q)||D^2(u_m - u_l)||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \tilde{K}(n,R,q)||f_m - f_l||_{L^n(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

para cada $R \geq 1$, onde a última desigualdade é obtida por (4.17).

Portanto, como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^n(\mathbb{R}^n)$, para cada $R \geq 1$, temos que $||D_i u_m - D_i u_l||_{L^q(B(0,R))} \to 0$, quando $m, l \to \infty$, para cada $1 \leq i \leq n$. Assim, para cada $1 \leq i \leq n$, existe $v_i \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $D_i u_m \to v_i$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para cada $1 \leq q < \infty$ (em particular $D_i u_m \to v_i$ em $D'(\mathbb{R}^n)$).

Vamos mostrar agora que $u_m \to u$ em $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (para alguma $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$).

Por (4.19) e pelo Lema 4.7 aplicado a $u_m - u_l$, temos que, para cada $R > 1$:

$$|u_m(x) - u_l(x)| \leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla u_m(y) - \nabla u_l(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy, \ \forall \ x \in B(0,R). \tag{4.24}$$

Seja $q' > 0$ tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Pela desigualdade de Hölder, temos que, para cada $n < q < \infty$:

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_l(x)| &\leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla u_m(y) - \nabla u_l(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \\ &\leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \left(\int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)q'}} dy \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{B(0,R)} |\nabla u_m(y) - \nabla u_l(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \left(\int_{B(0,2R)} \frac{1}{|z|^{(n-1)q'}} dz \right)^{\frac{1}{q'}} ||Du_m - Du_l||_{L^q(B(0,R))} \\ &\leq \tilde{K} ||Du_m - Du_l||_{L^q(B(0,R))} \\ &\leq \tilde{\tilde{K}} ||f_m - f_l||_{L^n(B(0,R))}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Portanto, para cada $R \geq 1$, temos que

$$||u_m(x) - u_l(x)||_{L^\infty(B(0,R))} \leq \tilde{\tilde{K}} ||f_m - f_l||_{L^n(B(0,R))}. \tag{4.26}$$

Como $f_m \to f$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$, temos que existe $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} u_m = u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{4.27}$$

Em particular temos que $u_m \to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, de modo que $D_i u_m \to D_i u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, por outro lado, sabemos que $D_i u_m \to v_i$. Portanto temos que $D_i u = v_i$, onde $v_i \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\forall 1 \leq i \leq n$.

Além disso, por (4.17), temos que para cada $1 \leq i, j \leq n$:

$$D_iD_ju_m \to v_{ij} \in L^n(\mathbb{R}^n) \text{ em } L^n(\mathbb{R}^n) \tag{4.28}$$

para algum $v_{ij} \in L^n(\mathbb{R}^n)$. Em particular, temos que $D_iD_ju_m \to v_{ij}$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, e portanto, $D_iD_ju = v_{ij}$ em $D'(\mathbb{R}^n)$.

Portanto construímos uma função $u_* \in C^0(\mathbb{R}^n)$, tal que

1. $u_m \to u_*$ em $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
2. $D_iu_m \to D_iu_*$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para cada $1 \leq q < \infty$.
3. $D_iD_ju_m \to D_iD_ju_*$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$

Em particular, como $-\Delta u_m = fm \to f$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$, temos que $-\Delta u_m \to f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Como $-\Delta u_m \to -\Delta u_*$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, e portanto temos que

$$-\Delta u_* = f \text{ em } D'(\mathbb{R}^n). \tag{4.29}$$

Aplicando o limite ao $m \to \infty$ nas desigualdades obtidas acima para u_m, obtemos que

$$||u_*||_{L^\infty(B(0,R))} \leq K_1||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.30}$$

$$||Du_*||_{L^q(B(0,R))} \leq K_2||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \text{ para cada } 1 \leq q < \infty. \tag{4.31}$$

$$||D^2u_*||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq K_3||f||L^n(\mathbb{R}^n). \tag{4.32}$$

Onde as constantes K_1, K_2 e K_3 nas equações acima não dependem de f.

Finalmente, a propriedade (4.8), segue do seguinte fato geral:

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, q)|x - y|^{1-\frac{n}{q}}||\nabla u||_{L^q(B(x,r))} \ \forall \ x, y \in B(x, r). \tag{4.33}$$

Onde $r = |x - y|$. Para uma demonstração desse fato veja a página 268 de [1]. □

Vamos tratar agora do problema $-\Delta u = f$, com $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $n < p < \infty$.

O objetivo agora será provar o seguinte teorema:

Teorema 4.11. *Seja $n \geq 2$ e $n < p < \infty$. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, existe uma solução $u_* \in C^1(\mathbb{R}^n)$ com $D^2 u_* \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para o problema de Poisson:*

$$-\Delta u = f \ \textit{em} \ D'(\mathbb{R}^n). \tag{4.34}$$

Além disso, todas as soluções $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ com $D^2 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ da equação (4.34) satisfazem

$$u \in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{4.35}$$

e

$$||D^2 u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n, p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.36}$$

onde a constante $K(n, p) > 0$ depende apenas de n e p.

Demonstração. Seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C^0(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$\lim_{m\to\infty} ||f_m - f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4.37}$$

Para cada m, seja u_m definida por

$$u_m(x) = a^{(m)} + \sum_{j=1}^{n} b_j^{(m)} x_j + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(x-y) f_m(y) dy \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.38}$$

onde $a^{(m)}, b_1^{(m)}, ..., b_n^{(m)} \in \mathbb{R}$ são constantes (que serão definidas em (4.44) e (4.45) abaixo) e $\Gamma(\cdot)$ é definida em (3.1). Temos de (4.38) e (3.1) que

$$D_i u_m(x) = b_i^{(m)} - \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{x_i - y_i}{|x-y|} f_m(y) dy \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.39}$$

$$D_i D_j u_m(x) = pv \int_{\mathbb{R}^n} (D_i D_j) \Gamma(x-y) f_m(y) dy \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \text{ se } i \neq j. \tag{4.40}$$

$$D_i D_i u_m(x) = pv \int_{\mathbb{R}^n} (D_i D_i) \Gamma(x-y) f_m(y) dy - \frac{1}{n} f_m(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \ 1 \leq j \leq n. \tag{4.41}$$

$$-\Delta u_m = f_m \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.42}$$

Além disso, de (4.40) e (4.41), obtemos que (por Calderón-Zygmund)

$$D^2 u_m \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ e } ||D^2 u_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p) ||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.43}$$

Para terminarmos a nossa construção de u_m acima, fixamos um conjunto (arbitrário) $S \subset \mathbb{R}^n$ limitado com medida positiva, e escolhemos $b_1^{(m)}, ..., b_n^{(m)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_S D_i u_m(y)dy = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n. \tag{4.44}$$

Uma vez que $b_1^{(m)}, ..., b_n^{(m)}$ tenham sido escolhidos, escolhemos $a^{(m)}$ tal que

$$\int_S u_m(y)dy = 0. \tag{4.45}$$

Seja $R > 0$ grande o suficiente para que $S \subset B(0,R)$, aplicando o Lema 4.7 para cada função $D_i u_m$, temos que

$$|D_i u_m(x)| \leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla D_i u_m(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \tag{4.46}$$

para todo $x \in B(0,R)$, $1 \leq i \leq n$ e todo m.

De maneira semelhante, aplicando o Lema 4.7 para $D_i u_m - D_j u_m$, temos que

$$|D_i u_m(x) - D_i u_l(x)| \leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla D_i u_m(y) - \nabla D_i u_l(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \tag{4.47}$$

para todo $x \in B(0,R)$, $1 \leq i \leq n$ e todo m.

Seja p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Observe que $p > n \Rightarrow -(n-1)p' + n > 0$, isto será necessário para garantir que

$$\int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}} dy < \infty$$

na equação (4.48) abaixo.

Como $\nabla D_i u_m(y), \nabla D_i u_l(y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, temos, pela desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned}
|D_iu_m(x) - D_iu_l(x)| &\leq \frac{2^nR^n}{n|S|}\int_{B(0,R)} \frac{|\nabla D_i(u_m-u_l)(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy \\
&\leq \frac{2^nR^n}{n|S|}\left(\int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{B(0,R)} |\nabla D_i(u_m-u_l)(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{2^nR^n}{n|S|}\left(\int_{B(0,2R)} \frac{1}{|z|^{(n-1)p'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}}||D^2(u_m-u_l)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \frac{2^nR^n}{n|S|}\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}(2R)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}||D^2(u_m-u_l)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{2^{n+(1-\frac{n}{p})}}{n|S|}\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}}R^{n+(1-\frac{n}{p})}||D^2(u_m-u_l)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{2^{n+(1-\frac{n}{p})}}{n|S|}\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}}R^{n+(1-\frac{n}{p})}K(n,p)||f_m-f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned} \tag{4.48}$$

isto é, temos que

$$||D_iu_m - D_iu_l||_{L^\infty(B(0,R))} \leq \frac{C(n,p)}{|S|}(p-n)^{-(1-\frac{1}{p})}R^{n+(1-\frac{1}{p})}||f_m-f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.49}$$

para todo m, l, $1 \leq i \leq n$ e $R > 0$ tal que $S \subset B(0,R)$, onde

$$C(n,p) = \frac{2^{n+(1-\frac{1}{p})}}{n}(\omega_n(p-1))^{1-\frac{1}{p}}K(n,p) \text{ depende apenas de } n, p.$$

Como $\{f_m\}$ é Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que (para todo $1 \leq i \leq n$) D_iu_m converge uniformemente em conjuntos compactos para alguma função v_i contínua, isto é,

$$D_iu_m \to v_i \in C^0(\mathbb{R}^n) \text{ em } L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{4.50}$$

Em particular, $D_iu_m \to v_i$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Portanto aplicando o lema (4.7) para a função $u_m - u_l \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$
\begin{aligned}
|u_m(x) - u_l(x)| &\leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla(u_m - u_l)(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \\
&\leq \frac{2^n R^n}{n|S|} ||\nabla u_m - \nabla u_l||_{L^\infty(B(0,R))} \int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy \\
&\leq \frac{2^n R^n}{n|S|} ||\nabla u_m - \nabla u_l||_{L^\infty(B(0,R))} \int_{B(0,2R)} \frac{1}{|z|^{n-1}} dy \\
&= \frac{2^{n+1} R^{n+1}}{n|S|} ||\nabla u_m - \nabla u_l||_{L^\infty(B(0,R))},
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

para todo $x \in B(0,R)$ e todo $R > 0$ tal que $S \subset B(0,R)$. Portanto temos que $\{u_m\}$ também converge uniformemente em compactos para alguma função u contínua. Assim, não temos apenas (4.50), temos também que

$$
u_m \to u \in C^0(\mathbb{R}^n) \text{ em } L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{4.52}
$$

Em particular $u_m \to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e $D_i u_m \to D_i u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, de modo que $D_i u = v_i \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e portanto $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Por Calderón-Zygmund, temos que

$$
||D^2(u_m - u_l)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f_m - f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.53}
$$

para todo m, l, de modo que para todo $1 \leq i, j \leq n$, existe $v_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$
D_i D_j u_m \to v_{ij} \text{ em } L^p(\mathbb{R}^n). \tag{4.54}
$$

Em particular, $D_i D_j u_m \to v_{ij}$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, de modo que $D_i D_j u = v_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o limite ao $m \to \infty$ em (4.43), obtemos que

$$
||D^2 u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.55}
$$

Além disso, como $-\Delta u_m \to \Delta u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e, ao mesmo tempo, $\Delta u_m = -f_m \to -f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (e portanto em $D'(\mathbb{R}^n)$), temos que

$$-\Delta u = f \text{ em } D'(\mathbb{R}^n), \tag{4.56}$$

de modo que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ é uma solução fraca para o problema de Poisson $-\Delta u = f$.

Nós construímos uma solução particular $u_* \in C^1(\mathbb{R}^n)$ da equação de Poisson $-\Delta u = f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $n < p < \infty$, que satisfaz o seguinte

1. $$\int_S u_*(x)dx = 0;$$
2. $$\int_S D_i u_*(x)dx = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n;$$
3. $$D^2 u_* \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ e } ||D^2 u_*||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

   para alguma constante $K(n,p) > 0$ independente de f.

Agora, considere $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ uma outra solução fraca do problema $-\Delta u = f$ que satisfaz a condição

$$D^2 u \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{4.57}$$

Seja $\theta = u - u_* \in D'(\mathbb{R}^n)$. Temos que $\Delta\theta = 0$ em $\mathbb{R}^n$, de modo que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e θ é harmônica em $\mathbb{R}^n$. Em particular, para cada $1 \leq i, j \leq n$, temos que

$$D_i D_j \theta = D_i D_j u - D_i D_j u_* \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

de modo que $D_iD_j\theta \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e é harmônica. Portanto, $D^2\theta = 0$, de modo que

$$\theta(x) = a + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, u pode pode ser escrita como

$$u(x) = a + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + u_*(x) \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n \tag{4.58}$$

para certas constantes $a, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}^n$. Em particular

$$||D^2u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.59}$$

Onde $K(n,p) > 0$ é mesma constante que foi obtida para u_*. $\square$

Para obtermos unicidade da solução $u \in D'(\mathbb{R}^n) \cap W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, podemos fixar um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer e valores $\alpha, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ e especificar as condições

$$u(x_0) = \alpha \tag{4.60}$$

e

$$D_iu(x_0) = \beta_i,\ 1 \leq i \leq n. \tag{4.61}$$

Pois, como vimos no Teorema 4.11 acima, toda solução u é da forma

$$u(x) = a + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + u_*(x) \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,$$

onde u_* é a solução construída no Teorema 4.11 acima.

5 O PROBLEMA $-\Delta U = D_I F,\ F \in L^P(\mathbb{R}^N)$

5.1 Existência da solução e algumas estimativas

Vamos estudar agora o problema

$$-\Delta u = D_i f \tag{5.1}$$

para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p < n$.

Teorema 5.1. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < n$. Então existe $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $-\Delta u = D_i f$ $(1 \leq i \leq n)$ no sentido das distribuições. Além disso $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $q = \frac{np}{n-p}$, $Du \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e valem as desigualdades*

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_1(n,p,R)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

e

$$||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_2(n,p,R)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, considere u_m definida por

$$u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) D_i f_m(y) dy. \tag{5.2}$$

Onde $\Gamma(\cdot)$ é definida em (3.1). Pela teoria vista no capítulo 3, temos que $-\Delta u_m = D_i f_m$. Como f_m tem suporte compacto, temos que

$$\begin{aligned}
u_m(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\epsilon} \Gamma(x-y) D_i f_m(y)dy \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\epsilon} D_i\Gamma(x-y) f_m(y)dy + \int\limits_{|x-y|=\epsilon} \Gamma(x-y)\nu_i(y) f_m(y)d\sigma(y) \qquad (5.3)\\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} D_i\Gamma(x-y) f_m(y)dy
\end{aligned}$$

pois,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} \Gamma(x-y)\nu_i(y) f_m(y)d\sigma(y) \leq \frac{K}{|\epsilon|^{n-2}} n(\omega_n \epsilon^{n-1}) = 0.$$

Calculando a derivada de Γ obtemos que

$$u_m(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} D_i\Gamma(x-y) f_m(y)dy = \frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{x_i-y_i}{|x-y|} f_m(y)dy, \qquad (5.4)$$

e portanto

$$|u_m(x)| \leq \frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |f_m(y)|dy. \qquad (5.5)$$

Pelo Teorema 2.27 temos que

$$||u_m||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,R)||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (5.6)$$

e

$$||u_m - u_l||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f_m - f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \qquad (5.7)$$

Para todo m, l, onde $q = \frac{np}{n-p}$.

Como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^q(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, existe $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $u_m \to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e portanto, $-\Delta u_m \to -\Delta u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, por outro lado, $-\Delta u_m = D_i f_m \to D_i f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, pela unicidade do limite, temos que $-\Delta u = D_i f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o limite ao $m \to \infty$ em (5.6) temos que

$$||u||_{L^q(RR^n)} \leq K(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ onde } q = \frac{np}{n-p}. \tag{5.8}$$

Vamos mostrar agora a segunda parte do teorema. Pelo Teorema 3.8, temos que

$$D_j u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_j\Gamma(x-y) D_i f_m(y) dy.$$

Como f_m tem suporte compacto, temos que

$$D_j u_m(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|>\epsilon} D_i D_j \Gamma(x-y) f_m(y) dy - \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j \Gamma(x-y) f_m(y) \nu_i(y) d\sigma(y) = I_1 - I_2,$$

e

$$I_2 = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j \Gamma(x-y) f_m(y) \nu_i(y) d\sigma(y) = 0$$

pois,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) f_m(y)\nu_i(y)d\sigma(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y)[f_m(x)+(f_m(y)-f_m(x))]\cdot\nu_i(y)d\sigma(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) f_m(x)\cdot\nu_i(y)d\sigma(y)\\
&+ \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y)[f_m(y)-f_m(x)]\cdot\nu_i(y)d\sigma(y) = 0+0.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
D_j u_m(x) = pv\int_{\mathbb{R}^n} D_iD_j\Gamma(x-y)f_m(y)dy. \tag{5.9}
$$

Pelas Proposições 3.18, 3.19 e 3.20, podemos aplicar o Teorema 2.22 à equação (5.9), obtendo que

$$
||D_ju_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ \forall\ m \text{ e } 1<p<n. \tag{5.10}
$$

De maneira semelhante, temos que

$$
||D_ju_m - D_ju_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f_m-f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\ \forall\ m,l \text{ e } 1<p<n. \tag{5.11}
$$

Como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{D_ju_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, existe $v\in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $D_ju_m\to v$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $D_ju_m\to v$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, por outro lado $D_ju_m\to D_ju$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, portanto $D_ju=v\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<n)$. Aplicando o limite ao $m\to\infty$ em (5.10) obtemos que

$$
||D_ju||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ \forall\ m,l \text{ e } 1<p<n \tag{5.12}
$$

para $1 \leq j \leq n$. $\square$

Vamos estudar agora o problema

$$-\Delta u = D_i f$$

para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p = n$.

Teorema 5.2. *Seja $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$. Então existe $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $-\Delta u = D_i f$ $(1 \leq i \leq n)$ no sentido das distribuições. Além disso $u \in L^q(B(0,R))$ $\forall R > 1$, onde $n \leq q < \infty$, $Du \in L^n(\mathbb{R}^n)$ e valem as desigualdades*

$$||u||_{L^q(B(0,R))} \leq K_1(n,p)||f||_{L^n(B(0,R))} \ \forall \ R > 1 \ \text{e} \ n \leq q < \infty$$

e

$$||Du||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq K_2(n,p)||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

Demonstração. Seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $f_m \to f$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$, considere u_m definida por

$$u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) D_i f_m(y) dy \tag{5.13}$$

Onde $\Gamma(\cdot)$ é definida em (3.1). Pela teoria vista no capítulo 3, temos que $-\Delta u_m = D_i f_m$. Pela equação (5.5), temos que

$$|u_m(x)| \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} |f_m(y)| dy$$

Pelo teorema (2.26) (para $\alpha = 1$), temos que

$$||u_m||_{L^q(B(0,R))} \leq K||f_m||_{L^n(B(0,R))} \ \forall \ R > 1 \text{ e } n \leq q < \infty \tag{5.14}$$

e

$$||u_m - u_l||_{L^q(B(0,R))} \leq K||f_m - f_l||_{L^n(B(0,R))} \ \forall \ R > 1 \text{ e } n \leq q < \infty. \tag{5.15}$$

Portanto existe $u \in L^q(B(0,R))$ tal que $u_m \to u$ em $L^q(B(0,R))$. Em particular, $u_m \to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e portanto, $-\Delta u_m \to -\Delta u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, por outro lado, $-\Delta u_m = D_i f_m \to D_i f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, pela unicidade do limite, temos que $-\Delta u = D_i f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o limite ao $m \to \infty$ em (5.14) temos que

$$||u||_{L^q(B(0,R))} \leq K(R)||f||_{L^n(B(0,R))} \ \forall \ R > 1 \text{ e } n \leq q < \infty.$$

Vamos mostrar agora a segunda parte do teorema. Pelo teorema (3.8), temos que

$$D_j u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_j\Gamma(x-y) D_i f_m(y) dy$$

Como f_m tem suporte compacto, temos que

$$D_j u_m(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|>\epsilon} D_i D_j \Gamma(x-y) f_m(y) dy - \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j \Gamma(x-y) f_m(y) \nu_i(y) d\sigma(y) = I_1 - I_2,$$

e

$$I_2 = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j \Gamma(x-y) f_m(y) \nu_i(y) d\sigma(y) = 0$$

pois,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y)f_m(y)\cdot \nu_i(y)d\sigma(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y)[f_m(x)+(f_m(y)-f_m(x))]\cdot \nu_i(y)d\sigma(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y)f_m(x)\cdot \nu_i(y)d\sigma(y)\\
&+ \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y)[f_m(y)-f_m(x)]\cdot \nu_i(y)d\sigma(y) = 0+0.
\end{aligned}$$

Portanto

$$D_ju_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_iD_j\Gamma(x-y)f_m(y)dy. \tag{5.16}$$

Pelas proposições (3.18), (3.19) e (3.20), podemos aplicar o teorema (2.22) à equação (5.16), obtendo que

$$||D_ju_m||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq A_n||f_m||_{L^n(\mathbb{R}^n)}\ \forall\ m. \tag{5.17}$$

De maneira semelhante, temos que

$$||D_ju_m - D_ju_l||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq A_n||f_m - f_l||_{L^n(\mathbb{R}^n)}.\ \forall\ m, l. \tag{5.18}$$

Como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^n(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{D_ju_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^n(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, existe $v \in L^n(\mathbb{R}^n)$ tal que $D_ju_m \to v$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $D_ju_m \to v$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, por outro lado $D_ju_m \to D_ju$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, portanto $D_ju = v \in L^n(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o limite ao $m \to \infty$ em (5.17) obtemos que

$$||D_ju||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq A_n||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}\ \forall\ m, l \tag{5.19}$$

para $1 \leq j \leq n$. $\square$

Vamos estudar agora o problema

$$-\Delta u = D_i f$$

para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $n < p < \infty$.

Teorema 5.3. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $n < p < \infty$. Então existe $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $-\Delta u = D_i f$ $(1 \leq i \leq n)$ no sentido das distribuições. Além disso $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $Du \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e valem as desigualdades*

$$||u||_{L^\infty(B(0,R))} \leq K_1(n,p,R)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \forall \ R > 1,$$

e

$$||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_2(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $f_m \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $S \subset B(0,1)$ um conjunto de medida positiva. Considere u_m definida por

$$u_m(x) = a^{(m)} + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) D_i f_m(y) dy. \tag{5.20}$$

Onde $\Gamma(\cdot)$ é definida em (3.1) e $a^{(m)}$ é tal que

$$\int_S u_m(x) dx = 0.$$

Pela teoria vista no capítulo 3, temos que $-\Delta u_m = D_i f_m$.

Pelo Teorema 3.8, temos que

$$D_j u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_j\Gamma(x-y) D_i f_m(y) dy.$$

Como f_m tem suporte compacto, temos que

$$D_j u_m(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|>\epsilon} D_i D_j \Gamma(x-y) f_m(y) dy - \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) f_m(y)\nu_i(y) d\sigma(y) = I_1 - I_2,$$

e

$$I_2 = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) f_m(y)\nu_i(y) d\sigma(y) = 0$$

pois,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) f_m(y) \cdot \nu_i(y) d\sigma(y) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) [f_m(x) + (f_m(y) - f_m(x))] \cdot \nu_i(y) d\sigma(y) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) f_m(x) \cdot \nu_i(y) d\sigma(y) \\
&+ \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_j\Gamma(x-y) [f_m(y) - f_m(x)] \cdot \nu_i(y) d\sigma(y) = 0 + 0.
\end{aligned}$$

Portanto

$$D_j u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_i D_j \Gamma(x-y) f_m(y) dy. \tag{5.21}$$

Pelas Proposições 3.18, 3.19 e 3.20, podemos aplicar o Teorema 2.22 à equação (5.21), obtendo que

$$||D_j u_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \forall \ m \text{ e } n < p < \infty. \tag{5.22}$$

De maneira semelhante, temos que

$$||D_j u_m - D_j u_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f_m - f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \ \forall \ m, l \text{ e } n < p < \infty. \tag{5.23}$$

Como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{D_j u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, existe $v_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $D_j u_m \to v_j$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $D_j u_m \to v_j$ em $D'(\mathbb{R}^n)$.

Seja $R > 1$, aplicando o Lema 4.7 para cada função u_m, temos que

$$|u_m(x)| \leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla u_m(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \tag{5.24}$$

para todo $x \in B(0, R)$, $1 \leq i \leq n$ e todo m.

De maneira semelhante, aplicando o lema (4.7) para $u_m - u_l$, temos que

$$|u_m(x) - u_l(x)| \leq \frac{2^n R^n}{n|S|} \int_{B(0,R)} \frac{|\nabla u_m(y) - \nabla u_l(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \tag{5.25}$$

Seja p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Observe que $p > n \Rightarrow -(n-1)p' + n > 0$, isto será necessário para garantir que

$$\int_{B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}} dy < \infty.$$

Como $\nabla u_m(y), \nabla u_l(y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, temos, pela desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned}
|u_m(x)-u_l(x)| &\leq \frac{2^nR^n}{n|S|}\int_{B(0,R)}\frac{|\nabla(u_m-u_l)(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy \\
&\leq \frac{2^nR^n}{n|S|}\left(\int_{B(0,R)}\frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{B(0,R)}|\nabla(u_m-u_l)(y)|^pdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{2^nR^n}{n|S|}\left(\int_{B(0,2R)}\frac{1}{|z|^{(n-1)p'}}dy\right)^{\frac{1}{p'}}||D(u_m-u_l)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \frac{2^nR^n}{n|S|}\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}(2R)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}||D(u_m-u_l)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{2^{n+(1-\frac{n}{p})}}{n|S|}\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}}R^{n+(1-\frac{n}{p})}||D(u_m-u_l)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{2^{n+(1-\frac{n}{p})}}{n|S|}\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}}R^{n+(1-\frac{n}{p})}K(n,p)||f_m-f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned} \tag{5.26}$$

onde a última desigualdade é válida por (5.23) acima. Portanto temos que

$$||u_m-u_l||_{L^\infty(B(0,R))} \leq \frac{C(n,p)}{|S|}(p-n)^{-(1-\frac{1}{p})}R^{n+(1-\frac{1}{p})}||f_m-f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.27}$$

para todo m, l e $R > 1$, onde

$$C(n,p) = \frac{2^{n+(1-\frac{1}{p})}}{n}(\omega_n(p-1))^{1-\frac{1}{p}}K(n,p) \text{ depende apenas de } n, p.$$

De maneira semelhante, temos que

$$||u_m||_{L^\infty(B(0,R))} \leq \frac{C(n,p)}{|S|}(p-n)^{-(1-\frac{1}{p})}R^{n+(1-\frac{1}{p})}||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.28}$$

Como $\{f_m\}$ é Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que u_m converge uniformemente em conjuntos compactos para alguma função u contínua, isto é,

$$u_m \to u \in C^0(\mathbb{R}^n) \text{ em } L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{5.29}$$

Em particular, $u_m \to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e portanto, $-\Delta u_m \to -\Delta u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, por outro lado, $-\Delta u_m = D_i f_m \to D_i f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, pela unicidade do limite, temos que $-\Delta u = D_i f$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o limite ao $m \to \infty$ em (5.28), temos que

$$||u||_{L^\infty(B(0,R))} \leq \frac{C(n,p)}{|S|}(p-n)^{-(1-\frac{1}{p})} R^{n+(1-\frac{1}{p})} ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.30}$$

Além disso, como $D_j u_m \to D_j u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, temos que $D_j u = v_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(n < p < \infty)$. Aplicando o limite ao $m \to \infty$ em (5.22), temos que

$$||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \; \forall \; m \text{ e } n < p < \infty. \tag{5.31}$$

$\square$

5.2 Uma Aplicação a Navier-Stokes

Considere as equações de Navier-Stokes

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u \tag{5.32}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{5.33}$$

com condição inicial $u_0(x) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Sabe-se que existem $t_* > 0$ e $T >> 1$ (que dependem da condição inicial) tais que $u \in C^\infty(0, t_*)$ e $u \in C^\infty(T, +\infty)$ (ver [5]), todos os teoremas nesse texto supõem que t está em uma dessas regiões.

Um fato interessante é que, a vorticidade $\omega = \nabla \times u$, tem a seguintes propriedades:

Teorema 5.4. *Dada a vorticidade ω definida acima, tem-se,*

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Demonstração. Basta usar a definição de rotacional,

$$\omega = \nabla \times u = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{l,m=1}^{3} \epsilon_{l,m,k} D_l u_m \right) e_k$$

Onde

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, \text{ se (i,j,k) é uma permutação par} \\ -1, \text{ se (i,j,k) é uma permutação ímpar} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

.

Temos então que

$$\begin{aligned} \|\omega(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \sum_{i,j,l,m,k} \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{l,m,k} D_i u_j D_l u_m dx \\ &= \sum_{i,j,l,m=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{l,m,k} \right) \int_{\mathbb{R}^3} (D_i u_j)(D_l u_m) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (D_i u_j)^2 dx - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (D_i u_j)(D_j u_i) dx \\ &= \|Du(\cdot, t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

pois $\nabla \cdot u = 0$. $\square$

Teorema 5.5. *Seja u solução do problema (5.32), então para todo $l \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$, vale que*

$$||D^{l+1}u(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(p)||D^l\omega(\cdot,t)||_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \tag{5.34}$$

Demonstração. Como $\nabla.u = 0$, temos que

$$\nabla \times \omega = \nabla \times (\nabla \times u) = \nabla(\nabla.u) - \Delta u = -\Delta u.$$

Portanto

$$-\Delta u = \nabla \times \omega. \tag{5.35}$$

Pelo Teorema 5.1, temos que

$$||Du||_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(n,p)||\omega||_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Dado l multi-índice, podemos derivar a equação (5.35), obtendo que

$$-\Delta(D^l u) = \nabla \times (D^l\omega).$$

Portanto, novamente pelo Teorema 5.1, temos que

$$||D^{l+1}u||_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(n,p)||D^l\omega||_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

$\square$

6 O PROBLEMA $-\Delta U = D_I D_J F$, $F \in L^P(\mathbb{R}^N)$

6.1 Existência da solução e algumas estimativas

Vamos estudar agora o problema

$$-\Delta u = D_i D_j f \tag{6.1}$$

para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p < \infty$.

Teorema 6.1. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < \infty$. Então existe $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $-\Delta u = D_i D_j f$ $(1 \leq i, j \leq n)$ no sentido das distribuições. Além disso $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, e*

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

A solução $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é única.

Demonstração. Seja $\{f_m\}$ uma sequência de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, considere u_m definida por

$$u_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) D_i D_j f_m(y) dy. \tag{6.2}$$

Onde $\Gamma(\cdot)$ é definida em (3.1). Pela teoria vista no capítulo 3, temos que $-\Delta u_m = D_i D_j f_m$. Como f_m tem suporte compacto, temos que

$$\begin{aligned}
u_m(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\epsilon} \Gamma(x-y) D_i D_j f_m(y) dy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} - \int\limits_{|x-y|>\epsilon} D_i\Gamma(x-y) D_j f_m(y) dy + \int\limits_{|x-y|=\epsilon} \Gamma(x-y)\nu_i(y) D_j f_m(y) d\sigma(y) \qquad (6.3) \\
&= -\int_{|x-y|>\epsilon} D_i\Gamma(x-y) D_j f_m(y) dy
\end{aligned}$$

pois,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} \Gamma(x-y)\nu_i(y) D_j f_m(y) d\sigma(y) \le \frac{K}{|\epsilon|^{n-2}} n(\omega_n \epsilon^{n-1}) = 0.$$

Portanto

$$u_m(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} D_i\Gamma(x-y) D_j f_m(y) dy. \qquad (6.4)$$

Temos também que

$$u_m(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|>\epsilon} D_i D_j \Gamma(x-y) f_m(y) dy - \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_i\Gamma(x-y) f_m(y)\nu_j(y) d\sigma(y) = I_1 - I_2,$$

e

$$I_2 = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_i\Gamma(x-y) f_m(y)\nu_j(y) d\sigma(y) = 0$$

pois,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_i\Gamma(x-y)f_m(y)\cdot\nu_j(y)d\sigma(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_i\Gamma(x-y)[f_m(x)+(f_m(y)-f_m(x))]\cdot\nu_j(y)d\sigma(y)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_i\Gamma(x-y)f_m(x)\cdot\nu_j(y)d\sigma(y)\\
&+ \int\limits_{|x-y|=\epsilon} D_i\Gamma(x-y)[f_m(y)-f_m(x)]\cdot\nu_j(y)d\sigma(y) = 0+0.
\end{aligned}$$

Portanto

$$u_m(x) = vp\int_{\mathbb{R}^n} D_iD_j\Gamma(x-y)f_m(y)dy. \tag{6.5}$$

Pelas Proposições 3.18, 3.19 e 3.20, podemos aplicar o Teorema 2.22 à equação (6.5), obtendo que

$$||u_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f_m||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.6}$$

De maneira semelhante, temos que

$$||u_m-u_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f_m-f_l||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.7}$$

Como $\{f_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que $\{u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, existe $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m\to u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $u_m\to u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$ e portanto, $-\Delta u_m\to -\Delta u$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, por outro lado, $-\Delta u_m = D_iD_jf_m \to D_iD_jf$ em $D'(\mathbb{R}^n)$, pela unicidade do limite, temos que $-\Delta u = D_iD_jf$ em $D'(\mathbb{R}^n)$. Aplicando o limite ao $m\to\infty$ em (6.6) temos que

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.8}$$

Agora passamos a prova da unicidade. Sejam $u_1, u_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ duas soluções (fracas) do problema $-\Delta u = D_i D_j f$. Seja $\theta = u_1 - u_2$. Temos que

$$\Delta\theta = \Delta(u_1 - u_2) = \Delta u_1 - \Delta u_2 = D_i D_j f - D_i D_j f = 0.$$

Pelo lema (3.15), temos que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta\theta = 0$, temos, pelo Teorema do Valor Médio (ver página 25 de [1]), que $\theta = 0$, e portanto $u_1 = u_2$. $\square$

6.2 Uma Aplicação a Navier-Stokes

Lema 6.2. *Seja $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u = (u_1, u_2, u_3))$ tal que $u_i \in L^{2q}(\mathbb{R}^3)$, para todo $1 \leq i \leq n$ e para algum $1 \leq q < \infty$. Então*

$$\sum_{i,j=1}^{3} ||u_i u_j||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq n^2 ||u||^2_{L^{2q}(\mathbb{R}^3)} \tag{6.9}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{3} ||u_i u_j||_{L^q(\mathbb{R}^3)} &= \sum_{i,j=1}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i(x)|^q |u_j(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i(x)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_j(x)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \\
&= \sum_{i}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i(x)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \sum_{j}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_j(x)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \\
&= \left[\sum_{i}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_i(x)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \right]^2 \\
&\leq 9 \left[\left(\sum_{i}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |u_i(x)|^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \right]^2 \\
&= 9 ||u||_{L^{2q}}^2
\end{aligned}$$

□

Considere as equações de Navier-Stokes

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u \tag{6.10}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{6.11}$$

com condição inicial $u_0(x) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Sabe-se que existem $t_* > 0$ e $T >> 1$ (que dependem da condição inicial) tais que $u \in C^\infty(0, t_*)$ e $u \in C^\infty(T, +\infty)$ (ver [5]), todos os teoremas nesse texto supõem que t está em uma dessas regiões.

Teorema 6.3. *Sejam u, ρ soluções dos problemas (6.10) e (6.11). Então*

$$||\rho||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq K(q) ||u(\cdot, t)||^2_{L^{2q}(\mathbb{R}^3)},\ 1 < q < \infty \tag{6.12}$$

De maneira semelhante, dado α multi-índice, temos que

$$||D^\alpha \rho||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq \sum_{i,j=1}^{3} ||D^\alpha (u_i u_j)||_{L^q(\mathbb{R}^3)},\ 1 < q < \infty$$

Demonstração. Tomando o $\nabla\cdot$ da equação (6.10), para a coordenada u_i e somando em i, obtemos

$$\sum_{i=1}^{3} D_i \bigg(\sum_{j=1}^{3} u_j D_j u_i \bigg) + \Delta \rho = 0$$

como $\nabla \cdot u = 0$ podemos escrever que

$$-\Delta \rho = \sum_{i,j=1}^{3} D_i D_j (u_i u_j) \tag{6.13}$$

Pelo Teorema 6.1, temos que

$$||\rho||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq \sum_{i,j=1}^{3} ||u_i u_j||_{L^q(\mathbb{R}^3)}$$

Pelo Lema 6.2 obtemos que

$$||\rho||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq K(q) ||u(\cdot,t)||^2_{L^{2q}(\mathbb{R}^3)}$$

De maneira semelhante, temos que

$$-\Delta D^\alpha \rho = \sum_{i,j=1}^{3} D_i D_j (D^\alpha (u_i u_j)) \tag{6.14}$$

Pelo Teorema 6.1, temos que

$$||D^\alpha \rho||_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq \sum_{i,j=1}^{3} ||D^\alpha u_i u_j||_{L^q(\mathbb{R}^3)},\ 1 < q < \infty.$$

□

Teorema 6.4. *Dados $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ soluções das equações de Navier-Stokes com pressões $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ respectivamente. Então $p^{(1)} = p^{(2)}$.*

Demonstração. Fazendo a diferença das equações, obtemos que

$$(u_i^{(1)} - u_i^{(2)})_t + \sum_{j=1}^{3} D_j(u_i^{(1)}u_j^{(1)} - u_i^{(2)}u_j^{(2)}) + D_i(p^{(1)} - p^{(2)}) = \Delta(u_i^{(1)} - u_i^{(2)})$$

Aplicando $\nabla.$ na equação acima, obtemos que

$$\sum_{i,j=1}^{3} D_i D_j[u_i^{(1)}u_j^{(1)} - u_i^{(2)}u_j^{(2)}] + \Delta(p^{(1)} - p^{(2)}) = 0.$$

Aplicando o Teorema 6.1, obtemos que

$$||p^{(1)} - p^{(2)}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \sum_{i,j=1}^{3} ||u_i^{(1)}u_j^{(1)} - u_i^{(2)}u_j^{(2)}||_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Sabe-se que $u_1 \equiv u_2$ (ver [7]), e portanto

$$||p^{(1)} - p^{(2)}||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Logo $p^{(1)} \equiv p^{(2)}$. □

Referências Bibliográficas

[1] EVANS, L. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[2] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, 1977.

[3] HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis* . Springer, 1990.

[4] HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II: Differential Operators with Constant Coefficients.* Springer, 1983.

[5] LERAY, J. *Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace* Acta Math. 63 (1934), 193-248.

[6] LIEB E. H.; LOSS M. *Analysis.* American Mathematical Society, 2001.

[7] PERUSATO, C. V. *O problema de Leray para a Equação de Navier-Stokes e algumas generalizações* (Dissertação de mestrado)UFRGS, Porto Alegre, 2014.

[8] STEIN, E. M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.

[9] STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, 1970.