

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

O problema de Leray para a equação de Navier-Stokes e algumas generalizações

por

Cilon Perusato

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Avila Zingano
Orientador

Porto Alegre, Setembro de 2014.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Perusato, Cilon

O problema de Leray para a equação de Navier-Stokes e algumas generalizações / Cilon Perusato.—Porto Alegre: PPG-MAp da UFRGS, 2014.

76 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2014.

Orientador: de Avila Zingano, Paulo Ricardo

Dissertação: Matemática Aplicada

Problema de Leray, Navier-Stokes incompressível, comportamento assintótico.

O problema de Leray para a equação de Navier-Stokes e algumas generalizações

por

Cilon Perusato

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo de Avila Zingano

Banca examinadora:

Dra. Janaína Pires Zingano
DMPA-UFRGS

Dr. João Paulo Lukaszczyk
PPGMAT-UFSM

Dr. José Afonso Barrionuevo
PPGMAp-UFRGS

Dra. Lineia Schutz
DMPA-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
12/09/2014.

Prof^a Dr^a Maria Cristina Varrialle
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Gostaria inicialmente de agradecer a minha família por todo o apoio e a minha namorada, Jéssica Duarte, por estar ao meu lado em todos os momentos, sempre me ajudando e me incentivando, tornando a elaboração do trabalho muito mais agradável.

Agradeço aos membros da banca examinadora as numerosas e valiosas correções e sugestões, que muito contribuíram para melhorar o texto. Qualquer erro que permaneça é de minha inteira responsabilidade. Também agradeço ao meu orientador, Paulo Ricardo de Avila Zingano que me recebeu de braços abertos quando o procurei, sem o qual esse trabalho não poderia ter sido feito.

Agradeço a Douglas Machado dos Santos, Gustavo Lopes Rodrigues, Otávio de Macedo Menezes, Rangel Baldasso, Robert Guterres e a todos os outros amigos e colegas pela amizade e por todas as conversas.

Agradeço aos professores e funcionários do Instituto de Matemática da UFRGS o suporte. Agradeço ao CAPES o apoio financeiro.

Sumário

RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1 Introdução	1
2 A propriedade de Leray e generalizações para equações de Advecção-Difusão	7
2.1 Equação do Calor	7
2.2 Equação de Advecção-Difusão	21
3 Problema de Leray para Navier-Stokes e decaimento de $t^{\frac{3}{4}}\ u(\cdot, t)\ _{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$	25
3.1 Preliminares	25
3.2 Problema de Leray	31
3.3 Decaimento de $t^{\frac{3}{4}}\ u(\cdot, t)\ _{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$	35

4	Aproximação de soluções de Navier-Stokes por soluções da equação do calor	39
4.1	Preliminares	39
4.2	Análise para a norma L^2	46
4.3	Análise para a norma L^∞	48
A	Derivação das equações de Navier-Stokes	51
A.1	Incompressibilidade	51
A.2	Equação de continuidade, leis de Newton e tensores	58
B	O espaço de Sobolev homogêneo \dot{H}^s	69
C	Ferramentas de Análise	71
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

RESUMO

O objetivo desta dissertação é apresentar de maneira mais detalhada uma solução simples, recentemente obtida em [25], para um problema deixado em aberto em 1934 por Leray [19] e resolvido pela primeira vez em 1984 por Kato [15] (e também outros autores, como [21]). Tal problema diz que a norma L^2 da solução da equação de Navier-Stokes incompressível decai assintoticamente a zero, para tempo grande. Mostraremos, ainda, algumas generalizações naturais dessa propriedade; seguindo, novamente, a discussão básica em [25]. Nessas generalizações, obtém-se informações mais precisas a respeito do decaimento de outras normas como, por exemplo, a norma L^∞ . Com isso, foi possível obter, usando a teoria de Calderón-Zygmund, taxas de decaimento para a pressão. São apresentados, também, a derivação da equação de Navier-Stokes, alguns resultados básicos de análise, desigualdades de Sobolev e vários resultados sobre soluções de equações de Advecção-Difusão, incluindo a equação do Calor, visto que precisaremos de tais propriedades em nossa análise do problema de Leray e suas generalizações consideradas neste trabalho.

ABSTRACT

In this paper, we present in detail a simple proof, recently obtained in [25], of a result left open in 1934 by Leray [19] and obtained in 1984, for the first time, by Kato [15] (and others, like [21]), in such result it is said that the L^2 norm for solutions of incompressible Navier-Stokes equations decay to zero asymptotically at large time. Thence, we show some natural generalizations of this property; by following, again, the basic discussion in [25]. We obtained, with this, a more detailed information about the decay of other norms, for exemple, the supnorm L^∞ . Thenceforth, we obtained, by Calderón-Zygmund theory, decay rates for the pressure. We also provide a derivation of Navier-Stokes equation, some basic results in analysis, Sobolev inequalities and several results about Advection-Diffusion equations, including the heat equation, because we will use these properties in our analysis of Leray's Problem and its generalizations that shall be considered in this work.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, propomos uma derivação elementar com maiores detalhes de algumas propriedades assintóticas, obtidas em [25], de soluções fracas globais de Leray-Hopf¹ das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis no espaço tridimensional,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \Delta \mathbf{u} , t > 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , t \geq 0 \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

onde $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ denota o espaço de funções $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ com $\nabla \cdot \mathbf{u}(\cdot, t) = 0$ no sentido das distribuições.² Antes, precisamos esclarecer algumas terminologias que serão frequentemente usadas no texto.

Tudo começa a partir do momento em que Leray afirma a seguinte frase em seu famoso artigo [19] na página 248:

*J'ignore si $W(t)$ tend nécessairement vers 0 quand t augmente indéfiniment*³.

Dada uma EDP evolutiva,

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{F}(x, t, \mathbf{u}, D\mathbf{u}, D^2\mathbf{u}, \dots, D^m\mathbf{u})$$

com soluções globais (definidas $\forall t > 0$) em L^2 , i.e., $\mathbf{u} \in L^2, \forall t \geq 0$, dizemos que tal EDP satisfaz a **Propriedade de Leray** quando,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ ao } t \rightarrow \infty$$

¹Na seção 2.1 é feita uma rápida revisão de tais soluções. Para maiores detalhes, veja [8] e [19].

²veja [7] p.17 para maiores detalhes da teoria das distribuições.

³ $W(t)$ é justamente o quadrado da norma L^2 da solução \mathbf{u} das equações de Navier-Stokes para o problema acima.

Nota. Chamaremos de **Problema de Leray**, quando a EDP da definição acima for a equação de Navier-Stokes.

Aqui $\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$. Além disso, denotaremos por $\nabla p \equiv \nabla p(\cdot, t)$ como sendo o gradiente de $p(\cdot, t)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, e $\nabla \cdot \mathbf{u} = D_1 u_1 + D_2 u_2 + D_3 u_3$ é o divergente (espacial) de $\mathbf{u}(\cdot, t)$. $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}$, $1 \leq q \leq \infty$ denota as normas clássicas dos espaços de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^3)$, com

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} &= \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |u_i(x, t)|^q dx \right\}^{1/q} \\ \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} &= \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |D_j u_i(x, t)|^q dx \right\}^{1/q} \\ \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} &= \left\{ \sum_{i,j,\ell=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} |D_j D_\ell u_i(x, t)|^q dx \right\}^{1/q},\end{aligned}$$

se $1 \leq q < \infty$, e

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = \max \left\{ \|u_i(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} : 1 \leq i \leq 3 \right\}, \text{ se } q = \infty.$$

Denotaremos por $|\cdot|_2$ a norma euclideana em \mathbb{R}^3 , que também usaremos para a norma do sup de $\mathbf{u}(\cdot, t)$:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty = \text{ess sup} \left\{ |\mathbf{u}(x, t)|_2 : x \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

e $e^{\Delta t}$ é a solução da equação do calor, no sentido que,

$$e^{\Delta t} \mathbf{u}_0 = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \mathbf{u}_0(y) dy.$$

Em seu famoso artigo de 1934, Leray [19], mostrou a existência de soluções fracas (globais) $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ que satisfazem

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$$

e são fracamente contínuas em $L^2(\mathbb{R}^3)$, com $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Mostrou ainda que vale a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (1.1)$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, como observado em [25], Leray [19] mostrou em sua construção que sempre existe um $t_* > 0$ suficientemente grande (que depende da condição inicial \mathbf{u}_0) tal que se tem $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [t_*, \infty))$, e, para cada inteiro $m \geq 1$:

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([t_*, T], H^m(\mathbb{R}^3)), \quad (1.2)$$

para cada $t_* < T < \infty$, ou seja, $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L_{\text{loc}}^\infty([t_*, \infty), H^m(\mathbb{R}^3))$. Enquanto a unicidade das soluções de Leray continua sendo um problema fundamental em aberto, foi mostrado por Kato [15] e Masuda [21] (e mais tarde por outros autores também, veja e.g., [14] e [27]) que todas as soluções de Leray, sendo unicamente definidas por seus valores iniciais ou não, devem satisfazer a importante propriedade assintótica, aqui chamada de Problema de Leray,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (1.3)$$

um problema deixado em aberto na última página de seu artigo [19]. Será conveniente mostrar uma nova derivação (obtida em [25]) em maiores detalhes da propriedade (1.3) seguindo a linha do método introduzido em [17] e [18]⁴ para dar uma fácil derivação das estimativas de decaimento fundamentais em [23] e [27] para soluções das equações Navier-Stokes em dimensão $n \leq 3$. Então, com poucas mudanças, obtém-se o seguinte resultado,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (1.4)$$

o qual, novamente, é válido para todas as soluções de Leray-Hopf. Logo, por interpolação (lema C.2), temos que,

⁴Para uma abordagem mais detalhada desses métodos, veja [22]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{3}{4} - \frac{3}{2q}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad 2 \leq q \leq \infty, \quad (1.5)$$

uniformemente em q . No capítulo 1, mostramos as propriedades (1.3), (1.4) e (1.5), que são bem conhecidas e fáceis de se obter para soluções $\mathbf{v}(\cdot, t) \in L^\infty([t_0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$ do problema do calor abaixo⁵,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t = \Delta \mathbf{v}, & t > t_0, \\ \mathbf{v}(\cdot, t_0) = \mathbf{u}(\cdot, t_0), \end{cases}$$

dado $t_0 \geq 0$. A solução do problema acima é dado por $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$, onde $e^{\Delta\tau}$, $\tau \geq 0$, denota a solução da equação do calor. É natural pensar que as soluções de Leray-Hopf das equações de Navier-Stokes são aproximadas por soluções da equação do calor definidas acima. Com isso, Kato [15] obteve que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/4 - \epsilon} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0 \text{ para cada } \epsilon > 0,$$

e um pouco depois Wiegner [27] obteve⁶, usando um outro argumento, que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (1.6)$$

(veja [27], Teorema (c), p.305). Novamente, daremos uma prova simples (veja Seção 3.2) nas linhas de [17] seguindo novamente a discussão básica em [25]. Isso será útil para obter resultado correspondente para a norma do sup (veja Seção 3.3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (1.7)$$

Logo, por interpolação (C.2), segue que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1 - \frac{3}{2q}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad 2 \leq q \leq \infty, \quad (1.8)$$

⁵Veja também, por exemplo, [5]

⁶Apesar de podermos estender nosso argumento para forças externas sob certas hipóteses, nossa análise é limitada (como em [17] e [18]) para $n \leq 3$.

uniformemente em q . É interessante notar que tais resultados melhoram as estimativas

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{3}{4} - \frac{3}{2q}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} &< \infty, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{1 - \frac{3}{2q}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} &< \infty \end{aligned}$$

obtidas por Beirão da Veiga [4] e Wiegner [28] para $q > 2$ finito.

No Capítulo 1, mostramos as propriedades anteriormente citadas e algumas mais gerais para a equação do calor e para equações de Advecção-Difusão, pois tais resultados são úteis para mostrar outras propriedades para as equações de Navier-Stokes. No capítulo 2, após alguns preliminares, mostramos as propriedades 1.3 na seção 2.2 e 1.4 na seção 2.3. No capítulo 3, novamente após alguns preliminares, mostramos as propriedades de aproximação 1.6 na seção 3.2 e 1.7 na seção 3.3. O ponto chave para provar essas propriedades é observar que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad (1.9)$$

donde segue facilmente as propriedades. Apesar de restringirmos nossa atenção para dimensão $n = 3$, pode ser visto claramente que nosso método funciona no caso⁷ $n = 2$. Colocando junto, os resultados para $n = 2, 3$ podem ser resumidos como segue. Para cada $2 \leq q \leq \infty$, se tem,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{4} - \frac{n}{2q}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n-1}{2} - \frac{n}{2q}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

uniformemente em q . A validade das propriedades acima, em dimensões mais altas, aparentemente permanece em aberto na literatura.

⁷É ainda mais fácil o resultado neste caso, pois as propriedades de suavidade valem para todo t .

No capítulo 2, usando as propriedades acima originalmente obtidas em [25], obtemos interessantes estimativas para a pressão $p(\cdot, t)$ usando a teoria de Calderón-Zygmund, pois sabe-se que a pressão $p(\cdot, t)$ satisfaz a equação de Poisson,

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^3 D_i u_j D_j u_i,$$

onde u_i é a i -ésima componente da velocidade \mathbf{u} e $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, assumindo sempre que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Desta maneira, obtemos para cada $1 < q < \infty$

$$\|p(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq K(3, q) \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^{2q}(\mathbb{R}^3)}^2,$$

o que implica que, usando o lema de interpolação C.2,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{9}{4} - \frac{9}{4q}} \|p(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Mostramos, ainda, que dada a vorticidade $\omega(\cdot, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\cdot, t)$, temos,

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

o que implica que,

$$\|D^l \omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|D^{l+1} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Por Calderón-Zygmund (veja [10]), vale ainda que,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(3, p) \|\omega(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

e

$$\|D^{l+1} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(3, p) \|D^l \omega(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

para $1 < p < \infty$. Onde $K(n, p)$ é a constante de Calderón-Zygmund que depende da dimensão do espaço e de p .

2 A PROPRIEDADE DE LERAY E GENERALIZAÇÕES PARA EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

2.1 Equação do Calor

Nesta seção, o objetivo é provar algumas propriedades conhecidas da solução da equação do calor usando as técnicas desenvolvidas em [17] e [18] para nos motivarmos a atacar equações mais complicadas e, inclusive, as equações de Navier-stokes.

Considere o problema,

$$(*) \begin{cases} \mathbf{u}_t = \Delta \mathbf{u}, t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Então tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.1 (Propriedade de Leray para a equação do Calor). *Dada $\mathbf{u}(x, t)$ solução do problema (*), então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Provaremos o resultado acima de duas maneiras diferentes, a primeira usando Transformada de Fourier e a segunda usando as técnicas desenvolvidas no presente texto. Posteriormente, compararemos os dois argumentos, explicitando quais as vantagens e desvantagens de cada um.

Demonstração. Primeiro argumento:

A maneira mais conhecida de provar esse resultado é usando Transformada de Fourier. Portanto, seja $\hat{\mathbf{u}}$ a transformada de Fourier, definida abaixo,

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \mathbf{u}(x) dx,$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Aplicando a transformada de Fourier no problema (*), obtemos,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_t(\xi, t) &= -|\xi|^2 \hat{\mathbf{u}}(\xi, t) \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi, 0) &= \hat{\mathbf{u}}_0(\xi) \end{aligned}$$

Resolvendo o problema acima, obtém-se que,

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{\mathbf{u}}_0(\xi)$$

Sabe-se, pelo Teorema de Plancherel, que $\|\mathbf{u}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{\mathbf{u}}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$

Logo

$$\|\mathbf{u}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{\mathbf{u}}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\mathbf{u}}(\xi, t)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi \quad (2.1)$$

Temos que, pelo o lema C.1 dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| < \delta} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi < \frac{\epsilon}{2}$$

Note que, $e^{-2|\xi|^2 t} \leq 1$, para todo $t \geq 0$. Observe, também, que dado $\epsilon > 0$, existe $t_0(\epsilon) > 0$, a saber,

$$t_0 = \ln \left(\frac{2\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2\delta^2}},$$

tal que para todo $t \geq t_0(\epsilon)$, tem-se,

$$e^{-2\delta^2 t} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e $t_0 \geq 0$, como definido acima, tal que, para todo $t \geq t_0$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi &= \int_{|\xi| < \delta} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq \delta} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi \leq \\ \int_{|\xi| < \delta} 1 \cdot |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi + e^{-2\delta^2 t} \int_{|\xi| \geq \delta} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi &\leq \frac{\epsilon}{2} + e^{-2\delta^2 t} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

O que implica, por 2.1, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Assim, obtemos o resultado desejado. \square

Uma consequência interessante deste argumento é a seguinte afirmação: Dado $T > 0$ suficientemente grande e dado $0 < \lambda < 1$, existe $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ tal que

$$\|u(x, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \lambda$$

Nota. Observe que, a afirmação acima diz, em outras palavras que, a norma L^2 da solução equação decresce arbitrariamente lenta ao logo do tempo t .

Demonstração. Para construir tal função, faremos via Transformada de Fourier. Definimos, então, a seguinte função,

$$\hat{\mathbf{u}}_0(\xi) = \begin{cases} c(r, n), & |\xi| \leq r \\ 0, & |\xi| > r \end{cases}$$

Onde,

$$c(r, n) = \sqrt{\frac{n}{r^n \omega_n}}, \text{ com } \omega_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Γ é a famosa função Gamma de Euler. Então, seguindo os moldes do argumento anterior, por Plancherel novamente, temos,

$$\|\mathbf{u}(x, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{\mathbf{u}}(\xi, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{|\xi| \leq r} e^{-2|\xi|^2 T} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi \geq e^{-2r^2 T} \int_{|\xi| \leq r} |\hat{\mathbf{u}}_0(\xi)|^2 d\xi \geq \lambda^2,$$

pois dado $0 < \lambda < 1$ fixo, existe $r > 0$ tal que $e^{-r^2 T} \geq \lambda$, conseqüentemente, isso mostra a existência da \mathbf{u}_0 . \square

Portanto uma consequência imediata desse argumento, em outras palavras, é que não podemos dizer o quão rápido $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ vai a zero.

Segundo argumento:

Faremos, agora, outra técnica para demonstrar o teorema 2.1 e depois discutiremos as consequências imediatas que tal argumento implicará. Para isso, faz-se necessário o uso do lema a seguir.

Lema 2.2. *Dada $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução do problema (*), com $\mathbf{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $1 \leq p \leq \infty$ então, tem-se:*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_n(p) \|\mathbf{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})}$$

Demonstração. O resultado é trivial para $p = 1$, basta usar a desigualdade de Young para a convolução provada no lema C.3. Faremos, agora, para $p = \infty$. Note que,

$$|\mathbf{u}(x, t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\mathbf{u}_0(y)| dy \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2}}$$

Usando uma simples interpolação, provada no lema C.2, tem-se o resultado desejado. \square

Demonstração. Agora, defina,

$$\mathbf{v}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_0, & |x| > R_\epsilon \\ 0, & |x| \leq R_\epsilon \end{cases}$$

e, similarmente,

$$\mathbf{w}_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| > R_\epsilon \\ \mathbf{u}_0, & |x| \leq R_\epsilon \end{cases}$$

para um certo $R_\epsilon > 0$

Note que,

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0$$

e, por $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tem-se, $\mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, pois¹

$$\|\mathbf{w}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{|\mathbf{w}|>1} |\mathbf{w}_0| dx + \int_{|\mathbf{w}_0|\leq 1} |\mathbf{w}_0| dx \leq \int |\mathbf{w}_0|^2 dx + \frac{\omega_n}{n} R_\epsilon$$

Observe que, pelo lema C.1, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $R_\epsilon > 0$ suficientemente grande tal que,

$$\|\mathbf{v}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{|x|>R_\epsilon} |\mathbf{u}_0|^2 dx \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2$$

Sabemos que \mathbf{v}_0 e \mathbf{w}_0 , estão em L^2 , mas $\mathbf{w}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então pelo lema 2.2, temos,

$$\|e^{\Delta t} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq K_n(2) \|\mathbf{w}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{4}}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $t_0(\epsilon) > 0$, tal que $\|e^{\Delta t} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2}$. O que implica que, para $t > t_0(\epsilon)$

$$\|e^{\Delta t} \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|e^{\Delta t} \mathbf{v}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|e^{\Delta t} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{v}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

O que conclui a demonstração do teorema 2.1 usando o outro argumento. \square

Note que, usamos a linearidade da equação do calor para fechar a prova do teorema 2.1 neste último argumento, mas isso não nos impede de atacar equações não lineares, como será mostrado posteriormente. Além disso, usamos que se \mathbf{u} satisfaz (*), então $\|\mathbf{u}\|_{L^p} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^p}$, para cada² $1 \leq p \leq \infty$, basta usar o lema C.3 para ver isso.

Observe que no primeiro argumento, usamos a identidade de Plancherel, que funciona somente para $p = 2$, agora temos o seguinte resultado como consequência imediata de nosso segundo argumento: Dada $\mathbf{u}(x, t)$ solução do problema (*), com $\mathbf{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

para $1 < p < \infty$.

¹Na verdade, isso vale, não somente para a função \mathbf{w}_0 definida acima, mas também, em geral, para qualquer função \mathbf{w}_0 com suporte compacto.

²Supondo, é claro, que $\mathbf{u}_0 \in L^p$

Demonstração. Basta usar o segundo argumento usado para demonstrar o teorema 2.1 para $1 < p < \infty$. O argumento segue analogamente. \square

Provaremos agora a propriedade de Leray do problema (*), para a norma $\|\mathbf{u}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Antes, precisaremos demonstrar o seguinte lema,

Lema 2.3. *Se $\mathbf{u}(x, t)$ satisfaz o problema (*), com $\|\mathbf{u}_0\| \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então,*

$$\|\mathbf{u}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K}_n(p) \|\mathbf{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2p}}$$

Demonstração. Basta, notar que

$$|\mathbf{u}(\cdot, t)| \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{|x-y|^2}{4t}} |\mathbf{u}_0(y)| dy \quad \underbrace{\leq}_{\text{Desig. de Hölder}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2p}}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Logo, em particular,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2p}}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \tilde{K}_n(p) \|\mathbf{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2p}}$$

\square

Com isso, podemos facilmente provar o seguinte resultado,

Teorema 2.4. *Dada \mathbf{u} solução do problema (*), então, tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{4}} \|e^{\Delta t} \mathbf{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Demonstração. Pelo o lema 2.3, temos que

$$\|\mathbf{u}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{K}(n, 2) \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{4}}$$

Logo,

$$\|e^{\Delta \frac{t}{2}} [e^{\Delta \frac{t}{2}} \mathbf{u}_0]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{4}}} \tilde{K}(n, 2) \|e^{\Delta \frac{t}{2}} \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{4}}$$

Portanto,

$$t^{\frac{n}{4}} \|e^{\Delta \frac{t}{2}} [e^{\Delta \frac{t}{2}} \mathbf{u}_0]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{4}}} \tilde{K}(n, 2) \|e^{\Delta \frac{t}{2}} \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

O que implica, ao $t \rightarrow \infty$, pelo teorema 2.1, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{4}} \|e^{\Delta t} \mathbf{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{4}} \|e^{\Delta \frac{t}{2}} [e^{\Delta \frac{t}{2}} \mathbf{u}_0]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$$

□

Dada $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução do problema (*), tem-se,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{4} - \frac{n}{2q}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

para todo $2 \leq q \leq \infty$.

Demonstração. Basta notar que, pelo lema C.2,

$$t^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{q}} \left(t^{1 - \frac{\gamma}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right)^{1 - \frac{2}{q}}$$

Pelo Teorema 2.4 e o Teorema 2.1, deve-se ter,

$$\frac{\gamma}{1 - \frac{2}{q}} = \frac{n}{4}$$

Logo,

$$\gamma = \frac{n}{4} - \frac{n}{2q}$$

Observe que, aqui há uma melhora do Corolário 2.1 .

□

Agora proveremos o que chamamos de Problema completo de Leray, para a equação do calor, i.e.,

$$t^{\frac{s}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

para qualquer $s \geq 0$. Antes, teremos que provar alguns resultados preliminares.

Proposição 2.5. *Dada $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de (*), vale a igualdade de energia:*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

para $0 \leq t_0 < t$.

Demonstração. Observe que o problema (*) está definido em \mathbb{R}^n , então, para obtermos a igualdade acima, ao integrarmos por partes, a função deve "decair rápido no infinito". Para formalizarmos este raciocínio, introduziremos uma função auxiliar de corte,

$$\zeta_R(x) := \begin{cases} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}}, & |x| < R \\ 0, & |x| \geq R \end{cases},$$

para $R, \epsilon > 0$

Multiplicando a equação do calor em (*) por $2\mathbf{u}\zeta_R$, tem-se,

$$2\mathbf{u}\mathbf{u}_t\zeta_R = 2\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}\zeta_R,$$

como $2\mathbf{u}\mathbf{u}_t = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^2)$, ao integrarmos de t_0 a t e em \mathbb{R}^n , obtém-se, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo Teorema de Fubini³, que

$$\int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t)\zeta_R dx = \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} 2\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}\zeta_R dx d\tau + \int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t_0)\zeta_R dx$$

Fazendo integração por partes no primeiro termo do lado direito da equação acima, como ζ_R se anula em $|x| = R$,

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t)\zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |D\mathbf{u}(\cdot, \tau)|^2 \zeta_R dx d\tau = \\ & - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \langle D\zeta_R, D\mathbf{u}^2(\cdot, \tau) \rangle dx d\tau + \int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t_0)\zeta_R dx \end{aligned}$$

Integrando por partes, novamente, tem-se,

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t)\zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |D\mathbf{u}(\cdot, \tau)|^2 \zeta_R dx d\tau = \\ & \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Delta\zeta_R \mathbf{u}^2(\cdot, \tau) dx d\tau - \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} \langle D\zeta_R, \vec{n} \rangle \mathbf{u}^2(\cdot, \tau) d\sigma d\tau + \int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t_0)\zeta_R dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

ou seja,

³Para maiores detalhes dos teoremas clássicos de teoria da integração, como os teoremas de Fubini, convergência dominada de Lebesgue, convergência monótona e outros, veja [2]

$$\begin{aligned}
& \int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t) \zeta_R dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |D\mathbf{u}(\cdot, \tau)|^2 \zeta_R dx d\tau = \\
& \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Delta \zeta_R \mathbf{u}^2(\cdot, \tau) dx d\tau + \epsilon \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} \sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} \mathbf{u}^2(\cdot, \tau) d\sigma d\tau \\
& \qquad \qquad \qquad + \int_{|x|<R} \mathbf{u}^2(\cdot, t_0) \zeta_R dx,
\end{aligned}$$

pois $\vec{n} = \frac{x}{R}$ Nossa intenção é fazer $R \rightarrow \infty$, no entanto, temos que analisar se o termo de fronteira não irá divergir. Observe que, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, basta usar o lema C.3.

Logo,

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{u}^2 dx d\tau < \infty$$

Portanto, escrevendo em coordenadas polares e usando o Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{u}^2 dx d\tau &= \int_{t_0}^t \int_0^\infty \int_{|x|=r} \mathbf{u}^2 d\sigma(x) dr d\tau = \\
&= \int_0^\infty \int_{t_0}^t \int_{|x|=r} \mathbf{u}^2 d\sigma(x) d\tau dr < \infty
\end{aligned}$$

Logo,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{t_0}^t \int_{|x|=r} \mathbf{u}^2 d\sigma(x) d\tau \right] = 0$$

Então, existe uma subsequência R_k tal que

$$\lim_{R_k \rightarrow \infty} \left[\int_{t_0}^t \int_{|x|=R_k} \mathbf{u}^2 d\sigma(x) d\tau \right] = 0 \quad (2.3)$$

Como,

$$\epsilon \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} e^{-\epsilon\sqrt{1+R^2}} \sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} \mathbf{u}^2(\cdot, \tau) d\sigma d\tau \leq \epsilon \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} \mathbf{u}^2(\cdot, \tau) d\sigma d\tau \quad (2.4)$$

Portanto, fazendo $R_k \rightarrow \infty$ em 2.2, usando o Teorema da Convergência Dominada no primeiro e último termo de 2.2, usando 2.3 e 2.4 no termo de fronteira de 2.2 e,

finalmente, usando o Teorema da Convergência Monótona nos dois termos restantes de 2.2, tem-se,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} \mathbf{u}^2(\cdot, t) dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} |D\mathbf{u}(\cdot, \tau)|^2 dx d\tau = \\ & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}}) \mathbf{u}^2(\cdot, \tau) dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}} \mathbf{u}^2(\cdot, t_0) dx, \end{aligned}$$

Como,

$$|\mathbf{u}^2 \Delta(e^{-\epsilon\sqrt{1+|x|^2}})| \leq \epsilon \mathbf{u}^2,$$

supondo $0 < \epsilon \leq 1$, sem perda de generalidade. Então, tomando $\epsilon \rightarrow 0$, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue no termo que contém o laplaciano da igualdade acima e usando o Teorema da Convergência Monótona no termos restantes, obtemos:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

□

Vale, também, as igualdades,

$$(t - t_0) \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau$$

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^2 \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^2 \|D^3\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ & = \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \end{aligned}$$

E assim, sucessivamente,

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^m \|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^m \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ & = \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{m-1} \|D^m\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \end{aligned}$$

para $m \geq 1$ inteiro.

Demonstração. Vamos introduzir, novamente, uma função de corte. Seja $\zeta \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que,

$$\zeta(x) := \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ \Phi(x), & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases},$$

onde $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, obviamente, de classe C^2 . Agora, defina:

$$\zeta_R = \zeta\left(\frac{|x|}{R}\right),$$

para $R > 0$.

Derivando a equação do problema (*) com relação a x_i , i.e., aplicando o operador D_i e multiplicando por $2(t - t_0)\zeta_R D_i \mathbf{u}$, tem-se,

$$2(t - t_0)\zeta_R D_i \mathbf{u} (D_i \mathbf{u})_t = 2(t - t_0)\zeta_R D_i \mathbf{u} \Delta(D_i \mathbf{u})$$

Integrando em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$, tem-se,

$$\int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \zeta_R (D_i \mathbf{u})^2_t d\tau dx = \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t 2(\tau - t_0) \zeta_R D_i \mathbf{u} \Delta(D_i \mathbf{u}) d\tau dx$$

Integrando por partes no lado esquerdo, a expressão acima fica,

$$(t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, t))^2 dx = \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t 2(\tau - t_0) \zeta_R D_i \mathbf{u} \Delta(D_i \mathbf{u}) d\tau dx \\ + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, \tau))^2 d\tau dx$$

Agora, integrando por partes em \mathbb{R}^n , no primeiro termo do lado direito, tem-se,

$$(t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, t))^2 dx = - \int_{|x| < 2R} \langle \nabla \zeta_R, \nabla (D_i \mathbf{u})^2 \rangle dx \\ - \int_{|x| < 2R} 2\zeta_R |\nabla (D_i \mathbf{u})|^2 dx + \underbrace{\int_{|x|=2R} 2\zeta_R D_i \mathbf{u} \nabla (D_i \mathbf{u}) d\sigma(x)}_{=0} \\ + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, \tau))^2 d\tau dx$$

Integrando por partes, novamente, em \mathbb{R}^n no primeiro termo do lado direito da equação acima, tem-se

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, t))^2 dx + \int_{|x| < 2R} 2\zeta_R |\nabla(D_i \mathbf{u})|^2 dx \\
&= \int_{|x| < 2R} \Delta \zeta_R (D_i \mathbf{u})^2 dx - \int_{|x|=2R} \langle \nabla \zeta_R, \vec{n} \rangle (D_i \mathbf{u})^2 d\sigma(x) \\
&\quad + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, \tau))^2 d\tau dx
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Observe que, $\nabla \zeta_R = 0$, para todo $|x| > 2R$. Sabe-se que, em particular, $\zeta_R \in C^1$, logo,

$$\left. \nabla \zeta_R \right|_{|x|=2R} = \lim_{|x| \rightarrow 2R^+} \nabla \zeta_R = 0$$

Portanto, a equação 2.5, fica,

$$\begin{aligned}
& (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, t))^2 dx + \int_{|x| < 2R} 2\zeta_R |\nabla(D_i \mathbf{u})|^2 dx \\
&= \int_{|x| < 2R} \Delta \zeta_R (D_i \mathbf{u})^2 dx + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \zeta_R (D_i \mathbf{u}(x, \tau))^2 d\tau dx
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Note que, como $\zeta \in C^2$, o laplaciano de ζ , atinge o máximo em $|x| \leq 2R$.

Portanto,

$$|\Delta \zeta_R (D_i \mathbf{u})^2| < \frac{M}{R^2} |D_i \mathbf{u}|^2,$$

em $|x| < 2R$. Onde $M > 0$ é o máximo de $\Delta \zeta$. Além disso, pela proposição 2.5,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_i \mathbf{u}|^2 dx < \infty$$

Logo, ao $R \rightarrow \infty$, podemos usar o teorema da convergência dominada no primeiro termo do lado direito da equação 2.6, no primeiro termo do lado esquerdo e no último termo do lado direito(usando a proposição 2.5) e convergência monótona no termo restante, a equação se torna, somando em i ,

$$(t - t_0) \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau,$$

Para demonstrar as igualdades seguinte, basta aplicar o operador

$$2\zeta_R(t - t_0)^2 D_i D_j \mathbf{u} D_i D_j$$

em ambos o lados na equação do calor definida no problema (*) e usar o mesmo tipo de argumento feito anteriormente. Fazendo de forma indutiva, i.e., aplicado o operador

$$2\zeta_R(t - t_0)^m D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_m} \mathbf{u} D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_m}$$

em ambos os lados da equação do calor definida no problema (*) e usando os mesmos argumentos feitos acima, conclui-se a demonstração, para $m \geq 1$ inteiro. \square

Tendo isso, é fácil obter o seguinte resultado:

Teorema 2.6. *Dada $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução do problema (*), então, vale que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

Em outras palavras,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

para $m \geq 0$ inteiro.

Demonstração. Pelo teorema 2.1, dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 > 0$, tal que,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon,$$

para todo $t \geq t_0$. Portanto, pela proposição 2.5, tem-se

$$\int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \frac{\epsilon^2}{2} \quad (2.7)$$

Pelo corolário 2.1, obtemos o seguinte

$$(t - t_0) \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = t \left(\frac{t - t_0}{t} \right) \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$$

Logo,

$$t \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \left(\frac{t}{t - t_0} \right) \frac{\epsilon^2}{2}$$

Observe que $\left(\frac{t}{t-t_0}\right) \leq 2$, para $t \geq 2t_0$.

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon$$

O que prova o Teorema, para $m = 1$

Por 2.7 e pelo corolário 2.1, tem-se,

$$\int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \frac{\epsilon^2}{2}$$

Usando a segunda equação do corolário 2.1, tem-se,

$$(t - t_0)^2 \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = t^2 \left(\frac{t - t_0}{t}\right)^2 \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$$

Portanto, como $\left(\frac{t}{t-t_0}\right)^2 \leq 2$, para $t \geq \sqrt{2}t_0$,

$$t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon$$

O que prova o Teorema, para $m = 2$. Repetindo o argumento sucessivamente de forma análoga, obtém-se o resultado desejado, para $m \geq 1$ inteiro. O resultado para $m = 0$ foi demonstrado no teorema 2.1. \square

Usando o lema de interpolação C.4 tem-se o seguinte resultado: Para qualquer $s > 0$ tem-se,

$$t^{\frac{s}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \text{ ao } t \rightarrow \infty$$

Demonstração. Dado ϵ , tome $s > 0$ arbitrário. Então, para qualquer $m > s$, existe t_* tal que, pelo Teorema 2.1,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{m}} \leq \sqrt{\epsilon},$$

para todo $t > t_*$. Além disso, pelo Teorema 2.6, existe t_{**} , tal que, para todo $t > t_{**}$

$$t^{\frac{m}{2}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\sqrt{\epsilon}\right)^{\frac{m}{s}},$$

logo, usando o lema C.4, para $t > \max\{t_*, t_{**}\}$ e $\gamma > 0$ (a ser escolhido), tem-se,

$$\begin{aligned} t^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} &\leq t^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{m}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{m}} \\ &\leq \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{m}} \left(t^{\gamma \frac{m}{s}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m} \right)^{\frac{s}{m}} \leq \sqrt{\epsilon} \sqrt{\epsilon} = \epsilon, \end{aligned}$$

se $\gamma \frac{m}{s} = \frac{m}{2}$, portanto, $\gamma = \frac{s}{2}$, para qualquer $s > 0$. \square

Observe que usando a desigualdade de Sobolev do lema C.6, temos o seguinte resultado: Dada \mathbf{u} solução de (*), tem-se

$$t^{\frac{m}{2} + \frac{n}{4}} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ ao } t \rightarrow \infty,$$

para qualquer $m \geq 0$ inteiro.

Demonstração. Basta notar que pelo lema C.6,

$$t^{2\gamma} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (K(n))^2 t^{2\gamma} \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|D^{m+n} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Pelo teorema 2.6, $2\gamma = \frac{m}{2} + \frac{m+n}{2}$, o que implica,

$$\gamma = \frac{m}{2} + \frac{n}{4}$$

\square

O que encerra, por enquanto, a discussão desse tema para a equação do calor. Vale ressaltar, que, para a equação de Navier-Stokes, usaremos fortemente os resultados acima desenvolvidos.

2.2 Equação de Advecção-Difusão

Nesta seção, vamos mostrar a propriedade de Leray para uma classe de equações mais gerais que a equação do Calor. Além disso, deixaremos algumas questões importantes que ainda são desconhecidas para tal classe.

Considere o problema,

$$(*) \begin{cases} \mathbf{u}_t + \nabla \cdot (f(\mathbf{u})) = \nabla \cdot \left(A(u) \nabla \mathbf{u} \right) \mathbf{u}, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

onde $A(u) \in C^1$ é uma matriz $n \times n$, $f \in C^1$ e para todo $u \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ temos $\langle A(u)v, v \rangle \geq \alpha|v|^2$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$ fixo. Então, tem-se, os seguintes fatos:

FATO 1: $\exists! \mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0([0, \infty), L^p(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (*).

FATO 2: Se $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ são tais que $\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então,

$$\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t) \in C^0([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^n))$$

e

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

FATO 3: Dada $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução para o problema (*), tem-se, para $1 \leq p < \infty$,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q) \|\mathbf{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{n}{2p}}, \quad \forall t > 0.$$

As demonstrações dos fatos acima podem ser encontrados em [5] e [24]. Com isso, podemos provar a "p-Propriedade de Leray" para o problema (*), i.e.,

Teorema 2.7. Dada $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução do problema (*), tem-se, para $1 \leq p < \infty$,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \quad \text{ao } t \rightarrow \infty$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $R_\epsilon > 0$ suficientemente grande, tal que, pelo lema C.1,

$$\int_{|x|>R_\epsilon} |\mathbf{u}_0|^p dx < \frac{\epsilon^p}{2^p}.$$

Seja,

$$\mathbf{v}_0 = \begin{cases} \mathbf{u}_0, & |x| \geq R_\epsilon \\ 0, & |x| < R_\epsilon \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0 = \begin{cases} 0, & |x| \geq R_\epsilon \\ \mathbf{u}_0, & |x| < R_\epsilon \end{cases}$$

e, então,

$$\|\mathbf{v}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n).$$

De fato, como $\mathbf{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ segue que $\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, como $\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0$ tem suporte compacto, segue,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0| dx = \int_{|x|<R_\epsilon} |\mathbf{u}_0| dx \leq \text{Vol}(B(0, R_\epsilon)) + \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = M < \infty,$$

onde $M > 0$ é, obviamente, constante. Agora, basta notar que,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, temos que estimar o termo $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Usando a afirmação 2.2, o **Fato 1** e o **Fato 2**, e o lema C.2, tem-se,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq M^p \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Agora, pelo **Fato 3**, $\exists t_0(\epsilon) > 0$, tal que,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon}{2M^p},$$

para todo $t \geq t_0$. Portanto, usando as estimativas anteriores, tem-se,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $t > t_0$, assim, concluindo a demonstração do teorema. \square

Uma importante questão, aparentemente desconhecida na literatura, é determinar quais são as funções f do problema (*) tal que vale a Propriedade de Leray. Sabe-se que a resposta é sim nos seguintes casos:

- Para $f = f(\mathbf{u})$
- Para $f = f(t, \mathbf{u})$
- Para $f = f(x, t, \mathbf{u})$, se $\sum_j^n \mathbf{u} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x, t, \mathbf{u}) \geq 0$

3 PROBLEMA DE LERAY PARA NAVIER-STOKES E DECAIMENTO DE $T^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$

3.1 Preliminares

Nesta seção, coletamos alguns resultados que terão grande importância na demonstração de nossos resultados ao longo do texto. Para a construção das soluções de Leray-Hopf $\mathbf{u}(\cdot, t)$ para as equações de Navier-Stokes veja [8] e [19]. Essas soluções foram originalmente obtidas em [19] onde é introduzida uma ingênua regularização que, por conveniência, é brevemente revisado a seguir.

Tomando $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ não negativa com $\int_{\mathbb{R}^3} G(x)dx = 1$ e definindo $\bar{\mathbf{u}}_{0,\delta}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ como sendo a convolução entre $\mathbf{u}_0(\cdot)$ com $G_\delta(x) = \delta^{-3}G(x/\delta)$, $\delta > 0$, se definirmos $\mathbf{u}_\delta, p_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, como soluções clássicas (únicas, globalmente definidas) em L^2 das equações associadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_\delta + \bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta + \nabla p_\delta &= \Delta \mathbf{u}_\delta \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\delta(\cdot, t) &= 0 \\ \mathbf{u}_\delta(\cdot, 0) = \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta}(\cdot) &:= G_\delta * \mathbf{u}_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H^m(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

onde é mostrado por Leray que, para alguma sequência $\delta' \rightarrow 0$, tem-se a propriedade,

$$\mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, t) \rightharpoonup \mathbf{u}(\cdot, t), \text{ quando } \delta' \rightarrow 0, \forall t \geq 0, \quad (3.1)$$

em outras palavras, $\mathbf{u}_\delta(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t)$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^3)$, para todo $t \geq 0$ (veja [19], p. 237), com $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap C_w^0([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$ contínua em L^2 em $t = 0$ e solução das equações de Navier-Stokes no sentido das distribuições. Além disso, vale a desigualdade de energia¹,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (3.2)$$

então, em particular,

$$\int_0^\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (3.3)$$

Outra importante propriedade mostrada em [19] é que $\mathbf{u} \in C^\infty([t_*, \infty))$ para algum $t_* \geq 0$ suficiente grande, com $D^m \mathbf{u}(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([t_*, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$ para cada $m \geq 1$. Tal fato será usado fortemente ao longo do texto a fim de simplificar nossa análise.

Introduziremos, agora, a projeção de Helmholtz de $-\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t)$ em $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$, i.e.,

$$\mathbf{Q}(\cdot, t) := -\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla p(\cdot, t), \text{ para quase todo } t > 0, \quad (3.4)$$

que, por conveniência, discutiremos ao longo da seção.

Proposição 3.1. *Considere $\mathbf{Q}(\cdot, t)$ dado em 3.4, então, tem-se,*

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}(\cdot, t) = 0$$

Demonstração. Tomando o divergente nas equações de Navier-Stokes, temos

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_t = \Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{Q}(\cdot, t)$$

donde o resultado segue trivialmente, pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. □

¹A demonstração da desigualdade de energia é similar a demonstração da igualdade de energia obtida para a equação do Calor no capítulo 1.

Dado $\mathbf{Q}(\cdot, t)$ em 3.4, tem-se,

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^3 D_i u_j D_j u_i$$

Portanto, a pressão p satisfaz a equação de Poisson e, tendo isso, podemos obter estimativas para a pressão via teoria de Calderón–Zygmund. Isto foi feito na dissertação de mestrado de Robert Guterres [10], lá é mostrado que, para cada $1 < p < \infty$,

$$\|p(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(3, p) \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^3)}^2,$$

dessa maneira obtemos as mesmas estimativas para pressão, usando o lema de interpolação C.2,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{9}{4} - \frac{9}{4p}} \|p(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = 0,$$

Teorema 3.2. *Para quase todo $s > 0$, tem-se,*

$$\|e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K(t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (3.5)$$

e

$$\|e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\infty} \leq K(t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (3.6)$$

para todo $t > s$, onde $K = (8\pi)^{-\frac{3}{4}}$.

Demonstração. O argumento é adaptado de [17]. Seja $\mathbb{F}[f] \equiv \hat{f}$ a transformada de Fourier da função $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, ou seja,

$$\mathbb{F}[f](k) \equiv \hat{f}(k) := (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot x} f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}^3,$$

onde $i^2 = -1$. Dada $\mathbf{v}(\cdot, s) = (v_1(\cdot, s), v_2(\cdot, s), v_3(\cdot, s)) \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária, pela identidade de Parseval,

$$\begin{aligned} \|e^{\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \|\mathbb{F}[e^{\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2|k|_2^2(t-s)} |\hat{\mathbf{v}}(k, s)|_2^2 dk \\ &\leq \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_{\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2|k|_2^2(t-s)} dk \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} (t-s)^{-3/2} \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_{\infty}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|e^{\Delta(t-s)} \mathbf{v}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/4} (t-s)^{-3/4} \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot, s)\|_{\infty}, \quad (3.7)$$

onde $|\cdot|_2$ denota a norma euclideana em \mathbb{R}^3 e

$$\|\mathbf{v}(\cdot, s)\|_{\infty} = \sup\{|\hat{\mathbf{v}}(k, s)|_2 : k \in \mathbb{R}^3\}$$

Mostraremos, a seguir, que 3.5 segue da aplicação direta de 3.7 para $\mathbf{v}(\cdot, s) = \mathbf{Q}(\cdot, s)$. No entanto, precisamos estimar $\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_{\infty}$. Observe que, $\mathbb{F}[\nabla p(\cdot, t)](k) = i\hat{p}(k, s)k$ e pela proposição 3.1, $\sum_{j=1}^3 k_j \hat{Q}_j(k, s) = 0$. Portanto, os vetores $\mathbb{F}[\nabla p(\cdot, s)](k)$ e $\hat{\mathbf{Q}}(k, s)$ são ortogonais em \mathbb{C}^3 , para todo $k \in \mathbb{R}^3$ e, por 3.4,

$$\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s) + \mathbb{F}[\nabla p(\cdot, s)](k) = -\mathbb{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](k),$$

o que fornece a seguinte desigualdade:

$$|\hat{\mathbf{Q}}(k, s)|_2 \leq |\mathbb{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](k)|_2, \quad (3.8)$$

para todo $k \in \mathbb{R}^3$. Logo,

$$\|\hat{\mathbf{Q}}(\cdot, s)\|_{\infty} \leq \|\mathbb{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)](k)\|_{\infty}. \quad (3.9)$$

Agora, basta notar que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, para cada $1 \leq i \leq 3$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{F}[\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla u_i(\cdot, s)](k)| &\leq \sum_{j=1}^3 |\mathbb{F}[u_j(\cdot, s) D_j u_i(\cdot, s)](k)| \\ &\leq (2\pi)^{-3/2} \sum_{j=1}^3 \|u_j(\cdot, s) D_j u_i(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq (2\pi)^{-3/2} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla u_i(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

(Como antes $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$). Logo,

$$\|\mathbb{F}[\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}](\cdot, s)\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-3/2} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (3.10)$$

O que conclui, usando 3.9, 3.7 e 3.10, a prova da desigualdade 3.5.

A prova da desigualdade 3.6, de maneira similar, usando 3.8 e a estimativa do lema 1.5 do capítulo 1, i.e.,

$$\|e^{\Delta\tau} \mathbf{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq K\tau^{-\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

onde \mathbf{u} satisfaz a equação do Calor e $\tau > 0$ é arbitrário. Portanto, para qualquer $s > 0$ com $\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\infty}$ e $\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ finitos, usando 3.8, a identidade de Parseval (duas vezes) e as definições das normas descritas na introdução do texto, temos:

$$\begin{aligned} \|e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{\infty} &\leq K(t-s)^{-3/4} \|\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq K(t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq K(t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

□

Vamos mostrar agora a unicidade da velocidade \mathbf{u} .

Teorema 3.3 (Leray, 1934). *Sejam $\mathbf{u}(\cdot, t), \mathbf{v}(\cdot, t) \in C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^3))$ as soluções clássicas das equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3 \times (0, T]$. Então,*

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}(x, t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Demonstração. A demonstração é adaptada de [19]. Reescrevendo as equações de Navier-Stokes para \mathbf{v} e \mathbf{u} , temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i + D_i p &= \Delta u_i \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j D_j v_i + D_i q &= \Delta v_i, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3$. Seja $\theta = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Logo,

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i - v_j D_j v_i + D_i(p - q) = \Delta \theta_i,$$

multiplicando a equação acima por 2θ e integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, \hat{t}]$, onde $0 < t_0 < \hat{t} \leq T$, temos (usando as mesmas técnicas desenvolvidas no Capítulo 1),

$$\begin{aligned} &\|\theta(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^{\hat{t}} \|D\theta(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \\ &= \|\theta(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \sum_{i,j} \int_{t_0}^{\hat{t}} \int_{\mathbb{R}^3} \theta_i (u_j D_j u_i - v_j D_j v_i) dx dt \end{aligned}$$

usando integração por partes e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Reescrevendo o último termo usando $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, tem-se,

$$\|\theta(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\theta(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + M \int_{t_0}^{\hat{t}} \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt,$$

onde M é o máximo que a função $|\mathbf{v}(x, t)|_2^2$ atinge em $[t_0, \hat{t}]$. Logo, ao $t_0 \rightarrow 0$, pelo teorema da convergência monótona,

$$\|\theta(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + M \int_0^{\hat{t}} \|\theta(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt$$

O que conclui a demonstração, pelo lema de Grönwall C.7 □

3.2 Problema de Leray

Aqui provaremos a conjectura deixada na última página por Leray em [19]. Considere, então o problema,

$$(*) \begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} , t > 0 , x \in \mathbb{R}^3 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , t \geq 0 , x \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Como foi dito na introdução, Leray mostrou em [19] que existe algum $t_* \geq 0$ suficientemente grande, tal que,

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [t_*, \infty)), \quad (3.11)$$

e, para cada $m \geq 1$ inteiro,

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([t_*, T], H^m(\mathbb{R}^3)), \quad (3.12)$$

para cada $T \in (t_*, \infty)$, em outras palavras,

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty_{loc}([t_*, \infty), H^m(\mathbb{R}^3)).$$

Antes de provarmos o problema de Leray, precisamos dos lemas a seguir,

Lema 3.4. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t), t > 0$ uma solução de Leray-Hopf do problema (*). Então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.13)$$

Demonstração. O argumento a seguir é adaptado de [17], lema 2.1. Se 3.13 fosse falso, deveria existir uma sequência crescente $t_j \rightarrow \infty$, com $t_j \geq t_*$ e $t_j \geq 2t_{j-1}$ para todo j e uma constante $\eta > 0$, tal que,

$$t_j \|D\mathbf{u}(\cdot, t_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \eta, \quad \forall j.$$

Onde t_* é definido em 3.11. Em particular, temos que,

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 dt \geq (t_j - t_{j-1}) \|D\mathbf{u}(\cdot, t_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} t_j \|D\mathbf{u}(\cdot, t_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{1}{2} \eta$$

para todo j , o que é uma contradiz a desigualdade de energia 3.2 e 3.3, o que conclui a demonstração de 3.13. \square

Lema 3.5.

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} < \infty, \quad (3.14)$$

para $t \geq 1$.

Demonstração. Basta fazer a mudança de variáveis $\sigma = \frac{s}{t}$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds &= \int_{t_0/t}^1 t^{-\frac{1}{4}} (1-\sigma)^{-\frac{3}{4}} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\sigma \leq \int_0^1 t^{-\frac{1}{4}} (1-\sigma)^{-\frac{3}{4}} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\sigma \\ &\leq \beta(1/2, 1/4) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}, \quad \text{para } t \geq 1, \end{aligned}$$

onde Γ e β são as funções de gama e beta, respectivamente. \square

Agora, seja $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ uma solução de Leray-Hopf para o problema (*) e seja $t_* \geq 0$ grande o suficiente tal que vale as propriedades 3.11 e 3.12. Tomando $t_0 \geq t_*$ arbitrário, temos que,

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0) + \int_{t_0}^t e^{\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s) ds, \quad t \geq t_0, \quad (3.15)$$

pelo Princípio de Duhamel, onde $\mathbf{Q}(\cdot, s)$ é,

$$\mathbf{Q}(\cdot, t) := -\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) - \nabla p(\cdot, t), \text{ para quase todo } t > 0,$$

como na seção anterior. Então,

Teorema 3.6 (Problema de Leray). *Dada $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução do problema, tem-se,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.16)$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $\tilde{t}_0 \geq t_*$ suficientemente grande tal que, pelo lema 3.4, tem-se,

$$t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\epsilon}{2\tilde{K}K\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} \quad \forall t \geq \tilde{t}_0 + 1, \quad (3.17)$$

onde $\tilde{K} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$. Seja $\tilde{t}_0 \geq t_*$ suficientemente grande tal que, pelo Teorema 2.1 do Capítulo 1, tem-se

$$\|e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, da representação 3.15, pela desigualdade 3.5, pela desigualdade de energia 3.2 e pelo Lema 3.5, tem-se,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^t \|e^{\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq \|e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \| e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq \| e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{\epsilon}{2\tilde{K}} \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

para todo $t > t_0 + 1$, onde $t_0 = \max\{\tilde{t}_0, \tilde{\tilde{t}}_0\}$ e $K = (8\pi)^{-\frac{3}{4}}$. O que conclui a demonstração. \square

Um fato interessante é que, a vorticidade $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, tem as seguintes propriedades:

Teorema 3.7. *Dada vorticidade ω definida acima, tem-se,*

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Demonstração. Basta usar a definição de rotacional,

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{l,m,k} D_l u_m \right) e_k$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|\omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= \sum_{i,j,l,m,k} \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{l,m,k} D_i u_j D_l u_m dx = \\
&\sum_{i,j,l,m=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \epsilon_{i,j,k} \epsilon_{l,m,k} \right) \int_{\mathbb{R}^3} (D_i u_j)(D_l u_m) dx \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_i u_j)^2 dx - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (D_i u_j)(D_j u_i) dx \\
&= \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,
\end{aligned}$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. \square

No mesmo espírito, pode-se mostrar que,

$$\|D^l \omega(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|D^{l+1} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Portanto, sempre que estimamos as derivadas \mathbf{u} na norma L^2 , temos por conseguinte as estimativas para a vorticidade e suas derivadas. Observe que a análise não fica restrita ao caso L^2 , pois,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \omega \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times \omega \\ -\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= \nabla \times \omega \\ -\Delta \mathbf{u} &= \nabla \times \omega, \end{aligned}$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Logo, podemos usar a teoria de Calderón–Zygmund, isso é feito rigorosamente em [10]. Com isso, obtemos as seguintes estimativas,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(3, p) \|\omega(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

e

$$\|D^{l+1} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq K(3, p) \|D^l \omega(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

para $1 < p < \infty$. Onde $K(n, p)$ é uma constante que depende somente da dimensão do espaço e de p , proveniente das integrais singulares de Calderón–Zygmund.

3.3 Decaimento de $t^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$

Nesta seção, seguiremos de maneira similar com o objetivo de obter uma estimativa mais refinada para a norma do sup. Então, analogamente a seção anterior, seja t_* suficientemente grande tal que vale a forte condição de regularidade 3.11 de $\mathbf{u}(\cdot, t)$ para $t \geq t_*$, usando a representação 3.15, a estimativa 3.6, o lema 3.4 e o teorema 3.16, obtém-se o seguinte

resultado:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Antes, precisaremos do lema a seguir,

Lema 3.8.

$$\int_{\hat{t}_1}^t (t-s)^{-3/4} (s-\hat{t}_1)^{-3/4} ds = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\sqrt{\pi} \sqrt{(t-\hat{t}_1)}}$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variáveis $z = \frac{s-\hat{t}_1}{t-\hat{t}_1}$, tem-se,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{t}_1}^t (t-s)^{-3/4} (s-\hat{t}_1)^{-3/4} ds &= (t-\hat{t}_1)^{-1/2} \int_0^1 z^{-3/4} (1-z)^{-3/4} dz \\ &= \frac{\beta(1/4, 1/4)}{\sqrt{(t-\hat{t}_1)}} = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\sqrt{\pi} \sqrt{(t-\hat{t}_1)}}, \end{aligned}$$

onde Γ é a função de Euler e β é a função beta. □

Feito isso, podemos obter o principal resultado desta seção:

Teorema 3.9.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.18)$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ e $\epsilon \leq 1/2$, seja $t \geq t_*$ suficientemente grande, tal que pelo lema 3.4 e o teorema 3.16, tem-se,

$$t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.19)$$

e

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.20)$$

Da representação 3.15, temos que, por 3.6 e 3.19,

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_\infty &\leq \| e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_\infty + \int_{t_0}^t \| e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_\infty ds \\
&\leq \| e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_\infty + K \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_\infty \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq K(t-t_0)^{-3/4} \| \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K\epsilon \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_\infty ds
\end{aligned}$$

para todo $t > t_0$, onde $K = (8\pi)^{-3/4}$. Ou seja,

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_\infty \leq K(t-t_0)^{-3/4} \| \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K\epsilon \int_{t_0}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_\infty ds \quad (3.21)$$

Afirmo que,

$$t^{3/4} \| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_\infty < \epsilon \quad \forall t \geq 2(t_0 + 1), \quad (3.22)$$

o que implica² 3.18. Logo, iremos provar 3.22 acima. Dado qualquer $\hat{t} \geq 2(t_0 + 1)$ fixo, seja $\hat{t}_1 := \hat{t}/2$. Defina,

$$\mathbf{U}(t) := (t - \hat{t}_1)^{3/4} \| \mathbf{u}(\cdot, t) \|_\infty, \quad t \geq \hat{t}_1, \quad (3.23)$$

obtemos que, aplicando 3.21 (com $t_0 = \hat{t}_1$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}(t) &\leq K \| \mathbf{u}(\cdot, \hat{t}_1) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K\epsilon (t - \hat{t}_1)^{3/4} \int_{\hat{t}_1}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_\infty ds \\
&= K \| \mathbf{u}(\cdot, \hat{t}_1) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K\epsilon (t - \hat{t}_1)^{3/4} \int_{\hat{t}_1}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} (s - \hat{t}_1)^{-3/4} \mathbf{U}(s) ds
\end{aligned}$$

²Obviamente, pois, $\| u_i \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \| \mathbf{u} \|_\infty$ (de fato, como $|u| \leq |u|_2$), para cada $1 \leq i \leq 3$, logo vale para o máximo, $\max \{ \| u_i \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} : 1 \leq i \leq 3 \} = \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \| \mathbf{u} \|_\infty$.

$$\leq K \|\mathbf{u}(\cdot, \hat{t}_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + K\epsilon \hat{t}_1^{-1/2} (t - \hat{t}_1)^{3/4} \int_{\hat{t}_1}^t (t-s)^{-3/4} (s - \hat{t}_1)^{-3/4} \mathbf{U}(s) ds$$

para $t \geq \hat{t}_1$, logo, por 3.20, temos,

$$\mathbf{U}(t) \leq K\epsilon + K\epsilon \hat{t}_1^{-1/2} (t - \hat{t}_1)^{3/4} \int_{\hat{t}_1}^t (t-s)^{-3/4} (s - \hat{t}_1)^{-3/4} \mathbf{U}(s) ds, \quad t \geq \hat{t}_1,$$

onde $K = (8\pi)^{-3/4}$. Portanto, definindo,

$\hat{\mathbf{U}} := \max \{ \mathbf{U}(t) : \hat{t}_1 \leq t \leq \hat{t} \}$, temos que, para $\hat{t}_1 \leq t \leq \hat{t}$, usando o lema 3.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &\leq K\epsilon + K\epsilon \hat{t}_1^{-1/2} (t - \hat{t}_1)^{3/4} \hat{\mathbf{U}} \int_{\hat{t}_1}^t (t-s)^{-3/4} (s - \hat{t}_1)^{-3/4} ds \\ &\leq K\epsilon + \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\sqrt{\pi}} K\epsilon \hat{t}_1^{-1/2} (t - \hat{t}_1)^{1/4} \hat{\mathbf{U}} \\ &\leq K\epsilon + \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\sqrt{\pi}} K\epsilon \hat{t}_1^{-1/4} \hat{\mathbf{U}}. \end{aligned}$$

Lembrando que $\hat{t}_1 \geq 1$, $\epsilon \leq 1/2$, temos que, $\mathbf{U}(t) \leq K\epsilon + \frac{(\Gamma(1/4))^2}{\sqrt{\pi}} K\epsilon \hat{\mathbf{U}} \leq K\epsilon + 0.331 \hat{\mathbf{U}}$, para cada $\hat{t}_1 \leq t \leq \hat{t}$. O que dá $\hat{\mathbf{U}} \leq K\epsilon + 0.331 \hat{\mathbf{U}}$, ou seja, $\hat{\mathbf{U}} < 0.134 \epsilon$. Em particular,

$$\left(\frac{\hat{t}}{2}\right)^{3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, \hat{t})\|_{\infty} = \mathbf{U}(\hat{t}) \leq \hat{\mathbf{U}} < 0.134 \epsilon,$$

Logo, $\hat{t}^{3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, \hat{t})\|_{\infty} < \epsilon$, onde $\hat{t} \geq 2(t_0 + 1)$ é arbitrário. Isto mostra a afirmação 3.22, e a prova do teorema está concluída. \square

4 APROXIMAÇÃO DE SOLUÇÕES DE NAVIER-STOKES POR SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR

4.1 Preliminares

Observe que aplicando o mesmo argumento desenvolvido anteriormente para as soluções das equações regularizadas de Navier-Stokes, obtemos,

$$\| e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K (t-s)^{-3/4} \| \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.1)$$

e

$$\| e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \|_\infty \leq K (t-s)^{-3/4} \| \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_\infty \| D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (4.2)$$

para todo $t > s > 0$, onde $K = (8\pi)^{-\frac{3}{4}}$, como antes, e

$$\mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) = -\bar{\mathbf{u}}_\delta(\cdot, s) \cdot \nabla \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) - \nabla p_\delta(\cdot, s). \quad (4.3)$$

A estimativa 4.1 é particularmente útil, já que as soluções regularizadas $\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)$ satisfazem a desigualdade de energia,

$$\| \mathbf{u}_\delta(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_0^t \| D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (4.4)$$

para todo $t > 0$ ($\delta > 0$ arbitrário), da qual, $\|\mathbf{u}_\delta(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e $\int_0^t \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds$ são finitos independentemente do $\delta > 0$. Usaremos tal fato, nos teoremas a seguir, para mostrar que um valor particular de $t_0 \geq 0$ escolhido na definição das aproximações pela equação do calor descritas na introdução, não é relevante no que diz respeito às propriedades de aproximação assintótica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.5)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.6)$$

,

onde

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t = \Delta \mathbf{v}, & t > t_0, \\ \mathbf{v}(\cdot, t_0) = \mathbf{u}(\cdot, t_0), \end{cases}$$

para $\mathbf{v}(\cdot, t) \in L^\infty([t_0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$.

Teorema 4.1. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$, $t > 0$, uma solução de Leray-Hopf. Dado qualquer par de dados iniciais $\tilde{t}_0 > t_0 \geq 0$, tem-se*

$$\|\mathbf{v}(\cdot, t) - \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{K}{\sqrt{2}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{1/2} (t - \tilde{t}_0)^{-3/4} \quad (4.7)$$

para todo $t > \tilde{t}_0$, onde $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-\tilde{t}_0)} \mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0)$ são as respectivas equações do calor associadas a t_0 e \tilde{t}_0 e $K = (8\pi)^{-\frac{3}{4}}$

Demonstração. Começaremos escrevendo $\mathbf{v}(\cdot, t)$ como,

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0), \quad t > t_0,$$

Observe que, pelo princípio de Duhamel,

$$\mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0) = e^{\Delta t_0} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\Delta(t_0-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds,$$

Combinando as igualdades acima,

$$\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] + e^{\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{t_0} e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds,$$

para $t > t_0$. Analogamente, para $t > \tilde{t}_0$,

$$\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] + e^{\Delta t} \bar{\mathbf{u}}_{0,\delta} + \int_0^{\tilde{t}_0} e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds.$$

Logo, obtemos, para a diferença $\mathbf{v}(\cdot, t) - \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)$ para qualquer $t > \tilde{t}_0$, a identidade

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t) &= e^{\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] - e^{\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] \\ &\quad + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) ds. \end{aligned}$$

Portanto, dado qualquer compacto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$, temos, para cada $t > \tilde{t}_0$, $\delta > 0$, que:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{K})} &\leq J_\delta(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{K})} ds \\ &\leq J_\delta(t) + K \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq J_\delta(t) + \frac{K}{\sqrt{2}} (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

por Cauchy-Schwarz, por 4.1 e 4.4. Onde,

$$J_\delta(t) = \|e^{\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)]\|_{L^2(\mathbb{K})} + \|e^{\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)]\|_{L^2(\mathbb{K})}.$$

Fazendo $\delta = \delta' \rightarrow 0$, de acordo com 3.1, $\mathbf{J}_\delta(t) \rightarrow 0$ usando o Teorema da Convergência Dominada, temos que, para todo $\sigma, \tau > 0$:

$$\| e^{\Delta\tau}[\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma)] \|_{L^2(\mathbb{K})} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \delta' \rightarrow 0,$$

pois \mathbb{K} tem medida finita. Logo, obtemos que,

$$\| \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{K})} \leq \frac{K}{\sqrt{2}} (\tilde{t}_0 - t_0)^{1/2} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t - \tilde{t}_0)^{-3/4}$$

para cada $t > \tilde{t}_0$, e para qualquer compacto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$. O que claramente é equivalente a 4.7. □

O teorema 4.1 simplifica significativamente a derivação da propriedade assintótica 4.5. Por razões similares, a prova de 4.6 necessita a versão da norma do sup para o teorema 4.1.

Teorema 4.2. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t), t > 0$ uma solução de Leray-Hopf. Dado qualquer par de valores iniciais $\tilde{t}_0 > t_0 \geq 0$, tem-se*

$$\| \mathbf{v}(\cdot, t) - \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (\tilde{t}_0 - t_0)^{1/2} (t - \tilde{t}_0)^{-3/2} \quad (4.8)$$

para todo $t > t_0 \gtrsim 0$, onde $\mathbf{v}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) = e^{\Delta(t-\tilde{t}_0)}\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0)$ e $\Gamma = (4\pi)^{-\frac{3}{2}}$.

Demonstração. Tomando $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^3$ compacto e $2 < q < \infty$ arbitrário, temos que, para cada $t > \tilde{t}_0, \delta > 0$, como no argumento do teorema anterior,

$$\begin{aligned}
\| \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{K})} &\leq J_{\delta, q}(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \| e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \|_{L^q(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq J_{\delta, q}(t) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} [4\pi(t-s)]^{-\frac{3}{4}(1-\frac{2}{q})} \| e^{\frac{1}{2}\Delta(t-s)} \mathbf{Q}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq J_{\delta, q}(t) + \gamma_q \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (t-s)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \| \mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}_\delta(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq J_{\delta, q}(t) + \frac{\gamma_q}{\sqrt{2}} (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})}
\end{aligned}$$

por 4.1 e 4.4, onde,

$$\gamma_q = (4\pi)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})}$$

e

$$J_{\delta, q}(t) = \| e^{\Delta(t-\tilde{t}_0)} [\mathbf{u}(\cdot, \tilde{t}_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, \tilde{t}_0)] \|_{L^q(\mathbb{K})} + \| e^{\Delta(t-t_0)} [\mathbf{u}(\cdot, t_0) - \mathbf{u}_\delta(\cdot, t_0)] \|_{L^q(\mathbb{K})}.$$

Tomando $\delta = \delta' \rightarrow 0$ de acordo com 3.1, temos $\mathbf{J}_{\delta, q}(t) \rightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\| e^{\Delta\tau} [\mathbf{u}(\cdot, \sigma) - \mathbf{u}_{\delta'}(\cdot, \sigma)] \|_{L^q(\mathbb{K})} \rightarrow 0 \text{ quando } \delta' \rightarrow 0,$$

para cada $\sigma, \tau > 0$. Logo,

$$\| \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t) \|_{L^q(\mathbb{K})} \leq \frac{\gamma_q}{\sqrt{2}} (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})}$$

para cada $t > \tilde{t}_0$, $q > 2$. Fazendo $q \rightarrow \infty$,

$$\| \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{K})} \leq \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} (\tilde{t}_0 - t_0)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 (t - \tilde{t}_0)^{-\frac{3}{2}}$$

para cada $t > \tilde{t}_0$, com $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^3$ compacto arbitrário. O que, claramente, prova

Para o próximo resultado fundamental revisado nessa seção, usaremos as seguintes desigualdades de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG), para $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ arbitrária:

$$\|u\|_\infty \leq K_0 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4}, \quad K_0 < 0.678, \quad (4.9)$$

(Veja, por exemplo [26], proposição 2.4, p.13, ou [24], teorema 4.5.1, p.52) e

$$\|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq K_1 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}, \quad K_1 < 1.317, \quad (4.10)$$

a qual segue diretamente de integração por partes.

Teorema 4.3. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t), t > 0$ uma solução de Leray-Hopf, então existe t_{**} (dependendo da solução \mathbf{u}) suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é suave e função monótona decrescente em $t \in [t_{**}, \infty)$.*

Demonstração. O argumento a seguir é adaptado de [17], Lema 2.2. Seja

$t_0 \geq t_*$ (a ser escolhido), com t_* suficientemente grande dado em 3.11 e 3.12. Seja $t > t_0$. Aplicando $D_l = \frac{\partial}{\partial x_l}$ a primeira equação de Navier-Stokes (*) (definido na seção 2.2) e multiplicando $D_l \mathbf{u}(\cdot, t)$ e integrando¹ em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$, temos que, somando sobre $1 \leq l \leq 3$,

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds = \\ & = \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \sum_{i,j,\ell} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} u_i(x, s) D_\ell u_j(x, s) D_j D_\ell u_i(x, s) dx ds. \end{aligned}$$

O que fornece, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq$$

¹No capítulo 1, é feito rigorosamente para a equação do Calor.

$$\leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds,$$

Agora, por 4.9 e 4.10, temos,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq K_0 \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4} \\ &= \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left[K_0 \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{-1/4} \right] \\ &\leq \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left[K_0 K_1^{1/2} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \right] \end{aligned}$$

onde K_0, K_1 são as constantes de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG) em 4.9 e 4.10. Portanto, temos que,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

pois $K_0 K_1^{1/2} < 1$. (Aqui, nós usamos também que, por 3.2, que

$\|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ para todo $s \geq 0$.) Portanto,

$$\begin{aligned} &\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \\ &\leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_{t_0}^t \left[\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right]^{1/2} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

para todo, $t \geq t_0$. Então, escolhemos $t_0 \geq t_*$ tal que, por 3.2:

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < 1.$$

Na verdade, com essa escolha, segue que de 4.11 Tem-se que,

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < 1 \quad \forall s \geq t_0. \quad (4.12)$$

Demonstração. Se fosse falso, deveria existir $t_1 > t_0$ tal que: $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2} < 1$ para todo, $t_0 \leq s < t_1$, e $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$. Tomando $t = t_1$ em 4.11, nos fornece $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, portanto,

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} < 1.$$

Absurdo. O absurdo mostra a afirmação. QED (4.12). \square

De 4.11 e 4.12, segue que,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\gamma \int_{t_2}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (4.13)$$

para todo $t \geq t_2 \geq t_0$, onde $\gamma := 1 - \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2}$ é uma constante positiva. Isto mostra o resultado, onde $t_{**} = t_0$ com $t_0 \geq t_*$ escolhido em 4.12. \square

4.2 Análise para a norma L^2

Nesta seção, iremos demonstrar a propriedade de aproximação assintótica,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$$

onde $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ é uma solução de Leray-Hopf para as equações de Navier-Stokes e $\mathbf{v}(\cdot, t) \in L^\infty([t_0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3))$ é a solução do problema do calor a baixo,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t = \Delta \mathbf{v}, & t > t_0, \\ \mathbf{v}(\cdot, t_0) = \mathbf{u}(\cdot, t_0). \end{cases}$$

Seja t_* grande o suficiente tal que vale as propriedades de regularidade

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([t_*, T], H^m(\mathbb{R}^3)),$$

e

$$\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [t_*, \infty)).$$

Então, tem-se,

Teorema 4.4.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (4.14)$$

Demonstração. Pelo o Teorema 4.1, é suficiente mostrar 4.14 no caso em que $t_0 \geq t_*$, onde vale 3.16. Dado $\epsilon > 0$, seja $t_\epsilon > t_0$ suficientemente grande tal que, pelo lema 3.4 novamente, tem-se

$$t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_\epsilon. \quad (4.15)$$

Pela representação 3.15, pela desigualdade de energia 3.2, pela desigualdade 3.5 e pelo lema 3.5, tem-se,

$$\begin{aligned} t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq t^{1/4} \int_{t_0}^t \|e^{\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq I(t, t_\epsilon) + K t^{1/4} \int_{t_\epsilon}^t (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq I(t, t_\epsilon) + K \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon t^{1/4} \int_{t_\epsilon}^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/2} ds \quad [\text{por 4.15}] \\ &\leq I(t, t_\epsilon) + 0.468 \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \epsilon t^{1/4} (t-t_\epsilon)^{-1/4} \end{aligned}$$

para todo $t > t_\epsilon$, onde $K = (8\pi)^{-\frac{3}{4}}$ e

$$\begin{aligned} I(t, t_\epsilon) &= K t^{1/4} \int_{t_0}^{t_\epsilon} (t-s)^{-3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &\leq K t^{1/4} (t-t_\epsilon)^{-3/4} \int_{t_0}^{t_\epsilon} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que,

$$t^{1/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) \epsilon$$

para todo t suficientemente grande. O que conclui a demonstração de 4.14 e encerra nossa discussão com respeito a norma L^2 . \square

4.3 Análise para a norma L^∞

Aqui, vamos demonstrar a propriedade de aproximação assintótica,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

onde \mathbf{u} é uma solução de Leray-Hopf, onde valem as mesmas propriedades de regularidades descritas na seção anterior, para $t \geq t_*$.

Teorema 4.5.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (4.16)$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.2, é suficiente mostrar 4.16 no caso em que $t \geq t_*$, onde a vale a representação 3.15. Dado $0 < \epsilon \leq 1$, seja $t_\epsilon > t_0$ suficientemente grande tal que, pelo Teorema 3.18 e o Lema 3.4, tem-se,

$$t^{1/2} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_\epsilon, \quad (4.17)$$

e

$$t^{3/4} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_\epsilon. \quad (4.18)$$

Da representação 3.15, temos,

$$\begin{aligned} t \|\mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\Delta(t-t_0)}\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_\infty &\leq t \int_{t_0}^t \|e^{\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot, s)\|_\infty ds \\ &\leq J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

para todo $t > t_\epsilon$, onde

$$\begin{aligned}
J_1(t) &= t \int_{t_0}^{t_\epsilon} \| e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_\infty ds \\
&\leq (4\pi)^{-3/4} t \int_{t_0}^{t_\epsilon} (t-s)^{-3/4} \| e^{\frac{1}{2}\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq (4\pi)^{-3/2} t \int_{t_0}^{t_\epsilon} (t-s)^{-3/2} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq (4\pi)^{-3/2} t (t-t_\epsilon)^{-3/2} \int_{t_0}^{t_\epsilon} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds,
\end{aligned}$$

por 3.5, e

$$\begin{aligned}
J_2(t) &= t \int_{t_\epsilon}^{\mu(t)} \| e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_\infty ds \\
&\leq (4\pi)^{-3/4} t \int_{t_\epsilon}^{\mu(t)} (t-s)^{-3/4} \| e^{\frac{1}{2}\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq (4\pi)^{-3/2} t \int_{t_\epsilon}^{\mu(t)} (t-s)^{-3/2} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq (2\pi)^{-3/2} t (t-t_\epsilon)^{-3/2} \epsilon^2 \int_{t_\epsilon}^{\mu(t)} s^{-1/2} ds < 0.090 \epsilon t (t-t_\epsilon)^{-1},
\end{aligned}$$

por 3.5, 4.17 e 4.18, onde $\mu(t) = (t+t_\epsilon)/2$,

$$\begin{aligned}
J_3(t) &= t \int_{\mu(t)}^t \| e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot, s) \|_\infty ds \\
&\leq (8\pi)^{-3/4} t \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-3/4} \| \mathbf{u}(\cdot, s) \|_\infty \| D\mathbf{u}(\cdot, s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\
&\leq (8\pi)^{-3/4} t \epsilon^2 \int_{\mu(t)}^t (t-s)^{-3/4} s^{-5/4} ds < 0.713 \epsilon t (t-t_\epsilon)^{-1},
\end{aligned}$$

por 3.6 e 4.17 e 4.18. Então, por 4.19 e pelas desigualdades obtidas anteriormente para $J_i(t)$, com $1 \leq i \leq 3$, obtemos,

$$t \| \mathbf{u}(\cdot, t) - e^{\Delta(t-t_0)} \mathbf{u}(\cdot, t_0) \|_\infty < \epsilon,$$

para todo $t \geq t_\epsilon$ suficientemente grande. O que mostra a propriedade 4.16, pois $\epsilon \in (0, 1]$ é arbitrário. \square

Apêndice A DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Aqui, o objetivo é fazer uma derivação resumida das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis¹, a fim de que o leitor tenha alguma noção das propriedades físicas e matemáticas por trás das equações.

A.1 Incompressibilidade

Lembramos aqui a forma das equações :

$$(1). \quad \begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} , t > 0 , x \in \mathbb{R}^n \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , t \geq 0 , x \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Onde $\mathbf{u}(x, t) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty), \mathbb{R}^n)$ é a velocidade do fluido em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ no tempo $t > 0$, isto é, as velocidades individuais das partículas em determinado momento e p é a pressão cinemática do fluido.

Seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ a posição de uma partícula em um instante inicial t_0 que podemos supor, sem perda de generalidade, igual a zero. Definimos, então o conjunto,

$$\Xi := \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi \in \mathbb{R}^n, t \in I_{max}(\xi)\}$$

onde I_{max} representa um intervalo maximal $[0, T_*)$, com $T_* \leq \infty$.

¹Para uma abordagem mais completa, considerando casos mais gerais, com construções e argumentos físicos, consulte [1]

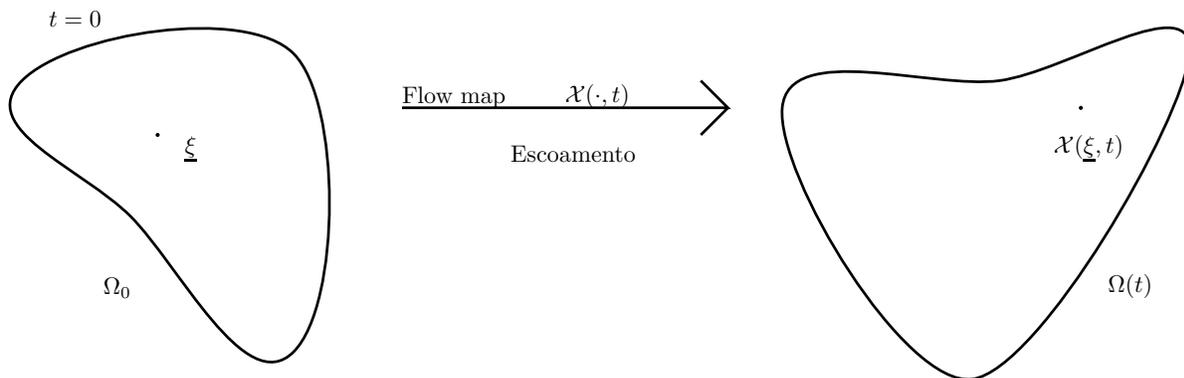


Figura A.1: Ω_0 e $\Omega(t)$

Denotaremos por $\mathcal{X} : \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação que mapeia o ponto que representa a posição inicial ξ ao longo do tempo $t > 0$, ou seja, a partícula ξ é um parâmetro e $\mathcal{X}(\xi, t)$ será a posição da partícula ξ em um instante de $t > 0$.

Observe que, fixando ξ , pela definição de \mathcal{X} , temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_t &= \mathbf{u}(\mathcal{X}(\xi, t), t), \quad t > 0 \\ \mathcal{X}(\xi, 0) &= \xi\end{aligned}$$

Em outras palavras, para cada ξ fixo, temos uma EDO associada a ele. Portanto, podemos usar a teoria desenvolvida para Equações Diferenciais Ordinárias.

Teorema A.1. *O conjunto Ξ é aberto em \mathbb{R}^{n+1}*

Teorema A.2. *Como $\mathbf{u} \in C^1$, tem-se, $\mathcal{X}, \mathcal{X}_t, \mathcal{X}_{\xi_j}, \mathcal{X}_{t\xi_j}, \mathcal{X}_{\xi_j t} \in C^0(\Xi, \mathbb{R}^n)$, para $1 \leq j \leq n$.*

Teorema A.3. *A aplicação \mathcal{X} é injetiva(contínua) , portanto uma aplicação aberta². Em outras palavras, dado $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ aberto(conexo), então a imagem $\Omega(t)$ pela a aplicação \mathcal{X} é um aberto(conexo), como mostra a figura A.1 acima .*

As demonstrações dos teoremas acima decorrem da teoria clássica de EDO's e podem ser encontradas em [13].

Dizemos que o escoamento ou fluido³ é incompressível quando volumes são conservados ao longo de sua trajetória.

Considere os conjuntos Ω_0 e $\Omega(t)$ da figura A.1, mencionados no teorema A.3, ambos com fronteira Lipschitz⁴. Sabendo isso, a definição A.4 significa, em outras palavras, que:

$$Vol(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} dx = \int_{\Omega(t)} dx = Vol(\Omega(t)) = constante \quad (A.1)$$

Derivando (A.1) com relação a t , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dx = 0$$

²Há um teorema de topologia afirmando que dada uma aplicação injetiva e contínua, então tal aplicação leva abertos em abertos, no entanto, não será necessário o uso de tal teorema, visto que esse resultado, com as hipóteses aqui feitas, surge naturalmente através da unicidade de soluções da teoria de EDOs.

³há uma diferença sutil entre "escoamento incompressível" e "fluido incompressível" que será esclarecida na subseção (A.0.2). Por hora, o que o leitor precisa saber é que a definição, em particular, está coesa para ambas as terminologias.

⁴poderíamos supor que a fronteira dos dois conjuntos é regular o suficiente para aplicarmos o teorema da divergência. No entanto, fronteira Lipschitz já resolve nosso problema.

Fazendo a mudança de variáveis $x = \mathcal{X}(\xi, t)$ na integral acima, temos que:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi = \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_0} \begin{vmatrix} \mathcal{X}_{1\xi_1} & \dots & \mathcal{X}_{1\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{i\xi_1 t} & \dots & \mathcal{X}_{i\xi_n t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{n\xi_1} & \dots & \mathcal{X}_{n\xi_n} \end{vmatrix} d\xi \quad (\text{A.2})
 \end{aligned}$$

Onde $\left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right|$ representa o determinante jacobiano, resultante na mudança de variáveis. Observe que, como a aplicação \mathcal{X} é sempre inversível (para cada ξ fixado), o determinante jacobiano nunca se anula. O jacobiano é contínuo pelo teorema A.2 e, além disso, em $t = 0$ é igual a 1. Logo o determinante jacobiano é sempre positivo, o que torna o uso do valor absoluto do jacobiano desnecessário.

Sabemos que, $\mathcal{X}_{it} = u_i(\mathcal{X}_1(\xi, t), \dots, \mathcal{X}_n(\xi, t); t)$, o que implica, derivando com respeito a ξ_j através da regra da cadeia, que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{X}_{it} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_i(\mathcal{X}_1(\xi, t), \dots, \mathcal{X}_n(\xi, t), t) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial \mathcal{X}_l}(\mathcal{X}(\xi, t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{X}_l(\xi, t), \quad (\text{A.3}) \\
 &\text{para } 1 \leq i, j \leq n.
 \end{aligned}$$

Lembre-se que $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{X}_{it} = \mathcal{X}_{i\xi_j t}$, pelo teorema A.2.

Então, substituindo o último termo em (A.2) por (A.3) e usando propriedades básicas de determinantes, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_0} \begin{vmatrix} \mathcal{X}_{1\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{1\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{i\xi_1 t} & \cdots & \mathcal{X}_{i\xi_n t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{n\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{n\xi_n} \end{vmatrix} d\xi &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \int_{\Omega_0} \begin{vmatrix} \mathcal{X}_{1\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{1\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_i}{\partial \mathcal{X}_l} \cdot \frac{\partial \mathcal{X}_l}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial u_i}{\partial \mathcal{X}_l} \cdot \frac{\partial \mathcal{X}_l}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{n\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{n\xi_n} \end{vmatrix} d\xi \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_i}{\partial \mathcal{X}_l} \begin{vmatrix} \mathcal{X}_{1\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{1\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{l\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{l\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{n\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{n\xi_n} \end{vmatrix} d\xi \end{aligned}$$

Se $l \neq i$, então o termo $\frac{\partial u_i}{\partial \mathcal{X}_l}$ multiplica um determinante com linhas repetidas e por isso dá zero. Logo $i = l$, o que implica que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_i}{\partial \mathcal{X}_l} \begin{vmatrix} \mathcal{X}_{1\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{1\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{l\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{l\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{n\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{n\xi_n} \end{vmatrix} d\xi &= \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial \mathcal{X}_i} \begin{vmatrix} \mathcal{X}_{1\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{1\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{n\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{n\xi_n} \end{vmatrix} d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathcal{X}(\xi, t), t) \begin{vmatrix} \mathcal{X}_{1\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{1\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{X}_{n\xi_1} & \cdots & \mathcal{X}_{n\xi_n} \end{vmatrix} d\xi = \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathcal{X}(\xi, t), t) \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi \end{aligned}$$

Agora, voltando na mudança de variáveis $x = \mathcal{X}(\xi, t)$, obtemos

$$\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathcal{X}(\xi, t), t) \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{u}(x, t) dx$$

Logo, obtemos o seguinte resultado:

Proposição A.4. *Se o escoamento ou fluido é incompressível, então $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$*

Demonstração. Usando as equivalências obtidas acima, temos que,

$$0 = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{u}(x, t) dx$$

O que implica que,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, t \geq 0,$$

pois $\Omega(t)$ é um aberto qualquer em \mathbb{R}^n . □

O que conclui a derivação da segunda equação de (1).

Além disso, em particular, temos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} dx = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{u}(x, t) dx$$

Isto nos motiva a seguinte lei fundamental:

Teorema A.5 (Teorema do Transporte de Reynolds). *Seja $\Phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde U é um aberto em \mathbb{R}^n , $\Phi \in C^1(U \times \mathbb{R})$ e $S(x, t)$ uma fonte, integrável em x para cada $t \geq 0$. Então, se $\mathbf{u}(x, t)$ é a velocidade do fluido, temos que:*

$$\Phi_t = S(x, t) - \nabla \cdot (\Phi(x, t)\mathbf{u}(x, t)) \tag{A.4}$$

Mais geralmente,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Phi(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} (\Phi_t(x, t) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \Phi)) dx \tag{A.5}$$

Demonstração. Começaremos mostrando a equação (A.4). Com efeito, seja $\delta > 0$, vale que

$$\int_{\Omega_0} \Phi(x, t + \delta t) dx = \int_{\Omega_0} \Phi(x, t) dx + \int_{\Omega_0} S(x, t) dx \delta t - \int_{\partial\Omega_0} \Phi(x, t) \mathbf{u} \cdot \vec{n}(x, t) d\sigma \delta t \quad (\text{A.6})$$

Onde $\vec{n}(x, t)$ é o vetor normal a superfície $d\sigma$ em cada ponto x .

$$(\text{A.6}) \Rightarrow \int_{\Omega_0} \frac{\Phi(x, t + \delta t) - \Phi(x, t)}{\delta t} dx = \int_{\Omega_0} S(x, t) dx - \int_{\partial\Omega_0} \Phi(x, t) \mathbf{u} \cdot \vec{n}(x, t) d\sigma$$

Então fazendo $\delta \searrow 0$ e usando o Teorema da Convergência Dominada, temos que:

$$\int_{\Omega_0} \Phi_t(x, t) dx = \int_{\Omega_0} S(x, t) dx - \int_{\partial\Omega_0} \Phi(x, t) \mathbf{u} \cdot \vec{n}(x, t) d\sigma \quad (\text{A.7})$$

Todavia, por Φ ser C^1 , vale que:

$$\int_{\Omega_0} \Phi_t(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \Phi(x, t) dx$$

Aplicando o Teorema da Divergência no último termo de (A.7), temos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \Phi(x, t) dx = \int_{\Omega_0} S(x, t) dx - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (\Phi(x, t) \cdot \mathbf{u}(x, t)) dx,$$

como Ω_0 é um aberto qualquer, vale que:

$$\Phi_t = S(x, t) - \nabla \cdot (\Phi(x, t) \cdot \mathbf{u}(x, t)),$$

o que concluí a demonstração de (A.4).

Agora mostraremos (A.5). Para tal fato, usaremos as técnicas que resultaram na proposição A.5. Logo, fazendo a mudança de variáveis $x = \mathcal{X}(\xi, t)$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \Phi(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \Phi(\mathcal{X}(\xi, t), t) \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi \\
&= \int_{\Omega_0} \Phi_t(\mathcal{X}(\xi, t), t) \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi \\
&\quad + \int_{\Omega_0} \sum_{j=1}^n \Phi_{\mathcal{X}_j}(\mathcal{X}(\xi, t), t) \cdot u_j(\mathcal{X}(\xi, t), t) \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi \\
&\quad + \int_{\Omega_0} \Phi(\mathcal{X}(\xi, t), t) (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathcal{X}(\xi, t), t)) \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi \\
&= \int_{\Omega_0} \Phi_t(\mathcal{X}(\xi, t), t) + \nabla \cdot (\Phi(\mathcal{X}(\xi, t), t) \cdot \mathbf{u}(\mathcal{X}(\xi, t), t)) \left| \frac{\partial(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)} \right| d\xi \\
&= \int_{\Omega(t)} (\Phi_t(x, t) + \nabla \cdot (\mathbf{u}(x, t) \cdot \Phi(x, t))) dx
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. □

Nota. Observe que, fazendo $\Phi = 1$ e $S = 0$, no teorema acima, obtém-se a mesma conclusão da proposição A.5.

A.2 Equação de continuidade, leis de Newton e tensores

Uma das interessantes aplicações do Teorema do Transporte de Reynolds, visto acima, é a equação de continuidade. Tal equação expressa a conservação de massa em um fluido. [Equação de continuidade] Seja $\rho(x, t)$ a densidade de massa do fluido no ponto x e no tempo t . Então, tem-se

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Se não há massa sendo acrescentada ou extraída, como a massa não pode ser destruída⁵, vale que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx = 0, \forall t > 0.$$

Logo, pelo teorema de Reynolds, tem-se que

$$\int_{\Omega(t)} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) dx = 0 \Rightarrow \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Se $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, então:

$$\rho_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0 \tag{A.8}$$

Demonstração. É fácil ver que,

$$0 = \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho_t + \underbrace{\rho (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \rho_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho$$

□

Portanto, se o escoamento é incompressível, temos de incluir (A.8) no sistema de equações (1). É aqui que mora uma sutil diferença entre "Escoamento incompressível" e "Fluido incompressível". Quando dizemos que o escoamento é incompressível, estamos nos referindo ao caso mais geral, onde temos que considerar a equação (A.8), quando dizemos que o fluido é incompressível significa que, além de $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, ρ é constante, não precisando incluir a equação (A.8) nas equações de Navier-Stokes.

Observe que, pela 2ª Lei de Newton para fluidos, temos que,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) \mathbf{u}(x, t) dx = F_{\Omega} + F_{\delta\Omega}, \tag{A.9}$$

Onde F_{Ω} e $F_{\delta\Omega}$ são, respectivamente, a força resultante volumétrica em $\Omega(t)$ e a força resultante de superfícies que atuam em $\Omega(t)$ através de $\partial\Omega(t)$, onde $\partial\Omega(t)$ representa a fronteira

⁵Só é possível termos acréscimo de massa nos termos de fronteira, pois é lá que pode-se injetar/retirar massa do sistema.

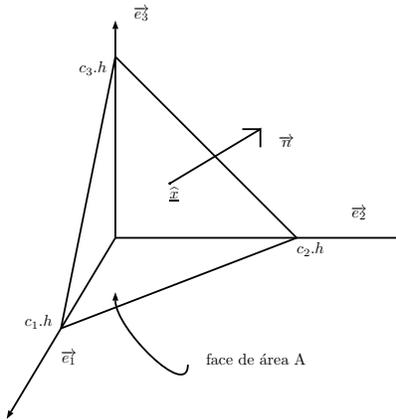


Figura A.2: Tetraedro

de $\Omega(t)$. Pondo, $F_\Omega = \int_{\Omega(t)} f(x,t)\rho(x,t)dx$, onde $f(x,t)$ representa uma espécie de força infinitesimal. Aqui surge um pequeno percalço: como descrever as forças de superfícies que atuam através de $\partial\Omega(t)$? Neste momento, então, introduziremos a noção vinda da mecânica de fluidos de tensores, por simplicidade estaremos supondo $n = 3$, o argumento é análogo para $n > 3$.

Escreveremos $\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \vec{n})$ para representar o tensor tensão (*stress tensor*), também chamado de tensor tensão de Cauchy, onde \vec{n} é o vetor normal a um elemento de superfície. Em outras palavras, o tensor tensão representa a influência que o fluido que está fora de $\Omega(t)$ exerce sobre o fluido que está dentro de $\Omega(t)$ sobre um elemento infinitesimal de área da fronteira.

Apresentaremos, a seguir, uma importante propriedade desse tensor.

Teorema A.6. $\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \vec{n})$ é linear em \vec{n} , i.e.,

$$\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \vec{n}) = \vec{a}_1(x,t)n_1 + \vec{a}_2(x,t)n_2 + \vec{a}_3(x,t)n_3 = \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \sigma_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Demonstração. Seja $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{t} > 0$, $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$ o vetor normal, isto é, $|\vec{n}|_2 = 1$. A estratégia, aqui, é imaginarmos que \hat{x} está sob a face infinitesimal de um tetraedro que denotaremos por A , como sugere a figura A.2. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os vetores da base canônica $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, formam o tetraedro, no sentido que $c_1.h, c_2.h$ e $c_3.h$ são os vértices do sólido, para certos c_1, c_2, c_3 e $h > 0$ arbitrário, como sugere a figura acima. Vamos denotar por A_i a área da face, cujo vetor normal é o vetor \vec{e}_i . Note que, por projeção,

$$\begin{cases} A_1 = n_1.A \\ A_2 = n_2.A \\ A_3 = n_3.A \end{cases}$$

Observe que a componente i -ésima da força total que irá atuar no fluido, dentro do tetraedro, através das quatro faces, é dada por:

$$A\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) + A_1\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1) + A_2\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2) + A_3\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)$$

Por (A.9), considerando sem perda de generalidade $F_\Omega = 0$, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) u_i(x, t) dx = A\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) + A_1\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1) + A_2\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2) + A_3\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)$$

Pelo Teorema A.6,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(t)} (\rho u_i)_t + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) dx = \\ & = A\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) + A_1\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1) + A_2\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2) + A_3\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3) = \\ & = A[\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) + n_1\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1) + n_2\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2) + n_3\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)] \end{aligned}$$

Daí, olhando para a ordem dos termos da equação, como A é da ordem de h^2 , para verificar a igualdade acima deve-se ter,

$$O(h^3) = O(h^3) + c.h^2[\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) + n_1\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1) + n_2\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2) + n_3\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)],$$

onde c é uma constante positiva.

dividindo por h^2 e fazendo $h \searrow 0$, temos:

$$0 = 0 + [\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) + n_1\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1) + n_2\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2) + n_3\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)]$$

Logo,

$$-\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) = \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1)n_1 + \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2)n_2 + \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)n_3$$

$$\Rightarrow \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; \vec{n}) = \left(-\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1) \right) n_1 + \left(-\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2) \right) n_2 + \left(-\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3) \right) n_3$$

O que conclui a demonstração □

Com base nisso, tem-se⁶: [3^a lei de Newton] Vale a igualdade,

$$\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{t}; -\vec{n}) = -\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{t}; \vec{n})$$

Demonstração.

$$-\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{n}) = -\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1)n_1 - \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2)n_2 - \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)n_3$$

O que implica que,

$$\Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{n}) = \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_1)n_1 + \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_2)n_2 + \Sigma_i(\hat{x}, \hat{t}; -\vec{e}_3)n_3 = -\Sigma_i(x, t; \vec{n})$$

O que conclui a demonstração □

Até agora, temos, pela equação (A.9) a seguinte lei:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) u_i(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} f_i(x, t) dx + \int_{\partial\Omega(t)} \Sigma_i(x, t; \vec{n}) d\nu \quad (\text{A.10})$$

Pelo teorema A.9, temos que $\Sigma_i(x, t; \vec{n}) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{i,j}(x, t) n_j(x, t)$. Outra propriedade interessante é a simetria do tensor $\sigma_{i,j}$.

⁶Aqui, optamos por derivar a 3^a lei de Newton, ao invés de supormos verdade e ,depois, provarmos que o tensor é linear, pois a 3^a Lei de Newton, embora verdadeira na física de fluidos, não vale em algumas situações físicas mais complicadas, veja [11].

Teorema A.7 (Cauchy). *O tensor tensão de Cauchy é simétrico, em outras palavras, $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}, \forall i, j = 1, 2, 3$ e para todo $x \in U$ (aberto e conexo em \mathbb{R}^3) e $\forall t \geq 0$.*

Demonstração. Tome $\hat{x} \in U$ e fixe $\hat{t} \geq 0$.

Para provar a simetria desse tensor, usa-se a conservação do momento angular. Como antes, vamos tomar um volume material $V(t)$, aberto em \mathbb{R}^3 com fronteira Lipschitz, em torno de $\hat{x} \in U$. Sabe-se, da física, que uma partícula com momento linear \vec{p} tem momento angular $\vec{q} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, onde $\vec{r} = x - \hat{x}$. Observe que, $|\vec{r}|_2 = O(h)$.

Portanto, o momento angular do volume material contendo \hat{x} é dado por:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x, t) \vec{r} \wedge \mathbf{u}(x, t) dx \Big|_{t=\hat{t}} = \overbrace{\int_{V(t)} \vec{r} \wedge \hat{f}(x, \hat{t}) dx}^{\text{torque da força } f} + \underbrace{\int_{\partial V(t)} \vec{r} \wedge \Sigma(x, \hat{t}; \vec{n}) d\nu}_{\text{torque de } \Sigma(x, t; \vec{n})}$$

Pelo Teorema A.6 (Teorema do transporte de Reynolds), temos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x, t) \vec{r} \wedge \mathbf{u}(x, t) dx = \underbrace{\int_{V(t)} (\rho \vec{r} \wedge \mathbf{u})_t + \sum_j u_j(x, \hat{t}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \vec{r} \wedge \mathbf{u}) dx}_{O(h^4)}$$

Temos, também, que $\int_{V(t)} \vec{r} \wedge \hat{f}(x, \hat{t}) dx = O(h^4)$

Além disso, tem-se

$$\int_{\partial V(t)} \vec{r} \wedge \Sigma(x, \hat{t}; \vec{n}) d\nu = O(h^3) + O(h^4), \text{ pois:}$$

Olhando para i -ésima componente, temos, pelo teorema A.9,

$$(\vec{r} \wedge \Sigma)_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} r_j \Sigma_k = \sum_{j,k,l} \epsilon_{i,j,k} (x_j - \hat{x}_j) \sigma_{k,l}(x, \hat{t}) n_l,$$

onde n_l é a l -ésima componente do vetor normal e $\epsilon_{i,j,k}$ é o símbolo de Levi-Civita⁷,

⁷Para maiores detalhes sobre este tensor e suas aplicações, veja [1]

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j,k) \text{ é uma permutação par} \\ -1, & \text{se } (i,j,k) \text{ é uma permutação ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial V} \vec{r} \wedge \Sigma d\nu \right)_i &= \int_{\partial V} (\vec{r} \wedge \Sigma)_i d\nu \\ &= \sum_{j,k,l} \epsilon_{i,j,k} \int_{\partial V} (x_j - \hat{x}_j) \sigma_{k,l}(x, \hat{t}) n_l d\nu \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Divergência de Gauss, tem-se que,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,l} \epsilon_{i,j,k} \int_{\partial V(\hat{t})} (x_j - \hat{x}_j) \sigma_{k,l}(x, \hat{t}) n_l d\nu &= \sum_{j,k,l} \epsilon_{i,j,k} \int_{V(\hat{t})} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[(x_j - \hat{x}_j) \sigma_{k,l}(x, \hat{t}) \right] dx \\ &= \sum_{j,k,l} \epsilon_{i,j,k} \int_{V(\hat{t})} \sigma_{k,l}(x, \hat{t}) + \underbrace{\sum_{j,k,l} \epsilon_{i,j,k} \int_{V(\hat{t})} \underbrace{(x_j - \hat{x}_j)}_{O(h)} \frac{\partial \sigma_{k,j}}{\partial x_l}(x, \hat{t}) dx}_{O(h^4)} \\ &= \sum_{j,k,l} \epsilon_{i,j,k} \sigma_{k,l}(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{4}{3} \pi h^3 + O(h^4) \end{aligned}$$

Portanto, dividindo tudo por h^3 e fazendo $h \rightarrow 0$, encontramos,

$$\sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} \sigma_{k,j}(\hat{x}, \hat{t}) = 0 \Leftrightarrow \sigma_{j,k} = \sigma_{k,j}$$

□

Note que, aplicando o teorema do divergente em A.10 no termo $\int_{\partial\Omega(t)} \Sigma_i(x, t; \vec{n}) d\nu$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) u_i(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} f_i(x, t) dx + \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} dx$$

Logo, como $\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) u_i(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} (\rho u_i)_t + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) dx$ conclui-se que:

$$(\rho u_i)_t + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) = f_i(x, t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}, \quad (\text{A.11})$$

A equação (A.11) é chamada de equação de movimento (*equation of motion*).

Agora precisamos descrever melhor o tensor $\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j}$, com esse intuito, Euler, propôs que:

$$\sigma_{i,j} = -p(x,t)\delta_{i,j},$$

onde $\delta_{i,j}$ é a delta de kronecker e p é a pressão estática do fluido. Substituindo, a expressão acima em (A.11) e considerando ρ constante, obtemos:

$$\rho(u_i)_t + \rho \nabla \cdot (u_i \mathbf{u}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i(x,t) \quad (\text{A.12})$$

para $i = 1, 2, 3$. As equações em (A.12) acima são chamadas de *equações de Euler para fluidos*.

A proposta de Euler não é tão boa, pois a pressão não é o principal agente sobre o fluido⁸. Experimentos mostram que a proposta de Euler funciona bem quando o movimento do escoamento é uniforme, i.e., se o gradiente de cada componente da velocidade é nulo. Portanto, precisamos descrever uma forma mais geral para o tensor $\sigma_{i,j}$. Para isso, é razoável supor, no mínimo, que $\sigma_{i,j} + p(x,t)\delta_{i,j}$ depende linearmente da matriz dos gradientes da velocidade.

Podemos intuir, então que o tensor deverá ter a seguinte forma:

$$\sigma_{i,j} = -p(x,t)\delta_{i,j} + \tau_{i,j}, \quad (\text{A.13})$$

onde $\tau_{i,j}$ é chamado de tensor tensão desviatório.

⁸Há um experimento físico, que mencionaremos a seguir, conhecido por experimento de Couette, que evidencia a imprecisão das equações de Euler, veja [16]. As equações de Euler modelam bem escoamentos invíscidos, para maiores detalhes, ver [20].

Chamaremos a matriz dos gradientes mencionada acima de T , em outras palavras,

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Estamos supondo que o fluido em questão é newtoniano, i.e., cada componente do tensor desviatório é proporcional ao gradiente da velocidade na direção normal a essa componente⁹. A constante de proporcionalidade é a viscosidade, que denotaremos por μ , tal fato é conhecido como a Lei de Newton para a viscosidade. Além disso, estamos considerando que o fluido é isotrópico, ou seja, suas propriedades físicas não dependem da direção em que está sendo considerada. A partir daí, há um fato, conhecido como hipótese de Stokes, que afirma que o tensor desviatório é, aproximadamente, uma expressão linear,

$$\tau_{i,j}(x, t) = \sum_{k,l}^3 a_{i,j,k,l}(x, t) \frac{\partial u_k}{\partial x_l}$$

Os coeficientes $a_{i,j,k,l}$ dependem principalmente da temperatura e da densidade. Como o fluido é isotrópico, $a_{i,j,k,l}$ é um tensor, de quarta ordem, isotrópico e, além disso, $a_{i,j,k,l}$ é simétrico em i e j , logo podemos escrever¹⁰ tal tensor como soma de produtos de tensores delta de Kronecker,

$$a_{i,j,k,l} = c_1 \delta_{i,j} \delta_{k,l} + c_2 \delta_{i,k} \delta_{j,l} + c_3 \delta_{i,l} \delta_{j,k},$$

⁹Há vários exemplos de fluidos não newtonianos, a saber, sangue, *ketchup*, amido de milho, petróleo, etc.

¹⁰Para maiores detalhes, a respeito da teoria de tensores, veja [1] e [12].

logo, podemos escrever,

$$a_{i,j,k,l} = c_1 \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \frac{1}{2}(c_2 + c_3) \left(\delta_{i,k} \delta_{j,l} + \delta_{i,l} \delta_{j,k} \right) + \frac{1}{2}(c_2 - c_3) \left(\delta_{i,k} \delta_{j,l} - \delta_{i,l} \delta_{j,k} \right)$$

Combinando as expressões acima e substituindo em (A.13), obtém-se,

$$\sigma_{i,j} = -p(x,t) \delta_{i,j} + c_1 \delta_{i,j} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + (c_2 + c_3) e_{i,j} + (c_2 - c_3) \Omega_{i,j}$$

Onde,

$$e_{i,j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

e, de maneira análoga:

$$\Omega_{i,j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$e_{i,j}$ e $\Omega_{i,j}$ são, respectivamente, o tensor simétrico e anti-simétrico.

Observe que, pelo teorema A.11(para demonstrá-lo, só foi usada a conservação do momento angular), o tensor $\sigma_{i,j}$ é simétrico, portanto, não deve haver contribuição do tensor anti-simétrico, i.e., deve-se ter $c_2 = c_3$. Há um experimento físico, ao qual citaremos abaixo, que também contribui para a eliminação da parte anti-simétrica.

Experimento de Couette. Imaginemos que há dois cilindros concêntricos com o fluido entre eles. Começamos, então, rotacionando lentamente em velocidade angular constante o cilindro interno e o outro cilindro deixamos livre, com isso o cilindro de fora começa a girar. Após algum tempo, o fluido e o cilindro de fora movem-se com a mesma velocidade do cilindro interno. Logo o movimento se comporta como o movimento de um corpo rígido. Como, só temos duas dimensões a nos preocupar, é fácil ver que, $\mathbf{u} = (-\omega x_2, \omega x_1, 0)$, portanto, devemos voltar a nossa atenção para a matriz T , ou, interpretando de outra maneira, ao tensor $\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$. O objetivo é simetrizar¹¹ a matriz T .

¹¹Fazendo $T = T^* + T^{**}$, onde $T^* = \frac{T + T^T}{2}$ e $T^{**} = \frac{T - T^T}{2}$

Observe que, para o experimento de Couette, $[e_{i,j}] = [0]_{3 \times 3}$ e, além disso,

$$\Omega_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Em outras palavras, a matriz correspondente a rotação de um sólido é anti-simétrica. Portanto, o experimento de Couette sugere que $\sigma_{i,j}$ depende só da parte simétrica de \mathbf{T} .

Com esses dois indícios citados acima, temos que,

$$\sigma_{i,j} = -p(x,t)\delta_{i,j} + c_1 \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{i,j} + 2c_2 e_{i,j}(x,t)$$

Note que, a descrição do tensor $\sigma_{i,j}$ acima, vale para fluidos compressíveis. Logo usando incompressibilidade ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), obtemos,

$$\sigma_{i,j} = -p(x,t)\delta_{i,j} + 2\mu e_{i,j}(x,t),$$

Onde, como foi dito antes, μ é a viscosidade do fluido. Logo, supondo ρ constante, a equação A.11, na forma vetorial, se torna

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + F,$$

pois $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

Note que escrevemos p , por simplicidade, mas na verdade deveríamos escrever $\frac{p}{\rho}$. Esta nova pressão p é dita pressão cinemática e $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ é chamada de viscosidade cinemática. Considerando o termo forçante $F = 0$, obtemos o resultado desejado.

Apêndice B O ESPAÇO DE SOBOLEV HOMOGÊNEO \dot{H}^S

Nesta seção, daremos uma rápida noção dos espaços que aqui foram considerados, a começar pelo espaço de Lebesgue L^p que é o espaço "trivial" de Sobolev que, como sabemos, é o espaço das funções f tal que, $\int |f|^p dx < \infty$, para $p \in [1, \infty)$. No caso $p = \infty$, a norma usada é a norma do sup, ou seja, $\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C \in \mathbb{R}^n : |f| < C\}$ e a medida do conjunto $\{x : |f(x)| > C\}$ é nula. Para um estudo mais construtivo e detalhado desses espaços e uma boa abordagem a respeito da sua estrutura veja [2].

A partir daí, podemos introduzir os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ (que também denotaremos ao longo de nosso texto por $H^m(\Omega)$ quando $p = 2$), onde Ω é um aberto em \mathbb{R}^n , significando que a função que pertence a esse espaço e todas as suas derivadas (fracas) de até ordem m pertencem a L^p , onde $m \geq 1$ inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Tendo isso, introduziremos o espaço de Sobolev homogêneo \dot{H}^m , Os espaços homogêneos de Sobolev $\dot{W}^{m,p}$ (similarmente \dot{H}^m) é o espaço das funções m vezes fracamente diferenciáveis f tal que $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$, em outras palavras,

$$\|f\|_{\dot{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

para α multi-índice.

Podemos ainda generalizar esse conceito via transformada de Fourier,

Dado $s > 0$, denotaremos por \dot{H}^s , o espaço das funções f , tais que,

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

onde $\hat{f}(\xi)$ é a Transformada de Fourier abaixo,

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \mathbf{u}(x) dx.$$

Esses espaços homogêneos preservam boas propriedades de escala, o que motiva seu estudo.

Apêndice C FERRAMENTAS DE ANÁLISE

Faremos aqui, uma pequena reunião de resultados em análise que são úteis para que o leitor tenha um melhor entendimento acerca do que está sendo desenvolvido no texto.

Lema C.1. *Se $f \in L^p(E)$, para $1 \leq p \leq \infty$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $H \subset E$ e*

$$\mu(H) < \delta \Rightarrow \int_H |f|^p d\mu < \epsilon$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existem conjuntos $E_n \subset E$ e $\epsilon > 0$ tal que

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ e } \int_{E_n} |f|^p d\mu \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Logo, $F_{n+1} \subset F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(F_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$, com $\int_{F_n} |f|^p d\mu \geq \epsilon$. Portanto, temos que,

$$\mu(\bigcap_n F_n) = \lim_n \mu(F_n) = 0$$

e, como a integral é uma medida,

$$\epsilon \leq \lim_n \int_{F_n} |f|^p d\mu = \int_{\bigcap_n F_n} |f|^p d\mu = 0$$

Absurdo. □

Lema C.2. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para cada $p \leq q \leq \infty$, e, ainda,*

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}}$$

Lema C.3. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e, além disso,*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Lema C.4. Sendo $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$, para $s_1 > 0$, então, tem-se, $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, para cada $0 < s < s_1$, com

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{s_1}} \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{s_1}}$$

Para maiores detalhes sobre essas normas, veja Apêndice B.

Demonstração. De fato, basta notar que, pela desigualdade de Hölder, para $1 \leq p, q \leq \infty$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{q}} d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2sp} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

logo, deve-se ter,

$$2sp = 2s_1$$

O que implica que,

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{s_1}} \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{s_1}}$$

□

As demonstrações dos lemas aqui omitidos podem ser encontradas em [9], com exceção do lema C.1. Vale, ainda o caso mais geral:

Lema C.5. Sendo $f \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, para $s_1, s_2 > 0$, então, tem-se, $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$, para cada $s_1 < s < s_2$, com

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\theta}{s_1}} \|f\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\frac{s}{s_2}}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$, e $\frac{1}{s} = \theta \frac{1}{s_1} + (1-\theta) \frac{1}{s_2}$

Demonstração. Observe que, pela desigualdade de Hölder, para $1 \leq p, q \leq \infty$, tem-se,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\theta 2s} |\xi|^{(1-\theta)2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{q}} d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\theta 2sp} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{(1-\theta)2sq} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

logo, deve-se ter $\theta ps = s_1$ e $(1-\theta)qs = s_2$, o que implica que,

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\theta \cdot s}{s_1}} \|f\|_{\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\frac{s}{s_2}}$$

com $0 \leq \theta \leq 1$, e $\frac{1}{s} = \theta \frac{1}{s_1} + (1-\theta) \frac{1}{s_2}$ □

Lema C.6. Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $D^n f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|f\|_{L^\infty} \leq K(n) \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|D^n f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

A demonstração do lema acima encontra-se em [6].

Lema C.7. Sejam $f \in C^0([t_0, T])$ e $w \in L^1([t_0, T])$, com $f \geq 0$ e $w \geq 0$ tal que

$$f(t) \leq A + \int_{t_0}^t w(s) f(s) ds,$$

para todo $t \in [t_0, T]$. Então,

$$f(t) \leq A e^{\int_{t_0}^t w(s) ds},$$

onde A é uma constante.

Demonstração. Note que,

$$\frac{f(t)}{A + \int_{t_0}^t w(s) f(s) ds} \leq 1$$

definindo $U(t) = A + \int_{t_0}^t w(s) f(s) ds$, tem-se,

$$\frac{U'}{U} \leq w(s)$$

donde, integrando de t_0 a t , segue o resultado. □

Referências Bibliográficas

- [1] ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics* Prentice-Hall, 1962 (reprinted by Dover, 1989).
- [2] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure* Wiley Classics Library Edition, 1995.
- [3] BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluids dynamics* Cambridge University Press, 2000.
- [4] BEIRÃO DA VEIGA, H. *Existence and asymptotic behaviour for strong solutions of the Navier-Stokes equations on the whole space* Indiana Univ. Math. J. 36 (1987), 149-166.
- [5] BRAZ E SILVA, P. ; SCHÜTZ, L. ; ZINGANO, P. R. *On some energy in equalities and supnorm estimates for advection–diffusion equations in \mathbb{R}^n* , Nonlinear Anal. **93** (2013), 90-96.
- [6] FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations* New York, 1969.
- [7] FOLLAND, G. B. *Introduction to Partial Differential Equation* Princeton University Press, 1995
- [8] GALDI, G. P. *An Introduction to the Navier-Stokes initial-boundary problem* in: G. P. Galdi, J. G. Heywood and Rannacher(Eds.), *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Dynamics*, Birkhauser, Basel, 2000, pp. 1-70.
- [9] GUADAGNIN, M. A. *Alguns Resultados para a Equação do Calor e Equações de Advecção-Difusão* (Dissertação de mestrado)UFRGS, Porto Alegre, 2005.
- [10] GUTERRES, R. H. *Operadores integrais singulares e aplicações em EDPs* (Dissertação de mestrado)UFRGS, Porto Alegre, 2014.

- [11] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1962
- [12] JEFFREYS, H. *Cartesian Tensors*. Cambridge University Press, 1931
- [13] JOHN, F. *Ordinary Differential Equations* CIMS Notes, NYU, New York, 1965
- [14] KAJIKIYA, R. ; MIYAKAWA, T. *On the L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n* , Math. Z. 192 (1986), 135-148.
- [15] KATO, T. *Strong L^p - solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^m with applications to weak solutions* Math. Z. 187 (1984), 471-480.
- [16] KREISS, H.-O. ; LORENZ, J. *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. SIAM, 2003.
- [17] KREISS, H.-O. ; HAGSTROM, T. ; LORENZ, L. ; ZINGANO, P. R. *Decay in time of the solutions of the Navier-Stokes equations for incompressible flows*, unpublished note, University of New Mexico, Albuquerque, NM, 2002.
- [18] KREISS, H.-O. ; HAGSTROM, T. ; LORENZ, L. ; ZINGANO, P. R. *Decay in time of incompressible flows*, J. Math. Fluid Mech. **5** (2003), 231-244.
- [19] LERAY, J. *Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace* Acta Math. 63 (1934), 193-248.
- [20] MAJDA, A. *smooth solution for the equations of compressible and incompressible fluid flow*. In: H. Beirao da Veiga(Ed.), Fluid Dynamics: Varenna 1982, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1047, Springer, Berlin, 1984, pp. 75-126.
- [21] MASUDA, K. *Weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Tôhoku Math. Journal **36** (1984), 623-646.
- [22] MOURA, J. A. *Decaimento no tempo das soluções das equações de Navier-Stokes para fluxos incompressíveis* (Dissertação de mestrado) Programa de Pós-Graduação

em Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Outubro, 2013 (disponível em: <http://www.btdt.ufpe.br/btdt>).

- [23] SCHONBEK, M. E. ; WIEGNER, M. *On the decay of higher-order norms of the solutions of the Navier-Stokes equations* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 126A, 1996, 677-685.
- [24] SCHÜTZ, L. *Alguns resultados para equações de advecção-difusão, com aplicações em Navier-Stokes*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Matemática (<http://www.mat.ufrgs.br/~ppgmat>), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Junho 2008 (Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/13714>).
- [25] SCHÜTZ, L. ; ZINGANO, J. P. ; Zingano, P. R. *On the supnorm from of Leray's conjecture for the incompressible Navier-Stokes equations* (submetido) 2014.
- [26] TAYLOR, M.E. *Partial Differential Equations* (2nd ed.), Vol. III, Springer, New York, 2011.
- [27] WIEGNER, M. *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on \mathbb{R}^n* J. London Math. Soc. 35(1987), 303-313.
- [28] WIEGNER, M. *Decay and stability in L^p for strong solutions of the Cauchy problem for Navier-Stokes equations* In: J. G. Heywood, K. Masuda, R. Rautmann & V. Solonnikov (Eds.), *The Navier-Stokes equations: Theory and Numerical Methods*, Lecture Notes in Mathematics, 1431 (1990), pp. 95-99.