

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CASCAS COMPOSTAS LAMINADAS COM
ATUADOR PIEZELÉTRICO PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÕES

por

Eduardo Padoin

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2014

OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA DE CASCAS COMPOSTAS LAMINADAS COM
ATUADOR PIEZELÉTRICO PARA O CONTROLE DE VIBRAÇÕES

por

Eduardo Padoin

Mestre em Modelagem Matemática

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo André Perondi

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade (USP – São Carlos - Brasil)

Prof. Dr. Valner João Brusamarello (PPGEE – UFRGS / Porto Alegre – Brasil)

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz (PROMEC – UFRGS / Porto Alegre – Brasil)

Prof. Dr. Rogério José Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 18, Dezembro de 2014.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

A minha família, em especial meus pais, Aido e Ivone Padoin, minha irmã Daniela e minha namorada Rochelle pelo incentivo e apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca, ao co-orientador Prof. Dr. Eduardo André Perondi e ao orientador Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos da Universidade Técnica da Dinamarca, pelos conhecimentos transmitidos com paciência e amizade ao longo de todo o período de desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus colegas do doutorado e do Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) pela amizade e parceria nos estudos, em especial ao colega Odair Menuzzi.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul e a Universidade Técnica da Dinamarca por tudo que me ofereceu. A CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro, e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários, docentes e discentes.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia de otimização topológica de atuadores piezelétricos em estruturas compostas laminada com o objetivo de atenuar as vibrações estruturais induzidas por excitações externas. Para isso, utiliza-se técnicas de controle ótimo, como o regulador linear quadrático (LQR) e o controlador linear quadrático gaussiano (LQG). Os estados não mensuráveis são estimados através do uso de observadores de estados de ordem completa, usando o filtro de Kalman para a escolha ótima da matriz de ganhos do observador de estados. O problema de otimização topológica é formulado para a localização ótima do atuador piezelétrico composto MFC (*Macro Fiber Composite*) na camada ativa da placa, determinando a localização mais vantajosa do material MFC através da maximização do índice de controlabilidade. Para o modelo estrutural, é proposto neste trabalho um modelo para a interação entre o atuador MFC e a estrutura. Assume-se que o MFC é uma das lâminas de material ortotrópico que sofre uma deformação inicial a partir da aplicação de um potencial elétrico e que essa deformação terá efeitos sobre o restante da estrutura. Dessa maneira, não é necessário modelar o campo elétrico gerado através dos eletrodos, uma vez que o efeito eletromecânico é considerado analiticamente. A rigidez e a massa do atuador MFC são considerados no modelo estrutural. Os resultados numéricos mostram que o modelo estrutural proposto para representar a interação entre o atuador MFC e a estrutura apresenta boa concordância com resultados experimentais e numéricos encontrados. Além disso, os resultados mostram que a partir do posicionamento ótimo do atuador MFC na estrutura, a técnica de controle implementada permite atenuar as vibrações estruturais. As simulações para uma força de um degrau unitário permitem concluir que a estratégia de controle usando o controlador LQG apresenta melhor desempenho em termos de tempo de assentamento, sobre resposta, amortecimento e sinal de controle, quando comparado com o controlador LQR.

Palavras-chave: Otimização topológica, atuador piezelétrico, método de elementos finitos, controle ótimo LQR e LQG, material composto laminado.

ABSTRACT

This work presents a topologic optimization methodology of piezoelectric actuators in laminated composite structures with the objective of controlling external perturbation induced by structural vibrations. The Linear Quadratic Regulator (LQR) and Linear Quadratic Gaussian (LQG) optimal control techniques are used. The states are estimated through of the full order state observers, using the Kalman filter to the observer gain matrix. The topology optimization is formulated to find the optimum localization of the Macro Fiber Composite (MFC) active piezoelectric patch, determining the most advantageous location of the MFC, through of the maximization of the controllability index. For the structural model, this work proposes a simplified MFC/structure interaction model. It is assumed that the MFC is one of the orthotropic material layers which has an initial strain arising from the application of an electric potential; this strain acts on the remainder of the structure. This way, modeling the electromechanical interaction between the piezoelectric material and the electric field is unnecessary because this effect is considered analytically. Both the stiffness and the mass of the MFC are taken into account in the structural model. Numerical results show that proposed MFC-structure interaction model presents good agreement with experiments and numerical simulations of models that uses the electromechanical effect. Actuator location optimization results show that the technique implemented improves the structural vibration damping. The response simulations to an unit step force allows to conclude that the control strategy using the LQG controller presents better performance in terms of settling time, overshoot, damping and control signal energy when compared to the LQR controller

Keywords: Topologic optimization, macro fiber composite, LQR and LQG optimal control, laminated composite material.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação	1
1.2 Apresentação da Proposta e Contribuição Científica.	2
1.3 Material Piezelétrico	4
1.3.1 Equações fundamentais	12
1.4 Materiais Compostos	14
1.5 Estruturas Inteligentes.....	17
1.6 Objetivos	20
1.7 Organização do Trabalho.....	21
2. MODELAGEM ESTRUTURAL DE CASCA COMPOSTA LAMINADA UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	23
2.1 Elasticidade Linear Infinitesimal	23
2.2 Método dos Elementos Finitos	25
2.2.1 Elemento Finito de Casca laminada	27
2.2.2 Campo de deslocamento do Elemento de Casca.....	30
2.3 Comportamento Macromecânico de uma Lâmina.....	32
2.3.1 Estado Plano de Tensões	34
2.4 Transformação de coordenadas.....	35
2.4.1 Sistema Coordenado Local.....	36
2.5 Teoria de laminação de Primeira ordem	39
2.6 Matriz de Rigidez para cascas laminadas	43
2.7 Matriz de Massa.....	45
2.8 Vetor de Forças	45
2.8.1 Vetor de Forças distribuídas devido ao MFC.....	46
3. CONTROLE ESTRUTURAL	49
3.1 Introdução	49
3.2 Modelo Estrutural Modal.....	54
3.2.1 Solução do problema Modal	54
3.2.2 Modelo Modal	56
3.2.3 Modelo Modal em Espaço de estados	58
3.3 Teoria do Controlador LQR.....	60

3.4 Teoria do Controlador LQG	62
3.5 Controlabilidade e Observabilidade.....	65
3.6 Observador de Estados.....	69
3.6.1 Observador de Ordem Plena	69
3.7 Metodologia para determinar valores para as matrizes de ponderação Q e R.	71
3.7.1 Metodologia para matrizes Q e R.....	72
4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	76
4.1 Introdução	76
4.2 Breve histórico da Otimização Estrutural	78
4.3 Conceitos Básicos de Otimização.....	80
4.3.1 Variáveis de Projeto	81
4.3.2 Função Objetivo	82
4.3.3 Restrições de Projeto.....	82
4.3.4 Formulação do Problema de Otimização	84
4.3.5 Domínio Viável e Inviável	84
4.4 Conceitos teóricos da otimização topológica.....	85
4.4.1 Domínio Fixo Estendido	86
4.4.2 Modelo Material.....	86
4.4.3 Método das densidades	88
4.5 Aspectos Numéricos na Otimização Topológica.....	89
4.5.1 Dependência da Malha	89
4.5.2 Instabilidade de tabuleiro	91
5. FORMULAÇÃO DA ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADOR PIEZELÉTRICO.....	93
5.1 Função Objetivo e Restrições	96
5.1.1 Modelo do material	96
5.1.2 Projeto de otimização topológica para redução de vibrações	97
5.2 Resolução dos problemas de otimização via Programação Linear Sequencial	98
5.2.1 Programação Matemática.....	99
5.2.2 Programação Linear	100
5.2.3 Programação Linear Sequencial.....	100
5.3 Análises de sensibilidade	103
5.3.1 Sensibilidade do modelo material	104

5.3.2 Sensibilidade do Gramiano de controlabilidade.....	104
5.3.3 Sensibilidade de autovalores e autovetores.....	106
5.3.4 Sensibilidade do volume	109
6. RESULTADOS	110
6.1 Topologias Ótimas	111
6.1.1 Topologias ótimas para o atuador MFC na camada ativa.	112
6.1.2 Topologias ótimas para o atuador MFC com restrição de volume estrutural. ...	118
6.2 Controle estrutural utilizando o controlador LQR e LQG.....	123
6.2.1 Resposta das estruturas otimizadas	124
6.3 Topologias ótimas do atuador MFC na camada ativa de uma casca laminada.....	135
7. CONCLUSÕES.....	142
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	145
APÊNDICE A	159
APÊNDICE B.....	160
APÊNDICE C	169
ANEXO I.....	175
ANEXO II.....	176
ANEXO III.....	178

LISTA DE SÍMBOLOS

\ddot{u}_i	Vetor de aceleração
$\ddot{\mathbf{u}}^e$	Vetor de aceleração nodal
Δ_1, Δ_2	Magnitude da atualização das variáveis de projeto de 1 passo anterior e de 2 passos anteriores, respectivamente
h_k	Espessura da k -ésima lâmina
$h_k(x)$	Conjunto representando as k restrições de desigualdade
Ω_d	Domínio desconhecido
B_0	Matriz de entrada de um sistema de controle
B_m	Matriz de entradas modais
B_ϕ	Matriz de entradas elétricas
C_0	Tensor do material base [N/m^2]
C_{ij}^{dpl}	Tensor de 4° ordem das relações constitutivas na direção principal do laminado [N/m^2]
C_{ijkl}	Tensor de 4° ordem das relações constitutivas homogeneizadas [N/m^2]
C_{ij}^{slc}	Tensor de 4° ordem das relações constitutivas no sistema local [N/m^2]
D_m	Matriz de amortecimento modal
E_i	Módulo de elasticidade na direção i [Gpa]
G_i	Módulo de cisalhamento transversal da direção i
$ J $	Determinante da matriz Jacobiana
K_m	Matriz de rigidez modal
M_m	Matriz de massa modal
V_a	Fração do volume
a^{inf}, a^{sup}	Limites laterais para a programação linear
$e_1^{sgl}, e_2^{sgl}, e_3^{sgl}$	Coordenadas do sistema global
$e_x^{dpl}, e_y^{dpl}, e_z^{dpl}$	Coordenadas do sistema da direção principal do laminado
$e_x^{slc}, e_y^{slc}, e_z^{slc}$	Coordenadas do sistema dado sistema local da casca
f_a	Função objetivo de controle
f_m	Matriz de forças modais
$g_j(x)$	Conjunto representando as j restrições de igualdade
l_i	Tamanho do limite móvel da i -ésima variável de projeto

t_i	Espessura total do laminado no nó i
u_c	Vetor de entradas mecânica
u_i, v_i, w_i	Deslocamentos do nó i
v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}	Versores nodais
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
v_s	Ruído dos valores medidos
w_a	Ruído da Modelagem do sistema
\hat{x}	Vetor de estado estimado de um sistema
x_j	Coordenada de um ponto qualquer no corpo
C_1	Matriz de Rigidez extensional
C_2	Matriz de rigidez do acoplamento extensão-flexão
C_3	Matriz de rigidez flexional
D_e	Vetor Deslocamento elétrico
F_1, F_2	Matrizes deslocamento-deformação para o modelo de Kumar
K^e	Matriz de rigidez de um elemento
M^e	Matriz de massa de um elemento
Q_{w_a}	Matriz de covariância do ruído da dinâmica
\bar{Q}	Matriz constitutiva escrita no sistema global do laminado [N/m^2]
R_{v_s}	Matriz de covariância do ruído das medidas
T_1	Matriz de rotação no plano
T_2	Matriz de rotação no espaço
W_c	Gramiano de controlabilidade
W_o	Gramiano de observabilidade
f_b	Vetor força de corpo
f_c	Vetor forças concentradas global
f_d	Vetor força distribuída
f^e	Vetor de força de um elemento
u_p	Vetor de deslocamentos prescrito
u^e	Deslocamentos Nodais aproximados
Ω_t	Região de aplicação das condições de contorno de Neumann [m^2]
Ω_u	Região de aplicação das condições de contorno de Dirichlet [m^2]
α_{1i}, α_{2i}	Rotação do nó i em torno do eixo 2 e do eixo 1, respectivamente [rad]

γ_0	Peso específico do material base
ζ_i	Razão de amortecimento relativo modo de vibração i
$\ddot{\eta}$	Vetor de aceleração modal
$\dot{\eta}$	Vetor de velocidade modal
ρ_a	Variável de projeto do controle
ρ_e	Variável de projeto estrutural
σ_{ij}	Componente do tensor de Cauchy no plano i na direção j
ω_i	Frequência natural relativa ao modo i [rad/s]
ε^0	Vetor deformação no plano médio da placa
ε_{MFC}	Deformação do atuador MFC
1,2,3	Sistema de coordenadas global
h	Espessura de cada lâmina [m]
Ψ	Matriz de autovetores
A	Matriz do sistema em espaço de estados
B	Matriz de entradas em espaço de estados
C	Matriz de saída em espaço de estados
J	Índice quadrático de um sistema LQR
K	Matriz de ganho do observador de estados
K_d	Ganho Derivativo
K_p	Ganho Proporcional
V	Volume de um corpo [m^3]
Z	Matriz dos coeficientes de amortecimento modais
$f(x)$	Função objetivo
nl	Número de Lâminas que compõem o laminado
p	Expoente de penalização do tensor constitutivo
$p1, pm$	Expoentes de penalização para o modelo do material
q	Variável penalização da função objetivo
$s(\rho)$	Função objetivo penalizada
t	Tempo [s]
x, y, z	Sistema de coordenadas da lâmina
y	Vetor de saídas de um sistema de controle
C	Matriz com as relações constitutivas

<i>D</i>	Matriz de Amortecimento
<i>E</i>	Vetor Campo elétrico
<i>F</i>	Matriz deslocamento-deformação
<i>G</i>	Matriz de ganhos para realimentação dos estados
<i>I</i>	Matriz identidade
<i>J</i>	Matriz Jacobiana
<i>K</i>	Matriz de Rigidez
<i>M</i>	Matriz de Massa
<i>N</i>	Funções de forma para deslocamentos
<i>P</i>	Solução da equação de Riccati
<i>Q</i>	Matriz positiva semidefinida de pesos para as variáveis de estado
<i>R</i>	Matriz positiva definida de pesos para as entradas de controle
<i>S</i>	Matriz de flexibilidade
<i>S</i>	Vetor Deformação mecânica
<i>T</i>	Matriz de transformação
<i>b</i>	Força de corpo Aplicada [N/m^3]
<i>e</i>	Matriz das constantes piezelétricas
<i>e</i>	Vetor de erros do observador
<i>f</i>	Vetor de força global
<i>g</i>	Vetor de aceleração de força de corpo
<i>n</i>	Vetor normal à superfície de aplicação de uma força
<i>t</i>	Vetor carregamento aplicado
<i>u</i>	Vetor de deslocamento
<i>x</i>	Vetor de estados de um sistema
<i>C</i>	Matriz de controlabilidade
<i>O</i>	Matriz de observabilidade
Ω	Matriz das frequências naturais
Ω	Matriz diagonal das frequências naturais
Ω	Domínio ocupado por um corpo [m^3]
α	Parâmetro de penalização da função objetivo
γ	Massa específica do material [kg/m^3]
δu_i	Deslocamento virtual do ponto i

$\delta\varepsilon_{ij}$	Deslocamento virtual do ponto i na direção j
ε	Campo de deformações
λ	Autovalor do problema modal
ξ, η, ζ	Sistema de coordenadas do elemento isoparamétrico linear
ρ	Variável de projeto do problema de otimização topológica
$\chi(x)$	Função discreta que caracteriza a estrutura a ser otimizada
ψ	Autovetor do problema modal
ϕ	Potencial elétrico
ε	Constante dielétrica
η	Vetor de deslocamento modal
κ	Vetor da curvatura da placa
σ	Vetor de Tensão mecânica

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AFC	Active Fiber Composite
CLT	Classical Lamination Theory
EPT	Estado Plano de Tensões
FSDT	First Order Deformation Laminated Theory
GA	Genetic Algorithms
LaRC	Langley Research Center
LP	Linear Programming
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFC	Macro Fiber Composite
MIMO	Multiple Input and Multiple Output
MOT	Método de Otimização Topológica
SAFC	Shear Actuated Fiber Composite
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
SLP	Sequential Linear Programming

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Representação da conversão de energia no efeito piezelétrico.	4
Figura 1.2 – Polarização macroscópica induzida em um piezelétrico cerâmico policristalino. [Nagamine, 2001].	5
Figura 1.3 – Reação de uma cerâmica piezelétrica submetida a um estímulo, [Moheimani e Fleming, 2006].	6
Figura 1.4 – Diagrama esquemático da ordenação das diferentes camadas que compõem o MFC [Kovalovs et al., 2007].	7
Figura 1.5 – Campo Elétrico e polarização para o MFC modo d_{33} (a) e modo d_{31} (b) [Schönecker et al., 2006].	8
Figura 1.6 – Esquema dos eletrodos e polarização do MFC no modo d_{33} [Schröck et al., 2011a].	9
Figura 1.7 – Constituição de um laminado.....	14
Figura 1.8 – Designação de um laminado	15
Figura 1.9 – Modelo esquemático para estruturas inteligentes [Crawley, 1994].	18
Figura 2.1 – Problema de Elasticidade Linear Infinitesimal.	24
Figura 2.2 – Representação das hipóteses cinemática (a) e mecânica (b) em coordenadas genéricas (1, 2, 3).	28
Figura 2.3 – Elemento Sólido Tridimensional e Elemento de Ahmad.....	29
Figura 2.4 – Elemento finito quadrilátero linear isoparamétrico de 8 nós.	29
Figura 2.5 – Sistemas coordenados utilizados no trabalho.....	35
Figura 2.6 – Geometria (a) não deformada e (b) deformada de uma placa na hipótese da teoria da primeira ordem FSDT [Reddy, 1997].	40
Figura 3.1 – Sistema de controle ótimo.....	61
Figura 3.2 – Controlador LQG, Princípio da separação.	64
Figura 3.3 – Diagrama de blocos da metodologia para encontrar as matrizes (Q e R)	73
Figura 3.4 – Mapa com a relação de compromisso entre o sinal de controle (Tensão elétrica) e o tempo de assentamento do sistema.....	74
Figura 4.1 – Diferentes formas de otimização estrutural: (a) otimização paramétrica, (b) otimização de forma e (c) otimização topológica.....	76
Figura 4.2 – Regiões de Domínio viável e inviável	84
Figura 4.3 – Conceito de mínimo local e global	85

Figura 4.4 – Representação do domínio desconhecido Ω_d contido no domínio fixo estendido Ω .	86
Figura 4.5 – Definição do domínio de projeto.	87
Figura 4.6 – Representação da escala de cinza.	88
Figura 4.7 – Representação de um exemplo de solução com dependência de malha.	90
Figura 4.8 – Representação de um resultado com padrão de instabilidade de tabuleiro de xadrez [Bendsøe e Sigmund, 2003].	91
Figura 5.1 – Estrutura a ser otimizada, com camada superior, intermediária e inferior.	93
Figura 5.2 – Processo Sequencial para achar o ponto ótimo em SLP [De Leon, 2012].	102
Figura 6.1 – Placa plana composta laminada em balanço.	110
Figura 6.2 – Modos de vibração da placa plana [0,90] com o MFC.	111
Figura 6.3 – Topologias ótimas para o Caso1 com um modo de vibração para três distribuições iniciais diferentes.	113
Figura 6.4 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 1a (linha preta), Caso 1b (linha verde), Caso 1c (linha azul) e Controlabilidade via otimização paramétrica (linha tracejada vermelha).	114
Figura 6.5 – Topologia ótima para o Caso 2 (controlando os dois primeiros modos de vibração).	114
Figura 6.6 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 2 (controlando os dois primeiros modos de vibração) e a controlabilidade via otimização paramétrica.	115
Figura 6.7 – Topologia ótima para o Caso 2 (controlando os quatro primeiros modos de vibração).	116
Figura 6.8 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 3 (controlando os quatro primeiros modos de vibração) e a controlabilidade via otimização paramétrica.	117
Figura 6.9 – Topologia ótima para o Caso 4 (um modo de vibração). a) Lâmina ativa da estrutura, b) Lâmina inferior da estrutura.	118
Figura 6.10 - Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 4 (um modo de vibração).	119
Figura 6.11 – Topologia ótima para o Caso 5 (controlando os dois primeiros modos de vibração). a) Lâmina ativa da estrutura, b) Lâmina inferior da estrutura.	120
Figura 6.12 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 5 (controlando os dois primeiros modos de vibração).	121

Figura 6.13 – Topologia ótima para o Caso 6 (controlando os quatro primeiros modos de vibração). a) Lâmina ativa da estrutura, b) Lâmina inferior da estrutura.....	121
Figura 6.14 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 6 (controlando os quatro primeiros modos de vibração).	122
Figura 6.15 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (Volts) para o Caso 1c.	125
Figura 6.16 – Diagrama de bode para o Caso 1 (c) (um modo de vibração).....	126
Figura 6.17 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 2 (dois primeiros modos de vibração).	127
Figura 6.18 – Diagrama de bode para o Caso 2 (dois modos de vibração).	128
Figura 6.19 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 3 (quatro primeiros modos de vibração).	129
Figura 6.20 – Diagrama de bode para o Caso 3 (quatro modos de vibração).	130
Figura 6.21 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 4 (um modo de vibração).	131
Figura 6.22 – Diagrama de bode para o Caso 4 (um modo de vibração).	132
Figura 6.23 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 5 (dois primeiros modos de vibração).	132
Figura 6.24 – Diagrama de bode para o Caso 5 (dois modos de vibração).	133
Figura 6.25 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 6 (quatro primeiros modos de vibração).	134
Figura 6.26 – Diagrama de bode para o Caso 6 (quatro modos de vibração).	135
Figura 6.27 – Casca cilíndrica composta laminada em balanço.....	136
Figura 6.28 – Modos de vibração da casca cilíndrica laminada [0,90].	136
Figura 6.29 – Topologia ótima para o caso com um modo de vibração.....	137
Figura 6.30 - Histórico da convergência da função objetivo para o caso com um modo de vibração.	138
Figura 6.31 – Topologias ótimas para o caso com os dois primeiros modos de vibração.	138
Figura 6.32 - Histórico da convergência da função objetivo para o caso com os dois primeiros modos de vibração.	139
Figura 6.33 – Topologias ótimas para o caso com os quatro primeiros modos de vibração. .	140
Figura 6.34 - Histórico da convergência da função objetivo para o caso com os quatro primeiros modos de vibração.....	140

Figura B.1 – Placa de composta laminada em balanço com atuador MFC acoplado a estrutura.	160
Figura B.2 – Modos de vibração da placa plana [0,90] com o MFC.....	161
Figura B.3 – Placa composta laminada em balanço com atuador MFC acoplado a estrutura.	162
Figura B.4 – Comparativo entre os valores de deflexão através do modelo proposto e experimento feito por Dano et al. 2007.	163
Figura B.5 – Deslocamento da placa plana, quando aplicado um potencial elétrico ao MFC de 1000 V (simulação).	164
Figura B.6 – Deslocamento da placa no plano xz , quando aplicado um potencial elétrico ao MFC de 1000 V (simulação).	164
Figura B.7 – Esquema da variação do posicionamento do MFC ao longo da Placa.	165
Figura B.8 – Índice de posicionamento ótimo para o primeiro modo.	165
Figura B.9 – Posição Ótima do MFC para o primeiro modo flexional da placa.	166
Figura B.10 – Índice de posicionamento ótimo para o segundo modo.	166
Figura B.11 – Posição Ótima do MFC para o segundo modo flexional da placa.	167
Figura B.12 – Índice de posicionamento ótimo para o terceiro modo.	167
Figura B.13 – Posição Ótima do MFC para o terceiro modo flexional da placa.	168
Figura C.1 – Placa de Alumínio e atuador MFC fixado na estrutura.	169
Figura C.2 – Configuração e instrumentação experimental.	169
Figura C.3 – Posicionamento transversal da placa.	171
Figura C.4 – Diagrama de blocos da estratégia de controle, implementado no MATLAB/simulink.	172
Figura C.5 – Deslocamento transversal na ponta livre da placa, para o sistema em malha aberta e fechada.	173
Figura C.6 - Velocidade na ponta livre da placa, para o sistema em malha aberta e fechada.	173
Figura C.7 – Sinal de controle no atuador MFC.....	174

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Propriedades materiais de uma lâmina do material composto e do MFC	110
Tabela 6.2 – Comparativo do controle entre o Caso 1a e Caso 1c.....	127
Tabela B.1 – Propriedades materiais de uma lâmina do material composto e do MFC.....	160
Tabela B.2 – Valores das primeiras Frequências naturais em [Hz].....	161
Tabela III.3 – Propriedades do material composto e do MFC	178

1. INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

O aumento da demanda por estruturas mais leves e adaptáveis a aplicações importantes implica na necessidade do uso de métodos avançados de otimização estrutural e controle no seu projeto. Diversos trabalhos evidenciam a utilização de estruturas inteligentes projetadas a partir desses métodos. Com a alocação ótima de sensores e atuadores integrados através de um sistema de controle, essas estruturas possuem a capacidade de perceber as mudanças no ambiente, diagnosticar problemas localizados, armazenar e processar dados de medição e comandar ações adequadas para, através de técnicas de controle, melhorar a eficiência do sistema, preservar a integridade estrutural e a segurança [Cheng et al., 2008]. Desta forma, tal tipo de sistema pode detectar modos de vibração excitados e, assim, gerar forças de controle para reduzir as vibrações estruturais [Crawley, 1994]. A principal aplicação para tais estruturas, denominadas inteligentes, se dá na indústria aeroespacial, podendo também ser utilizadas em manipuladores robóticos flexíveis, entre outras aplicações [Zimcik et al., 2003].

Apesar dos feitos alcançados durante os últimos anos, o desenvolvimento de métodos eficientes para o projeto de estruturas inteligentes é ainda um campo de pesquisa em crescimento e promissor. As pesquisas para o seu desenvolvimento são motivadas pelo aumento da demanda e das possibilidades de aplicação. Dessa forma, no âmbito do projeto estrutural, o método de otimização topológica contribui de forma eficaz no projeto de estruturas mais leves, diminuindo custos na indústria aeroespacial, bem como com a diminuição da matéria prima utilizada em tais estruturas, evidenciando-se, assim, sua importância em questões de sustentabilidade [Haftka e Gürdal, 1991; Bendsøe e Sigmund, 2003].

Outro fator importante a ser considerado no desenvolvimento de estruturas inteligentes, é o fato de esse tipo de estrutura apresentar geralmente peso reduzido e baixo amortecimento interno. Essas características estruturais estão fortemente ligadas ao aparecimento de vibrações na estrutura, as quais acarretam efeitos indesejados no funcionamento de mecanismos que necessitam de precisão.

Nesse sentido, é de fundamental importância a utilização de um sistema de controle ativo integrado por atuadores e sensores [Preumont, 2002]. Uma das vantagens desse tipo de

controle é a capacidade de reduzir a sensibilidade da saída em relação a alterações nos valores das variáveis controladas. Assim, é possível diminuir os efeitos indesejados, oriundos das excitações externas a que o sistema esteja sujeito. Para isso, é necessário o uso de um dispositivo de atuação que gere forças. Dentre esses, é possível destacar o transdutor piezelétrico composto MFC (*Macro Fiber Composite*). O qual apresenta características específicas que serão discutidas mais adiante.

A utilização de cerâmicas piezelétricas (PZTs) como geradores de força mecânica ou como sensor em sistemas de controle é relativamente bem conhecida. Quando pressionados, os cristais piezelétricos geram uma carga elétrica à sua deformação. Por outro lado, eles apresentam uma deformação mecânica ao serem submetidos a um campo elétrico. Como alternativa ao PZT, surgiram na última década alguns dispositivos piezelétricos compostos, como, por exemplo, o MFC, os quais necessitam de estudos para a melhor compreensão do seu funcionamento. Portanto, devido ao MFC ser um dispositivo relativamente novo e apresentar grandes possibilidades de aplicação, se tem um campo de pesquisa bastante promissor.

Os diversos argumentos supracitados justificam a proposta deste trabalho, a qual é apresentada na Seção 1.2, que segue.

1.2 Apresentação da Proposta e Contribuição Científica.

A partir do que foi apresentado na Seção 1.1, este trabalho tem por objetivo desenvolver uma metodologia de otimização topológica de atuadores piezelétricos na camada ativa de estruturas composta laminada para atenuar as vibrações estruturais induzidas por excitações externas utilizando a teoria de controle ótimo com a aplicação do regulador linear quadrático (LQR) e do regulador linear gaussiano (LQG), tendo como dispositivo de atuação o atuador piezelétrico composto MFC (*Macro Fiber Composite*).

Os trabalhos que usam material piezelétrico no controle de estruturas, em geral, utilizam materiais do tipo piezocerâmicos (PZT) para atuação e sensoriamento. A partir do uso do PZT, a maioria dos trabalhos considera no modelo estrutural o efeito eletromecânico que surge da interação do efeito piezelétrico sobre a parte mecânica e do efeito mecânico sobre o material piezelétrico. Para isso, é necessário considerar no modelo o campo elétrico gerado entre os eletrodos que envolvem o PZT, resultando assim, em um modelo estrutural mais complexo.

De forma diferente, no presente trabalho utiliza-se como uma alternativa ao tradicional PZT, o atuador MFC. O MFC é um atuador piezelétrico composto desenvolvido pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) e disponibilizado para uso a partir de 2002. O MFC apresenta vantagens ao ser comparado com a tradicional cerâmica PZT, uma vez que é um material mais flexível, permitindo assim, ser incorporado a estruturas que têm superfícies curvas. É importante ressaltar que a maioria dos trabalhos que estão citados na revisão (Seção 1.3) apresenta modelos do MFC levando também em conta o efeito eletromecânico.

A partir disso, é proposto nesse trabalho um modelo para representar a interação entre o atuador MFC e a estrutura. O modelo proposto possui como vantagem uma implementação mais simples, além de ser tão eficiente quanto os tradicionais modelos que levam em conta o efeito eletromecânico. Neste modelo, considera-se que o vetor de força das cargas distribuídas na superfície da casca é obtido a partir de uma deformação inicial empregada nos elementos da camada que contêm o MFC. Essa deformação é proporcional ao potencial elétrico aplicado no atuador. Assume-se que o MFC é uma das lâminas de material ortotrópico que sofre uma deformação inicial a partir da aplicação de um potencial elétrico e que essa deformação terá efeitos sobre o restante da estrutura através de forças normais e de momento, uma vez que o MFC é incluído no modelo estrutural, sendo utilizado como parte da estrutura, ou seja, a rigidez e a massa do MFC são consideradas no modelo. Dessa maneira, não é necessário modelar o campo elétrico gerado através dos eletrodos, uma vez que o efeito eletromecânico é considerado analiticamente neste trabalho.

As técnicas de controle para redução da vibração estrutural estudadas e aplicadas neste trabalho são o regulador linear quadrático (LQR) e controlador linear quadrático gaussiano (LQG). O sistema dinâmico, para esses controles, é representado em espaço de estados utilizando coordenadas modais. Em muitos trabalhos, admite-se que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para retroação. Porém, muitas vezes, isso não ocorre na prática. Necessita-se, portando, estimar essas variáveis [Meirovitch, 1990; Ogata, 1998; Burl, 1999; Preumont, 2002; Gawronski, 2004]. Dessa forma, neste trabalho, através do controlador LQG, os estados não mensuráveis são estimados através do uso do observador de estados de ordem plena. O filtro de *Kalman* é utilizado para a escolha da matriz ótima de ganho do observador de estados de ordem plena e considera-se que o sistema dinâmico possui sinal contaminado na entrada e na saída por componentes do tipo ruído branco.

No controle ativo de vibrações estruturais, a localização adequada de sensores e atuadores tem uma influência significativa no desempenho do sistema de controle [Kumar e Narayanan, 2008]. A utilização de material piezelétrico no controle de vibrações como atuadores e sensores é realizada com peças de tamanho padrão pré-definido, restringindo muito as formas de atuação ou a localização dessas na estrutura. A posição de atuadores, em muitos trabalhos, é considerada fixa no domínio de projeto. Assim, o presente estudo apresenta uma metodologia de otimização topológica que permite a distribuição de material piezelétrico (modelado como elástico ortotrópico) na camada ativa da estrutura a partir da maximização do índice de controlabilidade. Essa formulação contribui para um maior poder de atuação com um menor sinal de controle (potencial elétrico) no controle de vibrações.

1.3 Material Piezelétrico

A piezeletricidade é uma propriedade de um grupo de materiais que tem como característica a conversão de energia mecânica em energia elétrica (efeito direto) ou a conversão de energia elétrica em mecânica (efeito inverso). Assim, um sistema piezelétrico é constituído de dois sistemas físicos acoplados (mecânico e elétrico). A expressão é derivada da palavra grega *piezein*, que quer dizer “espremer” ou “pressionar”. O efeito piezelétrico direto consiste na conversão de energia mecânica em energia elétrica, ou seja, na geração interna de carga elétrica resultante de uma força mecânica aplicada. Esse efeito foi descoberto pelos irmãos Pierre e Jacques Curie em 1880 [*apud* Moheimani e Fleming, 2006]. Posteriormente, Lippman, em 1881 [*apud* Lines e Glass, 2001], previu por análises termodinâmicas a existência do “efeito piezelétrico inverso”, que consiste na deformação do material quando submetido a um campo elétrico. Uma representação esquemática do efeito é apresentada na Figura 1.1.

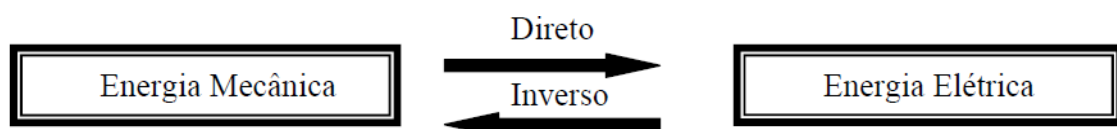


Figura 1.1 – Representação da conversão de energia no efeito piezelétrico.

A partir dessas descobertas, os materiais piezelétricos tiveram grande aplicabilidade, sendo utilizados inicialmente em sonares por Langevin durante a primeira guerra mundial

[*apud* Nagamine, 2001], além de aplicações como: transdutores de ultrassom e atuadores de pequeno uso, entre outros. Estes esforços levaram à descoberta nas décadas de 40 e 50 das cerâmicas piezelétricas de Titanato de Bário na antiga União das Republicas Socialistas Soviéticas e no Japão, e das cerâmicas piezelétricas de Titano Zirconato de Chumbo (PZT) nos Estados Unidos [Suslick, 1989; Cady, 1964], as quais são objeto de estudos para otimização de suas propriedades e para a criação de novos compósitos.

Uma cerâmica policristalina, um dos mais ativos materiais piezelétricos, é composta por pequenos cristais aleatoriamente orientados e divididos em regiões com dipolos similares. Quando um campo elétrico é aplicado, esses domínios são induzidos a apresentar uma polarização em uma dada região, conforme mostra a Figura 1.2.

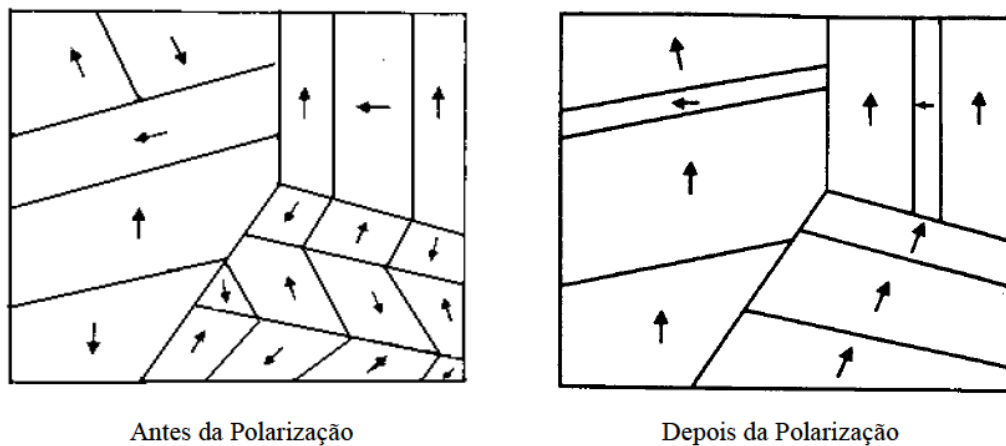


Figura 1.2 – Polarização macroscópica induzida em um piezelétrico cerâmico policristalino. [Nagamine, 2001].

As propriedades das cerâmicas polarizadas podem ser melhor compreendidas por meio da Figura 1.3. Quando uma cerâmica piezelétrica sofre compressão mecânica ao longo da direção de polarização, gera-se uma diferença de potencial elétrico de mesma polaridade que a tensão de polarização (Figura 1.3 (b)). De maneira diferente, caso a cerâmica piezelétrica for submetida a uma tensão de tração ao longo da direção de polarização, gera-se uma diferença de potencial elétrico com sentido oposto ao da tensão de polarização (Figura 1.3 (c)). Nessas duas configurações, o dispositivo está sendo utilizado como um sensor.

Por outro lado, quando é aplicada uma diferença de potencial elétrico de mesma polaridade que a tensão de polarização em um elemento cerâmico, na direção da tensão de polarização, o elemento irá alongar e o seu diâmetro irá diminuir (Figura 1.3 (d)). Já, se uma

diferença de potencial elétrico de polaridade oposta à da tensão de polarização for aplicada, o elemento irá tornar-se mais curto e mais largo (Figura 1.3 (e)). Nessas duas configurações, a cerâmica piezoeétrica é utilizada como um atuador. A partir dessas configurações, o material piezoeétrico se caracteriza por ser um transdutor, uma vez que possibilita a conversão de um sinal de uma forma física para um sinal correspondente de outra forma física. Nesse caso, transforma energia elétrica em energia mecânica e energia mecânica em energia elétrica.

Os valores de tensão de compressão e o campo de força gerado pela aplicação de tensão elétrica [V] em um elemento cerâmico piezoeétrico são linearmente proporcionais até uma tensão específica de saturação que depende das propriedades do material.

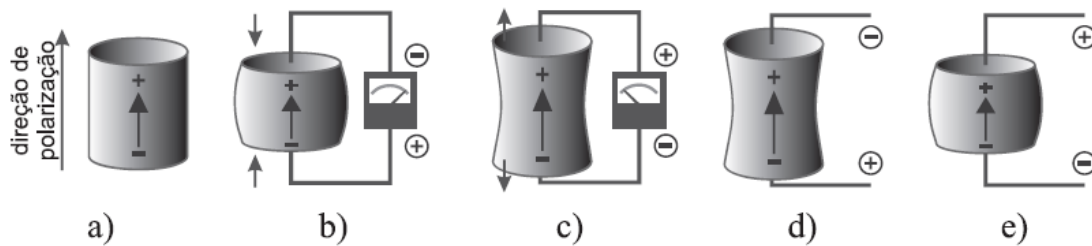


Figura 1.3 – Reação de uma cerâmica piezoeétrica submetida a um estímulo, [Moheimani e Fleming, 2006].

Os estudos sobre utilização de materiais piezocerâmicos (PZT) para atuação estrutural e sensoriamento são relativamente bem desenvolvidos. O PZT, no entanto, possui certas restrições para a sua utilização em aplicações reais. Isso ocorre devido ao PZT ser um material de natureza frágil, requerendo atenção adicional durante os procedimentos de manuseio e colagem. Além disso, o seu uso em superfícies curvas é difícil, e requer tratamento adicional das superfícies em que é fixado [Kovalovs et al., 2007].

Com base nisso, nos últimos anos tem sido estudada e explorada a ideia de usar atuadores piezocerâmicos compostos para superar essas limitações, produzindo uma série de soluções para aplicações reais. Estes atuadores são chamados de piezocompósitos e surgiram como uma alternativa à utilização de um material piezoeétrico monolítico.

Dentre essas soluções de material piezoeétrico composto está o *Macro-Fiber Composite* (MFC), o qual será utilizado nesse trabalho. O MFC foi desenvolvido pela NASA (no *Langley Research Center* (LaRC)) em 1996. Desde 2002 a empresa Smart Material, tem licença para fabricação, comercialização e distribuição desse material para o mundo todo [Smart Material, 2013]. O MFC foi construído para aplicações que necessitam de maior

flexibilidade do que as cerâmicas piezelétricas tradicionais apresentam, tendo sido desenvolvido para ser utilizado como sensor e atuador no controle de vibrações estruturais e coletor de energia. O MFC utiliza fibras piezelétricas de seção transversal retangular incorporadas em uma matriz de epóxi e revestido com camada de filme de poliamida.

O processo de construção do MFC proporciona-lhe vantagens sobre o material piezocerâmico tradicional. O MFC é flexível, permitindo-lhe, conforme já mencionando, ser incorporado a estruturas que têm superfície curva, sem ocorrer problemas de quebra acidental ou tratamento adicional da superfície, diferentemente do material piezocerâmico monolítico tradicional. Além disso, segundo Sodano, 2003, o MFC usa eletrodos interdigitados que extraem maior proveito do coeficiente de acoplamento piezoelétrico d_{33} , permitindo que produza força e tensão superior ao apresentado pelos materiais piezocerâmicos típicos.

O MFC é constituído por hastes cerâmicas retangulares piezelétricas imersas em uma matriz de epoxy, colocada prensada entre as camadas de adesivo, elétrodos e uma película poliamida, conforme pode ser visualizado na Figura 1.4. Os elétrodos estão ligados à película na forma interdigitada, que transfere ou recebe a tensão aplicada na estrutura do MFC diretamente para as hastes piezelétricas. Este conjunto permite atuação e sensoriamento de forma lacrada e durável. Como o MFC é uma estrutura pouco espessa, pode ser utilizado colado externamente em diversos tipos de estruturas ou incorporado a uma estrutura composta. Se uma tensão elétrica é aplicada, o MFC é capaz de se curvar ou distorcer materiais, neutralizar vibrações ou gerar vibrações. Se nenhuma tensão elétrica é aplicada, ele pode funcionar como um medidor (sensor) de tensão muito sensível, detectando deformações, ruídos ou vibrações em aplicações dinâmicas. O MFC também é uma alternativa para coleta de energia a partir de vibrações, [Smart Material, 2013].

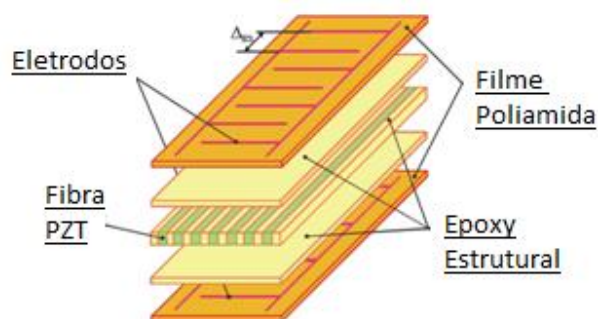


Figura 1.4 – Diagrama esquemático da ordenação das diferentes camadas que compõem o MFC [Kovalovs et al., 2007].

Os transdutores de MFC estão disponíveis basicamente em dois modos de atuação: modo d_{31} e d_{33} [Collet, 2010], os quais são definidos a partir da direção da deformação em relação à direção da polarização e do campo elétrico aplicado. Latalski, 2011, afirma que no modo d_{31} , a deformação ocorre no plano perpendicular à direção do campo elétrico aplicado, enquanto que, no modo d_{33} , a deformação ocorre na mesma direção do campo elétrico. Esses modos podem ser também denominados como: i) longitudinal (deformação, campo elétrico e polarização na mesma direção) para o modo d_{33} ; ii) transverso (deformação na direção 1 e/ou 2 e campo elétrico e polarização na direção 3) para o modo d_{31} .

Na Figura 1.5 podem-se verificar os modos de atuação, com o efeito d_{33} (Figura 1.5 (a)) e d_{31} (Figura 1.5 (b)) com as respectivas direções do campo elétrico e polarização.

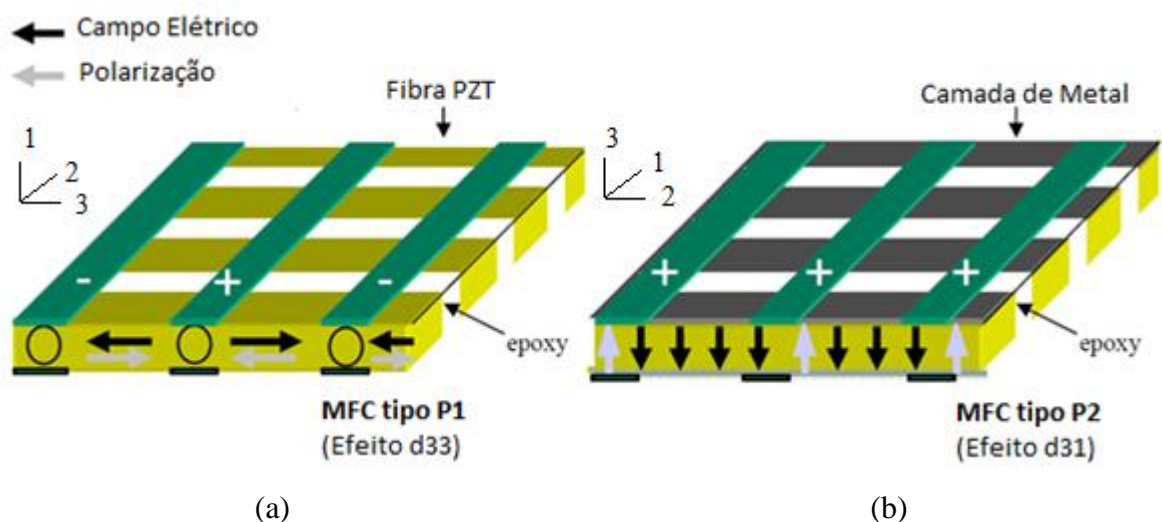


Figura 1.5 – Campo Elétrico e polarização para o MFC modo d_{33} (a) e modo d_{31} (b)

[Schönecker et al., 2006].

Na Figura 1.6 é apresentado um esquema específico para o modo d_{33} , o qual será utilizado no presente trabalho. Na Figura 1.6 (a) é apresentada a configuração dos eletrodos, os quais, por possuírem uma disposição de polarização intercalada na mesma superfície, são capazes de produzir o campo elétrico e a polarização na direção 3 (ao longo do comprimento) e, por consequência, deformação na mesma direção (Figura 1.6 (b)).

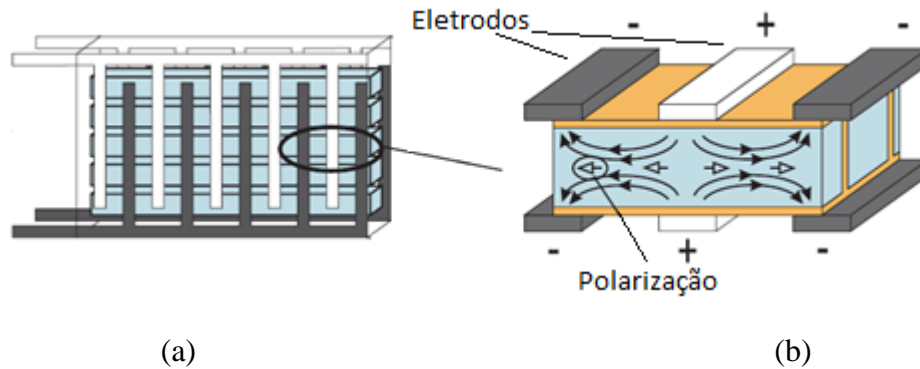


Figura 1.6 – Esquema dos eletrodos e polarização do MFC no modo d_{33} [Schröck et al., 2011a].

Vários trabalhos abordam o estudo, modelagem e uso do MFC nas mais diferentes aplicações em diversos campos. No campo estrutural, em geral, as pesquisas estão relacionadas ao uso do MFC para o controle de vibrações estruturais oriundas de perturbações externas. Sodano, 2003, por exemplo, investigou algumas aplicações para o MFC, bem como, tópicos adicionais da coleta de energia através de vibrações mecânicas. Verificou-se a capacidade do MFC de ser usado como atuador e sensor no controle de vibração em uma viga de alumínio. O MFC foi incorporado em um circuito atuador-sensor e resultou em 80% de supressão na amplitude de vibração na ressonância do segundo modo de vibração. Além disso, foi utilizado como sensor e atuador no controle multivariável de vibração de um componente de satélite.

Kovalovs et al., 2007, utilizaram o MFC para reduzir vibrações em uma viga de alumínio por meio de dois atuadores um no topo e outro na base da estrutura. O sistema foi modelado por MEF no software ANSYS e seus resultados comparados com os de experimentos. A Utilização do MFC em sistemas de vigas compactas biestáveis para controle estrutural foi apresentado em [Cazottes et al., 2008]. O atuador MFC apresentou um desempenho superior, no controle de vibrações, em comparação com o martelo de impacto e o atuador PZT.

Iannucci et al., 2009, investigaram as possibilidades do uso do MFC para controle de vigas laminadas de material composto submetido a impacto de baixa velocidade. Guimarães et al., 2010, propuseram uma abordagem sobre o dimensionamento e posicionamento de um MFC para atenuar vibrações estruturais, baseada em um método de elementos finitos para estruturas inteligentes usando MFC. Para a validação numérica, utilizou-se um modelo experimental de uma viga em balanço. Por fim, foram comparados os resultados do MFC com os resultados utilizando as tradicionais cerâmicas piezelétricas, apresentando resultados com o

uso do MFC superiores aos das cerâmicas tradicionais. Sohn et al., 2011, investigaram o controle ativo de vibração para suprimir a oscilação de uma estrutura de casca inteligente com base em configurações de atuadores MFC otimizados. Raja et al., 2011, analisaram o uso de atuadores piezelétricos compósitos colados e incorporados na estrutura através de um estudo numérico. Um controle modal LQR foi aplicado para efetuar estudos de controle ativo de vibração, utilizando o SAFC (*Shear Actuated Fiber Composite*) para cisalhamento-extensão e MFC para extensão-flexão. Os resultados evidenciam que os atuadores compósitos piezelétricos são eficientes controlando os modos de flexão e de torção da estrutura estudada.

No campo aeroespacial, o uso do MFC é muito difundido, uma vez que pode ser incorporado a estruturas que têm superfície curva. Assim, é possível encontrar na literatura vários trabalhos que tem como foco aplicações em estruturas aeroespaciais. Kim et al., 2009, desenvolveram uma asa flexível em um ornitóptero em escala real, usando atuador MFC para mudar as características aerodinâmicas através da variação da linha de *Camber* da asa, testes em túnel de vento foram feitos para analisar os resultados teóricos. Um novo projeto bi-dimensional com linha de *Camber* variável em um aerofólio empregando MFC é apresentado por Bilgen et al., 2010a, que leva em conta a modelagem de atuação e a característica da resposta sob cargas aerodinâmicas, um estudo paramétrico da resposta aerodinâmica é empregado para otimizar parâmetros cinéticos do aerofólio, por fim efetuou-se validação experimental.

Um projeto de mudança da forma da asa (*morphing*) utilizando MFC em estruturas inteligentes em uma aeronave de controle remoto, buscando substituir os tradicionais servos controladores, por uma alternativa mais eficaz através de um sistema mais simples e barato, é apresentado por Butt, et al., 2010, onde se constatou a eficiência do MFC. Bilgen et al., 2011, propuseram a utilização de MFC para o atraso da separação de fluxo, visto em aerofólios com baixos números de Reynolds, utilizando a técnica de controle de fluxo baseado em um aerofólio com a linha de *Camber* variável que é composta por duas superfícies ativas e um único mecanismo estrutural na parte interna. Bilgen et al., 2010b, usaram o MFC para atuação no projeto de linha de *camber* variável de um aerofólio destinado a uma aeronave. O estudo tem foco na caracterização de resposta sob cargas aerodinâmicas para aerofólios arco circular com condições de contorno variável. Um estudo paramétrico da interação fluido estrutura é empregado para encontrar a localização da fixação das condições de contorno ao longo da direção que resulta maior ganho.

O MFC também pode ser utilizado no controle de não linearidades estruturais pertinentes a sistemas dinâmicos. [Schröck et al., 2011a; Schröck et al., 2011b] propuseram controle de não linearidades inerentes ao problema de posicionamento preciso em atuadores como histerese e atrito, utilizando o MFC em um problema de uma viga em balanço e fazendo uso de um modelo baseado na teoria de Prandtl–Ishlinskii, tendo um operador inverso para compensar essas não linearidades, resultados experimentais comprovam a eficácia do modelo.

Outras aplicações são encontradas com o uso do MFC. Como, por exemplo, Schultz, 2004, apresentou o estudo de duas maneiras para o uso de atuadores piezelétricos em laminado biestável não simétrico, *morphing*. No primeiro, uma estrutura experimental com atuador e laminado é construída juntamente com os esforços para o modelo de formas e comportamento das estruturas usando a técnica de Rayleigh Ritz. No segundo, a capacidade de modelar os atuadores laminados foi ampliada para incluir elementos finitos usando um pacote do software ABAQUS. Um modelo analítico preciso para as propriedades do campo elétrico estático do MFC foi proposto em [Lloyd, 2004]. [Dano et al., 2007; Binette et al., 2009] investigaram o uso de MFC para controlar deformações térmicas induzidas em uma estrutura composta. Para tanto, desenvolveram um modelo em elementos finitos incluindo campos térmicos e piezelétricos no software comercial ABAQUS. Resultados teóricos e experimentais são apresentados de forma satisfatória para o problema. Beckert et al., 2003, modelaram módulos piezelétricos de estruturas com eletrodos interdigitados. Kovalovs et al., 2009, investigaram o uso de MFC como atuador para análise modal de placa composta.

Alguns trabalhos encontrados na bibliografia têm como foco abordar métodos para determinar as propriedades do MFC. Deraemaeker et al., 2009, trabalharam na modelagem de estruturas equipadas com transdutores de MFC, baseando-se no método de campo uniforme e assumindo estado plano de tensão, determinado analiticamente com a regra das misturas das propriedades para os efeitos d_{31} e d_{33} do MFC. Para validação, usaram resultados experimentais da literatura. De Medeiros, 2012, empregou uma metodologia numérica para determinar as propriedades macro mecânica de compósitos ativos (AFC - Active Fiber Composite ou MFC - Macro Fiber Composite), combinando o conceito de Volume Elementar Representativo (VER) com o método de elementos finitos (MEF). Os resultados obtidos, apresentam boa correlação com os resultados encontrados na literatura.

Por fim, Schönecker et al., 2006, apresentaram uma visão geral sobre recentes progressos no desenvolvimento de transdutores e tecnologia de sistemas de MFC, incluindo os dispositivos padrões comercializados, os dados de desempenho e o progresso dos

dispositivos de MFC, entre outros. Em geral, o MFC é utilizado em controle de vibrações nas mais diversas aplicações no campo aeroespacial e estrutural. Os resultados apresentados a partir do seu uso são satisfatórios. Além disso, quando comparados com as tradicionais cerâmicas piezelétricas mostraram maior eficiência.

1.3.1 Equações fundamentais

Nesta seção são apresentadas, baseadas no padrão IEEE para piezeletricidade, as equações que regem as propriedades eletromecânicas dos materiais piezelétricos. Em baixos campos elétricos e em baixos níveis de tensão mecânica, os materiais piezelétricos apresentam o comportamento aproximadamente linear. No entanto, eles podem mostrar não linearidades consideráveis quando utilizados sob um alto campo elétrico ou alto nível de tensão mecânica [Moheimani e Fleming, 2006]. Neste trabalho, é analisado o comportamento linear dos materiais piezelétricos, ou seja, é assumido que os transdutores piezelétricos são operados em baixos níveis de campo elétrico e tensão mecânica.

As equações piezelétricas são obtidas considerando dois sistemas físicos acoplados: mecânico e elétrico. Além disso, desconsiderando a simetria do material, pode-se escrever o efeito eletromecânico de forma simplificada, resultando na seguinte equação de equilíbrio piezelétrico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \mathbf{S} - \mathbf{e} \mathbf{E} ; \quad (1.1)$$

$$\mathbf{D}_e = \mathbf{e}^T \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} ; \quad (1.2)$$

onde, $\boldsymbol{\sigma}$ é a tensão mecânica, \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{D}_e é o deslocamento elétrico, \mathbf{S} é a deformação mecânica, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a constante dielétrica, \mathbf{C} é a constante elástica e \mathbf{e} é a constante piezelétrica.

O efeito piezelétrico apresenta uma dependência linear da deformação com o campo elétrico aplicado, assim, por exemplo, quando o sentido do campo elétrico é invertido, o sentido da deformação também será invertido.

Através da simetria dos tensores mecânicos podem-se reescrever as equações constitutivas em notação de *Voigt*, reduzindo a notação tensorial. Assumindo que o dispositivo está polarizado ao longo do eixo 3 e supondo o material piezelétrico como

isotrópico transversalmente (cerâmicas piezelétricas) [Silveira, 2012; Moheimani e Fleming, 2006], alguns parâmetros nas matrizes serão nulos ou poderão ser expressos em termos de outros parâmetros. Os coeficientes não nulos das constantes elásticas são:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= C_{22} \\
 C_{13} &= C_{31} = C_{23} = C_{32} \\
 C_{12} &= C_{21} \\
 C_{44} &= C_{55} \\
 C_{66} &= 2(C_{11} - C_{12})
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

As constantes de deformação piezelétricas não nulas são,

$$\begin{aligned}
 e_{31} &= e_{32} \\
 e_{15} &= e_{24}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

e os coeficientes dielétricos são $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$ e ε_{33} . Assim, as Equações 1.1 e 1.2 são simplificadas e podem ser expressas como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2(c_{11}^E - c_{12}^E) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

e

$$\begin{Bmatrix} D_{e_1} \\ D_{e_2} \\ D_{e_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

1.4 Materiais Compostos

Materiais compostos são formados por dois ou mais materiais combinados em uma escala macroscópica, resultando em um material com propriedades diferentes das dos materiais primários [Jones, 1999]. O material resultante combina em uma única estrutura propriedades que seriam difíceis de obter-se com um único material. No caso de materiais compostos fibrosos, é possível unir as propriedades unidirecionais das fibras com a leveza e resistência das resinas utilizadas como matriz. Com isso, é possível obter estruturas que tenham boa eficiência na direção de interesse, bastando, para tanto, que se determine qual a melhor orientação das fibras.

Materiais compostos podem ser classificados em três grupos: compósitos fibrosos, nos quais as fibras são misturas dentro de uma matriz; compósitos laminados, os quais são formados por camadas de diferentes materiais; e compósitos particulados, que consistem em partículas soltas em uma matriz [Jones, 1999]. É possível, também, produzir materiais a partir da combinação desses grupos, como é o caso do material laminado reforçado por fibra, que consiste de compósitos fibrosos dispostos em uma série de lâminas. Esse material combina as propriedades dos dois tipos.

O material utilizado neste trabalho é um composto laminado reforçado por fibras e a ligação entre uma lâmina e a seguinte é considerada como adesão perfeita. As Figuras 1.7 e 1.8 mostram um exemplo de como é constituído um laminado de material composto e a designação do mesmo,

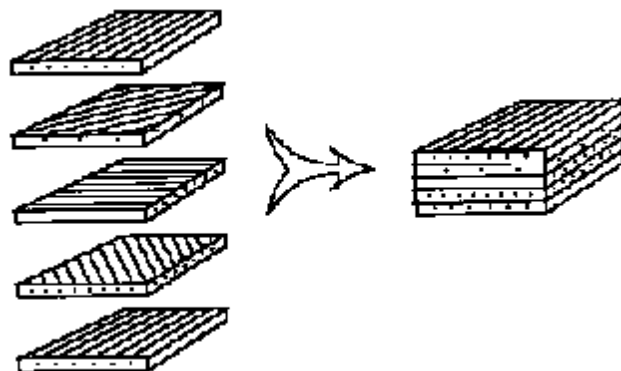


Figura 1.7 – Constituição de um laminado

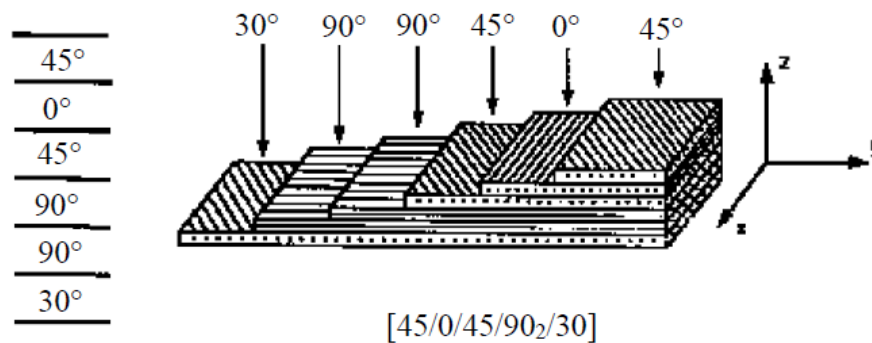


Figura 1.8 – Designação de um laminado

O desenvolvimento de materiais compostos está fortemente ligado ao seu uso na indústria aeronáutica. Isso se deve a dois fatores: econômico e desempenho. O fator econômico vem do fato de o material composto ser muito mais leve que os materiais metálicos, o que implica em uma economia de combustível e conseqüentemente, em um aumento de carga útil (aeronáutica e aeroespacial). O fator desempenho está ligado à procura por um melhor desempenho de componentes estruturais, sobretudo no que diz respeito às características mecânicas (resistência a ruptura, resistência à ambientes agressivos, etc.).

Com o uso de materiais compostos, os projetistas ganharam ampla variedade de opções para a construção de estruturas resistentes e de baixo peso. Entretanto, apesar dessa leveza ser uma característica positiva para aplicação aeronáutica, ela aumenta a atenção que deve ser dada ao estudo das vibrações às quais a estrutura estará sujeita.

Materiais compostos de polímero reforçados com fibra estão rapidamente conquistando terreno como materiais preferidos para construção de aviões e naves espaciais. A sua utilização como materiais estruturais nos últimos anos, vem ganhando a linha de frente de projetos aeroespaciais em todo o mundo. Isso ocorre a partir da sua grande aceitação devido à confiabilidade apresentada no uso desse tipo de material como matéria prima em veículos aeroespaciais [Mangalgiri, 1999]. Baseado nesse contexto, Mangalgiri, 1999, fez uma revisão de alguns destes desenvolvimentos, levando em conta o comportamento desses materiais, problemas encontrados em projetos e a maneira como devem ser trabalhados, além de perspectivas para futuros desenvolvimentos.

Oliveira, 2007, desenvolveu um processo de fabricação de laminado plano de material composto de polímero e fibra de vidro para substituição do contraplacado (madeira compensada) aeronáutico. Foi proposta uma metodologia para a produção destes laminados baseada no processo de infusão de resina por meio da técnica de RTM (Resin Transfer

Moulding). Definiram-se ensaios físicos e mecânicos necessários para a caracterização do material e a sua posterior comparação com o contraplacado aeronáutico. Concluiu-se que é viável a substituição do contraplacado aeronáutico pelas placas de laminado plano de material composto polimérico de fibra de vidro.

Fan et al., 2008, examinaram a resistência ao cisalhamento interlaminar de um composto de fibra de vidro reforçado por epóxi, através da injeção de nano carbono nas múltiplas camadas. Os resultados mostram que a injeção de carbono no compósito aumentou a resistência ao cisalhamento interlaminar em 33%. Tarfaoui et al., 2010, analisaram as características mecânicas de estruturas compostas, objetivando a utilização de *Split Hopkinson Pressure Bar* (SHPB) para a caracterização dinâmica da orientação das fibras e da taxa de deformação, dos danos e da força imposta em um composto de fibra de vidro e epoxy, o qual é muito utilizado na indústria naval. Além disso, para também compreender os mecanismos microscópicos que levam ao dano e a fratura de material composto, quantificou a sua evolução a partir da taxa de deformação. Considerando a mesma pressão de impacto, os resultados das curvas de tensão-deformação mostram que o material é muito sensível a orientação da fibra.

Tsuruta, 2008, avaliou o uso de uma técnica de monitoramento de integridade estrutural baseada no conceito de impedância eletromecânica para a detecção e quantificação de danos causados por impactos de baixa energia em placas de material composto. O método de impedância eletromecânica é uma técnica não destrutiva que utiliza o acoplamento eletromecânico de materiais piezelétricos colocados na superfície da estrutura monitorada. Resultados experimentais comprovam a validade da técnica utilizada. Wang et al., 2010, investigaram o efeito de cisalhamento sobre a orientação das fibras, a ruptura das fibras e a orientação da matriz molecular em fibra de vidro longa reforçada por compósitos de polipropileno, além de construir as relações das propriedades estruturais.

Kiyono, 2013, propôs o desenvolvimento de uma metodologia para projetar transdutores de casca piezo composta baseada no método de otimização topológica (MOT), considerando, simultaneamente, a otimização da distribuição e do sentido de polarização do material piezelétrico, e também a otimização da orientação das fibras de materiais ortotrópicos, sendo livres para assumir valores diferentes ao longo da mesma camada compósita.

Além disso, pesquisadores sob a orientação do Professor Jun Sérgio Ono Fonseca, no Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) da UFRGS, desenvolveram pesquisas sobre otimização de materiais compostos. De Souza, 2003, desenvolveu uma otimização em dois níveis. No primeiro é realizada a minimização da flexibilidade da estrutura, tendo como variável de projeto a orientação de cada lâmina da estrutura. Utilizou-se a Programação Linear Sequencial e a direção de tensão principal para otimização da orientação. Já, no segundo nível, minimizou-se o volume da cada lâmina, usando a flexibilidade total da estrutura como restrição e densidade relativa como variável de projeto. De Leon, 2011, apresentou uma metodologia utilizando técnicas de otimização estrutural para o projeto de placas feitas de material composto laminado sujeita a iteração fluido-estrutura. O procedimento de otimização busca o aumento da velocidade de *flutter* através da maximização das frequências naturais relacionadas aos modos de vibração envolvidos no fenômeno. Os resultados mostram que a partir da otimização da orientação das fibras, devido ao aumento da rigidez da placa, a velocidade de *flutter* teve um aumento considerável.

1.5 Estruturas Inteligentes

Estruturas inteligentes (*smart structures*) são capazes de sentir e reagir em seu ambiente de uma forma previsível e desejada através da integração de vários elementos, tais como, sensores, atuadores, fontes de alimentação, processadores de sinal e rede de comunicações. Além de transportar cargas mecânicas, estruturas inteligentes podem atenuar vibrações, reduzir o ruído acústico, controlar a sua própria condição, executar automaticamente alinhamentos de precisão, ou alterar a sua forma ou propriedades mecânicas [McGraw-Hill, 2012,; Preumont, 2002]. De acordo com Cheng et al., 2008, uma estrutura inteligente é integrada por sensores, atuadores e mecanismos de controle e tem a capacidade de perceber qualquer mudança no ambiente, diagnosticar qualquer problema localizado, armazenar e processar dados de medição, e comandar ações adequadas para, através de técnicas de controle, melhorar a eficiência do sistema e preservar a integridade estrutural e a segurança.

Outra definição bastante empregada pode ser encontrada em [Crawley, 1994], que define estruturas inteligentes como aquelas que possuem atuadores e sensores altamente integrados à própria estrutura com funcionalidade estrutural, bem como um controle lógico altamente integrado, condicionamento de sinal e amplificador de potência eletrônica. A

aquisição, o processamento de sinal e a atuação são incorporados à estrutura com o propósito de agir sobre determinada característica ou estados pré-determinados sejam, eles mecânicos, elétricos, químicos, térmicos ou magnéticos [Nagamine, 2001].

Segundo Nagamine, 2001, a definição de [Crawley, 1994] pode ser melhor entendida a partir do modelo esquemático apresentado na Figura 1.9. O primeiro conjunto denominado “adaptativo” é composto pelas estruturas que são sujeitas a algum tipo de atuação. O segundo grupo, denominado “sensoreadas”, é composto pelas estruturas que possuem sensores. Por sua vez, a intersecção entre esses dois conjuntos compõe um grupo denominado como “estruturas controladas”, onde se considera que os atuadores e sensores estejam unidos por um controle em malha fechada. Dentro dessa intersecção, pode-se distinguir um subconjunto chamado de “estruturas ativas” que diferem do conjunto maior porque os atuadores e sensores estão distribuídos ao longo da estrutura possuindo também uma função estrutural. Finalmente, as estruturas conhecidas como inteligentes são um subconjunto das estruturas ativas, pois, além de possuírem as características mencionadas acima, devem apresentar também a aquisição, processamento de sinal, controle e atuação inteiramente incorporados na estrutura.

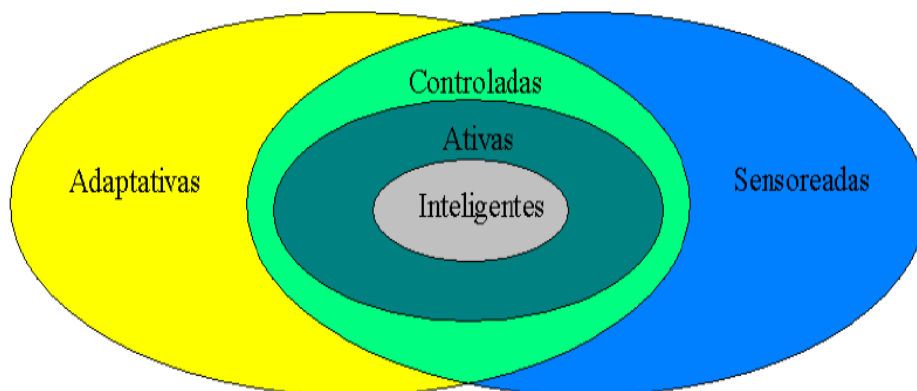


Figura 1.9 – Modelo esquemático para estruturas inteligentes [Crawley, 1994].

Segundo Zimcik et al., 2003, nos últimos anos as estruturas inteligentes têm apresentado uma ampla gama de potenciais aplicações para melhoria de desempenho na indústria aeroespacial. Aplicações de estruturas inteligentes em aviões podem ser concentradas em quatro grandes áreas, incluindo controle de vibração e acústico, controle de forma, estruturas inteligentes multi funcionais, e aeronaves *morhing*. É possível encontrar em Zimcik, 2003 [Zimcik et al.2003] uma ampla revisão de projetos de investigação e aplicação conduzidos por agências governamentais, indústrias aeroespaciais e universidades

abordando numerosas aplicações, tais como atenuação de vibração aerodinâmica (*flutter*), controle acústico, entre outros.

De acordo com Gaudiller e Matichard, 2005, estruturas inteligentes apresentam resultados eficientes para o controle ativo de vibrações estruturais. Baseado nesse aspecto, alguns trabalhos que tem foco no estudo de estruturas inteligentes aplicadas em controle estruturais podem ser destacados. Loewy, 1997, por exemplo, apresentou uma revisão dos trabalhos e desenvolvimentos de estruturas inteligentes em aplicações aeronáuticas, tais como o uso em problemas aeroelásticos, instabilidades de vibração e redução de vibrações. Jha e He, 2002, desenvolveram uma rede neural aplicada em uma estratégia adaptativa de controle preditivo, com validação experimental.

Jha e Rower, 2002, fizeram o uso de redes neurais para a identificação e controle de estruturas inteligentes, apresentando resultados experimentais para validação. Atuadores piezelétricos são utilizados para atenuar as vibrações de placa em balanço submetida a excitação tipo impulso, onda senoidal e banda limitada com perturbações de ruído branco. As redes neurais utilizadas são Perceptron Multi Camadas (MLP), as quais são treinadas com retropropagação de erro. Os estudos de validação mostram que o identificador prevê a dinâmica do sistema com boa precisão.

Gaudiller e Matichard, 2005, descreveram um projeto de controle que reduz as vibrações em estruturas flexíveis causados pelos modos de vibração, além de otimizar o trabalho mecânico de atuadores que controlam os modos flexíveis. Kumar e Singh, 2006, estudaram o controle híbrido adaptativo de estruturas inteligentes para múltiplas perturbações. Os resultados, a partir de observações, mostram que para manter a estabilidade do sistema, diferentes conjuntos de ganhos no controle realimentado devem ser aplicados para atenuação da vibração livre ou forçada.

Tebaldi et al., 2006, caracterizaram as falhas estruturais de estruturas inteligentes em dois passos. Primeiramente utilizaram o método da impedância elétrica para determinar a região do dano e em seguida utiliza um método de otimização para quantificar a severidade das falhas. A metodologia híbrida proposta se beneficia da técnica de impedância elétrica para localizar as regiões de danos. O procedimento é validado através de diferentes abordagens de otimização por nuvem de partículas. As abordagens implementadas apresentam resultados precisos para os casos estudados.

Roy e Chakraborty, 2008, trataram do projeto de controle ótimo de vibração de fibra inteligente reforçada por polímeros em estruturas de casca usando algoritmo genético (GA)

com base em um controle regulador linear quadrático (LQR). Os resultados mostram que o aumento do amortecimento em malha fechada, foi alcançado com grande redução do esforço de controle. Jing et al., 2008, pesquisaram o controle ativo de vibração para estruturas inteligentes baseado em lógica Fuzzy. As regras Fuzzy *IF-THEN* são estabelecidas na análise das características de movimento de uma viga em balanço. Os resultados das simulações ilustram que o método proposto apresenta um desempenho de controle superior aos métodos existentes. Lin e Venna, 2008, propuseram uma metodologia eficaz para determinar a localização ideal de transdutores piezelétricos para controle passivo de vibração de estruturas geometricamente complexas e cascas com diferentes curvaturas. Uma estrutura em casca de pradão industrial de uma aeronave é considerada para a análise de colocação do atuador e verificação experimental.

Mehrabian e Koma, 2009, apresentaram uma nova técnica para o posicionamento ótimo de piezelétricos atuadores em estruturas inteligentes. Na qual é considerada como função objetivo a função de resposta em frequência do sistema. O algoritmo busca a maximização dos picos da resposta em frequência para encontrar o posicionamento ótimo. Qiu e Ji, 2011, apresentaram algumas pesquisas sobre as aplicações de materiais piezelétricos em estruturas inteligentes, incluindo controle semiativo de vibração com base no amortecimento de comutação sincronizado usando capacitância negativa, captação de energia usando novas interfaces eletrônicas, monitoramento da saúde estrutural com base em um novo tipo de fibras piezelétricas com núcleo de metal, e controle ativo de histerese baseado no novo modelo Prandtl-Ishlinskii modificado.

Mitchell et al., 2012, propuseram um modelo complexo de estruturas inteligentes equipados com amortecedores magnetoreológicos, onde o comportamento não linear do sistema de amortecedor da estrutura é representado por meio da utilização de um sistema de inferência baseada no modelo neural Wavelet-Fuzzy.

1.6 Objetivos

O objetivo principal do presente trabalho é de desenvolver e implementar uma metodologia de otimização topológica de atuadores piezelétricos compostos (MFC) em placa laminada de material composto, buscando seu melhor posicionamento para o controle de vibrações estruturais, bem como desenvolver uma metodologia de controle estrutural através do uso do controlador LQR e LQG. Para tanto foram utilizadas técnicas de otimização

topológica baseadas da maximização do traço do Gramiano de controlabilidade, o qual informa quantitativamente a relação do posicionamento do atuador e o desempenho do controle para essa posição. Além disso, utilizou-se o resultado das topologias ótimas do atuador MFC no posicionamento dos atuadores nas análises de controle propostas.

De forma detalhada, pode-se especificar os objetivos específicos deste trabalho como:

- Estudar o funcionamento do transdutor piezelétrico composto, MFC (Macro Fiber Composite), bem como propor uma modelagem para o efeito eletromecânico entre o transdutor MFC e a estrutura.

- Validar, através de estudo comparativo com dados experimentais da bibliografia, a proposta do modelo para o efeito eletromecânico supracitado.

- Utilizar elementos finitos para cálculo de placa laminada, bem como para casca laminada.

- Desenvolver e implementar uma metodologia de otimização topológica para encontrar a localização ótima do atuador piezelétrico composto (MFC) na camada ativa de uma placa laminada de material composto, através da maximização do traço do Gramiano de controlabilidade, para o controle de vibrações estruturais.

- Avaliar o resultado da controlabilidade a partir do posicionamento ótimo encontrado através da otimização topológica e da otimização paramétrica.

- Implementar uma estratégia de controle estrutural através do uso do controlador LQR e LQG juntamente com o filtro de Kalman, bem como a avaliação de seus desempenhos.

- Efetuar um estudo experimental com o atuador MFC no controle de vibrações estruturais em uma placa em balanço.

1.7 Organização do Trabalho

Devido ao caráter multidisciplinar desta tese, incluindo as áreas de piezeletricidade, otimização e controle, optou-se por realizar a revisão bibliográfica e fundamentação teórica de forma dividida. Desse modo, as referências bibliográficas e a fundamentação teórica de cada assunto são apresentadas ao longo dos referidos capítulos. O mesmo procedimento foi seguido para descrever as metodologias adotadas.

No Capítulo 2 é apresentada a modelagem estrutural para a casca laminada composta utilizando o método de elemento finito. Além disso, é apresentada a teoria de elasticidade linear infinitesimal, o comportamento macromecânico de uma lâmina, a montagem das

matrizes de rigidez e massa, e a apresentação do vetor de forças a partir do modelo estrutural proposto.

O Capítulo 3 apresenta a teoria de controle estrutural. Inicialmente uma revisão bibliográfica é realizada. Posteriormente, a teoria de modelo estrutural modal, do controlador LQR e LQG, bem como conceitos de controlabilidade, observabilidade e de observadores de estado são também apresentados. Por fim, uma metodologia para determinar as matrizes de ponderação é proposta.

O método de otimização topológica é revisto no Capítulo 4 juntamente com uma introdução ao conceito de otimização estrutural e uma breve revisão histórica. Os conceitos básicos de otimização, como: variáveis de projeto, função objetivo, restrições de projeto, domínio viável e inviável, bem como os conceitos teóricos como domínio fixo estendido e modelos materiais são revistos. Ao final do capítulo, os aspectos numéricos e complicações do método, como a não unicidade de soluções, instabilidade de tabuleiro e dependência de dados, são brevemente descritos.

Baseado nos conceitos apresentados nos capítulos anteriores, um projeto de otimização topológica para o posicionamento ótimo do atuador MFC na camada ativa da estrutura para redução de vibrações é proposto no Capítulo 5. Assim, a função objetivo e as restrições do projeto de otimização topológica para redução de vibrações são apresentados. Métodos de programação matemática e a resolução de problemas de otimização por meio da programação linear sequencial (SLP) são revisados. Ao fim do capítulo, os cálculos de sensibilidade necessários na resolução dos problemas de otimização são desenvolvidos.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados obtidos a partir das metodologias de otimização topológica e controle estrutural propostas neste trabalho. Por fim, no capítulo 7 são apresentadas as conclusões, os resultados publicados e as sugestões para trabalhos futuros.

2. MODELAGEM ESTRUTURAL DE CASCA COMPOSTA LAMINADA UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

No presente trabalho, adotou-se para a solução das equações de equilíbrio do problema, uma formulação utilizando o método dos elementos finitos (MEF). Esta formulação contempla a análise das equações de equilíbrio da teoria de elasticidade linear infinitesimal, a modelagem de materiais compostos laminados, além da montagem das matrizes que são utilizadas para resolver o problema modal, estático e dinâmico. Somente a partir do bom desenvolvimento dessas etapas é possível obter resultados confiáveis no controle estrutural e na otimização empregados nesse trabalho, uma vez que esses processos utilizam parâmetros calculados na solução do problema por elementos finitos. Uma fonte de consulta a respeito da teoria de Mecânica dos sólidos e elasticidade linear pode ser encontrada em Spencer, 1980 [Spencer, 1980] e Atkin e Fox 1980 [Atkin e Fox 1980].

Com o intuito de abordar os aspectos básicos necessários na solução do problema, o presente capítulo está organizado na seguinte forma: na Seção 2.1 é apresentada a teoria de elasticidade linear infinitesimal; na Seção 2.2 apresenta-se o princípio variacional, a discretização por elementos finitos, o elemento finito de casca utilizado, além do campo de deslocamento; já, na Seção 2.3 abordam-se os aspectos relativos ao comportamento macromecânico de uma lâmina e as simplificações devido à teoria de estado plano de tensão; A Seção 2.4 apresenta as transformações de coordenadas do sistema local da lâmina, sistema local do elemento e do sistema global; O teorema de laminação de primeira ordem é apresentado na Seção 2.5. Por fim, na seção 2.6, 2.7 e 2.8 são apresentados os procedimentos para montagem da matriz de rigidez, massa e do vetor de força, respectivamente.

2.1 Elasticidade Linear Infinitesimal

O problema de elasticidade linear infinitesimal pode ser visualizado na Figura 2.1. Considera-se um corpo genérico ocupando a região Ω no espaço sujeito as condições de carregamentos e deslocamentos ilustrados. Sendo \mathbf{b} a força de corpo aplicada em todo o domínio Ω , sujeito a carregamento \mathbf{t} na superfície Ω_t (condição de contorno de Neumann) e com condições de contorno determinadas em sua superfície Ω_u (condições de contorno de Dirichlet).

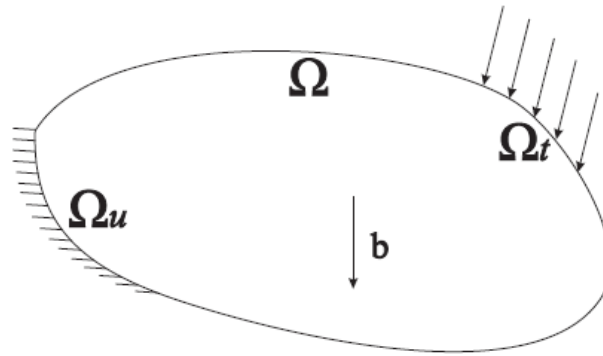


Figura 2.1 – Problema de Elasticidade Linear Infinitesimal.

A equação de equilíbrio para um problema de elasticidade linear infinitesimal é descrita pela Equação 2.1

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \gamma \ddot{u}_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} são os componentes do tensor de Cauchy, x_j são as coordenadas de um ponto qualquer do corpo, b_i representa as forças de corpo, γ é a massa específica do material constituinte do corpo e \ddot{u}_i é a aceleração de um ponto qualquer do corpo válido em todo o domínio Ω .

A relação constitutiva é dada pela Equação 2.2:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad , \quad (2.2)$$

sendo \mathbf{C} o tensor constitutivo elástico de quarta ordem que relaciona as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ com as tensões mecânicas $\boldsymbol{\sigma}$.

A relação cinemática para um modelo linear infinitesimal é dada pela Equação 2.3, nesse caso, termos de alta ordem de deformação são negligenciados.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Por fim, são definidas as condições de contorno do problema, condições de contorno essenciais (condições de Dirichlet) e condições de contorno naturais (Neumann) representadas respectivamente pela Equação 2.4.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_p \quad \text{em } \Omega_u, \\ \sigma_{ij}n_j &= t_i \quad \text{em } \Omega_t, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde \mathbf{u} é o vetor contendo os deslocamentos de um ponto dentro do domínio Ω_u , valores estes prescritos em \mathbf{u}_p . Já, \mathbf{t} é o vetor contendo o carregamento aplicado na superfície do domínio Ω_t e \mathbf{n} é o vetor normal à superfície nessa região. Utilizando as equações apresentadas nessa seção, é possível resolver o problema de elasticidade infinitesimal proposto nesse trabalho, as considerações apresentadas serão desenvolvidas durante o trabalho.

2.2 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma das formas de se solucionar as equações de equilíbrio da teoria de elasticidade linear infinitesimal, utilizada nesse trabalho. O MEF é um procedimento numérico utilizado para construir soluções aproximadas de problemas encontrados em análises de engenharia [Seegerlind, 1984]. O método consiste na divisão do domínio original do problema em pequenos subdomínios, denominados de elementos finitos, e utiliza o método variacional para construir uma aproximação da solução sobre o conjunto dos elementos finitos [Becker et al. 1981].

Em relação ao MEF, bons textos podem ser encontrados em Hughes [Hughes, 1987], Zienkiewicz [Zienkiewicz e Taylor, 2000a, 2000b] e Bathe [Bathe, 1996]. Na sequência dessa seção, será feita uma breve explicação para o entendimento da metodologia aplicada, utilizando o MEF para resolver um problema genérico de elasticidade linear infinitesimal.

Considerando o corpo genérico apresentado na Figura 2.1 e as equações apresentadas na seção anterior, pode-se escrever a forma variacional do problema, forma fraca, utilizando os procedimentos descritos por Zienkiewicz [Zienkiewicz e Taylor, 2000b].

$$\int_{\Omega} \delta u_i \gamma \ddot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega_t} \delta u_i t_i d\Omega_t = 0, \tag{2.5}$$

e na forma matricial, a Equação 2.5 pode ser escrita da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \gamma \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Omega_t = 0 . \quad (2.6)$$

Utilizando o MEF, o domínio é discretizado em elementos finitos, onde cada um ocupa um domínio Ω^e , e contém um determinado número de nós. A partir do método de Galerkin [Zienkiewicz e Taylor, 1991] o campo de deslocamentos \mathbf{u} e virtuais $\delta \mathbf{u}$ é interpolado através das funções de forma \mathbf{N} associadas aos nós do elemento finito e a \mathbf{u}^e , que contém os deslocamentos nodais aproximados. A seguinte equação representa os deslocamentos.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \quad e \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\delta \mathbf{u}^e . \quad (2.7)$$

A partir da discretização, usando as Equações 2.3 e 2.7 para a deformação virtual, pode-se escrever

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}\delta \mathbf{u}^e , \quad (2.8)$$

onde \mathbf{F} é uma matriz de transformação, e a forma como é implementada nesse trabalho está descrita no ANEXO II. Já o vetor tensão, pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{u}^e , \quad (2.9)$$

sendo \mathbf{C} a matriz com as relações constitutivas.

Substituindo as relações apresentadas da equação 2.7 até 2.9, é possível reescrever a Equação 2.6 da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \gamma \mathbf{N} d\Omega^e \ddot{\mathbf{u}}^{eT} + \int_{\Omega^e} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} d\Omega^e \mathbf{u}^{eT} - \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega^e + \int_{\Omega_t^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega_t^e \right) \right) = 0 , \quad (2.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \gamma \mathbf{N} d\Omega^e , \\ \mathbf{K}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} d\Omega^e , \\ \mathbf{f}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega^e + \int_{\Omega_t^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega_t^e , \end{aligned} \quad (2.11)$$

considerando $\delta \mathbf{u}^{eT} \neq 0$ e as relações da Equação 2.11, a Equação 2.10 pode ser escrita como

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e = 0 , \quad (2.12)$$

onde \mathbf{M}^e , \mathbf{K}^e são respectivamente as matrizes de massa e rigidez elementar da estrutura, \mathbf{f}^e é o vetor de forças elementar da estrutura, $\ddot{\mathbf{u}}^e$ e \mathbf{u}^e são os vetores de aceleração e deslocamento nodais, respectivamente.

Levando em conta a hipótese de modelo linear e considerando o princípio da superposição, pode-se escrever a Equação 2.12 como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} , \quad (2.13)$$

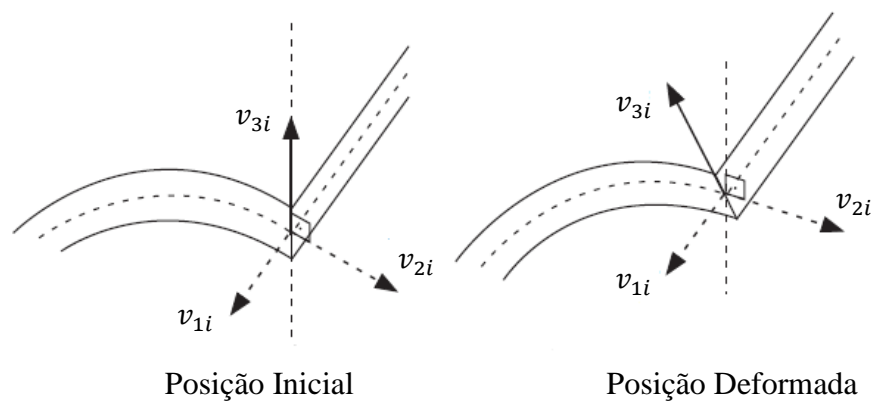
sendo \mathbf{M} a matriz de massa global, \mathbf{K} a matriz de rigidez global, $\ddot{\mathbf{u}}$ vetor de aceleração, \mathbf{u} vetor de deslocamento da estrutura e \mathbf{f} é o vetor de forças aplicadas a estrutura. A forma como é obtida as matrizes \mathbf{K} , \mathbf{M} e o vetor \mathbf{f} , será apresentada nas Seções 2.6, 2.7 e 2.8, respectivamente.

2.2.1 Elemento Finito de Casca laminada

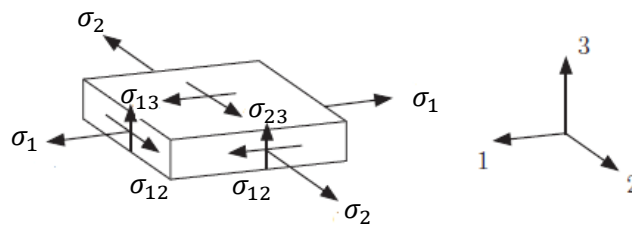
O elemento utilizado nesse trabalho é um elemento finito de casca baseado no trabalho de Ahmad [Ahmad et al, 1970]. Esse elemento é desenvolvido a partir de um elemento sólido tridimensional, após um processo de degeneração. Esse procedimento possui como característica a redução na direção da espessura do elemento sólido. O elemento de

casca degenerado pode ser empregado para análise de estruturas de placas e cascas compostas laminadas com qualquer geometria, espessas ou delgadas e também para a análise não-linear.

Como hipótese cinemática, Figura 2.2 (a), considera-se que as normais à superfície média do elemento permanecem retas após a deformação do elemento, porém não necessariamente permanecem normais à superfície. Como hipótese mecânica, Figura 2.2 (b), considera-se que a componente normal do tensor das tensões de Cauchy na direção do vetor diretor (direção da espessura, eixo 3) de um ponto qualquer da superfície média deve ser nula durante todo o movimento, admitindo nesse caso um estado plano de tensões ($\sigma_{33} = 0$).



(a) Hipótese Cinemática



(b) Hipótese Mecânica

Figura 2.2 – Representação das hipóteses cinemática (a) e mecânica (b) em coordenadas genéricas (1, 2, 3).

O elemento possui 8 nós na superfície média. O movimento de cada um dos nós é representado por 5 graus de liberdade, três responsáveis pelo deslocamento (u_i, v_i, w_i) e dois responsáveis pelas rotações (α_{1i} e α_{2i}), as coordenadas geométricas do elemento são representadas pelo vetor nodal v_{3i} e os vetores v_{1i} e v_{2i} normais ao primeiro. Com esse arranjo é possível incluir os graus de liberdade que referenciam os pontos da superfície inferior e superior do sólido, através dos nós localizados na superfície média do elemento.

Foram utilizados nesse elemento dois pontos de integração na direção ζ , já no plano ξ e η foram utilizados 3×3 pontos de integração, sendo nesse caso uma integração numérica consistente [Bathe, 1982].

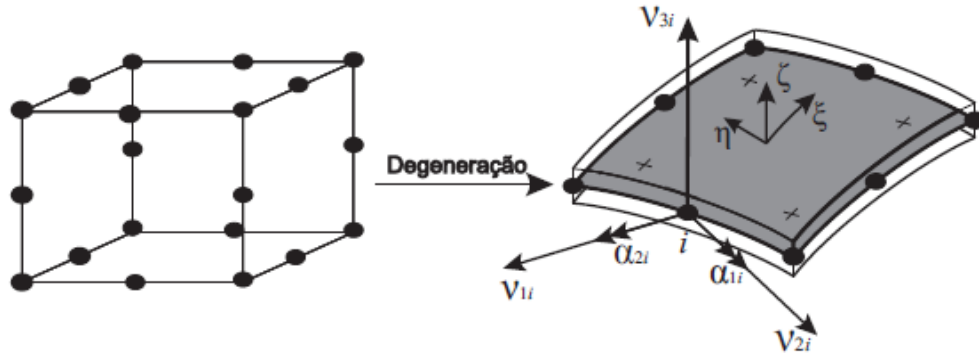


Figura 2.3 – Elemento Sólido Tridimensional e Elemento de Ahmad.

Na Figura 2.4 é demonstrado o elemento finito com o posicionamento dos nós.

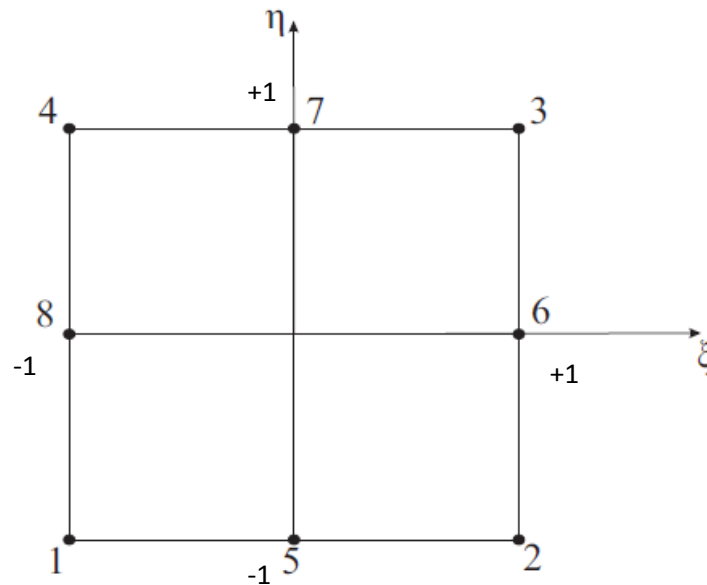


Figura 2.4 – Elemento finito quadrilátero linear isoparamétrico de 8 nós.

As funções de forma para o elemento quadrilátero linear isoparamétrico de 8 nós (serendipity), podem ser visualizadas em 2.14:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta) & N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta) & N_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta) & N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta) & N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

As derivadas das funções de forma para o elemento finito estão no ANEXO I. Alguns resultados sobre a análise de convergência e de precisão do elemento finito implementado para placas e cascas foram apresentados por De Souza, 2003 [De Souza, 2003], os quais apresentaram soluções satisfatórias para essas análises.

2.2.2 Campo de deslocamento do Elemento de Casca

O elemento finito utilizado no trabalho, apresentado na Seção 2.2.1, possui 8 nós e as seções ao longo da espessura são geradas por linhas retas. O sistema referencial local de cada elemento é constituído pelas coordenadas curvilíneas ξ e η localizadas na superfície média, e pela coordenada linear ζ na direção da espessura do elemento. Os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento de casca são obtidos através da diferença entre a coordenada do ponto depois e antes da deformação [Bathe, 1996]. As coordenadas de qualquer ponto do elemento são dadas pela Equação 2.15.

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \left(\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} v_{31i} \\ v_{32i} \\ v_{33i} \end{Bmatrix} \right), \tag{2.15}$$

onde $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de interpolação para cada nó do elemento, $\{u_i \ v_i \ w_i\}^T$ representa as coordenadas de cada nó no sistema global, t_i é a espessura do elemento no nó i , $v_{3i} = \{v_{31i} \ v_{32i} \ v_{33i}\}^T$ é o vetor normal à superfície média do nó i , ξ, η, ζ são as coordenadas paramétricas, que variam de ± 1 . As coordenadas dos pontos são representadas após a deformação com o índice sobrescrito 1 e antes da deformação com o índice sobrescrito 0.

A diferença entre os vetores normais antes e depois da deformação é dada por

$$v_{3i} = v_{3i}^1 - v_{3i}^0 . \quad (2.16)$$

Definindo α_{1i} e α_{2i} como as rotações do vetor diretor v_{3i} em torno dos vetores v_{1i} e v_{2i} (que definem o sistema local, ver Figura 2.2 (a)), a Equação 2.16 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$v_{3i} = -v_{2i}\alpha_{1i} + v_{1i}\alpha_{2i} . \quad (2.17)$$

Finalmente, substituindo a Equação 2.17 na Equação 2.15, chega-se a:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} v_{11i} \\ v_{12i} \\ v_{13i} \end{Bmatrix} \alpha_{2i} \\ &- \zeta \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \begin{Bmatrix} v_{21i} \\ v_{22i} \\ v_{23i} \end{Bmatrix} \alpha_{1i} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para que sejam feitas as devidas mudanças de coordenadas para o domínio físico do elemento e o mapeamento do elemento mestre, é necessário o cálculo do Jacobiano do elemento finito. A matriz jacobiana é dada pela Equação 2.19 e seus termos estão escritos de forma explícita no ANEXO II.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} . \quad (2.19)$$

A Equação 2.20 representa o termo Jacobiano, que é o determinante da matriz jacobiana descrita em 2.19. A condição necessária e suficiente para que seja possível realizar as transformações de coordenadas é que o Jacobiano seja diferente de zero.

$$|J| = \det[J] \neq 0 . \quad (2.20)$$

2.3 Comportamento Macromecânico de uma Lâmina

No presente trabalho utiliza-se material ortotrópico, como é o caso das lâminas de materiais compostos, e elasticidade linear. Com base nisso, a lei de Hooke generalizada apresentada na Equação 2.2 que relaciona tensão com deformações será desenvolvida aqui para apresentar as simplificações que podem ser feitas no modelo. O tensor constitutivo de quarta ordem se aplica a materiais anisotrópicos em geral, uma vez que a tensão e deformação são tensores de segunda ordem. Para um problema tridimensional, o tensor \mathbf{C} possui 81 incógnitas (3^4). No entanto, levando em consideração a simetria de tensões (Equação 2.21) e a simetria de deformações (Equação 2.22) é possível reduzir o número de incógnitas através dessas simplificações.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (2.22)$$

As observações de simetria de (2.21) e (2.22) reduzem de 81 para 36 o número de constantes necessárias para a determinação da relação constitutiva. A forma quadrática da energia de deformação leva a mais uma simplificação, onde $C_{ijkl} = C_{klij}$, o que permite deduzir que o tensor constitutivo, Equação 2.23, é simétrico e possui apenas 21 constantes elásticas diferentes. A prova dessas simplificações pode ser encontrada em livros sobre materiais composto como [Jones, 1999] e [Reddy, 1984].

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Materiais caracterizados por tensores da forma de (2.23) são considerados anisotrópicos (triclínicos), por não apresentarem planos de simetria de suas propriedades materiais, ou seja, os três eixos do material são oblíquos entre si [Jones, 1999].

Se houver dois planos ortogonais de simetria para as propriedades materiais, existirá simetria em relação a um terceiro plano ortogonal e o material é dito ortotrópico. Nesses casos não há interação entre tensões cisalhantes e deformações normais, além de não haver também entre tensões normais e deformações cisalhantes. Para esse caso, o tensor apresenta apenas 9 coeficientes elásticos independentes. A relação tensão-deformação na direção principal do material é expressa por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Por fim, considerando-se $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$, podemos escrever a matriz de flexibilidade \mathbf{S} como:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

onde E_1, E_2 e E_3 são os módulos de elasticidade do material nas direções 1, 2 e 3 respectivamente, ν_{12}, ν_{23} e ν_{31} coeficiente de Poisson e G_{12}, G_{23} e G_{31} os módulos de cisalhamento nos planos 1-2, 2-3 e 3-1, respectivamente.

2.3.1 Estado Plano de Tensões

Como já descrito nesse capítulo, admite-se como hipótese mecânica do elemento o Estado Plano de Tensões (EPT). Dessa forma, considerando-se o EPT e uma relação para a deformação normal apresentada por Hughes [Hughes, 1987] e Jones [Jones, 1999], pode-se simplificar a relação tensão-deformação apresentada na Seção 2.3, escrevendo uma relação para a deformação correspondente ao eixo z (nas coordenadas da lâmina). A deformação normal pode ser determinada através da relação constitutiva usando o tensor para o caso ortotrópico [Ashton e Whitney, 1970, *apud* Jones, 1999], da seguinte maneira.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{C_{33}} (\sigma_z - C_{13}\varepsilon_x - C_{23}\varepsilon_y), \quad (2.26)$$

considerando o estado plano de tensões $\sigma_z = 0$, a Equação 2.26 pode ser reescrita como

$$\varepsilon_z = \frac{1}{C_{33}} (-C_{13}\varepsilon_x - C_{23}\varepsilon_y) . \quad (2.27)$$

A partir dessa consideração a matriz da relação constitutiva diminui sua dimensão (passa a ser 5 x 5), e pode ser escrito na forma (2.28), onde a matriz C^{dpl} é chamada de matriz de rigidez reduzida do estado plano de tensão.

$$C^{dpl} = \begin{bmatrix} C_{11}^{dpl} & C_{12}^{dpl} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{dpl} & C_{22}^{dpl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^{dpl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55}^{dpl} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{dpl} \end{bmatrix} . \quad (2.28)$$

Os termos da Equação 2.28 são definidos em função da Equação 2.29:

$$\begin{cases} C_{ij}^{dpl} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}}, & \text{se } i, j = 1, 2 \\ C_{ij}^{dpl} = C_{ij}, & \text{se } i, j = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (2.29)$$

Essa formulação é apresentada em Jones, 1999 [Jones, 1999] e Hughes, 1987 [Hughes, 1987]. Por fim, a matriz apresentada na Equação 2.29 está expressa nas coordenadas da lâmina e não do laminado, sendo necessário fazer uma transformação para as coordenadas globais do laminado. Esse procedimento será explicitado na Seção 2.4, que segue.

2.4 Transformação de coordenadas

Para a implementação apropriada de um elemento finito de casca, é preciso que se defina os diferentes sistemas de coordenadas envolvidos na formulação da geometria e cinética desse elemento. Isso se torna ainda mais importante quando se está calculando cascas laminadas, com camadas ortotrópicas [De Souza, 2003]. Na Figura 2.5 são apresentados os sistemas de coordenadas envolvidas na formulação do problema proposto nesse trabalho. Os eixos coordenados do sistema da direção principal do laminado são definidos como $\{e_x^{dpl}, e_y^{dpl}, e_z^{dpl}\}$, e a definição desse sistema é necessária para a análise de lâminas de material ortotrópico. Os eixos coordenados do sistema local da casca são $\{e_x^{slc}, e_y^{slc}, e_z^{slc}\}$, e a orientação de cada camada está definida em relação a esse sistema de coordenadas. Por último, o sistema global é representado por $\{e_1^{sgl}, e_2^{sgl}, e_3^{sgl}\}$, e é nesse sistema de referência que os deslocamentos são apresentados.

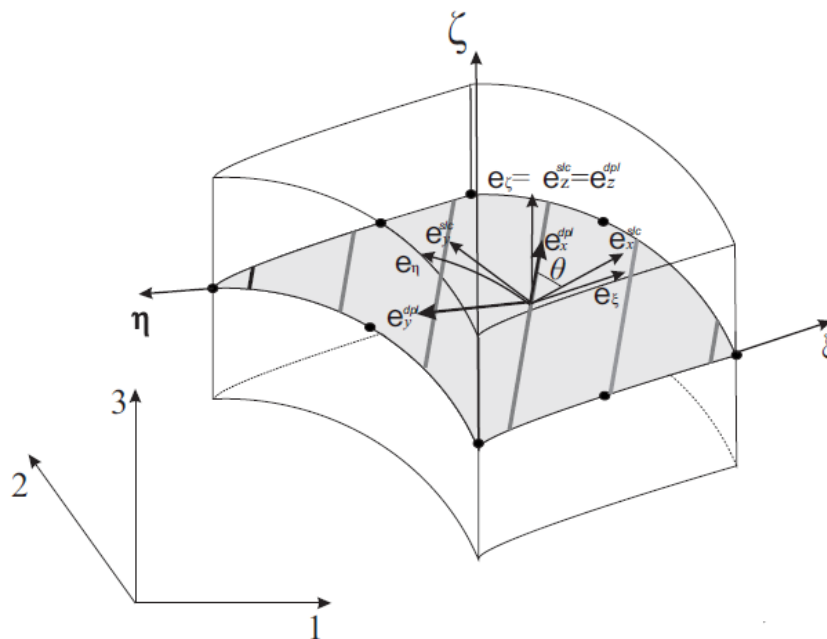


Figura 2.5 – Sistemas coordenados utilizados no trabalho.

O procedimento utilizado para as transformações necessárias dos sistemas de coordenadas e também a determinação dos versores e vetores do sistema coordenado local, será apresentado na Seção 2.4.1 e pode ser encontrado em Hughes [Hughes, 1987].

2.4.1 Sistema Coordenado Local

Em cada ponto de integração do elemento é montado um sistema cartesiano de referência de modo que os dois eixos sejam tangentes à lâmina através desse ponto, e o terceiro eixo seja perpendicular. Os vetores base são calculados de forma inicial construindo-se os versores tangentes às direções dos eixos coordenados ξ e η .

$$e_{\xi} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi}}{\|\mathbf{x}_{,\xi}\|}, \quad (2.30)$$

$$e_{\eta} = \frac{\mathbf{x}_{,\eta}}{\|\mathbf{x}_{,\eta}\|}, \quad (2.31)$$

$$\text{onde } \mathbf{x}_{,\xi} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta_1} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \zeta_1} \quad \frac{\partial x_3}{\partial \zeta_1} \right\}^T \text{ e } \mathbf{x}_{,\eta} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \quad \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \right\}^T.$$

O vetor normal a esses dois vetores será o vetor normal à superfície média no ponto de integração em análise, que pode ser calculado através do produto externo entre os versores das Equações 2.30 e 2.31, obtendo-se:

$$\mathbf{e}_3^{slc} = \frac{\mathbf{e}_{\xi} \times \mathbf{e}_{\eta}}{\|\mathbf{e}_{\xi} \times \mathbf{e}_{\eta}\|}. \quad (2.32)$$

Os versores apresentados em 2.30 e 2.31 somente serão perpendiculares entre si, caso o elemento finito seja retangular, ou seja, malhas regulares. Já para casos com malhas não regulares, pode se descrever uma formulação que permite trabalhar com esse tipo de malha seguindo os procedimentos apresentados na sequência.

Nessa formulação, o sistema local da casca pode ser determinado considerando-se que o ângulo formado entre \mathbf{e}_1^{slc} e \mathbf{e}_{ξ} é igual ao ângulo entre \mathbf{e}_2^{slc} e \mathbf{e}_{η} . Assim, a base \mathbf{e}_1^{slc} e \mathbf{e}_2^{slc} é a mais próxima possível de \mathbf{e}_{ξ} e \mathbf{e}_{η} , conforme [Hughes, 1987].

$$\mathbf{e}_1^{slc} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta) , \quad (2.33)$$

$$\mathbf{e}_2^{slc} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta) , \quad (2.34)$$

onde

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta)}{\left\| \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta) \right\|} , \quad (2.35)$$

$$\mathbf{e}_\beta = \frac{\mathbf{e}_3^{slc} \times \mathbf{e}_\alpha}{\left\| \mathbf{e}_3^{slc} \times \mathbf{e}_\alpha \right\|} . \quad (2.36)$$

Após a obtenção dos sistemas de coordenadas do laminado e do sistema de casca, é preciso rotacioná-los, de forma que se possa obter a matriz com a relação constitutiva no sistema de coordenada global, para posterior montagem da matriz de rigidez do elemento e por consequência da matriz de rigidez global.

A matriz \mathbf{T} de transformação, Equação 2.37, passa as coordenadas do laminado para o sistema da casca. Essa matriz pode ser escrita com as dimensões 6 x 6 segundo Hughes, 1987. Mas, a partir do estado plano de tensão, sugere-se a retirada da terceira linha da matriz, essa simplificação é utilizada em [De Souza, 2003] e [De Leon, 2011].

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & n_1 l_3 + n_3 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \end{bmatrix} , \quad (2.37)$$

onde,

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(e_1^{dpl}, e_1^{slc}); & m_1 &= \cos(e_2^{dpl}, e_1^{slc}); & n_1 &= \cos(e_3^{dpl}, e_1^{slc}) \\ l_2 &= \cos(e_1^{dpl}, e_2^{slc}); & m_2 &= \cos(e_2^{dpl}, e_2^{slc}); & n_2 &= \cos(e_3^{dpl}, e_2^{slc}) \\ l_3 &= \cos(e_1^{dpl}, e_3^{slc}); & m_3 &= \cos(e_2^{dpl}, e_3^{slc}); & n_3 &= \cos(e_3^{dpl}, e_3^{slc}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

A matriz de rotação apresentada em 2.37 será utilizada em duas rotações, do sistema laminado para o sistema da casca e do sistema da casca para o sistema de coordenadas global. A primeira transformação pode ser descrita por

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

onde $c = \cos(\theta)_k$ e $s = \sin(\theta)_k$ e o subíndice k indica a k -ésima camada do laminado. Com a matriz \mathbf{T}_1 , Equação 2.39, pode-se determinar a matriz constitutiva rotacionada para o sistema local da casca em 2.40, através da rotação na matriz constitutiva do sistema laminado. Além disso, a terceira coluna da matriz \mathbf{T}_1 é nula, e pode ser eliminada, permitindo a multiplicação pelo tensor constitutivo \mathbf{C}_k^{dpl} , resultando no tensor \mathbf{C}_k^{slc} .

$$\mathbf{C}_k^{slc} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{C}_k^{dpl} \mathbf{T}_1. \quad (2.40)$$

Segundo, De Souza, 2003, é importante que os termos não nulos de \mathbf{C}_k^{slc} sejam explicitados, pois há economia de tempo computacional nos cálculos. Após a primeira rotação em 2.40 há a necessidade de realizar mais uma rotação, passando do sistema local do elemento para o sistema global. Na primeira transformação do sistema do laminado para o sistema da casca, manteve-se o eixo 3 na mesma posição para os dois sistemas, já que o sistema local do elemento e o que acompanha a direção do laminado estão no mesmo plano. Para que seja possível obter a matriz constitutiva na coordenada global, é necessário que se faça uma transformação no espaço, utilizando-se novamente a matriz \mathbf{T} e substituindo na mesma os valores dos vetores, \mathbf{l} , \mathbf{m} e \mathbf{n} descritos em 2.41.

$$\begin{cases} \mathbf{l} = \{e_{11}^{slc} & e_{12}^{slc} & e_{13}^{slc}\}^T \\ \mathbf{m} = \{e_{21}^{slc} & e_{22}^{slc} & e_{23}^{slc}\}^T \\ \mathbf{n} = \{e_{31}^{slc} & e_{32}^{slc} & e_{33}^{slc}\}^T \end{cases} \quad (2.41)$$

Substituindo os valores dos vetores de 2.41 na matriz de rotação de 2.37, tem-se a matriz de transformação no espaço T_2 em 2.42:

$$\begin{aligned}
 & T_2 \\
 & = \begin{bmatrix}
 (e_{11}^{slc})_2 & (e_{12}^{slc})_2 & (e_{13}^{slc})_2 & e_{21}^{slc} e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc} e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc} e_{21}^{slc} \\
 (e_{21}^{slc})_2 & (e_{22}^{slc})_2 & (e_{31}^{slc})_2 & e_{22}^{slc} e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc} e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc} e_{22}^{slc} \\
 2e_{12}^{slc} e_{13}^{slc} & 2e_{22}^{slc} e_{23}^{slc} & 2e_{32}^{slc} e_{33}^{slc} & e_{22}^{slc} e_{33}^{slc} + e_{23}^{slc} e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc} e_{33}^{slc} + e_{13}^{slc} e_{32}^{slc} & e_{12}^{slc} e_{23}^{slc} + e_{13}^{slc} e_{22}^{slc} \\
 2e_{11}^{slc} e_{13}^{slc} & 2e_{21}^{slc} e_{23}^{slc} & 2e_{31}^{slc} e_{33}^{slc} & e_{21}^{slc} e_{33}^{slc} + e_{23}^{slc} e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc} e_{33}^{slc} + e_{13}^{slc} e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc} e_{23}^{slc} + e_{13}^{slc} e_{21}^{slc} \\
 2e_{11}^{slc} e_{12}^{slc} & 2e_{21}^{slc} e_{22}^{slc} & 2e_{31}^{slc} e_{32}^{slc} & e_{21}^{slc} e_{32}^{slc} + e_{22}^{slc} e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc} e_{32}^{slc} + e_{12}^{slc} e_{31}^{slc} & e_{11}^{slc} e_{22}^{slc} + e_{12}^{slc} e_{21}^{slc}
 \end{bmatrix} \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Utilizando a matriz de rotação T_2 , chega-se a matriz constitutiva rotacionada para o sistema de coordenada global.

$$\bar{Q}_k = T_2^T C_k^{slc} T_2 \quad (2.43)$$

2.5 Teoria de laminação de Primeira ordem

Nesse trabalho é utilizada a teoria de laminação da deformação cisalhante de primeira ordem ou FSDT (*First Order Deformation Laminated Theory*), que é baseada nas hipóteses da teoria de placas de Mindlin-Reissner, onde se assume que um segmento de reta inicialmente normal ao plano médio da placa permanece reto após a deformação e, no entanto, não necessariamente permanecerá normal à superfície média da placa, desse modo, tensões cisalhantes transversais são introduzidas no modelo e sua variação se dá de forma linear através da espessura [Reddy, 2004]. Já a teoria clássica de laminação ou CLT (*Classical Lamination Theory*) se baseia nas hipóteses de Kirchoff para placas, onde diferentemente da FSDT as normais ao plano médio rotacionam de forma a permanecerem perpendiculares à superfície média após a deformação. Segundo Zhang e Yang, 2009, a FSDT em comparação com a CLT fornece boa relação entre eficiência computacional e precisão do comportamento global da estrutura para placas laminadas finas e semi-espessas. A Figura 2.6 apresenta a geometria de uma placa não deformada (a) e deformada (b) segundo a hipótese da teoria da primeira ordem (FSDT).

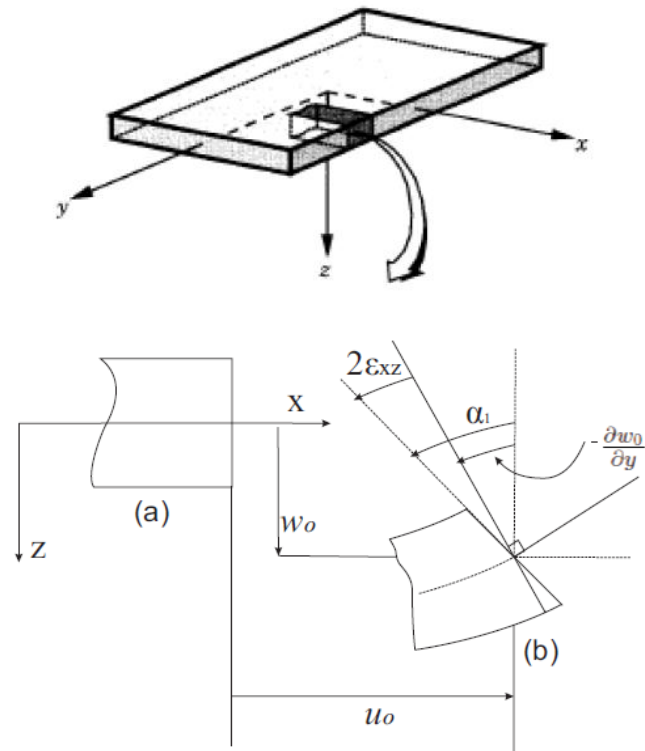


Figura 2.6 – Geometria (a) não deformada e (b) deformada de uma placa na hipótese da teoria da primeira ordem FSDT [Reddy, 1997].

O campo de deslocamento para a FSDT pode ser descrito na forma da Equação 2.44, sendo (u_0, v_0, w_0) os deslocamentos a serem determinados de um ponto da superfície média da placa, (α_1, α_2) as rotações do vetor normal transversal em torno do eixo x e y , respectivamente.

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\alpha_1, \\ v &= v_0 + z\alpha_2, \\ w &= w_0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial z} \quad e \quad \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2.45)$$

As deformações infinitesimais podem ser definidas na Equação 2.46 em forma de um vetor $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xy})$, tendo o vetor de deformações da membrana como

$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = (\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, 2\varepsilon_{xz}^0, 2\varepsilon_{yz}^0, 2\varepsilon_{xy}^0)$ e o vetor dos termos associados à curvatura $\boldsymbol{\kappa} = (\varepsilon_{xx}^1, \varepsilon_{yy}^1, 2\varepsilon_{xz}^1, 2\varepsilon_{yz}^1, 2\varepsilon_{xy}^1)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}. \quad (2.46)$$

Substituindo a Equação 2.43, que representa a rigidez transformada, e a Equação 2.46 na relação tensão-deformação $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\kappa}. \quad (2.47)$$

As camadas de lâminas do material composto podem ser somadas, sendo assim, os esforços normais \mathbf{N} a que o laminado está sujeito podem ser representados pela Equação 2.48, onde N é o número de camadas que compõem o laminado, $\boldsymbol{\sigma}_k$ é a tensão da k -ésima camada e z_k a distância do plano médio do laminado até o início da k -ésima camada.

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \boldsymbol{\sigma}_k dz. \quad (2.48)$$

Nessa teoria os termos relativos às forças transversais (N_{xz}, N_{yz}) serão constantes ao longo da integração na espessura, porém é de conhecimento que para vigas e placas laminadas compostas as tensões cisalhantes transversais variam pelo menos quadraticamente [Reddy 2004]. Para isso, utiliza-se um coeficiente de correção de cisalhamento K para corrigir essa diferença, multiplicando o coeficiente por essas forças resultantes. A definição e os procedimentos para determinar o coeficiente podem ser verificados em [Reddy, 2004], ou em outras bibliografias sobre materiais laminados.

Substituindo a Equação 2.47 em 2.48, pode escrever o esforço normal como:

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^N \left(\int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\varepsilon}^0 dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\kappa} z dz \right), \quad (2.49)$$

retirando os termos constantes da integral, tem-se

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^N \left(\bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\varepsilon}^0 \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz + \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\kappa} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z dz \right). \quad (2.50)$$

Após a resolução da integral definida, a Equação 2.50 pode ser escrita em uma forma compacta,

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{C}_2 \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.51)$$

onde \mathbf{C}_1 é a matriz de rigidez extensional e \mathbf{C}_2 é a matriz que contém os elementos responsáveis pelo acoplamento extensão-flexão, definidos pelas Equações 2.52 e 2.53, respectivamente.

$$\mathbf{C}_1 = \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_{k+1} - z_k), \quad (2.52)$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_{k+1}^2 - z_k^2). \quad (2.53)$$

Segundo De Leon 2011, o efeito de rigidez do acoplamento extensão-flexão representado pela matriz \mathbf{C}_2 não é óbvio, e aparece em um laminado composto de placas com rigidez diferentes, além disso, caso as placas sejam simétricas, os termos de \mathbf{C}_2 serão nulos.

Da mesma forma, o momento aplicado pode ser descrito pela Equação 2.54,

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz = \mathbf{C}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{C}_3 \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.54)$$

onde a matriz \mathbf{C}_3 representa os termos relacionados à flexão da placa e pode ser descrita pela Equação 2.55, após a resolução da integral definida da Equação 2.54.

$$\mathbf{C}_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_{k+1}^3 - z_k^3). \quad (2.55)$$

As relações descritas anteriormente podem ser agrupadas em uma única relação,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}. \quad (2.56)$$

A matriz da Equação 2.56 que possui os elementos \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 e \mathbf{C}_3 é denominada de matriz de rigidez do laminado, ela é utilizada durante o trabalho para determinar a matriz de rigidez da placa estudada, tendo a diferença de que será aplicado um procedimento apresentado por Kumar e Palaninathan [Kumar e Palaninathan, 1997]. Este procedimento foi utilizado nos trabalhos de [De Souza, 2003] e [De Leon, 2011], onde objetiva-se retirar a dependência da espessura nos termos da matriz na integração para obter a matriz rigidez e será apresentado na seção 2.6.

2.6 Matriz de Rigidez para cascas laminadas

Na montagem da matriz de rigidez de um elemento de casca laminado é necessário levar em conta as propriedades de cada lâmina [De Souza, 2003]. Esse procedimento pode ser feito a partir da mudança de variável proposta por Panda e Natarajan [Panda e Natarajan, 1981], os quais estenderam o conceito de elemento degenerado de Ahmad para cascas laminadas, tornando possível a montagem da matriz de rigidez para laminados.

A mudança de variáveis é representada pela Equação 2.57.

$$d\zeta = \frac{h_k}{t} d\zeta_k, \quad (2.57)$$

onde h_k é a espessura de cada lâmina e t a espessura total do laminado. O cálculo da matriz de rigidez do elemento é feito da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} |J| d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.58)$$

Substituindo a Equação 2.57 na Equação 2.58, tem-se a matriz de rigidez elementar para laminados,

$$\mathbf{K}_e = \sum_{k=1}^{nl} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} |J| \frac{h_k}{t} d\xi d\eta d\zeta_k , \quad (2.59)$$

onde nl é o número de lâminas que compõe o laminado.

A partir da Equação 2.59, faz-se a integração numérica em cada uma das três direções. Entretanto, com essa formulação tem-se um elevado custo computacional, dependendo da quantidade de lâminas, ficando dessa forma um procedimento viável apenas para estruturas com um pequeno número de laminas, uma vez que para estruturas com várias laminas o número de pontos em que deve ser calculado o valor das matrizes de rigidez pode ser excessivamente grande.

Devido a isso, utiliza-se nesse trabalho uma formulação proposta por [Kumar e Palaninathan, 1997] para computação de cascas de material composto utilizando integração explícita no sentido da espessura, onde z substitui $\zeta \frac{t}{2}$ e os elementos do inverso da matriz jacobiana são considerados constantes na direção da espessura. Assim, a integração é exata na direção da espessura. Com isso a matriz de deformação \mathbf{F} é dividida em duas parcelas, Equação 2.60, sendo ambas não dependentes da espessura. A matriz \mathbf{F} assume então a seguinte forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + z\mathbf{F}_2 . \quad (2.60)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez elementar passa a ser calculada pela Equação 2.61.

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{F}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{C}_3 \mathbf{F}_2] |J| d\eta d\xi , \quad (2.61)$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz jacobiana. As matrizes \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , assim como os elementos que compõem as mesmas, são apresentadas no ANEXO II. As matrizes \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 e \mathbf{C}_3 são apresentadas na seção 2.5 através das equações 2.52, 2.53 e 2.55, respectivamente. Por fim, após a obtenção da matriz de rigidez elementar monta-se a matriz de rigidez global. Esse procedimento é feito através do processo de sobreposição da matriz elementar na matriz global, levando em conta os nós de cada elemento e a ordem dos graus de liberdade de cada nó.

2.7 Matriz de Massa

As matrizes de massa dos elementos podem ser determinadas de duas formas, as chamadas matrizes de massa consistente, na qual se faz o uso de funções de interpolação e da formulação do MEF, e as matrizes de massa concentradas, conhecida do termo em inglês *lumped mass matrix*. Na matriz de massa concentrada se tem a possibilidade de armazenar os dados da matriz elementar em um vetor, e diagonalmente na matriz global. Dessa maneira tem-se um esforço computacional reduzido caso haja a necessidade de encontrar \mathbf{M}^{-1} . Devido a isso, utiliza-se nesse trabalho a matriz de massa concentrada. A definição de matriz de massa pode ser encontrada em [Hughes, 1987].

O processo de construção da matriz de massa \mathbf{M} é feito de forma paralela aos procedimentos de construção da matriz de rigidez \mathbf{K} . Primeiramente, a matriz de massa elementar é formada em coordenadas locais, transformadas em globais e posteriormente montada a matriz de massa global seguindo os mesmos procedimentos adotados na matriz de rigidez.

A montagem da matriz de massa elementar pode ser feita da seguinte forma.

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \gamma \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (2.62)$$

$$\begin{cases} N_i \gamma N_j, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (2.63)$$

onde para a matriz de massa concentrada os termos relacionados a rotação assumem o valor zero.

2.8 Vetor de Forças

O cálculo do vetor de forças dependerá do tipo de carregamento que atua na estrutura. Para o caso de forças ou momentos concentrados atuando sobre a superfície da estrutura, basta aplicar o equivalente valor na devida posição no vetor de forças. Já, no caso de forças distribuídas ou forças de corpo, é necessário realizar a integração dentro de cada elemento e posteriormente sobrepor essas forças no vetor de forças global.

O vetor de força de corpo é definido como:

$$\mathbf{f}_b = \int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{N}^T d\Omega , \quad (2.64)$$

onde \mathbf{b} representa a força de corpo que atua em cada ponto do domínio. Para o caso de força da gravidade, $\mathbf{b} = \gamma \mathbf{g}$, onde γ é a densidade do material e \mathbf{g} é o vetor de aceleração da força de campo, gravidade. Como a densidade do elemento varia em cada lâmina, a força de corpo para cada elemento é calculada da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}_b = \sum_{k=1}^{nl} \gamma_k \int_{\Omega} \mathbf{g} d\Omega \quad (2.65)$$

onde nl é o número de lâminas que compõe o laminado.

2.8.1 Vetor de Forças distribuídas devido ao MFC

Conforme evidenciado na Seção 1.2, os trabalhos que usam material piezelétrico no controle de estruturas, em geral, utilizam materiais do tipo piezocerâmicos (PZT) para atuação e sensoriamento. A partir do uso do PZT, a maioria dos trabalhos considera no modelo estrutural o efeito eletromecânico que surge da interação do efeito piezelétrico sobre a parte mecânica, e do efeito mecânico sobre o material piezelétrico. Para isso, é necessário considerar no modelo o campo elétrico gerado entre os eletrodos que envolvem o PZT (na Seção 1.3 é possível encontrar uma melhor descrição desse efeito, bem como sua modelagem), resultando assim, em um modelo estrutural mais complexo.

De forma diferente, o presente trabalho utiliza como uma alternativa ao tradicional PZT o atuador MFC. Mesmo assim, a maioria dos trabalhos apresenta modelos do MFC levando também em conta o efeito eletromecânico.

A partir disso, é proposto nessa tese um modelo para representar a interação entre o atuador MFC e a estrutura. O modelo proposto possui como vantagem uma implementação mais simples, além de ser tão eficiente quanto os tradicionais modelos que levam em conta o efeito eletromecânico. Neste modelo, considera-se que o vetor de força das cargas distribuídas na superfície da casca é obtido a partir de uma deformação inicial empregada nos elementos

da camada que contêm o MFC. Essa deformação é proporcional ao potencial elétrico aplicado no atuador. Assume-se que o MFC é uma das lâminas de material ortotrópico que sofre uma deformação inicial a partir da aplicação de um potencial elétrico e que essa deformação terá efeitos sobre o restante da estrutura através de forças normais e de momento, uma vez que o MFC é incluído no modelo estrutural, sendo utilizado como parte da estrutura, ou seja, a rigidez e a massa do MFC são consideradas no modelo. Dessa maneira, não é necessário modelar o campo elétrico gerado através dos eletrodos, uma vez que o efeito eletromecânico é considerado analiticamente neste trabalho.

Sendo assim, como já descrito, o vetor de força das cargas distribuídas na superfície da casca é obtido a partir de uma deformação inicial empregada nos elementos da camada que contêm o MFC. Essa deformação é proporcional a um potencial elétrico aplicado no atuador, e pode ser obtida pela seguinte equação,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{MFC} \phi , \quad (2.66)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_{MFC}$ é o vetor da deformação do MFC e ϕ é o potencial elétrico.

O vetor da deformação é representado por $\boldsymbol{\varepsilon}_{MFC} = (\varepsilon_{xx}^{MFC}, -\nu_{12}\varepsilon_{xx}^{MFC}, \varepsilon_{zz}^{MFC}, 0,0,0)$, onde ε_{zz}^{MFC} é obtido considerando o estado plano de tensão para material ortotrópico a partir da Equação 2.27, e a deformação livre do MFC na direção x é obtida através da seguinte equação

$$\varepsilon_{xx}^{MFC} = \frac{d_{33}}{w_h} , \quad (2.67)$$

onde d_{33} é a constante piezelétrica e w_h é distância entre os eletrodos do MFC. O valor dessas variáveis pode ser visualizado na Tabela 6.1 no Capítulo 6.

Em seguida, se faz a multiplicação da deformação inicial $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ (Equação 2.66) pela matriz de rigidez do laminado \mathbf{C} (Equação 2.56), a fim de se obter a tensão mecânica na superfície gerada por essa deformação, além da multiplicação pela matriz de deformação das funções de forma \mathbf{F} . Com essa última multiplicação e com a integração na superfície do elemento, é possível interpolar os valores das forças para os nós da superfície média dos elementos que recebem a contribuição da deformação da lâmina ativa que contêm o MFC. Esse procedimento resulta na equação,

$$\mathbf{f}_d = \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}^{0T} \mathbf{C} \mathbf{F} d\Omega_t . \quad (2.68)$$

Com isso, levando em conta as considerações feitas na Seção 2.6 para a matriz de rigidez do laminado e para a matriz de deformação, o vetor de forças distribuídas na superfície de cada elemento passa a ser escrito como

$$\mathbf{f}_d = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\boldsymbol{\varepsilon}^{0T} \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^{0T} \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_2] |J| d\xi d\eta . \quad (2.69)$$

As matrizes \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 assim como os elementos que compõem as mesmas são apresentadas no ANEXO II. As matrizes \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 são apresentadas na Seção 2.5 através das equações 2.52 e 2.53, respectivamente.

O vetor de força global é dado por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_d , \quad (2.70)$$

onde \mathbf{f}_c é o vetor de forças concentradas global, com carregamentos definidos em cada nó da malha para cada respectivo grau de liberdade.

3. CONTROLE ESTRUTURAL

3.1 Introdução

As técnicas de controle aplicadas neste trabalho são o regulador linear quadrático (LQR) e regulador linear gaussiano (LQG) [Meirovitch, 1990; Ogata, 1998; Burl, 1999; Preumont, 2002; Gawronski, 2004]. Os projetos de controle LQR e LQG são baseados na linearização dos sistemas dinâmicos, na minimização de um índice de desempenho quadrático que está associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controle, e na obtenção de uma matriz de ganhos (variantes no tempo ou não) usada no problema de controle em malha fechada. O sistema dinâmico é representado em espaço de estados utilizando coordenadas modais. No Controlador LQG, os estados não mensuráveis são estimados através do uso do observador de estados de ordem plena. O filtro de *Kalman* é utilizado para a escolha da matriz ótima de ganho do observador de estados de ordem plena e considera-se que o sistema dinâmico possui sinal ruidoso na entrada e na saída do tipo ruído branco.

Na engenharia de controle, a ação de controle consiste na atuação sobre um dado sistema de modo a atingir resultados de acordo com os objetivos previamente estabelecidos. Esses objetivos podem estar relacionados com o seguimento de uma trajetória ou com a redução de vibrações estruturais, entre outros. O sistema controlado é chamado de planta ou processo, onde se utiliza um controlador/atuador para direcionar os resultados na saída da planta aos objetivos desejados. Segundo Franklin et al., 1994, controle é o processo de conduzir uma variável de sistema para o valor desejado, ou seja, valor de referência.

Segundo Cheng et al., 2008, uma estrutura inteligente é integrada por sensores, atuadores e mecanismos de controle, apresentando a capacidade de perceber qualquer mudança no ambiente, diagnosticar problemas localizados, armazenar e processar dados de medição e comandar ações adequadas para, através de técnicas de controle, melhorar a eficiência do sistema, preservando a integridade estrutural e segurança. De acordo com Gaudiller e Matichard, 2005, estruturas inteligentes apresentam resultados adequados para o controle ativo de vibrações estruturais. Nesse aspecto, é de grande importância o estudo de técnicas de controle que satisfaçam às necessidades das estruturas inteligentes nas diversas condições de operação para as quais são projetadas, bem como, para eventuais incidências de perturbações.

Baseadas nesses aspectos, diversas pesquisas são realizadas na busca por novos projetos estruturais. Periódicos como *Smart Materials And Structures* são dedicados somente a esse assunto. Com o desenvolvimento de novas tecnologias nas áreas de materiais, computação, controle, entre outras, a concepção de projetos estruturais em estruturas inteligentes vem sofrendo constantes alterações. Estruturas cada vez mais esbeltas e leves vêm sendo projetadas e construídas, o que, em alguns casos, tem levado a problemas de vibrações.

As vibrações estruturais em excesso podem afetar o funcionamento de máquinas, provocar a fadiga de elementos ou levar estruturas ao colapso, como também comprometer a segurança humana. Diante disso, metodologias de controle para minimizar seus efeitos danosos estão sendo estudadas.

Os métodos ou técnicas convencionais de controle, segundo Ogata, 1998, têm sido desenvolvidos com modelos matemáticos no domínio do tempo e frequência, sendo divididos em controles clássicos e em controles modernos. No controle clássico, utilizam-se estratégias baseadas, principalmente, em modelos no domínio da frequência. Já, no controle moderno, técnica utilizada neste trabalho, às estratégias são baseadas em abordagem no domínio do tempo. A partir do conceito do controle moderno, é possível, por exemplo, representar um sistema em variáveis de estado.

Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com o uso da informação utilizada para calcular a ação de controle [Franklin et al., 2002], sendo divididos em controle em malha aberta e controle em malha fechada. O controle em malha aberta consiste em aplicar um sinal de controle pré-determinado, esperando-se que, ao final de um determinado tempo, a variável controlada atinja um determinado valor ou apresente um determinado comportamento. Neste tipo de sistema de controle não são utilizadas informações sobre a evolução do processo para determinar qual o sinal de controle a ser aplicado em um determinado instante. Mais especificamente, o sinal de controle não é calculado a partir de uma medição do sinal de saída [Ogata, 1998; Kuo, 2009]. De acordo com Kuo, 2009, é o tipo de sistema de controle mais simples e mais viável economicamente de ser implantado.

Diferentemente do controle em malha aberta, no controle em malha fechada, informações sobre como a saída de controle está evoluindo são utilizadas para determinar o sinal de controle que deve ser aplicado ao processo em um instante específico. Isto é feito a partir de uma realimentação da saída para a entrada. Em geral, a fim de tornar o sistema mais preciso, fazendo com que ele reaja a perturbações externas, o sinal de saída é comparado com um sinal de referência. A diferença entre estes dois sinais, conhecida como erro, é utilizada

para determinar o sinal de controle que deve efetivamente ser aplicado ao processo. Assim, o sinal de controle é determinado de forma a corrigir este desvio (erro) entre a saída e o sinal de referência. O dispositivo que utiliza o sinal de erro para determinar ou calcular o sinal de controle a ser aplicado à planta é chamado de controlador [Ogata, 1998; Franklin et al., 2002; Preumont, 2002; Kuo, 2009].

Pode-se encontrar na literatura diversos tipos de estratégias e formas para controlar vibrações estruturais indesejadas. Essas estratégias podem ser classificadas basicamente em três tipos: controle passivo, controle semiativo e controle ativo. Um conjunto de dispositivos puramente passivos consiste em uma estratégia de controle simples que pode ser empregada para controlar um sistema. Nesse caso, não é necessário o uso de energia externa nem de informações do sistema. Para o controle estrutural são utilizados dispositivos mais simples, como cabos e amortecedores, para absorver parte da energia de vibração. Em um sistema semiativo, uma pequena parcela de energia pode ser utilizada para modificar certas propriedades da estrutura, como rigidez e amortecimento estrutural, não ocorrendo entrada de energia externa no sistema.

Finalmente, um controle ativo consiste basicamente de sensores, atuadores e dispositivos para processar as informações. O sistema com o controle ativo possui capacidade de se adaptar a diferentes carregamentos e perturbações externas, podendo minimizar, por exemplo, respostas estruturais indesejadas, atenuando os efeitos danosos da vibração. Esse tipo de controlador, quando mal projetado, pode ocasionar sinais de controle instáveis e prejudiciais à estrutura.

A maior dificuldade em desenvolver um sistema de controle para uma estrutura contínua é a quantidade de graus de liberdade. A teoria de controle, tanto moderna quanto clássica, foi desenvolvida para poucos graus de liberdade [Silveira, 2012]. Deste modo, a análise modal é utilizada para reduzir a dimensão do problema. Entretanto, um controle em malha fechada, baseado em um modelo reduzido, pode excitar os modos residuais não incluídos no problema [Meirovitch, 1990; Preumont, 2002]. Esse fenômeno conhecido como *spillover*, ocorre devido à excitação dos modos residuais pelo sistema de controle, e à contaminação da saída do sensor pelos modos residuais [Alkhatib e Golnaraghi, 2003]. Segundo Meirovitch, 1990, uma pequena quantidade de amortecimento, usualmente inerente à estrutura, é frequentemente suficiente para superar os efeitos de *spillover* no controlador.

O estudo de controle ativo de vibrações tem aumentado nos últimos anos, principalmente em projetos de estruturas inteligentes utilizando materiais piezelétricos, uma

vez que esse tipo de material tem baixo custo e apresenta boas características funcionais, podendo ser utilizado tanto como atuador ou sensor. Para o bom desempenho de estruturas inteligentes, além de técnicas de controle, necessita-se também determinar qual a melhor configuração (localização e dimensões) dos atuadores e sensores de material piezelétrico na estrutura, a fim de maximizar o desempenho estrutural. Procedimentos para a melhor configuração são apresentados no Capítulo 5.

A revisão bibliográfica realizada foca-se, principalmente, nas técnicas de projeto de estruturas inteligentes com o uso de atuadores e sensores piezelétricos somados a estratégias de controle ativo. A técnica de controle ótimo, através do controle LQR, é utilizada em vários trabalhos de controle ativo estrutural com o uso de atuadores piezelétricos. [Marinaki et al., 2010; Silveira 2012] utilizaram o controle LQR em uma estrutura do tipo viga, otimizando topologicamente a estrutura e o material piezelétrico simultaneamente. Os resultados obtidos mostram que o controle apresenta melhor desempenho a partir da localização ótima dos atuadores na estrutura a ser controlada. Já, Sohn et al., 2011 aplicaram um controlador LQR a uma estrutura de casca com o uso de atuador MFC, apresentando bons resultados no controle utilizando esse tipo de atuador. Castro, 2011, utilizou o controle LQR juntamente com observador de estados para estimar os graus de liberdade (GLs) não monitorados e para o tratamento dos possíveis ruídos dos GLs avaliou-se a aplicação do filtro de *Kalman-Bucy*. Dejin et al., 2012, usaram o controle LQR em uma placa, utilizando algoritmo genético AG para encontrar os valores das matrizes de ponderação Q e R. Os resultados encontrados a partir do uso do controle LQR, para controlar as vibrações estruturais, são satisfatórios.

De forma conjunta, entre o controlador LQR e uma parcela de controle passivo, dos Santos, 2008, implementou um controle ativo-passivo, onde a parcela ativa utilizou a estratégia de retroalimentação ótima do tipo LQR, onde concluiu-se que o controle ativo-passivo obteve melhores resultados do que o controle puramente ativo ou passivo para o caso estudado de uma viga em balanço.

Estratégias de controle com lógica difusa são aplicadas com êxito em problemas de controle estrutural. Nagamine, 2001, estudou uma estrutura inteligente, onde é aplicada uma lei de controle representada através de lógica difusa para reduzir a resposta vibratória da viga inteligente quando submetida a distúrbios mecânicos externos. Os resultados mostram que o uso de controladores difusos para atenuar as vibrações em vigas com atuadores piezelétricos é apropriado.

Os controladores clássicos também são utilizados com êxito. Da Silva, 2007 utilizou um controle Proporcional Integral Derivativo (PID) para o controle de uma placa engastada com material composto, utilizando sensor e atuador. Já Schultz, 2012, avaliou dois métodos de controle, o Proporcional-Integral-Derivativo (PID) e o Regulador Quadrático Linear ou *Linear Quadratic Regulator* (LQR), incluindo o LQR Modal em estruturas inteligentes de cascas, placas e vigas delgadas de material compósito laminado com camadas de material piezelétrico como sensores e/ou atuadores.

Liu e Liaw, 2004, utilizaram controle proporcional (P) para o controle de vibração de uma viga de alumínio com atuador piezelétrico, obtendo 90% de atenuação de vibração. Tripathi and Gangadharan, 2012, implementaram o controlador PID com compensação inversa (CPID) para atenuar a vibração de uma viga em balanço e comparou com o controle *Positive Position Feedback* (PPF) e controle *Strain Rate Feedback* (SRF), o CPID demonstrou-se mais efetivo e estável que os demais.

Outras técnicas de controle ativo podem ser encontradas em trabalhos como: [Guimarães et al., 2010; Kovalovs et al., 2007] que utilizaram o componente MFC para atenuar a vibração estrutural através de controle ativo em uma viga de alumínio. Molter et al. 2010, usaram a técnica *State-Dependent Riccati Equation* (SDRE), para derivar o controlador sub ótimo para o problema do controle de um robô, onde a equação de estado dependente é resolvida em cada novo ponto obtido para as variáveis do problema, para obter um controlador de realimentação não linear. Através dos resultados numéricos pode-se verificar a eficiência da proposta de otimização e controle. Tavakolpour et al., 2009, utilizaram um controle ativo de vibração de autoaprendizagem combinado com um controlador em malha fechada.

Thinhand and Ngoc, 2010, implementaram um algoritmo simples de controle em malha fechada com velocidade negativa acoplando o efeito piezelétrico direto e inverso para controlar ativamente a resposta transiente de uma estrutura integrada através de um controle em malha fechada. Kapuri and Yasin, 2010, projetaram um sistema de controle usando modelo de espaço de estado modal de ordem reduzida. A constante do ganho de velocidade do controle *feedback* e estratégias de controle ótimo são estudadas para a composição de vigas inteligente, o estudo é dado em uma viga esgastada laminada

Takagi et al., 2006, apresentaram o controle ativo de vibração de uma estrutura inteligente incorporado com metal e fibras piezelétricas. Zhang et al., 2010, fizeram a simulação e estudo experimental sobre vibração e controle adaptativo da radiação sonora

com atuadores piezelétricos. [Molter, 2008; Bottega, 2004], propuseram dois modelos de controle, um com realimentação do erro da trajetória e outro através do método de equações de Riccati dependentes de estado, para controlar vibrações em manipuladores robóticos.

Ainda no presente capítulo, é apresentado na Seção 3.2 o modelo estrutural modal, bem como a solução do problema modal e a representação do sistema dinâmico modal em espaço de estados. Nas seções 3.3 e 3.4 apresenta-se, respectivamente, a teoria do controlador LQR e LQG e do filtro de *Kalman*. Na Seção 3.5 são apresentados os aspectos de controlabilidade e observabilidade utilizados nos controladores LQR e LQG. Na Seção 3.6 é apresentado o conceito do observador de estados de ordem plena. Por fim, na Seção 3.7, é apresentada a metodologia para a escolha dos valores para as matrizes de ponderação **Q** e **R**.

3.2 Modelo Estrutural Modal

Os modelos modais de estruturas são os expressos em coordenadas modais. Uma vez que estas coordenadas são independentes, determina-se uma série de propriedades úteis que simplificam a análise. A representação por coordenadas modais pode ser obtida pela transformação do modelo nodal. Essa transformação é feita utilizando a matriz modal que é determinada a partir da solução do problema modal [Gawronski, 2004].

3.2.1 Solução do problema Modal

Para resolver o problema modal, considera-se o problema de vibração livre de uma estrutura sem amortecimento, ou seja, sem excitação externa ($f = 0$) e com a matriz de amortecimento nula ($D = 0$). Para esse caso, a equação do movimento pode ser escrita como:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad , \quad (3.1)$$

onde **M** é a matriz de massa, **K** a matriz de rigidez e **u** é o vetor de deslocamento.

Partindo da resolução da equação diferencial 3.1, faz-se então a seguinte transformação para a solução **u**:

$$u = \psi \sin(\omega t) \quad , \quad (3.2)$$

tendo como segunda derivada da solução,

$$\ddot{u} = -\omega^2 \psi \sin(\omega t) \quad , \quad (3.3)$$

a Equação 3.1 pode ser reescrita então como

$$\omega^2 \psi \sin(\omega t) \mathbf{M} = \psi \sin(\omega t) \mathbf{K} \quad , \quad (3.4)$$

que é simplifica para

$$\omega^2 \mathbf{M} \psi = \mathbf{K} \psi \quad , \quad (3.5)$$

e reescrita na forma

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \{\psi\} = 0 \quad . \quad (3.6)$$

Dessa forma, chega-se em uma equação homogênea, para qual a solução não trivial existe se o determinante de $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})$ for zero,

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad , \quad (3.7)$$

com isso, tem-se um problema de autovalores que pode ser escrito na forma usual como $\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0$, fazendo a substituição de $\lambda = \omega^2$.

A Equação 3.7, do determinante, é satisfeita para um grupo de n valores da frequência natural ω . Estas frequências são denotadas $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ e não podem exceder o número de graus de liberdade do problema, ou seja, $(n \leq n_d)$. Substituindo a i -ésima frequência natural ω_i na Equação 3.6, obtêm-se os correspondentes grupos de autovetores $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ que satisfazem a equação. O i -ésimo vetor ψ_i correspondente à i -ésima frequência natural é chamado de modo de vibração. Os modos de vibração não são únicos, uma vez que eles podem ser escolhidos de forma arbitrária. Se ψ_i satisfaz a Equação 3.6, $\alpha \psi_i$ também satisfaz, sendo α um escalar arbitrário [Gawronski, 2004].

Por fim, a matriz modal do problema, que contém os modos de vibração, é representada por,

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} & \dots & \psi_{n1} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \dots & \psi_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{1n_d} & \psi_{2n_d} & \dots & \psi_{nn_d} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde ψ_{ij} é o j -ésimo deslocamento do i -ésimo modo.

3.2.2 Modelo Modal

Modelos modais de estruturas são os modelos expressos em coordenadas modais [Gawronski, 2004]. Para a implementação prática, o modelo modal completo necessita ser truncado. Nesse procedimento, apenas alguns dos primeiros modos são levados em conta. Assim, o vetor de deslocamento pode ser aproximado por uma superposição modal dos primeiros n modos [Zoric' et al., 2012; Becker et al., 2006].

Para esse procedimento, deve-se introduzir uma variável de deslocamento modal (η). Com a inserção dessa variável, tem-se o deslocamento nodal como,

$$\mathbf{u} = \Psi \eta, \quad (3.9)$$

onde Ψ é uma matriz de modos de vibração (Equação 3.8) truncada com n modos e com dimensão $n_d \times n_m$, sendo n_d o número de GDL considerados no modelo estrutural modal, n_m o número de modos de vibração considerados do modelo modal. Além disso, a matriz dos modos de vibração possui uma interessante propriedade que possibilita a diagonalização da matriz de massa, rigidez e amortecimento [Gawronski, 2004]. Para obter as equações em coordenadas modais, basta substituir a Equação 3.9 na equação do movimento da estrutura controlada em coordenadas nodais, representada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{B}_0\mathbf{u}_c + \mathbf{f}. \quad (3.10)$$

e pré multiplicar por Ψ^T , resultando assim na seguinte equação,

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi \ddot{\eta} + \Psi^T \mathbf{D} \Psi \dot{\eta} + \Psi^T \mathbf{K} \Psi \eta = \Psi^T B_0 u_c + \Psi^T f , \quad (3.11)$$

onde B_0 é a matriz de entradas e u_c é o vetor de entradas.

A Equação 3.11 pode ser reescrita em termos das matrizes modais de massa M_m , amortecimento D_m e rigidez K_m , na forma.

$$M_m \ddot{\eta} + D_m \dot{\eta} + K_m \eta = \Psi^T B_0 u_c + \Psi^T f , \quad (3.12)$$

onde:

$$M_m = \Psi^T \mathbf{M} \Psi ,$$

$$D_m = \Psi^T \mathbf{D} \Psi , \quad (3.13)$$

$$K_m = \Psi^T \mathbf{K} \Psi .$$

Normalizando o sistema em relação à matriz de massa modal, multiplicando a Equação 3.12 por M_m^{-1} , tem-se:

$$\ddot{\eta} + M_m^{-1} D_m \dot{\eta} + M_m^{-1} K_m \eta = M_m^{-1} \Psi^T B_0 u_c + M_m^{-1} \Psi^T f . \quad (3.14)$$

A fim de simplificar as equações pode-se utilizar outra notação, da seguinte forma:

$$\ddot{\eta} + 2Z\Omega\dot{\eta} + \Omega^2\eta = B_m u_c + f_m . \quad (3.15)$$

onde

$$B_m = M_m^{-1} \Psi^T B_0 , \quad (3.16)$$

$$f_m = M_m^{-1} \Psi^T f .$$

Na Equação 3.15, Ω é uma matriz diagonal de frequências naturais que pode ser obtida através das matrizes modais de massa e rigidez por meio da solução de um problema

generalizado de autovalores e autovetores, ou seja, solução do problema modal, apresentado na seção 3.2.1. O termo ω_i é a frequência natural relativo ao i -ésimo modo de vibração.

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{n_m} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Na Equação 3.15, Z é uma matriz diagonal de amortecimentos modais, e o termo ζ_i é o amortecimento relativo ao i -ésimo modo de vibração, que pode ser obtido experimentalmente na estrutura [Simões, 2006].

$$Z = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \zeta_{n_m} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

3.2.3 Modelo Modal em Espaço de estados

Os sistemas complexos modernos podem possuir múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). Para analisar esses sistemas, é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas. Enquanto a teoria de controle clássica se baseia nas relações de entrada-saída e na função de transferência, a teoria de controle moderno descreve o problema em variáveis em espaço de estados, as quais através de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem podem ser combinadas numa equação diferencial vetor-matricial de primeira ordem [Ogata, 1998; Premount, 2002].

Em simulações de estruturas dinâmicas, análise de sistema de controle e projeto, é conveniente representar as equações da estrutura flexível na forma de espaço de estados através da Equação 3.21. Um conjunto que representa três parâmetros de estado (A, B, C) é chamado de representação em espaço de estado, onde x é o vetor de estados, u é o vetor de entrada (forças de controle) e y é a saída. A representação depende da escolha do vetor de estados, enquanto a saída e a entrada permanecem inalteradas [Gawronski, 2004].

De forma geral, o número de graus de liberdade de um modelo nodal é elevado. É comum que um modelo analisado por elementos finitos seja da ordem de milhares. Assim, a

representação do estado nodal dificilmente é utilizada em problemas de alta ordem em dinâmica estrutural. A representação do sistema em espaço de estados utilizando coordenadas modais é uma alternativa, uma vez que o número de equações é reduzido de forma significativa e a precisão da análise não é modificada.

É possível obter-se uma representação em espaço de estados definindo o vetor de estados em função dos deslocamentos e velocidades modais, como segue,

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} . \quad (3.19)$$

Dessa forma, a Equação 3.15, é reescrita como um conjunto de equações de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= -\Omega^2 x_1 - 2Z \Omega x_2 + B_m u_c + f_m , \end{aligned} \quad (3.20)$$

as quais são equivalentes ao seguinte conjunto de equações na forma de espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_\phi u_c + f , \\ y &= Cx , \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde os parâmetros de estados, para o caso estudado, são dados por:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -2Z \Omega \end{bmatrix} & B_\phi &= \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} & f &= \begin{bmatrix} 0 \\ f_m \end{bmatrix} & e & C = [1 \quad 0] , \\ & & & & & & & (3.22) \\ & & B_m &= \Psi^T f_d & f_m &= \Psi^T f , \end{aligned}$$

sendo f_m o vetor de forças mecânicas e f_d o vetor de forças mecânicas aplicadas à estrutura através do atuador MFC.

Uma das vantagens do uso do modelo em espaço de estados é a redução da dimensão do problema. Segundo Gawronski, 2004, outra vantagem é a definição de propriedades de amortecimento. Enquanto as matrizes de massa e rigidez são, normalmente, definidas em coordenadas nodais (através do uso do MEF), a matriz de rigidez é comumente não

conhecida, mas é convenientemente avaliada em coordenadas modais. Normalmente, a estimativa de amortecimento é mais precisa em coordenadas modais.

3.3 Teoria do Controlador LQR

O controlador LQR (*Linear Quadratic Regulator*), diferentemente dos controladores modernos que se baseiam na alocação desejada de pólos como critério de projeto, se baseia na minimização de um índice de desempenho quadrático que está associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controle. O objetivo do projeto do controlador LQR é estabelecer um compromisso ótimo entre as energias de estado e controle, através da minimização de um índice de desempenho quadrático [Ogata, 1998; Burl, 1999; Preumont, 2002] dado pela Equação 3.23,

$$J = \int_0^{\infty} L(x, u_c) dt \quad , \quad (3.23)$$

onde $L(x, u_c)$ é uma função quadrática ou uma função hermitiana de x (vetor de estados do sistema) e de u_c (vetor do sinal de controle), tendo $[0, \infty]$ como os limites de integração para o regime permanente do sistema. Quanto maior a amplitude e duração do sinal no tempo, maior será a energia necessária para o controle. Portanto, o ideal seria ter pouco gasto de energia de controle, com bom tempo de assentamento do sistema reduzido.

Para o controlador LQR, considera-se inicialmente o sistema descrito pela seguinte equação

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u_c \quad , \quad (3.24)$$

onde \mathbf{A} é matriz da dinâmica do sistema, e \mathbf{B} a matriz de entrada do sistema. A matriz \mathbf{A} não é necessariamente estável, mas assume-se que o par de matrizes (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável [Premount, 2002]. A partir disso, busca-se uma matriz de ganhos de retroalimentação constante.

$$u_c = -\mathbf{G}x \quad . \quad (3.25)$$

O índice de desempenho quadrático pode ser definido pela seguinte equação

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \mathbf{Q}x + u_c^T \mathbf{R}u_c) dt , \quad (3.26)$$

onde a matriz \mathbf{Q} é uma matriz hermitiana ou simétrica real positiva definida ou positiva semidefinida ($\mathbf{Q} \geq 0$) que pondera a energia dos estados do sistema, enquanto que a matriz \mathbf{R} é uma matriz hermitiana real ou simétrica positiva definida ($\mathbf{R} > 0$) que pondera a energia do sinal de controle. O fato de \mathbf{R} ser estritamente positiva expressa que todo o sinal de controle é adicionado na função custo, enquanto $\mathbf{Q} \geq 0$ implica que alguns dos estados podem ser irrelevantes para o problema em questão [Premount, 2002].

Conforme Ogata, 1998, a lei de controle linear dada pela Equação 3.25, é a lei de controle ótimo. Em consequência, se os elementos da matriz \mathbf{G} forem determinados de modo a minimizar o índice de desempenho, então $u_c(t) = -\mathbf{G}x(t)$ é ótimo para qualquer que seja o estado inicial $x(0)$. A Figura 3.1 mostra o diagrama de blocos para configuração ótima.

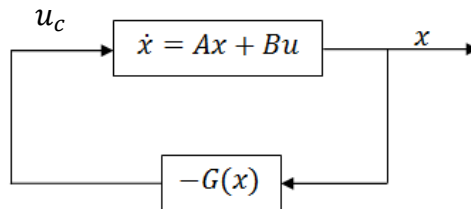


Figura 3.1 – Sistema de controle ótimo.

A matriz \mathbf{G} é uma matriz de ganhos de realimentação. O ganho ótimo de realimentação em regime permanente é expresso por,

$$\mathbf{G} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} , \quad (3.27)$$

onde \mathbf{P} é uma matriz simétrica positiva e definida pela solução da equação algébrica de Ricatti, dada pela Equação 3.28. Em Ogata, 1998, é possível encontrar alguns procedimentos para resolver a Equação de Ricatti, além da teoria sobre o problema de otimização

paramétrica resolvido através do segundo método de Lyapunov. Expresso através da Equação 3.28.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.28)$$

Dessa forma, substituindo a Equação 3.25 na Equação 3.24, tem-se, finalmente, a equação do sistema em malha fechada representada da seguinte forma,

$$\dot{x} = \mathbf{A}x - \mathbf{B} \mathbf{G}x = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{G})x \quad . \quad (3.29)$$

3.4 Teoria do Controlador LQG

Diferentemente do controlador LQR apresentado na Seção 3.3, o controlador LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) utiliza o Filtro de Kalman para determinar a matriz de ganho \mathbf{K} . O filtro de Kalman estima os estados de maneira ótima, sendo o ganho determinado através do critério de erro médio quadrático. Além disso, considera-se que a planta e as medidas de saída encontram-se sujeitas a ruídos de distribuição Gaussiana. Na prática, se considera que o ruído de entrada é introduzido através dos atuadores e que o ruído de saída através dos sensores [Meirovitch; 1990; Burl, 1999; Preumont, 2002; Gawronski, 2004]. Com relação ao controlador, o LQG segue os mesmos princípios. Segundo Burl, 1999, o controlador LQG supera a necessidade do LQR de medir todos os estados. Isso se deve ao fato de que no LQG ocorre a estimação dos estados através do uso do filtro de Kalman.

O problema do controlador LQG, pode ser colocado como sendo o de calcular uma lei de controle que mantenha o sistema estável e minimize um critério de erros quadráticos [Maciejowski, 1989]. Este problema é formulado considerando o sistema linear invariante no tempo, completamente controlável para o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) e observável para o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) , definido pela seguinte equação,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u_c + w_a \\ y &= \mathbf{C}x + v_s \quad , \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde x é o vetor de estado, u_c é o vetor de controle, y é o vetor de saída, w_a é a variável que representa o ruído das imperfeições da modelagem do sistema, do sinal de controle e de perturbações externas que possam afetar os estados e v_s é a variável que representa o ruído dos valores medidos. Neste trabalho, os ruídos são modelados como ruídos brancos, caracterizando processos estocásticos gaussianos com média zero ($E\{w_a\} = 0, E\{v_s\} = 0$), onde E é o valor esperando. Assume-se ainda que não existe correlação entre w e v no tempo, sendo as duas variáveis aleatórias independentes [Preumont, 2002]. Assim,

$$E\{w_a w_a^T\} = \mathbf{Q}_{w_a} \geq 0 \quad E\{v_s v_s^T\} = \mathbf{R}_{v_s} > 0 \quad E\{w_a v_s^T\} = 0 \quad , \quad (3.31)$$

onde \mathbf{Q}_{w_a} é matriz de covariância do ruído da dinâmica e \mathbf{R}_{v_s} a matriz de covariância do ruído das medidas de saída.

Assim, no problema LQG deseja-se minimizar a função custo:

$$J = \int_0^{t_f} (x^T \mathbf{Q} x + u_c^T \mathbf{R} u_c) dt \quad , \quad (3.32)$$

onde as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} são as mesmas definidas na Seção 3.3 para o controlador LQR.

O controlador LQG consiste, portanto, em uma combinação do LQR e do filtro de *Kalman*, o qual apresenta a propriedade de validade do princípio da separação [Burl, 1999]. A solução do problema LQG é obtida a partir desse princípio, o qual possibilita separar o problema original em dois subproblemas. O Diagrama de blocos apresentado na Figura 3.2 ilustra esse princípio.

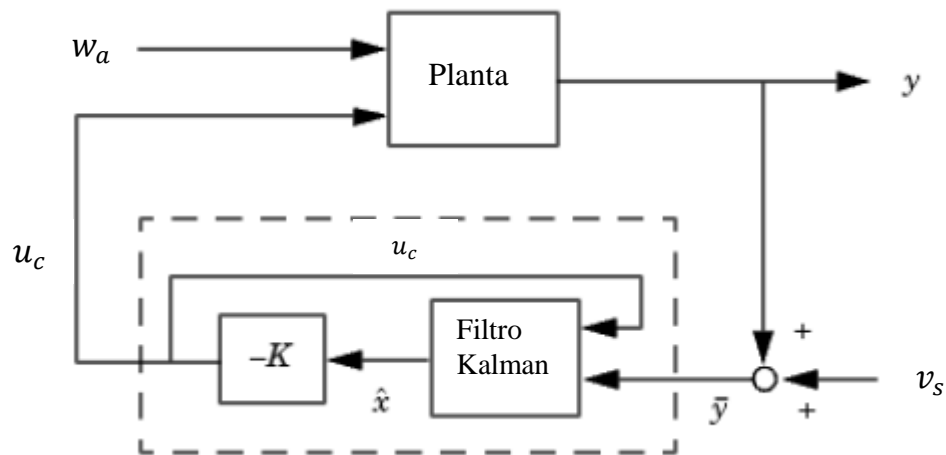


Figura 3.2 – Controlador LQG, Princípio da separação.

O primeiro subproblema corresponde a um problema de controle LQR, já visto na seção 3.3. Já, o segundo corresponde a um problema de projeto de um observador onde a variância do erro de estimação deve ser minimizada. O observador que possui variância mínima de erro de estimação é conhecido como filtro de *Kalman* [Preumont, 2002].

Dessa forma, a solução do problema de controle LQG pode ser encontrada adotando-se os seguintes procedimentos:

Primeiramente, deve-se obter a estimativa ótima (\hat{x}) do estado x , onde a variância do erro de estimação $E\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}$ é minimizada.

Em seguida, usa-se \hat{x} como se fosse o estado verdadeiro e aplica-se a lei de controle $u_c = -\mathbf{G}\hat{x}$, onde \mathbf{G} é a matriz de ganhos para a realimentação do problema de controle LQR já visto. Assim, observa-se que a solução do problema de controle LQG resulta também em um controlador baseado em observador de estados.

O filtro de Kalman é um observador de estado do tipo Luenberger, o qual estima os estados a partir do conhecimento da entrada e saída da planta [Preumont, 2002], conforme a seguinte equação.

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{x}(t) + \mathbf{B}u_c(t) + \mathbf{K}y(t) \quad , \quad (3.33)$$

onde a matriz de ganho \mathbf{K} do observador é projetada para minimizar a variância do erro de estimação [Preumont, 2002] e é dada por,

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}_{v_s}^{-1} , \quad (3.34)$$

onde \mathbf{P} é a matriz de covariância ótima do observador, ou seja, a solução da equação de Riccati é obtida por,

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_{w_a} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}_{v_s}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{0} , \quad (3.35)$$

e que de acordo com Preumont, 2002, possui solução positiva definida se o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável e o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável, e \mathbf{R}_{v_s} é a matriz de covariância do ruído das medidas.

É possível mostrar que os autovalores do sistema completo (autovalores do filtro mais do controlador), são compostos pela soma dos autovalores do filtro e do controlador LQR [Kwakernaak e Sivan, 1972].

Finalmente, combinando o filtro de *Kalman* com o controlador LQR, tem-se o controle conhecido como LQG:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G} & \mathbf{B}\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ v_s \end{Bmatrix} . \quad (3.36)$$

A forma triangular está relacionada com o princípio da separação, já mencionado, que estabelece que os autovalores do sistema em malha fechada consistem de dois conjuntos desacoplados que correspondem ao controlador LQR e ao observador de Kalman [Meirovitch, 1990].

3.5 Controlabilidade e Observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman no início da década de 1960. Esses conceitos são importantes no projeto de sistemas de controle em espaço de estados, pois além de fornecer informações sobre os sistemas dinâmicos são fundamentais para o estudo de controle e estimação dos estados do sistema. Os conceitos de controlabilidade e observabilidade são utilizados neste trabalho nas estratégias de controle ótimo LQR e LQG descritas nas seções 3.3 e 3.4, respectivamente.

A controlabilidade mede a capacidade de uma configuração particular de atuadores de controlar todos os estados do sistema. A observabilidade mede a capacidade de uma configuração particular de sensores de medir toda a informação necessária para estimar todos os estados do sistema. Classicamente, a teoria de controle oferece testes para controlabilidade e observabilidade que são baseados no posto (*rank*, número de variáveis linearmente independentes) das matrizes de controlabilidade e observabilidade. O sistema é controlável se a matriz de controlabilidade possui posto completo, e observável se a matriz de observabilidade possui posto completo [Preumont, 2002].

Dessa forma, quando um sistema não é observável, significa que os valores atuais de alguns de seus estados não podem ser determinados através dos sensores (leitura das saídas). Isso implica em valores de estado desconhecidos para o controlador e, conseqüentemente, ele não será capaz de cumprir as especificações de controle referente a essas saídas.

Conforme Ogata, 1998, um sistema é dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um dado vetor de controle, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito.

Seja um sistema dado por:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u_c \quad , \quad (3.37)$$

sendo, x ($n \times 1$) o vetor de estados, \mathbf{A} ($n \times n$) a matriz da dinâmica do sistema, \mathbf{B} ($n \times s$) a matriz de entradas e u_c ($s \times 1$) o vetor de controle. A matriz de controlabilidade é dada por:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad , \quad (3.38)$$

onde, para verificar se um sistema é controlável a partir da matriz de controlabilidade, é necessário que o $\text{rank}(\mathbf{C})$ seja igual a ordem (n) do sistema [Premount, 2002].

De forma similar, um sistema é dito observável se qualquer estado $x(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação de $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Ou seja, o sistema é completamente observável se toda transição de estado está relacionada a cada um dos elementos da saída [Ogata, 1998]. Considerando o sistema controlado descrito pelas Equações 3.39 e 3.40.

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u_c \quad (3.39)$$

$$y = \mathbf{C}x \quad , \quad (3.40)$$

onde, $\mathbf{C}(r \times n)$ é a matriz de saídas e $y(r \times 1)$ é o vetor de saídas. Se o $\text{rank}(\mathbf{O}) = n$ diz-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável. A matriz de observabilidade $\mathbf{O}(n \times n)$ é dada por:

$$\mathbf{O} = [\mathbf{C} \mid \mathbf{A}\mathbf{C} \mid \dots \mid (\mathbf{A})^{n-1}\mathbf{C}] \quad . \quad (3.41)$$

Além disso, a partir do fato que:

$$\mathbf{O}^T = [\mathbf{C}^T \mid \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \mid \dots \mid (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] \quad , \quad (3.42)$$

pode-se concluir que o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é observável, se e somente se, o sistema dual $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ é controlável. De forma similar, o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é controlável, se e somente se, o sistema dual $(\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)$ é observável [Ogata, 1998; Preumont, 2002]. Esse é o princípio da dualidade estabelecido por Kalman em 1963. Uma consequência importante desse princípio, é que se pode testar a observabilidade de um sistema analisando a controlabilidade do sistema dual, e vice-versa.

De acordo com Bueno, 2007, os critérios de controlabilidade e observabilidade apresentados possuem dois problemas. Primeiro, eles respondem de maneira qualitativa as questões de controlabilidade e observabilidade, ou seja, em termos de sim ou não, sem apresentar resposta quantitativa sobre o grau de controlabilidade e observabilidade do sistema. O segundo está relacionado a funcionarem bem para sistemas com dimensões pequenas, por problemas numéricos. Para controlar essas dificuldades, uma alternativa que pode ser utilizada é a formulação em termos de Gramianos [Preumont, 2002; Franklin et al. 2002; Gawronski, 2004].

Considerando um sistema linear invariante em relação ao tempo, composto pelas equações 3.39 e 3.40. Para um sistema assintoticamente estável (com pólos de \mathbf{A} possuindo parte real negativa), a resposta do sistema é limitada, e a matriz de covariância para regime permanente é finita [Preumont, 2002]. Dessa forma, a resposta do sistema a um ruído branco de intensidade unitária pode ser dada por:

$$\mathbf{W}_c = E[xx^T] = \int_0^{\infty} e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T \tau} d\tau , \quad (3.43)$$

onde \mathbf{W}_c é chamado de Gramiano de controlabilidade e E é a esperança. O Gramiano de controlabilidade pode ser obtido a partir da Equação de Lyapunov

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = 0 . \quad (3.44)$$

Segundo Preumont, 2002, o sistema é controlável se todos os estados podem ser excitados, sendo esta condição satisfeita se, e somente se, \mathbf{W}_c é positiva definida.

Dos conceitos de dualidade entre a observabilidade e controlabilidade, sabe-se que o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é observável se, e somente se, o par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) é controlável. Desde modo, o sistema é observável, se e somente se, o Gramiano de observabilidade,

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} e^{A^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{A\tau} d\tau , \quad (3.45)$$

é positivo definido [Preumont, 2002]. Substituindo o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) pelo par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ na Equação 3.44, pode-se obter a Equação de Lyapunov para observabilidade, representada pela Equação 3.46. Assim, sendo \mathbf{A} assintoticamente estável, \mathbf{W}_o é solucionado por,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 . \quad (3.46)$$

Segundo Preumont, 2002, o Gramiano de controlabilidade reflete a habilidade da entrada (u_c) em perturbar os estados do sistema. Já, o Gramiano de observabilidade está relacionado à capacidade das condições iniciais não nulas do vetor de estados de afetarem a saída do sistema.

Como alternativa aos métodos supracitados e utilizados nessa tese, o teste de autovetores de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) pode ser utilizado para verificar a controlabilidade de um sistema linear. Esse teste especifica que qualquer coluna b_j da matriz de entrada \mathbf{B} não deve ser ortogonal ao i -ésimo autovetor à esquerda q_i da matriz do sistema \mathbf{A} . Se essa sentença for satisfeita, o i -ésimo modo do sistema é controlável [Junkins e Kim, 1991; Lim e Gawronski, 1993].

3.6 Observador de Estados

Uma das dificuldades encontradas para o uso de controladores ativos em estruturas está ligada ao fato que muitos dos esquemas de controle com realimentação assumem que todos os estados estão disponíveis para medição durante todo o tempo, o que nem sempre é verdade. Na prática, isso ocorre devido ao custo de monitoramento com uso de muitos sensores ou impossibilidades físicas para a medição [Preumont, 2002]. Necessita-se, portanto, estimar as variáveis de estado que não estão mensuráveis, sendo necessária a utilização de um método conhecido como observador de estados, que é capaz de estimar as variáveis de estado do sistema [Ogata, 1998]. De acordo com Preumont, 2002, o objetivo do observador é reconstruir o vetor de estado a partir do modelo do sistema e da medição de saídas do sistema.

Os observadores de estado podem ser divididos em duas classes: Observador de ordem plena e observador de ordem reduzida. O observador de estado de ordem plena é capaz de estimar todas as variáveis de estado do sistema, independente de somente algumas variáveis estarem disponíveis para medição direta. Esse tipo de observador é utilizado, normalmente, em situações onde as medições não são confiáveis ou não são operacionalmente possíveis. Já, o observador de estados de ordem reduzida apenas estima as variáveis de estado não mensuráveis do sistema, dispensando a estimação das variáveis que permitem a medição direta, estimando assim, um número de variáveis de estado inferior a n , onde n é a dimensão do vetor de estado. Esse tipo de observador é utilizado normalmente quando uma parcela dos estados do sistema possui medições confiáveis, sendo necessária apenas a estimação dos estados restantes. Neste trabalho, utiliza-se o observador de estado de ordem plena através do uso do filtro de Kalman, para a estratégia de controle do controlador LQG.

O observador de estados poderá ser projetado se, e somente se, a condição de observabilidade for satisfeita pelas matrizes do sistema, ou seja, necessita-se que o sistema seja observável para o par (A, C) [Meirovitch, 1990; Ogata, 1998; Preumont, 2002].

3.6.1 Observador de Ordem Plena

Conforme já mencionado, o observador de ordem plena é usado quando, devido a alguma impossibilidade, o sistema não possui medições confiáveis ou simplesmente não pode ser medido. Dessa forma, observam-se todas as variáveis de estado do sistema, apesar de algumas delas estarem disponíveis para serem medidas diretamente.

Considerando o sistema definido por

$$\dot{x} = Ax + Bu_c , \quad (3.47)$$

$$y = Cx , \quad (3.48)$$

onde x é o vetor dos estados, A é a matriz do sistema, B matriz das entradas, u_c vetor de controle, y vetor da saída e C matriz das saídas.

Admite-se que o estado x deve ser aproximado pelo estado \hat{x} observado do modelo dinâmico [Ogata, 1998; Preumont, 2002]. Dessa forma, o observador de estados é dado pela Equação 3.49,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu_c + K(y - C\hat{x}) , \quad (3.49)$$

onde \hat{x} é o vetor de estados observado e K é a matriz de ganhos do observador, obtida através do filtro de *Kalman*. Nota-se que o observador de estados possui y e u_c como sinais de entrada. O termo $(y - C\hat{x})$ da Equação 3.49 é chamado de termo de correção e envolve a diferença entre o valor medido do sinal de saída y e o valor estimado do sinal de saída $C\hat{x}$. A matriz K funciona como uma matriz de ponderação para o termo de correção, e é escolhida de tal forma que o erro entre o estado real e o reconstruído convirja para zero [Preumont, 2002]. O termo de correção monitora o estado observado \hat{x} . Na presença de discrepâncias entre as matrizes A e B usadas no modelo e as do sistema real, a adição do termo de correção ajudará a reduzir os efeitos dessa diferença [Ogata, 1998].

Substituindo a Equação 3.48 em 3.49 e subtraindo a Equação 3.49 da Equação 3.47, é possível encontrar o vetor de erros do observador, que resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax - A\hat{x} - K(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A - KC)(x - \hat{x}) . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Considerando o vetor de erros do observador, dado por,

$$e = x - \hat{x} , \quad (3.51)$$

é possível reescrever a Equação 3.50 como

$$\dot{e} = (A - KC)e . \quad (3.52)$$

A partir da Equação 3.52, pode-se perceber que o comportamento dinâmico do vetor de erros é determinado pelos autovalores (pólos do observador) da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$. Se a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$ for estável, o erro do observador convergirá para zero. Dessa forma, $\hat{x}(t)$ convergirá para $x(t)$ para quaisquer que sejam os valores de $\hat{x}(0)$ e $x(0)$. Se os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$ forem escolhidos para que o comportamento dinâmico do vetor erro seja assintoticamente estável (todos os polos do observador com parte real negativa) e adequadamente rápido, então qualquer vetor de erros tenderá para zero com uma velocidade adequada [Ogata, 1998; Meirovitch, 1990].

Segundo Meirovitch, 1990, uma convergência rápida do sistema, implica em uma matriz de ganho \mathbf{K} com valores grandes. Contudo, ganhos grandes fazem o observador apresentar comportamento sensível a ruídos do sensor, os quais são adicionados ao vetor original de saída y . Um ganho ótimo para a matriz \mathbf{K} pode ser computado usando uma aproximação estocástica do problema (filtro de *Kalman*), para reduzir os efeitos do ruído. O Filtro de *Kalman* é utilizado neste trabalho na estratégia de controle (juntamente com o controlador LQG), conforme descrito na Seção 3.4.

3.7 Metodologia para determinar valores para as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} .

Uma questão que contribui para a eficácia do controlador LQR é a correta determinação das matrizes de ponderação dos estados (\mathbf{Q}) e do controle (\mathbf{R}), as quais são dependentes das condições iniciais do problema. Para isso, é importante levar em consideração durante o processo de escolha, que o sinal de controle gerado a partir dos valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} satisfaça determinadas condições de projeto do controlador e de limitações de implantação. A determinação dessas matrizes tem influência direta no cálculo dos ganhos. Pode-se citar que uma redução rápida dos estados pode ser conseguida a custo de um aumento no sinal do controle empregado, implicando, em alguns casos, na impossibilidade prática de implantar tal solução. Por outro lado, uma redução grande do sinal de controle pode provocar uma elevação grande dos sinais dos estados, situação muitas vezes indesejável em alguns processos de controle, principalmente, quando se necessita seguir uma trajetória ou controlar vibrações em um tempo relativamente pequeno. Logo, deseja-se determinar valores que melhor satisfazem a alguns critérios, como, por exemplo: porcentagem de sobrerresposta, máximo sinal de controle e tempo de estabilização, que, quando alcançados, refletem um melhor desempenho do sistema.

Na literatura é possível encontrar algumas técnicas que foram desenvolvidas para a determinação dessas matrizes, as quais têm como base métodos determinísticos e heurísticos. Os métodos heurísticos constituem uma das primeiras técnicas concebidas para a seleção das matrizes de ponderação. Uma abordagem dessa metodologia é baseada no chamado quadrado do inverso ou método de *Bryson*, cuja ideia é normalizar as saídas e o termo de controle dentro da função de índice de desempenho quadrático [Johnson, 1987]. Já, Neto et al., 2008, apresentaram um Algoritmo Genético (AG) que supera a dificuldade de seleção das matrizes de ponderação. Na sua estrutura são incorporados alguns parâmetros, tais como, semente, número de gerações, probabilidade de cruzamento, dentre outros.

Em Oral, 2010, é apresentado um método de seleção não heurístico dos valores das matrizes, com simples relações matemáticas que especificam a resposta estável e transitória do sistema. O método aplicado é mais prático do que outros procedimentos iterativos, e a formulação é mais eficiente e simples. É criada uma relação entre os valores das Matrizes **Q** e **R**. Desta relação é verificado o sinal de controle empregado no problema e escolhida a relação ótima segundo a necessidade do problema.

O procedimento de tentativa e erro para estimar os valores para as matrizes de ponderação é utilizado e especificado em [Wang et al., 2000]. Já Robandi, 2000, fez o uso de um método baseado em Algoritmo Genético (AG) e traça um estudo comparativo do resultado de estabilização do sistema entre a utilização de AG, método da tentativa e erro, e o método de *Bryson*.

3.7.1 Metodologia para matrizes **Q** e **R**

Como pode ser visto, existem alguns métodos estruturados para estimar os valores de interesse para as matrizes de ponderação (**Q** e **R**). No presente trabalho foi desenvolvida uma metodologia para a determinação do melhor conjunto **Q** e **R** levando em conta algumas condições do problema, como perturbação inicial, e da sua implantação prática. A metodologia é baseada em uma varredura entre valores de **Q** e **R** pré-determinados, gerando um mapa de compromisso que apresenta o tempo de assentamento do sistema versus o valor energético (pico do sinal de controle) empregado no controle para cada par de valores, e contempla as seguintes etapas:

- 1- Definição dos valores para a varredura de **Q** e **R**.

2- Leitura dos valores de **Q** e **R** definidos na Etapa 1. Cada combinação possível é utilizada no sistema dinâmico e no controle LQR.

3- Identificação do sinal de controle utilizado para cada uma das combinações entre os valores de **Q** e **R**.

4- Identificação de quais sinais de controle (Gerado pela combinação de **Q** e **R**) estão dentro do limite de trabalho definido para o atuador.

5- Por fim, geração de um gráfico do sinal de controle (pico da tensão elétrica aplicada no controle) e do tempo de assentamento do sistema a partir de todas as possíveis combinações dos valores de **Q** e **R**, levando em conta o critério adotado na Etapa 4.

Na Figura 3.3 é apresentado o diagrama de blocos da metodologia proposta para encontrar as matrizes de ponderação.

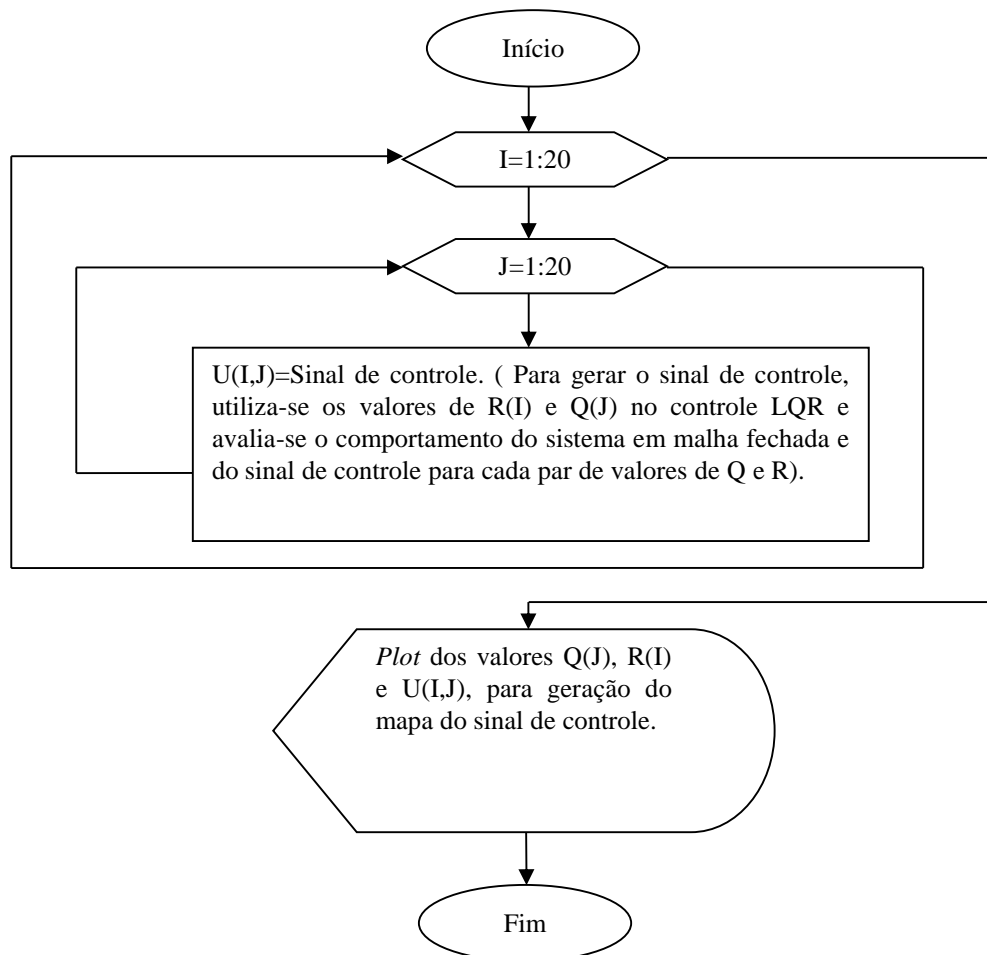


Figura 3.3 – Diagrama de blocos da metodologia para encontrar as matrizes (**Q** e **R**)

Para o melhor entendimento da metodologia, serão descritos os procedimentos adotados em cada etapa para a escolha das matrizes de ponderação, no caso em estudo (descrito no Capítulo 6). Primeiramente, Para a varredura dos valores (Etapa 1), utilizou-se a

faixa de $R=1:1:20$, (variando de 1 até 20 em um intervalo de 1), e $Q=10^{(n-1)}$ (com $n=1,2,\dots,20$), esses valores são determinados a partir da experiência na observação de algumas simulações de controle. Posteriormente, procedeu-se com as Etapas 2 e 3. Onde, para a Etapa 2 foram utilizados os valores definidos na Etapa 1 no sistema dinâmico e no controle LQR. Já, na Etapa 3, foi identificado o sinal de controle (obtido na etapa 2) para cada uma das combinações entre os valores de **Q** e **R**.

Em seguida, conforme a Etapa 4, foram identificados os sinais de controle da Etapa 3 que estão dentro da metade do limite de trabalho dos atuadores, obedecendo o critério definido nessa tese. Para o caso em estudo, foi utilizado um atuador com faixa de uso entre (+1500 e -500 volts), e conseqüentemente, o limite para escolha dos valores ficou entre (+750 e -250 volts). Finalmente, a partir da Etapa 5, através do mapa gerado (Figura 3.4), é possível visualizar o resultado da metodologia e escolher qual é o melhor conjunto de valores de **Q** e **R** para os critérios adotados no projeto de controle como: tempo de assentamento, limites do atuador empregado para o controle, entre outros.

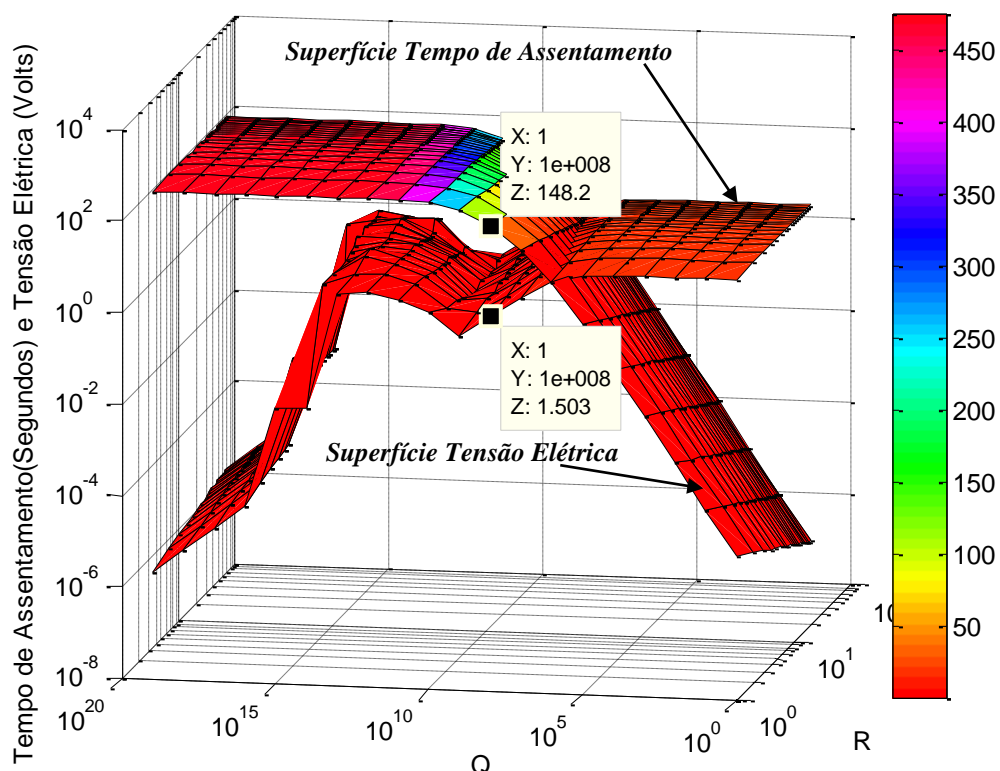


Figura 3.4 – Mapa com a relação de compromisso entre o sinal de controle (Tensão elétrica) e o tempo de assentamento do sistema.

Como resultado da metodologia empregada, visualiza-se na Figura 3.4 um mapa de compromisso que apresenta uma superfície com o tempo de assentamento do sistema e outra com os respectivos valores de tensão elétrica máxima aplicada no sinal de controle. A partir disso, é possível definir um tempo de assentamento (na superfície tempo de assentamento) e verificar na superfície tensão elétrica, qual o valor de tensão elétrica máxima aplicada no sinal de controle (atuador) para o respectivo tempo de assentamento definido. Da mesma forma, é possível a partir da definição de uma tensão elétrica máxima aplicada no atuador (na superfície Tensão Elétrica), verificar qual o respectivo tempo de assentamento na superfície tempo de assentamento.

De posse do tempo de assentamento e tensão elétrica máxima escolhidos (no eixo Z), tem-se o respectivo conjunto de valores para as matrizes \mathbf{Q} (eixo Q) e \mathbf{R} (eixo R), os quais serão utilizados no controlador LQR para encontrar os ganhos do sinal de controle. Como exemplo dessa análise, na Figura 3.4, temos destacado um conjunto de valores para a matriz $\mathbf{Q} = 1e8$ (eixo Y) e para a matriz $\mathbf{R} = 1$ (eixo X). Consequentemente, para esse conjunto de valores, é possível observar o valor de 1.503 segundos (eixo Z) na superfície de tempo de assentamento e o valor máximo do sinal de controle igual a 148.2 volts (eixo Z) na superfície da tensão elétrica.

De forma geral, quanto maior o valor do sinal de controle (energia empregada no sistema) menor é o tempo necessário para a estabilização do movimento. Já, para o menor sinal de controle, o tempo necessário para a estabilização aumenta.

4. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

4.1 Introdução

A otimização estrutural busca a melhor configuração possível dentro de um espaço de soluções a fim de atender uma função objetivo e restrições inerentes ao problema. Segundo Cheng, 1992, o objetivo da otimização estrutural consiste na busca dos melhores valores de certas variáveis que levam a projetos ótimos ao mesmo tempo em que todas as restrições impostas sejam satisfeitas. Para exemplificar, pode-se considerar como um caso de otimização, um problema que consiste em obter uma estrutura com maior rigidez para um dado peso e que suporte certa carga mecânica aplicada.

Problemas de otimização estrutural podem ser basicamente classificados em três abordagens: a otimização paramétrica, a otimização de forma e a otimização topológica. Na Figura 4.1 é possível visualizar os diferentes tipos de abordagens da otimização estrutural.

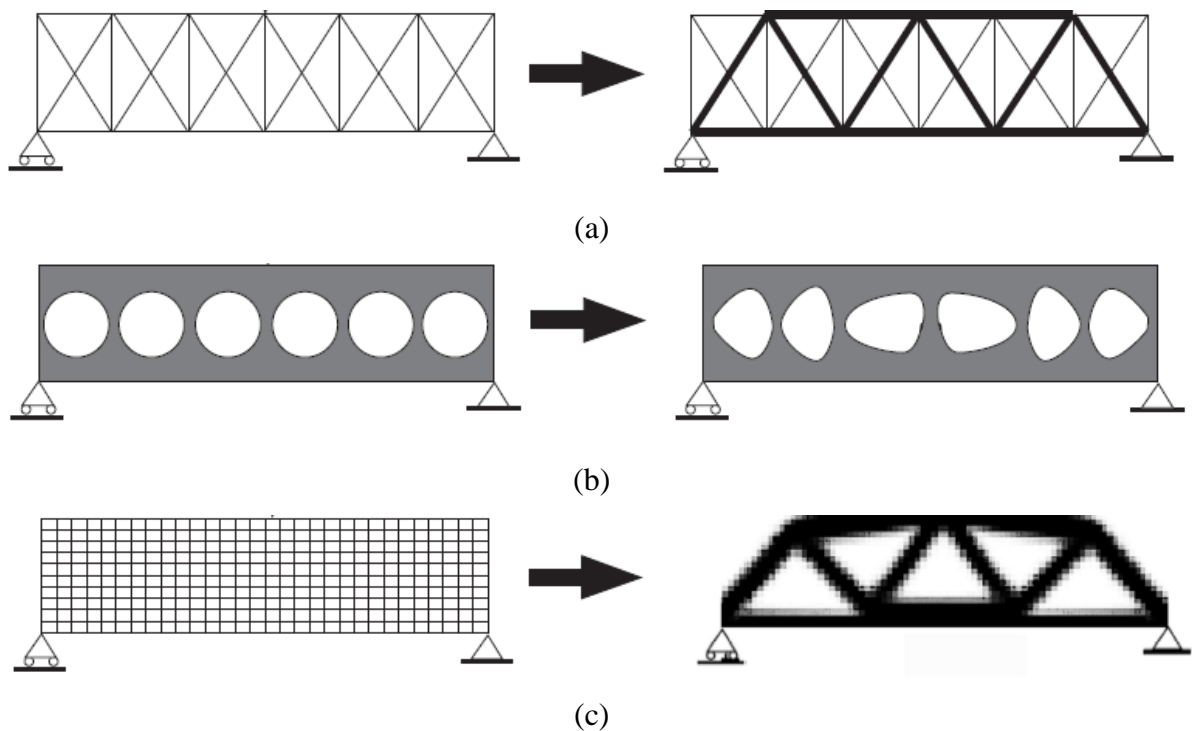


Figura 4.1 – Diferentes formas de otimização estrutural: (a) otimização paramétrica, (b) otimização de forma e (c) otimização topológica.

Na otimização estrutural paramétrica, Figura 4.1 (a), são otimizadas as dimensões (ou razão das dimensões) da estrutura, mantendo-se a sua forma pré-definida, assumindo previamente um domínio fixo de projeto, como, por exemplo, uma estrutura formada por elementos de treliça. Dessa forma, um grupo de determinadas características geométricas, como áreas das seções transversais, são utilizadas como variáveis de projeto. As variáveis de projetos são os parâmetros que sofrem alteração com o intuito de se obter a estrutura ótima [Vanderplaats, 1984]. Assim, aplicando algoritmos computacionais para encontrar as áreas das seções transversais de cada elemento de treliça e respeitando as restrições impostas no problema, obtêm-se a estrutura ótima.

Na otimização estrutural de forma, Figura 4.1 (b), são alterados os contornos internos e externos da estrutura na busca da configuração ótima [Haftka et al, 1990], onde os contornos internos e externos podem ser alterados através de curvas denominadas *splines* e os parâmetros dessas curvas serão as variáveis de projeto do problema. Por meio de um algoritmo computacional determinam-se os valores dos parâmetros das curvas *splines* a fim de satisfazer determinada função objetivo e as restrições impostas da melhor forma, ou seja, forma ótima. Nessa abordagem de otimização estrutural, aumenta-se o espaço de soluções, tornando esse método mais geral que a otimização paramétrica.

Porém, a principal desvantagem deste método está relacionada à constante mudança de forma do domínio, que se não contornada pode invalidar os resultados devido a problemas de convergência da solução de elementos finitos. Ao utilizar-se o MEF para a análise das estruturas no processo de otimização, é necessário utilizar algoritmos complexos para redefinir a malha, uma vez que se a forma do domínio alterar de forma significativa pode acarretar elementos distorcidos. Baseado nesse fato, o trabalho de Salagame e Belegundu, 1995, sugere que durante a resolução do problema de otimização haja um acompanhamento de um processo adaptativo de malha e haja também estimativa de erros. Além disso, uma alternativa a esse problema é a utilização do método dos elementos de contorno que, em muitos casos, não necessita da discretização do domínio [Brebbia et al. 1984].

A última abordagem é a otimização estrutural topológica, que consiste basicamente na distribuição de material dentro de um domínio fixo estendido, Figura 4.1 (c), visando à determinação da distribuição ótima de material, permitindo a criação de regiões vazias (sem material) e reforçando outros pontos (com material). As variáveis de projeto envolvidas estão relacionadas, por exemplo, a distribuição de material no domínio a partir de medidas que indicam a quantidade de material em cada ponto, a qual está vinculada à malha de elementos

finitos (elementos ou nós). Devido a isso, um problema de otimização topológica geralmente apresenta um número considerável de variáveis de projeto. A otimização estrutural, basicamente, distribui o material em um domínio fixo estendido de maneira a maximizar ou minimizar certa função custo, sujeita a restrições de projeto impostas ao problema. O material em cada ponto do domínio pode alterar desde um material “vazio” até um material “sólido”, podendo assumir materiais intermediários com densidades variando de 0 (vazio) à 1 (sólido) [Bendsøe e Kikuchi, 1988; Bendsøe, 1989; Bendsøe e Sigmund, 2003]. A otimização topológica é a mais genérica dentre as abordagens apresentadas, sendo que a estrutura obtida através desse método tende a ser mais leve e com melhor desempenho.

O presente capítulo apresenta na Seção 4.2 um breve histórico da otimização estrutural. Na Seção 4.3 é apresentado os conceitos básicos de otimização estrutural como: variáveis de projeto, função objetivo, restrições de projeto, formulação do problema de otimização, domínio viável e inviável e mínimo local e global. A Seção 4.4 apresenta os conceitos teóricos da otimização topológica como: domínio fixo estendido, modelo do material e método das densidades. Por fim, a Seção 4.5 apresenta os aspectos numéricos na otimização estrutural levando em conta a dependência da malha e a instabilidade de tabuleiro.

4.2 Breve histórico da Otimização Estrutural

Os primeiros problemas de otimização estrutural foram resolvidos por Maxwell na década de 1860 e posteriormente por Michell em 1904. Maxwell, em 1869, tinha como objetivo calcular o campo de tensões principais que um determinado volume estaria sujeito, levando em conta as condições de contorno inerentes do problema. Utilizando a teoria de elasticidade, foram dispostas barras de maneira alinhada sobre o campo de direções principais calculadas, com isso se obteve uma estrutura de treliças onde os componentes (barras) estariam submetidos a esforços uniaxiais (tração e compressão). Dessa forma, chegou-se à forma estrutural ótima, onde a estrutura resultante suporta o carregamento aplicado com o menor volume de material possível. Já em 1904, Michell, baseado nos estudos de Maxwell, projetou diversos tipos de estruturas, bi e tridimensionais, com o menor volume de material possível.

Esses resultados ficaram esquecidos por um bom tempo por serem considerados na época resultados apenas acadêmicos sem aplicação prática. Somente na década de 1960 com o surgimento dos primeiros computadores juntamente com desenvolvimento do método de

elementos finitos, pode-se estudar problemas práticos de otimização estrutural usando otimização estrutural paramétrica. Nesse período, foram também desenvolvidos métodos de programação matemática, como, por exemplo, o método *Simplex* para solução de problemas de programação linear. Uma década depois, 1970, a partir do desenvolvimento de linguagens de programação, foram implementados algoritmos de otimização para problemas não lineares utilizados até hoje, bem como o método de otimização de forma, além de métodos probabilísticos como os algoritmos genéticos. Somente na década de 1980 surgiram os primeiros softwares comerciais voltados à otimização estrutural, além de alguns softwares de MEF incluírem módulos de otimização no seu pacote. Nessa mesma década tem início o desenvolvimento do método de otimização topológica na área acadêmica.

Nesse período, grupos de pesquisa começaram a desenvolver os primeiros trabalhos da otimização de meios contínuos com a introdução de métodos de relaxação através da consideração de materiais compostos [Cheng, 1981; Cheng e Olhoff, 1982]. Com base nesses trabalhos, Bendsøe e Kikuchi, em 1988, introduziram uma metodologia partindo do princípio de fixar o domínio inicial da estrutura, mantendo sem alteração a malha e os elementos finitos utilizados durante o procedimento de otimização. Dessa maneira, surgiu a metodologia para otimização topológica, baseada no conceito de domínio fixo estendido de projeto e no método da homogeneização, o qual é aplicado para a relaxação do problema de otimização topológica de meios contínuos [Guedes e Kikuchi, 1990, Suzuki e Kikuchi, 1991]. Esses conceitos deram início à popularização do método, além de permitir que fossem obtidas topologias bem definidas e com menos regiões de densidades intermediárias do material.

Bendsøe em 1989 propôs um método baseado na distribuição de pseudodensidades na microestrutura, denominado de método das densidades, onde as variáveis de projeto são as pseudodensidades de cada elemento da malha de elementos finitos e conforme um modelo de material podem variar de 0 (vazio, sem material) e (sólido, com material). O modelo de material mais conhecido e utilizado é o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) devido à boa compatibilidade com o MEF e a simplicidade de implementação [Bendsøe, 1989; Rozvany et al., 1992]. Hassani e Hinton, 1998a e 1998b, apresentaram uma revisão sobre os modelos de materiais utilizados na relaxação do variacional no problema de otimização topológica. Entretanto, o método das densidades apresenta algumas instabilidades numéricas, tais como instabilidade de tabuleiro, dependência da malha e mínimo local. Sigmund e Perterson, 1998, apresentam uma revisão dos principais procedimentos e métodos para controlar essas instabilidade numéricas.

Levando em conta os últimos anos no desenvolvimento da otimização topológica, pode-se apontar que Bendsøe e Kikuchi, 1988, e Suzuki e Kikuchi, 1991, foram responsáveis pela implementação do método na resolução de diversos problemas de otimização estrutural, tendo como objetivo a maximização da rigidez ou minimização da flexibilidade, impondo o volume do material como restrição do problema e levando em conta um único carregamento. Já Diaz e Bendsøe, 1992, aplicaram mais de um carregamento, mas não de forma simultânea. Thomsen, 1992, utilizou a otimização topológica para otimizar estruturas com mais de um material. Diaz e Kikuchi, 1992, descreveram um problema de otimização topológica considerando frequências naturais de ressonância. Já Neves et al., 1995, resolveram o problema de instabilidade estrutural, considerando flambagem.

Na sequência, a otimização estrutural teve expansão em áreas consideradas não clássicas da engenharia de estruturas. Várias Pesquisas na área de mecanismos flexíveis [Sigmund, 1997; Larsen et al., 1997; Nishiwaki et al. 1998; Kikuchi et al., 1998; Cardoso e Fonseca, 2004] foram motivadas pelo trabalho inicial de Ananthasuresh e Kota, 1995. A otimização topológica ganhou espaço em diversas linhas de pesquisa, como em projeto de transdutores piezelétricos [Silva et al. 1998, 1999; Silva e Kikuchi, 1999], projeto de atuadores piezelétricos [Silva et al., 2000; Canfield e Frecker, 2000; Kiyono, 2013], projeto simultâneo de otimização estrutural e controle [Ou e Kikuchi, 1996; Zhu et al., 2002; Silveira 2012], entre outros. Uma revisão bibliográfica ampla pode ser encontrada em Bendsøe e Sigmund, 2003.

4.3 Conceitos Básicos de Otimização

Em um problema de otimização deseja-se basicamente minimizar ou maximizar uma função denominada objetivo. Esta função depende das variáveis de projeto, que são parâmetros que podem ser alterados durante o processo de otimização. Contudo, normalmente o problema a otimizar está sujeito a restrições devido às leis da física, requisitos legais, limitações orçamentárias dentre outras.

Dessa forma, para uma formulação concisa de um problema de otimização é importante ter clareza nos conceitos básicos relativos ao processo, tais como função objetivo, variáveis de projeto e restrições. A transição de um problema de otimização para uma formulação matemática do problema é um passo crítico no processo de resolução do mesmo [Arora, 2004]. Se a formulação é efetuada de forma equivocada, possivelmente a solução será

inaceitável. Isso pode acontecer quando uma restrição não é bem formulada ou não é incluída no projeto de otimização, ou ainda a função objetivo ou as variáveis de projeto não estão projetadas de forma que represente o problema a ser otimizado. Dessa forma, deve-se aumentar a atenção no momento de se projetar como será a otimização do problema.

Os conceitos básicos apresentados nesse trabalho podem ser encontrados nos textos de [Haftka e Gürdal, 1991; Arora, 1991].

4.3.1 Variáveis de Projeto

As variáveis de projeto são os parâmetros que podem ser alterados para otimizar o sistema e são expressas pelo vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. As variáveis de projeto podem ser representadas pela dimensão da seção transversal, geometria da estrutura, valor da propriedade do material entre outras [Haftka e Gürdal, 1991]. A escolha das variáveis de projeto é crítica para o sucesso do processo de otimização.

As variáveis de projeto podem ser classificadas em variáveis discretas e contínuas. As variáveis discretas podem assumir somente valores isolados, tipicamente oriundos de uma lista de valores baseada em configurações disponíveis no mercado. As variáveis contínuas podem assumir qualquer valor em um universo de possibilidades contínuas [Haftka e Gürdal, 1991]. Nota-se que as variáveis de projeto, podem assumir a classificação desejada na otimização, em função da necessidade ou na capacidade de produzi-las posteriormente. Por exemplo, se é desejado encontrar a distribuição ótima de um atuador piezoelétrico em uma estrutura do tipo casca a fim de minimizar as vibrações decorrentes de perturbações externas, pode-se utilizar ambos os tipos de variáveis de projeto. Caso deseja-se encontrar a melhor distribuição entre todas as possíveis, é necessário utilizar um conjunto de variáveis contínuas. Se por motivos de fabricação, não é possível considerar a distribuição ótima como resposta viável, o que é comum ao utilizar MFC, deve utilizar variáveis de projeto discretas.

Variáveis de projeto que são comumente consideradas contínuas, normalmente passam a serem consideradas discretas devido a considerações no processo de fabricação. Na maioria dos problemas de projeto estrutural, tende-se a desconsiderar a natureza discreta das variáveis de projeto em problemas de otimização estrutural. Uma vez que o projeto ótimo é obtido, ajustam-se os valores das variáveis de projeto para o valor discreto mais perto do ponto ótimo. Esse tipo de aproximação é utilizada porque resolver um problema de otimização com variáveis discretas é normalmente mais difícil e possui um custo

computacional maior do que resolver um problema similar com variáveis contínuas [Haftka e Gürdal, 1991].

4.3.2 Função Objetivo

A função objetivo deve representar e quantificar o que queremos otimizar e deve ser escrita em função das variáveis de projeto escolhidas. A função objetivo é usada como uma maneira de medir a eficiência do projeto de otimização. Sua classificação é dada em relação ao número de funções que se deseja empregar no processo de otimização. A função é considerada simples quando se tem apenas um objetivo, ou seja, uma função objetivo, e é chamada de multiobjetivo quando se quer otimizar mais de uma função objetivo, sendo denotadas por $f(x)$ e $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)]$ respectivamente.

O sucesso da otimização depende também da formulação da função objetivo. Dessa forma, é importante investir tempo para encontrar uma expressão matemática que retrate de forma correta a eficiência do projeto a ser otimizado. Em problemas de otimização estrutural, pode-se utilizar: peso, deslocamento, tensão mecânica, frequências de vibração, cargas de flambagem, custo ou qualquer combinação desses como função objetivo [Haftka e Gürdal, 1991].

4.3.3 Restrições de Projeto

As restrições são limitações impostas às variáveis de projeto para obter-se a solução ótima, e podem ser aplicadas a qualquer grandeza envolvida no problema. Sua classificação é dada em três tipos: laterais, igualdade e desigualdade. As restrições denominadas laterais têm como característica limitar o valor da variável de projeto dentro de um limite superior e inferior [Haftka e Gürdal, 1991], como, por exemplo, limitar a espessura de uma chapa no intervalo $[E_{min}, E_{max}]$ onde E é uma variável de projeto. A restrição pode ser escrita da seguinte forma

$$E_{min_i} \leq E_i \leq E_{max_i} \quad i = 1, \dots, n . \quad (4.1)$$

Por vez, uma restrição de desigualdade tem a forma:

$$g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, \dots, n_g, \quad (4.2)$$

e uma restrição de igualdade é do tipo

$$h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, n_h. \quad (4.3)$$

Outro importante ponto a ser considerado é a normalização das restrições. Normalmente utiliza-se a normalização quando as restrições impostas ao problema são de ordem de grandeza bastante diferentes. Esse tipo de situação pode ocorrer, por exemplo, quando queremos restringir o limite de tensão e deslocamento de parte da estrutura ao mesmo tempo. Nesse caso, o valor da restrição de tensão mecânica é da ordem de grandeza de MPa, e o deslocamento é normalmente da ordem de *mm*. A presença de valores com diferenças de grandeza nessa escala, pode levar o algoritmo de otimização a problemas de condicionamento numérico, conseqüentemente prejudicando o resultado ótimo. Para contornar esse problema, é usual normalizar a restrição, como mostrado na Equação (4.4).

$$g_j(x) \leq g_{max_j} \rightarrow \frac{g_j(x)}{g_{max_j}} \leq 1 \rightarrow \bar{g}_j(x) - 1 \leq 0. \quad (4.4)$$

As restrições podem ser classificadas ainda como locais e globais. As restrições do tipo global estão vinculadas a estrutura geral, por exemplo, restrições de volume, frequência natural, massa entre outros. Já as restrições denominadas locais estão vinculadas a um ponto específico no problema ou a parte da estrutura, por exemplo, restrições de tensão mecânicas, área da seção transversal, deslocamento de um ponto e etc.

Um problema de otimização pode conter quantas restrições forem necessárias. Contudo, deve-se evitar quando possível, o uso de um grande número de restrições no problema, pois quanto maior o número de restrições maior será o custo computacional empregado para resolução do problema. Sendo assim, deve-se atentar na formulação de problemas de otimização com restrições locais, uma vez que nesse tipo de problema normalmente surge um número grande de restrições, como por exemplo, ocorre na análise da tensão mecânica em uma estrutura treliça.

4.3.4 Formulação do Problema de Otimização

Um problema de otimização estrutural sujeito a restrições pode ser representado de modo geral da seguinte forma [Haftka e Gürdal, 1991]

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(x) \\
 &\text{Sujeito a} && g_j(x) \leq 0 && j = 1, \dots, n_g, \\
 &&& h_k(x) = 0 && k = 1, \dots, n_h, \\
 &&& a_l^{inf} \leq x_l \leq a_l^{sup} && l = 1, \dots, n_a,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde x denota o vetor das variáveis de projeto, $f(x)$ é a função a ser minimizada, g , h e a são as matrizes que contém as restrições de desigualdade, igualdade e laterais impostas ao problema respectivamente. Já n_g , n_h e n_a são os números de restrições de cada tipo.

4.3.5 Domínio Viável e Inviável

Uma vez definido o problema de otimização, necessita-se determinar a região de localização de sua solução. As restrições impostas ao problema dividem o espaço de projeto em domínio viável e inviável. A Figura 4.2 demonstra um espaço de projeto bidimensional, onde cada eixo de coordenada representa uma variável de projeto. A parte do domínio em que as restrições são respeitadas é denominada domínio viável de solução, de forma oposta, a parte do domínio em que alguma restrição não é respeitada é denominada domínio inviável de solução.

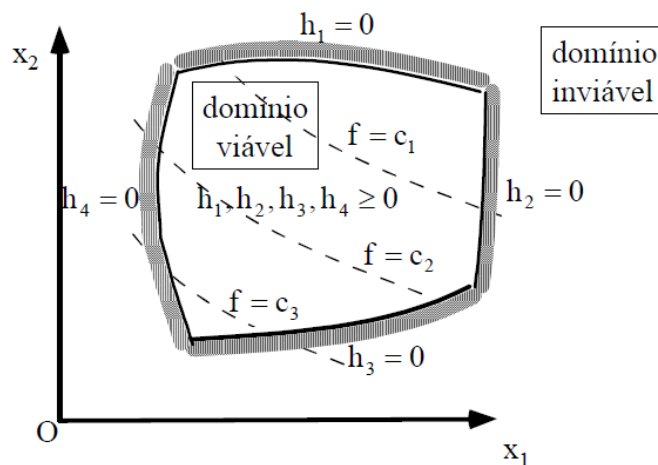


Figura 4.2 – Regiões de Domínio viável e inviável [Cheng, 1992].

A partir das restrições específicas do problema de otimização, surge o conceito de mínimo local e mínimo global na função objetivo. A função objetivo descrita por $f(x)$ pode apresentar dois tipos de mínimo, mínimo local e global. A Figura 4.3 mostra as curvas de nível da função objetivo $f(x)$. O mínimo local aparece numa cavidade “secundária” e possui um valor de $f(x)$ maior do que a o valor do mínimo global. Normalmente, problemas de otimização estrutural podem possuir vários mínimos locais, fazendo assim com que os algoritmos de otimização estacionem em algum desses pontos.

Para haver a confirmação se o mínimo encontrado é global, é necessário verificar se o problema é do tipo convexo. Nesse tipo de problema, a função objetivo é uma função convexa e o domínio viável é um domínio considerado também convexo. Além disso, a função objetivo pode possuir vários mínimos globais uma vez que o valor da função pode ser o mesmo em todos os pontos. De forma similar, podem-se ter vários mínimos locais em pequenas regiões do domínio viável.

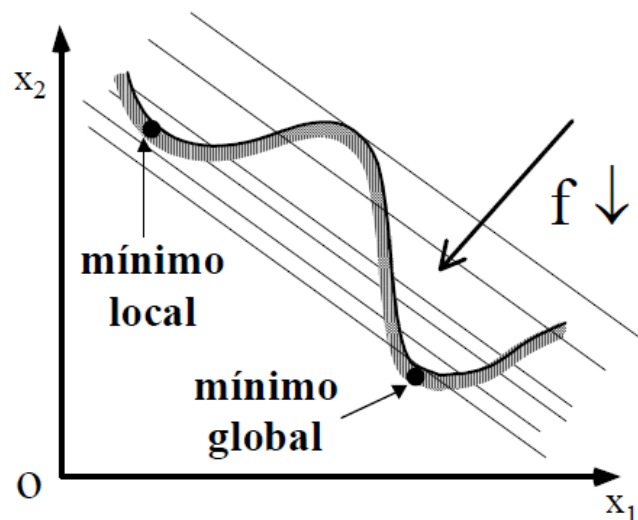


Figura 4.3 – Conceito de mínimo local e global [Cheng, 1992].

4.4 Conceitos teóricos da otimização topológica

A otimização topológica se baseia em dois conceitos teóricos principais: domínio fixo estendido de projeto e o modelo do material. Adicionalmente, o modelo do material baseado no método das densidades também será apresentado nessa seção.

4.4.1 Domínio Fixo Estendido

Em otimização topológica o domínio fixo estendido de projeto (Ω) é o espaço pré-determinado onde o algoritmo de otimização topológica pode encontrar a estrutura de forma ótima. O domínio fixo estendido consiste no domínio de forma fixa limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pelos pontos de aplicação de carregamento que a estrutura desconhecida conterá no domínio (Ω_d), conforme pode ser visto na Figura 4.4.

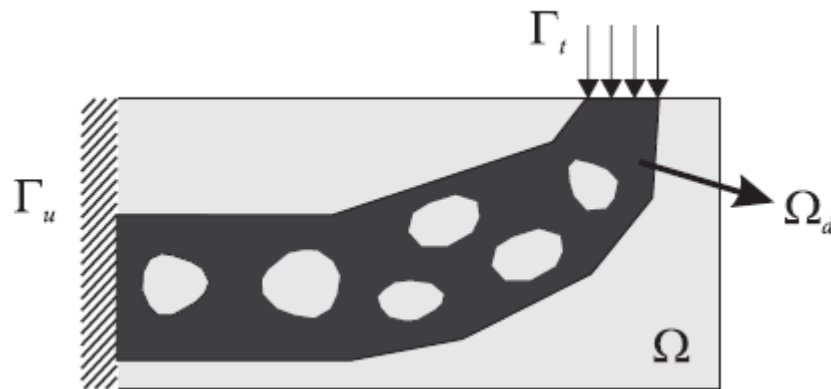


Figura 4.4 – Representação do domínio desconhecido Ω_d contido no domínio fixo estendido Ω .

No problema de otimização topológica, a forma ótima é obtida a partir da definição de restrições de deslocamentos, da quantidade de material possível de ser utilizada e da aplicação de carregamentos na estrutura, ou seja, condições de contorno do problema. O objetivo da otimização topológica é determinar os espaços sem material (vazios) e a conectividade da estrutura através da remoção ou adição de material, consistindo, portanto, na distribuição ótima de material no domínio fixo estendido. A grande vantagem apresentada pela otimização topológica sobre a otimização de forma, é a não alteração da malha de elementos finitos durante o processo de otimização, sendo alterada somente a distribuição de material nos elementos da malha.

4.4.2 Modelo Material

O modelo material é uma equação que define a mistura microescalar de dois ou mais materiais no processo de otimização topológica (onde um deles pode ser vazio), possibilitando

passar da condição de zero material (vazio) a um material sólido em cada ponto do domínio fixo estendido.

A propriedade de material efetiva $C(x)$ considerando um dos materiais como vazio pode ser representada pela Equação 4.6 para materiais isotrópicos.

$$C(x) = \chi(x)C_0 \quad , \quad (4.6)$$

onde C_0 é a propriedade básica do material a ser distribuída e $\chi(x)$ é uma função discreta que caracteriza a estrutura a ser otimizada, e é definida em cada ponto x do domínio Ω da seguinte maneira:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_D \\ 0 & \text{se } x \in \Omega/\Omega_D \end{cases} \quad , \quad (4.7)$$

tendo a região onde há presença de material representada por Ω_D , inserida em um domínio fixo estendido Ω , a Figura 4.5 representa essas regiões.

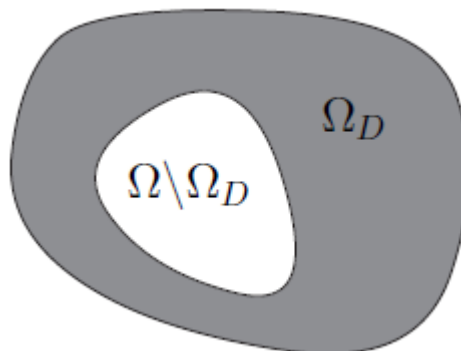


Figura 4.5 – Definição do domínio de projeto

O problema discreto pode não apresentar solução, dessa forma, é necessária uma relaxação para o problema contínuo. Essa relaxação das variáveis de projeto consiste em permitir que elas assumam valores intermediários entre 0 e 1 (vazio e sólido, respectivamente), também conhecido na literatura como problema de escala de cinza. Uma estrutura otimizada com escala de cinza pode ser visualizada na Figura 4.6. Normalmente, os valores intermediários de materiais não possuem um significado físico, sendo apenas decorrentes de um recurso matemático para relaxação do problema [Bendsøe e Sigmund,

2003]. A relaxação garante a existência de solução ótima, no entanto, por apresentar materiais intermediários, dificulta a interpretação final da topologia e consequentemente tornará difícil a sua fabricação.



Figura 4.6 – Representação da escala de cinza

Com o intuito de obter uma solução que possa ser fabricada posteriormente, procura-se recuperar o caráter discreto da distribuição de material. Baseado nisso, existem vários modelos de materiais que podem ser utilizados para contornar esse problema, dos quais se pode citar o método das densidades que será apresentado na seção seguinte.

4.4.3 Método das densidades

O método de densidades consiste em uma equação matemática que define o valor da densidade do material (variando de 0 a 1) em cada elemento do domínio (Ω) em função da propriedade efetiva do material base utilizado no projeto. Essencialmente o método simula uma microestrutura, definindo o nível de relaxação do problema.

Um dos mecanismos utilizados para a penalização das densidades intermediárias pode ser obtido através da formulação denominada SIMP (*Solid isotropic material with penalization*) [Bendsøe e Sigmund, 2003], descrito na Equação 4.8.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ijkl}(x) &= \rho^p(x) \mathbf{C}_{ijkl}^0, \quad p > 1, \\ \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega &\leq V; \quad 0 < \rho_{min} \leq 1, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde pseudodensidade $\rho(x)$ é uma variável de projeto, p é um expoente de penalização e \mathbf{C}_{ijkl}^0 é o tensor de elasticidade do material base. Ao utilizar o SIMP na formulação do problema de otimização, as densidades intermediárias passam a ter um alto custo para o processo que acaba evitando esses valores no projeto ótimo.

4.5 Aspectos Numéricos na Otimização Topológica

Nesta seção são apresentados os aspectos numéricos mais relevantes do método de otimização topológica baseados em distribuição de material que, se não forem contornados, comprometem a solução final do problema. Esses aspectos são a dependência da solução em relação ao refino da malha e a instabilidade de tabuleiro. A dependência de malha ocorre quando a solução final depende do refino da malha de elementos finitos, ou seja, a topologia da estrutura ótima tende a se alterar, aumentando o número de membros da estrutura, à medida que ocorre o refino da malha, e está ligado diretamente com a existência de soluções no problema contínuo. Já a instabilidade de tabuleiro é caracterizada por formar na estrutura regiões onde elementos adjacentes apresentam presença e ausência de material, dispostas em forma de tabuleiro de xadrez. Esses dois problemas numéricos enfrentados na otimização topológica, bem como suas respectivas soluções serão discutidas a seguir.

4.5.1 Dependência da Malha

Um problema numérico comum na otimização topológica é a dependência da malha, cuja característica é a de obter diferentes soluções topológicas finais para diferentes tipos de discretizações, ou seja, diferentes refinamentos de malha. Intuitivamente espera-se que ao refinar a malha de elementos finitos, a topologia ótima encontrada deva ser uma estrutura que descreva com maior fidelidade as condições de contorno do problema, com um resultado final mais refinado apresentando contornos melhor definidos. Porém, não é isso que ocorre. Em muitos problemas, se observa que com o aumento da discretização do problema, a topologia da estrutura ótima tende a se alterar, aumentando o número de membros da estrutura, caracterizando assim, o problema de dependência de malha. Na Figura 4.7 é possível averiguar essa identificar uma solução com dependência de malha.

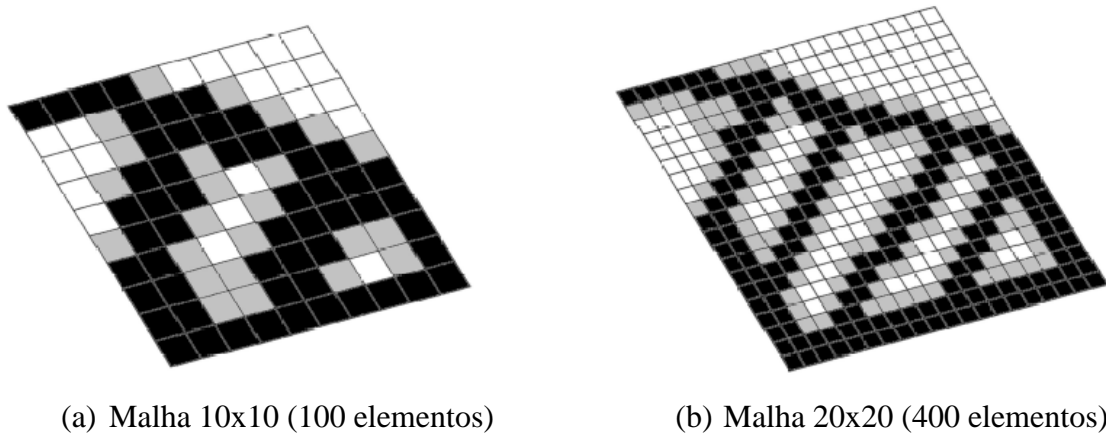


Figura 4.7 – Representação de um exemplo de solução com dependência de malha.

De acordo com Sigmund e Peterson, 1998 [Sigmund e Peterson, 1998] o problema de dependência de malha pode ser dividido em duas categorias. A primeira diz respeito aos casos onde se obtêm sempre topologias diferentes à medida que se refina a malha de elementos finitos, nesse caso o problema de dependência da malha é decorrente da não existência de solução do problema de otimização topológica. Ainda existe a possibilidade do problema não apresentar unicidade de solução (sem solução única), essa situação pode ocorrer conforme as condições de contorno aplicadas no problema como, por exemplo, no caso de uma barra sob tração uniaxial, em que as soluções de uma única barra de maior diâmetro ou de diversas barras de diâmetros menor, porém com a mesma área da barra única, apresentam a mesma rigidez.

Existem eficientes métodos para alcançar procedimentos independentes do refino da malha para buscar soluções (0 ou 1). Esses métodos se baseiam em restringir o espaço de soluções, impedindo assim a formação de microestruturas [Bendsøe e Sigmund, 2003].

Para contornar o problema de dependência da malha, encontram-se na literatura algumas técnicas que podem ser aplicadas, como a de restrição de perímetro [Ambrosio and Buttazzo, 1993], restrição global do gradiente [Bendsøe, 1995], restrição local do gradiente das densidades [Peterson e Sigmund, 1998], filtros no campo das pseudodensidades [Bourdin, 2001; Swan e Kosaka, 1997] e filtragem [Sigmund, 1997].

Uma revisão dos métodos utilizados pode ser encontrada em Peterson e Sigmund 1998, já uma descrição detalhada dos métodos pode ser encontrada em Bendsøe e Sigmund, 2003, [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Informações adicionais sobre o método do filtro de

sensibilidade podem ser encontradas nos trabalhos de Sigmund, 1997, Sigmund e Perterson, 1998 e Sigmund, 2007.

4.5.2 Instabilidade de tabuleiro

A instabilidade de tabuleiro de xadrez é uma instabilidade numérica recorrente em soluções obtidas pela otimização topológica. A instabilidade de tabuleiro é caracterizada por formar na estrutura, regiões onde elementos adjacentes apresentam presença e ausência de material, dispostas em forma de tabuleiro, como mostradas na Figura 4.8. Este problema numérico é indesejável na solução, pois não se configura numa distribuição ótima de material.



Figura 4.8 – Representação de um resultado com padrão de instabilidade de tabuleiro de xadrez [Bendsøe e Sigmund, 2003].

A presença de padrões de tabuleiro na otimização topológica está relacionado com as características das aproximações de elementos finitos do problema, e mais especificamente devido á má modelagem numérica que superestima a rigidez dos tabuleiros [Bendsøe e Sigmund, 2003].

As publicações inerentes à resolução da instabilidade de tabuleiro como [Diaz e Sigmund, 1995; Bourdin, 2001; Bendsøe e Sigmund, 2003], sugerem duas formas diferentes para amenizar esse problema. A primeira diz respeito ao aumento da ordem do elemento finito envolvido na análise e a outra em utilizar métodos de filtragem ou de controle de gradientes das pseudodensidades no domínio. Segundo Jog e Haber, 1996 [Jog e Haber, 1996] mesmo utilizando elementos de alta ordem com funções de interpolação complexas ainda é observada a presença de regiões com padrões de tabuleiro na estrutura.

Diante disso, a abordagem mais utilizada na literatura para evitar o padrão de tabuleiro é a implementação de filtros especiais na formulação e na otimização topológica [Bendsøe e

Sigmund, 2003], introduzindo assim, métodos de controle da variação das densidades dos elementos no domínio de projeto. Essa abordagem permite também controlar a complexidade da topologia obtida, além da dependência da malha [Bourdin, 2001]. A técnica de filtragem de sensibilidade, por exemplo, pode também ser utilizada para amenizar o aparecimento de padrões de tabuleiro. Isso é devido à sensibilidade do elemento analisado depender de sua própria média ponderada e da média ponderada de seus elementos vizinhos próximos.

O controle de instabilidade de tabuleiro na otimização topológica foi primeiramente discutido em [Bendsøe et al., 1993; Jog et al., 1993; Rodrigues e Fernandez, 1993]. Uma análise detalhada do problema pode ser encontrada nos trabalhos de Diaz e Sigmund, 1995 e Jog e Haber, 1996. Em soluções modernas com a inclusão de melhorias dos elementos finitos, podem ser encontrados em trabalhos como, [Jang et al. 2003; Talischi et al.,2009].

5. FORMULAÇÃO DA ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA LOCALIZAÇÃO DE ATUADOR PIEZELÉTRICO

Ao formular um problema de otimização estrutural topológica, deve-se definir o método de análise estrutural, as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições impostas ao projeto [Cheng, 1992]. Sendo assim, a estratégia de otimização topológica proposta neste trabalho tem como principal objetivo encontrar a localização ótima do atuador piezolétrico composto (MFC) na camada ativa de uma placa laminada de material composto.

Para isso, nessa tese, a formulação do problema de otimização topológica tem como função objetivo a maximização do traço do Gramiano de controlabilidade, a qual busca determinar a localização mais vantajosa do material MFC para o controle das vibrações estruturais. A formulação está sujeita a restrição de volume do material piezolétrico na lâmina ativa (camada superior) e a restrição de volume de uma lâmina estrutural passiva (camada inferior). Utiliza-se o MEF para discretizar o domínio e resolver as equações de equilíbrio. É importante salientar que para a otimização topológica o atuador piezolétrico MFC é considerado como um material ortotrópico e, conseqüentemente, o modelo do material é definido a partir dessa consideração.

Na Figura 5.1 pode-se visualizar a estrutura a ser otimizada, com camada superior (lâmina onde será definida a região para o atuador MFC), intermediária (sem alteração estrutural) e inferior (lâmina passiva com alteração estrutural, respeitando a restrição de volume).

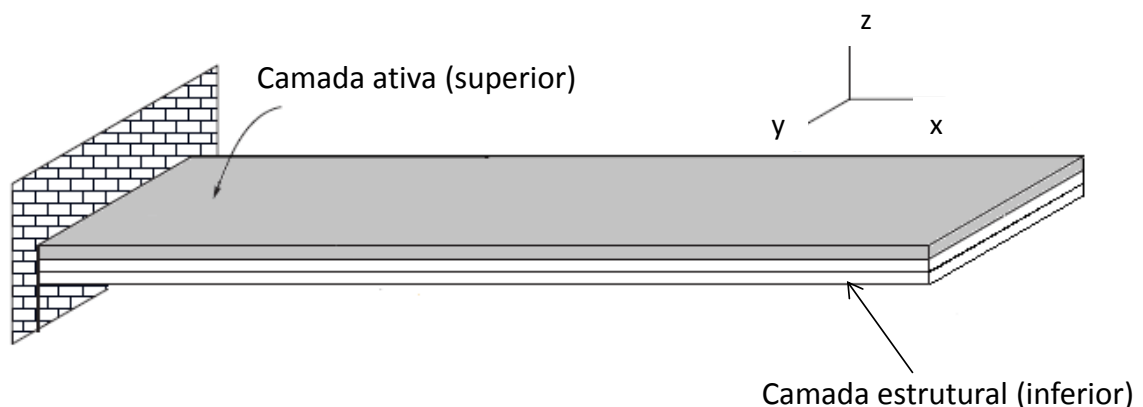


Figura 5.1 – Estrutura a ser otimizada, com camada superior, intermediária e inferior.

O método aplicado para resolver o problema de otimização é a programação linear sequencial (SLP - *Sequential Linear Programming*), que necessita por sua vez das derivadas da função objetivo e restrições em função da variável de projeto (análise de sensibilidade). A formulação para a estratégia de otimização, pode ser definida de forma geral como

$$\begin{aligned} & \max_{\rho_a, \rho_e} f(\rho_a, \rho_e), \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} g(\rho_a, \rho_e) \leq 0, \\ h(\rho_a, \rho_e) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde f é a função objetivo, ρ_a é a variável de projeto do controle ρ_e é a variável de projeto estrutural, g é a restrição de desigualdade e h é a restrição de igualdade.

Nos últimos anos, pesquisas sobre otimização topológica para a localização ótima de atuadores piezelétricos estão ganhando espaço na área de estruturas inteligentes. É possível encontrar na literatura vários trabalhos recentes sobre o assunto, os quais propõem diferentes estratégias para a otimização utilizando técnicas de programação matemática e/ou algoritmos genéticos para a solução do problema. Han e Lee, 1999 determinaram a localização ótima de atuadores e sensores considerando a região de maior valor do Gramiano de controlabilidade e observabilidade na estrutura. Foi utilizada uma estratégia baseada em algoritmos genéticos para a solução do problema de otimização. Além disso, propuseram modificações no algoritmo genético para melhorar a eficiência da busca. Os resultados encontrados para a otimização via o Gramiano foram satisfatórios. [Du et al., 2000; Cardoso et al., 2006; Wein et al., 2008], utilizaram o método de assíntotas móveis para resolver o problema de otimização para alocação de atuadores PZT.

Li et. al, 2000, propuseram uma otimização de forma e topológica de atuadores PZT para controle de vibrações estruturais, através de uma otimização aninhada utilizando algoritmo genético em um primeiro laço externo, e SLP em um laço interno de otimização. Com essa técnica, bons resultados foram encontrados para o projeto ótimo. Carbonari et al., 2007, utilizaram SLP para solução de um problema de otimização de busca simultânea da topologia ótima de uma estrutura flexível, posicionamento ótimo de material PZT no domínio de projeto e ângulos de rotação ótimos dos eixos de material PZT para maximizar o deslocamento de saída em uma determinada direção ou ponto do domínio. Para isso, o modelo

do material proposto é baseado em uma simples extensão do SIMP [Bensøe e Sigmund, 2003].

Rubio et al., 2007, utilizaram SLP para resolver o problema de localização ótima de sensor piezelétrico, obtendo bom desempenho. Xu et al., 2013, propuseram uma otimização integrada da topologia estrutural e do controle baseado em algoritmo genético em uma placa piezelétrica inteligente. Os resultados mostram que a abordagem proposta pode produzir a solução ótima com uma topologia estrutural bem definida e com bom desempenho de controle.

Além disso, pesquisadores sob a orientação do Professor Jun Sérgio Ono Fonseca, no Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) da UFRGS, desenvolveram pesquisas sobre otimização de atuadores e sensores piezelétricos no projeto de estruturas inteligentes. Bottega, 2004 e Molter, 2008, apresentaram uma proposta de otimização simultânea do controle e dos atuadores e sensores através da maximização da energia dissipada no sistema, devido à ação do controle, com otimização do posicionamento e tamanho dos atuadores e sensores piezelétrico em um manipulador flexível. Silveira, 2012, apresentou o desenvolvimento de uma metodologia de projeto ótimo de estruturas ativamente controladas, com o objetivo de suprimir as vibrações induzidas por perturbações externas. Para isso, a localização dos atuadores piezelétricos é determinada por uma otimização baseada em uma lei de controle que define onde o material deve ter propriedades piezelétricas, através da maximização de uma medida de controlabilidade.

A partir desses trabalhos, como sequência nas pesquisas, essa tese contribuiu através da metodologia de otimização topológica do atuador MFC na camada ativa da estrutura objetivando o controle de vibrações estruturais, através de um índice de controlabilidade, utilizando como função objetivo a maximização do traço do Gramiano de Controlabilidade.

Neste capítulo apresenta-se a formulação da estratégia de otimização topológica para a localização do atuador piezelétrico. Na Seção 5.1 é apresentada a função objetivo e as restrições do projeto, bem como o modelo do material e o projeto de controle para redução de vibrações. Na Seção 5.2 é demonstrado a resolução do problema de otimização via programação linear sequencial, juntamente com uma breve definição da programação matemática e da programação linear. Já, na Seção 5.3 são apresentadas as análises de sensibilidades necessárias a SLP, como sensibilidade do modelo material, do Gramiano de controlabilidade, dos autovalores e autovetores e do volume.

5.1 Função Objetivo e Restrições

A metodologia de otimização topológica para alocação ótima do atuador proposta nesse trabalho, pode ser considerada como um problema de programação não linear, em que a função objetivo f é maximizada em relação à variável de projeto de controle ρ_a e a variável de projeto estrutural ρ_e , na forma,

$$\max_{\rho_a, \rho_e} f(\rho_a, \rho_e). \quad (5.2)$$

O problema de otimização é resolvido de forma iterativa, conforme será descrito ao longo desse capítulo. A otimização estrutural topológica para alocação ótima do atuador é baseada na maximização do traço do Gramiano de controlabilidade do sistema de controle ótimo, o qual está relacionado com a variável de projeto de controle (ρ_a), que define em quais regiões da camada ativa deve-se ter material piezolétrico (atuador MFC) e em quais regiões não deve haver materiais (vazios), e a variável de projeto estrutural (ρ_e), que define em quais regiões de uma das camadas passivas estruturais deve-se ter material ortotrópico composto e em quais regiões não deve haver. Esta seção, apresenta o modelo do material, bem como o projeto de otimização topológica adotado para o controle de vibrações.

5.1.1 Modelo do material

O modelo do material proposto para a distribuição de material no domínio de projeto inclui um material sólido ortotrópico (MFC ou composto passivo), além de vazios, e é baseado no método denominado SIMP [Bensøe, 1989; Rozvany et al. 1992; Bensøe e Sigmund, 2003]. Assim, a matriz de propriedade efetiva elástica \mathbf{C}^E e o peso específico γ podem ser calculados em qualquer ponto do domínio pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^E &= \rho^{p1} \mathbf{C}_0^E, \\ \gamma &= \rho^{pm} \gamma_0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde a matriz de propriedade base do material é representada por \mathbf{C}_0^E , a qual define as propriedades elásticas do material ortotrópico, e γ_0 que se refere ao peso específico. ρ é a

variável de projeto (pseudodensidades) definida em cada elemento finito e em cada lâmina otimizada. Já, p_1 e pm são os expoentes de penalização que tentam recuperar o caráter discreto da solução, ou seja, recuperar a presença ou ausência de material piezelétrico atenuando a escala de cinza na distribuição do material. A escolha dos valores utilizados nos coeficientes de penalização pode ser feita de forma arbitrária seguindo critérios do projetista, ou ainda, em casos específicos, seguir critérios de forma a garantir a convergência da solução [Kim et al., 2010].

Na etapa do projeto de otimização topológica para redução de vibrações, esse modelo material distribui o material ortotrópico (MFC) de forma ótima na camada ativa superior da estrutura e distribuiu o material ortotrópico composto na camada estrutural passiva inferior, contribuindo diretamente para a otimização do controle. Para isso, substitui-se a matriz de propriedade efetiva elástica e o peso específico da Equação 5.3, na Equação 2.58 de rigidez e na Equação 2.62 de massa.

5.1.2 Projeto de otimização topológica para redução de vibrações

O posicionamento de atuadores piezelétricos em um sistema estrutural controlado modifica o comportamento do controle. Neste trabalho, é de interesse a localização otimizada dos atuadores a fim de melhorar o desempenho do sistema de controle. Sendo assim, é necessário que seja utilizado algum critério na otimização que sirva de parâmetro para avaliar qual é a melhor localização do atuador para o objetivo desejado. Gupta, et al., 2010, apresentaram uma revisão dos principais critérios utilizados para otimização do posicionamento de sensores e atuadores em estruturas inteligentes. Dentre esses critérios, o critério de índice controlabilidade será utilizado nessa tese. Segundo Safizadeh et al., 2010, para se encontrar a melhor posição do atuador, uma otimização baseada em um índice de desempenho de controlabilidade é necessária, afim de minimizar a energia utilizada no atuador durante o controle.

As estratégias de posicionamento ótimo norteadas pelos graus de controlabilidade do sistema são independentes das condições iniciais e leis de controle aplicadas. Devido a essa característica, a função objetivo utilizada neste trabalho é a maximização do traço do Graminano de controlabilidade do sistema [Nguyen e Georges, 2006] que é definida como:

$$f(\rho_a, \rho_e) = f_a = \text{tr}(\mathbf{W}_c) , \quad (5.4)$$

onde \mathbf{W}_c é o Gramiano de controlabilidade apresentado da Seção 3.5 e representado pela Equação 3.43. Dessa maneira, a otimização de controle pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \max_{\rho_a, \rho_e} f_a(\rho_a, \rho_e) , \\ \text{sujeito a } & \left\{ \begin{array}{l} 0 < \rho_{ai}, \rho_{ei} \leq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ V_a = \frac{\int_{\Omega} \rho_{ai} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V_a^{\max}, \\ V_e = \frac{\int_{\Omega} \rho_{ei} d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \leq V_e^{\max} \end{array} \right. , \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde ρ_a, ρ_e são os vetores das variáveis de projeto de controle e estrutural respectivamente, e ρ_{ai}, ρ_{ei} são as i -ésimas componentes desses vetores, N é a dimensão do vetor das variáveis de projeto, que nesse trabalho é igual ao número de elementos finitos. A segunda restrição limita o volume de material piezelétrico total da camada ativa V_a a uma fração do volume V_a^{\max} pré-estabelecida. A terceira restrição limita o volume de material ortotrópico composto total na camada estrutural passiva V_e a uma fração do volume V_e^{\max} pré-estabelecida. Ao fim do processo de otimização encontra-se um vetor com os valores das variáveis de projeto de controle ρ_a e estrutural ρ_e (pseudodensidades do material piezelétrico e ortotrópico composto, respectivamente) que maximiza a função objetivo f_a . Definindo dessa forma a topologia estrutural, identificando onde se tem material piezelétrico ou vazio na camada ativa da estrutura e onde se tem material ortotrópico composto ou vazio da camada estrutural passiva inferior.

5.2 Resolução dos problemas de otimização via Programação Linear Sequencial

Para os problemas de otimização descritos neste trabalho, utiliza-se a programação linear sequencial (ou SLP- *Sequential Linear Programming*). Esta seção apresenta primeiramente uma breve revisão sobre os métodos de programação matemática utilizados na resolução de problemas de otimização, em seguida, é descrito o método de programação linear (LP) e o método de programação linear sequencial (SLP).

5.2.1 Programação Matemática

A programação matemática é uma classe especial de método numérico iterativo, e pode ser vista como uma ferramenta utilizada para resolver problemas de otimização nas mais diferentes áreas do conhecimento, sendo introduzida na otimização estrutural pela primeira vez por Schmit, L.A. 1960, [apud Cheng, 1992]. A programação matemática tem como objetivo extremar uma função objetivo, que surge ao montar-se um problema de otimização, definida em um espaço de solução e submetida a um conjunto de restrições.

O procedimento de solução dá-se a partir de uma estimativa inicial utilizada como ponto de partida do problema, uma busca sistemática iterativa é realizada no domínio de projeto até um novo projeto mais próximo do ótimo ser gerado. Esse projeto intermediário deve necessariamente satisfazer as condições de equilíbrio e as restrições impostas ao problema. A busca é finalizada quando um determinado critério é satisfeito, indicando que o projeto está suficientemente próximo do ótimo.

Os métodos de programação matemática para resolução de problemas de otimização são definidos de acordo com as características da função objetivo e/ou das restrições, destacando-se:

- Programação Linear (LP): Função objetivo e restrições lineares;
- Programação Quadrática (QP): Função objetivo quadrática e restrições lineares;
- Programação Não Linear (NLP): Função objetivo e/ou restrições não lineares;
- Programação Inteira (IP): Busca da solução ótima dentro de um conjunto de valores discretos.

Uma dificuldade encontrada em um problema de otimização de qualquer natureza é encontrar ótimo global. Alguns algoritmos utilizados na solução desses problemas acabam encontrando um mínimo local como solução ou param devido ao alto custo computacional. Contudo, existe uma classe de problemas denominados problemas convexos, no quais é possível provar que o mínimo local é também um mínimo global [Haftka e Gürdal, 1991; Cheng, 1992]. Uma técnica de programação matemática muito utilizada nesse tipo de problema em otimização estrutural é a programação sequencial. Nessa técnica de programação, o problema original não linear é resolvido através de uma sequência de soluções de uma programação aproximada do problema original, que dependendo do tipo de aproximação necessária podem ser lineares, quadráticas, entre outras. Na Seção 5.2.2, que

segue, é descrita a programação linear e a técnica de programação linear sequencial utilizada no trabalho.

5.2.2 Programação Linear

A programação linear (ou LP – “*Linear Programming*”) descreve uma classe particular de problemas de otimização onde a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto. Isso significa que a derivada da função objetivo em relação à variável de projeto (sensibilidades) é constante, mas não necessariamente nula. Dessa forma, o extremo de um problema de programação linear está localizado na fronteira do domínio viável, e não no interior, devido a não haver gradientes nulos no interior do domínio [Haftka e Gürdal, 1991].

A formulação geral para problemas de programação linear pode ser representada por:

$$\begin{array}{ll}
 \text{encontrar} & x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\
 \text{que minimize} & f = \mathbf{c}^T x \\
 \text{sujeito} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 & x \geq 0,
 \end{array} \tag{5.6}$$

onde x é o vetor de variáveis de projeto, n é o número de variáveis de projeto, \mathbf{c} é o vetor dos coeficientes de dimensão $n \times 1$, \mathbf{A} é a matriz de dimensão $m \times m$ sendo m o número de restrições e \mathbf{b} é um vetor $m \times 1$. A matriz \mathbf{A} pode ser composta por restrições de igualdade e de desigualdade. As restrições de desigualdade podem ser transformadas em restrições de igualdade através da inclusão de variáveis de folga.

5.2.3 Programação Linear Sequencial

A PLS é uma variação da programação linear e é utilizada em problemas de otimização em que a função objetivo e/ou as restrições do problema envolvem funções não lineares, que são linearizadas através da expansão por série de Taylor [Haftka e Gürdal, 1991] truncadas no termo de primeira ordem, onde o objetivo é criar aproximações lineares da função objetivo e das restrições em torno de um ponto.

Com esse procedimento os valores da função objetivo e restrições são obtidos de maneira mais rápida e simples quando necessário, além disso, a aproximação convexa para o problema permite a aplicação de limites móveis para as variáveis de projeto durante o processo iterativo, o que não seria possível utilizando outros métodos [Fonseca, 1997].

A transformação de um problema de otimização não linear em um linear, pode ser descrito através da expansão em série de Taylor na vizinhança do ponto x_0 , como:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial f}{\partial \rho_i} \right) x_{0i} \\
 \text{sujeito a} \quad & g(x) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial g}{\partial \rho_i} \right) x_{0i} \leq 0 \\
 & h(x) = h(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left(\frac{\partial h}{\partial \rho_i} \right) x_{0i} = 0 \\
 & a_i^{inf} \leq (x_i - x_{0i}) \leq a_i^{sup} ,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde n é o número de variáveis de projeto e a última restrição da Equação 5.7, conhecida como limite móvel, é adicionada na forma de restrições laterais para garantir que a variação das variáveis de projeto não seja demasiadamente grande, uma vez que a aproximação de primeira ordem por série de Taylor apresenta bons resultados na vizinhança de x_{0i} [Cheng, 1992].

O método PLS é um algoritmo baseado em um procedimento iterativo, que resolve um problema de otimização da seguinte maneira: primeiramente, a partir de uma estimativa inicial (x_{0i}) para a variável de projeto, os valores da função objetivo, restrições e sensibilidades do problema são calculados. Posteriormente, definem-se os valores dos limites móveis, os quais são normalmente determinados em função de um acréscimo ou decréscimo percentual aplicado sobre o valor das variáveis de projeto. Assim, resolve-se o problema de programação linear e obtêm-se os novos valores para as variáveis de projeto, os quais são uma solução aproximada do problema não linear original. Finalmente, verifica-se a convergência do problema, caso não satisfeita, o novo valor das variáveis de projeto é introduzido no procedimento como x_{0i} , e todo o processo se repete até a convergência ou até que algum critério de parada seja satisfeito.

Quando o problema possui grandes dimensões e não linearidades moderadas, o método PLS é competitivo ao ser comparado a outros métodos utilizados em problemas não lineares. Sua implementação é mais simples, requerendo apenas derivadas de primeira ordem.

Além disso, Cheng, 1992, afirma que se a solução se encontrar em um dos vértices do poliedro convexo, a convergência pode ser bastante rápida.

Apesar disso, um problema identificado no SLP é a definição dos limites móveis. Como os valores obtidos por expansão da série de Taylor valem em regiões próximas x_{0i} , a determinação correta destes limites é de vital importância para o sucesso do algoritmo de otimização, uma escolha inadequada pode dificultar a convergência do problema. Se forem escolhidos limites muito pequenos, o custo computacional para obter a solução do sistema é elevado, caso os limites sejam grandes, o erro de aproximação será grande, podendo inclusive ocorrer o risco de o algoritmo perder o ponto ótimo, não o atingindo.

Alguns pesquisadores utilizam métodos heurísticos para a determinação dos limites móveis, onde não se utiliza as informações das restrições, somente a variação do valor da função objetivo. Neste trabalho, a estratégia utilizada para o cálculo dos limites móveis é semelhante à aplicada nos trabalhos de Fonseca, conforme Figura 5.2, [Fonseca, 1997], Sant'Anna [Sant'Anna, 2002] e De Leon [De Leon, 2011].

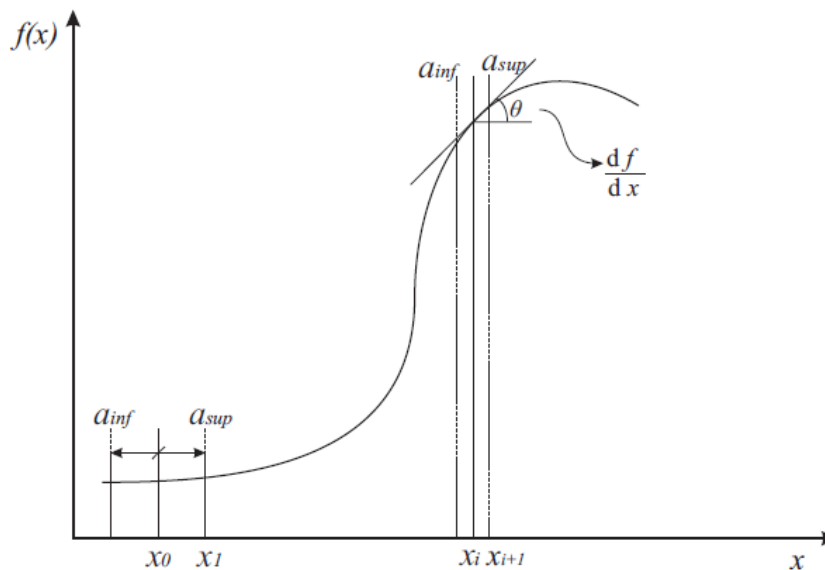


Figura 5.2 – Processo Sequencial para achar o ponto ótimo em SLP [De Leon, 2011].

Sinteticamente, o procedimento utilizado para escolha dos limites móveis é baseado na análise do histórico das três últimas iterações do algoritmo, aumentando ou reduzindo o valor dos limites dependendo do comportamento das variáveis de projeto. Primeiramente se calcula as variações (Δ_1 e Δ_2) da variável de projeto nas iterações

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (x_{i-1} - x_{i-2}), \\ \Delta_2 &= (x_{i-2} - x_{i-3}),\end{aligned}\tag{5.8}$$

onde x_{i-1} , x_{i-2} e x_{i-3} são os valores das variáveis de projeto, obtidos nas três iterações anteriores, considerando i a iteração atual do algoritmo. A partir do valor do produto a entre as variações Δ_1 e Δ_2 , determina-se se os limites móveis serão aumentados ou diminuídos,

$$a = \Delta_1 \Delta_2 ,\tag{5.8}$$

$$\begin{cases} l_i = (1 + \delta)l_{i-1} , & \text{se } a \leq 0 \\ l_i = (1 - \delta)l_{i-1} , & \text{se } a > 0 \end{cases}\tag{5.10}$$

onde l_i é o tamanho do novo limite móvel, l_{i-1} é o tamanho do limite móvel da iteração anterior e δ é fator de variação do limite móvel (para mais ou para menos), devendo este ser escolhido, a partir da experiência com o problema, em uma faixa de acréscimo ou decréscimo de quinze por cento ($\delta = 0.15$) nos limites móveis. Dessa maneira, as restrições laterais podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}a_{inf} &= x_i - l_i \\ a_{sup} &= x_i - l_i .\end{aligned}\tag{5.11}$$

5.3 Análises de sensibilidade

A análise de sensibilidade informa como a função objetivo e as restrições variam em relação a uma variação nas variáveis de projeto do problema, e segundo Pedersen, 2003, é fundamental para decidir o que se pode modificar no projeto a partir da avaliação do comportamento da sensibilidade. Os algoritmos de otimização de primeira ordem, como a programação linear sequencial, requerem a linearização da função objetivo em relação às variáveis do problema, ou seja, exige o cálculo das derivadas primeiras (ou gradientes) da função objetivo e restrições em relação às variáveis de projeto, procedimento denominado de análise de sensibilidade. Deste modo, a sensibilidade deve ser calculada de forma precisa, caso contrário o método caminhará numa direção errada, não chegando à solução ótima.

A sensibilidade fornece boa informação sobre o comportamento do problema. Ela permite analisar a mudança do comportamento da estrutura devido a pequenas mudanças de seus parâmetros como dimensões, propriedades de materiais entre outros. Devido a isso, é apresentada nessa seção a sensibilidade do modelo material, do Gramiano de controlabilidade, dos autovalores e autovetores e do volume. Sendo todas calculadas de forma analítica o que aumenta a precisão dos cálculos em relação aos demais métodos utilizados para a análise de sensibilidade.

5.3.1 Sensibilidade do modelo material

A sensibilidade do modelo material pode ser obtida a partir da derivada do modelo material, apresentado na Equação 5.3, em relação à variável de projeto ρ , conforme segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{C}^E}{\partial \rho} &= p1\rho^{p1-1}\mathbf{C}_0^E, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= pm\rho^{pm-1}\gamma_0,\end{aligned}\tag{5.12}$$

onde os termos que compõem a sensibilidade já foram apresentados na seção 5.1.1.

5.3.2 Sensibilidade do Gramiano de controlabilidade

A análise de sensibilidade do Gramiano de controlabilidade é necessária uma vez que o comportamento e o desempenho do sistema de controle estão ligados diretamente as variáveis de projeto e a lógica de realimentação. Dessa forma, para a otimização do sistema de controle, as sensibilidades de primeira ordem são dadas a partir do Gramiano de controlabilidade \mathbf{W}_c que é obtido resolvendo a Equação 5.13 de Lyapunov [Gawronski, 2004] para um conjunto de parâmetros em espaço de estados (A,B,C).

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}.\tag{5.13}$$

As sensibilidades dessas matrizes em relação às variáveis de projeto de controle ρ_a e estrutural ρ_e podem ser facilmente obtidas derivando a expressão anterior em relação a cada variável de projeto. Para sensibilidade do Gramiano de controlabilidade em relação à variável de projeto de controle (ρ_a), pode-se escrever:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \rho_a} + \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \rho_a} \mathbf{A}^T + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_a} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \rho_a} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \rho_a} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \rho_a} = \mathbf{0}. \quad (5.14)$$

As sensibilidades das matrizes da dinâmica do sistema \mathbf{A} e do sinal de entrada \mathbf{B} , em espaço de estados, em relação à variável de projeto podem ser obtidas de forma sequencial, conforme segue:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \Omega^2}{\partial \rho_a} & -2\mathbf{Z} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_a} \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \rho_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Psi^T}{\partial \rho_a} \mathbf{f}_d + \Psi^T \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \rho_a} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

As sensibilidades de \mathbf{f}_d em relação às variáveis de projeto são obtidas por,

$$\frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \rho_a} = \int_{\Omega_e} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{0T} \frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \rho_a} \mathbf{F}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}^{0T} \frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \rho_a} \mathbf{F}_2 \right] d\Omega \quad (5.17)$$

onde $\frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \rho_a}$ e $\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \rho_a}$ estão no APÊNDICE A.

A equação obtida 5.14 é, na verdade, uma equação genérica de sensibilidade e pode ser deduzida da mesma forma para qualquer variável de projeto, apenas trocando-se a variável. Para o caso de analisar a sensibilidade do Gramiano de controlabilidade em relação à variável de projeto estrutural (ρ_e), a equação torna-se:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{W}_c}{\partial \rho_e} \mathbf{A}^T + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_e} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \rho_e} \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \rho_e} = \mathbf{0}. \quad (5.18)$$

As sensibilidades das matrizes da dinâmica do sistema \mathbf{A} e do sinal de entrada \mathbf{B} , em espaço de estados, em relação à variável de projeto estrutural podem ser obtidas na seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^2}{\partial \rho_e} & -2\mathbf{Z} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \rho_e} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \rho_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial \rho_e} \mathbf{f}_d + \boldsymbol{\Psi}^T \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \rho_e} \end{bmatrix}.$$

O vetor de forças distribuídas devido ao MFC (\mathbf{f}_d) é somente calculado na lâmina ativa da estrutura (conforme apresentado na Seção 2.8.1). Portanto, este vetor não apresenta nenhuma variação em seus valores a partir de alguma mudança estrutural nas demais lâminas da estrutura, e conseqüentemente, sua sensibilidade em relação à variável de projeto estrutural é nula, ou seja, $\frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \rho_e} = 0$.

5.3.3 Sensibilidade de autovalores e autovetores

As sensibilidades de autovalores e autovetores em relação a parâmetros estruturais, no caso em relação à variável de projeto, são importantes no projeto de otimização estrutural. A análise de sensibilidade dos autovalores em relação à variável de projeto, necessária nas Equações 5.15 e 5.15a, pode ser encontrada a partir do problema de autovalores descrito como

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_i = 0, \quad (5.20)$$

multiplicando a Equação 5.20 por $\boldsymbol{\psi}_i^T$

$$\boldsymbol{\psi}_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}_i = 0, \quad (5.21)$$

e derivando a Equação 5.21 em relação a variável de projeto ρ , têm-se

$$\frac{\partial \psi_i^T}{\partial \rho} (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \psi_i + \psi_i^T (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \frac{\partial \psi_i}{\partial \rho} + \psi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \right) \psi_i = 0. \quad (5.22)$$

A Equação 5.22 pode ser simplificada usando a igualdade determinada nas equações 5.20 e 5.21.

$$\psi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} \mathbf{M} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \right) \psi_i = 0, \quad (5.23)$$

$$\psi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \right) \psi_i = \psi_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} \mathbf{M} \psi_i, \quad (5.24)$$

e isolando o termo $\partial \lambda_i / \partial \rho$ obtêm-se,

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} = \frac{\psi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \right) \psi_i}{\psi_i^T \mathbf{M} \psi_i}, \quad (5.25)$$

aqui pode-se fazer algumas considerações. O denominador foi ortonormalizado em relação aos autovetores resultando na matriz identidade, conforme segue,

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} = \mathbf{I}, \quad (5.26)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{\Psi}$ é uma matriz cujas colunas são os ψ autovetores. Portanto, pode-se simplificar a Equação 5.25, chegando assim na sensibilidade do autovalor em relação à variável de projeto representada por,

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} = \psi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \right) \psi_i, \quad (5.27)$$

onde o λ_i é um autovalor e ψ_i o autovalor correspondente. A derivada da matriz de rigidez e de massa em relação à variável de projeto ρ está desenvolvida no APÊNDICE A.

Para obter a sensibilidade de um autovetor em relação à variável de projeto $\partial \psi_i / \partial \rho$, será utilizada a metodologia proposta por Wu et al. 2007. Para isso, é preciso derivar a

Equação 5.20 através da regra da multiplicação, denotando que $\mathbf{F}_i = \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}$. Assim, pode-se escrever

$$\mathbf{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \rho} = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i, \quad (5.28)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho} \mathbf{M}, \quad (5.29)$$

e a sensibilidade do autovalor em relação a variável de projeto $\partial \lambda_i / \partial \rho$ já foi desenvolvida na Equação 5.27. Assume-se que a sensibilidade dos autovetores tem a forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \rho} = \mathbf{v}_i + c \boldsymbol{\psi}_i \quad (5.30)$$

sendo \mathbf{v}_i uma solução particular do problema de autovalores da Equação 5.28 que satisfaz

$$\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i. \quad (5.31)$$

O valor de \mathbf{v}_i , de acordo com Wu et al. 2007, pode ser obtido resolvendo a seguinte Equação algébrica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i & l \mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i \\ l (\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.32)$$

onde

$$l = \max_{1 \leq j \leq n} (k_{ij}) / \|\mathbf{K} \boldsymbol{\psi}_i\|_{\infty}, \quad (5.33)$$

sendo μ igual à zero na solução. Por fim, o coeficiente c pode ser determinado por

$$c = -\boldsymbol{\psi}_i^T \left(\frac{\mathbf{1}}{2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \rho} \boldsymbol{\psi}_i - \mathbf{M} \mathbf{v}_i \right). \quad (5.34)$$

5.3.4 Sensibilidade do volume

A sensibilidade das restrições de volume em relação às variáveis de projeto também deve ser feita. A derivada do volume é bastante simples para a abordagem tradicional, onde a relação entre volume e densidade é linear. O volume da camada é dado por

$$V = \sum_{i=1}^{nelem} A_i h_i \rho_i, \quad (5.35)$$

e tem derivada em relação a variável de projeto

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_i} = A_i h_i, \quad (5.36)$$

onde A_i é a área do elemento, h_i é a espessura do elemento em cada camada e ρ_i é a variável de projeto (pseudodensidade) do elemento em cada camada.

6. RESULTADOS

A fim de verificar as metodologias de otimização topológica e controle estrutural propostas neste trabalho, este capítulo apresenta os resultados obtidos. Todos os equacionamentos aqui propostos foram implementados em MATLAB. Para o caso em estudo, considera-se uma placa plana composta laminada em balanço. A estrutura é discretizada em 560 (35 x 16) elementos finitos. A placa possui, inicialmente, uma lâmina superior de espessura 0.3 mm, de material ativo MFC, onde as fibras piezelétricas estão alinhadas a 0° em relação à direção x , e duas lâminas de espessura 0.5 mm cada, de material composto passivo (fibra de vidro+matriz de epóxi), dispostas na configuração [0,90], conforme a Figura 6.1.

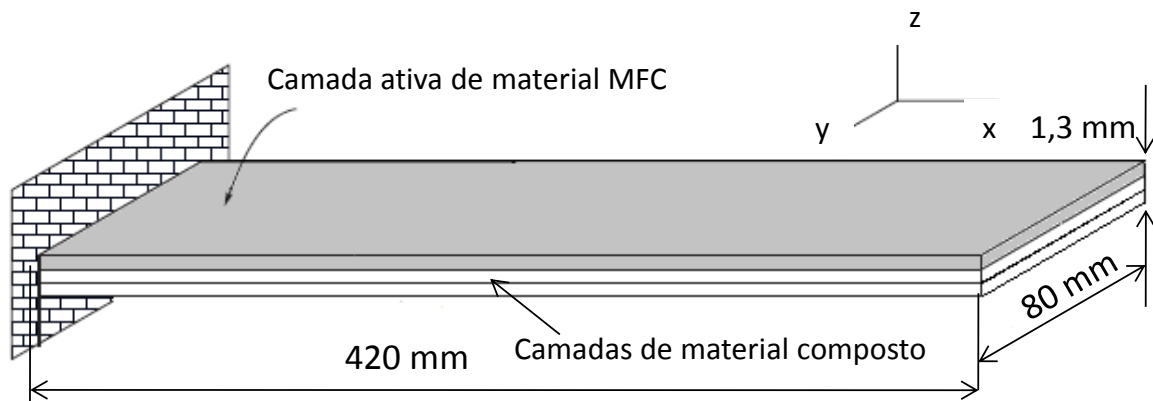


Figura 6.1 – Placa plana composta laminada em balanço.

A Tabela 6.1 apresenta as propriedades mecânicas da lâmina de material piezoelétrico (MFC) e do material composto, utilizados nestes resultados, sendo a direção da fibra igual a 1.

Tabela 6.1 – Propriedades materiais de uma lâmina do material composto e do MFC

MATERIAL COMPOSTO	MFC
$E_1 = 29.090$ GPa	$E_1 = 30.336$ GPa
$E_2 = E_3 = 8.841$ GPa	$E_2 = E_3 = 15.857$ GPa
$G_{12} = G_{13} = 2.726$ GPa	$G_{12} = G_{13} = 5.515$ GPa
$G_{23} = 1.205$ GPa	$G_{23} = 2.60$ GPa
$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.1434$	$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.31$
$\nu_{23} = 0.2933$	$\nu_{23} = 0.327$
$\gamma = 1793$ kg/m ³	$\gamma = 5440$ kg/m ³
	$w_h = 0.5$ mm, $d_{33} = 4.0E+02$ pm/V

Fonte: [Smart Material, 2013].

Os modos de vibração da estrutura, os quais posteriormente serão utilizados na otimização e no controle, são apresentados na Figura 6.2.

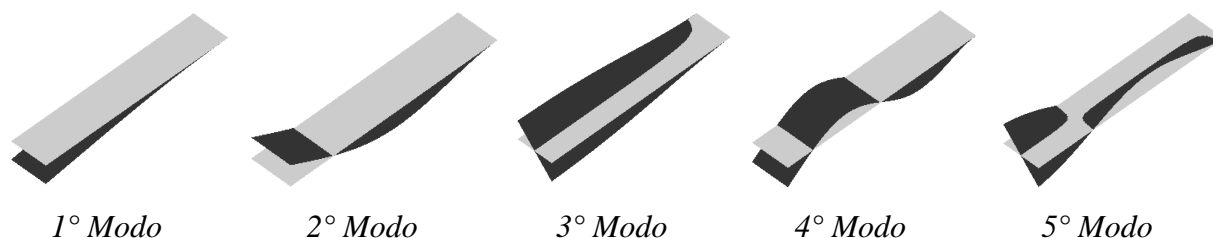


Figura 6.2 – Modos de vibração da placa plana [0,90] com o MFC.

A partir desse caso de estudo, serão apresentados os resultados obtidos através das metodologias propostas. A Seção 6.1 apresenta os resultados relativos às topologias ótimas do atuador MFC na camada ativa da estrutura, bem como os resultados das topologias ótimas para o atuador MFC com restrição de volume estrutural em uma camada do material composto. Na Seção 6.2 são apresentados resultados comparativos da aplicação do controle LQR e LQG na estrutura. A Seção 6.3 apresenta os resultados das topologias ótimas do atuador MFC na camada ativa de uma casca cilíndrica. Por fim, no APÊNDICE C são apresentados a instrumentação e resultados do controle experimental desenvolvido.

6.1 Topologias Ótimas

Os resultados apresentados nesta seção dizem respeito à formulação do problema de otimização topológica, apresentado no Capítulo 5. A formulação de otimização topológica proposta, tem como principal objetivo encontrar a localização ótima do atuador piezolétrico composto (MFC) na camada ativa de uma placa laminada de material composto, através da maximização do traço do Gramiano de controlabilidade.

A partir dessa formulação, foram consideradas duas formulações de projetos diferentes para a lâmina estrutural inferior. Na primeira formulação de projeto, na Seção 6.1.1, somente a camada ativa tem sua topologia estrutural modificada. A lâmina inferior não sofre modificações. Na segunda formulação de projeto (as duas camadas externas são modificadas), apresentada na Seção 6.1.2, a restrição de volume da lâmina inferior foi considerada como 25% do volume inicial da camada. Em ambas as formulações de projeto, a restrição de volume para a camada ativa é igual a 7,5 % do volume inicial. Esse valor é baseado na razão

do volume de um atuador MFC (modelo MFC-8528-P1) pelo volume da camada ativa da estrutura. Para o critério de parada, o número mínimo de iterações é igual a 10, e o processo de otimização deve parar quando a modificação das variáveis de projeto de uma iteração para outro for menor que 5%.

Para cada uma das duas formulações de projetos, foram simulados três casos nos quais os modelos modais são truncados com um, dois e quatro modos de vibração no modelo de otimização (modos de vibração apresentados na Figura 6.2). Com isso, são obtidas as topologias ótimas para o atuador MFC no controle dos respectivos modos de vibração para todos os seis casos supracitados.

6.1.1 Topologias ótimas para o atuador MFC na camada ativa.

Como já mencionado, a primeira formulação de projeto simulada visa encontrar, exclusivamente, a topologia ótima do atuador MFC na camada ativa, ou seja, neste caso, o restante da estrutura não sofre modificações estruturais. A seguir são apresentadas as topologias ótimas em três casos, para o sistema modal truncado em um, dois e quatro modos de vibração.

O presente problema de otimização é passível de convergir para máximos locais diferentes a partir de diferentes distribuições iniciais para as variáveis de projeto. Devido a isso, para exemplificar essa situação, na Figura 6.3 são apresentadas três topologias para três distribuições iniciais diferentes para as variáveis de projeto. Nas áreas tracejadas (em vermelho) a variável de projeto tem como valor inicial $\rho_a = 0,5$ e nas demais regiões o valor inicial $\rho_a = 0,001$. A escolha da distribuição das áreas tracejadas, realizada em todas as simulações dessa formulação de projeto, levou em conta a região de maior controlabilidade da estrutura, inspiradas nos resultados encontrados via a otimização paramétrica descritos Padoin et al., 2014, (disponibilizado no APÊNDICE B), embora sem ativar a restrição de volume.

Em todos os casos simulados, é efetuada uma análise comparativa entre os valores da controlabilidade encontrados através da distribuição do material MFC na estrutura por meio da otimização topológica e os valores de controlabilidade encontrados via otimização paramétrica do atuador MFC, apresentados em Padoin et al., 2014.

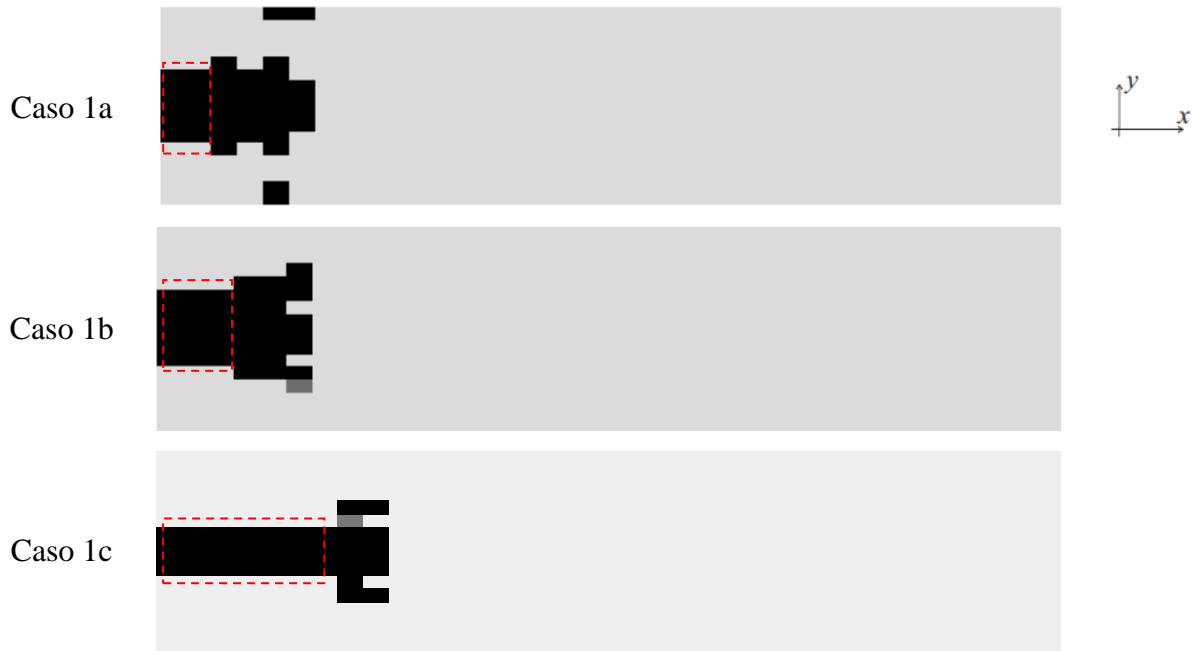


Figura 6.3 – Topologias ótimas para o Caso1 com um modo de vibração para três distribuições iniciais diferentes.

Na Figura 6.3, a distribuição de material do MFC na topologia ótima para as diferentes distribuições iniciais ocorreu próximo ao engaste da estrutura e na parte central da placa em relação à direção y . A topologia ótima está associada à região de maior momento fletor na estrutura para o primeiro modo de vibração, e conseqüentemente, a região onde se obtém o maior índice de controlabilidade do atuador no controle de vibrações. É válido mencionar que esse comportamento na otimização, de distribuir material próximo a região de maior momento fletor, se repetirá para todos os demais modos e casos simulados. As topologias ótimas não são totalmente simétricas, isso ocorre devido ao otimizador utilizado (SLP) não manter a simetria da solução das densidades da variável de projeto.

A Figura 6.4 apresenta a curva de convergência da função objetivo na otimização topológica para o Caso 1 nas três diferentes distribuições iniciais e o gráfico comparativo da controlabilidade com a otimização paramétrica.

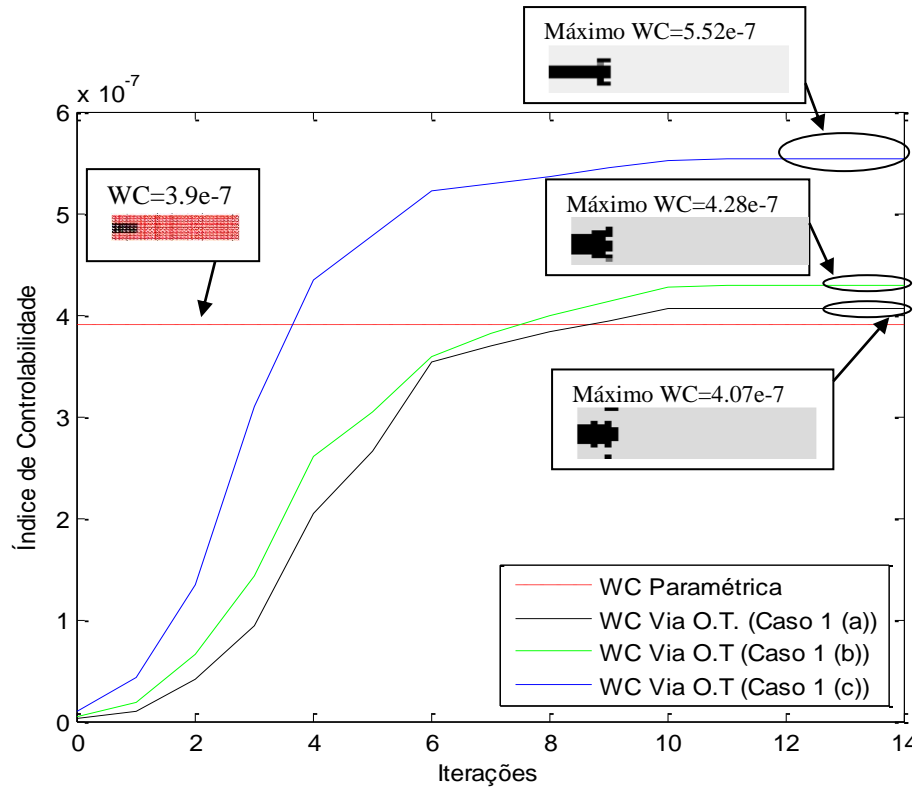


Figura 6.4 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 1a (linha preta), Caso 1b (linha verde), Caso 1c (linha azul) e Controlabilidade via otimização paramétrica (linha tracejada vermelha).

Na Figura 6.4, a convergência para a distribuição inicial a, b e c ocorreu na interação 10, 11, e 13, respectivamente. Os valores máximos para a controlabilidade na topologia ótima é igual a $4,07e-007$ para o Caso 1a, $4,28e-007$ para o Caso 1b e $5,529e-007$ para o Caso 1c. Já, a controlabilidade via a otimização paramétrica é de $3,9e-007$. Assim, a otimização topológica apresenta um ganho em relação ao valor da controlabilidade via a otimização paramétrica de aproximadamente 4,5%, 10% e 47%, paras as distribuições iniciais a, b e c, respectivamente.

Na Figura 6.5, é possível visualizar a topologia ótima da camada ativa para o Caso 2 controlando os dois primeiros modos de vibração.

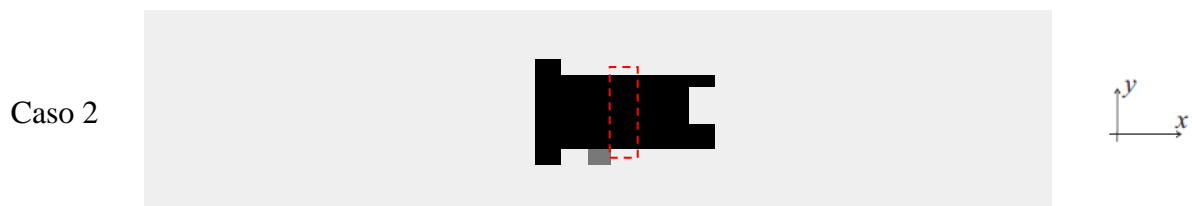


Figura 6.5 – Topologia ótima para o Caso 2 (controlando os dois primeiros modos de vibração).

Pode-se observar na Figura 6.5 que a distribuição de material do MFC na topologia ótima ocorreu próximo ao meio da estrutura e novamente na parte central. Isso se deve a influência do segundo modo de vibração. A topologia está na região de maior momento fletor na estrutura no deslocamento dinâmico para os dois primeiros modos de vibração, e conseqüentemente, a região onde se obtém o maior índice de controlabilidade do atuador no controle de vibrações estruturais para os dois primeiros modos de vibração.

O histórico da convergência da função objetivo da otimização topológica para o Caso 2 e o comparativo da controlabilidade com a otimização paramétrica, são apresentados na Figura 6.6.

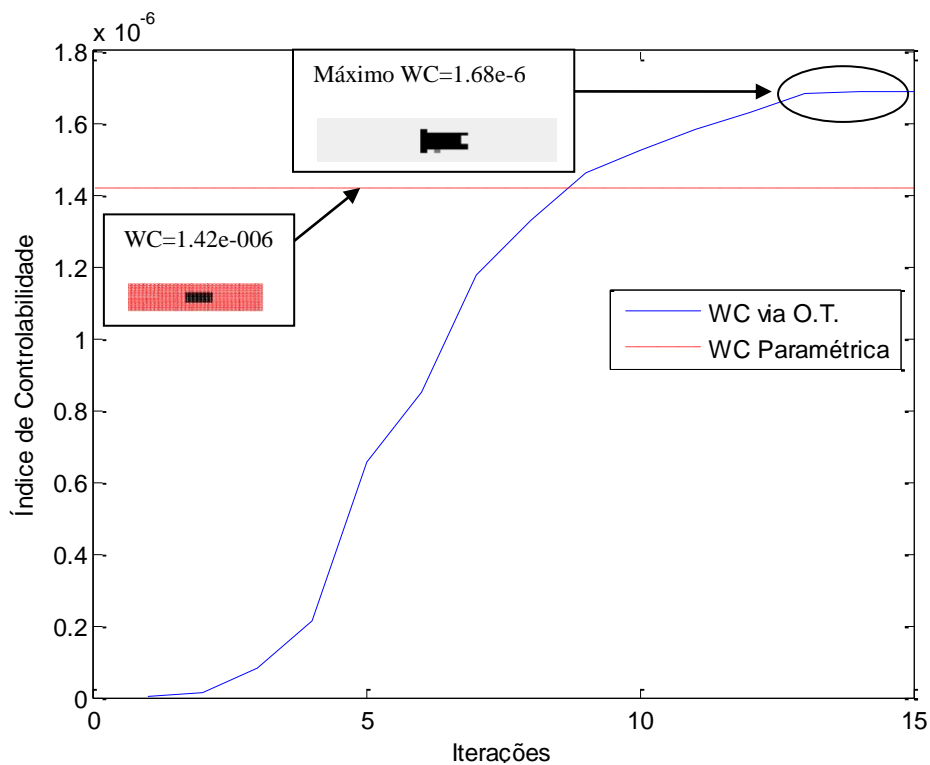


Figura 6.6 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 2 (controlando os dois primeiro modos de vibração) e a controlabilidade via otimização paramétrica.

É possível observar através da Figura 6.6 que a convergência da função objetivo ocorre na iteração 15 e o valor máximo para a controlabilidade na otimização topologia ótima é igual a $1,69e-006$. Já, o valor máximo encontrado para a controlabilidade via a otimização paramétrica é de $1,42e-006$ próximo a região central da placa. Com isso, na região central da estrutura, a otimização topológica apresenta um ganho de cerca de 19 % de controlabilidade em relação à otimização paramétrica para o mesmo caso.

O último caso simulado é apresentado na Figura 6.7, onde se visualiza a topologia ótima da camada ativa para o Caso 3, onde são controlados os quatro primeiros modos de vibração.



Figura 6.7 – Topologia ótima para o Caso 2 (controlando os quatro primeiros modos de vibração).

Analisando a Figura 6.7, verifica-se que a distribuição de material do MFC na topologia ótima se deve à influência do quarto modo de vibração. A topologia ótima está associada à região de maior momento fletor na estrutura no deslocamento dinâmico para os quatro primeiros modos, e conseqüentemente, à região onde se obtém o maior índice de controlabilidade para o controle dos primeiros quatro modos de vibração.

A Figura 6.8 apresenta, para o Caso 3, a curva de convergência da função objetivo da otimização topológica, bem como o gráfico comparativo da curva de controlabilidade em toda a estrutura através da otimização paramétrica.

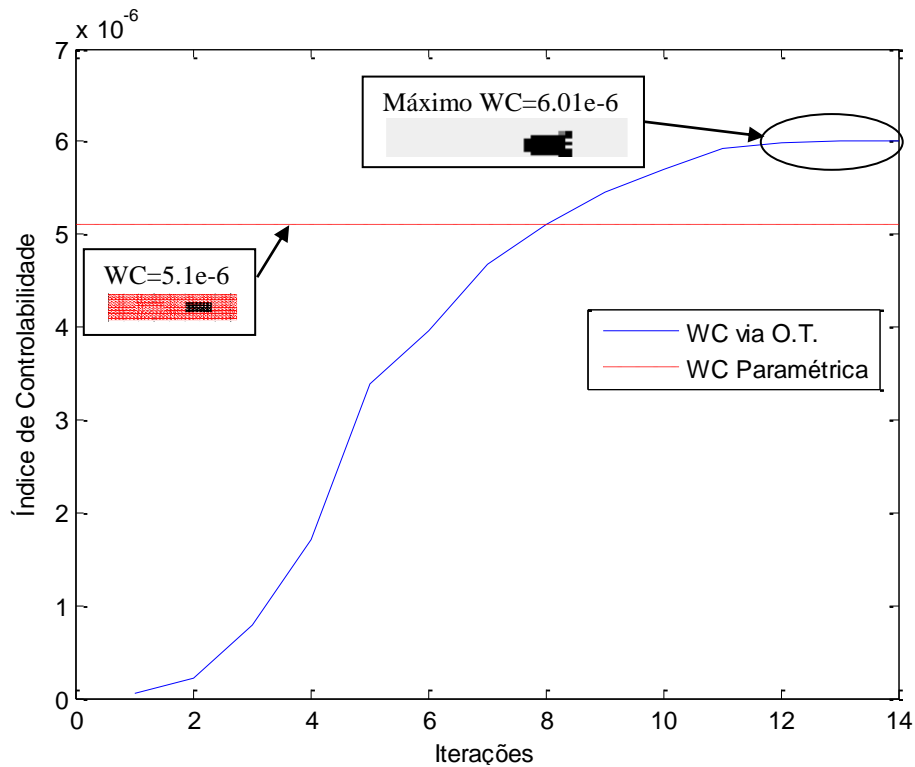


Figura 6.8 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 3 (controlando os quatro primeiros modos de vibração) e a controlabilidade via otimização paramétrica.

Na Figura 6.8, a convergência da função objetivo ocorre na iteração 13 e o valor máximo para a controlabilidade na topologia ótima é igual a $6,01e-6$. O valor máximo encontrado para a controlabilidade via otimização paramétrica é de $5,1e-6$. Dessa forma, a controlabilidade apresentada via otimização topológica foi superior à apresentada via otimização paramétrica, aumentando em torno de 18% este índice.

De forma geral, de acordo com os resultados de todos os casos estudados, é possível concluir que os valores de controlabilidade encontrados através da otimização topológica do atuador MFC foram superiores aos resultados encontrados por meio de otimização paramétrica, indicando que a otimização topológica pode levar ao projeto de uma estrutura com melhor índice de controlabilidade, resultando em um menor custo energético no controle, a partir do posicionamento ótimo do atuador.

6.1.2 Topologias ótimas para o atuador MFC com restrição de volume estrutural.

A segunda formulação do projeto de otimização topológica leva em conta uma restrição de volume da lâmina ativa igual a 7,5 % do volume inicial, além de uma restrição de volume para a lâmina inferior da estrutura igual a 25 % do volume inicial da camada. Os valores iniciais das pseudodensidades são iguais para todos os casos, sendo $\rho_a = 0,07$ para a variável de projeto da camada ativa e $\rho_e = 0,2$ para a camada inferior da estrutura. Desta forma, o problema de otimização se inicia logo abaixo do limite definido.

A seguir serão apresentadas as topologias ótimas para os casos do sistema modal truncado em um, dois e quatro modos de vibração. Na Figura 6.9 é possível visualizar a topologia ótima da camada ativa e da camada inferior para o Caso 4 com um modo de vibração.



Figura 6.9 – Topologia ótima para o Caso 4 (um modo de vibração). a) Lâmina ativa da estrutura, b) Lâmina inferior da estrutura.

Para o Caso 4, considerando apenas um modo de vibração, pode-se constatar por meio da Figura 6.9 que a distribuição de material MFC na topologia ótima ocorre próximo ao engaste da estrutura na lâmina de atuação. Essa topologia é devida ao fato de esta região ser a de maior momento fletor na estrutura durante o deslocamento dinâmico do primeiro modo, e, conseqüentemente, a região onde se obtém o maior índice de controlabilidade. Além disso, a distribuição de material ortotrópico na lâmina inferior da estrutura deu-se em regiões contíguas à região onde o material MFC foi distribuído na lâmina de atuação. Dessa forma, a otimização buscou aumentar a flexibilidade da região aonde o atuador foi distribuído e

aumentar a rigidez nas regiões vizinhas. Essa distribuição aumenta o poder de controle do atuador na estrutura otimizada, maximizando a controlabilidade geral da estrutura. Essa forma de distribuição de material se repetirá para os demais casos de otimização.

A Figura 6.10 apresenta o histórico da convergência da função objetivo da otimização topológica para o Caso 4.

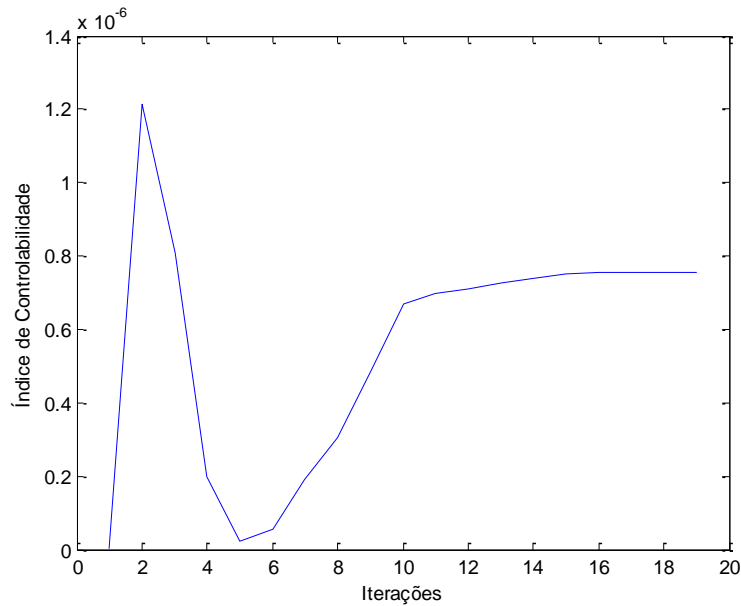


Figura 6.10 - Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 4 (um modo de vibração).

É possível observar que o valor da função objetivo tem um pico entre as iterações 1 e 3. Isso ocorre devido à diferença de grandezas dos valores das variáveis de projeto de controle e estrutural nas primeiras iterações (o que faz com que o otimizador não obedeça inicialmente às restrições do limite móvel). Na iteração 15 ocorre a convergência da função objetivo. O valor máximo para a controlabilidade na topologia ótima final é igual a $7,56e-007$.

Na Figura 6.11 é possível visualizar a topologia ótima da camada ativa e da camada inferior para o Caso 5 onde são controlados os dois primeiros modos de vibração.

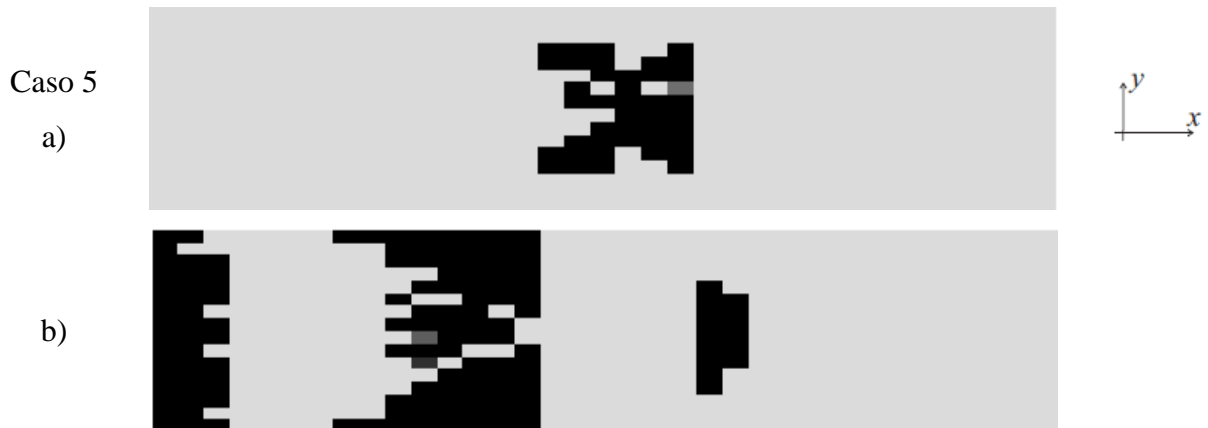


Figura 6.11 – Topologia ótima para o Caso 5 (controlando os dois primeiros modos de vibração). a) Lâmina ativa da estrutura, b) Lâmina inferior da estrutura.

Pode-se observar na Figura 6.11 que a distribuição de material do MFC na topologia ótima ocorreu próximo à região central da estrutura. Isso se deve à influência do segundo modo de vibração. A topologia ótima está associada à região de maior momento fletor na estrutura durante o deslocamento dinâmico para os dois primeiros modos de vibração. Além disso, a distribuição de material ortotrópico na lâmina inferior da estrutura deu-se em regiões contíguas à região onde o material MFC foi distribuído na lâmina de atuação. Novamente, a otimização buscou aumentar a flexibilidade da região onde o atuador foi distribuído e diminuir a flexibilidade nas outras regiões, objetivando aumentar a capacidade do atuador em deformar a estrutura otimizada.

O histórico da convergência da função objetivo da otimização topológica para o Caso 5 é apresentado na Figura 6.12.

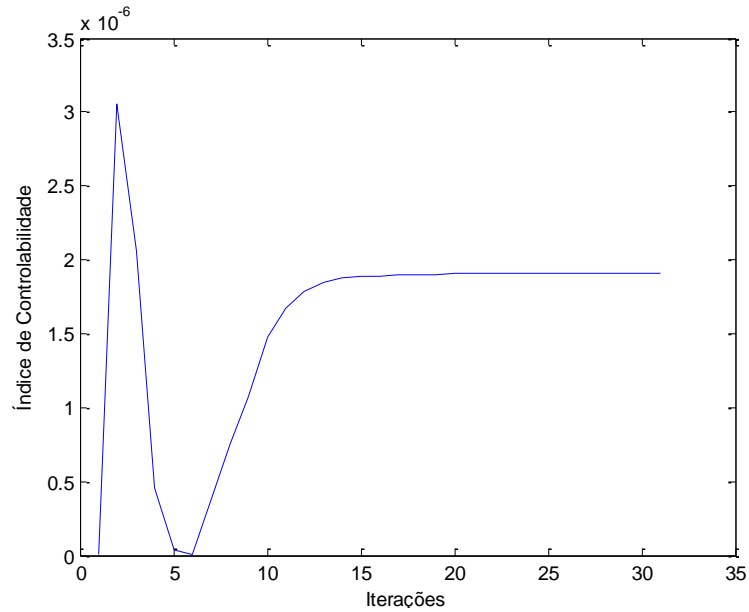


Figura 6.12 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 5 (controlando os dois primeiros modos de vibração).

De forma semelhante ao ocorrido no Caso 4, observa-se que o valor da função objetivo apresenta um pico entre as iterações 1 e 6. Novamente, devido aos valores das variáveis de projeto, o otimizador não obedece às restrições do problema nas primeiras iterações. Na iteração 20 ocorre a convergência da função objetivo, sendo, neste caso, o valor máximo para a controlabilidade na topologia ótima final igual a $1,91e-006$.

O último caso simulado é apresentado na Figura 6.13, onde se visualiza a topologia ótima da camada ativa e da camada inferior para o Caso 6, no qual são controlados os quatro primeiros modos de vibração.

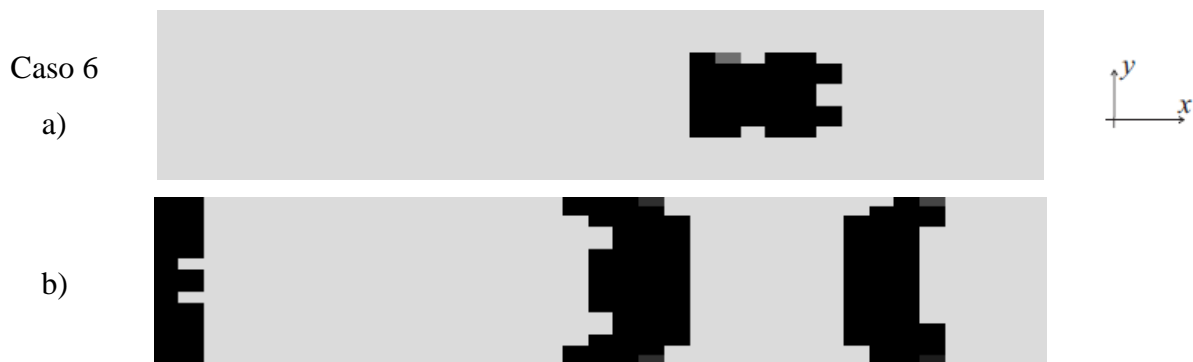


Figura 6.13 – Topologia ótima para o Caso 6 (controlando os quatro primeiros modos de vibração). a) Lâmina ativa da estrutura, b) Lâmina inferior da estrutura.

Na Figura 6.13, a distribuição de material do MFC na topologia ótima se deve à influência do quarto modo de vibração. A topologia ótima está associada à região de maior momento fletor na estrutura no deslocamento dinâmico para os quatro primeiros modos flexionais. De forma semelhante aos casos anteriores, e pelos mesmos motivos, a distribuição de material ortotrópico na lâmina inferior da estrutura dá-se em regiões contíguas à região onde o material MFC foi distribuído na lâmina de atuação.

A Figura 6.14 apresenta a curva de convergência da função objetivo da otimização topológica para o Caso 6.

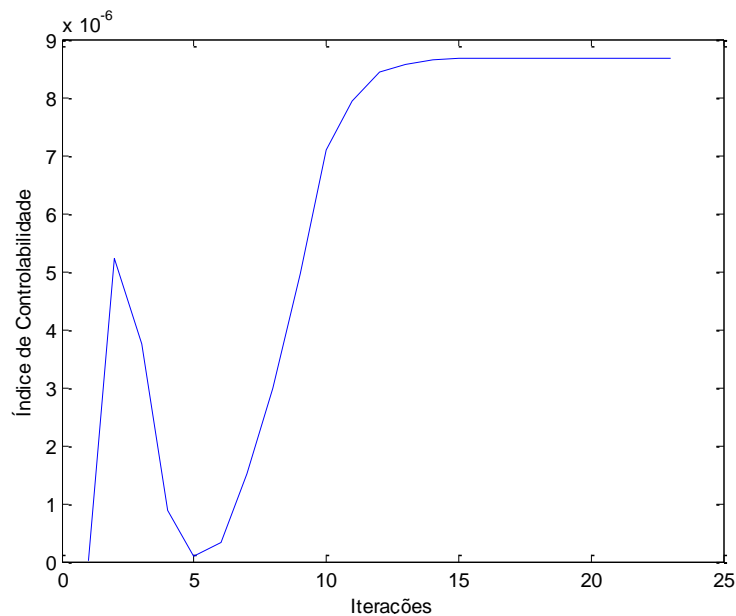


Figura 6.14 – Histórico da convergência da função objetivo para o Caso 6 (controlando os quatro primeiros modos de vibração).

Diferentemente dos demais casos, o pico observado na função objetivo entre as iterações 1 e 5 é de menor amplitude. Na iteração 14 ocorre a convergência da função objetivo, sendo o valor máximo para a controlabilidade na topologia ótima final igual a 8,68e-006.

De forma geral, as topologias ótimas, obtidas a partir das estratégias de otimização propostas, apresentaram um desempenho satisfatório em relação ao índice de controlabilidade entre o acoplamento atuador-estrutura para o controle de vibrações estruturais. Os valores foram superiores aos obtidos por meio de otimização paramétrica. Além disso, os formatos

finais das topologias ótimas ficaram próximos aos formatos retangulares comercialmente disponíveis. Dessa forma, o projetista deverá avaliar se é possível cortar o MFC e soltar os eletrodos para que fique na forma da topologia ótima ou encomendar a fabricação de um transdutor nesse formato, ou ainda, apesar de operar com desempenho inferior, usar um transdutor comercialmente disponível com dimensões próximas às obtidas por meio da otimização topológica.

6.2 Controle estrutural utilizando o controlador LQR e LQG

Nesta seção são apresentadas as respostas das estruturas otimizadas para o controle estrutural através do uso do controlador LQR e LQG com o filtro de Kalman, conforme a teoria apresentada no Capítulo 3. O histórico do deslocamento vertical da ponta livre da placa é avaliado através de simulações realizadas com os sistemas operando em malha fechada e aberta. As ações de controle visam a amenizar as vibrações estruturais, diminuindo o sobrepasso (*overshoot*) e o tempo de assentamento da resposta do sistema a um degrau unitário aplicado à estrutura, de acordo com procedimentos que serão descritos em detalhes mais adiante. Para todos os modos de vibração, utilizou-se um valor para a razão de amortecimento estrutural de 0,018, obtido de forma experimental através da aplicação do conceito do decremento logarítmico [Rao S. S., 2010].

Para a determinação das matrizes de ponderação \mathbf{Q} (dos estados) e \mathbf{R} (do sinal de controle), constituintes do índice de desempenho quadrático do sistema de controle, utilizou-se a metodologia proposta na Seção 3.7. Como já mencionado, a metodologia é baseada na realização de uma varredura entre valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} pré-determinados, gerando um mapa de compromisso que leva em conta o tempo de assentamento do sistema *versus* o valor energético empregado no controle (tensão elétrica).

Estabeleceu-se como critério para a escolha dos valores para as matrizes de ponderação, o conjunto de valores mais próximo da metade do limite de resistência a um campo elétrico suportado pelo MFC, que, para o caso em estudo, tem como limite de operação a faixa que vai de -250 volts a +750 volts, uma vez que, por sua vez, o MFC utilizado no trabalho apresenta valores que vão desde -500 volts até +1500 volts. Dessa forma, procura-se evitar a possibilidade de despolarização do material, situação que ocorre quando a cerâmica piezoeletrica é submetida a tensões elétricas superiores à tensão suportada pelo material. Para a varredura dos valores, utilizou-se a faixa de $\mathbf{R}=1:1:20$ (variando de 1 até

20 em um intervalo de 1). Já, para os valores de \mathbf{Q} , utiliza-se $\mathbf{Q}=10^{(n-1)}$ (com $n=1,2,\dots,20$). Esses valores foram determinados a partir de resultados de simulações preliminares.

Para o controle LQG, a variável w_a (que representa as imperfeições da modelagem do sistema, do ruído nos sinais de controle e demais perturbações externas que possam afetar os estados) e a variável v_s (que representa o ruído dos valores medidos) são consideradas como ruídos brancos, e seus valores são $w_a = v_s = 1$ para todos os casos simulados. É importante mencionar que a implementação do controle LQG começa com as matrizes de ponderação e de ganho utilizadas no controle LQR.

Em todas as simulações, para fins comparativos do desempenho entre os controladores usados, serão analisados o sobrepasso (overshoot), o tempo de assentamento (considerando faixa de tolerância de 1% sobre o valor final) e o RMS (*Root Mean Square*- Raiz quadrada média) do sinal de controle.

A seguir são apresentados os resultados do controle nos domínios do tempo e da frequência para as estruturas otimizadas apresentadas na Seção 6.1, bem como o histórico da evolução do sinal de tensão elétrica aplicada no atuador MFC (sinal de controle), para os controladores LQR e LQG utilizados.

6.2.1 Resposta das estruturas otimizadas

Esta seção apresenta a resposta das estruturas que foram otimizadas na Seção 6.1. A excitação aplicada à estrutura é do tipo degrau unitário. O histórico do deslocamento vertical no extremo livre da viga é avaliado considerando as situações em que o sistema opera em malha aberta e em fechada. É importante salientar que o MEF foi utilizado somente para encontrar as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da estrutura, possibilitando, dessa forma, a criação do modelo modal e a representação do sistema em espaço de estados. Assim, o MEF não foi utilizado de forma direta nas análises ao longo do tempo.

A escolha das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} foi realizada empregando-se a metodologia apresentada na Seção 3.7. Esse procedimento foi realizado para todos os casos simulados. A Equação 6.1 apresenta os valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} , obtidos dessa forma, para o controle da estrutura otimizada no Caso 1 (1 modo de vibração), sendo \mathbf{I} uma matriz identidade de ordem n (número de modos de vibração considerados). Os valores da matriz \mathbf{Q} resultaram relativamente grandes quando comparados com os valores da matriz \mathbf{R} . Isso ocorre devido ao fato de a matriz \mathbf{Q} ponderar os

estados (valores relativamente pequenos), enquanto que a matriz \mathbf{R} pondera o sinal de controle, cujos valores são relativamente grandes (em volt).

$$\mathbf{Q} = 1e8 * [\mathbf{I}]_{n \times n} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{R} = [3].$$

A Figura 6.15 apresenta os resultados para o deslocamento vertical ao longo do tempo, juntamente com sinal de controle calculado utilizando os valores da Equação 6.1, para o modelo de controle do Caso 1c (um modo de vibração), o qual apresentou melhor índice de controlabilidade dentre as três diferentes distribuições iniciais na otimização do atuador (Figura 6.4).

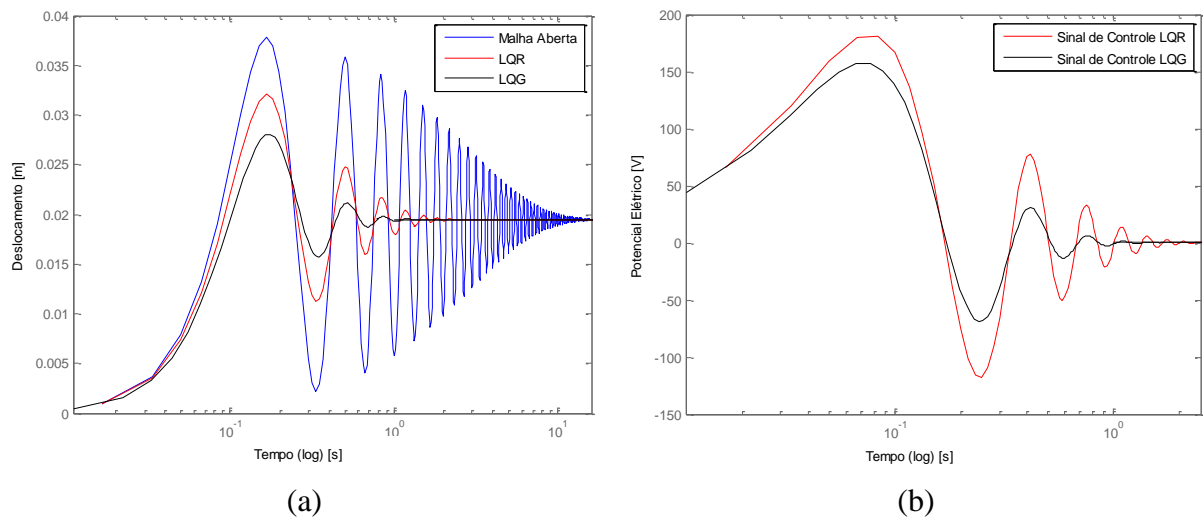


Figura 6.15 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (Volts) para o Caso 1c.

Como pode ser visualizado, os sistemas de controle LQR e LQG contribuíram para atenuar o deslocamento da extremidade da placa. Tanto o *overshoot* como o tempo de assentamento são reduzidos de forma significativa quando se utiliza ambas as estratégias de controle. O *overshoot* para o LQR ficou em 64% e para o LQG em 43%. Dessa forma, o LQG apresentou um *overshoot* cerca de 48% menor em relação ao *overshoot* obtido pelo controlador LQR, resultando em uma menor amplitude no primeiro pico da trajetória controlada. O tempo de assentamento é de 2,09s para o LQR e de 1,14s para o LQG, mostrando que o LQG apresentou um tempo de assentamento de 0,95s menor que o tempo de assentamento

apresentado pelo LQR, fazendo a resposta convergir de forma mais rápida. O RMS (*Root Mean Square* - valor quadrático médio) do sinal de controle apresentado pelo LQR foi de 50,3V e de 45,2V para o LQG. Assim, o LQG obteve um RMS aproximadamente 11% menor que o LQR, e, conseqüentemente, um menor custo energético no controle do sistema. O valor máximo para tensão elétrica aplicada no controle para o LQR é de 181V e o de 157V para o LQG. Já, o valor mínimo é de -118V para o LQR e -69V para o LQG, permanecendo dentro do limite (-250V a 750V) estabelecido para o atuador na metodologia para escolha das matrizes de ponderação.

A partir dos dados supramencionados, é possível constatar que o desempenho do controle LQG mostrou-se superior ao desempenho do controlador LQR, uma vez que apresentou menor gasto energético com o sinal de controle, com menor tempo de assentamento e menor *overshoot*. Essa situação ocorre também nas demais simulações apresentados nesta seção.

Na Figura 6.16, é apresentada a curva de amplitude do sistema no domínio da frequência para o Caso 1c, onde se pode, através do diagrama de Bode, identificar as frequências naturais do sistema em malha fechada (LQR e LQG) e em malha aberta. É possível constatar os efeitos do controle, como, por exemplo, a diminuição da amplitude na frequência do primeiro modo.

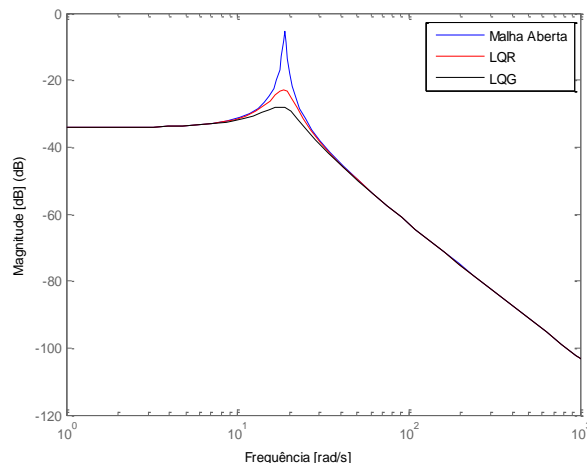


Figura 6.16 – Diagrama de bode para o Caso 1 (c) (um modo de vibração).

A fim de mostrar a importância do posicionamento ótimo do atuador MFC na estrutura controlada, apresenta-se na Tabela 6.2 os valores dos resultados do sistema de controle para o Caso 1a (menor índice de controlabilidade, visualizado na Figura 6.4) e para o Caso 1c (maior índice de controlabilidade, Figura 6.4).

Tabela 6.2 – Comparativo do controle entre o Caso 1a e Caso 1c.

	Caso 1a	Caso 1c
Overshoot LQR	68 %	64 %
Overshoot LQG	49 %	43 %
Tempo de Assentamento LQR	2.5 s	2.09 s
Tempo de Assentamento LQG	1.34 s	1.14 s

Na Tabela 6.2 observa-se que os valores do *overshoot* e do tempo de assentamento para o Caso 1c são, para ambos controladores, menores que os respectivos valores obtidos no Caso 1a. Isso indica um melhor desempenho no controle da configuração ótima obtida com o maior índice de controlabilidade.

Um modelo de controle que considera mais modos de vibração pode representar melhor o comportamento dinâmico de uma estrutura.

A Equação 6.2 apresenta os valores das matrizes **Q** e **R** utilizados para o Caso 2 (dois primeiros modos de vibração).

$$\mathbf{Q} = 1e8 * [\mathbf{I}]_{n \times n} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{R} = [2].$$

A Figura 6.17 apresenta os resultados para o deslocamento vertical e sinal de controle empregado utilizando os valores da Equação 6.2, para o modelo de controle do Caso 2.

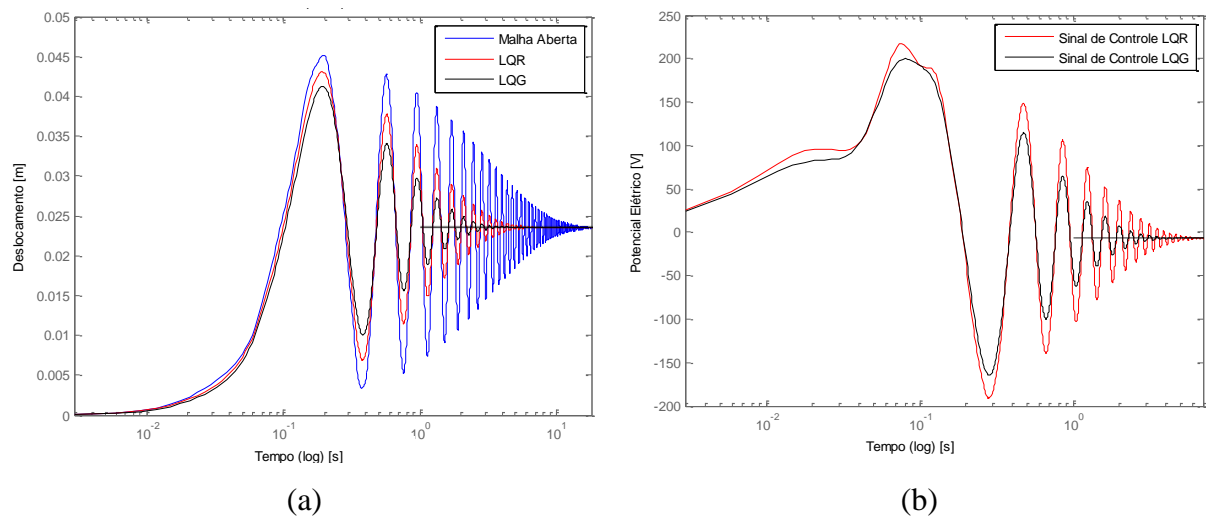


Figura 6.17 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 2 (dois primeiros modos de vibração).

Como esperado para um sistema com mais graus de liberdade, as respostas do Caso 2 apresentam mais oscilações ao longo do tempo quando comparados com um modelo com apenas um modo (Caso1). Devido a isso, os sistemas em malha fechada (LQR e LQG) contribuíram menos que no Caso 1 para atenuar o deslocamento da extremidade da placa. Ainda assim, o *overshoot* e o tempo de assentamento apresentam redução nas duas estratégias de controle para este caso. O *overshoot* para o LQR ficou em 84% e para o LQG em 76%. Dessa forma, constatou-se que o LQG apresentou um overshoot 10% menor em relação ao obtido pelo controlador LQR. O tempo de assentamento é de 6,31s para o LQR e de 3,91s para o LQG. O LQG apresentou um tempo de assentamento de 2,4s menor que o tempo de assentamento apresentado pelo LQR. O RMS do sinal de controle apresentado pelo LQR foi de 63,14V e de 49,2V para o LQG. Assim, o LQG obteve um RMS aproximadamente 28% menor que o LQR, mostrando uma maior diferença entre os sinais de controle ao longo do tempo, quando comparado com o Caso 1. O valor máximo para tensão elétrica aplicada no controle para o LQR é de 217V e de 200V para o LQG, sendo o valor mínimo de -190V para o LQR e de -164V para o LQG, permanecendo dentro do limite estabelecido.

Na Figura 6.18 é apresentada curva de amplitude do sistema no domínio da frequência para o Caso 2. É possível constatar os efeitos do controle na diminuição da amplitude na frequência dos dois primeiros modos. É perceptível que, para o segundo modo, a amplitude foi atenuada com maior intensidade. Isso ocorre devido de o processo de otimização ter posicionado o material do atuador MFC em um ponto que possui maior influência do segundo modo no deslocamento dinâmico, conforme comentado na Seção 6.1.1.

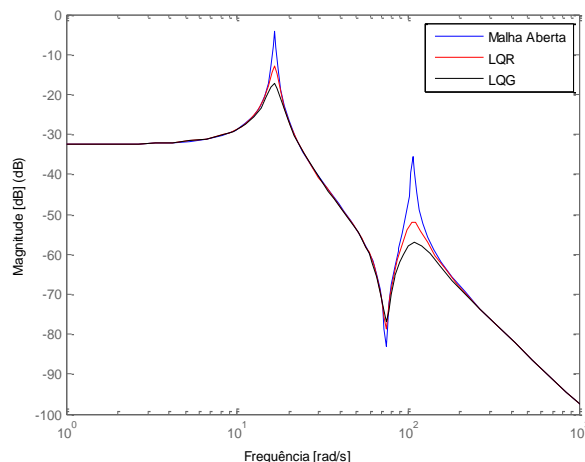


Figura 6.18 – Diagrama de bode para o Caso 2 (dois modos de vibração).

Como mencionado anteriormente, a utilização de mais modos de vibração em um modelo de controle aumenta a capacidade de um modelo de representar o comportamento dinâmico de uma estrutura real. Assim, serão apresentadas na sequência as respostas para o Caso 3, que busca controlar os quatro primeiros modos de vibração da estrutura. A Equação 6.3 apresenta os valores das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} utilizados e a Figura 6.15 apresenta os resultados para o deslocamento vertical e para o sinal de controle.

$$\mathbf{Q} = 1e8 * [\mathbf{I}]_{n \times n} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{R} = [1].$$

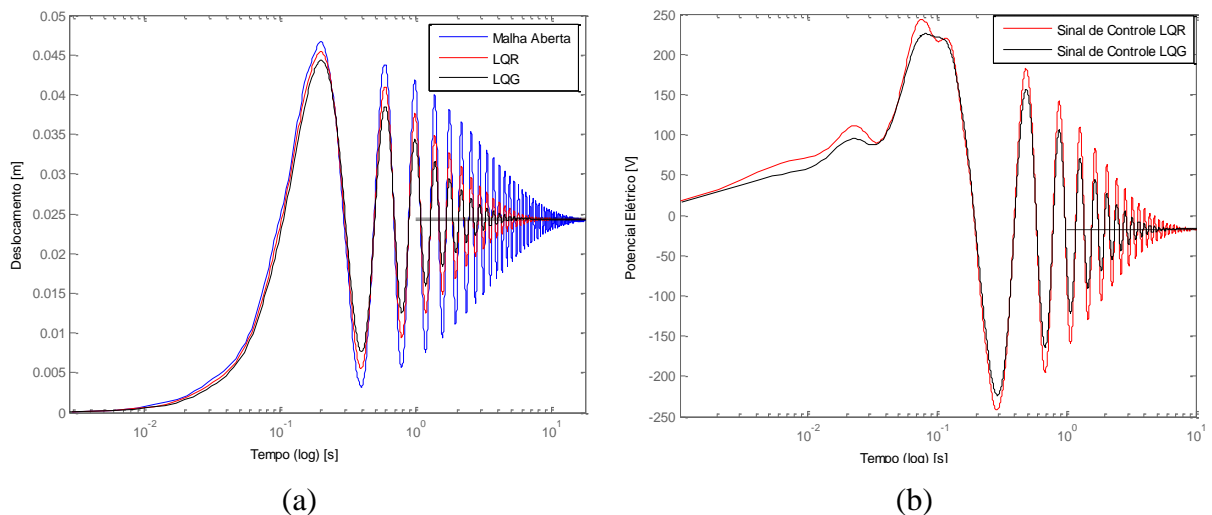


Figura 6.19 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 3 (quatro primeiros modos de vibração).

No Caso 3, Figura 6.19, o *overshoot* para o LQR ficou em 87 % e para o LQG em 82 %. O controle LQG apresentou um *overshoot* 6% menor em relação ao obtido pelo controlador LQR. O *overshoot* que ocorreu no Caso 3 foi maior que o do Caso 2. Isso acontece devido à presença de maiores oscilações no deslocamento ao longo do tempo que ocorrem por conta da consideração de mais modos de vibração no modelo. O tempo de assentamento é de 8,79s para o LQR e de 5,85s para o LQG, o qual apresentou um tempo de assentamento de 2,94s menor que o tempo de assentamento apresentado pelo LQR. Novamente, o tempo de assentamento aumentou em relação a modelos com menos graus de liberdade. O RMS do sinal de controle apresentado pelo LQR foi de 78,26V e de 63,49V para o LQG. O valor máximo para tensão elétrica aplicada no controle para o LQR é de 258V e o de 239V para o LQG, e o valor mínimo é de -249V para o LQR e -238V para o LQG.

Na Figura 6.16 é apresentada a curva de amplitude do sistema no domínio da frequência para o Caso 3. Observa-se que para o quarto modo (terceiro modo flexional), a amplitude da frequência teve uma maior atenuação, o que ocorre, novamente, devido ao processo de otimização ter posicionado o material do MFC em um ponto que possui maior influência do quarto modo.

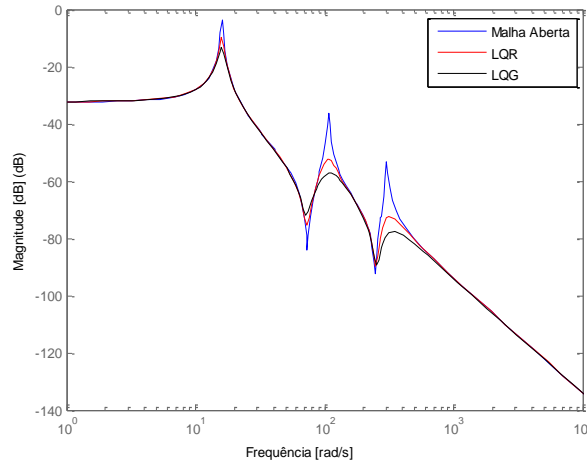


Figura 6.20 – Diagrama de bode para o Caso 3 (quatro modos de vibração).

Os próximos resultados apresentados são relativos à resposta do sistema a partir das topologias ótimas para o atuador MFC com restrição de volume estrutural, apresentados na Seção 6.1.2. Repetem-se os casos de simulações, com um, dois e quatro modos de vibração. De forma geral, a partir de uma estrutura mais flexível resultante da otimização da camada inferior, os deslocamentos ao longo do tempo apresentam maior amplitude em todos os casos analisados.

A Equação 6.4 apresenta os valores das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} utilizados para o Caso 4 e a Figura 6.21 apresenta os resultados das simulações.

$$\mathbf{Q} = 1e8 * [\mathbf{I}]_{n \times n} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{R} = [2].$$

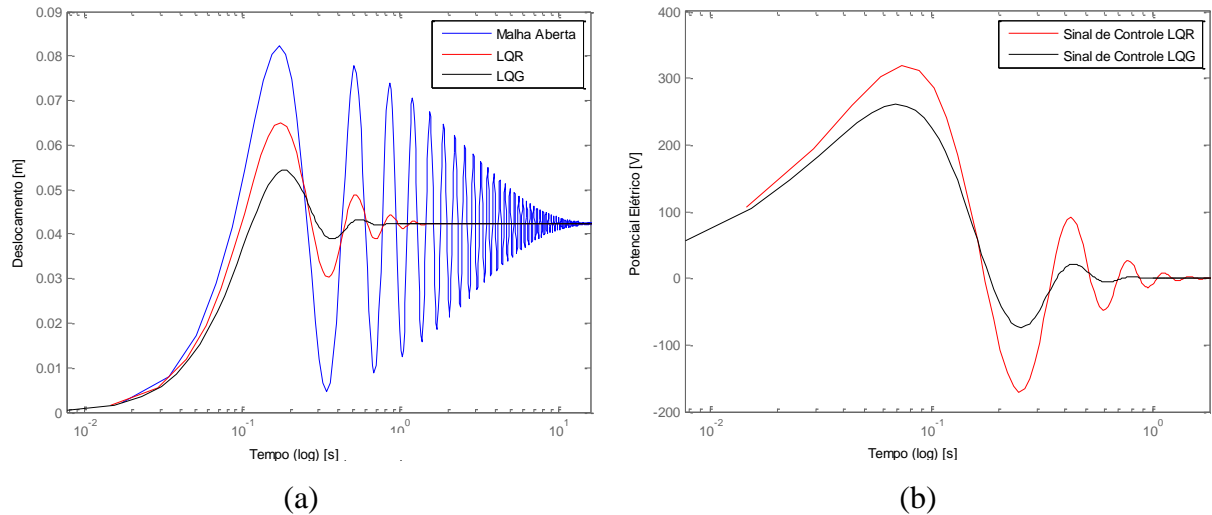


Figura 6.21 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 4 (um modo de vibração).

De forma semelhante ao Caso 1, o Caso 4 (Figura 6.21) apresentou uma diferença significativa para os valores de *overshoot* entre os controladores LQR e LQG. No LQR *overshoot* é de 53 % e no LQG de 28 %. Assim, o LQG apresentou um valor 89 % menor em relação ao obtido pelo controlador LQR. Esse valor reduzido do *overshoot*, em comparação ao Caso 1, ocorreu devido à maior flexibilidade da estrutura e ao maior coeficiente de controlabilidade para essa estrutura otimizada. O tempo de assentamento também é reduzido em relação aos casos que utilizam apenas um modo para o controle (Caso 1), sendo de 1,67s para o LQR e de 0,79s para o LQG. O RMS do sinal de controle é de 85,31 no LQR e de 85,20 para o LQG. Esse valor é superior ao constatado no Caso 1. Isso ocorre devido ao fato de o Caso 4 apresentar maior amplitude do deslocamento vertical da placa, e, conseqüentemente, ser necessário um sinal de controle com maior amplitude para atenuar a vibração. O valor máximo para tensão elétrica aplicada no controle para o LQR é de 318V e o de 260V para o LQG. O valor mínimo é de -170V para o LQR e -74V para o LQG, respeitando assim, como nas simulações anteriores, o valor limite imposto para o sinal de controle.

Na Figura 6.22 é apresentada a curva de amplitude do sistema no domínio da frequência para o Caso 4. Nota-se que houve uma atenuação na amplitude do primeiro modo, evidenciando o efeito do controle.

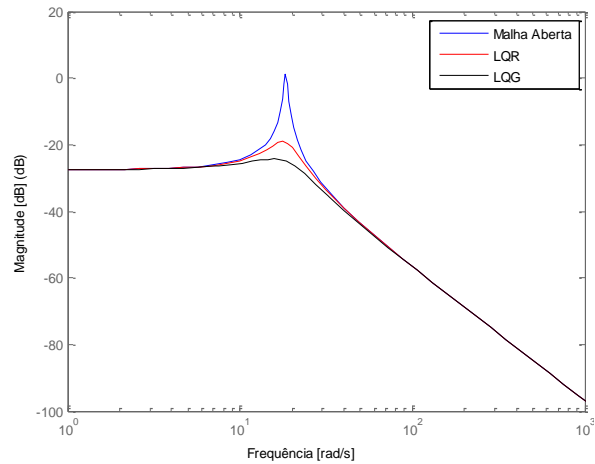


Figura 6.22 – Diagrama de bode para o Caso 4 (um modo de vibração).

A Equação 6.5 apresenta os valores das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} utilizados para o Caso 5 (dois primeiros modos de vibração), enquanto que a Figura 6.23 apresenta os resultados para o deslocamento vertical e o sinal de controle.

$$\mathbf{Q} = 1e8 * [\mathbf{I}]_{n \times n}$$

(6.5)

$$\mathbf{R} = [3].$$

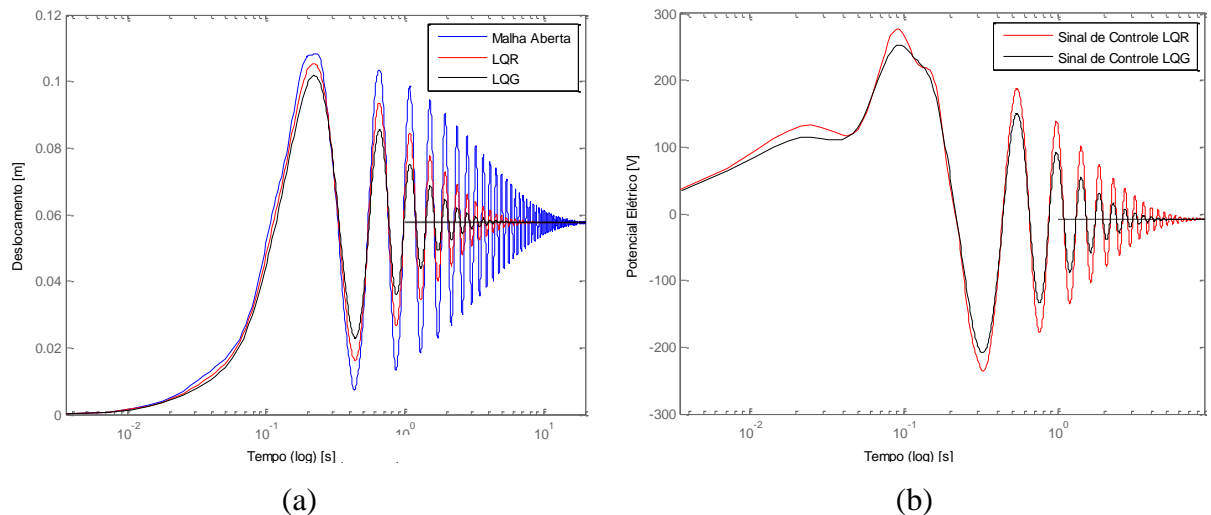


Figura 6.23 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 5 (dois primeiros modos de vibração).

Na Figura 6.23, apesar de o Caso 5 apresentar amplitude maior que o Caso 2, os valores de *overshoot* e tempo de assentamento ficaram próximos em ambos os casos. O valor do

overshoot para o LQR ficou em 84% e para o LQG em 78%. Dessa forma, o tempo de assentamento resultou em 7,97s para o LQR e de 4,93s para o LQG. O RMS do sinal de controle apresentado pelo LQR foi de 76,79V e de 60,79V para o LQG. O valor máximo para tensão elétrica aplicada no controle para o LQR é de 277V e o de 253V para o LQG, enquanto que o valor mínimo é de -236V para o LQR e -208V para o LQG.

Na Figura 6.24 é apresentada a curva de amplitude do sistema no domínio da frequência para o Caso 5. Observa-se o mesmo comportamento do Caso 2, onde a amplitude da frequência do segundo modo teve uma atenuação maior que para o primeiro modo.

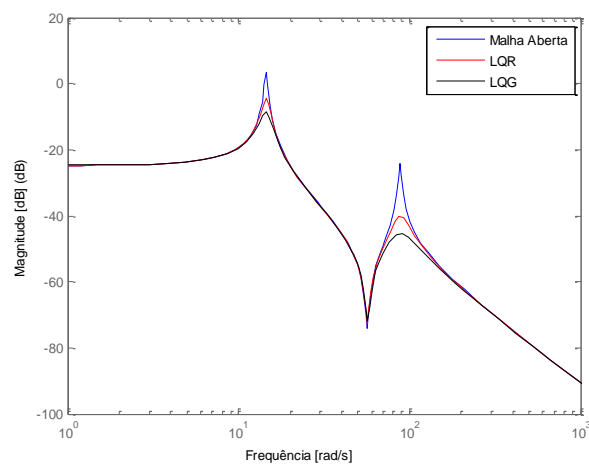


Figura 6.24 – Diagrama de bode para o Caso 5 (dois modos de vibração).

Na sequência serão apresentadas as respostas para o Caso 6, onde busca-se controlar os quatro primeiros modos de vibração da estrutura otimizada. A Equação 6.6 apresenta os valores das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} utilizados, enquanto que a Figura 6.25 apresenta os resultados para o deslocamento vertical e o sinal de controle.

$$\mathbf{Q} = 1e8 * [\mathbf{I}]_{n \times n} \tag{6.6}$$

$$\mathbf{R} = [1].$$

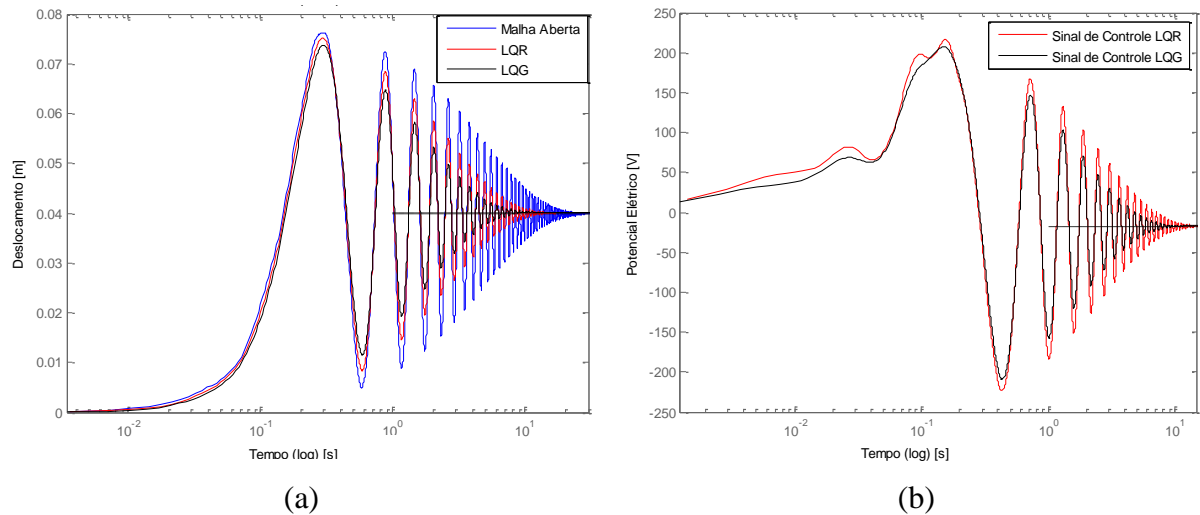


Figura 6.25 – (a) Deslocamento vertical na extremidade livre (m) e (b) sinal de controle (V) para o Caso 6 (quatro primeiros modos de vibração).

No Caso 6 (Figura 6.25) o valor do *overshoot* para o LQR ficou em 90% e para o LQG em 86%. Assim, o LQG apresentou um overshoot 5% menor em relação ao fornecido pelo controlador LQR. O tempo de assentamento é de 14,71s para o LQR e de 9,98s para o LQG, enquanto que o LQG apresenta um tempo de assentamento de 4,73s menor que o tempo de assentamento apresentado pelo LQR. Esses valores foram bem superiores aos valores de tempo de assentamento apresentados no Caso 3. Dessa forma, o sistema levou mais tempo até fazer a trajetória controlada em torno do valor final. O RMS do sinal de controle apresentado pelo LQR foi de 35,93V e de 35,04V para o LQG. O valor máximo para tensão elétrica aplicada no controle para o LQR é de 216V e o de 207V para o LQG, enquanto que o valor mínimo é de -223V para o LQR e -209V para o LQG.

Na Figura 6.26 é apresentada a curva de amplitude do sistema no domínio da frequência para o Caso 6. Observa-se que para o quarto modo (terceiro modo flexional), a amplitude da oscilação nesta frequência teve uma atenuação maior, motivada pelas mesmas causas explicitadas no Caso 3.

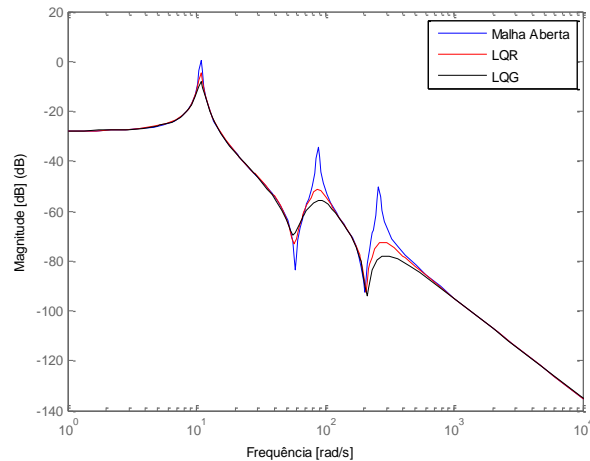


Figura 6.26 – Diagrama de bode para o Caso 6 (quatro modos de vibração).

O número de modos de vibração e as estruturas geradas a partir da otimização na camada inferior da estrutura alteram significativamente as respostas ao longo do tempo (deslocamentos e sinal de controle) dos modelos de controle. De modo geral, as respostas das trajetórias controladas a partir do uso do controlador LQG obtiveram melhor desempenho ao serem comparadas com as trajetórias do controlador LQR, apresentando valores inferiores de *overshoot*, tempo de assentamento e RMS. Dessa forma, através do uso do controlador LQG utiliza-se menos energia no controle, e adicionalmente, obtêm-se uma resposta dinâmica mais rápida em relação ao valor final quando comparado com o controlado LQR. Esse desempenho superior do LQG se deve à dinâmica do observador de estados a partir do uso do filtro de Kalman juntamente com o LQR. Além disso, o filtro de Kalman utiliza medições de grandezas ao longo do tempo e produz estimativas atualizadas dos valores em tempo de processamento para essas grandezas.

6.3 Topologias ótimas do atuador MFC na camada ativa de uma casca laminada.

Os resultados apresentados nesta seção dizem respeito à formulação do problema de otimização topológica, apresentado no Capítulo 5, considerando uma casca cilíndrica composta laminada em balanço. A estrutura é discretizada em 560 (35 x 16) elementos finitos. A casca possui, inicialmente, uma lâmina superior de espessura 0.3 mm, de material ativo MFC, onde as fibras piezelétricas estão alinhadas a 0° em relação à direção y, e duas lâminas de espessura 0.5 mm cada (totalizando 1.3 mm de espessura), de material composto passivo (fibra de vidro+matriz de epóxi), dispostas na configuração [0,90], conforme a Figura 6.27.

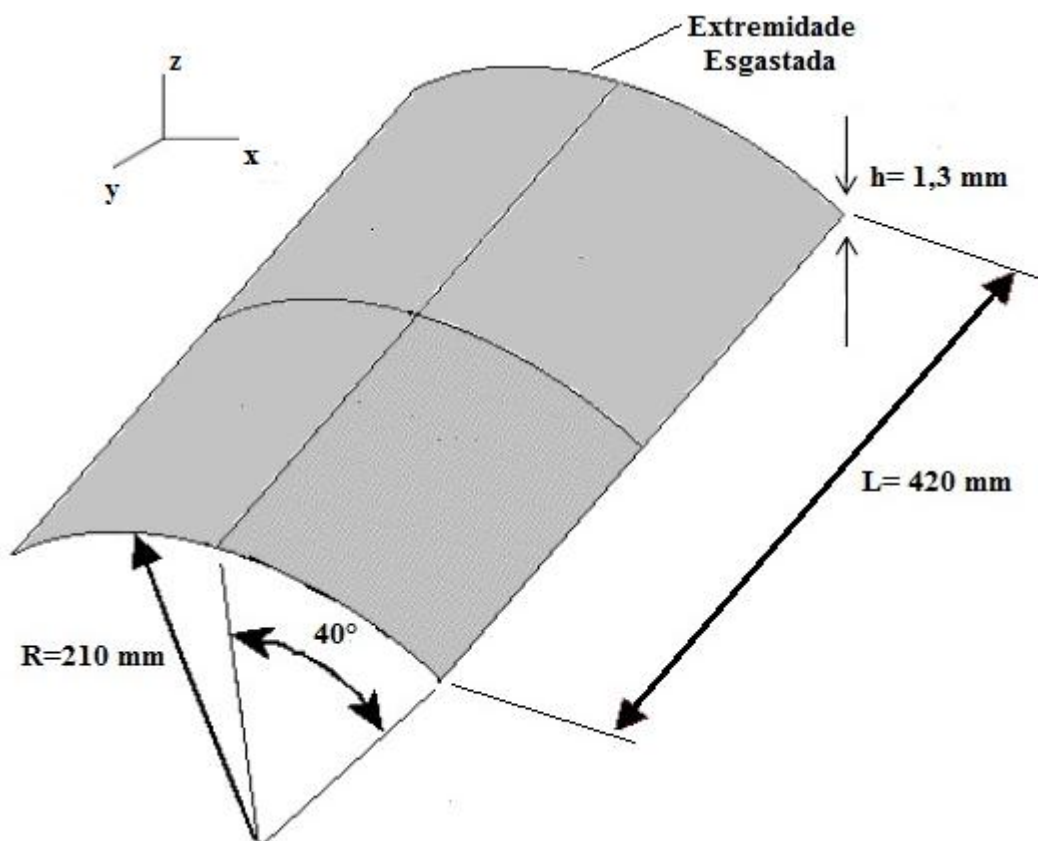


Figura 6.27 – Casca cilíndrica composta laminada em balanço.

As propriedades mecânicas da lâmina de material piezelétrico (MFC) e do material composto são apresentadas na Tabela 6.1. Os modos de vibração da estrutura, os quais posteriormente serão utilizados na otimização e no controle, são apresentados na Figura 6.28.

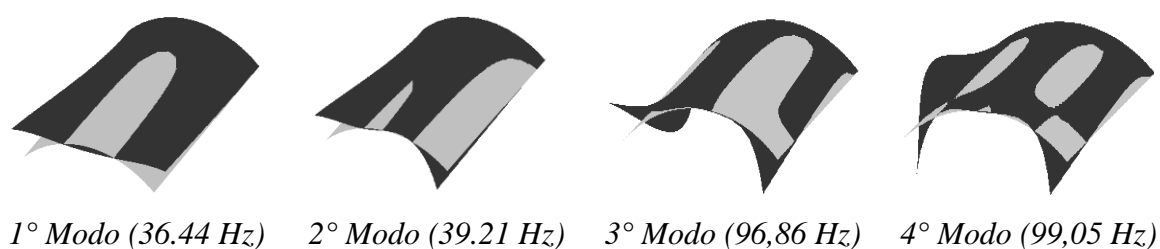


Figura 6.28 – Modos de vibração da casca cilíndrica laminada [0,90].

Na formulação de projeto, somente a camada ativa tem sua topológica estrutural modificada, a lâmina inferior não sofre modificações. A restrição de volume para a camada ativa é igual a 7,5 % do volume inicial. Esse valor é baseado na razão do volume de um

atuador MFC (modelo MFC-8528-P1) pelo volume da camada ativa da estrutura. O valor inicial da pseudodensidade da variável de projeto da camada ativa é $\rho_a = 0.001$. Para o critério de parada, o número mínimo de iterações é igual a 10, e o processo de otimização deve parar quando a modificação das variáveis de projeto de uma iteração para outro for menor que 5%.

Foram simulados três casos nos quais os modelos modais são truncados com um, dois e quatro modos de vibração no modelo de otimização (modos de vibração apresentados na Figura 6.28). Com isso, são obtidas as topologias ótimas para o atuador MFC no controle dos respectivos modos de vibração dos casos supracitados.

A seguir serão apresentadas as topologias ótimas obtidas a partir dos casos simulados. Na Figura 6.29 é possível visualizar a topologia ótima da camada ativa para o caso com um modo de vibração.

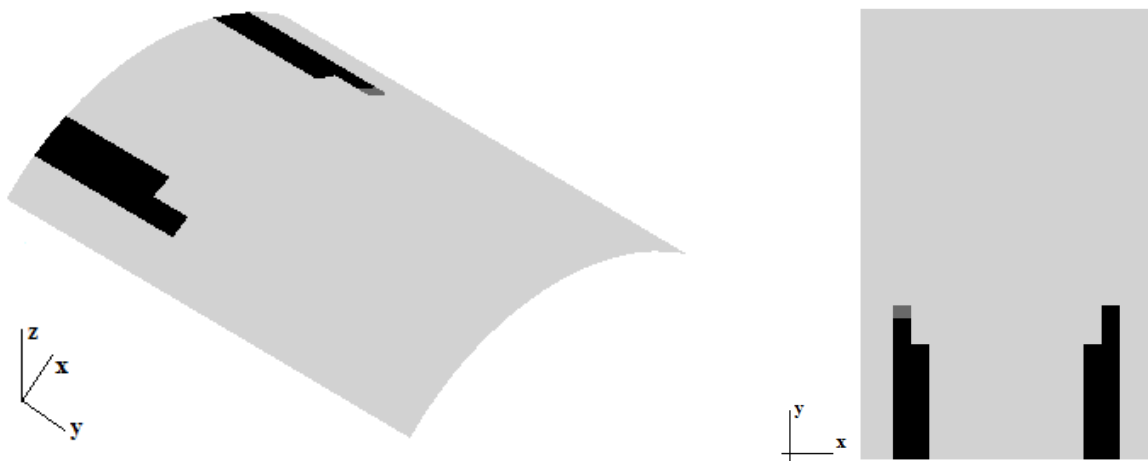


Figura 6.29 – Topologia ótima para o caso com um modo de vibração.

Na Figura 6.29, a distribuição de material do MFC na topologia ótima ocorreu próximo ao engaste da estrutura e de forma simétrica em relação ao eixo x e eixo y e a parte central da estrutura. A topologia ótima está associada à região de maior momento fletor na estrutura para o primeiro modo de vibração, e conseqüentemente, a região onde se obtém o maior índice de controlabilidade do atuador no controle de vibrações.

O histórico da convergência da função objetivo da otimização topológica para o caso com um modo de vibração é apresentado na Figura 6.30.

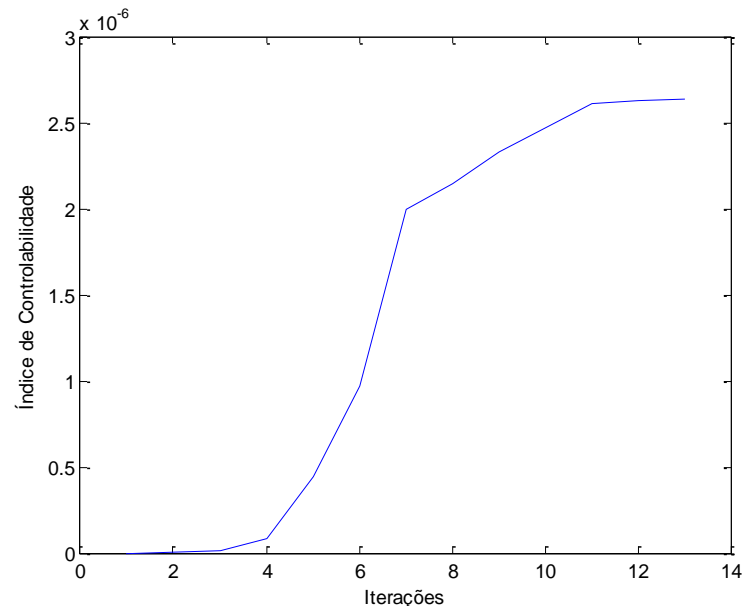


Figura 6.30 - Histórico da convergência da função objetivo para o caso com um modo de vibração.

É possível observar através da Figura 6.30 que a convergência da função objetivo ocorre na iteração 13 e o valor máximo para a controlabilidade na otimização topologia ótima é igual a $2,637e-006$.

Na Figura 6.31 é apresentada a topologia ótima da camada ativa para o caso onde são controlados os dois primeiros modos de vibração.

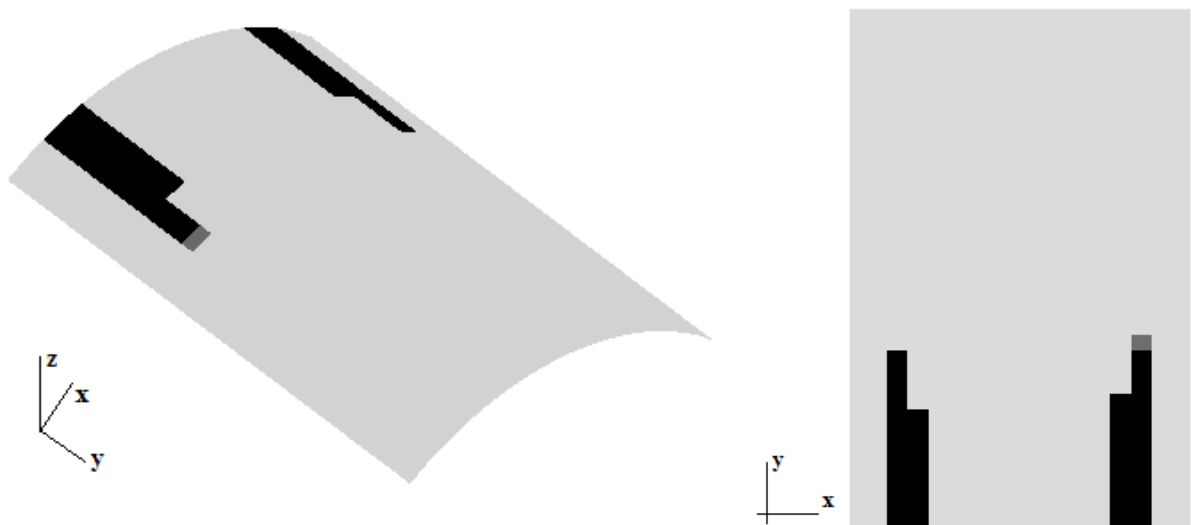


Figura 6.31 – Topologias ótimas para o caso com os dois primeiros modos de vibração.

Pode-se observar na Figura 6.31 que a distribuição de material MFC na topologia ótima deu-se de forma muito semelhante ao caso anterior (um modo de vibração), isso ocorre devido à maior influência do primeiro modo de vibração no deslocamento modal em relação ao segundo modo. A topologia está na região de maior momento fletor na estrutura no deslocamento dinâmico para os dois primeiros modos de vibração, e conseqüentemente, à região onde se obtém o maior índice de controlabilidade do atuador no controle de vibrações estruturais para os dois primeiros modos de vibração.

O histórico da convergência da função objetivo da otimização topológica para o caso com dois modos de vibração é apresentado na Figura 6.32.

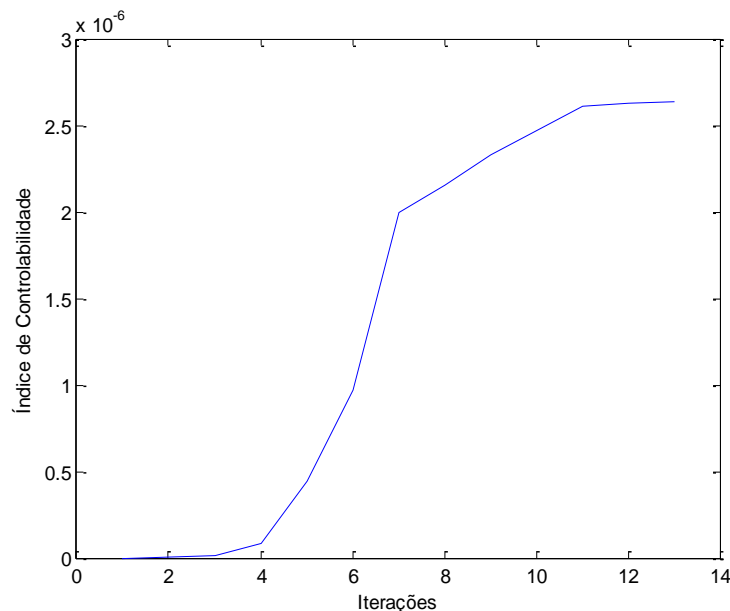


Figura 6.32 - Histórico da convergência da função objetivo para o caso com os dois primeiros modos de vibração.

É possível observar através da Figura 6.32 que a convergência da função objetivo ocorre na iteração 13 e o valor máximo para a controlabilidade na otimização topologia ótima é igual a $2,275e-006$.

Na Figura 6.33 é apresentada a topologia ótima da camada ativa para o caso onde são controlados os quatro primeiros modos de vibração.

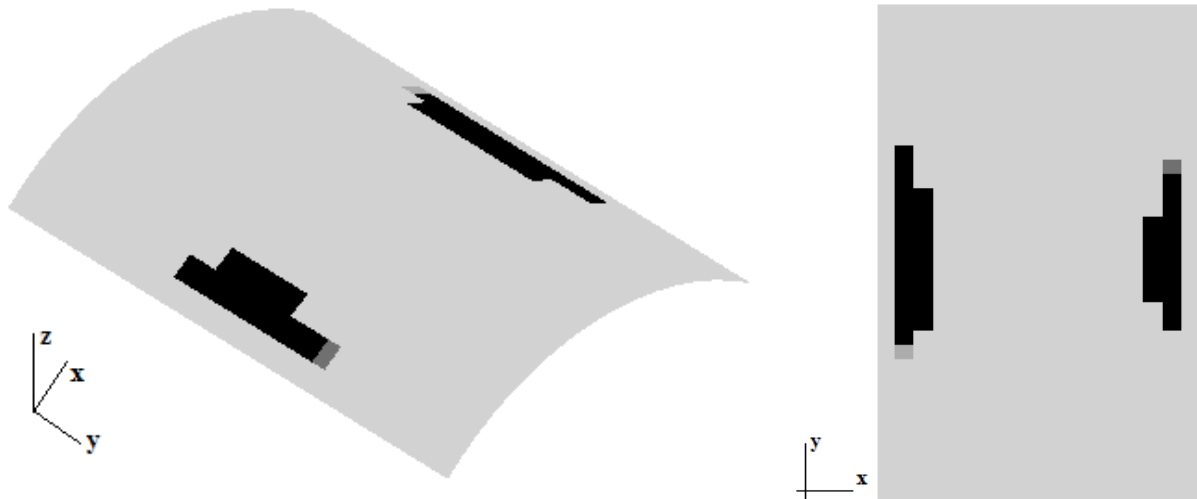


Figura 6.33 – Topologias ótimas para o caso com os quatro primeiros modos de vibração.

Na Figura 6.33, a distribuição de material MFC na topologia ótima deu-se na parte central da estrutura devido à maior influência do quarto modo de vibração no deslocamento modal. A topologia está na região de maior momento fletor na estrutura no deslocamento dinâmico para os quatro primeiros modos de vibração, e conseqüentemente, à região onde se obtém o maior índice de controlabilidade do atuador no controle de vibrações estruturais para estes modos.

O histórico da convergência da função objetivo da otimização topológica para o caso com quatro modos de vibração é apresentado na Figura 6.34.

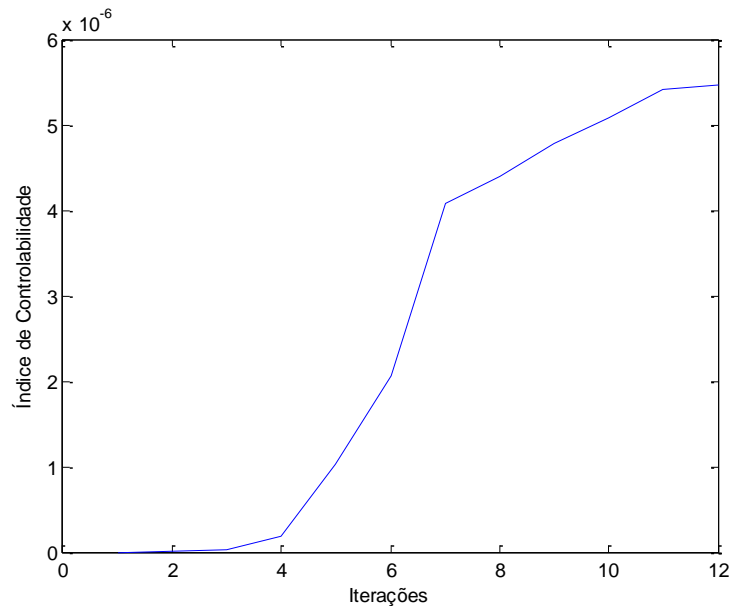


Figura 6.34 - Histórico da convergência da função objetivo para o caso com os quatro primeiros modos de vibração.

Na Figura 6.34, a convergência da função objetivo ocorre na iteração 11 e o valor máximo para a controlabilidade na otimização topologia ótima é igual a $5,468e-006$.

De forma geral, no caso em estudo, as topologias ótimas encontradas apresentam uma simetria aproximada em relação à distribuição de material na estrutura. Além disso, o posicionamento ótimo do atuador, nos dois primeiros casos simulados, deu-se a partir da influência do primeiro modo de vibração. Isso ocorre devido ao maior momento fletor na estrutura, no deslocamento dinâmico, do primeiro modo. Porém, no terceiro caso simulado, o posicionamento ótimo do atuador deu-se a partir da influência do quarto modo, novamente, devido ao maior momento fletor desse modo na estrutura.

7. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma metodologia de otimização topológica de atuadores piezelétricos compostos (MFC) em estruturas laminadas de material composto, objetivando seu melhor posicionamento para o controle de vibrações estruturais. A formulação desenvolvida permite projetar estruturas onde os atuadores piezelétricos (de qualquer tipo) são distribuídos de forma ótima na camada ativa, ou seja, não são utilizados atuadores MFC com localização e forma pré-definidos. Essa formulação contribui para um maior poder de atuação no controle de vibrações.

De forma geral as topologias ótimas, obtidas a partir das estratégias de otimização propostas, apresentaram um desempenho satisfatório em relação ao índice de controlabilidade entre o acoplamento atuador-estrutura para o controle de vibrações estruturais. Os resultados destacam a influência do número de modos de vibração que são considerados no modelo utilizado nos testes dos controladores. Além disso, os formatos finais das topologias ótimas ficaram próximos aos formatos retangulares comercialmente disponíveis. Dessa forma, o projetista poderá avaliar se é possível cortar o MFC e dispor os eletrodos para que fiquem na forma da topologia ótima ou encomendar a fabricação de um transdutor nesse formato, ou ainda, considerar a possibilidade de operar com menor desempenho e usar um transdutor comercialmente disponível com dimensões próximas às obtidas pela otimização topologia.

Verificou-se, como resultado do trabalho realizado, que a distribuição ótima do atuador MFC permite projetar estruturas inteligentes com capacidade de autoamortecimento, ou seja, que tem a capacidade de suprimir de forma mais rápida as vibrações ocasionadas por perturbações externas. No presente trabalho, o controle ativo é realizado através de dois tipos de controladores ótimos, o LQR e o LQG, os quais têm como característica a minimização de uma função de desempenho quadrática que quantifica o esforço energético empregado no controle. As topologias ótimas do atuador MFC são utilizadas nas análises em malha fechada.

Os resultados da utilização dos controladores LQR e LQG mostraram significativas reduções na sobre resposta (*overshoot*) e no tempo de assentamento com a localização ótima do atuador MFC quando comparadas as respostas obtidas com o sistema passivo (em malha aberta). De modo geral, as respostas das trajetórias controladas a partir do uso do controlador LQG obtiveram melhor desempenho ao serem comparadas com as trajetórias do controlador LQR, apresentando valores inferiores de *overshoot*, tempo de assentamento e RMS. Dessa forma, através do uso do controlador LQG, ao mesmo tempo em que a energia despendida

para o controle é menor, obtêm-se adicionalmente, uma resposta dinâmica mais rápida em relação ao valor final quando comparado com o controlado LQR. Esse desempenho superior do LQG se deve a dinâmica do observador de estados a partir do uso do filtro de Kalman juntamente com o LQR. Adicionalmente, o controle LQR apresenta uma estrutura que, através do filtro de Kalman, à medida que o tempo avança, consegue compensar parte dos efeitos das dinâmicas não modeladas. Esses efeitos são equivalentes aos de perturbações externas (ruídos dos sinais, excitação de ambiente etc.). A diferença com relação ao LQR é, portanto, que este não tem a propriedade de atenuar os efeitos das dinâmicas não-modeladas.

Além disso, a partir do uso da metodologia para escolha das matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} , os valores das tensões elétricas máximas e mínimas aplicadas no sinal de controle permanecem dentro do limite de operação do atuador MFC, evitando, assim, a despolarização do material piezolétrico.

Resultados das simulações mostraram que o modelo proposto para a interação MFC-estrutura apresenta boa concordância com resultados numéricos e experimentais a partir de modelos que levam em conta o efeito eletromecânico. Os resultados obtidos através da utilização do modelo são próximos dos obtidos por outros pesquisados, demonstrando que esta estratégia pode ser usada na análise e na otimização de estruturas que utiliza o atuador MFC.

Sugestão para trabalhos futuros

A partir do trabalho que foi desenvolvido nessa tese, podem-se ter as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Otimização da orientação de atuação do MFC.
- Utilização da metodologia proposta de otimização do MFC em outros tipos de estruturas.
- Estudo de outras formulações para a função objetivo de controle, utilizando o Gramiano de controlabilidade ou outras métricas equivalentes.
- Estudo dos conceitos de observabilidade para desenvolvimento de uma metodologia para otimização topológica simultânea de sensores e atuadores MFC na estrutura.
- Aperfeiçoamento do controle ativo de estruturas para redução de vibrações através de análise comparativas com outras técnicas de controle.

- Estudo da viabilidade da manufatura dos resultados da otimização topológica do atuador MFC.
- Análise experimental do controle, a partir dos resultados obtidos pelas otimizações topológicas e paramétricas.

Resultados Publicados

Abaixo segue a lista das publicações de alguns resultados da pesquisa realizada neste trabalho:

- Padoin E.; Menuzzi O.; Fonseca, J. S. O.; Perondi, E. A. Modeling and LQR/LQG Control of a cantilever beam using piezoelectric material. **22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)**. Ribeirão Preto, SP, Brasil, 2013.
- Padoin E.; Menuzzi O.; Fonseca, J. S. O.; Perondi, E. A. Optimal Placement of Piezoelectric Macro Fiber Composite Patches on Composite Plates for Vibration Supression. **Proceedings of The Canadian Society for Mechanical Engineering International Congress (CSME)**. Toronto, Canadá, 2014.
- Padoin E.; Menuzzi O.; Fonseca, J. S. O.; Perondi, E. A. Optimal Placement of Piezoelectric Macro Fiber Composite Patches on Composite Plates for active Vibration control. **2nd BRAZILIAN Conference on composite materials – BCCM2**. São José dos Campos, SP, Brasil, 2014.
- Padoin E.; Menuzzi O.; Fonseca, J. S. O.; Perondi. Optimal Placement of Piezoelectric Macro Fiber Composite Patches on Composite Plates for Vibration Suppression. Submetido a **Latin American Journal of Solids and Structures (LAJSS)**. 2014.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahmad, S.; Irons, B. M. and Zienckiewicz, O. C. Analysis of Thick and Thin Shell Structure by Curved Finite Elements, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 2, p. 419-451, 1970.

Alkhatib, R. e Golnaraghi, M. F. Active Structural Vibration Control: A Review, **The Shock and Vibration Digest**, vol. 35(5), p. 367–383, 2003.

Ambrosio, L.; Buttazzo, G. An optimal-design problem with perimeter penalization. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Vol.1, p55-69, 1993.

Ananthasuresh, G. e Kota, S. Designing compliant mechanisms, **ASME Mechanical Engineering**, vol. 2, p. 93–96, 1995.

Arora, J. S. **Introduction to Optimum Design**. Elsevier Academic Press, 2nd edition, 2004.

Ashton, J. E. and Whitney, J. M. **Theory of Laminated plates**. Technomic Publishing Co, Westport, 1970.

Atkin, R. J. and Fox, N. **Introduction to the Theory of elasticity**. Longman, New York, 1980.

Bathe, K. J. **Finite Element Procedures in engineering analysis**. Prentice Hall, New Jersey, 1982.

Bathe, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, 1996.

Becker, E. B.; Carey, G. F. and Oden, J. T. **Finite Elements (An Introduction)**. Vol. 1, Prentice-Hall, 1981.

Becker, J.; Fein, O.; Maess, M. and Gaul, L.. Finite element-based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping, **Computers and Structures**, Vol. 84, p. 2340–2350, 2006.

Beckert, W. and Kreher, W.S. Modelling piezoelectric modules with interdigitated electrode structures, **Computational Materials Science**, Vol. 26, 2003.

Bendsøe, M. e Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71(2), p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. e Sigmund, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Springer, Berlin, 2003.

Bendsøe, M. Optimal shape design as a material distribution problem, **Structural**

Optimization, Vol. 1, p. 193–202, 1989.

Bendsøe, M.; Diaz, A.; e Kikuchi, N., **Topology Design of Structures**, chapter Topology and generalized layout optimization of elastic structures, pages 159–206. Kluwer Academic Publishers, 1993.

Bilgen O., Kochersberger, K. B. and Inman, D. J. Novel, Bi-Directional, Variable Camber Airfoil via Macro-Fiber Composite Actuators, **Journal of Aircraft**, Vol. 47, No. 1, 2010a.

Bilgen, O.; junior, C. M.; Kochersberger, B. K and Inman D. J. Macro-Fiber Composite Actuators for Flow Control of a Variable Camber Airfoil, **Journal Of Intelligent Material Systems And Structures**, Vol. 22, 2011.

Bilgen, O.; Kochersberger, K. B.; Inman, D. J. and Ohanian, O. J. Macro-Fiber Composite actuated simply supported thin airfoils, **Smart Materials And Structures**, Vol. 19 2010b.

Binette. P.; Dano, M. L. and Gendron, G. Active shape control of composite structures under thermal loading, **Smart Materials And Structures**, Vol. 18, 2009.

Bottega, V. **Controle e Otimização estrutural de manipuladores robóticos com elementos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.

Bourdin, B. Filters in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 50, n. 9, p. 2143-2158, 2001.

Brebbia, C.; Telles, J. and Wrobel, L. **Boundary Element Technique**. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

Bueno, D. D. **Controle Ativo de Vibrações e Localização ótima de Sensores e Atuadores Piezelétricos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2007.

Burl, J. **Linear Optimal Control**. Addison-Wesley, California, 1999.

Butt, L.; Steve Day, S.; Weaver, J.; Sossi, C. and Wolek, A. Wing morphing design utilizing macro fiber composite smart materials, **69th Annual Conference Of The Society of Allied Weight Engineers**, Inc Virginia Beach, Virginia, 2010.

Cady, W. G. **Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals**. Dover Press, 1964.

Canfield, S. e Frecker, M. Topology optimization of compliant mechanical amplifiers for piezoelectric actuators, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 20(4), p. 269–279, 2000.

Carbonari, R. C.; Silva, E. C. N and Nishiwaki, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design, **Smart Materials and Structures**, 2007.

Cardoso, E. e Fonseca, J. Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 1(3), p. 263–276, 2004.

Cardoso, E. L. and Fonseca, J. S. O. Topology optimization of piezoelectric actuators considering geometric nonlinearities, **Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials: Status and Perspectives**, p. 391-400, 2006.

Cardoso, E. L. **Controle da Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

Castro, E. S. **Avaliação de Algoritmos Numéricos Aplicados ao Controle Ativo de Vibrações Mecânicas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.

Cazottes, P.; Fernandes, A.; Pouget, J. and Hafez M. Actuation of bistable buckled beams with Macro-Fiber Composites, **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, Acropolis Convention Center Nice, France, Sept, 22-26, 2008

Cheng, G. Introduction to structural optimization: theory, methods and solution, **Lecture Notes**, Dalian University of Technology, 1992.

Cheng, K. e Olhoff, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 18(2), p. 153–169, 1982.

Cheng, K. On non-smoothness in optimal design of solid, elastic plates, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 17, p. 795–810, 1981.

Cheng, Y. F.; Jiang, H. and Lou K. **Smart Structures: Innovative Systems for Seismic Response Control**, 2008.

Collet, M.; Ruzzene, M.; Cunefare, K. and Xu, B. Modeling and Characterization of Macro-Fiber Composite Transducers for Lamb Wave Excitation, **Health Monitoring of Structural and Biological Systems**, 2010.

Crawley, E.F. Intelligent Structures for aerospace: A technology overview and assessment, **AIAA Journal**, Vol. 32. P. 1689-1699, 1994

da Silva, F. C. G. **Modelagem de uma placa de materiais compósitos e piezelétricos pelo método dos elementos finitos. Aplicação de controle de vibração**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

Dano, M. L.; Gakwaya, M. and Jullière Re, B. Compensation of Thermally Induced

Distortion in Composite Structures using Macro-fiber Composites, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2007 .

De Leon, D. M. **Otimização estrutural de placas compostas laminadas sujeitas a efeitos aeroelásticos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

De Medeiros, R. **Desenvolvimento de uma metodologia computacional para determinar coeficientes efetivos de compósitos inteligentes**. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2012.

De Souza, C. E. **Otimização em dois níveis da orientação e da topologia de cascas laminadas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.

Dejin, C.; Shijie Z. and Hongtao W. Genetic algorithm based LQR vibration wireless control of laminated plate using photostrictive actuators, **Earthquake Engineering And Engineering Vibration**, Vol.11, No.1, p. 83-90, 2012.

Deraemaeker, A.; Nasser, H.; Benjeddou A. and Preumont A. Mixing rules for the piezoelectric properties of Macro Fiber Composites (MFC), **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2009.

Diaz, A. e Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 35(7), p. 1487–1502, 1992.

Diaz, A. e Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization, **Structural Optimization**, vol. 10(1), p. 40–45, 1995.

dos Santos, H. F. L. **Controle de vibrações estruturais usando cerâmicas piezoelétricas em extensão e cisalhamento conectadas a circuitos híbridos ativo-passivos**. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2008.

Du, H.; Lau, G. K.; Lim, M. K. and Qui, J. Topological optimization of mechanical amplifiers for piezoelectric actuators under dynamic motion, **Smart materials and Structures**, Vol. 8, p. 257-267, 2000.

Fan, Z.; Santare M. H. and Advani, S.G. Interlaminar shear strength of glass fiber reinforced epoxy composites enhanced with multi-walled carbon nanotubes, **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, Vol. 39, Issue 3, P. 540–554, 2008.

Fonseca, J. S. O. **Design of Microstructures of Periodic Composite materials**. PhD thesis, University of Michigan, 1997.

Franklin, G. F; Powell, J. D and Naeini, E. A. **Feedback Control of Dynamic**

Systems. 3th, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Franklin, G. F; Powell, J. D and Naeni, E. A. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 4th, Prentice hall, 2002.

Gaudiller L. and Matichard F. Nonlinear Approach for the Control of Mechanical Coupling Effects and Smart Structures of Limited Power, **International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics**, 2005.

Gawronski, W. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. Springer, New York, 2004.

Guedes, J. e Kikuchi, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite-element methods, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 83(2), p. 143–198, 1990.

Guimarães, C. S.; Bussamra, F L S.; Budinger, V. P. and Hernandez, J. A . Structural shape control using macro fiber Composite piezoelectric sensors and actuators, **Mecánica Computacional**, Vol. XXIX, p. 8263-8279, 2010.

GUPTA, V.; SHARMA, M. and THAKUR, N. Optimization Criteria for Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators on a Smart Structure: A Technical Review, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2010.

Haftka, R. and Gürdal, Z. **Elements of Structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 1991.

Haftka, R. T.; Gurdal, Z.; Kamat, M. P. **Elements of Structural Optimization**. 2nd Edition, Kluwer Academic Publishers, 1990.

Han, J. H. and Lee, I. Optimal placement of piezoelectric sensors and actuators for vibration control of a composite plate using genetic algorithms, **Smart materials and Structures**, Vol. 8, p. 257-267, 1999.

Hassani, B. e Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization I - Homogenization theory for media with periodic structure, **Computers and Structures**, vol. 69(6), p. 707–717, 1998a.

Hassani, B. e Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization II - Analytical and numerical solution of homogenization equations, **Computers and Structures**, vol. 69(6), p. 719–738, 1998b.

Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, 1987.

Iannucci, L.; Dawood, S. I. S. M.; Greenhalgh, E. and Ariffin K. A. Delamination

control in composite beams Using piezoelectric actuators, **17th International Conference on Composite Materials, Edinburgh UK, 2009.**

Jang, G.; Jeong, J.; Kim, Y.; Sheen, D.; Park, C.; e Kim, M. Checkerboard-free topology optimization using non-conforming finite elements, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 57, p. 1717–1735, 2003.

Jha, R. and He, C. Neural-network-based adaptive predictive control for vibration suppression of smart structures, **Smart Materials And Structures**, Vol. 11, p. 909-916, 2002.

Jing-jun, Z.; Li-ya, C.; Wei-ze, Y. Active Vibration Control for Smart Structure Base on the Fuzzy Logic, **International Conference on Advanced Computer Control**, 2008.

Jog, C. e Haber, R. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 130(3-4), p. 203–226, 1996.

Jog, C.; Haber, R.; e Bendsøe, M.P., i. M. B. . C. M. S. e. A displacement based topology design with self-adaptive materials, **Topology Design of Structures**, vol. Kluwer Academic Publishers, p. 219–238, 1993.

Johnson, M. A. **Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design.** IEEE, 1987.

Jones, R. M. **Mechanics of Composite Materials.** Taylor and Francis, Philadelphia, 2nd edtion, 1999.

Junkins, J. L. and Kim, Y. Measure of controllability for actuator placement, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14(5), p. 895–902, 1991.

Kapuri, S. and Yasin, M. Y. Active vibration control of piezoelectric laminated beams with electroded actuators and sensors using an efficient finite element involving an electric node, **Smart Materials And Structures**, Vol. 19, 2010.

Kikuchi, N.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J.; e Silva, E. Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151(3-4), p. 401–417, 1998.

Kim, D. K.; Han, J. H. and Kwon, K. J. Wind tunnel tests for a flapping wing model with a changeable camber using macro-fiber composite actuators, **Smart Mater. Struct., Vol. 18**, 024008 (8pp), 2009.

KIM, J. et al. Multi-physics interpolation for the topology optimization of piezoelectric systems. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.

199, p. 3153-3168, 2010.

Kiyono, C. Y. **Projeto de transdutores Piezocompósitos de Casca Multi-Camada utilizando o Método de Otimização Topológica**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2013.

Kovalovs A.; Barkanov E.; Gluhihs S. Active control of structures using macro-fiber composite (MFC), **Journal of Physics: Conference Series** **93**, 2007.

Kovalovs, A.; Wesolowski, M.; Barkanov, E. and Gluhihs, S. Application of macro-fiber composite (MFC) as a piezoelectric actuator, **Journal of Vibroengineering**, VOL, 11, ISSUE 1, ISSN 1392-8716, 2009.

Kumar, R. and Narayanan, S. Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs, **Smart Materials and Structures**, vol. 17, pp. 01–15, 2008.

Kumar, R. and Singh, S. P. Adaptive hybrid control of smart structures subjected to multiple disturbances, **Smart Materials And Structures**, Vol. 15, p. 1345-1357, 2002.

Kumar, W. P. P. and Palaninathan, R. Finite Element Analysis of Laminated Shells with Exact Through-Thickness Integration, **Computers and Structures**, Vol, 63(1), p.173-184, 1997,

Kuo, B. C. **Automatic Control Systems**, 3th Edition, Prentice hall, 2009.

Kwakernaak, H. and Sivan R. **Linear Optimal Control Systems**, Wiley-Interscience, 1972

Larsen, U.; Sigmund, O.; e Bouwstra, S. Design and fabrication of complicate micromechanics and structures with negative Poisson's ratio, **Journal of Microelectromechanical Systems**, vol. 6(2), p. 99–106, 1997.

Latalski, J. Modelling of macro fiber composite piezoelectric active elements in ABAQUS system, **Maintenance And Reliability NR 4**, 2011.

Li, Y; Xin, X.; Kikichi, N. and Saitou, K. **Optimal shape and location of piezoelectric materials for topology optimization of flextensional actuators**, 2000.

Lim, K. and Gawronski, W. Actuator and sensor placement for control of flexible structures, **Control and Dynamic Systems**, vol. 57, p. 109–109, 1993.

Lin, Y. J. and Venna, S. V. A novel method for piezoelectric transducers placement for passive vibration control of geometrically non-linear structures, **Sensor Review**, Vol. 28 , 2008.

Lines, M. e Glass, A. **Principles and applications of ferroelectrics and related**

materials. Clarendon Press, Oxford, 2001.

Liu, J.J. and Liaw, B.M. Efficiency of Active Control of Beam Vibration Using PZT Patches, **SEM X International Congress & Exposition on Experimental & Applied Mechanics**, 2004.

Lloyd, J. M. Electrical Properties of Macro-Fiber Composite Actuators and Sensors, **Thesis of the Virginia Polytechnic Institute and State University**, 2004.

Loewy, R. G. Recent developments in smart structures with aeronautical applications, **Smart Materials and Structures**, Vol. 6, p.11–42, 1997.

Maciejowski, J. M. **Multivariable Feedback Design**, Addison-Wesley Longman, Incorporated, 1989.

Mangalgi, P. D. Composite materials for aerospace applications. **Bull. Mater. Sci.**, Vol. 22, No. 3, p. 657-664, 1999.

Marinaki, M.; Marinakis, Y. and Stavroulakis, G. E. Vibration control of beams with piezoelectric sensors and actuators using particle swarm optimization, **Expert Systems with Applications**, Vol. 38, p.6872–6883, 2010.

McGraw-Hill Science & Technology Dictionary. <http://www.answers.com/topic/smart-structures-engineering#ixzz2IuprEdz7>. Página Consultada em 24 de Janeiro, 2013.

Mehrabian, A. R. and Koma, A. Y. A novel technique for optimal placement of piezoelectric actuators on smart structures, **Journal of the Franklin Institute**, p. 12–23, 2009.

Meirovitch, L. **Dynamics and Control of Structures**. John Wiley & Sons, New York, 1990.

Mitchell, R.; Kim, Y. and El-Korchi, T. System identification of smart structures using a wavelet neuro-fuzzy model, **Smart Materials And Structures**, Vol. 21, 2012.

Moheimani, S. e Fleming, A. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. Springer, Germany, 2006.

Molter, A. **Controle de Manipuladores robóticos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos otimizados**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

Molter, A.; Silveira, O. A. A.; Fonseca, J. S. O and Bottega, V. Simultaneous Piezoelectric Actuator and Sensor Placement Optimization and Control Design of Manipulators with Flexible Links Using SDRE Method, **Mathematical Problems in**

Engineering, Vol. 2010, Article ID 362437, 2010.

Mosmann, R. M. **Otimização Topológica de Estruturas Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade, Volume e Frequência natural**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003.

Nagamine, R. K. **Lógica Difusa para Controle não Convencional de uma Viga Inteligente**. Dissertação de Mestrado, USP, São Carlos, 2001.

Neto, L. V F.; Abreu, I. S.; Rêgo, P. H. M. and Melo. M. P. Modelos e Convergência de um Algoritmo Genético para Alocação de Auto-estrutura via RLQ, **Revista IEEE América Latina**, Vol 6, 2008.

Neves, M.; Rodrigues, H.; e Guedes, J. Generalized topology design of structures with a buckling load criterion, **Structural Optimization**, vol. 10(2), p. 71–78, 1995.

Nguyen, D. T. e Georges, D. **Controllability Gramian for Optimal Placement of Power System Stabilizers in Power Systems**. In APCCAS, pages 1373–1378. IEEE, 2006.

Nishiwaki, S.; Frecker, M.; Min, S.; e Kikuchi, N. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 42, p. 535–559, 1998.

Ogata, K. **Modern Control Engineering**. 3th Edition. Prentice Hall, 1998.

Ogata, K. **Modern Control Engineering**. Prentice Hall, 2009.

Oliveira, J. H. I. **Desenvolvimento Do Processo De Fabricação De Laminados De Material Composto Polimérico De Fibra De Vidro Para Aplicação Na Construção Aeronáutica**. Tese de Doutorado, Universidade Federal De Minas Gerais, 2007.

Oral Ö.; Çetin L.; Uyar E., A Novel Method on Selection of Q And R Matrices In The Theory Of Optimal Control, **International Journal of Systems Control**, Vol.1,2010.

Ou, J. e Kikuchi, N. Integrated optimal structural and vibration control design, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 12, p. 209–216, 1996.

Padoin E.; Menuzzi O.; Fonseca, J. S. O.; Perondi, E. A. Optimal Placement of Piezoelectric Macro Fiber Composite Patches on Composite Plates for Vibration Supression. **Proceedings of The Canadian Society for Mechanical Engineering International Congress (CSME)**. Toronto, Canadá, 2014

Panda, S. and Natarajan, R. Analysis of Laminated Composite Shell Structures by Finite Element Method, **Computers & Structures**, Vol. 14, p. 225-230, 1981.

Pedersen, P. **Optimal Design – Structures and Materials, Problems and Tools**. Technical University of Denmark. ISBN – 8790416066, 2003.

Preumont, A. **Vibration Control of Active Structures, An Introduction**. Kluwer, 2002.

Qiu, J. and Ji, H. Research on applications of piezoelectric materials in smart Structures, **Front. Mech. Eng**, p. 99–117, 2011.

Raja, S.; Ikeda, T. and Dwarakanathan, D. Deflection and Vibration Control of Laminated Plates Using Extension and Shear Actuated Fiber Composites, **Hindawi Publishing Corporation Smart Materials Research**, Vol. 2011, Article ID 515942, 15 pages, 2011

Rao. S. S. **Mechanical Vibrations**. Prentice Hall, 3 th edition, 2010.

Reddy, J. N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. John Willey & Sons, Inc., 1984.

Reddy, J. N. **Mechanics of Composite Plates and Shells – Theory and Analysis**. John Willey & Sons, Inc., 2004.

Reddy, J. N., **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

Robandi I.; Nishimori K.; Nishimura R.; Ishihara N., Full-element weighting matrices Q and R design in optimal Load Frequency Control solution using genetic algorithm, **International Conference On Soft Computing**, 2000.

Rodrigues, H. e Fernandes, P. Topology optimization of linear elastic structures subjected to thermal loads, vol. in M.P. Bendsøe & C.A. Mota Soares (eds), **Topology Design of Structures, Kluwer Academic Publishers**, p. 437–450, 1993.

Roy, T. and Chakraborty D. Genetic algorithm based optimal design for vibration control of composite shell structures using piezoelectric sensors and actuators, **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, Vol. 5, Issue 1, p. 45-60, 2008.

Rozvany, G. I. N.; Zhou, M. and Birker, T. Generalized shape optimization without homogenization. **Structural Optimization**, vol. 4, n. 3-4, p. 250-252, out. 1992.

Rubio, W. M.; Silva, E. C. N. and Nishiwaki, S. Piezoresistive sensor design using topology optimization, **Struct. Multidisc. Optim**, p. 571-583, 2007.

Safizadeh, M. R.; Mat Darus, I. Z. and Mailah M. Optimal Placement of Piezoelectric Actuator for Active **Vibration Control of Flexible Plate**, **Intelligent and Advanced Systems**, 2010.

Salagame, R. and Belegundu, A. Shape optimization with p-adaptivity, **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, Vol. 33(12), p.2399-2405, 1995.

Sant'Anna, H. M. **Otimização Topológica de Estruturas Contínuas submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

Schönecker, A. J.; Daue, T.; Brückner, B.; Freytag, C.; Hähne L and Rödiger T. Overview on Macro Fiber Composite Applications, **Smart Structures and Materials: Active Materials: Behavior and Mechanics**, 2006.

Schröck, J.; Meurer, T. and Kugi, A. Control of a flexible beam actuated by macro-fiber composite patches: I. Modeling and feedforward trajectory control, **Smart Materials And Structures**, Vol. 20, 2011a.

Schultz, R. A Morphing Concept Based on Unsymmetric Composite Laminates and Piezoceramic MFC Actuators, **Structural Dynamics & Materials Conference**, 2004.

Schultz, S. L. **Metodologia para a alocação ótima discreta de sensores e atuadores piezoelétricos na simulação do controle de vibrações em estruturas de materiais compósitos laminados**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

Segerlind, L. J. **Applied Finite Element Analysis**. 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 1984.

Sigmund, O. e Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local-minima, **Structural Optimization**, vol. 16(1), p. 68–75, 1998.

Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization, **Mechanics of Structures and Machines**, vol. 25(4), p. 493–524, 1997.

Silva, E. e Kikuchi, N. Design of piezoelectric transducers using topology optimization, **Smart Materials and Structures**, vol. 8(3), p. 350–364, 1999.

Silva, E.; Fonseca, J.; e Kikuchi, N. Optimal design of periodic piezocomposites, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 159(1-2), p. 49–77, 1998.

Silva, E.; Nishiwaki, S.; e Kikuchi, N. Topology optimization design of flextensional actuators, **IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control**, vol. 47(3), p. 657–671, 2000.

Silva, E.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J.; e Kikuchi, N. Optimization methods applied to material and flextensional actuator design using the homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 172(1-4), p. 241–271, 1999.

Silveira, O. A. A. **Projeto Simultâneo De Otimização Topológica E Controle Para Redução De Vibrações Utilizando Material Piezelétrico**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

Smart Material. <http://www.smart-material.com/MFC-product-main.html>. Página consultada em 11 Março de 2013.

Sodano, A. H. **Macro-Fiber Composites for Sensing, Actuation and Power Generation**. Thesis of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.

Sodano, H.; Peairs, M. D.; Magliula, A. E.; Park, G. and Inman, J. D. The use of macro-fiber composites in structural vibration Applications, **IMAC-XXI: Conference & Exposition on Structural Dynamics**, 2003.

Sohn, J. W.; Choi, S. B. and Kim, H. S. Vibration control of smart hull structure with optimally placed piezoelectric composite actuators, **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 53, p. 647–659, 2011.

Spencer, A. J. M. **Continuum Mechanics**. Longman Inc, New York, 1980

Stolpe, M. and Svanberg, K. On the Trajectories of Penalization Methods for Topology Optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 21, p.128-139, 2001.

Suslick, K.S. The Chemical Effects of Ultrasound, **Scientific American February**, 1989.

Suzuki, K. e Kikuchi, N. A homogenization method for shape and topology optimization, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 93(3), p. 291–318, 1991.

Swan, C. C. and Kosaka, I. Voigt-reuss topology optimization for structures with linear elastic material behaviors. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 40, n. 16, p. 3033-3057, 1997.

Takagi, K.; Sato, H. and Saigo, M. Vibration control of a smart structure embedded with metal-core piezoelectric fibers, **Adv. Composite Mater.**, Vol. 15, No. 4, p. 403–417, 2006.

Talisch, C.; Paulino, G.; e Le, C. Honeycomb Wachspress finite elements for structural topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 37, p. 569–583, 2009.

Tarfaoui M., Choukri S., Neme A. Effect of Fibre Orientation on Mechanical Properties of The Laminated Polymer Composites Subjected to Out-Of-Plane High Strain

Rate Compressive Loadings, **Composites Science and Technology**, 2010.

Tavakolpour, A. R.; Mailah, M.; Darus, I. Z. M. and Tokhi O. Self-learning active vibration control of a flexible plate structure with piezoelectric actuator, **Simulation Modelling Practice and Theory**, Vol. 18, p. 516–532, 2009.

Tebaldi, A.; Coelho, L. S. e Junior, V. L. Detecção de falhas em estruturas inteligentes usando otimização por nuvem de partículas: fundamentos e estudo de casos, **Revista Controle & Automação**, Vol.17, 2006.

Thin, T. I. and Ngoc, L. K. Static behavior and vibration control of piezoelectric cantilever composite plates and comparison with experiments, **Computational Materials Science**, Vol. 49, p. 276–S280, 2010.

Thomsen, J. Topology optimization of structures composed of one or 2 materials, **Structural Optimization**, vol. 5(1-2), p. 108–115, 1992.

Tripathi, P. K and Gangadharan K.V. Design and Implementation of Active Vibration Control in Smart Structures, **International Journal of Research and Reviews in Mechatronic Design and Simulation**, Vol. 2, No. 1, p. 92-98, 2012.

Tsuruta, K. M. **Monitoramento de integridade estrutural de materiais compostos sujeitos a impactos empregando a técnica da impedância eletromecânica**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2008.

Vanderplaats, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications**. McGraw-Hill, New York, EUA, 1984.

Wang, J.; Geng, C.; Luo, F.; Liu Y.; Wang, K.; Fu, K.; and He, B. Shear induced fiber orientation, fiber breakage and matrix molecular orientation in long glass fiber reinforced polypropylene composites, **Materials Science and Engineering**, P. 3169–3176, 2010.

Wang, Q.; Wang, M. A Controllability Index for Optimal Design of Piezoelectric Actuators in Vibration Control of Beam Structures. **Department of Civil Engineering**, National University of Singapore, 2000

Wein, F.; Kaltenbacher, M.; Kaltenbacher, M.; Leugering, G.; Bänsch, E. and Schury, F. Topology Optimization of piezoelectric Layers Using the SIMP Method, **Structural and Multidisciplinary Optimization manuscript**, 2008.

Wu, B.; Xu, Z.; e Li, Z. A note on computing eigenvector derivatives with distinct and repeated eigenvalues, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, vol. 23, p. 241–251, 2007.

Xu, B.. Ou, J.P. and Jiang, J, S. Integrated optimization of structural topology and

control for piezoelectric smart plate based on genetic algorithm, **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 64, p. 1–12, 2013.

Zhang, Y. X. and Yang, Z. h. Recent Developments in Finite Element Analysis For Laminated Composite Plates, **Composite Structures**, Vol. 88, p. 147-157, 2009.

Zhang, Z.; Chen, Y.; Li, H. and Hua, H. Simulation and experimental study on vibration and sound radiation control with piezoelectric actuators, **Shock and Vibration**, Vol. 18, p. 343–354, 2010.

Zhu, Y.; Qiu, J.; Du, H.; e Tani, J. Simultaneous optimal design of structural topology, actuator locations and control parameters for a plate structure, **Computational Mechanics**, vol. 29, p. 89–97, 2002.

Zienkiewicz, O. and Taylor, R. L. **The Finite Element Method – Solid Mechanics**. Vol. 2, Elsevier Academic Press, 5th edition, 2000a.

Zienkiewicz, O. and Taylor, R. L. **The Finite Element Method – The Basis**. Vol. 2, Elsevier Academic Press, 5th edition, 2000b.

Zienkiewicz, O. and Taylor, R. L. **The Finite Element Method**. Vol. II, Mc Graw Hill, 4th edition, 1991.

Zimcik, D. G.; Yousefi-Koma A. Applications of Smart Structures to Aircraft for Performance Enhancement, **Canadian Aeronautics and Space Journal**, Vol. 49, p. 163-172, 2003.

Zoric N. D.; Simonovic, A. M.; Mitrovic, Z. S. and Stupar, S. N. Optimal vibration control of smart composite beams with optimal size and location of piezoelectric sensing and actuation, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Vol. 24(4), p. 499–526, 2012.

APÊNDICE A

Para o cálculo da programação linear, exigem-se as derivadas (sensibilidades) para a variação da rigidez e da massa da estrutura em função da variável de projeto ρ_a . Para o primeiro caso, a derivada da matriz de rigidez em relação à variável de projeto é calculada da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_k}{\partial \rho_a} &= \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{C}_{1k}}{\partial \rho_a} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \frac{\partial \mathbf{C}_{2k}}{\partial \rho_a} \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{C}_{2k}}{\partial \rho_a} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \frac{\partial \mathbf{C}_{3k}}{\partial \rho_a} \mathbf{F}_2 \right] \frac{2}{t} |\mathbf{J}| d\xi d\zeta, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde k corresponde a lâmina que se quer otimizar, o vetor $\frac{\partial \mathbf{K}_k}{\partial \rho_a}$ tem como dimensões o número de variáveis (ndesvar), onde ndesvar é o número de elementos vezes o número de lâminas que serão otimizadas (ndesvar = nelem X notmlyr).

Sendo assim, os termos derivados da Equação A.1 são descritos por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}_{1k}}{\partial \rho_a} = p\rho_a^{p-1}(z_t - \mathbf{z}_b)_k \bar{\mathbf{Q}}_k, \\ \frac{\partial \mathbf{C}_{2k}}{\partial \rho_a} = \frac{1}{2} p\rho_a^{p-1}(z_t - \mathbf{z}_b)_k \bar{\mathbf{Q}}_k, \\ \frac{\partial \mathbf{C}_{3k}}{\partial \rho_a} = \frac{1}{3} p\rho_a^{p-1}(z_t - \mathbf{z}_b)_k \bar{\mathbf{Q}}_k, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Já a derivada da matriz de massa em relação à variável de projeto ρ_a pode ser descrita como

$$\frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial \rho_a} = pm\rho_a^{pm-1}\gamma_0 \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e. \quad (\text{A.3})$$

APÊNDICE B

A fim de validar o modelo proposto e verificar o desempenho de uma proposta de otimização paramétrica para comparar os resultados com a otimização topológica do Capítulo 6, este apêndice apresenta alguns resultados. Para o caso em estudo, considera-se uma placa plana de material composto (fibra de vidro+matriz de epóxi) em balanço com um atuador MFC (modelo MFC-8528-P1) acoplado à estrutura, conforme apresentado na Figura B.1. A placa possui duas lâminas de material composto dispostas na configuração [0,90], e um atuador MFC com as fibras piezelétricas alinhadas a 0° em relação à direção x .

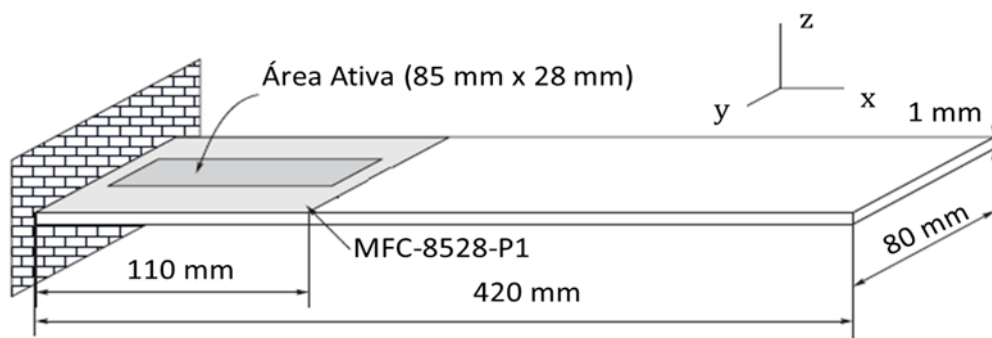


Figura B.1 – Placa de composta laminada em balanço com atuador MFC acoplado a estrutura.

A Tabela B.1 apresenta as propriedades de uma lâmina da placa plana que serviu como base para validar o modelo numérico, bem como as propriedades do material piezelétrico (MFC), sendo a direção da fibra igual a 1.

Tabela B.1 – Propriedades materiais de uma lâmina do material composto e do MFC

MATERIAL COMPOSTO	MFC
$E_1 = 29.090 \text{ GPa}$	$E_1 = 30.336 \text{ GPa}$
$E_2 = E_3 = 8.841 \text{ GPa}$	$E_2 = E_3 = 15.857 \text{ GPa}$
$G_{12} = G_{13} = 2.726 \text{ GPa}$	$G_{12} = G_{13} = 5.515 \text{ GPa}$
$G_{23} = 1.205 \text{ GPa}$	$G_{23} = 2.60 \text{ GPa}$
$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.1434$	$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.31$
$\nu_{23} = 0.2933$	$\nu_{23} = 0.327$
$\gamma = 1793 \text{ kg/m}^3$	$\gamma = 5440 \text{ kg/m}^3$
	$w_h = 0.5 \text{ mm}, d_{33} = 4.0\text{E}+02 \text{ pm/V}$

Fonte: [Smart Material, 2013].

Para aferir o modelo numérico em elementos finitos, discretizou-se a estrutura em 560 elementos (35 x 16), e comparou-se os valores das primeiras frequências naturais da placa obtidos numericamente com os valores obtidos pela análise modal efetuada no ANSYS. As análises modais foram feitas com os mesmos parâmetros geométricos e estruturais. No ANSYS utilizou-se o elemento finito denominado SHELL281, o qual possui as mesmas características do elemento finito de casca de Ahmad, implementado no modelo numérico e apresentado na Seção 2.2.1.

Os resultados desse estudo comparativo são apresentados na Tabela B.2, enquanto os respectivos modos de vibração são apresentados na Figura B.2.

Tabela B.2 – Valores das primeiras Frequências naturais em [Hz].

Modo	MEF	ANSYS
1° Flexão	2,91	2,91
2° Flexão	17,06	17,06
1° Torção	21,04	21,03
3° Flexão	46,30	46,29
1° Flexo-Torção	64,37	64,33

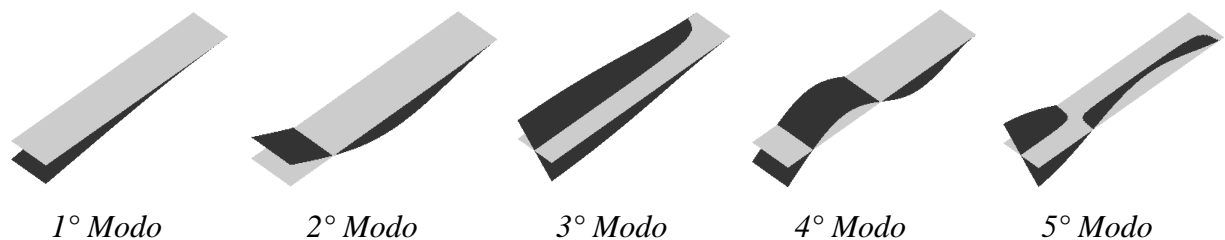


Figura B.2 – Modos de vibração da placa plana [0,90] com o MFC.

B.1 DESLOCAMENTO ESTÁTICO

Para validar o modelo da interação entre o atuador MFC e a estrutura, proposto no Capítulo 2, compara-se primeiramente, na Seção B.1.1, os resultados obtidos através de uma análise de deflexão estática com aplicação de uma tensão elétrica no atuador MFC, com os

resultados obtidos experimentalmente por Dano et al., 2007, em uma placa composta laminada em balanço. Posteriormente, na Seção B.1.2, é apresentada uma análise do deslocamento estático do caso em estudo.

B.1.1 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Na análise experimental feita por Dano et al. 2007, o atuador MFC (modelo MFC-8528-P1) foi colado sobre uma placa composta laminada $[0]_s$. As propriedades do MFC e do material composto estão no ANEXO III. As dimensões da placa e do MFC podem ser visualizadas na Figura B.3.

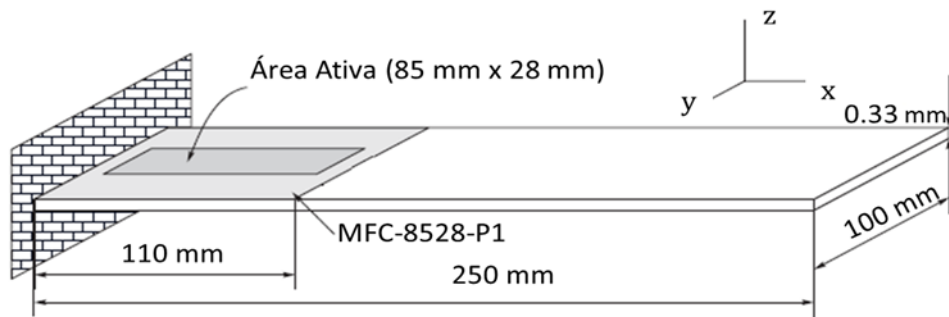


Figura B.3 – Placa composta laminada em balanço com atuador MFC acoplado a estrutura.

O experimento consiste na aplicação de uma tensão elétrica de 1000 volts no MFC e na medição da deflexão em alguns pontos da estrutura. A Figura B.4 apresenta uma curva com os valores medidos de forma experimental e os valores obtidos através do modelo proposto nesse trabalho.

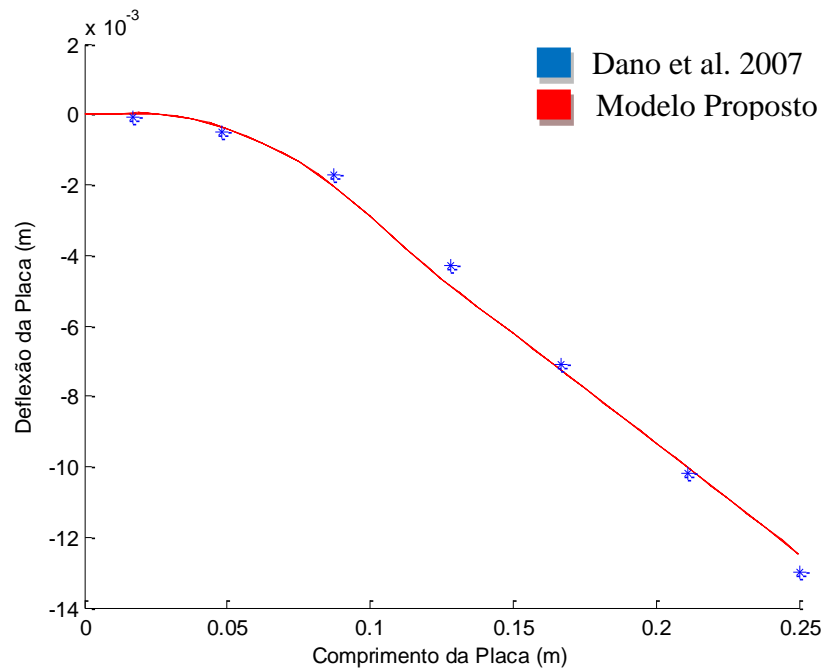


Figura B.4 – Comparativo entre os valores de deflexão através do modelo proposto e experimento feito por Dano et al. 2007.

Conforme pode ser visualizado na Figura B.4, os resultados obtidos através do modelo são próximos aos obtidos na análise experimental de Dano et al., 2007.

B.1.2 ANÁLISE DO DESLOCAMENTO

A análise de deslocamento estático leva em conta o deslocamento em toda a extensão da placa quando aplicado um potencial elétrico de 1000 volts no MFC. Com essa análise, é possível visualizar o deslocamento estrutural devido a o momento aplicado à estrutura a partir da atuação do MFC. As Figuras B.5 e B.6 apresentam as curvas de deslocamento da placa.

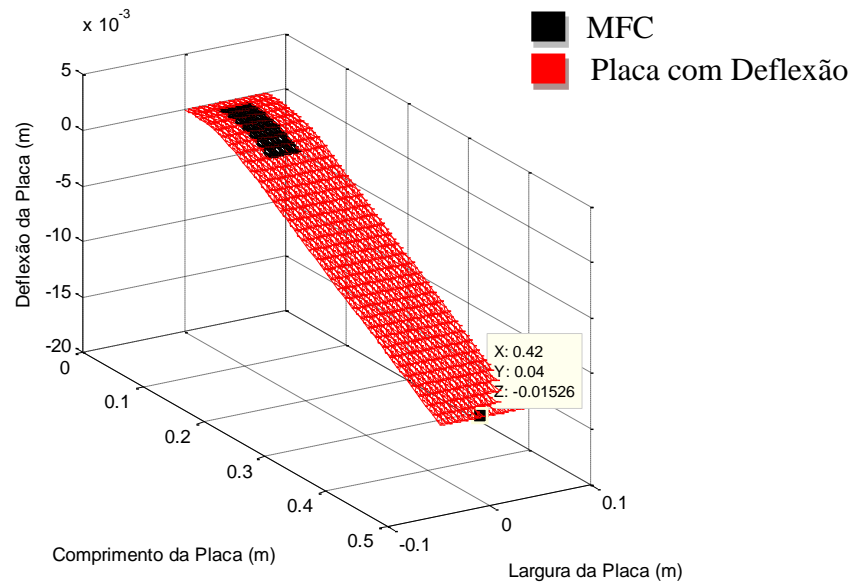


Figura B.5 – Deslocamento da placa plana, quando aplicado um potencial elétrico ao MFC de 1000 V (simulação).

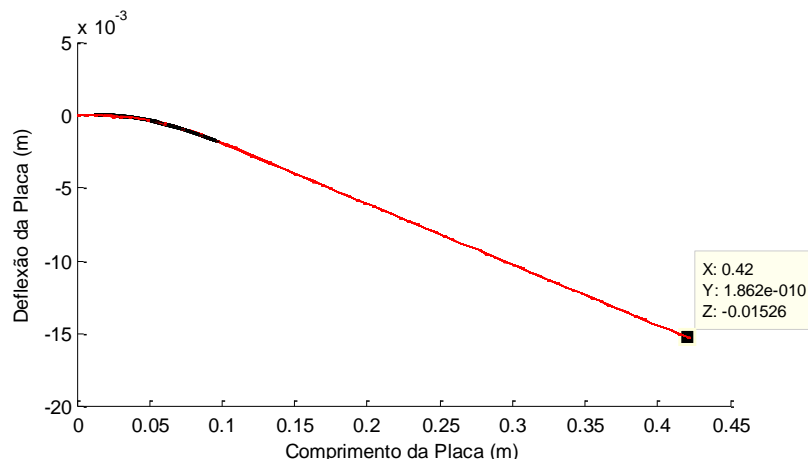


Figura B.6 – Deslocamento da placa no plano xz, quando aplicado um potencial elétrico ao MFC de 1000 V (simulação).

B.2 POSICIONAMENTO ÓTIMO

A fim de verificar o posicionamento ótimo dos atuadores MFC em função de um melhor poder de atuação no controle de vibrações estruturais do primeiro, segundo e terceiro modos de vibração flexional, aplica-se uma estratégia baseada no índice de controlabilidade. Nessa estratégia, varia-se de forma simétrica o posicionamento do MFC ao longo de todo o

comprimento da placa, iniciando na extremidade engastada até a extremidade livre, conforme esquema apresentado na Figura B.7. O intervalo de variação para cada novo posicionamento do MFC é dado a partir do tamanho de cada elemento finito, conforme a malha utilizada, resultando assim, em um domínio discreto de possibilidades para a alocação.

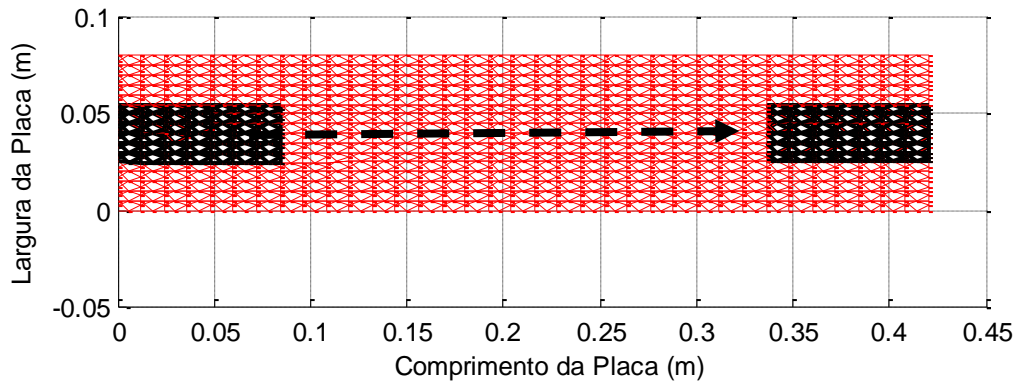


Figura B.7 – Esquema da variação do posicionamento do MFC ao longo da Placa.

A cada novo posicionamento, uma nova análise estrutural é efetuada, e consequentemente, um novo índice de controlabilidade é calculado. Dessa forma, é possível gerar uma relação entre a posição do MFC na estrutura e o índice relativo de controlabilidade. A Figura B.8 apresenta o índice de posicionamento ótimo para o primeiro modo flexional.

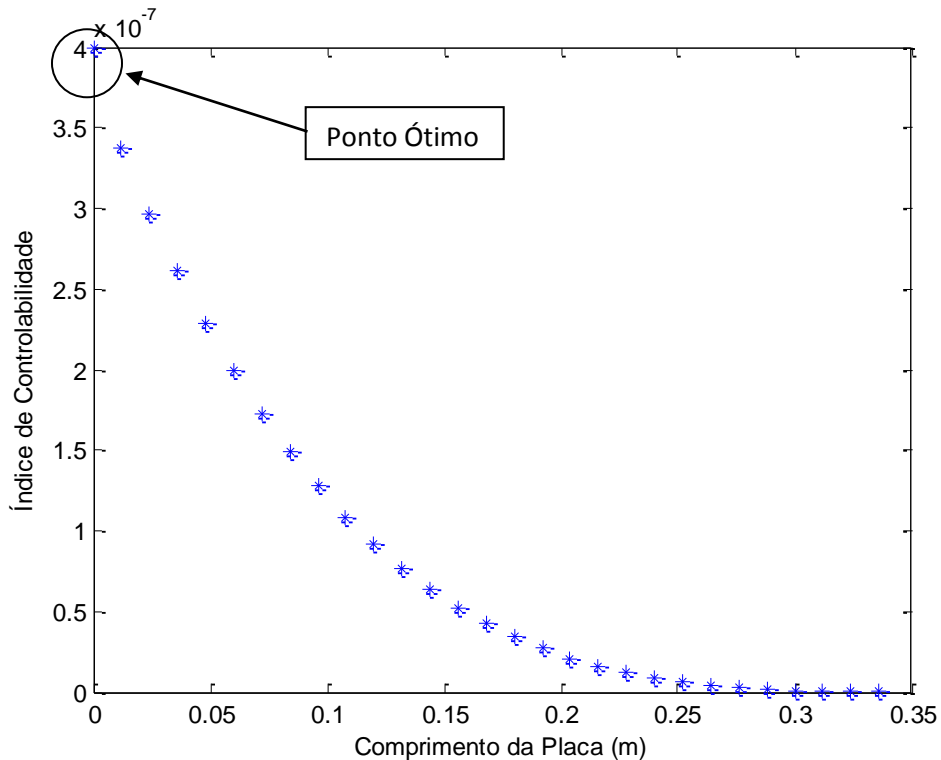


Figura B.8 – Índice de posicionamento ótimo para o primeiro modo.

Por fim, tem-se como posicionamento ótimo o local aonde se obtém o maior índice de controlabilidade. Assim, para o primeiro caso apresentado na Figura B.8, o posicionamento ótimo do MFC na placa se dá a partir da extremidade engastada da estrutura, e a posição ótima na malha de EF pode ser visualizado na Figura B.9.

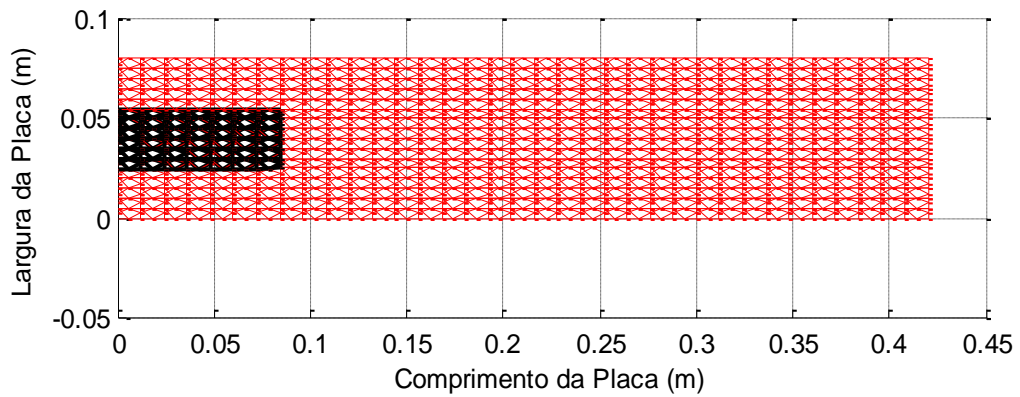


Figura B.9 – Posição Ótima do MFC para o primeiro modo flexional da placa.

O procedimento é repetido para o segundo e terceiro modos flexionais da placa. A Figura B.10 apresenta o índice de posicionamento ótimo para o segundo modo flexional.

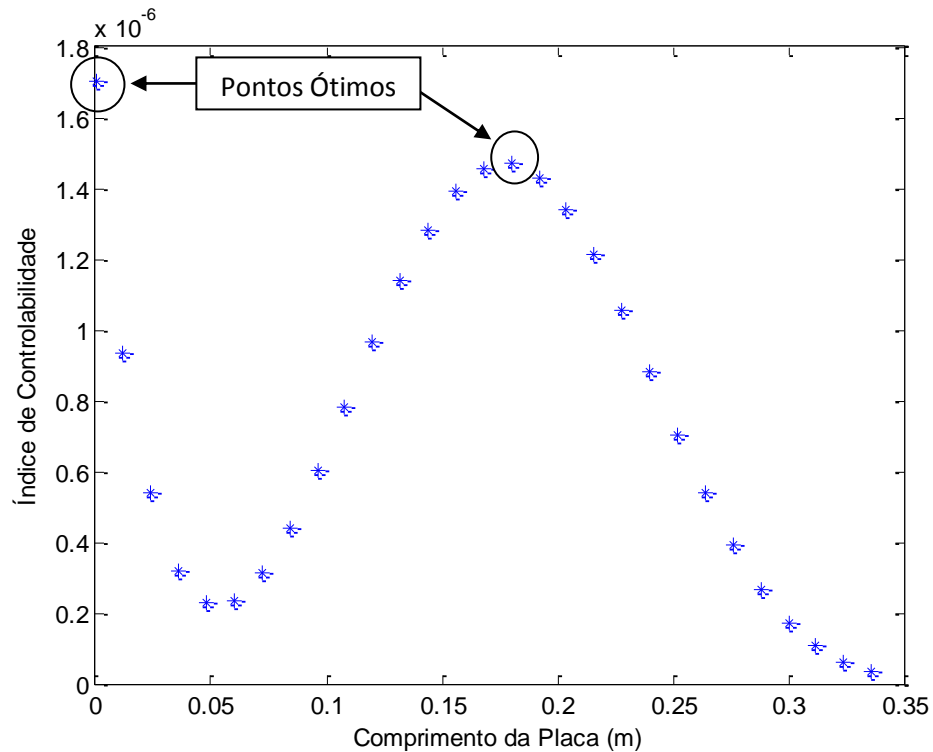


Figura B.10 – Índice de posicionamento ótimo para o segundo modo.

Para o segundo caso apresentado na Figura B.10, pode-se constatar duas regiões para alocação ótima do MFC na placa. O primeiro ponto está localizado novamente próximo ao engaste da estrutura, e o segundo ponto localiza-se entre a posição de 0.18 m e 0.264 m. As posições ótimas podem ser visualizadas na Figura B.11.

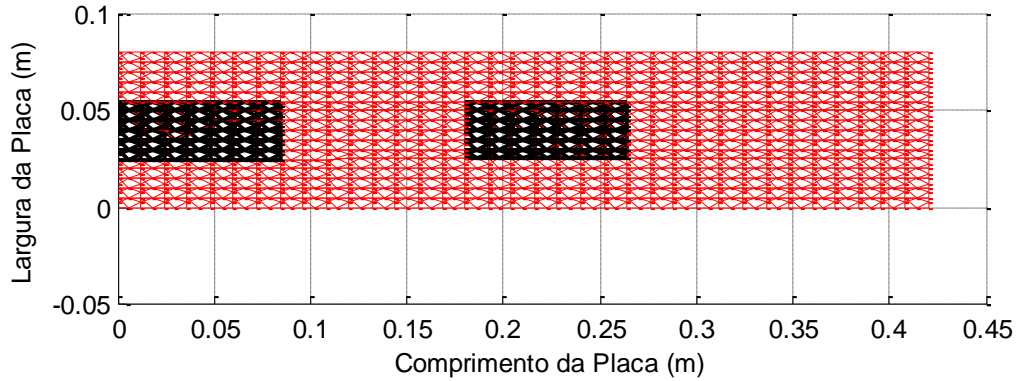


Figura B.11 – Posição Ótima do MFC para o segundo modo flexional da placa.

Por fim, a Figura B.12 apresenta o índice de posicionamento ótimo para o terceiro modo flexional.

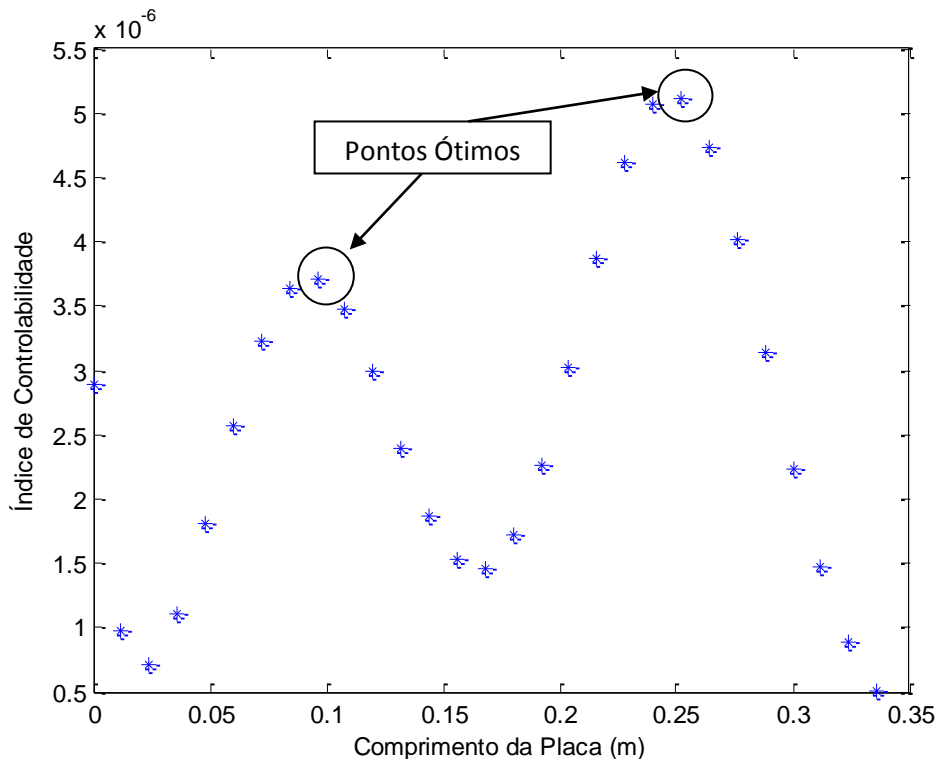


Figura B.12 – Índice de posicionamento ótimo para o terceiro modo.

Para o terceiro caso, apresentado na Figura B.12, pode-se constatar duas regiões para alocação ótima do MFC na placa. O primeiro ponto está localizado entre a posição de 0.096 m e 0.18 m, e o segundo ponto localiza-se entre a posição de 0.252 m e 0.336 m. As posições ótimas podem ser visualizadas na Figura B.13.

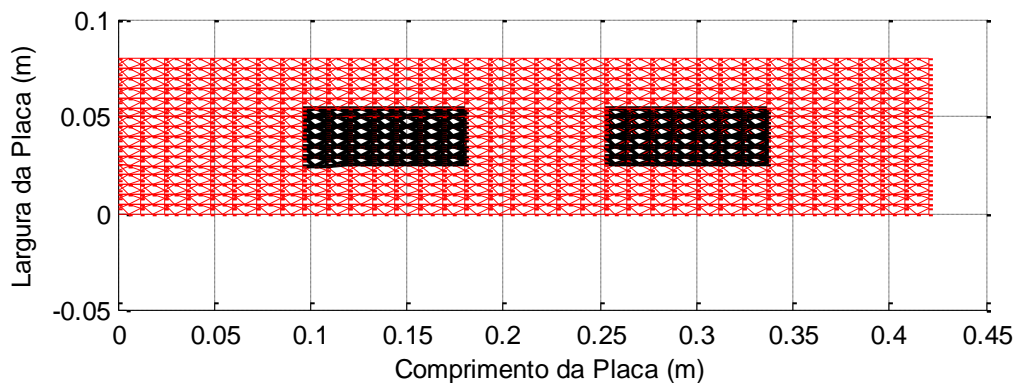


Figura B.13 – Posição Ótima do MFC para o terceiro modo flexional da placa.

APÊNDICE C

No estudo experimental desenvolvido nessa tese, utilizou-se uma placa de alumínio em balanço com as dimensões de 100 x 510 x 1 mm, controlada com um atuador MFC (modelo MFC 8528-P1). Para o controle usou-se uma estratégia baseada em um controle proporcional-derivativo (PD). O atuador MFC foi posicionado a 10 mm da ponta engastada e centralizado na estrutura, conforme Figura C.1. Para a fixação do atuador MFC na estrutura, foram seguidos todos os procedimentos e especificações indicados pelo fabricante [Smart Material, 2013].

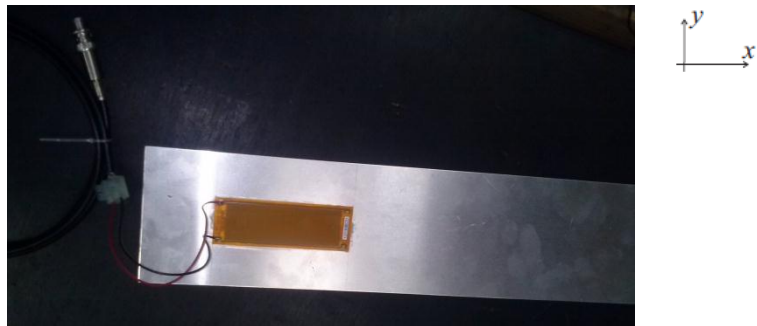


Figura C.1 – Placa de Alumínio e atuador MFC fixado na estrutura.

A Figura C.2 apresenta a configuração e a instrumentação utilizada no estudo experimental. A estrutura é excitada pelo atuador MFC, através de uma onda senoidal com frequência próxima a primeira frequência natural, durante 10 segundos. Após esse tempo, a excitação é interrompida e a partir desse momento o MFC passa a ser usado como atuador para reduzir a vibração estrutural.

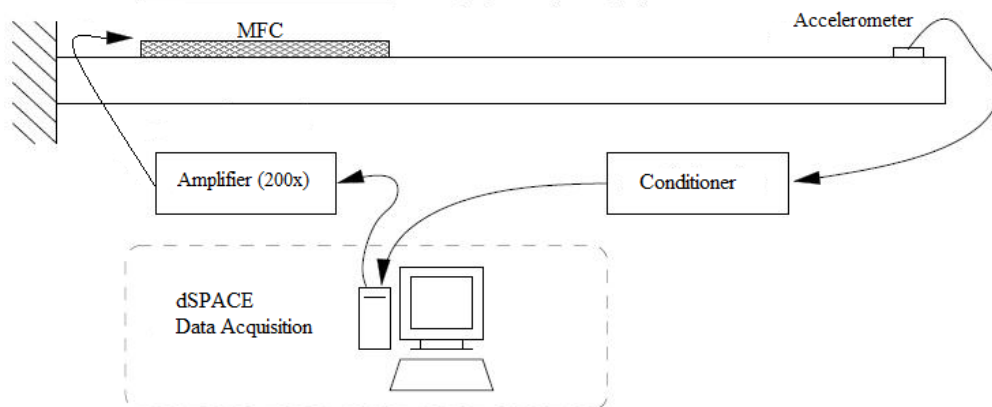


Figura C.2 – Configuração e instrumentação experimental.

Como já mencionado, o atuador MFC foi posicionado na estrutura a 10 mm da ponta engastada da estrutura e centralizado. Na ponta livre, um sensor do tipo acelerômetro (Fabricado por Brüel & Kjaer) foi posicionado para medir a aceleração nesse ponto da placa. Para amenizar o efeito da inércia do acelerômetro na estrutura, a placa foi posicionada na posição transversal, conforme Figura C.3. O acelerômetro é conectado a um conversor de sinal, onde o sinal de aceleração é convencionado para o tipo de sinal utilizado na placa de aquisição de dados dSPACE (modelo DS1103). Após a obtenção do sinal de aceleração da estrutura, a estratégia de controle PD modelada em diagrama de blocos (Figura C.4) e implementada no MATLAB/simulink, calcula o sinal de controle (tensão elétrica) que deve ser aplicado no atuador MFC para controlar a vibração estrutural. Antes de o atuador receber a tensão elétrica, o sinal de controle passa por um amplificador de tensão elétrica (modelo MFC 1500/50 de um canal) que amplifica o sinal em 200 vezes. Na estratégia de controle, um bloco de saturação foi adicionado para limitar o sinal de saída entre -2.5 e 7.5 V. Dessa forma, ao passar pelo amplificador, o sinal de controle permaneça na faixa de operação do atuador (entre -500 e 1500 v), evitando assim, a despolarização do material piezelétrico.

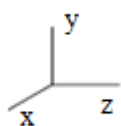


Figura C.3 – Posicionamento transversal da placa.

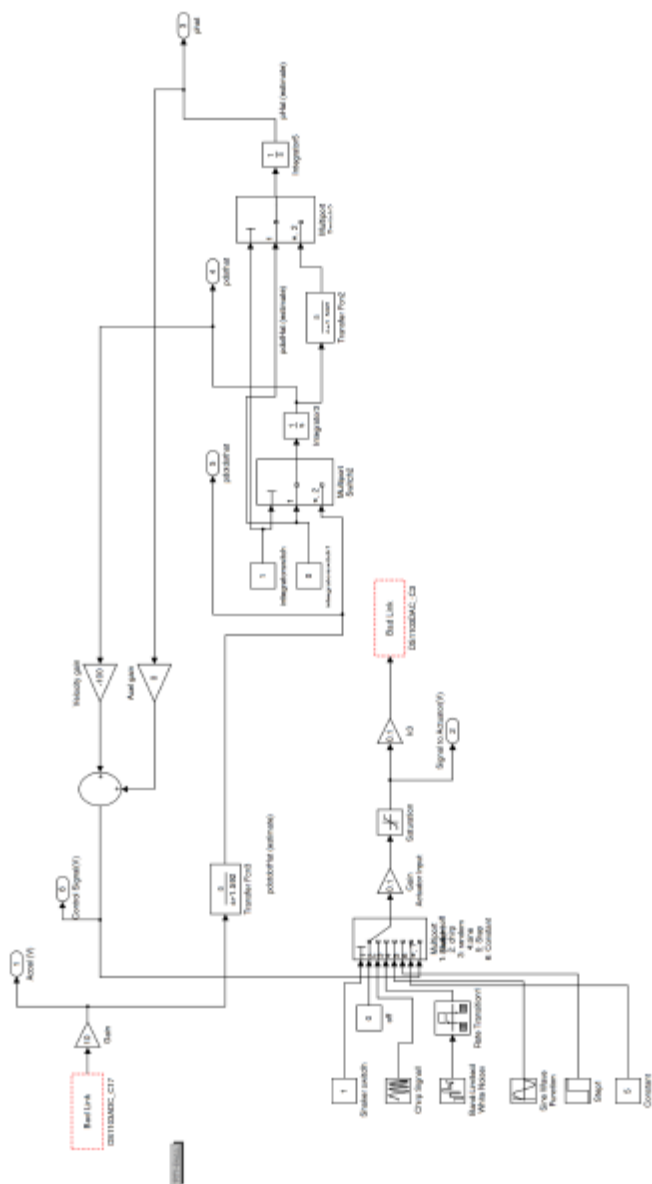


Figura C.4 – Diagrama de blocos da estratégia de controle, implementado no MATLAB/simulink.

No controle proporcional-derivativo (PD) o ganho proporcional (K_p) e o ganho derivativo (K_d) foram definidos, após alguns ensaios, como $K_p = -200$ e $K_d = -100$. Nas figuras seguintes, serão apresentados os resultados para a trajetória de posicionamento e para a velocidade, bem como o sinal de controle imposto no atuador MFC.

A Figura C.5 apresenta o comportamento do deslocamento transversal na ponta livre na placa, para o sistema em malha fechada e malha aberta.

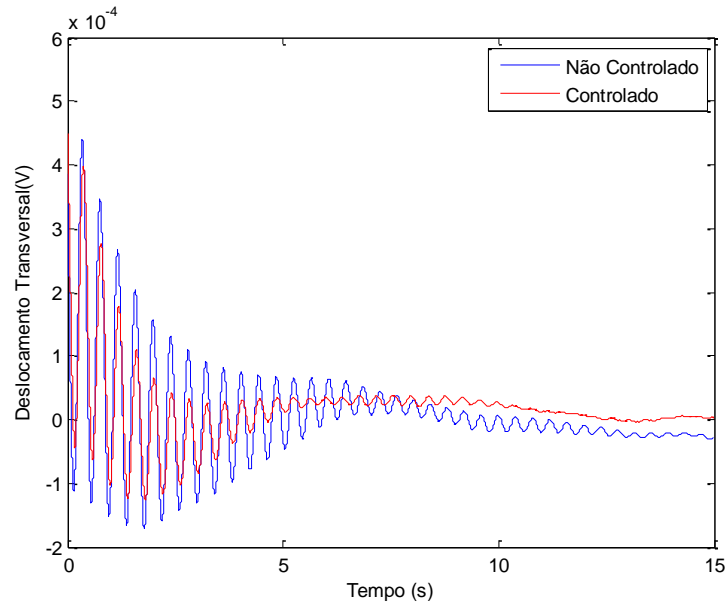


Figura C.5 – Deslocamento transversal na ponta livre da placa, para o sistema em malha aberta e fechada.

A aceleração é a única informação mensurada na estrutura através do sensor. Devido a isso, é necessário integrar o sinal de aceleração uma vez para se obter a velocidade e duas vezes para se obter a posição. Adicionalmente, um filtro do tipo passa alta é utilizado para atenuar a influência dos ruídos de entrada no sinal de controle.

A Figura C.6 apresenta o comportamento da velocidade na ponta livre na placa, para o sistema em malha fechada e malha aberta.

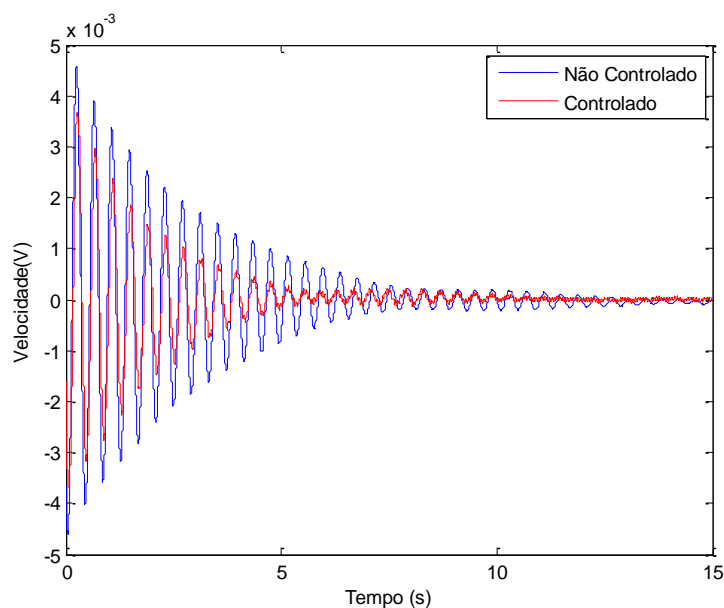


Figura C.6 - Velocidade na ponta livre da placa, para o sistema em malha aberta e fechada.

Nas Figuras C.5 e C.6, os resultados indicam que o sistema de controle em malha fechada contribui para diminuir a amplitude do deslocamento e da velocidade na ponta livre da placa. A sobre-elevação (*overshoot*) e o tempo de assentamento também são reduzidos significativamente.

A Figura C.7 apresenta o sinal de controle (em volts) enviado ao atuador MFC. Pode-se constatar que a tensão mínima aplicada foi de -110 volts e a tensão máxima foi de 69 volts. Sendo assim, o sinal de controle permaneceu dentro da faixa de operação do atuador (entre -500 e 1500 v), evitando a despolarização do material piezelétrico.

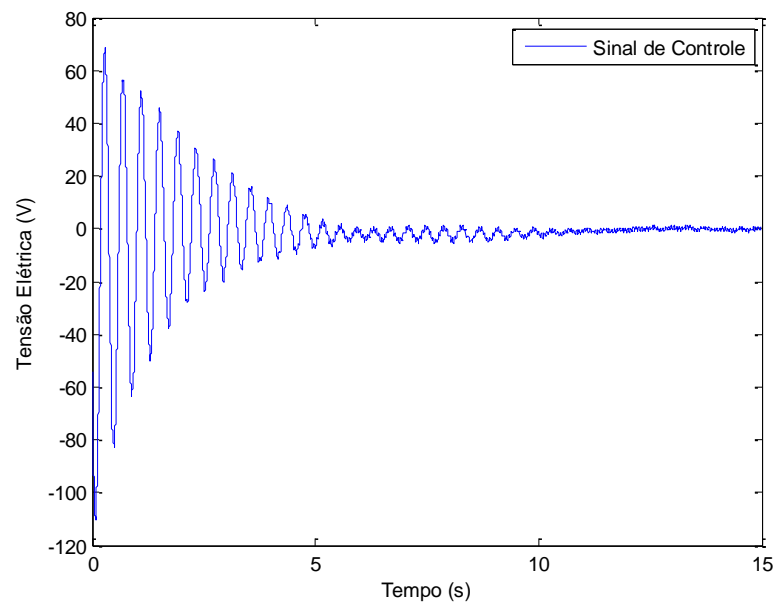


Figura C.7 – Sinal de controle no atuador MFC.

ANEXO I

As derivadas para as funções de forma do elemento quadrilátero linear isoparamétrico de oito nós (Equação 2.14) também serão usadas e podem ser descritas como:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{d\xi} &= -\frac{1}{4}(1-\eta)(-1-\xi-\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 \frac{dN_2}{d\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)(-1+\xi-\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 \frac{dN_3}{d\xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta)(-1+\xi+\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 \frac{dN_4}{d\xi} &= -\frac{1}{4}(1+\eta)(-1-\xi+\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
 \frac{dN_5}{d\xi} &= -\xi(1-\eta) \\
 \frac{dN_6}{d\xi} &= \frac{1}{2}(1-\eta^2) \\
 \frac{dN_7}{d\xi} &= -\xi(1+\eta) \\
 \frac{dN_8}{d\xi} &= \frac{1}{2}(-1+\eta^2)
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{d\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(-1-\xi-\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 \frac{dN_2}{d\eta} &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(-1+\xi-\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 \frac{dN_3}{d\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(-1+\xi+\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 \frac{dN_4}{d\eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(-1-\xi+\eta) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
 \frac{dN_5}{d\eta} &= \frac{1}{2}(-1+\xi^2) \\
 \frac{dN_6}{d\eta} &= -\eta(1+\xi) \\
 \frac{dN_7}{d\eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi^2) \\
 \frac{dN_8}{d\eta} &= -\eta(1+\xi)
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

ANEXO II

Foi mostrado no Capítulo 2 que a matriz de rigidez elementar é escrita da seguinte forma

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{F}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^T \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2^T \mathbf{C}_3 \mathbf{F}_2] |J| d\eta d\xi, \quad (\text{II.1})$$

onde \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são formas de escrever a matriz de transformação original de coordenadas \mathbf{F} independente da espessura, de forma que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + z\mathbf{F}_2, \quad (\text{II.2})$$

retorne à forma original.

Este modo de representar a matriz de transformação de coordenadas foi proposto por Kumar [Kumar e Palaninathan, 1997], e as matrizes \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 podem ser escritas como

$$\mathbf{F}_{1i} = \begin{bmatrix} f_4 & 0 & 0 & f_1 v_{1i1} & -f_1 v_{2i1} \\ 0 & f_5 & 0 & f_2 v_{1i2} & -f_2 v_{2i2} \\ 0 & 0 & f_6 & f_3 v_{1i3} & -f_3 v_{2i3} \\ f_6 & 0 & f_4 & f_1 v_{1i3} + f_3 v_{1i1} & -f_1 v_{2i3} - f_3 v_{2i1} \\ 0 & f_6 & f_5 & f_2 v_{1i3} + f_3 v_{1i2} & -f_2 v_{2i3} - f_3 v_{2i2} \\ f_5 & f_4 & 0 & f_1 v_{1i2} + f_2 v_{1i1} & -f_1 v_{2i2} - f_2 v_{2i1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

$$\mathbf{F}_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1i1} & -f_4 v_{2i1} \\ 0 & 0 & 0 & f_5 v_{1i2} & -f_5 v_{2i2} \\ 0 & 0 & 0 & f_6 v_{1i3} & -f_6 v_{2i3} \\ 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1i3} + f_6 v_{1i1} & -f_4 v_{2i3} - f_6 v_{2i1} \\ 0 & 0 & 0 & f_5 v_{1i3} + f_6 v_{1i2} & -f_5 v_{2i3} - f_6 v_{2i2} \\ 0 & 0 & 0 & f_4 v_{1i2} + f_5 v_{1i1} & -f_4 v_{2i2} - f_5 v_{2i1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

onde o subíndice i indica que deve-se calcular a matriz para cada um dos nós do elemento, os valores de f são descritos por:

$$\begin{aligned}
f_1 &= J_{13}^{-1} N_i \frac{t}{2}, \\
f_2 &= J_{23}^{-1} N_i \frac{t}{2}, \\
f_3 &= J_{33}^{-1} N_i \frac{t}{2}, \\
f_4 &= \left(J_{11}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{12}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \\
f_5 &= \left(J_{21}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{22}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \\
f_6 &= \left(J_{31}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{32}^{-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right),
\end{aligned} \tag{II.5}$$

onde J são os elementos da matriz Jacobina.

Levando-se em conta a Equação 2.19, podem-se escrever os termos da matriz Jacobiana como

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left\{ u_i + \frac{\zeta t_i}{2} (v_{11i} \alpha_{2i} - v_{21i} \alpha_{1i}) \right\} \\
J_{12} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left\{ u_i + \frac{\zeta t_i}{2} (v_{11i} \alpha_{2i} - v_{21i} \alpha_{1i}) \right\} \\
J_{13} &= N_i \frac{t_i}{2} (v_{11i} \alpha_{2i} - v_{21i} \alpha_{1i}) \\
J_{21} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left\{ v_i + \frac{\zeta t_i}{2} (v_{12i} \alpha_{2i} - v_{22i} \alpha_{1i}) \right\} \\
J_{22} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left\{ v_i + \frac{\zeta t_i}{2} (v_{12i} \alpha_{2i} - v_{22i} \alpha_{1i}) \right\} \\
J_{23} &= N_i \frac{t_i}{2} (v_{12i} \alpha_{2i} - v_{22i} \alpha_{1i}) \\
J_{31} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \left\{ w_i + \frac{\zeta t_i}{2} (v_{13i} \alpha_{2i} - v_{23i} \alpha_{1i}) \right\} \\
J_{32} &= \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \left\{ w_i + \frac{\zeta t_i}{2} (v_{13i} \alpha_{2i} - v_{23i} \alpha_{1i}) \right\} \\
J_{33} &= N_i \frac{t_i}{2} (v_{13i} \alpha_{2i} - v_{23i} \alpha_{1i})
\end{aligned} \tag{II.6}$$

ANEXO III

Na Tabela III.3 são apresentadas as propriedades do MFC e do material composto utilizadas no trabalho de Dano et al. 2007.

Tabela III.3 – Propriedades do material composto e do MFC

MATERIAL COMPOSTO	MFC
$E_1 = 101.6 \text{ GPa}$	$E_1 = 30.3 \text{ GPa}$
$E_2 = 7.91 \text{ GPa}$	$E_2 = 15.9 \text{ GPa}$
$E_3 = 7.91 \text{ GPa}$	$E_3 = 11.47 \text{ GPa}$
$G_{12} = 3.01 \text{ GPa}$	$G_{12} = 5.50 \text{ GPa}$
$G_{13} = 3.01 \text{ GPa}$	$G_{13} = 2.60 \text{ GPa}$
$G_{23} = 2.71 \text{ GPa}$	$G_{23} = 2.14 \text{ GPa}$
$\nu_{12} = 0.318$	$\nu_{12} = 0.310$
$\nu_{13} = 0.318$	$\nu_{13} = 0.289$
$\nu_{23} = 0.458$	$\nu_{23} = 0.327$
$\gamma = 1793 \text{ kg/m}^3$	$\gamma = 5440 \text{ kg/m}^3$
	$w_h = 0.5 \text{ mm}, d_{33} = 3.6\text{E}+02 \text{ pm/V}$

Fonte: [Smart Material, 2013]

Fonte: [Dano et al., 2007]