

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Capacidade de carga de fundações sobre solos
reforçados por colunas submetidas a solicitações
inclinadas**

María Alicia Arévalos Burró

Porto Alegre

Março 2015

María Alicia Arévalos Burró

**CAPACIDADE DE CARGA DE FUNDAÇÕES
SOBRE SOLOS REFORÇADOS POR COLUNAS
SUBMETIDAS A SOLICITAÇÕES INCLINADAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia na modalidade Acadêmica

Porto Alegre

Março 2015

CIP - Catalogação na Publicação

Burro, Maria Alicia Arevalos

Capacidade de carga de fundações sobre solos reforçados por colunas submetidas a solicitações inclinadas / Maria Alicia Arevalos Burro. -- 2015. 157 f.

Orientador: Samir Maghous.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2015.

1. reforço por colunas. 2. fundações. 3. capacidade de carga. 4. solicitações inclinadas. 5. análise limite. I. Maghous, Samir, orient. II. Título.

MARÍA ALICIA ARÉVALOS BURRÓ

**Capacidade de carga de fundações sobre solos
reforçados por colunas submetidas a solicitações
inclinadas**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 27 de Março 2015

Prof. Dr. Samir Maghous

Dr. pela Ecole Nationale Des Ponts Et Chaussées
Orientador

Prof. Dr. Armando M. Awruch

Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Fernando Schnaid(UFRGS)

Dr. pela University of Oxford

Prof. Eduardo Bittencourt(UFRGS)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Mauro de Vasconcellos Real(FURG)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

A meus pais.

“There is a tide in the affairs of men, which taken at the flood, leads on to fortune. Omitted, all the voyage of their life is bound in shallows and in miseries. On such a full sea are we now afloat. And we must take the current when it serves, or lose our ventures.”

William Shakespeare

AGRADECIMENTOS

Nesta etapa final do trabalho, me sinto sustentada pelas pessoas que me apoiaram e caminharam comigo nestes últimos anos. Agradeço-lhes por fazer desta estrada uma lembrança de vida, uma experiência incrível que ficará comigo.

Ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela possibilidade de realizar este estudo, pelos ensinamentos transmitidos, que se tornaram uma ferramenta no meu desenvolvimento profissional.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro concedido durante este trajeto.

Ao professor Samir Maghous, pela dedicação e orientação, pela confiança depositada e especialmente pela amizade.

À professora Vanessa Pasa, pela ternura e apoio, conselhos, ajuda e amizade.

Aos colegas e amigos, pela risas, trocas de experiências e companheirismo.

Aos colegas do CEMACOM, pela maravilhosa convivência.

Ao meu amor, simplesmente por todo, porque não posso expressar em palavras as razões pelas quais estou agradecida.

Aos meus pais, exemplos de vida para mim, e em quem quero me espelhar.

À Deus, porque sempre encontra uma maneira de me surpreender.

RESUMO

ARÉVALOS BURRÓ, M.A. **Capacidade de carga de fundações sobre solos reforçados por colunas submetidas a solicitações inclinadas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O dimensionamento de fundações apoiadas sobre solos reforçados por colunas representa um desafio devido à natureza composta do mesmo e à grande quantidade de inclusões envolvidas no processo de reforço. Do ponto de vista do cálculo da capacidade de carga, as metodologias de dimensionamento propostas na literatura tratam ou de cálculos empíricos, ou de cálculos analíticos para carregamentos puramente verticais, ou utilizam o método de elementos finitos através de análises elasto-plásticas incrementais. No presente trabalho estuda-se, através da análise limite, a capacidade de carga de fundações superficiais apoiadas sobre solos argilosos reforçados por colunas submetidas a cargas inclinadas. Assim, este trabalho constitui uma primeira referência em analisar o efeito do reforço no diagrama de interação que relaciona às componentes da carga. Inicialmente, realizou-se uma análise em estado plano de deformação para um solo reforçado por uma coluna isolada. Foram construídos campos de tensões lineares por trecho, estaticamente admissíveis e que satisfazem o critério de resistência, determinando limites inferiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem estática da análise limite. Na sequência, através da utilização de mecanismos de ruptura cinematicamente admissíveis, foram encontrados limites superiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem cinemática da análise limite. A construção de ábacos permitiu realizar um estudo paramétrico da melhora da capacidade de carga em função dos parâmetros adimensionais, definidos pela geometria e propriedades de resistência. Finalmente, realizou-se uma generalização à situação de um solo reforçado por um grupo de colunas, em estado plano de deformação, mediante a aplicação da abordagem estática e cinemática da análise limite e posterior estudo paramétrico. Os resultados mostraram que, a medida que aumenta a componente horizontal da força, a componente vertical de ruptura diminui. Este fato constitui um risco na edificação de estruturas submetidas a carregamentos inclinados. Os parâmetros adimensionais que controlam a capacidade de carga são: o ângulo de atrito interno do material de reforço e a relação entre o intercepto coesivo do reforço e do solo. Foi encontrado que, para fins práticos, a carga limite é independente da quantidade de colunas, sempre que o volume de reforço seja mantido.

Palavras-chaves: Reforço por colunas, fundações, capacidade de carga, solicitações inclinadas, análise limite.

ABSTRACT

ARÉVALOS BURRÓ, M.A. **Bearing capacity of a column-reinforced soil foundation under inclined loading.** 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

From a practical engineering viewpoint, design of column-reinforced foundations turns to be a challenging task owing to the strong heterogeneity of the geo-composite resulting from the association of native soft soil and the reinforcing soil columns. The design procedures conceived to estimate bearing capacity improvement from this reinforcement technique have mainly dealt with foundations under vertical loading. The purpose of the present work is to investigate the ultimate bearing capacity problem of column-reinforced foundations under inclined loading, within the framework of limit analysis theory. Special emphasis is given to the effect of reinforcement on the interaction diagram relating the foundation load components. Starting from the situation of an isolated column, a lower bound solution for the bearing capacity is derived, in plain strain analysis, by considering statically admissible piecewise linear stress fields that comply with the failure condition everywhere in the foundation soil. On the other hand, the kinematic approach of limit analysis makes it possible, through the implementation of failure mechanisms on the column-reinforced structure, to derive upper bound estimates of the bearing capacity for each value of the inclination angle of applied load. The semi-analytical expressions of both lower and upper bound estimates allow for a parametric study on the improvement of the bearing capacity as a function of dimensionless parameters, which are defined from geometrical and strength properties. In this context, design charts are presented to provide an insight into the reinforcement mechanism. Finally, the generalization of the approaches to the situation of a soil reinforced by a group of columns is presented, considering plain strain analysis. As soon as the horizontal component of the force increases, the vertical component of the bearing capacity decreases. This fact constitutes a risk for structures submitted to inclined loading. The dimensionless parameters that control the bearing capacity are: the reinforcement material friction angle and the relation between the cohesion intercept of the reinforcement and the soil. For practical purposes, the bearing capacity doesn't depend on the column number, but on the reinforcement volume.

Key-words: Yield design theory, stone column, bearing capacity, static approach, kinematic approach, associated flow rule.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Método de Execução das colunas de brita, processo de vibrocompactação. Adaptação do processo da vibrocompactação, adaptado de Baumann e Bauer (1974 apud Bell, 1993) e do catálogo de processos de vibração profunda Keller (2002)	36
Figura 2.2 – Aplicabilidade dos métodos de compactação profunda segundo Mitchell e Villet (1987 apud BELL, 1993)	37
Figura 2.3 – Equipamento para a construção de colunas de reforço coesivas (Kempfert e Gebreselassie, 2006)	37
Figura 2.4 – Hipóteses de a) Axissimetria, b) Trincheira em estado plano de deformações (Bouassida, 1996)	39
Figura 2.5 – Parâmetros das abordagens de dimensionamento de reforço de solos . .	40
Figura 2.6 – Abordagem de Bell (1915)	40
Figura 2.7 – Campos de tensões constantes por zona	41
Figura 2.8 – Mecanismos de ruptura	42
Figura 2.9 – Abordagem de Brauns (1978)	43
Figura 2.10–Mecanismo de ruptura por cisalhamento generalizado (Madhav e Vitkar, 1978).	45
Figura 2.11–Mecanismos propostos por Bouassida e Hadhri (1995)	46
Figura 2.12–Mecanismo de ruptura para reforço de solos por um grupo de colunas (Bouassida e Hadhri, 1995)	46
Figura 2.13–Mecanismo de ruptura em forma de bloco para o caso de colunas flutuantes (Broms,1982)	47
Figura 2.14–Mecanismo de ruptura por cisalhamento local para colunas apoiadas num substrato rígido Broms(1982)	48
Figura 2.15–Mecanismo de cunha para uma fundação Bouassida (1996)	48
Figura 2.16–Fundação apoiada sobre um solo reforçado por trincheiras	49
Figura 2.17–Mecanismo da abordagem cinemática considerada por Bouassida e Porbaha (2004)	49
Figura 2.18–Campos de tensões da abordagem estática considerada por Bouassida et al. (2009)	50
Figura 2.19–Mecanismo da abordagem cinemática considerada por Bouassida et al. (2009)	51
Figura 3.1 – Representação esquemática do raciocínio de Galileu Galilei. Adaptado de Salençon (2002)	53
Figura 3.2 – (a) Ruptura em flexão de um modelo reduzido de laje armada (Milicevic, Faulté polytechnique de Mons) (b) Puncionamento de um material friccional bidimensional (Salençon, 2002)	54

Figura 3.3 – Sistema a analisar	55
Figura 3.4 – Domínio de carregamento admissível para um modo de carregamento de dois parâmetros (Q_i e Q_j). Adaptação de Salençon (1983)	57
Figura 3.5 – Propriedade da convexidade de K	57
Figura 3.6 – Independência do trajeto de carga. Adaptação de Salençon (1983)	58
Figura 3.7 – Abordagem estática	59
Figura 3.8 – Aproximação cinemática de K pelo exterior para um modo de carregamento de 2 parâmetros (Q_i e Q_j)	63
Figura 3.9 – Aproximação cinemática de K numa direção. Adaptação de Salençon (1983)	63
Figura 3.10–Espaço de tensões principais	65
Figura 3.11–Ponto P no espaço de tensões principais	65
Figura 3.12–Ponto P no plano desviador	65
Figura 3.13–Representação de um estado de tensões através dos círculos de Mohr e critério de resistência de Coulomb	66
Figura 3.14–Superfície de ruptura de Coulomb no espaço de tensões principais Salençon (2002)	67
Figura 3.15–Superfície de ruptura de Coulomb a) no plano meridiano b) no plano desviador c) no plano $\sigma_1 - \sigma_2$	67
Figura 3.16–Rotação do corpo rígido A em relação ao corpo B (Chen, 1975)	68
Figura 3.17–Superfície de resistência de Tresca no espaço de tensões principais (Salençon,2002)	69
Figura 3.18–Superfície de resistência de Tresca a) no plano meridiano b) no plano desviador c)no plano $\sigma_1 - \sigma_2$	70
Figura 4.1 – Procedimento para o cálculo da fronteira do domínio de carregamentos admissíveis	71
Figura 4.2 – Modelo empregado na análise	72
Figura 4.3 – Movimento do corpo rígido de velocidade virtual U_0 do carregamento externo	73
Figura 4.4 – a) Campos de tensões homogêneas por parte composto por seis zonas em equilíbrio com uma carga puramente tangencial. b) Rotação de eixos para expressar o campo de tensões em termos de tensões principais	74
Figura 4.5 – Zonas do campo de tensões homogêneo por partes considerado	75
Figura 4.6 – Círculos de Mohr que representam os estados de tensões das zonas 1, 2 e 1'	76
Figura 4.7 – (a) Cargas admissíveis obtidas pelas abordagens estáticas empregadas. (b) Aproximação pelo interior	77
Figura 4.8 – Campo de velocidades do Mecanismo I	78

Figura 4.9 – (a) Cargas admissíveis obtidas pelas abordagens estáticas empregadas.	
(b) Aproximação pelo interior	79
Figura 4.10–(a) Mecanismo I, (b) Superfície de ruptura proposta por Rankine (1853)	79
Figura 4.11–(a) Cargas admissíveis obtidas pelas abordagens estáticas empregadas.	
(b) Aproximação pelo interior	81
Figura 4.12–Capacidade de carga para carregamento centrado inclinado. Aproximação	
pelo exterior	81
Figura 4.13–Limites da fronteira ∂K de cargas admissíveis	82
Figura 5.1 – Definição da geometria e do sistema de referência	86
Figura 5.2 – Direções das tensões principais de cada zona do solo	87
Figura 5.3 – Estado de tensões dividido em 6 partes do solo e da coluna de brita	90
Figura 5.4 – Campo de velocidades virtuais considerado (Mecanismo I)	93
Figura 5.5 – Hodógrafo do Mecanismo I	93
Figura 5.6 – Aproximação cinemática de K para um dado α	95
Figura 5.7 – Abordagem cinemática para os parâmetros adimensionais $\eta = 0.1$, $\varphi = 30$, $\xi = 1.666$, $k = 1.4$ e $m = 0.5$ a) Conjunto de retas D_α b) envoltória convexa das retas D_α	95
Figura 5.8 – Campo de velocidades do Mecanismo II	96
Figura 5.9 – Campo de velocidades do Mecanismo III	98
Figura 5.10–Parâmetros R , θ' e θ''	99
Figura 5.11–Zonas de integração da potência de forças externas	99
Figura 5.12–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$	102
Figura 5.13–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	103
Figura 5.14–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$	103
Figura 5.15–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	104
Figura 5.16–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$	105
Figura 5.17–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	105
Figura 5.18–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$	106
Figura 5.19–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	106
Figura 5.20–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga	107
Figura 5.21–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga	108
Figura 5.22–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga	108
Figura 5.23–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga	109
Figura 5.24–Mecanismos I, II e III para $\eta = 0.1$, $\xi = 1$ e $\xi = 0.5$	110
Figura 5.25–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	110

Figura 5.26–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$	111
Figura 5.27–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	111
Figura 5.28–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$	112
Figura 5.29–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	113
Figura 5.30–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$	113
Figura 5.31–Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$	114
Figura 5.32–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga	114
Figura 5.33–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga	115
Figura 5.34–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga	115
Figura 5.35–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga	116
Figura 5.36–Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga	116
Figura 6.1 – Definição da geometria e do sistema de referência	120
Figura 6.2 – Definição dos parâmetros a' e l'	120
Figura 6.3 – Estado de tensões lineares por zona	121
Figura 6.4 – Campo de velocidades virtuais do Mecanismo I	122
Figura 6.5 – Campo de velocidades virtuais do Mecanismo II	124
Figura 6.6 – Campo de velocidades virtuais do Mecanismo III	125
Figura 6.7 – Definição dos parâmetros $\theta_A^{(i)}$, $\theta_B^{(i)}$, $\theta_C^{(i)}$, $\theta_D^{(i)}$, $\theta_E^{(i)}$ e R'_i	126
Figura 6.8 – Mecanismos de velocidades virtuais para $m = 1$, $k = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.30$, $n = 3$ e $\xi = 0.5$ quando a carga é vertical	127
Figura 6.9 – Limites superior e inferior da capacidade de carga	128
Figura 6.10–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $k = 1.5$ para carregamento puramente vertical	129
Figura 6.11–Limite superior e inferior da capacidade de carga	129
Figura 6.12–Mecanismos de velocidades virtuais para $\xi = 1$, $k = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $\varphi = 40^\circ$	130
Figura 6.13–Limite superior e inferior da capacidade de carga	130
Figura 6.14–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.6$ e $n = 1$ e para carregamento puramente vertical	131
Figura 6.15–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.3$ e $n = 2$ para carregamento puramente vertical	131
Figura 6.16–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.2$ e $n = 3$ para carregamento puramente vertical	131
Figura 6.17–Campo de velocidades virtuais do Mecanismo III	132

Figura 6.18–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30$, $k = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.20$, $n = 3$ e $\xi = 0.5$ quando a carga é vertical	132
Figura 6.19–Limites superior e inferior da capacidade de carga	133
Figura 6.20–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $k = 1.5$ para carregamento puramente vertical	134
Figura 6.21–Limite superior e inferior da capacidade de carga	134
Figura 6.22–Mecanismos de velocidades virtuais para $\xi = 1$, $k = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $\varphi = 35^\circ$	135
Figura 6.23–Limite superior e inferior da capacidade de carga	135
Figura 6.24–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.6$ e $n = 1$ e para carregamento puramente vertical	136
Figura 6.25–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.3$ e $n = 2$ para carregamento puramente vertical	136
Figura 6.26–Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.2$ e $n = 3$ para carregamento puramente vertical	136
Figura 6.27–Limites superior e inferior da capacidade de carga	137
Figura A.1 –Campo de velocidades virtuais considerado (Mecanismo I)	147
Figura A.2–Hodógrafo do Mecanismo I	147
Figura A.3–Blocos considerados para o cálculo da potência externa	149
Figura A.4–Aproximação cinemática de K para um dado α	150
Figura B.1 –Campo de velocidades do Mecanismo II	151
Figura B.2–Comprimentos	152
Figura C.1 –Campo de velocidades do Mecanismo III	157
Figura C.2–Parâmetros relacionados com o mecanismo	158

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Classificação dos métodos de dimensionamento de fundações sobre solos reforçados por colunas. Adaptação de Bouassida (1996)	38
Tabela 5.1 – Comparação de y_0 com h	91
Tabela 5.2 – Parâmetros utilizados na análise de resultados	101
Tabela A.1 – Potência resistente máxima para as descontinuidades de velocidade da abordagem	148
Tabela B.1 – Potência resistente máxima para as descontinuidades de velocidade da abordagem	153

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

C.A	cinematicamente admissível
C.à R.	cálculo à ruptura
C.I.	coluna isolada
D.C.M.	deep cement mixing
D.J.M	deep jet mixing
D.L.M.	deep lime mixing
E.A.	estaticamente admissível
E.P.D.	estado plano de deformações
E.L.U.	estado limite último
G.C.	grupo de colunas

LISTA DE SÍMBOLOS

a	escalar
\underline{a}	vetor
$\underline{\underline{a}}$	tensor de segunda ordem
 <i>Letras maiúsculas do alfabeto latino</i>	
B	largura da fundação
B_1	largura da coluna
C_r	coesão do material constitutivo das colunas
C_s	coesão do material constitutivo do solo
C	coesão do material constitutivo
$C(\alpha)$	coesão anisotropa para a abordagem de de Buhan (1984)
D	profundidade de apoio da fundação superficial para a abordagem de Madhav e Vitkar (1978)
\underline{F}	força aplicada à fundação
G	domínio de tensões admissíveis no espaço de tensões \mathfrak{R}^6
H	força horizontal aplicada à fundação
K	conjunto de cargas suportáveis
K_c	aproximação cinemática à fronteira ∂K
K_a	coeficiente de empuxo ativo do material constitutivo
K_p	coeficiente de empuxo passivo do material constitutivo da coluna
K_s	aproximação estática à fronteira ∂K
K_0	coeficiente de pressão lateral do solo para a abordagem de Madhav e Vitkar (1978)
L_{min}	comprimento mínimo da coluna para a abordagem de Brauns (1978)
L_{max}	comprimento máximo da coluna, além do qual o tratamento é desnecessário, para a abordagem de Brauns (1978)

N_c, N_γ, N_q	fatores adimensionais que dependem das características mecânicas do solo e do material constitutivo da coluna para a abordagem de Madhav e Vitkar (1978)
P_{ex}	potência das forças externas
P_{int}	potência das forças internas
P_{def}	potência de deformação
P_{rm}	potência resistente máxima
\underline{P}_1	força limite inferior da carga limite para o estado de tensões I
\underline{P}_2	força limite inferior da carga limite para o estado de tensões II
\underline{P}_3	força limite inferior da carga limite para o estado de tensões III
\underline{P}_4	força limite superior da carga limite para o mecanismo I
\underline{P}_5	força limite superior da carga limite para o mecanismo II
\underline{Q}	vetor de carga
\underline{Q}^*	cargas limite do conjunto de carregamentos suportáveis
R	raio do arco de circunferência do mecanismo III
R_i	raio do arco de circunferência do mecanismo III para a coluna i
S	distância entre colunas medidas de centro a centro
\underline{U}	velocidade virtual
$[\underline{U}(\underline{x})]$	descontinuidade de velocidade
V	força vertical aplicada à fundação
V_n	força vertical limite para reforço de solos por n colunas (Abordagem de Bouassida e Hadhri (1995))
V_s	resistência à compressão (não confinada) da coluna tratada com cal para a abordagem de Broms (1982)
\underline{W}	velocidade virtual

Letras minúsculas do alfabeto latino

a relação $\frac{a'}{B}$

a'	distância entre a borda da coluna mais externa e a borda da fundação
\underline{d}	campo de taxas de deformações virtuais associadas ao campo de velocidades virtuais \underline{U}
(d_1, d_2, d_3)	deformações principais
h	altura das colunas de reforço
k	relação $\frac{\gamma_r}{\gamma_s}$ entre os pesos específicos do material da coluna e do solo
l	relação $\frac{l'}{B}$
l'	separação interna de colunas (borda interna a borda interna)
m	relação $\frac{C_r}{C_s}$ entre a coesão do material de reforço e o material do solo
n	quantidade de parâmetros do vetor de carga no Capítulo 3. Quantidade de colunas no Capítulo 6
\underline{n}	versor normal à superfície de descontinuidade de velocidade
p	carga uniformemente distribuída na superfície do solo
p_1	tensão de ruptura das colunas para a abordagem de Broms (1982)
p_2	capacidade da carga limite do solo mole não reforçado para a abordagem de Broms (1982)
$\underline{\dot{q}}$	vetor cinemático associado com \underline{Q} ao expressar a potência das forças externas num campo de velocidades \underline{U} C.A.
s	relação $\frac{S}{B}$
\underline{x}	vetor das coordenadas dos pontos do volume

Alfabeto Grego

α	parâmetro angular das abordagens estática ou cinemática
β	parâmetro angular das abordagens estática ou cinemática
γ_r	peso específico da coluna
γ_s	peso específico do solo
δ	ângulo de inclinação da carga em relação à horizontal no Capítulo 3. Ângulo de inclinação da carga em relação à vertical nos Capítulos 4-6.

$\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_E$	parâmetros angulares da abordagem cinemática
θ_i, θ_j	parâmetros angulares da abordagem cinemática
θ_1, θ_2	parâmetros angulares da abordagem cinemática
θ', θ''	parâmetros angulares da abordagem cinemática
η	relação B_1/B entre o diâmetro da coluna y espessura da fundação
ξ	relação $\frac{\gamma_s B}{C_s}$
π	funções de apoio
$\underline{\underline{\sigma}}$	estado de tensões
Σ	superfície onde ocorre a descontinuidade de velocidade
σ_M	tensão principal máxima
σ_m	tensão principal mínima
σ_0	resistência em tração-compressão
σ'_{r0}	tensão lateral inicial exercida na altura da coluna
$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	tensões principais
τ	tensão de cisalhamento
φ	ângulo de atrito do material constitutivo das colunas
φ_s	ângulo de atrito do material constitutivo do solo
Ω	volume do sólido contínuo tridimensional
ω	velocidade angular virtual

Símbolos Especiais

$\partial\Omega$	contorno do volume do sólido contínuo tridimensional
∂K	fronteira de K

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	31
1.1	Contextualização	31
1.2	Motivação e justificativa da pesquisa	32
1.3	Objetivos	33
1.4	Delimitações	33
1.5	Estrutura do Trabalho	33
2	FUNDAÇÕES SOBRE SOLOS REFORÇADOS POR COLUNAS	35
2.1	Melhoramento de solos	35
2.1.1	Reforço Friccional	35
2.1.2	Reforço Coesivo	37
2.1.3	Dimensionamento de Fundações sobre Solos Reforçados por Colunas	38
2.1.4	Considerações dos Métodos de Dimensionamento	51
3	ANÁLISE LIMITE	53
3.1	Domínio de resistência	55
3.2	Carga admissível	56
3.3	Aproximação de K pelo interior: Abordagem Estática	58
3.4	Aproximação de K pelo exterior: Abordagem Cinemática	59
3.5	Funções de apoio π	62
3.6	Implementação da análise limite: caso de critérios isótopos	64
3.7	Material de Coulomb	66
3.8	Material de Tresca	69
4	FUNDAÇÃO SUPERFICIAL SOBRE UM SOLO ARGILOSO SUBMETIDA A CARREGAMENTO INCLINADO	71
4.1	Análise do problema	72
4.2	Abordagem Estática	73
4.3	Abordagem Cinemática	76
4.4	Obtenção da fronteira ∂K	81
4.5	Análise de Resultados	82
5	FUNDAÇÃO SUPERFICIAL SOBRE UM SOLO REFORÇADO COM UMA COLUNA ISOLADA	85
5.1	Análise do problema	85
5.2	Abordagem Estática	86

5.3	Abordagem Cinemática	93
5.4	Resultados	101
5.5	Análise de Resultados	116
6	FUNDAÇÃO SUPERFICIAL SOBRE UM SOLO REFORÇADO COM UM GRUPO DE COLUNAS	119
6.1	Análise do problema	119
6.2	Abordagem estática	121
6.3	Abordagem cinemática	122
6.4	Resultados	127
6.5	Análise de resultados	136
7	CONCLUSÕES	139
	Referências	143
A	CAPACIDADE DE CARGA DO MECANISMO I	147
B	CAPACIDADE DE CARGA DO MECANISMO II	151
C	CAPACIDADE DE CARGA DO MECANISMO III	157

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A edificação de estruturas sobre solos moles envolve recalques excessivos assim como problemas de estabilidade. Uma solução eficiente, econômica e mundialmente utilizada é o reforço de solos por colunas.

A técnica de reforço de solo por colunas consiste em incorporar ao solo um conjunto de inclusões cilíndricas (brita vibro-compactada, drenos de areia, solo argiloso tratado com cal, cimento ou cal-cimento, colunas de concreto, etc). Estas inclusões possuem propriedades mecânicas que permitem reduzir o recalque de solos altamente compressíveis, acelerar o adensamento primário e aumentar a capacidade de carga. Este último aspecto constitui o objeto deste trabalho.

O reforço de solos por colunas de areia foi testado com sucesso na França em 1830 (Morgenthaler et al., 1978). Esta técnica na década de 70 foi melhorada em diferentes países e com métodos variados. O emprego da mesma teve um crescimento acentuado e importante.

O reforço de solos por colunas estabilizadas com adição de cal, por sua vez, é um procedimento que abrange a construção de fundações de edifícios, estruturas especiais, estabilidade de taludes, entre outros. Esta técnica de reforço, denominada *deep mixing*, foi crescendo desde o seu desenvolvimento na Suécia e Japão nos anos 1970 (Broms e Boman, 1975; Okamura e Terashi, 1975), e pode consistir ademais na estabilização de solo com cimento (DLM e DCM) (Okamura e Terashi, 1975; Tanaka, 1981). O crescimento da técnica das colunas com adição de cal foi muito importante nos anos 1990 (Hartlen e Holm, 1995). No Japão, o método equivalente às colunas com adição de cal é referido como DJM, *Dry Jet Mixing* (Aoi e Tsujii, 1996) que induz uma diminuição no recalque em depósitos profundos de solos moles.

Na Alemanha, nos anos 1950, o reforço de solos por colunas de brita foi desenvolvida como uma extensão do processo de vibroflotação (Schaefer, 1997). Esta técnica foi melhorada e seu uso estendido em diferentes países, principalmente para diminuir o risco de liquefação (Dobson, 1987). Nos Estados Unidos, a técnica de reforço de solos por colunas de brita apresentou um crescimento constante devido à preocupação com o risco de liquefação, e o reparo das áreas danificadas pelos terremotos em Califórnia na década de 90 (Schaefer, 1997). Pesquisas relacionadas foram concentradas na Costa Oeste dos Estados Unidos e no Japão, áreas caracterizadas por uma forte atividade sísmica. Hayden e Baez (1994) reportaram 93 projetos na América do Norte onde foram utilizadas técnicas de melhoramento de solos para mitigação de liquefacções.

A técnica de reforço de solos por colunas de brita vibradas tem mostrado melhoramento em termos de estabilidade de aterros e taludes naturais, aumento de capacidade de carga, redução de recalques totais e diferenciais, aumento do estado de adensamento primário e redução do risco de liquefação (Schaefer, 1997).

A técnica de reforço de solos por colunas (seja drenos de areia ou colunas de brita ou solo argiloso tratado com cal ou cimento) é uma técnica mundialmente utilizada, disseminada no Brasil a grande escala e utilizada no Rio Grande do Sul por muitas empresas. Este trabalho é pertinente neste sentido porque existe necessidade de maior rigor nos métodos analíticos que levam sempre a análises numéricas elasto-plásticas.

Em relação ao dimensionamento dos solos reforçados relativos à avaliação da capacidade de carga, diversos métodos foram propostos no caso de reforço com uma coluna isolada. As referências incluem as contribuições de Bell (1915), Aboshi e Ichimoto (1979), Broms (1982), Madhav e Vitkar (1978), Greenwood (1970), Vesic (1972), Hughes e Withers (1974), Brauns (1978), K.R. Datye e Nagaraju (1981), Bouassida e Hadhri (1995), Bouassida et al. (1995) entre outros.

Métodos de dimensionamento relativos a um grupo de colunas foram desenvolvidos por vários pesquisadores, por citar: Buhan (1986 apud BOUASSIDA, 1996), Broms (1982), Barksdale et al (1983 e 1987), Morgenthaler et al. (1978), Bouassida e Hadhri (1995), Bouassida (1996), Bouassida e Porbaha (2004), Jellali et al. (2005), Bouassida et al. (2009), Bouassida e Hazzar (2011), entre outros. Todas as propostas de cálculo da capacidade de carga para solos reforçados por colunas encontradas na literatura se referem a cargas centradas verticais.

1.2 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

Em solos que não satisfaçam características de resistência, deformabilidade ou permeabilidade adequadas ao projeto, a prática convencional consiste em remover e substituir estes solos ou utilizar fundações profundas custosas. Atualmente, a técnica de melhoramento de solos é uma alternativa viável e na maioria dos casos demonstra ser a mais econômica. Em particular, a técnica da vibrocompactação, junto com as colunas de brita, e colunas de solo estabilizadas com cal são métodos mundialmente utilizados.

A técnica de reforço de solos por colunas permite reduzir o recalque de solos altamente compressíveis, acelerar o adensamento primário, aumentar a capacidade de carga, assim como diminuir o risco de liquefação do solo. O dimensionamento deste tipo de solo reforçado representa um desafio devido à natureza composta do mesmo e à grande quantidade de inclusões envolvidas no processo de reforço. As propostas de dimensionamento encontradas na literatura neste aspecto, constituem formulações empíricas, ou estão baseadas na teoria

do cálculo à ruptura com varias hipóteses simplificatórias, tais como prescindir da gravidade ou estar referidas ao caso particular de carregamento centrado vertical.

O presente trabalho pode ser aplicado aos distintos tipos de materiais constitutivos do reforço: colunas de areia, colunas tratadas com cal/cimento, colunas de brita, uma vez que utiliza os parâmetros de resistência dos materiais que compõe o solo reforçado.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal do trabalho é estimar a capacidade de carga de fundações sobre solos reforçados por colunas submetidas à carga inclinada. Como objetivos específicos se tem:

- Obter a capacidade de carga de fundações submetidas à carga inclinada sobre solos sem reforço
- Obter a capacidade de carga de fundações submetidas à carga inclinada sobre solos reforçados com uma coluna isolada
- Obter a capacidade de carga de fundações submetidas à carga inclinada por um grupo de colunas
- Estender a situação atual do dimensionamento de reforço de solos com colunas ao caso de fundações submetidas a carregamento inclinado.

A metodologia proposta é determinar limites inferiores e superiores da capacidade de carga pelas abordagens estática e cinemática da análise limite. Este procedimento aplica-se a cada um dos casos a analisar: solo sem reforço, solo reforçado por uma coluna isolada e solo reforçado por um grupo de colunas.

1.4 DELIMITAÇÕES

As fundações e o solo reforçado são analisadas no âmbito do estado plano de deformações. Além disso, na metodologia de cálculo empregada os parâmetros de resistência do material são considerados conhecidos, não sendo questionados ou verificados a forma de obtenção dos mesmos.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em 7 capítulos. **O capítulo 1** contém a justificativa, objetivos, estrutura e delimitações da pesquisa.

No **Capítulo 2**, apresenta-se inicialmente uma classificação das técnicas de melhoramento de solos. Na sequência são descritos dois tipos de reforço de solos por colunas, que

constituem o foco principal deste estudo. Finalmente são apresentados alguns métodos de dimensionamento encontrados na literatura.

O **Capítulo 3** apresenta uma breve descrição histórica do cálculo à ruptura. Em seguida, alguns princípios básicos são apresentados, junto com os dois teoremas fundamentais da análise limite. Finalmente, apresentam-se os critérios de resistência a serem utilizados na caracterização do solo e do material de reforço.

O **Capítulo 4** é dedicado às avaliações da capacidade de carga de fundações superficiais sobre solos argilosos homogêneos, submetidas a carregamentos inclinados.

Abordagens estáticas e cinemáticas da capacidade de carga de fundações superficiais sobre solos argilosos reforçados com uma coluna isolada são descritas no **Capítulo 5**.

Estudando os resultados do quinto capítulo, uma análise é desenvolvida no contexto de reforço com um grupo de colunas, no **Capítulo 6**. Em particular, um estudo paramétrico intensivo é realizado variando os diferentes parâmetros adimensionais que controlam o valor da capacidade de carga.

O último capítulo apresenta as conclusões desta pesquisa, assim como sugestões para trabalhos futuros vinculados com a temática da pesquisa.

2 FUNDAÇÕES SOBRE SOLOS REFORÇADOS POR COLUNAS

2.1 MELHORAMENTO DE SOLOS

Em várias situações envolvendo estruturas em solos moles ou areias fofas, surgem problemas de estabilidade, recalques excessivos ou de liquefação. Conforme o tipo de estrutura a construir e o tipo de funcionamento, diferentes são as possibilidades que podem ser empregadas para paliar estes inconvenientes. Três tipos de reforço são os tópicos de [Schaefer \(1997\)](#) na tentativa de classificar e descrever as metodologias que incrementam a capacidade de carga do solo, ou ainda constituem melhoras em outros aspectos.

O primeiro tipo de reforço (*ground improvement*) busca melhorar, via procedimentos apropriados, as propriedades intrínsecas do solo. Exemplos desta técnica são compactação dinâmica (utilizada pelos custos baixos, geralmente para grandes áreas), vibrocompactação (especialmente para eliminar problemas de liquefação, reparar áreas danificadas por terremotos), compactação por injeção de *graute* (utilizada para construções de túneis em solos moles, ou em solos com problemas de recalques), drenos prefabricados (para projetos com depósitos compressíveis), entre outros.

O segundo tipo de reforço de solo (*ground reinforcement*), consiste basicamente na incorporação, de elementos estruturais (inclusões) destinados a suportar cargas que ele não seria capaz de suportar sem o reforço, obtendo-se benefícios pelas inclusões e não pela melhoria do solo circundante. Exemplos deste método são: terra armada, solo grampeado, reforço com colunas, geotêxteis, técnica de bio-engenharia para estabilização, *deep mixing*, solo reforçado com fibras, âncoras, injeção de grouting por pressurização, estruturas estabilizadas mecanicamente, colunas de concreto vibrado, vibro substituição.

Finalmente, o tratamento de solos (*ground treatment*) refere-se à adição de materiais no mesmo ou submetendo-o a processos físicos de maneira a melhorar suas características. Exemplos são: solo tratado com cimento, tratamento térmico com corrente elétrica formando um produto vítreo inerte (vitrificação), rebaixamento do nível freático, congelamento, etc.

A técnica de reforço de solo por colunas consiste em incorporar no solo a reforçar (ou solo inicial) um material que pode ser granular (colunas constituídas por britas ou pilhas e drenos de areia), ou coesivo (solo argiloso tratado com cal, cimento ou cal-cimento). Estas duas configurações são sucessivamente descritas

2.1.1 Reforço Friccional

A técnica de reforço por colunas granulares tem 4 propósitos: reduzir o recalque de solos altamente compressíveis como argilas moles, acelerar o estado primário de consolidação,

aumentar a capacidade de carga e diminuir o risco de liquefação principalmente quando o solo inicial é areia fofa saturada.

Particularmente para colunas de brita, em relação à distribuição da tensão vertical sobre a superfície do solo reforçado, uma grande proporção é inicialmente suportada pelas colunas de brita, o restante é suportado pelo solo (Greenwood, 1970; Hughes and Withers, 1974). A distribuição da carga total entre as colunas de brita e o solo circundante muda gradualmente até que se chega a condições de equilíbrio. O período de tempo em que isto ocorre é influenciado pelo solo, pelas condições de carga e pelo espaçamento das colunas.

As colunas são construídas em vários pontos do solo. O raio das colunas geralmente varia entre 0,5 e 1,5m. O material de reforço deve variar em tamanho de partículas de 5 a 100mm com até 15% de material mais fino que 5mm (Bell, 1993). Usualmente 10 a 15% do volume do solo mole é substituído com material de reforço, as cargas de projeto de colunas de brita usualmente variam entre 200 a 500kN. A Figura 2.1 apresenta esquematicamente o processo construtivo das colunas de brita

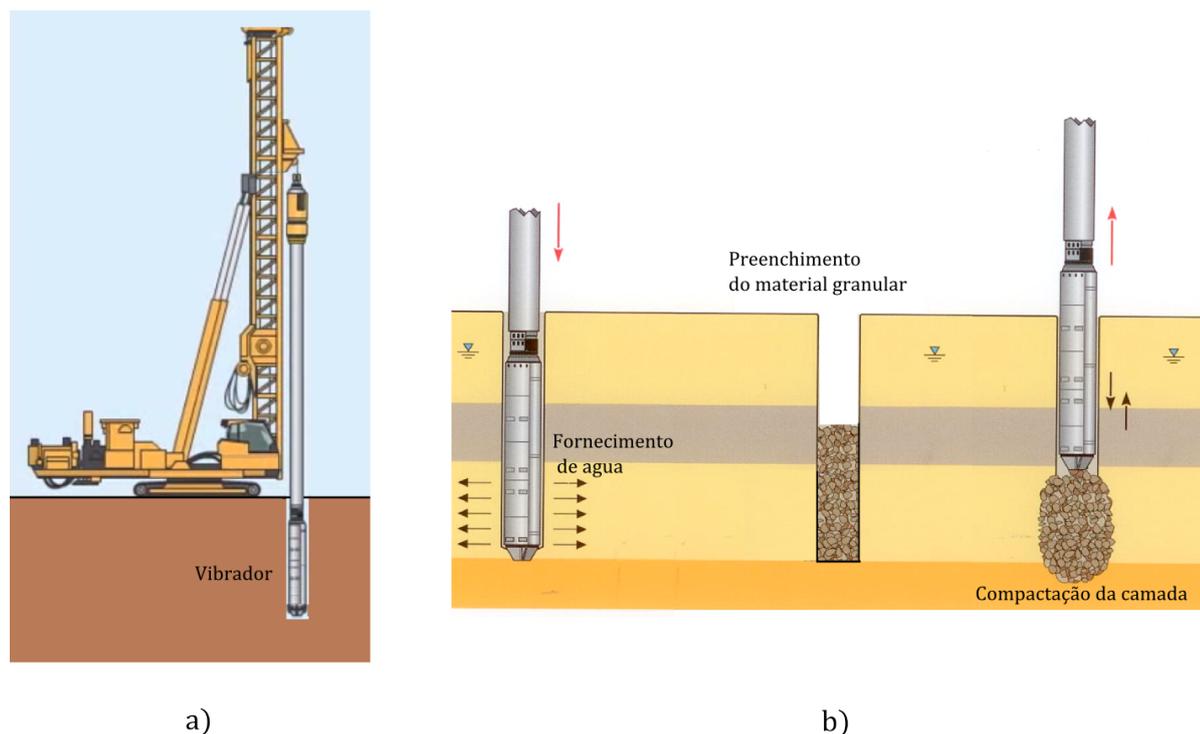


Figura 2.1 – Método de Execução das colunas de brita, processo de vibrocompactação. Adaptação do processo da vibrocompactação, adaptado de Baumann e Bauer (1974 apud Bell, 1993) e do catálogo de processos de vibração profunda Keller (2002)

Bell (1993) faz uma classificação de metodologias usadas para melhorar solo por compactação *in situ*, as quais são: precompressão, colunas de compactação, vibrocompactação, compactação dinâmica e compactação por detonação. A sua aplicabilidade para distintos tipos de solo

se observa na figura 2.2. Apenas as colunas de brita constituem um método prático para compactar argilas e siltes moles.

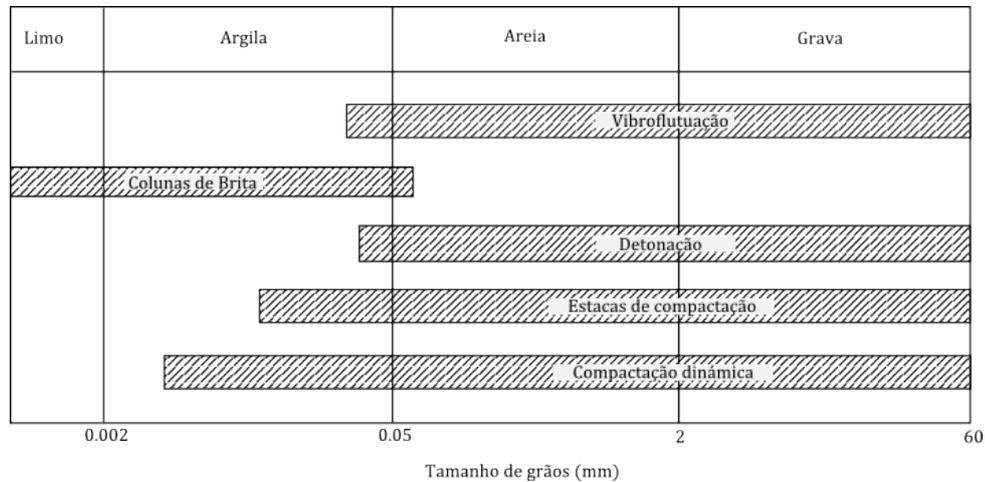


Figura 2.2 – Aplicabilidade dos métodos de compactação profunda segundo Mitchell e Villet (1987 apud BELL, 1993)

2.1.2 Reforço Coesivo

Este procedimento consiste em incorporar ao solo uma porcentagem em peso (5% a 20%) do ligante e amassar. O método construtivo deste tipo de reforço é denominado *deep mixing*. É um método utilizado mundialmente, que envolve um método de penetração rotativo que retira o solo, o mistura com cal (ou cimento), e o coloca de novo formando uma coluna de solo-cal (solo-cimento). O diâmetro destas colunas geralmente varia entre 60 – 100cm. A Figura 2.3 apresenta o equipamento utilizado para a perfuração e mistura (Kempfert e Gebreselassie, 2006). Detalhes sobre os métodos construtivos e materiais utilizados são encontrados em Kempfert e Gebreselassie (2006).

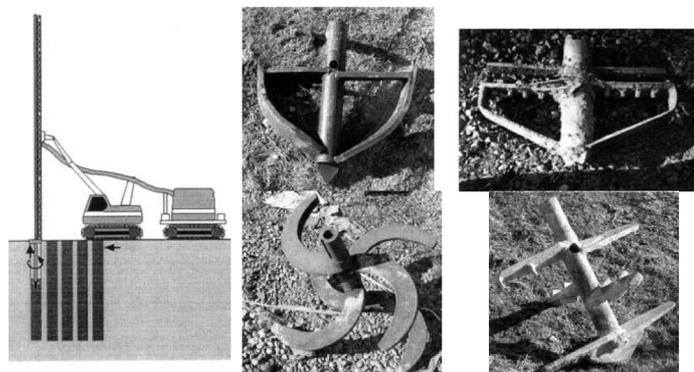


Figura 2.3 – Equipamento para a construção de colunas de reforço coesivas (Kempfert e Gebreselassie, 2006)

2.1.3 Dimensionamento de Fundações sobre Solos Reforçados por Colunas

Na literatura são encontrados dois casos de dimensionamento de reforço de solos por colunas: coluna isolada e grupo de colunas. O dimensionamento é proposto conforme aos objetivos do tipo de reforço. De fato, os métodos levam em conta dois aspectos: redução do recalque e aumento da capacidade de carga em relação ao solo inicial. Este trabalho está focado no estudo deste último. Métodos de dimensionamento encontrados na literatura utilizam equilíbrio limite (Chen, 1975), cálculo à ruptura (Chen, 1975; Salençon, 1983) ou métodos empíricos. Uma classificação foi feita em base ao cálculo da capacidade de carga dos métodos de dimensionamento, segundo a Tabela 2.1

Tabela 2.1 – Classificação dos métodos de dimensionamento de fundações sobre solos reforçados por colunas. Adaptação de Bouassida (1996)

Coluna Isolada	Grupo de Colunas
<i>Estado de Tensões</i>	<i>Estado de Tensões</i>
Bell (1915): axissimetria Broms (1982): semi-empírico Bouassida (1995): E.P.D. ¹	Bouassida (1995) (c.à.R. ² com homogeneização)
<i>Mecanismo de ruptura</i>	<i>Mecanismo de ruptura</i>
Madhav et al (1978): E.P.D. ¹ (c.à.R. ²) Bouassida (1995): E.P.D. ¹ Bouassida (1995): E.P.D. ¹ Bouassida (1995): E.P.D. ¹ Bouassida (1995): axissimetria	de Buhan (1984): E.P.D. ¹ (c.à.R. ² com homogeneização) Bouassida (1995): E.P.D. ¹ Bouassida et al (2004) Jellali et al (2005) Bouassida et al (2009) Bouassida e Hazzar (2011)
<i>Equilíbrio limite</i>	<i>Equilíbrio limite</i>
axissimetria: Greenwood (1970) Vesic (1972) Hughes et al (1974) Brauns (1978) Datye (1982)	abordagem tridimensional: Broms (1982): semi-empírico Barksdale et al (1983 e 1987)

1. E.P.D.: estado plano de deformações.

2. c.à.R.: cálculo à ruptura

Métodos de dimensionamento relativos a uma coluna isolada

Normalmente, como hipótese de cálculo é considerada axissimetria (Figura 2.4 (a)), ou trincheira com a hipótese e estado plano de deformação (Figura 2.4 (b))(Bouassida, 1996).

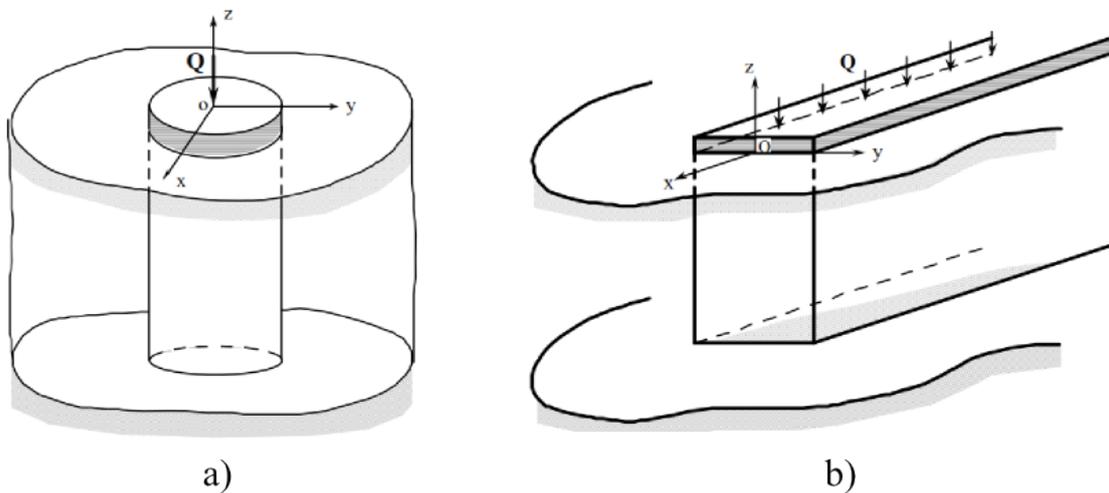


Figura 2.4 – Hipóteses de a) Axissimetria, b) Trincheira em estado plano de deformações (Bouassida, 1996)

No caso de apenas um elemento de reforço, são apresentados três tipos de dimensionamento: aqueles baseados em estudos de campos de tensões (abordagem estática), aqueles baseados unicamente no estudo de mecanismo de ruptura (abordagem cinemática) e aqueles que combinam os dois métodos precedentes (equilíbrio limite).

Na sequência, as abordagens apresentadas na Tabela 2.1 são sucessivamente descritas. Para tanto, designam-se por C_s e C_r às respectivas coesões do solo e do reforço, por φ ao ângulo de atrito interno da coluna, por γ_r e γ_s ao peso específico do reforço e do solo, respectivamente e por B_1 e B à largura da coluna e da fundação (Figura 2.7)

Abordagem de Bell (1915)

Bell (1915) considerou uma coluna isolada apoiada num substrato rígido, rodeada por um solo submetido a uma carga uniformemente distribuída na superfície (Figura 2.6). Não considerou o efeito da gravidade no solo nem na coluna. O solo foi suposto puramente coesivo, de coesão C_s , e a coluna sem coesão e com ângulo de atrito φ . Foi suposta uma condição de axissimetria, mas o resultado obtido é válido também para o caso de trincheira em estado plano de deformação. As tensões de compressão são consideradas positivas, e foi suposto que o critério de ruptura é atingido simultaneamente nas colunas e no solo

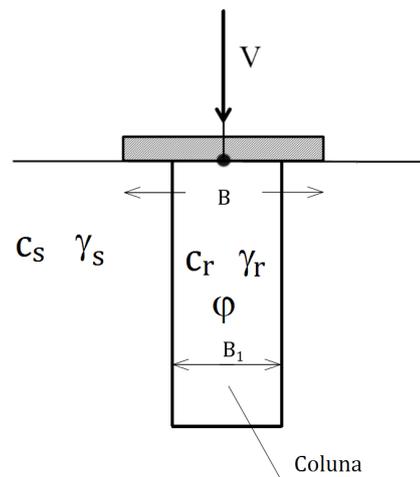


Figura 2.5 – Parâmetros das abordagens de dimensionamento de reforço de solos

circundante se obteve a Figura 2.6:

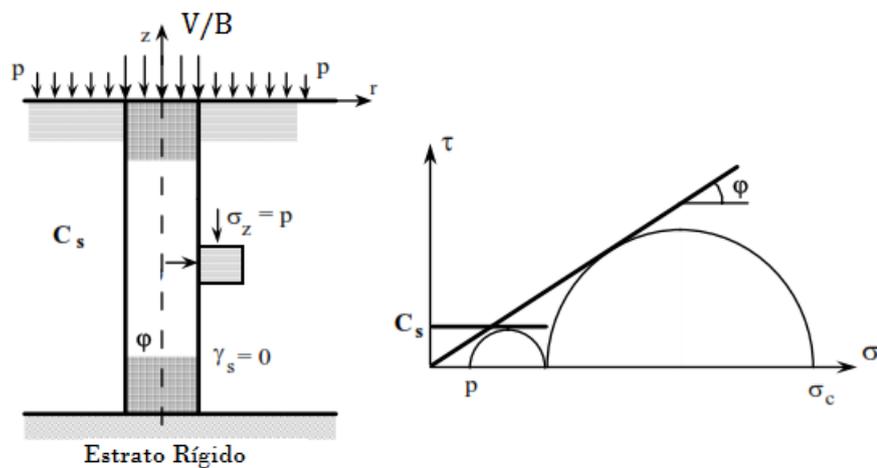


Figura 2.6 – Abordagem de Bell (1915)

Com estas considerações, a capacidade de carga obtida é dada por:

$$\sigma_c = (p + 2C_s) \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (2.1)$$

Abordagem de Broms (1982)

Broms (1982) propôs uma abordagem semi-empírica baseada num estudo experimental que avaliou a resistência ao cisalhamento de uma lama mole tratada com cal.

Designando por γ_s ao peso específico do solo e C_s à coesão não drenada do solo, a tensão

lateral de confinamento foi estimada pela expressão:

$$\sigma_h = \gamma_s z + 5C_s \quad (2.2)$$

Broms (1982) propôs para os campos de confinamento moderados (ou intermediários) que a capacidade de carga última de uma coluna isolada é a seguinte:

$$V = V_s + (\gamma_s z + 5C_s)K_p \quad (2.3)$$

onde V_s designa a resistência à compressão, portanto não confinada, da coluna tratada com cal e K_p designa o coeficiente passivo do material constitutivo da coluna.

Abordagem de Bouassida e Hadhri (1995)

Bouassida e Hadhri (1995) utilizaram dois estados de tensões (Figuras 2.7 (a) e (b)) para determinar limites inferiores da capacidade de carga de um solo argiloso com reforço coesivo-friccional. O efeito da gravidade não foi considerado. Realizou-se uma análise tanto para estado plano de deformações como para estado plano de tensões.

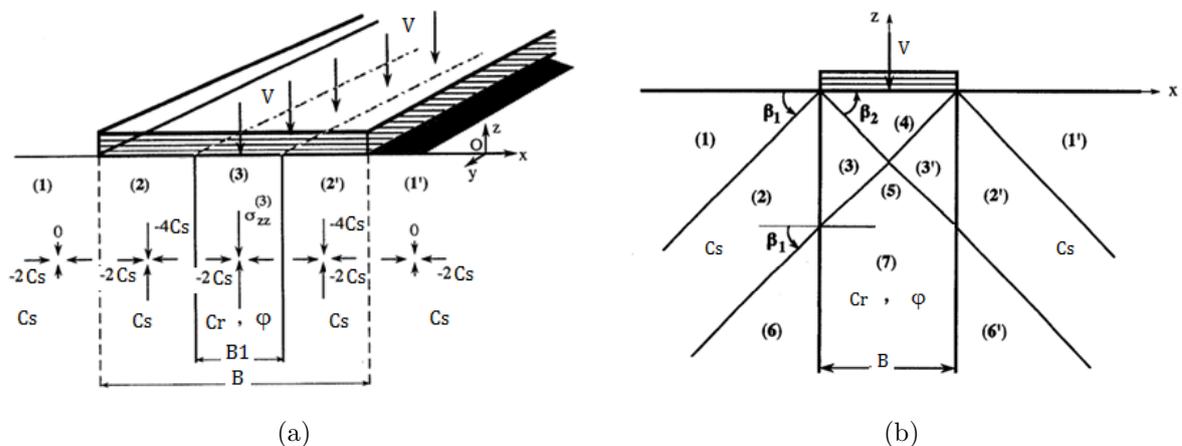


Figura 2.7 – Campos de tensões constantes por zona

Mediante o campo de tensões de 5 zonas (Figura 2.7 (a)) em E.P.D. determinaram que para um reforço puramente friccional, o reforço do solo ocorre a partir de $\varphi = 26^\circ$, por sua vez, o campo de tensões de 11 zonas mostrou que o reforço ocorre a partir de $\varphi = 17^\circ$ e para $\varphi = 26^\circ$ a melhora na capacidade de carga é maior que um 38%.

Abordagens de Greenwood (1970), Vesic (1972) e Brauns (1978)

As seguintes abordagens utilizam o método de equilíbrio limite e estão baseadas no estudo de três mecanismos de ruptura (Figura 2.8).

O primeiro modo de ruptura ocorre por expansão lateral da coluna, cuja base atinge um substrato rígido (Figura 2.8(a)). Para que o mecanismo ocorra por este modo de ruptura, a altura da coluna deve ter no mínimo, 3 a 4 vezes o seu diâmetro. No caso em que a coluna se apoia num substrato rígido situado a baixa profundidade, o mecanismo proposto é a ruptura por cisalhamento generalizado (Figura 2.8(b)). Quando a coluna não se apoia num substrato rígido, o modo de ruptura é obtido por puncionamento (Figura 2.8(c)).

Para o primeiro mecanismo (Figura 2.8 (a)), Greenwood (1970) considerou que a coluna atinge o equilíbrio limite passivo. Estes autores propuseram uma expressão da tensão horizontal máxima em função aos parâmetros elásticos do solo. Vesic (1972) desenvolveu um modelo onde o comportamento pode ser elasto-plástico, e é ao mesmo tempo coesivo e friccional. Estas abordagens associam a coesão e o ângulo de atrito (determinados na ruptura) com características elásticas, e portanto conduzem a estimativas pouco controladas na capacidade de carga (Bouassida, 1996).

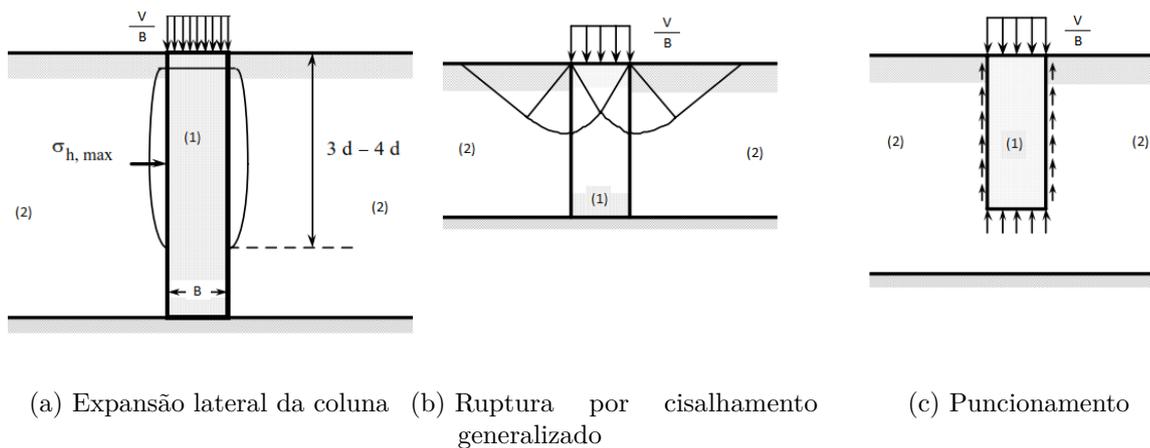


Figura 2.8 – Mecanismos de ruptura

Para o terceiro modo de ruptura (Figura 2.8c)), Brauns (1978) propôs a expressão seguinte da tensão vertical na coluna:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{V}{B} + \left(\gamma_s - 4 \frac{C_s}{B} \right) z \quad (2.4)$$

onde: z designa a profundidade do ponto considerado (contados positivamente para baixo); C_s designa a coesão não drenada do solo; $\frac{V}{B}$ designa a tensão vertical aplicada no topo da coluna ($z = 0$); $\frac{B}{2}$ designa o rádio da coluna

A partir de 2.4, determina-se o comprimento mínimo da coluna para evitar o puncionamento. Admitindo que a tensão vertical limite a nível da ponta é igual a “ $9C_s$ ” e negligenciando a gravidade, o comprimento mínimo é escrito como Bouassida (1996):

$$L_{min} = \frac{B}{4} \left(\frac{V}{BC_s} - 9 \right) \quad (2.5)$$

A partir de 2.4, determina-se igualmente o comprimento máximo, além do qual o tratamento é desnecessário, e ele corresponde a $\sigma_{v,z} = 0$, obtendo Bouassida (1996):

$$L_{max} = \frac{B}{4} \frac{V}{BC_s} \quad (2.6)$$

Abordagem de Brauns (1978)

Brauns (1978) estudou o caso de uma coluna isolada (Figura 2.9) com as mesmas condições limites e de carregamento que aqueles considerados por Bell (1915), utilizando para o cálculo a metodologia de equilíbrio limite. Nesta abordagem a coluna é suposta num estado de equilíbrio limite passivo.

O solo situado entorno da coluna (Figura 2.9) tem uma ruptura segundo uma superfície troncocônica (MIJM'I'J'). Esta superfície forma um ângulo $(90^\circ - \alpha)$ com a vertical. Em qualquer ponto desta superfície, assume-se que a resistência ao cisalhamento máxima do solo é mobilizada. A tensão σ é determinada pelo equilíbrio limite no tronco de cone do solo (MIJM'I'J') em termos das forças que são aplicadas.

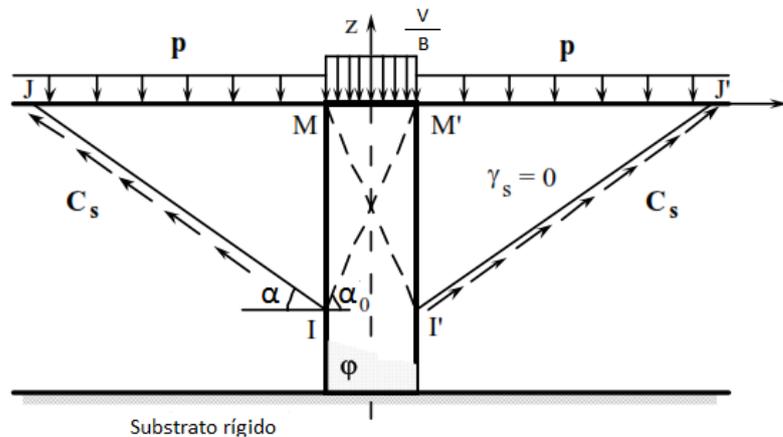


Figura 2.9 – Abordagem de Brauns (1978)

A tensão última $\frac{V}{BC_s}$ aplicada no topo da coluna é determinada como:

$$\frac{V}{BC_s} = \left(\frac{p}{C_s} + \frac{2}{\sin 2\delta} \right) \left(1 + \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha} \right) \tan^2 \alpha_0 \quad (2.7)$$

onde

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

Para determinar o valor da tensão última, minimiza-se a expressão 2.7 em relação a δ . Anulando a derivada da expressão em relação a δ obtendo-se:

$$p \frac{\tan \alpha_0}{2C_s} = -\tan \alpha_0 \left(\frac{1}{\tan 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} \right) - \frac{\tan \alpha_0}{\tan 2\alpha} \quad (2.8)$$

No caso particular em que $p = 0$, a condição 2.8 torna-se:

$$\tan \alpha_0 = 0.5(\tan^2 \alpha - 1) \tan \alpha \quad (2.9)$$

Abordagem de Madhav e Vitkar (1978)

O estudo foi feito em deformação plana pela abordagem cinemática da análise limite. O mecanismo de ruptura proposto é por cisalhamento generalizado (Figura 2.10). A abordagem de Madhav e Vitkar (1978) apresenta a particularidade de considerar um carregamento aplicado num comprimento diferente do comprimento da trincheira com a presença de uma sobrecarga na superfície do maciço. É considerado o efeito da gravidade. As resistências estão regidas pelo critério de Mohr-Coulomb (Madhav e Vitkar, 1978).

O mecanismo possui descontinuidades de velocidade nos planos (OA), (OA'), (OA'') e (A''A'''), e nos arcos de espirais logarítmicas (AA') e (AA'') que se limitam respectivamente às zonas (OAA') e (OA'A'') no interior dos quais uma deformação por cisalhamento é engendrada (Madhav e Vitkar, 1978).

Os autores deduziram a expressão seguinte da capacidade de carga última expressa em termos de uma tensão aplicando a abordagem cinemática da análise limite:

$$V = C_s N_c + \gamma_s \frac{B}{2} N_\gamma + \gamma_s D N_q \quad (2.10)$$

onde

$$N_c = \frac{C_r}{C_s} N_{cr} + N_{cs}$$

e

$$N_\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} N_{\gamma 1} + N_{\gamma 2}$$

D corresponde à profundidade de apoio da fundação, N , N , N_{cr} , N_{cs} e N_q são fatores adimensionais que dependem das características mecânicas do solo e do material constitutivo da trincheira, dos ângulos paramétricos α e β , e da proporção dos comprimentos $\frac{B_1}{B}$ (Figura 2.10).

Devido a dificuldades computacionais, a minimização foi determinada para cada fator separadamente, e combinado posteriormente. Assim, é minimizado N_c , N_q e N_γ em relação aos ângulos α e δ , e então é obtida a carga última utilizando a equação 2.10. Os resultados de Madhav e Vitkar (1978) são apresentados em forma de ábacos permitindo obter, segundo o caso, os valores dos fatores N_c , N_q e N_γ (Madhav e Vitkar, 1978).

Abordagem de Madhav et al. (1979)

Madhav et al. (1979) propuseram uma abordagem que permite tratar, em axissimetria, o caso de uma fundação de diâmetro superior à coluna. A expressão proposta é escrita

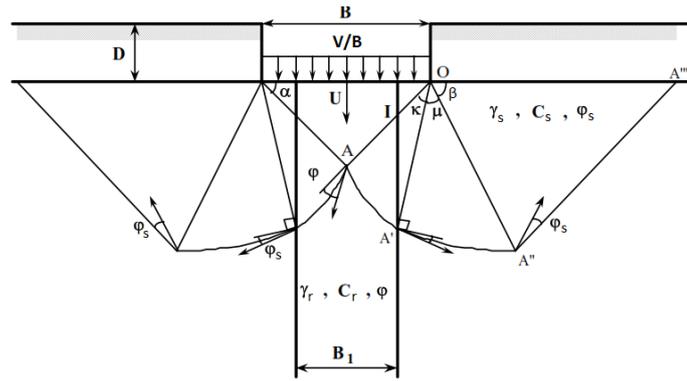


Figura 2.10 – Mecanismo de ruptura por cisalhamento generalizado (Madhav e Vitkar, 1978).

como:

$$\frac{V}{B} = K_p(4C_s + \sigma'_{r0} + K_0 \frac{2}{3} C_r N_c) - \left(\frac{B_1}{B}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{B_1}{B}\right)\right] \frac{2}{3} C_r N_c \quad (2.11)$$

onde: K_0 é o coeficiente de pressão lateral do solo; σ'_{r0} é a tensão lateral inicial exercida na altura da coluna; p_s é a tensão última de um solo mole puramente coesivo, que vale: $p_s = \frac{2}{3} C_2 N_c$; B_1 e B designam respectivamente os diâmetros da coluna e da fundação.

A abordagem de Madhav e Vitkar (1978) não pode ser considerada como uma abordagem cinemática rigorosa no sentido de cálculo à ruptura porque o resultado proposto está baseado no raciocínio de superposição de Terzaghi (Bouassida, 1996).

Abordagem de Bouassida e Hadhri (1995)

Bouassida e Hadhri (1995) consideraram três mecanismos de velocidades virtuais (Figura 2.11 (a) e (b) e (c)) para determinar limites superiores da capacidade de carga de um solo argiloso com reforço coesivo-friccional. O efeito da gravidade não foi levado em conta. Realizou uma análise em estado plano de deformações. Para o mecanismo da Figura 2.11 (a) realizou-se uma análise em axissimetria.

Os mecanismos da Figura 2.11 (a) e (b) correspondem a uma abordagem em que apenas o material de reforço se opõe às forças externas, uma vez que a espessura da fundação coincide com a espessura B_1 da coluna. Assim, a análise é posteriormente estendida ao caso de n colunas, onde a carga total V_n que suporta a fundação é n vezes a carga V suportada por uma coluna (Figura 2.12)

Métodos de dimensionamento relativos a um grupo de colunas

Os métodos de cálculo seguintes consideram uma configuração tridimensional. Estes métodos utilizam distintas abordagens, e foram propostos por Broms (1982), Barksdale e Bachus (1983), Buhan (1984).

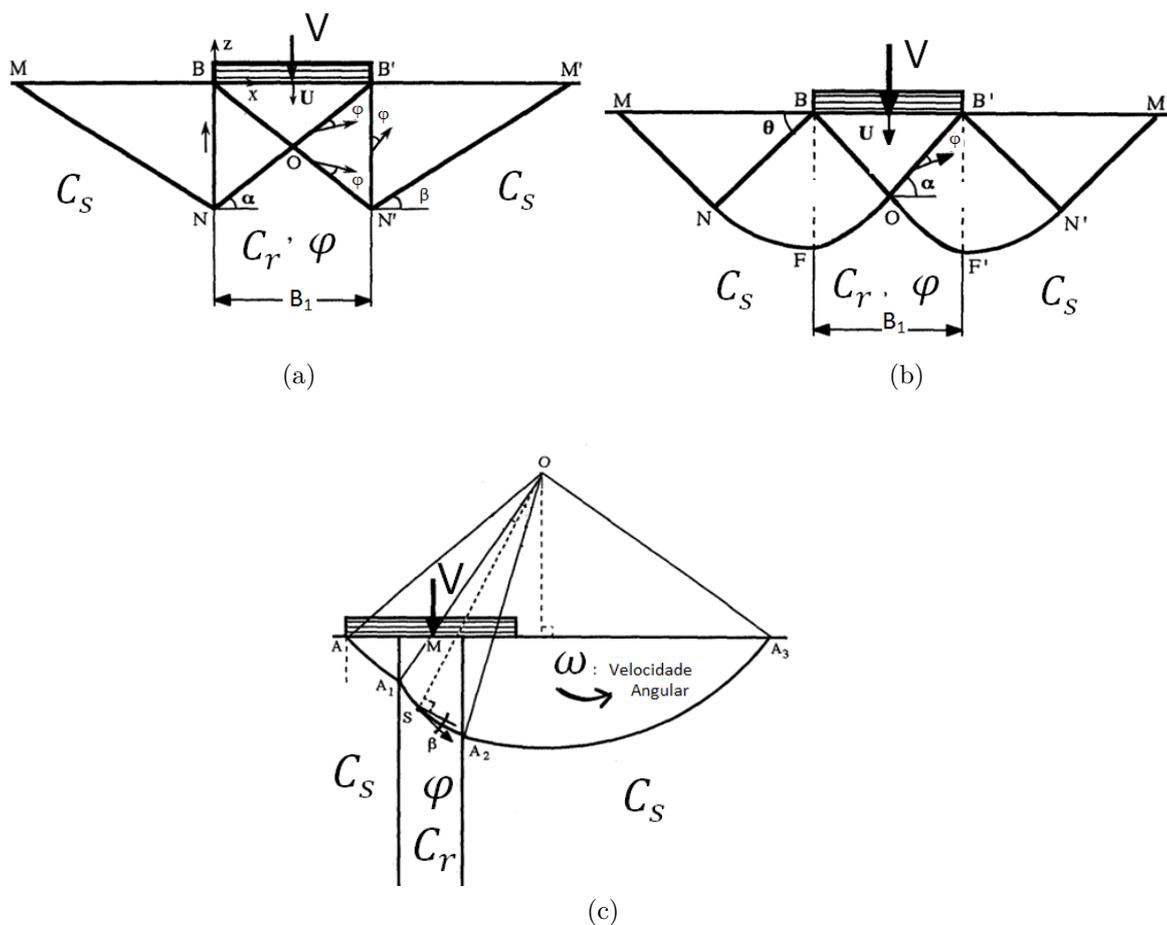


Figura 2.11 – Mecanismos propostos por Bouassida e Hadhri (1995)

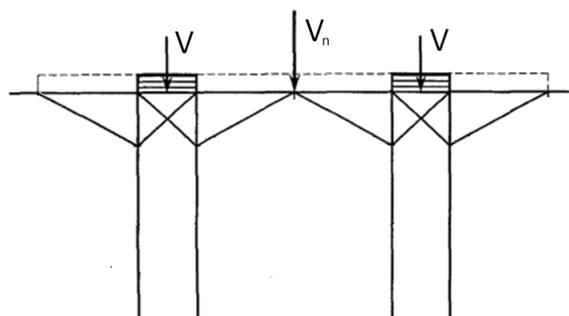


Figura 2.12 – Mecanismo de ruptura para reforço de solos por um grupo de colunas (Bouassida e Hadhri, 1995)

Abordagem de Broms (1982)

Broms (1982) considerou uma fundação retangular de dimensões B e L , apoiadas num solo puramente coesivo reforçado por um grupo de colunas de solo tratado com uma percentagem de cal.

Considerando mecanismos de ruptura para colunas flutuante, a ruptura toma lugar na superfície lateral contornando o volume de solo reforçado pelo grupo de colunas (Figura

2.13). A resistência ao cisalhamento máxima é atingida no solo mole.

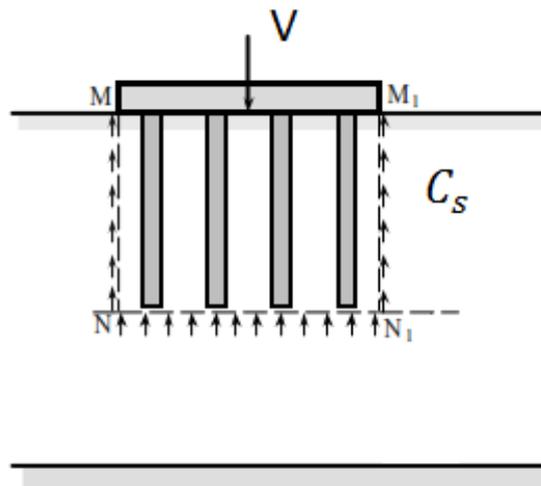


Figura 2.13 – Mecanismo de ruptura em forma de bloco para o caso de colunas flutuantes (Broms,1982)

O mecanismo de ruptura quando as colunas atingem um substrato rígido proposto por Broms (1982) é obtido por cisalhamento local (Figura 2.14). A capacidade de carga limite é a soma de dois termos (p_1 e p_2) considerados independentes: onde p_1 designa a tensão de ruptura das colunas e p_2 que designa a capacidade de carga limite do solo mole não reforçado levando em conta a geometria da fundação (Figura 2.14), onde ocorre o cisalhamento local. Para o dimensionamento, Broms (1982) propôs utilizar um coeficiente de segurança igual a dois para obter o valor da capacidade de carga admissível a partir da capacidade de carga limite definida acima.

Abordagem de Barksdale e Bachus (1983)

Barksdale e Bachus (1983) consideraram uma fundação rígida retangular sobre solo mole puramente coesivo reforçado com colunas sem coesão com um ângulo de atrito φ . As colunas são de seção circular, apoiadas num substrato rígido (Figura 2.15). A abordagem foi baseada no estudo de um equilíbrio limite de um bloco (OMN) usando um mecanismo de cunha. Foi considerado que a ruptura por cisalhamento é atingida simultaneamente nos planos (OM) e (MN), (Figura 2.15).

O cálculo da capacidade de carga é baseado nas seguintes hipóteses:

- O equilíbrio passivo limite ocorre no solo situado à direita do plano (MN)
- Considera-se que na cunha (sem considerar a gravidade), um equilíbrio limite passivo é atingido. Isto permite escrever a expressão da capacidade de carga última.

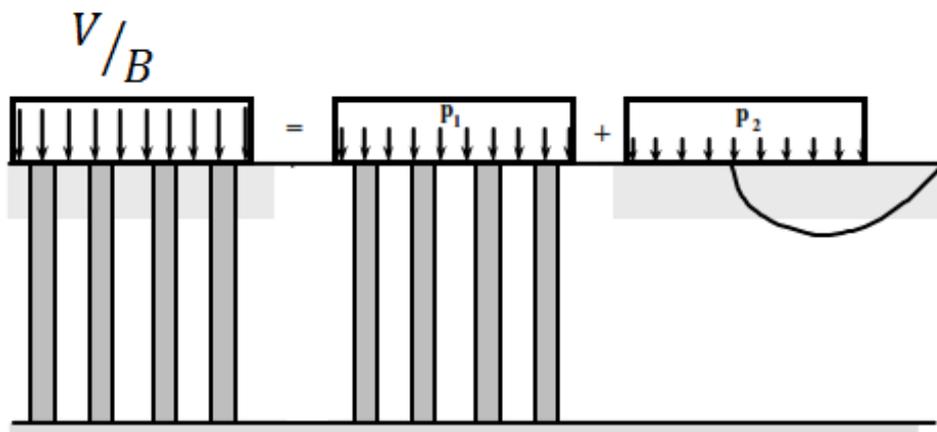


Figura 2.14 – Mecanismo de ruptura por cisalhamento local para colunas apoiadas num substrato rígido [Broms\(1982\)](#)

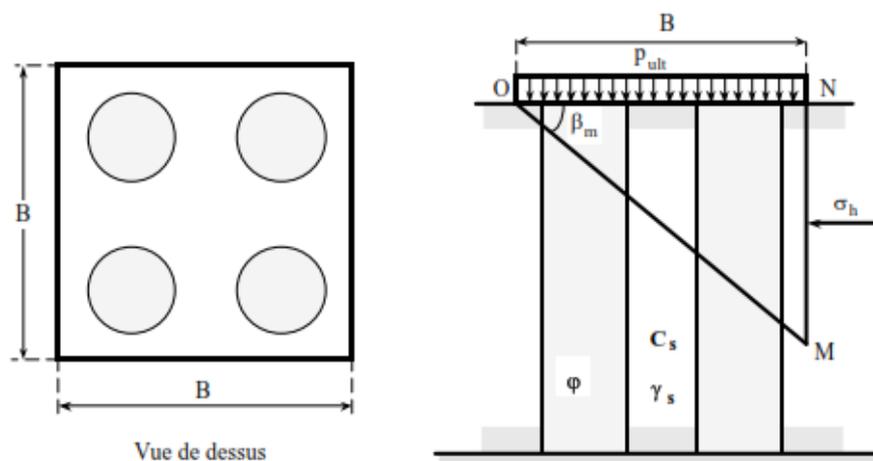


Figura 2.15 – Mecanismo de cunha para uma fundação [Bouassida \(1996\)](#)

Abordagem pela teoria de Homogeneização, [Buhan \(1984\)](#) (Reforço Coesivo)

O solo reforçado é um meio heterogêneo constituído por um solo puramente coesivo de coesão C_1 e um material de reforço também puramente coesivo de coesão $C_2 > C_1$.

[Buhan \(1984\)](#) estudou o cálculo da capacidade de carga de uma fundação de espessura B sobre um solo reforçado por trincheiras (Figura 2.16) na hipótese de estado plano de deformação. Assume-se que a aderência é perfeita entre o solo e as trincheiras.

Pela teoria da homogeneização, associada ao meio heterogêneo inicial, é obtido um meio homogêneo anisótropo para o qual é determinada a coesão anisotropa $C(\alpha)$. Através da abordagem cinemática do cálculo à ruptura pelo mecanismo de Prandtl generalizado, os cálculos feitos por [Buhan \(1984\)](#) permitiram desenvolver um ábaco que determina o limite superior do fator N_{hom}^+ .

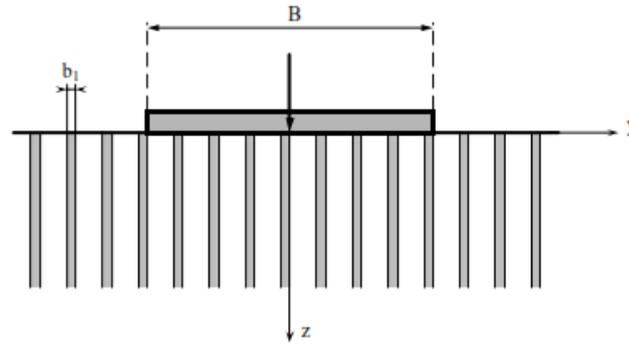


Figura 2.16 – Fundação apoiada sobre um solo reforçado por trincheiras

Abordagem de [Bouassida e Porbaha \(2004\)](#)

Foi determinada a capacidade de carga de um solo coesivo com reforço de solo cimento usando a abordagem cinemática da análise limite, segundo o mecanismo da Figura 2.1.3. Um modelo a escala foi ensaiado, nas mesmas configurações da Figura 2.1.3 numa caixa de 500mm por 200mm de área e 345mm de profundidade. Resultados da capacidade de carga foram comparados por ambos métodos. Os resultados desta abordagem cinemática foram mais precisos que os correspondentes à abordagem do método de Broms, quando comparados com os resultados experimentais.

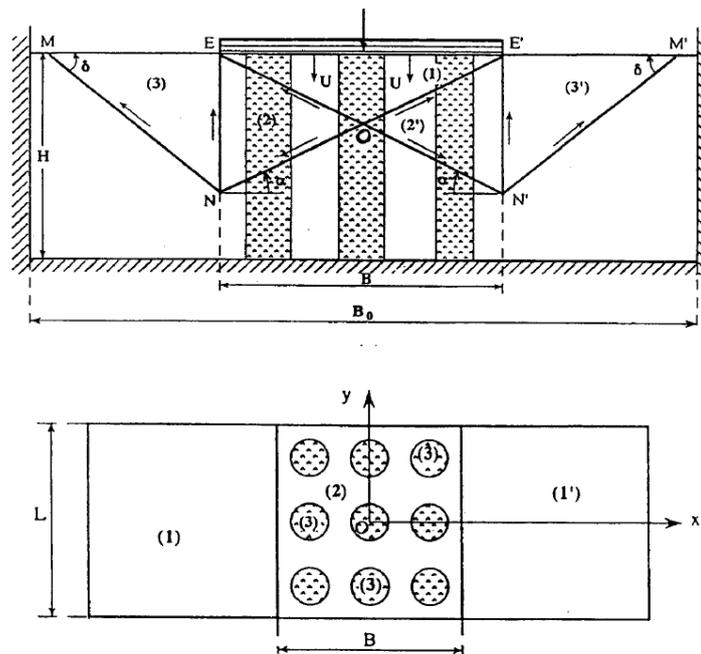


Figura 2.17 – Mecanismo da abordagem cinemática considerada por [Bouassida e Porbaha \(2004\)](#)

Abordagem de [Jellali et al. \(2005\)](#) e [Jellali et al. \(2007\)](#)

Uma estimativa superior e inferior da carga vertical foi investigada considerando um solo coesivo e um reforço também coesivo por [Jellali et al. \(2005\)](#). Foi utilizada a teoria da homogeneização obtendo um material homogêneo equivalente (a partir das propriedades da estrutura heterogênea: solo e reforço). Ábacos foram construídos para prever a estimativa da capacidade de carga em função dos parâmetros adimensionais que dependem da geometria e propriedades de resistência de cada um dos materiais. O material de reforço revela melhoras significativas na capacidade de carga.

Por sua vez, uma estimativa inferior da carga vertical foi investigada considerando um solo coesivo e um reforço friccional ([Jellali et al., 2007](#)), utilizando a teoria da homogeneização. O material de reforço revela melhoras na capacidade de carga apenas para tensões compressivas suficientemente elevadas. A influência da gravidade foi desprezada.

Abordagem de [Bouassida et al. \(2009\)](#)

Foi estudada a capacidade de carga de uma fundação rígida apoiada sobre um solo reforçado por colunas flutuantes (Figura 2.1.3). Um limite inferior é determinado para o caso geral de um reforço coesivo-friccional, em análise tridimensional. Um limite superior da capacidade de carga foi obtido apenas para um reforço coesivo utilizando o mecanismo de Prandtl, para a configuração de colunas apresentada na Figura 2.1.3.

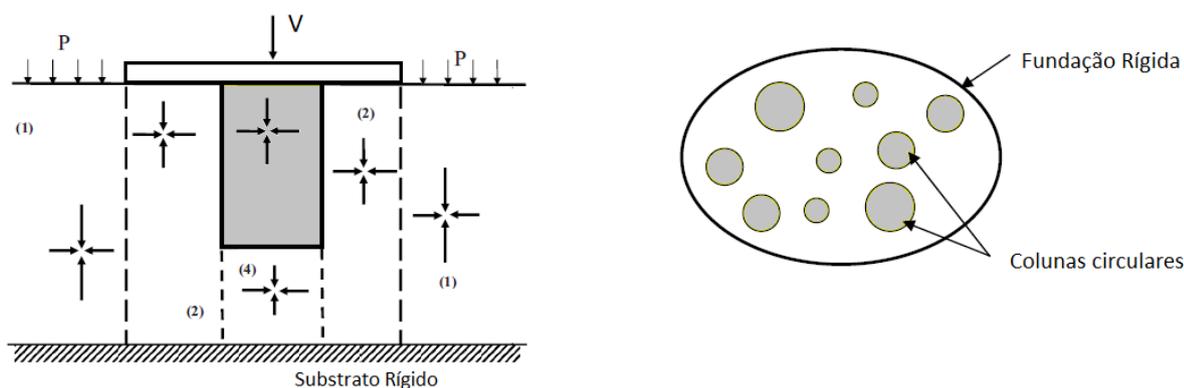


Figura 2.18 – Campos de tensões da abordagem estática considerada por [Bouassida et al. \(2009\)](#)

As estimativas inferiores da carga decrescem de forma não significativa para um ângulo de atrito do reforço $\varphi < 19,5^\circ$. A delimitação desta abordagem é que o peso específico do material da coluna deve ser maior que aquele do solo. Melhores estimativas da capacidade de carga foram obtidas, em comparação com metodologias prévias encontradas na literatura.

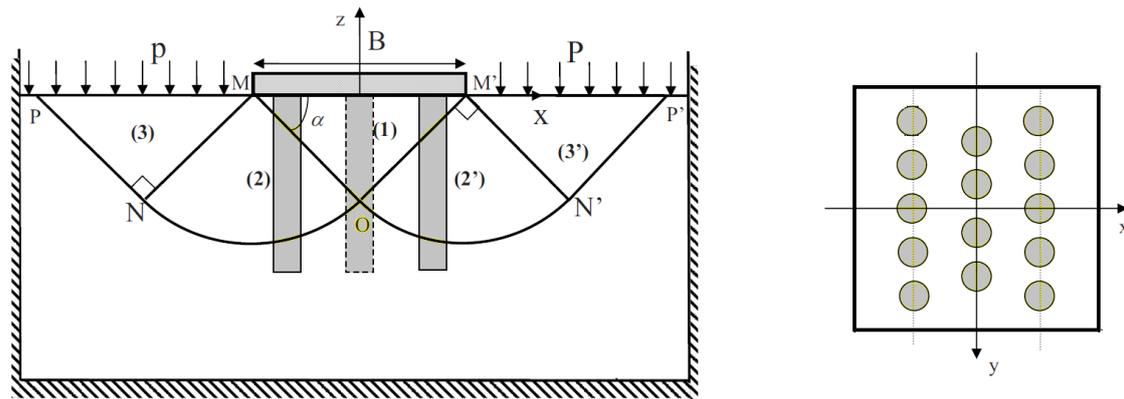


Figura 2.19 – Mecanismo da abordagem cinemática considerada por [Bouassida et al. \(2009\)](#)

2.1.4 Considerações dos Métodos de Dimensionamento

As diversas metodologias que utilizam equilíbrio limite para estimar carregamentos de ruptura levam a resultados pouco precisos. Por sua vez, aquelas que envolvem uma análise no âmbito do cálculo à ruptura servem como referência mais confiável para comparar com os resultados obtidos nesta pesquisa.

O mecanismo da Figura 2.12 (c) estudado por [Bouassida e Hadhri \(1995\)](#) é um dos mecanismos utilizados para a determinação da carga de ruptura para um solo reforçado por uma coluna isolada no Capítulo 5. A diferença reside em que, no Capítulo 5, é considerado o efeito da gravidade e a fundação é submetida a um carregamento inclinado.

Em relação ao solo reforçado por uma coluna, as abordagens que mais se aproximam às hipóteses utilizadas no Capítulo 5 para representar ao solo e ao reforço, correspondem ao campo de tensões da Figura 2.11 (a) e ao mecanismo da Figura 2.12 (c) propostos por [Bouassida e Hadhri \(1995\)](#). As demais abordagens descritas ou consideram apenas um reforço não friccional, ou não utilizam a teoria do cálculo à ruptura, ou consideram que a fundação apresenta a mesma largura que a coluna de reforço.

Quanto ao solo reforçado por um grupo de colunas, os mecanismos descritos previamente com configuração tridimensional, e os que utilizam a teoria da homogeneização consideram apenas reforços não friccionalis. Os que tratam reforços friccionalis estão baseados na metodologia do equilíbrio limite, que diminui a rigorosidade do método de dimensionamento em relação à teoria do cálculo à ruptura.

Todas as abordagens previamente apresentadas estão referidas a um carregamento superficial puramente vertical. O presente trabalho possui, portanto, um caráter inédito no sentido da extensão do dimensionamento ao caso de carregamento inclinado.

3 ANÁLISE LIMITE

Galileu (1638) é considerado como uma primeira referência explícita do cálculo à ruptura, também referido como análise limite. Ele buscou determinar a carga máxima que uma viga engastada-livre de madeira pode suportar a partir da resistência σ_0 das fibras longitudinais da viga (Figura 3.1 (a)). O raciocínio proposto está representado na Figura 3.1 (b) e baseia-se em uma abordagem estática: as fibras da madeira todas tracionadas equilibram o momento da força na extremidade.

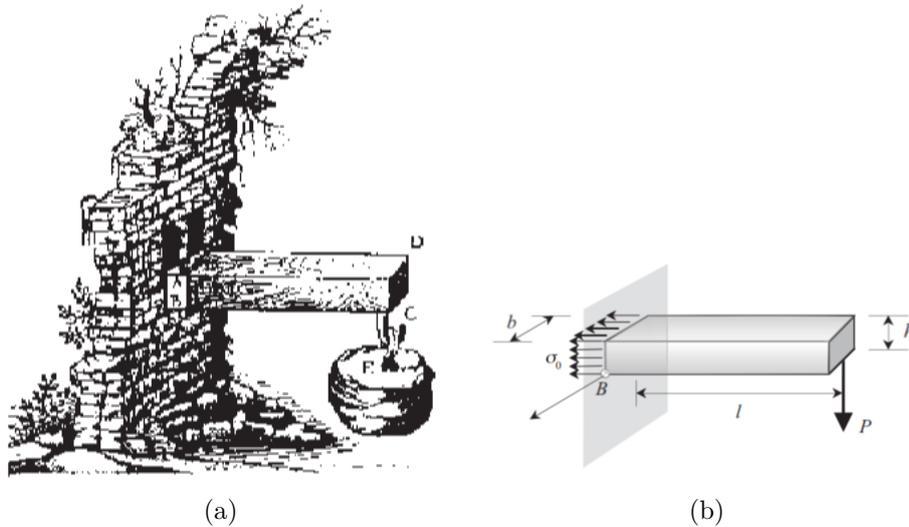


Figura 3.1 – Representação esquemática do raciocínio de Galileu Galilei. Adaptado de [Salençon \(2002\)](#)

Coulomb (1773), em seu trabalho intitulado *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture*, define os princípios de “atrito” e “coesão”, e as denomina *forças coercitivas*, manifestando a diferença destas forças com as forças ativas: as forças coercitivas são estimadas por limites de resistência ([Salençon, 2002](#)).

O trabalho de Coulomb (1773) serviu de base para numerosos métodos da análise de estabilidade de estruturas de engenharia. Na mecânica de solos, estes métodos procuraram verificar o equilíbrio do solo assegurando a condição de resistência do mesmo. Como exemplo dessas análises, encontra-se o método de Culmann (1866), a análise de Fellenius (1927) e de Rendulic (1935) para estabilidade de taludes. A estabilidade de fundações superficiais e a determinação da sua capacidade de carga foram abordadas da mesma maneira ([Salençon, 2002](#)). Estes métodos denominados “equilíbrio limite” tiveram por objetivo estas determinações, escolhendo superfícies de ruptura onde a resistência máxima do solo era suposta atingida, e equilibrando localmente com as forças externas. Como o equilíbrio global não era inteiramente assegurado, estes resultados terminaram sendo

estimativas pouco precisas da capacidade de carga (Chen, 1975).

Provavelmente a origem indutiva do cálculo à ruptura surgiu das observações das linhas de ruptura encontradas em diferentes estruturas. A Figura 3.2 (a) apresenta um ensaio sobre um modelo reduzido de laje armada, onde a deformação da laje na ruptura por flexão está localizada ao longo de *charneiras* (linhas de ruptura). Pode-se então analisar a estrutura através de um mecanismo construído com as charneiras introduzindo o conceito de resistência mobilizada em cada ponto: a resistência mobilizada ao longo das charneiras devem equilibrar as forças motrizes no mecanismo considerado. Esta é uma forma intuitiva da abordagem cinemática do cálculo à ruptura (Salençon, 2002).

Em alguns casos as superfícies de deslizamento são associadas a campos de velocidade contínuos (Figura 3.2 (b)), o raciocínio consiste no equilíbrio das forças motrizes e as forças de resistência num sistema de movimento que conduz implicitamente a referir-se às potências desenvolvidas por estas forças (Salençon, 2002).

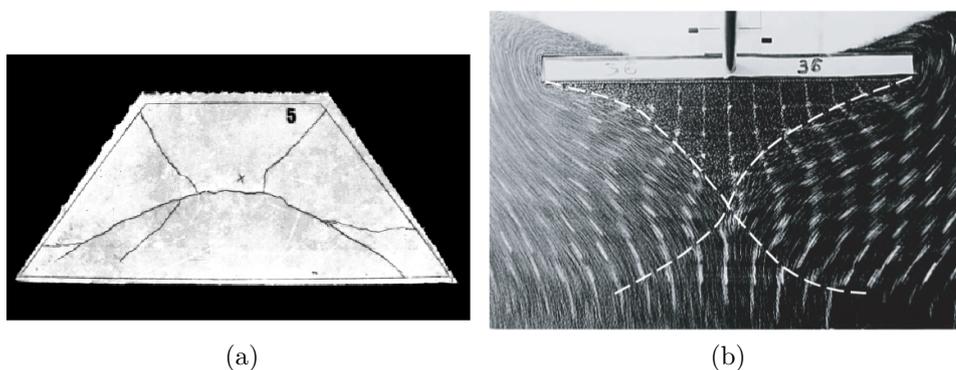


Figura 3.2 – (a) Ruptura em flexão de um modelo reduzido de laje armada (Milicevic, Faulté polytechnique de Mons) (b) Puncionamento de um material friccional bidimensional (Salençon, 2002)

Chen (1975) e Salençon (1983) constituem as primeiras referências que apresentam formalmente a teoria do cálculo à ruptura. A análise limite se interessa apenas no estudo das propriedades de carregamentos limites. É baseada nos teoremas dos limites inferior (estático) e superior (cinemático). Estes teoremas fornecem limites superiores e inferiores da carga limite da estrutura.

O objetivo do raciocínio da análise limite é fornecer uma resposta à questão: o sistema é ou não estável sob a sollicitação a que é submetido, conhecida a sua geometria e características de resistência do material. A análise limite é utilizada para estimar a capacidade de carga de qualquer tipo de estrutura: fundações superficiais e profundas, túneis, estabilidade de taludes, lajes, vigas, pórticos, etc.

A obtenção da carga limite de uma estrutura é muito importante e serve como base para

dimensionamentos de engenharia. Além disso seus resultados podem ser comparados com aqueles de outros métodos permitindo avaliar se estes são a favor ou contra a segurança. Aproximações assim como respostas exatas foram encontradas para problemas práticos da mecânica dos solos e o método produz sempre um valor próximo à carga de colapso sem levar em conta a complexidade do mesmo. O método é racional e consegue obter resultados simples através de cálculos rápidos. Entretanto, ele depende muito da habilidade e intuição do engenheiro.

Um método mais refinado consiste numa análise elastoplástica incremental de tensões e deformações à medida que a carga aumenta de zero até o fluxo plástico livre. Este método denominado trajetória de carregamento, apresenta dificuldades para a aplicação prática. Além da descrição da geometria e solicitações do problema em estudo, ele requer uma descrição completa das propriedades dos materiais assim como das relações de tensão e deformação de cada material. O método do cálculo à ruptura requer apenas das propriedades de resistência de cada material. Estas propriedades são medidas com maior facilidade que as propriedades de deformação necessárias para o método de trajetória de carregamento.

Neste capítulo, apresentam-se, inicialmente, a problemática da análise limite e os fenômenos e conceitos a serem utilizados. Na sequência são descritas as abordagens estática e cinemática para aproximar-se à fronteira de domínio de cargas admissíveis do sistema estudado. Finalmente, são apresentados critérios de resistência a serem utilizados neste trabalho, assim como as suas respectivas funções de apoio.

3.1 DOMÍNIO DE RESISTÊNCIA

Seja um sólido contínuo tridimensional de volume Ω e contorno $\partial\Omega$. O modo de carregamento do sistema é descrito por um vetor de carga (\underline{Q}) de n parâmetros, com componentes Q_i em \mathfrak{R}^n , como se apresenta na Figura 3.3.

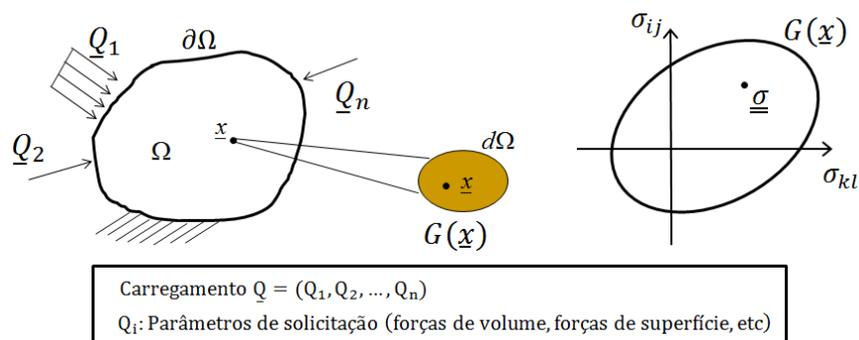


Figura 3.3 – Sistema a analisar

A questão é encontrar a condição que leva ao solo a um estado de fluxo plástico livre. Essa condição é denominada critério de resistência, e define a falha local ou a ruptura do contínuo em cada ponto. Este critério de resistência é dado por um domínio $G(\underline{x})$ no espaço de tensões (\mathfrak{R}^6). Se num ponto \underline{x} o estado de tensões $\underline{\sigma}$ estiver dentro do domínio G , a tensão é admissível nesse ponto (Figura 3.3)

O critério de resistência geralmente é definido por um escalar f :

$$\underline{\sigma} \in G(\underline{x}) \leftrightarrow f(\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})) \leq 0 \leftrightarrow \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ é admissível no ponto } x \quad (3.1)$$

Consideram-se as seguintes hipóteses em relação ao critério de resistência, que levam a propriedades do domínio de carregamentos admissíveis a serem utilizadas posteriormente:

$$\begin{aligned} G(\underline{x}) \text{ é convexo} \\ 0 \subset G(\underline{x}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

A lei de fluxo é associada

O objetivo do raciocínio da análise limite é fornecer uma resposta à questão: o sistema é ou não estável sobre a carga \underline{Q} , conhecida a sua geometria e características de resistência do material.

3.2 CARGA ADMISSÍVEL

Para determinar as cargas \underline{Q} que podem ser suportadas pelo sistema, dadas as condições de resistência, deve existir uma compatibilidade matemática entre as equações de equilíbrio e as características de resistência do material (Salençon, 2002):

$$\underline{Q} \text{ é admissível} \leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma} \text{ E.A. sobre } \underline{Q}(\underline{x}) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

onde E.A. denota estaticamente admissível.

O conjunto das cargas admissíveis é denotado por K e é definido como (Salençon, 2002):

$$K = \{Q / \exists \underline{\sigma} \text{ E.A. e } f(\underline{\sigma}) \leq 0 \forall \underline{x} \in \Omega\} \quad (3.4)$$

Este conjunto K constitui um domínio de cargas admissíveis no espaço de \mathfrak{R}^n , onde n corresponde ao número de parâmetros de carregamento de \underline{Q} . Os carregamentos que se encontram na fronteira de K são designados carregamentos limites ∂K do sistema, uma vez que qualquer carga fora de K produz um sistema instável (Figura 3.4) (Salençon, 2002).

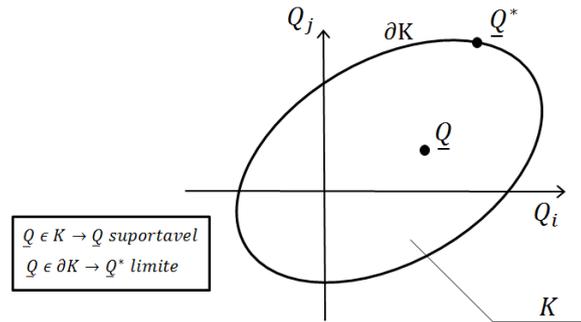


Figura 3.4 – Domínio de carregamento admissível para um modo de carregamento de dois parâmetros (Q_i e Q_j). Adaptação de Salençon (1983)

As propriedades de K são consequências diretas das propriedades 3.2 de G e da linearidade das equações de equilíbrio, e são as seguintes (Salençon, 1983):

- $K \subset \mathfrak{R}^n$
- ∂K caracteriza as cargas limite \underline{Q}^*
- $\underline{Q} = 0 \in K$ pois $\underline{\sigma} = 0 \in G$
- K é convexo devido à convexidade de G e à linearidade de $\text{div}\underline{\sigma}$

Pela definição de convexidade, afirma-se então:

$$\begin{aligned} \forall \underline{Q}_1 \in K \text{ e } \forall \underline{Q}_2 \in K, \text{ o segmento } [\underline{Q}_1, \underline{Q}_2] \in K \\ \text{e} \\ \alpha \underline{Q}_1 + (1 - \alpha) \underline{Q}_2 \in K \quad \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Na figura 3.5 se mostra a propriedade da convexidade de K .

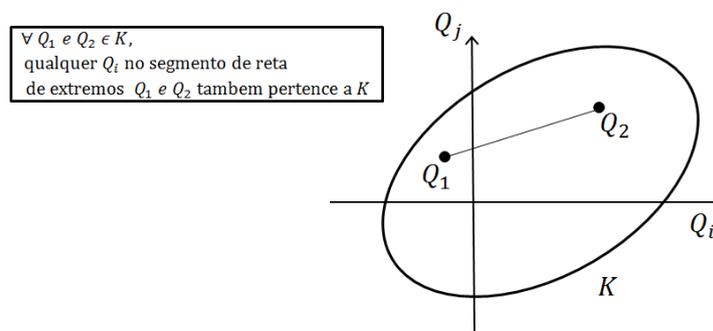


Figura 3.5 – Propriedade da convexidade de K

São apresentadas algumas características dos carregamentos limites da fronteira ∂K (Salençon, 1983):

- o carregamento limite sobre um trajeto de carga é independente das tensões iniciais;
- são independentes do trajeto de carga (Figura 3.6);
- são independentes das características elásticas lineares do material constitutivo;
- sua determinação pode ser feita diretamente, sendo desnecessário resolver o problema elasto-plástico passo a passo ao longo de trajeto de carregamento, a partir do estado inicial conhecido.

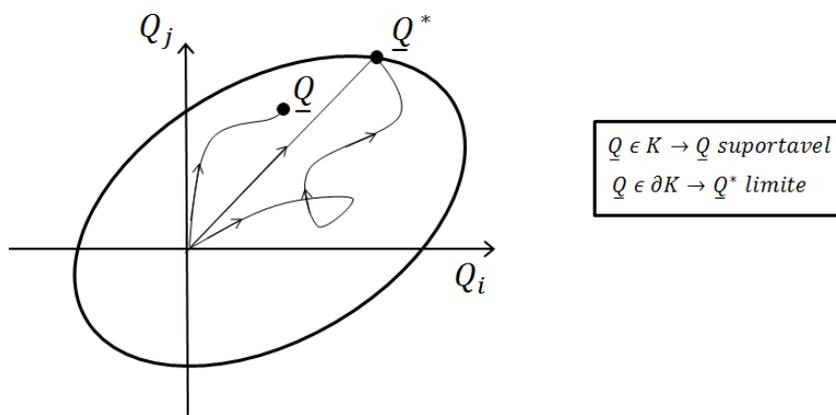


Figura 3.6 – Independência do trajeto de carga. Adaptação de Salençon (1983)

Para construir K devem ser encontradas as cargas limites \underline{Q}^* do sistema. A determinação analítica de K não é em geral possível, assim a análise limite utiliza os teoremas estático e cinemático para aproximar-se de ∂K pelo interior e pelo exterior, respectivamente (Salençon, 1990).

3.3 APROXIMAÇÃO DE K PELO INTERIOR: ABORDAGEM ESTÁTICA

Qualquer campo de tensões em equilíbrio com \underline{Q} e que satisfaz o critério de resistência é suficiente para dizer que \underline{Q} é admissível ($\underline{Q} \in K$). Essa é a base da aproximação pelo interior de K (Salençon, 1990). O teorema do limite inferior afirma que "se a carga atuante tem uma magnitude que permita encontrar um campo de tensões, satisfazendo às condições de equilíbrio no interior e no contorno, e em qualquer ponto do corpo essas tensões estejam satisfazendo um critério de resistência do material, então a carga atuante é menor ou no máximo igual à carga de colapso da estrutura". Expressando o teorema matematicamente para uma tensão dada $\underline{\sigma}^{(m)}$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\sigma}^{(m)} \text{ é E.A.} \\ f(\underline{\sigma}^{(m)}) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{Q}^m = \underline{Q}(\underline{\sigma}^{(m)}) \in K \quad (3.6)$$

A aproximação pelo interior é realizada determinando distintas cargas admissíveis para distintos campos de tensões, e aproveitando as propriedades de convexidade. O procedimento para aproximar-se de K pelo interior é o seguinte:

1. Construir um campo de tensão $\underline{\sigma}^{(m)}$ que satisfaz as equações de equilíbrio e condições de contorno (utilizando a intuição, experiência e imaginação)
2. Assegurar-se que $\underline{\sigma}^{(m)}$ respeita as condições de resistência (Figura 3.7 (a))
3. Repetir as etapas 1 e 2 enquanto desejável para obter uma nuvem de pontos $\underline{Q}_1, \underline{Q}_2, \dots, \underline{Q}_n$ de K (Figura 3.7 (b))
4. Devido à convexidade de K , o envelope convexo K_S desta nuvem de pontos é incluída em K ($K_S \subset K$) (Figura 3.7 (c))

A Figura 3.7 apresenta esquematicamente a abordagem estática para um modo de carregamento de dois parâmetros Q_i e Q_j

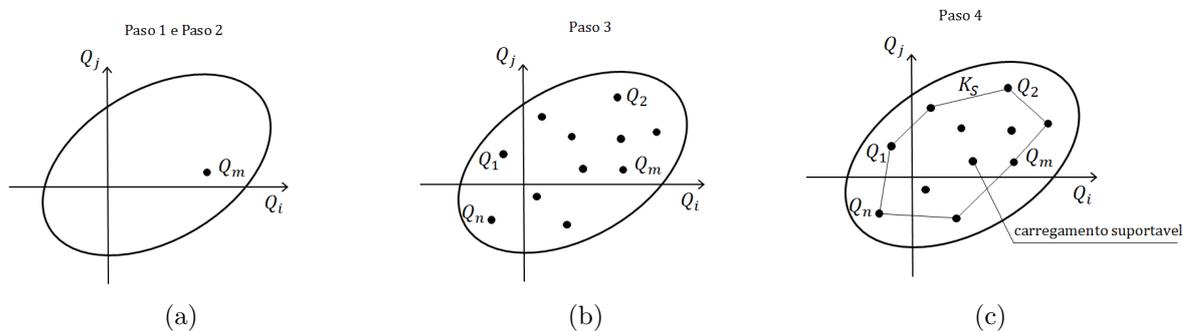


Figura 3.7 – Abordagem estática

A construção de campos de tensões que satisfaçam o equilíbrio e respeitem o critério de resistência faz que a aproximação de K pelo interior seja, em muitas situações, de difícil implementação.

3.4 APROXIMAÇÃO DE K PELO EXTERIOR: ABORDAGEM CINEMÁTICA

Outra alternativa para a obtenção do domínio de cargas admissíveis de uma estrutura é através do emprego da abordagem cinemática da análise limite. O objetivo da abordagem cinemática é obter limites superiores das cargas limites ou cargas de ruptura (Salençon, 1990).

Para a abordagem cinemática são utilizados mecanismos virtuais, os quais são representados por campos de velocidades virtuais \underline{U} compatíveis com as condições de contorno do sistema. Designa-se por $\underline{U}(\underline{x})$ ao valor local do campo num ponto \underline{x} .

Campos de velocidades descontínuos podem ser usados na aplicação do teorema cinemático, os quais contêm muitas vezes o modo de colapso real do sistema.

O campo de velocidades \underline{U} está associado a um campo de taxas de deformações. As referências utilizadas para aplicar a abordagem cinemática são as seguintes:

- \underline{d} denota o campo de taxas de deformações virtuais associadas ao campo de velocidades virtuais \underline{U} ,
- Σ denota a superfície na qual ocorre um salto de velocidade, ou seja, uma descontinuidade de velocidade,
- $[\underline{U}(\underline{x})]$ denota o salto de \underline{U} de velocidade, num ponto \underline{x} na direção normal $\underline{n}(\underline{x})$ à superfície Σ correspondente,
- \underline{q} denota a velocidade virtual associada com o ponto de aplicação da carga \underline{Q} ao expressar a potência das forças externas

É possível derivar a abordagem cinemática a partir da dualização da abordagem estática. Utilizando o teorema das potências virtuais que constitui uma forma equivalente às equações de equilíbrio (Salençon, 1990).

O princípio das potências virtuais aplicado ao problema estático é:

$$P_{ex} = -P_{int} = P_{def} \quad \forall \text{ movimento virtual} \quad (3.7)$$

onde P_{ex} denota a potência das forças externas, P_{int} a potência das forças internas e P_{def} denota a potência de deformação. O trabalho externo é dado por:

$$P_{ex} = \underline{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{q}(\underline{U}) \quad (3.8)$$

A equação 3.6, escrita em termos do princípio das potências virtuais em função das tensões, deformações, cargas e vetor cinemático é:

$$\begin{aligned} \forall \underline{\sigma} \text{ E.A. sobre } \underline{Q}(\underline{\sigma}) \text{ e } \forall \underline{U} \text{ C.A. com } \underline{q}(\underline{U}) \\ \underline{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{q}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \underline{\sigma}(x) : \underline{d}(x) d\Omega + \int_{\Sigma} [\underline{U}(x)] \cdot \underline{\sigma}(x) \cdot \underline{n}(x) d\Sigma \\ f(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde o símbolo ":"denota produto de dupla contração, "."denota produto escalar, E.A. denota "estaticamente admissível" e C.A. denota "cinematicamente admissível".

A abordagem cinemática considera o seguinte raciocínio: as cargas impostas não serão admissíveis pelo sistema, se para qualquer mecanismo de ruptura, a potência das forças externas, excede o máximo valor que pode ser mobilizado pela potência de deformação (Salençon, 1990), ou seja:

$$\text{Se } \exists \underline{U} \text{ C.A. tal que } P_{ex} > \sup(P_{def}), \underline{Q} \text{ é não admissível} \quad (3.10)$$

Para maximizar a potência de deformação, introduzem-se as funções de apoio do domínio de resistência π que representam o máximo valor que pode ser mobilizado pela potência de deformação num ponto \underline{x} permitindo que $\underline{\sigma}(\underline{x})$ atinja à capacidade de resistência do material. As funções de apoio π dependem do ponto considerado \underline{x} de Ω e do valor local de \underline{d} , ou $[\underline{U}]$ (Salençon, 1990). Num ponto \underline{x} , os valores da função de apoio π são:

$$\pi(\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})) = \sup\{\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) | \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x})\} \quad (3.11)$$

ou

$$\pi(\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}), [\underline{U}(\underline{x})]) = \sup\{[\underline{U}(\underline{x})] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) | \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x})\} \quad (3.12)$$

Assim, a máxima potência de deformação do sistema é denominada potência resistente máxima $P_{rm}(\underline{U})$ e é dada pelo seguinte funcional :

$$P_{rm}(\underline{U}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}), [\underline{U}(\underline{x})]) d\Sigma \quad (3.13)$$

A equação 3.9 escrita em termos de potência resistente máxima é

$$P_{ex} \leq P_{rm} \quad \forall \text{ mecanismo virtual} \quad (3.14)$$

A partir de 3.10 e 3.13, obtém-se a expressão que caracteriza o teorema cinemático:

$$\text{Se } \exists \underline{U} \text{ C.A. tal que } \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} > \int_{\Omega} \pi(\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}), [\underline{U}(\underline{x})]) d\Sigma \Rightarrow \underline{Q} \notin K \quad (3.15)$$

e assim definição cinemática de K é:

$$\text{Se } \underline{Q} \in K \Rightarrow \forall \underline{U} \text{ C.A., } \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} \leq \int_{\Omega} \pi(\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}), [\underline{U}(\underline{x})]) d\Sigma \quad (3.16)$$

Cada campo de velocidades \underline{U} que satisfaz a inequação 3.16 corresponde a uma condição necessária para que \underline{Q} seja admissível.

Desta forma o domínio K é incluso no espaço \mathfrak{R}^n definido pela inequação (Salençon, 1990):

$$\forall \underline{U} \text{ C.A. no sistema, } K \subset \{\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{U}) - P_{rm}(\underline{U}) \leq 0\} \quad (3.17)$$

O teorema cinemático fornece uma condição necessária de estabilidade da estrutura, porém a abordagem cinemática fornece limites superiores das cargas limites. Então a carga será admissível se a resistência máxima que pode ser mobilizada pela estrutura é maior que o trabalho desenvolvido pela carga em qualquer movimento virtual (mecanismo de ruptura) (Salençon, 1990).

Para a implementação prática seguem-se as etapas:

1. Escolher um mecanismo de ruptura virtual $\underline{U}^{(m)}$ C.A.
2. Calcular $P_{ex}(\underline{U}^{(m)}) = \underline{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \dot{q}(\underline{U}^{(m)})$ e $P_{rm}(\underline{U}^{(m)})$. Obter $\underline{Q}^{(m)}$ tal que $\underline{Q} \cdot \dot{q}(\underline{U}) - P(\underline{U}) \leq 0$, obtendo-se assim um plano limite como se apresenta na Figura 3.8 (a)
3. Repetir as etapas 1 e 2 enquanto desejável para obter vários planos (Figura 3.8 (b))
4. Devido à convexidade de K , a envoltória convexa K_C (Figura 3.8) deste plano contém K ($K \subset K_C$) (Figura 3.8c))

Muitas vezes pretende-se limitar K numa determinada direção, o qual consiste em usar o método para uma $\dot{q} = \dot{q}^0$ dada. Então $P(\underline{U})$ é minimizado nos campos de velocidades virtuais \underline{U} tais que $\dot{q} = \dot{q}^0$ (Figura 3.9) (Salençon, 1983).

A abordagem cinemática é muito usada na engenharia. Pela experiência, sabe-se que para qualquer mecanismo o limite superior da carga obtida fica muito perto da carga limite real, enquanto que pela abordagem estática a carga limite inferior obtida fica longe da mesma.

A equivalência entre a abordagem estática e cinemática foi estabelecida por Nayroles (1970), Frémond e Friaà (1978) e Friaà (1979). Eles provaram que, para as hipóteses consideradas em 3.2, a definição dual de K é dada pela equação 3.17. Em outras palavras, aplicando essa equação para todos os campos de velocidade virtuais C.A., K é gerado.

3.5 FUNÇÕES DE APOIO π

Para que a equação 3.17 seja efetiva, devem-se satisfazer as seguintes condições (Salençon, 1983):

$$\dot{q}(\underline{U}) \neq 0 \quad (3.18)$$

$$P_{rm}(\underline{U}) < +\infty \quad (3.19)$$

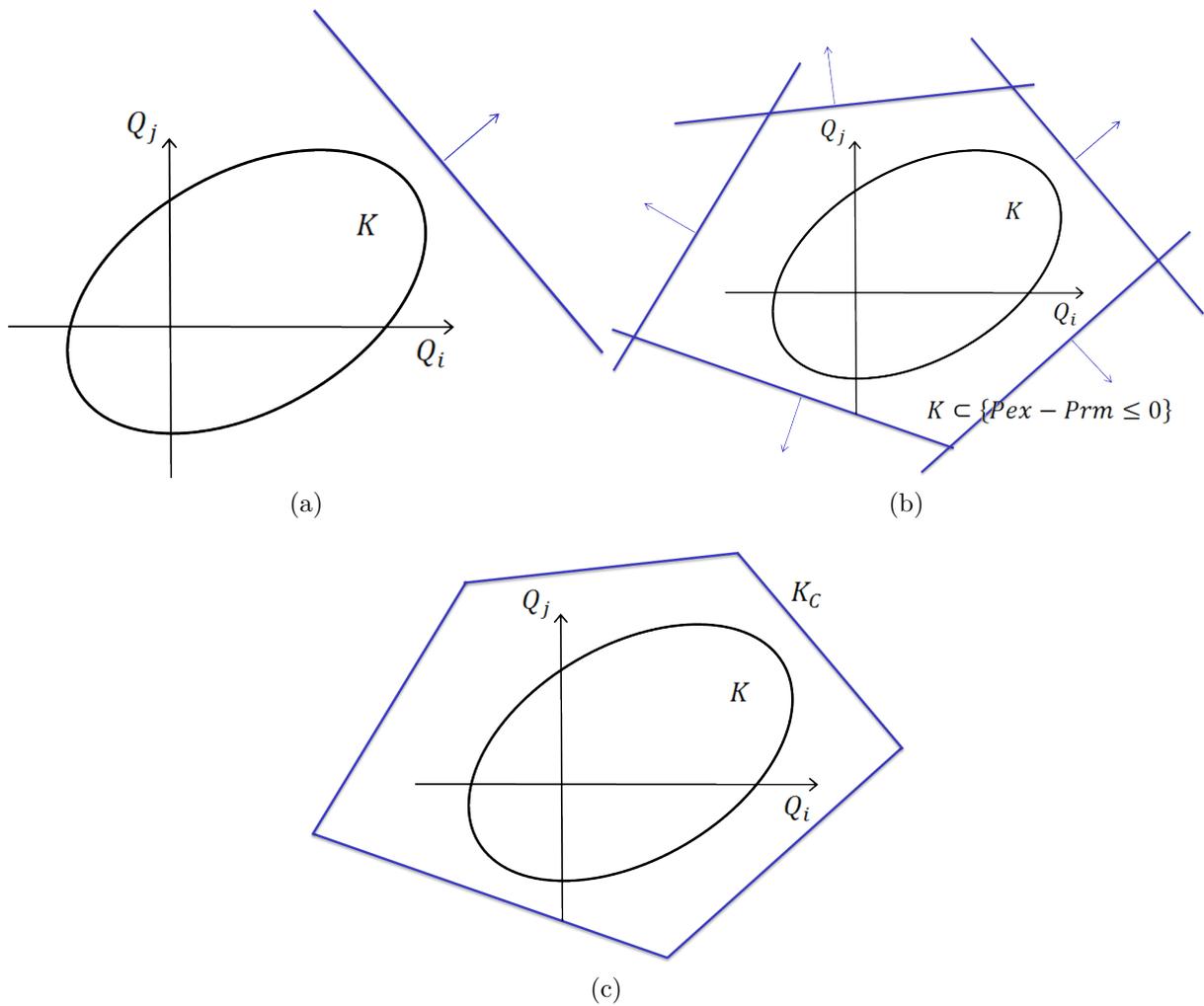


Figura 3.8 – Aproximação cinemática de K pelo exterior para um modo de carregamento de 2 parâmetros (Q_i e Q_j)

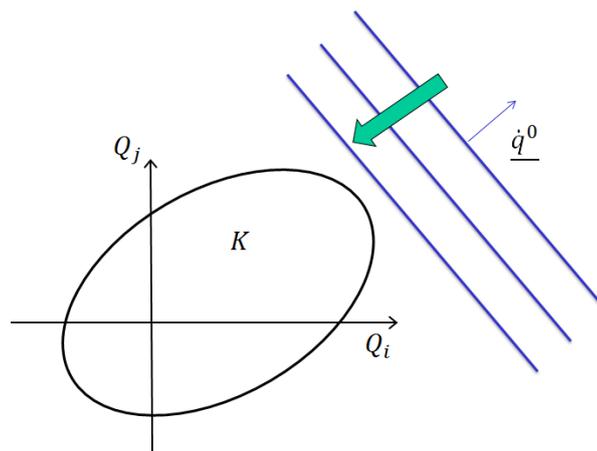


Figura 3.9 – Aproximação cinemática de K numa direção. Adaptação de Salençon (1983)

A primeira condição impõe que o campo de velocidades virtuais deve ser adotado de forma que as forças aplicadas efetuem trabalho, a segunda condição implica que o campo de

velocidades deve ser escolhido de tal maneira que:

$$\pi(\underline{x}; \underline{d}(x)) \text{ seja finito em todo } \Omega \quad (3.20)$$

e

$$\pi(\underline{x}; \underline{n}(x)), [\underline{U}(x)] \text{ seja finito em } \Sigma \quad (3.21)$$

de modo que o carregamento limite obtido seja finito. Para obter uma boa aproximação pelo exterior, a condição 3.21 é muito importante na escolha dos campos virtuais de velocidades relevantes (Salençon,1983).

3.6 IMPLEMENTAÇÃO DA ANÁLISE LIMITE: CASO DE CRITÉRIOS ISÓTROPOS

A seguir é apresentado o princípio de representação geométrica para critérios de resistência isotrópicos. No caso de isotropia, o critério de resistência depende apenas das tensões principais σ_i e não depende das suas direções principais:

$$f(\underline{\sigma}) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Neste caso é possível representar geometricamente o domínio de resistência no espaço \mathfrak{R}^3 de tensões principais (Figura 3.10).

A reta ON que passa pela origem de coordenadas e forma o mesmo ângulo com cada eixo coordenado, é chamada *eixo hidrostático* (Figura 3.10). Cada ponto desta reta corresponde a valores iguais das tensões principais: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, e a tensão desviadora é igual a zero. Qualquer plano perpendicular a ON é chamado *plano desviador* (Chen,1975), e tem a forma:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}\xi \quad (3.22)$$

onde ξ corresponde à distância entre o plano desviador e a origem de coordenadas (Chen e Han,1988).

Considera-se um estado de tensões arbitrário num ponto dado, cujas componentes de tensões são σ_1, σ_2 e σ_3 . Este estado de tensões é representado por um ponto $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ no espaço de tensões principais da Figura 3.11. O vetor de tensões OP pode ser decomposto em duas componentes, a componente ON na direção do eixo hidrostático, e a componente NP no plano desviador que passa por N . Assim $\xi = |ON|$ e o módulo de NP é designado por $\rho = |NP|$ (Chen,1975).

Projetando os eixos principais no plano desviador, são obtidos os eixos $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ (Figura 3.12). Dessa maneira, o estado de tensões P pode ser expressado pelas coordenadas (ξ, ρ, θ) ,

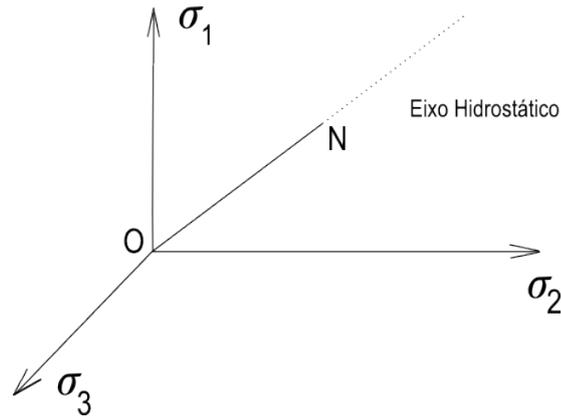


Figura 3.10 – Espaço de tensões principais

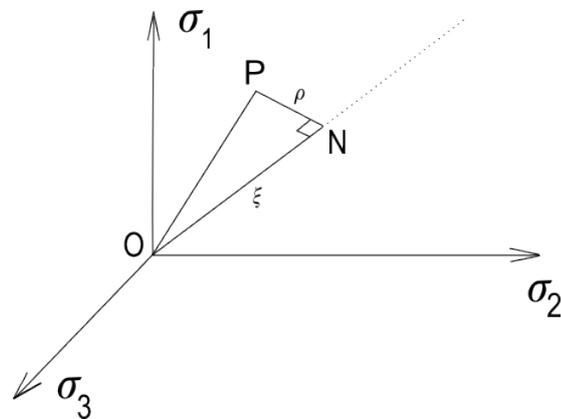


Figura 3.11 – Ponto P no espaço de tensões principais

onde θ corresponde ao ângulo que forma o vetor OP com o eixo principal σ'_1 no plano desviador (Figura 3.12).

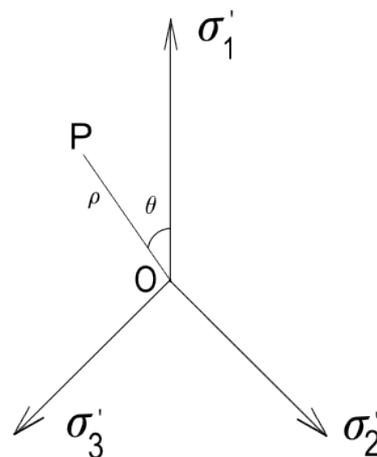


Figura 3.12 – Ponto P no plano desviador

Alguns critérios de resistência isotrópicos usuais são o critério de Coulomb e o critério de Tresca. Estes critérios serão utilizados neste trabalho para representar a coluna (elemento de reforço) e solo, respetivamente.

3.7 MATERIAL DE COULOMB

O critério de Coulomb (1773) estabelece que o critério de resistência ocorre em qualquer plano e qualquer ponto do material quando a tensão de cisalhamento τ atinge um valor que depende linearmente da coesão C e da tensão normal σ :

$$\tau = C + \sigma \tan(\varphi) \quad (3.23)$$

onde φ é denominado ângulo de atrito interno. C e φ são parâmetros que caracterizam a resistência do material ao cisalhamento. O critério de resistência de Coulomb é adequado para modelar geomateriais friccionais como por exemplo areias (Chen, 1975).

A Figura 3.13 corresponde à representação gráfica das tensões no plano $\sigma - \tau$, valores de σ e τ que satisfazem o critério de resistência de Coulomb são representados por duas retas que se encontram no ponto $(C \cot(\varphi), 0)$, inclinadas um ângulo φ com o eixo positivo σ (Chen, 1975).

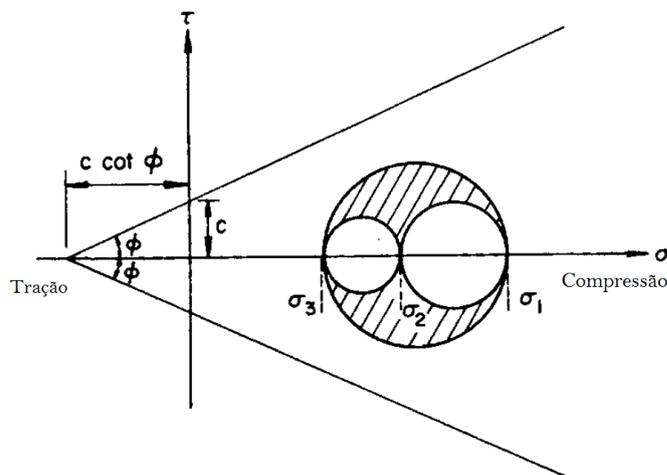


Figura 3.13 – Representação de um estado de tensões através dos círculos de Mohr e critério de resistência de Coulomb

Se o estado de tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 é tal que o círculo de Mohr maior fica dentro da região definida pelo critério, o material não atingiu seu limite de resistência.

Usando as tensões principais como coordenadas, pode-se representar geometricamente a superfície de ruptura em três dimensões, que no caso do material de Coulomb corresponde a um cone cuja seção é um hexágono irregular (Figura 3.14).

O critério de resistência de Coulomb expresso em termos das tensões principais maior σ_M

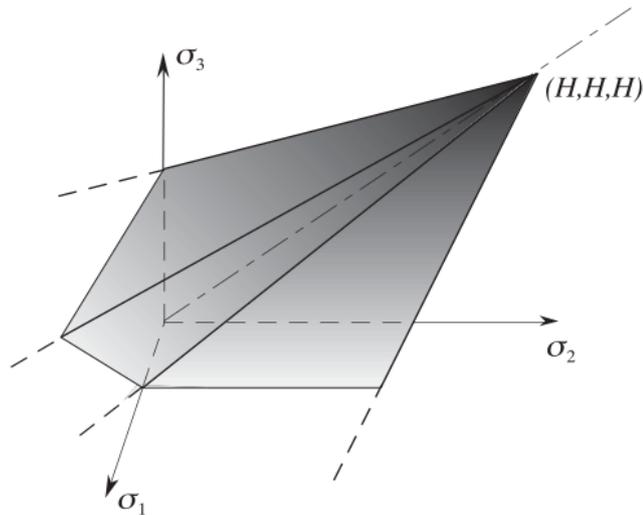


Figura 3.14 – Superfície de ruptura de Coulomb no espaço de tensões principais Salençon (2002)

e menor σ_m é:

$$f(\underline{\sigma}) = (\sigma_M - \sigma_m) + (\sigma_M + \sigma_m) \operatorname{sen}(\varphi) - 2C \cos(\varphi) \quad (3.24)$$

e em coordenadas (ξ, ρ, θ) :

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\xi \operatorname{sen} \varphi + \sqrt{3}\rho \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \rho \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \operatorname{sen} \varphi - \sqrt{6}C \cos \varphi = 0 \quad (3.25)$$

com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. A superfície de ruptura no plano meridiano, desviador e $\sigma_1 - \sigma_2$ é graficamente representada na Figura 3.15.

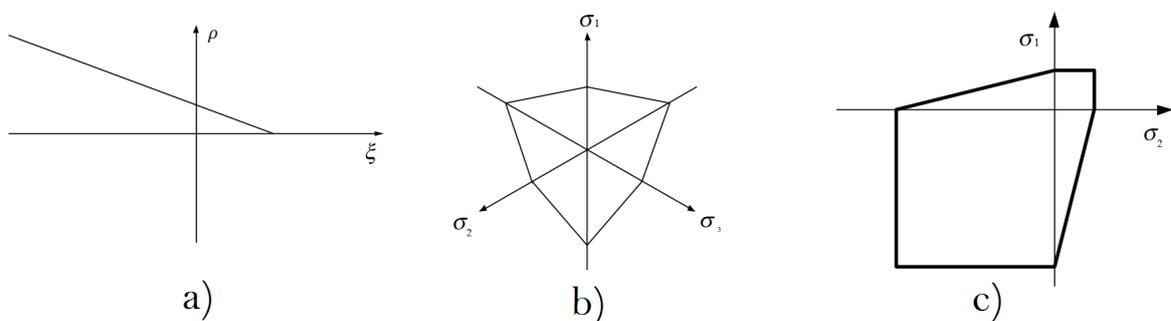


Figura 3.15 – Superfície de ruptura de Coulomb a) no plano meridiano b) no plano desviador c) no plano $\sigma_1 - \sigma_2$

Localização da deformação: Descontinuidade de velocidade

Para reproduzir mecanismos observados experimentalmente, é necessário, em muitas situações, considerar descontinuidades de velocidades. As superfícies planas e espirais logarítmicas de ângulo φ são as duas únicas descontinuidades de velocidades permitidas na análise limite para movimentos relativos do corpo rígido quando o material for do tipo Coulomb (Chen, 1975).

Se um bloco rígido realiza uma rotação em relação a outro, a superfície de descontinuidade de velocidade é uma espiral logarítmica (Figura 3.16). O vetor de velocidade relativa forma um ângulo constante ϕ com a superfície de transição ao longo de todo o comprimento.

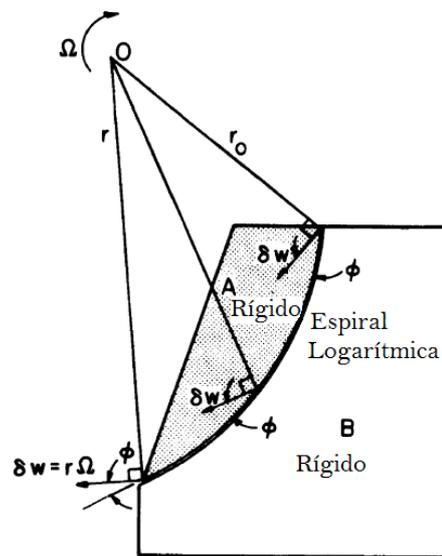


Figura 3.16 – Rotação do corpo rígido A em relação ao corpo B (Chen, 1975)

Função de apoio π para o material de Coulomb

As funções de apoio para o critério de resistência de Coulomb são dadas pelas seguintes equações (Salençon, 1983):

$$\begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty && \text{se } \text{tr} \underline{d} < (|d1| + |d2| + |d3|) \text{sen } \varphi; \\ \pi(\underline{d}) &= H \cdot \text{tr} \underline{d} && \text{se } \text{tr} \underline{d} \geq (|d1| + |d2| + |d3|) \text{sen } \varphi \end{aligned} \quad (3.26)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \pi(\underline{n}; [\underline{U}]) &= +\infty && \text{se } [\underline{U}] \cdot \underline{n} < |[\underline{U}]| \text{sen } \varphi \\ \pi(\underline{n}; [\underline{U}]) &= H [\underline{U}] \cdot \underline{n} && \text{se } [\underline{U}] \cdot \underline{n} \geq |[\underline{U}]| \text{sen } \varphi \end{aligned} \quad (3.27)$$

A condição 3.26 indica que para o material de Coulomb falhar deve existir uma variação volumétrica mínima. A condição 3.27 indica que a descontinuidade de velocidade $[\underline{U}]$ deve

formar um ângulo superior a φ com plano da superfície de descontinuidade de velocidades virtuais Σ , para que o material de Coulomb falhe.

3.8 MATERIAL DE TRESCA

A superfície de ruptura de Tresca corresponde ao caso particular do critério de ruptura de Coulomb onde não existe atrito interno ($\varphi = 0$). Neste trabalho é utilizado especificamente, para modelar o comportamento reológico do solo argiloso que em condições de aplicação de carga imediata após aplicação da carga a parcela friccional é suprimida (condições não drenadas). O critério de resistência de Tresca supõe que a resistência do material foi atingida quando a tensão máxima de cisalhamento atinge um valor específico, além disso supõe isotropia do material e incompressibilidade. Expresso em termos das tensões principais maior σ_M e menor σ_m , o critério é escrito como (Chen, 1975):

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_M - \sigma_m - \sigma_0 \quad (3.28)$$

onde σ_0 é a resistência em tração-compressão, e a coesão é $C = \frac{\sigma_0}{2}$.

No espaço de tensões principais, pode-se representar geometricamente a superfície de ruptura em três dimensões, que corresponde a um prisma que tem por base um hexágono regular, cujo eixo forma ângulos iguais com os eixos das tensões principais. (Figura 3.17).

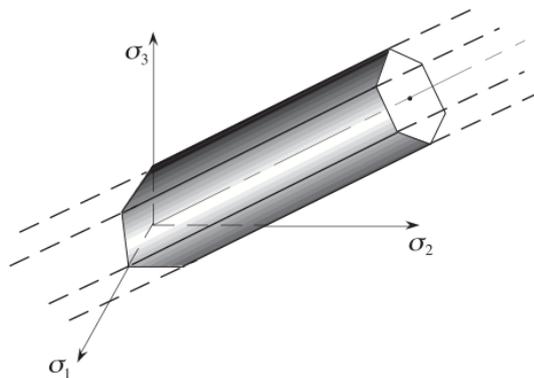


Figura 3.17 – Superfície de resistência de Tresca no espaço de tensões principais (Salençon,2002)

Este critério é independente da pressão hidrostática, fato que pode ser melhor visualizado nas coordenadas (ξ, ρ, θ) :

$$f(\rho, \theta) = \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2}k \quad (3.29)$$

onde k é a resistência em cisalhamento puro.

Na Figura 3.18c) observa-se a interseção da superfície de ruptura (Figura 3.17) com o plano $\sigma_1 - \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$). Na Figura 3.18a) é apresentada a superfície de ruptura no plano meridiano e na Figura 3.18b) no plano desviador.

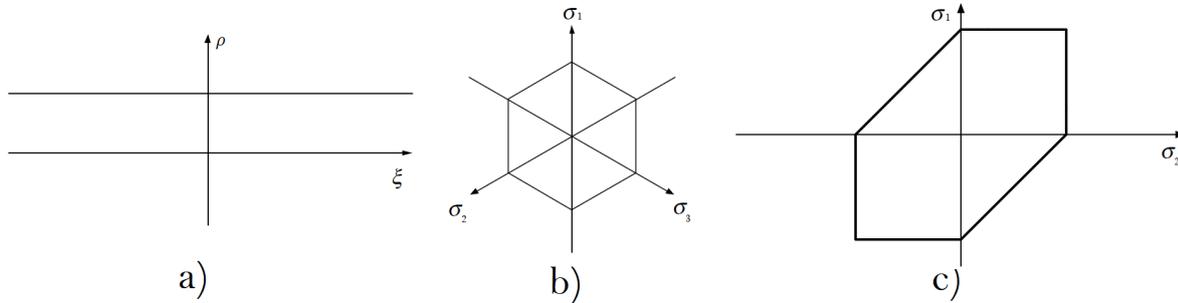


Figura 3.18 – Superfície de resistência de Tresca a) no plano meridiano b) no plano desviador c) no plano $\sigma_1 - \sigma_2$

Localização da deformação: Descontinuidade de velocidade

As superfícies planas e circulares são as duas únicas descontinuidades de velocidades permitidas na análise limite para movimentos relativos do corpo rígido quando o material for do tipo Tresca. As velocidades relativas são tangentes à superfície de descontinuidade (Chen, 1975).

Função de apoio π para o material de Tresca

As funções de apoio para o critério de resistência de Tresca são dadas pelas seguintes equações (Salençon, 1983):

$$\begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty \quad \text{se } \text{tr}\underline{d} \neq 0 \\ \pi(\underline{d}) &= \frac{\sigma_o}{2} (|d1| + |d2| + |d3|) \quad \text{se } \text{tr}\underline{d} = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

ou

$$\begin{aligned} \pi(\underline{n}; [\underline{U}]) &= +\infty \quad \text{se } [\underline{U}] \cdot \underline{n} \neq 0 \\ \pi(\underline{n}; [\underline{U}]) &= \frac{\sigma_o}{2} |[\underline{U}]| \quad \text{se } [\underline{U}] \cdot \underline{n} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

A condição 3.30 indica que para o material de Tresca falhar não pode existir variação do volume. A condição 3.31 indica que a descontinuidade de velocidade $[\underline{U}]$ deve pertencer ao plano da superfície de descontinuidade de velocidade Σ para que o material de Tresca falhe.

4 FUNDAÇÃO SUPERFICIAL SOBRE UM SOLO ARGILOSO SUBMETIDA A CARREGAMENTO INCLINADO

Neste capítulo apresentam-se alguns resultados do cálculo da capacidade de carga de fundações superficiais sobre solos argilosos, submetidas a carregamentos inclinados. A resistência dos solos argilosos é caracterizada na análise através do critério de Tresca. Utiliza-se tanto a abordagem estática como a cinemática da análise limite, a fim de obter uma aproximação do domínio de carregamentos admissíveis. Alguns dos resultados aqui apresentados encontram-se disponíveis na literatura (Salençon e Pecker, 1995a).

Inicialmente as hipóteses consideradas na análise e na modelagem do problema são descritas. Na sequência, constroem-se campos de tensões estaticamente admissíveis para determinar limites inferiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem estática da análise limite, onde a fronteira K_s é determinada. Campos de velocidades cinematicamente admissíveis são então construídos buscando a determinação de limites superiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem cinemática da análise limite, onde a fronteira K_c é determinada. Finalmente, analisam-se os resultados obtidos através das duas abordagens, obtendo assim as aproximações superior e inferior da fronteira do domínio de cargas admissíveis ∂K . A Figura 4.1 representa esquematicamente o procedimento descrito, considerando-se um modo de carregamento de dois parâmetros (Q_i e Q_j).

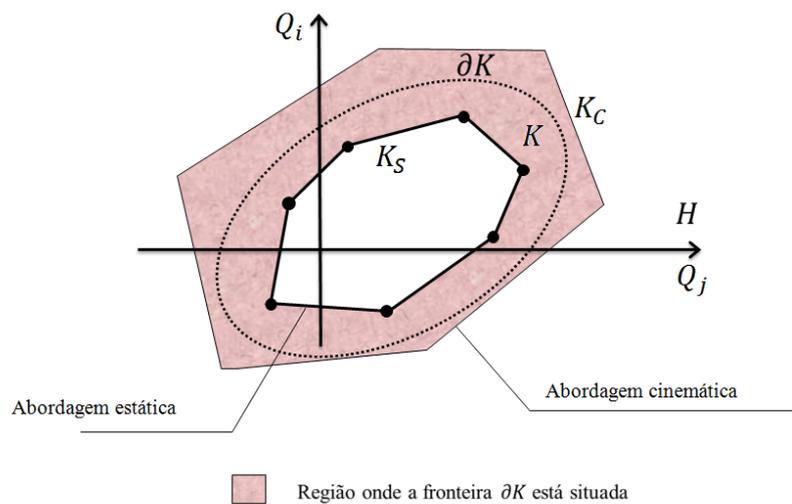


Figura 4.1 – Procedimento para o cálculo da fronteira do domínio de carregamentos admissíveis

4.1 ANÁLISE DO PROBLEMA

O solo de fundação é considerado homogêneo, de peso específico $\underline{\gamma}$ e puramente coesivo caracterizado pelo critério de Tresca e pela coesão C , para representar solos argilosos em condições não drenadas. O contato entre o solo e a fundação é de aderência perfeita e a interface não possui resistência à tração. O carregamento considerado encontra-se na superfície da fundação.

O domínio K de carregamentos admissíveis da fundação encontra-se no espaço \mathfrak{R}^6 dos parâmetros de carregamento, uma vez que são seis os parâmetros de carga: três componentes da resultante de força e três componentes da resultante de momento em relação ao ponto O , o qual constitui o centro geométrico da fundação.

Para simplificar a análise, limita-se ao caso de fundações semi-infinitas retangulares, cuja dimensão na direção z é grande em relação a sua largura B , a qual está disposta segundo a direção y (Figura 4.2). Neste trabalho apenas serão considerados os parâmetros de carga V e H , correspondentes a um carregamento inclinado centrado (Figura 4.2). Os resultados da capacidade de carga são expressos para uma espessura unidimensional da fundação na direção z .

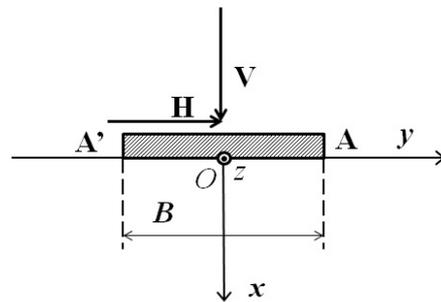


Figura 4.2 – Modelo empregado na análise

É possível demonstrar que a capacidade de carga da fundação para o problema em consideração não depende do peso específico do solo (Salençon e Pecker, 1995a). A demonstração segue o raciocínio descrito para o caso de uma carga vertical e o solo caracterizado pelo critério de Tresca (Salençon, 1983). As forças de gravidade não serão, portanto, consideradas.

Em relação ao critério de resistência para o solo ($x \geq 0$) homogêneo e puramente coesivo (critério de Tresca), ele é escrito como:

$$f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - 2C \leq 0 \quad (4.1)$$

O critério de resistência na interface $A'A$ ($x = 0, |y| < B/2$) corresponde ao critério de Tresca sem resistência à tração, e é denotado como:

$$f(\tau_{xy}, \sigma_x) = \sup(|\tau_{xy}| - C, \sigma_x) \leq 0 \quad (4.2)$$

O carregamento externo é aplicado na face superior da interface $A'A$ (Figura 4.2) por uma fundação considerada rígida. Desta forma qualquer campo de velocidades virtuais \underline{U} , para $x = 0^-$ e $|y| \leq B/2$ deve corresponder a um movimento do corpo rígido de velocidade \underline{U}_0 no plano Oxy (Figura 4.3).

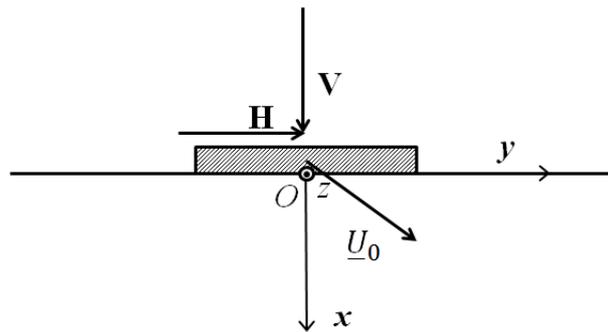


Figura 4.3 – Movimento do corpo rígido de velocidade virtual U_0 do carregamento externo

4.2 ABORDAGEM ESTÁTICA

Na sequência são apresentadas três aproximações distintas de K pelo interior. Estas aproximações são designadas como: “Abordagem Estática I”, “Abordagem Estática II” e “Abordagem Estática III”. Dessa maneira são determinados distintos limites inferiores da carga limite. Em seguida é elaborada uma aproximação final, produto destas três abordagens e da propriedade de convexidade do domínio de cargas admissíveis K .

Abordagem Estática I

Considera-se uma fundação submetida a um carregamento \underline{P}_1 puramente tangencial:

$$\underline{P}_1 = \{H = CB, V = 0\}$$

onde C denota a coesão do solo e B a dimensão da fundação (Figura 4.2).

Para o solo subjacente à fundação é considerado um campo de tensões homogêneo por partes, proposto por [Khosravi \(1983 apud SALENÇON; PECKER, 1995a, p. 358\)](#). As seis zonas de tensões homogêneas são representadas na Figura 4.4 a). Nesta Figura, também são indicados os valores e as direções das tensões principais. O campo de tensões está em

equilíbrio com a carga considerada e respeita as condições de resistência 4.1 em qualquer ponto do solo, e 4.2 ao longo da interface $A'A$

Nos eixos (OX, OY) rotacionados $-\frac{\pi}{4}$ em relação aos eixos (Ox, Oy) (Figura 4.4 b)), os campos de tensões são:

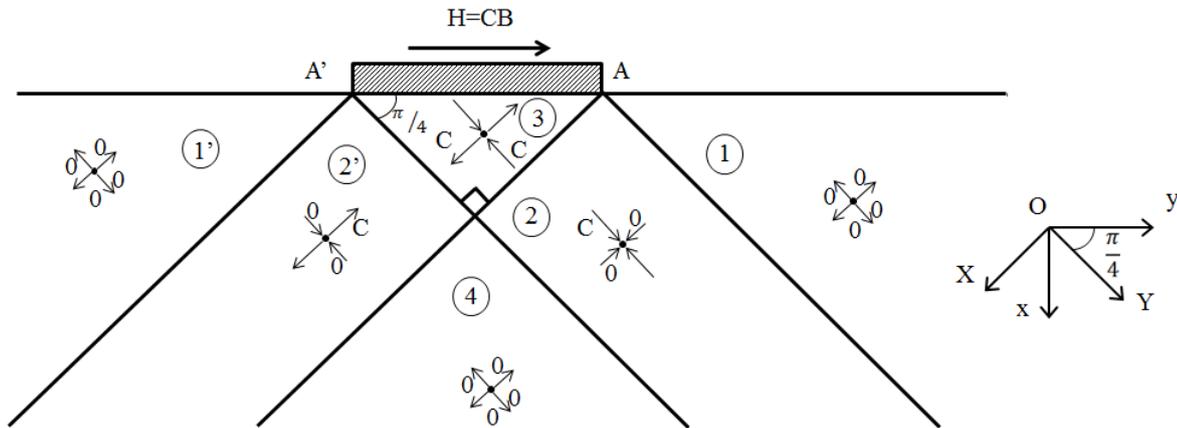


Figura 4.4 – a) Campos de tensões homogêneas por parte composto por seis zonas em equilíbrio com uma carga puramente tangencial. b) Rotação de eixos para expressar o campo de tensões em termos de tensões principais

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{zona 1,1'e 4} \quad \sigma_X = 0, \quad \sigma_Y = 0, \quad \tau_{XY} = 0 \\ \text{zona 2} \quad \sigma_X = 0, \quad \sigma_Y = -C, \quad \tau_{XY} = 0 \\ \text{zona 2'} \quad \sigma_X = C, \quad \sigma_Y = 0, \quad \tau_{XY} = 0 \\ \text{zona 3} \quad \sigma_X = C, \quad \sigma_Y = -C, \quad \tau_{XY} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

A carga considerada satisfaz assim todas as condições para ser admissível, e portanto:

$$\underline{P}_1 = \{H = CB, V = 0\} \in K \quad (4.4)$$

em outras palavras, \underline{P}_1 é um limite inferior da carga de limite (Figura 4.7a)).

Abordagem Estática II

Prandtl (1923) determinou para o problema analisado um campo de tensões que está em equilíbrio com a seguinte carga vertical \underline{P}_2 :

$$\underline{P}_2 = \{H = 0, V = (\pi + 2)BC\} \quad (4.5)$$

e que respeita as condições de resistência 4.1 em qualquer ponto do solo, e 4.2 ao longo da interface $A'A$. Assim $\underline{P}_2 \in K$, e é por tanto outro limite inferior da carga limite (Figura 4.7a)).

Abordagem Estática III

Nesta terceira abordagem constrói-se inicialmente um campo de tensões arbitrário, e a partir dele determina-se o carregamento que o solo pode suportar.

Considera-se o campo de tensões homogêneo por partes, para as zonas indicadas na Figura 4.5. As tensões são supostas no limite de resistência do solo. Na Figura 4.5 estão representadas também as tensões principais das zonas 1 e 1'. As tensões da zona 2 são função do parâmetro α .

Os campos de tensões que satisfazem as condições de:

- contorno para $|y| > \frac{B}{2}$
- resistência limite do solo
- princípio de ação e reação nas superfícies de descontinuidade de tensões

são representados pelo Círculo de Mohr na Figura 4.6. O círculo da direita representa o estado de tensões nas zonas 1 e 1'. O círculo da esquerda corresponde ao estado de tensões da zona 2. Nesta figura é representado também o valor de H e V que as tensões podem suportar. Dessa maneira, para cada valor de α_i , é encontrado um carregamento $\{H_i, V_i\}$ admissível.

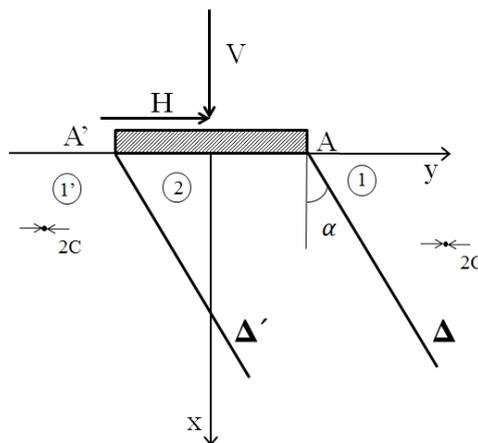


Figura 4.5 – Zonas do campo de tensões homogêneo por partes considerado

O campo de tensões correspondente é:

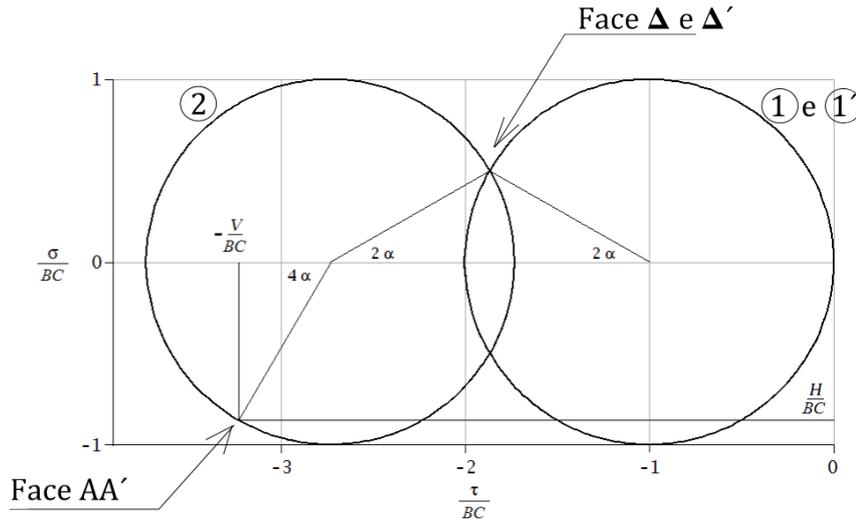


Figura 4.6 – Círculos de Mohr que representam os estados de tensões das zonas 1, 2 e 1'

- Para as zonas 1 e 1': $\sigma_{x1} = 0$ $\sigma_{y1} = -2C$ $\tau_{xy1} = 0$
- Para a zona 2:
 $\sigma_{x2} = -C(1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$ $\sigma_{y2} = -C(1 + 2 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha)$ $\tau_{xy2} = C \sin 4\alpha$

O carregamento admissível é dado, então, por:

$$\underline{P}_3 = \{H = BC \sin 4\alpha, V = BC(2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)\} \in K \quad (4.6)$$

Para que a expressão 4.6 seja válida, o ângulo α deve estar entre 0 e $\frac{\pi}{8}$.

O carregamento \underline{P}_3 , diferentemente dos carregamentos \underline{P}_1 e \underline{P}_2 obtidos nas abordagens anteriores, corresponde a uma curva no plano (V, H) que depende do parâmetro α , o qual define o campo de tensão empregado. Na Figura 4.7 (a) é apresentada esta curva de carregamentos admissíveis. Nesta Figura também estão representadas as cargas \underline{P}_1 e \underline{P}_2 estabelecidas em 4.4 pela “Abordagem Estática I” e em 4.5 pela “Abordagem Estática II”, respectivamente.

Aplicando a propriedade de convexidade de K descrita na equação 3.5, obtêm-se a Figura 4.7 (b), que constitui o resultado final da aproximação pelo interior a partir das 3 abordagens estáticas (I, II e III) empregadas. Esta Figura representa a fronteira K_s de limites inferiores da carga de limite.

4.3 ABORDAGEM CINEMÁTICA

Nesta seção apresentam-se duas aproximações de K pelo exterior. Estas aproximações são designadas como: "Mecanismo I" e "Mecanismo II". Assim, são determinadas duas curvas limites inferiores da carga de ruptura. Posteriormente é elaborada uma aproximação final,

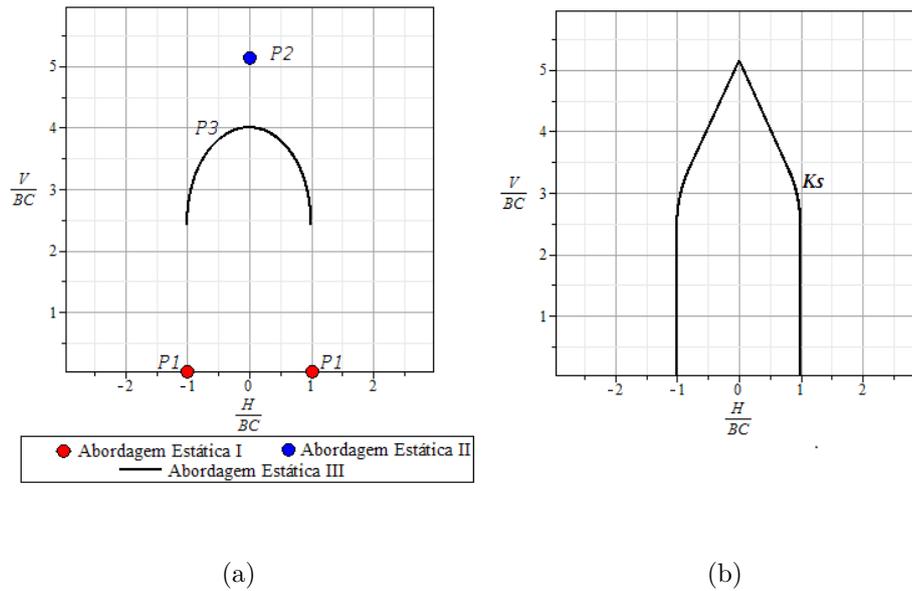


Figura 4.7 – (a) Cargas admissíveis obtidas pelas abordagens estáticas empregadas. (b) Aproximação pelo interior

produto destas duas abordagens e da propriedade de convexidade do domínio de cargas admissíveis K .

Mecanismo I

Considera-se o campo de velocidades apresentado na Figura 4.8, o qual depende do parâmetro angular χ , $\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$. Neste campo de velocidades o volume $A'AB$ tem um movimento de translação virtual de velocidade \underline{U} paralela a $A'B$, ACD tem um deslocamento de velocidade virtual \underline{U}_2 paralelo a CD . Além disso, considera-se que não há descontinuidade de velocidade virtual entre o solo e a fundação e que o solo embaixo de $A'BCD$ permanece sem se movimentar.

A velocidade de cada ponto do volume ABC , expressa em coordenadas polares, é:

$$\begin{cases} W_r = 0, W_\theta = U \\ \frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.7)$$

A desigualdade 3.14, que relaciona a potência das forças externas com o trabalho resistente máximo ($P_{ext} \leq P_{rm}$), expressa em termos dos parâmetros V , H , χ , \underline{U} e BC do mecanismo empregado, é:

$$\begin{cases} U(V \cos \chi + H \sen \chi) \leq UCB \left(\sen \chi + \left(\frac{3\pi}{2} + 1 - 2\chi \right) \cos \chi \right) \\ \frac{\pi}{4} \leq |\chi| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.8)$$

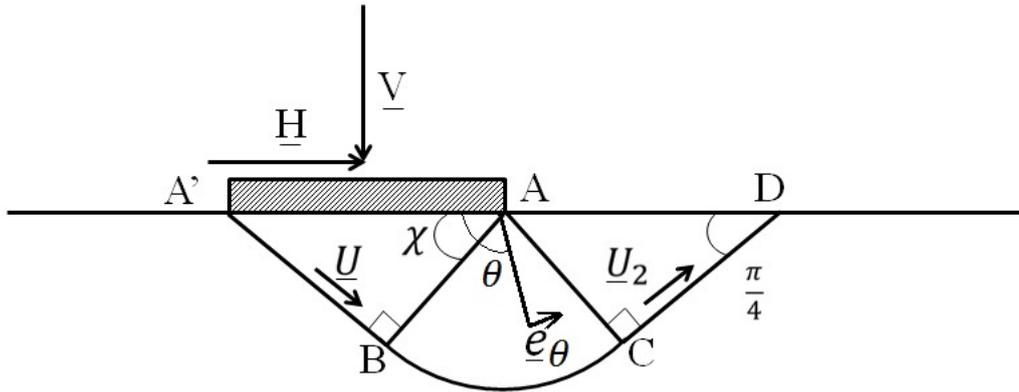


Figura 4.8 – Campo de velocidades do Mecanismo I

Assim, o domínio K é incluído no espaço \mathfrak{R}^2 definido pela inequação:

$$K \subset \left\{ V \cos \chi + H \operatorname{sen} \chi - BC \left[\operatorname{sen} \chi + \cos \chi \left(\frac{3}{2}\pi - 2\chi + 1 \right) \right] \leq 0 \right\} \quad (4.9)$$

Portanto, constituem limites superiores da capacidade de carga, cada uma das retas da seguinte família de retas:

$$V \cos \chi + H \operatorname{sen} \chi - BC \left[\operatorname{sen} \chi + \cos \chi \left(\frac{3}{2}\pi - 2\chi + 1 \right) \right] = 0 \quad (4.10)$$

Esta família de retas está representada na Figura 4.9 (a) por algumas destas retas. A envoltória \underline{P}_4 desta família de retas constitui a curva mínima (minimização da equação 4.10 em relação ao parâmetro angular χ) de limites superiores a ∂K para o mecanismo escolhido (Figura 4.9 (b)), e é dado pela seguinte expressão:

$$\underline{P}_4 = \left\{ V = BC \left(\frac{3\pi}{2} - 2\chi + 1 + \operatorname{sen} 2\chi \right), H = -BC \cos 2\chi \right\} \quad (4.11)$$

A Figura 4.9 (b) representa uma fronteira K_c de limites superiores da carga de ruptura.

Mecanismo II

Considera-se o mecanismo de blocos da Figura 4.10 (a), dependente dos parâmetros angulares α e β . O triângulo $A'AB$ tem um movimento de translação virtual de velocidade \underline{U} paralela a $A'B$ e o triângulo ABC tem um deslocamento de velocidade virtual \underline{W} paralela a BC . Não é considerada descontinuidade de velocidade virtual entre o solo e a fundação e o solo embaixo de $A'BC$ permanece sem-se movimentar (velocidade=0).

Na Figura 4.10 (b) se apresentam duas cunhas cujas faces laterais correspondem a superfícies de ruptura consideradas por Rankine (1853) para a estimativa da capacidade de carga vertical de fundações superficiais. A solução de Rankine (1853) utiliza o método do

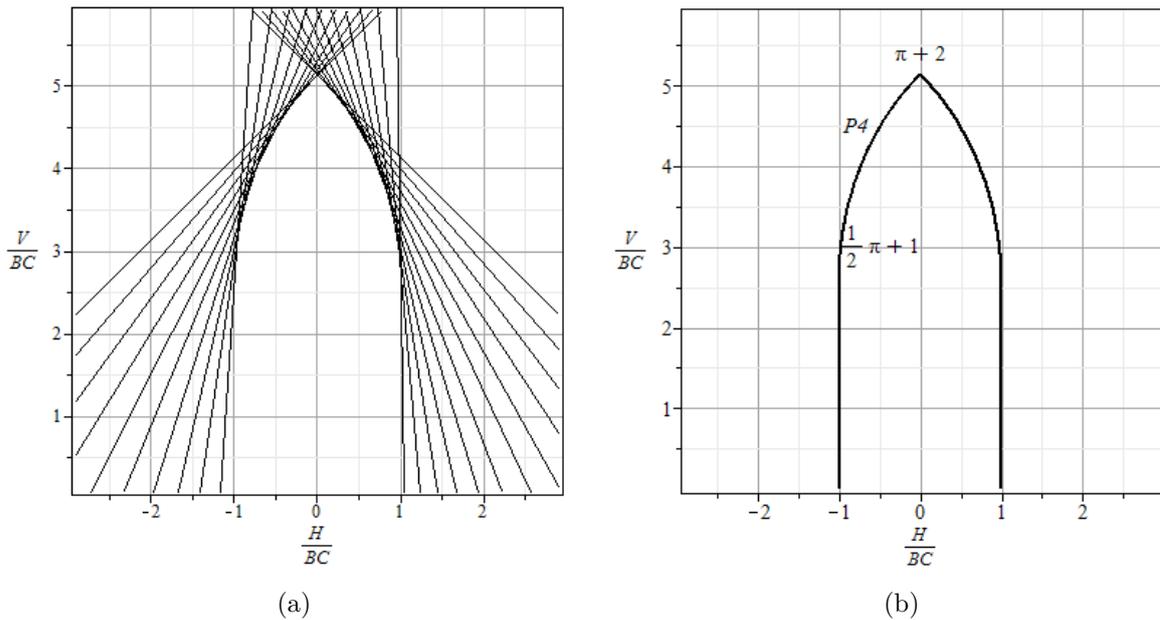


Figura 4.9 – (a) Cargas admissíveis obtidas pelas abordagens estáticas empregadas. (b) Aproximação pelo interior

equilíbrio limite para solos de caráter puramente friccional. A analogia com o Mecanismo I tem a ver especificamente com as superfícies de ruptura consideradas (que para o Mecanismo I correspondem a superfícies de descontinuidade de velocidade).

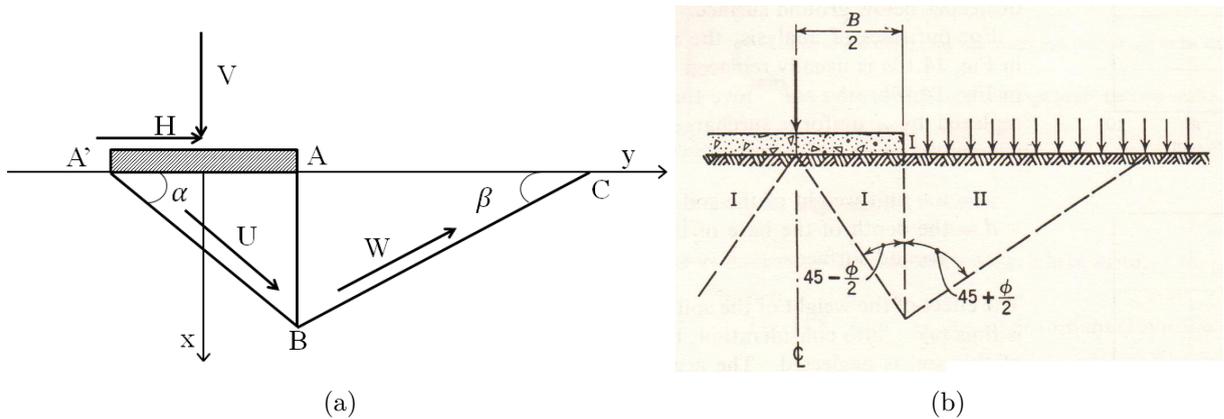


Figura 4.10 – (a) Mecanismo I, (b) Superfície de ruptura proposta por Rankine (1853)

A desigualdade 3.14, que relaciona a potência das forças externas com o trabalho resistente máximo ($P_{ext} \leq P_{rm}$) expressa em termos dos parâmetros V , H , α , β , U e BC do mecanismo empregado, é:

$$U(V \cos \alpha + H \sin \alpha) \leq UCB \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \sin \alpha (\tan \alpha + \tan \beta) + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \beta} \right) \quad (4.12)$$

Assim, o domínio K é incluído no espaço \mathbb{R}^2 definido pela inequação:

$$K \subset \left\{ V \sin \alpha + H \cos \alpha - CB \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \sin \alpha (\tan \alpha + \tan \beta) + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \beta} \right) \leq 0 \right\}$$

Portanto, constituem limites superiores da capacidade de carga, cada uma das retas da seguinte família de retas:

$$V \sin \alpha + H \cos \alpha - CB \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \sin \alpha (\tan \alpha + \tan \beta) + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cos \beta} \right) = 0 \quad (4.13)$$

Esta família de retas está representada na Figura 4.11 (a) por algumas destas retas. Minimizando a equação 4.13 é obtém-se a envoltória \underline{P}_5 que constitui a curva mínima de limites superiores para o mecanismo escolhido (Figura 4.11 (b)). Esta envoltória ocorre para:

$$\begin{cases} \tan \beta = \sqrt{2}/2 \\ \alpha = 0 \text{ para } N/(BC) \leq 2\sqrt{2} \\ \tan \alpha = \frac{1}{4}(N/(BC) - 2\sqrt{2}) \text{ para } N/(BC) \geq 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (4.14)$$

Dessa maneira, a envoltória \underline{P}_5 da família de retas é dada por (Figura 4.12):

$$\underline{P}_5 = \left\{ \begin{array}{l} \{H = BC, V\} \text{ Para } V/(BC) \leq 2\sqrt{2} \\ \{H = BC(1 - 1/8) (V/(BC) - 2\sqrt{2})^2, V\} \text{ Para } V/(BC) \geq 2\sqrt{2} \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

A Figura 4.11 (b) representa uma fronteira K_s de limites inferiores da carga de ruptura.

Na Figura 4.12 são apresentadas e comparadas as duas aproximações pelo exterior. A aproximação do Mecanismo I (\underline{P}_4) está contida na aproximação do Mecanismo II (\underline{P}_5). Portanto, o limite superior final K_c corresponde a \underline{P}_4 obtido através da consideração do Mecanismo I.

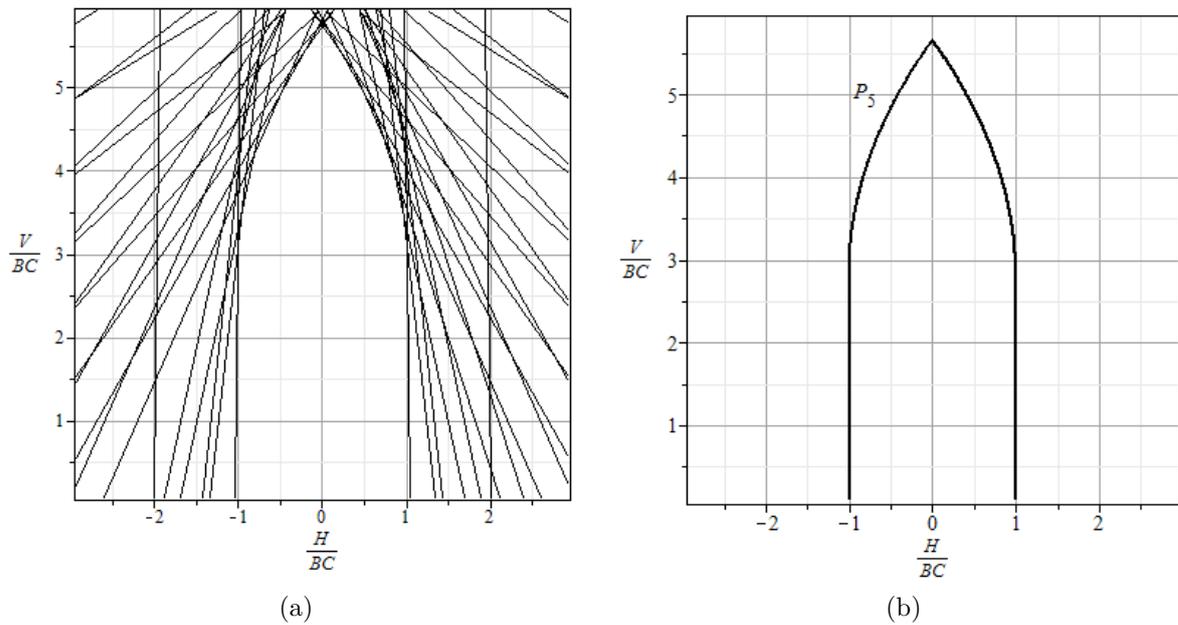


Figura 4.11 – (a) Cargas admissíveis obtidas pelas abordagens estáticas empregadas. (b) Aproximação pelo interior

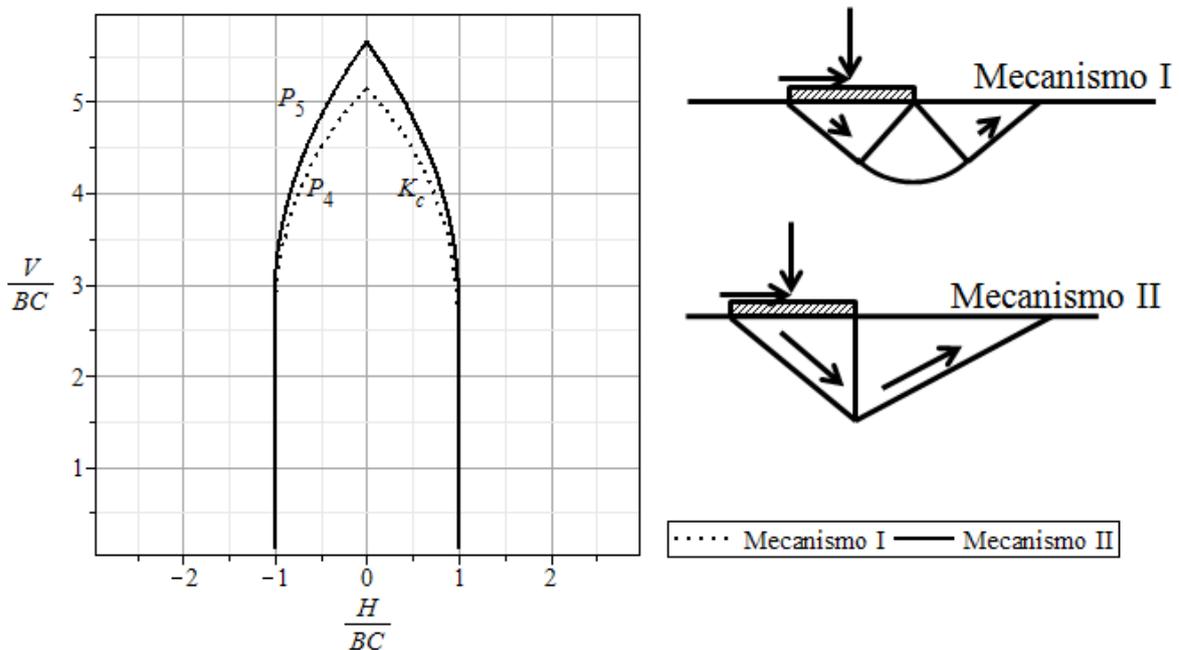


Figura 4.12 – Capacidade de carga para carregamento centrado inclinado. Aproximação pelo exterior

4.4 OBTENÇÃO DA FRONTEIRA ∂K

Finalmente, apresenta-se na Figura 4.13 as melhores aproximações obtidas pelas abordagens estática e cinemática empregadas. Assim, é obtida uma região dentro da qual está localizada a fronteira ∂K de cargas admissíveis para fundações superficiais submetidas a carregamentos inclinados, para solos que obedecem ao critério de resistência de Tresca.

As aproximações K_s e K_c coincidem para:

$$0 \leq V \leq (1 + \sqrt{2})BC \text{ e } V = (\pi + 2)BC$$

o resultado obtido nesses pontos é portanto exato. Para:

$$(1 + \sqrt{2})BC < V < (\pi + 2)BC$$

as aproximações K_s e K_c são distintas. A diferença máxima entre elas é de 8,85% (Figura 4.13). Designa-se por δ à inclinação da carga da fundação, tal que:

$$\tan \delta = H/V$$

Utilizando a Figura 4.13, para cada valor de δ é obtido o valor exato da fronteira ∂K , quando $\delta = 0$ ou $\frac{\pi}{8} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$.

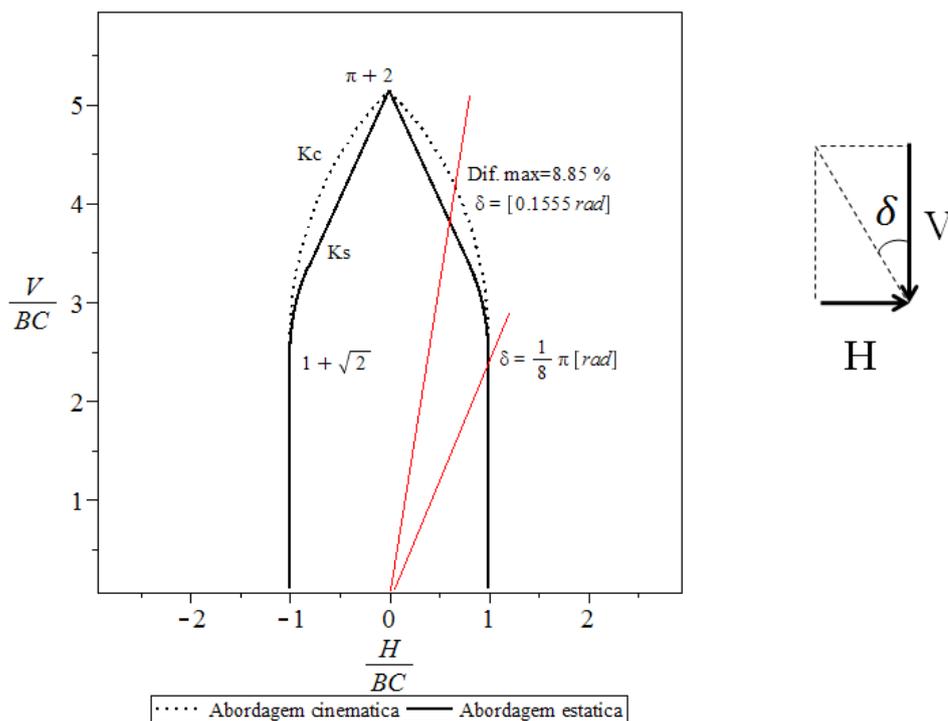


Figura 4.13 – Limites da fronteira ∂K de cargas admissíveis

4.5 ANÁLISE DE RESULTADOS

A capacidade de carga de uma fundação submetida a uma carga inclinada, apoiada sobre um solo coesivo foi obtida neste capítulo no âmbito da análise limite.

Considerou-se que o solo de fundação obedece ao critério de Tresca, utilizado para representar o comportamento do solo argiloso em condições não drenadas. O efeito

da gravidade não foi considerado uma vez que sabe-se que a capacidade de carga é independente do peso específico do solo quando ele resiste à tração (Salençon, 1990). A resistência do solo à tração é em geral muito baixa. Para realizar uma análise considerando que o solo não possui resistência à tração faz-se necessário considerar o efeito da gravidade.

A metodologia de cálculo utilizada neste capítulo implica o uso de dois tipos de aproximações: pelo interior e pelo exterior. Para cada estado de tensões em equilíbrio compatível com o critério de resistência, é encontrado um limite inferior da carga de ruptura (aproximação estática pelo interior). Do mesmo modo, para cada mecanismo virtual cujo trabalho das forças externas não supera o trabalho resistente máximo, é obtido um limite superior da carga de ruptura (aproximação cinemática pelo exterior). Dessa maneira é encontrado um intervalo de valores no qual encontra-se a carga de ruptura ou fronteira ∂K de cargas admissíveis.

No presente capítulo foram apresentados primeiramente os resultados de três aproximações distintas de K obtidas pela abordagem estática, as quais forneceram um limite inferior K_s de carregamentos de ruptura para o problema analisado (Figura 4.7). Na sequência, foram propostos dois mecanismos virtuais e foi aplicada a abordagem cinemática da análise limite, obtendo-se assim dois limites superiores K_c de carregamentos de ruptura (Figura 4.12). As fronteiras K_s e K_c assim obtidas, são apresentadas de forma conjunta na Figura 4.13. Através da mesma é possível obter para um valor da inclinação da carga δ , o valor aproximado (ou exato) da carga limite do sistema considerado. Verifica-se a partir dos resultados obtidos que a capacidade de carga determinada é exata para $\delta = 0$ e para o intervalo $\frac{\pi}{8} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Para $0 < \delta < \frac{\pi}{8}$ a carga de ruptura encontra-se num intervalo obtido com um alto grau de aproximação, cuja diferença máxima entre as abordagens é de 8.85%.

5 FUNDAÇÃO SUPERFICIAL SOBRE UM SOLO REFORÇADO COM UMA COLUNA ISOLADA

Neste capítulo são apresentados alguns resultados do cálculo da capacidade de carga de fundações superficiais sobre solo argiloso reforçado com colunas, submetidas a carregamentos inclinados para o caso de uma coluna isolada. A resistência dos solos argilosos é caracterizada na análise através do critério de Tresca. Por sua vez, a resistência das colunas é caracterizada pelo critério de Mohr-Coulomb. Utiliza-se tanto a abordagem estática como a cinemática da análise limite a fim de obter uma aproximação do domínio de carregamentos admissíveis.

Assim como efetuado no capítulo anterior para o solo não reforçado, as hipóteses consideradas na análise são inicialmente descritas. Na sequência, constroem-se campos de tensões estaticamente admissíveis para determinar limites inferiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem estática da análise limite, onde a fronteira K_s é determinada. Campos de velocidades cinematicamente admissíveis são então construídos buscando a determinação de limites superiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem cinemática da análise limite, onde a fronteira K_c é determinada. O objetivo principal deste capítulo é analisar os resultados obtidos através das duas abordagens, obtendo assim as aproximações superior e inferior da fronteira do domínio de cargas admissíveis ∂K .

O primeiro campo de tensões foi apresentado por Bouassida (1996), e todas as abordagens sucessivas correspondem a contribuições inéditas do presente trabalho.

5.1 ANÁLISE DO PROBLEMA

O solo de fundação é considerado homogêneo, de peso específico $\underline{\gamma}_s$ e puramente coesivo caracterizado pelo critério de Tresca e pela coesão C_s . O contato entre o solo e a fundação é de aderência perfeita e a interface não possui resistência à tração. Cada coluna é suposta homogênea, de peso específico $\underline{\gamma}_r$, obedecendo ao critério de resistência de Coulomb de coesão C_r e ângulo de atrito φ .

Os eixos coordenados escolhidos apresentam-se na Figura 5.1. Denota-se por B a espessura da fundação, por B_1 a espessura da coluna e por h a profundidade da mesma.

A fundação é submetida a um carregamento inclinado F uniformemente distribuído ao longo da direção z . O domínio de carregamentos admissíveis da fundação é dependente dos parâmetros V e H , uma vez que considera-se a carga inclinada e centrada.

Considera-se a hipótese de estado plano de deformações, sendo a coluna considerada com a dimensão na direção z muito maior que a sua largura B_1 . Em outras palavras, a coluna é representada por uma trincheira.

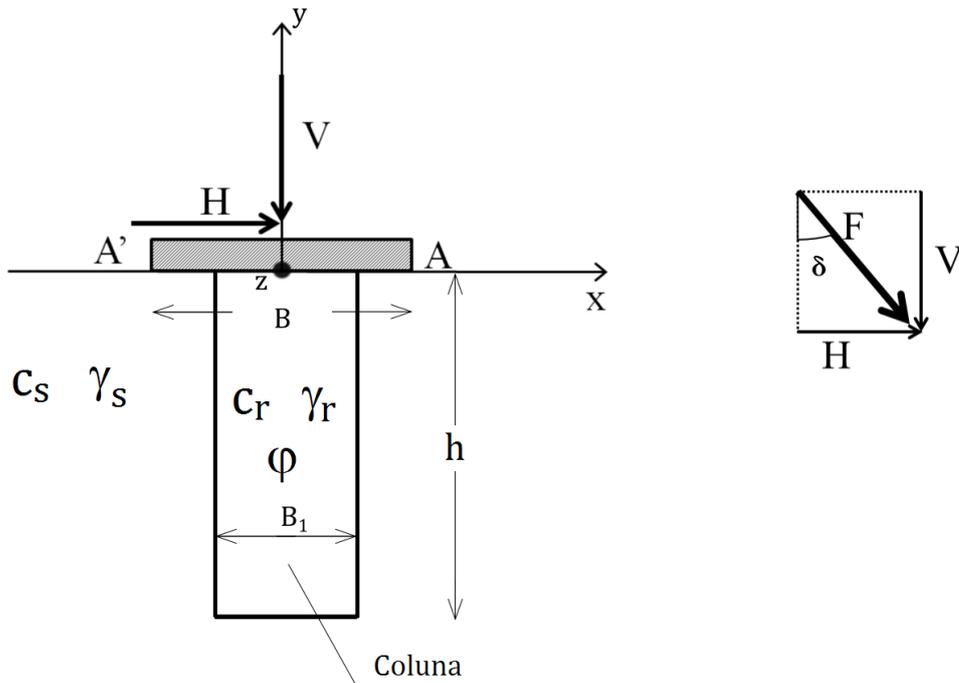


Figura 5.1 – Definição da geometria e do sistema de referência

A capacidade de carga da fundação depende, neste caso, do peso específico do solo. Diferentemente do capítulo anterior, onde não havia reforço, as forças de gravidade são consideradas. O critério de resistência no solo e na interface são iguais aos considerados no capítulo anterior. O critério de resistência de Coulomb é adotado para caracterizar a resistência das colunas de reforço.

Os parâmetros adimensionais associados com a capacidade de carga adimensional $\frac{F}{BC_s}$, dependem das propriedades mecânicas dos materiais (C_s , C_r , φ , γ_s e γ_r) e das características geométricas da fundação e do reforço (B , B_1 e h). Estes parâmetros são denotados por:

$$\eta = \frac{B_1}{B}, k = \frac{\gamma_r}{\gamma_s}, m = \frac{C_r}{C_s}, \xi = \frac{\gamma_s B}{C_s}, \frac{h}{B} \text{ e } \varphi \quad (5.1)$$

Na maioria dos casos práticos, o valor de φ varia no intervalo de $0^\circ - 40^\circ$ e ξ entre $0,2 - 2$. Estes limites assumem a variação da coesão entre $24\text{kN/m}^2 - 48\text{kN/m}^2$ (Chen, 1975).

5.2 ABORDAGEM ESTÁTICA

Na sequência são apresentados dois campos de tensões que verificam o equilíbrio e satisfazem as condições de resistência e condições de contorno para os carregamentos externos considerados, determinando assim uma aproximação da capacidade de carga pelo interior de fundações sobre solos reforçados por uma coluna inclinada. O campo de tensões I foi apresentado por Bouassida (1996). Quanto ao campo de tensões II, o mesmo foi construído e verificado nesta pesquisa.

Campo de Tensões I

Considera-se um carregamento \underline{P}_1 puramente vertical:

$$\underline{P}_1 = \{H = 0, V\} \quad (5.2)$$

Para o solo e a coluna considera-se um campo de tensões lineares dividido em 5 zonas representadas na Figura 5.2. Nesta Figura também são apresentadas as direções principais das tensões. As tensões principais para as zonas 1, 1', 2 e 2', foram obtidas das condições

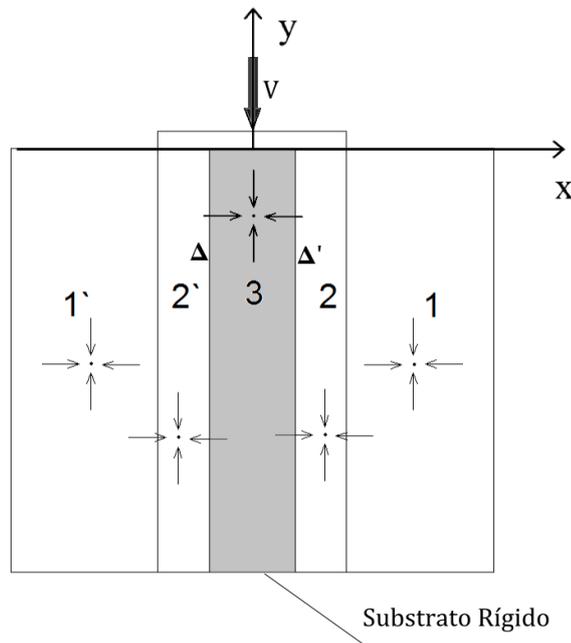


Figura 5.2 – Direções das tensões principais de cada zona do solo

de contorno, de continuidade, e da suposição que encontram-se no limite de resistência do material. Estas tensões são:

$$\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_{1'} = (\gamma_s y - 2C_s) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \gamma_s y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (5.3)$$

$$\underline{\sigma}_2 = \underline{\sigma}_{2'} = (\gamma_s y - 2C_s) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + (\gamma_s y - 4C_s) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (5.4)$$

$$\underline{\sigma}_3 = \underline{\sigma}_{3'} = (\gamma_s y - 2C_s) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + (\gamma_r y + A) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (5.5)$$

onde A é um valor constante determinado de maneira que seja satisfeita a condição de resistência. Supondo que a tensão vertical é menor do que a tensão horizontal, para a zona 3, as tensões principais mínima σ_m e máxima σ_M são:

$$\sigma_m = \sigma_{yy}^{(3)} = \gamma_r y + A \quad (5.6)$$

$$\sigma_M = \sigma_{xx}^3 = \gamma_s y - 2C_s \quad (5.7)$$

Substituindo 5.6 e 5.7 na condição de resistência 3.24, tem-se:

$$f(\underline{\sigma}) = -2C_s(1 + \sin \varphi) + \gamma_s y(1 + \sin \varphi) - \gamma_r y(1 - \sin \varphi) - A(1 - \sin \varphi) - 2C_r \cos \varphi \leq 0 \quad (5.8)$$

Assim para que o critério de resistência seja satisfeito, o valor de A deve ser:

$$A \geq -2C_s \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} + \gamma_s y \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \gamma_r y - 2C_r \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad \forall y$$

ou

$$A \geq y(\gamma_s Kp - \gamma_r) - 2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} \quad \forall y \quad (5.9)$$

onde Kp designa o coeficiente de empuxo passivo do critério de Coulomb, e é dado por:

$$Kp = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{e verifica-se} \quad \sqrt{Kp} = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

A condição 5.9 será satisfeita para qualquer profundidade y , se a mesma é satisfeita para o caso mais desfavorável. Ou seja:

$$A \geq \max \left(y(\gamma_s Kp - \gamma_r) - 2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} \right) \quad (5.10)$$

A desigualdade 5.10 depende do sinal do termo $y(\gamma_s Kp - \gamma_r)$. A seguir, apresentam-se os resultados para cada possibilidade.

1. Primeiro Caso

$$\text{Se } \gamma_s Kp - \gamma_r \geq 0 \rightarrow Kp \geq \frac{\gamma_r}{\gamma_s}$$

para o qual a situação mais desfavorável ocorre para $y = 0$. Assim, o valor da constante A deve satisfazer:

$$A \geq -2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} \quad (5.11)$$

e a tensão vertical na zona 3:

$$\sigma_{yy}^{(3)} \geq -2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} + \gamma_r y \quad (5.12)$$

O melhor limite inferior da capacidade de carga ocorre quando $\sigma_{yy}^{(3)}$ atinge seu valor máximo, então:

$$\max(\sigma_{yy}^{(3)}) = -2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} + \gamma_r y \quad (5.13)$$

E a carga vertical de ruptura é:

$$\frac{V}{BC_s} = 4(1 - \eta) + 2\eta(Kp + m\sqrt{Kp}) \quad \text{para} \quad Kp \geq \frac{\gamma_r}{\gamma_s} \quad (5.14)$$

2. Segundo Caso

$$\text{Se } \gamma_s Kp - \gamma_r < 0 \rightarrow Kp < \frac{\gamma_r}{\gamma_s}$$

para o qual a situação mais desfavorável do segundo membro da desigualdade 5.10 ocorre para $y = -h$. Assim, o valor da constante A deve satisfazer:

$$A \geq -H(\gamma_s Kp - \gamma_r) - 2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} \quad (5.15)$$

e a tensão vertical na zona 3 é:

$$\sigma_{yy} \geq -H(\gamma_s Kp - \gamma_r) - 2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} + \gamma_r y \quad (5.16)$$

O limite inferior da carga de ruptura ocorre quando $\sigma_{yy}^{(3)}$ atinge valor máximo, então:

$$\max \sigma_{yy}^{(3)} = -H(\gamma_s Kp - \gamma_r) - 2C_s Kp - 2C_r \sqrt{Kp} + \gamma_r y \quad (5.17)$$

E a carga vertical de ruptura é:

$$\frac{V}{BC_s} = +2\eta(Kp + m\sqrt{Kp}) - \frac{\gamma_s H}{C_s} \eta(k - Kp) + 4(1 - \eta) \quad \text{para } Kp < \frac{\gamma_r}{\gamma_s} \quad (5.18)$$

Campo de Tensões II

O seguinte campo de tensões foi construído usando novamente um campo de tensões lineares por zonas, esquematizado na Figura 5.3. Este campo de tensões depende do parâmetro angular α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{8}$), a Abordagem Estática I constitui um caso particular desta abordagem ($\alpha = 0$).

As zonas 3 e 4 respondem ao critério de resistência de Mohr-Coulomb, as zonas 1, 1', 2 e 2' obedecem ao critério de resistência de Tresca. As tensões construídas que satisfazem os critérios de resistência de cada material e verificam o equilíbrio e as condições de contorno para as zonas 1, 1', 2, 2' e 3 são:

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = \underline{\underline{\sigma}}_{1'} = (\gamma_s y - 2C_s) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \gamma_s y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (5.19)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{\underline{\sigma}}_{2'} = \begin{pmatrix} -C_s(1 + 2 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \gamma_s y & C_s \sin 4\alpha \\ C_s \sin 4\alpha & -C_s(1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha) + \gamma_s y \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_3 = \begin{pmatrix} -C_s(1 + 2 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \gamma_s y & C_s \sin 4\alpha \\ C_s \sin 4\alpha & A + \gamma_r y \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

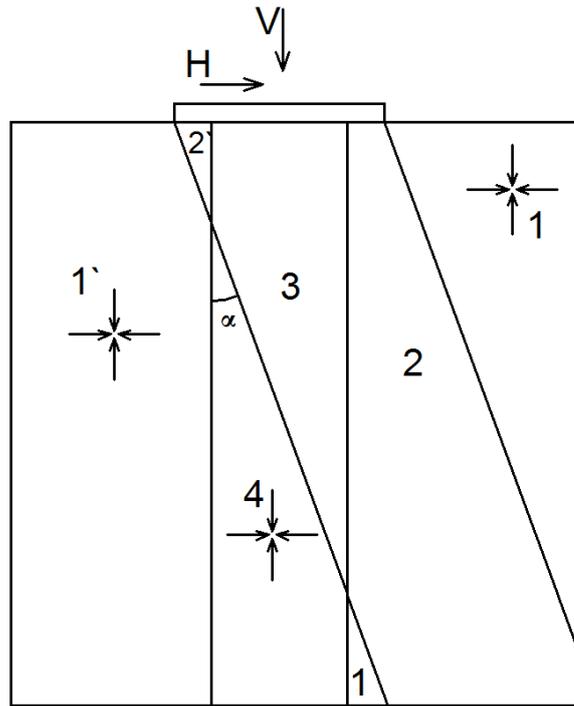


Figura 5.3 – Estado de tensões dividido em 6 partes do solo e da coluna de brita

onde A é um valor constante determinado de maneira que seja satisfeita a condição de resistência. Para a zona 3 esta condição pode ser escrita como:

$$f = \sqrt{(A + (\gamma_r - \gamma_s)y + C_s D)^2 + 4C_s^2 F^2} + (A + (\gamma_r + \gamma_s)y - C_s D) \operatorname{sen} \varphi - 2C_r \cos \varphi \leq 0 \quad (5.22)$$

onde $D = 1 + 2 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha$ e $F = \operatorname{sen} 4\alpha$

Para que a inequação 5.22 seja verificada, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$(A + (\gamma_r + \gamma_s)y - C_s D) \operatorname{sen} \varphi - 2C_r \cos \varphi \leq 0 \quad (5.23)$$

A condição 5.23 implica:

$$A \leq C_s D \operatorname{sen} \varphi + 2C_r \cos \varphi - (\gamma_r + \gamma_s)y \operatorname{sen} \varphi \quad (5.24)$$

A situação mais desfavorável ocorre para $y = 0$, assim, escreve-se a primeira restrição desta abordagem em função aos parâmetros adimensionais:

$$\frac{A}{C_s} \leq D \operatorname{sen} \varphi + 2m \cos \varphi \quad (5.25)$$

Verificada a inequação 5.25, duas soluções A_1 e A_2 são encontradas a partir da resolução da equação $f = 0$. A existência destas raízes reais depende de que o discriminante Δ da

equação seja positivo para cada valor da ordenada y na coluna. Por tanto:

$$\begin{aligned} \Delta = 16C_s^2 D^2 \sin^2 \varphi - 32C_s D \gamma_s y \sin^2 \varphi + 32C_r C_s D \sin \varphi \cos \varphi + 16\gamma_s^2 y^2 \sin^2 \varphi - \\ - 32\gamma_s C_r y \sin \varphi \cos \varphi + 16C_r^2 \cos^2 \varphi - 16C_s^2 F^2 \cos^2 \varphi \geq 0 \quad \forall y, \quad -h \leq y \leq 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

O mínimo valor de Δ corresponde à ordenada $y = 0$. Portanto, a segunda restrição da abordagem limita o parâmetro α segundo a inequação 5.27

$$\begin{aligned} (1 + 2 \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha - 2 \cos^3 2\alpha + \cos^4 2\alpha) \tan \varphi + 4 \frac{C_r}{C_s} (1 + \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha) + \\ + \frac{C_r^2}{C_s^2 \tan \varphi} - \frac{4}{\tan \varphi} (\cos^2 2\alpha - \cos^4 2\alpha) > 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Finalmente, desde que o coeficiente de A^2 da equação quadrática $f = 0$ é positivo, os valores de A que verificam a condição 5.22 estão no intervalo $[A_1, A_2]$, com

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left((1 + \sin^2 \varphi)(\gamma_s y - C_s D) - \gamma_r y \cos^2 \varphi - 2C_r \sin \varphi \cos \varphi \right) - \\ - \frac{2}{\cos^2 \varphi} \sqrt{C_s^2 D^2 \sin^2 \varphi - 2C_s D \sin \varphi (\gamma_s y \sin \varphi - C_r \cos \varphi) + \gamma_s^2 y^2 \sin^2 \varphi - \\ - 2y\gamma_s C_r \sin \varphi \cos \varphi + (C_r^2 - C_s^2 F^2) \cos^2 \varphi} \quad \text{para cada } y \end{aligned} \quad (5.28)$$

e

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left((1 + \sin^2 \varphi)(\gamma_s y - C_s D) - \gamma_r y \cos^2 \varphi - 2C_r \sin \varphi \cos \varphi \right) + \\ + \frac{2}{\cos^2 \varphi} \sqrt{C_s^2 D^2 \sin^2 \varphi - 2C_s D \sin \varphi (\gamma_s y \sin \varphi - C_r \cos \varphi) + \gamma_s^2 y^2 \sin^2 \varphi - \\ - 2y\gamma_s C_r \sin \varphi \cos \varphi + (C_r^2 - C_s^2 F^2) \cos^2 \varphi} \quad \text{para cada } y \end{aligned} \quad (5.29)$$

Escolhe-se o valor mais negativo possível como limite de A , porque procura-se a máxima tensão vertical admissível. Este valor deve ser maior que cada $A_1(y)$, em outras palavras, deve ser maior que o máximo A_1 no intervalo $0 \leq y \leq h$.

Denota-se por y_0 à ordenada que minimiza ou maximiza A_1 :

$$y_0 = \frac{2\gamma_s C_s F - \gamma_s C_s F \cos^2 \varphi - \gamma_r C_s F \cos^2 \varphi}{\gamma_s \sin \varphi \sqrt{-4\gamma_s \gamma_r + 2\gamma_s \gamma_r \cos^2 \varphi + \gamma_s^2 \cos^2 \varphi + \gamma_r^2 \cos^2 \varphi}} + \frac{C_r \cos \varphi + C_s D \sin \varphi}{\gamma_s \sin \varphi} = 0 \quad (5.30)$$

Comparando y_0 com a profundidade da coluna h , quatro casos são possíveis e designados segundo a Tabela 5.1

Tabela 5.1 – Comparação de y_0 com h

Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
$y_0 < -h$	$-h \leq y_0 \leq 0$	$0 < y_0$	$\nexists y_0$

Seja y_A o valor da ordenada no intervalo $[0, h]$ que maximiza A_1 . O raciocínio para a escolha de y_A é o seguinte:

- Caso 1: $y_0 < -h$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} > 0 \rightarrow y_A = 0$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} < 0 \rightarrow y_A = -H$

- Caso 2: $-h \leq y_0 \leq 0$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} > 0 \rightarrow y_A = \max(A(y=0), A(y=-H))$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} < 0 \rightarrow y_A = y_0$

- Caso 3: $0 < y_0$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} > 0 \rightarrow y_A = 0$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} < 0 \rightarrow y_A = -H$

- Caso 4: $\nexists y_0$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} > 0 \rightarrow y_A = 0$
 Se $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} < 0 \rightarrow y_A = -H$

Segundo o caso, escolhe-se o valor de y que maximiza o valor de A_1 . Para $\varphi = 0$, $\gamma_r = \gamma_s$, $C_s = C_r$:

$$A_1 = -C_s(1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha) \quad (5.31)$$

obtendo-se o mesmo resultado obtido no capítulo anterior para um solo sem reforço.

As tensões da zona 4 têm a forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}_4 = (\gamma_s y - 2C_s)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{yy}^{(4)}\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (5.32)$$

Pela continuidade de tensões na face 3-4:

$$\sigma_{yy}^{(4)} = C_s 8 \cos^4 \alpha - C_s 4 \cos^2 \alpha + A + \gamma_r y \quad (5.33)$$

Utilizando as relações adimensionais 5.1, as forças vertical e horizontal para esta abordagem são dadas por:

$$\frac{V}{BC_s} = - \left(\frac{A}{C_s} \right) \eta + (1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)(1 - \eta) \quad (5.34)$$

$$\frac{H}{BC_s} = \sin 4\alpha \quad (5.35)$$

5.3 ABORDAGEM CINEMÁTICA

A abordagem cinemática é baseada na implementação de 3 mecanismos descritos a continuação. O teorema do limite superior da análise limite estabelece uma condição necessária para o equilíbrio do sistema sob as cargas aplicadas $Q = F = (H, V)$, γ_s, γ_r e é expressa segundo a equação 3.14. Deduções detalhadas das estimativas superiores dos três mecanismos são apresentadas nos Anexos A, B e C.

Mecanismo I

Considera-se o mecanismo de blocos da Figura A.1, dependente dos parâmetros angulares α e β . O bloco $A'AGED$ tem um movimento de translação virtual de velocidade \underline{U} paralela a $A'D$ (ou EG), e o triângulo AGC tem um deslocamento de velocidade virtual \underline{W} paralela a GC . Não é considerada descontinuidade de velocidade virtual entre o solo e a fundação. O solo embaixo de $A'DEGC$ permanece sem movimentar (velocidade=0). O hodógrafo de velocidades é apresentado na Figura A.2.

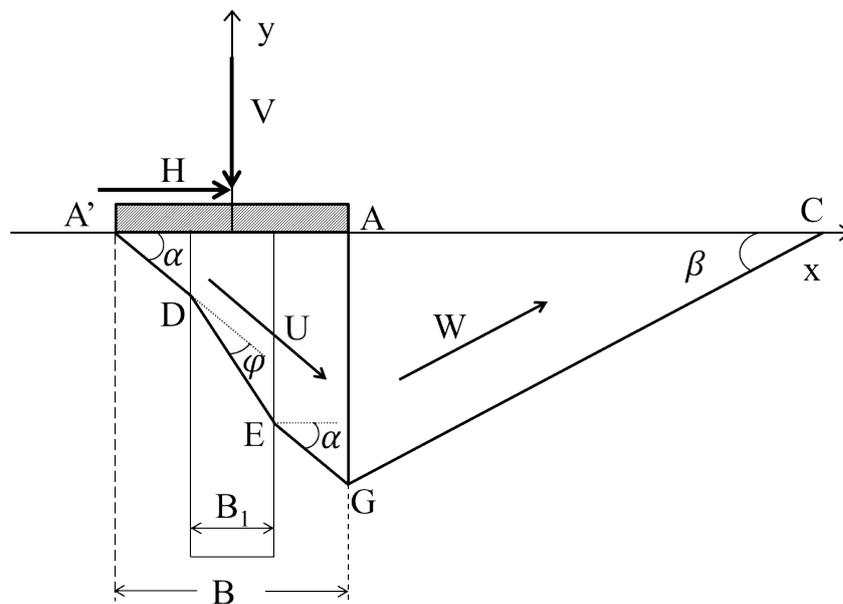


Figura 5.4 – Campo de velocidades virtuais considerado (Mecanismo I)

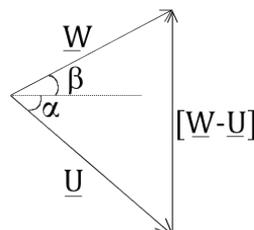


Figura 5.5 – Hodógrafo do Mecanismo I

A potência resistente máxima obtida é:

$$Prm = C_s BU \left\{ \frac{1-\eta}{\cos \alpha} + [\sen \alpha + \cos \alpha \tan \beta] [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] \right. \\ \left. + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sen \beta} [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] + \frac{m \cos \varphi \eta}{\cos(\alpha + \varphi)} \right\} \quad (5.36)$$

As forças externas estão constituídas por forças volumétricas (peso) e de superfície (força \underline{F}). A potência das forças externas é dada por:

$$P_{ext} = HU \cos \alpha + VU \sen \alpha + U\gamma_s B^2 \sen \alpha \left\{ \frac{1}{2} \tan \alpha (1-\eta)^2 + \frac{1}{2} \eta (1-\eta) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1-\eta) \tan \alpha \right\} - \frac{1}{2} U \gamma_s B^2 \cos \alpha [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\varphi + \alpha)]^2 \quad (5.37)$$

A desigualdade que relaciona a potência das forças externas com o trabalho resistente máximo (equação 3.14), é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sen \alpha + \xi \sen \alpha \left\{ \frac{1}{2} \tan \alpha (1-\eta)^2 + \frac{1}{2} \eta (1-\eta) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1-\eta) \tan \alpha \right\} - \frac{1}{2} \xi \cos \alpha [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\varphi + \alpha)]^2 \leq \\ \frac{1-\eta}{\cos \alpha} + [\sen \alpha + \cos \alpha \tan \beta] [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] \\ + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sen \beta} [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi) + \frac{m \cos \varphi \eta}{\cos(\alpha + \varphi)}] \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad \beta < \pi - \alpha \end{array} \right. \quad (5.38)$$

O valor de β que minimiza a relação A.15 é:

$$\beta = \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (5.39)$$

O convexo K está incluído no semi-espaço contendo a origem delimitado pela reta D_α (Figura A.4) de equação:

$$\frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sen \alpha = f(\alpha) \quad (5.40)$$

onde

$$f(\alpha) = -\xi \sen \alpha \left\{ \frac{1}{2} \tan \alpha (1-\eta)^2 + \frac{1}{2} \eta (1-\eta) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1-\eta) \tan \alpha \right\} + \frac{1}{2} \xi \cos \alpha [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\varphi + \alpha)]^2 \\ + \frac{1-\eta}{\cos \alpha} + [\sen \alpha + \cos \alpha \tan \beta] [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] \\ + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sen \beta} [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi) + \frac{m \cos \varphi \eta}{\cos(\alpha + \varphi)}] \quad (5.41)$$

Consequentemente, K está incluído na envoltória convexa das retas D_α quando α descreve o intervalo $[0, \frac{\pi}{2} - \varphi]$. A resultante \underline{F} das forças \underline{H} e \underline{V} (Figura 5.1), é obtida a partir de cada δ por:

$$\frac{F}{BC_s} \leq \min_{\alpha} \frac{f(\alpha)}{\sen(\alpha + \delta)} \quad (5.42)$$

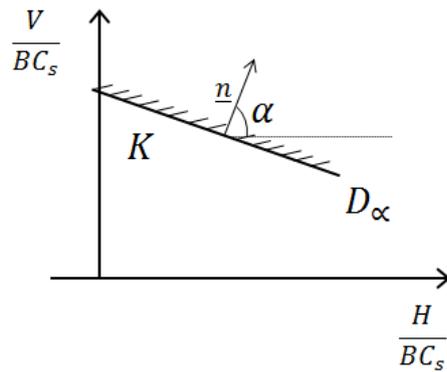


Figura 5.6 – Aproximação cinemática de K para um dado α

Na Figura 5.7(a) é apresentado um conjunto de retas da família D_α , e a envoltória delas na Figura 5.7 (b). Esta envoltória é obtida minimizando a função $f(\alpha)/\text{sen}(\alpha + \delta)$ (equação A.18) em relação ao parâmetro angular α . A minimização é feita numericamente para cada conjunto de parâmetros adimensionais 5.1.

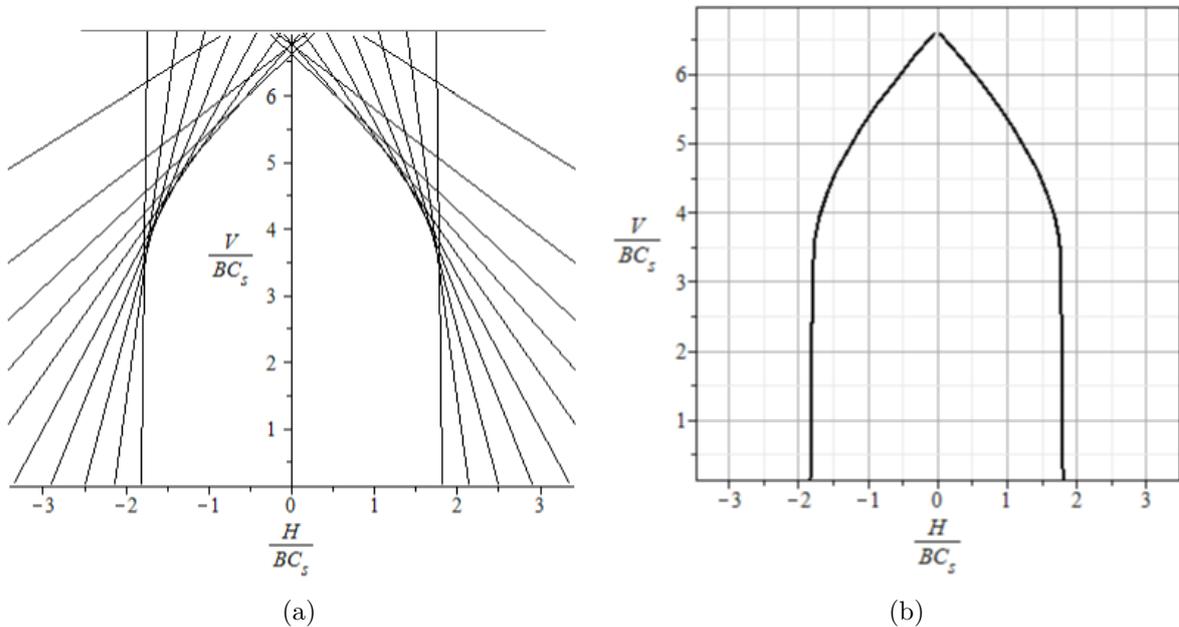


Figura 5.7 – Abordagem cinemática para os parâmetros adimensionais $\eta = 0.1$, $\varphi = 30$, $\xi = 1.666$, $k = 1.4$ e $m = 0.5$ a) Conjunto de retas D_α b) envoltória convexa das retas D_α

Mecanismo II

Considera-se o campo de velocidades apresentado na Figura B.1, o qual depende do parâmetro angular α . Neste campo de velocidades o volume $A'AEG$ tem um movimento de translação virtual de velocidade \underline{U} paralela a $A'G$, o bloco ACD tem um deslocamento

de velocidade virtual \underline{U}_2 paralela a CD . As superfícies AE e AC não apresentam descontinuidade de velocidade.

A velocidade no volume ACE corresponde a um cisalhamento puro, e se expressa em coordenadas polares como:

$$\underline{W} = U e_\theta \quad (5.43)$$

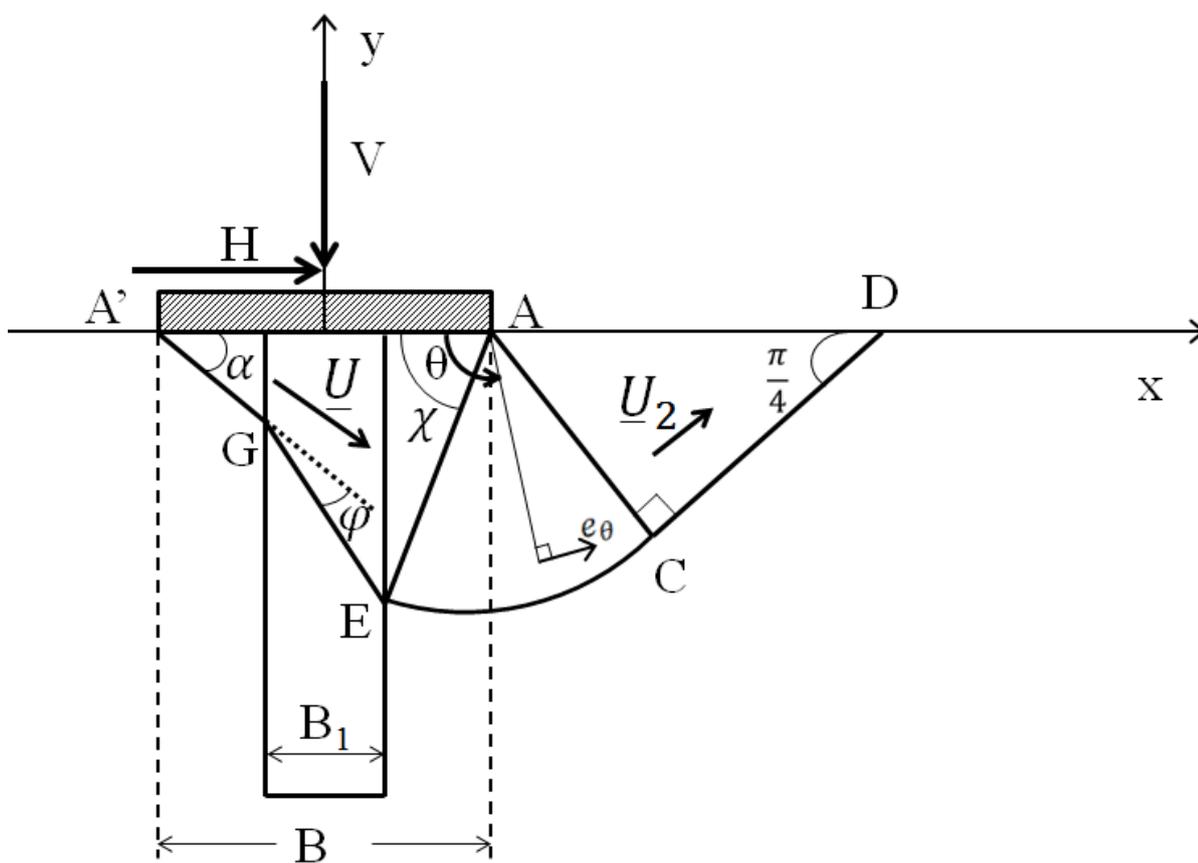


Figura 5.8 – Campo de velocidades do Mecanismo II

A potência resistente máxima do mecanismo é:

$$Prm(\underline{n}, [V]) = \frac{1}{2} C_s U B (1 - \eta) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \left[\left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi \right) \sin(\chi + \alpha) - \cos(\chi + \alpha) \right] \sqrt{J} \right) + \frac{C_s U B m \eta \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)} \quad (5.44)$$

onde $J = 1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2$

A potência das forças externas é expressa por:

$$\begin{aligned}
 P_{ext} = U(V \operatorname{sen} \alpha + H \operatorname{cos} \alpha) + UB^2 \gamma_s \operatorname{sen} \alpha \left(\tan \alpha \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \eta (1-\eta) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} k \eta (1-\eta) \tan \alpha + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right) \\
 - \frac{1}{8} UB^2 \gamma_s (1-\eta)^2 \operatorname{sen} \chi \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1-\eta} \right)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Aplicando o teorema do limite superior da análise limite (equação 3.14) é obtida a seguinte expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left(\frac{V}{C_s B} \operatorname{sen} \alpha + \frac{H}{C_s B} \operatorname{cos} \alpha \right) + \xi \operatorname{sen} \alpha \left[\tan \alpha \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \eta \frac{(1-\eta)}{2} \tan(\alpha + \varphi) \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} k \eta (1-\eta) \tan \alpha + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right] - \frac{1}{8} \xi (1-\eta)^2 \operatorname{sen} \chi J \leq \\
 \frac{1}{2} (1-\eta) \left(\frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} + \left[\left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi \right) \operatorname{sen}(\chi + \alpha) - \operatorname{cos}(\chi + \alpha) \right] \sqrt{J} \right) + \\
 \left. + \frac{m\eta \operatorname{cos} \varphi}{\operatorname{cos}(\alpha + \varphi)} \right. \\
 \left. \chi + \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } \varphi + \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right.
 \end{array} \right. \tag{5.46}$$

onde $\tan \chi = \tan \alpha + \frac{2\eta}{1-\eta} \tan(\alpha + \varphi)$

O convexo K está incluído no semi-espaco contendo a origem delimitado pela reta D_α de equação:

$$D_\alpha : g(\alpha) = \frac{H}{BC_s} \operatorname{cos} \alpha + \frac{V}{BC_s} \operatorname{sen} \alpha \tag{5.47}$$

onde

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) = \frac{1}{2} (1-\eta) \left(\frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} + \left[\left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi \right) \operatorname{sen}(\chi + \alpha) - \operatorname{cos}(\chi + \alpha) \right] \sqrt{J} \right) + \frac{m\eta \operatorname{cos} \varphi}{\operatorname{cos}(\alpha + \varphi)} \\
 - \xi \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{(1-\eta)^2}{4} \tan \alpha + \frac{1}{4} \eta (1-\eta) \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1-\eta) \tan \alpha \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right) + \frac{1}{8} \xi (1-\eta)^2 J \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen}(\chi + \alpha)
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

com $\chi + \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e $\varphi + \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

O domínio K está incluído na envoltória convexa das retas D_α quando α descreve o intervalo $[0, \frac{\pi}{2} - \varphi]$. A resultante \underline{F} das forças \underline{H} e \underline{V} (Figura 5.1), é obtida a partir de cada δ por:

$$\frac{F}{BC_s} \leq \min_{\alpha} \frac{g(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha + \delta)} \tag{5.49}$$

A minimização de $g(\alpha)/\text{sen}(\alpha+\delta)$ é feita numericamente para cada conjunto de parâmetros adimensionais 5.1, obtendo assim o limite superior do carregamento de ruptura para o mecanismo considerado.

Mecanismo III

O mecanismo apresentado na Figura C.1 é definido pela rotação do bloco $A'CDE$ em torno do eixo Ω_z . O bloco é limitado por dois arcos circulares $A'C$ e DE , e a espiral logarítmica CD com foco Ω e ângulo φ . Em cada ponto do volume $ACDE$, a expressão da velocidade é:

$$\underline{V} = \omega \underline{e}_\theta \quad (5.50)$$

onde ω refere à velocidade de rotação. Denotam-se como θ_1 , θ_i , θ_j e θ_2 aos parâmetros

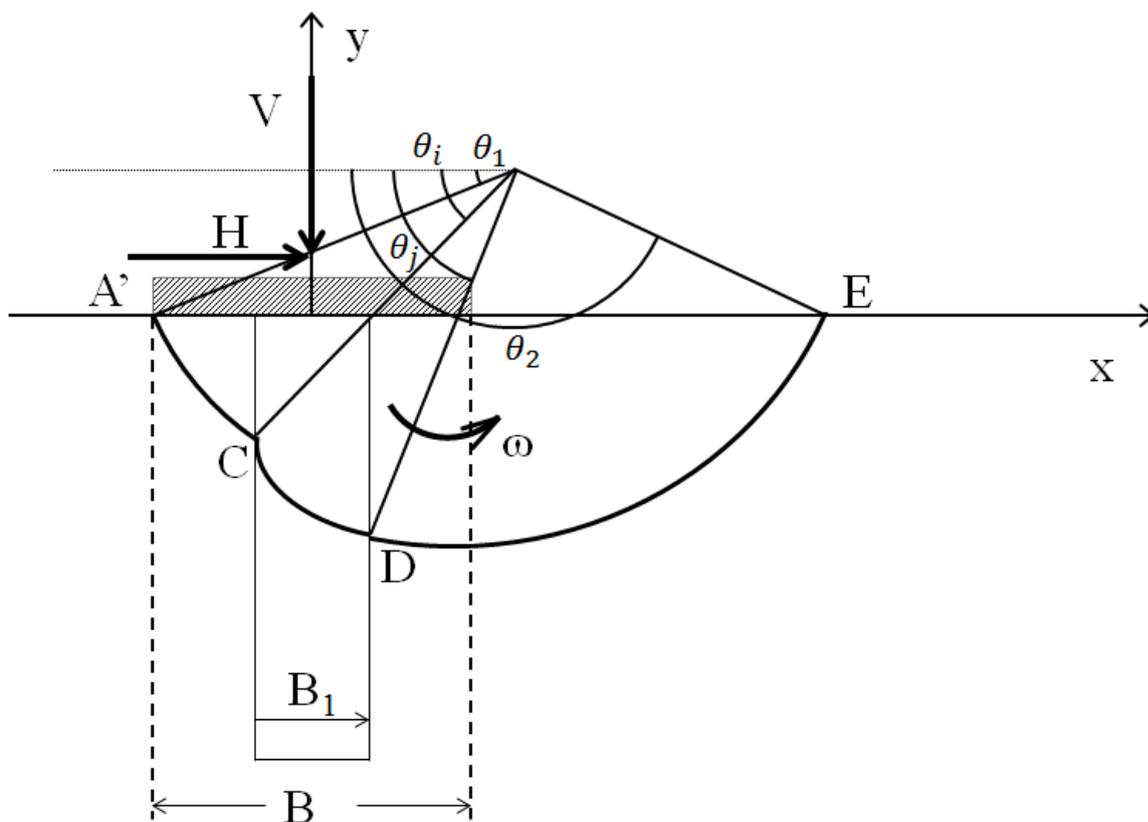


Figura 5.9 – Campo de velocidades do Mecanismo III

angulares da Figura C.1, sendo apenas dois deles independentes.

As hipóteses definidas para o desenvolvimento da abordagem são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta_1 \leq \varphi \\ \max(\theta_1, \varphi) < \theta_i < \frac{\pi}{2} \\ \theta_i < \theta_j \leq \frac{\pi}{2} \\ \theta_j < \theta_2 \leq \pi \\ x_\Omega > \frac{B}{2} \end{array} \right. \quad (5.51)$$

onde x_Ω corresponde à abscisa do centro de rotação Ω . A fim de expressar com facilidade a Equação 3.14 que relaciona o trabalho de forças externas com o trabalho resistente máximo, definem-se os parâmetros θ' e θ'' na Figura 5.10. R denota o raio do arco de circunferência $A'C$. A potência resistente máxima é dada por

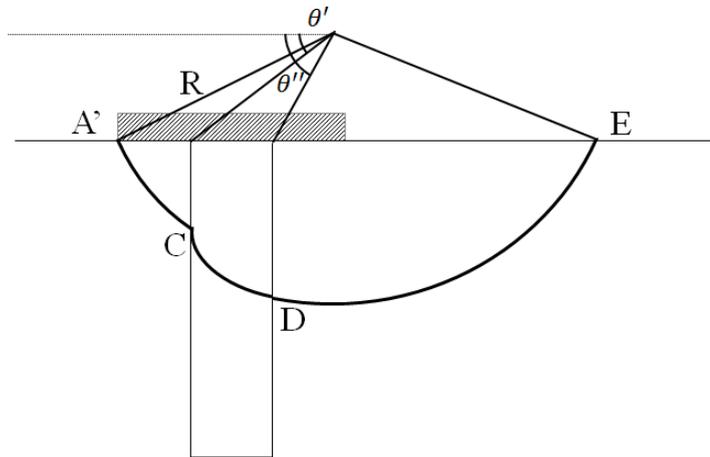


Figura 5.10 – Parâmetros R , θ' e θ''

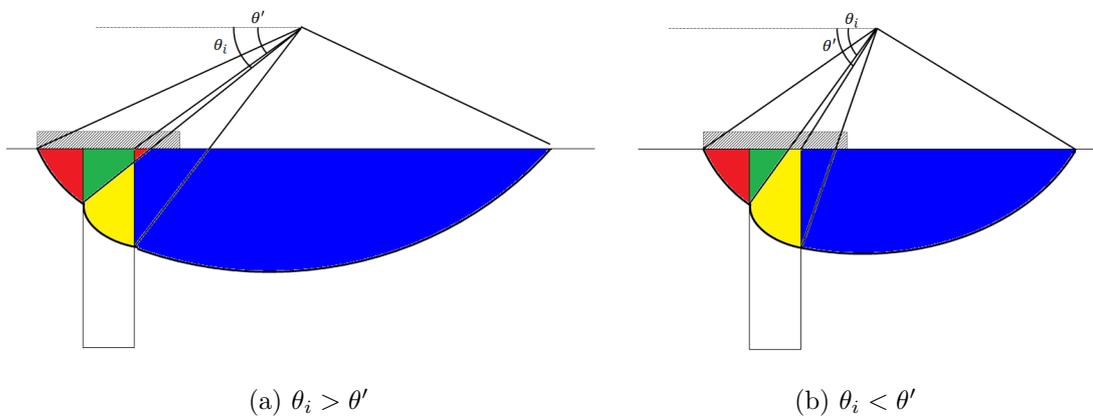


Figura 5.11 – Zonas de integração da potência de forças externas

$$P_{rm} = C_s \omega R^2 \left[\theta_i - \theta_1 + e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\theta_2 - \theta_j) + m \frac{1}{2 \tan \varphi} (e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} - 1) \right] \quad (5.52)$$

A potência das forças externas é determinada por integrais de área por zonas. Os limites de integração destas zonas variam segundo dois casos apresentados na Figura C.2. O primeiro caso corresponde a $\theta' < \theta_i$ e o segundo a $\theta' > \theta_i$. Portanto, os resultados são indicados para cada caso.

A potência das forças externas para $\theta' > \theta_i$ é expressa como:

$$\begin{aligned}
P_{ex} = & \frac{FR}{BC_s} \omega \left(\cos(\delta - \theta_1) - \frac{B \cos \delta}{2R} \right) \\
& + R^3 \gamma_s \frac{\omega}{3} \left[(\sin \theta_i - \sin \theta_1) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_1} \right) \right] \\
& + R^3 (\gamma_r - \gamma_s) \frac{\omega}{3} \left[\cos^3 \theta_i (\tan \theta_i - \tan \theta'') + \frac{\text{sen}^3 \theta_0}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta''} \right) \right] \\
& + R^3 \gamma_r \frac{\omega}{3} \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \text{sen} \theta_j - \text{sen} \theta_i \right) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta'} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} \right) \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_j) \right] \\
& + R^3 \gamma_s \frac{\omega}{3} \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\text{sen} \theta_2 - \text{sen} \theta_j) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_2} - \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_j} \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta') + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_j} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta'} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.53}$$

A potência das forças externas para $\theta' \leq \theta_i$ é:

$$\begin{aligned}
& \frac{FR}{BC_s} \omega \left(\cos(\delta - \theta_1) - \frac{B \cos \delta}{2R} \right) \\
& + R^3 \gamma_s \frac{\omega}{3} \left[(\sin \theta_i - \sin \theta_1) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_1} \right) \right] \\
& + R \frac{(\gamma_r - \gamma_s) B}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[\cos^3 \theta_i \tan \theta_i + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta'} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta''} \right) \right. \\
& \left. + \cos^3 \theta_i \tan \theta_i + e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_i) \right] \\
& + R^3 \gamma_r \frac{\omega}{3} \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \text{sen} \theta_j - \text{sen} \theta_i \right) \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_i - \tan \theta_j) \right] \\
& + R^3 \gamma_s \frac{\omega}{3} \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\text{sen} \theta_2 - \text{sen} \theta_j) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_2} - \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_j} \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta_i) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_j} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Aplicando a inequação 3.14, analogamente ao desenvolvido nos mecanismos anteriores, é obtida a resultante adimensional $\frac{F}{BC_s}$ por:

$$\frac{F}{BC_s} \leq \min_{\theta_1, \theta_i} \frac{p(\theta_1, \theta_i)}{\cos(\delta - \theta_1) - \frac{B \cos \delta}{2R}} \tag{5.55}$$

onde, para $\theta' > \theta_i$

$$\begin{aligned}
p(\theta_1, \theta_i) = & \frac{R}{B} \left[\theta_i - \theta_1 + e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\theta_2 - \theta_j) + \frac{m}{2 \tan \varphi} (e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} - 1) \right] \\
& - \frac{\xi}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[(\sin \theta_i - \sin \theta_1) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_1} \right) \right] \\
& - \frac{\xi}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 (k - 1) \left[\cos^3 \theta_i (\tan \theta_i - \tan \theta'') + \frac{\text{sen}^3 \theta_0}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta''} \right) \right] \\
& - k \xi \frac{1}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \text{sen} \theta_j - \text{sen} \theta_i \right) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta'} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} \right) \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_j) \right] \\
& - \xi \frac{1}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\text{sen} \theta_2 - \text{sen} \theta_j) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_2} - \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_j} \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta') + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_j} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta'} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.56}$$

e para $\theta' < \theta_i$:

$$\begin{aligned}
p(\theta_1, \theta_i) = & \frac{R}{B} \left[\theta_i - \theta_1 + e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\theta_2 - \theta_j) + \frac{m}{2 \tan \varphi} (e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} - 1) \right] \\
& - \xi \frac{1}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[(\text{sen } \theta_i - \text{sen } \theta_1) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_1} \right) \right] \\
& - \frac{1}{3} (k - 1) \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[\cos^3 \theta_i \tan \theta_i + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta'} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta''} \right) \right. \\
& \left. + \cos^3 \theta_i \tan \theta_i + e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_i) \right] \\
& - k \xi \frac{1}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \text{sen } \theta_j - \text{sen } \theta_i \right) \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_i - \tan \theta_j) \right] \\
& - \xi \frac{1}{3} \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_j) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_2} - \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2 \text{sen}^2 \theta_j} \right. \\
& \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta_i) + \frac{\text{sen}^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta_j} - \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_i} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.57}$$

5.4 RESULTADOS

Na sequência são apresentadas as abordagens estática e cinemática de K descritas precedentemente. Os resultados são inicialmente apresentados em termos de diagrama de interação no plano $(\frac{H}{BC_s}, \frac{V}{BC_s})$. Em seguida, as estimativas da capacidade de carga como função da inclinação da carga são igualmente apresentadas. Quanto à natureza dos materiais constitutivos envolvidos, duas configurações são sucessivamente investigadas:

- Solo coesivo/ Reforço coesivo
- Solo coesivo/ Reforço friccional

A primeira situação pode estar referida a uma coluna de solo argiloso tratada com cal/cimento, enquanto a segunda situação é referida à substituição da coluna argilosa por um solo granular.

Resultados numéricos são apresentados para distintas combinações dos seguintes valores dos parâmetros adimensionais 5.1:

Tabela 5.2 – Parâmetros utilizados na análise de resultados

Parâmetro	Valor 1	Valor 2	Valor 3
η	0.1	0.5	
m	1	3	5
χ	0.5	1	
k	1	1.5	
$\frac{h}{B}$	5		
φ	10°	30°	40°

Solo coesivo/Reforço coesivo

Na sequência são apresentados os limites superiores da capacidade de carga usando os mecanismos I, II e III, considerando o material de reforço como puramente coesivo. As Figuras 5.12-5.19 relacionam o limite superior da força vertical $\frac{V}{BC_s}$ com o limite superior da força horizontal $\frac{H}{BC_s}$ para cada um destes mecanismos. Nestas Figuras também são apresentados os limites inferiores da capacidade de carga (abordagem estática), assim como o limite inferior da capacidade de carga para um solo não reforçado.

Todas as curvas da Figura 5.12 (a) correspondem ao caso de solo sem reforço para um valor de $\xi = 0.5$ uma vez que $\frac{C_r}{C_s} = 1$ e $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$. As Figuras 5.12 (b) e (c) referem-se a um material da coluna que varia apenas em C_r/C_s em relação ao solo sem reforço. Na Figura 5.12 (b) não é observada diferencia significativa entre as abordagens estáticas para o solo com e sem reforço. Na Figura 5.12 (c), para uma relação $\frac{C_r}{C_s} = 5$, o reforço mais significativo ocorre para pequenas inclinações da carga $0 \leq \delta \leq \delta_{max}$, com $\delta_{max} = 23^\circ$

Em relação aos limites superiores da capacidade de carga os mecanismos I e II resultaram em forças $\frac{F}{BC_s}$ menores às correspondentes do Mecanismo III. Este fato foi encontrado em todas os casos estudados de reforço coesivo.

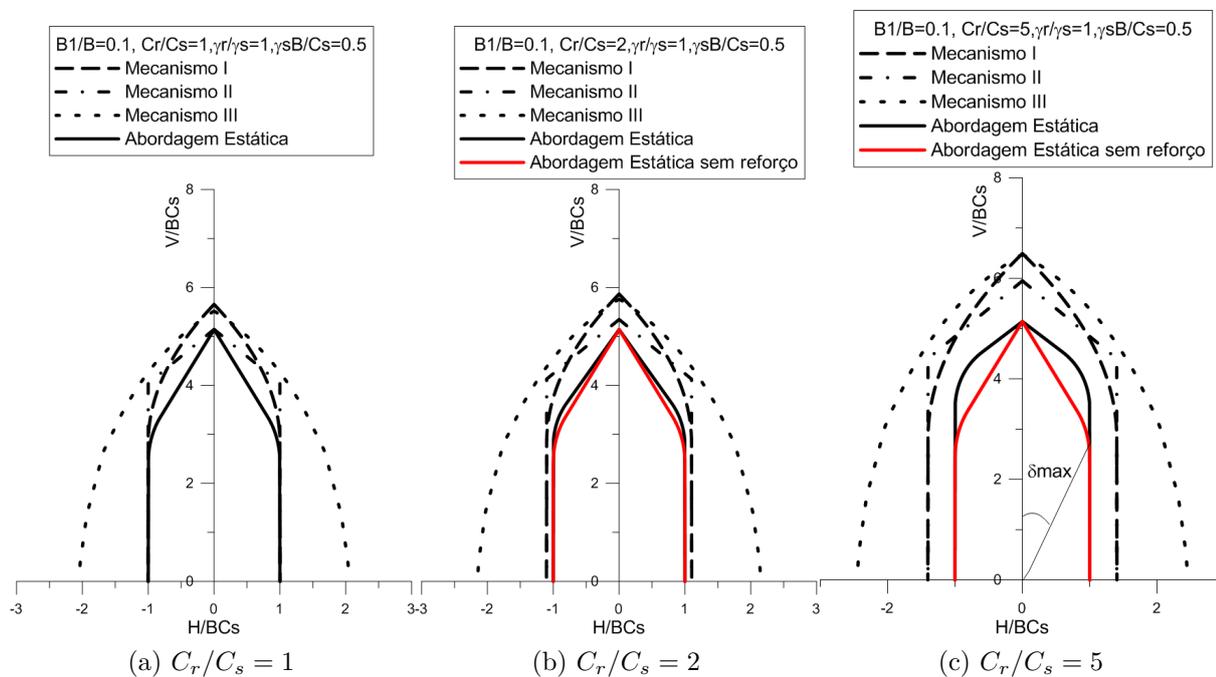


Figura 5.12 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$

As curvas da Figura 5.13 variam no parâmetro $\xi = \frac{\gamma_s B}{C_s}$ em relação as da Figura 5.12. Estas curvas apresentam comportamento similar às da Figura 5.12.

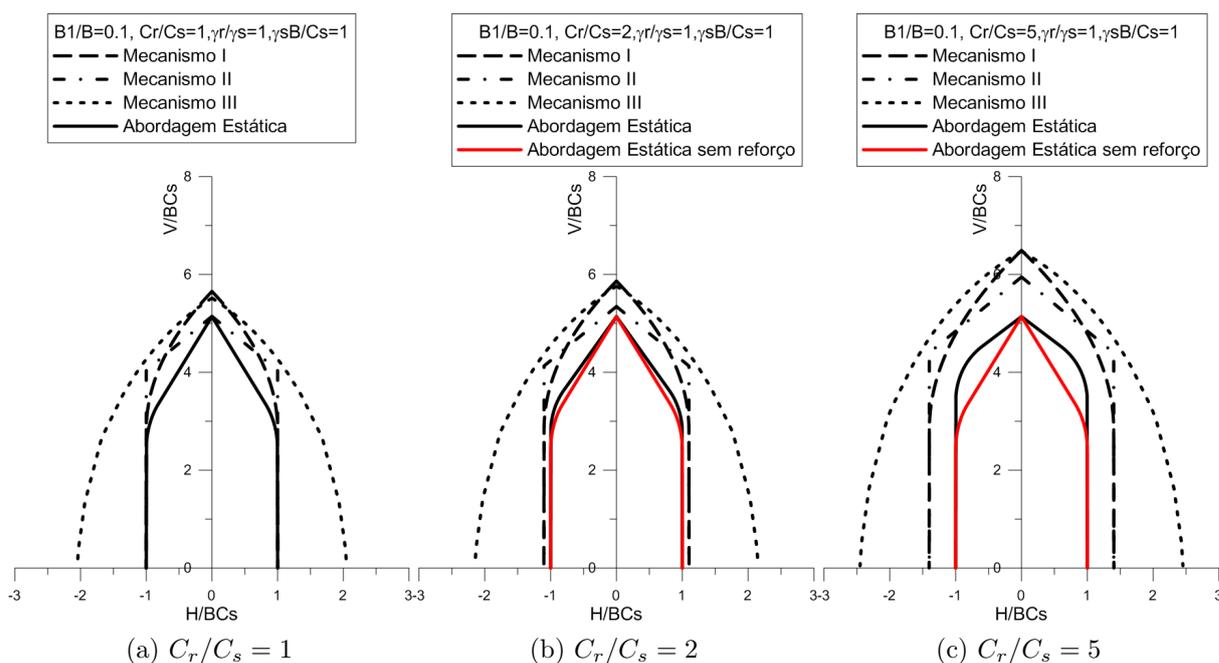


Figura 5.13 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

Na Figura 5.14 (a), trata-se de um reforço que varia apenas em γ_r/γ_s em relação ao solo sem reforço. Não é observada diferencia significativa entre as abordagens estáticas para o solo com e sem reforço, tanto para o caso $m = 1$ como para $m = 2$ (Figuras 5.14 (a) e (b)). Mais uma vez para uma relação $m = 5$, a Figura 5.14 (c) apresenta o incremento no limite inferior da capacidade de carga pelo reforço para valores de δ no intervalo $(0, 23^\circ)$.

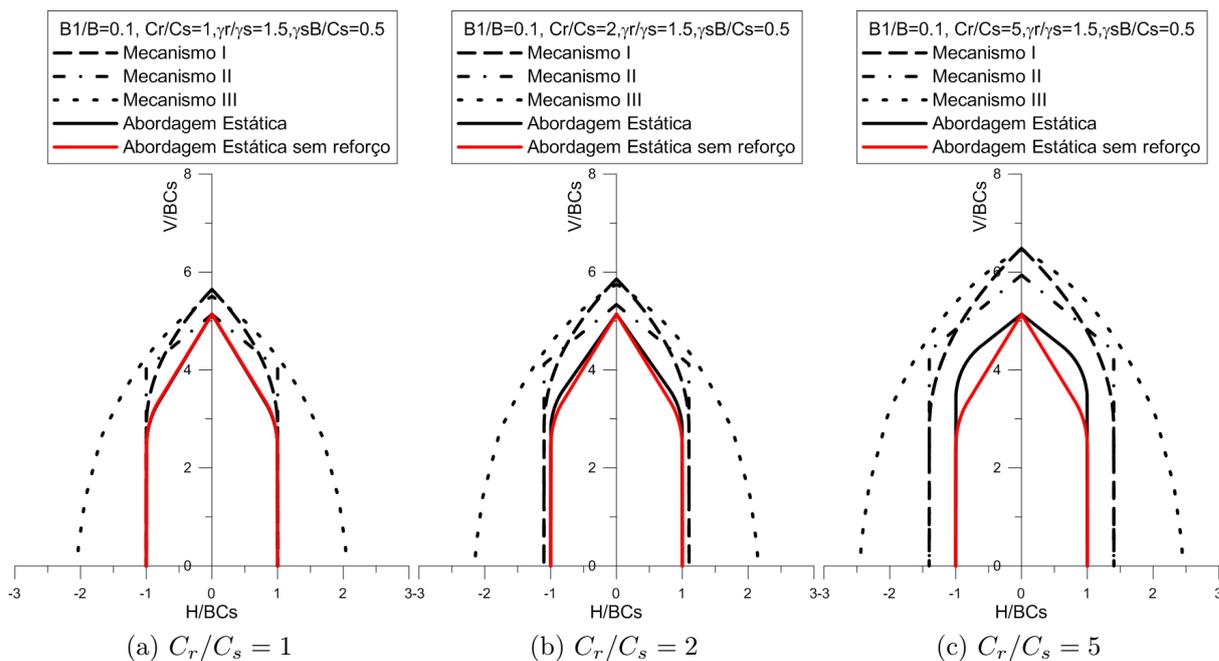


Figura 5.14 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$

A Figura 5.15 incrementa ξ em 0.5 em relação à Figura 5.14. Para $m = 1$ (Figura 5.15 (a)) a abordagem estática não é diferenciada da correspondente ao solo sem reforço. Para uma relação $m = 5$, a Figura 5.15 (c) apresenta o incremento da capacidade de carga pelo reforço para valores de δ no intervalo $(0, 23^\circ)$.

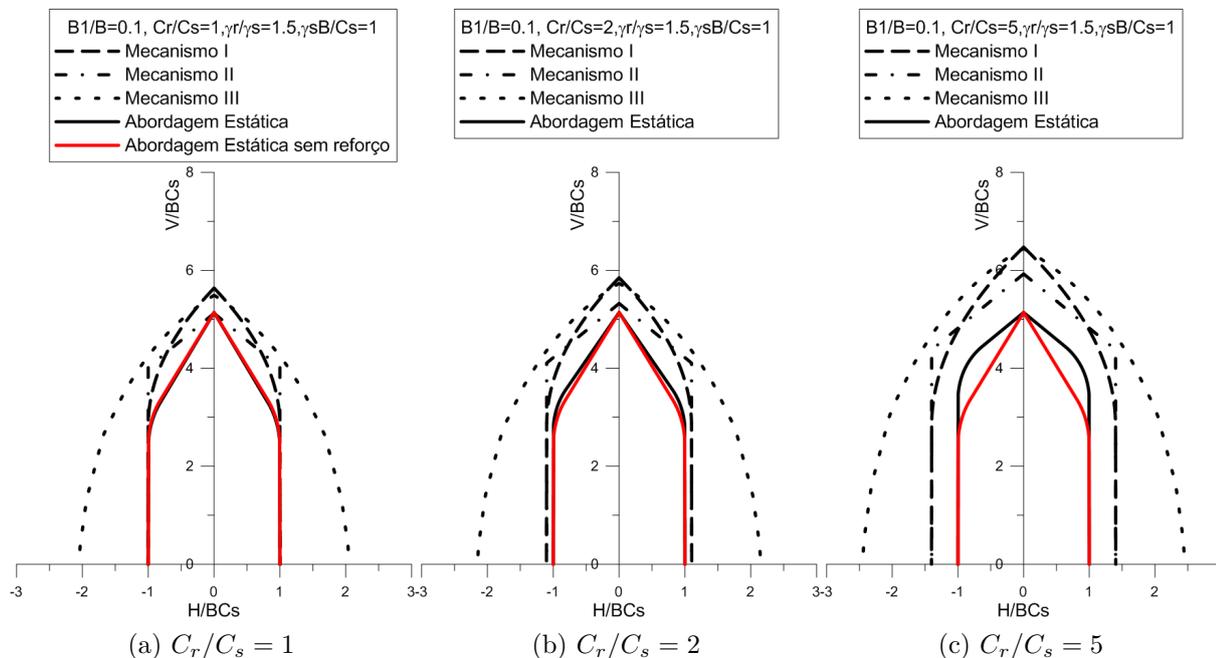


Figura 5.15 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

A partir da Figura 5.16 é apresentado o caso de reforço para uma relação $\eta = \frac{B_1}{B} = 0.5$. A Figura 5.16 (a) representa o solo sem reforço pois $m = 1$ e $k = 1$. Diferencias notáveis no limite inferior da capacidade de carga são percebidas tanto para $m = 2$ como para $m = 5$. O incremento na estimativa da capacidade de carga é produzido para valores de δ no intervalo $(0, 23^\circ)$ para $m = 2$ (Figura 5.16 (b)) e no intervalo $[0, 23^\circ)$ para $m = 5$ (Figura 5.16 (c)).

Em relação à Figura 5.16, a Figura 5.17 incrementa em 0.5 o parâmetro adimensional ξ . Estas curvas apresentam comportamento similar às da Figura 5.16.

A Figura 5.18 (a) trata de um reforço que varia apenas em $k = \gamma_r/\gamma_s$ em relação ao solo sem reforço. Diferencias notáveis no limite inferior da capacidade de carga são percebidas tanto para $m = 2$ como para $m = 5$. O incremento na estimativa da capacidade de carga é produzido para valores de δ no intervalo $(0, 23^\circ)$ para $m = 2$ (Figura 5.18 (b)) e no intervalo $[0, 23^\circ)$ para $m = 5$ (Figura 5.18 (c)).

Em relação à Figura 5.18, a Figura 5.19 incrementa em 0.5 o parâmetro adimensional ξ . Para $m = 2$ (Figura 5.19 (b)) a estimativa inferior da capacidade de carga é superior a aquela para um solo sem reforço. Para $m = 5$ o incremento na estimativa da capacidade

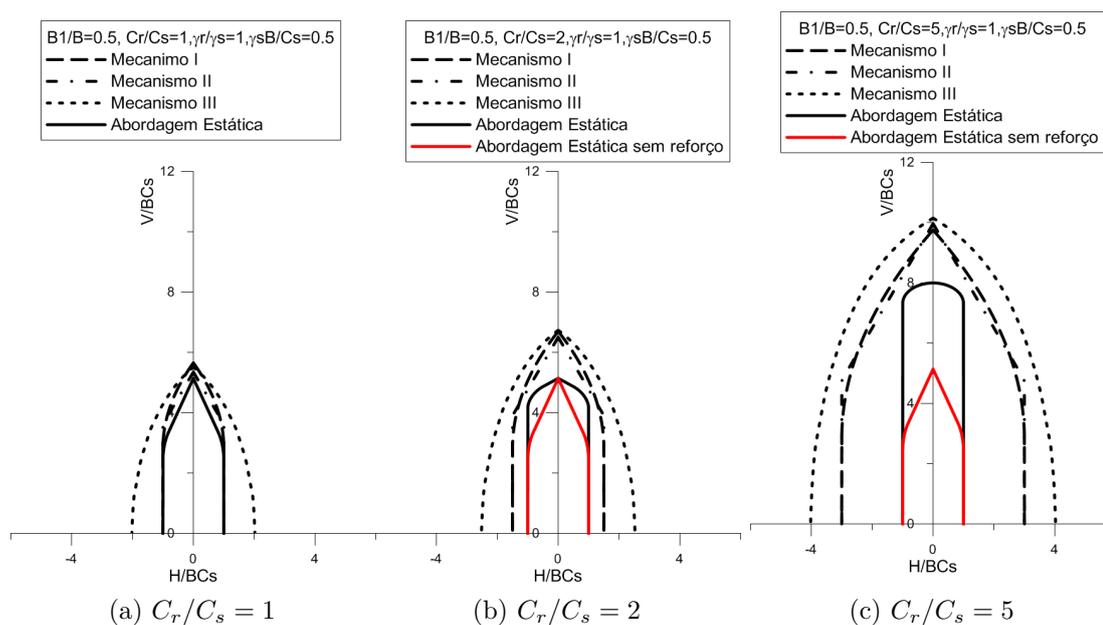


Figura 5.16 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$

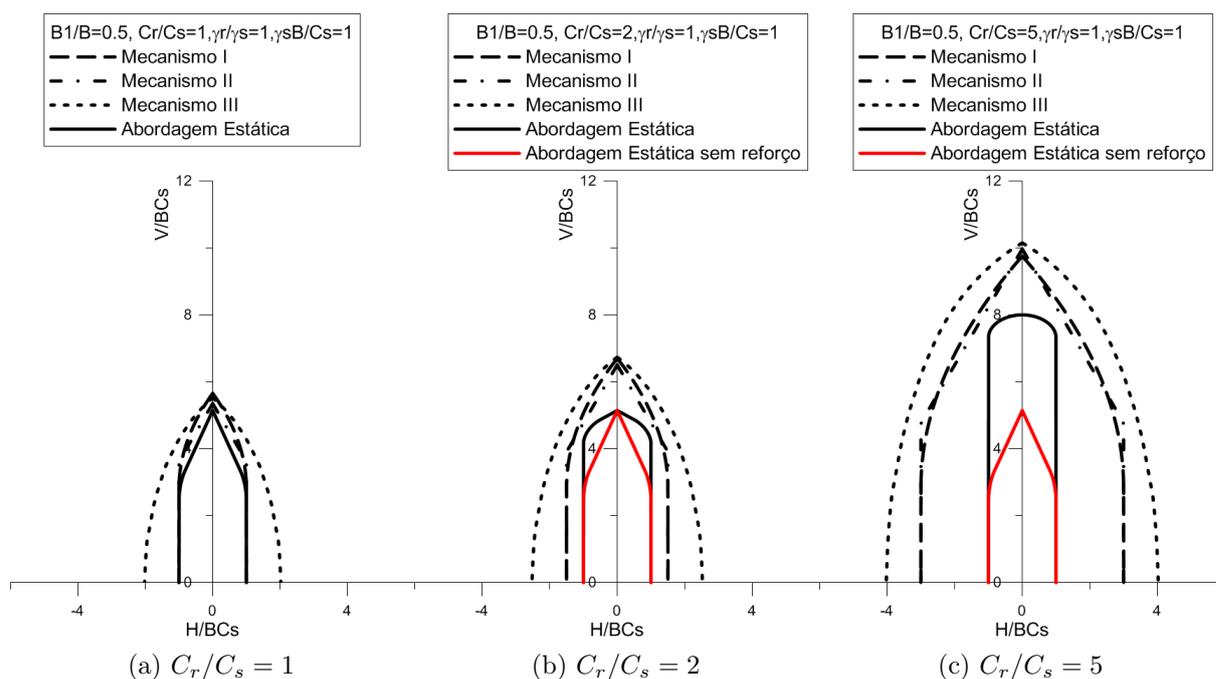


Figura 5.17 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

de carga é produzido para valores de δ no intervalo $[0, 23^\circ)$

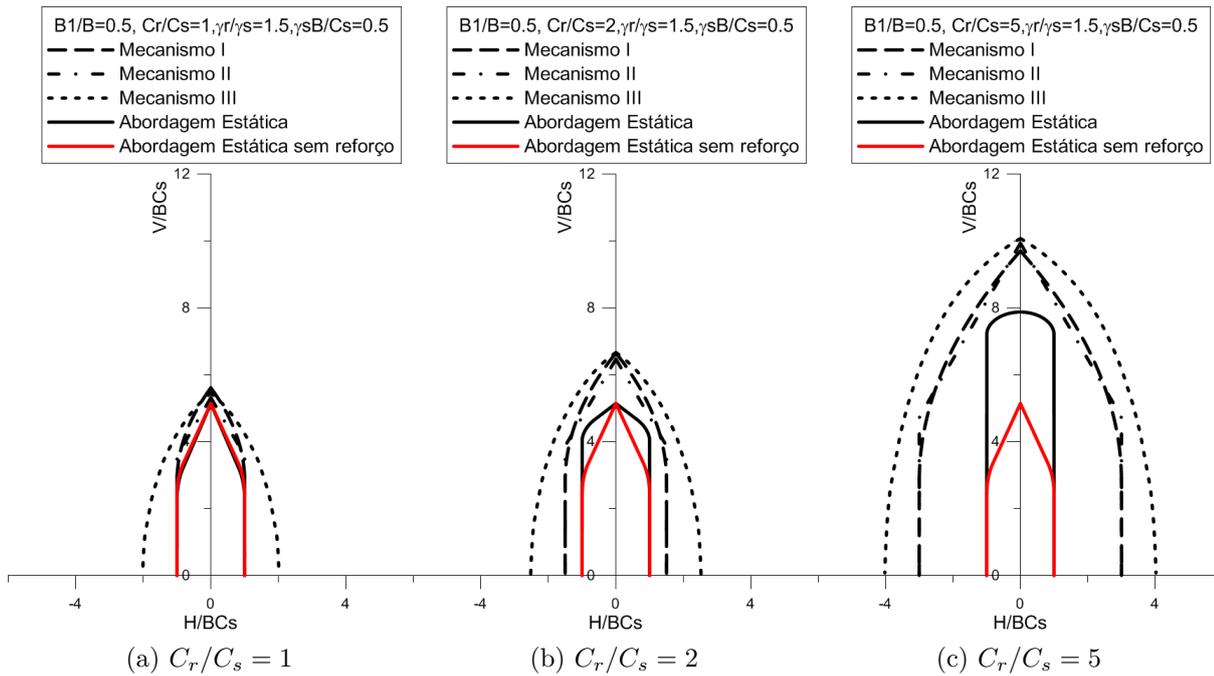


Figura 5.18 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$

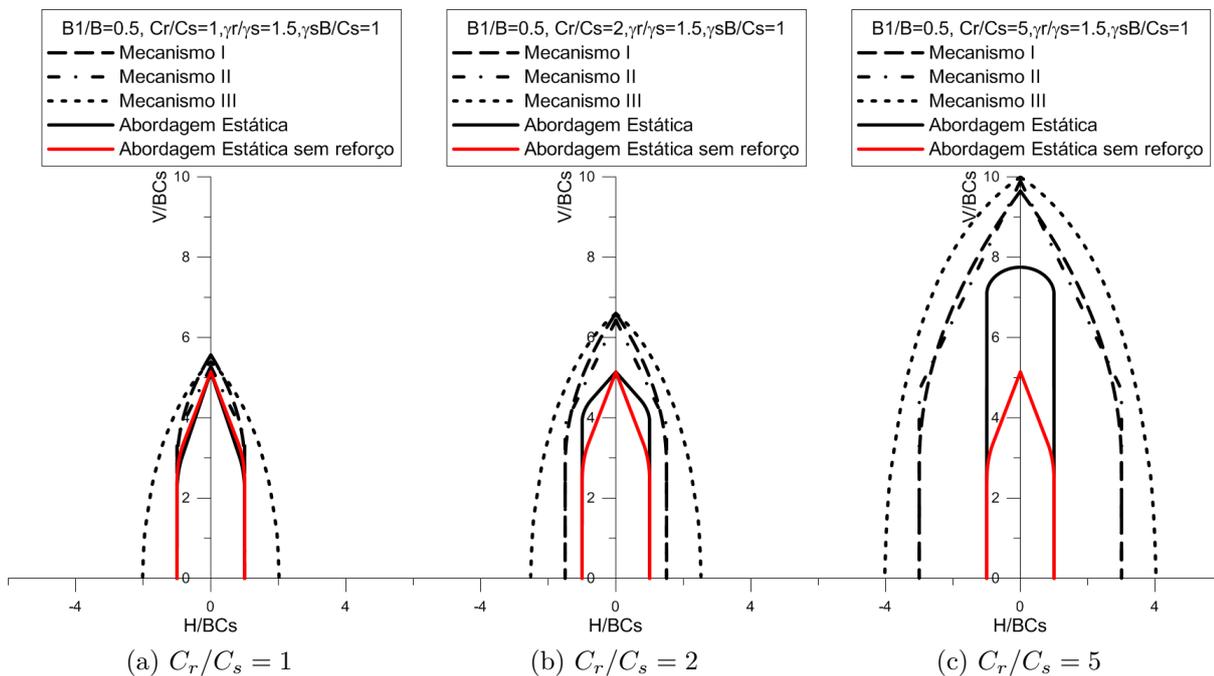


Figura 5.19 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

As Figuras 5.20-5.23 relacionam o limite superior da força adimensional $\frac{F}{BC_s}$ com o ângulo δ de inclinação da carga.

A Figura 5.20 apresenta o incremento da estimativa superior da carga de ruptura com o aumento do parâmetro adimensional m , para uma relação $\eta = 0.1$ e $k = 1$. A Figura 5.20 (a) é referida a uma relação $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$ e a Figura 5.20 (b) a $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$. Estimativas muito

similares são observadas para ambos casos.

A abordagem cinemática prediz um incremento na capacidade de carga na componente horizontal para $\delta = \frac{\pi}{2}$ quando $m > 1$, situação que não ocorre na estimativa inferior (abordagem estática). Este fato foi observado em todos os casos estudados de reforço coesivo.

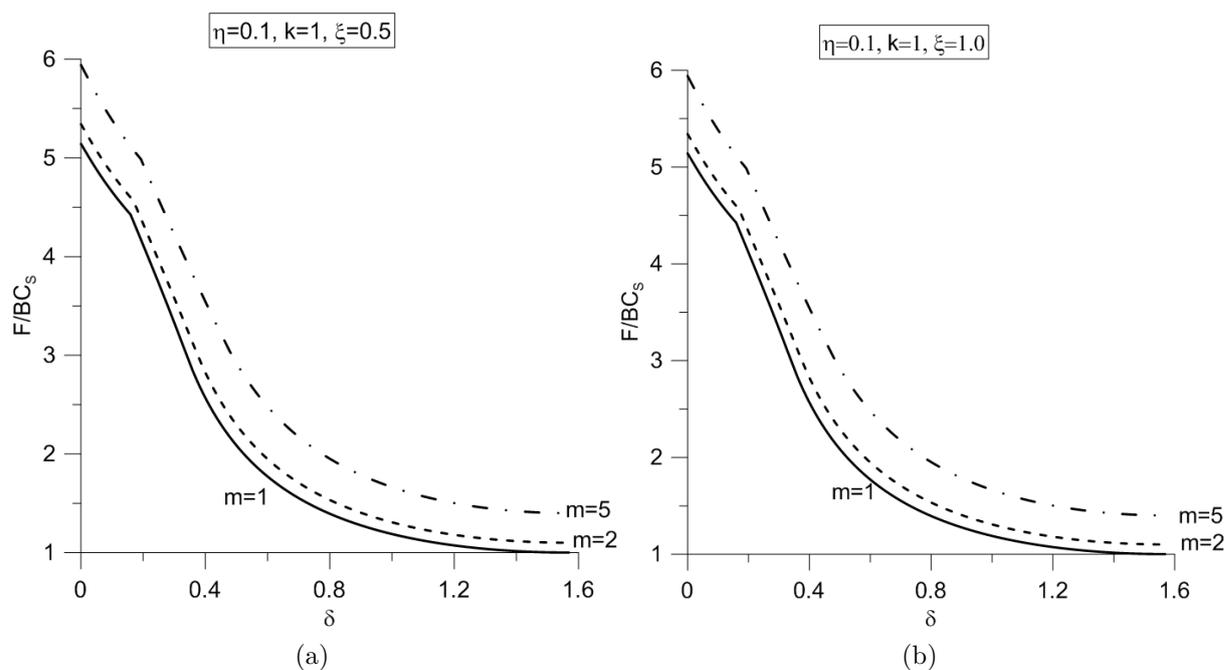


Figura 5.20 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga

A Figura 5.21 corresponde a uma relação $\eta = 0.1$ e $k = 1.5$. A Figura 5.21 (a) corresponde a uma relação $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$ e a Figura 5.20 (b) a $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$. Estimativas muito similares são observadas para ambos casos. Curvas praticamente coincidentes são observadas para $m = 1$ e o solo sem reforço, destacando que a diferença entre os mesmos radica no valor de k .

Uma relação $\eta = 0.5$ é utilizada nas Figuras 5.22 e 5.23 onde são observados incrementos na estimativa da capacidade de carga para distintos valores dos parâmetros adimensionais k e ξ . Novamente são encontradas curvas similares variando apenas o parâmetro ξ em 0.5.

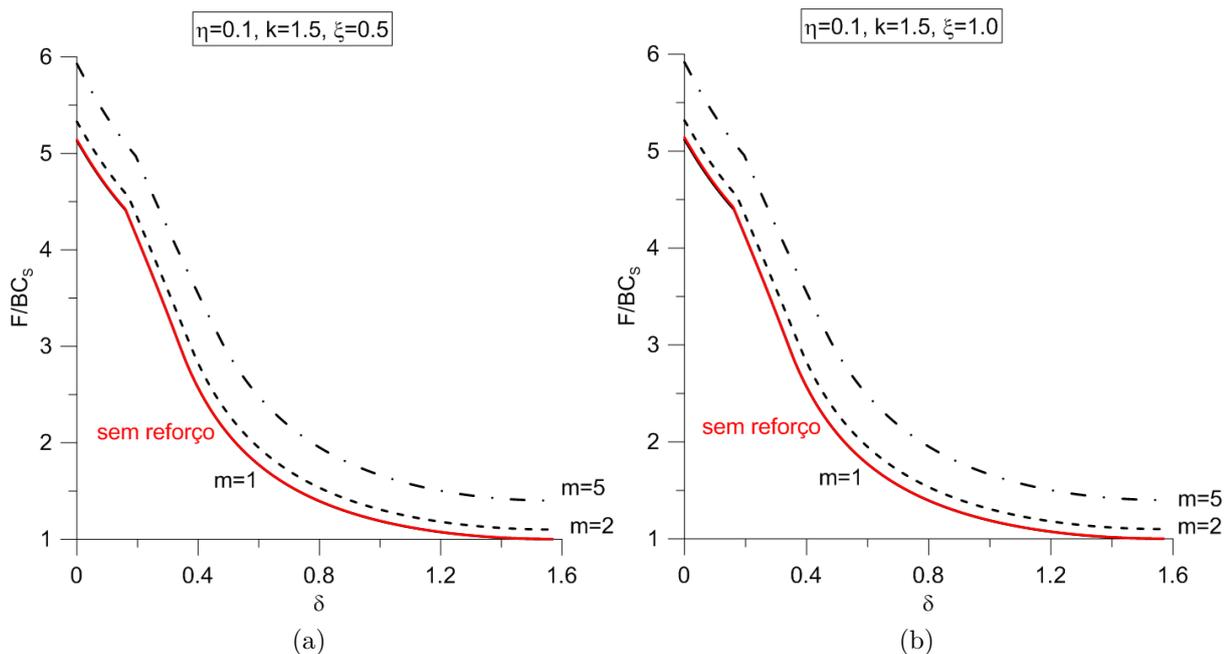


Figura 5.21 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga

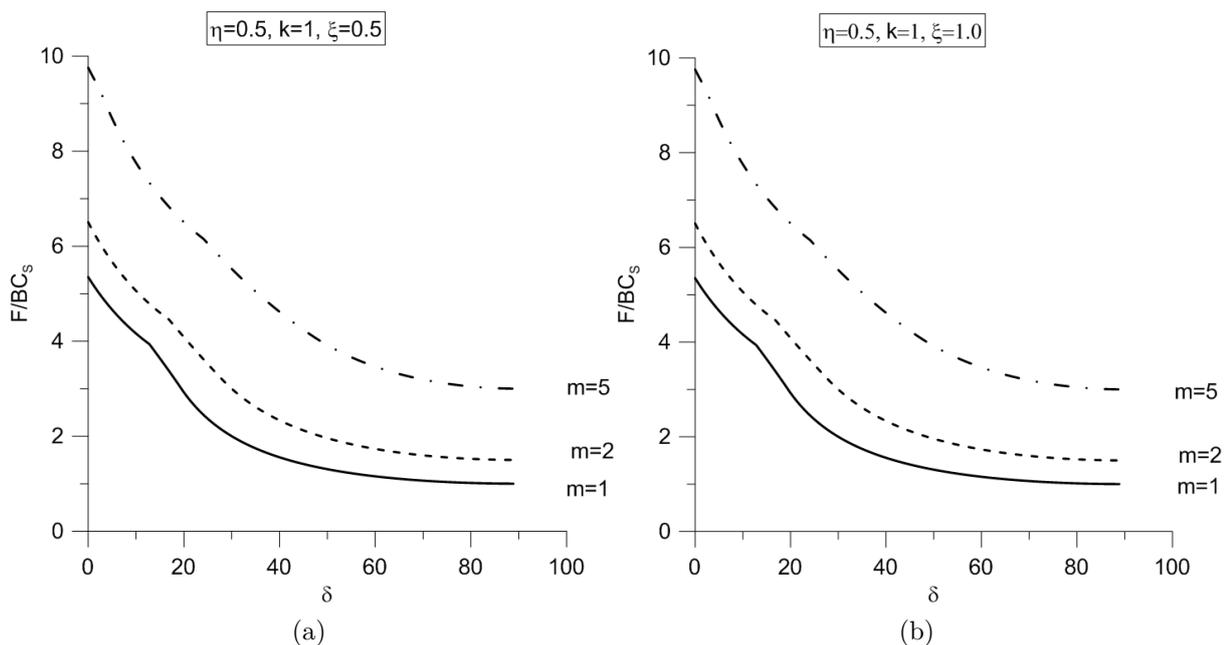


Figura 5.22 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga

Solo coesivo/Reforço granular

Na sequência são apresentados os limites superiores da capacidade de carga usando os mecanismos I, II e III, considerando o material de reforço sem coesão e com ângulo de atrito interno φ . As Figuras 5.24-5.31 relacionam o limite superior da força vertical $\frac{V}{BC_s}$ com o limite superior da força horizontal $\frac{H}{BC_s}$ para cada um destes mecanismos. Nestas

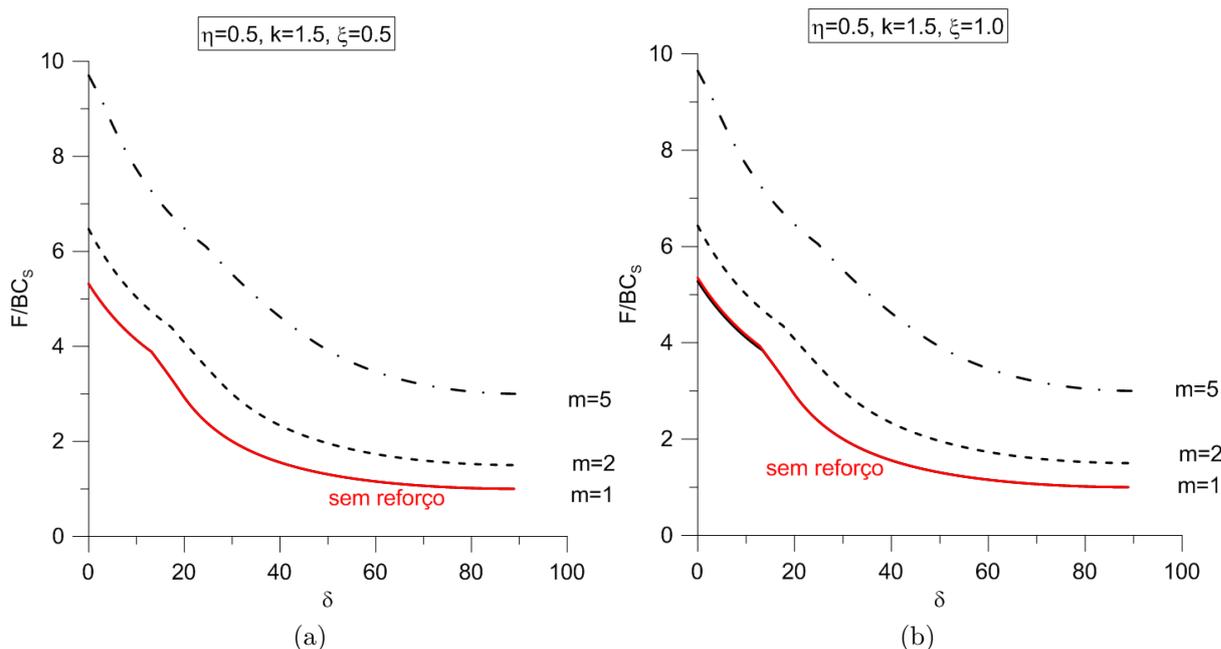


Figura 5.23 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga

Figuras também são apresentados os limites inferiores da capacidade de carga (abordagem estática), assim como o limite inferior da capacidade de carga para um solo não reforçado.

A Figura 5.24 apresenta limites superiores da capacidade de carga para $\eta = 0.1$, $k = 1$ e $\xi = 0.5$. Enquanto a abordagem estática se refere, maior amplitude de pontos (limites inferiores) é encontrada a medida que aumenta φ . Observa-se que para valores pequenos da tensão compressiva a coluna não induz reforço, mas ao contrario reduz a capacidade de resistência do solo, como ilustrado pelas abordagens estática de K , respectivamente para o solo sem coluna e solo com coluna.

A Figura 5.25 apresenta o mesmo caso que a Figura 5.24 incrementando apenas o parâmetro ξ em 0.5. Os mecanismos I, II e III resultaram em forças $\frac{F}{BC_s}$ menores às correspondentes do Mecanismo III (Figura 5.25 (a), (b) e (c)). Enquanto a abordagem estática, maior amplitude de pontos (limites inferiores) é encontrada a medida que aumenta φ . A abordagem estática para esta combinação de parâmetros incrementa a estimativa da capacidade de carga em relação ao caso sem reforço apenas para valores de $\varphi = 40^\circ$ para um certo intervalo do ângulo δ (Figura 5.24 (c)).

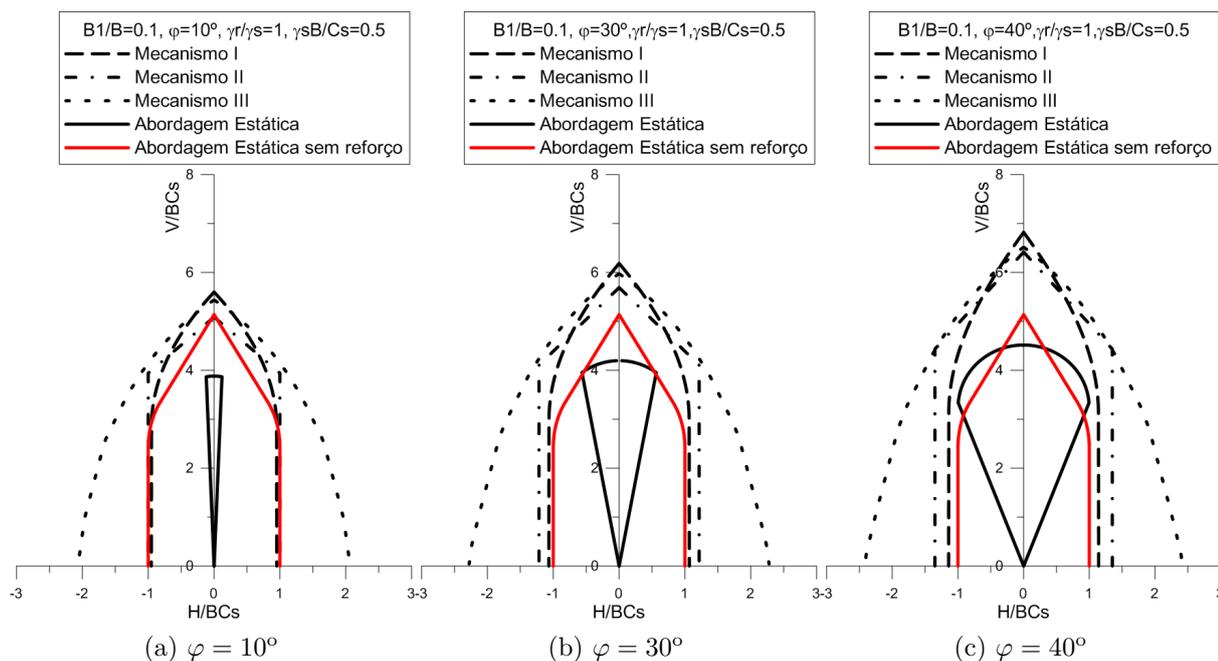


Figura 5.24 – Mecanismos I, II e III para $\eta = 0.1$, $\xi = 0.5$

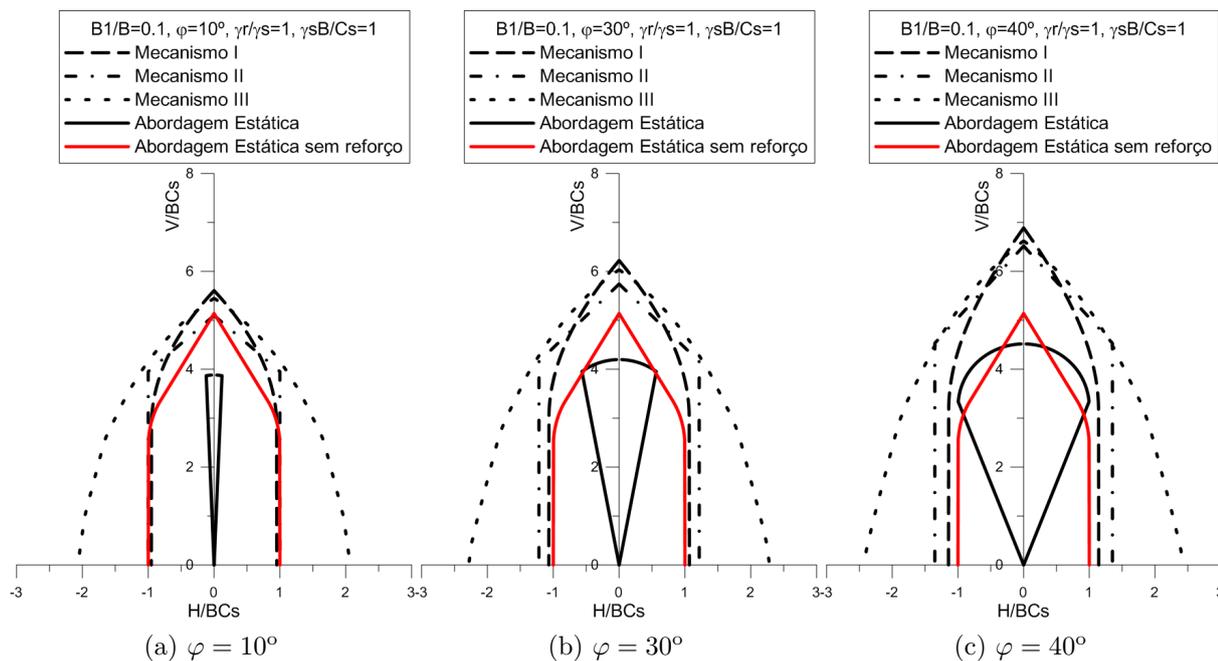


Figura 5.25 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

A Figura 5.26 refere-se a um material de reforço com $\eta = 0.1$, $\xi = 1.5$ e $\xi = 0.5$. A abordagem estática para esta combinação de parâmetros incrementa a estimativa da capacidade de carga em relação ao caso sem reforço apenas para valores de $\varphi = 40^\circ$ para um certo intervalo do ângulo δ (Figura 5.24 (c)).

A Figura 5.27 apresenta o mesmo caso que a Figura 5.26 incrementando o parâmetro ξ em 0.5. A abordagem estática para esta combinação de parâmetros incrementa a estimativa

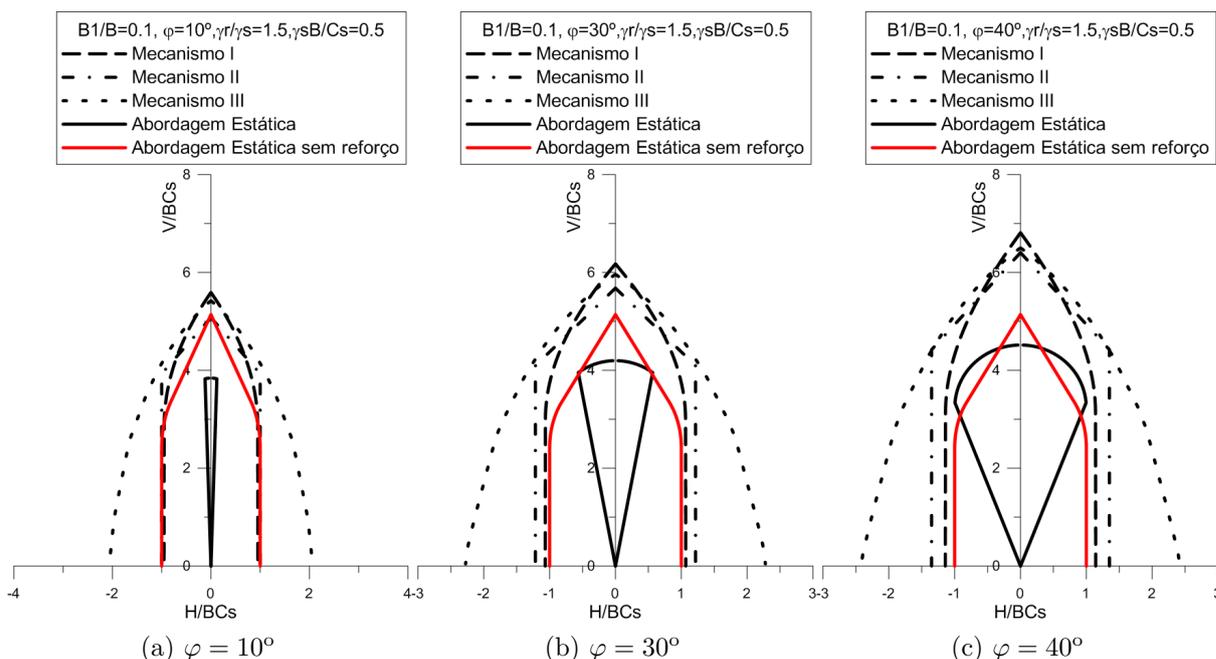


Figura 5.26 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$

da capacidade de carga em relação ao caso sem reforço apenas para valores de $\varphi = 40^\circ$ para um certo intervalo do ângulo δ (Figura 5.24 (c)).

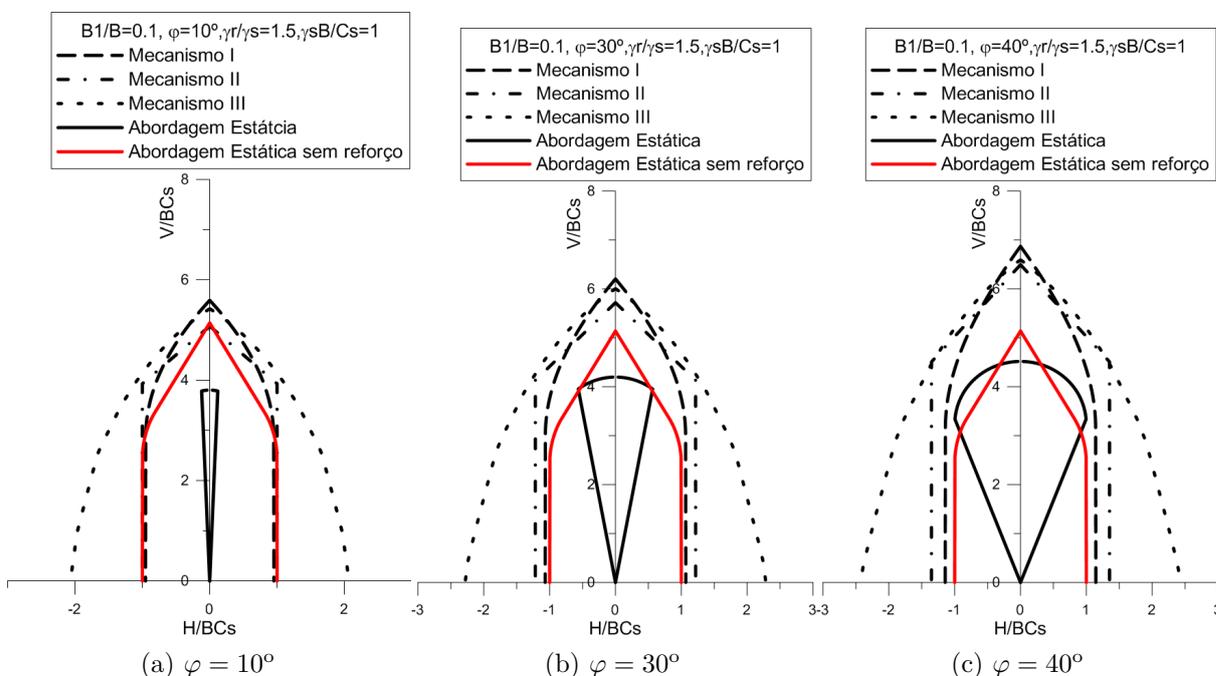


Figura 5.27 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.1$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

Nas Figuras 5.28-5.31 uma relação $\eta = 0.5$ é abordada. Nestas Figuras, para um ângulo de atrito interno $\varphi = 10^\circ$ a abordagem cinemática se encontra dentro do domínio k_s do solo

sem reforço. Em outras palavras, um reforço com ângulo de atrito $\varphi = 10^\circ$ para $\eta = 0.5$ diminui a capacidade de carga do solo. Comparando abordagens estáticas para o solo com e sem reforço, são observadas melhoras na carga de ruptura para valores de $\varphi = 30^\circ$ e 40° em certo intervalo do ângulo δ . O mecanismo III participa como limite superior para todos os casos em que $\xi = 1$ e $\varphi = 30^\circ$ ou $\varphi = 40^\circ$.

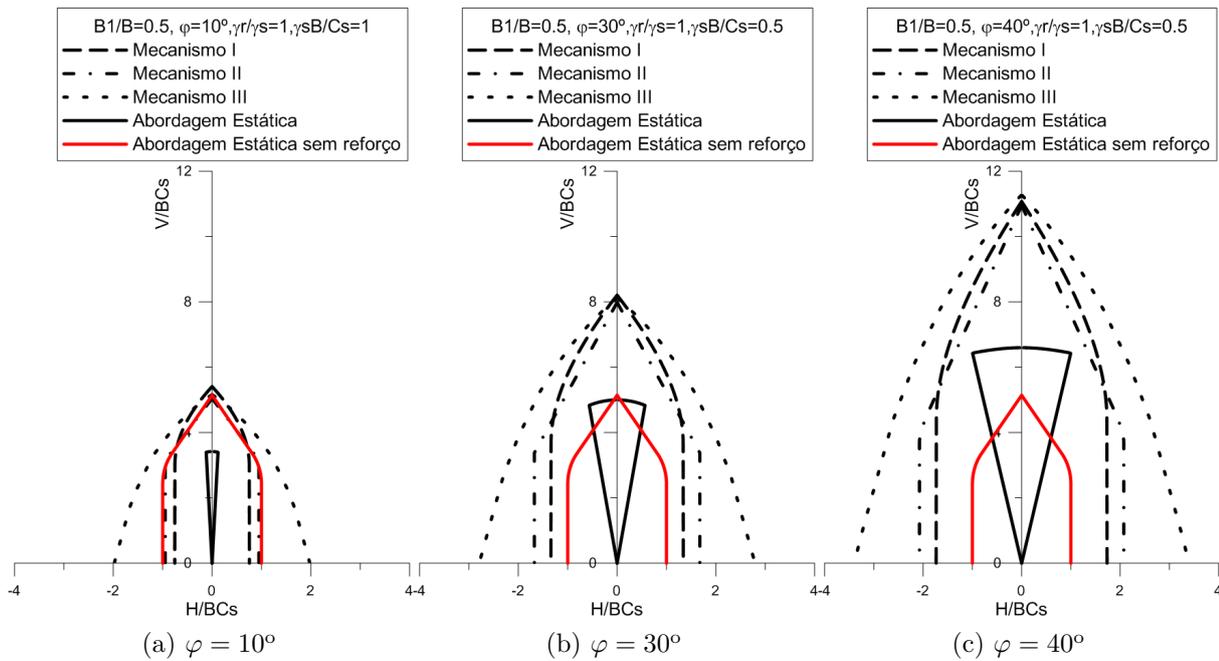


Figura 5.28 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$

As Figuras 5.32-5.35 relacionam o limite superior da força adimensional $\frac{F}{BC_s}$ com o ângulo δ de inclinação da carga.

Em todos os casos o reforço com ângulo de atrito $\varphi = 10^\circ$ resulta em valores inferiores do limite superior da força $\frac{F}{BC_s}$ em relação ao solo não reforçado.

Estimativas superiores muito similares são observadas variando apenas o parâmetro ξ em 0.5, para todas as combinações de parâmetros adimensionais utilizadas

Se bem pequeno, a abordagem cinemática prediz um incremento na capacidade de carga na componente horizontal para $\delta = \frac{\pi}{2}$ para $\varphi = 30^\circ$ e $\varphi = 40^\circ$, situação que não ocorre na estimativa inferior (abordagem estática).

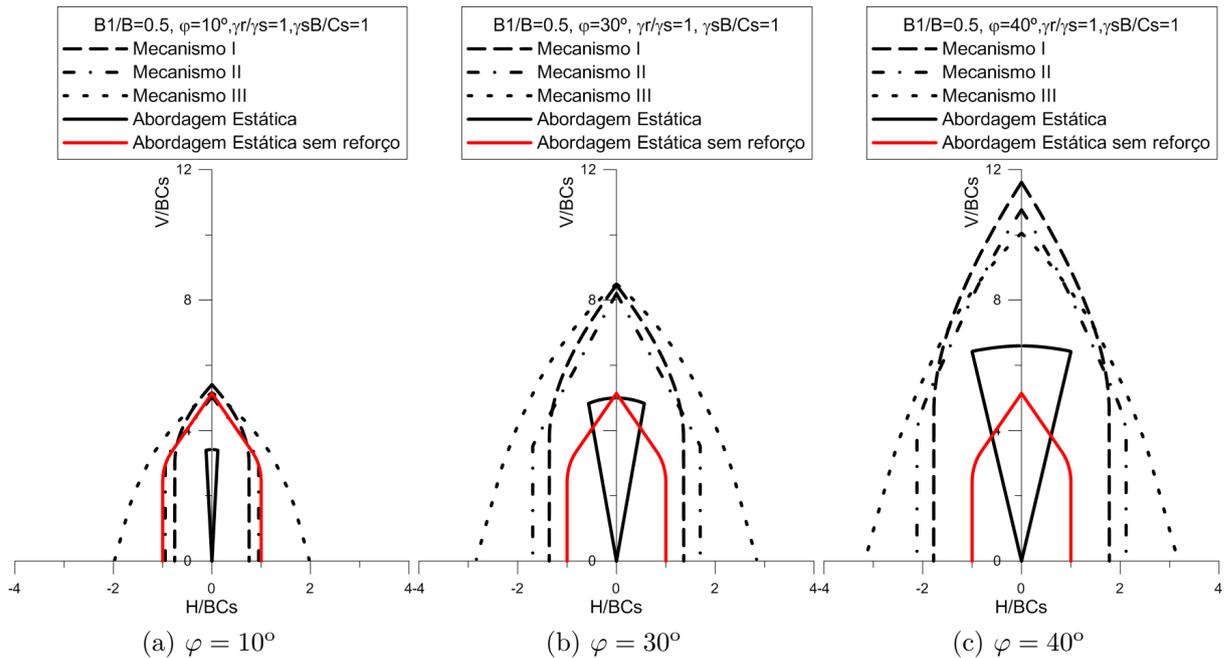


Figura 5.29 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

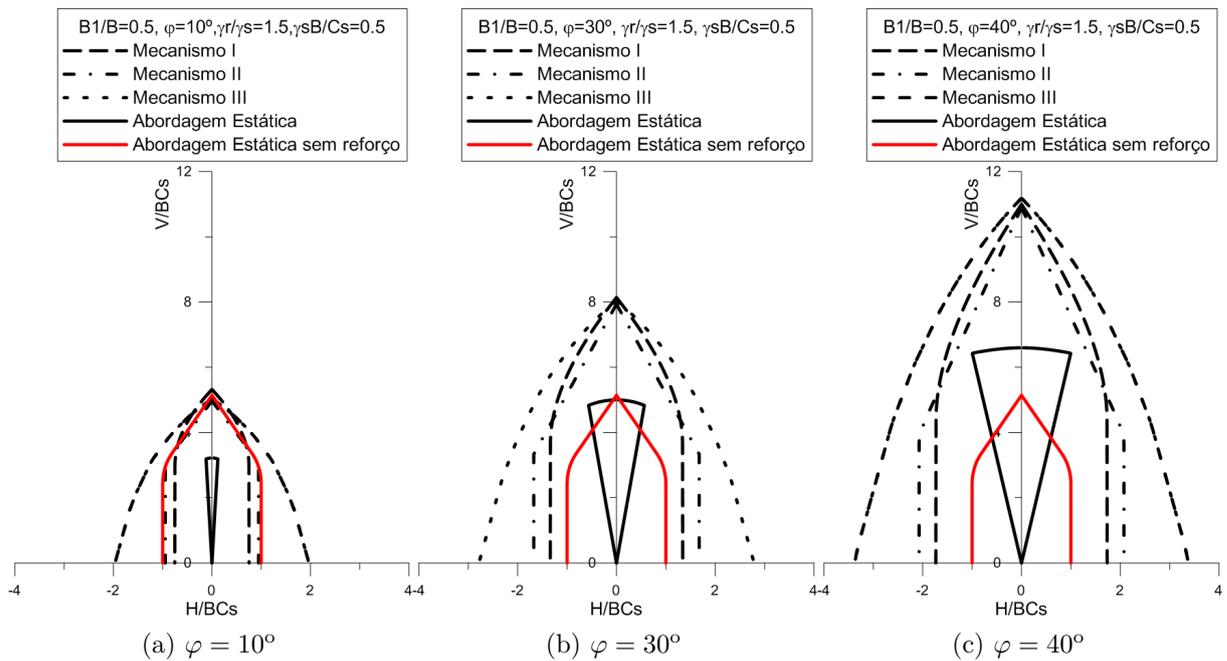


Figura 5.30 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 0.5$

Finalmente é apresentado um gráfico onde são comparadas as abordagens cinemáticas para φ variando entre 10° , 20° a 30° e solo sem reforçar. Na Figura 5.36 observa-se que a partir de $\varphi = 20^\circ$ a coluna melhora o limite superior da capacidade de carga.

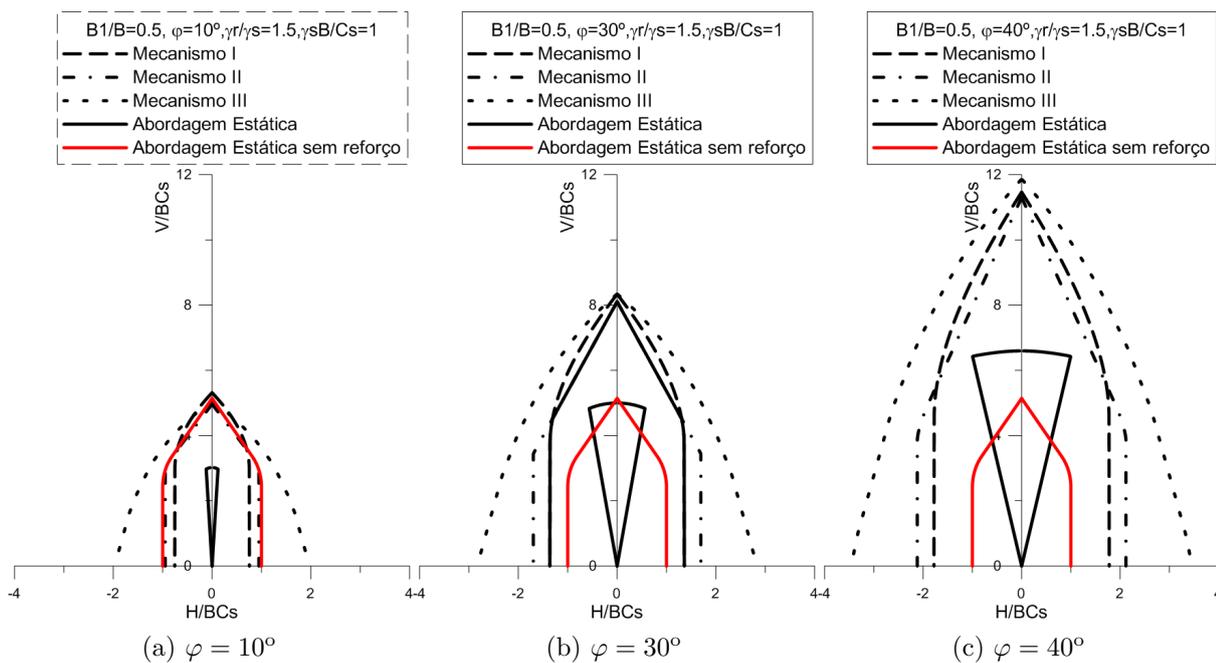


Figura 5.31 – Mecanismos I, II e III para $\frac{B_1}{B} = 0.5$, $\frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1.5$ e $\frac{\gamma_s B}{C_s} = 1$

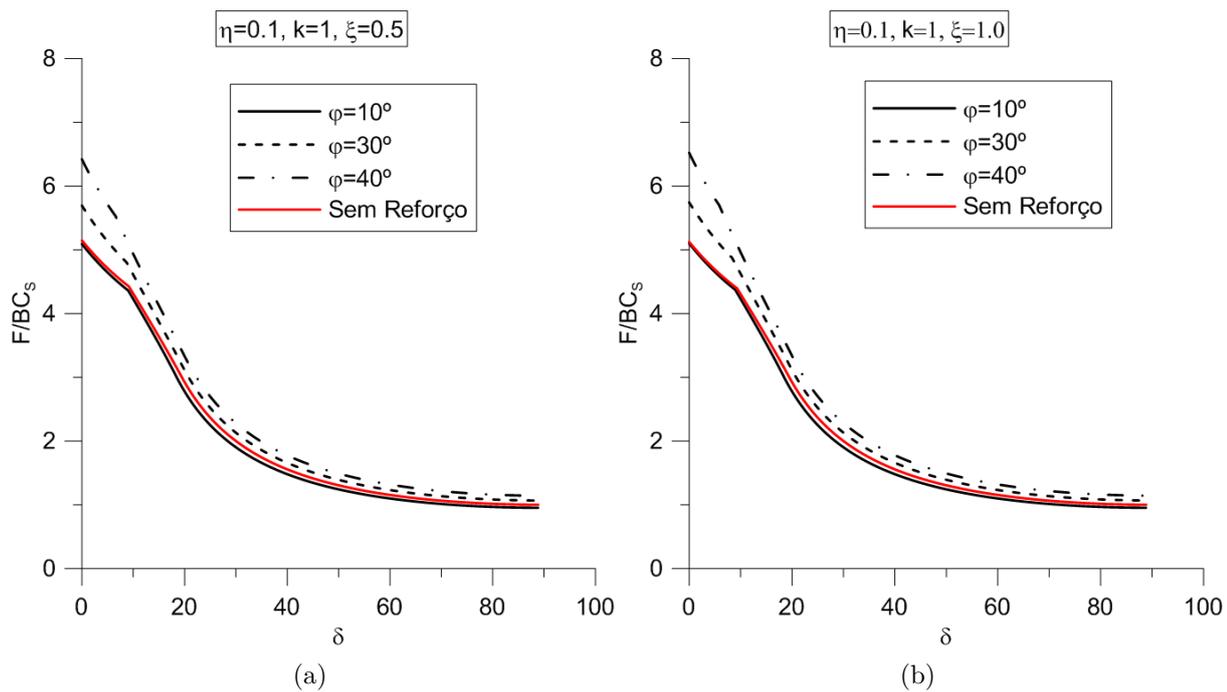


Figura 5.32 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs ângulo δ da inclinação da carga

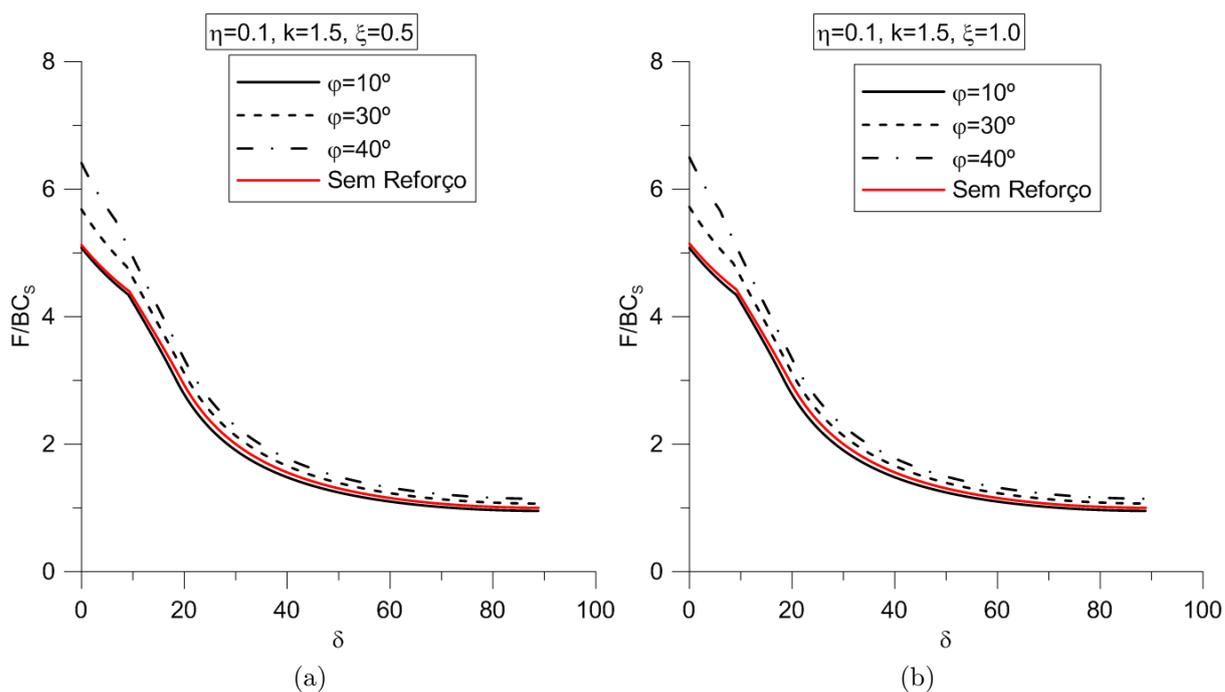


Figura 5.33 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga

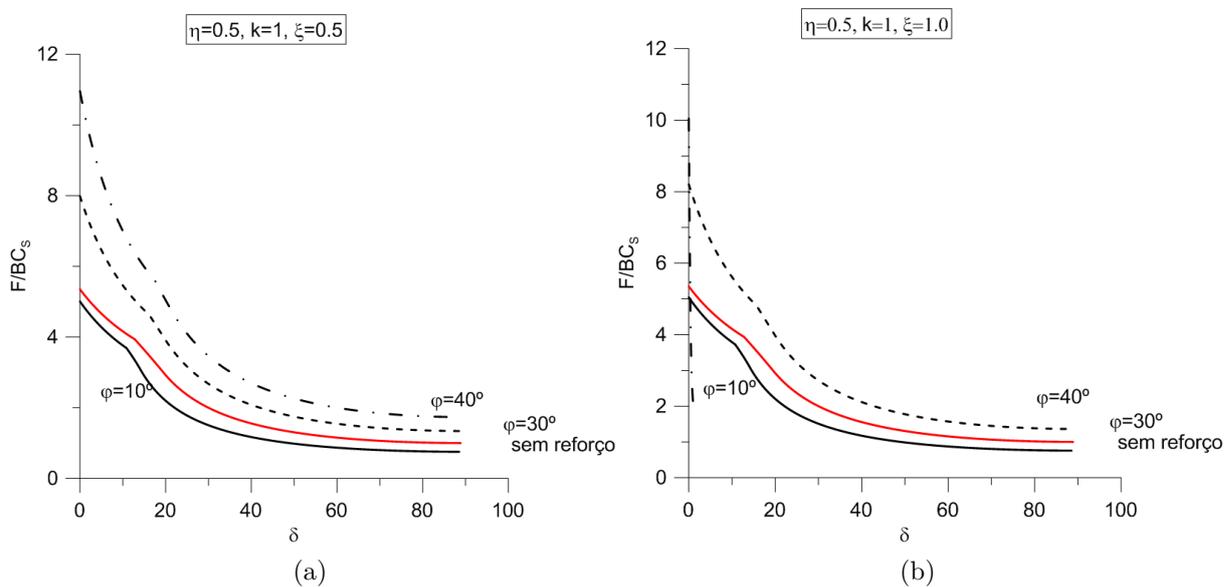


Figura 5.34 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga

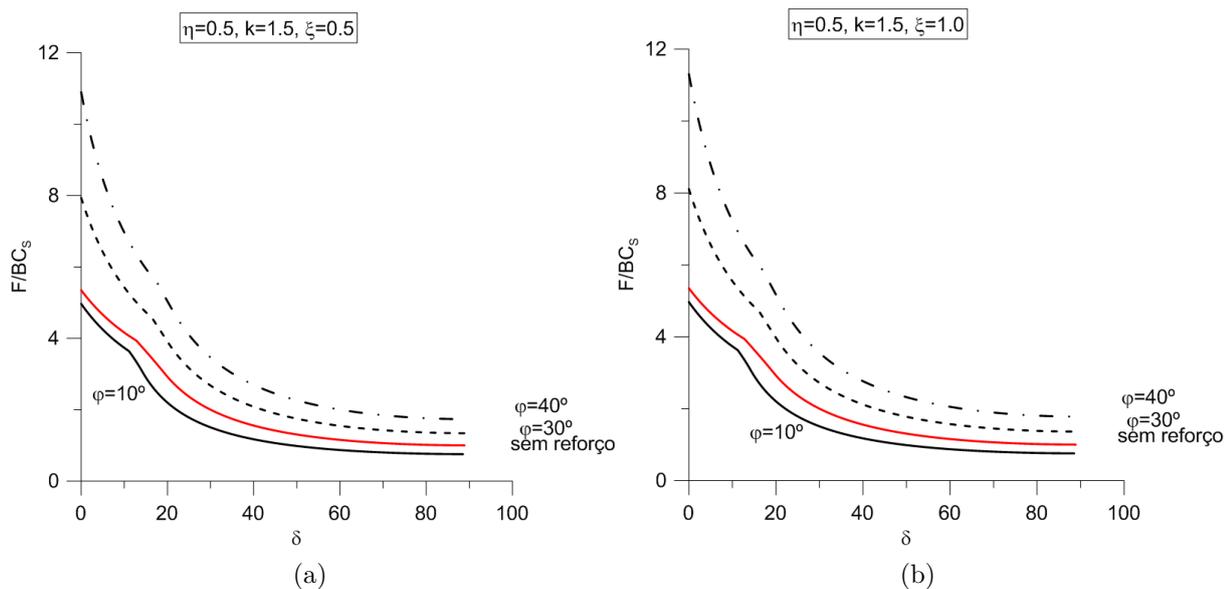


Figura 5.35 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga

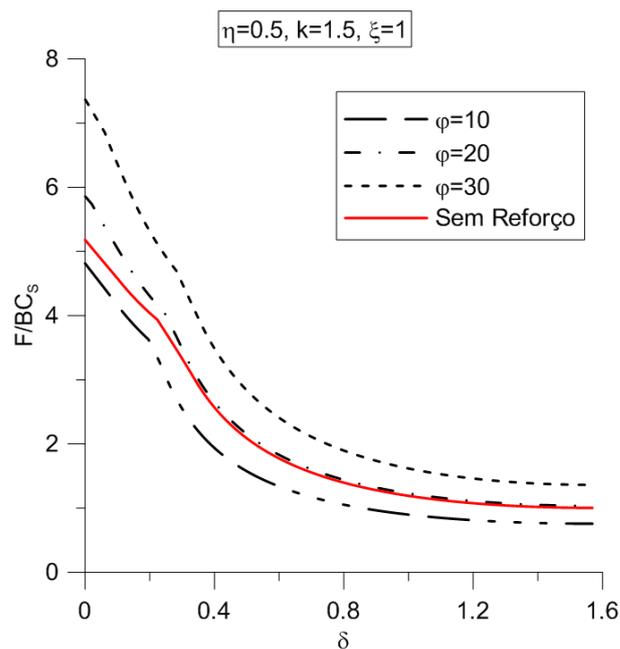


Figura 5.36 – Limite superior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ vs angulo δ da inclinação da carga

5.5 ANÁLISE DE RESULTADOS

A capacidade de carga de uma fundação submetida a uma carga inclinada, apoiada sobre um solo coesivo reforçado por uma coluna isolada foi obtida neste capítulo no âmbito da análise limite, considerando estado plano de deformação. Os resultados são expressos para uma espessura unidimensional da fundação.

Considerou-se que o solo de fundação obedece ao critério de Tresca, utilizado para

representar o comportamento do solo argiloso em condições não drenadas. O material de reforço é caracterizado pelo critério de Mohr-Coulomb. O efeito da gravidade foi considerado.

A metodologia de cálculo utilizada neste capítulo implica o uso de dois tipos de aproximações: pelo interior e pelo exterior. Para cada estado de tensões em equilíbrio compatível com o critério de resistência, é encontrado um limite inferior da carga de ruptura (aproximação estática pelo interior). Do mesmo modo, para cada mecanismo virtual cujo trabalho das forças externas não supera o trabalho resistente máximo, é obtido um limite superior da carga de ruptura (aproximação cinemática pelo exterior). Dessa maneira é encontrado um intervalo de valores no qual encontra-se a carga de ruptura ou fronteira ∂K de cargas admissíveis.

A abordagem estática utilizada prediz incrementos na capacidade de carga. Diferencias significativas deste incremento foram encontradas para uma relação $\frac{C_r}{C_s} = 5$ no intervalo do ângulo δ entre $(0, 23^\circ)$. Para o intervalo $(23^\circ, 90^\circ)$ a estimativa inferior da capacidade de carga é a mesma que para o solo sem reforço, sendo a força horizontal $\frac{H}{BC_s}$ igual à unidade, existindo a necessidade de construir estados de tensões mais sofisticados.

Na abordagem estática para reforço puramente granular, foi observado incremento do limite inferior da capacidade de carga para valores elevados de φ (30° e 40°). Este incremento é obtido apenas para um intervalo pequeno de valores de δ (o intervalo máximo encontrado foi $(0, 8.6^\circ)$), para o resto do intervalo $[0, 90^\circ]$, a capacidade de carga da abordagem é nula. Nos resultados apresentados por [Salençon e Pecker \(1995b\)](#), é observado que limites inferiores da capacidade de carga tendem a zero enquanto o ângulo da inclinação da carga se aproxima a 90° .

Em relação a abordagem cinemática, os mecanismos I e II resultaram mais eficientes na determinação do limite superior.

Materiais granulares constituem reforço do solo a partir de certos valores de φ . O valor mínimo de φ depende especialmente da relação $\eta = \frac{B_1}{B}$.

Os parâmetros adimensionais de maior influência no incremento da capacidade de carga são $m = \frac{C_r}{C_s}$ para reforço coesivo e φ para reforço granular.

No diagrama de interação que relaciona as componentes vertical e horizontal da carga, observa-se que, qualquer incremento na carga horizontal introduz uma redução na carga vertical. Isto constitui um risco quando é incorporada uma carga horizontal no problema.

6 FUNDAÇÃO SUPERFICIAL SOBRE UM SOLO REFORÇADO COM UM GRUPO DE COLUNAS

Neste capítulo apresentam-se alguns resultados do cálculo da capacidade de carga de fundações superficiais sobre solos argilosos, submetidas a carregamentos inclinados. A resistência dos solos argilosos é caracterizada na análise através do critério de Tresca. Por sua vez, a resistência das colunas é caracterizada pelo critério de Mohr-Coulomb. Utiliza-se tanto a abordagem estática como a cinemática da análise limite, a fim de obter uma aproximação do domínio de carregamentos admissíveis.

Inicialmente as hipóteses consideradas na análise e a modelagem do problema são descritas. Na sequência, constroem-se campos de tensões estaticamente admissíveis e que satisfazem os critérios de resistência para determinar limites inferiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem estática da análise limite, onde a fronteira K_s é determinada. Campos de velocidades cinematicamente admissíveis são então construídos buscando a determinação de limites superiores da capacidade de carga. Trata-se da abordagem cinemática da análise limite, onde a fronteira K_c é determinada. Finalmente, analisam-se os resultados obtidos através das duas abordagens, obtendo assim as aproximações superior e inferior da fronteira do domínio de cargas admissíveis ∂K .

6.1 ANÁLISE DO PROBLEMA

O solo de fundação é considerado homogêneo, de peso específico γ_s e puramente coesivo caracterizado pelo critério de Tresca e pela coesão C_s . O contato entre o solo e a fundação é de aderência perfeita e a interface não possui resistência à tração. Cada coluna é suposta homogênea, de peso específico γ_r , obedecendo ao critério de resistência de Coulomb de coesão C_r e ângulo de atrito φ . A análise é feita na hipótese de colunas regularmente espaçadas.

Os eixos coordenados escolhidos apresentam-se na Figura 6.1. Denota-se por B à espessura da fundação, por B_1 e h , respectivamente, à espessura e profundidade de cada coluna e por S à separação das mesmas. O número de colunas é denotado por n .

A fundação é submetida a um carregamento inclinado F uniformemente distribuído ao longo da direção z . O domínio de carregamentos admissíveis da fundação é depende dos parâmetros V e H , uma vez que a carga seja inclinada e centrada.

Considera-se a hipótese de estado plano de deformações, sendo a dimensão da coluna na direção z muito maior que a sua largura B_1 .

A capacidade de carga da fundação depende do peso específico do solo. O critério de resistência no solo e na interface são iguais aos considerados no capítulo anterior. O critério

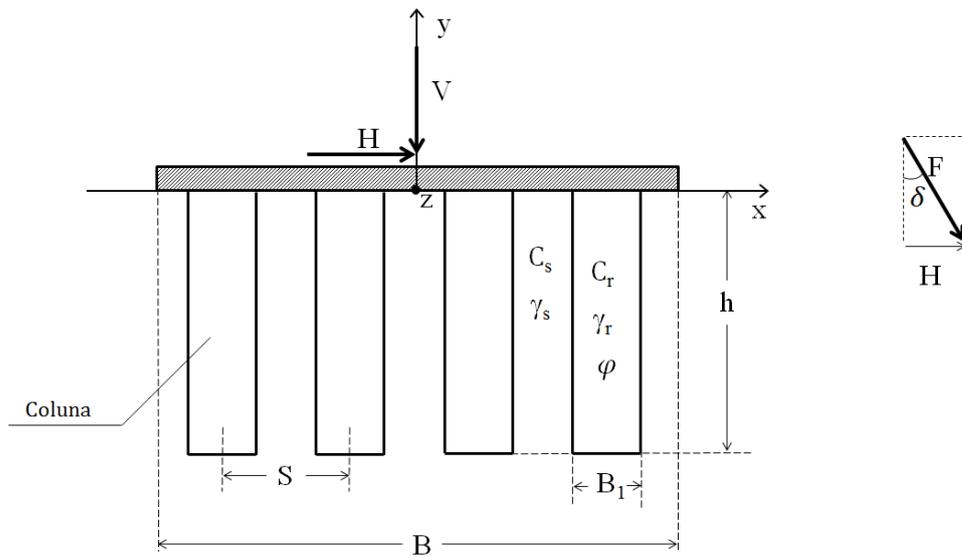


Figura 6.1 – Definição da geometria e do sistema de referência

de resistência de Coulomb é adotado para caracterizar a resistência das colunas de reforço.

Os parâmetros adimensionais associados com a capacidade de carga adimensional $\frac{F}{BC_s}$, dependem das propriedades mecânicas dos materiais (C_s , C_r , φ , γ_s e γ_r) e das características geométricas da fundação e do reforço (B , B_1 , h , S e n). Estes parâmetros são denotados por:

$$\eta = \frac{B_1}{B}, k = \frac{\gamma_r}{\gamma_s}, m = \frac{C_r}{C_s}, \chi = \frac{\gamma_s B}{C_s}, \frac{h}{B}, s = \frac{S}{B}, n \text{ e } \varphi \quad (6.1)$$

Para simplificação das equações denotam-se por a' e l' os comprimentos definidos na Figura 6.2, e por a e l às relações adimensionais a'/B e l'/B , respectivamente.

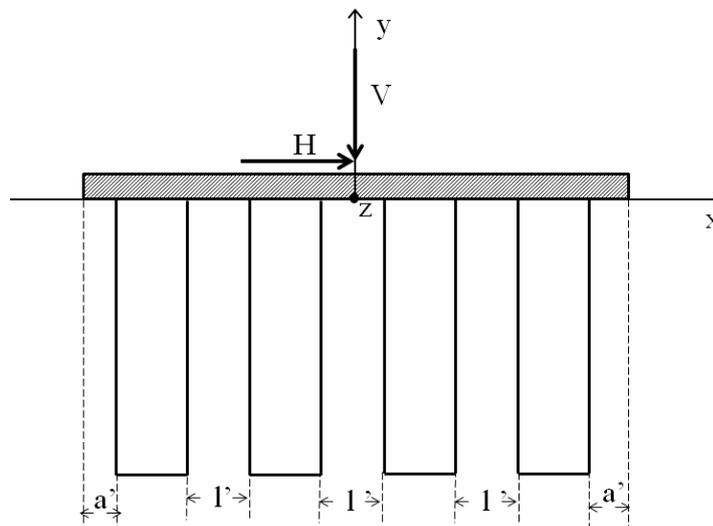


Figura 6.2 – Definição dos parâmetros a' e l'

6.2 ABORDAGEM ESTÁTICA

No capítulo anterior foram apresentados dois campos de tensões lineares por zonas. O campo de tensões II do capítulo 5 constitui a base da presente abordagem estática para um grupo de n colunas.

A distribuição das tensões por zona é apresentada na Figura 6.3. Este campo de tensões depende do parâmetro angular α . As zonas 3 e 4 respondem ao critério de resistência de Mohr-Coulomb, por sua vez as zonas 1 e 2 obedecem ao critério de resistência de Tresca. Estas tensões são iguais às tensões determinadas no capítulo 5, verificam o equilíbrio, respeitam as condições de contorno e os critérios de resistência, e são expressas como:

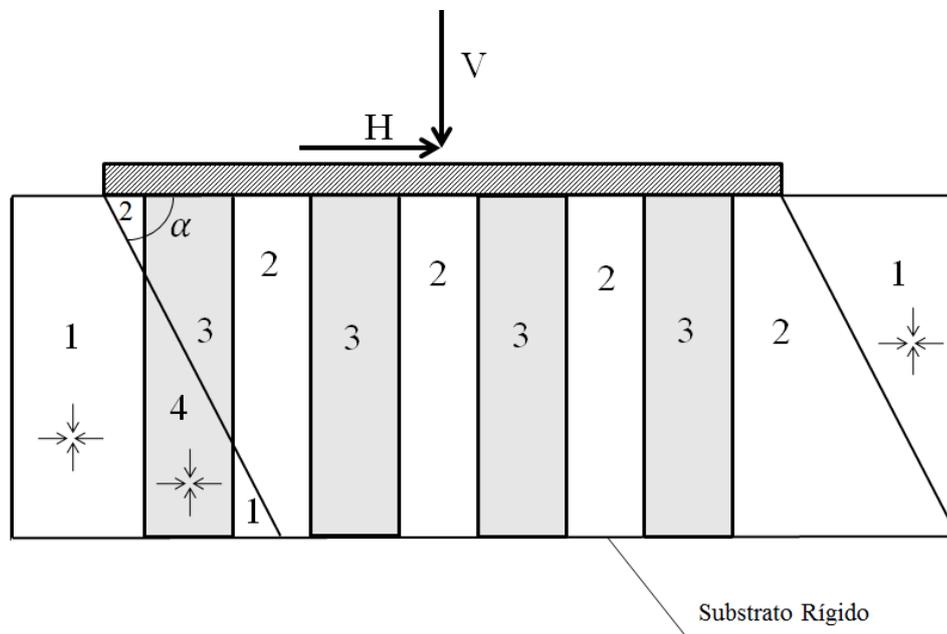


Figura 6.3 – Estado de tensões lineares por zona

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 = (\gamma_s y - 2C_s)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \gamma_s y \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (6.2)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_2 = \begin{pmatrix} -C_s(1 + 2 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \gamma_s y & C_s \sin 4\alpha \\ C_s \sin 4\alpha & -C_s(1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha) + \gamma_s y \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_3 = \begin{pmatrix} -C_s(1 + 2 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \gamma_s y & C_s \sin 4\alpha \\ C_s \sin 4\alpha & A + \gamma_r y \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_4 = (\gamma_s y - 2C_s)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + (C_s 8 \cos^4 \alpha - C_s 4 \cos^2 \alpha + A + \gamma_r y)\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (6.5)$$

onde A é um valor constante determinado de maneira que seja satisfeita a condição de resistência em cada ponto da coluna.

Utilizando as relações adimensionais 6.1, as forças vertical e horizontal para esta abordagem são dadas por:

$$\frac{V}{BC_s} = - \left(\frac{A}{C_s} + k\chi \right) n\eta + (1 + 2 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \gamma_{sy}) (1 - n\eta) \quad (6.6)$$

$$\frac{H}{BC_s} = \text{sen } 4\alpha \quad (6.7)$$

6.3 ABORDAGEM CINEMÁTICA

Na sequência são descritos três mecanismos baseados nos mecanismos utilizados no capítulo 5 para uma coluna isolada. O teorema do limite superior da análise limite estabelece uma condição necessária para o equilíbrio do sistema sob as cargas aplicadas $Q = \{F = (H, V), \gamma_s, \gamma_r\}$ e é expressa segundo a equação 3.14. As deduções das expressões foram obtidas de forma análoga às apresentadas no Anexo para o caso de uma coluna isolada.

Mecanismo I

Considera-se o mecanismo de blocos da Figura 6.4, dependente dos parâmetros angulares α e β . O bloco $A'AGD$ tem um movimento de translação virtual de velocidade \underline{U} paralela a $A'D$, e o triângulo AGC tem um deslocamento de velocidade virtual \underline{W} paralela a GC . Não é considerada descontinuidade de velocidade virtual entre o solo e a fundação. O solo embaixo de $A'DGC$ permanece sem movimentar (velocidade=0).

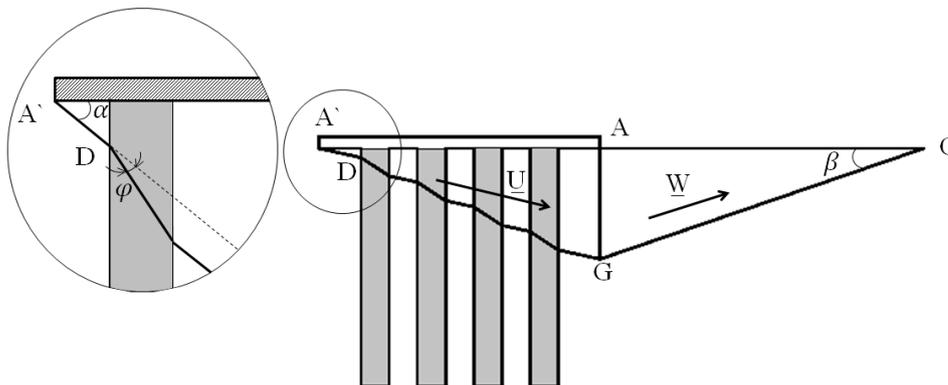


Figura 6.4 – Campo de velocidades virtuais do Mecanismo I

Aplicando o teorema do limite superior da análise limite (equação 3.14) é obtida uma expressão da forma:

$$\frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sin \alpha \leq f(\alpha, \beta) \quad (6.8)$$

Minimiza-se o membro direito da inequação 6.8 em relação a β , para o qual $\beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Portanto, a função f passa a depender apenas do parâmetro α . O convexo K está incluído no semi-espaço contendo a origem delimitado pela reta D_α de equação

$$D_\alpha : \frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sin \alpha = f(\alpha) \quad (6.9)$$

quando α descreve o intervalo $[0, 90^\circ - \varphi]$. A resultante F das forças H e V é obtida por:

$$\frac{F}{BC_s} \leq \min_{\alpha} \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha + \delta)} \quad (6.10)$$

onde

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & -\xi \sin \alpha \left[\tan \alpha \left(\frac{(1-n\eta)^2}{2} + akn\eta + \eta kl \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \right) \right. \\ & \left. + \tan(\alpha + \varphi) \left(\eta l \sum_{i=1}^{n-1} i + a\eta n + \frac{1}{2} kn^2 \eta^2 \right) \right] \\ & + \frac{\xi \cos \alpha}{2} [\tan \alpha (1 - n\eta) + n\eta \tan(\alpha + \varphi)]^2 + \frac{1-n\eta}{\cos \alpha} + \frac{mn\eta \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)} \\ & + [\tan \alpha (1 - n\eta) + n\eta \tan(\alpha + \varphi)] (\sin \alpha + 2\sqrt{2} \cos \alpha) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mecanismo II

Considera-se o campo de velocidades apresentado na Figura 6.5, o qual depende do parâmetro angular α . Neste campo de velocidades o volume $A'AEG$ tem um movimento de translação virtual de velocidade \underline{U} paralela a $A'G$, o bloco ACD tem um deslocamento de velocidade virtual \underline{U}_2 paralela a CD . As superfícies AE e AC não apresentam descontinuidade de velocidade.

A velocidade no volume ACE corresponde a um cisalhamento puro, e se expressa em coordenadas polares como:

$$\underline{W} = U \underline{e}_\theta \quad (6.12)$$

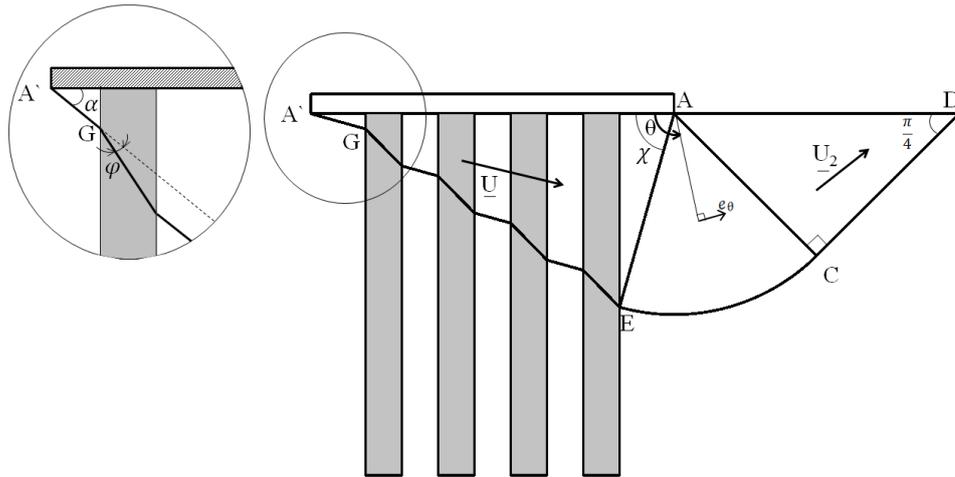


Figura 6.5 – Campo de velocidades virtuais do Mecanismo II

Aplicando o teorema do limite superior da análise limite (equação 3.14) é obtida uma expressão da forma:

$$\begin{cases} \frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sin \alpha \leq g(\alpha) \\ 0 \leq \alpha \leq 90^\circ - \varphi \\ \alpha + \chi \leq 90^\circ \end{cases} \quad (6.13)$$

O convexo K está incluído no semi-espaço contendo a origem delimitado pela reta D_α de equação

$$\begin{cases} D_\alpha : \frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sin \alpha = g(\alpha) \\ 0 \leq \alpha \leq 90^\circ - \varphi \\ \alpha + \chi \leq 90^\circ \end{cases} \quad (6.14)$$

A resultante F das forças H e V é obtida por:

$$\frac{F}{BC_s} \leq \min_{\alpha} \frac{g(\alpha)}{\sin(\alpha + \delta)} \quad (6.15)$$

onde

$$\begin{aligned} g(\alpha) = & \sqrt{J} [\sin(\alpha + \chi)(1 + 3\pi/2 - 2\chi) + \cos(\alpha + \chi)] + \frac{1-n\eta-a}{\cos \alpha} + \frac{mn\eta \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)} \\ & - \xi \sin \alpha \left[\frac{\tan \alpha}{2} (1 - n\eta - a)^2 + \tan(\alpha + \varphi) \left(l\eta \sum_{i=1}^{n-1} i + \frac{1}{2} k\eta^2 n^2 \right) \right. \\ & \left. + k\eta \tan \alpha \left(an + l \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) \right) + \frac{1}{2} a (n\eta \tan(\alpha + \varphi) + (1 - n\eta - a) \tan \alpha) \right] \\ & + \xi \frac{J}{2} \sin \chi \sin(\chi + \alpha) \end{aligned} \quad (6.16)$$

com $J = a^2 + ((1 - n\eta - a) \tan \alpha + n\eta \tan(\alpha + \varphi))^2$

Mecanismo III

O mecanismo apresentado na Figura 6.6 é definido pela rotação do bloco $A'CD$ em torno do eixo Ω_z . O bloco é limitado por arcos circulares no solo argiloso, e por espirais logarítmicas com foco Ω e ângulo φ no material de reforço, de forma análoga ao apresentado no mecanismo III do capítulo 5. Em cada ponto do volume ACD , a expressão da velocidade é:

$$\underline{U} = \omega \underline{e}_\theta \tag{6.17}$$

onde ω refere à velocidade de rotação.

Denotam-se como θ_1 e θ_2 aos parâmetros angulares da Figura 6.6.

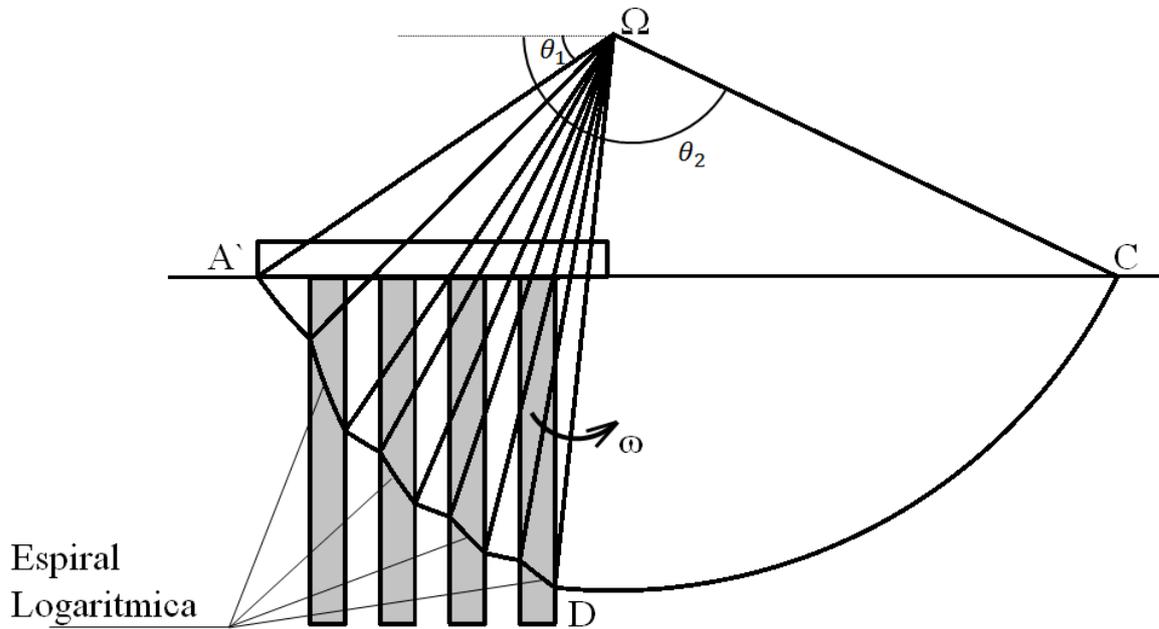


Figura 6.6 – Campo de velocidades virtuais do Mecanismo III

Para cada coluna i são definidos 5 ângulos: $\theta_A^{(i)}$, $\theta_B^{(i)}$, $\theta_C^{(i)}$, $\theta_D^{(i)}$ e $\theta_E^{(i)}$ segundo a Figura 6.7, assim como um raio R'_i associado com cada coluna. Como no capítulo anterior, os resultados são diferenciados segundo duas possibilidades. Denotam-se como Caso I aqueles em que $\theta_B \leq \theta_E$ (Figura 6.7 (a)) e Caso II, quando $\theta_B > \theta_E$ (Figura 6.7 (b))

Aplicando o teorema do limite superior da análise limite (equação 3.14) é obtida a resultante adimensional $\frac{F}{BC_s}$ por:

$$\frac{F}{BC_s} \leq \min_{\theta_1, \theta_B^{(1)}} \frac{\sum_{i=1}^n p_i(\theta_1, \theta_B^{(1)})}{\cos(\delta - \theta_1) - \frac{\cos \delta}{2J}} \tag{6.18}$$

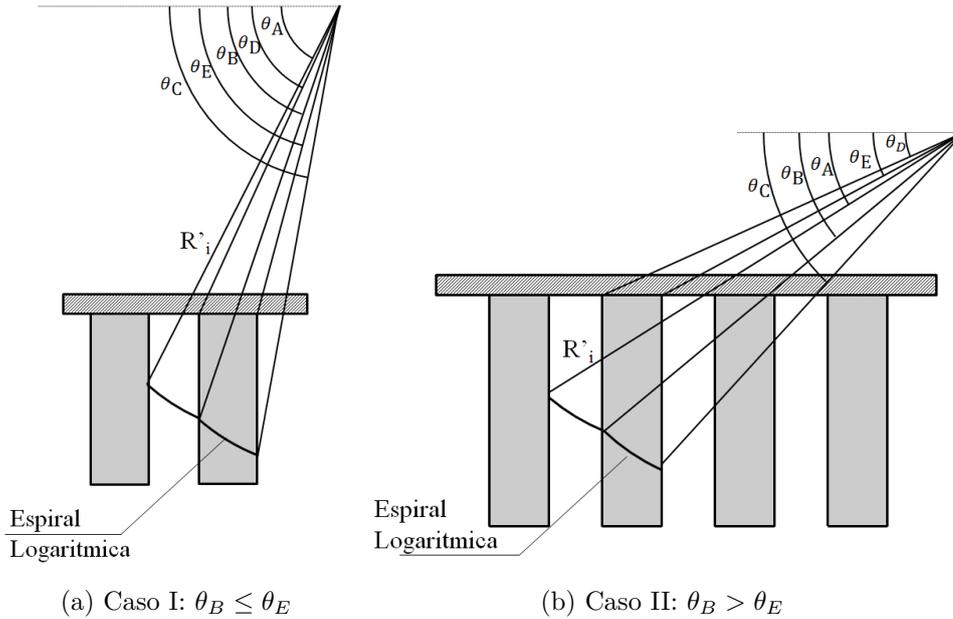


Figura 6.7 – Definição dos parâmetros $\theta_A^{(i)}$, $\theta_B^{(i)}$, $\theta_C^{(i)}$, $\theta_D^{(i)}$, $\theta_E^{(i)}$ e R_i'

onde $J = \frac{R_1}{B}$, $R_i = \frac{R_i'}{R_1}$ e

$$\begin{aligned}
 p_i(\theta_1, \theta_B^{(1)}) &= J \left[R_i^2 (\theta_B^{(i)} - \theta_A^{(i)}) + \frac{m}{2 \tan \varphi} (R_{i+1}^2 - R_i^2) + \frac{1}{n} R_{i+1}^2 (\theta_2 - \theta_C^{(i)}) \right] \\
 &+ \frac{\xi}{3} J^2 \left[R_i^3 (\sin \theta_B^{(i)} - \sin \theta_A^{(i)}) + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_B^{(i)}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_A^{(i)}} \right) \right] \\
 &+ \frac{\xi(k-1)}{3} J^2 \left[R_i^3 \cos^3 \theta_B^{(i)} (\tan \theta_B^{(i)} - \tan \theta_D^{(i)}) + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_B^{(i)}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_D^{(i)}} \right) \right] \\
 &+ \frac{\xi k J^2}{3} \left[\frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(R_{i+1}^3 (3 \tan \varphi \cos \theta_C^{(i)} + \sin \theta_C^{(i)}) - R_i^3 (3 \tan \varphi \cos \theta_B^{(i)} + \sin \theta_B^{(i)}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_E^{(i)}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_B^{(i)}} \right) \right] + \frac{\xi J^2}{3n} \left[R_{i+1}^3 (\sin \theta_2 - \sin \theta_C^{(n)}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_2} - \frac{1}{\sin^2 \theta_C^{(n)}} \right) \right] + \frac{\xi J^2}{2} \left[R_{i+1}^3 \cos^3 \theta_C^{(i)} (\tan \theta_C^{(i)} - \tan \theta_E^{(i)}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_C} - \frac{1}{\sin^2 \theta_E} \right) \right] \text{ para } \theta_B^{(i)} < \theta_E^{(i)}
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
 p_i(\theta_1, \theta_B^{(1)}) &= J \left[R_i^2 (\theta_B^{(i)} - \theta_A^{(i)}) + \frac{m}{2 \tan \varphi} (R_{i+1}^2 - R_i^2) + \frac{1}{n} R_{i+1}^2 (\theta_2 - \theta_C^{(i)}) \right] \\
 &+ \frac{\xi}{3} J^2 \left[R_i^3 (\sin \theta_B^{(i)} - \sin \theta_A^{(i)}) + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_B^{(i)}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_A^{(i)}} \right) \right] \\
 &+ \frac{\xi(k-1)}{3} J^2 \left[R_i^3 \cos^3 \theta_B^{(i)} (\tan \theta_B^{(i)} - \tan \theta_D^{(i)}) + R_{i+1}^3 \cos^3 \theta_C^{(i)} (\tan \theta_E^{(i)} - \tan \theta_B^{(i)}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_E^{(i)}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_D^{(i)}} \right) \right] + \frac{\xi k J^2}{3} \left[\frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(R_{i+1}^3 (3 \tan \varphi \cos \theta_C^{(i)} + \sin \theta_C^{(i)}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - R_i^3 (3 \tan \varphi \cos \theta_B^{(i)} + \sin \theta_B^{(i)}) + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_B^{(i)}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_C^{(i)}} \right) \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\xi J^2}{3n} \left[R_{i+1}^3 (\sin \theta_2 - \sin \theta_C^{(n)}) + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_2} - \frac{1}{\sin^2 \theta_C^{(n)}} \right) \right] \\
 &+ \frac{\xi J^2}{2} \left[R_{i+1}^3 \cos^3 \theta_C^{(i)} (\tan \theta_C^{(i)} - \tan \theta_B^{(i)}) + \frac{R_1^3 \sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_C} - \frac{1}{\sin^2 \theta_B} \right) \right] \text{ para } \theta_B^{(i)} \geq \theta_E^{(i)}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

6.4 RESULTADOS

Na sequência são apresentadas as abordagens estática e cinemática de K descritos nas seções precedentes. Inicialmente as estimativas da capacidade de carga como função da inclinação da carga são apresentadas. Quanto à natureza dos materiais constitutivos envolvidos, duas configurações são sucessivamente investigadas:

- solo coesivo/ reforço coesivo
- solo coesivo/ reforço friccionante

A primeira situação pode estar referida a uma coluna de solo argiloso tratado com cal, enquanto a segunda situação se refere à substituição da coluna argilosa por um solo granular.

Solo coesivo/Reforço coesivo

Influência $\gamma_s B/C_s$

Inicialmente resultados são apresentados para $\xi = \gamma_s B/C_s = 0.5$. A Figura 6.8 apresenta as superfícies ótimas de discontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando: $m = \frac{C_r}{C_s} = 1$, $k = \frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.2$ e numero de colunas $n = 3$. Estes valores são mantidos constantes ao longo desta análise.

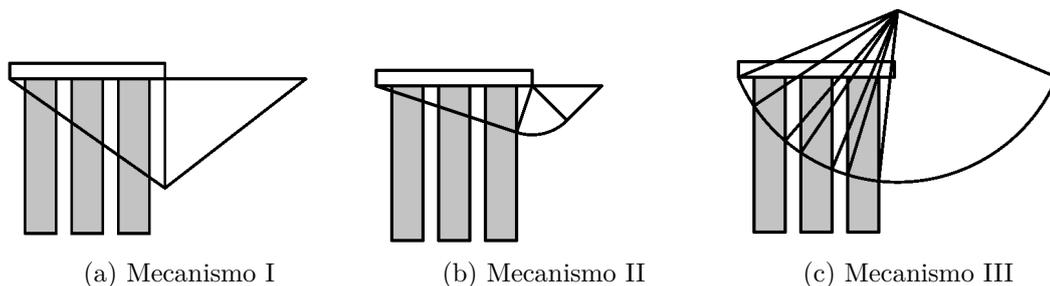


Figura 6.8 – Mecanismos de velocidades virtuais para $m = 1$, $k = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.30$, $n = 3$ e $\xi = 0.5$ quando a carga é vertical

Na Figura 6.9 (a) resultados são apresentados em termos de diagrama de interação no plano $(\frac{H}{BC_s}, \frac{V}{BC_s})$. A estimativa superior da carga é diferenciada para cada um dos três Mecanismos. O melhor limite superior é obtido por:

- Tramo 1: Mecanismo III para $0^\circ \leq \delta \leq 3^\circ$

- Tramo 2: Mecanismo I para $3^\circ \leq \delta \leq 6^\circ$
- Tramo 3: Mecanismo II para $6^\circ \leq \delta \leq 22^\circ$
- Tramo 4: Mecanismos I e II para $22^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$

Na Figura 6.9 (b) é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados três casos: $\xi = 0.5$, $\xi = 1.0$ e $\xi = 2.0$. As curvas estática e cinemática estão superpostas para cada valor de ξ considerado. Em outras palavras, o parâmetro ξ para este caso não tem influência no carregamento limite. No intervalo $23^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ a capacidade de carga determinada é exata uma vez que coincidem as abordagens superior e inferior da análise limite.

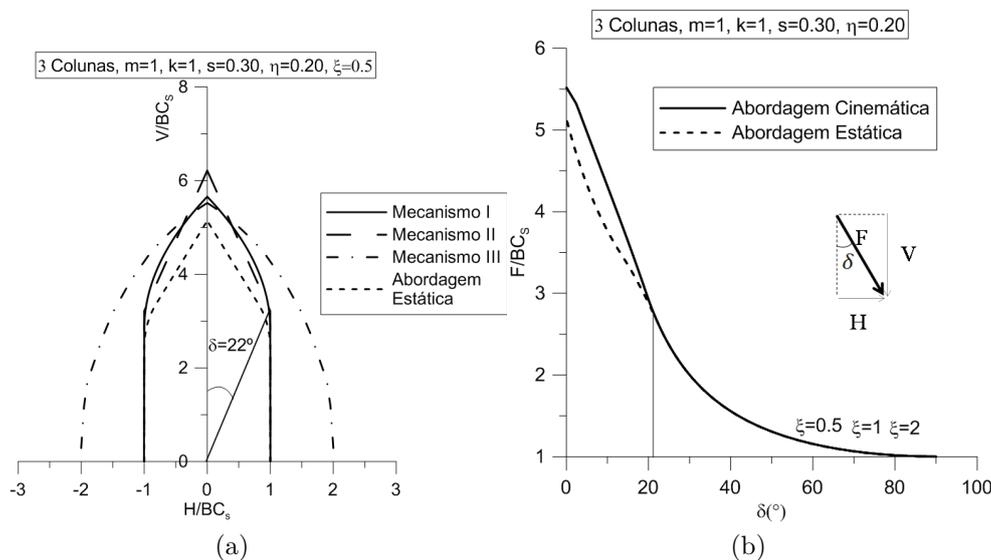


Figura 6.9 – Limites superior e inferior da capacidade de carga

Influência γ_r/γ_s

Inicialmente resultados são apresentados para $k = \gamma_r/\gamma_s = 1.5$. A Figura 6.10 apresenta as superfícies ótimas de discontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando: $m = 1$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.2$ e número de colunas $n = 3$. Estes valores são mantidos constantes ao longo desta análise.

Na Figura 6.11 (a) resultados são apresentados em termos de diagrama de interação no plano $(\frac{H}{BC_s}, \frac{V}{BC_s})$. A estimativa superior da carga é diferenciada para cada um dos três Mecanismos. O melhor limite superior é obtido novamente pela contribuição dos três mecanismos.

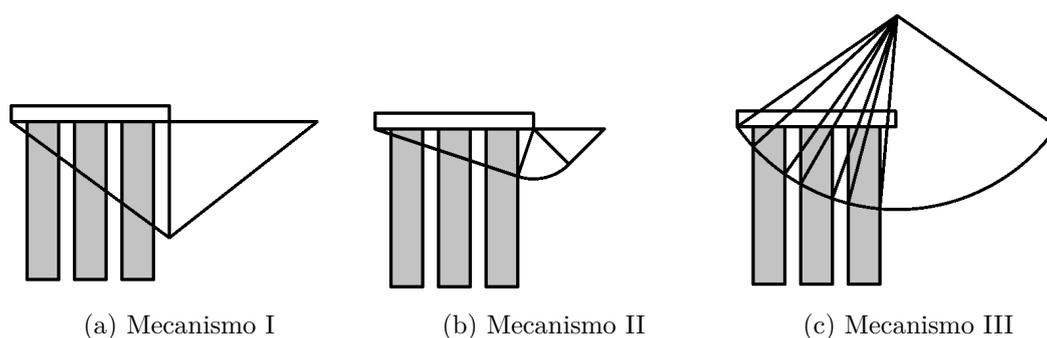


Figura 6.10 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $k = 1.5$ para carregamento puramente vertical

Na Figura 6.11 (b) é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados três casos: $k = 1.0$, $k = 1.5$ e $k = 2.0$. Melhores limites são observados para menores valores de k quando $\delta < 20^\circ$, sendo a diferença entre os limites não muito significativas.

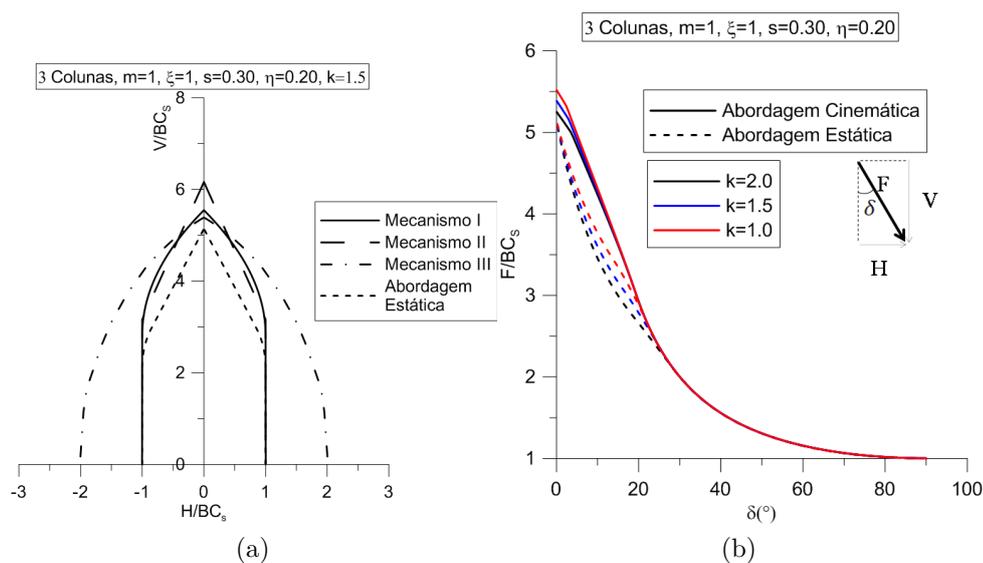


Figura 6.11 – Limite superior e inferior da capacidade de carga

Influência C_r/C_s

Inicialmente resultados são apresentados para $m = C_r/C_s = 5$. A Figura 6.22 apresenta as superfícies ótimas de discontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando: $k = 1$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.2$ e número de colunas $n = 3$. Estes valores são mantidos constantes ao longo desta análise.

Na Figura 6.13 (a) resultados são apresentados em termos de diagrama de interação no

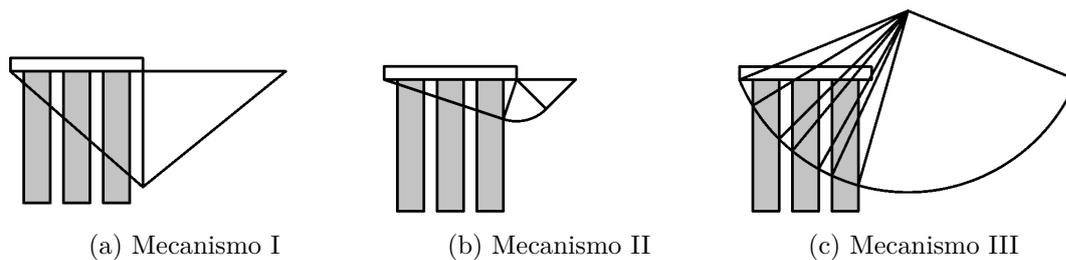


Figura 6.12 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\xi = 1$, $k = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $\varphi = 40^\circ$

plano $(\frac{H}{BC_s}, \frac{V}{BC_s})$. A estimativa superior da carga é diferenciada para cada um dos três Mecanismos. O melhor limite superior é obtido pelos Mecanismos I e II.

Na Figura 6.13 (b) é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados três casos: $m = 1.0$, $m = 2.0$ e $m = 5.0$. Melhores limites são observados para maiores valores de m , como é de esperar.

As curvas em vermelho na Figura 6.13 (b) correspondem a um solo sem reforço uma vez que $Cr = Cs$ e $\gamma_r = \gamma_s$. Melhoras da capacidade de carga são observadas no limite inferior para $\delta \leq 20^\circ$. A abordagem cinemática sugere um incremento na força limite horizontal para qualquer δ .

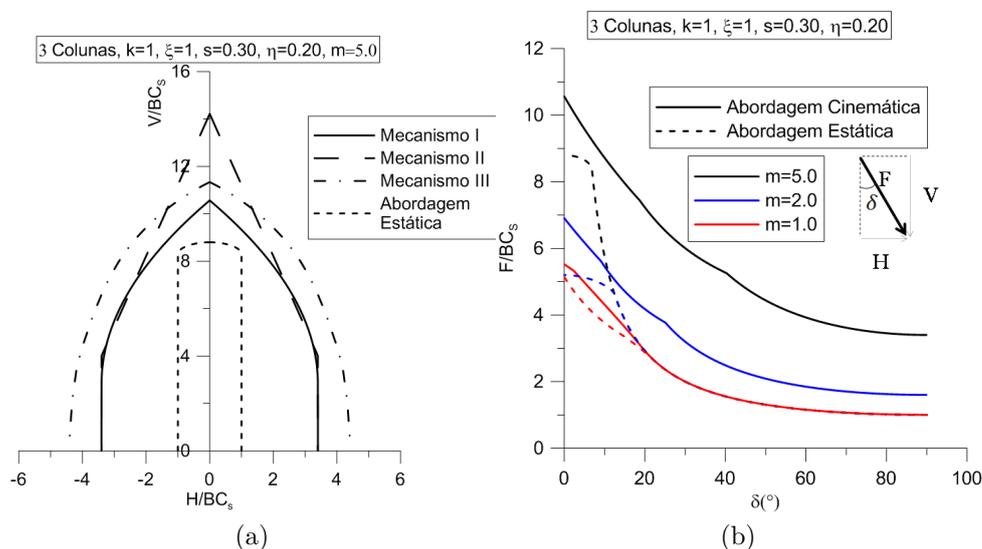


Figura 6.13 – Limite superior e inferior da capacidade de carga

Influência de n

As Figuras 6.14-6.16 apresentam as superfícies ótimas de discontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando áreas de reforço iguais e variando o apenas o número de colunas. Em outras

palavras, o produto $n\eta$ é mantido constante.

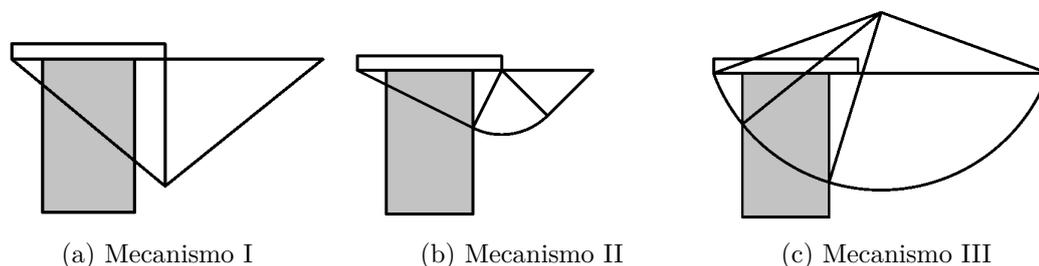


Figura 6.14 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.6$ e $n = 1$ e para carregamento puramente vertical

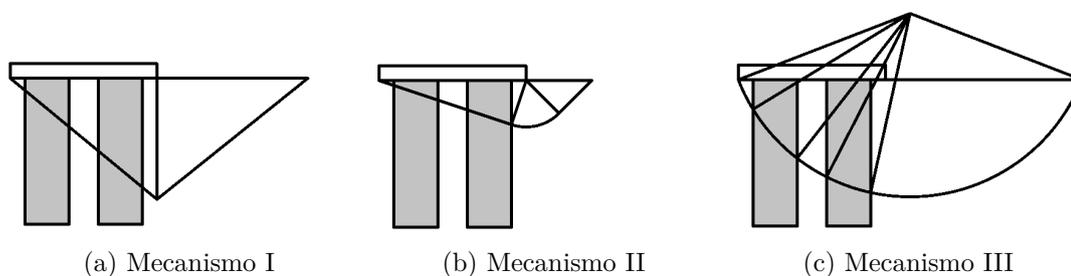


Figura 6.15 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.3$ e $n = 2$ para carregamento puramente vertical

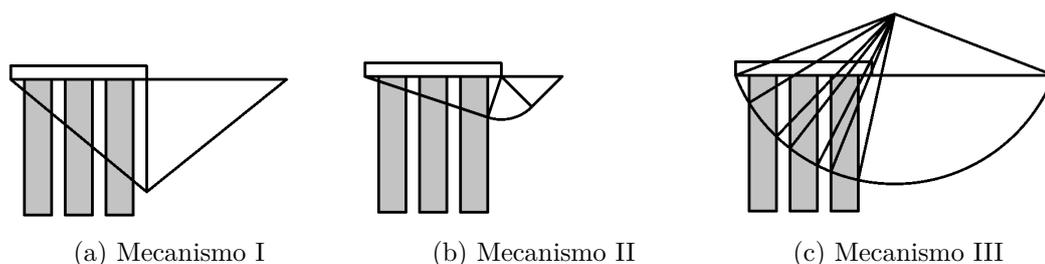


Figura 6.16 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.2$ e $n = 3$ para carregamento puramente vertical

Na Figura 6.17 é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados os três casos anteriores. Limites praticamente coincidentes são encontrados para os mesmos, mostrando a pouca influência para este caso da quantidade de colunas, uma vez que a área das mesmas se mantenha constante.

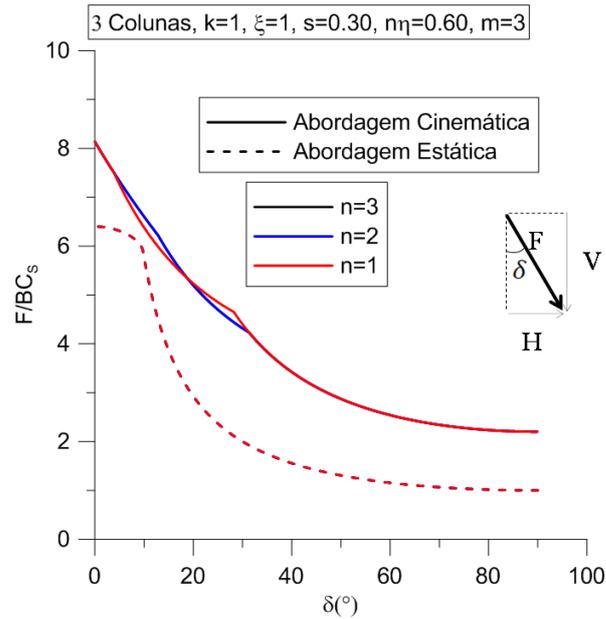


Figura 6.17 – Campo de velocidades virtuais do Mecanismo III

Solo coesivo/Reforço friccional

Influência $\gamma_s B/C_s$

Inicialmente resultados são apresentados para $\xi = \gamma_s B/C_s = 0.5$. A Figura 6.18 apresenta as superfícies ótimas de descontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando: $\varphi = 30^{\circ}$, $k = \frac{\gamma_r}{\gamma_s} = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.2$ e numero de colunas $n = 3$. Estes valores são mantidos constantes ao longo desta análise. Estes mecanismos foram estudados para uma altura das colunas $h = 1.1B$

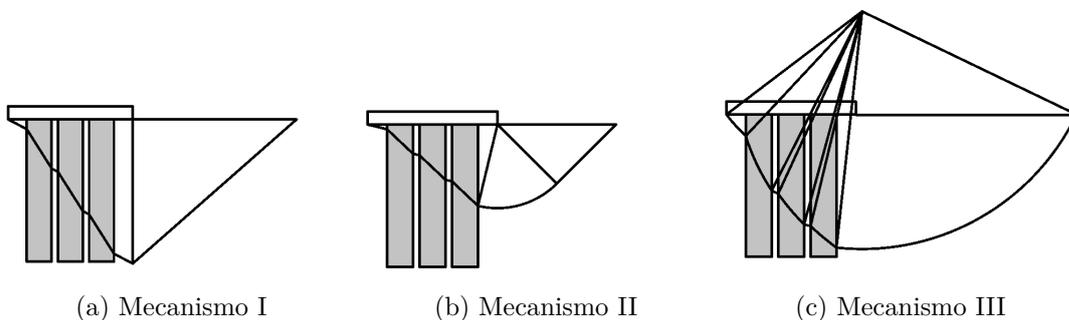


Figura 6.18 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^{\circ}$, $k = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.20$, $n = 3$ e $\xi = 0.5$ quando a carga é vertical

Na Figura 6.19 (a) resultados são apresentados em termos de diagrama de interação no plano $(\frac{H}{BC_s}, \frac{V}{BC_s})$. A estimativa superior da carga é diferenciada para cada um dos três Mecanismos. O melhor limite superior foi obtido prescindindo do Mecanismo III.

Na Figura 6.19 (b) é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados três casos: $\xi = 0.5$, $\xi = 1.0$ e $\xi = 2.0$. As curvas da abordagem estática estão superpostas para cada valor de ξ considerado. Em outras palavras, o parâmetro ξ para este caso não tem influência no carregamento limite inferior. Quanto ao carregamento limite superior, melhores estimativas são obtidas para maiores valores de ξ , sendo a diferença não muito significativa.

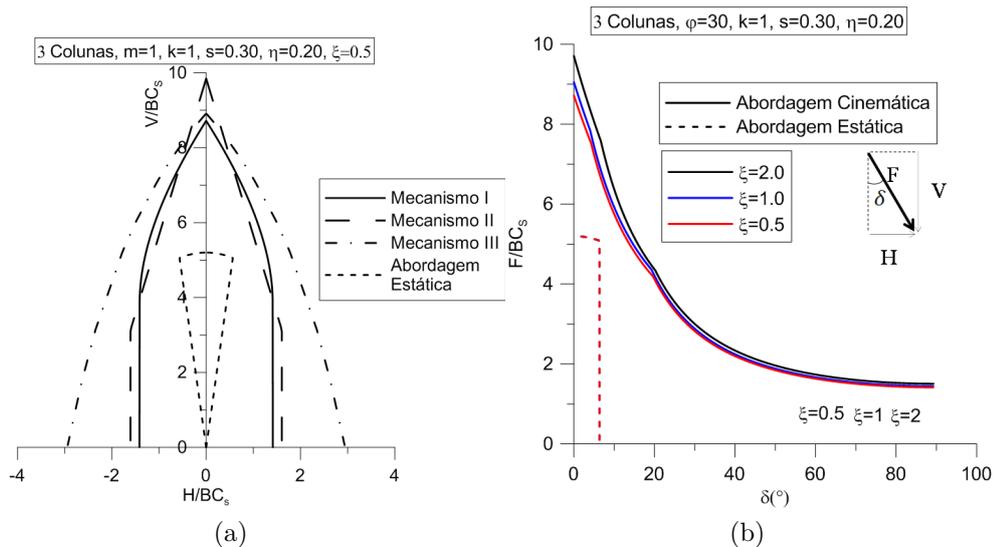


Figura 6.19 – Limites superior e inferior da capacidade de carga

Influência γ_r/γ_s

Inicialmente resultados são apresentados para $k = \gamma_r/\gamma_s = 1.5$. A Figura 6.20 apresenta as superfícies ótimas de discontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando: $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.2$ e número de colunas $n = 3$. Estes valores são mantidos constantes ao longo desta análise. Os mecanismos foram estudados para uma altura das colunas $h = 1.2B$

Na Figura 6.21 (a) resultados são apresentados em termos de diagrama de interação no plano $(\frac{H}{BC_s}, \frac{V}{BC_s})$. A estimativa superior da carga é diferenciada para cada um dos três Mecanismos. O melhor limite superior é obtido novamente prescindindo do Mecanismo III.

Na Figura 6.21 (b) é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados três casos: $k = 1.0$, $k = 1.5$ e $k = 2.0$. As curvas da abordagem estática e cinemática estão superpostas para cada valor de k considerado.

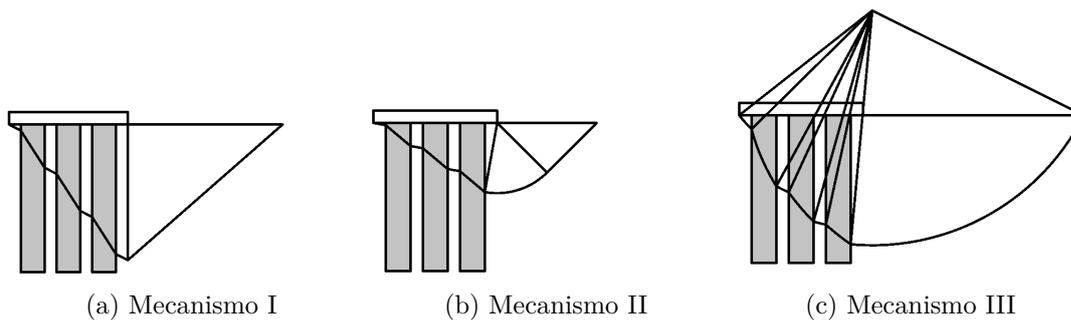


Figura 6.20 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $k = 1.5$ para carregamento puramente vertical

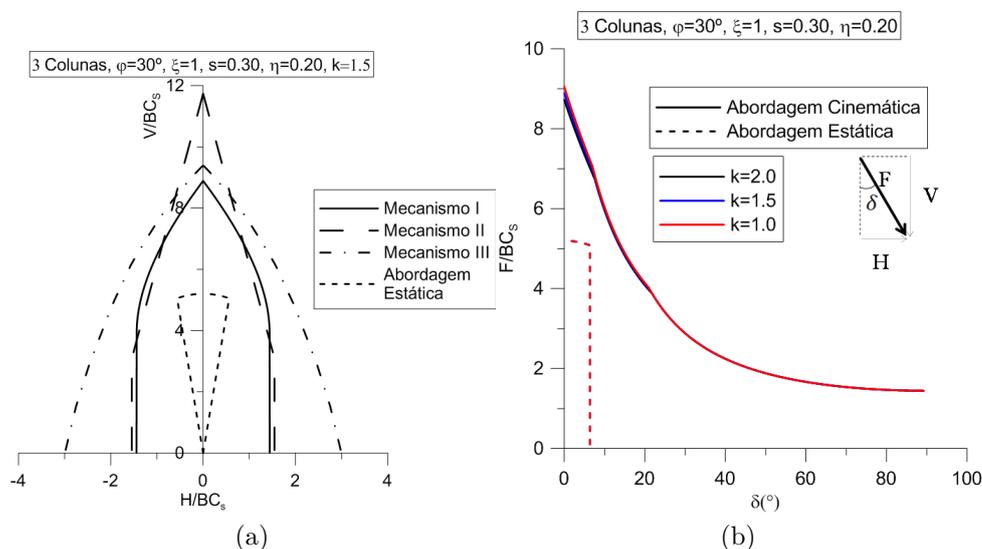


Figura 6.21 – Limite superior e inferior da capacidade de carga

Influência φ

Inicialmente resultados são apresentados para $\varphi = 35^\circ$. A Figura 6.22 apresenta as superfícies ótimas de descontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando: $k = 1$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $\eta = 0.2$ e número de colunas $n = 3$. Estes valores são mantidos constantes ao longo desta análise. Os mecanismos foram estudados para uma altura das colunas $h = 1.3B$

Na Figura 6.23 (a) resultados são apresentados em termos de diagrama de interação no plano $(\frac{H}{BC_s}, \frac{V}{BC_s})$. A estimativa superior da carga é diferenciada para cada um dos três Mecanismos. O melhor limite superior é obtido pelos Mecanismos I e II.

Na Figura 6.23 (b) é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados três casos: $\varphi = 10^\circ$, $\varphi = 30^\circ$ e $\varphi = 35^\circ$. Melhores limites são observados para maiores valores de φ , como é de esperar. As curvas

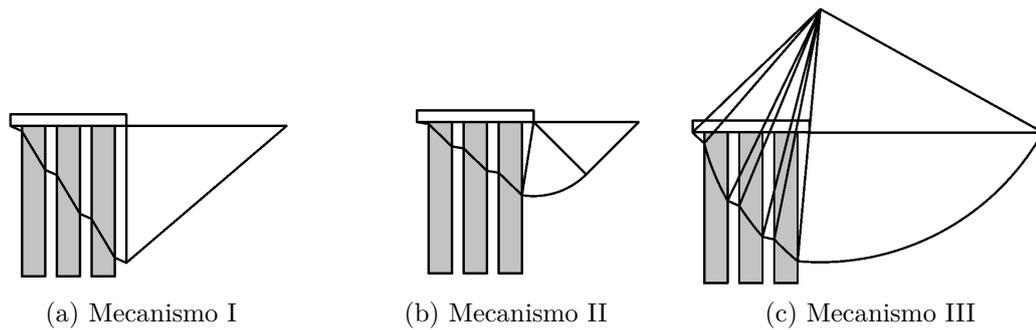


Figura 6.22 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\xi = 1$, $k = 1$, $s = 0.20$, $n = 3$ e $\varphi = 35^\circ$

em verde representam o caso de solo sem reforço. Colunas de caráter granular com ângulo de atrito pequeno terminam em uma diminuição da capacidade portante do solo.

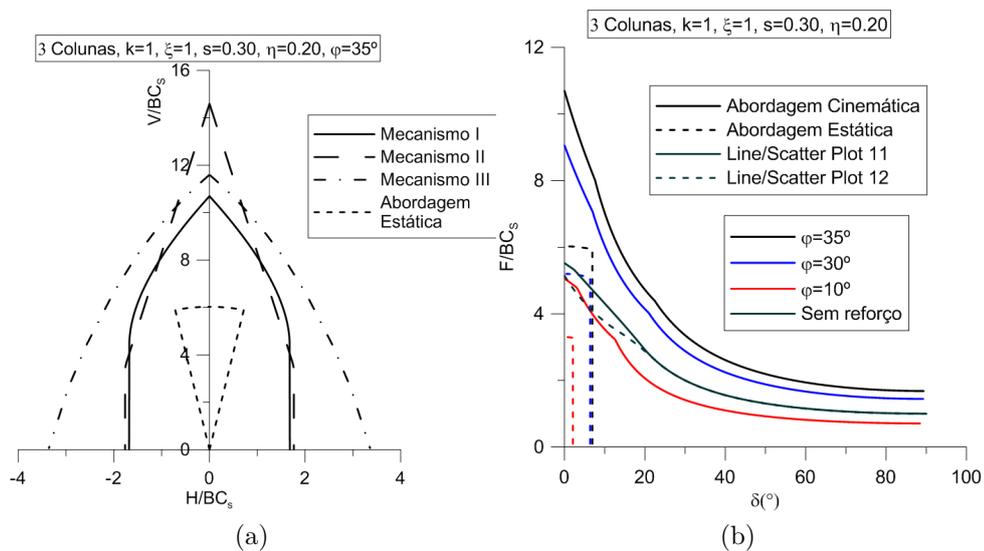


Figura 6.23 – Limite superior e inferior da capacidade de carga

Influência de n

As Figuras 6.24-6.26 apresentam as superfícies ótimas de discontinuidades de velocidade, para um carregamento puramente vertical, para cada Mecanismo da abordagem cinemática, considerando áreas de reforço iguais e variando o apenas o número de colunas. Em outras palavras, o produto $n\eta$ é mantido constante. Os Mecanismos I e III precisam de maior altura da coluna para o seu desenvolvimento. Neste caso foi considerada uma altura $h = 1.1B$. As superfícies de discontinuidade de velocidade apresentam distribuições similares para valores de n : 1, 2 e 3.

Na Figura 6.27 é observada a estimativa superior e inferior da capacidade de carga $\frac{F}{BC_s}$ em função da inclinação da carga. São apresentados os três casos anteriores ($n = 1$,

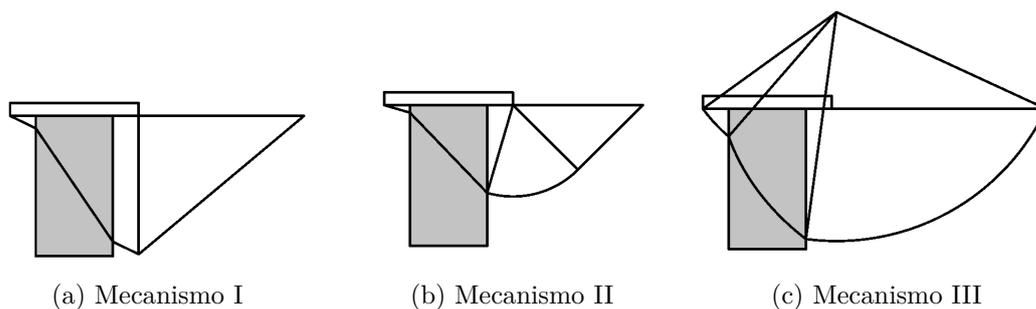


Figura 6.24 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.6$ e $n = 1$ e para carregamento puramente vertical

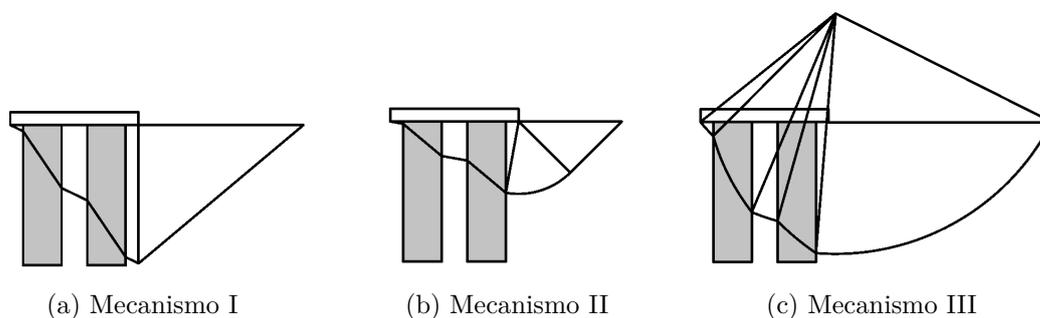


Figura 6.25 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.3$ e $n = 2$ para carregamento puramente vertical

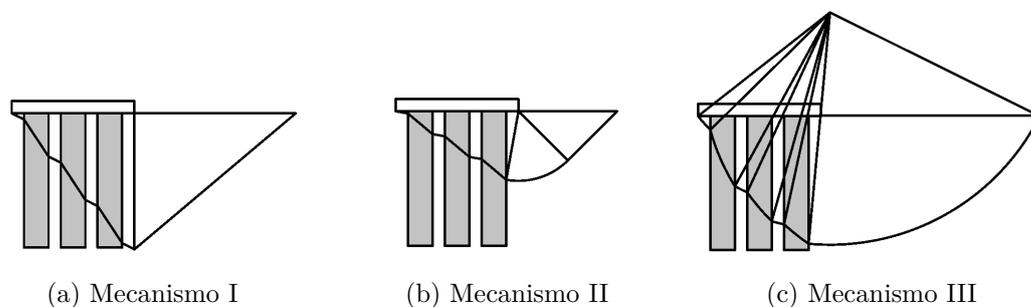


Figura 6.26 – Mecanismos de velocidades virtuais para $\varphi = 30^\circ$, $\xi = 1$, $s = 0.30$, $k = 1.0$, $\eta = 0.2$ e $n = 3$ para carregamento puramente vertical

$n = 2$ e $n = 3$). Limites praticamente coincidentes são encontrados tanto para abordagem cinemática quanto para a estática, mostrando a pouca influência da quantidade e separação das colunas, uma vez que a área das mesmas se mantenha constante.

6.5 ANÁLISE DE RESULTADOS

A capacidade de carga de uma fundação submetida a uma carga inclinada, apoiada sobre um solo coesivo reforçado por um grupo de colunas foi obtida neste capítulo no âmbito da análise limite.

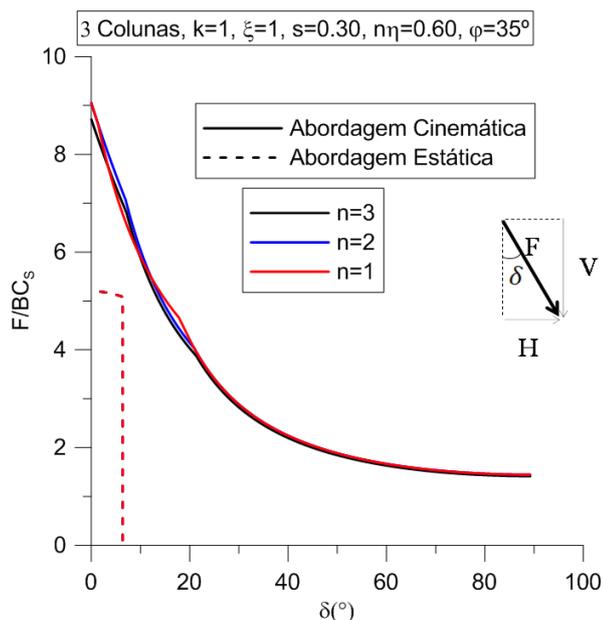


Figura 6.27 – Limites superior e inferior da capacidade de carga

Considerou-se que o solo de fundação obedece ao critério de Tresca, geralmente utilizado para representar o comportamento de solos argilosos e um reforço que tem caráter coesivo-friccional. O efeito da gravidade foi considerado

A abordagem estática utilizada prediz incrementos na capacidade de carga para reforço do tipo coesivo. Diferenças significativas deste incremento foram encontradas especialmente para valores elevados de $\frac{C_r}{C_s}$ no intervalo do ângulo δ entre $(0, 23^\circ)$. Para o intervalo $(23^\circ, 90^\circ)$ a estimativa inferior da capacidade de carga é a mesma que para o solo sem reforço, sendo a força horizontal $\frac{H}{BC_s}$ igual à unidade.

Na abordagem estática para reforço puramente granular, foi observado incremento do limite inferior da capacidade de carga para valores elevados (φ entre 30° e 40°). Este incremento é obtido apenas para um intervalo pequeno de valores de δ .

Materiais granulares constituem reforço do solo a partir de certos valores de φ . O valor mínimo de φ depende especialmente da relação $\eta = \frac{B_1}{B}$.

Os parâmetros adimensionais de maior influência no incremento da capacidade de carga são $m = \frac{C_r}{C_s}$ para reforço coesivo e φ para reforço granular. Em outras palavras, melhoras na capacidade de carga são observadas apenas para tensões suficientemente elevadas

A carga limite é independente da quantidade de colunas, sempre que a área de reforço seja mantida

7 CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões da pesquisa. A mesma, consistiu no cálculo da capacidade de carga de uma fundação apoiada sobre solo reforçado por colunas submetida a carregamento inclinado, através da análise limite.

Utilizaram-se campos de tensões lineares por trecho para a obtenção de limites inferiores da capacidade de carga (abordagem estática). Obtiveram-se limites superiores da capacidade de carga através da utilização de mecanismos de ruptura (abordagem cinemática). As conclusões são apresentadas segundo as três configurações analisadas ao longo do trabalho: solo homogêneo, solo reforçado por uma coluna isolada e solo reforçado por um grupo de colunas.

Em primeiro lugar a análise foi dedicada à avaliação de um solo homogêneo. A comparação entre os limites superior e inferior indicou:

- que a capacidade de carga foi obtida com um alto grau de aproximação para ângulos de inclinação da carga entre $[0, 22.5^\circ)$
- que a carga limite determinada é exata para ângulos de inclinação da carga entre $[22.5^\circ, 90^\circ]$

Posteriormente, estudou-se o reforço do solo por uma coluna isolada. A abordagem estática correspondente mostrou, para uma coluna de carácter coesivo:

- carregamentos limites maiores ou iguais aos determinados para um solo sem reforço;
- para uma força puramente horizontal, não se obtiveram melhoras na estimativa da capacidade de carga, em relação ao solo sem reforço.

Para um reforço friccional, a abordagem estática indicou:

- reduções na capacidade de carga em relação ao solo sem reforço;
- melhoras da carga limite em relação ao solo sem reforço apenas para tensões compressivas suficientemente elevadas;
- a abordagem prediz estimativas para valores pequenos da inclinação da carga (inferiores a 22°).

Quanto a abordagem cinemática do reforço de solos por uma coluna isolada, determinaram-se limites superiores afastados dos limites inferiores, especialmente para valores elevados da coesão do reforço em relação à coesão do solo.

Finalmente, analisou-se a configuração de solo reforçado por um grupo de colunas. A abordagem estática mostrou, para reforço de carácter coesivo:

- carregamentos limites maiores ou iguais aos determinados para um solo sem reforço;
- para uma força puramente horizontal, não se obtiveram melhoras na estimativa inferior da capacidade de carga em relação ao solo sem reforço;

Para um reforço de carácter friccional, a abordagem estática indicou

- reduções na capacidade de carga do solo em relação ao solo sem reforço;
- melhoras na capacidade de carga em relação ao solo sem reforço apenas para tensões suficientemente elevadas;
- para fins práticos, a carga limite é independente da quantidade de colunas, sempre que a área de reforço seja mantida

As estimativas da abordagem cinemática servem tanto para colunas apoiadas num substrato rígido como para colunas flutuantes, uma vez que as superfícies de descontinuidade de velocidade não superem a altura h das colunas.

Tanto para o solo reforçado por uma coluna como para o solo reforçado por um grupo de colunas, qualquer incremento na carga horizontal introduz uma redução na carga de ruptura vertical. Isto constitui um risco quando é incorporada uma carga horizontal no problema. Se a curva de ruptura for aquela estabelecida pela abordagem estática, não é recomendável a utilização das colunas de reforço quando a fundação é submetida a carregamento inclinado. Por outro lado, provavelmente a abordagem cinemática é mais rigorosa e ela apresenta uma melhora na capacidade de carga horizontal, assim como uma diminuição mais suave do carregamento de ruptura vertical com o incremento da carga horizontal. Nessa situação, seria recomendável a utilização das colunas de reforço incluso quando o problema envolva carregamentos horizontais. Existe a necessidade de análises complementarias para comprovar a rigorosidade das curvas estimadas pela abordagem cinemática.

Pode-se abordar o problema para uma grande quantidade de colunas empregando a teoria da homogeneização, considerando um critério de resistência do meio homogeneizado. Por outro lado, esta análise pode ser realizada utilizando um modelo tridimensional.

REFERÊNCIAS

- ABOSHI, H.; ICHIMOTO, E. The compozer - a method to improve characteristics of soft clays by inclusion of large diameter sand columns. *C. R. colloque int. sur le renforcement des sols*, v. 1, p. 211–216, 1979. Citado na página 32.
- AOI, M.; TSUJII, T. Mechanisms of machine for dry jet mixing method. *Grouting and Deep Mixing*, v. 1, p. 579–584, 1996. Citado na página 31.
- BARKSDALE, R. D.; BACHUS, R. C. *Design and construction of stone columns*. Atlanta, Georgia 30332, 1983. Project Manager: A/F/DiMillio (HNR-30). Citado 2 vezes nas páginas 45 e 47.
- BAUMANN, V.; BAUER, G. E. A. The performance of foundations on various soils stabilized by the vibro-compaction method. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 11, p. 509–530, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.
- BELL, A. L. The lateral pressure and the resistance of clay and the supporting power of clay foundations. In: *Proc. Institution of Civil Engineers*. [S.l.: s.n.], 1915. Citado 5 vezes nas páginas 15, 32, 39, 40 e 43.
- BELL, F. G. *Engineering Treatment of Soils*. [S.l.]: E & FN Spon, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 15, 36 e 37.
- BOUASSIDA, M. *Détermination de la capacité portante des fondations rigides posées sur un sol renforcé par colonnes*. Tese (Doutorado) — L’Ecole Nationale d’Ingénieurs de Tunis, 1996. Citado 9 vezes nas páginas 15, 21, 32, 38, 39, 42, 43, 45 e 48.
- BOUASSIDA, M.; BUHAN, P. de; DORMIEUX, L. Bearing capacity of a foundations resting on a soil reinforced by a group of columns. *Géotechnique*, v. 45, n. 1, p. 25–34, 1995. Citado na página 32.
- BOUASSIDA, M.; HADHRI, T. Extreme load of soils reinforced by columns: The case of an isolated column. *Soils and Foundations*, v. 35, n. 1, p. 21–36, 1995. Citado 6 vezes nas páginas 15, 32, 41, 45, 46 e 51.
- BOUASSIDA, M.; HAZZAR, L. Novel tool for optimised design of reinforced soils by columns. *Ground Improvement*, v. 165, p. 31–40, 2011. Citado na página 32.
- BOUASSIDA, M.; JELLALI, B.; PORBAHA, A. Limit analysis of rigid foundations on floating columns. *International Journal of Geomechanics*, v. 9, p. 89–101, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 15, 32, 50 e 51.
- BOUASSIDA, M.; PORBAHA, A. Ultimate bearing capacity of soft clays reinforced by a group of columns- application to a deep mixing technique. *Soil and Foundations*, v. 44, p. 91–101, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 49.
- BRAUNS, J. Die anfangstraglast von schottersaulen im bidigen untergrund. *Die Bautechnik*, v. 8, p. 263–271, 1978. Citado 5 vezes nas páginas 15, 32, 41, 42 e 43.
- BROMS, B.; BOMAN, P. Stabilization of cohesive soils with lime columns. In: *Nordic Geotechnical Conference*. Copenhagen, Denmark: [s.n.], 1975. v. 75. Citado na página 31.

- BROMS, B. G. Lime columns in theory and practice. *Proc. Inter. Conf. of Soil Mech*, p. 146–165, 1982. Citado 8 vezes nas páginas 15, 32, 40, 41, 45, 46, 47 e 48.
- BUHAN, P. de. Détermination de la capacitrtante d'une fondation sur sol renforcé par une méthode d'homogénéisation. In: *Colloque International "Renforcement des sols en place"*. Paris: [s.n.], 1984. p. 127–132. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 48.
- BUHAN, P. de. *A fundamental approach to the yield design of reinforced soil structures*. Tese (Doutorado), 1986. Citado na página 32.
- CHEN, W.-F. *Limit analysis and soil plasticity*. [S.l.]: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. Citado 9 vezes nas páginas 16, 38, 54, 64, 66, 68, 69, 70 e 86.
- CHEN, W. F.; HAN, D. *Plasticity for Structural Engineers*. [S.l.]: Springer-Verlag New York Inc., 1988. Citado na página 64.
- DOBSON, T. *Case Histories of the Vibro Systems to Minimize the Risk of Liquefaction*. [S.l.]: ASCE Geotechnical Special Publication, 1987. Citado na página 31.
- GREENWOOD, D. A. Mechanical improvement of soils below ground surfaces. In: *Proc. Ground Engineering Conf.* [S.l.: s.n.], 1970. Citado 3 vezes nas páginas 32, 41 e 42.
- HARTLEN, J.; HOLM, G. Deep stabilization of soft soils with lime-cement columns. In: *Proceedings of Bengt B. Broms Symposium on Geotechnical Engineering*. [S.l.: s.n.], 1995. Citado na página 31.
- HAYDEN, R. F.; BAEZ, J. I. State of practice for liquefaction mitigation in north america. In: *Proceedings of the 4th U.S.-Japan Workshop on Soil Liquefaction, Remedial Treatment of Potentially Liquefiable Soils*. [S.l.: s.n.], 1994. Citado na página 31.
- HUGHES, J.; WITHERS, N. Reinforcing of soft cohesive soils with stone columns. *Ground Engineering*, v. 7, p. 42–49, 1974. Citado na página 32.
- JELLALI, B.; BOUASSIDA, M.; BUHAN, P. de. A homogenization method for estimating the bearing capacity of soils reinforced by columns. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 29, p. 989–1004, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 50.
- JELLALI, B.; BOUASSIDA, M.; BUHAN, P. de. A homogenization approach to estimate the ultimate bearing capacity of a stone column reinforced foundation. *International Journal of Geotechnical Engineering*, v. 1, p. 61–69, 2007. Citado na página 50.
- KELLER. *Catálogo 10-02 Pt. Processos de vibração profunda dos solos*. [S.l.], 2002. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.
- KEMPFERT, H.-G.; GEBRESELASSIE, B. *Excavations and Foundations in Soft Soils*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 37.
- KHOSRAVI, Z. *Étude théorique et expérimentale de la capacité portante des fondations superficielles*. Tese (Doutorado) — École Nationale des Ponts et Chaussées, 1983. Citado na página 73.
- K.R.DATYE; NAGARAJU, S. S. Design approach and field control for stone columns. *Proc. Tenth Int. Conf. On SMFE*, v. 3, p. 637–640, 1981. Citado na página 32.

MADHAV, M. R.; IYENGAR, N. G. R.; VITKAR, R. P.; NANDA, A. Increased bearing capacity and reduced settlement due to inclusion in soil. In: *Proceedings of International Conference on Soil Reinforcement Reinforced Earth and Other Techniques*. [S.l.: s.n.], 1979. v. 2, p. 239–333. Citado na página 44.

MADHAV, M. R.; VITKAR, P. P. Strip footing on weak clay stabilized with a granular trench or pile. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 15, p. 605–609, 1978. Citado 4 vezes nas páginas 15, 32, 44 e 45.

MITCHELL, J. K.; VILLET, C. B. *Reinforcement of Earth Slopes and Embankments*. [S.l.], 1987. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 37.

MORGENTHALER, M.; CAMBOU, B.; SANGLERAT, G. Colonne bakkastléées essais de chargement et calculs par la méthode des éléments finis. *Revue Franse de Géotechnique*, v. 5, p. 41–55, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

OKAMURA, T.; TERASHI, M. Deep lime mixing method of stabilization for marine clays. In: *Proceeding of the 6th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. [S.l.: s.n.], 1975. Citado na página 31.

SALENÇON, J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. [S.l.: s.n.], 1983. Citado 12 vezes nas páginas 16, 38, 54, 56, 57, 58, 62, 63, 64, 68, 70 e 72.

SALENÇON, J. An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics. *Eur. J. Mech*, v. 5, p. 477–500, 1990. Citado 6 vezes nas páginas 58, 59, 60, 61, 62 e 83.

SALENÇON, J. *de l'Élasto-plasticité au Calcul á la rupture*. [S.l.: s.n.], 2002. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 53, 54, 56, 67 e 69.

SALENÇON, J.; PECKER, A. Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, v. 14, n. 3, p. 354, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 71, 72 e 73.

SALENÇON, J.; PECKER, A. Ultimate bearing capacity of shallow foundations under inclined and eccentric loads. part ii: purely cohesive soil without tensile strength. *Eur. J. Mech*, v. 3, p. 377–396, 1995. Citado na página 117.

SCHAEFER, V. R. *Ground Improvement, Ground Reinforcement, Ground Treatment, Proceedings of Soil Improvement and Geosynthetics of The Geo-institute of the American Society of civil engineers in conjunction with Geo-Logan'97*. [S.l.: s.n.], 1997. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 35.

TANAKA, M. T. T. Ground improvement by deep mixing method. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. [S.l.: s.n.], 1981. Citado na página 31.

VESIC, A. S. Expansion of cavities in infinite soil mass. *J. SM and FE Div*, v. 98, p. 265–290, 1972. Citado 3 vezes nas páginas 32, 41 e 42.

A CAPACIDADE DE CARGA DO MECANISMO I

Considera-se o mecanismo de blocos da Figura A.1, dependente dos parâmetros angulares α e β . O bloco $A'AGED$ tem um movimento de translação virtual de velocidade \underline{U} paralela a $A'D$, e o triângulo AGC tem um deslocamento de velocidade virtual \underline{W} paralela a FC . Não é considerada descontinuidade de velocidade virtual entre o solo e a fundação. O solo embaixo de $A'DEGC$ permanece sem-se movimentar (velocidade=0).

O hodógrafo de velocidades apresenta-se na Figura A.2.

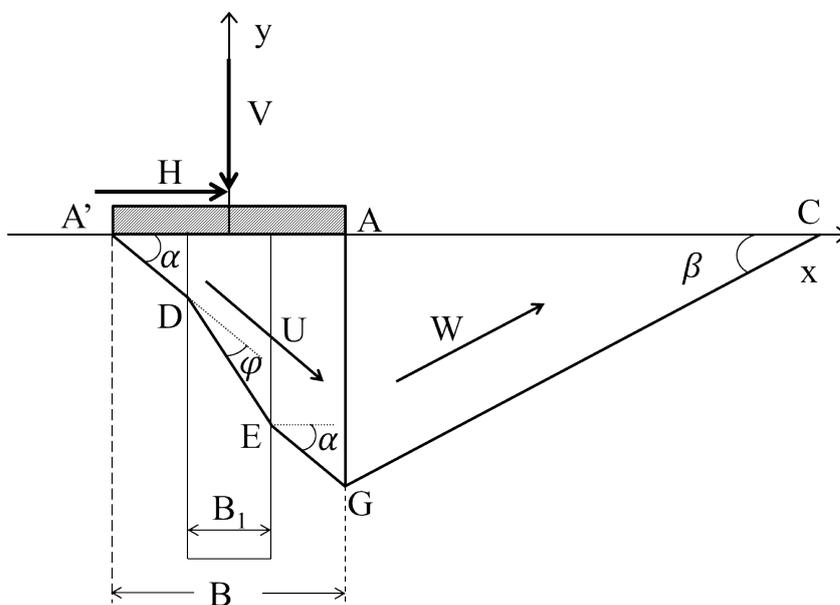


Figura A.1 – Campo de velocidades virtuais considerado (Mecanismo I)

As relações entre velocidades são:

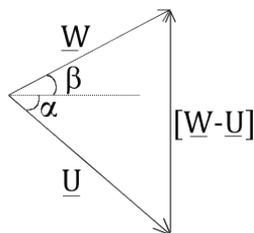


Figura A.2 – Hodógrafo do Mecanismo I

$$U \cos \alpha = W \cos \beta \rightarrow W = \frac{U \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (\text{A.1})$$

$$[\underline{W} - \underline{U}] = U \sin \alpha + W \sin \beta = U \sin \alpha + U \cos \alpha \tan \beta = U(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta) \quad (\text{A.2})$$

e a relação entre comprimentos é dada por:

$$\overline{GC} \operatorname{sen} \beta = (B - B_1) \tan \alpha + B_1 \tan(\varphi + \alpha) \quad (\text{A.3})$$

As funções de apoio para cada critério de resistência estão dadas por:

Para material de Tresca:

$$\pi(\underline{n}, [\underline{U}]) = C[\underline{U}] \quad (\text{A.4})$$

Para material de Coulomb:

$$\pi(\underline{n}, [\underline{U}]) = H[\underline{U}] \cdot \underline{n} \quad (\text{A.5})$$

onde $[\underline{U}]$ representa a descontinuidade de velocidade e $H = \frac{C_r}{\tan \varphi}$. Na Tabela A.1 é apresentada a potência resistente máxima para cada descontinuidade de velocidade.

Tabela A.1 – Potência resistente máxima para as descontinuidades de velocidade da abordagem

Descontinuidades	Prm(\underline{n} , $[\underline{V}]$)
$[\underline{U} - 0]$ Tramo do solo	$C_s U (B - B_1) / \cos \alpha$
$[\underline{U} - 0]$ Tramo da coluna	$C_r U \cos(\varphi) B_1 / \cos(\alpha + \varphi)$
$[\underline{W} - \underline{U}]$	$C_s U (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \tan \beta) ((B - B_1) \tan \alpha + B_1 \tan(\alpha + \varphi))$
$[\underline{W} - 0]$	$C_s U \cos \alpha / \cos \beta [(B - B_1) \tan \alpha + B_1 \tan(\alpha + \varphi)] / \operatorname{sen} \beta$

Sejam as seguintes relações adimensionais:

$$\eta = \frac{B_1}{B} \quad k = \frac{\gamma_r}{\gamma_s} \quad m = \frac{C_r}{C_s} \quad \xi = \frac{\gamma_s B}{C_s} \quad (\text{A.6})$$

O trabalho resistente máximo obtido é:

$$\begin{aligned} Prm = C_s U B \left\{ \frac{1-\eta}{\cos \alpha} + [\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \tan \beta] [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] + \right. \\ \left. + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \operatorname{sen} \beta} [(1-\eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] + \frac{m \cos \varphi \eta}{\cos(\alpha + \varphi)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

As forças externas estão constituídas por forças volumétricas e de superfície. A potência das forças de superfície (cargas à fundação) é:

$$P_{ext1} = (H \cos \alpha + V \operatorname{sen} \alpha) U \quad (\text{A.8})$$

e a potência do peso (forças volumétricas):

$$P_{ext2} = (P_1 + P_2 + P_3) U \operatorname{sen} \alpha - P_4 W \operatorname{sen} \beta \quad (\text{A.9})$$

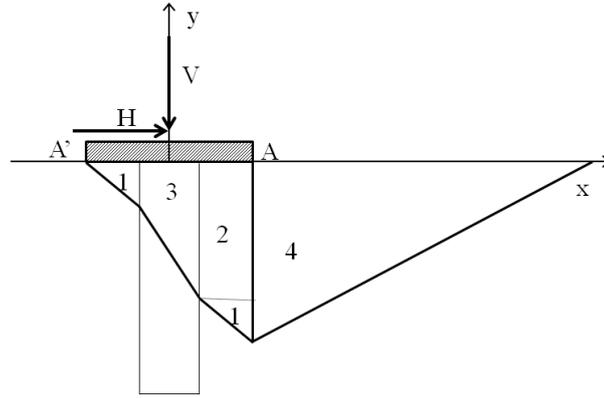


Figura A.3 – Blocos considerados para o cálculo da potência externa

Onde 1, 2, 3 e 4 representam os volumes dados na Figura A.3 Assim:

$$P_1 = \frac{1}{4}(B - B_1)^2 \tan \alpha \gamma_s \quad (\text{A.10})$$

$$P_2 = \gamma_s \frac{B - B_1}{2} \left(B_1 \tan(\varphi + \alpha) + \frac{B - B_1}{2} \tan \alpha \right) \quad (\text{A.11})$$

$$P_3 = \left[\frac{1}{2} B_1^2 \tan(\alpha + \varphi) + B_1 \frac{B - B_1}{2} \tan \alpha \right] \gamma_r \quad (\text{A.12})$$

$$P_4 = \frac{\gamma_s}{2 \tan \beta} \left((B - B_1) \tan \alpha + B_1 \tan(\alpha + \phi) \right)^2 \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, a potência das forças externas é dada por:

$$P_{ext} = HU \cos \alpha + VU \sin \alpha + U \gamma_s B^2 \sin \alpha \left\{ \frac{1}{2} \tan \alpha (1 - \eta)^2 + \frac{1}{2} \eta (1 - \eta) \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha \right\} - \frac{1}{2} U \gamma_s B^2 \cos \alpha \left[(1 - \eta) \tan \alpha + \eta \tan(\varphi + \alpha) \right]^2 \quad (\text{A.14})$$

A desigualdade que relaciona a potência das forças externas com o trabalho resistente máximo ($P_{ext} \leq P_{rm}$), é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sin \alpha + \xi \sin \alpha \left\{ \frac{1}{2} \tan \alpha (1 - \eta)^2 + \frac{1}{2} \eta (1 - \eta) \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha \right\} - \frac{1}{2} \xi \cos \alpha \left[(1 - \eta) \tan \alpha + \eta \tan(\varphi + \alpha) \right]^2 \leq \\ \leq \frac{1 - \eta}{\cos \alpha} + [\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta] \left[(1 - \eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi) \right] + \\ + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sin \beta} \left[(1 - \eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi) \right] + \frac{m \cos \varphi \eta}{\cos(\alpha + \varphi)} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad \beta < \pi - \alpha \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

O valor de β que minimiza a relação A.15 é:

$$\beta = \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (\text{A.16})$$

Portanto, o convexo K está incluído no semi-espaco contendo a origem delimitado pela reta D_α (Figura A.4) de equação:

$$\frac{H}{BC_s} \cos \alpha + \frac{V}{BC_s} \sin \alpha = f(\alpha) \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & -\xi \sin \alpha \left\{ \frac{1}{2} \tan \alpha (1 - \eta)^2 + \frac{1}{2} \eta (1 - \eta) \tan(\alpha + \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha \right\} + \frac{1}{2} \xi \cos \alpha [(1 - \eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)]^2 + \\ & + \frac{1 - \eta}{\cos \alpha} + [\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta][(1 - \eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] + \\ & + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \sin \beta} [(1 - \eta) \tan \alpha + \eta \tan(\alpha + \varphi)] + \frac{m \cos \varphi \eta}{\cos(\alpha + \varphi)} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

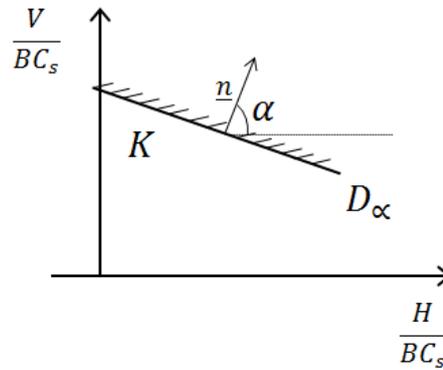


Figura A.4 – Aproximação cinemática de K para um dado α

Consequentemente, K está incluído no envelope convexo das retas D_α quando α descreve o intervalo $[0, \frac{\pi}{2} - \varphi]$ (Figura 5.7)

Denota-se por \underline{F} à resultante das forças H e V , de forma que:

$$H = F \sin \delta \quad V = F \cos \delta$$

A equação A.17 em função de $f(\alpha)$ é:

$$\frac{F}{BC_s} (\cos \alpha \sin \delta + \sin \alpha \cos \delta) \leq f(\alpha)$$

ou

$$\frac{F}{BC_s} \leq \frac{f(\alpha)}{\sin(\alpha + \delta)} \quad (\text{A.19})$$

Minimiza-se o segundo membro da equação A.19 numericamente, para cada valor de δ , e assim obtém-se os limites superiores de $\frac{F}{BC_s}(\delta)$

Cálculo do comprimento l_3

$$h = \frac{B - B_1}{2} \tan \alpha + B_1 \tan(\alpha + \varphi)$$

$$\tan \chi = \frac{h}{\frac{B - B_1}{2}} = \tan \alpha + \frac{2B_1 \tan(\alpha + \varphi)}{B - B_1}$$

Por outro lado

$$\cos \chi = \frac{B - B_1}{2r} \rightarrow r = \frac{B - B_1}{2 \cos \chi}$$

Assim

$$r = \frac{B - B_1}{2} \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2B_1 \tan(\alpha + \varphi)}{B - B_1} \right)^2}$$

$$l_3 = r \left(\frac{3\pi}{4} - \chi \right)$$

$$l_3 = \frac{B - B_1}{2} \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2B_1 \tan(\alpha + \varphi)}{B - B_1} \right)^2} \left(\frac{3\pi}{4} - \chi \right)$$

Cálculo do comprimento l_4

$$l_4 = r = \frac{B - B_1}{2} \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2B_1 \tan(\alpha + \varphi)}{B - B_1} \right)^2}$$

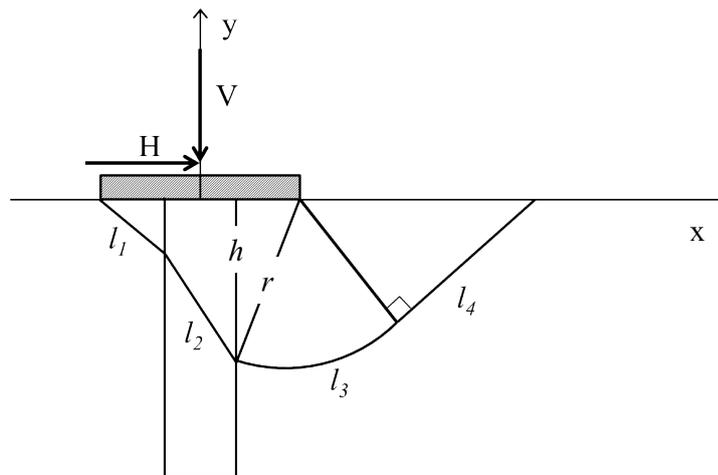


Figura B.2 – Comprimentos

Na Tabela A.1 é apresentada a potência resistente máxima para cada descontinuidade de velocidade.

Tabela B.1 – Potência resistente máxima para as discontinuidades de velocidade da abordagem

Tramos	Descontinuidades	Prm(\underline{n} , $[\underline{V}]$)
l_1	$[\underline{U} - 0]$	$C_s U \frac{B-B_1}{2 \cos \alpha}$
l_2	$[\underline{U} - 0]$	$C_r U \cos(\varphi) \frac{B_1}{\cos(\alpha+\varphi)}$
l_3	$[\underline{V} - 0]$	$C_s U \sin(\chi + \alpha) \frac{B-B_1}{2} \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2B_1 \tan(\alpha+\varphi)}{B-B_1} \right)^2} \left(\frac{3\pi}{4} - \chi \right)$
l_4	$[\underline{V}_2 - 0]$	$C_s U \sin(\chi + \alpha) \frac{B-B_1}{2} \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2B_1 \tan(\alpha+\varphi)}{B-B_1} \right)^2}$
l_5	$[\underline{V} - \underline{U}]$	$-C_s U \cos(\chi + \alpha) \frac{B-B_1}{2} \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2B_1 \tan(\alpha+\varphi)}{B-B_1} \right)^2}$

$$Prm(\underline{n}, [\underline{V}]) = \frac{1}{2} C_s U B (1 - \eta) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{3\pi}{4} - \chi \right) \sin(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha+\varphi)}{1-\eta} \right)^2} - \cos(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha+\varphi)}{1-\eta} \right)^2} \right) + \frac{C_s U B m \eta \cos \varphi}{\cos(\alpha+\varphi)}$$

$$Prm(\underline{d}) = \frac{1}{2} C_s U B (1 - \eta) \sin(\chi + \alpha) \left(\frac{3\pi}{4} - \chi \right) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2}$$

$$Prm = \frac{1}{2} C_s U B (1 - \eta) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi \right) \sin(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha+\varphi)}{1-\eta} \right)^2} - \cos(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha+\varphi)}{1-\eta} \right)^2} \right) + \frac{C_s U B m \eta \cos \varphi}{\cos(\alpha+\varphi)}$$

A potência das forças externas é dada por:

- Potência da carga a fundação

$$P_{ext1} = U(V \sin \alpha + H \cos \alpha)$$

- Potência da força de gravidade no volume $A'AEF$

$$P_{ext2} = U B^2 \gamma_s \sin \alpha \left(\tan \alpha \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \eta \frac{(1-\eta)}{2} \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right)$$

- Potência da força de gravidade no volume ADC

$$P_{ext3} = -U \sin(\chi + \alpha) B^2 \gamma_s \frac{\sqrt{2}}{16} (1 - \eta)^2 \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2 \right)$$

- Potência da força de gravidade no volume ACE

$$P_{ext4} = U \operatorname{sen}(\chi + \alpha) B^2 \gamma_s \frac{1}{16} (1 - \eta)^2 \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2 \right) (\sqrt{2} - 2 \operatorname{sen} \chi)$$

Finalmente

$$P_{ext} = U(V \operatorname{sen} \alpha + H \cos \alpha) + UB^2 \gamma_s \operatorname{sen} \alpha \left(\tan \alpha \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \eta (1 - \eta) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right) \\ - \frac{1}{8} UB^2 \gamma_s (1 - \eta)^2 \operatorname{sen} \chi \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2 \right)$$

$$P_{ext} \leq P_{rm}$$

$$U(V \operatorname{sen} \alpha + H \cos \alpha) + UB^2 \gamma_s \operatorname{sen} \alpha \left(\tan \alpha \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \eta (1 - \eta) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right) \\ - \frac{1}{8} UB^2 \gamma_s (1 - \eta)^2 \operatorname{sen} \chi \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2 \right) \leq \\ \frac{1}{2} C_s UB (1 - \eta) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi \right) \operatorname{sen}(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2} \right. \\ \left. - \cos(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2} \right) + \frac{C_s UB m \eta \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)}$$

$$\left(\frac{V}{C_s B} \operatorname{sen} \alpha + \frac{H}{C_s B} \cos \alpha \right) + \frac{B \gamma_s}{C_s} \operatorname{sen} \alpha \left(\tan \alpha \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \eta (1 - \eta) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right) \\ - \frac{1}{8} \frac{B \gamma_s}{C_s} (1 - \eta)^2 \operatorname{sen} \chi \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2 \right) \leq \\ \frac{1}{2} (1 - \eta) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi \right) \operatorname{sen}(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2} \right. \\ \left. - \cos(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2} \right) + \frac{m \eta \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)}$$

onde

$$\tan \chi = \tan \alpha + \frac{2\eta}{1 - \eta} \tan(\alpha + \varphi)$$

$$\left(\frac{V}{C_s B} \operatorname{sen} \alpha + \frac{H}{C_s B} \cos \alpha \right) \leq \\ \frac{1}{2} (1 - \eta) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi \right) \operatorname{sen}(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2} \right. \\ \left. - \cos(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2} \right) + \frac{m \eta \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)} \\ - \frac{B \gamma_s}{C_s} \operatorname{sen} \alpha \left(\tan \alpha \left(\frac{1-\eta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{1-\eta}{2} \right) \tan(\alpha + \varphi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} k \eta (1 - \eta) \tan \alpha + \frac{1}{2} k \eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right) + \frac{1}{8} \frac{B \gamma_s}{C_s} (1 - \eta)^2 \operatorname{sen} \chi \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{F}{C_s B} (\cos \delta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \delta \cos \alpha) \leq \\
& \frac{1}{2}(1 - \eta) \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\chi\right) \operatorname{sen}(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta}\right)^2} \right. \\
& \quad \left. - \cos(\chi + \alpha) \sqrt{1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta}\right)^2} \right) + \frac{m\eta \cos \varphi}{\cos(\alpha + \varphi)} \\
& \quad - \frac{B\gamma_s}{C_s} \operatorname{sen} \alpha \left(\tan \alpha \left(\frac{1 - \eta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\eta(1 - \eta) \tan(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2}k\eta(1 - \eta) \tan \alpha \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}k\eta^2 \tan(\alpha + \varphi) \right) - \frac{1}{8} \frac{B\gamma_s}{C_s} (1 - \eta)^2 \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen}(\chi + \alpha) \left(1 + \left(\tan \alpha + \frac{2\eta \tan(\alpha + \varphi)}{1 - \eta}\right)^2 \right)
\end{aligned}$$

C CAPACIDADE DE CARGA DO MECANISMO III

Considera-se o campo de velocidades apresentado na Figura C.1. O mecanismo consiste na rotação de um bloco ($A'CDE$) em relação a um ponto O com uma velocidade virtual angular ω . As curvas $A'C$, CD e DE representam a descontinuidade de velocidade. As curvas de descontinuidade $A'C$ e DE são circulares e paralelas ao campo de velocidades virtuais em cada ponto, devido a tratar-se de um material de Tresca. A curva CD corresponde a uma espiral logarítmica que forma um ângulo φ com o campo de velocidades virtuais em cada ponto, devido a tratar-se de um material de Coulomb. Dois ângulos intervêm como parâmetros do problema: θ_1 e θ_i (Figura C.2)

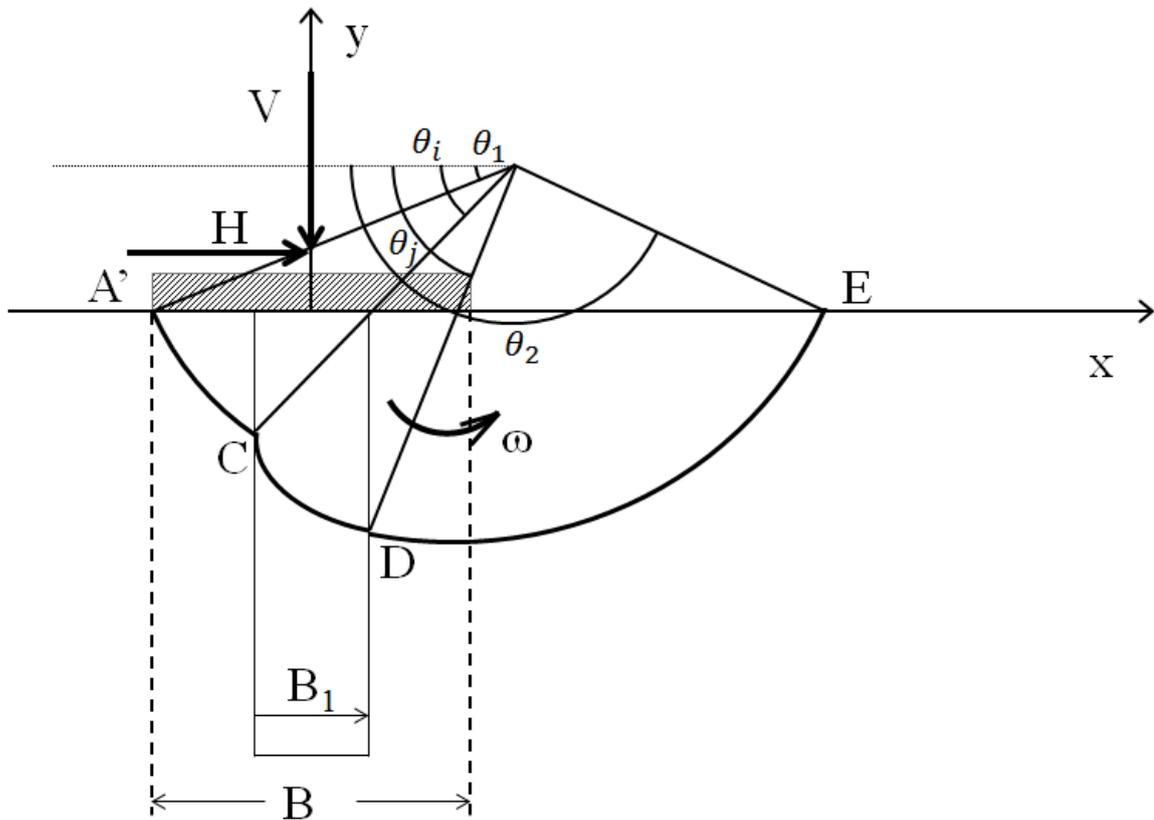


Figura C.1 – Campo de velocidades do Mecanismo III

O raio R é dado por:

$$R = \frac{B - B_1}{2(\cos \theta_1 - \cos \theta_i)} \quad (\text{C.1})$$

O trabalho externo da força $F = (H, V)$ é

$$FR\omega \left(\cos(\delta - \theta_1) - \frac{\cos \delta}{2s} \right) \quad (\text{C.2})$$

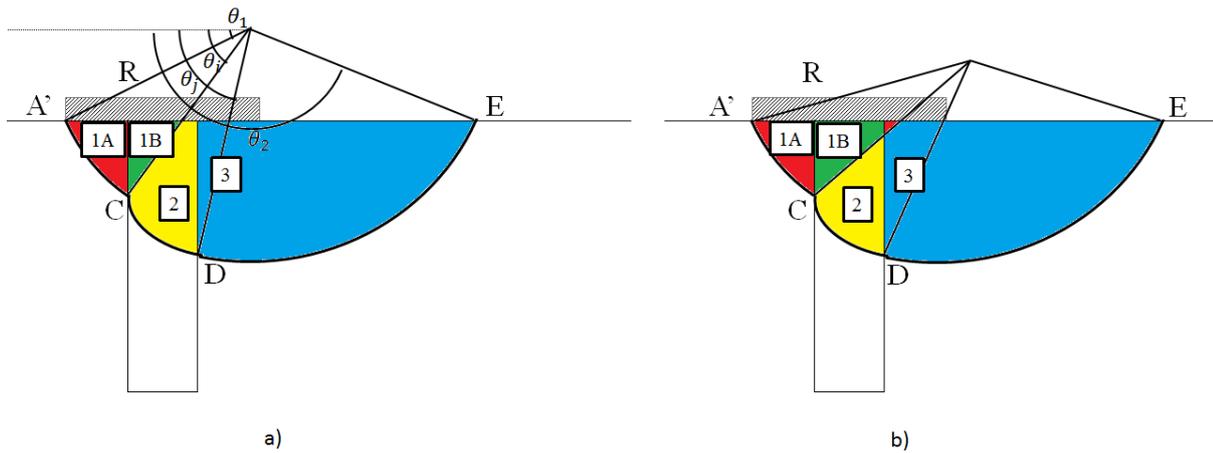


Figura C.2 – Parâmetros relacionados com o mecanismo

O trabalho externo do peso na área 1 para $\theta' \geq \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{W_{1A}}{BC_s} &= R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[(\sin \theta_i - \sin \theta_1) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \right) \right] \\ &+ R \frac{(\gamma_r - \gamma_s) B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\cos^3 \theta_i (\tan \theta_i - \tan \theta'') + \frac{\sin^3 \theta_0}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta''} \right) \right] \end{aligned} \quad (C.3)$$

O trabalho externo do peso na área 1 para $\theta' \leq \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{W_{1B}}{BC_s} &= R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[(\sin \theta_i - \sin \theta_1) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \right) \right] \\ &+ R \frac{(\gamma_r - \gamma_s) B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\cos^3 \theta_i \tan \theta_i + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta'} - \frac{1}{\sin^2 \theta''} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos^3 \theta_i \tan \theta_i + e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_i) \right] \end{aligned} \quad (C.4)$$

O trabalho externo do peso na área 2 para $\theta' \geq \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{W_{2A}}{BC_s} &= R \frac{\gamma_r B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \sin \theta_j - \sin \theta_i \right) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta'} - \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_j) \right] \end{aligned} \quad (C.5)$$

O trabalho externo do peso na área 2 para $\theta' \leq \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{W_{2B}}{BC_s} &= R \frac{\gamma_r B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \sin \theta_j - \sin \theta_i \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_i - \tan \theta_j) \right] \end{aligned} \quad (C.6)$$

O trabalho externo do peso na área 3 para $\theta' \geq \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{W_{3A}}{BC_s} &= R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\sin \theta_2 - \sin \theta_j) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_2} - \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_j} \right. \\ &\quad \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta') + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_j} - \frac{1}{\sin^2 \theta'} \right) \right] \end{aligned} \quad (C.7)$$

O trabalho externo do peso na área 3 para $\theta' \leq \theta_i$:

$$\begin{aligned} \frac{W_{3B}}{BC_s} = R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 & \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\sin \theta_2 - \sin \theta_j) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_2} - \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_j} \right. \\ & \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta_i) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_j} - \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (C.8)$$

O trabalho resistente máximo é dado por

$$P_{rm} = C_s \omega R^2 \left[\theta_i - \theta_1 + e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\theta_2 - \theta_j) + \frac{m}{2 \tan \varphi} (e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} - 1) \right] \quad (C.9)$$

A desigualdade que relaciona a potência das forças externas com o trabalho resistente máximo ($P_{ex} \leq P_{rm}$) para $\theta' \geq \theta_i$ é

$$\begin{aligned} & \frac{FR}{BC_s} \omega \left(\cos(\delta - \theta_1) - \frac{\cos \delta}{2s} \right) \\ & + R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[(\sin \theta_i - \sin \theta_1) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \right) \right] \\ & + R \frac{(\gamma_r - \gamma_s) B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\cos^3 \theta_i (\tan \theta_i - \tan \theta'') + \frac{\sin^3 \theta_0}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta''} \right) \right] \\ & + R \frac{\gamma_r B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \sin \theta_j - \sin \theta_i \right) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta'} - \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \right) \right. \\ & \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_j) \right] \\ & + R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\sin \theta_2 - \sin \theta_j) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_2} - \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_j} \right. \\ & \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta') + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_j} - \frac{1}{\sin^2 \theta'} \right) \right] \leq \\ & \omega \frac{R^2}{B} \left[\theta_i - \theta_1 + e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\theta_2 - \theta_j) + \frac{m}{2 \tan \varphi} (e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} - 1) \right] \end{aligned} \quad (C.10)$$

A desigualdade que relaciona a potência das forças externas com o trabalho resistente máximo ($P_{ex} \leq P_{rm}$) para $\theta' \leq \theta_i$ é

$$\begin{aligned} & \frac{FR}{BC_s} \omega \left(\cos(\delta - \theta_1) - \frac{\cos \delta}{2s} \right) \\ & + R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[(\sin \theta_i - \sin \theta_1) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \right) \right] \\ & + R \frac{(\gamma_r - \gamma_s) B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\cos^3 \theta_i \tan \theta_i + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta'} - \frac{1}{\sin^2 \theta''} \right) \right. \\ & \left. + \cos^3 \theta_i \tan \theta_i + e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} \cos^3 \theta_j (\tan \theta' - \tan \theta_i) \right] \\ & + R \frac{\gamma_r B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\frac{3 \tan \varphi}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos \theta_j - \cos \theta_i \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{9 \tan^2 \varphi + 1} \left(e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \sin \theta_j - \sin \theta_i \right) \right. \\ & \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_i - \tan \theta_j) \right] \\ & + R \frac{\gamma_s B \omega}{C_s} \frac{\omega}{3} \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[e^{3(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\sin \theta_2 - \sin \theta_j) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_2} - \frac{\sin^3 \theta_1}{2 \sin^2 \theta_j} \right. \\ & \left. + e^{3 \tan \varphi (\theta_j - \theta_i)} \cos^3 \theta_j (\tan \theta_j - \tan \theta_i) + \frac{\sin^3 \theta_1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_j} - \frac{1}{\sin^2 \theta_i} \right) \right] \leq \\ & \omega \frac{R^2}{B} \left[\theta_i - \theta_1 + e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} (\theta_2 - \theta_j) + \frac{m}{2 \tan \varphi} (e^{2(\theta_j - \theta_i) \tan \varphi} - 1) \right] \end{aligned} \quad (C.11)$$