UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENÇAS

Eliete Biasotto

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Julio Cesar Ruiz Claeyssen, apresentada ao Instituto de Matemática da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

PORTO ALEGRE

1988

ÍNDICE

Pág.:

RESUMO

Estudamos a estabilidade de equações diferenças usando o Método Direto de Lyapunov e estendemos os resultados através do Princípio de Invariância de La Salle. Apresentamos generalizações e ilustrações de aplicação destes resultados.

ABSTRACT

We study the stability of difference equations by using Lyapunov's Direct Method and we extend the results through La Salle's Invariance Principle. Generalizations and representative examples of the application of these results are given.

PREFÁCIO

Neste trabalho apresentamos uma teoria de estabilidade de equações diferenças utilizando os métodos de Lyapunov e La Salle, assim como generalizações e exemplos de aplicação.

Na introdução são dadas as definições básicas de estabilidade e aspectos da teoria de matrizes a serem utilizados no desenvolver da dissertação.

Em questões de estabilidade de equações diferenciais o Método Direto de Lyapunov é muito utilizado. Demonstramos este método para equações diferenças no capítulo 3, onde também obtemos resultados relativos ao domínio de atração de um ponto de equilíbrio. Uma região de atração é encontrada para o método de Newton-Raphson.

Funções de Lyapunov e propriedades de invariância de conjuntos limites fornecem dados sobre o comportamento assintótico de trajetórias. Fazemos isto através do Princípio de Invariância de La Salle, o qual é utilizado na seção 4.2, no estabelecimento de condições de estabilidade não linear. Estas condições são aplicadas na análise de um modelo epidêmico.

No capítulo 5 apresentamos o Princípio de Invariância para funções de Lyapunov vetoriais e sua aplicação ao caso linear ; estabilidade sobre perturbações e estabilidade prática cujos resultados são usados no estudo do efeito do arredondamento do erro no método de Newton-Raphson e no caso linear; estabilidade uniforme e funções de Lyapunov para equações diferenças não-autô nomas; estabilidade exponencial e conectiva determinando regiões de estabilidade em modelos de ecossistemas.

I. INTRODUÇÃO

O propósito deste capítulo inicial é apresentar conceitos e resultados básicos a serem utilizados no decorrer do trabalho. Também serão abordados aspectos da teoria de matrizes necessários no estabelecimento de condições analíticas para a estabilidade das equações diferenças.

1.1 DEFINIÇÕES

Neste trabalho, G denotará uma função com domínio e contradomínio em $\mathbb{R}^n$ e $x^k = x(k)$ uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Definimos a função translação x' como $x'(k) = x(k+1)$ e a função diferença $\dot{x}(k) = x(k+1) - x(k)$. Por uma *equação diferença de primeira ordem* ou *processo iterativo*, entende-se uma relação da forma

$$x'(k) = G(x(k)) \quad ,$$

isto é,

(1.1) $\quad x^{k+1} = Gx^k \quad , \quad k = 0, 1, \ldots \quad , \quad x^0$ dado, onde os superescritos indicam o nº da iteração.

A solução desta equação é dada por

(1.2) $\quad x^k = G^k x^0 \quad .$

onde $G^k = G(G^{k-1})$ é a k-ésima iterada de G com respeito à composição de funções, $G^0 = I$ é a função identidade e x^0 é o valor inicial. É claro que a solução de (1.1) existirá sempre que $G^k x^0$ estiver no domínio de G para cada k. Referiremo-nos à sequência de estados x^o, Gx^o, ..., G^kx^o, ... como sendo a *trajetória* de x^o por G. Os *pontos fixos* x^*, isto é, $x^* = G(x^*)$, serão chamados *pontos de equilíbrio* de (1.1). Nesta situação, suas trajetórias reduzem-se aos próprios pontos fixos.

O estudo das *equações diferenças de ordem n*

$$x_k = H(x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_{k-n}) \;, \; k = n, n+1 \ldots$$

pode ser reduzido ao das equações de primeira ordem através de apropriadas mudanças de variáveis. Assim, por exemplo, se H é uma função linear, a equação diferença linear de ordem n

$$x_k = \alpha_{n-1}\, x_{k-1} + \ldots + \alpha_o x_{k-n}, \quad k = n, n+1, \ldots$$

pode ser reduzida à equação diferença linear de primeira ordem.

(1.3) $$x^{k+1} = Bx^k \;, \; k = 0,1, \ldots$$

onde

$$x^k = \begin{bmatrix} x_{k+n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} \;, \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_o \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para o valor inicial x^o, a solução de (1.3) é dada por $x^k = B^kx^o$. Na seção 1.4 veremos um algorítmo para calcular B^k em termos dos autovalores de B.

Seja x^k uma solução da equação (1.1). Dizemos que x^k é :

(a) *estável* se dado $\varepsilon>0$, existe um $\delta>0$ tal que se $\hat{x}^k$ é outra solução de (1.1) para a qual $\|x^o-\hat{x}^o\|<\delta$ então $\|x^k-\hat{x}^k\| \leqslant \varepsilon$,

$k=1, 2 \ldots$ (*)

(b) *assintoticamente estável* se, em adição, $\| x^k - \hat{x}^k \| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Seja x^* um ponto de equilíbrio de (1.1). O processo (1.1) é dito:

(c) *localmente convergente para* x^* se existe um $\delta > 0$ tal que quando $\| x^o - x^* \| < \delta$, as iteradas (1.2) existem e convergem para x^*,

(d) *globalmente convergente para* x^* se as iteradas (1.2) existem e convergem para x^* para cada x^o em $\mathbb{R}^n$.

O ponto de equilíbrio x^* é dito:

(e) *estável* se dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que quando $\| x^o - x^* \| < \delta$, a solução x^k de (1.1) existe e satisfaz $\| x^k - x^* \| \leq \varepsilon$, $k = 1, \ldots$

(f) *atrativo* se existe um $\delta > 0$ tal que quando $\| x^o - x^* \| < \delta$, a solução x^k de (1.1) existe e satisfaz $\| x^k - x^* \| \to 0$ quando $k \to \infty$

(g) *assintoticamente estável* se é estável e atrativo

(h) *globalmente atrativo* se para cada x^o em $\mathbb{R}^n$, $\| x^k - x^* \| \to 0$

(i) *globalmente assintoticamente estável* se é estável e globalmente atrativo.

(j) *exponencialmente estável* se existem constantes $\delta > 0$, $a > 0$ e $\eta < 1$ tais que a solução x^k de (1.1) existe e satisfaz

$$\| x^k - x^* \| \leq a \| x^o - x^* \| \eta^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \text{sempre que}$$

$\| x^o - x^* \| < \delta$

As noções de estabilidade e atratividade são independentes e um exemplo de atrator instável será visto na seção 1.2. Porém, são válidas as seguintes correspondências entre as difini-

---

(*) $\| . \|$ denota uma norma fixa, porém arbitrária em $\mathbb{R}^n$

ções acima:

$$(i) \Longrightarrow (h) \Longleftrightarrow (d) \Longrightarrow (c) \Longleftrightarrow (f) \Longleftarrow (g)$$

Alguns problemas de economia caracterizam-se pela existência de um contínuo de pontos de equilíbrios. É o caso dos preços de equilíbrio nos modelos de mercado: quando não há ilusão monetária ou efeito de saldos reais se espera que, se os preços ρ^* equilibram o mercado, então $\lambda\rho^*$ também são preços de equilíbrio para $\lambda>0$. Neste sentido, relativo a (1.1), ou, em outras palavras, relativo a G, um *conjunto* H contido em $\mathbb{R}^n$ é dito:

(l) *estável*, se dado um conjunto aberto U contendo $\bar{H}$, existe um conjunto aberto W contendo $\bar{H}$ tal que $G^k(W)$ está contido em U para $k=0, 1, \ldots$

(m) um *atrator* se existe um conjunto aberto U contendo $\bar{H}$ tal que se $x \in U$, então $G^k x \to H$ quando $k \to \infty$

(n) *assintoticamente estável* se é estável e um atrator.

(o) *globalmente atrativo* se $G^k x \to \bar{H}$ quando $k \to \infty$ para todo x do $\mathbb{R}^n$.

(p) *globalmente assintoticamente estável* se é estável e globalmente atrativo.

É oportuno lembrar que *instável* significa não estável e *fortemente instável* que não há estabilidade nem atratividade.

Se G(H) está contido em H (H está contido em G(H)), dizemos que H é *positivamente* (*negativamente*) *invariante*. Se G(H) = H, H é *invariante*.

Resultados acerca da teoria de conjuntos invariantes podem ser vistos, por exemplo, em [3]. Destacamos os seguintes: Se H é positivamente (negativamente) invariante, $\bar{H}$ também o é; Se H é invariante e limitado, então $\bar{H}$ é invariante; se H é estável, $\bar{H}$ é positivamente invariante.

Seja H um conjunto fechado do $\mathbb{R}^n$ e seja A positivamente invariante em $\mathbb{R}^n$ tal que $\bar{A}$ contenha H. *Estabilidade de H relativa a A* significa estabilidade de H com respeito à topologia relativa de A. Similarmente para a definição de H como um *atrator relativo a A*. Se H é estável e um atrator relativo a A, então H é *assintoticamente estável relativo a A*. Se H é estável relativo a A e para todo $x \in A$, $G^k x \to H$ quando $k \to \infty$, então H é *globalmente assintoticamente estável relativo a A*.

1.2 UM ATRATOR INSTÁVEL

Seja G uma função do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por:

$G(0,0) = (0,0)$ e

$G(x,y) = (g_1(x,y),\ g_2(x,y))$ se $(x,y) \neq (0,0)$

onde:

$$g_1(x,y) = x + \frac{x^2(y-x)+y^5}{r^2+r^6}, \quad g_2(x,y) = x + \frac{y^2(y-2x)}{r^2+r^6}$$

com $r^2 = x^2+y^2 \neq 0$

Esta função G resulta da aplicação do método de Euler para um sistema de equações diferenciais dado por Vinograd em 1957. Para verificar que a origem é globalmente atrativa, porém instável, seguimos o raciocínio de Hahn [10], o qual trabalhou detalhadamente este exemplo.

Notamos que G é contínua na origem e consequentemente em todo $\mathbb{R}^2$, (0,0) é o único ponto fixo de G. Também, G é uma função ímpar e portanto, é suficiente analisar somente o que ocorre no semi-plano superior.

Dividimos o semi-plano superior nas regiões:

$A = \{(x,y): y \leqslant -x\}$,

$B = \{(x,y): -x<y, \quad y>2x\}$,

$C = \{(x,y): y<2x, \quad x^2(y-x)+y^5 \geqslant 0\}$,

$D = \{(x,y): x^2(y-x)+y^5<0\}$,

observando que:

$g_1(x,y) > x, \; g_2(x,y) \geqslant y, \; (x,y)$ em A B ,

$g_1(x,y) \geqslant x, \; g_2(x,y) \leqslant y, \; (x,y)$ em C ,

$g_1(x,y) \leqslant x, \; g_2(x,y) \leqslant y, \; (x,y)$ em D.

Pela primeira relação, temos que se as iteradas iniciando em cada ponto $(x_o,y_o) \neq (0,0)$ em A permanecem em A, então elas são monótonas crescentes e limitadas. Assim, são obrigadas a convergir para um limite não nulo, o qual, pela continuidade de G, é um ponto fixo. Mas isto viola o fato de que a origem é o único ponto fixo. Consequentemente, as iteradas são obrigadas a deslocarem-se para B. Em B, elas também crescem, e para a direita. No numerador de g_1-g_2 vemos que o polinômio

$$x^2(y-x)+y^5-y^2(y-2x) \geqslant y^5-y^2(y-2x) \geqslant y^5-3y^3$$

se $y_k \geqslant \sqrt{3}$. Então, $y_{k+1}-y_k \leqslant x_{k+1}-x_k$, o que mostra que se as iteradas permanecem em B, elas são limitadas e convergentes. Como anteriormente, isto conduz a uma contradição e as iteradas necessariamente deslocam-se para C.

Para (x_k,y_k) em $C \cup D$, pode-se constatar que $0 \leqslant y_{k+1} \leqslant y_k$ e $y_{k+1} \leqslant x_{k+1}$. Então, as iteradas permanecem em C D e a sequência $\{y_k\}$ converge. Além disto, quando $(x_k y_k)$ pertence a C,

$$(*) \qquad x_{k+1} \leqslant y_k^3 + \frac{1}{2} y_k (1 + \sqrt{1+4y_k^2})$$

e para $(x_k, y_k) \in D$, $x_{k+1} \leqslant x_k$. Então, a sequência $\{x_k\}$ é limitada. Pela definição da G e pela convergência de $\{y_k\}$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} y_k^2(y_k - 2x_k) = 0$$

Se o limite de $\{y_k\}$ for diferente de zero, então $\{x_k\}$ necessariamente deve convergir e isto, como anteriormente, conduz a uma contradição. Assim, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$

Mas então, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, desde que quando os x_k são não decrescentes, eles são dominados por (*). Então, a origem é globalmente atrativa.

Agora, consideremos a região

$$T = \{(x,y):\ 0 \leqslant 3x \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{27}}\}$$

Se $(x,y) \in D$, a desigualdade

$$y^2(y-2x) \geqslant 3\,[x^2(y-x)+y^5]$$

mostra que se $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ é qualquer ponto de T, as iteradas subsequentes obrigatoriamente iniciam em T, de modo que $y_k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{27}}$ para alguma k. Então, a origem é instável.

Um tratamento mais geral de atratores instáveis em sistemas dinâmicos pode ser visto em Mendelson [20].

1.3 NORMAS MATRICIAIS

Correspondendo a qualquer norma vetorial no $\mathbb{R}^n$, existe uma natural norma matricial induzida.

Sejam $\|x\|$ e $\|x\|'$ normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Para cada matriz A de ordem mxn definimos:

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|'}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|' .$$

Segue-se que $\|A\|$ é uma norma pois satisfaz:

(i) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0$ se e somente se $A = 0$;

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

(iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Além disso, no caso especial em que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ e as normas $\|x\|$ e $\|x\|'$ são as mesmas, também vale:

(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

Uma norma de matrizes que satisfaz (iv) é dita *norma matricial*.

Cabe salientar que se $\|x\|$ é uma norma arbitrária em $\mathbb{R}^n$ e B é uma matriz quadrada de ordem n não singular, então $\|x\|' = \|Bx\|$ define uma norma no $\mathbb{R}^n$.

Citamos como exemplos as seguintes normas matriciais:

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}$$

onde $\rho(A^T A)$ é o raio espectral de matriz $A^T A$, a seguir definido.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos de equação *característica de A* à expressão $\det(A-\lambda I)=0$, onde λ é um escalar e I a matriz identidade. As raizes λ_i, $i=1, \ldots, n$, da equação característica são os *autovalores* de A. Dizemos que x é um *autovetor* de A, associado ao autovalor λ_i, se $Ax = \lambda_i x$. O conjunto $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ é o *espectro* de A e $\rho(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$ é o *raio espectral* de A, para o qual são válidas as seguintes propriedades:

(i) $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$

(ii) $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$, α escalar

(iii) $\rho(B^{-1}AB) = \rho(A)$

Se A é uma matriz simétrica, temos

$$\|A\|_2 = [\rho(A^2)]^{1/2} = [\rho(A)^2]^{1/2} = \rho(A)$$

Em geral, se λ_i é um autovalor de A e $x\neq 0$ o correspondente autovetor, em alguma norma:

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \ . \quad \text{Isto é:}$$

(iv) $\rho(A) \leq \|A\|$.

Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\rho(A)=0$ e $\|A\|_1 = |\alpha|$. Geralmente, a diferença entre $\rho(A)$ e $\|A\|$ pode ser arbitrariamente grande. De alguma forma, isto deve-se à escolha inadequada da norma.

Proposição 1

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dado $\varepsilon>0$, existe uma norma em $\mathbb{R}^n$ tal que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Prova:

Seja $A=PJP^{-1}$, onde J é a forma canônica de Jordan para A, e seja

$$D = \text{Diag }(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}).$$

Temos que $\hat{J}=D^{-1}JD$ é a mesma matriz que J, exceto que toda diagonal à direita tem seus elementos unitários substituidos por ε. Então:

$$\|\hat{J}\|_\infty \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

Seja $Q=PD$ e definamos $\|x\| = \|Q^{-1}x\|_\infty$, a qual é uma norma. Então:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|Q^{-1}x\|_\infty=1} \|Q^{-1}Ax\|_\infty = \max_{\|y\|_\infty=1} \|Q^{-1}AQy\| =$$

$$= \max_{\|y\|=\infty} \|\hat{J}y\|_\infty = \|\hat{J}\|_\infty \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

A proposição 1 é um resultado útil pois nem sempre é possível encontrar uma norma para a qual $\|A\| = \rho(A)$. Conforme vimos no exemplo anterior, em qualquer norma, $\|A\| \geqslant 0$ se $\alpha \neq 0$. Para que $\rho(A) = \|A\|$, é necessário e suficiente que A pertença à classe de matrizes assim definida:

Uma matriz quadrada de ordem n é de *classe* M se para todo autovalor λ tal que $|\lambda| = \rho(A)$, todo bloco de Jordan associado a λ é 1x1. Ou, equivalentemente, A é de classe M se e somente se A é similar a uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

onde A_1 é diagonal, $\rho(A_1) = \rho(A)$ e $\rho(A_2) < \rho(A)$

Proposição 2

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Existe uma norma em $\mathbb{R}^n$ tal que $\rho(A) = \|A\|$ se e somente se A é de classe M.

Prova:

Para mostrar a suficiência, modifiquemos levemente a prova da proposição 1, assumindo que $\varepsilon>0$ e tal que $|\lambda| + \varepsilon < \rho(A)$, onde λ é algum autovalor de A para o qual $|\lambda|<\rho(A)$. Assim, $\|\hat{J}\|_\infty = \rho(A)$.

Para a recíproca, assumamos que $\|A\| = \rho(A)$ para alguma norma e que existe um bloco de Jordan mxm, $m \geq 2$, associado ao autovalor λ tal que $|\lambda| = \rho(A)$. Se $\lambda = 0$, temos $\|A\|=0$ e então $A=0$. Supomos então que $\lambda \neq 0$. Assim, é suficiente considerar um bloco de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

Mostrar que $\|J\| = |\lambda|$ não é possível em qualquer norma. Se assumimos que $\|J\|=|\lambda|$ e $\mathfrak{J} = \lambda^{-1}J$, então claramente $\|\mathfrak{J}\| = 1$. Mas, um cálculo direto mostra que $\mathfrak{J}^k e_2 = (\frac{k}{\lambda}, 1, 0, \ldots, 0)^T$. Logo, quando $k \to \infty$ $\|\mathfrak{J}^k e_2\| \to \infty$ quando $k \to \infty$, o que contradiz $\|\mathfrak{J}\| = 1$.

Como consequência das proposições 1 e 2, obtemos o seguinte resultado sobre a convergência das potências de uma matriz quadrada.

Proposição 3

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ se e somente se $\rho(A) < 1$. Além disto, $\|A^k\|$ é limitada quando $k \to \infty$ se e somente se $\rho(A) < 1$ ou $\rho(A) = 1$ e A é de classe M.

Prova:

Se $\rho(A) < 1$, pela proposição 1 podemos tomar uma norma em $\mathbb{R}^n$ tal que $\|A\|$ é menor que 1. Assim, $\|A^k\| \leq \|A\|^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Reciprocamente, suponhamos $\rho(A) \geq 1$ e seja λ um autovalor de A tal que $|\lambda| \geq 1$. Se x é um autovetor associado a λ, temos

$$\|A^k x\| = \|\lambda^k x\| \geq \|x\|$$

o que implica que $\|A^k\| \geq 1$ para todo k.

Para a segunda parte, já temos provado que $\rho(A) < 1$ implica que $A^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Se $\rho(A) = 1$ e A é de classe M, então, pela proposição 2, podemos encontrar uma norma em $\mathbb{R}^n$ tal que $\|A\| = 1$. Logo $\|A^k\| \leq 1$ para todo k. Reciprocamente, suponhamos A^k limitada. Então claramente $\rho(A) \leq 1$. Suponhamos $\rho(A) = 1$. Assim, o mesmo argumento usado na proposição 2 mostra que todo bloco de Jordan J tal que $\rho(J) = 1$ é 1x1, e portanto, A é de classe M.

É conveniente salientar que, com pequenas adaptações em alguns casos, os resultados obtidos nesta seção são válidos para matrizes complexas.

1.4 UM ALGORITMO PARA COMPUTAR B^k ATRAVÉS DOS AUTOVALORES DE B

Consideremos a equação diferença linear

$$x^{k+1} = Bx^k \ , \quad k = 0, 1, \ldots, \ x^o \text{ dado},$$

cuja solução satisfazendo a condição inicial x^o é dada por $B^k x^o$.

Análogo ao algoritmo de Putzer para o cálculo de e^{Bt} em sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, o algoritmo que apresentamos foi dado por La Salle [18] para o cálculo de matriz B^k.

Consideremos uma representação de B^k na forma

$$(1.4.1) \qquad B^k = \sum_{j=1}^{n} W_j(k)Q_{j-1} \quad , \quad \text{onde}$$

$$(1.4.2) \qquad Q_j = (B - \lambda_j)IQ_{j-1} \quad ,$$

com λ_j os autovalores de B, $Q_o = I$ e $Q_n = 0$, pelo teorema de Cayley-Hamilton (toda matriz satisfaz sua equação característica). É justamente este fato que sugere a forma de representação (1.4.1).

A condição inicial $B^o = I$ é satisfeita tomando $W_1(0) = 1$, $W_2(0) = \ldots = W_n(0) = 0$. Necessitamos que

$$B \sum_{j=1}^{n} W_k(k)Q_{j-1} = \sum_{j=1}^{n} W_j(k+1)Q_{j-1} \quad ,$$

ou, desde que $BQ_{j-1} = Q_j + \lambda_j Q_{j-1}$,

$$\sum_{j=1}^{n} W_j(k)(Q_j + \lambda Q_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} W_j(k+1)Q_{j-1} \quad .$$

Deste modo (1.4.1) é satisfeita se:

$$(1.4.3)\qquad \begin{aligned} W_1(k+1) &= \lambda_1 W_1(k) \;,\; W_1(0) = 1 \quad (W_1(k) = \lambda_1^k) \;, \\ W_j(k+1) &= \lambda_j W_j(k) + W_{j-1}(k) \quad , \quad W_j(0) = 0 \quad , \end{aligned}$$

$j = 2, \ldots, n$.

As equações (1.4.2) e (1.4.3) são algoritmos para o cômputo de Q_j e dos $W_j(k)$ em termos dos autovalores de B, isto é, para encontrar B^k se conhecermos os autovalores de B.

La Salle [14] dá uma forma alternativa para (1.4.3):

$$(1.4.4)\qquad \begin{aligned} W_1(k) &= \lambda_1^k \\ W_j(k+1) &= \sum_{n=0}^{k} \lambda_j^{m-k}\, W_{j-1}{}^{(m)} \quad , \quad j = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Por ilustração, usamos o algorítmo para encontrar a solução da equação diferença linear de terceira ordem

$$x_{k+3} - 3x_{k+2} - 3x_{k+1} - x_k = 0 \quad , \quad x_o \text{ dado} \; ,$$

que é equivalente à equação de primeira ordem linear $x^{k+1} = Bx^k$, onde:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \;,\quad x^k = \begin{bmatrix} x_{k+2} \\ x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x^o = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_o \end{bmatrix}$$

Temos que $\det(B-\lambda I) = -(\lambda-1)^3$ e os autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Assim: $Q_o = I$,

$$Q_1 = B-I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = (B-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo (1.4.3) diretamente, obtemos: $W_1(k) = 1$, $W_2(k) = k$ e $W_3(k) = \frac{1}{2}k(k-1)$. Então, $B^k = I + k(B-I) + \frac{1}{2}k(K-1)(B-I)^2$, ou seja:

$$B^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(k-1)(k-2) & -k(k-2) & \frac{1}{2}k\ (k-1) \\ \frac{1}{2}k\ (k-1) & -(k+1)(k-1) & \frac{1}{2}(k+1)k \\ \frac{1}{2}(k+1)k & -(k+2)k & \frac{1}{2}(k+2)(k+1) \end{bmatrix}$$

A solução de $x^{k+1} = Bx^k$ é exatamente a primeira componente de $B^k x^o$. Obtemos assim:

$$x^k = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)x_2 - k(k-2)x_1 + \frac{1}{2}k(k-1)x_o$$

II. ESTABILIDADE LINEAR E NA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO

2.1 ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA DE EQUAÇÕES LINEARES

Um primeiro aspecto a ser considerado corresponde analogamente ao caso de equações diferenciais lineares exceto que as condições na parte real dos autovalores da matriz são substituídos por condições no raio espectral.

Teorema 1

Sejam B uma matriz quadrada de ordem n e d em $\mathbb{R}^n$. Uma solução x^k da equação

(2.1) $$x^{k+1} = Bx^k + d \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, x^o \text{ dado} ,$$

é

(a) estável se e somente se $\rho(B) \leqslant 1$ e se $\rho(B) = 1$ então B é de classe M.

(b) assintoticamente estável se e somente se $\rho(B) < 1$.

Prova:

(a) Seja $\hat{x}^k$ uma outra solução de (2.1). Consideremos o conjunto $w^k = \hat{x}^k - x^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Então:

(*) $$w^k = Bw^{k-1} = \ldots = B^k w^o, \; k = 0, 1, \ldots .$$

Suponhamos que $\rho(B) \leqslant 1$ e se $\rho(B) = 1$, B é de classe m. Pela pro posição 3, B^k é limitada, isto é, existe σ tal que $\|B^k\| \leqslant \sigma$, $k = 0, 1, \ldots$. Então, por (*), dado $\varepsilon > 0$, $\|\hat{x}^k - x^k\| \leqslant \varepsilon$ para todo $\hat{x}^o$ tal que $\|\hat{x}^o - x^o\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ e portanto x^k é estável. Reciprocamente, se B^k não é limitada, então $\|B^k y\| \to \infty$ quando $k \to \infty$ para algum y em $\mathbb{R}^n$. Logo, se $\hat{x}^o$ é tomado tal que $x^o - \hat{x}^o$ está na direção de x, segue-se que $\|\hat{x}^k - x^k\| \to \infty$ quando $k \to \infty$ e a solução não é estável. Logo, B^k é limitada e pela proposição 3, o resultado segue-se.

(b) Procedendo como em (a), observamos que a solução é assintoticamente estável se e somente se $B^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Novamente pela proposição 3, isto acontece se e somente se $\rho(B) < 1$.

Para equações lineares estabilidade assintótica equivale à estabilidade assintótica global. Desta forma, o Teorema 1 contém o seguinte aspecto básico de convergência:

Teorema 2

Se x^* é o único ponto fixo de (2.1), então, o processo (2.1) é globalmente convergente para x^* se e somente se $\rho(B) < 1$.

Prova:

Subtraindo-se $x^* = Bx^* + d$ de (2.1), obtemos a equação do erro:

$$x^{k+1} - x^* = B(x^k - x^*) = \ldots = B^{k+1}(x^o - x^*) .$$

Consequentemente, à medida que $\lim_{k\to\infty} (x^k - x^*) = 0$ para cada x^o, é necessário e suficiente que $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$. Pela proposição 3, isto acontece se e somente se $\rho(B) < 1$.

Exemplo: Modelo de Estoque de Metzler

Este modelo foi proposto por L.A. Metzler para análise de ciclos de estoques, o qual adaptamos de Baumol [2].

$$\text{(M)}\quad \begin{aligned} y_t &= u_t + s_t + v_o \\ u_t &= \beta y_{t-1} \\ s_t &= \beta(y_{t-1} - y_{t-2}) \end{aligned}$$

onde $0 < \beta < 1$; y_t é a renda total no período t; u_t são os bens do consumidor produzidos para venda no período t; s_t são os bens do consumidor produzidos para estoques no período t; v_o é o investimento líquido constante não induzido em cada período.

A renda total produzida em qualquer período é igual à produção total de bens do consumidor mais o investimento líquido. As vendas em qualquer período são uma proporção constante da renda no período precedente. A produção para estoque é igual à diferença entre as vendas atuais e as antecipadas do período precedente; isto é, há uma tentativa de manter o estoque num nível constante. Supõe-se que os estoques sejam suficientes para cobrir as diferenças entre a produção e a demanda do consumidor.

O modelo de Metzler pode ser transformado na equação diferença linear de segunda ordem:

$$\text{(M1)}\quad y_{t+2} - 2\beta y_{t+1} + \beta y_t = v_o \,, \qquad t = 0, 1, \ldots, \quad 0 < \beta < 1$$

à qual é equivalente à equação de primeira ordem

$$\text{(M2)}\quad y^{t+1} = By^t + v_o \,, \quad t = 0, 1, \ldots, \quad 0 < \beta < 1$$

onde

$$y^t = \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2\beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica, $\det(B - \lambda I) = 0$, tem por raizes

$$\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2-\beta} \qquad \lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2-\beta}$$

Logo, $\rho(B) = \sqrt{\beta} < 1$ e pelo teorema 1, qualquer solução y^t é as - sintoticamente estável.

Na verdade, a solução geral de (M1) é da forma

$$y_t = (\sqrt{\beta})^t \, (c_1 \cos \theta\, t + c_2 \operatorname{sen} \theta\, t) + \frac{v_o}{1-\beta} ,$$

onde $\frac{v_o}{1-\beta}$ é uma solução particular de (M1). Vemos que $y_t \to \frac{v_o}{1-\beta}$.

Seja $\rho(\lambda) = \lambda^n - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - \alpha_o$ o polinômio associado à equação diferença linear de ordem n

$$x_k = \alpha_{n-1}x_{k-1} + \dots + \alpha_o x_{k-n} , \quad k = n, n+1, \dots$$

reduzida à equação de primeira ordem

$$x^{k+1} = Bx^k , \quad k = 0, 1, \dots$$

com B e x^k dados em (1.3).

Como consequência do Teorema 1, temos:

Corolário

Sejam λ_i, $i = 1, \dots, n$ as raízes de $\rho(\lambda)$. Uma solução da equação $x^{k+1} = Bx^k$, $k = 0, 1, \dots$ é:

(a) estável se e somente se $|\lambda_i| \leq 1$ e se $|\lambda_i| = 1$, λ_i é uma raiz simples.

(b) assintoticamente estável se e somente se $|\lambda_i| < 1$.

Com efeito, como B é a matriz associada ao polinômio $\rho(\lambda)$, temos que se λ_i é um autovalor de multiplicidade m maior que 1, então existe um bloco de Jordan, de dimensão m, associado a λ_i. Assim B não é de classe M, e a prova é uma decorrência imediata do teorema 1.

Em aplicações do corolário, um resultado útil é o Teorema de Schur(1), que adaptamos de Chiang [4].

Teorema de Schur

As raizes λ_i, i = 1, ..., n de $\rho(\lambda)$ são menores que a unidade em valor absoluto se e somente se os seguintes determinantes forem todos positivos:

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{c|c} 1 & -\alpha_o \\ \hline -\alpha_o & 1 \end{array}\right| ,$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\alpha_o & -\alpha_1 \\ -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ \hline -\alpha_o & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \\ -\alpha_1 & -\alpha_o & 0 & 1 \end{array}\right| , \ldots ,$$

(1) Para uma discussão deste teorema e sua história, veja Jonh S. Chipman, The Teory of Inter-Sectoral Money Flows and Income Formation, The Jonh Hopkins Press, Baltimore, 1951, pp. 119-130.

$$\Delta_n = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_o & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \\
-\alpha_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 & -\alpha_o & \ldots & -\alpha_{n-2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_o \\
\hline
-\alpha_o & 0 & \ldots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} & \ldots & -\alpha_1 \\
-\alpha_1 & -\alpha_o & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & -\alpha_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_o & 0 & 1 & \ldots & 1
\end{array}\right|$$

Por exemplo, qualquer solução da equação

$x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k = 12$ é instável pois, como $\alpha_o = -2$, temos

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0 \quad .$$

Consideremos a equação diferencial

(2.2) $$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

e o método de Euler para sua integração numérica

$$(2.3) \qquad x^{k+1} = x^k + hAx^k \equiv Bx^k, \quad B = I+hA \;, \; x^k = x(k\Delta t)$$

Intuitivamente esperamos que, para h suficientemente pequeno, as propriedades de estabilidade de (2.2) e (2.3) sejam as mesmas. Conforme veremos a seguir, isto é verdadeiro para estabilidade assintótica, mas nem sempre para o caso de estabilidade simples. Vejamos, por exemplo, a equação

$$(2.2)' \qquad \frac{dx}{dt} = -100x(t) + 100 \quad , \; x(0) = x^o$$

cuja solução exata $x(t) = (x^o-1)e^{-100t} + 1$ é estável. O método de Euler aplicado a (2.2)' é

$$(2.3)' \qquad x^{k+1} = x^k + h(-100x^k+100) = (1-100)x^k + 100h$$

que tem por solução $x^k = (x^o-1)(1-100h)^k + 1$; $t = k\Delta t$.

Para maior concreticidade, tomemos $x^o=2$. Assim, as soluções de (2.2)' e (2.3)' ficam, respectivamente:

$$x(t) = e^{-100t} + 1 \quad \text{e} \quad x^k = (1-100h)^k + 1 \;.$$

Agora, $x(t)$ decresce muito rapidamente a partir de $x^o=2$ (para $t = 0,1$, $x(0,1) \doteq 1+5.10^{-5}$). Esperamos exigir um h pequeno para calcular exatamente a solução. Porém, para $t = 0,1$ a solução varia lentamente e é essencialmente igual a 1. Portanto, intuitivamente, esperamos obter exatidão suficiente com o método de Euler para h relativamente grande. Todavia, se $h>0,02$, $|1-100h|>1$ e a aproximação x^k cresce rapidamente para cada passo, o que mostra um comportamento instável.

Neste sentido, um aspecto conveniente a ser notado é dado pelo seguinte:

Proposição 4

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Todos os autovalores de A tem parte real negativa se e somente se existe um $h_o > 0$ tal que para todo $0 < h \leq h_o$, $\rho(I+hA) < 1$.

Prova:

Supondo que $\rho(I+hA) < 1$ tem-se que todos os autovalores de hA estão num disco centrado em -1 com raio menor que 1, isto é, todos os autovalores de hA possuem parte real negativa. Como $h>0$, o mesmo ocorre com A. Por outro lado, se os autovalores de A possuem parte real negativa, como eles são um número finito, estão contidos num mesmo quadrado de vértices $-a \pm ib$ e $-(a+b) \pm ib$. Então, os autovalores de $I+hA$ estão num quadrado de vértices $1+h(-a \pm ib)$ e $1+h(-a-b \pm ib)$. Deste modo, para $\rho(I+hA) < 1$ é suficiente que

$$(1-ah)^2 + h^2b^2 < 1 \quad \text{e} \quad [1-(a+b)h]^2 + h^2b^2 < 1.$$

Para h suficientemente pequeno, estas desigualdades podem ser satisfeitas.

Analisemos agora os efeitos da estabilidade da origem da equação linear homogênea na equação

$$(2.4) \qquad x^{k+1} = Bx^k + d^k \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

com uma sequência não constante de vetores d^k, que tem por solução

$$(2.5) \qquad x^k = B^k x^o + \sum_{j=0}^{k-1} B^j d^{k-j-1}$$

A fórmula (2.5) é muito usada. Entretanto, normas estimadas que dela se obtêm por vezes são mais úteis.

Teorema 3

Se a origem é estável para a equação homogênea

$$x^{k+1} = Bx^k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.6}$$

então, em alguma norma, a solução de (2.4) satisfaz

$$\|x^k\| \leq \|x^o\| + \sum_{j=0}^{k-1} \|d^j\|, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Se a origem é assintoticamente estável para (2.6), então existe uma norma e uma constante $\alpha<1$ tal que a solução de (2.4) satisfaz:

$$\|x^k\| \leq \alpha^k \|x^o\| + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \|d^j\|, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

Prova:

Se a origem é estável para (2.6), então o teorema 1 mostra que $\rho(B) \leq 1$ e se $\rho(B) = 1$, B é de classe M. Pelas proposições 1 e 2, existe uma norma tal que $\|B\| \leq 1$ e (2.7) segue-se de (2.5). Se a origem é assintoticamente estável para (2.6), então $\rho(B)<1$ e pela proposição 1, $\|B\| < 1$ em alguma norma. Assim (2.8) é obtida de (2.5) com $\alpha = \|B\|$.

Corolário

Se as raizes λ_i, $i = 1, \ldots, n$ do polinômio

$$\rho(\lambda) = \lambda^n - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_o$$

satisfazem $|\lambda_i| \leq 1$ e se $|\lambda_i| = 1$, λ_i é uma raiz simples, existe uma constante $c \geq 1$ tal que toda solução x_k da equação

$$(2.9) \qquad x_k - \alpha_{n-1} x_{k-1} - \dots - \alpha_o x_{k-n} = \gamma_k \quad , \; k = n, n+1, \dots ,$$

$\{\gamma_k\}$ uma sequência dada, satisfaz:

$$(2.10) \qquad \|x_k\| \leq c \left[\max_{0 \leq i \leq n-1} |x_i| + \sum_{j=n}^{k} |\gamma_j| \right] .$$

A prova é feita usando-se o fato de que a equação (2.9) pode ser escrita na forma (2.4), onde $d^k = (\gamma_{k+n-1} , 0, \dots, 0)^T$. Pelo teorema 3, existe uma norma tal que

$$(2.11) \qquad \|x^{k-n+1}\| \leq \|x^o\| + \sum_{j=0}^{k-n} \|d^j\| \quad , \quad k = n, n+1, \dots$$

Pelo teorema da equivalência de normas em $\mathbb{R}^n$, existem constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tais que

$$c_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_\infty .$$

Então (2.10) é obtida de (2.11) com $c = \dfrac{c_1}{c_2}$.

2.2 ESTABILIDADE POR APROXIMAÇÃO LINEAR

Consideremos a equação diferença não linear

$$(2.12) \qquad x^{k+1} = Bx^k + f(x^k) \quad , \; k = 0, 1, \dots$$

onde f é "pequena" para x próximo à origem, no seguinte sentido:

$$(2.13) \qquad \lim_{k \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0$$

Em 1929 Perron investigou a estabilidade de (2.12) determi nada pela aproximação linear

$$x^{k+1} = Bx^k \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Numa vizinhança da origem, o efeito de não linearidade pode ser desconsiderado e a estabilidade será determinada pela aproximação linear acima citada, exceto no caso crítico $\rho(B) = 1$.

Teorema de Perron

Seja B uma matriz quadrada de ordem n satisfazendo $\rho(B)<1$. Seja f uma função do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo (2.13). Então, a origem é assintoticamente estável para (2.12).

Prova:

Pela proposição 1, existe uma norma tal que $\|B\| = \alpha < 1$. Seja $\gamma > 0$ tal que $\alpha + \gamma < 1$. Então, existe um $\delta>0$ tal que $\|x\| < \delta$ implica que $\|f(x)\| \leqslant \gamma \|x\|$. Assim, para cada x^o tal que $\|x^o\| < \delta$, temos $\|x^1\| \leqslant \|B\| \, \|x^o\| + \|f(x^o)\| \leqslant (\alpha+\gamma) \|x^o\| < \delta$. Por indução segue-se $\|x^k\| \leqslant (\alpha+\gamma) \|x^o\| < \delta$, $k = 1, 2, \ldots$ Consequentemente $\|x^k\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Retomemos a equação não linear (1.1) $x^{k+1} = Gx^k$, $k=0,1\ldots$

Fazendo a mudança de variável $e = x-x^*$, obtemos

$$e^{k+1} = \tilde{G}e^k, \ k = 0, 1, \ldots , \ \tilde{G}e = G(e+x^*) - x^* , \quad \text{ou}$$

$$e^{k+1} = Be^k + f(e^k) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Considerando-se G diferenciável, temos que $f(e) = o(\|e\|)$, isto é, $\dfrac{\|f(e)\|}{\|e\|} \to 0$ quando $e \to 0$. O seguinte teorema obtido por

Ostrowski [27] está contido no Teorema de Perron. $G'(x^*)$ denotará a matriz Jacobina de G em x^*.

Teorema de Ostrowski

Se G é diferenciável no ponto fixo x^* e $\rho\{G'(x^*)\} < 1$, então o processo (1.1) é localmente convergente para x^*.

Prova:

Pela proposição 1, dado $\varepsilon>0$, existe uma norma para a qual $\|G'(x^*)\| \leq \lambda + \varepsilon$, onde $\lambda = \rho\{G'(x^*)\}$. Nesta norma, a definição de diferencialidade implica que existe um $\delta>0$ tal que se $\|x - x^*\| < \delta$,

$$\|Gx-x^*\| \leq \|Gx - Gx^* - G'(x^*)(x-x^*)\| + \|G'(x^*)(x-x^*)\|$$

$$\leq (\lambda + 2\varepsilon)\|x-x^*\|$$

Como $\lambda<1$, se tomarmos $\varepsilon = \dfrac{1-\lambda}{2}$ e $S = \{x: \|x-x^*\| < \delta\}$, temos que se $x^0 \in S$,

$$\|x^1-x^*\| = \|Gx^0-x^*\| \leq (\lambda + 2\varepsilon)\|x^0-x^*\| .$$

Assim $x^1 \in S$. Segue-se por indução que $x^k \in S$ e além disto que :

$$\|x^k-x^*\| \leq (\lambda + 2\varepsilon)\|x^{k-1}-x^*\| \leq \ldots \leq (\lambda + 2\varepsilon)^k \|x^0-x^*\| .$$

Deste modo, $x^k \to x^*$ quando $k \to \infty$.

Ostrowski e Perron consideraram também casos de instabilidade. Perron mostrou que se $\rho(B) > 1$, a origem é instável para (2.12) enquanto que, essencialmente equivalente, Ostrowski provou que x^* é um ponto de repulsão de (1.1) se $\rho\{G'(x^*)\} > 1$.

A prova do Teorema de Ostrowski mostra que o seguinte corolário, em caso especial do resultado de Hahn [9], é válido.

Corolário

Se G é diferenciável em x^* e $\rho\{G'(x^*)\} < 1$, então x^* é exponencialmente estável para (1.1).

III. ESTABILIDADE NÃO LINEAR PELO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

É intuitivamente claro que se próximo a um ponto de equilíbrio de um sistema físico a energia deste sistema é sempre decrescente, então o equilíbrio é estável. O método direto de Lyapunov é uma generalização desta idéia e funções de Lyapunov são simplesmente uma extensão do conceito de energia.

Assim, para um sistema autônomo de equações diferenciais

$$(3.1) \qquad \frac{dy}{dt} = F(y)$$

onde a origem é um ponto de equilíbrio, uma função de Lyapunov é uma função continuamente diferenciável, definida no $\mathbb{R}^n$ e assumindo valores reais, tal que

$$(3.2) \qquad V(x) > 0 \quad \text{se } x \neq 0 \quad \text{e} \quad v(0) = 0 \quad , \quad \text{e}$$

$$(3.3) \qquad \frac{d}{dt} V(y(t)) \leqslant 0 \quad ,$$

onde y é uma solução de (3.1). A idéia central do Método Direto de Lyapunov é detectar estabilidade para o sistema (3.1) pelo significado de propriedades de função V e fazer isto, não através do conhecimento das soluções, mas diretamente de (3.1).

O uso de "energia" para equações diferenciais data de Lyapunov (1892) e o primeiro tratamento sistemático para equações diferenças foi dado por Hahn [9]. Para ver qual a forma que a condição (3.3) deve tomar para uma equação diferença, considere mos o Método de Euler aplicado a (3.1):

$$x^{k+1} = x^k + hFx^k$$

Então, a diferença análoga a (3.3) seria:

$$\frac{d}{dt} V(y(t_k)) \doteq \frac{V(y(t_k+h)) - V(y(t_k))}{h} \doteq \frac{V(x^{k+1}) - V(x^k)}{h} \leqslant 0.$$

Assim, dada a equação diferença (1.1)

$$x^{k+1} = Gx^k \ , \quad k = 0, 1, \ldots$$

e o ponto de equilíbrio x^*, definimos uma *função de Lyapunov para G em* x^* como sendo uma função $V(x)$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ tal que:

$$V(x) \text{ é contínua ,}$$

(3.4) $\quad V(x) > 0$ se $x \neq x^*$ e $V(x^*) = 0$,

(3.5) $\quad \dot{V}(x) = V(Gx) - V(x) \leqslant 0$

para x numa região aberta D contendo x^*.

A condição (3.5) diz-nos que V é não crescente ao longo das soluções. A condição (3.4), associada ao conceito de mínimo de energia potencial, será relaxada no próximo capítulo para o estudo da estabilidade através do comportamento das trajetórias $G^k x$.

Uma questão importante nas aplicações numéricas refere-se à determinação do domínio ou região de atração **D** do ponto de equilíbrio x^* da equação (1.1):

$$\mathbf{D} = \{x;\ G^k x \to x^* \ , \quad k \to \infty\} \ .$$

A teoria de Lyapunov está intimamente ligada à esta questão. Como exemplo, encontraremos a região de atração do Método de Newton-Raphson na seção 1.2.
3

3.1. O MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Teorema 4

Seja G uma função contínua numa aberto S contendo o ponto de equilíbrio x^* de (1.1) e seja V uma função de Lyapunov para G em x^*. Então:

(a) x^* é estável;

(b) Se, além disto,

(3.6) $\qquad V(Gx) < V(x)$ para $x \neq x^*$ e Gx em D ,

x^* é assintoticamente estável.

(c) Se $S = D = \mathbb{R}^n$ e

(3.7) $\qquad V(x) \to +\infty$ quando $\|x\| \to \infty$,

x^* é globalmente assintoticamente estável.

Prova:

Tomemos $r_o > 0$ tal que $\{x: \|x-x^*\| \leq r_o\}$ esteja contido em $S \cap D$. Pela continuidade de G, existe $r_1 \leq r_o$ tal que $\|Gx-x^*\| \leq r_o$ quando $\|x-x^*\| < r_1$. Seja $\varepsilon > 0$ e assumamos, sem perda de generalidade, que $\varepsilon \leq r_1$. Então, pela continuidade de G e por (3.4), podemos tomar δ em $(0,\varepsilon)$ tal que $\|x-x^*\| < \delta$ implica que

$$V(x) < \phi(\varepsilon) \equiv \min \{V(x): \varepsilon \leq \|x-x^*\| \leq r_o\} .$$

Agora, suponhamos que existe algum x^o tal que $\|x^o-x^*\| < \delta$, mas $\|x^{k+1}-x^*\| > \varepsilon$ para algum k. Assumamos que existe um primeiro tal k; deste modo $\|x^i-x^*\| \leq \varepsilon \leq r_1$, $i=1, \ldots, k$. Então $\|Gx^k-x^*\| \leq r_o$, $V(Gx^k)$ está bem definida e $V(Gx^k) > \phi(\varepsilon)$. Mas, por (3.5) ,

$$V(x^{k+1}) \leqslant V(x^k) \leqslant \ldots \leqslant V(x^o) < \Phi(\varepsilon).$$

Isto é uma contradição e a estabilidade está provada.

Para o ítem (b), é suficiente considerar uma sequência $\{x^k\}$ em $\{x: \|x-x^*\| \leqslant \varepsilon\}$ e mostrar que $x^k \to x^*$ quando $k \to \infty$. Para isto, basta provar que se $\hat{x}$ é um ponto limite de $\{x^k\}$, então $\hat{x} = x^*$. Suponhamos que isto não aconteça; então, a função

$$r(x) = \frac{V(Gx)}{V(x)}$$

está bem definida e é contínua num aberto S_o contendo $\hat{x}$ e por (3.6), $r(\hat{x}) < 1$. Consequentemente, para α no intervalo $(r(\hat{x}), 1)$, existe $\delta > 0$ tal que $r(x) \leqslant \alpha$ se $\|x-x^*\| < \delta$. Então, para k_i suficientemente grande, a subsequência convergente para $\hat{x}$ satisfaz

$$V(x^{k_i+1}) = V(Gx^{k_i}) \leqslant \alpha V(x^{k_i}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha V(x^{k_{i-1}+1}) \leqslant \ldots$$
$$\leqslant \alpha^i V(x^o)$$

e portanto $V(x^{k_i}) \to 0$ quando $i \to \infty$. Mas então, a continuidade de V implica $v(\hat{x}) = 0$, o que é absurdo por (3.4). Logo $\hat{x} = x^*$.

Para (c), observamos que para algum x^o (3.7) garante que a sequência $\{x^k\}$ é limitada; por outro lado, se existe uma subsequência $\{x^{k_i}\}$ tal que $\|x^{k_i}-x^*\| \to \infty$ quando $i \to \infty$, mas isto contradiz o comportamento monótono decrescente de $V(x^k)$ expressado por (3.6). Segue-se, então, como na parte anterior, que $x^k \to x^*$ quando $k \to \infty$.

Exemplo:

Seja $z^{k+1} = Gz^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $z = (x,y)$, com G dada por

$$G(x,y) = \left(\frac{ay}{1+x^2}, \frac{by}{1+y^2}\right), \quad |a| < 1, \ |b| < 1 .$$

Consideremos a função V definida por $V(x,y) = x^2 + y^2$. Temos que:

$$\dot{V}(x,y) = \left(\frac{ay}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{bx}{1+y^2}\right)^2 - (x^2+y^2) ,$$

isto é,

$$\dot{V}(x,y) = \left(\frac{b^2}{(1+y^2)^2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{a^2}{(1+x^2)^2} - 1\right)y^2 \leqslant 0$$

e $\dot{V}(x,y) = 0$ se e somente se $(x,y) = (0,0)$.

Logo, pelo Teorema 4, a origem é assintoticamente estável. Mais ainda, como $V(z) \to +\infty$ quando $\|z\| \to \infty$, V e G são definidos contínuas em todo $\mathbb{R}^2$, temos que a origem é globalmente assintoticamente estável.

Existem vários resultados que expressam as recíprocas do teorema anterior. Por exemplo, se x^* é assintoticamente estável existe uma função de Lyapunov V num aberto contendo x^* tal que a condição (3.6) é válida. Tais resultados foram dados por Halanay [11], Driver [6] e Hahn [9]. Infelizmente, as provas de tais recíprocas não são proveitosas para a descoberta de funções de Lyapunov na prática. Halanay e Hahn usam, respectivamente, as construções

$$V(x) = \sup_{k>0} \Psi(\|G^k x - x^*\|) \frac{1+\alpha k}{1+k}$$

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(\|G^k x - x^*\|) ,$$

onde $\alpha > 1$ e, em qualquer caso Ψ é uma função adequada de uma variável real. Exceto nos casos triviais, estas definições em termos de sequências de iteradas não produzem meios suficientes para determinar funções de Lyapunov.

Aplicação ao caso linear

Para B uma matriz quadrada de ordem n, apliquemos o Método Direto de Lyapunov à equação linear

$$x^{k+1} = Bx^k \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Como função de Lyapunov, investiguemos a função quadrática

$$V(x) = x^T A x \ ,$$

para alguma matriz simétrica definida positiva A. Deste modo, a condição (3.6) passa a ser

$$x^T B^T A B x < x^T A x \ , \qquad x \neq 0$$

Se esta última condição for satisfeita, então o teorema 4 garante que as iteradas (1.1) convergem para zero para todo x^o, e então $\rho(B) < 1$. Assim, o teorema básico de Lyapunov para interações lineares é dado por:

Teorema 5

Seja B uma matriz quadrada de ordem n. Se existe uma matriz simétrica definida positiva de ordem nxn tal que $A-B^TAB$ é definida positiva, então $\rho(B) < 1$.

<u>Prova</u>:

Se λ é um autovalor de B e $\mu \neq 0$ o correspondente autovetor, então

$$\mu^T A\mu \quad e \quad \mu^T(A-B^TAB)\mu$$

são reais e positivos. Assim:

$$\mu^T A\mu > \mu^T B^T AB\mu = (\lambda\mu)^T \; A(\lambda\mu) = |\lambda^2|\mu^T A\mu \; .$$

Logo, $\lambda^2 < 1$.

O teorema 5 é usado para provar resultados concretos como o teorema de Ostrowski-Reich para o Método SOR. Foi provado inicialmente por Stein [33] que também deu sua recíproca, mas de uma forma independente à teoria de Lyapunov. Uma versão do teorema 5 e de sua recíproca pode ser escrita na forma:

"$\rho(B) < 1$, se e somente se, dada uma matriz simétrica definida positiva e real Q, existe uma matriz simétrica definida positiva A a qual é única solução de $A-B^TAB = Q$".

Por exemplo, tomemos

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1/4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\rho(B) < 1$. Seja $Q = I$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Assim, a única solução de $A-B^TAB = I$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 7/4 \end{bmatrix}$$

que é simétrica definida positiva.

Para a iteração geral (1.1), o teorema 5 pode ser estendido para um resultado análogo ao de N. Krasovskii para equações diferenciais (Veja Hahn [10], p. 135); para equações diferenças foi dado pela primeira vez por Kalman e Bertram [13].

Corolário

Seja G continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e x^* um ponto fixo de G. Se existe uma matriz simétrica definida positiva A tal que $A - G'(x)^T A G'(x)$ é definida positiva para todo x do R^n, então as iteradas (1.1) convergem para x^* para cada x^o.

Prova:

Consideremos $V(x) = \|x-x^*\|$ como candidata à função de Lyapunov. Claramente $V(x) > 0$ e $V(x) = 0$ se $x = x^*$ e também

$$\|Gx-x^*\| \leqslant \|x-x^*\| .$$

A condição crucial passa a ser

$$(3.8) \qquad \|Gx-x^*\| < \|x-x^*\| \quad \text{para} \quad x \neq x^* .$$

Agora

$$h^T A h > h^T G'^{T}(x) A G'(x) h \quad \text{para todo } x \text{ em } \mathbb{R}^n$$

é equivalente a

$$(3.9) \qquad \|G'(x)\|_A < 1 \quad \text{para todo } x \text{ em } \mathbb{R}^n .$$

Do teorema do valor médio ([24] p. 69), temos

$$\|Gx-Gx^*\| < \sup_{0\leq t\leq 1} \|G'(x^*+t(x-x^*))\| \; \|x-x^*\|,$$

o que mostra, usando a continuidade de G', que (3.9) implica (3.8). Portanto x* é globalmente convergente.

Observemos que uma norma, ou uma função adequada a ela, sempre é candidata à função de Lyapunov (semelhante a $V(x) = \|x-x^*\|^p$, $p > 0$). O uso de funções de Lyapunov para o qual implica a condição (3.8) não é particularmente interessante, apesar que em alguns casos, esta aproximação conduz à seleção de uma norma adequada. Infelizmente, ainda não existem aplicações do teorema 4 para processos iterativos interessantes. Hurt [12], em 1967, apresentou um teorema de convergência local para o método de Newton, mas também usando uma norma para função de Lyapunov. Assim, o potencial possível do teorema 4 não foi ainda utilizado no estudo de equações diferenças.

3.2. O DOMÍNIO DE ATRAÇÃO

Na teoria de processos iterativos existem numerosos resultados que permitem determinar a região de atração de um ponto de equilíbrio. O mais conhecido deve-se a Kantorovich para o método de Newton, o qual pode ser visto em Ortega [24]. Entretanto, dentro da Análise Numérica parece não haver resultados que forneçam propriedades gerais do domínio de atração. A proposição seguinte é bem conhecida na teoria de estabilidade.

Proposição 5

Seja G contínua. Se o ponto de equilíbrio x^* é atrativo , então

$$D = \{x:\ G^k x \to x^* \text{ quando } k \to \infty\}$$

é aberto.

Prova:

Dado $x \in D$, podemos escolher m tal que $\|G^m x - x^*\| < \frac{\delta}{2}$ onde $\delta > 0$ é tal que $\|y - x^*\| < \delta$ implica $\lim_{k\to\infty} G^k y = x^*$. Como G^m é contínua (G é contínua), existe δ_1 tal que $\|y - x\| < \delta_1$ implica

$$\|G^m x - G^m y\| < \frac{\delta}{2} .$$

Consequentemente $\|G^m y - x^*\| < \delta$ e portanto $G^k y \to x^*$ e $y \in D$.

A proposição 5 é muito usada para propósitos teóricos e pouco para determinar **D**. Em equações diferenciais existem alguns resultados que permitem delinear a região de atração, como o conhecido método de V. Zubov. Apresentamos um teorema correspondente para equações diferenças dado por Ortega [23] baseado no trabalho de O'Shea [26] .

Teorema 6

Suponhamos que a função ϕ, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, seja contínua e que satisfaz

(3.10) $\phi(x^*) = 0,\ \phi(x) > 0$ se $x \neq x^*$ e $\phi(x) \geq a$

para $\|x - x^*\| \geq b$, onde a, b são constantes positivos e x^* um ponto fixo de G. Seja W, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, contínua em x^*, tal que:

(3.11) $W(x^*) = 0\ ,\ W(x) > 0$ se $x \neq x^*$ e

(3.12) $W(Gx) - W(x) = -\phi(x)\ [1 - W(x)]$ para todo x em $\mathbb{R}^n$.

Então o domínio de atração de x^* é:

$$\mathbf{D} = \{x: W(x) < 1\}$$

Prova:

Seja x^o em $\mathbf{D}$. Por (3.12) temos que $W(x^1) \leq W(x^o)$ e portanto, x^1 está em $\mathbf{D}$. Por indução, x^k pertence a $\mathbf{D}$ e $W(x^{k+1}) \leq W(x^k)$, $k = 2, \ldots$. Assim, a sequência $\{W(x^k)\}$ converge. Também (3.12) implica que

$$\frac{1 - W(Gx)}{1 - W(x)} = 1 + \phi(x) \quad , \quad x \text{ em } \mathbf{D}$$

e portanto

$$\frac{1 - W(x^k)}{1 - W(x^o)} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 - W(x^{i+1})}{1 - W(x^i)} = \prod_{i=0}^{k-1} [\,1 + \phi(x^i)]$$

Como $\dfrac{1 - W(x^k)}{1 - W(x^o)}$ converge quando $k \to \infty$, segue-se que o lado direito da igualdade acima também converge, o que implica que $\phi(x^i) \to 0$ quando $k \to \infty$. Então, (3.10) e a continuidade de ϕ asseguram que $x^k \to x^*$ quando $k \to \infty$. Agora, suponhamos que x^o não pertença a $\mathbf{D}$. Então, por (3.12), $W(x^1) \geq W(x^o) \geq 1$ e $x^1 \notin \mathbf{D}$.

Mas se $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$, a continuidade de W requer que

$\lim_k W(x^k) = 0$, o que é uma contradição.

Exemplo: A Região de Atração para o Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson para encontrar as raizes de $G(z) = 0$ é dado pelo algorítmo

$$z^{k+1} = z^k - [G'(z^k)]^{-1} G(z^k)$$

onde G é continuamente diferenciável e a matriz jacobiana $G'(z^k)$ é assumida inversível.

Suponhamos que $G(\alpha) = 0$. Expandindo $G(\alpha+e)$ como

$$G(\alpha+e) = G'(\alpha).e + G^o(e)$$

e fazendo $z^k = \alpha+e^k$, obtemos a equação diferença

$$e^{k+1} = M_1(e^k)\,[M_2(e^k).e^k - G^o(e^k)]\ ,$$

onde

$$M_1(e) = [G'(\alpha+e)]^{-1} \quad e \quad M_2(e) = G'(\alpha+e) - G'(\alpha)$$

Seja $\|e\|$ alguma norma em $\mathbb{R}^n$. Se α é uma raiz simples de $G(z) = 0$ e se G é duas vezes continuamente diferenciável em α, então, para cada $\eta>0$, existe uma constante positiva $k(\eta)$ tal que para todo e com $\|e\| < \eta$, temos

$$\|M_1(e)\,[M_2(e)\,e - G^o(e)]\| \leqslant k(\eta)\,\|e\|^2\ .$$

Então, tomando $W(e) = \|e\|$, obtemos:

$$W(Gx) - W(x) \leqslant -1 \ (1 - k(\eta)) \ \|e\|^2$$

e $\dot{W}(x) \leqslant 0$ se $k(\eta)\ \|e\| \leqslant 1$.

Assim, com $\Phi(e) = W(e) = \|e\|$, aplicando o teorema 6, obtemos uma região de convergência

$$\mathbf{D}_{\eta_o} = \{z: \|z - \alpha\| < \eta_o\} \quad ,$$

onde $\eta_o = \min \{\eta, \dfrac{1}{k(\eta)}\}$.

Quando $\mathbf{D} = \mathbb{R}^n$, o teorema 6 fornece um resultado de convergência global. Também, uma função da forma $\Phi(x) = c\ \|x-x^*\|^p$ sempre satisfaz (3.10). Vejamos agora que, para tal Φ, a correspondente W sempre existe se x^* é exponencialmente estável.

Teorema 7

Seja Φ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ com a propriedade

(3.13) $\Phi(x) > 0$ se $x \neq x^*$; $\Phi(x^*) = 0$; $\Phi(x) \leqslant c\ \|x-x^*\|^p$,

onde c e p são constantes positivos e x^* é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável. Seja $\mathbf{D}$ o domínio de atração de x^*. Então, existe para uma função W, definida em $\mathbf{D}$ e assumindo valores reais, continua em x^*, tal que $W(x) < 1$ para todo x pertencente a $\mathbf{D}$ e $W(x)$ satisfaz (3.11) e (3.12).

Prova:

Mostremos que o produto

$$r(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [1 + \Phi(G^k x)]$$

converge para todo x em **D**. Se x está em **D**, então $\lim_{k\to\infty} G^k x = x^*$ e, como x^* é exponencialmente estável, existem $m = m(x)$ e $\eta < 1$ tais que

$$\|G^k x - x^*\| \leqslant a\eta^k \|G^m x - x^*\|, \quad k \geqslant m \,. \tag{3.14}$$

Então:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log\,[1 + \phi(G^k x)] < \infty \,,$$

o que mostra que r(x) converge. Deste modo, a função

$$W(x) = 1 - \frac{1}{r(x)}$$

está bem definida em **D** e

$$W(Gx) - W(x) = \frac{1}{r(x)} \left[1 - \frac{r(x)}{r(Gx)}\right] = -\,[1 - W(x)]\;\phi(x)\,.$$

Para todo x em **D**, $W(x) < 1$, $W(x^*) = 0$ e a continuidade de W em x^* segue-se de (3.14) com $m = 0$.

Como consequência imediata dos teoremas 6 e 7, juntamente com o corolário do teorema de Ostrowski, temos:

Corolário

Assumamos que G seja diferenciável no ponto de equilíbrio x^* e que $\rho\{G'(x^*)\} < 1$. Então, x^* é globalmente atrativo se e somente se existe uma função W de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, contínua em x^*, tal que $W(x^*) = 0$ e

(3.15) $\quad W(x) < 1; \; W(Gx) - W(x) = -\,\|x-x^*\|\,[1 - W(x)]$ para todo x em $\mathbb{R}^n$.

Os resultados desta seção estão relacionados com a teoria de Lyapunov. Por exemplo, no contexto do teorema 7, a função

$$V(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [1 + \phi(G^k x)] - 1 ,$$

definida na região de atração $\mathbf{D}$, satisfaz as condições básicas de Lyapunov (3.4) e (3.6). Além disto, se $\mathbf{D} = \mathbb{R}^n$ e $\phi(x) = c \|x-x^*\|^p$, também (3.7).

IV. O MÉTODO DE INVARIÂNCIA DE LA SALLE

O interesse no comportamento das trajetórias $G^k x$ para valores grandes de k deve-se ao fato de que o comportamento assintótico de $G^k x$ está intimamente relacionado à teoria da estabilidade. O que ocorre sobre perturbações de x e G? A teoria de Lyapunov trata das perturbações em x. Para o processo iterativo (1.1)

$$x^{k+1} = Gx^k \ , \quad k = 0, 1, \ldots$$

vimos que se $G^k x^0$ converge, seu limite é uma solução (um ponto fixo ou de equilíbrio). Agora generalizaremos este fato, fundamentando-nos nos trabalhos de La Salle.

Um ponto y do $\mathbb{R}^n$ é dito um *ponto limite* de $G^k x$, se existe uma sequência de inteiros k_i tal que $G^{k_i} x \to y$ e $k_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. O *conjunto limite* $\Omega(x)$ da trajetória $G^k x$ de x é o conjunto de todos os pontos limites de $G^k x$. Isto é,

$$\Omega(x) = \{y : \exists \{k_i\} \text{ tal que } G^{k_i} x \to y \text{ e } k_i \to \infty \text{ quando } i \to \infty\}.$$

Informações relativas a $\Omega(x)$ permitem-nos obter dados sobre o comportamento assintótico de $G^k x$. Funções de Lyapunov fornecem dados sobre $\Omega(x)$, e isto é feito explorando, em particular, a propriedade de invariância de conjuntos limites através do chamado Princípio de Invariância.

A partir deste ponto, consideraremos G contínua e utilizaremos a seguinte definição de função de Lyapunov dada por La Salle:

Para A um conjunto qualquer do $\mathbb{R}^n$, a função V, definida em $\mathbb{R}^n$ tomando valores reais, é dita uma função de Lyapunov de (1.1) em A se:

(a) V é contínua em A;

(b) $\dot{V}(x) = V(Gx) - V(x) \leqslant 0$ para todo x em A.

Nesta definição, a exigência de positividade de V é omitida. Na seção 4.2, veremos o teorema 8 que expressa uma condição de suficiência para $V(x) > 0$, mas que isto não precisa ser necessariamente verificado.

4.1. O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA

Utilizaremos doravante o Método Direto de Lyapunov para explorar propriedades de conjuntos limites. Primeiramente, vejamos que:

Proposição 6

Todo conjunto $\Omega(x)$ é fechado e positivamente invariante.

Prova:

Consideremos a sequência $\{y_n\}$ em $\Omega(x)$ com $y_n \to y$. Se mostrarmos que y pertence a $\Omega(x)$, então $\Omega(x)$ é fechado. Como y_n pertence a $\Omega(x)$, existe uma sequência de inteiros $\{n_i\}$ tal que $G^{n_i}x \to y_n$ e $n_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Logo, existe uma subsequência $\{n_{i_k}\}$, $n_{i_k} > n$, tal que

$$\| G^{n_i}x - y_n \| < \frac{1}{n} .$$

Assim, considerando a sequência $\{ n_i \}$ com $n_i = n_{i_k}$:

$$\| G^{n_i}x - y \| \leqslant \|G^{n_i}x - y_n \| + \|y_n - y\| \leqslant \frac{1}{n} + \|y_n - y\| .$$

Como $\frac{1}{n} \to 0$ e $y_n \to y$, concluimos que $G^{n_i}y \to y$ e portanto y pertence a $\Omega(x)$.

Agora, se y pertence a $\Omega(x)$, existe uma sequência de inteiros $\{n_i\}$ tal que $G^{n_i}x \to y$ e $n_i \to \infty$ se $i \to \infty$. Pela continuidade de G, temos que $G(G^{n_i}x) = G^{n_i+1} x \to Gy$ e Gy pertence a $\Omega(x)$. Portanto, $G(\Omega(x))$ está contido em $\Omega(x)$ e $\Omega(x)$ é positivamente invariante.

Não podemos esperar, como no caso de funções contínuas, que $\Omega(x)$ seja conexo. Entretanto, relativo à invariância, ele possui uma propriedade de conexidade.

Um conjunto H, fechado e invariante, é chamado *invariantemente conexo* se H não pode ser expresso como uma união de dois conjuntos invariantes, não vazios e disjuntos.

Estamos mais interessados no comportamento de trajetórias limitadas. Uma trajetória $G^k x$ limitada para k = 0, 1 ..., é muitas vezes dita *positivamente estável no sentido de Lagrange.*

Proposição 7

Se $G^k x$ é limitada para todo k = 0, 1, ..., então $\Omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante, invariantemente conexo e é o menor conjunto fechado que $G^k x$ aproxima quando $k \to \infty$ (isto é, $G^k x \to \Omega(x)$).

Prova:

$G^k x$ limitada implica que $\Omega(x)$ é não vazio e limitado. Pela proposição 6, segue-se que $\Omega(x)$ é compacto.

Se y pertence a $\Omega(x)$, existe uma sequência de inteiros $\{k_i\}$ tal que $k_i \to \infty$ e $G^{k_i}x \to y$ se $i \to \infty$. Como $G^k x$ é limitada, podemos assumir que $G^{k_i - 1}x$ também converge (selecionando uma subsequência se necessário). Seja $G^{k_i - 1}x \to z$. Então z pertence $\Omega(x)$. Como $G(G^{k_i - 1}x) = G^{k_i}x \to Gz = y$, obtemos que $\Omega(x)$ está contido em $G(\Omega(x))$, e portanto $\Omega(x)$ é negativamente invariante. Pela proposição 6, temos que $\Omega(x)$ é invariante.

Mostremos agora que $G^k x \to \Omega(x)$ quando $G^k x$ é limitada. Desde que a distância de $G^k x$ a $\Omega(x)$, $d\,(G^k x, \Omega(x))$, é limitada concluimos que se $G^k x$ não aproxima $\Omega(x)$, existe uma sequência $\{k_i\}$ tal que $k_i \to \infty$, $G^{k_i}x$ converge e $d\,(G^{k_i}x, \Omega(x))$ não tende para zero quando $i \to \infty$. Mas isto contradiz o fato de que o limite de $G^{k_i}x$ está em $\Omega(x)$. Logo $G^k x \to \Omega(x)$ quando $k \to \infty$. Agora, se $G^k x \to E$ quando $k \to \infty$ e E é fechado, então claramente $\Omega(x)$ está contido em E. Assim, $\Omega(x)$ é o menor conjunto fechado que $G^k x$ aproxima, quando $x \to \infty$.

Resta mostrar que $\Omega(x)$ é invariantemente conexo. Assumamos que não o seja, isto é, $\Omega(x) = \Omega_1 \cup \Omega_2$, com Ω_1 e Ω_2 conjuntos disjuntos não vazios, fechados e invariantes. Como $\Omega(x)$ é compacto, também o são Ω_1 e Ω_2. Então, existem conjuntos abertos U_1 e U_2 tais que Ω_1 está contido em U_1 e Ω_2 está contido em U_2. Também, como G é contínua, e portanto uniformemente contínua em Ω_1, existe um conjunto aberto V_1 tal que Ω_1 está contido em V_1 e $G(\Omega_1)$ está contida em U_1. Visto que $\Omega(x)$ é o menor conjunto fechado que $G^k x$ aproxima, necessariamente $G^k x$ intersecciona V_1 e U_2

num certo tempo. Mas isto implica a existência de uma subsequência convergente $G^{k_i}x$ que não está em ambos, V_1 e U_2. Como $\Omega(x)$ está contida em $V_1 \cup U_2$ isto é uma contradição. Portanto, $\Omega(x)$ é invariantemente conexo.

Sejam A um conjunto qualquer do $\mathbb{R}^n$ e $\bar{A}$ o fecho de A, incluindo ∞ se A é ilimitado. Para uma função de Lyapunov de (1.1) em A, definimos o conjunto E assim:

$$E = \{x: \dot{V}(x) = 0, \ x \text{ em } \bar{A}\} .$$

Usaremos M para denotar o maior conjunto invariante contido em E e

$$V^{-1}(c) = \{x: V(x) = c, \ x \text{ em } \mathbb{R}^n\}$$

Teorema-Princípio da Invariância

Sejam

(a) V uma função de Lyapunov de (1.1) em A,

(b) x^k uma solução de (1.1), limitada, contida em A, para todo $k = 0, 1, \ldots$

Então, existe um número real c tal que

$$x^k \to M \cap V^{-1}(c) \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Prova:

Seja x^o tal que $x^k = G^k x^o$. Decorre das hipóteses que $V(x^k)$ é não crescente a respeito de k e limitada inferiormente. Consequentemente, existe c em $\mathbb{R}$ tal que $V(x^k) \to c$ quando $x \to \infty$. Agora, se y está em $\Omega(x^o)$, existe uma sequência de inteiros $\{ k_i \}$

tal que $k_i \to \infty$ e $x^{k_i} \to y$ quando $i \to \infty$. Como V é contínua, temos que $V(x^{k_i}) \to V(y) = c$ e $\Omega(x^o)$ está contido em $V^{-1}(c)$. Como $\Omega(x^o)$ é invariante, $V(Gy) = c$ e $\dot{V}(y) = 0$. Consequentemente $\Omega(x^o)$ está contido em E e portanto em M. Pela proposição 7, $x^k \to \Omega(x^o)$. Logo, $x^k \to M \cap V^{-1}(c)$.

No exemplo que veremos a seguir, a fim de ilustrar de que maneira o Princípio de Invariância pode ser aplicado, encontraremos trajetórias periódicas , as quais definimos assim:

A trajetória $G^k x$ é dita *periódica* ou *cíclica* se para algum $n > 0$, $G^n x = x$. O menor n tal que $G^n x = x$ é chamado *período* da trajetória ou *ordem* do *ciclo*. Se $n = 1$, x é um ponto de equilíbrio.

Utilizaremos o fato de que um conjunto invariante H com um número finito de elementos é invariantemente conexo se e somente se H representa uma trajetória periódica. Isto pode ser visto , por exemplo, em La Salle [17].

Exemplo

Retomemos a equação $z^{k+1} = Gz^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $z = (x,y)$,

$$G(x,y) = \left(\frac{ay}{1+x^2} , \frac{bx}{1+y^2} \right) .$$

Como vimos no capítulo 3, tomando a função

$V(x,y) = x^2 + y^2$, temos

$$\dot{V}(x,y) = \left(\frac{b^2}{(1+y^2)^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{a^2}{(1+x^2)^2} - 1 \right) y^2$$

e para $a^2 < 1$, $b^2 < 1$, a origem é globalmente assintoticamente estável.

Analisemos, sob o ponto de vista de conjuntos invariantes os seguintes casos:

a) $a^2 < 1$ e $b^2 < 1$.

Como $\dot{V}(x,y) \leq (b^2 - 1)x^2 + (a^2-1)y^2$, V é uma função de Lyapunov para G em $\mathbb{R}^2$. Aqui, $E = M = \{(0,0)\}$ e como toda solução é limitada, o Princípio da Invariância mostra que as soluções se aproximam da origem quando $k \to \infty$. Este é o caso clássico de Lyapunov: $V(x)$ e $-\dot{V}(x)$ são definidas positivas.

b) $a^2 \leq 1$, $b^2 \leq 1$ e $a^2+b^2 < 2$.

Podemos assumir $a^2 < 1$ e $b^2 = 1$. Então, $\dot{V}(x,y) \leq (a^2-1)y^2$ e V é uma função de Lyapunov. Temos que $E = \{(x,y): y = 0\}$ e como $G(x,0) = (0, bx)$, $M = \{(0,0)\}$. Logo, todas as soluções aproximam-se da origem quando $k \to \infty$.

c) $a^2 = b^2 = 1$.

Ainda, todas as soluções são limitadas. Temos que $E = M$ é a união dos eixos x e y, isto é, $E = M = \{(x,y): x = 0 \text{ ou } y = 0\}$. Ainda, $\dot{V}(x,y) \leq 0$. Pelo Princípio da Invariância, cada solução aproxima-se do conjunto $\{(c,o), (o,c), (-c,o), (o,-c)\}$ para algum c (a intersecção de E com o círculo $x^2+y^2 = c^2$). Existem dois subcasos:

c1) $ab = 1$.

Então, $G(c,o) = (o,bc)$, $G^2(c,o) = G(abc,o) = (c,o)$. Como conjuntos limites são invariantemente conexos, toda solução aproxima-se de uma destas trajetórias periódicas: a origem, ou uma trajetória periódica de período 2.

c2) $ab = -1$.

Temos $G(c,o) = (o,bc)$, $G^2(c,o) = (abc,o) = (-c,o)$, $G^3(c,o) = (o,-bc)$, $G^4(c,o) = (-abc,o) = (c,o)$. Se $c \neq o$, estas trajetórias são periódicas de período 4. Como em c1, toda solução aproxima-se de uma destas trajetórias ou da origem.

d) $a^2 > 1$ e $b^2 > 1$.

Seja $B_\delta = \{(x,y): x^2 + y^2 < \delta^2\}$. Para $x \in B_\delta$ e δ suficientemente pequeno

$$\dot{V}(x,y) \geqslant \left(\frac{b^2}{1+\delta^2} - 1\right) x^2 + \left(\frac{a^2}{1+\delta^2} - 1\right) y^2 \geqslant 0 ,$$

e $-V$ é uma função de Lyapunov para o sistema dado em B_δ. Temos que $E = M = \{(o,o)\}$. Nenhuma solução, exceto a nula, iniciando num ponto em B_δ pode aproximar-se da origem sem sair de B_δ (sua distância da origem é crescente) e $G(x,y) = (o,o)$ implica $x=y=0$. Portanto, toda solução necessariamente abandona B_δ pelo Princípio da Invariância (instabilidade). E, desde que nenhuma solução pode saltar para origem num tempo finito, exceto a nula , não existe solução não trivial tendendo para zero quando $k \to \infty$.

4.2. O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA EM ESTABILIDADE

Para um conjunto H contido em $\mathbb{R}^n$, definimos $\hat{H}$ assim: $x \in \hat{H}$ se existem sequências $\{x_i\}$ em $\mathbb{R}^n$ e $\{k_i\}$ em $\mathbb{N}$ tais que $x_i \to y$, $y \in \overline{H}$, e $G^{k_i}(x_i) \to z$. Topologicamente, $\hat{H}$ é chamado a *prolongação* de H. O conjunto de todos os z tais que $k_i \to \infty$ quando $i \to \infty$ é chamado *conjunto limite prolongado de H*. Notamos que H está contido em $\hat{H}$.

Proposição 8

(a) Seja H um conjunto positivamente invariante compacto. Então H é estável se e somente se $\hat{H} = H$.

(b) Seja H um conjunto invariante compacto contido num conjunto A positivamente invariante, limitado e aberto. Então $\hat{H}$ é invariante.

Prova:

(a) Se existe z em $\hat{H}$ tal que z não está em H, então H não é estável. Para a recíproca, suponhamos H não estável. Então para alguma bola aberta U de H, a qual pode ser assumida limitada , existe uma sequência $\{x^i\}$ em U tal que $x^i \to y$, y em H, quando $i \to \infty$ e alguma trajetória $G^k x^i$ eventualmente abandona U. Seja k_i o menor inteiro tal que $G^{k_i} x^i$ não está em U. Agora, $G^{k_i} x^i$ está em G(U) e é uma sequência limitada. Como ela contém uma subsequência convergente cujo limite não está em U, H não estável implica que $\hat{H} \neq H$, o que é uma contradição.

(b) Seja z em $\hat{H}$. Então, existem sequências $\{x^i\}$em A $\{k_i\}$em $\mathbb{N}$ tais que $x^i \to y$, y em H, e $G^{k_i} x^i \to z$ quando $i \to \infty$. Como $G^{k_i+1} \to Gz$ (G é contínua), vemos que Gz está em $\hat{H}$ e então $G(\hat{H})$ está contida em $\hat{H}$. Agora, se $\{k_i\}$ é limitada, existe um n em $\mathbb{N}$ com $G^n x^i \to z$. Mas então, $z = G^n y$ está em H, pois H é invariante, e consequentemente, existe W em H, H contido em $\hat{H}$, com Gw = z. Se $\{k_i\}$ não é limitada, podemos assumir que $k_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Agora, $G^{k_i-1} x^i$ está em A, logo é limitada e podemos assumir que $G^{k_i-1} x^i \to w$. Assim, w pertence a $\hat{H}$ com Tw = z e $\hat{H}$ está contido em $G(\hat{H})$. Segue-se que $\hat{H}$ é invariante.

Para um conjunto H em R^n, a região de atração do processo iterativo (1.1) em H é dada por:

$$D(H) = \{x: G^k x \to H \text{ quando } k \to \infty\}$$

onde $G^k x \to H$ significa que a distância de $G^k x$ até H converge para zero com $k \to \infty$.

Teorema 8

Seja A um conjunto positivamente invariante, aberto e limitado, se:

(a) V é uma função de Lyapunov de (1.1) em A e M está contido em A, então M é um atrator e $\bar{A}$ está contido em $D(M)$.

(b) além disto, V é constante em M, então M é assintoticamente, estável (globalmente assintoticamente estável relativo a A).

Prova:

(a) Como V e G são contínuas, $\dot{V}$ é contínua e E é fechado. Como M é o maior conjunto invariante em E, M é fechado. Pelo Princípio da Invariância concluímos que M é um atrator. Também, a continuidade de $\dot{V}$ implica que V é uma função de Lyapunov em $\bar{A}$, o qual é positivamente invariante. Novamente pelo Princípio da Invariância temos que A está contido em $D(M)$.

(b) Para mostrar que M é estável quando $V(x) = c$, notemos primeiramente que $\hat{M}$ está contido em $\bar{A}$, M é o maior conjunto invariante em E. Então, se mostrarmos que $\hat{M}$ está contido em E, segue-se que $\hat{M} = M$ e pela proposição 8, M é estável. Seja z em $\hat{M}$. Então $G^k z \to M$ e $V(z) \geq c$. Existem sequências $\{x^i\}$ e $\{k_i\}$ tais que $\{x^i\} \to y$, y em M, e $G^{k_i} x^i \to z$ quando $i \to \infty$. Como $V(x^i) \geq V(G^k x^i)$, vemos que $c \geq V(z)$. Logo, $V(z) = c$ para cada z em $\hat{M}$. Agora $\hat{M}$ é invariante e portanto $\hat{M}$ está contido em E.

Se M é um conjunto invariantemente conexo com um número finito de elementos ou um conjunto unitário, automaticamente $V(x) = c$. O Teorema 8 mostra que podemos obter informações a respeito da extensão da estabilidade assintotica, uma vez que a região D(M) é maior do que $\bar{A}$. Por outro lado, nas aplicações em que M é o maior conjunto positivamente invariante contido em E, $V(x)-c$ é positiva definida relativa a M e então fica estabelecida uma condição suficiente para que uma função de Lyapunov seja definida positiva. Isto é, se as condições (a) e (b) do teorema foram satisfeitas e M for o maior conjunto invariante em E, então $V(x) > c$ em A-M, onde c é o valor de V em M ($V(x)-c$ é definida positiva relativa a M).

Um resultado similar ao teorema 4, pode ser enunciado assim:

"Sejam H em $\mathbb{R}^n$ compacto e A em H aberto. Se

(a) $V(x) \leq 0$ para x em H e $V(x) > 0$ para x em A-H e

(b) V é uma função de Lyapunov de (1.1) em A, então H é estável.

Se, além disto

(c) E está contido em H, então H é assintoticamente estável".

A condição (a) mostra que V é definida positiva relativa a H, e se V for constante em M, esta condição pode ser suprimida. A condição (c) pode ser substituída por M em H.

Como consequência imediata do teorema 6, obtendo condições de estabilidade assintótica global, temos:

Corolário

Se

(a) V é uma função de Lyapunov de (1.1) em $\mathbb{R}^n$,

(b) $A_c = \{x: V(x) < c\}$ é limitado para cada c,

(c) M é compacto,

então M é globalmente atrativo.

Se, em adição:

(d) V é constante em M,

então M é globalmente assintoticamente estável.

A condição (b) pode ser substituída por $V(x) \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$.

Uma modificação útil do Teorema 6 é:

"Seja A um conjunto aberto limitado positivamente invariante com respeito a (1.1) e suponhamos que $G(0) = 0$. Seja V uma função de Lyapunov de (1.1) em A, tal que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ em A. Sejam

$$E_o = \{x: x \in \partial A \ \text{ e } \ \dot{V}(x) = 0\}$$

e M_o o maior conjunto invariante em E_o. Então, todas as soluções iniciando em A aproximam-se de $M = M_o \cup \{0\}$. E

(a) Se $M = \{0\}$, então a origem é globalmente assintoticamente estável relativa a A.

(b) Se 0 está em A, então cada solução iniciando em A aproxima-se da origem ou de M_o quando $k \to \infty$. Se nenhuma solução tende para M_o quando $k \to \infty$, então a origem é globalmente assintoticamente estável relativa a A.

Exemplo: Um Modelo Discreto em Epidemias

Consideremos duas populações (heterossexuais) distintas , onde os membros infectados de uma população podem transmitir uma doença para uma parte suscetível da outra população. Seja x_i a parte da população infectada P_i. Então, $1-x_i$ é a fração suscetível. Um simples e razoável modelo discreto é:

$$x_1^{k+1} = a_1 x_2^k (1 - x_1^k) + (1 - b_1) x_1^k$$

$$x_2^{k+2} = a_2 x_1^k (1 - x_2^k) + (1 - b_2) x_2^k$$

isto é,

$$x' = B(x)x$$

com $0 < a_i < 1$, $0 < b_i < 1$ e $B(x) = I + B_o + B_1(x)$, onde

$$B_o = \begin{bmatrix} -b_1 & a_1 \\ a_2 & -b_2 \end{bmatrix} \qquad B_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 x \\ -a_2 x & 0 \end{bmatrix}$$

Temos de $B(x) \geq 0$, $I + B_o \geq 0$ e $B_1(x) \leq 0$ para todo x em $\bar{A}$ onde $A = \{x: 0 < x_i < 1\}$. Também A e $\bar{A}$ são positivamente invariantes ($G(\bar{A}-\{0\})$ está contido em A).

Casos a considerar: $\rho(I + B_o) \leq 1$ e $\rho(I + B_o) > 1$.

(a) $\rho(I + B_o) < 1$ corresponde a det $B_o = b_1 b_2 - a_1 a_2 \leq 0$.

Como $I + B_o \geq 0$, temos que $B_o \geq -I$. Logo, existe $c > 0$ tal que $c^T B_o \leq 0$. Seja $V(x) = c^T x$. Então:

$$\dot{V}(x) = c^T[B(x)x - c^T x] = c^T[I + B_o + B_1(x) - I]\, x$$

$$= c^T[B_o + A_1(x)]x \leq 0 \text{ para todo x em } \bar{A} \text{ e } \dot{V}(x) < 0 \text{ pa-}$$

ra todo x em A.

Observamos que pode-se tomar $c^T = (b_2, a_1)$ e então

$\dot{V}(x) = (a_1a_2 - b_1b_2)x_1 - a_1(a_2 + b_2)x_1x_2.$

Como $G(\bar{A} - \{0\})$ está em A, $M = \{0\}$. Então, a origem é globalmente assintoticamente estável relativo a A, pelo teorema 8.

Se ocorrer $\det B_o = 0$, E_o é a intersecção do eixo das coordenadas com $\bar{A}$ e novamente $M = \{0\}$ implica o resultado acima.

(b) Se $\rho(I + B_o) > 1$, a origem é instável pelo Teorema de Perron para o caso de instabilidade.

Notamos que em A, $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ são positivas próximas à origem e então, nenhuma solução iniciando em $\bar{A} - \{0\}$ pode tender para a origem quando $k \to \infty$. As soluções, obrigatoriamente, aproximam-se de um conjunto invariante contido em A e existe um único ponto de equilíbrio em A, que é:

$$x_1^o = \frac{1-\gamma_1\gamma_2}{1+\gamma_1} \quad \text{e} \quad x_2^o = \frac{1-\gamma_1\gamma_2}{1+\gamma_2} \quad , \quad \gamma_i = \frac{a_i}{b_i} \quad .$$

$\rho(I + B_o) > 1$ corresponde a $\gamma_1\gamma_2 < 1$, isto é, $b_1b_2 - a_1a_2 > 0$.

Fazendo a mudança de coordenadas $\mu = x-x^o$: $\mu' = A(x)\mu$ onde:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1-a_1\delta & a_1(1-x_1) \\ a_2(1-x_2) & 1-a_2\delta^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \delta = \frac{1+\gamma_1}{1+\gamma_2}$$

Notamos que

$$(a_2, a_1\delta) \begin{bmatrix} -a_1\delta & a_1 \\ a_2 & -a_2\delta^{-1} \end{bmatrix} = 0$$

e então tomamos

$$V(\mu) = a_2\|\mu_1\| + a_1\ \delta\|\mu_2\| \quad .$$

Assim, se $1 - a_1\delta \geq 0$ e $1 - a_2\delta^{-1} \geq 0$,

$$\dot{V}(\mu) \leq -a_1 a_2\ (x_1\|\mu_2\| + \delta x_2\|\mu_1\|) \leq 0 \quad \text{para todo } x \text{ em } A.$$

No eixo das coordenadas x, temos $M_o = \{0\}$ e desde que nenhuma solução iniciando em $\bar{A} - \{0\}$ pode aproximar-se de M_o, $\mu=0$ e portanto, $x^o = (x_1^o, x_2^o)$ é globalmente assintoticamente estável relativo a $\bar{A} - \{0\}$.

Em sistemas dinâmicos conservativos, sabemos que se um equilíbrio não é mínimo da Energia Potencial, então ele não é estável. O teorema de Cetaev em equações diferenciais mostra isto. Vejamos o análogo para equações diferenças.

Teorema de Instabilidade

Sejam U em $\mathbb{R}^n$ aberto e y um ponto de equilíbrio em ∂U. Seja N um aberto contendo y. Assumamos que:

(a) V é uma função de Lyapunov de (1.1) em $A = U \cap N$.

(b) $M \cap A$ é vazio.

(c) $V(x) = c$ em $(\partial U) \cap N$.

(d) $V(x) < c$ para x em A.

Então, se G(A) está contido em U, y é instável. Se U é positivamente invariante, então y é fortemente instável.

<u>Prova</u>:

Sejam N_o limitado contido em N, tal que y está em N_o e

$A_o = U \cap N_o$. Pelo Princípio da Invariância, alguma solução iniciando em A_o deve, eventualmente, abandonar A_o pois não pode se aproximar de (∂U) N. Visto que sua primeira saída de A_o é ainda U, ela deve abandonar N_o. Como y está na fronteira de A_o, y não é estável. Agora, se U é positivamente invariante, ele não pode ser um atrator, pois nenhuma solução iniciando em U pode aproximar-se de y quando $n \to \infty$.

Exemplo

Consideremos $z^{k+1} = Gz^k$, $k = 0,1, \ldots$, $z = (x,y)$, onde $G(x,y) = (g_1(x,y)\ ,\ g_2(x,y))$ com $g_1(0,0) = g_2(0,0) = (0,0)$.

Seja $V(x,y) = -xy$. Então

$\mathring{V}(x,y) = xy - g_1(x,y)\ g_2(x,y)$

Suponhamos que:

(a) $g_1(x,y)\ g_2(x,y) > 0$ para $xy > 0$, e

(b) $g_1(x,y)\ g_2(x,y) > xy$ para $xy > 0$, e (x,y) próximo à origem.

Então, com $A = \{(x,y): xy > 0\}$, as condições de teorema de instabilidade são satisfeitas e a origem é fortemente instável.

O seguinte corolário contém resultados análogos aos dois primeiros teoremas de instabilidade de Lyapunov.

Corolário

Sejam V, definida em $\mathbb{R}^n$ e assumindo valores reais, e $G(0)= 0$. Arbitrariamente próximos à origem, existem pontos onde $V(x) > 0$ e $V(0) = 0$. Num aberto N contendo a origem,

$$\dot{V}(x) = \beta V(x) + W(x)$$

onde, ou:

(a) $W(x)$ é não negativa e $\beta>0$, ou

(b) $\beta\geq 0$ e $W(x)$ é definida positiva.

Então a origem é instável.

Prova:

Tomando $U = \{x: V(x) > 0\}$, temos que $-V$ é uma função de Lyapunov de (1.1) em $A = N \cap U$. Como, para todo x em A, $G(x)$ está em U, a instabilidade segue-se pelo último teorema.

V. COMENTÁRIOS SOBRE GENERALIZAÇÕES E EXTENSÕES DOS MÉTODOS DE ESTABILIDADE

5.1. FUNÇÕES DE LYAPUNOV VETORIAIS

A generalização usual de funções de Lyapunov escalares para funções de Lyapunov vetoriais é direta. Desigualdades escalares são repassadas para desigualdades vetoriais e não existe algo essencialmente novo.

Seja A um conjunto qualquer em $\mathbb{R}^n$. Seja v uma função definida em $\mathbb{R}^n$ assumindo valores em $\mathbb{R}^q$. v é dita uma *função de Lyapunov vetorial* de (1.1) *em* A se:

(a) v é contínua em $\mathbb{R}^n$ e

(b) $\dot{v}(x) = v(Gx) - v(x) \leqslant 0$ para todo x em A.

Dizer que v é uma função de Lyapunov de (1.1) em A significa que cada componente v_i é uma função de Lyapunov escalar de (1.1) em A, com associados E_i e M_i, onde:

$$E = \{x : \dot{v}(x) = 0, \ x \text{ em } \overline{A}\},$$

M é o maior conjunto invariante contido em E e

$$v^{-1}(c) = \{x \text{ em } \mathbb{R}^n : v^{-1}(x) = c, \ c \text{ em } \mathbb{R}^q\}$$

Assim,

$$V = \sum_{i=1}^{q} v_i$$

é uma função de Lyapunov escalar de (1.1) em A e os conjuntos E e M associados a V são os mesmos conjuntos associados à função de Lyapunov vetorial v.

Como para o caso escalar, temos:

Princípio da Invariância (1)

Seja v uma função de Lyapunov vetorial de (1.1) em A. Se x^k é uma solução limitada de (1.1) em A, para todo k = 0, 1, ... , então existe um c em $\mathbb{R}^q$ tal que $x^k \to M \cap v^{-1}(c)$ quando $k \to \infty$.

Aplicação ao caso linear

Consideremos a equação

(5.1.1) $$x^{k+1} = Bx^k , \quad k = 0, 1, \ldots ,$$

onde B, matriz quadrada de ordem n, é tomada não negativa. Assumamos que exista $(I-B)^{-1}$ e que $(I-B)^{-1}$ seja não negativa. Seja

$$v(x) = (I-B)^{-1}x$$

Então $\dot{v}(x) = -x$ e portanto v(x) é uma função de Lyapunov de (5.1.1) em $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

Agora, $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ é positivamente invariante e cada solução iniciando em $\mathbb{R}^n_+$ é limitada, pois para cada c em $\mathbb{R}^q$, $A_c = \{x : v(x) \leqslant c,\ x \geqslant 0\}$ é limitado. Temos que M é a origem. Então, pelo Princípio da Invariância, cada solução de (5.1.1) converge para a origem quando $k \to \infty$ e a origem é globalmente assintoticamente estável.

Generalizando a idéia de Arrow, Block e Hurwicz [1] para a construção de uma função de Lyapunov, a próxima definição de função de Lyapunov vetorial não requer que qualquer uma de suas componentes seja uma função de Lyapunov escalar.

Para w, definida em $\mathbb{R}^n$ e assumindo valores em $\mathbb{R}^q$, e definimos

$$W(x) = \max_i \{w_i(x)\}, \quad e$$

$$\overset{o}{w}(x) = w(Gx) - W(x)\mu$$

onde $\mu_i = 1$, $i = 1, \ldots, q$. $(\overset{o}{w}_i(x) = w_i(Gx) - W(x))$.

Dizemos que w é uma função de Lyapunov vetorial de (1.1) em A se:

(a) w é contínua em $\mathbb{R}^n$ e

(b) $\overset{o}{w}(x) \leq 0$ para todo x em A.

Definimos:

$$E = \{x: w(x) \geq 0, \quad x \text{ em } \bar{A}\}$$

e M o maior conjunto invariante em E.

Pode-se notar que se x está em $\bar{A}$, então x está em E, e para algum $i = 1, \ldots, q$, $\overset{o}{w}_i(x) = 0$.

Também:

$$\overset{o}{w}(x) = \dot{w}(x) + w(x) - W(x)\mu$$

Portanto, $\overset{o}{w}(x) \leq \dot{w}(x)$ e requerer $\overset{o}{w}(x) \leq 0$ não é tão estrito quanto requerer $\dot{w}(x) \leq 0$. De fato, w pode ser uma função de Lyapunov vetorial em A neste sentido e ainda pode ser que nenhuma componente de w(x) seja uma função de Lyapunov escalar em A. Entretanto,

$$\overset{\bullet}{W}(x) = \max_{i} \{\overset{o}{w}_i(x)\} \quad ,$$

de modo que, se w é uma função de Lyapunov vetorial em A, W é uma função de Lyapunov escalar em A.

Desta forma, temos:

Princípio da Invariância (2)

Se w é uma função de Lyapunov vetorial de (1.1) em A e x^k é uma solução limitada de (1.1) em A para todo k = 0,1, ..., então, para algum c, $x^k \to M \cap W^{-1}(c)$ quando $k \to \infty$.

Retomando a equação (5.1.1), assumimos que existe c em $\mathbb{R}^n$, c > 0, tal que $\|B\|\, c < c$. Seja

$$w_i(x) = \frac{|x_i|}{c_i}$$

Então:

$$W(x) = \max_{i} \{ \frac{|x_i|}{c_i} \}$$

Portanto:

$$w_i(Bx) = \frac{\|(Bx)_i\|}{c_i} \leqslant \frac{1}{c_i} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| c_j \frac{|x_j|}{c_j}$$

$$\leqslant W(x) \frac{(\|B\|\, c)_i}{c_i} < W(x) \quad \text{para } x \neq 0 \ .$$

Consequentemente, $\overset{o}{w}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e w(x) é uma função de Lyapunov vetorial de (5.1.1) em $\mathbb{R}^n$. M é a origem. Como $W(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$, toda solução é limitada e então, aproxima-se da origem quando $k \to \infty$.

Assim, a existência de $c > 0$, c em $\mathbb{R}^n$, tal que $\|Bc\| < c$ é uma condição suficiente para a estabilidade assintótica da origem.

5.2. ESTABILIDADE SOBRE PERTURBAÇÕES E ESTABILIDADE PRÁTICA

Retomemos a equação (1.1)

$$x^{k+1} = Gx^k \quad , \; k = 0, 1, \ldots$$

O que ocorre com a estabilidade de (1.1) sobre perturbações em G?

A partir de 1930, com o estudo das recíprocas dos teoremas de Lyapunov, passaram a ter algumas respostas as questões de estabilidade sobre perturbações na função de equações diferenciais. No caso das equações diferenças, esta teoria foi introduzida em 1963 por Halanay [11] , fornecendo ferramentas teóricas importantes. As considerações aqui apresentadas baseiam-se em La Salle [18], Ortega [23] e Hurt [12].

Consideremos o sistema perturbado

$$(5.1) \qquad \hat{x}^{k+1} = G\hat{x}^k + E\hat{x}^k \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

onde a perturbação E não é conhecida a priori, porém não muito grande. Certamente, estabilidade simples de (1.1) é muito frágil para implicar o mesmo tipo de comportamento em (5.1), mas pode-se esperar alguma relação se (1.1) for assintoticamente estável. Para estabelecer esta relação é necessário assumir, no mínimo, que G seja Lipschitz contínua próxima a um ponto de equilíbrio.

Para x^* um ponto de equilíbrio de (1.1), diremos que x^* é *totalmente estável sobre perturbações* se dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_i(\varepsilon) > 0$, $i = 1, 2, 3$, tais que para uma função E, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, a qual satisfaz

$$\|E\,x\| \leqslant \delta_1(\varepsilon) \quad \text{para } \|x-x^*\| \leqslant \delta_2(\varepsilon) \ ,$$

a solução $\hat{x}^k$ de (5.1) satisfaz

$$\|\hat{x}^k - x^*\| \leqslant \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots \text{ quando } \|\hat{x}^0 - x^*\| \leqslant \delta_3(\varepsilon) \ .$$

Se existem δ_0, r_0 e $k(\varepsilon)$, positivos, tais que

$$\|Ex\| \leqslant \delta_1(\varepsilon) \text{ se } \|x - x^*\| \leqslant \delta_0 \text{ e}$$

$$\|\hat{x}^k - x^*\| \leqslant \varepsilon \text{ para todo } k \geqslant k(\varepsilon) \text{ se } \|\hat{x}^0 - x^*\| \leqslant r_0 \ ,$$ diremos que x^* é *fortemente estável sobre perturbações.*

Se as condições do Teorema de Ostrowski forem satisfeitas, isto é, se G for diferenciável no ponto de equilíbrio x^* de (1.1), temos que x^* é totalmente estável sobre perturbações.

De uma forma mais ampla, Halanay [11] e Driver [6] mostraram que estabilidade assintótica da equação (1.1) implica em estabilidade total sobre perturbações. Mais ainda, conforme La Salle, para G Lipschitz contínua, a estabilidade assintótica de (1.1), garante estabilidade forte sobre perturbações.

A definição de estabilidade total possui uma aplicação imediata para o problema de arredondamento do erro na iteração (1.1) e também para o truncamento do erro, se G é definida, por exemplo, por uma série infinita. Em ambos os casos, é produzida na prática uma sequência $\{\hat{x}^k\}$ que satisfaz (5.1), onde $E\hat{x}^k$ é o erro produzido na valoação de $G\hat{x}^k$.

Uma questão importante, mas a qual parece não ter sido considerada na teoria de equações diferenças, está no comportamento limitado da sequência $\{\hat{x}^k\}$. Primeiramente notemos que, se G é contínua em x^*, a sequência $\hat{x}^k \to x^*$ somente se $E\hat{x}^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Se $\{E\hat{x}^k\}$ não converge para zero, o caso especial do teorema de Urabe [34] é proveitoso.

Teorema

Suponhamos que existem $\alpha < 1$ e $\delta > 0$ tais que

$\|Gx - x^*\| \leqslant \alpha \|x - x^*\|$ se $\|x - x^*\| \leqslant \delta$ e

$\|Ex\| \leqslant \delta_1$ para $\|x - x^*\| \leqslant \delta$, $\delta_1 = (1-\alpha)\delta$.

Então:

$$\|\hat{x}^k - x^*\| \leqslant \alpha^k \delta + \frac{\delta_1}{1-\alpha}$$

O conjunto $\{x: \|x - x^*\| \leqslant \dfrac{\delta_1}{1-\alpha}\}$

é muitas vezes chamado "bola de exatidão limitante". O teorema acima diz-nos que, se em cada passo da iteração, um erro de arredondamento, não excedendo a $\delta_1 > 0$, é cometido, então a bola de exatidão limitante possui um raio $\dfrac{\delta_1}{1-\alpha}$.

No estudo do erro em processos iterativos, o conceito de estabilidade prática pode ser mais proveitoso que o de estabilidade sobre perturbações. Para equações diferenças, uma solução é considerada estável se ela entra e permanece num conjunto suficientemente pequeno. Para efeitos de arredondamento de erro este não é o caso. Entretanto, se todas as soluções estão e permanecem próximas à um ponto de equilíbrio, o método é julgado satisfatório.

Seja x^* um ponto de equilíbrio de (1.1) e $\hat{x}^k$ uma solução de (5.1). Sejam: Q um conjunto compacto contendo x^*, Q_o um subconjunto de Q e para $\delta > 0$ dado, $P = \{E: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|E\hat{x}^k\| \leq \delta\}$. Se, para cada E em P e para cada $\hat{x}^o$ em Q_o, $G\hat{x}^o$ está em Q ($G\hat{x}^o$ inicia e permanece em Q), então x^* é dito *praticamente estável*. Isto é, as soluções que iniciam em Q_o permanecem em Q.

Os resultados a seguir podem ser vistos, por exemplo, em Hurt [12].

Teorema

Seja A em $\mathbb{R}^n$, possivelmente ilimitado. Sejam $V(x)$ e $W(x)$ funções de valores reais definidas e contínuas em A, tais que, para todo x de A:

(a) $V(x) \geq 0$

(b) $\dot{V}(x) = V(Gx) - V(x) \leq W(x) \leq a$ para alguma constante a.

Sejam

$S = \{x: W(x) \geq 0,\ x \text{ em } \bar{A}\}$

$b = \sup \{ V(x): x \text{ em } S\}$

$T = \{x: V(x) \leq b+a,\ x \text{ em } \bar{A}\}$

Então, toda solução x^k de (1.1) que está em A e entra em T quando $k = k_1$, permanece em T para todo $k \geq k_1$

Corolário 1

Se $\delta = \text{Sup}\ \{- W(x): x \text{ em } A-T\} > 0$, então cada solução x^k de

(1.1) que está em A, entra em T num número finito de passos.

Corolário 2

Se A é da forma: $A = A(\eta) = \{x: V(x) < \eta\}$, e se forem satisfeitas as condições do teorema e corolário 1, então todas as soluções que iniciam em A, permanecem em A e entram em T num número finito de passos.

Aplicação no Método de Newton-Raphson

O Método de Newton-Raphson visto na seção 3.2 com erro é dado por:

$$z^{k+1} = z^k - \left[G'(z^k)\right]^{-1} G(z^k) + Ez^k \quad ,$$

onde $\|Ez^k\| \leqslant \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$.

Um valor para ε pode ser obtido assumindo que z^k é conhecido e estudando os passos de computação, com minúcia , para estimar o erro em z^{k+1}. O termo Ez^k inclui os efeitos de erro nas funções $G(z)$, $[G'(z)]^{-1}$ e qualquer outros erros que podem ser encontrados. Muitas vezes não é difícil encontrar uma estimativa para ε; o problema é determinar o efeito "líquido" do termo Ez^k no conjunto limite de uma solução z^k.

Com as mesmas considerações em $G(z)$ e as mesmas expansões usadas no capítulo 3, a equação diferença dada acima fica:

$$e^{k+1} = M_1(e^k) \left[M_2(e^k)e^k - G^o(e^k)\right] + E_1(e^k).$$

Tomamos $V(e) = \|e\|$. Então:

$$\dot{V}(e) \leqslant - (1-k(\eta)\|e\|) \|e\| + \varepsilon = W(e) \leqslant \varepsilon \ .$$

O conjunto S é dado por:

$$S = \{e: W(e) \geq 0\} = \{e: \|e\| \leq b\}$$

onde

$$b = b(\eta) = \frac{1-\sqrt{1-4k(\eta)\varepsilon}}{2k(\eta)} = \varepsilon + 2k(\eta)\varepsilon^2 + \ldots ,$$

desde que $4k(\eta)\varepsilon < 1$. Se $4k(\varepsilon) \geq 1$, então $w(e) \geq 0$ e as iteradas não podem convergir. O conjunto T é dado por:

$$T = \{e: V(e) \leq b + \varepsilon\} = \{e: \|e\| \leq b + \varepsilon\}$$

Notamos que para η suficientemente pequeno

$$W(e) \leq -(b-k(\eta)(b+\varepsilon)^2) = -\delta$$

Do corolário 2, se $\delta > 0$, temos que todas as soluções que iniciam em $A(\eta_o)$, permanecem em $A(\eta_o)$, entram em T num número finito de iterações e permanecem em T. Aqui, η_o foi tomado tal que

$$k(\eta_o)\eta_o \leq 1, \ 4k(\eta_o)\varepsilon < 1 \quad \text{e}$$

$$b(\eta_o) - k(\eta_o)(b(\eta_o) + \varepsilon)^2 > 0$$

Se η_1 é a menor solução positiva de $\eta_1 k(\eta_1) = 1$, então tomando $\eta_o < \eta_1$ serão satisfeitas

$$k(\eta_o)\eta_o < 1 \quad \text{e} \quad b(\eta_o) - k(\eta_o)(b(\eta_o) + \varepsilon)^2 > 0 \ .$$

A condição $4k(\eta_o)\varepsilon < 1$ passa a ser uma condição de *exatidão* na computação.

Deste modo, um efeito do arredondamento do erro é reduzir a região de convergência. E outro, é que o erro de cada z^k não pode, geralmente, ser reduzido muito inferior a

$$b + \varepsilon = 2\varepsilon + 2k(\eta)\varepsilon^2 + \ldots$$

o valor $b + \varepsilon$ é chamado *exatidão definitiva* obtida com o arredondamento do erro. Observamos que para ε pequeno, a exatidão definitiva é aproximadamente 2ε ou, aproximadamente duas vezes o arredondamento do erro cometido em cada passo.

Se a exatidão definitiva for grande, então o método é julgado "fraco", visto que o efeito de um pequeno arredondamento do erro é um grande erro na solução computada. Se a exatidão definitiva for pequena, o método é julgado "satisfatório", pois um pequeno arredondamento produz um pequeno efeito na solução computada. Neste sentido, o método de Newton-Raphson é julgado satisfatório.

Aplicação ao Caso Linear

Consideremos a equação diferença

$x^{x+1} = Bx^k + d \ , \quad k = 0, 1, \ldots ,$

B uma matriz quadrada de ordem n e d em $\mathbb{R}^n$.

Conforme vimos anteriormente, as iteradas x^k serão convergentes se $\rho(B) < 1$.

Suponhamos $\rho(B) < 1$ e tomemos $\|B\| \doteq \lambda < 1$. Sejam x^* um ponto de equilíbrio da equação dada e $x^k = x^* + e^k$. Então, e^k satisfaz a equação

$e^{k+1} = Be^k + Ee^k \ , \quad k = 0, 1, \ldots$

onde Ee^k representa o arredondamento do erro cometido no passo k.

Assumamos que existem constantes positivas η e ε tais que $\|Be^k\| \leq \varepsilon$, para todo k e todo e, $\|e\| < \eta$.

Consideremos a função de Lyapunov $V(e) = \|e\|$. Então ,

$$\dot{V}(e) \leqslant -1(1-\lambda)\,\|e\| + \varepsilon = W(e) \leqslant \varepsilon \quad .$$

Portanto, o conjunto S é dado por:

$$S = \{e: W(e) \geqslant 0\} = \{e: \|e\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\lambda}\}$$

e $b = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. T é dado por:

$$T = \{e: V(e) \leqslant b+\varepsilon\} = \{e: \|e\| \leqslant \frac{(2-\lambda)}{1-\lambda}\,\varepsilon\}$$

Se $\eta > \frac{(2-\lambda)}{1-\lambda}\,\varepsilon$, podemos escolher

$$A = \{e: V(e) < \eta\} = \{e: \|e\| \leqslant \eta\} \quad ,$$

e o corolário 2 é válido. Deste modo, se e^1 está em A, então a solução permanecerá em A, entrará em T num número finito de iterações e permanecerá em T para todas as iterações seguintes.

Observando o conjunto T, temos que a exatidão definitiva é dada por $b + \varepsilon = \frac{2-\lambda}{1-\lambda}\,\varepsilon$. Se λ está muito próximo de 1, então a exatidão definitiva pode ser grande para ε pequeno. Por exemplo, se $\lambda = 1-\alpha$, então $b + \varepsilon = (\alpha^{-1} + 1)\varepsilon \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ e $\frac{\varepsilon}{2}$ pode ser grande. Isto indica que este método de iteração dará resultados aceitáveis somente se $\lambda = \|B\|$ for consideravelmente menor do que 1.

5.3. EQUAÇÕES DIFERENÇAS NÃO AUTÔNOMAS

Um certo número de equações diferenças ou processos iterativos usa um parâmetro variável de alguma espécie. Simples exemplos são os métodos tipo SOR ou o método de Newton-Gauss-Seidel. Equações deste tipo podem ser escritas na forma

$$(5.2) \qquad x^{k+1} = G(x^k,\ k), \quad k = 0,\ 1,\ \ldots \quad ,$$

para uma sequência de operadores G_k.

A equação (5.2) representa a forma geral de uma equação diferença de primeira ordem não-autônoma e tem sido extensivamente usada por muitos autores, como pode ser visto em Ortega [24].

Um ponto x^* é dito *ponto de equilíbrio* de (5.2) se x^* for um ponto fixo comum aos operadores G_k, isto é :

$$x^* = G(x^*, k) \quad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Assim, as definições de estabilidade e atratividade dadas no capítulo 1 para a equação (1.1) são similares para (5.2). Entretanto, existem outros tipos de estabilidade para (5.2), os quais envolvem considerações de uniformidade.

É importante explicitar para que valores iniciais de k e x se refere uma solução de (5.2). Escreveremos $x(k; p, x^p)$ para denotar uma solução de (5.2) a qual inicia no índica p com valor inicial x^p, isto é,

$$x(k+1;p,x^p) = G(x(k;p,x^p), k) \quad , \quad k = p, p+1, \ldots$$

onde $x(p;p,x^p) = x^p$.

Sejam G uma função do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e x^* um ponto de equilíbrio de (5.2). Então x^* é:

(a) *uniformemente estável* se para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cada $p \geqslant 0$, $\|x^p - x^*\| < \delta(\varepsilon)$ implica

$$\|x(k;p,x^p) - x^*\| \leqslant \varepsilon \quad , \quad k = p+1, \ldots .$$

(b) *uniformemente atrativo* se para cada $\varepsilon > 0$, existe um $n = n(\varepsilon)$ tal que para cada $p \geqslant 0$ e algum $\delta > 0$, $\|x^p - x^*\| < \delta$ implica

$$\|x(k+p;p,x^p) - x^*\| \leqslant \varepsilon, \qquad k = n, n+1, \ldots$$

(c) *uniformemente assintoticamente estável* se é uniformemente estável e uniformemente atrativo.

Para ilustrar esta definição, consideremos o seguinte exemplo em $\mathbb{R}^1$.

$$(5.3.1) \qquad x^{k+1} = \left(\frac{k+1}{2}\right)(x^k)^2$$

A solução iniciando em $k=0$ é

$$x^k = \frac{k}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right)^2\left(\frac{k-2}{2}\right)^4 \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}(x^o)^{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Para $|x^o|$ suficientemente pequeno, $x^k \to 0$ quando $k \to \infty$. Logo, a origem é atrativa para (5.3.1). Mas não é uniformemente atrativa, pois dado um $\delta > 0$, podemos tomar p tal que $(p+1)\delta^2 \geqslant 2$, de modo que para algum $|x^p| = \delta$, temos $|x^{p+1}| \geqslant 1$ e então $|x^{k+p}| \to \infty$ quando $k \to \infty$.

A importância de uniformidade atrativa com respeito a processos iterativos é que o valor de um resultado de convergência local não reside em garantir a convergência se x^o está suficientemente próximo de x^*, mas sim, assegurar a convergência para cada x^k próximo de x^*.

A teoria de Lyapunov anterior estende-se de uma forma quase natural para equações não autônomas, onde uma função de Lyapunov dependerá de x e k. Extensões desta teoria envolvendo estabilidade e estabilidade uniforme, foram estudados por Driver [6] , Hahn [9] e Halanay [11] .

Consideremos a equação (5.2) e a função de valores reais V definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^n$. Definimos

$$\dot{V}(x,k) = V(G(x,k),\ k+1) - V(x,k).$$

Seja A um conjunto qualquer do $\mathbb{R}^n$. V é dita uma função de Lyapunov de (5.2) em A se:

(a) V é contínua

(b) V é limitada inferiormente

(c) existe uma função real contínua W definida em $\mathbb{R}^n$ tal que

$\dot{V}(x,k) \leqslant - W(x)$, para todo x em A, para todo $k \geqslant k_o$.

Seja $\bar{A}$ o fecho de A contendo o ∞ se A é ilimitado. Definimos o conjunto

$E = \{x: W(x) = 0,\ x \text{ em } \bar{A}\}$

Uma solução de (5.2) será representada por $\phi(k)$.

Teorema

Se existe uma função de Lyapunov para (5.2) em A e se $\phi(k)$ é uma solução de (5.2) que permanece em A para todo $k \geqslant k_o$, então:

$\phi(k) \to E^* = E \cup \{\infty\}$ quando $k \to \infty$

Observemos que:

(a) Se $\phi(k)$ é limitada e $V(x,k) = V(x)$, então existe algum c tal que $\phi(k) \to E \cap V^{-1}(c)$ onde

$V^{-1}(c) = \{x: V(x) = c,\ x \text{ em } \bar{A}\}$

(b) Se $A = \mathbb{R}^n$ e W(x) é definida positiva, então $E = \{0\}$ e todas as soluções convergem para a origem quando $k \to \infty$.

Muitas vezes, o conjunto A pode ser construído de tal forma que todas as soluções que iniciam num conjunto A_1 contido em A, permaneçam em A. Tais casos são cobertos pelo seguinte:

Corolário

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções de valores reais contínuas. Seja $V(k,x)$ tal que

$$u(x) \leqslant V(x,k) \leqslant v(x) \ , \text{ para todo } \ k \geqslant k_o .$$

Para algum η definimos os conjuntos:

$$A(\eta) = \{x: u(x) < \eta\}$$

$$A_1(\eta) = \{x: v(x) < \eta\}$$

Se V é uma função de Lyapunov para (5.2) em $A(\eta)$, então : todas as soluções que iniciam em $A_1(\eta)$, permanecem em $A(\eta)$ e convergem para E quando $k \to \infty$.

Estes dois resultados, teorema e corolário, dão condições suficientes para $\Omega\ (\phi(k))$ esteja contido em E. Existe uma arte para encontrar V, W, v, u, isto é, funções que forneçam o maior $A(\eta)$, o maior $A_1(\eta)$ e o menor E. Um número maior de informações com respeito ao comportamento das soluções pode ser obtido considerando diversas funções de Lyapunov diferentes e combinando os resultados.

Os resultados aqui enunciados, e outros, podem ser encontrados, por exemplo, em Hurt [12], La Salle [18] e Ortega [23]. Ressaltamos que os mesmos implicam na teoria desenvolvida anteriormente.

Exemplos

1. Consideremos a equação

$$x^{k+1} = B(x^k,k)x^k, \qquad k = 0,1, \ldots \tag{5.3.2}$$

onde $B(x^k,k)$ é uma matriz de ordem nxn.

Para alguma norma $\|x\|$, definimos a norma da matriz $B(x,k)$ por:

$$\|B(x,k)\| = \min\{b: \|B(x,k)y\| \leqslant b\,\|y\| \;, \quad y \neq 0\}$$

Assim

$$\|B(x,k)\| \leqslant \|B(x,k)\|\;\|x\|.$$

Seja $V(x,k) = \|x\|$. Então

$$\dot{V}(x,k) = \|B(x,k)x\| - \|x\| \leqslant (\|B(x,k)\| - 1)\;\|x\| \;.$$

Temos $u(x) = v(x) = V(x,k) = \|x\|$. Então

$$A(\eta) = A_1(\eta) = \{x: \|x\| < \eta\}$$

Para todo x em $A(\eta)$ e para todo $k \geqslant k_o$, seja $\|B(x,k)\| \leqslant a(x)$, onde $W(x) = +\,(1-ax)\|x\|$. Então, temos $\dot{V}(x,k) \leqslant -W(x)$, e V é uma função de Lÿapunov para (5.3.2) em $A(\eta)$.

Se $a(x) < 1$ para todo x em $A(\eta)$, então $W(x) \leqslant 0$, o conjunto E é a origem e possivelmente, na fronteira de $A(\eta)$. Como $V(x^k,k)$ é não crescente em função de k e $\partial A(\eta)$ é uma superfície de nível de $V(x,k)$, as soluções não podem se aproximar de $\partial A(\eta)$. Então, todas as soluções que iniciam em $A(\eta)$, permanecem em $A(\eta)$ e convergem para a origem quando $k \to \infty$. O conjunto $A(\eta)$ é o domínio de atração de (5.3.2).

Variar a escolha da norma, resulta em variar $a(x)$ e o domínio de atração.

2. Consideremos a equação diferença em $\mathbb{R}^2$

$$(5.3.3)\qquad \begin{aligned} x^{k+1} &= y^k \\ y^{k+1} &= a^2x^k + p(k)y^k \end{aligned}$$

onde $0 < a < 1$ e $0 < \delta \leqslant p(k) < 1 - a^2$.

Se $p(k) = p$, uma constante, as condições de estabilidade são satisfeitas e todas as soluções aproximam-se da origem quando $k \to \infty$.

Investiguemos a função

$$V((x,y),k) = V(x,y) = a^2x^2+y^2.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= a^2+(a^2x+p(k)y)^2-a^2x^2+y^2 \\
&= a^2y^2+a^4x^2+2a^2xp(k)y+(p(k))^2y^2-a^2x^2-y^2 \\
&- a^2x^2p(k)+a^2x^2p(k)+a^2y^2p(k)-a^2y^2p(k)-y^2p(k)+y^2p(k) \\
&= -a^2p(k)(x-y)^2+a^2(p(k)-(1-a^2)x^2) \\
&\quad +(p(k)+1)(p(k)-(1-a^2)y^2 \leqslant -a^2p(k)(x-y)^2 \\
&\leqslant -a^2\delta(x-y)^2 = -w(x,y) \leqslant 0 .\end{aligned}$$

Pelo corolário, todas as soluções são limitadas e $x^k-y^k \to 0$ quando $k \to \infty$. (A origem é estável pelo Método direto de Lyapunov).

Agora, se tomarmos $\delta < p(k) < 1-a^2-\varepsilon$, para algum $\varepsilon>0$, obtemos

$$\dot{V}(x,y) \leqslant -a^2\delta(x,y)^2-a^2\varepsilon x^2-(1+\delta)\varepsilon y^2 = -W_1(x,y) \leqslant 0 \qquad \text{e}$$

$W_1(x,y) = 0$ se e somente se $x=y=0$. Neste caso, todas as soluções tendem para a origem quando $k \to \infty$. (A origem é assintoticamente estável pelo Método Direto de Lyapunov).

5.4. MODELOS DE ECOSSISTEMAS

A fim de descrever da melhor forma possível, condições para que um modelo de ecossistemas permaneça estável sob efeitos de mudanças estruturais nas interações entre os componentes, Siljak [29] introduziu o conceito novo de "estabilidade conectiva e exponencial".

Consideremos um sistema dinâmico com tempo discreto descrito pela equação diferença de primeira ordem não autônoma

(5.3) $\quad x^{t+1} = G(x^t, t) \ , \quad t = 0, 1, \ldots$

para uma sequência de operadores G_t.

Assumimos que $G(o,t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e que $x^* = 0$ é o único ponto de equilíbrio de (5.3).

As características de estabilidade desejadas para ecossistemas representados por (5.3) são dados pela seguinte definição:

O equilíbrio $x^* = 0$ de (5.3) é *conectivamente* e *exponencialmente estável* se existem números $M \geq 1$ e $m > 0$ (os quais independem das condições iniciais (x^o, t_o) tais que:

$$\|x(x^o, t_o; t)\| \leq M \|x^o\| \ \exp[-m(t-t_o)] \ ,$$

para todo $t \geq 0$, para todo (x^o, t_o) em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

Esta definição expressa a necessidade de que o ecossistema representado por (5.3) seja invulnerável para perturbações estruturais e de uma certa condição de estabilidade para que após cada perturbação, as soluções voltem para a origem mais forte que uma exponencial.

Quando um modelo de ecossistemas não linear representado por (5.3) possui mais do que um ponto de equilíbrio, ele não é globalmente estável. É o caso do clássico modelo Lotka-Volterra. Se a estabilidade de um equilíbrio não trivial é estabelecida por linearização, então é de interesse encontrar uma extensão da região de estabilidade contendo tal ponto de equilibrio.

Seja $S = \{x \text{ em } \mathbb{R}^n\colon |x_i| < \mu_i,\ \mu_i > 0,\ i=1, \ldots, n\}$.

Considerando a função de Lyapunov V, de valores reais positivos e definida em $\mathbb{R}^n$, dada por

$$V(x) = \max_i \{d_i^{-1} |x_i|\} \quad ,$$

$d_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, Siljak mostrou que uma *região de estabilidade* do ponto de equilíbrio $x^* = 0$ de (5.3) é dada por

$$T = \{x\colon V(x) < V_o,\ x \text{ em } \mathbb{R}^n\}$$

onde $v_o = \min_i \{d_i^{-1}\mu_i\}$.

Também, se a origem é conectivamente e exponencialmente estável, V(x) é uma função decrescente para x em T e para todo t. Como ∂T é uma superfície de nível de V(x), as soluções que estão em T, permanecem em T e convergem exponencialmente para a origem quando $t \to \infty$. O conjunto T é também uma *região de estabilidade exponencial* para o equilíbrio $x^* = 0$ de (5.3). Como a função V(x) possui a mesma forma geométrica que a região S, S = T. Considerando que T é invariante sobre perturbações estruturais , Siljak concluiu que T é também uma *região de estabilidade conectiva*.

Modelo Lotka-Volterra

Consideremos uma versão discreta do modelo Lotka-Volterra para interações de n populações

$$(5.4) \qquad y_i^{t+1} = y_i^t \left[1 + c_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j\right], \quad i = 1, \ldots, n.$$

onde y_i^t é a i-ésima espécie no tempo t, c_i, b_{ij}, i, j = 1, ... n são números dados, e todos b_{ii} são negativos.

Seja $y^* \neq 0$ um ponto de equilíbrio tal que $y_i^* > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Siljak mostrou que há estabilidade conectiva e exponencial em toda região

$$T = S = \{x \text{ em } \mathbb{R}^n \colon |x_i| < y_i^* - \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Este resultado pode ser interpretado de diversas maneiras. Ele inclui extensões ou adições de espécies e pode-se concluir que a estabilidade é invariante para interações variáveis tais como saturação na capacidade de ataque dos predadores, e, que (5.4) é "robusto" com respeito a não linearidades nas interações entre espécies na comunidade.

BIBLIOGRAFIA

[1] K.J. Arrow, H.D. Block, L. Hurwicz, On the stability of Competitive Equilibrium.II, Econometrica, 27(1959) , pp. 82-109

[2] W.J. Baumol, Economic Dynamics, Macmillan Publishing Co., New York, 1970

[3] N. Bhatia and G. Gzego, Stability theory of Dynamical Systems, Springer-Verlang, New York, 1970

[4] A.C. Chiang, Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill, New York, 1974

[5] C. Coffman, Asymptotic Behavior of solutions of Ordinary Difference Equations, Trans. Amer. Math. Soc., 110 (1964), pp. 22-51

[6] R. Driver, Note on a Paper of Holanay on Stability for finite Difference Equations, Arch. Rational Mech. Anal., 18(1965), pp. 241-243

[7] O. Faddeev and V. Faddeeva, Computational Methods of Linear Álgebra, vol. I, W.H. Freeman, San Francisco , (1963)

[8] S.I. Grossman and J.E. Turner, Mathematics for the Biological Sciences, Macmillan Publishing Co., New York (1974)

[9] W. Hahn, Uber die Anwendung des Methode von Lyapunov auf Differenzengleichen, Math. Annalen., 136(1958), pp. 141 243

[10] ______ , Stability of Motion, Springer-Verlang, New York, (1966)

[11] A. Halanay, Quelques Questions de la Théorie de la Stabilité pour les Systèmes aux Differences finis, Arch. Rational Mech. Anal., 12(1963), pp. 150-154

[12] J. Hurt, Some Stability Theoremas for Ordinary Difference Equations, _SIAM J. Numer. Anal._, 4 (1967), pp. 582-596

[13] R. Kalman and J. Bertram, Control Systems Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov, Trans. ASME _Ser. D.J. Basic Engrg._, 82 (1960) pp. 394-400

[14] M. C. Kemp and Y. Kimura, _Introduction to Mathematical Economics_, Springer-Werlang, New York, 1978

[15] K. Lancaster, _Economia Matemâtica_, Bosch, Barcelona, 1968

[16] J.P. La Salle and S. Lefsthetz, _Stability by Liapunov's Direct Method with Applications_, Academic Press, New York, 1961

[17] ____________, Stability Theory for Ordinary Differential Equations, _J. Diff. Eqs._, 4 (1968), pp. 57-65

[18] ____________, The Stability of Dynamical Systems, _Society for Industrial and Applied Mathematics_, Philadelphia, 1976

[19] L. Maslouskaja, Stability of Difference Equations, _Differential Equations_, 2 (1966), pp. 608-611

[20] P. Mendelson, On Unstable Attractors, _Bol. Sci. Mat. Mexicane_, 5 (1960), pp. 270-276

[21] R. Oldenburg, Infinite powers of Matrices and Characteristics Roots, _Duke Math. J._, 1940, pp. 357-361

[22] J. Ortega, _Numerical Analysis: A Second Course_, Academic Press, New York, 1972

[23] ________, Stability of Difference Equations and Convergence of Iterative Processes, _SIAM J. Numer. Anal._, 10(1973), pp. 268-283

[24] J. Ortega and W. Rheinboldt, _Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables_, Academic Press, New York, 1972

[25] J. Ortega and W. Rockoff, Nonlinear Difference Equations and Gauss-Sidel Type Iterative Methods, _SIAM J. Numer. Anal._, 3(1966), pp. 497-513

[26] R. O'Shea, The Extension of Zubov's Method to Sampled-data Control System Described by Nonlinear Autonomous Difference Equations, IEEE Trans. Automatic Control , 9(1964), pp. 62-69

[27] A. Ostrowski, Les Points d'Attraction et de Répulsion pour l'Iteration dans l'espace â n Dimensions, C.R. Acad. Sci. Paris, 244(1957), pp. 288-289

[28] O. Perron, Uber Stabilitat und Asymptotisches Verhalten der Losugen eines Systems Endlicher Differenzenglei-chungen, J. Reine Angew. Math., 161(1929), pp. 41-64

[29] D.D. Siljak, Structure And Stability of Model Ecosystems, Theorical Systems Ecology, Chapter 7, Academic Press , New York, 1979

[30] __________ , Connective Stability of Complex Ecosystem , Nature, 249(1974) p. 280

[31] __________ , When is a complex Ecosystem stable?, Math. Biosc., 25(1975), pp. 25-50

[32] __________ , R. Smith, Sufficient Condition for Stability of a Solution of Difference Equations, Duke Math. J. , 33(1966), pp. 725-734

[33] P. Stein, Some General Theorems on Iterants, J. Res. Nat. Bur. Standards, 48(1952), pp. 82-83

[34] M. Urabe, Convergence of Numerical Iteration in Solution of Equations, J. Sc. Hiroshima Univ. Ser. A-1 Math. , 19(1956), pp. 479-489